Infinity
Publishing House

ថ្នាក់ទី១១

ស្វ៊ីតចំនួនពិត

☞ មេរៀន៖

☞ ឧទាហរណ៍ និងលំហាត់ប្រតិបត្តិ ✍

☞ លំហាត់ មានដំណោះស្រាយ ✍

ចេញផ្សាយលើកទី២

រៀបរៀងដោយ៖ ហ៊ីង ខុន្ធី

២០២១

អារម្ភកថា

ជាធម្មតាអ្នកសិក្សាភាគច្រើនតែងតែចាត់ទុកមុខវិជ្ជា **គណិតវិទ្យា** ថាជាមុខវិជ្ជាដែលមានភាពស្មុគស្មាញខ្លាំង និងពិបាកក្នុងការរៀន។ បើតាមពិតទៅមុខវិជ្ជានេះមិនពិបាករៀនដូចអ្វីដែលអ្នកគិតទេ មុខវិជ្ជានេះគឺទាមទាឱ្យយើងគិតនិងវិភាគដើម្បីយល់ពីហេតុផល និងតម្រូវការនូវឯកសារជាច្រើនដើម្បីជាជំនួយផងដែរ ។ ហេតុនេះហើយទើបបណ្តាប្រទេសជឿនលឿន គេឱ្យតម្លៃណាស់ទៅលើឯកសារឬសៀវភៅដើម្បីជាជំនួយ ដល់អ្នកសិក្សារៀនសូត្រ ។ ដោយឡែកដោយសារតែខ្ញុំមើលឃើញថានៅប្រទេសយើងពុំទាន់មានសៀវភៅគណិតវិទ្យាច្រើនដែលសរសេរដោយប្រើកម្មវិធី LateX ដូចនៅតាមបណ្តាប្រទេសជឿនលឿន។ហេតុនេះហើយទើបធ្វើឲ្យកូនសៀវភៅមួយក្បាលនេះលេចជារូបរាងឡើង។

សៀវភៅ **ស្វ៊ីតចំនួនពិត** នេះគឺត្រូវបាន រៀបចំដោយធ្វើការពន្យល់បកស្រាយទៅលើខ្លឹមសារមេរៀនដែលទាក់ទងនឹងស្វ៊ីតចំនួនពិត។ ក្នុងនោះផងដែរខ្ញុំបាទជាអ្នករៀបរៀងក៏បានបញ្ចូលនូវឧទាហរណ៍ ព្រមទាំងលំហាត់ប្រតិបត្តិដើម្បីឱ្យមិត្តអ្នកអានយល់កាន់តែច្បាស់ពីអត្ថន័យនៃមេរៀន។ ផ្នែកទី២នៃសៀវភៅគឺត្រូវបានដាក់បញ្ចូលនូវលំហាត់ និងដំណោះស្រាយនៃលំហាត់ទាំងនោះដើម្បីឱ្យមិត្តអ្នកអានកាន់តែស្និទ្ធស្នាលជាមួយនឹងសៀវភៅនេះ។

ក្នុងនាមជាអ្នករៀបរៀង និង និពន្ធខ្ញុំបាទនឹងរងចាំនូវការរិះគន់ដើម្បីកែលម្អជានិច្ច។ ខ្ញុំជឿជាក់ថាសៀវភៅនេះនៅតែមានកំហុសកើតមានឡើង ហេតុនេះហើយខ្ញុំសូមអភ័យទោសទុកជាមុនរាល់កំហុសទាំងអស់ដែលកើតមានឡើង។ ប្រសិនបើមិត្តអ្នកអាន រកឃើញនូវកំហុសក្នុងសៀវភៅនេះ សូមទំនាក់ទំនងមកកាន់ខ្ញុំបាទ

តាមរយៈ Facebook Account: Hing Vothy

Facebook Page : រៀនគ្មានដែនកំណត់ ឬ Infinity Publishing House

Email: Hingvuthy300@gmail.com

Phone: 016 434 006

ភ្នំពេញ , ថ្ងៃទី ១៥ ខែមករា ឆ្នាំ២០២០

ហ៊ីង វុទ្ធី

សំណូមពររបស់អ្នករៀបរៀងទៅកាន់មជ្ឈដ្ឋានអ្នកសិក្សា

ការស្រាវជ្រាវបន្ថែមពិតជាមានសារៈសំខាន់ណាស់សម្រាប់អភិវឌ្ឍខ្លួនក្នុងផ្នែកណាៗទាំងអស់ ។ ហេតុនេះហើយខ្ញុំបាទសូមលើកទឹកចិត្តដល់ប្អូនសិស្សានុ សិស្ស និស្សិត និងលោកគ្រូអ្នកគ្រូទាំងអស់ប្រឹងស្រាវជ្រាវបន្ថែម ព្រមទាំងបង្កើតឯកសារល្អៗសម្រាប់ប្រទេសជាតិយើង ។ មនុស្សខុសពីសត្វត្រង់ថាមនុស្សអាចនឹងមិនស្លាប់ ។ ក្នុងន័យនេះ ខ្ញុំបាទចង់មានន័យថាពេលដែលយើងប្រឹងស្រាវជ្រាវឯកសារ ហើយចងក្រងទុក ។

នោះក្មេងជំនាន់ក្រោយនឹងដើរដល់ចំណុចដែលយើងបានបញ្ចប់បានលឿន ហើយពួកគេអាចស្រាវជ្រាវទៅមុខទៀតបានឆ្ងាយ ។ សំណៅឯកសារដែលពួកគេបានបន្សល់ទុកទៀតសោតនឹងបន្តជះឥទ្ធិពលបែបនេះជាបន្តបន្ទាប់រហូតទៅដល់ចំណុចអភិវឌ្ឍយ៉ាងអស្ចារ្យមួយ ។

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ

១. លោកគ្រូ ម៉ម ម៉ារ៉េត
២. លោកគ្រូ ហ៊ីង វុទ្ធី
៣. លោកគ្រូ ស្រស់ ប៊ុនលីន
៤. លោកគ្រូ នួន លាង
៥. លោក អូន ណែត
៦. លោក ហ៊ុន ប៊ុនផែន
៧. លោក ខឹម ជ្រី
៨. លោក ថុល សីហា

រៀបរៀងដោយ

លោកគ្រូ **ហ៊ីង វុទ្ធី**

វាយអត្ថបទដោយ

លោកគ្រូ **ហ៊ីង វុទ្ធី**

ហាមថតចំលង

មាតិកា

១

ផ្នែក

ស្វ៊ីតចំនួនពិត

១.១ សញ្ញាណនៃស្វ៊ីត

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=2x+1$ បើយកតម្លៃ $x=1,2,3,4,\cdots$

នោះគេបាន ចំពោះ $x=1$ នោះ $f(1)=2(1)+1=3$

ចំពោះ $x=2$ នោះ $f(2)=2(2)+1=5$

ចំពោះ $x=3$ នោះ $f(3)=2(3)+1=7$

ចំពោះ $x=4$ នោះ $f(4)=2(4)+1=9$

បើគេតម្រៀបចំនួនខាងលើតាមលំដាប់

គេបាន $f(1),f(2),f(3),f(4),\cdots$ ឬ $3,5,7,9,\cdots$ ការតម្រៀបបែបនេះហៅថា **ស្វ៊ីតចំនួនពិត**

$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,\cdots\}$ ហៅថាសំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ

$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ ហៅថាសំណុំចំនួនពិត

១.២ និយមន័យ

និយមន័យ ១.២.១ ស្វ៊ីតចំនួនពិត គឺជាអនុគមន៍លេខដែលកំណត់ពីសំណុំ $\mathbb{N}$ ទៅសំណុំ $\mathbb{R}$

$$f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$n\longmapsto f(n)=u_n$$

ឧទាហរណ៍ ១

គេមានអនុគមន៍ $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$n \longmapsto f(n) = 3n - 1$$

គេសង្កេតឃើញថា

បើ $n = 1$ នោះ $f(1) = 3 \times 1 - 1 = 2$

បើ $n = 2$ នោះ $f(2) = 3 \times 2 - 1 = 5$

បើ $n = 3$ នោះ $f(3) = 3 \times 3 - 1 = 8$

បើ $n = 4$ នោះ $f(4) = 3 \times 4 - 1 = 11$

....

គេបានចំនួនរៀបតាមលំដាប់ $2, 5, 8, 11, \cdots$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតចំនួនពិត។

ជាទូទៅ ១.២.២ គេតាងស្វ៊ីតដោយ $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} : u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$

ឬ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$

ដែល u_1 ជាតួទី 1 u_2 ជាតួទី 2 u_3 ជាតួទី 3 u_n ជាតួទី n ។

បើ $(u_n)_{n=0,1,2,\cdots} : u_0, u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ ឬ $\{u_n\}_{n=0,1,2,\cdots} : u_0, u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$

ដែល u_0 ជាតួទី 1 u_1 ជាតួទី 2 u_2 ជាតួទី 3 u_n ជាតួទី $n+1$

សម្គាល់

ស្វ៊ីតដែលមានចំនួនតួរាប់អស់ហៅថា **ស្វ៊ីតរាប់អស់** ឬ **ស្វ៊ីតកំណត់** ។

ស្វ៊ីតដែលមានចំនួនតួរាប់មិនអស់ហៅថា **ស្វ៊ីតអនន្តតួ** ឬ **ស្វ៊ីតមិនកំណត់** ។

ឧទាហរណ៍ ២

ស្វ៊ីតចំនួនគត់សេស $1, 3, 5, 7, \cdots$ ជាស្វ៊ីតអនន្តតួ ។

ស្វ៊ីត $1, 3, 5, 7, 9, 11$ ជាស្វ៊ីតរាប់អស់ ។

១.៣ តួទី n នៃស្វ៊ីត

គេមានស្វ៊ីត $2, 4, 6, 8, 10, \cdots$ ។

ដោយ តួទី១ គឺ $u_1 = 2 = 2 \times 1$

តួទី២ គឺ $u_2 = 4 = 2 \times 2$

តួទី៣ គឺ $u_3 = 6 = 2 \times 3$

តួទី៤ គឺ $u_4 = 8 = 2 \times 4$

តួទី៥ គឺ $u_5 = 10 = 2 \times 5$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

តួទីn គឺ $u_n = 2 \times n = 2n$

ឧទាហរណ៍ ៣

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n) : 1, 4, 9, 16, 25, \cdots$ ចំពោះ $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ ។

ចម្លើយ៖

គេបាន $u_0 = 1 = 1^2$

$u_1 = 4 = 2^2$

$u_2 = 9 = 3^2$

$u_3 = 16 = 4^2$

$u_4 = 25 = 5^2$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$u_{n-1} = n^2$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $u_{n-1} = n^2$

ប្រតិបត្តិ ១

គេឱ្យស្វ៊ីត $(u_n) : 1, 3, 5, 7, \cdots$ ចំពោះ $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ ។ កំណត់តួទីn នៃស្វ៊ីត (u_n) ។

១.៤ អថេរភាពនៃស្វ៊ីត

១.៤.១ ស្វ៊ីតកើន

គេមានស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : 1, 2, 3, 4, \cdots$ ។ គេសង្កេតឃើញថា $1 < 2 < 3 < 4 < \cdots$
ឬ $u_1 < u_2 < u_3 < u_4 < \cdots < u_n < u_{n+1} < \cdots$ គេថា (u_n) ជា **ស្វ៊ីតកើន** ។

និយមន័យ ១.៤.១ គេថាស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតកើនលើ $\mathbb{N}$ កាលណា $\forall n \in \mathbb{N}$
គេបាន $u_{n+1} > u_n$ ឬ $u_n < u_{n+1}$ ។

សម្គាល់ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតកើនកាលណា $u_{n+1} - u_n > 0$ ឬ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ ដែល $u_n > 0$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤

បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតកើនដែល $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$

ចម្លើយ៖

គេមាន $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2} \Longrightarrow u_{n+1} = \dfrac{2(n+1)+1}{(n+1)+2} = \dfrac{2n+3}{n+3}$

ផលដក
$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} \\
&= \frac{(2n+3)(n+2) - (2n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{\cancel{2n^2} + \cancel{4n} + \cancel{3n} + 6 - \cancel{2n^2} - \cancel{n} - \cancel{6n} - 3}{(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{3}{(n+2)(n+3)} > 0 \quad , \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ នោះ $n > 0$
$\Rightarrow n+2 > 0$
និង $n+3 > 0$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន

ឧទាហរណ៍ ៥

បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតកើនដែល $u_n = \dfrac{5^n}{3}$ ។

ចម្លើយ៖

គេមាន $u_n = \dfrac{5^n}{3} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{5^{n+1}}{3} = \dfrac{5^n.5}{3}$

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

គេបាន $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5^{n+1}}{3}}{\frac{5^n}{3}} = \frac{\cancel{5^n}.5}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{5^n}} = 5 > 1$

ដោយ $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ នោះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតកើន

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

ប្រតិបត្តិ ២

បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតកើន ដែល $u_n = 2^n + 3^n$ ។

១.៤.២ ស្វ៊ីតចុះ

គេមានស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : 5, 4, 3, 2, \cdots$ ។ គេសង្កេតឃើញថា $5 > 4 > 3 > 2 > \cdots$ ឬ $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \cdots > u_n > u_{n+1} > \cdots$ គេថា (u_n) ជា **ស្វ៊ីតចុះ** ។

និយមន័យ ១.៤.២ គេថាស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះលើ $\mathbb{N}$ កាលណា $\forall n \in \mathbb{N}$ គេបាន $u_{n+1} < u_n$ ឬ $u_n > u_{n+1}$ ។

សម្គាល់ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីចុះកាលណា $u_{n+1} - u_n < 0$ ឬ $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ដែល $u_n > 0$ ។

ឧទាហរណ៍ ៦

សិក្សាអថេរភាពនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ។

ចម្លើយ៖

គេមាន $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \Longrightarrow u_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

នោះផលធៀប $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^n} \cdot \frac{2}{3}}{\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^n}} = \frac{2}{3} < 1 \quad , n \in \mathbb{N}$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះ

ប្រតិបត្តិ ៣

បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតចុះដែល $u_n = \frac{1}{2^n + 3^n}$ ។

១.៤.៣ ស៊ីតម៉ូណូតូន

និយមន័យ ១.៤.៣ គេថាស៊ីត (u_n) ជាស៊ីតម៉ូណូតូន កាលណាវាជាស៊ីតកើនជានិច្ច ឬ ចុះជានិច្ច

ឧទាហរណ៍ ៧

បង្ហាញថាស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 1-\dfrac{1}{n+1}$ ជាស៊ីតម៉ូណូតូន

ចម្លើយ៖

គេមាន $u_n = 1-\dfrac{1}{n+1} \Longrightarrow u_{n+1} = 1-\dfrac{1}{n+2}$

គេបាន $u_{n+1}-u_n = \left(1-\dfrac{1}{n+2}\right)-\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0 \quad ,\forall n\in\mathbb{N}$$

$n+1>0$

$n+2>0$

$(n+1)(n+2)>0$

ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ នាំឱ្យ (u_n) ជាស៊ីតកើន នាំឱ្យស៊ីត (u_n) ជាស៊ីតម៉ូណូតូន

ដូចនេះ (u_n) ជាស៊ីតម៉ូណូតូន

ឧទាហរណ៍ ៨

សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \dfrac{1}{n^2}$

ចម្លើយ៖

គេមាន $u_n = \dfrac{1}{n^2} \Longrightarrow u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2}$

ធ្វើផលសង $u_{n+1}-u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}-\dfrac{1}{n^2}$

$$= \frac{n^2-(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{n^2}-\cancel{n^2}-2n-1}{n^2(n+1)^2}$$

$$= -\frac{2n+1}{[n(n+1)]^2} < 0 \quad ,\forall n\in\mathbb{N}$$

$\forall n\in\mathbb{N}$ នោះ $n>0$

$\Rightarrow 2n+1>0$

និង $[n(n+1)]^2>0$

$\dfrac{2n+1}{[n(n+1)]^2}>0$

ដូចនេះ (u_n) ជាស៊ីតចុះ នាំឱ្យ (u_n) ជាស៊ីតម៉ូណូតូន

ប្រតិបត្តិ ៨

សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \sqrt{n^2+3n-1}$ ។

១.៥ ស្វ៊ីតទាល់

១.៥.១ ស្វ៊ីតទាល់លើ

និយមន័យ ១.៥.១ គេថា (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើ កាលណា $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ ដែល $u_n \leq M$

ឧទាហរណ៍ ៩

គេមានស្វ៊ីត $(u_n): \ 2, 1, 0, -1, -2, \cdots$ ។

គេបាន $u_1 = 2 > u_2 = 1 > u_3 = 0 > u_4 = -1 > \cdots$ គេថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតទាល់លើ ដែលមានចំនួន 2 ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត

ឧទាហរណ៍ ១០

បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតទាល់លើ និងរកគោលលើនៃស្វ៊ីតនេះ ដែល $u_n = \dfrac{3}{5^n}$ ។

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_n = \dfrac{3}{5^{n+1}} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{3}{5^{n+2}}$

គេបាន $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{3}{5^{n+2}}}{\frac{3}{5^{n+1}}} = \dfrac{3}{5^{n+1}.5} \times \dfrac{5^{n+1}}{3} = \dfrac{1}{5} < 1$

នាំឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ នោះគេបាន (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើដែលមាន

$u_1 = \dfrac{3}{5^{1+1}} = \dfrac{3}{25}$ ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត

ដូចនេះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតទាល់លើ និងមានគោលលើស្មើ $\dfrac{3}{25}$

ប្រតិបត្តិ ៩

បង្ហាញថា $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតទាល់លើ ដែល $u_n = \dfrac{n}{(n+1)!}$ ។

១.៥.២ ស្វីតទាល់ក្រោម

និយមន័យ ១.៥.២ គេថា (u_n) ជាស្វីតទាល់ក្រោម កាលណា $\exists m \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ដែល $u_n \geq m$

ឧទាហរណ៍ ១១

គេមានស្វីត $3, 5, 7, 9, 11, \cdots$ ។

គេបាន $u_1 = 3 < u_2 = 5 < u_3 = 7 < u_4 = 9 < \cdots$ គេថាស្វីតនេះជាស្វីតទាល់ក្រោម ដែលមានចំនួន 3 ជាគោលក្រោមនៃស្វីត

ឧទាហរណ៍ ១២

បង្ហាញថាស្វីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វីតទាល់ក្រោមដែល $u_n = \frac{1}{2}n^2 + 2n - 1$ ។

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_n = \frac{1}{2}n^2 + 2n - 1 \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)^2 + 2(n+1) - 1$

គេបាន $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(n+1)^2 + 2(n+1) - 1 - \frac{1}{2}n^2 - 2n + 1$

$$= \frac{1}{2}(n^2 + 2n + 1) + 2n + 2 - \frac{1}{2}n^2 - 2n$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}n^2} + n + \frac{1}{2} + 2 - \cancel{\frac{1}{2}n^2}$$

$$= n + \frac{5}{2} > 0 \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

នាំឱ្យ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វីតកើននោះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វីតទាល់ក្រោម

ដែលមាន $u_1 = \frac{1}{2} + 2 - 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ ជាគោលក្រោមនៃស្វីត

ដូចនេះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វីតទាល់ក្រោម និងមាន $\frac{3}{2}$ ជាគោលក្រោមនៃស្វីត (u_n)

ប្រតិបត្តិ ៦

បង្ហាញថា $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វីតទាល់ក្រោម ដែល $u_n = \left(\frac{5}{3}\right)^n$ ។

១.៥.៣ ស្វ៊ីតទាល់

និយមន័យ ១.៥.៣ គេថាស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ កាលណាវាជាស្វ៊ីតទាល់លើផង និង ទាល់ក្រោមផង $\exists m, M \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ដែល $m \leq u_n \leq M$ ។

ឧទាហរណ៍ ១៣

គេមានស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \dfrac{1}{n}$ ។

គេបាន $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots$ ។ គេសង្កេតឃើញថា $u_1 = 1 > u_2 = \dfrac{1}{2} > u_3 = \dfrac{1}{3} > u_4 = \dfrac{1}{4} > \cdots$ គេបានចំនួន 1 ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត និងចំនួន 0 ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត ព្រោះ $\dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$ កាលណា $n \longrightarrow +\infty$ ។

$\dfrac{1}{n}$ ខិតជិត 0 កាលណា n កាន់តែធំ

គេបាន $0 \leq u_n \leq 1$ ។

ដូចនេះ ស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ ។

ឧទាហរណ៍ ១៤

បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ដែល $u_n = \dfrac{1}{3^n}$ ។

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_n = \dfrac{1}{3^n} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{1}{3^{n+1}} = \dfrac{1}{3^n \times 3}$

ដោយ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{\cancel{3^n} \times 3} \times \dfrac{\cancel{3^n}}{1} = \dfrac{1}{3} < 1$ នាំឱ្យ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតចុះ

នោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើ ដែល $u_1 = \dfrac{1}{3}$ ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត

ម្យ៉ាងទៀត $\dfrac{1}{3^n} \to 0$ ពេល $n \to +\infty$ នោះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម ដែល 0 ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត

ដោយ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម និងជាស្វ៊ីតទាល់លើ នោះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតទាល់

ប្រតិបត្តិ ៧

គេឱ្យ $u_n = \dfrac{n^3}{n^4 + 10000}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។ បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ ។

២

ផ្នែក

ស្វ៊ីតនព្វន្ត

យើងបានសិក្សារួចមកហើយអំពីការរកតួទីn តាមលំនាំគម្រូ នៃស្វ៊ីតចំនួនពិតគឺមានការពិបាក ។ ហេតុនេះហើយដើម្បីឱ្យការរកតួរទីn មានភាពងាយស្រួលគេក៏បានបង្កើតស្វ៊ីតនព្វន្ត និងស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។ នៅក្នុងផ្នែកនេះយើងនឹងសិក្សាអំពីស្វ៊ីតនព្វន្ត ។ មុននឹងចូលទៅដល់ការកំណត់នូវនិយមន័យសូមពិនិត្យមើលឧទាហរណ៍ខាងក្រោម៖

ឧទាហរណ៍ ១៥

សរសេរបីតួបន្ទាប់នៃស្វ៊ីត $1, 6, 11, 16, \cdots, \cdots, \cdots$

យើងសង្កេតឃើញថា៖

តួទី១ លើកលែង

តួទី២ បានមកពីតួទី១ បូកនឹង 5

តួទី៣ បានមកពីតួទី២ បូកនឹង 5

តួទី៤ បានមកពីតួទី៣ បូកនឹង 5

....

ដោយ $u_1 = 1$

$$u_2 = 6 = 1 + 5$$

$$u_3 = 11 = 6 + 5$$

$$u_4 = 16 = 11 + 5$$

$$u_5 = 16 + 5 = 21$$

$$u_6 = 21 + 5 = 26$$

ដូចនេះ គេបានបីតួបន្ទាប់នៃស្វ៊ីតគឺ $1, 6, 11, 16, 21, 26, 31$

២.១ និយមន័យនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

និយមន័យ ២.១.១ **ស្វ៊ីតនព្វន្ត** គឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលតួនីមួយៗ ក្រៅពីតួទីមួយ ស្មើតួមុនបន្ទាប់បូកនឹងចំនួនថេរ d មួយ ដែល d ហៅថា **ផលសងរួម**

តាមនិយមន័យខាងលើ

គេបាន $u_2 = u_1 + d \Rightarrow d = u_2 - u_1$

$u_3 = u_2 + d \Rightarrow d = u_3 - u_1$

$u_4 = u_3 + d \Rightarrow d = u_4 - u_3$

$u_5 = u_4 + d \Rightarrow d = u_5 - u_4$

....

$u_n = u_{n-1} + d \Rightarrow d = u_n - u_{n-1}$

នាំឱ្យ $d = u_n - u_{n-1} = \cdots = u_4 - u_3 = u_3 - u_2 = u_2 - u_1$

ជាទូទៅ ២.១.២ **ផលសងរួម** នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

$$d = u_n - u_{n-1} = \cdots = u_4 - u_3 = u_3 - u_2 = u_2 - u_1$$

ឧទាហរណ៍ ១៦

ចូរកំណត់ផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $2, -1, -4, \cdots$ ។

ចម្លើយ៖

តាង $u_1 = 2, u_2 = -1$

គេបាន $d = u_2 - u_1$

$= -1 - 2$

$= -3$

ដូចនេះ ផលសងរួមនៃស្វ៊ីតគឺ $d = -3$

ឧទាហរណ៍ ១៧

បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ដោយ $u_n=\frac{1}{2}n+1$

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_n=\frac{1}{2}n+1$

នាំឱ្យ $u_{n+1}=\frac{1}{2}(n+1)+1$

គេបាន $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}(n+1)+\cancel{1}-\frac{1}{2}n-\cancel{1}$

$=\cancel{\frac{1}{2}n}+\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{2}n}$

$=\frac{1}{2}$

បើធ្វើផលសងរវាង u_{n+1} និង u_n បានលទ្ធផលជាអនុគមន៍នៃ n នោះមានន័យថា (u_n) មិនមែនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

នាំឱ្យ $d=\frac{1}{2}$ ជាចំនួនថេរ

ដូចនេះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

ប្រតិបត្តិ ៨

១. កំណត់ផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $1,\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},\cdots$

២. បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ដែល $u_n=\frac{3}{4}n-3$

២.២ តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

បើ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី១ គឺ u_1 តួទីn គឺ u_n ហើយផលសងរួម d ។

គេបាន $u_2 = u_1 + d = u_1 + (2-1)d$

$u_3 = u_2 + d = u_1 + d + d = u_1 + 2d = u_1 + (3-1)d$

$u_4 = u_3 + d = u_1 + 2d + d = u_1 + 3d = u_1 + (4-1)d$

$u_5 = u_4 + d = u_1 + 3d + d = u_1 + 4d = u_1 + (5-1)d$

....

$u_{n-1} = u_1 + (n-2)d$

$u_n = u_1 + (n-1)d \quad , \quad (n \in \mathbb{N})$

ជាទូទៅ ២.២.១ តួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $u_n = u_1 + (n-1)d$ ឬ $u_n = u_p + (n-p)d$

ឧទាហរណ៍ ១៨

គេមានស្វ៊ីត $4, 11, 18, 25, 32, \ldots$ ។

១. កំណត់តួទីn នៃស្វ៊ីត ។

២. គណនាតួទី12 ។

៣. តើចំនួន 602 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត ?

៤. តើចំនួន 711 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត ?

ចម្លើយ៖

១. តាង $u_1 = 4, u_2 = 11, u_3 = 18$

ដោយ $d = u_2 - u_1 = u_3 - u_2$

$= 11 - 4 = 18 - 11$

$= 7$

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$= 4 + (n-1)7$

$= 4 + 7n - 7$

$= 7n - 3$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $u_n = 7n - 3$

២. គណនា $u_{12} = 7 \times 12 - 3 = 84 - 3 = 81$

ដូចនេះ តួទី12 គឺ $u_{12} = 81$

៣. តាង $u_n = 602$ គេបាន $u_n = 7n - 3$

$$602 = 7n - 3$$

$$605 = 7n$$

$$86.4 = n$$

ដោយ $n \notin \mathbb{N}$ នោះចំនួន 602 មិនមែនជាតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តទេ ។

៤. តាង $u_n = 711$ គេបាន $7n - 3 = 711$

$$7n = 714$$

$$n = 102$$

ដូចនេះ ចំនួន 711 ជាតួទី 102 នៃស្វ៊ីត

ឧទាហរណ៍ ១៩

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ដែល $u_7 = 79$ និង $u_{12} = 64$ ។

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_7 = 79, u_{12} = 64$ តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 + (n-1)d$

$$u_7 = u_1 + 6d = 79 \quad (1)$$

$$u_{12} = u_1 + 11d = 64 \quad (2)$$

យក (1)-(2): $-5d = 15 \Rightarrow d = \dfrac{15}{-5} = -3$

ជំនួសចូល (1): $u_1 + 6(-3) = 79 \Rightarrow u_1 = 97$

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$$= 97 - 3(n-1) = 97 - 3n + 3 = 100 - 3n$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $u_n = 100 - 3n$

សម្គាល់

បើ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី១គឺ u_0 និងមានផលសងរួម d នោះគេបានតួទី n គឺ

$$u_{n-1} = u_0 + (n-1)d \quad \text{នាំឱ្យតួទី} \quad n+1 \quad \text{គឺ} \quad u_n = u_0 + nd \qquad (3)$$

ឧទាហរណ៍ ២០

គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែលមាន $u_0 = 3, u_1 = 7$ និង $u_2 = 11$ ។ កំណត់តួទី7 និង u_7

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_0 = 3, u_1 = 7 \Rightarrow d = u_1 - u_0 = 7 - 3 = 4$

គេបាន $u_n = u_0 + nd = 3 + 4n$

នាំឱ្យ តួទី 7 គឺ $u_6 = 3 + 4(6) = 27$

$$u_7 = 3 + 4(7) = 31$$

ដូចនេះ តួទី7 គឺ $u_6 = 27$ និង $u_7 = 31$

ប្រតិបត្តិ ៩

គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែលមាន $u_1 = 1, u_2 = \dfrac{5}{2}$ និង $u_3 = 4$ ។ កំណត់តួទី9 និង u_{13}

២.៣ ផលបូកតួនៅស្មើចម្ងាយពីតួចុងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ ។ u_1 និង u_6 ហៅថាតួចុង ។ u_2 និង u_5 ហើយ u_3 និង u_4 ហៅថាតួនៅស្មើចម្ងាយពីតួចុង ។

តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 + (n-1)d$

គេបាន $u_1 + u_6 = u_1 + u_1 + 5d = 2u_1 + 5d$

$$u_2 + u_5 = u_1 + d + u_1 + 4d = 2u_1 + 5d$$

$$u_3 + u_4 = u_1 + 2d + u_1 + 3d = 2u_1 + 5d$$

នាំឱ្យ $u_1 + u_6 = u_2 + u_5 = u_3 + u_4$

ជាទូទៅ ២.៣.១ បើគេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $u_1, u_2, u_3, \dots, u_p, \dots, u_{n-(p-1)}, \dots, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n$ ផលបូកតួចុងស្មើ និងផលបូកតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង ។

គេបាន៖

$$u_1 + u_n = u_2 + u_{n-1} = \cdots = u_p + u_{n-(p-1)} = \cdots \qquad (4)$$

សម្គាល់ បើ a, b, c ជាបីតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត គេបាន $2b = a + c$, (b ហៅថាមធ្យមនព្វន្តនៃ a និង c)

ឧទាហរណ៍ ២១

កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $2, 2x+1, 16$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

ចម្លើយ៖

$2, 2x+1, 16$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត គេបាន $2(2x+1) = 2 + 16$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = 9$$

$$\Leftrightarrow 2x = 8$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

ដូចនេះ $x = 4$

ឧទាហរណ៍ ២២

កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យ $k, 12, k^2-6k$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

ចម្លើយ៖

$k, 12, k^2-6k$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តកាលណា $k+k^2-6k=2(12)$

$$k^2-5k-24=0$$

$$k^2+3k-8k-24=0$$

$$k(k+3)-8(k+3)=0$$

$$(k+3)(k-8)=0$$

នាំឱ្យ $k+3=0 \Rightarrow k=-3$ ឬ $k-8=0 \Rightarrow k=8$

ដូចនេះ $k=-3$, $k=8$

ប្រតិបត្តិ ១០

កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យបីចំនួន $x^2+1, \frac{3}{2}, x$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

២.៤ ផលបូកនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

បើ u_1 ជាតួទី១ និង d ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនោះគេបានស្វ៊ីតនព្វន្ត

$$(u_n): u_1, u_2 = u_1 + d, u_3 = u_1 + 2d, \dots, u_n = u_1 + (n-1)d$$

តាង $S_n = u_1 + (u_1 + d) + \dots + (u_n - d) + u_n$ (5)

ម្យ៉ាងទៀត $S_n = u_n + (u_n - d) + \dots + (u_1 + d) + u_1$ (6)

យកសមីការ (5) បូក (6)

គេបាន $2S_n = \underbrace{(u_1 + u_n) + (u_1 + u_n) + \dots + (u_1 + u_n) + (u_1 + u_n)}_{n \text{ តួ នៃ } u_1 + u_n}$

$$2S_n = n(u_1 + u_n)$$

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \quad \text{ដែល} \quad u_n = u_1 + (n-1)d$$

ជាទូទៅ ២.៤.១ ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) \text{ ឬ } S_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d] \quad , n \in \mathbb{N}$$

ឧទាហរណ៍ ២៣

គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $2, 7, 12, 17, 22, \dots$ ។ រួចគណនាផលបូក 25 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ ។

ចម្លើយ៖

គណនា S_n និង S_{25}

យើងមាន $u_1 = 2, u_2 = 7, u_3 = 12$

នាំឱ្យ $d = u_2 - u_1 = 7 - 2 = 5$

តាមទំនាក់ទំនង $u_n = u_1 + (n-1)d$

$$= 2 + (n-1)5$$

$$u_n = 5n - 3$$

គេបាន $S_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)=\frac{n}{2}(2+5n-3)=\frac{n}{2}(5n-1)$

នាំឱ្យ $S_{25}=\frac{25}{2}(5(25)-1)=\frac{25}{2}(125-1)=25\times 62=1550$

ដូចនេះ $S_n=\frac{n}{2}(5n-1)$ និង $S_{25}=1550$

ឧទាហរណ៍ ២៤

គណនាផលបូក $(-7)+(-1)+5+11+...+77$

ចម្លើយ៖

យក $u_1=-7, u_2=-1, u_3=5 \Rightarrow d=u_2-u_1=-1-(-7)=6$

គេបាន $u_n=u_1+(n-1)d$

$=-7+(n-1)6$

$=6n-13, u_n=77$

$77=6n-13$

$6n=90$

$n=15$

$\Rightarrow u_{15}=77$

គេបាន $S_{15}=\frac{15}{2}(u_1+u_{15})=\frac{15}{2}(-7+6(15)-13)$

$=525$

ដូចនេះ $(-7)+(-1)+5+11+17+...+77=525$

ប្រតិបត្តិ ១១

គឱ្យស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយ $\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4,\frac{9}{2},\cdots$ ។

១. គណនាផលសងរួមនៃស្វ៊ីត។

២. កំណត់តួទីn នៃស្វ៊ីត (u_n) ។

៣. តើចំនួន $\frac{15}{2}$ ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត (u_n) ។

៤. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (u_n) ។

៣

ផ្នែក

ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

នៅក្នុងមេរៀនទី២មិត្តអ្នកអានបានស្គាល់អំពីស្វ៊ីតចំនួនពិតរួចមកហើយគឺវាគ្រាន់តែជាផ្នែកមួយនៃស្វ៊ីតចំនួនពិតតែប៉ុណ្ណោះ។ នៅក្នុងមេរៀននេះយើងនឹងសិស្សាអំពីស្វ៊ីតធរណីមាត្រវិញម្តង។ មុននឹងឈានទៅដល់ការកំណត់នូវនិយមន័យសូមពិនិត្យមើល ឧទាហរណ៍ខាងក្រោម៖

ឧទាហរណ៍ ២៥

រកតួទី៦ និង តួទី៧ នៃស្វ៊ីត $2, 4, 8, 16, 24, \cdots$ ។

ដោយ $u_1 = 2$

$u_2 = 4 = 2 \times 2$

$u_3 = 8 = 4 \times 2$

$u_4 = 16 = 8 \times 2$

$u_5 = 32 = 16 \times 2$

$u_6 = 32 \times 2 = 64$

$u_7 = 64 \times 2 = 128$

យើងសង្កេតឃើញថា៖
តួទី១ លើកលែង
តួទី២ បានមកពីតួទី១ គុណនឹង 2
តួទី៣ បានមកពីតួទី២ គុណនឹង 2
តួទី៤ បានមកពីតួទី៣ គុណនឹង 2
....

ដូចនេះ តួទី៦ គឺ $u_6 = 64$ និង តួទី៧ គឺ $u_7 = 128$

៣.១ និយមន័យនៃស្វីតធរណីមាត្រ

និយមន័យ ៣.១.១ ស្វីតធរណីមាត្រ គឺជាស្វីតនៃចំនួនពិតដែលតួនីមួយៗ ក្រៅពីតួទីមួយ ស្មើតួមុនបន្ទាប់ គុណនឹងចំនួនថេរ q មួយ ដែល q ហៅថាផលធៀបរួម ឬរេសុង ។

តាមនិយមន័យខាងលើ គេបាន u_1

$$u_2 = u_1 q \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1}$$
$$u_3 = u_2 q \Rightarrow q = \frac{u_3}{u_2}$$
$$u_4 = u_3 q \Rightarrow q = \frac{u_4}{u_3}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_n = u_{n-1} q \Rightarrow q = \frac{u_n}{u_{n-1}}$$

នាំឱ្យ $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \cdots = \frac{u_n}{u_{n-1}}$

ជាទូទៅ ៣.១.២ ផលធៀបរួមនៃស្វីតធរណីមាត្រ $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \ldots = \frac{u_n}{u_{n-1}}$

ឧទាហរណ៍ ២៦

បង្ហាញថា $1, 3, 9, 27, \cdots$ ជាស្វីតធរណីមាត្រ

ចម្លើយ៖

តាង $u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 9, u_4 = 27$

ដោយ $\frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{1} = 3$

$\frac{u_3}{u_2} = \frac{9}{3} = 3$

$\frac{u_4}{u_3} = \frac{27}{9} = 3$

គេបាន $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = 3$ នាំឱ្យផលធៀបរួម $q = 3$

ដូចនេះ $1, 3, 9, 27, \cdots$ ជាស្វីតធរណីមាត្រ

ឧទាហរណ៍ ២៧

គេឱ្យស្ទីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_n = 7^{n+1}$ ។ បង្ហាញថា (u_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រ

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_n = 7^{n+1} \Rightarrow u_{n+1} = 7^{n+1+1} = 7^{n+1} \times 7$

គេបាន $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{7^{n+1} \times 7}{7^{n+1}} = 7 \Rightarrow q = 7$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រ

ប្រតិបត្តិ ១២

១. តើ $1, 2, 4, 8, 16, 32, \cdots$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រឬទេ ?

២. បង្ហាញថា $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រ ដែល $u_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2n}$

៣.២ តួទី n នៃស្ទីតធរណីមាត្រ

គេមាន (u_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី១ គឺ u_1 តួទីn គឺ u_n ហើយផលធៀបរួម q

គេបាន u_1

$$u_2 = u_1 q = u_1 q^{2-1}$$

$$u_3 = u_2 q = u_1 q^2 = u_1 q^{3-1}$$

$$u_4 = u_3 q = u_1 q^3 = u_1 q^{4-1}$$

$$u_5 = u_4 q = u_1 q^4 = u_1 q^{5-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_{n-1} = u_1 q^{n-2}$$

$$u_n = u_1 q^{n-1} \quad , \quad (n \in \mathbb{N})$$

ជាទូទៅ ៣.២.១ តួទី n នៃស្ទីតធរណីមាត្រ $\quad u_n = u_1 q^{n-1}$

ឧទាហរណ៍ ២៨

គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $3, 6, 12, 24, 48, \cdots$

១. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត ។

២. គណនាតួទី13 ។

៣. តើចំនួន $1,536$ ជាតួទីប៉ុន្មាន ?

ចម្លើយ៖

១. យើងមាន $u_1 = 3, u_2 = 6, u_3 = 9 \Rightarrow q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{6}{3} = 2$

គេបាន $u_n = u_1 q^{n-1} = 3(2)^{n-1}$

ដូចនេះ តួទីn នៃស្វ៊ីតគឺ $u_n = 3(2)^{n-1}$

២. គណនា $u_{13} = 3(2)^{13-1} = 3(2)^{12} = 12,288$

ដូចនេះ តួទី13 គឺ $u_{13} = 12,288$

៣. តាងចំនួន $1,536$ ជាតួទីk គេបាន $u_k = 1,536$

តែ $u_k = 3(2)^{k-1} \Leftrightarrow 3(2)^{k-1} = 1536$

$\Leftrightarrow 2^{k-1} = 512 = 2^9$

$\Leftrightarrow k - 1 = 9$

$\Rightarrow k = 10$

ដូចនេះ ចំនួន $1,536$ ជាតួទី 10 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

• ចំពោះ $a > 0, a \neq 1$
$a^x = a^y$ សមមូល $x = y$
• ចំពោះ $2^{k-1} = 2^9$
សមមូល $k - 1 = 9$

សម្គាល់

បើ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី១គឺ u_0 និងមានផលធៀបរួម q នោះគេបានតួទីn គឺ $u_{n-1} = u_0 q^{n-1}$ នាំឱ្យតួទី $n+1$ គឺ $u_n = u_0 q^n$

ឧទាហរណ៍ ២៩

គេឱ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយដែលមាន $u_0 = 1, u_1 = 5$ និង $u_2 = 25$ ។ កំណត់តួទី7 និង u_7 ។

ចម្លើយ៖

គេមាន $u_0 = 1, u_1 = 5 \Rightarrow q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{5}{1} = 5$
គេបាន $u_n = u_0 q^n = 1(5)^n = 5^n$
តួទី7 គឺ $u_6 = 5^6 = 15625$, $u_7 = 5^7 = 78125$
ដូចនេះ តួទី7 គឺ $u_6 = 15625$ និង $u_7 = 78125$

ប្រតិបត្តិ ១៣

គេមានស្ទីតធរណីមាត្រ $2, 6, 18, 54, 162, 486, \cdots$

១. គណនាផលធៀបរួមនៃស្ទីត
២. កំណត់តួទីn នៃស្ទីត
៣. គណនាតួទី9 នៃស្ទីត
៤. តើចំនួន $1,458$ ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្ទីត?

៣.៣ ផលគុណតួនៅស្មើចម្ងាយពីតួចុងនៃស្ទីតធរណីមាត្រ

គេមានស្ទីតធរណីមាត្រ $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ ។ u_1 និង u_6 ហៅថាតួចុង ។ u_2 និង u_5 ហើយ u_3 និង u_4 ហៅថាតួនៅស្មើចម្ងាយពីតួចុង ។ តាមរូបមន្ត $u_n = u_1 q^{n-1} d$

គេបាន $u_1.u_6 = u_1.u_1.q^5 = u_1^2.q^5$

$u_2.u_5 = u_1.q.u_1.q^4 = u_1^2.q^5$

$u_3.u_4 = u_1.q^2.u_1.q^3 = u_1^2.q^5$

នាំឱ្យ $u_1.u_6 = u_2.u_5 = u_3.u_4$

បើគេមានស្ទីតនព្វន្ត $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_p, \ldots, u_{n-(p+1)}, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n$

ជាទូទៅ ៣.៣.១ ផលគុណតួចុងស្មើ និងផលគុណតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង ។ គេបាន៖

$$u_1.u_n = u_2.u_{n-1} = u_3.u_{n-2} = \cdots = u_p.u_{n-(p+1)} = \cdots \quad (1)$$

សម្គាល់

បើ a, b, c ជាបីតួនៃស្ទីតធរណីមាត្រ គេបាន $b^2 = a.c$

(b ហៅថាមធ្យមធរណីមាត្រនៃ a និង c)

ឧទាហរណ៍ ៣០

កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $2, x+2, 32$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ចម្លើយ៖

$2, x+2, 32$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេបាន $(x+2)^2 = 2(32) \Leftrightarrow (x+2)^2 = 64$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2} = \sqrt{8^2}$$

$$\Leftrightarrow |x+2| = 8$$

$$\Leftrightarrow x+2 = \pm 8$$

$$\Rightarrow x = 8-2 \text{ ឬ } x = -8-2$$

$$\Rightarrow x = 6 \text{ ឬ } x = -10$$

ដូចនេះ $x = 6$ ឬ $x = -10$

ប្រតិបត្តិ ១៨

កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $1, 2x+1, 16$ ជាបីតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

៣.៤ ផលបូកនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

បើ u_1 ជាតួទី១ និង q ជាផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ នោះគេតាង

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

នាំឱ្យ $$qS_n = qu_1 + qu_2 + qu_3 + \ldots + qu_{n-2} + qu_{n-1} + qu_n$$

$$qS_n = u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_{n-1} + u_n + qu_n$$

នាំឱ្យ $$S_n - qS_n = qu_n - u_1 = q.u_1q^{n-1} - u_1 = u_1(q^n - 1)$$

សមមូល $$S_n(q-1) = u_1(q^n-1)$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{u_1(q^n-1)}{q-1} \quad , q \neq 1$$

ជាទូទៅ ៣.៤.១ ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $S_n = \dfrac{u_1(q^n-1)}{q-1}$,$q \neq 1$ និង $n \in \mathbb{N}$

ឧទាហរណ៍ ៣១

គណនាផលបូកនៃស្វ៊ីត $1, 2, 4, 8, 16, \cdots, 1024$

ចម្លើយ៖

តាង $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4 \Rightarrow q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{4}{2} = 2$

គេបាន $S_n = \dfrac{u_1(q^n-1)}{q-1}$

$= \dfrac{1(2^n-1)}{2-1} = 2^n - 1$

តាង $u_n = 1024$ ដែល $u_n = u_1 q^{n-1} = 2^{n-1}$

គេបាន $2^{n-1} = 1024 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^{10}$

$\Leftrightarrow n - 1 = 10$

$\Leftrightarrow n = 11$

$\Rightarrow S_{11} = 2^{11-1}$

$= 2^{11} - 1$

$= 2047$

ដូចនេះ $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024 = 2047$

ប្រតិបត្តិ ១៨

គេឱ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{16}{3}, \dfrac{32}{3}, \cdots$

១. គណនាផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីត

២. គណនាតួទី12 នៃស្វ៊ីត

៣. គណនាផលបូកnតួដំបូងនៃស្វ៊ីត

៤. គណនាផលបូក12តួដំបូងនៃស្វ៊ីត ។

៣.៥ ស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ

ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ $S_n = \dfrac{u_1(q^n - 1)}{q-1} = \dfrac{u_1 q^n}{q-1} - \dfrac{u_1}{q-1}$, $q \neq 0$

បើ $|q| < 1$ នោះ $q^n \longrightarrow 0$ កាលណា $n \longrightarrow +\infty$

គេបាន $S_\infty = 0 - \dfrac{u_1}{q-1} = \dfrac{u_1}{1-q}$ កាលណា $n \longrightarrow +\infty$ ។

ជាទូទៅ ៣.៥.១ ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ

$u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \ldots + u_1 q^{n-1} + \ldots$ ដែល $|q| < 1$ កំណត់ដោយ $S_\infty = \dfrac{u_1}{1-q}$

សម្គាល់ បើ $|q| > 1$ នោះ S_∞ មិនអាចកំណត់បាន

ឧទាហរណ៍ ៣២

គណនាផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{32} + \cdots$

ចម្លើយ៖

តាង $u_1 = \dfrac{1}{4}, u_2 = \dfrac{1}{8}$

និង $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{4}{1} = \dfrac{1}{2}$ ដោយ $|q| < 1$

នាំឱ្យ
$$S_\infty = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $S_\infty = \dfrac{1}{2}$

ឧទាហរណ៍ ៣៣

សរសេរចំនួនទសភាគខួប $1.\overline{3}$ ជាចំនួនសនិទានដែលមានទម្រង់ $\frac{a}{b}$ ។

ចម្លើយ៖

គេមាន $1.\overline{3} = 1 + 0.3 + 0.03 + 0.003 + \cdots$ ចាប់ពីតួទីពីរទៅជាផលបូកនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ អនន្តតួ $u_1 = 0.3 = \frac{3}{10}, u_2 = 0.03 = \frac{3}{100}$

នាំឱ្យ $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{10} < 1$

គេបាន $S_\infty = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}$

$$= \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{10} \times \frac{10}{9} = \frac{1}{3}$$

ដូចនេះ៖ $1.\overline{3} = 1 + S_\infty = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

ឧទាហរណ៍ ៣៤

សរសេរចំនួនទសភាគខួប $3.\overline{45}$ ជាចំនួនសនិទានដែលមានទម្រង់ $\frac{a}{b}$ ។

ចម្លើយ៖

គេមាន $3.\overline{45} = 3 + 0.45 + 0.0045 + 0.000045 + \ldots$ ចាប់ពីតួទីពីរទៅជាផលបូកនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ $u_1 = 0.45 = \frac{45}{100}, u_2 = 0.0045 = \frac{45}{10000}$

និង $q = \frac{45}{10000} \times \frac{100}{45} = \frac{1}{100} < 1$

តាមរូបមន្ត $S_\infty = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{45}{100}}{1-\frac{1}{100}}$

$$= \frac{45}{100} \times \frac{100}{99}$$

$$= \frac{45}{99}$$

ដូចនេះ៖ $3.\overline{45} = 3 + \frac{45}{99} = \frac{342}{99} = \frac{38}{11} = \frac{38}{11}$

ប្រតិបត្តិ ១៦

សរសេរចំនួនទសភាគខួបនីមួយៗខាងក្រោមជាចំនួនសនិទាន់

១. $2.\overline{7}$

២. $3.\overline{25}$

៣. $3.4\overline{63}$

៤. $14.\overline{75}$

Tel: 016 434 006

៤

ផ្នែក

ផលបូកនៃស៊ីតផ្សេងៗ

យើងបានសិក្សារួចមកហើយអំពីផលបូកនៃស៊ីតនព្វន្តនិងស៊ីតធរណីមាត្រ បន្ទាប់មកយើងនឹងសិក្សាបន្ថែមទៅលើផលបូកនៃស៊ីតចំនួនពិតដែលមិនមែនជាស៊ីតនព្វន្តឬស៊ីតធរណីមាត្រវិញម្តង។ ដើម្បីអោយប្រិយមិត្តងាយស្រួលសិក្សាខ្ញុំបានយកទម្រង់ផលបូកនីមួយៗមកសិក្សាជាផ្នែកៗដូចខាងក្រោមនេះ។ ម៉្យាងវិញទៀតនៅក្នុងផ្នែកនេះគឺសំខាន់ដើម្បីយកទៅដោះស្រាយរកតួទូទៅនៃស៊ីតចំនួនពិតនិងផលបូកn តួដំបូងនៃស៊ីតចំនួនពិតផងដែរ។

៤.១ និមិត្តសញ្ញាផលបូកនៃស៊ីត $\sum$

ដោយសារតែការសរសេរផលបូក នៃស៊ីតមានទម្រង់វែងនិងធ្វើឱ្យយើងចំណាយពេលច្រើនដើម្បីសរសេរវា ហេតុដូចនេះហើយទើបគេបង្កើតនិមិត្តសញ្ញាផលបូកដើម្បីសម្រួលនូវការសរសេរឱ្យមានទម្រង់ខ្លីនិងចំណាយពេលតិចជាងមុនក្នុងការសរសេរវា ។

ក្នុងការសរសេរផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត $u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n$ គេប្រើនិមិត្តសញ្ញា $\sum$ អានថា **ស៊ិចម៉ា** ។ គេកំណត់សរសេរដោយ $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$ ដែល k យកតម្លៃពី $1,2,3,\cdots,n$ ។

ឧទាហរណ៍ ៣៥

១. $1+2+3+4=\sum_{k=1}^{4} k$ ២. $5+6+7=\sum_{k=5}^{7} k$

ពិនិត្យលំនាំគម្រូខាងក្រោម

គេមាន $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ គេបាន

ចំពោះ $n=2$ នោះ $\sum_{k=1}^{2} f(k)=f(1)+f(2)$

ចំពោះ $n=3$ នោះ $\sum_{k=1}^{3} f(k)=f(1)+f(2)+f(3)$

ចំពោះ $n=4$ នោះ $\sum_{k=1}^{4} f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$

ចំពោះ $n=5$ នោះ $\sum_{k=1}^{5} f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$

....

ចំពោះ $n=n-1$ នោះ $\sum_{k=1}^{n-1} f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(n-1)$

ចំពោះ $n=n$ នោះ $\sum_{k=1}^{n} f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+\cdots+f(n)$

តាមលំនាំគម្រូយើងសង្កេតឃើញថាដើម្បី សរសេរនិមិត្តសញ្ញា $\sum$ បានកាលណាគេមានអនុគមន៍លេខ យ៉ាងតិចពីរបូកគ្នា។

សង្ខេប

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $\sum_{k=1}^{n} f(k)$

ឧទាហរណ៍ ៣៦

១. $1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k$

២. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n} k^2$

៣. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n} k^3$

៤. $11+12+13+\cdots+n=\sum_{k=11}^{n} k$

៥. $7^2+8^2+9^2+\cdots+n^2=\sum_{k=7}^{n} k^2$

៤.១.១ លក្ខណៈនៃផលបូក

លក្ខណៈ: ១

១. $\sum_{k=1}^{n} c = nc$

២. $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

៣. $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

៤. $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \pm 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} {b_k}^2$

■ សម្រាយបញ្ជាក់៖ ១.
$$\sum_{k=1}^{n} c = c+c+c+\cdots+c+c$$
$$= c\,\underbrace{(1+1+1+\cdots+1+1)}_{n\text{ដងលេខ } 1}$$
$$= cn$$

ដូចនេះ: $\sum_{k=1}^{n} c = nc$

២. $\sum_{k=1}^{n} ca_k = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n$

$$= c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)$$

$$= c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

៣. $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n)$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

៤. $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 \pm 2a_kb_k + b_k^2\right)$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \pm \sum_{k=1}^{n} 2a_kb_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \pm 2\sum_{k=1}^{n} a_kb_k + \sum_{k=1}^{n} {b_k}^2$

■

សម្គាល់

ផលគុណ n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) តាងដោយ $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1.a_2.a_3 \cdots a_n$ ។

៤.២ ស៊ីតមានទម្រង់ $\sum_{k=1}^{n} k^p$

ឧទាហរណ៍ ៣៧

គណនាផលបូក $1+2+3+\cdots+n$

ចម្លើយ៖

តាង $S_n = 1+2+3+\cdots+n$ ជាផលបូកនៃស៊ីតនព្វន្ត

គេបាន
$$S_n = 1+2+3+\cdots+n-2+n-1+n \qquad (+)$$
$$S_n = n+n-1+n-2+\cdots+3+2+1$$

$$2S_n = (n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)+(n+1)$$
$$2S_n = (n+1)(\underbrace{1+1+1+\cdots+1+1+1}_{\text{លេខ } 1 \text{ មាន } n \text{ តួ}})$$
$$2S_n = (n+1)n$$
$$\Leftrightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

វិធីខាងលើនេះគឺយើងប្រើបានតែក្នុង ករណីផលបូកជាផលបូកតួ នៃស៊ីតនព្វន្តតែប៉ុណោះ ។

វិធាន ១

$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$ ដើម្បីគណនាផលបូកនេះគេត្រូវ

- ប្រើសមភាព $(k+1)^{p+1} - k^{p+1} \quad , \quad p = 1,2,3,\cdots,n$
- គេបាន $\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^{p+1} - (k)^{p+1}\right]$ ។ ទាញរក S_n

យើងបានស្រាយក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើ ឥឡូវនេះយើងប្រើ សមភាព $(k+1)^{p+1} - k^{p+1}$ ចំពោះ $p = 1$ នោះគេបានសមភាព $(k+1)^2 - k^2$ ដើម្បីគណនាផលបូក $1+2+3+....+n$ ។

លំហាត់ ៣៨

គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n$

ចម្លើយ៖

គេមានសមភាព $(k+1)^2-k^2=2k+1$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^2-k^2\right]=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

$$\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$$
$$\sum_{k=1}^{n}c=nc$$

$$(n+1)^2-1^2=2.S_n+n$$
$$(n+1)^2-n-1=2.S_n$$
$$(n+1)^2-(n+1)=2.S_n$$
$$(n+1)(n+\cancel{1}-\cancel{1})=2.S_n$$
$$(n+1)n=2.S_n$$
$$\frac{n(n+1)}{2}=S_n$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^2\right]-k^2\right]$$
$$=(\cancel{2^2}-1^2)+(\cancel{3^2}-\cancel{2^2})+\cdots+(n+1)^2-\cancel{n^2}$$
$$=(n+1)^2-1^2$$

ដូចនេះ $S_n=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

សម្គាល់

$$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

លំហាត់ ៣៩

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^p-k^p\right]=(n+1)^p-1$

■ សម្រាយបញ្ជាក់៖ យើងមាន

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^p-k^p\right]=(\cancel{2^p}-1^p)+(\cancel{3^p}-\cancel{2^p})+(\cancel{4^p}-\cancel{3^p})+\cdots+(n+1)^p-\cancel{n^p}$$

$$=-1^p+(n+1)^p=(n+1)^p-1$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^p - k^p] = (n+1)^p - 1$ ■

ឧទាហរណ៍ ៤០

គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

ចម្លើយ៖

គេមានសមភាព $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3 - k^3\right] = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 + 3k + 1)$

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n}k^3 = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$$

$$(n+1)^3 - 1 = 3.S_n + 3.\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$3.S_n = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{2(n+1)^3 - 2(n+1) - 3n(n+1)}{2}$$

$$6.S_n = (n+1)\left(2(n+1)^2 - 2 - 3n\right)$$

$$= (n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 2 - 3n)$$

$$6.S_n = (n+1)(2n^2 + n)$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

ឧទាហរណ៍ ៤១

គណនាផលបូក $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

ចម្លើយ៖

គេមានសមភាព $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4 - \sum_{k=1}^{n}k^4 = 4\sum_{k=1}^{n}k^3 + 6\sum_{k=1}^{n}k^2 + 4\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$

$$(k+1)^4 - 1 = 4S_n + 6.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4.\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$(n+1)^4 - (n+1) = 4S_n + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1)$$

$$4S_n = (n+1)^4 - (n+1) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1)$$

$$= (n+1)\left[(n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n\right]$$

$$= (n+1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 2n^2 - n - 2n)$$

$$= (n+1)(n^3 + n^2)$$

$$4S_n = n^2(n+1)^2$$

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

ដូចនេះ: $\boxed{S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$

សម្គាល់

តាមឧទាហរណខាងលើគេបានរូបមន្តដែលត្រូវចងចាំ ដើម្បីប្រើសម្រាប់គណនាផលបូកនៃស្វ៊ីតផ្សេងៗ ៖

- $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Tel: 016 434 006

ឧទាហរណ៍ ៤២

គណនា

១. $\sum_{i=1}^{20} 2i$

២. $\sum_{k=1}^{20} k(k+3)$

៣. $\sum_{i=1}^{n} 2i$

៤. $\sum_{i=1}^{n} (2i-1)$

ចម្លើយ៖

១. $\sum_{i=1}^{20} 2i = 2\sum_{k=1}^{20} i = 2.\frac{20(20+1)}{2} = 20\times 21 = 420$

២. $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20} k(k+3) &= \sum_{k=1}^{20}(k^2+3k) = \sum_{k=1}^{20} k^2 + 3\sum_{k=1}^{20} k\\ &= \frac{20(20+1)(20\times 2+1)}{6} + 3.\frac{20(20+1)}{2}\\ &= 3500\end{aligned}$$

៣. $\sum_{i=1}^{n} 2i = 2\sum_{k=1}^{n} i = 2.\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$

៤. $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(2i-1) &= 2\sum_{k=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 = 2.\frac{n(n+1)}{2} - n\\ &= n(n+1) - n = n^2 + \cancel{n} - \cancel{n}\\ &= n^2\end{aligned}$$

ប្រតិបត្តិ ១៧

គណនា

១. $\sum_{k=0}^{2020} 2021$

២. $\sum_{k=1}^{n} \frac{n(n+1)}{2}$

៣. $\sum_{k=1}^{n} (2k^2+3k+5)$

៤. $\sum_{j=k}^{n} (k-1)^3$

៥. $\sum_{i=8}^{n} \left(\frac{1}{2}i^3 + 3i - 2\right)$

៦. $\sum_{i=5}^{2020} \left(\sum_{j=1}^{i} j\right)$

Tel: 016 434 006

៤.៣ ស៊ីតមានទម្រង់ $p+pp+ppp+...+ppp...pp$ ដែល $0<p\leq 9$

តាង $S_n = p+pp+ppp+\cdots+\underbrace{pp\cdots pp}_{n\text{ តួ}p}$, $n\in\mathbb{N}$

$$S_n = p(1+11+111+\cdots+\underbrace{111\cdots 11}_{n\text{ តួលេខ}1})$$

$$9S_n = p(9+99+999+\cdots+\underbrace{999\cdots 99}_{n\text{ តួលេខ}9})$$

$$\frac{9}{p}S_n = (10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^n-1)$$

$$= (10+10^2+10^3+\cdots+10^n)-(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{ តួលេខ }1})$$

$$= 10\times\frac{10^n-1}{10-1}-n$$

$$\frac{9}{p}S_n = \frac{10^{n+1}-10-9n}{9}$$

$$S_n = \frac{p\left(10^{n+1}-9n-10\right)}{81}$$

ឧទាហរណ៍ ៤៣

គណនាផលបូក $S_n = 9+99+999+\cdots+\underbrace{99\cdots 99}_{2017\text{ តួ}}$

ចម្លើយ៖

គេមាន $S_n = 9+99+999+\cdots+\underbrace{99\cdots 99}_{2017\text{ តួ}}$

គេបាន $S_n = (10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^{2017}-1)$

$$= 10+10^2+10^3+\cdots+10^{2017}-(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{2017\text{ តួ}})$$

$$= 10\times\frac{10^{2017}-1}{10-1}-2017$$

$$S_n = \frac{10^{2018}-9(2017)-10}{9}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{10^{2018} - 18163}{9}$

ឧទាហរណ៍ ៤៨

គណនាផលបូក $S_n = 7 + 77 + 777 + \cdots + \underbrace{777\cdots77}_{n \text{ តួ}}$

ចម្លើយ៖

គេមាន $S_n = 7 + 77 + 777 + \cdots + \underbrace{777\cdots77}_{n \text{ តួ}}$

គេបាន $S_n = 7(1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111\cdots11}_{n \text{ តួ}})$

$$9S_n = 7(9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{999\cdots99}_{n \text{ តួ}})$$

$$\frac{9}{7}S_n = (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + \cdots + (10^n-1)$$

$$= (10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n) - (\underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + 1}_{n \text{ តួ}})$$

$$= 10 \times \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n$$

$$\frac{9}{7}S_n = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{9}$$

$$S_n = \frac{7\left(10^{n+1} - 9n - 10\right)}{81}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{7\left(10^{n+1} - 9n - 10\right)}{81}$

ប្រតិបត្តិ ១៨

គណនាផលបូកនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $3 + 33 + 333 + 3333 + \cdots + \underbrace{3333\cdots33}_{15 \text{ តួលេខ } 3}$

២. $3 + 33 + 333 + 3333 + \cdots + \underbrace{3333\cdots33}_{50 \text{ តួលេខ } 3}$

៣. $\underbrace{333\cdots33}_{16 \text{ តួលេខ}3} + \underbrace{333\cdots33}_{17 \text{ តួលេខ}3} + \cdots + \underbrace{3333\cdots33}_{50 \text{ តួលេខ } 3}$

៤.៤ ស៊ីតមានទម្រង់ $pq+pqpq+pqpqpq+...+pqpqpq...pq$

តាង $S_n = pq+pqpq+pqpqpq+\cdots+\underbrace{pqpqpq\cdots pqpq}_{n \text{ តួ } pq}$

គេបាន $S_n = pq\left(1+101+10101+\cdots+1\underbrace{010101\cdots0101}_{n-1 \text{ តួលេខ } 01}\right)$

$$99S_n = pq\left(99+9999+999999+\cdots+\underbrace{999999\cdots9999}_{n \text{ តួលេខ } 99}\right)$$

$$\frac{99}{pq}S_n = (10^2-1)+(10^4-1)+(10^6-1)+\cdots+(10^{2n}-1)$$

$$= 10^2+10^4+10^6+\cdots+10^{2n}-(\underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{n \text{ ដងលេខ } 1})$$

$$= 100\times\frac{100^n-1}{100-1}-n$$

$$\frac{99}{pq}S_n = \frac{100^{n+1}-100-99n}{99}$$

ដូចនេះ: $S_n = \dfrac{pq(100^{n+1}-99n-100)}{99^2}$

ឧទាហរណ៍ ៤៥

គណនាផលបូក $S_n = 12+1212+121212+\cdots+\underbrace{121212\cdots1212}_{n \text{ តួលេខ } 12}$

ចម្លើយ៖

គេមាន $S_n = 12+1212+121212+\cdots+\underbrace{121212\cdots1212}_{n \text{ តួលេខ } 12}$

គេបាន $S_n = 12\left(1+101+10101+\cdots+1\underbrace{010101\cdots0101}_{n-1 \text{ តួលេខ } 01}\right)$

$$99S_n = 12\left(99+9999+999999+\cdots+\underbrace{999999\cdots9999}_{n \text{ តួលេខ } 99}\right)$$

$$\frac{99}{12}S_n = (10^2-1)+(10^4-1)+(10^6-1)+\cdots+(10^{2n}-1)$$

$$\frac{99}{12}S_n = 10^2+10^4+10^6+\cdots+10^{2n} - (\underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{n \text{ ដងលេខ } 1})$$

$$= 100\times\frac{100^n-1}{100-1} - n$$

$$\frac{99}{12}S_n = \frac{100^{n+1}-100-99n}{99}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{12\left(100^{n+1}-99n-100\right)}{99^2}$

ប្រតិបត្តិ ១៩

គណនាផលបូកនៃស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $S_n = 15+1515+151515+\cdots+\underbrace{151515\cdots1515}_{n \text{ តួលេខ } 15}$

២. $S_n = \underbrace{171717\cdots17}_{12 \text{ តួលេខ } 17}+\underbrace{171717\cdots17}_{13 \text{ តួលេខ } 17}+\cdots+\underbrace{171717\cdots1717}_{2019 \text{ តួលេខ } 17}$

៤.៥ ស្វ៊ីតដែលមានទម្រង់ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k.a_{k+1}}$

វិធាន ២

គេមាន $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k.a_{k+1}} = \frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}$

តាង $a_{k+1}-a_k = d$ ដែល $d\neq 0$ ដើម្បីគណនាគណនាផលបូកនេះ គេត្រូវ

- បម្លែងតួ $\dfrac{1}{a_ka_{k+1}} = \dfrac{1}{d}\times\dfrac{a_{k+1}-a_k}{a_ka_{k+1}} = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_k}-\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)$
- យក $f(k) = \dfrac{1}{a_k}$ នាំឱ្យ $f(k+1) = \dfrac{1}{a_{k+1}}$
- ធ្វើប្រមាណវិធីបូក

គេបាន
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k.a_{k+1}} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}\left[f(k)-f(k+1)\right]$$
$$= \frac{1}{d}\left[f(1)-f(n+1)\right]$$

ឧទាហរណ៍ ៨៦

គណនាផលបូក $S_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$ ។

ចម្លើយ៖

ដោយ $(k+1)-k=1$

ដោយ
$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}$$
$$=\frac{k+1}{k(k+1)}-\frac{k}{k(k+1)}$$
$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

គេបាន
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$
$$=\frac{n+\cancel{1}-\cancel{1}}{n+1}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{n}{n+1}$

ប្រតិបត្តិ ២០

គណនាផលបូកខាងក្រោម៖

១. $s_n=\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

២. $s_n=\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

Tel: 016 434 006

៤.៦ ស៊្វីតមានទម្រង់ $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}a_{k+2}}$

វិធាន ៣

គេមាន $S_n=\frac{1}{a_1a_2a_3}+\frac{1}{a_2a_3a_4}+\frac{1}{a_3a_4a_5}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}}$

តាង $a_{k+2}-a_k=d$ ថេរ $d\neq 0$ ដើម្បីគណនាគណនាផលបូកនេះ គេត្រូវ

- បម្លែងតួ $\frac{1}{a_ka_{k+1}a_{k+2}}=\frac{1}{d}\times\frac{a_{k+2}-a_k}{a_ka_{k+1}a_{k+2}}$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_ka_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+1}a_{k+2}}\right)$$

- យក $f(k)=\frac{1}{a_ka_{k+1}}$ និង $f(k+1)=\frac{1}{a_{k+1}a_{k+2}}$
- ធ្វើប្រមាណវិធី

គេបាន $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}a_{k+2}}=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}[f(k)-f(k+1)]$

$$=\frac{1}{d}\left[\sum_{k=1}^{n}f(k)-\sum_{k=1}^{n}f(k+1)\right]$$

$$=\frac{1}{d}[f(1)-f(n+1)]$$

ឧទាហរណ៍ ៤៧

គណនាផលបូក $S_n=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ចម្លើយ៖

ដោយ $(k+2)-k=2$

យើងមាន $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{(k+2)-k}{2k(k+1)(k+2)}$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(1+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

ដូចនេះ $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

ប្រតិបត្តិ ២១

គណនា $\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{4.5.6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

៤.៧ ស្វ៊ីតមានទម្រង់ $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$

វិធាន ៤

បើ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត និង (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។ ដើម្បីគណនាផលបូក

$$S_n=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$$

គេត្រូវ គណនា S_n-qS_n រួចទាញរក S_n

ឧទាហរណ៍ ៤៨

គណនា $S_n=1+2.2+3.2^2+4.2^3+\cdots+n.2^{n-1}$

ចម្លើយ៖

គេមាន $S_n=1+2.2+3.2^2+4.2^3+\cdots+n.2^{n-1}$

$$\Longrightarrow 2S_n=2+2.2^2+3.2^3+4.2^4+\cdots+n.2^n$$

គេបាន $S_n-2S_n=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}-n.2^n$

$$-S_n=1\times\frac{2^n-1}{2-1}-n.2^n$$

ដូចនេះ $S_n=1+2^n(n-1)$

ប្រតិបត្តិ ២២

គណនាផលបូកនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $1.3+3.9+5.27+7.81+\cdots+(2n-1).3^n$ ។

ផ្នែក

កំណត់តួទី n តាមផលសងតួនៃស្វីត

យើងបានសិក្សារួចមកហើយអំពីការរកតួទី n នៃស្វីតចំនួនពិតដោយស្វីតទាំងនោះជាស្វីតនព្វន្ត ឬ ស្វីតធរណីមាត្រ ។ ក្នុងផ្នែកនេះយើងនឹងសិក្សាអំពីការរកតួទី n នៃស្វីតចំនួនពិតដែលមិនមែនជាស្វីតនព្វន្ត ឬ ស្វីតធរណីមាត្រ ។

៥.០.១ ផលសងតួលំដាប់ទីមួយនៃស្វីត

បើ $(a_n) : a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ មិនមែនជាស្វីតនព្វន្ត ឬ ធរណីមាត្រ

តាង (b_n) ជាស្វីតនព្វន្ត ឬ ធរណីមាត្រ កំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$

គេបាន $b_1 = \cancel{a_2} - a_1$

$$b_2 = \cancel{a_3} - \cancel{a_2}$$

$$b_3 = \cancel{a_4} - \cancel{a_3} \qquad (+)$$

បូកសមភាពចូលគ្នា
រួចសម្រួល

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_{n-1} = a_n - \cancel{a_{n-1}}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} = a_n - a_1$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_n - a_1 \Rightarrow a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad , n \geq 2$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្ទីត (a_n) គឺ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ចំពោះ $n \geq 2$

វិធាន ៥

គេឱ្យស្ទីត $(a_n) : a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ តាងស្ទីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់មួយនៃស្ទីត (a_n) កំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$ ។ គេបានស្ទីត $(b_n) : b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$ ។ តួទី n នៃស្ទីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ចំពោះ $n \geq 2$ ។

ឧទាហរណ៍ ៤៩

កំណត់តួទី n នៃស្ទីត $(a_n) : 2, 4, 8, 14, 22, 32, \cdots$

ចម្លើយ៖

តាង a_n ជាតួទី n នៃស្ទីត (a_n) ។ ស្ទីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់1នៃស្ទីត (a_n) ដែលកំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$ ។ គេបានស្ទីត $(b_n) : 2, 4, 6, 8, \cdots$ ជាស្ទីតនព្វន្តដែលមានតួទី1ស្មើ 2 និងផលសងរួមស្មើ 2 នោះគេបាន $b_n = 2 + 2(n-1) = 2n$

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន
$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k \\ &= 2 + \frac{2n(n-1)}{2} \\ &= 2 + n^2 - n \\ a_n &= n^2 - n + 2 \end{aligned}$$

ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $a_1 = 1^2 - 1 + 2 = 2$ ពិត

ដូចនេះ (a_n) មានតួទី n កំណត់ដោយ $a_n = n^2 - n + 2$

ប្រតិបត្តិ ២៣

កំណត់តួទី n នៃស្ទីត $(a_n) : 1, \frac{7}{6}, 2, \frac{7}{2}, \frac{17}{3}, \frac{17}{2}, 2, \cdots$

៥.០.២ ផលសងតួលំដាប់ទីពីរនៃស្វ៊ីត

វិធាន ៦

គេឱ្យស្វ៊ីត $(a_n) : a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ តាងស្វ៊ីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់មួយនៃស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$ គេបានស្វ៊ីត $(b_n) : b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$ ។

តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ចំពោះ $n \geq 2$

និងតាង c_n ជាផលសងលំដាប់មួយនៃស្វ៊ីត (b_n) ឬ ផលសងលំដាប់ពីរនៃស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $c_n = b_{n+1} - b_n$ គេបាន $(c_n) : c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n$ ។

តួទី n នៃស្វ៊ីត (b_n) កំណត់ដោយ $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k$ ចំពោះ $n \geq 2$ ។

ឧទាហរណ៍ ៨០

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(a_n) : 4, 18, 48, 100, 180, 294, \cdots$

ចម្លើយ៖

តាង a_n ជាតួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n) ។ ស្វ៊ីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់1នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែលកំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$ ។ គេបានស្វ៊ីត $(b_n) : 14, 30, 52, 80, 114, \cdots$

តាងស្វ៊ីត (c_n) ជាផលសងលំដាប់1នៃស្វ៊ីត (b_n) ដែលកំណត់ដោយ $c_n = b_{n+1} - b_n$ ។

គេបានស្វ៊ីត $(c_n) : 16, 22, 28, 34, \cdots$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី 1 ស្មើ 16 និងផលសងរួមស្មើ 6 នោះ $c_n = 16 + 6(n-1) = 16 + 6n - 6 = 6n + 10$

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = 14 + \sum_{k=1}^{n-1}(6k+10) \\ &= 14 + 6\sum_{k}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 10 \\ &= 14 + \frac{6n(n-1)}{2} + 10(n-1) \\ &= 14 + 3n^2 - 3n + 10n - 10 \end{aligned}$$

$$b_n = 3n^2 + 7n + 4$$

ចំពោះ $n=1$ គេបាន $b_1 = 3.1^2+7.1+4 = 14$ ពិត នាំឱ្យ $b_n = 3n^2+7n+4$

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន
$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\
&= 4 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k^2+7k+4) \\
&= 4 + 3\sum_{k}^{n-1} k^2 + 7\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n-1} 4 \\
&= 4 + \frac{3n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{7n(n-1)}{2} + 4(n-1) \\
&= 4n + \frac{1}{2}(n-1)(2n^2-n+7n) \\
&= 4n + (n-1)(n^2+3n) \\
&= 4n + n^3 + 3n^2 - n^2 - 3n
\end{aligned}$$
$$a_n = n^3 + 2n^2 + n$$

ចំពោះ $n=1$ គេបាន $a_1 = 1^3 + 2.1^2 + 1 = 4$ ពិត

ដូចនេះ ស្ទីត (a_n) មានតួទី n កំណត់ដោយ $a_n = n^3 + 2n^2 + n$

ប្រតិបត្តិ ២៨

កំណត់តួទី n នៃស្ទីត $(a_n) : 3, 19, 53, 111, 199, 323, \cdots$ ។

៦

ផ្នែក

ទំនាក់ទំនងតួនៃស៊ីត

៦.១ កំណត់តួទី n ដោយប្រើស៊ីតជំនួយ

យើងបានសិក្សារួចមកហើយអំពីការរកតួទី n នៃស៊ីតចំនួនពិត។ ក្នុងមេរៀននេះយើងនឹងរកតួទី n នៃទំនាក់ទំនងកំណើនដែលមានទម្រង់ $u_{n+1}=a.u_n+f(n), a\neq 0$ ។ ហេតុនេះទើបគេបង្កើតស៊ីតថ្មីមួយទៀតគឺ (r_n) មកធ្វើផលសងរវាងស៊ីត u_{n+1} និង r_{n+1} ដែលបង្កើតបានជាស៊ីតនព្វន្ត ឬ ស៊ីតធរណីមាត្រ ។ ស៊ីត (r_n) ហៅថាស៊ីតជំនួយនៃស៊ីត (u_n) ។

វិធាន ៧

គេអោយស៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $u_{n+1}=a.u_n+f(n)$ ដើម្បីកំណត់តួទី n នៃស៊ីតគេត្រូវ៖

⁂ **ចំពោះ** $a=1$

- គេមាន $u_{n+1}=u_n+f(n)$ សមមូល $u_{n+1}-u_n=f(n)$
- តាង $v_n=u_{n+1}-u_n=f(n)$ នោះ (v_n) ជាផលសងលំដាប់ទី១នៃស៊ីត (u_n)
- ចំពោះ $n\geq 2$ គេបាន $u_n=u_1+\sum_{k=1}^{n-1}v_k$ ឬ $u_n=u_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$

៦.១.១ ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = a.u_n + f(n)$

វិធាន ៨

គេអោយស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $u_{n+1} = a.u_n + f(n)$ ដើម្បីកំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតគេត្រូវ៖

※ **ចំពោះ** $a \neq 1$

- រកស្វ៊ីត (r_n) មានទម្រង់តាមអនុគមន៍នៃ $f(n)$ ដែលផ្ទៀផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើននៃសមីការ $r_{n+1} = a.r_n + f(n)$
- ធ្វើផលសង $u_{n+1} - r_{n+1} = a(u_n - r_n)$ តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = u_n - r_n$
- (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចទាញរកតួ u_n ។

សម្គាល់

គេអាចរក r_n តាម $f(n)$ ចំពោះ $a, b, c, A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$ ជាចំនួនថេរ

- បើ $f(n) = c$ តាង $r_n = \alpha$
- បើ $f(n) = an + b$ តាង $r_n = \alpha n + \beta$
- បើ $f(n) = an^2 + bn + c$ តាង $r_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$
- បើ $f(n) = a^n$ តាង $r_n = \alpha.a^n$
- បើ $f(n) = (An + B)a^n$ តាង $r_n = (\alpha n + \beta)a^n$
- បើ $f(n) = (An^2 + Bn + C)a^n$ តាង $r_n = (\alpha n^2 + \beta n + \gamma)a^n$

ឧទាហរណ៍ ៥១

គេឱ្យស្វ៊ីត (u_n) មួយកំណត់ដោយ: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ 3u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$ ។

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $u_1 = 1$; $3u_{n+1} = 2u_n + 3$ ឬ $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 1$

តាង $r_n = \alpha$ នាំឱ្យ $r_{n+1} = \alpha$ ដោយ r_n ផ្ទៀតផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន (u_n)

គេបាន $3r_{n+1} = 2r_n + 3$

$$3\alpha = 2\alpha + 3$$

$$\alpha = 3$$

នោះ $r_n = r_{n+1} = 3$ ធ្វើផលសង u_{n+1} និង r_{n+1}

គេបាន $u_{n+1} - r_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 - r_{n+1}$

$$u_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}u_n + 1 - 3$$

$$u_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}(u_n - 3)$$

តាង

$$v_n = u_n - 3 \Leftrightarrow v_{n+1} = u_{n+1} - 3 \qquad (1)$$

គេបាន $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ ដោយ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី១ $v_1 = u_1 - 3 = 1 - 3 = -2$ និងផលធៀបរួម $q = \frac{2}{3}$ នោះ $v_n = v_1 q^{n-1} = -2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

តាម (1) គេបាន $u_n = v_n + 3 = 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $u_n = 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

ឧទាហរណ៍ ៥២

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1 = 3$, $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$ ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1 = 3$, $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $(r_n) : r_n = \alpha.n + \beta \Rightarrow r_{n+1} = \alpha(n+1) + \beta$

$$r_{n+1} = 2r_n - n + 1$$

គេបាន $\alpha(n+1) + \beta = 2(\alpha n + \beta) - n + 1$

$$n(\alpha - 1) + \beta - \alpha + 1 = 0$$

គេបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} \alpha - 1 = 0 \\ \beta - \alpha + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow r_n = n$

$\Rightarrow r_{n+1} = n+1$

ធ្វើផលសង $u_{n+1} - r_{n+1}$ គេបាន: $u_{n+1} - r_{n+1} = 2u_n - n + 1 - (n+1)$

$$u_{n+1} - (n+1) = 2u_n - 2n$$

$$= 2(u_n - n)$$

តាង

$$v_n = u_n - n \Leftrightarrow v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) \qquad (2)$$

គេបាន $v_{n+1} = 2v_n \Leftrightarrow \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 2$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែល $q = 2,$

$v_1 = u_1 - 1 = 3 - 1 = 2 \Longleftrightarrow v_n = v_1.q^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$

តាមសមីការ (2) គេបាន $2^n = u_n - n \Rightarrow u_n = 2^n + n$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ $u_n = 2^n + n$

ឧទាហរណ៍ ៥៣

គេឱ្យស្វ៊ីត (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2n + 2 \end{cases}$ ។ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $u_1 = 5, u_{n+1} = 3u_n - 2n + 2$

តាងស្វ៊ីត (r_n) : $r_n = \alpha.n + \beta \Rightarrow r_{n+1} = \alpha(n+1) + \beta$, $(\alpha, \beta$ ជាចំនួនថេរ)

គេបាន: $r_{n+1} = 3r_n - 2n + 2$

$$\alpha(n+1) + \beta = 3(\alpha n + \beta) - 2n + 2$$

$$\alpha n + \alpha + \beta = 3\alpha n + 3\beta - 2n + 2$$

$$0 = 2\alpha n + 2\beta - 2n + 2 - \alpha$$

$$0 = (\alpha - 1)2n + 2\beta - \alpha + 2$$

គេបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}\alpha-1=0\\2\beta-\alpha=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=1\\\beta=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow r_n=n-\dfrac{1}{2}\Rightarrow r_{n+1}=(n+1)-\dfrac{1}{2}$

ធ្វើផលសង $u_{n+1}-r_{n+1}$

គេបាន $u_{n+1}-r_{n+1}=3u_n-2n+2-\left[(n+1)-\dfrac{1}{2}\right]$

$$u_{n+1}-\left[(n+1)-\frac{1}{2}\right]=3u_n-3n+\frac{3}{2}$$
$$=3\left[u_n-\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$$

តាង

$$v_n=u_n-\left(n-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow v_{n+1}=u_{n+1}-\left[(n+1)-\frac{1}{2}\right] \qquad (3)$$

គេបាន $v_{n+1}=3v_n\Leftrightarrow\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=3$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែល

$$q=3\ ,\ v_1=u_1-\left(1-\frac{1}{2}\right)=5-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}=\frac{3^2}{2}$$

$$\Rightarrow v_n=v_1.q^{n-1}=\frac{3^2}{2}\times3^{n-1}=\frac{3^{n-1+2}}{2}=\frac{3^{n+1}}{2}$$

តាមសមីការ (3) គេបាន $\dfrac{3^{n+1}}{2}=u_n-\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow u_n=\dfrac{3^{n+1}}{2}+\left(n-\dfrac{1}{2}\right)$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ $u_n=\dfrac{3^{n+1}}{2}+\left(n-\dfrac{1}{2}\right)$

ឧទាហរណ៍ ៤៤

គេឱ្យស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}:\begin{cases}u_1&=5\\u_{n+1}&=u_n+n^2+2n+1\end{cases}$ ។

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

យើងមាន $u_1 = 5,\ u_{n+1} = u_n + n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n + 1$

តាង $v_n = u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n + 1$ នោះ (v_n) ជាផលសងលំដាប់១នៃ (u_n)

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k$

$$= 5 + \sum_{k=1}^{n-1}(k^2 + 2k + 1)$$

$$= 5 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$$= 5 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + 2\frac{n(n-1)}{2} + (n-1)$$

$$= \frac{1}{6}.n(n-1)(2n-1) + n(n-1) + n + 4$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ $u_n = \frac{1}{6}.n(n-1)(2n-1) + n(n-1) + n + 4$

ឧទាហរណ៍ ៤៤

គេឱ្យទំនាក់ទំនងកំណើន $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2^n$ ។ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

យើងមាន $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2^n$

តាងស្វ៊ីត $(r_n) : r_n = \alpha 2^n \Rightarrow r_{n+1} = \alpha 2^{n+1}$ ដែល α ជាចំនួនថេរ

គេបាន $r_{n+1} = \frac{2}{3}.r_n + 2^n$

$$\alpha 2^{n+1} = \frac{2}{3}.\alpha.2^n + 2^n$$

$$\cancel{2^n}.2\alpha = \cancel{2^n}\left(\frac{2}{3}.\alpha + 1\right)$$

$$2\alpha = \frac{2\alpha + 3}{3}$$

$$6\alpha = 2\alpha + 3$$

$$4\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow r_{n+1} = \frac{3}{4}.2^{n+1}$$

$$\text{គេបាន}\quad u_{n+1}-r_{n+1}=\frac{2}{3}.u_n+2^n-\frac{3}{4}.2^{n+1}$$

$$u_{n+1}-\frac{3}{4}.2^{n+1}=\frac{2}{3}.u_n+2^n-\frac{3}{2(\cancel{2})}.2^n\cancel{2}$$

$$=\frac{2}{3}.u_n+2^n\left(1-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{2}{3}.u_n-2^n.\frac{1}{2}\times\frac{3}{3}\times\frac{2}{2}$$

$$u_{n+1}-\frac{3}{4}.2^{n+1}=\frac{2}{3}\left(u_n-\frac{3}{4}.2^n\right)$$

តាង $v_n=u_n-\frac{3}{4}.2^n \qquad (*)$

$$v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{3}{4}.2^{n+1}$$

នោះ $v_{n+1}=\frac{2}{3}.v_n\Leftrightarrow\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{2}{3}$ នោះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន

$v_1=u_1-\frac{3}{4}.2=1-\frac{3}{2}=\frac{1-3}{2}=-\frac{1}{2}$ និងផលធៀបរួម $q=\frac{2}{3}$

គេបាន $v_n=v_1.q^{n-1}=-\frac{1}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=-\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}$

ជំនួសចូលសមីការ $(*)$ នាំឱ្យ $u_n=\frac{3}{4}.2^n-\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}=3\times2^{n-2}-\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}$

$$=3\times2^{n-2}-3.\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

ដូចនេះ $u_n=3\left[2^{n-2}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right]$

ប្រតិបត្តិ ២៨

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតនីមួយៗចំពោះទំនាក់ទំនងកំណើនខាងក្រោម៖

១. $\begin{cases}u_1 &= -1\\ u_{n+1} &= 2u_n+7\end{cases}$

២. $\begin{cases}u_1 &= 3\\ u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n-n^2+3\end{cases}$

៣. $\begin{cases}u_1 &= \frac{1}{2}\\ 2u_{n+1} &= 3u_n+5^n\end{cases}$

៤. $\begin{cases}u_1 &= \frac{2}{3}\\ u_{n+1} &= \frac{3}{2}u_n+(n+1)7^n\end{cases}$

៦.២ កំណត់តួទូទៅនៃទំនាក់ទំនង $u_{n+1} = f(u_n)$

៦.២.១ ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនង $u_{n+1} = \dfrac{u_n+\alpha}{u_n+\beta}$

វិធាន ៩

គេឱ្យស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន

$$u_{n+1} = \frac{u_n+\alpha}{u_n+\beta} \tag{4}$$

ដើម្បីកំណត់តួទីn នៃស្វ៊ីតគេត្រូវ សមីកាសម្គាល់ $\lambda = \dfrac{\lambda+\alpha}{\lambda+\beta}$

$$\lambda(\lambda+\beta) = \lambda+\alpha$$

$$\lambda^2+\beta\lambda-\lambda-\alpha = 0$$

$$\lambda^2+(\beta-1)\lambda-\alpha = 0$$

- ករណី $\Delta = [-(\beta-1)]^2+4\alpha > 0$ នោះសមីការមានឫសពីរ $\lambda_1, \lambda_2 = \dfrac{-(\beta-1)\pm\sqrt{\Delta}}{2}$ តាង ស្វ៊ីត $v_n = \dfrac{u_n-\lambda_1}{u_n-\lambda_2}$ ចំពោះ $\lambda_1 > \lambda_2$ ហើយបង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា v_n ទាញរក u_n ។
- ករណី $\Delta = [-(\beta-1)]^2+4\alpha = 0$ នោះសមីការមានឫសឌុប $\lambda = \dfrac{-(\beta-1)}{2}$ តាង $v_n = \dfrac{1}{u_n-\lambda}$ បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ហើយគណនា v_n រួចទាញរក u_n ។

ឧទាហរណ៍ ៤៦

គេឱ្យទំនាក់ទំនងកំណើន $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \dfrac{u_n+6}{u_n+2} \end{cases}$ ។ កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទៅទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}_0$

គេមាន $u_{n+1}=\dfrac{u_n+6}{u_n+2}$ មានសមីការសម្គាល់ $\lambda=\dfrac{\lambda+6}{\lambda+2}$

$$\lambda(\lambda+2)=\lambda+6$$
$$\lambda^2+2\lambda-\lambda-6=0$$
$$\lambda^2+\lambda-6=0$$
$$(\lambda-2)(\lambda+3)=0$$
$$\lambda=2,\lambda=-3$$

តាង $v_n=\dfrac{u_n-\lambda_1}{u_n-\lambda_2}$ ដែល $\lambda_1=2>\lambda_2=-3$ នាំឱ្យ $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+3}$ (5)

គេបាន $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}-3}\quad ,u_{n+1}=\dfrac{u_n+6}{u_n+2}$

$$=\frac{\frac{u_n+6}{u_n+2}-2}{\frac{u_n+6}{u_n+2}+3}=\frac{u_n+6-2u_n-4}{u_n+2}\times\frac{u_n+2}{u_n+6+3u_n+6}$$
$$=-\frac{1}{4}\times\frac{u_n-2}{u_n+3}=-\frac{1}{4}v_n$$

ដោយ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $q=-\dfrac{1}{4}$ និង $v_0=\dfrac{u_0-2}{u_0+3}=-\dfrac{1}{4}$ ដែល $u_0=1$

នាំឱ្យ $v_n=v_0.q^n=-\dfrac{1}{4}\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n=\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$

តាមសមីការ (5) គេបាន $\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}=\dfrac{u_n-2}{u_n+3}=\dfrac{u_n+3-5}{u_n+3}=1-\dfrac{5}{u_n+3}$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1=-\frac{5}{u_n+3}$$
$$u_n+3=-\frac{5}{\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1}$$
$$u_n=-\frac{5}{(-\frac{1}{4})^{n+1}-1}-3$$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ $u_n=-\dfrac{5}{(-\frac{1}{4})^{n+1}-1}-3$

ឧទាហរណ៍ ៥៧

រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

ដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= \dfrac{4u_n - 1}{4u_n} \end{cases}$ ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទៅទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}_0$

គេមាន $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{4u_n}$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda = \dfrac{4\lambda - 1}{4\lambda}$

$$4\lambda^2 = 4\lambda - 1$$

$$4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

$$\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

ដោះស្រាយតាមដេទែមីណង់

ដោយ $a = 4, b = 4, c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 4^2 - 4(4)(1) = 0$

នាំឱ្យ $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2(4)} = \dfrac{1}{2}$

តាង $v_n = \dfrac{1}{u_n - \lambda}$ ដែល $\lambda = \dfrac{1}{2}$ នោះ៖

$$v_n = \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}} \qquad (6)$$

គេបាន $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - \frac{1}{2}} - \dfrac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{4u_n} - \frac{1}{2}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{4u_n} - \frac{2u_n}{4u_n}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{2u_n - 1}{4u_n}} - \frac{1}{u_n - \frac{1}{2}}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{4u_n}{2u_n-1}-\frac{1}{u_n-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{2u_n}{u_n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{u_n-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{2\left(u_n-\frac{1}{2}\right)}{u_n-\frac{1}{2}}$$
$$=2$$

ដោយ (v_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន ផលសងរួម $d=2$ និង $v_0=\dfrac{1}{u_0-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3-\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{5}$

នាំឱ្យ $v_n=v_0+nd=\dfrac{2}{5}+2n$ តាមសមីការ (6)

គេបាន
$$v_n=\frac{1}{u_n-\frac{1}{2}}$$
$$\frac{2}{5}+2n=\frac{1}{u_n-\frac{1}{2}}$$
$$u_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2n+\frac{2}{5}}$$
$$u_n=\frac{1}{2n+\frac{2}{5}}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{\frac{10n+2}{5}}+\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) ចំពោះ $n\in\mathbb{N}_0$ គឺ $u_n=\dfrac{5}{10n+2}+\dfrac{1}{2}$

ប្រតិបត្តិ ២៦

រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើននីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $\begin{cases} u_1=5 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n-1}{u_n-2} \end{cases}$

២. $\begin{cases} u_1=6 \\ u_{n+1}=\dfrac{7u_n-6}{2u_n} \end{cases}$

៦.២.២ ករណីស្គាល់ទំនាក់ទំនងកំណើន $au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n=0$

គេអោយស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$$au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n=0 \tag{7}$$

ដើម្បីកំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតគេត្រូវ៖

សរសេរសមីការ $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ ដែល $\Delta=b^2+4ac$ ជាសមីការសម្គាល់នៃ (7)

វិធាន ១០

⋇ របៀបទី១

- បើ $\Delta>0$ នោះសមីការសម្គាល់មានឫសពីរជាចំនួនពិតគឺ $\lambda_1,\lambda_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ គេបាន

$$\begin{cases} u_{n+2}-\lambda_1u_{n+1}=\lambda_2(u_{n+1}-\lambda_1u_n) \\ u_{n+2}-\lambda_2u_{n+1}=\lambda_1(u_{n+1}-\lambda_2u_n)\end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} v_{n+1}=\lambda_2v_n \\ w_{n+1}=\lambda_1w_n\end{cases}$$

ដែល $v_n=u_{n+1}-\lambda_1u_n$ និង $w_n=u_{n+1}-\lambda_2u_n$

ដោះស្រាយរក v_n និង w_n នោះគេអាចរក u_n បានតាមទំនាក់ទំនង v_n និង w_n

- ករណី $\Delta=0$ នោះសមីការមានឫសឌុប $\lambda=\dfrac{-b}{2a}$ តាង

$$v_n=u_{n+1}-\lambda u_n \tag{8}$$

$$v_{n+1}=u_{n+2}-\lambda u_{n+1}=pu_{n+1}+qu_n-\lambda u_{n+1}=(p-\lambda)u_{n+1}+qu_n$$

$$v_{n+1}=(p-\lambda)\left(u_{n+1}+\frac{q}{p-\lambda}\right)$$

យក $v_n=u_{n+1}+\dfrac{q}{p-\lambda}\Rightarrow v_{n+1}=(p-\lambda)v_n$ នោះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុងយ៉ុង $r=(p-\lambda)$ និង$v_1=u_2-r\lambda u_1$

គេបាន $v_n=(u_2-ru_1)(p-\lambda)^{n-1}$

យក (8) ចែកនឹង r^{n+1} : $\dfrac{v_n}{r^{n+1}}=\dfrac{u_{n+1}}{r^{n+1}}-\dfrac{u_n}{r^n}$

តាង $w_n=\dfrac{u_n}{r^n}\Rightarrow w_{n+1}-w_n=\dfrac{v_n}{r^{n+1}}$ គេបាន (w_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d=\dfrac{v_n}{r^{n+1}}$ និង $w_1=\dfrac{u_1}{r}$ នោះគេអាចរក w_n បាន រួចគណនា u_n តាមទំនាក់ទំនង $w_n=\dfrac{u_n}{r^n}$

ឧទាហរណ៍ ៥៨

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន

$u_1 = 1, u_2 = 3, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

គេមាន $u_1 = 1, u_2 = 3, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \Leftrightarrow u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$,$\Delta > 0$ មានឫសពីរ $\lambda_1 = 1$ និង $\lambda_2 = 2$

តាង $\begin{cases} v_n = u_{n+1} - \lambda_1 u_n = u_{n+1} - u_n \\ w_n = u_{n+1} - \lambda_2 u_n = u_{n+1} - 2u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} \\ w_{n+1} = u_{n+2} - 2u_{n+1} \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} v_{n+1} = \lambda_2 v_n \\ w_{n+1} = \lambda_1 w_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_{n+1} = 2v_n \ , v_1 = u_2 - u_1 = 3 - 1 = 2 \\ w_{n+1} = w_n \ , w_1 = u_2 - 2u_1 = 3 - 2(1) = 1 \end{cases}$

ដោយ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $q = 2 \Rightarrow v_n = v_1.q^{n-1} = 2.2^{n-1} = 2^n$

គេបាន

$$u_{n+1} - u_n = 2^n \qquad (9)$$

និង (w_n) ជាស្វ៊ីតថេរនោះគេបាន $w_{n+1} = w_n = \cdots = w_2 = w_1 = 1$

គេបាន

$$u_{n+1} - 2u_n = 1 \qquad (10)$$

យកសមីការ (10) ដក (9)

គេបាន $u_{n+1} - u_n - (u_{n+1} - 2u_n) = 2^n - 1$

$$\cancel{u_{n+1}} - u_n - \cancel{u_{n+1}} + 2u_n = 2^n - 1$$

$$u_n = 2^n - 1$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ គឺ $u_n = 2^n - 1$

ឧទាហរណ៍ ៥៩

ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $u_1=0, u_2=2,$
$u_{n+2}-5u_{n+1}+6u_n=0$ ។ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទីn នៃស្វ៊ីត (u_n)

គេមាន $u_1=0, u_2=2, u_{n+2}-5u_{n+1}+6u_n=0$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2-5\lambda+6=0$,$\Delta>0$ មានឫស $\lambda_1=2$ និង $\lambda_2=3$

$a=1, b=-5, c=6$

$\Delta=b^2-4ac$

$=(-5)^2-4(1)(6)$

$=25-24=1$

$\lambda_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=2$

$\lambda_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=3$

តាង $\begin{cases} v_n=u_{n+1}-2u_n \\ w_n=u_{n+1}-3u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{n+1}=u_{n+2}-2u_{n+1} \\ w_{n+1}=u_{n+2}-3u_{n+1} \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} v_{n+1}=3v_n \\ w_{n+1}=2w_n \end{cases}$

ដោយ (v_n) និង (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

$(v_n): q=3, v_1=u_2-2u_1=2$

$\Rightarrow u_n=v_1.q^{n-1}=2\times 3^{n-1}$

គេបាន

$$u_{n+1}-2u_n=2\times 3^{n-1} \qquad (11)$$

$(w_n): q=2, w_1=u_2-3u_1=2 \Rightarrow w_n=w_1.q^{n-1}=2\times 2^{n-1}=2^n$

គេបាន

$$u_{n+1}-3u_n=2^n \qquad (12)$$

យកសមីការ (11) ដក (12)

គេបាន $u_{n+1}-2u_n-(u_{n+1}-3u_n)=2\times 3^{n-1}-2^n$

$$u_n=2\times 3^{n-1}-2^n$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ គឺ $u_n=2\times 3^{n-1}-2^n$

ឧទាហរណ៍ ៦០

ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន

$u_1=1, u_2=4, u_{n+2}=6u_{n+1}-9u_n$ ។ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទីn នៃស្វ៊ីត (u_n)

គេមាន $u_1=1, u_2=4, u_{n+2}=6u_{n+1}-9u_n$ ឬ $u_{n+2}-6u_{n+1}+9u_n=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2-6\lambda+9=0$,$\Delta=0$ មានឫសឌុប $\lambda_1=\lambda_2=\lambda=3$

តាង $v_n=u_{n+1}-\lambda u_n=u_{n+1}-3u_n$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2}-3u_{n+1} \\ &= 6u_{n+1}-9u_n-3u_{n+1} \\ &= 3u_{n+1}-9u_n \\ &= 3(u_{n+1}-3u_n) \\ v_{n+1} &= 3v_n \end{aligned}$$

ដោយ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែល $q=3; v_1=u_2-3u_1=4-3(1)=1$

នាំឱ្យ $v_n=v_1.q^{n-1}=3^{n-1}$

គេបាន

$$u_{n+1}-3u_n=3^{n-1} \tag{13}$$

យកសមីការ (13) ចែកនឹង 3^{n-1}

គេបាន $\dfrac{u_{n+1}}{3^{n-1}}-3.\dfrac{u_n}{3^{n-1}}=1$ ឬ $\dfrac{u_{n+1}}{3^{n-1}}-\dfrac{u_n}{3^{n-2}}=1$

តាង

$$w_n=\frac{u_n}{3^{n-2}} \Rightarrow w_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{3^{n-1}} \tag{14}$$

គេបាន $w_{n+1}-w_n=1$ នោះ (w_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែល $d=1, w_1=\dfrac{u_1}{3^{1-2}}=\dfrac{1}{3^{-1}}=3$

នាំឱ្យ $w_n = w_1 + (n-1)d$

$= 3 + (n-1)1$

$= n+2$

តាម (14) គេបាន $n+2 = \dfrac{u_n}{3^{n-2}} \Rightarrow u_n = (n+2)3^{n-2}$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ គឺ $u_n = (n+2)3^{n-2}$

ប្រតិបត្តិ ២៧

រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) ចំពោះ $n \in \mathbb{N}_0$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើននីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $\begin{cases} u_0 = 5, u_1 = 8 \\ u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} \end{cases}$

២. $\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 8 \\ u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2} \end{cases}$

៣. $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_n = 3u_{n-1} - u_{n-2} \end{cases}$

៤. $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_n = 5u_{n-1} - 3u_{n-2} \end{cases}$

វិធាន ១១

⋇ របៀបទី២

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$ (15)

- បើ $\Delta \neq 0$ នោះសមីការ (15) មានឫសពីរគឺ λ_1, λ_2 ដែល $\lambda_1 \neq \lambda_2$
ចំពោះ $n \in \mathbb{N}_0$ គេបានតួទូទៅ $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n \quad ,A,B \in \mathbb{R}$
- បើ $\Delta = 0$ នោះសមីការ (15) មានឫសឌុបគឺ $\lambda_1 = \lambda_2$
គេបានតួទូទៅ $u_n = (A+nB)\lambda^n \ ,A,B \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$

ឧទាហរណ៍ ៦១

កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត Fibonacci ដែលកំណត់ដោយ $f_0 = 0, f_1 = 1$ និង $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ ចំពោះ $n \geq 0$ ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត Fibonacci

គេមានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0\,, \Delta = \sqrt{5}$ និងមានឫសពីរ $\lambda_1, \lambda_2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

គេបាន $f_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n = A\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

ចំពោះ $f_0 = 0 \Longrightarrow f_0 = A\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + B\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0$

$$A + B = 0 \Longrightarrow A = -B \qquad (16)$$

ចំពោះ $f_1 = 1 \Longrightarrow f_1 = A\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + B\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$

$$A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \qquad (17)$$

យកសមីការ (16) ជំនួសចូល (17)

គេបាន
$$-B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$
$$B\left(-\cancel{1} - \sqrt{5} + \cancel{1} - \sqrt{5}\right) = 2$$
$$B = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \Longrightarrow A = \frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$\Longrightarrow f_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តួទូទៅនៃស្វ៊ីតគឺ } f_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}$

ឧទាហរណ៍ ៦២

រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) ដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន

$u_0 = 0, u_1 = \sin\alpha$ និង $u_{n+2} = 2\cos\alpha . u_{n+1} - u_n$ ចំពោះ $n \geq 0$ និង $\alpha \neq n\pi$

។

ចម្លើយ៖

រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n)

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 2\cos\alpha\lambda + 1 = 0$ ដែល $\Delta = (2\cos\alpha)^2 - 4$

នោះ $\lambda_1, \lambda_2 = \dfrac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2} = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1}$

$= \cos\alpha \pm \sqrt{-\sin^2\alpha}$ $,\cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha$

$= \cos\alpha \pm i\sin\alpha$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

និង $i^2 = -1$

គេបាន

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n = A(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n + B(\cos\alpha - i\sin\alpha)^n \qquad (18)$$

ចំពោះ $u_0 = 0 \Longrightarrow u_0 = A(\cos\alpha + i\sin\alpha)^0 + B(\cos\alpha - i\sin\alpha)^0$

$$A + B = 0 \Longrightarrow B = -A \qquad (19)$$

ចំពោះ $u_1 = \sin\alpha \Longrightarrow u_1 = A(\cos\alpha + i\sin\alpha)^1 + B(\cos\alpha - i\sin\alpha)^1$

$$A(\cos\alpha + i\sin\alpha) + B(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \sin\alpha \qquad (20)$$

យកសមីការ (19) ជំនួសចូល (20)

គេបាន $A(\cos\alpha + i\sin\alpha) - A(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \sin\alpha$

$$A\left(\cos\alpha + i\sin\alpha - \cos\alpha + i\sin\alpha\right) = \sin\alpha \ , \alpha \neq 0$$

$$A2i\sin\alpha = \sin\alpha$$

$$A2i = 1$$

$$A = \frac{1}{2i}$$

$$B = -\frac{1}{2i}$$

ជំនួសចូល (18) គេបាន $u_n = \frac{1}{2i}(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n - \frac{1}{2i}(\cos\alpha - i\sin\alpha)^n$

$$= \frac{1}{2i}\left[(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n - (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n\right]$$

$$= \frac{1}{2i}(\cos n\alpha + i\sin n\alpha - \cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

$$= \sin n\alpha$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តួទូទៅនៃស្វ៊ីតគឺ } u_n = \sin n\alpha}$

ឧទាហរណ៍ ៦៣

កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន

$u_1 = 3, u_2 = 27$ និង $u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2}$ ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n)

គេមានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 = 6\lambda - 9 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

ដែល $\Delta = (-6)^2 + 4(-9) = 0$ នោះសមីការមានឫសឌុប $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{6}{2} = \lambda = 3$

គេបាន

$$u_n = (A + nB)\lambda^n = (A + nB)3^n \tag{21}$$

ចំពោះ $n = 1$ និង $u_1 = 3$ គេបាន $u_1 = (A + B)3$ ឬ $3 = (A + B)3$

$$A + B = 1 \tag{22}$$

ចំពោះ $n = 2$ និង $u_2 = 27$ គេបាន $u_2 = (A + 2B)3^2$ ឬ $27 = (A + 2B)9$

$$A + 2B = 3 \tag{23}$$

យកសមីការ (23) ដក (22) $A + 2B - (A + B) = 3 - 1$

$$B = 2$$

$$A = 1 - B$$

$$= 1 - 2 = -1$$

ជំនួសចូល (21) គេបាន $u_n = (-1+2n)3^n = 3^n(2n-1)$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តួទូទៅនៃស្វ៊ីត } (u_n) \text{ គឺ } u_n = 3^n(2n-1)}$

ប្រតិបត្តិ ២៨

រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើននីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 7 \\ u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} \end{cases}$

២. $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ u_n = \dfrac{1}{2}u_{n-1} + 2u_{n-2} \end{cases}$

៧

ផ្នែក

វិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

យើងធ្លាប់បានសិក្សារួចមកហើយអំពីប្រភេទសម្រាយបញ្ជាក់មួយចំនួននៅក្នុងមេរៀនតក្កវិទ្យាដែលបកស្រាយទៅលើសំណើ ។ ឥឡូវយើងនឹងសិក្សាទៅលើសម្រាយបញ្ជាក់ថ្មីមួយទៀតដែលគេហៅថា **សម្រាយបញ្ជាក់តាមវិធានវិចារអនុមាណរួមគណិតវិទ្យា**ដូចខាងក្រោម៖

និយមន័យ ៧.០.១ ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(n)$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ជាសំណើពិត គេត្រូវ៖

- ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $P(n)$ ពិតចំពោះ $n = 1$
- ឧបមាថា $P(k)$ ពិតចំពោះតម្លៃ $n = k$
- ស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(k)$ ពិត នាំឱ្យគេបាន $P(k+1)$ ពិត ។

ឧទាហរណ៍ ៦៨

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

ចម្លើយ៖

តាងសំណើ $P(n): 1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

ចំពោះ $n = 1$ នោះ $P(1): 1 = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$ ពិត

ឧបមាថា $P(k): 1+2+3+\cdots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា $P(k+1): 1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ ពិត

យើងមាន $P(k): 1+2+3+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ បូកអង្គទាំងពីរនឹង $k+1$

គេបាន $1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad \text{(មានន័យថា } P(k) \text{ ពិត)}$$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាគេបានសំណើ $P(k)$ ពិត

ដូចនេះ $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

ឧទាហរណ៍ ៦៥

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2^{n+1}+3^{2n-1}$ ជាពហុគុណនៃ 7 ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$

ចម្លើយ៖

ចំពោះ $n=1$ នោះ $2^{1+1}+3^{2\times1-1}=2^2+3=7$ ជាពហុគុណនៃ 7 ពិត

ឧបមាថា $n=k$ ពិត គឺ $2^{k+1}+3^{2k-1}$ ជាពហុគុណនៃ 7 ឬ $2^{k+1}+3^{2k-1}=7q\ ,\ q\in\mathbb{Z}$

យើងនឹងស្រាយពិតដល់ $n=k+1$ គឺស្រាយថា $2^{k+2}+3^{2k+1}$ ជាពហុគុណនៃ 7

យើងមាន $2^{k+2}+3^{2k+1}=2\times2^{k+1}+3^2\times3^{2k-1}$

$$=2\times2^{k+1}+2\times3^{2k-1}+7\times3^{2k-1}$$

$$=2(2^{k+1}+3^{2k-1})+7\times3^{2k-1}$$

$$=2(7q)+7\times3^{2k-1}$$

$2^{k+1}+3^{2k-1}=7q\ ,q\in\mathbb{Z}$

$$=7(2q+3^{2k-1})=7p\ ,\ p=2q+3^{2k-1}\in\mathbb{Z}$$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

ដូចនេះ $2^{n+1}+3^{2n-1}$ ជាពហុគុណនៃ 7 ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$

ឧទាហរណ៍ ៦៦

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\right)\geq n^2\ ,\forall n\in\mathbb{N}$

ចម្លើយះ

ចំពោះ $n=1$ នោះ $1\geq 1$ ពិត

ឧបមាថា $n=k$ ពិត គឺ $\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)\geq k^2$

យើងនឹងស្រាយពិតដល់ $n=k+1$ គឺស្រាយថា $\left(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1}i\right)\geq (k+1)^2$

យើងមាន $$\left(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1}i\right)\geq (k+1)^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}+\frac{1}{k+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}i+(k+1)\right)\geq (k+1)^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)+(k+1)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}+\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k}i+\cancel{1}\geq k^2+2k+\cancel{1}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)+(k+1)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}+\frac{1}{\cancel{k+1}}\frac{k\cancel{(k+1)}}{2}\geq k^2+2k$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)+(k+1)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}+\frac{k}{2}\geq k^2+2k \qquad (1)$$

ដោយ $$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)\geq k^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\frac{k(k+1)}{2}\geq k^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)(k+1)\geq 2k$$

នាំឱ្យសមីការ (1) : $$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)+(k+1)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}+\frac{k}{2}\geq k^2+2k$$

$$k^2+2k+\frac{k}{2}\geq k^2+2k$$

$$\frac{k}{2}\geq 0\,,\forall k\in\mathbb{N}$$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

ដូចនេះ $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)\geq n^2\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$

ប្រតិបត្តិ ២៩

ស្រាយបញ្ជាក់ថា

១. $n! > 3^n$ ចំពោះ $\forall n \geq 7$ ។

២. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

៣. $\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \dfrac{1}{5.7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

1

ផ្នែកទី

លំហាត់

លំហាត់ ១ ចូរបំពេញតួនៃស្វ៊ីតក្នុងចន្លោះខាងក្រោម៖

១. $1, 5, 9, \ , \ ,$

២. $7, 10, 13, \ , \ , \ ,$

៣. $6, 3, -2, \ , \ , \ , -29$

៤. $0, 5, 12, 21, \ , \ ,$

លំហាត់ ២ សរសេរបីតួបន្ទាប់នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

១. $1, 4, 9, 16, \cdots$

២. $1, 9, 25, 49, \cdots$

លំហាត់ ៣ សរសេរប្រាំតួដំបូងនៃស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោមចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ៖

១. $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

២. $u_n = \dfrac{n^3 - 2n^2 - 1}{n^2 + n}$

៣. $u_n = 7 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$

៤. $u_1 = 1, u_{n+1} = 2u_n + 1$

លំហាត់ ៤ សរសេរបួនតួដំបូងនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 2n^2 + 1$ ។ តើចំនួន 163 និង 883 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត ?

លំហាត់ ៥ គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_1 = 0, u_2 = 3, u_3 = 12$ និង $u_n = an^2 + bn + c$ ។ កំណត់ចំនួនពិត a, b និង c ។

លំហាត់ ៦ កំណត់តួទី n ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ នៃស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $1, 3, 5, 7, 9, \cdots$

២. $2, 2, 2, 2, 2, \cdots$

៣. $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \cdots$

៤. $\frac{1}{2.3}, \frac{2}{3.4}, \frac{3}{4.5}, \frac{4}{5.6}, \cdots$

លំហាត់ ៧ បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតកើន៖

១. $u_n = -\frac{n}{n+1}$ ២. $u_n = n^2 - 2n$ ៣. $u_n = \frac{n^2+1}{n+2}$

លំហាត់ ៨ បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតចុះ៖

១. $u_n = \frac{1}{n+1}$ ២. $u_n = \frac{2}{3^n}$ ៣. $u_n = \frac{2n}{n^2} + 5$

លំហាត់ ៩ សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស្វ៊ីតដែលកំណត់ដូចខាងក្រោម៖

១. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \frac{1}{n^2}$

២. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 2^{n+1}3^n$

៣. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \frac{n!}{2^n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$

លំហាត់ ១០ គេឱ្យស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = (3^n + 4^n)^{\frac{1}{n}}$ ។ បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតចុះ ។

លំហាត់ ១១ បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \frac{n+1}{e^n}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ ។

លំហាត់ ១២ តើស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ខាងក្រោមជាស្វ៊ីតទាល់ ឬ ទេ ?

១. $u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

២. $u_n = \frac{\pi^n}{n}$

លំហាត់ ១៣ តើស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោមនេះ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តឬទេ ? បើវាជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ចូរកំណត់តួទីមួយ និងផលសងរួមរបស់វា៖

១. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 2n - 3$

២. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 4 - 3n$

៣. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = n^2 + 1$

៤. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \frac{2(n-3)}{5}$

លំហាត់ ១៤ រក u_n ចំពោះស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $5, 7, 9, 11, 13, \cdots$

២. $1, 6, 11, 16, 21, \cdots$

៣. $8, 14, 20, 26, 32, \cdots$

៤. $60, 51, 42, 33, 24, \ldots$

៥. $4, 0, -4, -8, -12, \ldots$

៦. $\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \ldots$ ។

លំហាត់ ១៥ គេឱ្យស្វ៊ីត $7, 18, 29, 40, 51, \cdots$ ។ រក u_n និង u_{20} ។

លំហាត់ ១៦ រក u_n និង u_{13} ចំពោះស្វ៊ីត $200, 310, 420, 530, 640, \ldots$ ។

លំហាត់ ១៧ គេឱ្យស្វ៊ីត $17, 10, 3, -4, -11, \cdots$ ។ រក u_n និង u_{19} ។

លំហាត់ ១៨ តើចំនួន 1000 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត $9, 16, 23, 30, 37, \ldots$?

លំហាត់ ១៩ តើចំនួន 500 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត $28, 50, 72, 94, 116, \ldots$?

លំហាត់ ២០ រក u_n ចំពោះករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $u_5 = 17$ និង $u_9 = 33$

២. $u_4 = 43$ និង $u_{10} = 97$

៣. $u_8 = -8$ និង $u_{14} = -11$ ។

លំហាត់ ២១ បង្ហាញថាបីចំនួនខាងក្រោមបង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្ត៖

១. $\frac{1}{x-1}, \frac{x}{x^2-1}, \frac{1}{x+1}$

២. $(a^2+b^2)^2, (a^4+b^4), (a^2-b^2)^2$

៣. $\frac{2}{x+1}, \frac{x+1}{x}, \frac{x^2+1}{x(x+1)}$

៤. $(a^2-2ab-b^2)^2, (a^2+b^2)^2, (a^2+2ab-b^2)^2$

លំហាត់ ២២ កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យបីចំនួនខាងក្រោមបង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្ត៖

១. $(1+x)^2, (3+x)^2, (9+x)^2$

២. $(2-x)^2, 2x, 2+x$

៣. $a^2(b+x), b^2(a+x), x^2(a+b)$

លំហាត់ ២៣ រកតួទីមួយ និងផលសងរួមរបស់ស្វ៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កាលណាគេស្គាល់៖

១. $u_4 = 15$ និង $S_5 = 55$

២. $u_3 + u_5 = 4$ និង $S_{12} = 129$

៣. $u_5 + u_3 = 4$ និង $u_2 u_4 = -3$

៤. $S_5 = 35$ និង $u_4 u_5 = 130$

៥. $u_1 + u_7 = 4$ និង $u_3^2 + u_7^2 = 122$

លំហាត់ ២៤ គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $2+5+8+11+14+\dots$

២. $8+10+12+14+16+\dots$

៣. $80+77+74+71+68+\dots$

៤. $2008+1996+1984+1972+1960+\dots$

៥. $\frac{1}{2}+\frac{5}{6}+\frac{7}{6}+\frac{3}{2}+\frac{11}{6}+\dots$ ។

លំហាត់ ២៥ គេឱ្យតួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $u_n=5n-3$ គណនា S_{12} ។

លំហាត់ ២៦ គេឱ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $4,15,26,37,\dots$ ។

១. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

២. រួចគណនាផលបូក 20 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះ ។

លំហាត់ ២៧ គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត $9,5,1,-3,-7,\dots$ ។

១. គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីត ។

២. តើចំនួន -67 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះ ។

លំហាត់ ២៨ កំណត់បីចំនួនពិតតគ្នា a,b,c នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ បើគេដឹងថា៖

១. $a+b+c=30$ និង $abc=910$

២. $a+b+c=-9$ និង $abc=48$

៣. $a+b+c=18$ និង $a^2+b^2+c^2=206$

៤. $a+b+c=9$ និង $a^4+b^4+c^4=707$

លំហាត់ ២៩ រង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណកែងមួយតំរៀបតគ្នា បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែលមានផលសងរួមស្មើ 21 ម៉ែត្រ ។ គណនារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណកែងនេះ ។

លំហាត់ ៣០ ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

១. បើ a,b,c ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ a^2-bc,b^2-ac,c^2-ab ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

២. បើ $\frac{1}{a+b},\frac{1}{a+c},\frac{1}{b+c}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ a^2,b^2,c^2 ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

៣. ចំពោះគ្រប់ $a\neq 0$ និង $b\neq 0$ នោះ $\frac{a}{b(a-b)},\frac{a+b}{2ab},\frac{b}{a(b-a)}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

លំហាត់ ៣១ ១. គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយ $u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n$ ដែលគ្រប់តួនៃស្វ៊ីតនេះជាចំនួនខុសពីសូន្យ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{1}{u_1.u_2}+\dfrac{1}{u_2.u_3}+\dfrac{1}{u_3.u_4}+\cdots+\dfrac{1}{u_n.u_{n+1}}=\dfrac{n}{u_1.u_{n+1}}$ ។

២. គណនាផលបូក $S_n=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$ ។

លំហាត់ ៣២ គេឱ្យពីរចំនួន u_0 និង u_1 គេបង្កើតចំនួន

$u_2=u_0+u_1, u_3=u_1+u_2,\cdots,u_{n+1}=u_{n-1}+u_n$ ។

បង្ហាញថា $u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{n-1}=u_{n+1}-u_1$ ។

លំហាត់ ៣៣ គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលមានតួទីមួយ $u_1=1$ ។ គណនាផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះក្នុងករណីខាងក្រោម៖

១. ផលធៀបតួទី 8 និងតួទី 3 ស្មើនឹង 4 ។

២. ផលដកការេនៃតួទី 10 និងតួទី 7 ស្មើនឹង 3 ។

លំហាត់ ៣៤ គេឱ្យ a,b,c ជាមុំក្នុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $\cot a,\cot b,\cot c$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តនោះគេបាន $\sin^2 a,\sin^2 b,\sin^2 c$ ក៏ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែរ ។

លំហាត់ ៣៥ កំណត់ផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ និងសរសេរបីតួបន្ទាប់ទៀតនៃស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $8,4,2,1,\dfrac{1}{2},\cdots$

២. $8,4\sqrt{2},4,2\sqrt{2},\cdots$

៣. $\sqrt{3},3,3\sqrt{3},9,\cdots$

លំហាត់ ៣៦ កំណត់តួទី n និង តួទី 15 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $625,125,25,5,1,\cdots$

២. $5,-\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{4},-\dfrac{5}{8},\cdots$

៣. $1,\sqrt{7},7,7\sqrt{7},49,\cdots$

លំហាត់ ៣៧ តើស្វ៊ីតធរណីមាត្រនីមួយៗខាងក្រោមមានចំនួនប៉ុន្មានតួ ?

១. $1,2,4,8,16,\cdots,1024$

២. $5,10,20,\cdots,5.2^n$

៣. $x^7,-x^6,x^5,\cdots,x^{-7}$ $,x\neq 1$ និង $x>0$

លំហាត់ ៣៨ គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $3,12,48,\cdots$ ។

១. គណនាតួទី 9 នៃស្វ៊ីត ។ ២. តើចំនួន 12288 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត?

៣. គណនាផលបូក 30 តួដំបូងនៃស្វ៊ីត ។

លំហាត់ ៣៩ សរសេរបួនតួដំបូងនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ រួចបង្ហាញថាវាជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

លំហាត់ ៤០ រកតួទី១ និង ផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ នីមួយៗខាងក្រោម បើគេស្គាល់៖

១. $u_3 = 1$ និង $u_7 = 81$ ២. $u_2 + u_3 = 9$ និង $u_7 = 8u_4$

៣. $S_n = \frac{1}{3} - \frac{2^n}{3^{n+1}}$ ៤. $u_1 + u_2 = 18$ និង $u_2 + u_3 = 36$

លំហាត់ ៤១ គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $5, 15, 45, \cdots$ ។ គណនាផលបូក n តួដំបូង S_n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រនេះ ។ រក u_n រួចបង្ហាញថា $3u_n = 2S_n + 5$ ។

លំហាត់ ៤២ គេមាន u_1, u_2, u_3 ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។ កំណត់រក u_1 និងផលធៀបរួម q នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ បើគេស្គាល់៖

១. $u_1 + u_2 + u_3 = 28$ និង $u_1u_2u_3 = 512$

២. $u_1 + u_2 + u_3 = 13$ និង $u_1u_2u_3 = -64$ ។

លំហាត់ ៤៣ កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យបីចំនួន $x, 2x+6, 4x+36$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

លំហាត់ ៤៤ រកបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ បើគេដឹងថា ផលបូកបីតួនេះស្មើ 26 និងផលគុណបីតួនេះស្មើ 216 ។

លំហាត់ ៤៥ រកពីរចំនួន a និង b ដែលបីតួ $a, b, 10$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តផង និងស្វ៊ីតធរណីមាត្រផង ។

លំហាត់ ៤៦ តើគេត្រូវថែមប៉ុន្មានទៅលើចំនួន $3, 24, 94$ ដើម្បីឱ្យបានបីតួបន្តបន្ទាប់គ្នានៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ។

លំហាត់ ៤៧ គេឱ្យផលបូក $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n+1} = 1022$ ។ គណនាតម្លៃ n ។

លំហាត់ ៤៨ គណនាតម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ $a, 28, b$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

បើ $a+b=119$ ។

លំហាត់ ៤៩ គណនាបីចំនួន a,b,c នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ បើគេដឹងថា៖

១. $a+b+c=310$ និង $b^2=10c$

២. $a+b+c=13$ និង $a^2+b^2+c^2=91$ ។

លំហាត់ ៥០ បើ a,b,c ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ស្រាយបញ្ជាក់ថាបីចំនួនខាងក្រោមជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែរ៖

១. a^2,b^2,c^2 ២. $\frac{1}{a^2},\frac{1}{b^2},\frac{1}{c^2}$ ៣. $\frac{1}{a^k},\frac{1}{b^k},\frac{1}{c^k}$ ។

លំហាត់ ៥១ គណនាផលបូកខាងក្រោម៖

១. $S_n=1+11+111+\cdots+\underbrace{111\cdots11}_{n\text{ ដងលេខ }1}$

២. $S_n=3+33+333+\cdots+\underbrace{333\cdots33}_{n\text{ ដងលេខ }3}$

៣. $S_n=7+77+777+\cdots+\underbrace{777\cdots77}_{n\text{ ដងលេខ }7}$

លំហាត់ ៥២ បើ a,b,c,d ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

១. $(a-d)^2=(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2$

២. $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$

៣. $(a+b+c)(b+c+d)(a-b+c)(b-c+d)=(ab+bc+cd)^2$ ។

លំហាត់ ៥៣ គេឱ្យចំនួនពិត a,b និងស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ មួយដែលកំណត់ដោយ $u_{n+1}=au_n+b$

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_{n+2}-u_{n+1}=a(u_{n+1}-u_n)$ ។

២. បើ $v_n=u_{n+1}-u_n$ តើស្វ៊ីត (v_n) ជាស្វ៊ីតអ្វី ?

លំហាត់ ៥៤ សរសេរចំនួនទសភាគខួបខាងក្រោម ជាចំនួនសនិទានដែលមានទំរង់ $\frac{a}{b}$

១. $0.\overline{8}$ ២. $0.\overline{34}$ ៣. $2.3\overline{5}$ ៤. $5.3\overline{54}$

លំហាត់ ៥៥ គណនាផលបូក

១. $\sum_{k=1}^{4}(3k+1)$ ២. $\sum_{k=1}^{25}k$

៣. $\sum_{k=100}^{200} k$

៤. $\sum_{k=1}^{55}(3k-2)$

៥. $\sum_{k=1}^{90}(2-7k)$

៦. $\sum_{k=13}^{46}(9+2k)$

លំហាត់ ៥៦ គណនាផលបូក

១. $\sum_{k=3}^{n} 3$

២. $\sum_{k=1}^{n} 2k$

៣. $\sum_{k=10}^{n} k^3$

៤. $\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+1)$

៥. $\sum_{k=1}^{n}(3k-1)^2$

៦. $\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k-1)$

លំហាត់ ៥៧ បង្ហាញថា

១. $\sum_{k=1}^{n^2} k-\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n^3-1)}{2}$

២. $\sum_{k=1}^{n+2}(2k+3)=(n+2)(n+6)$

៣. $\sum_{k=n+1}^{2n} k^2=\frac{n(2n+1)(7n+1)}{6}$

លំហាត់ ៥៨ បង្ហាញថា

១. $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{i} r^2\right)=\frac{1}{12}.n(n+1)^2(n+2)$

២. $\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\left(\sum_{r=1}^{i} r\right)\right)=\frac{1}{24}.n(n+1)(n+2)(n+3)$

លំហាត់ ៥៩ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ស្រាបញ្ជាក់ថា $11^{n+1}+12^{2n-1}$ ចែកដាច់នឹង 133 ។

លំហាត់ ៦០ ស្រាយបញ្ជាក់ថា 7^n-1 ជាពហុគុណនៃ 6 ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

លំហាត់ ៦១ បង្ហាញថា 13^n+11 ជាពហុគុណនៃ 12 ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

លំហាត់ ៦២ បង្ហាញថា $(1+x)^n\geq(1+nx)$ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ និង $x>-1$ ។

លំហាត់ ៦៣ ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ បង្ហាញថា $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$ ។

លំហាត់ ៦៤ គណនាផលបូក ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

១. $A=11+12+13+\cdots.+100$

២. $B=13^2+14^2+15^2+\cdots+50^2$

៣. $C=10^3+11^3+12^3+\cdots+30^3$

៤. $S_n=1.2+2.3+3.4+\cdots+n(n+1)$

៥. $S_n=1.4+2.7+3.10+\cdots+n(3n+1)$

៦. $S_n=1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots+n(n+1)(n+2)$

៧. $S_n=2.4.6+4.6.8+6.8.10+\cdots+2n(2n+2)(2n+4)$

៨. $S_n=1.3+2.9+3.27+\cdots+n3^n$

៩. $S_n=2+4x+6x^2+8x^3+\cdots+2nx^{n-1} \quad ,x>1$

១០. $S_n=1.2^2+2.3^2+3.4^2+\cdots+(n-1)n^2$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$ ។

១១. $S_n=8+88+888+\cdots+\underbrace{888\cdots 88}_{n \text{ ដងលេខ } 8}$

១២. $S_n=13+1313+131313+\cdots+\underbrace{131313\cdots 1313}_{n \text{ ដងលេខ } 13}$

លំហាត់ ៦៥ គេឱ្យស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ ។

១. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ។

២. គណនាផលបូក 999 តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ។

៣. គណនា $A=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2018}}$

លំហាត់ ៦៦ គណាផលបូក $A_n=\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{2.4}+\dfrac{1}{3.5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}$

លំហាត់ ៦៧ គណនា $S_n=1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

លំហាត់ ៦៨ គណនាផលបូក

១. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!k$

២. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

៣. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$

៤. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(k-1)!+k!+(k+1)!}$

លំហាត់ ៦៩ គណនាផលបូក

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2011^2}+\frac{1}{2012^2}}$$

លំហាត់ ៧០ គណនាផលគុណ

១. $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$

២. $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2020^2}\right)$

លំហាត់ ៧១ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n) : 1, 5, 11, 19, 29, 41, \cdots$ ។

លំហាត់ ៧២ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n) : 1, 3, 7, 15, 31, 63, \cdots$ ។

លំហាត់ ៧៣ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n) : 3, 8, 16, 27, 41, 58, \cdots$ ។
គណនាផលបូក n តួតំបូងនៃស្វ៊ីត (u_n) ។

លំហាត់ ៧៤ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(a_n) : 1, 12, 37, 82, 153, 256, \cdots$ ។

លំហាត់ ៧៥ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(a_n) : 1, 7, 23, 55, 109, 191, \cdots$ ។
គណនាផលបូក n តួបំបូងនៃស្វ៊ីត a_n ។

លំហាត់ ៧៦ កំណត់តួទី n នៃទំនាក់ទំនងស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $u_1 = -1$; $u_{n+1} = -5u_n - 1$
២. $u_1 = -2$; $u_{n+1} = u_n + 5$
៣. $u_1 = 3$; $u_{n+1} = 4u_n - 3n - 1$
៤. $u_1 = 2$; $u_{n+1} = 7u_n - n3^n$
៥. $u_1 = 1$; $u_{n+1} = -2u_n + 3n^2$
៦. $u_1 = -3$; $u_{n+1} = u_n + n^3$

លំហាត់ ៧៧ រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើននីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$

៣. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{4u_n-1} \end{cases}$

២. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+4} \end{cases}$

៤. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n+1}{4u_n+2} \end{cases}$

លំហាត់ ៧៨ រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើននីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n \end{cases}$

២. $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 8 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$

៣. $\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 15 \\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 25u_n \end{cases}$

៥. $\begin{cases} u_1 = 5, u_2 = 11 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + 10u_n \end{cases}$

៤. $\begin{cases} u_1 = 0, u_2 = 3 \\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0 \end{cases}$

៦. $\begin{cases} u_1 = 9, u_2 = 13 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} + 21u_n \end{cases}$

2

ផ្នែកទី

លំហាត់និងដំណោះស្រាយ

លំហាត់ ១

ចូរបំពេញតួនៃស្វ៊ីតក្នុងចន្លោះខាងក្រោម៖

១. $1, 5, 9, \;,\;,$

២. $7, 10, 13, \;,\;,$

៣. $6, 3, -2, \;,\;, -29$

៤. $0, 5, 12, 21, \;,$

ចម្លើយ៖

១. តាង

$u_1 = 1$

$u_2 = 5 = u_1 + 4$

$u_3 = 9 = u_2 + 4$

$u_4 = u_3 + 4 = 9 + 4 = 13$

$u_5 = u_4 + 4 = 13 + 4 = 17$

$u_6 = u_5 + 4 = 17 + 4 = 21$

ដូចនេះ៖ $1, 5, 9, 13, 17, 21$

២. តាង

$u_1 = 7$

$u_2 = 10 = 3(2) + 4$

$u_3 = 13 = 3(3) + 4$

$u_4 = 3(4) + 4 = 16$

$u_5 = 3(5) + 4 = 19$

$u_6 = 3(6) + 4 = 22$

ដូចនេះ៖ $7, 10, 13, 16, 19, 22$

៣. តាង $u_1 = 6 = 7 - 1^2$

$u_2 = 3 = 7 - 2^2$

$u_3 = -2 = 7 - 3^2$

$u_4 = 7 - 4^2 = -9$

$u_5 = 7 - 5^2 = -18$

$u_6 = 7 - 6^2 = -29$

ដូចនេះ $6, 3, -2, -9, -18, -29$

៤. តាង $u_1 = 0 = 1^2 + 2(1) - 3$

$u_2 = 5 = 2^2 + 2(2) - 3$

$u_3 = 12 = 3^2 + 2(3) - 3$

$u_4 = 21 = 4^2 + 2(4) - 3$

$u_5 = 5^2 + 2(5) - 3 = 32$

$u_6 = 6^2 + 2(6) - 3 = 45$

ដូចនេះ $0, 5, 12, 21, 32, 45$

លំហាត់ ២

សរសេរបីតួបន្ទាប់នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម៖

១. $1, 4, 9, 16, \cdots$

២. $1, 9, 25, 49, \cdots$

ចម្លើយ៖

១. យើងមាន $u_1 = 1 = 1^2$

$u_2 = 4 = 2^2$

$u_3 = 9 = 3^2$

$u_4 = 16 = 4^2$

$u_5 = 5^2 = 25$

$u_6 = 6^2 = 36$

$u_7 = 7^2 = 49$

ដូចនេះ $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49$

២. យើងមាន $u_1 = 1 = (2 \times 1 - 1)^2$

$u_2 = 9 = (2 \times 2 - 1)^2$

$u_3 = 25 = (2 \times 3 - 1)^2$

$u_4 = 49 = (2 \times 4 - 1)^2$

$u_5 = (2 \times 5 - 1)^2 = 81$

$u_6 = (2 \times 6 - 1)^2 = 121$

$u_7 = (2 \times 7 - 1)^2 = 169$

ដូចនេះ $1, 9, 25, 49, 81, 121, 169$

លំហាត់ ៣

សរសេរប្រាំតួដំបូងនៃស្វីតនីមួយៗខាងក្រោមចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ៖

១. $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

២. $u_n = \dfrac{n^3-2n^2-1}{n^2+n}$

៣. $u_n = 7 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$

៤. $u_1 = 1, u_{n+1} = 2u_n + 1$

ចម្លើយ៖

១. $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

$$u_1 = \frac{(-1)^{1+1}}{1+1} = \frac{1}{2}$$
$$u_2 = \frac{(-1)^{2+1}}{2+1} = -\frac{1}{3}$$
$$u_3 = \frac{(-1)^{3+1}}{3+1} = \frac{1}{4}$$
$$u_4 = \frac{(-1)^{4+1}}{4+1} = -\frac{1}{5}$$
$$u_5 = \frac{(-1)^{5+1}}{5+1} = \frac{1}{6}$$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{6}$

២. $u_n = \dfrac{n^3-2n^2-1}{n^2+n}$

$$u_1 = \frac{1^3-2(1)^2-1}{1^2+1} = -1$$
$$u_2 = \frac{2^3-2(2)^2-1}{2^2+2} = -\frac{1}{6}$$
$$u_3 = \frac{3^3-2(3)^2-1}{3^2+3} = \frac{2}{3}$$
$$u_4 = \frac{4^3-2(4)^2-1}{4^2+4} = \frac{31}{20}$$
$$u_5 = \frac{5^3-2(5)^2-1}{5^2+5} = \frac{37}{15}$$

ដូចនេះ $-1, -\dfrac{1}{6}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{31}{20}, \dfrac{37}{15}$

៣. $u_n = 7 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$

$$u_1 = 7 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1^2} = 7$$
$$u_2 = 7 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{27}{4}$$
$$u_3 = 7 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} = \frac{61}{9}$$
$$u_4 = 7 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} = \frac{109}{16}$$
$$u_5 = 7 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} = \frac{171}{25}$$

ដូចនេះ $7, \dfrac{27}{4}, \dfrac{61}{9}, \dfrac{109}{16}, \dfrac{171}{25}$

៤. $u_{n+1} = 2u_n + 1$

$$u_1 = 1$$
$$u_2 = 2u_1 + 1 = 2(1) + 1 = 3$$
$$u_3 = 2u_2 + 1 = 2(3) + 1 = 7$$
$$u_4 = 2u_3 + 1 = 2(7) + 1 = 15$$
$$u_5 = 2u_4 + 1 = 2(15) + 1 = 31$$

ដូចនេះ $1, 3, 7, 15, 31$

លំហាត់ ៨

សរសេរបួនតួដំបូងនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 2n^2+1$ ។ តើចំនួន 163 និង 883 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត ?

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_n = 2n^2+1$

គេបាន $u_1 = 2(1)^2+1 = 3$

$u_2 = 2(2)^2+1 = 9$

$u_3 = 2(3)^2+1 = 19$

$u_4 = 2(4)^2+1 = 33$

តាង $u_n = 163$ សមមូល $163 = 2n^2+1$

$$162 = 2n^2$$

$$n^2 = \frac{162}{2} = 81$$

$$n = \pm\sqrt{9^2} \Rightarrow n = 9$$

$n = \pm 9 \Rightarrow n = 9$

ព្រោះ $n = -9 \notin \mathbb{N}$

និង $u_n = 883$ សមមូល $883 = 2n^2+1$

$$882 = 2n^2$$

$$n^2 = \frac{882}{2} = 441$$

$n = \pm\sqrt{21^2} \Rightarrow n = 21$ ព្រោះ $-21 \notin \mathbb{N}$

ដូចនេះ បួនតួដំបូងគឺ $3, 9, 19, 33$, ចំនួន 163 ជាតួទី 9 និងចំនួន 883 ជាតួទី 21

លំហាត់ ៩

គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_1 = 0, u_2 = 3, u_3 = 12$

និង $u_n = an^2+bn+c$ ។ កំណត់ចំនួនពិត a, b និង c ។

Tel: 016 434 006

ចម្លើយ៖

កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c

យើងមាន $u_1=0,u_2=3,u_3=12$

និង

$$u_n=an^2+bn+c$$

$$u_1=a+b+c \quad ,u_1=0$$

$$a+b+c=0 \tag{1}$$

$$u_2=a2^2+b2+c \quad ,u_2=3$$

$$4a+2b+c=3 \tag{2}$$

$$u_3=a3^2+b3+c \quad ,u_3=12$$

$$9a+3b+c=12 \tag{3}$$

យកសមីការ (2) ដក (1) គេបាន

$$4a+2b+c-(a+b+c)=3-0$$

$$3a+b=3 \tag{4}$$

យកសមីការ (3) ដក (2) គេបាន

$$9a+3b+c-(4a+2b+c)=12-3$$

$$5a+b=9 \tag{5}$$

យកសមីការ (5) ដក (4) គេបាន

$$5a+b-(3a+b)=9-3$$

$$2a=6$$

$$\Rightarrow a=\frac{6}{2}=3 \tag{6}$$

យក (6) ជំនួសចូល (4): $3(3)+b=3 \Rightarrow b=3-9=-6$

ជំនួសចូល (1) : $3-6+c=0 \Rightarrow c=3$

ដូចនេះ $a=3, b=-6$ និង $c=3$

លំហាត់ ៦

កំណត់តួទី n ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ នៃស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $1, 3, 5, 7, 9, \cdots$

២. $2, 2, 2, 2, 2, \cdots$

៣. $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \cdots$

៤. $\frac{1}{2.3}, \frac{2}{3.4}, \frac{3}{4.5}, \frac{4}{5.6}, \cdots$

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $u_1 = 2(1)-1 = 1$

$u_2 = 2(2)-1 = 3$

$u_3 = 2(3)-1 = 5$

$u_4 = 2(4)-1 = 7$

....

ដូចនេះ $u_n = 2n-1$

២. $u_1 = 2$

$u_2 = 2$

$u_3 = 2$

$u_4 = 2$

....

ដូចនេះ $u_n = 2$

៣. $u_1 = \frac{1+1}{2(1)+1} = \frac{2}{3}$

$u_2 = \frac{2+1}{2(2)+1} = \frac{3}{5}$

$u_3 = \frac{3+1}{2(3)+1} = \frac{4}{7}$

$u_4 = \frac{4+1}{2(4)+1} = \frac{5}{9}$

....

ដូចនេះ $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$

៤. $u_1 = \frac{1}{(1+1)(1+2)} = \frac{1}{2.3}$

$u_2 = \frac{2}{(2+1)(2+2)} = \frac{2}{3.4}$

$u_3 = \frac{3}{(3+1)(3+2)} = \frac{3}{4.5}$

$u_4 = \frac{4}{(4+1)(4+2)} = \frac{4}{5.6}$

....

ដូចនេះ $u_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)}$

លំហាត់ ៧

បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតកើន៖

១. $u_n = -\dfrac{n}{n+1}$ ២. $u_n = n^2 - 2n$ ៣. $u_n = \dfrac{n^2+1}{n+2}$

ចម្លើយ៖

១. យើងមាន $u_n = -\dfrac{n}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} = -\dfrac{n+1}{n+2}$

គេបាន $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{-\frac{n+1}{n+2}}{-\frac{n}{n+1}} = \dfrac{n+1}{n+2} \times \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)} > 1 \quad ,\forall n \in \mathbb{N}$

ដូចនេះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតកើន

២. យើងមាន $u_n = n^2 - n \Rightarrow u_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1)$

គេបាន $u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n + 1 - n - 1$

$$= n^2 + n > 0 \quad ,\forall n \in \mathbb{N}$$

ដូចនេះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតកើន

៣. យើងមាន $u_n = \dfrac{n^2+1}{n+2} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2+1}{n+1+2} = \dfrac{n^2+2n+2}{n+3}$

គេបាន $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n^2+2n+2}{n+3} - \dfrac{n^2+1}{n+2}$

$$= \frac{(n+2)(n^2+2n+2) - (n+3)(n^2+1)}{(n+3)(n+2)}$$

$$= \frac{n^3+2n^2+2n+2n^2+4n+4-(n^3+n+3n^2+3)}{(n+3)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+5n+1}{(n+3)(n+2)} > 0 \quad ,\forall n \in \mathbb{N}$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើនគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

លំហាត់ ៨

បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតចុះ៖

១. $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ ២. $u_n = \dfrac{2}{3^n}$ ៣. $u_n = \dfrac{2n}{n^2}+5$

ចម្លើយ៖

១. យើងមាន $u_n = \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{1}{n+2}$

គេបាន $u_{n+1}-u_n = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1-(n+2)}{(n+1)(n+2)}$

$$= -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0 \quad ,\forall n\in\mathbb{N}$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

២. យើងមាន $u_n = \dfrac{2}{3^n} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{2}{3^{n+1}} = \dfrac{2}{3\times 3^n}$

គេបាន $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{2}{3\times 3^n}}{\frac{2}{3^n}} = \dfrac{2}{3\times 3^n}\times\dfrac{3^n}{2} = \dfrac{1}{3} < 1$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

៣. យើងមាន $u_n = \dfrac{2n}{n^2}+5 \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{(n+1)^2}+5$

គេបាន $u_{n+1}-u_n = \dfrac{2(n+1)}{(n+1)^2}+5-\left(\dfrac{2n}{n^2}+5\right)$

$$= \frac{2n^2(n+1)-2n(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{2n^3+2n^2-2n(n^2+2n+1)}{[n(n+1)]^2}$$

$$= \frac{2n^3+2n^2-2n^3-4n^2-2n}{[n(n+1)]^2}$$

$$= \frac{-2n^2-2n}{[n(n+1)]^2}$$

$$= -\frac{2(n+1)}{n^2(n+1)^2} = -\frac{2}{n^2(n+1)} < 0 \quad ,\forall n\in\mathbb{N}$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

លំហាត់ ៩

សិក្សាភាពម៉ូណូតូននៃស្វ៊ីតដែលកំណត់ដូចខាងក្រោម៖

១. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \dfrac{1}{n^2}$

២. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 2^{n+1}3^n$

៣. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \dfrac{n!}{2^n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$

ចម្លើយ៖

១. យើងមាន $u_n = \dfrac{1}{n^2} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2}$

គេបាន
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2-(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$$
$$= \frac{[n-(n+1)][n+(n+1)]}{[n(n+1)]^2}$$
$$= -\frac{2n+1}{[n(n+1)^2]} < 0 \quad ,\forall n \in \mathbb{N}$$

គេបាន (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះ នាំឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

ដូចនេះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

២. យើងមាន $u_n = 2^{n+1}3^n \Rightarrow u_{n+1} = 2^{n+2}3^{n+1}$

គេបាន
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+2}3^{n+1}}{2^{n+1}3^n}$$
$$= \frac{2\times 2^{n+1}\times 3\times 3^n}{2^{n+1}3^n} = 6 > 1$$

គេបាន (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន នាំឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

ដូចនេះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

៣. យើងមាន $u_n = \dfrac{n!}{2^n} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}}$

$$n! = n.(n-1)\cdots 3.2.1$$
$$n! = (n-1)!n$$
$$\Rightarrow (n+1)! = n!(n+1)$$

គេបាន
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}}$$
$$= \frac{\cancel{n!}(n+1)}{2\times \cancel{2^n}} \times \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{n!}} = \frac{n+1}{2} > 1 \quad ,\forall n \geq 2$$

គេបាន (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន នាំឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

ដូចនេះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$

លំហាត់ ១០

គេឱ្យស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=(3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$ ។ បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ចម្លើយ៖

បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតចុះ

យើងមាន $u_n=(3^n+4^n)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow u_{n+1}=(3^{n+1}+4^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}$

ដោយ $3^n<4^n \Leftrightarrow 3^n+4^n<2\times 4^n \Rightarrow (3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}<(2\times 4^n)^{\frac{1}{n}}=4\times 2^{\frac{1}{n}}$

ម្យ៉ាងទៀត $3^{n+1}<4^{n+1} \Leftrightarrow 3^{n+1}+4^{n+1}<2\times 4^{n+1}$

$$\Rightarrow (3^{n+1}+4^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}<(2\times 4^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}=4\times 2^{\frac{1}{n+1}}$$

គេបាន $\dfrac{(3^{n+1}+4^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}}{(3^n+4^n)^{\frac{1}{n}}}<\dfrac{4\times 2^{\frac{1}{n+1}}}{4\times 2^{\frac{1}{n}}}=2^{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}}=2^{\frac{n-n-1}{n(n+1)}}=2^{-\frac{1}{n(n+1)}}<2^0$

$\Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$ ព្រោះ $2^{-\frac{1}{n(n+1)}}<2^0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{n(n+1)}<0, \forall n\in\mathbb{N}$

ដូចនេះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតចុះ

លំហាត់ ១១

បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=\dfrac{n+1}{e^n}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ ។

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_n=\dfrac{n+1}{e^n} \Rightarrow u_{n+1}=\dfrac{n+2}{e^{n+1}}$

គេបាន $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{n+2}{e^{n+1}}\times\dfrac{e^n}{n+1}$

$$=\frac{n+2}{e(n+1)}<1 \qquad ,\forall n\in\mathbb{N}$$

នាំឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះនោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើ

ដែលមាន $u_1=\dfrac{1+1}{e^1}=\dfrac{2}{e}$ ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត

> ចំណាំ៖
> $n\to 0$ ពេល $n\to+\infty$
> (មានន័យថា n ខិតជិត 0 ពេល n មានតម្លៃកាន់តែធំ)

ម្យ៉ាងទៀត $u_n=\dfrac{n+1}{e^n}=\dfrac{n}{e^n}+\dfrac{1}{e^n}\to 0$ ព្រោះ $\begin{cases}\dfrac{n}{e^n}\to 0 \text{ ពេល } n\to+\infty\\ \dfrac{1}{e^n}\to 0 \text{ ពេល } n\to+\infty\end{cases}$

នាំឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោមដែលមាន 0 ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត

ដោយ (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើផង និងជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោមផង

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

លំហាត់ ១២

តើស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ខាងក្រោមជាស្វ៊ីតទាល់ ឬ ទេ ?

១. $u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$ ២. $u_n = \dfrac{\pi^n}{n}$

ចម្លើយ៖

១. យើងមាន $u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3}$

គេបាន
$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\\
&= \frac{2}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}\\
&= \frac{2(n+1)(n+3) - (n+1)(n+2) - (n+2)(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\\
&= \frac{\cancel{2n^2} + 6n + \cancel{2n} + 6 - \cancel{n^2} - \cancel{2n} - n - 2 - \cancel{n^2} - 3n - 2n - 6}{(n+1)(n+2)(n+3)}
\end{aligned}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{(n+1)(n+2)(n+3)} < 0 \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

នាំឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះ នោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើ

ដែលមាន
$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+2}\\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\\
&= \frac{3-2}{6}\\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$
ជាគោលលើនៃស្វ៊ីត

ម្យ៉ាងទៀត $u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} \to 0$ ពេល $n \to +\infty$

ព្រោះ $\begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \to 0 \text{ ពេល } n \to +\infty \\ \dfrac{1}{n+2} \to 0 \text{ ពេល } n \to +\infty \end{cases}$

នាំឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោមដែលមាន 0 ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត

ដោយ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោមផងនិងជាស្វ៊ីតទាល់លើផង

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

២. យើងមាន $u_n = \dfrac{\pi^n}{n}$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{\pi^{n+1}}{n+1}$$

គេបាន $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\pi^{n+1}}{n+1}\times\dfrac{n}{\pi^n}$

$$= \frac{\cancel{\pi^n}\pi}{n+1}\times\frac{n}{\cancel{\pi^n}}$$

$$= \frac{\pi n}{n+1} > 1 \quad ,\forall n\in\mathbb{N}$$

នាំឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើននោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោមដែលមាន $u_1=\pi$ ជាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត

ម៉្យាងទៀត $u_n = \dfrac{\pi^n}{n} \to +\infty$ ពេល $n\to+\infty$ នាំឱ្យ (u_n) មិនមែនជាស្វ៊ីតទាល់លើ

ដូចនេះ $(u_n)_n$ មិនមែនជាស្វ៊ីតទាល់

លំហាត់ ១៣

តើស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោមនេះ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តឬទេ ? បើវាជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ចូរកំណត់តួទីមួយ និងផលសងរួមរបស់វា៖

១. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 2n-3$

២. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 4-3n$

៣. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = n^2+1$

៤. ស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = \dfrac{2(n-3)}{5}$

ចម្លើយ៖

១. យើងមាន $u_n = 2n-3 \Rightarrow u_{n+1} = 2(n+1)-3$

គេបាន $u_{n+1}-u_n = 2(n+1)-3-(2n-3)$

$$= \cancel{2n}+2-\cancel{3}-\cancel{2n}+\cancel{3}$$

$$= 2 = d$$

នាំឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ $u_1 = 2(1)-3 = -1$ និង $d = 2$

២. យើងមាន $u_n = 4-3n \Rightarrow u_{n+1} = 4-3(n-1)$

គេបាន $u_{n+1}-u_n = 4-3(n-1)-(4-3n)$

$$= -3n+1+3n = 1 = d$$

នាំឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ $u_1 = 4-3(1) = 1$ និង $d = 1$

៣. យើងមាន $u_n = n^2+1 \Rightarrow u_{n+1} = (n+1)^2+1$

គេបាន $u_{n+1}-u_n = (n+1)^2+1-(n^2+1)$

$$= n^2+2n+1-n^2 = 2n+1$$

នាំឱ្យ (u_n) មិនមែនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

៤. យើងមាន $u_n = \dfrac{2(n-3)}{5} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{2(n+1-3)}{5} = \dfrac{2(n-2)}{5} = \dfrac{2n-4}{5}$

គេបាន $u_{n+1}-u_n = \dfrac{2n-4-2n+6}{5} = \dfrac{2}{5} = d$

នាំឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ $u_1 = \dfrac{2(1-3)}{5} = -\dfrac{4}{5}$ និង $d = \dfrac{2}{5}$

លំហាត់ ១៤

រក u_n ចំពោះស្ទីតនព្វន្តនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $5, 7, 9, 11, 13, \cdots$

២. $1, 6, 11, 16, 21, \cdots$

៣. $8, 14, 20, 26, 32, \cdots$

៤. $60, 51, 42, 33, 24, \ldots$

៥. $4, 0, -4, -8, -12, \ldots$

៦. $\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \ldots$ ។

ចម្លើយ៖

រក u_n ចំពោះស្ទីតនព្វន្តនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. យើងមាន $u_1 = 5, u_2 = 7, u_3 = 9 \Rightarrow d = u_2 - u_1 = u_3 - u_2$

$$= 9 - 7 = 7 - 5 = 2$$

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$$= 5 + (n-1)2$$

$$= 5 + 2n - 2$$

ដូចនេះ $u_n = 2n + 3$

២. យើងមាន $u_1 = 1, u_2 = 6, u_3 = 11 \Rightarrow d = u_2 - u_1 = u_3 - u_2$

$$= 11 - 6 = 6 - 1 = 5$$

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$$= 1 + (n-1)5$$

$$= 1 + 5n - 5$$

ដូចនេះ $u_n = 5n - 4$

៣. យើងមាន $u_1 = 8, u_2 = 14, u_3 = 20 \Rightarrow d = u_2 - u_1 = u_3 - u_2$

$$= 20 - 14 = 14 - 8 = 6$$

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$$= 8 + (n-1)6$$

$$= 8 + 6n - 6$$

ដូចនេះ $u_n = 6n + 2$

៤. យើងមាន $u_1 = 60, u_2 = 51, u_3 = 42 \Rightarrow d = u_2 - u_1 = u_3 - u_2$

$$= 42 - 51 = 51 - 60 = -9$$

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$$= 60 + (n-1)(-9)$$

$$= 60 - 9n + 9$$

ដូចនេះ $u_n = 69 - 9n$

៥. យើងមាន $u_1 = 4, u_2 = 0, u_3 = -4 \Rightarrow d = u_2 - u_1 = 0 - 4 = -4$

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$$= 4 + (n-1)(-4)$$

$$= 4 - 4n + 4$$

ដូចនេះ $u_n = 8 - 4n$

៦. យើងមាន $u_1 = \frac{3}{2}, u_2 = 2 \Rightarrow d = u_2 - u_1$

$$= 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$$= \frac{3}{2} + (n-1)\frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}n + \frac{3-1}{2}$$

ដូចនេះ $u_n = \frac{n+2}{2}$

លំហាត់ ១៥

គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត $7, 18, 29, 40, 51, \cdots$ ។ រក u_n និង u_{20} ។

ចម្លើយ៖

រក u_n និង u_{20}

យើងមាន $u_1 = 7, u_2 = 18$ នាំឱ្យ $d = u_2 - u_1 = 18 - 7 = 11$

គេបាន $$u_n = u_1 + (n-1)d$$
$$= 7 + (n-1)11$$
$$= 7 + 11n - 11$$
$$u_n = 11n - 4$$
នាំឱ្យ $$u_{20} = 11(20) - 4$$
$$= 220 - 4$$
$$= 216$$

ដូចនេះ $u_n = 11n - 4$ និង $u_{20} = 216$

លំហាត់ ១៦

រក u_n និង u_{13} ចំពោះស្វ៊ីតនព្វន្ត $200, 310, 420, 530, 640, \ldots$ ។

ចម្លើយ៖

រក u_n និង u_{13}

យើងមាន $u_1 = 200, u_2 = 310$ នាំឱ្យ $d = u_2 - u_1 = 310 - 200 = 110$

គេបាន $$u_n = u_1 + (n-1)d$$
$$= 200 + (n-1)110$$
$$= 200 + 110n - 110$$
$$u_n = 110n + 90$$
នាំឱ្យ $$u_{13} = 110(13) + 90$$
$$= 1520$$

ដូចនេះ $u_n = 110n + 90$ និង $u_{13} = 1520$

លំហាត់ ១៧

គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត $17, 10, 3, -4, -11, \cdots$ ។ រក u_n និង u_{19} ។

ចម្លើយ៖

រក u_n និង u_{19}

យើងមាន $u_1 = 17, u_2 = 10$ នាំឱ្យ $d = u_2 - u_1 = 10 - 17 = -7$

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$$= 17 + (n-1)(-7)$$

$$= 17 - 7n + 7$$

$$u_n = 24 - 7n$$

នាំឱ្យ $u_{19} = 24 - 7(19)$

$$= -109$$

ដូចនេះ $u_n = 24 - 7n$ និង $u_{19} = -109$

លំហាត់ ១៨

តើចំនួន 1000 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $9, 16, 23, 30, 37, \ldots$?

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_1 = 9, u_2 = 16$ នាំឱ្យ $d = u_2 - u_1 = 16 - 9 = 7$

គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$$= 9 + (n-1)7$$

$$= 9 + 7n - 7$$

$$u_n = 7n + 2$$

តាង $u_n = 1000$ សមូល $1000 = 7n + 2$

$$998 = 7n$$

$$n = \frac{998}{7} = 142.57 \notin \mathbb{N}$$

ដូចនេះ 1000 មិនមែនជាចំនួននៃស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) ទេ

លំហាត់ ១៩

តើចំនួន 500 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $28, 50, 72, 94, 116, \ldots$?

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_1 = 28, u_2 = 50$ នាំឱ្យ $d = u_2 - u_1 = 50 - 28 = 22$

គេបាន $u_{500} = 28 + (n-1)22$

$$500 = 28 + (n-1)22$$

$$500 = 28 + 22n - 22$$

$$494 = 22n$$

$$n = \frac{494}{22} = 22.45 \notin \mathbb{N}$$

ដូចនេះ 500 មិនមែនជាចំនួននៃស្វ៊ីតនព្វន្ត (u_n) ទេ

លំហាត់ ២០

រក u_n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ចំពោះករណីនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $u_5 = 17$ និង $u_9 = 33$ ២. $u_4 = 43$ និង $u_{10} = 97$

៣. $u_8 = -8$ និង $u_{14} = -11$ ។

ចម្លើយ៖

១. រក u_n

យើងមាន $u_5 = 17$ និង $u_9 = 33$ តាមទំនាក់ទំនង

$$u_n = u_1 + (n-1)d \qquad (7)$$

នាំឱ្យ

$$u_5 = u_1 + 4d \Leftrightarrow 17 = u_1 + 4d \qquad (8)$$

$$u_9 = u_1 + 8d \Leftrightarrow 33 = u_1 + 8d \qquad (9)$$

យកសមីការ (9) ដក សមីការ (8)

គេបាន $33 - 17 = (u_1 + 8d) - (u_1 + 4d)$

$$16 = \cancel{u_1} + 8d - \cancel{u_1} - 4d$$

$$16 = 4d$$

$$d = 4$$

ជំនួសចូលសមីការ (8) គេបាន $17 = u_1 + 4(4) \Rightarrow u_1 = 17 - 16 = 1$

ជំនួសចូលសមីការ (7) គេបាន $u_n = 1 + (n-1)4$

$$= 1 + 4n - 4$$

ដូចនេះ $u_n = 4n - 3$

២. រក u_n

យើងមាន $u_4 = 43$ និង $u_{10} = 97$ តាមទំនាក់ទំនង

$$u_n = u_1 + (n-1)d \quad (10)$$

$$u_4 = u_1 + 3d \Leftrightarrow 43 = u_1 + 3d \quad (11)$$

$$u_{10} = u_1 + 9d \Leftrightarrow 97 = u_1 + 9d \quad (12)$$

យកសមីការ (12) ដក សមីការ (11)

គេបាន $97 - 43 = (u_1 + 9d) - (u_1 + 3d)$

$$54 = \cancel{u_1} + 9d - \cancel{u_1} - 3d$$

$$54 = 6d$$

$$d = \frac{54}{6} = 9$$

ជំនួសចូលសមីការ (11) គេបាន $43 = u_1 + 3(9) \Rightarrow u_1 = 43 - 27 = 16$

ជំនួសចូលសមីការ (10) គេបាន $u_n = 16 + (n-1)9$

$$= 16 + 9n - 9$$

ដូចនេះ $u_n = 9n + 7$

៣. រក u_n

យើងមាន $u_8 = -8$ និង $u_{14} = -11$ តាមទំនាក់ទំនង

$$u_n = u_1 + (n-1)d \quad (13)$$

$$u_8 = u_1 + 7d \Leftrightarrow -8 = u_1 + 7d \quad (14)$$

$$u_{14} = u_1 + 13d \Leftrightarrow -11 = u_1 + 13d \quad (15)$$

យកសមីការ (15) ដក សមីការ (14)

គេបាន $-11-(-8)=(u_1+13d)-(u_1+7d)$

$$-11+8=\cancel{u_1}+13d-\cancel{u_1}-7d$$

$$-3=6d$$

$$d=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$$

ជំនួសចូលសមីការ (14) គេបាន $-8=u_1+7\left(-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow u_1=-8+\frac{7}{2}=-\frac{9}{2}$

ជំនួសចូលសមីការ (13) គេបាន $u_n=-\frac{9}{2}+(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$=-\frac{9}{2}-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}n+\frac{-9+1}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}n+\frac{-8}{2}$$

ដូចនេះ $u_n=-\frac{1}{2}n-4$

លំហាត់ ២១

បង្ហាញថាបីចំនួនខាងក្រោមបង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្ត៖

១. $\frac{1}{x-1},\frac{x}{x^2-1},\frac{1}{x+1}$

២. $(a^2+b^2)^2,(a^4+b^4),(a^2-b^2)^2$

៣. $\frac{2}{x+1},\frac{x+1}{x},\frac{x^2+1}{x(x+1)}$

៤. $(a^2-2ab-b^2)^2,(a^2+b^2)^2,(a^2+2ab-b^2)^2$

ណែនាំ៖

បើ x,y,z ជាបីតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេបាន $x+z=2y$

ចម្លើយ៖

១. បង្ហាញថា $\frac{1}{x-1},\frac{x}{x^2-1},\frac{1}{x+1}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេបាន $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{x+1+x-1}{(x-1)(x+1)}$

$$=\frac{2x}{x^2-1}$$ តាមមធ្យមនព្វន្ត

ដូចនេះ $\frac{1}{x-1},\frac{x}{x^2-1},\frac{1}{x+1}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

២. បង្ហាញថា $(a^2+b^2)^2,(a^4+b^4),(a^2-b^2)^2$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត តាមមធ្យមនព្វន្ត

គេបាន $(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2 = a^4+2(ab)^2+b^4+[a^4-2(ab)^2+b^4]$

$$= a^4+\cancel{2(ab)^2}+b^4+a^4-\cancel{2(ab)^2}+b^4$$

$$= 2a^4+2b^4$$

$$= 2(a^4+b^4)$$

ដូចនេះ $(a^2+b^2)^2, a^4+b^4, (a^2-b^2)^2$ ជាស្ទីតនព្វន្ត

៣. បង្ហាញថា $\frac{2}{x+1}, \frac{x+1}{2x}, \frac{x^2+1}{x(x+1)}$ ជាស្ទីតនព្វន្ត

គេបាន $\frac{2}{x+1}+\frac{x^2+1}{x(x+1)} = \frac{2x+x^2+1}{x(x+1)}$

$$= \frac{(x+1)^2}{x(x+1)}$$

$$= \frac{(x+1)\cancel{(x+1)}}{x\cancel{(x+1)}}$$

$= 2.\frac{x+1}{2x}$ តាមមធ្យមនព្វន្ត

ដូចនេះ $\frac{2}{x+1}, \frac{x+1}{2x}, \frac{x^2+1}{x(x+1)}$ ជាស្ទីតនព្វន្ត

៤. បង្ហាញថា $(a^2-2ab-b^2)^2, (a^2+b^2)^2, (a^2+2ab-b^2)^2$ ជាស្ទីតនព្វន្ត

គេបាន $(a^2-2ab-b^2)^2+(a^2+2ab-b^2)^2$

$$= [(a^2-2ab-b^2)+(a^2+2ab-b^2)]^2-2(a^2-2ab-b^2)(a^2+2ab-b^2)$$

$$= (2a^2-2b^2)^2-2[a^4+\cancel{2a^3b}-(ab)^2-\cancel{2a^3b}-4(ab)^2+\cancel{2ab^3}-(ab)^2-\cancel{2ab^3}+b^4]$$

$$= 4a^4+4b^4-8(ab)^2-2a^4+12(ab)^2-2b^4$$

$$= 2a^4+2b^4+4(ab)^2$$

$$= 2[(a^2)^2+2(ab)^2+(b^2)^2]$$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^2-2ab = a^2+b^2$

$= 2(a^2+b^2)^2$ តាមមធ្យមនព្វន្ត

ដូចនេះ $(a^2+b^2)^2, (a^2+b^2)^2, (a^2-b^2)^2$ ជាស្ទីតនព្វន្ត

លំហាត់ ២២

កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យបីចំនួនខាងក្រោមបង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្ត៖

១. $(1+x)^2,(3+x)^2,(9+x)^2$

២. $(2-x)^2,2x,2+x$

៣. $a^2(b+x),b^2(a+x),x^2(a+b)$

ចម្លើយ៖

១. រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $(1+x)^2,(3+x)^2,(9+x)^2$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេបាន $(1+x)^2+(9+x)^2=2(3+x)^2$ តាមមធ្យមនព្វន្ត

$$1+2x+x^2+81+18x+x^2=2(9+6x+x^2)$$

$$82+20x+\cancel{2x^2}=18+12x+\cancel{2x^2}$$

$$8x=-64$$

$$\Rightarrow x=-\frac{64}{8}$$

ដូចនេះ $x=-8$

២. រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $(2-x)^2,2x,2+x$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេបាន $(2-x)^2+2+x=2(2x)$ តាមមធ្យមនព្វន្ត

$$4-4x+x^2+2+x=4x$$

$$x^2-3x-4x+6=0$$

$$x^2-6x-x+6=0$$

$$x(x-6)-(x-6)=0$$

$$(x-6)(x-1)=0$$

សមមូល $x-6=0\Leftrightarrow x=6$ ឬ $x-1=0\Leftrightarrow x=1$

ដូចនេះ $x=1$ ឬ $x=6$

៣. រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $a^2(b+x), b^2(a+x), x^2(a+b)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេបាន $a^2(b+x)+x^2(a+b)=2b^2(a+x)$

$$a^2b+a^2x+(a+b)x^2-2ab^2-2b^2x=0$$

$$(a+b)x^2+(a^2-2b^2)x+ab(a-2b)=0$$

$$\begin{array}{cc} (a+b)x & ab \\ x & a-2b \end{array}$$

$$[(a+b)x+ab](x+a-2b)=0$$

សម្មូល $(a+b)x+ab=0 \Leftrightarrow (a+b)x=-ab$

$$\Rightarrow x=-\frac{ab}{a+b}$$

ឬ $x+a-2b=0 \Leftrightarrow x=2b-a$

ដូចនេះ៖ $x=2b-a$ ឬ $x=-\dfrac{ab}{a+b}$

លំហាត់ ២៣

រកតួទីមួយ និងផលសងរួមរបស់ស្វ៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កាលណាគេស្គាល់៖

១. $u_4=15$ និង $S_5=55$

២. $u_3+u_5=4$ និង $S_{12}=129$

៣. $u_5+u_3=4$ និង $u_2u_4=-3$

៤. $S_5=35$ និង $u_4u_5=130$

៥. $u_1+u_7=4$ និង $u_3^2+u_7^2=122$

ចម្លើយ៖

១. រកតួទីមួយ និងផលសងរួមរបស់ស្វ៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

យើងមាន $u_4=15$ ដោយ $u_4=u_1+3d \Leftrightarrow u_1+3d=15$

នាំឱ្យ

$$u_1=15-3d \qquad (16)$$

និង $S_5=55$ ដោយ $S_5=\dfrac{5}{2}.(2u_1+4d)=5(u_1+2d)$

$$55=5(15-3d+2d)$$

$$11=-d+15$$

$d = 15 - 11 = 4$ ជំនួសចូល (16)

គេបាន $u_1 = 15 - 3(4) = 15 - 12 = 3$

ដូចនេះ $u_1 = 3$ និង $d = 4$

២. រកតួទីមួយ និងផលសង្សរបស់ស្វ៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

យើងមាន

$$u_3 + u_5 = 4$$

$$u_1 + 2d + u_1 + 4d = 4$$

$$2(u_1 + 3d) = 4$$

$$u_1 = 2 - 3d \qquad (17)$$

និង $S_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$

$$S_{12} = \frac{12}{2}[2(2-3d) + 11d]$$

$$129 = 6(4 - 6d + 11d)$$

$$129 = 6(4 + 5d)$$

$$129 = 24 + 30d$$

$$\frac{129 - 24}{30} = d$$

$d = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$ ជំនួសចូល (17)

$$\Rightarrow u_1 = 2 - 3.\frac{7}{2} = \frac{4-21}{2} = -\frac{17}{2}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n), u_n = u_1 + (n-1)d$$
$$= \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$$

ដូចនេះ $u_1 = -\frac{17}{2}$ និង $d = \frac{7}{2}$

៣. រកតួទីមួយ u_1 និងផលសងរួម d

យើងមាន

$$u_5+u_3=4$$
$$u_1+4d+u_1+2d=4$$
$$2(u_1+3d)=4$$
$$u_1+3d=2 \qquad (18)$$

និង

$$u_2u_4=-3$$
$$(u_1+d)(u_1+3d)=-3$$
$$(u_1+d)2=-3$$
$$u_1+d=-\frac{3}{2} \qquad (19)$$

យកសមីការ (18) ដក (19) គេបាន $(u_1+3d)-(u_1+d)=2-\left(-\frac{3}{2}\right)$

$$\cancel{u_1}+3d-\cancel{u_1}-d=2+\frac{3}{2}$$
$$2d=\frac{7}{2}\Rightarrow d=\frac{7}{4}$$

យក $d=\frac{7}{4}$ ជំនួសចូលសមីការ (២) គេបាន $u_1+\frac{7}{4}=-\frac{3}{2}\Rightarrow u_1=-\frac{3}{2}-\frac{7}{4}=-\frac{13}{4}$

ដូចនេះ $u_1=-\frac{13}{4}$ និង $d=\frac{7}{2}$

៤. រកតួទីមួយ u_1 និងផលសងរួម d

យើងមាន $S_5=35$

$$\frac{5}{2}(u_1+u_1+4d)=35$$
$$\frac{5}{2}\times 2(u_1+2d)=35$$
$$u_1+2d=\frac{35}{5}=7$$

និង $u_4u_5 = 130$

$(u_1+3d)(u_1+4d) = 130$

$[(u_1+2d)+d][(u_1+2d)+2d] = 130$

$(7+d)(7+2d) = 130$

$49+14d+7d+2d^2 = 130$

$2d^2+21d+49-130 = 0$

$2d^2+21d-81 = 0$

$2d^2-6d+27d-81 = 0$

$2d(d-3)+27(d-3) = 0$

$(d-3)(2d+27) = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} d-3=0 \\ \\ 2d-27=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d=3 \\ \\ d=\dfrac{27}{2} \end{array}\right.$$

ចំពោះ $d = 3 \Rightarrow u_1 = 7-2d = 7-2(3) = 1$

ចំពោះ $d = \dfrac{27}{2} \Rightarrow u_1 = 7-2\times\dfrac{27}{2} = 7-27 = -20$

ដូចនេះ $u_1 = 1, d = 3$ ឬ $u_1 = -20, d = \dfrac{27}{2}$

៥. រកតួទីមួយ និងផលសងរួមរបស់ស្វ៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

យើងមាន $u_1+u_7 = 4$

$u_1+u_1+6d = 4$

$2u_1+6d = 4$

$2(u_1+3d) = 4$

$u_1+3d = 2$

$$\Rightarrow u_1 = 2-3d \qquad (20)$$

និង $u_3^2+u_7^2=122$

$$(u_1+2d)^2+(u_1+6d)^2=122$$

$$(u_1+3d-d)^2+(u_1+3d+3d)^2=122$$

$$(2-d)^2+(2+3d)^2=122$$

$$4-4d+d^2+4+12d+9d^2-122=0$$

$$10d^2+8d-144=0$$

$$5d^2+4d-57=0$$

តាង $a=5, b'=\frac{b}{2}=\frac{4}{2}=2, c=-57$

តាម $\Delta'=(b')^2-ac=2^2-(5)(-57)=289 \Rightarrow \sqrt{\Delta'}=\sqrt{17^2}=17$

នាំឱ្យ $\left[\begin{array}{l} d=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-2+17}{5}=3 \\ d=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-2-17}{5}=-\frac{19}{5} \end{array}\right.$ ជំនួសចូលសមីការ (20)

គេបាន $\left[\begin{array}{l} u_1=2-3\times3=2-9=-7 \\ u_1=2-3\times\frac{-19}{5}=\frac{10+57}{5}=\frac{67}{5} \end{array}\right.$

ដូចនេះ $u_1=-7, d=3$ ឬ $u_1=\frac{67}{5}, d=-\frac{19}{5}$

លំហាត់ ២៤

គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $2+5+8+11+14+\ldots$

២. $8+10+12+14+16+\ldots$

៣. $80+77+74+71+68+\ldots$

៤. $2008+1996+1984+1972+1960+\ldots$

៥. $\frac{1}{2}+\frac{5}{6}+\frac{7}{6}+\frac{3}{2}+\frac{11}{6}+\ldots$ ។

ចម្លើយៈ

១. គណនាផលបូក $2+5+8+11+14+\cdots$

តាង $u_1=2, u_2=5 \Rightarrow d=u_2-u_1=5-2=3$

គេបាន $S_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n) \quad , u_n=u_1+(n-1)d$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{n}{2}[u_1+u_1+(n-1)d]\\
&=\frac{n}{2}[2u_1+(n-1)d]\\
&=\frac{n}{2}[2(2)+(n-1)3]\\
&=\frac{n}{2}(4+3n-3)
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{n}{2}(3n+1)$

២. គណនាផលបូក $8+10+12+14+16+\cdots$

តាង $u_1=8, u_2=10, u_3=12 \Rightarrow d=u_2-u_1=10-8=2$

គេបាន $S_n=\frac{n}{2}[2u_1+(n-1)d]$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{n}{2}[2(8)+(n-1)2]\\
&=\frac{n}{2}(16+2n-2)\\
&=\frac{n}{\cancel{2}}(n+7)\cancel{2}
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $S_n=n(n+7)$

៣. គណនាផលបូក $80+77+74+71+68+\cdots$

តាង $u_1=80, u_2=77 \Rightarrow d=u_2-u_1=77-80=-3$

គេបាន $S_n=\frac{n}{2}[2u_1+(n-1)d]$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{n}{2}[2(80)+(n-1)(-3)]\\
&=\frac{n}{2}(160-3n+3)\\
&=\frac{n}{2}(163-3n)
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{n}{2}(163-3n)$

៤. គណនាផលបូក $2008+1996+1984+1972+1960+\cdots$

តាង $u_1 = 2008, u_2 = 1996 \Rightarrow d = u_2 - u_1 = 1996 - 2008 = -12$

គេបាន $S_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$

$= \frac{n}{2}[2(2008) + (n-1)(-12)]$

$= \frac{n}{2}(4016 - 12n + 12)$

$= \frac{n}{2}(4028 - 12n) = 2014n - 6n^2$

ដូចនេះ $S_n = 2014n - 6n^2$

៥. គណនាផលបូក $\frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{7}{6} + \frac{3}{2} + \frac{11}{6} + \cdots$

តាង $u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{5}{6}, u_3 = \frac{7}{6} \Rightarrow d = u_2 - u_1 = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5-3}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

គេបាន $S_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$

$= \frac{n}{2}[\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) + (n-1)\frac{1}{3}]$

$= \frac{n}{2}(1 + \frac{1}{3}n - \frac{1}{3})$

$= \frac{n}{2}\left(\frac{3+n-1}{3}\right)$

$= \frac{n}{2} \times \frac{n+2}{3}$

ដូចនេះ $S_n = \frac{n(n+2)}{6}$

លំហាត់ ២៨

គេឱ្យតួទី n នៃស្វីតនព្វន្ត $u_n = 5n - 3$ គណនា S_{12} ។

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_n = 5n - 3$ នាំឱ្យ $u_1 = 5(1) - 3 = 2$

$$u_{12} = 5(12) - 3 = 57$$

គេបាន $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

$S_{12} = \frac{12}{2}(2 + 57) = 6(59) = 354$

ដូចនេះ $S_{12} = 354$

លំហាត់ ២៦

គេឱ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $4, 15, 26, 37, \ldots$ ។

១. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

២. រួចគណនាផលបូក 20 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះ ។

ចម្លើយ៖

គេឱ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $4, 15, 26, 37, \ldots$

១. យើងមាន $u_1 = 4, u_2 = 15 \Rightarrow u_2 - u_1 = 15 - 4 = 11$

$$u_3 = 4, u_4 = 15 \Rightarrow u_4 - u_3 = u_3 - u_2 = 37 - 26 = 26 - 15 = 11$$

នាំឱ្យ $d = 11 > 0$ គេបាន (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តកើន

២. គណនាផលបូក 20 តួដំបូងនៃស្វ៊ីត

គេបាន $S_{20} = \frac{20}{2}[4 + (4 + 19 \times 11)]$

$= 10(8 + 209) = 10(217)$

ដូចនេះ $S_{20} = 2170$

ប្រើ $u_n = u_1 + (n-1)d$

$S_n = u_1 + (n-1)d$

$S_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$

លំហាត់ ២៧

គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត $9, 5, 1, -3, -7, \ldots$ ។

១. គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីត ។

២. តើចំនួន -67 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះ ។

ចម្លើយ៖

តាង $u_1 = 9, u_2 = 5$ នាំឱ្យ $d = u_2 - u_1 = 5 - 9 = -4$

១. គេបាន $u_n = u_1 + (n-1)d$

$= 9 + (n-1)(-4)$

$= 9 - 4n + 4$

$= 13 - 4n$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $u_n = 13 - 4n$

២. តាង $u_n = -67$ គេបាន $-67 = 14 - 4n$

$$4n = 14 + 67$$

$$4n = 81$$

$$n = \frac{81}{4} = 20.25 \notin \mathbb{N}$$

ដូចនេះ ចំនួន -67 មិនមែនជាចំនួននៃតួរបស់ស្វ៊ីត (u_n)

លំហាត់ ២៨

កំណត់បីចំនួនពិតតគ្នា a, b, c នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ បើគេដឹងថា៖

១. $a + b + c = 30$ និង $abc = 910$

២. $a + b + c = -9$ និង $abc = 48$

៣. $a + b + c = 18$ និង $a^2 + b^2 + c^2 = 206$

៤. $a + b + c = 9$ និង $a^4 + b^4 + c^4 = 707$

ចម្លើយ៖

១. កំណត់បីចំនួនពិតតគ្នា a, b, c នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេមាន $a + b + c = 30$ តាមមធ្យមនព្វន្ត $a + c = 2b$

$$2b + b = 30$$

$$3b = 30$$

$$b = 10$$

នាំឱ្យ $a + c = 2b = 2(10) = 20$

និង $abc = 910$

$$10ac = 910$$

$$ac = \frac{910}{10}$$

$$ac = 91$$

ទ្រឹស្តីបទវ្យែត៖ បើ α, β ជាឫស របស់សមីការនោះគេបាន $X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha.\beta = 0$

តាមទ្រឹស្តីបទវៀែតគេបាន $X^2-(a+c)X+ac=0$

$$X^2-20X+91=0$$

$$X^2-7X-13X+91=0$$

$$X(X-7)-13(X-7)=0$$

$$(X-7)(X-13)=0$$

នាំឱ្យ $X-7=0 \Rightarrow X=7$ ឬ $X-13=0 \Rightarrow X=13$

ចំពោះ $a=X=7 \Rightarrow c=13$

ចំពោះ $a=X=13 \Rightarrow c=7$

ដូចនេះ $7,10,13$ ឬ $13,10,7$

២. $a+b+c=-9$ និង $abc=48$ **ស្រាយដូចទី១ដែរ**

ដូចនេះ $-\dfrac{50494}{10000},-3,-\dfrac{9506}{10000}$ ឬ $-\dfrac{9506}{10000},-3,-\dfrac{50494}{10000}$

៣. កំណត់បីចំនួនពិតតគ្នា a,b,c នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេមាន $a+b+c=18$ តាមមធ្យមនព្វន្ត $a+c=2b$

$$2b+b=18$$

$$3b=18$$

$$b=\frac{18}{3}=6$$

នាំឱ្យ $a+c=2b=2(6)=12$

និង $a^2+b^2+c^2=206$

$$a^2+6^2+c^2=206$$

$$(a+c)^2-2ac=206-36$$

$$12^2-2ac=170$$

$$144-170=2ac$$

$$-26=2ac$$

$$ac=-\frac{26}{2}=-13$$

តាមទ្រឹស្តីបទវៀែត

គេបាន $$X^2-(a+c)X+ac=0$$
$$X^2-12X-13=0$$
$$X^2-13X+X-13=0$$
$$X(X-13)+(X-13)=0$$
$$(X-13)(X+1)=0$$

នាំឱ្យ $X-13=0 \Rightarrow X=13$ ឬ $X+1=0 \Rightarrow X=-1$

ចំពោះ $a=X=13 \Rightarrow c=-1$

ចំពោះ $a=X=-1 \Rightarrow c=13$

ដូចនេះ $-1,6,13$ ឬ $13,6,-1$

៤. កំណត់បីចំនួនពិតតគ្នា a,b,c នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេមាន $a+b+c=9$ តាមមធ្យមនព្វន្ត $a+c=2b$

$$2b+b=9$$
$$3b=9$$
$$b=3$$

$$(a+c)^4=a^4+4a^3c+6(ac)^2+4ac^3+c^4$$
$$a^4+c^4=(a+c)^4-4a^3c-6(ac)^2-4ac^3$$

នាំឱ្យ $a+c=2b=2(3)=6$

និង $a^4+b^4+c^4=707$

$$(a+c)^4-4a^3c-6(ac)^2-4ac^3=707-b^4$$
$$6^4-2ac(2a^2+4ac+2c^2-ac)=707-3^4$$
$$-2ac[2(a^2+2ac+c^2)-ac]=707-3^4-6^4$$
$$-2ac[2(a+c)^2-ac]=-670$$
$$-2ac[2(6)^2-ac]=-670$$
$$ac(72-ac)=\frac{670}{2}$$
$$72ac-(ac)^2=335$$

តាង $x=ac$

Tel: 016 434 006

គេបាន $72x - x^2 = 335$

$$-x^2 + 72x - 335 = 0$$

$$-(x^2 - 72x + 335) = 0$$

$$x^2 - 72x + 335 = 0$$

$$x^2 - 67x - 5x + 335 = 0$$

$$x(x-67) - 5(x-67) = 0$$

$$(x-67)(x-5) = 0$$

នាំឱ្យ $x - 67 = 0 \Rightarrow x = 67$ ឬ $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

ចំពោះ $x = 67 \Leftrightarrow ac = 67$ និង $a + c = 6$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេបាន $X^2 - (a+c)X + ac = 0$

$$X^2 - 6X + 67 = 0$$

ដោយ $\Delta' = (b')^2 - ac = \left(-\dfrac{6}{2}\right)^2 - 1(67) < 0$ មិនយកព្រោះ $X \notin \mathbb{R}$

ចំពោះ $x = 5 \Leftrightarrow ac = 5$ និង $a + c = 6$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេបាន $X^2 - (a+c)X + ac = 0$

$$X^2 - 6X + 5 = 0$$

$$X^2 - 5X - X + 5 = 0$$

$$X(X-5) - (X-5) = 0$$

$$(X-5)(X-1) = 0$$

នាំឱ្យ $X - 1 = 0 \Rightarrow X = 1$ ឬ $X - 5 = 0 \Rightarrow X = 5$

ចំពោះ $a = X = 1 \Rightarrow c = 5$

ចំពោះ $a = X = 5 \Rightarrow c = 1$

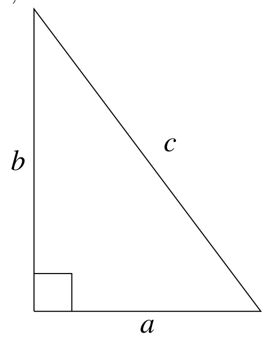
ដូចនេះ $1, 3, 5$ ឬ $5, 3, 1$

លំហាត់ ២៩

រង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណកែងមួយតំរៀបតគ្នា បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែល មានផលសងរួមស្មើ 21 ម៉ែត្រ ។ គណនារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណកែងនេះ ។

ចម្លើយ៖

តាង a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណកែងដែល $a,b,c>0$



ដោយ a,b,c ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសង $d=21m$

គេបាន $b=a+d$

$=a+21$

$c=b+d=a+21+21$

$=a+42$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ គេបាន $c^2=a^2+b^2$

$(a+42)^2=a^2+(a+21)^2$

$\cancel{a^2}+84a+1764=\cancel{a^2}+a^2+42a+441$

$0=a^2+42a-84a+441-1764$

$0=a^2-4a(21)+(21)^2-(42)^2$

$0=(a-21)^2-(42)^2$

$0=(a-21-42)(a-21+42)$

$0=(a-63)(a+21)$

$\Leftrightarrow a-63=0\Rightarrow a=63$ ឬ $a+21=0\Rightarrow a=-21<0$ មិនយកព្រោះ $a>0$

ចំពោះ $a=63$ នោះ $b=a+21=63+21=84$

$c=a+42=63+42=105$

ដូចនេះ រង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណកែងគឺ $63,84,105$

លំហាត់ ៣០

ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

១. បើ a,b,c ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ a^2-bc,b^2-ac,c^2-ab ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

២. បើ $\frac{1}{a+b},\frac{1}{a+c},\frac{1}{b+c}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ a^2,b^2,c^2 ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

៣. ចំពោះគ្រប់ $a\neq 0$ និង $b\neq 0$ នោះ $\frac{a}{b(a-b)},\frac{a+b}{2ab},\frac{b}{a(b-a)}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

ចម្លើយ៖

ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

១. បើ a,b,c ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ a^2-bc,b^2-ac,c^2-ab ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេបាន $a^2-bc+c^2-ab=a^2+c^2-(ab+bc)$

$$=(a+c)^2-2ac-b(a+c)$$

ដោយ a,b,c ជាស្វ៊ីតនព្វន្តនាំឱ្យ $a+c=2b$

នាំឱ្យ $(a^2-bc)+(c^2-ab)=(2b)^2-2ac-b2b$

$$=4b^2-2b^2-2ac$$

$$=2(b^2-ac)$$

តាមមធ្យមនព្វន្ត នាំឱ្យ a^2-bc,b^2-ac,c^2-ab ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

ដូចនេះ បើ a,b,c ជាស្វ៊ីតនព្វន្តនោះ a^2-bc,b^2-ac,c^2-ab ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

២. បើ $\frac{1}{a+b},\frac{1}{a+c},\frac{1}{b+c}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ a^2,b^2,c^2 ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

យើងមាន $\frac{1}{a+b},\frac{1}{a+c},\frac{1}{b+c}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេបាន
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{2}{a+c}$$
$$\frac{b+c+a+b}{(a+b)(b+c)}=\frac{2}{a+c}$$

$$(2b+a+c)(a+c)=2(a+b)(b+c)$$

$$a(2b+a+c)+c(2b+a+c)=2a(b+c)+2b(b+c)$$

$$\cancel{2ab}+a^2+\cancel{ac}+\cancel{2bc}+\cancel{ac}+c^2=\cancel{2ab}+\cancel{2ac}+2b^2+\cancel{2bc}$$

$$a^2+c^2=2b^2$$

តាមមធ្យមនព្វន្ត នាំឱ្យ a^2,b^2,c^2 ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

ដូចនេះ បើ $\frac{1}{a+b},\frac{1}{a+c},\frac{1}{b+c}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ a^2,b^2,c^2 ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

៣. ចំពោះគ្រប់ $a\neq 0$ និង $b\neq 0$ នោះ $\frac{a}{b(a-b)},\frac{a+b}{2ab},\frac{b}{a(b-a)}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេបាន $\frac{a}{b(a-b)}+\frac{b}{a(b-a)}=\frac{a}{b(a-b)}-\frac{b}{a(a-b)}$

$$=\frac{a^2-b^2}{ab(a-b)}$$

$$=\frac{\cancel{(a-b)}(a+b)}{ab\cancel{(a-b)}}$$

$$=2\times\frac{a+b}{2ab}$$ តាមមធ្យមនព្វន្ត

ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់ $a,b\neq 0$ នោះ $\frac{a}{b(a-b)},\frac{a+b}{2ab},\frac{b}{a(b-a)}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

លំហាត់ ៣១

១. គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយ $u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n$ ដែលគ្រប់តួនៃស្វ៊ីតនេះជាចំនួនខុសពីសូន្យ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{1}{u_1.u_2}+\dfrac{1}{u_2.u_3}+\dfrac{1}{u_3.u_4}+\cdots+\dfrac{1}{u_n.u_{n+1}}=\dfrac{n}{u_1.u_{n+1}}$ ។

២. គណនាផលបូក $S_n=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$ ។

ចម្លើយ៖

១. គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលគ្រប់តួនៃស្វ៊ីតនេះជាចំនួនខុសពីសូន្យ

បង្ហាញថា $\dfrac{1}{u_1.u_2}+\dfrac{1}{u_2.u_3}+\dfrac{1}{u_3.u_4}+\cdots+\dfrac{1}{u_n.u_{n+1}}=\dfrac{n}{u_1.u_{n+1}}$ ។

ដោយ $\dfrac{1}{u_n.u_{n+1}}=\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n.u_{n+1}(u_{n+1}-u_n)}=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{u_n}-\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$

នាំឱ្យ
$$\frac{1}{u_1.u_2}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{u_1}-\cancel{\frac{1}{u_2}}\right)$$
$$\frac{1}{u_2.u_3}=\frac{1}{d}\left(\cancel{\frac{1}{u_2}}-\cancel{\frac{1}{u_3}}\right)$$
$$\frac{1}{u_3.u_4}=\frac{1}{d}\left(\cancel{\frac{1}{u_3}}-\cancel{\frac{1}{u_4}}\right)\qquad(+)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{u_n.u_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\cancel{\frac{1}{u_n}}-\frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

ផលសងរួម៖
$u_{n+1}-u_n=d$

តួទីn នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត៖
$u_n=u_1+(n-1)d$
$u_{n+1}=u_1+nd$

$$\frac{1}{u_1.u_2}+\frac{1}{u_2.u_3}+\frac{1}{u_3.u_4}+\cdots+\frac{1}{u_n.u_{n+1}}=\frac{1}{du_1}-\frac{1}{du_{n+1}}$$
$$=\frac{u_{n+1}-u_1}{du_1u_{n+1}}$$
$$=\frac{\cancel{u_1}+n\cancel{d}-\cancel{u_1}}{\cancel{d}u_1u_{n+1}}$$

ដូចនេះ៖ $\dfrac{1}{u_1.u_2}+\dfrac{1}{u_2.u_3}+\dfrac{1}{u_3.u_4}+\cdots+\dfrac{1}{u_n.u_{n+1}}=\dfrac{n}{u_1.u_{n+1}}$

២. គេបាន $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{(n+1)}$

លំហាត់ ៣២

គេឱ្យពីរចំនួន u_0 និង u_1 គេបង្កើតចំនួន

$u_2 = u_0 + u_1, u_3 = u_1 + u_2, \cdots, u_{n+1} = u_{n-1} + u_n$ ។

បង្ហាញថា $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} = u_{n+1} - u_1$ ។

ចម្លើយ៖

យើងមាន $u_2 = u_0 + u_1, u_3 = u_1 + u_2, \cdots, u_{n+1} = u_{n-1} + u_n$

គេបាន $u_2 = u_0 + u_1 \Rightarrow u_0 = \cancel{u_2} - u_1$

$$u_3 = u_1 + u_2 \Rightarrow u_1 = \cancel{u_3} - \cancel{u_2}$$

$$u_4 = u_2 + u_3 \Rightarrow u_2 = \cancel{u_4} - \cancel{u_3}$$

$$u_5 = u_3 + u_4 \Rightarrow u_3 = \cancel{u_5} - \cancel{u_4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{n+1} = u_{n-1} + u_n \Rightarrow u_{n-1} = u_{n+1} - \cancel{u_n}$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} = u_{n+1} - u_1$$

ដូចនេះ $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} = u_{n+1} - u_1$

លំហាត់ ៣៣

គេឱ្យស្វីតនព្វន្ត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែលមានតួទីមួយ $u_1 = 1$ ។ គណនាផលសងរួមនៃស្វីតនព្វន្តនេះក្នុងករណីខាងក្រោម៖

១. ផលធៀបតួទី 8 និងតួទី 3 ស្មើនឹង 4 ។

២. ផលដកការនៃតួទី 10 និងតួទី 7 ស្មើនឹង 3 ។

គណនាផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

ចម្លើយ៖

១. យើងមាន $u_1 = 1$ និង ផលធៀបតួទី 8 និងតួទី 3 ស្មើនឹង 4

គេបាន $\frac{u_8}{u_3} = 4 \quad , u_n = u_1 + (n-1)d$

$$u_8 = 4u_3$$

$$u_1 + 7d = 4(u_1 + 2d)$$

$$u_1 + 7d = 4u_1 + 8d$$

$$u_1 - 4u_1 = 8d - 7d \quad , u_1 = 1$$

$$-3 \times 1 = d$$

ដូចនេះ ផលសងរួម $d = -3$

២. យើងមាន $u_1 = 1$ និង ផលដកការេនៃតួទី 10 និងតួទី 7 ស្មើនឹង 3

គេបាន $(u_{10} - u_7)^2 = 3$

$$[u_1 + 9d - (u_1 + 6d)]^2 = 3$$

$$(u_1 + 9d - u_1 - 6d)^2 = 3$$

$$(3d)^2 = 3$$

$$9d^2 = 3$$

$$d^2 = \frac{1}{3}$$

$$d = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ដូចនេះ ផលសងរួម $d = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ឬ $d = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

លំហាត់ ៣៨

គេឱ្យ a,b,c ជាមុំក្នុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $\cot a,\cot b,\cot c$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តនោះគេបាន $\sin^2 a,\sin^2 b,\sin^2 c$ ក៏ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែរ ។

ចម្លើយ៖

យើងមាន $\cot a,\cot b,\cot c$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត តាមមធ្យមនព្វន្ត

គេបាន

$$\cot a+\cot c=2\cot b$$

$$\frac{\cos a}{\sin a}+\frac{\cos c}{\sin c}=\frac{2\cos b}{\sin b}$$

$$\frac{\cos a\sin c+\sin a\cos c}{\sin a\sin c}=\frac{2\sin\cos b}{\sin b}$$

$$\sin b\sin c\cos a+\sin a\sin b\cos c=2\sin a\sin c\cos b$$

$$\sin b\sin c\cos a-\sin a\sin c\cos b=\sin a\sin c\cos b-\sin a\sin b\cos c$$

$$\sin c(\sin b\cos a-\cos b\sin a)=\sin a(\sin c\cos b-\cos c\sin b)$$ ដោយ $c=\pi-(a+b)$

$$\sin[\pi-(b+a)](\sin b\cos a-\cos b\sin a)=\sin[\pi-(c+b)](\sin c\cos b-\cos c\sin b)$$

$$\sin(b+a)(\sin b\cos a-\cos b\sin a)=\sin(c+b)(\sin c\cos b-\cos c\sin b)$$

$$(\sin b\cos a+\sin a\cos b)(\sin b\cos a-\sin a\cos b)=(\sin c\cos b+\sin b\cos c)(\sin c\cos b-\sin b\cos c)$$

$$(\sin b\cos a)^2-(\sin a\cos b)^2=(\sin c\cos b)^2-(\sin b\cos c)^2$$

$$\sin^2 b(1-\sin^2 a)-\sin^2 a(1-\sin^2 a)=\sin^2 c(1-\sin^2 b)-\sin^2 b(1-\sin^2 c)$$

$$\sin^2 b-\sin^2 a\sin^2 b-\sin^2 a+\sin^2 a\sin^2 b=\sin^2 c-\sin^2 b\sin^2 c-\sin^2 b+\sin^2 b\sin^2 c$$

$$\sin^2 b-\sin^2 a=\sin^2 c-\sin^2 b$$

$$\sin^2 a+\sin^2 c=2\sin^2 b$$ តាមមធ្យមនព្វន្ត

នាំឱ្យ $\sin^2 a,\sin^2 b,\sin^2 c$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

ដូចនេះ បើ $\cot a,\cot b,\cot c$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តនោះ $\sin^2 a,\sin^2 b,\sin^2 c$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

លំហាត់ ៣៩

កំណត់ផលធៀបរួមនៃស្ទីតធរណីមាត្រ និងសរសេរបីតួបន្ទាប់ទៀតនៃស្ទីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $8,4,2,1,\frac{1}{2},\ldots$

២. $8,4\sqrt{2},4,2\sqrt{2},\ldots$

៣. $\sqrt{3},3,3\sqrt{3},9,\ldots$

ចម្លើយ៖

កំណត់ផលធៀបរួម q និងសរសេរបីតួបន្ទាប់នៃស្ទីត

១. យើងមាន $8,4,2,1,\frac{1}{2},\ldots$

តាង $u_1=8,u_2=4\Rightarrow q=\frac{u_2}{u_1}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

គេបាន $u_6=u_5q=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$u_7=u_6q=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

$u_8=u_7q=\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$

ដូចនេះ ផលធៀបរួមគឺ $q=\frac{1}{2}$ និងបីតួបន្ទាប់នៃស្ទីតគឺ $8,4,2,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16}$

២. យើងមាន $8,4\sqrt{2},4,2\sqrt{2},\ldots$

តាង $u_1=8,u_2=4\sqrt{2}\Rightarrow q=\frac{u_2}{u_1}=\frac{4\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

គេបាន $u_5=u_4q=\cancel{2}\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}=(\sqrt{2})^2=2$

$u_6=u_5q=\cancel{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}=\sqrt{2}$

$u_7=u_6q=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{(\sqrt{2})^2}{2}=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}=1$

ដូចនេះ ផលធៀបរួមគឺ $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$ និងបីតួបន្ទាប់នៃស្ទីតគឺ $8,4\sqrt{2},4,2\sqrt{2},2,\sqrt{2},1$

៣. យើងមាន $\sqrt{3},3,3\sqrt{3},9,\ldots$

តាង $u_1=\sqrt{3},u_2=3\Rightarrow q=\frac{u_2}{u_1}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}}=\sqrt{3}$

គេបាន $u_5 = u_4 q = 9\sqrt{3}$

$$u_6 = u_5 q = 9\sqrt{3}.\sqrt{3} = 9(\sqrt{3})^2 = 27$$

$$u_7 = u_6 q = 27\sqrt{3}$$

ដូចនេះ ផលធៀបរួមគឺ $q = \sqrt{3}$ និងបីតួបន្ទាប់នៃស្វីតគឺ $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, 9\sqrt{3}, 27, 27\sqrt{3}$

លំហាត់ ៣៦

កំណត់តួទី n និង តួទី 15 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $625, 125, 25, 5, 1, \ldots$

២. $5, -\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{8}, \ldots$

៣. $1, \sqrt{7}, 7, 7\sqrt{7}, 49, \ldots$

ចម្លើយ៖

១. កំណត់តួទី n និង តួទី 15 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $625, 125, 25, 5, 1, \ldots$

តាង $u_1 = 625 = 5^4, u_2 = 125 = 5^3 \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{5^3}{5^4} = \frac{1}{5}$

គេបាន $$u_n = u_1 q^{n-1} = 5^4\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{5^4}{5^{n-1}} = 5^{4-(n-1)} = 5^{5-n}$$

$$\Rightarrow u_{15} = 5^{5-15} = 5^{-10}$$

ដូចនេះ តួទី n គឺ $u_n = 5^{5-n}$ និងតួទី 15 គឺ $u_{15} = 5^{-10}$

២. កំណត់តួទី n និង តួទី 15 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $5, -\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{8}, \ldots$

តាង $u_1 = 5, u_2 = -\frac{5}{2} \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-\frac{5}{2}}{5} = -\frac{\cancel{5}}{2} \times \frac{1}{\cancel{5}} = -\frac{1}{2}$

គេបាន $$u_n = u_1 q^{n-1} = 5\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow u_{15} = 5\left(-\frac{1}{2}\right)^{15-1} = 5\left(-\frac{1}{2}\right)^{14}$$

$$= (-1)^{14}\frac{5}{2^{14}}$$

$$= \frac{5}{2^{14}}$$

$(-1)^n = 1$ បើ n គូ

$(-1)^n = -1$ បើ n សេស

ដូចនេះ តួទី n គឺ $u_n = 5\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ និងតួទី 15 គឺ $u_{15} = \frac{5}{2^{14}}$

៣. កំណត់តួទី n និង តួទី 15 នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $1, \sqrt{7}, 7, 7\sqrt{7}, 49, \ldots$

តាង $u_1 = 1, u_2 = \sqrt{7} \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\sqrt{7}}{1} = \sqrt{7}$

គេបាន $u_n = u_1 q^{n-1} = 1\left(\sqrt{7}\right)^{n-1} = \left(\sqrt{7}\right)^{n-1}$

$$\Rightarrow \quad u_{15} = \left(\sqrt{7}\right)^{15-1} = \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{14} = 7^{\frac{14}{2}} = 7^7$$

ដូចនេះ តួទី n គឺ $u_n = \left(\sqrt{7}\right)^{n-1}$ និងតួទី 15 គឺ $u_{15} = 7^7$

លំហាត់ ៣៧

តើស្វ៊ីតធរណីមាត្រនីមួយៗខាងក្រោមមានចំនួនប៉ុន្មានតួ ?

១. $1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 1024$ ២. $5, 10, 20, \ldots, 5.2^n$

៣. $x^7, x^6, x^5, \ldots, x^{-7}$ $, x \neq 1$ និង $x > 0$

ចម្លើយ៖

១. រកចំនួនតួនៃស្វ៊ីត $1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 1024$

តាង $u_n = 1024, u_1 = 1, u_2 = 2$

$\Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{1} = 2$

គេបាន $u_n = u_1 q^{n-1}$

$$1024 = 1 \times 2^{n-1}$$

$$32 \times 32 = 2^{n-1}$$

$$2^5 \times 2^5 = 2^{n-1}$$

$$2^{5+5} = 2^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow 5 + 5 = n - 1$$

$$10 + 1 = n \Rightarrow n = 11$$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad , a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) = g(x)$$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត $1, 2, 4, 16, \ldots, 1024$ មានចំនួន 11 តួ

២. រកចំនួនតួនៃស្វ៊ីត $5, 10, 20, \ldots, 2560$

តាង $u_n = 2560, u_1 = 5, u_2 = 10$

$\Rightarrow q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{10}{5} = 2$ គេបាន $\quad u_n = u_1 q^{n-1}$

$$2560 = 10 \times 2^{n-1}$$

$$\frac{2560}{10} = 2^{n-1}$$

$$256 = 2^{n-1}$$

$$2^8 = 2^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow 8 = n - 1$$

$$n = 9$$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត $5, 10, 20, \ldots, 2560$ មានចំនួន 9 តួ

៣. រកចំនួនតួនៃស្វ៊ីត $x^7, x^6, x^5, \ldots, x^{-7}$ $, x \neq 1$ និង $x > 0$

តាង $u_n = x^{-7}, u_1 = x^7, u_2 = x^6 \Rightarrow q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{x^6}{x^7} = \dfrac{1}{x}$

គេបាន $\quad u_n = u_1 q^{n-1}$

$$x^{-7} = x^7 \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}$$

$$x^{-7} = x^{7-(n-1)}$$

$$\Leftrightarrow -7 = 7 - n + 1$$

$$n = 15$$

ដូចនេះ ស្វ៊ីត $x^7, -x^6, x^5, \ldots, x^{-7}$ $, x \neq 1$ និង $x > 0$ មានចំនួន 15 តួ

លំហាត់ ៣៨

គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $3, 12, 48, \ldots$ ។

១. គណនាតួទី 9 នៃស្វ៊ីត ។

២. តើចំនួន 12288 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត ?

៣. គណនាផលបូក 30 តួដំបូងនៃស្វ៊ីត ។

ចម្លើយ៖

គេមាន $3, 12, 48, \dots$

១. គណនាតួទី 9 នៃស្វ៊ីត

តាង $u_1 = 3, u_2 = 12 \Rightarrow q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{12}{3} = 4$

គេបាន $u_9 = u_1.q^{9-1} = 3 \times 4^8 = 196608$

ដូចនេះ តួទី 9 នៃស្វ៊ីតគឺ $u_9 = 196608$

២. តើចំនួន 12288 ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីត ?

តាង $u_n = 12288$ គេបាន
$$\begin{aligned} u_n &= u_1.q^{n-1} \\ 12288 &= 3 \times 4^{n-1} \\ \frac{12288}{3} &= 2^{2(n-1)} \\ 4096 &= 2^{2n-2} \\ 64 \times 64 &= 2^{2n-2} \\ 2^{6+6} &= 2^{2n-2} \\ \Leftrightarrow 12 &= 2n - 2 \\ \frac{14}{2} &= n \\ \Rightarrow n &= 7 \end{aligned}$$

ដូចនេះ ចំនួន 12288 ជាតួទី 7 នៃស្វ៊ីត

៣. គណនាផលបូក 30 តួដំបូងនៃស្វ៊ីត

$$S_n = u_1.\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

គេបាន
$$\begin{aligned} S_{30} &= u_1 \frac{q^{30} - 1}{q - 1} \\ &= 3.\frac{4^{30} - 1}{4 - 1} \\ &= \cancel{3}.\frac{4^{30} - 1}{\cancel{3}} \end{aligned}$$

ដូចនេះ ផលបូក 30 តួដំបូងនៃស្វ៊ីតគឺ $S_{30} = 4^{30} - 1$

លំហាត់ ៣៩

សរសេរបួនតួដំបូងនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ រួចបង្ហាញថាវាជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ចម្លើយ៖

- សរសេរបួនតួដំបូងនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

  យើងមាន $u_n = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

  $$u_1 = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{1-1} = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{0} = 6(1) = 6$$

  $$u_2 = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{2-1} = 6\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{6}{2} = -3$$

  $$u_3 = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{3-1} = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{2} = 6.\frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

  $$u_4 = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{4-1} = -6\left(-\frac{1}{2}\right)^{3} = -6.\frac{1}{2^3} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

  ដូចនេះ បួនតួដំបូងនៃស្វ៊ីតគឺ $6, -3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4}$

- បង្ហាញថា $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

  ដោយ $u_n = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow u_{n+1} = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

  គេបាន $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\cancel{6.\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\left(-\frac{1}{2}\right)}{\cancel{6\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}} = -\frac{1}{2} = q$

  ដូចនេះ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

លំហាត់ ៤០

រកតួទី១ និង ផលធៀបរួមនៃស្វីតធរណីមាត្រ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ នីមួយៗខាងក្រោម បើគេស្គាល់៖

១. $u_3 = 1$ និង $u_7 = 81$

២. $u_2 + u_3 = 9$ និង $u_7 = 8u_4$

៣. $S_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$

៤. $u_1 + u_2 = 18$ និង $u_2 + u_3 = 36$

ចម្លើយ៖

$u_n = u_p.q^{n-p}$

$u_7 = u_3 q^{7-3}$

១. រក u_1 និង q

យើងមាន $u_3 = 1$

និង $u_7 = 81 \Leftrightarrow u_3.q^4 = 81$

$$q^4 = 3^4$$

$$q = 3$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{1}{q^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

ដូចនេះ $u_1 = \dfrac{1}{9}$ និង $q = 3$

២. រក u_1 និង q

យើងមាន $u_2 + u_3 = u_1 q + u_1 q^2$

$$u_1(q + q^2) = 9$$

នោះ

$$u_1(q + q^2) = 9 \qquad (21)$$

និង $u_7 = 8u_4 \Leftrightarrow \cancel{u_4}q^3 = 8\cancel{u_4}$

$$q^3 = 2^3$$

$q = 2$ ជំនួសចូលសមីការ (21)

គេបាន $u_1(2 + 2^2) = 9 \Rightarrow u_1 = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$

ដូចនេះ $u_1 = \dfrac{3}{2}$ និង $q = 2$

៣. រក u_1 និង q

យើងមាន $S_n = \frac{1}{3} - \frac{2^n}{3^{n+1}}$

$$S_1 = u_1 = \frac{1}{3} - \frac{2^1}{3^{1+1}} = \frac{3-2}{9} = \frac{1}{9}$$

$$S_2 = u_1 + u_2 = \frac{1}{3} - \frac{2^2}{3^{2+1}} = \frac{1}{3} - \frac{4}{27} = \frac{9-4}{27} = \frac{5}{27}$$

$$u_1 + u_1 q = \frac{5}{27}$$

$$u_1(1+q) = \frac{5}{27}$$

$$\frac{1}{9}(1+q) = \frac{5}{27}$$

$$1+q = \frac{5}{3}$$

$$q = \frac{5}{3} - 1 = \frac{5-3}{3} = \frac{2}{3}$$

ដូចនេះ $u_1 = \frac{1}{9}$ និង $q = \frac{2}{3}$

៤. រក u_1 និង q

យើងមាន $u_1 + u_2 = 18$

និង $u_2 + u_3 = 36$

$$u_1 q + u_2 q = 36$$

$$q(u_1 + u_2) = 36$$

$$18q = 36$$

$$q = \frac{36}{18} = 2$$

ម្យ៉ាងទៀត $u_1 + u_2 = 18$

$$u_1 + u_1 q = 18$$

$$u_1(1+2) = 18$$

$$u_1 = \frac{18}{3} = 6$$

ដូចនេះ $u_1 = 6$ និង $q = 2$

លំហាត់ ៤១

គេមានស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $5, 15, 45, \dots$ ។ គណនាផលបូក n តួដំបូង S_n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រនេះ ។ រក u_n រួចបង្ហាញថា $3u_n = 2S_n + 5$ ។

ចម្លើយ៖

គណនា S_n

យើងមាន $u_1 = 5, u_2 = 15 \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{15}{5} = 3$

គេបាន $S_n = u_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$$= 5 . \frac{3^n - 1}{3 - 1}$$

$$= \frac{5}{2}(3^n - 1)$$

បង្ហាញថា $3u_n = 2S_n + 5$

ដោយ $u_n = u_1 . q^{n-1}$

$$= 5 \times 3^{n-1}$$

គេបាន $2S_n + 5 = 2 . \frac{5}{2}(3^n - 1) + 5$

$$= 5 \times 3^n - \cancel{5} + \cancel{5}$$

$$= 5 \times 3^{n-1} \times 3$$

$$= 3u_n$$

ដូចនេះ៖ $2S_n + 5 = 3u_n$

លំហាត់ ៤២

គេមាន u_1, u_2, u_3 ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។ កំណត់ u_1 និងផលធៀបរួម q នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ បើគេស្គាល់៖

១. $u_1 + u_2 + u_3 = 28$ និង $u_1 u_2 u_3 = 512$

២. $u_1 + u_2 + u_3 = 13$ និង $u_1 u_2 u_3 = -64$ ។

ចម្លើយ៖

១. កំណត់ u_1 និងផលធៀបរួម q នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន $u_1u_2u_3 = 512$ តាមមធ្យមធរណីមាត្រ

$$u_2.u_2^2 = 512$$

$$\sqrt[3]{u_2^3} = \sqrt[3]{8^3}$$

$$u_2 = 8$$

បើ x, y, z ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ
កាលណា $xz = y^2$

នាំឱ្យ

$$u_1u_3 = \frac{512}{8} = 64 \tag{22}$$

និង $u_1 + u_2 + u_3 = 28$

$$u_1 + 8 + u_3 = 28 \Rightarrow u_1 + u_3 = 28 - 8$$

នាំឱ្យ

$$u_1 + u_3 = 20 \tag{23}$$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត គេបាន $X^2 - (u_1 + u_3)X + u_1u_3 = 0$

$$X^2 - 20X + 64 = 0$$

$$X^2 - 4X - 16X + 64 = 0$$

$$X(X-4) - 16(X-4) = 0$$

$$(X-4)(X-16) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} X - 4 = 0 \\ \\ X - 16 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} X = 4 \\ \\ X = 16 \end{array}\right.$$

- ចំពោះ $u_1 = 4, u_2 = 8 \Rightarrow q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{8}{4} = 2$
- ចំពោះ $u_1 = 16, u_2 = 8 \Rightarrow q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $u_1 = 4, q = 2$ ឬ $u_1 = 16, q = \dfrac{1}{2}$

២. កំណត់ u_1 និងផលធៀបរួម q នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន $u_1u_2u_3 = -64$ តាមមធ្យមធរណីមាត្រ

$$u_2.u_2^2 = -64$$

$$\sqrt[3]{u_2^3} = \sqrt[3]{(-4)^3}$$

$$u_2 = -4$$

នាំឱ្យ

$$u_1u_3 = \frac{-64}{-4} = 16 \quad (24)$$

និង $u_1 + u_2 + u_3 = 13$

$$u_1 - 4 + u_3 = 13 \Rightarrow u_1 + u_3 = 13 + 4$$

នាំឱ្យ

$$u_1 + u_3 = 17 \quad (25)$$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត គេបាន

$$X^2 - (u_1 + u_3)X + u_1u_3 = 0$$

$$X^2 - 17X + 16 = 0$$

$$X^2 - X - 16X + 16 = 0$$

$$X(X-1) - 16(X-1) = 0$$

$$(X-1)(X-16) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} X - 1 = 0 \\ X - 16 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} X = 1 \\ X = 16 \end{array}\right.$$

- ចំពោះ $u_1 = 1, u_2 = -4 \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-4}{1} = -4$
- ចំពោះ $u_1 = 16, u_2 = -4 \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $u_1 = 1, q = -4$ ឬ $u_1 = 16, q = -\frac{1}{2}$

លំហាត់ ៤៣

កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យបីចំនួន $x, 2x+6, 4x+36$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តម្លៃ x

ដើម្បីឱ្យបីចំនួន $x, 2x+6, 4x+36$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

កាលណា $x(4x+36) = (2x+6)^2$

$$\cancel{4x^2} + 36x = \cancel{4x^2} + 24x + 36$$

$$36x - 24x = 36$$

$$12x = 36$$

$$x = \frac{36}{12}$$

$$x = 3$$

បើ x, y, z ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

កាលណា $xz = y^2$

ដូចនេះ $x = 3$

លំហាត់ ៤៤

រកបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ បើគេដឹងថា ផលបូកបីតួនេះស្មើ 26 និងផលគុណបីតួនេះស្មើ 216 ។

ចម្លើយ៖

រកបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ

តាង a, b, c ជាបីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

នោះ $a+b+c = 26$ និង $abc = 216$

តាមមធ្យមធរណីមាត្រ $ac = b^2$ នាំឱ្យ $\quad abc = 216$

$$b.b^2 = 216$$

$$b^3 = 6^3$$

$$\Leftrightarrow b = 6$$

គេបាន $a+b+c=26 \Rightarrow a+c=26-6=20$

$$abc=216 \Rightarrow ac=\frac{216}{6}=36$$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត គេបាន $X^2-(a+c)X+ac=0$

$$X^2-20X+36=0$$

$$X^2-2X-18X+36=0$$

$$X(X-2)-18(X-2)=0$$

$$(X-2)(X-18)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} X-2=0 \\ \\ X-18=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} X=2 \\ \\ X=18 \end{array}\right.$$

បើ $a=2 \Rightarrow c=18$ និង $b=6$

បើ $a=18 \Rightarrow c=2$ និង $b=6$

ដូចនេះ បីតួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រគឺ $2,6,18$ ឬ $18,6,2$

លំហាត់ ៤៩

រកពីរចំនួន a និង b ដែលបីតួ $a,b,10$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តផង និងស្វ៊ីតធរណីមាត្រផង ។

ចម្លើយ៖

យើងមានបីតួ $a,b,10$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តផង និងស្វ៊ីតធរណីមាត្រផង

តាមមធ្យមនព្វន្តគេបាន

$$a+10=2b$$

$$a=2b-10 \qquad (26)$$

តាមមធ្យមធរណីមាត្រគេបាន

$$
\begin{aligned}
a10 &= b^2 \\
(2b-10)10 &= b^2 \\
b^2-20b+100 &= 0 \qquad (27)
\end{aligned}
$$

ដោយ $a=1, b'=\dfrac{20}{2}=10, c=100$ តាម $\Delta'=(b')^2-ac=10^2-1(100)=0$

នាំឱ្យ $b=-\dfrac{b'}{a}=-\dfrac{10}{1}=-10$ ជំនួសចូល (26) នាំឱ្យ $a=2(-10)-10=-30$

ដូចនេះ $a=-30$ និង $b=-10$

លំហាត់ ៤៦

តើគេត្រូវថែមប៉ុន្មានទៅលើចំនួន $3, 24, 94$ ដើម្បីឱ្យបានបីតួបន្តបន្ទាប់គ្នានៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ។

ចម្លើយ៖

តាង x ជាចំនួនដែលត្រូវថែមទៅលើចំនួន $3, 24, 94$

នោះ $3+x, 24+x, 94+x$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

តាមមធ្យមធរណីមាត្រ គេបាន $(3+x)(94+x)=(24+x)^2$

$$
\begin{aligned}
282+3x+94x+\cancel{x^2} &= 576+48x+\cancel{x^2} \\
49x &= 294 \\
x &= \frac{294}{49} \\
&= 6
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $x=6$

លំហាត់ ៤៧

គេឱ្យផលបូក $2+2^2+2^3+\cdots+2^{n+1}=1022$ ។ គណនាតម្លៃ n ។

ចម្លើយ៖

គណនាតម្លៃ n

យើងមាន $2+2^2+2^3+\cdots+2^{n+1}=1022$

$$2.\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=1022$$

$$2^{n+1}-2=1022$$

$$2^{n+1}=1024$$

$$2^{n+1}=2^{10}$$

$\Leftrightarrow n+1=10 \Rightarrow n \quad =10-1=9$

ដូចនេះ $n=9$

លំហាត់ ៤៨

គណនាតម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យ $a,28,b$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ បើ $a+b=119$ ។

ចម្លើយ៖

គណនាតម្លៃ a និង b

គេមាន $a,28,b$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនោះតាមមធ្យមធរណីមាត្រគេបាន $ab=28^2=784$ និង

$$a+b=119 \tag{28}$$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេបាន $X^2-(a+b)X+ab=0$

$$X^2-119X+784=0$$

$$X-7X-112X+784=0$$

$$X(X-7)-122(X-7)=0$$

$$(X-7)(X-112)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} X-7=0 \\ \\ X-112=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} X=7 \\ \\ X=112 \end{array}\right.$$

- បើ $a=7$ ជំនួសចូល (28) នាំឱ្យ $b=119-a=119-7=112$
- បើ $a=112$ ជំនួសចូល (28) នាំឱ្យ $b=119-a=112-7=105$
- បើ $b=7$ ជំនួសចូល (28) នាំឱ្យ $a=119-b=112-7=105$
- បើ $b=112$ ជំនួសចូល (28) នាំឱ្យ $a=119-b=112-7=105$

ដូចនេះ $\quad a=7 \Rightarrow b=112\ ;\ a=112 \Rightarrow b=105$

ឬ $a=7 \Rightarrow b=1\ ;\ a=112 \Rightarrow b=105$

លំហាត់ ៤៩

គណនាបីចំនួន a,b,c នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ បើគេដឹងថា៖

១. $a+b+c=310$ និង $b^2=10c$

២. $a+b+c=13$ និង $a^2+b^2+c^2=91$ ។

ចម្លើយ៖

១. គណនាបីចំនួន a,b,c នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន $b^2=10c$ ដោយ $ac=b^2$

នាំឱ្យ $ac=10c \Leftrightarrow a=10 \Rightarrow c=\dfrac{b^2}{10}$

និង $a+b+c=310$

$$10+b+\frac{b^2}{10}=310$$
$$\frac{100+10b+b^2}{10}=310$$
$$b^2+10b+100-3100=0$$
$$b^2+10b-3000=0$$
$$b^2-50b+60b-3000=0$$
$$b(b-50)+60(b-50)=0$$
$$(b-50)(b+60)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b-50=0 \\ b+60=0 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=50 \\ b=-60 \end{array} \right.$$

បើ $b=50 \Rightarrow c=\frac{b^2}{10}=\frac{50^2}{10}=250$

បើ $b=-60 \Rightarrow c=\frac{b^2}{10}=\frac{(-60)^2}{10}=360$

ដូចនេះ $a=10, b=50, c=250$ ឬ $a=10, b=-60, c=360$

២. គណនាបីចំនួន a,b,c នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន $a+b+c=13 \Rightarrow a+c=13-b$

និង $a^2+b^2+c^2=91$ ដោយ $ac=b^2$

នាំឱ្យ $a^2+ac+c^2=91$

$$a^2+2ac+c^2-ac=91$$

$$(a+c)^2-ac=91$$

$$(13-b)^2-ac=91 \quad ,ac=b^2$$

$$13^2-26b+b^2-b^2=91$$

$$-26b=91-169$$

$$b=\frac{78}{26}=3$$

$\Rightarrow a+c=13-3=10$ និង $ac=b^2=3^2=9$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេបាន $X^2-(a+c)X+ac=0$

$$X^2-10X+9=0$$

$$X^2-X-9X+9=0$$

$$X(X-1)-9(X-1)=0$$

$$(X-1)(X-9)=0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} X-1=0 \\ \\ X-9=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} X=1 \\ \\ X=9 \end{array}\right.$$

បើ $a=1 \Rightarrow c=10-a=10-1=9$

បើ $a=9 \Rightarrow c=10-a=10-9=1$

ដូចនេះ $a=1, b=3, c=9$ ឬ $a=9, b=3, c=1$

លំហាត់ ៥០

បើ a, b, c ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ស្រាយបញ្ជាក់ថាបីចំនួនខាងក្រោមជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែរ៖

១. a^2, b^2, c^2 ២. $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ ៣. $\frac{1}{a^k}, \frac{1}{b^k}, \frac{1}{c^k}$ ។

ចម្លើយ៖

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ a, b, c ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ នោះ a^2, b^2, c^2 ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែរ

យើងមាន a, b, c ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនោះ

គេបាន $ac=b^2 \Leftrightarrow (ac)^2=(b^2)^2$

$\Leftrightarrow a^2.c^2=(b^2)^2$

គេបាន a^2, b^2, c^2 ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

> បើ x, y, z ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ
> គេបាន $xz=y^2$

២. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ a, b, c ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ នោះ $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែរ

យើងមាន a, b, c ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនោះ

គេបាន $ac=b^2 \Leftrightarrow (ac)^2=(b^2)^2$

$\Leftrightarrow a^2.c^2=(b^2)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2.c^2}=\frac{1}{(b^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}=\left(\frac{1}{b^2}\right)^2$$

គេបាន $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

៣. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ a,b,c ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ នោះ $\frac{1}{a^k},\frac{1}{b^k},\frac{1}{c^k}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែរ

យើងមាន a,b,c ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនោះ

គេបាន $ac=b^2 \Leftrightarrow (ac)^k=(b^2)^k$

$$\Leftrightarrow a^k.c^k=(b^2)^k=(b^k)^2$$

គេបាន $\frac{1}{a^k},\frac{1}{b^k},\frac{1}{c^k}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

លំហាត់ ៨១

គណនាផលបូកខាងក្រោម៖

១. $S_n=1+11+111+\cdots+\underbrace{111\ldots11}_{n \text{ ដងលេខ } 1}$

២. $S_n=3+33+333+\cdots+\underbrace{333\ldots33}_{n \text{ ដងលេខ } 3}$

៣. $S_n=7+77+777+\cdots+\underbrace{777\ldots77}_{n \text{ ដងលេខ } 7}$

ចម្លើយ៖

១. គេមាន $S_n=1+11+111+\cdots+\underbrace{111\ldots11}_{n \text{ ដងលេខ } 1}$

គេបាន $9S_n=9+99+999+\cdots+\underbrace{999\ldots99}_{n \text{ ដងលេខ } 9}$

$$9S_n=(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots+(1\underbrace{000\ldots00}_{n \text{ ដងលេខ } 0}-1)$$

$$=(10+10^2+10^3+\cdots+10^n)-(\underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{n \text{ តួលេខ } 1})$$

$$=10.\frac{10^n-1}{10-1}-n$$

$$9S_n=\frac{10^{n+1}-10-9n}{9}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}$

២. គេបាន $S_n = 3 + 33 + 333 + \cdots + \underbrace{333\ldots33}_{n \text{ ដងលេខ } 3}$

$$S_n = 3(1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111\ldots11}_{n \text{ ដងលេខ } 1})$$

$$\frac{9}{3}S_n = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{999\ldots99}_{n \text{ ដងលេខ } 9}$$

$$3S_n = (10-1) + (100-1) + (1000-1) + \cdots + (1\underbrace{000\ldots00}_{n \text{ ដងលេខ } 0} - 1)$$

$$3S_n = (10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n) - (1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + 1)$$

$$= 10.\frac{10^n - 1}{10 - 1} - n$$

$$3S_n = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{9}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{(10^{n+1} - 9n - 10)}{27}$

៣. $S_n = 7 + 77 + 777 + \cdots + \underbrace{777\ldots77}_{n}$ (ស្រាយដូចគ្នា)

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{7(10^{n+1} - 9n - 10)}{81}$

លំហាត់ ៨២

បើ a, b, c, d ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

១. $(a-d)^2 = (a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2$

២. $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$

៣. $(a+b+c)(b+c+d)(a-b+c)(b-c+d) = (ab+bc+cd)^2$ ។

ចម្លើយ៖

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ a, b, c, d ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

នោះ៖ $(a-d)^2 = (a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2$

យើងមាន a, b, c, d ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

នោះ៖ $ac = b^2, bd = c^2$ និង $ad = bc$

គេបាន $(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2 = a^2+c^2+b^2+c^2+b^2+d^2-2ac-2bc-2bd$

$$= a^2+\cancel{2c^2}+\cancel{2b^2}+d^2-\cancel{2b^2}-2ad-\cancel{2c^2}$$

$$= a^2-2ad+d^2$$

$$= (a-d)^2$$

ដូចនេះ បើ a,b,c,d ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនោះ $(a-d)^2 = (a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2$

២. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ a,b,c,d ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

នោះ $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$

យើងមាន a,b,c,d ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ នោះ $ac=b^2, bd=c^2$ និង $ad=bc$ គេបាន

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab)^2+(ac)^2+(ad)^2+b^4+(bc)^2+(bd)^2+(bc)^2+c^4+(cd)^2$$

$$= (ab)^2+(bc)^2+(cd)^2+ac.b^2+adbc+acb^2+bdc^2+abcd+bdc^2$$

$$= (ab)^2+(bc)^2+(cd)^2+2ab^2c+2abcd+2bc^2d$$

$$= (ab+bc+cd)^2$$

ដូចនេះ បើ a,b,c,d ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ នោះ $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$

៣. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ a,b,c,d ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

នោះ $(a+b+c)(b+c+d)(a-b+c)(b-c+d) = (ab+bc+cd)^2$

យើងមាន a,b,c,d ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ នោះ $ac=b^2, bd=c^2$ និង $ad=bc$

តាង $A = (a+b+c)(a-b+c) = [(a+c)-b][(a+c)-b]$

$$= (a+c)^2-b^2$$

$$= a^2+2ac+c^2-b^2 \qquad ,ac=b^2$$

$$= a^2+b^2+c^2$$

$$B = (b+c+d)(b-c+d) = [(b+d)+c][(b+d)-c]$$

$$= (b+d)^2-c^2$$

$$= b^2+2bd+d^2-c^2 \qquad ,bd=c^2$$

$$= b^2+c^2+d^2$$

គេបាន $AB = (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$ ពិតតាមសម្រាយ

លំហាត់ទី២ខាងលើ

ដូចនេះ បើ a,b,c,d ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ នោះ $(a+b+c)(b+c+d)(a-b+c)(b-c+d) = (ab+bc+cd)^2$

លំហាត់ ៨៣

គេឱ្យចំនួនពិត a,b និងស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ មួយដែលកំណត់ដោយ $u_{n+1} = au_n + b$

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_{n+2} - u_{n+1} = a(u_{n+1} - u_n)$ ។

២. បើ $v_n = u_{n+1} - u_n$ តើស្វ៊ីត (v_n) ជាស្វ៊ីតអ្វី ?

ចម្លើយ៖

១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_{n+2} - u_{n+1} = a(u_{n+1} - u_n)$ ។

យើងមាន $u_{n+1} = au_n + b \Rightarrow u_{n+2} = au_{n+1} + b$

គេបាន $u_{n+2} - u_{n+1} = au_{n+1} + b - (au_n + b)$

$$= au_{n+1} + \cancel{b} - au_n - \cancel{b}$$

$$= a(u_{n+1} - u_n)$$

២. បើ $v_n = u_{n+1} - u_n \Rightarrow v_{n+1} = u_{m+2} - u_{n+1}$

សមមូល $v_{n+1} = av_n \Leftrightarrow \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = a$ នោះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

លំហាត់ ៨៤

សរសេរចំនួនទសភាគខួបខាងក្រោម ជាចំនួនសនិទានដែលមានទម្រង់ $\dfrac{a}{b}$

១. $0.\overline{8}$ ២. $0.\overline{34}$ ៣. $2.3\overline{5}$ ៤. $5.3\overline{54}$

ចម្លើយ៖

១. គេមាន $0.\overline{8} = 0.8 + 0.08 + 0.008 + 0.0008 + \ldots$ ជាផលបូកនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្ត

តួដែល $u_1 = 0.8 = \dfrac{8}{10}, u_2 = 0.08 = \dfrac{8}{100}$

និង $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{8}{100} \times \dfrac{10}{8} = \dfrac{1}{10} < 1$

តាមរូបមន្ត $S_\infty = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{\frac{8}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \dfrac{\frac{8}{10}}{\frac{9}{10}} = \dfrac{8}{10} \times \dfrac{10}{9} = \dfrac{8}{9}$

ដូចនេះ $0.\overline{8} = \dfrac{8}{9}$

២. គេមាន $0.\overline{34} = 0.34 + 0.0034 + 0.000034 + \ldots$ ជាផលបូកនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួ ដែល $u_1 = 0.34 = \dfrac{34}{100}, u_2 = 0.0034 = \dfrac{34}{10000}$

និង $q = \dfrac{34}{10000} \times \dfrac{100}{34} = \dfrac{1}{100} < 1$

តាមរូបមន្ត $S_\infty = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{\frac{34}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \dfrac{34}{100} \times \dfrac{100}{99} = \dfrac{34}{99}$

ដូចនេះ $3.\overline{34} = \dfrac{34}{99}$

៣. គេមាន $2.3\overline{5} = 2.3 + 0.05 + 0.005 + \ldots$ ចាប់ពីតួទី២គឺជាផលបូកនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ អនន្តតួដែល $u_1 = 0.05 = \dfrac{5}{100}, u_2 = 0.005 = \dfrac{5}{1000}$

និង $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{5}{1000} \times \dfrac{100}{5} = \dfrac{1}{10} < 1$

គេបាន $2.3\overline{5} = 2.3 + \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{23}{10} + \dfrac{\frac{5}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \dfrac{23}{10} + \dfrac{5}{100} \times \dfrac{10}{9}$

$$= \frac{23 \times 9 + 5}{90} = \frac{212}{90} = \frac{106}{45}$$

ដូចនេះ $2.3\overline{5} = \dfrac{106}{45}$

៤. គេមាន $5.3\overline{54} = 5.3 + 0.054 + 0.00054 + \ldots$ ចាប់ពីតួទី២គឺជាផលបូកនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ អនន្តតួដែល $u_1 = 0.054 = \dfrac{54}{1000}, u_2 = 0.00054 = \dfrac{54}{100000}$

និង $q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{54}{100000} \times \dfrac{1000}{54} = \dfrac{1}{100} < 1$

គេបាន $5.3\overline{54} = 5.3 + \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{53}{10} + \dfrac{\frac{54}{1000}}{1-\frac{1}{100}} = \dfrac{53}{10} + \dfrac{54}{1000} \times \dfrac{100}{99}$

$$= \frac{53 \times 99 + 54}{990} = \frac{5301}{990}$$

ដូចនេះ $2.3\overline{5} = \dfrac{5301}{990}$

លំហាត់ ៩៩

គណនាផលបូក

១. $\sum_{k=1}^{4}(3k+1)$ ២. $\sum_{k=1}^{25} k$

៣. $\sum_{k=100}^{200} k$ ៤. $\sum_{k=1}^{55}(3k-2)$

៥. $\sum_{k=1}^{90}(2-7k)$ ៦. $\sum_{k=13}^{46}(9+2k)$

ចម្លើយ៖

គណនាផលបូក

១. $\sum_{k=1}^{4}(3k+1) = 3\sum_{k=1}^{4} k + \sum_{k=1}^{4} 1$

$$= 3.\frac{4(4+1)}{2} + 4(1)$$

$$= \frac{3(4)(5)}{2} + 4 = 34$$

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc$$

$$\sum_{k=1}^{n} ck = c\sum_{k=1}^{n} k$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

២. $\sum_{k=1}^{25} k = \frac{25(25+1)}{2} = 325$

៣. $\sum_{k=100}^{200} k = \sum_{k=1}^{200} k - \sum_{k=1}^{99} k$

$$= \frac{200(200+1)}{2} - \frac{99(99+1)}{2}$$

$$= 100(201) - 99(50)$$

$$= 15150$$

៤. $\sum_{k=1}^{55}(3k-2) = 3\sum_{k=1}^{55} k - \sum_{k=1}^{55} 2$

$$= 3.\frac{55(55+1)}{2} - 55(2)$$

$$= 4620 - 110$$

$$= 4510$$

៥. $\sum_{k=1}^{90}(2-7k)=\sum_{k=1}^{90}2-7\sum_{k=1}^{90}k$

$$=90\times 2-7.\frac{90(90+1)}{2}$$

$$=180-28665$$

$$=-28485$$

៦. $\sum_{k=13}^{46}(9+2k)=\sum_{k=1}^{46}(9+2k)-\sum_{k=1}^{12}(9+2k)$

$$=\sum_{k=1}^{46}9+2\sum_{k=1}^{46}k-\sum_{k=1}^{12}9-2\sum_{k=1}^{12}k$$

$$=46(9)+2.\frac{46(46+1)}{2}-12(9)-2.\frac{12(12+1)}{2}$$

$$=414+2162-108-156$$

$$=2312$$

លំហាត់ ៩៦

គណនាផលបូក

១. $\sum_{k=3}^{n}3$

២. $\sum_{k=1}^{n}2k$

៣. $\sum_{k=10}^{n}k^3$

៤. $\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+1)$

៥. $\sum_{k=1}^{n}(3k-1)^2$

៦. $\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k-1)$

ចម្លើយ៖

គណនាផលបូក

១. $\sum_{k=3}^{n}3=\sum_{k=1}^{n}3-\sum_{k=1}^{2}3$

$$=3n-6$$

ខ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k = 2\sum_{k=1}^{n} k$

$$= \cancel{2} \times \frac{n(n+1)}{\cancel{2}}$$

$$= n(n+1)$$

គ. $\displaystyle\sum_{k=10}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{9} k^3$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{9^2(9+1)^2}{4}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 - 8100}{4}$$

ឃ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k^2 - 2k + 1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} + \sum_{k=1}^{n} 1$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2.\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) - 6n(n+1) + 6n}{6}$$

$$= \frac{n(2n^2 + n + 2n + 1 - 6n - 6 + 6)}{6}$$

$$= \frac{n(2n^2 - 3n + 1)}{6}$$

$$= \frac{n(2n-1)(n-1)}{6}$$

ង. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(9k^2 - 6k + 1\right)$

$$= 9\sum_{k=1}^{n} k^2 - 6\sum_{k=1} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= 9.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 6.\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$= n\left[\frac{3(n+1)(2n+1)}{2} - \frac{6(n+1)}{2} + \frac{2n}{2}\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left(6n^2 + 9n + 3 - 6n - 6 + 2n\right)$$

$$= \frac{n}{2}(6n^2 + 5n - 3)$$

៦. $\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k-1)=\sum_{k=1} k^2+2\sum_{k=1} k-\sum_{k=1}^{n} 1$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\cancel{2}.\frac{n(n+1)}{\cancel{2}}-n$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)+6n(n+1)-6n}{6}$$

$$=\frac{n}{6}(2n^2+3n+1+6n+6-6)$$

$$=\frac{n}{6}(2n^2+9n+1)$$

លំហាត់ ៨៧

បង្ហាញថា

១. $\sum_{k=1}^{n^2} k-\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n^3-1)}{2}$

២. $\sum_{k=1}^{n+2}(2k+3)=(n+2)(n+6)$

៣. $\sum_{k=n+1}^{2n} k^2=\frac{n(2n+1)(7n+1)}{6}$

ចម្លើយ៖

១. គេបាន $\sum_{k=1}^{n^2} k-\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n^2(n^2+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}$

$$=\frac{n[n(n^2+1)-(n+1)]}{2}$$

$$=\frac{n(n^3+n-n-1)}{2}$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n^2} k-\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n^3-1)}{2}$

២. គេបាន $\sum_{k=1}^{n+2}(2k+3)=2\sum_{k=1}^{n+2} k+\sum_{k=1}^{n+2} 3$

$$=2.\frac{(n+2)(n+2+1)}{2}+(n+2)3$$

$$=(n+2)(n+3)+3(n+2)$$

$$=(n+2)(n+3+3)$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n+2}(2k+3)=(n+2)(n+6)$

៣. គេបាន $\sum_{k=n+1}^{2n} k^2 = \sum_{k=1}^{2n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2$

$$= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(2n+1)[2(4n+1)-(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{n(2n+1)(8n+2-n-1)}{6}$$

ដូចនេះ $\sum_{k=n+1}^{2n} k^2 = \frac{n(2n+1)(7n+1)}{6}$

លំហាត់ ៨៨

បង្ហាញថា

១. $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{i} r^2\right) = \frac{1}{12}.n(n+1)^2(n+2)$

២. $\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\left(\sum_{r=1}^{i} r\right)\right) = \frac{1}{24}.n(n+1)(n+2)(n+3)$

ចម្លើយ៖

១. គេបាន $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{i} r^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)(2i+1)}{6}\right)$

$$= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}(i^2+i)(2i+1)$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}(2i^3+3i^2+i)$$

$$= \frac{1}{6}\left(2\sum_{i=1}^{n} i^3 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left[2.\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 3.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{6}.\frac{n(n+1)[n(n+1)+2n+1+1]}{2}$$

$$= \frac{1}{12}.n(n+1)[n(n+1)+2(n+1)]$$

$$= \frac{1}{12}.n(n+1)(n+1)(n+2)$$

ដូចនេះ $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{i} r^2\right) = \frac{1}{12}.n(n+1)^2(n+2)$

២. គេបាន $\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\left(\sum_{r=1}^{i}r\right)\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\left(\frac{i(i+1)}{2}\right)\right)$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{j}(i^2+i)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}i^2+\sum_{i=1}^{j}i\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j(j+1)(2j+1)}{6}+\frac{j(j+1)}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{(j^2+j)(2j+1)+3j(j+1)}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n}(2j^3+j^2+2j^2+j+3j^2+3j)$$

$$=\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{n}(2j^3+6j^2+4j)$$

$$=\frac{1}{12}\left(2\sum_{j=1}^{n}j^3+6\sum_{j=1}^{n}j^2+4\sum_{j=1}^{n}j\right)$$

$$=\frac{1}{12}\left(2.\frac{n^2(n+1)^2}{4}+6.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4.\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{12}.\frac{1}{2}\left[n^2(n+1)^2+2n(n+1)(2n+1)+4n(n+1)\right]$$

$$=\frac{1}{24}.n(n+1)[n(n+1)+2(2n+1)+4]$$

$$=\frac{1}{24}.n(n+1)(n^2+n+4n+2+4)$$

$$=\frac{1}{24}.n(n+1)(n^2+3n+2n+6)$$

$$=\frac{1}{24}.n(n+1)[n(n+3)+2(n+3)]$$

$$=\frac{1}{24}.n(n+1)(n+3)(n+2)$$

ដូចនេះ $\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\left(\sum_{r=1}^{i}r\right)\right)=\frac{1}{24}.n(n+1)(n+2)(n+3)$

លំហាត់ ៤៩

ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ចែកដាច់នឹង 133 ។

ចម្លើយ៖

តាង $f(n) = 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

$f(1) = 11^2 + 12 = 133$ ចែកដាច់នឹង 133

$f(n)$ ចែកដាច់នឹង 133 ចំពោះ $n = 1$

ឧបមាថា $n = k$ ពិត គឺ $f(k) = 11^{k+1} + 12^{2k-1}$ ចែកដាច់នឹង 133

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 11^{k+1+1} + 12^{2(k+1)-1} \\ &= 11^{k+1}(11) + 12^{2k-1}(12)^2 \\ &= 11(11^{k+1}) + 144(12^{2k-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(k+1) - f(k) &= (11)11^{k+1} + (144)12^{2k-1} - (11^{k+1} + 12^{2k-1}) \\ &= 11(11)^{k+1} - 11^{k+1} + 144(12)^{2k-1} - 12^{2k-1} \\ &= 10(11)^{k+1} + 143(12)^{2k-1} \\ &= 10(11)^{k+1} + 10(12)^{2k-1} + 133(12)^{2k-1} \\ &= 10(11^{k+1} + 12^{2k-1}) + 133(12)^{2k-1} \\ &= 10.f(k) + 133(12)^{2k-1} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $f(n)$ ចែកដាច់នឹង 133 ចំពោះ $n = k+1$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើវិចារអនុមានរួចគណិតវិទ្យា

ដូចនេះ $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ចែកដាច់នឹង 133 ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

លំហាត់ ៦០

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $7^n - 1$ ជាពហុគុណនៃ 6 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

ចម្លើយ៖

ចំពោះ $n = 1$ នោះ $7^1 - 1 = 6$ ជាពុគុណនៃ 6

ឧបមាថា $n = k$ ពិត គឺ $7^k - 1$ ជាពហុគុណនៃ 6 ឬ $7^k - 1 = 6q \quad , q \in \mathbb{Z}$

យើងនឹងស្រាយពិតដល់ $n = k + 1$ គឺស្រាយថា $7^{k+1} - 1$ ជាពហុគុណនៃ 6

គេបាន $7^{k+1} = 7^k \times 7 - 1 = 7^k(6+1) - 1$

$$= 6(7^k) + 7^k - 1 = 6(7^k) + 6q$$

$$= 6(7^k + q) \qquad \text{យក } p = 7^k + p$$

$$= 6q \quad , q \in \mathbb{Z}$$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើវិចាអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

ដូចនេះ $7^k - 1$ ជាពហុគុណនៃ 6 ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

លំហាត់ ៦១

បង្ហាញថា $13^n + 11$ ជាពហុគុណនៃ 12 ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

ចម្លើយ៖

ចំពោះ $n = 1$ នោះ $13^1 + 11 = 24 = 2 \times 12$ ជាពុគុណនៃ 12

ឧបមាថា $n = k$ ពិត គឺ $13^k + 11$ ជាពហុគុណនៃ 12 ឬ $13^k + 11 = 12q \quad , q \in \mathbb{Z}$

យើងនឹងស្រាយពិតដល់ $n = k + 1$ គឺស្រាយថា $13^{k+1} + 11$ ជាពហុគុណនៃ 12

គេបាន $13^{k+1} + 11 = 13^k \times 13 + 11 = 13^k(12+1) + 11$

$$= 12 \times 13^k + 13^k + 11 = 12 \times 13^k + 12q$$

$$= 12\left(13^k + q\right) \qquad \text{យក } p = 13^k + q, p \in \mathbb{Z}$$

$$= 12q$$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើវិចាអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

ដូចនេះ $13^k + 11$ ជាពហុគុណនៃ 12 ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

លំហាត់ ៦២

បង្ហាញថា $(1+x)^n \geq (1+nx)$ ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ និង $x > -1$ ។

ចម្លើយ៖

តាងសំណើ $P(n) : (1+x)^n \geq (1+nx)$ ចំពោះ $x > -1$

ចំពោះ $n = 1$ នោះ $P(1) : (1+x) \geq (1+x), x > -1$ ពិត

ឧបមាថា $P(k) : (1+x)^k \geq (1+kx), x > -1$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ ពិត

គេឱ្យ $x > -1 \Rightarrow (1+x) > 0$

យើងមាន $P(k) : (1+x)^k \geq (1+kx)$ គុណវិសមភាពនឹង $1+x$

$$(1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x)$$

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+x+kx+kx^2$$

ដោយ $k \in \mathbb{N}$ និង $x^2 \geq 0$ នោះ $kx^2 \geq 0$ នាំឱ្យ $1+x+kx+kx^2 \geq (1+x+kx)$

គេបាន $P(k+1) : (1+x)^{k+1} \geq 1+x+kx$

$$\geq 1+(1+k)x$$

មានន័យថា $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ ពិត

តាមសម្រាយដោយប្រើវិចាអនុមានរួមគណិតវិទ្យាគេបានសំណើ $P(n)$ ពិត

ដូចនេះ $(1+x)^n \geq 1+nx$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ និង $x > -1$

លំហាត់ ៦៣

ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ បង្ហាញថា $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$ ។

ចម្លើយ៖

តាងសំណើ $P(n) : \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$

ចំពោះ $n = 1$ នោះ $P(1) : \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{3} = \frac{1}{3}$ ពិត

ឧបមាថា $P(k) : \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^k}\right)$ ពិត

យើងនឹងស្រាយពិតដល់ $P(k+1): \frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{3^{k+1}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{k+1}}\right)$

គេមាន $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^k}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^k}\right)$

នាំឲ្យ
$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{3^{k+1}} &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^k}\right)+\frac{1}{3^{k+1}} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^k}\right)\times\frac{3}{3}+\frac{1}{3^{k+1}} \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{k+1}}\right)+\frac{1}{3^{k+1}} \\
&= \frac{1}{2}-\frac{3}{2\times 3^{k+1}}+\frac{1}{3^{k+1}} \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{3^{k+1}}\left(\frac{3}{2}-1\right) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{3^{k+1}}\times\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{k+1}}\right)
\end{aligned}$$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើវិចាអនុមានរួមគណិតវិទ្យាគេបាន $P(k)$ ជាសំណើពិត

ដូចនេះ $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$

លំហាត់ ៦៨

គណនាផលបូក ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

១. $A = 11 + 12 + 13 + \ldots. + 100$

២. $B = 13^2 + 14^2 + 15^2 + \cdots + 50^2$

៣. $C = 10^3 + 11^3 + 12^3 + \cdots + 30^3$

៤. $S_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + n(n+1)$

៥. $S_n = 1.4 + 2.7 + 3.10 + \cdots + n(3n+1)$

៦. $S_n = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \cdots + n(n+1)(n+2)$

៧. $S_n = 2.4.6 + 4.6.8 + 6.8.10 + \cdots + 2n(2n+2)(2n+4)$

៨. $S_n = 1.3 + 2.9 + 3.27 + \cdots + n3^n$

៩. $S_n = 2 + 4x + 6x^2 + 8x^3 + \cdots + 2nx^{n-1} \quad , x > 1$

១០. $S_n = 1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \cdots + (n-1)n^2$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ ។

១១. $S_n = 8 + 88 + 888 + \cdots + \underbrace{888\ldots88}_{n \text{ ដងលេខ } 8}$

១២. $S_n = 13 + 1313 + 131313 + \cdots + \underbrace{131313\ldots1313}_{n \text{ ដងលេខ } 13}$

ចម្លើយ៖

គណនាផលបូក ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

១. $A = 11 + 12 + 13 + \ldots. + 100$

$$= (1 + 2 + 3 + \cdots + 100) - (1 + 2 + 3 + \cdots + 10)$$

$$= \frac{100(100+1)}{2} - \frac{10(10+1)}{2}$$

$$= 50(101) - 5(11)$$

$$= 5050 - 55$$

$A = 4995$

ដូចនេះ $A = 4995$

២. $B = 13^2 + 14^2 + 15^2 + \cdots + 50^2$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 50^2) - (1^1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 12^2)$$

$$= \frac{50(50+1)(2\times 50+1)}{6} - \frac{12(12+1)(2\times 12+1)}{6}$$

$B = 42275$

៣. $C = 10^3 + 11^3 + 12^3 + \cdots + 30^3$

$$= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 30^3) - (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 9^3)$$

$$= \left[\frac{30(30+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{9(9+1)}{2}\right]^2$$

$C = 214200$

ដូចនេះ $C = 214200$

៤. $S_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots + n(n+1)$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k^2 + k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+4)}{6}$$

$$= \frac{2n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$s_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

ង. $S_n = 1.4 + 2.7 + 3.10 + \cdots + n(3n+1)$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(3k+1) = \sum_{k=1} (3k^2+k) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= 3.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+2)}{2}$$

$$= n(n+1)(n+1)$$

$$S_n = n(n+1)^2$$

ច. $S_n = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \cdots + n(n+1)(n+2)$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k^2+k)(k+2)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k^3+3k^2+2k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + 3.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2.\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + n(n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)[n(n+1)+2(2n+1)+4]}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)(n^2+n+4n+2+4)}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{4}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

៧. $S_n = 2.4.6 + 4.6.8 + 6.8.10 + \cdots + 2n(2n+2)(2n+4)$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2k(2k+2)(2k+4)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2k2(k+1)2(k+2)$$

$$= 8\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) \qquad \text{តាមសម្រាយខាងលើគេបាន}$$

$$= 8.\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$= 2n(n+1)(n+2)(n+3)$$

៨. យើងមាន $S_n = 1.3 + 2.3^2 + 3.3^3 + \cdots + n.3^n$ គុណ 3 ចូល S_n

គេបាន $S_n = 1.3 + \cancel{2.3^2} + \cancel{3.3^3} + \cdots + \cancel{n.3^n}$

$$\underline{3.S_n = \cancel{1.3^2} + \cancel{2.3^3} + \cancel{3.3^4} + \cdots + n3^{n+1}}$$

$$S_n - 3S_n = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n - n.3^{n+1}$$

$$-2S_n = 3.\frac{3^n - 1}{3-1} - n.3^{n+1}$$

$$-2S_n = \frac{3^{n+1} - 3}{2} - \frac{2n.3^{n+1}}{2}$$

$$S_n = \frac{3^{n+1} - 2n.3^{n+1} - 3}{-4}$$

$$S_n = \frac{2n.3^{n+1} - 3^{n+1} + 3}{4}$$

៩. $S_n = 2 + 4x + 6x^2 + 8x^3 + \cdots + 2nx^{n-1} \qquad , x > 1$

គេបាន $S_n = 2 + \cancel{4x} + \cancel{6x^2} + \cancel{8x^3} + \cdots + \cancel{2nx^{n-1}}$

$$\underline{xS_n = \cancel{2x} + \cancel{4x^2} + \cancel{6x^3} + \cancel{8x^4} + \cdots + 2nx^n}$$

$$S_n - xS_n = 2 + 2x + 2x^2 + \cdots + 2x^{n-1} - 2nx^n$$

$$S_n(1-x) = 2.\frac{x^n - 1}{x-1} - 2nx^n$$

$$S_n(1-x) = -2\left(\frac{x^n - 1}{1-x} + nx^n\right)$$

ដូចនេះ $S_n = -2\left[\frac{x^n - 1}{(1-x)^2} + \frac{nx^n}{1-x}\right]$

១០. $S_n = 1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \cdots + (n-1)n^2,\ \forall n \geq 2$ ស្រាយដូចលំហាត់ទី៩

១១. គេមាន $S_n = 8 + 88 + 888 + \cdots + \underbrace{888\ldots 88}_{n \text{ ដងលេខ}}8$

គេបាន $S_n = 8(1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111\ldots 11}_{n \text{ ដងលេខ } 1})$

$$9S_n = 8(9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{999\ldots 99}_{n \text{ ដងលេខ } 9})$$

$$\frac{9}{8}S_n = (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + \cdots + (10^n-1)$$

$$= (10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n) - (\underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{n \text{ ដងលេខ } 1})$$

$$= 10 \times \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n$$

$$\frac{9}{8}S_n = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{9}$$

$$S_n = \frac{8\left(10^{n+1} - 9n - 10\right)}{81}$$

ដូចនេះ: $S_n = \dfrac{8\left(10^{n+1} - 9n - 10\right)}{81}$

១២. គេមាន $S_n = 13 + 1313 + 131313 + \cdots + \underbrace{131313\ldots 1313}_{n \text{ ដងលេខ } 13}$

គេបាន $S_n = 13\left(1 + 101 + 10101 + \cdots + 1\underbrace{010101\ldots 0101}_{n-1 \text{ គូលេខ } 01}\right)$

$$99S_n = 13\left(99 + 9999 + 999999 + \cdots + \underbrace{999999\ldots 9999}_{n \text{ គូលេខ } 99}\right)$$

$$\frac{99}{13}S_n = (10^2-1) + (10^4-1) + (10^6-1) + \cdots + (10^{2n}-1)$$

$$= 10^2 + 10^4 + 10^6 + \cdots + 10^{2n} - (\underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{n \text{ ដងលេខ } 1})$$

$$= 100 \times \frac{100^n - 1}{100 - 1} - n = \frac{100^{n+1} - 100 - 99n}{99}$$

ដូចនេះ: $S_n = \dfrac{13\left(100^{n+1} - 99n - 100\right)}{99^2}$

លំហាត់ ៦៥

គេឱ្យស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ ។

១. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ។

២. គណនាផលបូក 999 តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ។

៣. គណនា $A=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2018}}$

ចម្លើយ៖

គេឱ្យស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ ។

១. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

យើងមាន $u_k=\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$$=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$

$$=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k})^2-(\sqrt{k+1})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{k-k-1}=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{-1}$$

$$u_k=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

គេបាន $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$$

$$=(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n}})$$

$$=\sqrt{n+1}-1$$

ដូចនេះ ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ គឺ $S_n=\sqrt{n+1}-1$

Tel: 016 434 006

២. គេបាន $S_{999}=\sqrt{999+1}-1=\sqrt{1000}-1=\sqrt{10^3}-1=10\sqrt{10}-1$

ដូចនេះ ផលបូក 999 តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ គឺ $S_{999}=10\sqrt{10}-1$

៣. គណនា $A=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2017}+\sqrt{2018}}$

គេបាន $A=S_{2017}$

$$=\sqrt{2017+1}-1$$

$$=\sqrt{2018}-1$$

ដូចនេះ $A=\sqrt{2018}-1$

លំហាត់ ៦៦

គណនាផលបូក $A_n=\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{2.4}+\dfrac{1}{3.5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}$

ចម្លើយ៖

យើងមាន $\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{(k+2)-k}{k(k+2)}=2\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)$

ចំពោះ $k=1$ នោះ $\dfrac{1}{1.3}=\dfrac{1}{2}\left(1-\cancel{\dfrac{1}{3}}\right)$

ចំពោះ $k=2$ នោះ $\dfrac{1}{2.4}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\cancel{\dfrac{1}{4}}\right)$

ចំពោះ $k=3$ នោះ $\dfrac{1}{3.5}=\dfrac{1}{2}\left(\cancel{\dfrac{1}{3}}-\cancel{\dfrac{1}{5}}\right)$

ចំពោះ $k=4$ នោះ $\dfrac{1}{4.6}=\dfrac{1}{2}\left(\cancel{\dfrac{1}{4}}-\cancel{\dfrac{1}{6}}\right)$

....

ចំពោះ $k=n-1$ នោះ $\dfrac{1}{(n-1)(n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\cancel{\dfrac{1}{n-1}}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

ចំពោះ $k=n$ នោះ $\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\cancel{\dfrac{1}{n}}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{2.4}+\dfrac{1}{3.5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

ដូចនេះ $A_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

លំហាត់ ៦៧

គណនា $S_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

ចម្លើយៈ

យើងមាន $\frac{1}{1+2+3+\cdots+k} = \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{2}{k(k+1)}$

$$= 2\left[\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}\right] = 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$$S_n = 2\left[\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$= 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right) = 2 \times \frac{n+1-1}{n+1}$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{2n}{n+1}$

លំហាត់ ៦៨

គណនាផលបូក

១. $\sum_{k=1}^{n} k!k$

២. $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

៣. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

៤. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(k-1)!+k!+(k+1)!}$

ចម្លើយៈ

គណនាផលបូកៈ

១. យើងមាន $k!k = k!(k+1-1) = (k+1)! - k!$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n} k!k = \sum_{k=1}^{n} [(k+1)! - k!]$

$$= (\cancel{3!} - 1!) + (\cancel{3!} - \cancel{2!}) + (\cancel{4!} - \cancel{3!}) + \cdots + [(n+1)! - \cancel{n!}]$$

$$= (n+1)! - 1$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n} k!k = (n+1)! - 1$

២. យើងមាន $\dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\dfrac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2}=\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{1}{(k+1)^2}$

គេបាន $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right]$

$$=\left(\frac{1}{1^2}-\cancel{\frac{1}{2^2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2^2}}-\cancel{\frac{1}{3^2}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)^2}$$

ដូចនេះ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$

៣. យើងមាន $\dfrac{k}{(k+1)!}=\dfrac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\dfrac{k+1}{(k+1)!}-\dfrac{1}{(k+1)!}=\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}$

តាង $f(k)=\dfrac{1}{k!}\Rightarrow f(1)=\dfrac{1}{1!}=1$

និង $f(k+1)=\dfrac{1}{(k+1)!}\Rightarrow f(n+1)=\dfrac{1}{(n+1)!}$

គេបាន $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}[f(k+1)-f(k)]$

$$=f(1)-\cancel{f(2)}+\cancel{f(3)}-\cancel{f(4)}+\cdots+\cancel{f(n)}-f(n+1)$$

$$=f(1)-f(n+1)$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

$n!=1.2.3\ldots(n-1).n$

$n!=(n-1)!n$

$(n+1)!=(n-1)!n(n+1)$

ដូចនេះ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$

៤. យើងមាន $\dfrac{k+1}{(k-1)!+k!+(k+1)!}=\dfrac{k+1}{(k-1)!+(k-1)!k+(k-1)!k(k+1)}$

$$=\frac{k+1}{(k-1)![1+k+k(k+1)]}$$

$$=\frac{k+1}{(k-1)!(k+1)!}$$

$$=\frac{1}{(k-1)!(k+1)}=\frac{k}{(k+1)!}$$

គេបាន $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(k-1)!+k!+(k+1)!}=\sum_{k=1}\frac{k}{(k+1)!}$ តាមសម្រាយលំហាត់ទី៣ខាងលើ

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(k-1)!+k!+(k+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$

លំហាត់ ៦៩

គណនាផលបូក

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2011^2}+\frac{1}{2012^2}}$$

ចម្លើយ៖

យើងមាន $1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{k^2(k+1)^2+(k+1)^2+k^2}{k^2(k+1)^2}$

$$=\frac{k^2(k^2+2k+1)+k^2+2k+1+k^2}{[k(k+1)]^2}$$

$$=\frac{(k^2)^2+2k^2.k+k^2+2k^2+2k+1}{[k(k+1)]^2}$$

$$=\frac{(k^2)^2+k^2+1+2k^2.k+2k^2+2k}{[k(k+1)]^2}$$

$$=\frac{(k^2+k+1)^2}{[k(k+1)]^2}$$

$$=\left[\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}\right]^2$$

នាំឱ្យ $\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=\sqrt{\left[\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}\right]^2}$

$$=\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}$$

$$=\frac{k(k+1)+1}{k(k+1)}$$

$$=1+\frac{k+1-k}{k(k+1)}$$

$$=1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

តាង $f(k)=\frac{1}{k}\Rightarrow f(1)=1$ និង $f(k+1)=\frac{1}{k+1}\Rightarrow f(n+1)=\frac{1}{n+1}$

គេបាន $$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=\sum_{k=1}^{n}[1+f(k)-f(k+1)]$$
$$=\sum_{k=1}^{n}1+\sum_{k=1}^{n}[f(k)-f(k+1)]$$
$$=n+f(1)-f(n+1)$$
$$=n+1-\frac{1}{n+1}$$
$$\sum_{k=1}^{2011}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=2011+1-\frac{1}{2011+1}$$

ដូចនេះ: $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2011^2}+\frac{1}{2012^2}}=2012-\frac{1}{2012}$

លំហាត់ ៧០

គណនាផលគុណ

១. $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$

២. $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2020^2}\right)$

ចម្លើយ៖

គណនាផលគុណ

១. តាង $A=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$ គុណសមភាពនឹង $\left(1-\frac{1}{2}\right)$

គេបាន $$\left(1-\frac{1}{2}\right)A=\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\right]\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$$
$$\frac{1}{2}A=\left[1-\left(\frac{1}{2^{2^n}}\right)^2\right]$$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$A=2\left[1-\left(\frac{1}{2^{2^n}}\right)^2\right]$$

ដូចនេះ: $A=2\left[1-\left(\frac{1}{2^{2^n}}\right)^2\right]$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

២. តាង $B=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2011^2}\right)$

គេបាន $B=\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]\dots\left[\left(1+\frac{1}{2020}\right)\left(1-\frac{1}{2020}\right)\right]$

$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2020}\right)\left(1-\frac{1}{2020}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2020}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2020}\right)$$

$$=\left(\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\cdot\dots\cdot\frac{2021}{\cancel{2020}}\right)\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\dots\cdot\frac{\cancel{2019}}{2020}\right)$$

$$=\frac{2021}{2}\times\frac{1}{2020}$$

ដូចនេះ $B=\dfrac{2021}{4040}$

លំហាត់ ៧១

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n): 1,5,11,19,29,41,\dots$ ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n)

យើងមាន $(u_n): 1,5,11,19,41,\dots$

តាងស្វ៊ីត (v_n) ជាផលសងលំដាប់១នៃស្វ៊ីត (u_n) ដែលកំណត់ដោយ $v_n=u_{n+1}-u_n$ ។ គេបាន ស្វ៊ីត $(v_n): 4,6,8,10,12,\dots$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី1ស្មើ 4 និងផលសងរួមស្មើ 2 នោះគេបាន $v_n=4+2(n-1)=2n+2$

ចំពោះ $n\geq 2$ គេបាន $u_n=u_1+\sum_{k=1}^{n-1}v_k \quad ,u_1=1$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)=1+2\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}2$$

$$=1+\frac{\cancel{2}n(n-1)}{\cancel{2}}+2(n-1)=1+(n-1)(n+2)$$

$$=1+n^2+2n-n-2=n^2+n-1$$

ដូចនេះ (u_n) មានតួទី n កំណត់ដោយ $u_n=n^2+n-1$

លំហាត់ ៧២

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n) : 1,3,7,15,31,63,\dots$ ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n)

យើងមាន $(u_n) : 1,3,7,15,31,63,\dots$

តាងស្វ៊ីត (v_n) ជាផលសងលំដាប់១នៃស្វ៊ីត (u_n) ដែលកំណត់ដោយ $v_n = u_{n+1} - u_n$ ។ គេបានស្វ៊ីត $(v_n) : 2,4,8,16,32,\dots$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី1ស្មើ 2 និងផលធៀបរួមស្មើ 2

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k \quad , u_1 = 1$ និង $v_1 = 2$

$$= 1 + v_1 . \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}$$

$$= 1 + 2 . \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1}$$

$$= 1 + 2^n - 2 = 2^n - 1$$

ដូចនេះ (u_n) មានតួទី n កំណត់ដោយ $u_n = 2^n - 1$

លំហាត់ ៧៣

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n) : 3,8,16,27,41,58,\dots$ ។

គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (u_n) ។

ចម្លើយ៖

- កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n)

  យើងមាន $(u_n) : 3,8,16,27,41,58,\dots$

  តាងស្វ៊ីត (v_n) ជាផលសងលំដាប់១នៃស្វ៊ីត (u_n) ដែលកំណត់ដោយ $v_n = u_{n+1} - u_n$ ។ គេបានស្វ៊ីត $(v_n) : 5,8,11,14,17,\dots$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $v_1 = 5$ និង $d = 3$ នាំឱ្យ $v_n = v_1 + (n-1)d = 5 + 3(n-1) = 3n + 2$

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k \quad , u_1 = 3$

$$= 3 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k+2)$$

$$= 3 + 3\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 2$$

$$= 3 + 3.\frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1)$$

$$= \frac{6+3n^2-3n+4n-4}{2}$$

$$= \frac{3n^2+n+2}{2}$$

ដូចនេះ (u_n) មានតួទី n កំណត់ដោយ $u_n = \dfrac{3n^2+n+2}{2}$

- គណនាផលបូក n ដំបូងនៃស្វ៊ីត (u_n)

គេបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{3k^2+k+2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} + 2n\right)$$

$$= \frac{n}{2}\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{2} + \frac{n+1}{2} + 2\right)$$

$$= \frac{n}{2}\left(\frac{2n^2+n+2n+1+n+1+4}{2}\right)$$

$$= \frac{n}{4}(2n^2+4n+6)$$

$$= \frac{2n}{4}(n^2+2n+3)$$

ដូចនេះ ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ $S_n = \dfrac{n}{2}(n^2+2n+3)$

លំហាត់ ៧៤

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(a_n): 1, 12, 37, 82, 153, 256, \dots$ ។

ចម្លើយ៖

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)

យើងមាន $(a_n): 1, 12, 37, 82, 153, 256, \dots$

តាងស្វ៊ីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់១នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែលកំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$ ។ គេបានស្វ៊ីត $(b_n): 11, 25, 45, 71, \dots$ ។ តាងស្វ៊ីត (c_n) ជាផលសងលំដាប់១នៃស្វ៊ីត (b_n) កំណត់ដោយ $c_n = b_{n+1} - b_n$ គេបានស្វ៊ីត $(c_n): 14, 20, 26, \dots$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $c_1 = 14$ និង $d = 6$ នោះគេបាន $c_n = c_1 + (n-1)d = 14 + (n-1)6 = 14 + 6n - 6 = 6n + 8$

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន
$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \qquad , b_1 = 11 \\ &= 11 + \sum_{k=1}^{n-1} (6k+8) \\ &= 11 + 6\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 8 \\ &= 11 + 6.\frac{n(n-1)}{2} + 8(n-1) \\ &= 11 + 3n^2 - 3n + 8n - 8 \\ b_n &= 3n^2 + 5n + 3 \end{aligned}$$

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន
$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \qquad , a_1 = 1 \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k^2 + 5k + 3) \\ &= 1 + 3\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \\ &= 1 + 3.\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + 5.\frac{n(n-1)}{2} + 3(n-1) \\ &= 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{2} + 5.\frac{n(n-1)}{2} + 3n - 3 \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{n(n-1)(2n-1+5)}{2} + 3n - 2$$
$$= \frac{n(n-1)(2n+4)}{2} + 3n - 2$$
$$= \frac{n(n-1)(n+2).\cancel{2}}{\cancel{2}} + 3n - 2$$

ដូចនេះ (a_n) មានតួទី n កំណត់ដោយ $a_n = n(n-1)(n+2) + 3n - 2$

លំហាត់ ៧៥

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(a_n) : 1, 7, 23, 55, 109, 191, \dots$ ។

គណនាផលបូក n តួបំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) ។

ចម្លើយ៖

- កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (a_n)

  យើងមាន $(a_n) : 1, 7, 23, 55, 109, 191, \dots$

  តាងស្វ៊ីត (b_n) ជាផលសងលំដាប់១នៃស្វ៊ីត (a_n) ដែលកំណត់ដោយ $b_n = a_{n+1} - a_n$ ។ គេបានស្វ៊ីត $(b_n) : 6, 16, 32, 54, 82, \dots$ ។ តាងស្វ៊ីត (c_n) ជាផលសងលំដាប់១នៃស្វ៊ីត (b_n) កំណត់ដោយ $c_n = b_{n+1} - b_n$ គេបានស្វ៊ីត $(c_n) : 10, 16, 22, 28, \dots$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $c_1 = 10$ និង $d = 6$

  នោះគេបាន $c_n = 10 + (n-1)6 = 10 + 6n - 6 = 6n + 4$

  ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \quad , b_1 = 6$

$$= 6 + \sum_{k=1}^{n-1}(6k+4) = 6 + 6\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 4$$
$$= 6 + 6.\frac{n(n-1)}{2} + 4(n-1)$$
$$= 6 + 3n^2 - 3n + 4n - 4$$
$$b_n = 3n^2 + n + 2$$

Tel: 016 434 006

ចំពោះ $n \geq 2$ គេបាន $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \qquad , a_1 = 1$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k^2 + k + 2) \\
&= 1 + 3\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \\
&= 1 + 3.\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1) \\
&= 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + 2n - 2 \\
&= \frac{n(n-1)(2n-1+1)}{2} + 2n - 1 \\
&= \frac{n(n-1)\cancel{2}n}{\cancel{2}} + 2n - 1 \\
&= n^2(n-1) + 2n - 1 \\
&= n^3 - n^2 + 2n - 1
\end{aligned}$$

ដូចនេះ (a_n) មានតួទី n កំណត់ដោយ $a_n = n^3 - n^2 + 2n - 1$

- គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n)

គេបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(k^3 - k^2 + 2k - 1)$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \cancel{2}.\frac{n(n+1)}{\cancel{2}} - n \\
&= \frac{3n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)(2n+1)}{12} + n^2 + \cancel{n} - \cancel{n} \\
&= \frac{n(n+1)(3n^2 + 3n - 4n - 2)}{12} + n^2
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $S_n = n^2 + \dfrac{n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{12}$

លំហាត់ ៧៦

កំណត់តួទី n នៃទំនាក់ទំនងស្វ៊ីតនីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $u_1=-1\ ;\ u_{n+1}=-5u_n-1$ ២. $u_1=-2\ ;\ u_{n+1}=u_n+5$

៣. $u_1=3\ ;\ u_{n+1}=4u_n-3n-1$ ៤. $u_1=2\ ;\ u_{n+1}=7u_n-n3^n$

៥. $u_1=1\ ;\ u_{n+1}=-2u_n+3n^2$ ៦. $u_1=-3\ ;\ u_{n+1}=u_n+n^3$

ចម្លើយ៖

១. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត

យើងមាន $u_1=-1\ ;\ u_{n+1}=-5u_n-1$

តាង $r_n=A$ ដែល A ជាចំនួនថេរ នាំឱ្យ $r_{n+1}=A$

នោះគេបាន $r_{n+1}=-5r_n-1\Leftrightarrow A=-5A-1\Leftrightarrow 6A=-1$

$$\Rightarrow A=-\frac{1}{6}\Rightarrow r_{n+1}=-\frac{1}{6}$$

គេបាន $u_{n+1}-r_{n+1}=-5u_n-1-\left(-\frac{1}{6}\right)$

$$u_{n+1}-\left(-\frac{1}{6}\right)=-5u_n-\frac{5}{6}$$

$$u_{n+1}+\frac{1}{6}=-5\left(u_n+\frac{1}{6}\right)$$

តាង $v_n=u_n+\frac{1}{6}\Rightarrow v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{6}$ នាំឱ្យ $v_{n+1}=-5v_n$ នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $q=-5$ និង $v_1=u_1+\frac{1}{6}=-1+\frac{1}{6}=-\frac{5}{6}$

គេបាន $v_n=v_1q^{n-1}=-\frac{5}{6}.(-5)^{n-1}=\frac{(-5)^n}{6}$ ដោយ $v_n=u_n+\frac{1}{6}$

$$u_n+\frac{1}{6}=\frac{(-5)^n}{6}$$

$$\Rightarrow u_n=\frac{(-5)^n}{6}-\frac{1}{6}$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ $u_n=\frac{(-5)^n-1}{6}$

២. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត

យើងមាន $u_1=-2\ ;\ u_{n+1}=u_n+5\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n=5$ នាំឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

ដែលមាន $d=5$ គេបាន $u_n = u_1+(n-1)d$

$$= -2+(n-1)5$$

$$= -2+5n-5$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ $u_n = 5n-7$

៣. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត

យើងមាន $u_1 = 3$; $u_{n+1} = 4u_n - 3n - 1$

តាង $r_n = \alpha n+\beta \Rightarrow r_{n+1} = \alpha(n+1)+\beta$ ដែល α, β ជាចំនួនថេរ

នោះគេបាន $r_{n+1} = 4r_n - 3n - 1$

$$\alpha(n+1)+\beta = 4(\alpha n+\beta)-3n-1$$

$$\alpha n+\alpha+\beta = 4\alpha n+4\beta-3n-1$$

$$\alpha n-4\alpha n+\beta-4\beta+\alpha = -3n-1$$

$$-3\alpha n-(3\beta-\alpha) = -3n-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3\alpha n & = -3n \\ -(3\beta-\alpha) & = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = 1 \\ 3\beta-1 & = 1 \Rightarrow \beta = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

គេបាន $\qquad u_{n+1}-r_{n+1} = 4u_n-3n-1-[(n+1)+\frac{2}{3}]$

$$u_{n+1}-\left[(n+1)+\frac{2}{3}\right] = 4\left[u_n-\left(n+\frac{2}{3}\right)\right]$$

តាង $v_n = u_n-\left(n+\dfrac{2}{3}\right) \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1}-\left[(n+1)+\dfrac{2}{3}\right]$ នាំឱ្យ $v_{n+1} = 4v_n$

នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $q=4$ និង $v_1 = u_1-\left(1+\dfrac{2}{3}\right) = 3-\dfrac{5}{3} = \dfrac{4}{3}$

គេបាន $v_n = v_1q^{n-1} = \dfrac{4}{3}.(4)^{n-1} = \dfrac{4^n}{3}$

ដោយ $v_n = u_n-\left(n+\dfrac{2}{3}\right)$

$$\Rightarrow u_n = v_n+\left(n+\frac{2}{3}\right) = \frac{4^n}{3}+\left(n+\frac{2}{3}\right)$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ $u_n = \dfrac{4^n+3n+2}{3}$

៤. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត

យើងមាន $u_1 = 2$; $u_{n+1} = 7u_n - n3^n$

តាង $r_n = (\alpha n + \beta)3^n \Rightarrow r_{n+1} = [\alpha(n+1) + \beta]3^{n+1}$ ដែល α, β ជាចំនួនថេរ

នោះគេបាន $r_{n+1} = 7r_n - n3^n$

$$[\alpha(n+1) + \beta]3^{n+1} = 7[(\alpha n + \beta)3^n] - n3^n$$

$$3(\alpha n + \alpha + \beta)\cancel{3^n} = (7\alpha n + 7\beta - n)\cancel{3^n}$$

$$3\alpha n + 3\alpha + 3\beta - 7\alpha n - 7\beta + n = 0$$

$$-4\alpha n + n - 4\beta + 3\alpha = 0$$

$$-(4\alpha - 1) - (4\beta - 3\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha - 1 & = 0 \\ 4\beta - 3\alpha & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha & = 1 \\ 4\beta & = 3\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \beta = \frac{3.\frac{1}{4}}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16} \end{cases}$$

គេបាន $u_{n+1} - r_{n+1} = 7u_n - n3^n - \left[\frac{1}{4}.(n+1)\frac{3}{16}\right]3^{n+1}$

$$u_{n+1} - \left[\frac{1}{4}.(n+1) + \frac{3}{16}\right]3^{n+1} = 7\left[u_n - \left(\frac{1}{4}.n + \frac{3}{16}\right)3^n\right]$$

តាង $v_n = u_n - \left[\frac{1}{4}.n + \frac{3}{16}\right]3^n \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} - \left[\frac{1}{4}.(n+1) + \frac{3}{16}\right]3^{n+1}$

នាំឱ្យ $v_{n+1} = 7v_n$ នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $q = 7$

និង $v_1 = u_1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16}\right)3 = 2 - \frac{7 \times 3}{16} = \frac{32 - 21}{16} = \frac{11}{16}$

គេបាន $\quad v_n = v_1 q^{n-1} = \frac{11}{16} \times 7^{n-1}$

$$u_n - \left(\frac{1}{4}.n + \frac{3}{16}\right)3^n = \frac{11}{16} \times 7^{n-1}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{11 \times 7^{n-1}}{16} + \left(\frac{4n+3}{16}\right)3^n$$

$$= \frac{11 \times 7^{n-1} + (4n+3)3^n}{16}$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ $u_n = \dfrac{11 \times 7^{n-1} + (4n+3)3^n}{16}$

៥. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត

យើងមាន $u_1 = 1$; $u_{n+1} = -2u_n + 3n^2$

តាង $r_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma \Rightarrow r_{n+1} = \alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma$

ដែល α, β, γ ជាចំនួនថេរ នោះ

គេបាន $r_{n+1} = -2r_n + 3n^2$

$$\alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma = -2(\alpha n^2 + \beta n + \gamma) + 3n^2$$

$$\alpha(n^2 + 2n + 1) + \beta n + \beta + \gamma = -2\alpha n^2 - 2\beta n - 2\gamma + 3n^2$$

$$\alpha n^2 + 2\alpha n + \alpha + \beta n + \beta + \gamma + 2\alpha n^2 + 2\beta n + 2\gamma - 3n^2 = 0$$

$$3\alpha n^2 - 3n^2 + 2\alpha n + 3\beta n + \alpha + \beta + 3\gamma = 0$$

$$(\alpha - 1)3n^2 + (2\alpha + 3\beta)n + (\alpha + \beta + 3\gamma) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 1 & = 0 \\ 2\alpha + 3\beta & = 0 \\ \alpha + \beta + 3\gamma & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = 1 \\ 3\beta & = -2 \\ \beta + 3\gamma & = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -\dfrac{2}{3} \\ \gamma = \dfrac{-1 + \frac{2}{3}}{3} = -\dfrac{1}{9} \end{cases}$$

គេបាន $u_{n+1} - r_{n+1} = -2u_n - 3n^2 - \left[(n+1)^2 - \dfrac{2}{3}(n+1) - \dfrac{1}{9}\right]$

$$u_{n+1} - \left[(n+1)^2 - \frac{2}{3}.(n+1) - \frac{1}{9}\right] = -2\left(n^2 - \frac{2}{3}.n - \frac{1}{9}\right)$$

តាង $v_n = u_n - \left(n^2 - \dfrac{2}{3}.n - \dfrac{1}{9}\right) \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} - \left[(n+1)^2 - \dfrac{2}{3}.(n+1) - \dfrac{1}{9}\right]$

នាំឱ្យ $v_{n+1} = -2v_n$ នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $q = -2$

និង $v_1 = u_1 - \left(1 - \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{9}\right) = 1 - 1 + \dfrac{7}{9}$

គេបាន $\quad v_n = v_1 q^{n-1} = \dfrac{7}{9} \times (-2)^{n-1}$

$$u_n - \left(n^2 - \frac{2}{3}.n - \frac{1}{9}\right) = \frac{7(-2)^{n-1}}{9}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{7(-2)^{n-1}}{9} + \left(n^2 - \frac{2}{3}.n - \frac{1}{9}\right)$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ $u_n = \dfrac{7(-2)^{n-1} + 9n^2 - 6n - 1}{9}$

៦. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

យើងមាន $u_1=-3$; $u_{n+1}=u_n+n^3 \Leftrightarrow u_{n+1}-u_n=n^3$

តាង $v_n=u_{n+1}-u_n=n^3$ នោះ (v_n) ជាផលសងលំដាប់១នៃ (u_n)

ចំពោះ $n\geq 2$ គេបាន $u_n=u_1+\sum_{k=1}^{n-1}v_k=-3+\sum_{k=1}^{n-1}k^3$

$$=-3+\frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

$$=\frac{-12+n^2(n-1)^2}{4}$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ $u_n=\dfrac{n^2(n-1)^2-12}{4}$

លំហាត់ ៧៧

រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើននីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}\end{cases}$

២. $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}\end{cases}$

៣. $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{4u_n}{4u_n-1}\end{cases}$

៤. $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{5u_n+1}{4u_n+2}\end{cases}$

ចម្លើយ៖

១. កំណត់តួទៅទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

គេមាន $u_1=2, u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}$ មានសមីការសំគាល់ $\lambda=\dfrac{2\lambda+1}{\lambda+2}$

$$\lambda^2+\cancel{2\lambda}-\cancel{2\lambda}-1=0$$

$$(\lambda-1)(\lambda+1)=0$$

$$\lambda=1,\lambda=-1$$

$\boxed{(a-b)(a+b)=a^2-b^2}$

តាង $v_n=\dfrac{u_n-\lambda_1}{u_n-\lambda_2}$ ដែល $\lambda_1=1>\lambda_2=-1$

នាំឱ្យ

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \tag{29}$$

គេបាន $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} \quad , u_{n+1} = \dfrac{2u_n+1}{u_n+2}$

$$= \frac{\frac{2u_n+1}{u_n+2} - 1}{\frac{2u_n+1}{u_n+2} + 1} = \frac{2u_n+1-u_n-2}{2u_n+1+u_n+2} = \frac{u_n-1}{3u_n+3} = \frac{u_n-1}{3(u_n+1)}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}.v_n$$

ដោយ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $q = \dfrac{1}{3}$ និង $v_1 = \dfrac{u_1-1}{u_1+1} = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$

នាំឱ្យ $v_n = v_1.q^{n-1} = \dfrac{1}{3}.\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

តាមសមីការ (29) គេបាន $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{u_n-1}{u_n+1} = \dfrac{u_n+1-2}{u_n+1}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 - \frac{2}{u_n+1}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1 = -\frac{2}{u_n+1}$$

$$u_n + 1 = -\frac{2}{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}$$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ $u_n = -\dfrac{2}{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1} - 1$

២. កំណត់តួទៅទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

គេមាន $u_1 = 3, u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+4}$ មានសមីការសំគាល់ $\lambda = \dfrac{2\lambda+3}{\lambda+4}$

$$\lambda^2 + 4\lambda - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda = 1, \lambda = -3$$

តាង $v_n = \dfrac{u_n - \lambda_1}{u_n - \lambda_2}$ ដែល $\lambda_1 = 1 > \lambda_2 = -3$

នាំឱ្យ

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \qquad (30)$$

គេបាន $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} \quad , u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$

$$= \frac{\frac{2u_n+3}{u_n+4} - 1}{\frac{2u_n+3}{u_n+4} + 3} = \frac{2u_n + 3 - u_n - 4}{\cancel{u_n + 4}} \times \frac{\cancel{u_n + 4}}{2u_n + 3 + 3u_n + 12}$$

$$= \frac{u_n - 1}{5u_n + 15} = \frac{1}{5} . \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{5} v_n$$

ដោយ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $q = \dfrac{1}{5}$ និង $v_1 = \dfrac{u_1 - 1}{u_1 + 3} = \dfrac{3 - 1}{3 + 3} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

នាំឱ្យ $v_n = v_1 . q^{n-1} = \dfrac{1}{3} . \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$

តាមសមីការ (30) គេបាន $\dfrac{1}{3} . \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} = \dfrac{u_n + 3 - 4}{u_n + 3}$

$$\frac{1}{3} . \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 1 - \frac{4}{u_n + 3}$$

$$\frac{1}{3} . \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 1 = -\frac{4}{u_n + 3}$$

$$u_n + 3 = -\frac{4}{\frac{1}{3} . \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 1}$$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ $u_n = -\dfrac{4}{\frac{1}{3} . \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 1} - 3$

៣. កំណត់តួទៅទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

គេមាន $u_1 = 1, u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{4u_n - 1}$ មានសមីការសំគាល់ $\lambda = \dfrac{4\lambda}{4\lambda - 1}$

$$4\lambda^2 - \lambda - 4\lambda = 0$$

$$4\lambda^2 - 5\lambda = 0$$

$$\lambda(4\lambda - 5) = 0$$

$$\lambda = 0, \lambda = \frac{5}{4}$$

តាង $v_n = \dfrac{u_n - \lambda_1}{u_n - \lambda_2}$ ដែល $\lambda_1 = \dfrac{5}{4} > \lambda_2 = 0$
នាំឱ្យ

$$v_n = \frac{u_n - \frac{5}{4}}{u_n} \tag{31}$$

គេបាន $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - \frac{5}{4}}{u_{n+1}} \quad , u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{4u_n - 1}$

$$= \frac{\frac{4u_n}{4u_n-1} - \frac{5}{4}}{\frac{4u_n}{4u_n-1}} = \frac{16u_n - 5(4u_n - 1)}{4\cancel{(4u_n - 1)}} \times \frac{\cancel{4u_n - 1}}{4u_n}$$

$$= \frac{16u_n - 20u_n + 5}{16u_n} = \frac{-4u_n + 5}{16u_n} = \frac{-4\left(u_n - \frac{5}{4}\right)}{16u_n} = -\frac{1}{4}.\frac{u_n - \frac{5}{4}}{u_n}$$

$$v_{n+1} = -\frac{1}{4}.v_n$$

ដោយ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $q = -\dfrac{1}{4}$ និង $v_1 = \dfrac{u_1 - \frac{5}{4}}{u_1} = \dfrac{1 - \frac{5}{4}}{1} = -\dfrac{1}{4}$

នាំឱ្យ $v_n = v_1.q^{n-1} = -\dfrac{1}{4}.\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n$

តាមសមីការ (31) គេបាន $\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n = \dfrac{u_n - \frac{5}{4}}{u_n} = 1 - \dfrac{5}{4u_n}$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^n - 1 = -\frac{5}{4u_n}$$

$$4u_n = -\frac{5}{\left(-\frac{1}{4}\right)^n - 1}$$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ $u_n = -\dfrac{5}{4\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^n - 1\right]}$

៤. កំណត់តួទៅទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

គេមាន $u_1 = 2, u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 1}{4u_n + 2}$ មានសមីការសំគាល់ $\lambda = \dfrac{5\lambda + 1}{4\lambda + 2}$

$$4\lambda^2 + 2\lambda - 5\lambda - 1 = 0$$

$$4\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)(4\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = 1, \lambda = -\frac{1}{4}$$

តាង $v_n = \dfrac{u_n - \lambda_1}{u_n - \lambda_2}$ ដែល $\lambda_1 = 1 > \lambda_2 = -\dfrac{1}{4}$

នាំឱ្យ

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + \frac{1}{4}} \tag{32}$$

គេបាន $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + \frac{1}{4}} \quad , u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 1}{4u_n + 2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{5u_n+1}{4u_n+2} - 1}{\frac{5u_n+1}{4u_n+2} + \frac{1}{4}} \\
&= \frac{5u_n + 1 - 4u_n - 2}{4u_n + 2} \times \frac{4(4u_n+2)}{20u_n + 4 + 4u_n + 2} \\
&= \frac{4(u_n - 1)}{24u_n + 6} \\
&= \frac{4(u_n - 1)}{24\left(u_n + \frac{1}{4}\right)}
\end{aligned}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{6}.v_n$$

ដោយ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $q = \dfrac{1}{6}$ និង $v_1 = \dfrac{u_1 - 1}{u_1 + \frac{1}{4}} = \dfrac{2-1}{2 + \frac{1}{4}} = \dfrac{4}{9}$

នាំឱ្យ $v_n = v_1.q^{n-1} = \dfrac{4}{9}.\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$

តាមសមីការ (32) គេបាន $\dfrac{4}{9}.\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{u_n + \frac{1}{4} - \frac{5}{4}}{u_n + \frac{1}{4}} = 1 - \frac{\frac{5}{4}}{u_n + \frac{1}{4}} \\
\frac{4}{9}.\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} - 1 &= -\frac{5}{4(u_n + \frac{1}{4})} \\
u_n + \frac{1}{4} &= -\frac{5}{4\left[\frac{4}{9}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} - 1\right]}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) គឺ $u_n = -\dfrac{5}{4}.\dfrac{1}{\frac{4}{9}(\frac{1}{6})^{n-1} - 1} - \dfrac{1}{4}$

លំហាត់ ៧៨

រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើននីមួយៗខាងក្រោម៖

១. $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n \end{cases}$

២. $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 8 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$

៣. $\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 15 \\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 25u_n \end{cases}$

៤. $\begin{cases} u_1 = 0, u_2 = 3 \\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0 \end{cases}$

៥. $\begin{cases} u_1 = 5, u_2 = 11 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + 10u_n \end{cases}$

៦. $\begin{cases} u_1 = 9, u_2 = 13 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} + 21u_n \end{cases}$

ចម្លើយ៖

១. កំណត់តួទីn នៃស្វ៊ីត (u_n)

គេមាន $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$$\lambda^2 + \lambda - 3\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda(\lambda+1) - 3(\lambda+1) = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda-3) = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$$

តាង $\begin{cases} v_n = u_{n+1} - \lambda_1 u_n \\ w_n = u_{n+1} - \lambda_2 u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_n = u_{n+1} + u_n \\ w_n = u_{n+1} - 3u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1} \\ w_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1} \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} v_{n+1} = 3v_n \\ w_{n+1} = -w_n \end{cases}$ ដោយ (v_n) និង (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

$(v_n) : q = 3, v_1 = u_2 + u_1 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow v_n = v_1 q^{n-1} = 3(3)^{n-1} = 3^n$

នាំឱ្យ $\quad u_{n+1} + u_n = 3^n \qquad (33)$

$(w_n): q=-1, w_1=u_2-3u_1=2-3=-1$

$\Rightarrow w_n=w_1.q^{n-1}=-1(-1)^{n-1}=(-1)^n$

គេបាន

$$u_{n+1}-3u_n=(-1)^n \quad (34)$$

យកសមីការ (33) ដក (34)

គេបាន $u_{n+1}+u_n-(u_{n+1}-3u_n)=3^n-(-1)^n$

$$4u_n=3^n-(-1)^n$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ គឺ $u_n=\dfrac{3^n-(-1)^n}{4}$

២. កំណត់តួទីn នៃស្វ៊ីត (u_n)

គេមាន $u_1=1, u_2=8, u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n$ ឬ $u_{n+2}-4u_{n+1}+4u_n=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2-4\lambda+4=0$

$$(\lambda-2)^2=0$$

$$\lambda-2=0$$

$$\lambda=2$$

តាង $v_n=u_{n+1}-\lambda u_n=u_{n+1}-2u_n$

នាំឱ្យ $v_{n+1}=u_{n+2}-2u_{n+1}$

$$=4u_{n+1}-4u_n-2u_{n+1}$$

$$=2u_{n+1}-4u_n$$

$$=2(u_{n+1}-2u_n)$$

$$v_{n+1}=2v_n$$

ដោយ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែល $q=2; v_1=u_2-2u_1=8-2(1)=6$

នាំឱ្យ $v_n=v_1.q^{n-1}=6\times 2^{n-1}=3\times 2^n$

គេបាន

$$u_{n+1}-2u_n=3\times 2^n \quad (35)$$

យកសមីការ (35) ចែកនឹង 2^n

គេបាន $\frac{u_{n+1}}{2^n}-2.\frac{u_n}{2^n}=3$ ឬ $\frac{u_{n+1}}{2^n}-\frac{u_n}{2^{n-1}}=3$

តាង

$$w_n=\frac{u_n}{2^{n-1}}\Rightarrow w_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{2^n} \qquad (36)$$

គេបាន $w_{n+1}-w_n=3$ នោះ (w_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែល $d=3, w_1=\frac{u_1}{2^{1-1}}=\frac{1}{2^0}=1$

នាំឱ្យ $w_n=w_1+(n-1)d$

$=1+(n-1)3$

$=3n-2$

តាម (36) គេបាន $3n-2=\frac{u_n}{2^{n-1}}\Rightarrow u_n=(3n-2)2^{n-1}$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ គឺ $u_n=(3n-2)2^{n-1}$

៣. កំណត់តួទីn នៃស្វ៊ីត (u_n)

គេមាន $u_1=1, u_2=15, u_{n+2}=10u_{n+1}-25u_n$ ឬ $u_{n+2}-10u_{n+1}+25u_n=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2-10\lambda+25=0$

$(\lambda-5)^2=0$

$\lambda-5=0$

$\lambda=5$

តាង $v_n=u_{n+1}-\lambda u_n=u_{n+1}-5u_n$

នាំឱ្យ $v_{n+1}=u_{n+2}-5u_{n+1}$

$=10u_{n+1}-25u_n-5u_{n+1}$

$=5u_{n+1}-25u_n$

$=5(u_{n+1}-5u_n)$

$v_{n+1}=5v_n$

ដោយ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែល $q=5; v_1=u_2-5u_1=15-5(1)=10$

នាំឱ្យ $v_n=v_1.q^{n-1}=10\times5^{n-1}=2\times5^n$

គេបាន

$$u_{n+1} - 5u_n = 2 \times 5^n \quad (37)$$

យកសមីការ (37) ចែកនឹង 5^n

គេបាន $\frac{u_{n+1}}{5^n} - 5.\frac{u_n}{5^n} = \frac{4 \times 5^n}{5^n}$

$\frac{u_{n+1}}{5^n} - \frac{u_n}{5^{n-1}} = 2$

តាង

$$w_n = \frac{u_n}{5^{n-1}} \quad (38)$$

$$\Rightarrow w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{5^n}$$

គេបាន $w_{n+1} - w_n = 4$ នោះ (w_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី១ $w_1 = \frac{u_1}{5^{n-1}} = \frac{1}{5^0} = 1$

និង ផលសងរួម $d = 2$ នាំឱ្យ $w_n = w_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)2$

$$= 1 + 2n - 2 = 2n - 1$$

តាម (38) គេបាន $w_n = \frac{u_n}{5^{n-1}} \Leftrightarrow u_n = w_n 5^{n-1}$

$$= (2n-1)5^{n-1}$$

ដូចនេះ តួទី n នៃស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ គឺ $u_n = (2n-1)5^{n-1}$

៤. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n)

យើងមាន $u_1 = 0, u_2 = 3,\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$$\lambda^2 - \lambda - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1) - 2(\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda - 2 = 0 \\ \\ \lambda - 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \\ \lambda = 1 \end{array}\right.$$

គេបាន $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n = A2^n + B$ ដែល $A, B \in \mathbb{R}$

ចំពោះ $u_1 = 0 \Longrightarrow u_1 = 2A + B$

$$2A + B = 0 \tag{39}$$

ចំពោះ $u_2 = 3 \Longrightarrow u_2 = A2^2 + B$

$$4A + B = 3 \tag{40}$$

យកសមីការ (39) ដក (40)

គេបាន $2A + \cancel{B} - 4A - \cancel{B} = 0 - 3$

$$-2A = -3 \Rightarrow A = \frac{3}{2} \Rightarrow B = -2A = -2\left(\frac{3}{2}\right) = -3$$

គេបាន $u_n = \frac{3}{2} \times 2^n - 3 = 3 \times 2^{n-1} - 3$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្វ៊ីតគឺ $u_n = 3(2^{n-1} - 1)$

៥. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n)

យើងមាន $u_1 = 5, u_2 = 11,\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + 10u_n$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 = 3\lambda + 10$

$$\lambda^2 - 2.\frac{3}{2}\lambda + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 10 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{40+9}{4} = \frac{49}{4}$$

$$\sqrt{\left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2}$$

$$\left|\lambda - \frac{3}{2}\right| = \frac{7}{2} \Rightarrow \lambda - \frac{3}{2} = \pm\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \\ \\ \lambda - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ \\ \lambda = \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \end{array}\right.$$

គេបាន $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n = A5^n + B(-2)^n$

ចំពោះ $u_1 = 5 \Longrightarrow u_1 = A5^1 + B(-2)^1$

$$5A - 2B = 5 \quad (41)$$

ចំពោះ $u_2 = 11 \Longrightarrow u_2 = A5^2 + B(-2)^2$

$$25A + 4B = 11 \quad (42)$$

យកសមីការ $2\times(41)$ បូក (42)

គេបាន $2(5A-2B)+(25A+4B) = 2(5)+11$

$$10A - \cancel{4B} + 25A + \cancel{4B} = 10 + 11$$

$$35A = 21 \Rightarrow A = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}$$ ជំនួសចូល (41)

នោះ $2B = 5A - 5 = 5.\frac{3}{5} - 5 = -2 \Rightarrow B = -1$

គេបាន $u_n = \frac{3}{5}.5^n - (-2)^n$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្វ៊ីតគឺ $u_n = 3\times 5^{n-1} - (-2)^n$

៦. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n)

យើងមាន $u_1 = 9, u_2 = 13,\ u_{n+2} = 4u_{n+1} + 21u_n$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2 = 4\lambda + 21$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 3\lambda - 21 = 0$$

$$\lambda(\lambda-7) + 3(\lambda-7) = 0$$

$$(\lambda-7)(\lambda+3) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda - 7 = 0 \\ \\ \lambda + 3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 7 \\ \\ \lambda = -3 \end{array}\right.$$

គេបាន $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n = A7^n + B(-3)^n$ ដែល $A, B \in \mathbb{R}$

ចំពោះ $u_1 = 9 \Longrightarrow u_1 = A7^1 + B(-3)^1$

$$7A - 3B = 9 \tag{43}$$

ចំពោះ $u_2 = 13 \Longrightarrow u_2 = A7^2 + B(-3)^2$

$$49A + 9B = 13 \tag{44}$$

យកសមីការ $3\times$(43) បូក (44)

គេបាន $3(7A-3B)+(49A+9B) = 3(9)+13$

$$21A - \cancel{9B} + 49A + \cancel{9B} = 27 + 13$$

$$70A = 40 \Rightarrow A = \frac{4}{7}$$ ជំនួសចូល (43)

នោះ $3B = 7A - 9 = 7.\frac{4}{7} - 9 = -5 \Rightarrow B = -\frac{5}{3}$

គេបាន $u_n = \frac{4}{7}.7^n - \frac{5}{3}(-3)^n$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្វ៊ីតគឺ $u_n = 4\times 7^{n-1} + 5\times(-3)^{n-1}$

៩.១ ឯកសារយោង

[1] Discrete Mathematics

[2] R.B. Manfrino et al, *Topics in Algebra and Analysis*, Springer Internation Publishing Switzerland 2015

[3] 178 exercices demathe´matiques pour Terminale S, Ste´phane PASQUET, 24 mars 2016

[4] Theory and Problems of DISCRETE MATHEMATICS Third Edition, SCHAUM´S OUTLINE OF , Copyright 2007,1997,1976 by the McGraw-Hill Companies, Inc.

[5] David M.Burton, *Elementary Number Theory* , University of New Hampshire.

[6] MATHEMATICS FOR THE INTERNATIONAL STUDENT Mathematics HL (Core) second edition.

[7] Maths HL 3rd Edition published in 2004 by IBID Press, 2nd imprint published in 2005 Reprinted 2007.

[8] 178 exercices de mathématiques pour Terminale S ,Stéphane PASQUET, 24 mars 2016

[9] Methods of Solving Sequence and Series Problems, Ellina Grigorieva .

[10] សៀវភៅគណិតវិទ្យាកំរិតខ្ពស់ថ្នាក់ទី១១ របស់ក្រសួងអប់រំយុវជននិងកីឡា ។