លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ
បរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា និង ពាណិជ្ជកម្ម

ស៊ីតចំនួនពិត

សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១

$$21978 \times 4 = 87912$$

រក្សាសិទ្ធិ

សង្ខេបមេរៀនស៊ីតនៃចំនួនពិត

I. ស៊ីតនៃចំនួនពិត

១.សញ្ញាណស៊ីត

ស៊ីតនៃចំនួនពិតគឺជាអនុគមន៍លេខដែលកំនត់ពីសំណុំ IN ទៅសំណុំ IR ។ គេកំនត់សរសេរស៊ីតមួយដោយ (U_n) ឬ $(U_n)_{n\in IN}$ ដែល $U_n = f(n)$ ។

២.អថេរភាពនៃស៊ីត

ក-ស៊ីតកើន

គេថាស៊ីត (U_n) ជាស៊ីតកើនលើ IN កាលណាគ្រប់ $n\in IN$ គេមាន $U_{n+1} > U_n$ ។

ខ-ស៊ីតចុះ

គេថាស៊ីត (U_n) ជាស៊ីតចុះលើ IN កាលណាគ្រប់ $n\in IN$ គេមាន $U_{n+1} < U_n$ ។

គ-ស៊ីតម៉ូណូតូន

គេថាស៊ីត (U_n) ជាស៊ីតម៉ូណូតូនកាលណាវាជាស៊ីតកើនជានិច្ច ឬ ជាស៊ីតចុះជានិច្ច ។

៣.ស៊ីតទាល់

ក-ស៊ីតទាល់លើ

គេថាស៊ីត (U_n) ជាស៊ីតទាល់លើកាលណាមានចំនួនពិត M ដែល $\forall n\in IN : U_n \le M$ ។

ខ-ស៊ីតទាល់ក្រោម

គេថាស៊ីត (U_n) ជាស៊ីតទាល់ក្រោមកាលណាមានចំនួនពិត m ដែល $\forall n\in IN : U_n \ge m$ ។

គ-ស៊ីតទាល់

គេថាស៊ីត (U_n) ជាស៊ីតទាល់កាលណាវាជាស៊ីត ទាល់លើផង និងទាល់ក្រោមផង ។

៤.ស៊ីតខួប

គេថាស៊ីត (U_n) ជាស៊ីតខួបដែលមានខួបស្មើ p កាលណា $\forall n\in IN : U_{n+p} = U_n$, $p\in IN^*$ ។

II. ស្វ៊ីតនព្វន្ត

១.និយមន័យ

ស្វ៊ីតនព្វន្តគឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលមានតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទីមួយ) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់បូកនឹងចំនួនថេរមួយ ហៅថាផលសងរួម ។

បើ (U_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត មានផលសងរួម d និងតួទីមួយ U_0 នោះគេបាន :

$U_{n+1} = U_n + d \ ,\forall n \in IN$ ។

២.តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត :

ក. ក្នុងសំណុំ IN តួទី n កំនត់ដោយ $U_n = U_0 + n.d$ ។

ខ. ក្នុងសំណុំ IN* តួទី n កំនត់ដោយ $U_n = U_1 + (n-1).d$ ។

៣.ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

ក. ក្នុងសំណុំ IN ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតកំនត់ដោយ :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = \frac{(n+1)(U_0 + U_n)}{2}$$ ។

ខ. ក្នុងសំណុំ IN* ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតកំនត់ដោយ :

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n = \frac{n(U_1 + U_2)}{2}$$ ។

III. ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

១.និយមន័យ

ស្វ៊ីតធរណីមាត្រគឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលមានតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទីមួយ) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់គុណនឹងចំនួនថេរមួយខុសពីសូន្យ ហៅថារេសុងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

បើ (U_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ មានរេសុង $q \neq 0$ និងតួទីមួយ U_0 នោះគេបាន :

$U_{n+1} = q.U_n \ ,\forall n \in IN$ ។

២.តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ :

ក. ក្នុងសំណុំ IN តួទី n កំនត់ដោយ $U_n = U_0.q^n$ ។

ខ. ក្នុងសំណុំ IN* តួទី n កំនត់ដោយ $U_n = U_1.q^{n-1}$ ។

៧.ផលបូកតួនៃស៊ីតធរណីមាត្រ

ក. ក្នុងសំណុំ IN ផលបូកតួនៃស៊ីតកំនត់ដោយ :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = U_0.\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ , } q \neq 1 \text{ ។}$$

ខ. ក្នុងសំណុំ IN* ផលបូកតួនៃស៊ីតកំនត់ដោយ :

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n = U_1.\frac{1-q^{n}}{1-q} \text{ , } q \neq 1 \text{ ។}$$

កំនត់សំគាល់ និង លក្ខណៈ

☞ ក្នុងការគណនាផលបូក ឬ ផលគុណនៃស៊ីតគេអាចកំនត់សញ្ញាមួយសម្រាប់តាងដូចខាងក្រោម :

-ចំពោះផលបូក $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = \sum_{k=o}^{n}(U_k)$ ។

-ចំពោះផលគុណ $P_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times ...... \times U_n = \prod_{k-0}^{n}(U_k)$ ។

☞ លក្ខណៈនៃផលបូក និង ផលគុណស៊ីត :

ក. $\sum_{k=0}^{n}(\lambda.U_k) = \lambda.\sum_{k=0}^{n}(U_k)$

ខ. $\sum_{k=0}^{n}(U_k + V_k) = \sum_{k=0}^{n}(U_k) + \sum_{k=0}^{n}(V_k)$

គ. $\prod_{k=0}^{n}(\lambda.U_k) = \lambda^{n+1}.\prod_{k=0}^{n}(U_k)$

ឃ. $\prod_{k=0}^{n}(U_k.V_k) = \prod_{k=0}^{n}(U_k) \times \prod_{k=0}^{n}(V_k)$

ង. $\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{U_k}{V_k}\right) = \frac{\prod_{k=0}^{n}(U_k)}{\prod_{k=0}^{n}(V_k)} \text{ , } \prod_{k=0}^{n}(V_k) \neq 0$ ។

លំហាត់ទី១

គេឲ្យ $\dfrac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}=\dfrac{2}{3}\left(1+\dfrac{1}{2\times 3}\right)$

$$\dfrac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}\times\dfrac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}}=\dfrac{2}{3}\left(1+\dfrac{1}{3\times 4}\right)$$

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅនិងស្រាយរូបមន្តនោះផង ។

ដំណោះស្រាយ

រករូបមន្តទូទៅ៖

គេមាន $\dfrac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}=\dfrac{2}{3}\left(1+\dfrac{1}{2\times 3}\right)$

$$\dfrac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}\times\dfrac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}}=\dfrac{2}{3}\left(1+\dfrac{1}{3\times 4}\right)$$

តាមឧទាហរណ៍ខាងលើនេះយើងបានរូបមន្តទូទៅដូចខាងក្រោម ៖

$$\boxed{\dfrac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}\times\dfrac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}}\times\dots\dots\times\dfrac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}=\dfrac{2}{3}\left(1+\dfrac{1}{n\times(n+1)}\right)}$$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត ៖

តាង $P_n=\dfrac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}\times\dfrac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}}\times\dots\dots\times\dfrac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}=\prod_{k=2}^{n}\left(\dfrac{1-\frac{1}{k^3}}{1+\frac{1}{k^3}}\right)$

យើងមាន $\dfrac{1-\frac{1}{k^3}}{1+\frac{1}{k^3}}=\dfrac{k^3-1}{k^3+1}=\dfrac{k-1}{k+1}\times\dfrac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\dfrac{k-1}{k}\times\dfrac{k}{k+1}\times\dfrac{k(k+1)+1}{(k-1)k+1}$

គេបាន $P_n=\prod_{k=2}^{n}\left[\dfrac{k-1}{k}\times\dfrac{k}{k+1}\times\dfrac{k(k+1)+1}{(k-1)k+1}\right]$

$$=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right)\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\right)\prod_{k=2}^{n}\left[\frac{k(k+1)+1}{(k-1)k+1}\right]$$

$$=\frac{1}{n}.\frac{2}{n+1}.\frac{n(n+1)+1}{1.2+1}$$

$$=\frac{2}{3}\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{n\times(n+1)}\right]$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}\times\dfrac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}}\times......\times\dfrac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}=\dfrac{2}{3}\left(1+\dfrac{1}{n\times(n+1)}\right)}$ ។

លំហាត់ទី២

គេឲ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3} \ ; \ n \in IN \end{cases}$

ក. គេតាង $v_n = 1 + u_n$ ។ បង្ហាញថា (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n និង $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ ។

គ. ចូរគណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រមួយ ៖

យើងមាន $v_n = 1 + u_n$

$$v_{n+1} = 1 + u_{n+1}$$

$$v_{n+1} = 1 + \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3}$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}(1 + u_n)$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{1}{3}$ និងតួ $v_0 = 1 + u_0 = 5$ ។

ខ. គណនាផលបូក S_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ ៖

យើងបាន $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n = v_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ ដោយ $\begin{cases} v_0 = 5 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \frac{15}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]}$ និង $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{15}{2}}$ ។

គ. គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង $\lim_{n\to+\infty} u_n$

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n$ ដោយ $\begin{cases} v_0 = 5 \\ q = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{v_n = 5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $v_n = 1 + u_n$ នាំឲ្យ $u_n = -1 + v_n$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = -1 + 5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$ និង $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -1}$ ។

✍✍✍✍✍

លំហាត់ទី៣

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{3}{2} \ ; \ n \in IN \end{cases}$

ក. កំនត់ចំនួនពិត k ដើម្បីឲ្យ $v_n = u_n + k$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។

ខ. ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំនត់ចំនួនពិត k ដើម្បីឲ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

យើងមាន $v_n = u_n + k$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + k$$

$$v_{n+1} = (\frac{1}{2}u_n - \frac{3}{2}) + k$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + k) + \frac{1}{2}k - \frac{3}{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}k - \frac{3}{2} \quad (1)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) ដើម្បីឲ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រលុះត្រាតែ $\frac{1}{2}k - \frac{3}{2} = 0$

ដូចនេះ $\boxed{k = 3}$ ។

ខ. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ ៖

ចំពោះ $k = 3$ គេមាន $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ នាំឲ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{1}{2}$

និងតួ $v_0 = u_0 + k = 2 + 3 = 5$ ។

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ។ ដោយ $v_n = u_n + k$ នាំឲ្យ $u_n = -k + v_n$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = -3 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ និង $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -3}$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឲ្យស៊្វីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 5$ និង $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2n + 3$ ($n \in IN$)

ចូរគណនា u_n នៃស៊្វីត (u_n) ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n នៃស៊្វីត (u_n) ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងតាង $u_n = v_n + an + b$ ដែល $a , b \in IR$

យើងបាន $u_{n+1} = v_{n+1} + an + a + b$ ដោយ $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2n + 3$

គេបាន $v_{n+1} + an + a + b = \frac{1}{2}(v_n + an + b) - 2n + 3$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \left[(-\frac{1}{2}a - 2)n + (3 - a - \frac{1}{2}b)\right] \quad (*)$$

បើ $\begin{cases} -\frac{1}{2}a - 2 = 0 \\ 3 - a - \frac{1}{2}b = 0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $a = -4$; $b = 14$

ទំនាក់ទំនង (*) ទៅជា $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ នាំឲ្យ (v_n) ជាស៊្វីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{1}{2}$

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n$ ដោយ $u_n = v_n + an + b = v_n - 4n + 14$

ចំពោះ $n = 0$ គេបាន $u_0 = v_0 + 14$ នាំឲ្យ $v_0 = u_0 - 14 = 5 - 14 = -9$

គេបាន $v_n = -9 \times \frac{1}{2^n} = -\frac{9}{2^n}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{u_n = -\frac{9}{2^n} - 4n + 14}$ ។

លំហាត់ទី៥

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 10$ និង $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}n^2 - 2n + 1$ ($n \in IN$)

ចូរគណនា u_n នៃស្វ៊ីត (u_n) ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n នៃស្វ៊ីត (u_n) ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងតាង $u_n = v_n + an^2 + bn + c$ ដែល $a , b, c \in IR$

យើងបាន $u_{n+1} = v_{n+1} + an^2 + (2a+b)n + a + b + c$

ដោយ $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}n^2 - 2n + 1$ គេបាន

$$v_{n+1} + an^2 + (2a+b)n + a + b + c = \frac{1}{3}(v_n + an^2 + bn + c) + \frac{2}{3}n^2 - 2n + 1$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + \left[(-\frac{2}{3}a + \frac{2}{3})n^2 + (-2 - 2a - \frac{2}{3}b)n + 1 - a + b - \frac{2}{3}c\right] \quad (*)$$

បើ $\begin{cases} -\frac{2}{3}a + \frac{2}{3} = 0 \\ -2 - 2a - \frac{2}{3}b = 0 \\ 1 - a + b - \frac{2}{3}c = 0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $a = 1 \; ; b = -6 \; ; c = 9$

ទំនាក់ទំនង (*) ទៅជា $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$ នាំឲ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{1}{3}$

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n$ ដោយ $u_n = v_n + an^2 + bn + c = v_n + n^2 - 6n + 9$

ចំពោះ $n = 0$ គេបាន $u_0 = v_0 + 9$ នាំឲ្យ $v_0 = u_0 - 9 = 10 - 9 = 1$

គេបាន $v_n = \frac{1}{3^n}$ ។ ដូចនេះ $\boxed{u_n = \frac{1}{3^n} + (n-3)^2}$ ។

លំហាត់ទី៦

គេឲ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 1$ និង $u_{n+1} = 2u_n + (3n+4)3^n$ ($n \in IN$)

ចូរគណនា u_n នៃស៊ីត (u_n) ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n នៃស៊ីត (u_n) ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងតាង $u_n = v_n + (an+b).3^n$ ដែល $a , b \in IR$

យើងបាន $u_{n+1} = v_{n+1} + (an+a+b)3^{n+1}$ ដោយ $u_{n+1} = 2u_n + (3n+4)3^n$

គេបាន $v_{n+1} + (an+a+b)3^{n+1} = 2\left[v_n + (an+b)3^n\right] + (3n+4)3^n$

$$v_{n+1} = 2v_n + \left[(3-a)n + (4-3a-b)\right].3^n \quad (*)$$

បើ $\begin{cases} a-3=0 \\ 4-3a-b=0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $a=3$; $b=-5$

ទំនាក់ទំនង (*) ទៅជា $v_{n+1} = 2v_n$ នាំឲ្យ (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=2$

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n$ ដោយ $u_n = v_n + (an+b)3^n = v_n + (3n-5).3^n$

ចំពោះ $n=0$ គេបាន $u_0 = v_0 - 5 = 1$ នាំឲ្យ $v_0 = 6$ គេបាន $v_n = 6.2^n$ ។

ដូចនេះ $\boxed{u_n = 6.2^n + (3n-5).3^n}$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឲ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 1+\sqrt{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}u_n + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} \end{cases}$

ក_តាង $v_n = u_n - \sqrt{2}$ ។ បង្ហាញថា (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ_គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក_បង្ហាញថា (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ៖

យើងមាន $v_n = u_n - \sqrt{2}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \sqrt{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}u_n + \frac{1}{1+\sqrt{2}} - \sqrt{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}u_n + \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_n - \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ។

ខ_គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n$ ដោយ $v_0 = u_0 - \sqrt{2} = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 1$

ដូចនេះ $v_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ ។

ហើយ $v_n = u_n - \sqrt{2}$ នាំឲ្យ $u_n = \sqrt{2} + v_n$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = \sqrt{2} + (\dfrac{\sqrt{2}}{2})^n}$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 5$ និង $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n + 5$ ($n \in IN$)

ចូរគណនា u_n នៃស្វ៊ីត (u_n) ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n នៃស្វ៊ីត (u_n) ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងតាង $u_n = v_n + an + b$ ដែល $a , b \in IR$

យើងបាន $u_{n+1} = v_{n+1} + an + a + b$ ដោយ $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n + 5$

គេបាន $v_{n+1} + an + a + b = \frac{1}{2}(v_n + an + b) + n + 5$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \left[(-\frac{1}{2}a + 1)n + (5 - a - \frac{1}{2}b)\right] \quad (*)$$

បើ $\begin{cases} -\frac{1}{2}a + 1 - 0 \\ 5 - a - \frac{1}{2}b = 0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $a = 2$; $b = 3$

ទំនាក់ទំនង (*) ទៅជា $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ នាំឲ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{1}{2}$

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n$ ដោយ $u_n = v_n + an + b = v_n + 2n + 6$

ចំពោះ $n = 0$ គេបាន $u_0 = v_0 + 6$ នាំឲ្យ $v_0 = u_0 - 6 = 5 - 6 = -1$

គេបាន $v_n = -1 \times \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2^n}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{u_n = -\frac{1}{2^n} + 2n + 6}$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឲ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 1$ និង $u_{n+1} = 2u_n + (n+3)3^n$ ($n \in IN$)

ចូរគណនា u_n នៃស៊ីត (u_n) ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n នៃស៊ីត (u_n) ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងតាង $u_n = v_n + (an+b).3^n$ ដែល $a , b \in IR$

យើងបាន $u_{n+1} = v_{n+1} + (an+a+b)3^{n+1}$ ដោយ $u_{n+1} = 2u_n + (n+3)3^n$

គេបាន $v_{n+1} + (an+a+b)3^{n+1} = 2\left[v_n + (an+b)3^n\right] + (n+3)3^n$

$$v_{n+1} = 2v_n + \left[(1-a)n + (3-3a-b)\right].3^n \quad (*)$$

បើ $\begin{cases} a-1=0 \\ 3-3a-b=0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $a=1$; $b=0$

ទំនាក់ទំនង $(*)$ ទៅជា $v_{n+1} = 2v_n$ នាំឲ្យ (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=2$

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n$ ដោយ $u_n = v_n + (an+b)3^n = v_n + n.3^n$

ចំពោះ $n=0$ គេបាន $u_0 = v_0 = 1$ គេបាន $v_n = 2^n$ ។

ដូចនេះ $\boxed{u_n = 2^n + n.3^n}$ ។

✍ ✍ ✍ ✍ ✍

លំហាត់ទី១០

គេឲ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 1$ និង $u_{n+1} = \frac{1}{8}(\frac{1}{4} + 2u_n + \sqrt{1+8u_n})$

ក. តាង $v_n = \sqrt{1+8u_n}$ ។ បង្ហាញថា $v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + 2)$

ខ. បង្ហាញថាស៊ីត $w_n = v_n - 2$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា w_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. ទាញរកតួ u_n នៃស៊ីត ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + 2)$

គេមាន $v_n = \sqrt{1+8u_n}$ នាំឲ្យ $v_{n+1} = \sqrt{1+8u_{n+1}}$ តែ $u_{n+1} = \frac{1}{8}(\frac{1}{4} + 2u_n + \sqrt{1+8u_n})$

$$v_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 2u_n + \sqrt{1+8u_n}}$$

$$v_{n+1} = \sqrt{1 + 2.\frac{\sqrt{1+8u_n}}{2} + \frac{1+8u_n}{4}}$$

$$v_{n+1} = \sqrt{(1 + \frac{\sqrt{1+8u_n}}{2})^2} = 1 + \frac{\sqrt{1+8u_n}}{2} = 1 + \frac{1}{2}v_n$$

ដូចនេះ $\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + 2)}$ ។

ខ. បង្ហាញថាស៊ីត $w_n = v_n - 2$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ៖

យើងមាន $w_n = v_n - 2$ នាំឲ្យ $w_{n+1} = v_{n+1} - 2$ តែ $v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + 2)$

គេបាន $w_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + 2) - 2 = \frac{1}{2}(v_n - 2) = \frac{1}{2}w_n$ ។

ដូចនេះ (w_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = \frac{1}{2}$ ។

តាមរូបមន្ត $w_n = w_0 \times q^n$ តែ $w_0 = v_0 - 2 = \sqrt{1+8u_0} - 2 = 1$

ដូចនេះ $\boxed{w_n = \frac{1}{2^n}}$ និង $\boxed{v_n = 2 + \frac{1}{2^n}}$ ។

គ. ទាញរកតួ u_n នៃស៊ីត

យើងមាន $v_n = \sqrt{1+8u_n}$ នាំឲ្យ $u_n = \frac{{v_n}^2 - 1}{8}$

$$u_n = \frac{(2+\frac{1}{2^n})^2 - 1}{8}$$

$$= \frac{4 + 4.\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} - 1}{8}$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{2n+3}}$$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = \frac{3}{8} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{2n+3}}}$ ។

លំហាត់ទី១១

ក_គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$L_n=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}}-2}{x-2}$$ (មាន n រ៉ាឌីកាល់)

ខ_តាង $S_n=L_1+L_2+L_3+....+L_n$ ។ ចូរគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

យើងមាន $L_n=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}}-2}{x-2}$

យើងបាន $L_1=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(2+x)-4}{(x-2)(\sqrt{2+x}+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{2+x}+2}=\frac{1}{4}$

$$L_2=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+x}}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-2}{(x-2)(\sqrt{2+\sqrt{2+x}}+2)}$$

$$L_2=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+x}}+2}\times\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}=\frac{1}{4}L_1=\frac{1}{4^2}$$

យើងសន្មតថាវាពិតដល់លំដាប់ទី k គឺ $L_k=\frac{1}{4^k}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់លំដាប់ទី $(k+1)$ គឺ $L_{k+1}=\frac{1}{4^{k+1}}$

យើងមាន $L_{k+1}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+x}}}}}-2}{x-2}$

គុណភាគយកនិងភាគបែងនឹង $M(x)=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+x}}}}}+2$

គេបាន $L_{k+1}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+....+\sqrt{2+x}}}}-4}{(x-2).M(x)}$

$$L_{k+1}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{M(x)}\times\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+....+\sqrt{2+x}}}}-2}{x-2}$$

$$L_{k+1}=\frac{1}{M(2)}\times L_k=\frac{1}{4}L_k=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4^k}=\frac{1}{4^{k+1}}$$ ពិត

ដូចនេះ $$\boxed{L_n=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}}-2}{x-2}=\frac{1}{4^n}}$$

ខ_គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

គេមាន $S_n=L_1+L_2+L_3+....+L_n$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+....+\frac{1}{4^n}$$

$$=\frac{1}{4}.\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

ការណា $n\to+\infty$ នោះ $\frac{1}{4^n}\to 0$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{3}}$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឲ្យអនុគមន៍ $f_n(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+.....+\sqrt{x+\sqrt{x+2}}}}$ មាន n ឫសការេ ។

ចូរគណនាលីមីត $L_n=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f_n(x)-2}{x-2}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត $L_n=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f_n(x)-2}{x-2}$

យើងបាន $L_{n+1}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f_{n+1}(x)-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{[\ f_{n+1}(x)\ ]^2-4}{(x-2)[f_{n+1}(x)+2]}$

ដោយ $[f_{n+1}(x)]^2-4=x+\sqrt{x+\sqrt{x+.....+\sqrt{x+\sqrt{x+2}}}}-4=(x-2)+[f_n(x)-2]$

គេបាន $L_{n+1}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)+[f_n(x)-2]}{(x-2)[f_{n+1}(x)+2]}$

$$L_{n+1}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{f_{n+1}(x)+2}+\lim_{x\to 2}\frac{1}{f_{n+1}(x)+2}\times\lim_{x\to 2}\frac{f_n(x)-2}{x-2}$$

$$L_{n+1}=\frac{1}{f_{n+1}(2)+2}+\frac{1}{f_{n+1}(2)+2}.L_n$$

ដោយគេមាន $f_{n+1}(2)=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+....+\sqrt{2+\sqrt{2+2}}}}}=2$

គេទាញ $L_{n+1}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}L_n$ ឬ $4L_{n+1}-L_n=1$ (*)

គុណអង្គទាំងពីរនៃ (*) នឹង 4^n គេបាន $4^{n+1}L_{n+1}-4^nL_n=4^n$

យើងបាន $\sum\limits_{k=1}^{k=n-1}\left(4^{k+1}L_{k+1}-4^kL_k\right)=\sum\limits_{l=1}^{k=n-1}\left(4^k\right)$

$$4^nL_n-4L_1=4+4^2+4^3+...+4^{n-1}=4.\frac{4^{n-1}-1}{3}$$

គេទាញ $L_n=\dfrac{L_1}{4^{n-1}}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3.4^{n-1}}$ តែ $L_1=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\dfrac{1}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{L_n=\dfrac{7}{12}-\dfrac{1}{3.4^{n-1}}}$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 3$ និង $u_{n+1} = u_n^3 - 3u_n^2 + 3u_n$

តាង $v_n = u_n - 1$ ។

បង្ហាញថា $v_{n+1} = v_n^3$ រួចគណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $v_{n+1} = v_n^3$

មាន $v_n = u_n - 1$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\ &= u_n^3 - 3u_n^2 + 3u_n - 1 \\ &= (u_n - 1)^3 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{v_{n+1} = v_n^3}$

គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $v_{n+1} = v_n^3$

តាង $w_n = \ln v_n$ នាំឲ្យ $w_{n+1} = \ln v_{n+1} = 3\ln v_n = 3w_n$

គេបាន (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 3$

និងតួដំបូង $w_0 = \ln v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln 2$

តាមរូបមន្ត $w_n = w_0 \times q^n = 3^n \ln 2 = \ln(2^{3^n})$ ដោយ $w_n = \ln v_n$

ដូចនេះ $\boxed{v_n = 2^{3^n} \quad \text{និង} \quad u_n = 1 + 2^{3^n}}$

លំហាត់ទី១៤

គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - \dfrac{2(2n-1)}{3n(n+1)} \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN^* : v_n = u_n + \dfrac{2}{n}$ ។ បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន $v_n = u_n + \dfrac{2}{n}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{2}{n+1} \quad \text{តែ} \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{2(2n-1)}{3n(n+1)}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{2(2n-1)}{3n(n+1)} + \frac{2}{n+1}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{-4n+2+6n}{3n(n+1)}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2(n+1)}{3n(n+1)}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + \frac{2}{n}) = \frac{1}{3}v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = \dfrac{1}{3}$ និងតួ $v_1 = u_1 + 2 = 4$ ។

ខ. គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងបាន $v_n = v_1.q^{n-1} = \dfrac{4}{3^{n-1}}$ ហើយ $u_n = v_n - \dfrac{2}{n} = \dfrac{4}{3^{n-1}} - \dfrac{2}{n}$

ដូចនេះ $\boxed{v_n = \dfrac{4}{3^{n-1}} \ ; \ u_n = \dfrac{4}{3^{n-1}} - \dfrac{2}{n}}$ ។

លំហាត់ទី១៥

គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = \dfrac{11}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{(7n-2).3^{n-1}}{n(n+1)} \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN^* : v_n = u_n - \dfrac{3^n}{n}$ ។ បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន $v_n = u_n - \dfrac{3^n}{n}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{3^{n+1}}{n+1} \quad \text{តែ} \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{(7n-2).3^{n-1}}{n(n+1)}$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{(7n-2)3^{n-1}}{n(n+1)} - \frac{3^{n+1}}{n+1}$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{(7n-2)3^{n-1} - n.3^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{(7n-2-9n).3^{n-1}}{n(n+1)}$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n - \frac{3^n}{n}) = \frac{2}{3}v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = \dfrac{2}{3}$ និងតួ $v_1 = \dfrac{11}{3} - 3 = \dfrac{2}{3}$ ។

ខ. គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងបាន $v_n = v_1.q^{n-1} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ ហើយ $u_n = v_n - \dfrac{3^n}{n} = (\dfrac{2}{3})^n - \dfrac{3^n}{n}$

ដូចនេះ $\boxed{v_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \; ; \; u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \dfrac{3^n}{n}}$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេមានស៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \ln(e^{u_n} + 1) \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN^* : v_n = e^{u_n}$ ។ រកប្រភេទនៃស៊ីត (v_n) ។

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ប្រភេទនៃស៊ីត (v_n) ៖

យើងមាន $v_n = e^{u_n}$

យើងបាន $v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{\ln(e^{u_n}+1)}$

$v_{n+1} = e^{u_n} + 1$

$v_{n+1} = v_n + 1$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (v_n) ជាស៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d = 1$ ។

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមរូបមន្ត $v_n = v_1 + (n-1)d$ ដោយ $v_1 = e^{u_1} = e^0 = 1$ និង $d = 1$

គេបាន $v_n = 1 + (n-1).1 = n$ ។

ហើយ $v_n = e^{u_n}$ នាំឲ្យ $u_n = \ln v_n = \ln(n)$

ដូចនេះ $\boxed{v_n = n \ ; \ u_n = \ln(n)}$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេមានស៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2+u_n}{4-u_n} \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN^* : v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 2}$ ។ បង្ហាញថា (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 2}$ នាំឲ្យ $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} - 2}$ ដោយ $u_{n+1} = \dfrac{2+u_n}{4-u_n}$

គេបាន $v_{n+1} = \dfrac{\dfrac{2+u_n}{4-u_n} - 1}{\dfrac{2+u_n}{4-u_n} - 2} = \dfrac{2u_n - 2}{3u_n - 6} = \dfrac{2}{3} . \dfrac{u_n - 1}{u_n - 2} = \dfrac{2}{3} v_n$

ដូចនេះ (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = \dfrac{2}{3}$ ។

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមរូបមន្ត $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ ដោយ $v_1 = \dfrac{u_1 - 1}{u_1 - 2} = \dfrac{-1-1}{-1-2} = \dfrac{2}{3}$, $q = \dfrac{2}{3}$

ដូចនេះ $v_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 2}$ នាំឲ្យ $u_n = \dfrac{2v_n - 1}{v_n - 1} = \dfrac{2(\frac{2}{3})^n - 1}{(\frac{2}{3})^n - 1} = \dfrac{2^{n+1} - 3^n}{2^n - 3^n}$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = \dfrac{2^{n+1} - 3^n}{2^n - 3^n}}$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេមានស៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 - 9u_n + 12}{3u_n^2 - 12u_n + 13} \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN : v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 3}$ ។ បង្ហាញថា $v_{n+1} = v_n^3$

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $v_{n+1} = v_n^3$

យើងមាន $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 3}$ នាំឲ្យ $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} - 3}$

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{u_n^3 - 9u_n + 12}{3u_n^2 - 12u_n + 13} - 1}{\dfrac{u_n^3 - 9u_n + 12}{3u_n^2 - 12u_n + 13} - 3} = \frac{u_n^3 - 3u_n^2 + 3u_n - 1}{u_n^3 - 9u_n^2 + 27u_n - 27} = \left(\frac{u_n - 1}{u_n - 3}\right)^3$$

ដូចនេះ $v_{n+1} = v_n^3$ ។

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាង $w_n = \ln v_n$ គេបាន $w_{n+1} = \ln v_{n+1} = \ln v_n^3 = 3\ln v_n = 3w_n$

នាំឲ្យ (w_n)ជាស៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 3$ និង $w_0 = \ln v_0 = \ln 3$

គេបាន $w_n = w_0 \times q^n = 3^n \ln 3 = \ln(3^{3^n})$ តែ $w_n = \ln v_n$

គេទាញបាន $v_n = 3^{3^n}$ ។

ហើយ $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 3}$ នាំឲ្យ $u_n = \dfrac{3v - 1}{v - 1} = \dfrac{3^{1+3^n} - 1}{3^{3^n} - 3}$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេឲ្យស៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} Z_0 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ Z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\ Z_n + |\ Z_n\ |\ );\ n \in IN \end{cases}$

($|Z_n|$ ជាម៉ូឌុលនៃ Z_n) ។

សន្មតថា $Z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i.\sin\theta_n)$, $\forall n \in IN$ ដែល $\rho_n > 0$, $\rho_n\ ;\ \theta_n \in IR$

ក_ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង θ_n និង θ_{n+1} ហើយ ρ_n និង ρ_{n+1} ។

ខ_រកប្រភេទនៃស៊ីត (θ_n)រួចគណនា θ_nជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ_ចូរបង្ហាញថា $\rho_n = \rho_0 \cos\theta_0 \cos\dfrac{\theta_1}{2}\cos\dfrac{\theta_2}{2}....\cos\dfrac{\theta_{n-1}}{2}$ រួបញ្ចោក់ ρ_n អនុគមន៍នៃ n

ដំណោះស្រាយ

ក_រកទំនាក់ទំនងរវាង θ_n និង θ_{n+1} ហើយ ρ_n និង ρ_{n+1}

យើងមាន $Z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i.\sin\theta_n)$ នាំឲ្យ $Z_{n+1} = \rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i\sin\theta_{n+1})$

ដោយ $Z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\ Z_n + |\ Z_n\ |\ )$ ហើយ $|\ Z_n\ | = \rho_n$

គេបាន $\rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i\sin\theta_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\left[\rho_n(\cos\theta_n + i.\sin\theta_n) + \rho_n\right]$

$$\rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i.\sin\theta_{n+1}) = \frac{1}{2}\rho_n(1 + \cos\theta_n + i.\sin\theta_n)$$

$$\rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i.\sin\theta_{n+1}) = \rho_n\cos\frac{\theta_n}{2}(\cos\frac{\theta_n}{2} + i.\sin\frac{\theta_n}{2})$$

គេទាញបាន $\rho_{n+1} = \rho_n\cos\dfrac{\theta_n}{2}$ និង $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2} \quad \text{និង} \quad \rho_{n+1} = \rho_n\cos\dfrac{\theta_n}{2}}$ ។

ខ_ប្រភេទនៃស៊ីត (θ_n)និង គណនា θ_nជាអនុគមន៍នៃ n ÷

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន $\theta_{n+1}=\frac{1}{2}\theta_n$ នាំឲ្យ (θ_n)ជាស៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង

ស្មើ $q=\frac{1}{2}$ ។

តាមរូបមន្ត $\theta_n=\theta_0\times q^n$

ដោយ $Z_0=\rho_0(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}$

គេទាញបាន $\rho_0=1\,;\theta_0=\frac{\pi}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{\theta_n=\frac{\pi}{3}.\frac{1}{2^n}}$ ។

គ_បង្ហាញថា $\rho_n=\rho_0\cos\theta_0\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}....\cos\frac{\theta_n}{2}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\rho_{n+1}=\rho_n\cos\frac{\theta_n}{2}$ ឬ $\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}=\cos\frac{\theta_n}{2}$

គេបាន $\prod_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}\right)=\prod_{k=0}^{k=n-1}\left[\cos(\frac{\theta_k}{2})\right]$

$$\frac{\rho_n}{\rho_0}=\cos\theta_0.\cos\frac{\theta_1}{2}.\cos\frac{\theta_2}{2}.........\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\rho_n=\rho_0\cos\theta_0\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}....\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតយើងមាន $\sin\theta_n=2\sin\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_n}{2}=2\sin\theta_{n+1}\cos\frac{\theta_n}{2}$ (ព្រោះ $\theta_{n+1}=\frac{\theta_n}{2}$)

គេទាញ $\cos\frac{\theta_n}{2}=\frac{1}{2}.\frac{\sin\theta_n}{\sin\theta_{n+1}}$

ហេតុនេះ $\rho_n=\frac{1}{2^n}.\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_1}.\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}.....\frac{\sin\theta_{n-1}}{\sin\theta_n}=\frac{1}{2^n}.\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_n}$

ដូចនេះ $\boxed{\rho_n=\frac{1}{2^n}\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin(\frac{\pi}{3}.\frac{1}{2^n})}=\frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}.\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{3}.\frac{1}{2^n})}}$ ។

លំហាត់ទី២០

គេមានស៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ u_1 = \frac{4}{3} \\ u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN : v_n = u_{n+1} - u_n$ ។ បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រ រួចគណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. គណនា $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n រួចគណនា $\lim_{n \to +\infty} S_n$ ។

គ. ទាញរកតម្លៃនៃ u_n និង $\lim_{n \to +\infty} u_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រ ៖

យើងមាន $v_n = u_{n+1} - u_n$

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$$

$$v_{n+1} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n - u_{n+1}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{1}{3}$ និងតួ $v_0 = u_1 - u_0 = \frac{1}{3}$

តាមរូបមន្តតួទី n នៃស្វីតធរណីមាត្រ $v_n = v_0 \times q^n$

ដូចនេះ $\boxed{v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$ ។

ខ. គណនា $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

តាមរូបមន្ត $S_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$$S_n = 1.\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right) \text{ និង } \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2}}$ ។

គ. ទាញរកតម្លៃនៃ u_n និង $\lim_{n\to+\infty} u_n$

យើងមាន $v_n = u_{n+1} - u_n$

យើងទាញបាន
$$\begin{cases} v_0 = u_1 - u_0 \\ v_1 = u_2 - u_1 \\ v_2 = u_3 - u_2 \qquad + \\ ---------- \\ v_n = u_{n+1} - u_n \end{cases}$$
$$S_n = u_{n+1} - u_0$$

គេបាន $u_n = u_0 + S_{n-1}$ ដោយ $S_n = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$ និង $u_0 = 1$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = \frac{5}{3} - \frac{1}{2.3^{n-1}}}$ និង $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{5}{3}}$

✍✍✍✍✍

លំហាត់ទី២១

គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 2 \\ 2u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n(n+1).2^n} \end{cases}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $2u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n(n+1).2^n}$

$$2u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n(n+1).2^n}$$

$$2^{n+1}u_{n+1} - 2^n u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$2^{n+1}u_{n+1} - 2^n u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{k=(n-1)}\left(2^{k+1}u_{k+1} - 2^k u_k \right) = \sum_{k=1}^{k=(n-1)}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$2^n u_n - 2u_1 = 1 - \frac{1}{n}$$

គេទាញ $u_n = \dfrac{1}{2^n}(1 - \dfrac{1}{n} + 2u_1) = \dfrac{1}{2^n}(5 - \dfrac{1}{n})$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = \dfrac{5n-1}{n.2^n}}$ ។

✍✍✍✍✍

លំហាត់ទី២២

គេមានស៊ីត (u_n) និង (v_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 3 \ ; \ v_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}v_n \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{3}{4}v_n \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN : w_n = u_n - v_n$ ។ បង្ហាញថា (w_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា w_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. បង្ហាញថា $C_n = u_n + v_n$ ជាស៊ីតថេរដែលត្រូវកំនត់។

គ. ទាញរក u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (w_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ៖

យើងមាន $w_n = u_n - v_n$

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$$

$$w_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n - \frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4}v_n$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - v_n) = \frac{1}{2}w_n$$

ដូចនេះ (w_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \dfrac{1}{2}$ និងតួ $w_0 = u_0 - v_0 = 2$ ។

តាមរូបមន្ត $w_n = w_0 \times q^n = 2 \times \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $C_n = u_n + v_n$ ជាស៊ីតថេរ ៖

យើងបាន $C_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}$

$$C_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n + \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n = u_n + v_n = C_n$$

ដូចនេះ (C_n) ជាស៊ីតថេរហើយ $C_n = C_0 = u_0 + v_0 = 4$ ។

គ. ទាញរក u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

តាមសម្រាយខាងលើគេទាញបាន $\begin{cases} u_n + v_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} & (1) \\ u_n - v_n = 4 & (2) \end{cases}$

បូកសមីការពីរនេះគេបាន $2u_n = 4 + \dfrac{1}{2^{n-1}}$ នាំឲ្យ $u_n = 2 + \dfrac{1}{2^n}$

ដកសមីការពីរនេះគេបាន $2v_n = -4 + \dfrac{1}{2^{n-1}}$ នាំឲ្យ $v_n = -2 + \dfrac{1}{2^n}$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = 2 + \dfrac{1}{2^n} \text{ និង } v_n = -2 + \dfrac{1}{2^n}}$ ។

លំហាត់ទី២៣

f ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង ៖

$f(0)=f(1)=1$ និង $f(n+2)=2f(n+1)-f(n)+2n+1 \quad , \forall n\in IN$

ចូរកំនត់រក $f(n)$ ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រក $f(n)$ ជាអនុគមន៏នៃ n ៖

តាង $g(n)=f(n+1)-f(n)$

នាំឲ្យ $g(n+1)=f(n+2)-f(n+1)$

$$g(n+1)=2f(n+1)-f(n)+2n+1-f(n+1)$$
$$g(n+1)=f(n+1)-f(n)+2n+1=g(n)+2n+1$$
$$g(n+1)-g(n)=2n+1$$

យើងបាន $\sum_{k=0}^{(n-1)}[g(k+1)-g(k)]=\sum_{k=0}^{(n-1)}(2k+1)$

$$g(n)-g(0)=1+3+5+...+(2n-1)=n^2 \text{ តែ } g(0)=0$$

គេបាន $g(n)=n^2$ ដោយ $g(n)=f(n+1)-f(n)$

គេទាញ $f(n+1)-f(n)=n^2$

យើងបាន $\sum_{k=0}^{(n-1)}[f(k+1)-f(k)]=\sum_{k=0}^{(n-1)}(k^2)$

$$f(n)-f(0)=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \text{ ដោយ } f(0)=1$$

ដូចនេះ $f(n)=1+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{(n+1)(2n^2-5n+6)}{6}$ ។

លំហាត់ទី២៤

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(U_n)_{n\in IN}$ ដោយ $\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{5U_n^{\ 3} - 6U_n^{\ 2} + 2}{2U_n^{\ 3} - 6U_n + 5} \end{cases}$, $\forall n \in IN^*$

ក_គេតាង $V_n = \dfrac{U_n - 2}{2U_n - 1}$, $\forall n \in IN^*$ ។ ចូរបង្ហាញថា $V_{n+1} = V_n^{\ 3}$

ខ_គេយក $W_n = \ln V_n$, $\forall n \in IN^*$ ។ ចូរបង្ហាញថា $(W_n)_{,n\in IN}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា W_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ_ចូរទាញរក V_n និង U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក_ បង្ហាញថា ៖ $V_{n+1} = V_n^{\ 3}$

យើងមាន $V_n = \dfrac{U_n - 2}{2U_n - 1}$, $\forall n \in IN^*$

យើងបាន $V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1} - 2}{2U_{n+1} - 1}$ ដោយ $U_{n+1} = \dfrac{5U_n^{\ 3} - 6U_n^{\ 2} + 2}{2U_n^{\ 3} - 6U_n + 5}$

$$V_{n+1} = \frac{\dfrac{5U_n^{\ 3} - 6U_n^{\ 2} + 2}{2U_n^{\ 3} - 6U_n + 5} - 2}{2\,(\dfrac{5U_n^{\ 3} - 6U_n + 2}{2U_n^{\ 3} - 6U_n + 5}) - 1}$$

$$V_{n+1} = \frac{5U_n^{\ 3} - 6U_n^{\ 2} + 2 - 4U_n^{\ 3} + 12U_n - 10}{10U_n^{\ 3} - 12U_n^{\ 2} + 4 - 2U_n^{\ 3} + 6U_n - 5}$$

$$V_{n+1} = \frac{U_n^{\ 3} - 6U_n^{\ 2} + 12U_n - 8}{8U_n^{\ 3} - 12U_n^{\ 2} + 6U_n - 1} = \frac{(U_n - 2)^3}{(2U_n - 1)^3} = \left(\frac{U_n - 2}{2U_n - 1}\right)^3$$

ដូចនេះ $V_{n+1} = V_n^{\ 3}$ ។

ខ_បង្ហាញថា $(W_n)_{,n\in IN}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

យើងមាន $W_n = \ln V_n$ នាំឲ្យ $W_{n+1} = \ln V_{n+1}$ ដោយ $V_{n+1} = V_n{}^3$

យើងបាន $W_{n+1} = \ln V_n{}^3 = 3\ln V_n = 3W_n$

ដូចនេះ $(W_n)_{,n\in IN}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលសុង $q = 3$ ។

_គណនា W_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

តាមរូបមន្ត $W_n = W_1 \times q^{n-1}$

ដោយ $W_1 = \ln V_1 = \ln\left(\dfrac{U_1 - 2}{2U_1 - 1}\right) = \ln(\dfrac{3-2}{6-1}) = \ln(\dfrac{1}{5})$ និង $q = 3$

យើងបាន $W_n = \ln(\dfrac{1}{5})\times(3)^{n-1} = 3^{n-1}\ln(\dfrac{1}{5})$ ។

គ_ទាញរក V_n និង U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $W_n = \ln V_n$ ដោយ $W_n = 3^{n-1}\ln(\dfrac{1}{5})$

យើងបាន $\ln V_n = 3^{n-1}\ln(\dfrac{1}{5})$ នាំឲ្យ $V_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{3^{n-1}}$

ម្យ៉ាងទៀត $V_n = \dfrac{U_n - 2}{2U_n - 1}$ នាំឲ្យ $U_n = \dfrac{2 - V_n}{1 - 2V_n} = \dfrac{2 - (\frac{1}{5})^{3^{n-1}}}{1 - 2(\frac{1}{5})^{3^{n-1}}} = \dfrac{2.5^{3^{n-1}} - 1}{5^{3^{n-1}} - 2}$

ដូចនេះ $V_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{3^{n-1}}$ និង $U_n = \dfrac{2.5^{3^{n-1}} - 1}{5^{3^{n-1}} - 2}$ ។

_គណនាលីមីត ៖ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

យើងមាន $U_n = \dfrac{2.5^{3^{n-1}} - 1}{5^{3^{n-1}} - 2}$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2.5^{3^{n-1}} - 1}{5^{3^{n-1}} - 2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2 - \dfrac{1}{5^{3^{n-1}}}}{1 - \dfrac{2}{5^{3^{n-1}}}} = 2$ ។

លំហាត់ទី២៥

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំនត់លើ IR ដោយ $f(x)=\dfrac{x^3-6x+6}{3x^2-9x+7}$

ក_ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចបង្ហាញថាគេអាចសរសេរ $f'(x)=\dfrac{3(x^2-3x+2)^2}{(3x^2-9x+7)^2}$ ។

ខ_តាង α និង β ជាឫសរបស់សមីការ $f'(x)=0$ ។

គេយក $U_{n+1}=f(U_n)$ និង $V_n=\dfrac{U_n-\alpha}{U_n-\beta}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $V_{n+1}=V_n{}^3$ រួចទាញរក V_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង x ។

គ_ចូរគណនា $F_n(x)=f_n\left[f\left[........f\left[f(x)\right]........\right]\right]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក_គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ៖

$$f'(x)=\frac{(3x^2-6)(3x^2-9x+7)-(6x-9)(x^3-6x+6)}{(3x^2-9x+7)^2}$$

$$=\frac{9x^4-27x^3+21x^2-18x^2+54x-42-6x^4+36x^2-36x+9x^3-54x+54}{(3x^2-9x+7)^2}$$

$$=\frac{3x^4-18x^3+39x^2-36x+12}{(3x^2-9x+7)^2}=\frac{3(x^4-6x^3+13x^2-12x+4)}{(3x^2-9x+7)^2}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{3(x^4-6x^3+13x^2-12x+4)}{(3x^2-9x+7)^2}$ ។

បង្ហាញថាគេអាចសរសេរ $f'(x)=\dfrac{3(x^2-3x+2)^2}{(3x^2-9x+7)^2}$

តាមរូបមន្ត $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

គេបាន $(x^2-3x+2)^2=x^4+9x^2+4-6x^3+4x^2-12x$

ឬ $(x^2-3x+2)^2=x^4-6x^3+13x^2-12x+4$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{3(x^2-3x+2)^2}{(3x^2-9x+7)^2}$ ។

ខ_ស្រាយបញ្ជាក់ថា $V_{n+1}=V_n{}^3$

បើ $f'(x)=0$ សមមូល $(x^2-3x+2)^2=0$ នាំឲ្យ $x_1=1\,,\,x_2=\frac{c}{a}=2$

គេបាន $\alpha=1\,,\beta=2$ ។

ដោយ $V_n=\frac{U_n-\alpha}{U_n-\beta}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ នោះ $V_n=\frac{U_n-1}{U_n-2}$

គេបាន $V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}-2}$ តែ $U_{n+1}=f(U_n)=\frac{U_n^{\ 3}-6U_n+6}{3U_n^{\ 2}-9U_n+7}$

យើងបាន $V_{n+1}=\frac{\frac{U_n^{\ 3}-6U_n+6}{3U_n^{\ 2}-9U_n+7}-1}{\frac{U_n^{\ 3}-6U_n+6}{3U_n^{\ 2}-9U_n+7}-2}=\frac{U_n^{\ 3}-3U_n^{\ 2}+3U_n-1}{U_n^{\ 3}-6U_n^{\ 2}+12U_n-8}=\left(\frac{U_n-1}{U_n-2}\right)^3$

ដូចនេះ $V_{n+1}=V_n^{\ 3}$ ។

- ទាញរក V_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង x

យើងតាង $W_n=\ln V_n$ នាំឲ្យ $W_{n+1}=\ln V_{n+1}=\ln V_n^{\ 3}=3\ln V_n=3W_n$

នាំឲ្យ (W_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=3$ និងតួ $W_1=\ln V_1$

ដោយ $V_1=\frac{U_1-1}{U_1-2}=\frac{\frac{x^3-6x+6}{3x^2-9x+7}-1}{\frac{x^3-6x+6}{3x^2-9x+7}-2}=\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^3$

គេទាញ $W_1=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^3$ ។

តាមរូបមន្ត $W_n=W_1\times q^{n-1}=3^{n-1}\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^3=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{3^n}$

តែ $W_n=\ln V_n$ គេទាញ $\ln V_n=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{3^n}$

ដូចនេះ $V_n=\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{3^n}$ ។

គ-គណនា $F_n(x)=f_n\left[f\left[........f\left[f(x)\right]........\right]\right]$

តាង $U_1 = f(x)$

$U_2 = f[f(x)] = f(U_1)$

$U_3 = f[f[f(x)]] = f(U_2)$

$-------------$

$U_n = f_n[f[.........f[f(x)].........]] = f(U_{n-1})$

$U_{n+1} = f(U_n)$

គេទាញ $F_n(x) = f_n[f[........f[f(x)].........]] = U_n$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $V_n = \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{3^n}$

ដោយ $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n - 2}$ នាំឲ្យ $U_n = \frac{2V_n - 1}{V_n - 1}$

គេបាន $U_n = \frac{2\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{3^n} - 1}{\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{3^n} - 1} = \frac{2(x-1)^{3^n} - (x-2)^{3^n}}{(x-1)^{3^n} - (x-2)^{n}}$

ដូចនេះ $F_n(x) = \frac{2(x-1)^{3^n} - (x-2)^{3^n}}{(x-1)^{3^n} - (x-2)^{3^n}}$ ។

លំហាត់ទី២៦

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ n ដោយ៖

$U_0 = 1$ និង $\forall n \in IN : U_{n+1} = U_n \cos a + \sin a$ ដែល $0 < a < \frac{\pi}{2}$ ។

ក. តាង $V_n = U_n - \cot\frac{a}{2}$ ។ ចូរបង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_0 + V_1 + ... + V_n)$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ៖

មាន $V_n = U_n - \cot\frac{a}{2}$ នាំឲ្យ $V_{n+1} = U_{n+1} - \cot\frac{a}{2}$ តែ $U_{n+1} = U_n \cos a + \sin a$

គេបាន $V_{n+1} = U_n \cos a + \sin a - \cot\frac{a}{2}$

$$= U_n \cos a + 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} - \cot\frac{a}{2}$$

$$= U_n \cos a + \cot\frac{a}{2}(2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\tan\frac{a}{2} - 1)$$

$$= U_n \cos a + \cot\frac{a}{2}(2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} - 1)$$

$$= U_n \cos a + \cot\frac{a}{2}(2\sin^2\frac{a}{2} - 1) \quad ; \quad \cos a = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2}$$

$$= U_n \cos a - \cot\frac{a}{2}\cos a = (U_n - \cot\frac{a}{2})\cos a$$

$$= V_n \cos a$$

ដោយ $V_{n+1} = V_n \cos a$ នាំឲ្យ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយមានរេសុង $\cos a$

និង តួ $V_0 = U_0 - \cot\frac{a}{2} = 1 - \cot\frac{a}{2}$ ។

ខ. គណនាលីមីត ៖ $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_0 + V_1 + ... + V_n)$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

យើងមាន $V_0+V_1+...+V_n = V_0\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = (1-\cot\dfrac{a}{2}).\dfrac{1-\cos^{n+1}a}{1-\cos a}$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_0+V_1+....+V_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[(1-\cot\dfrac{a}{2})\dfrac{1-\cos^{n+1}a}{1-\cos a}\right]$

ដោយ $0<a<\dfrac{\pi}{2}$ នោះ $0<\cos a<1$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^{n+1}a=0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(V_0+V_1+....+V_n) = \dfrac{1-\cot\frac{a}{2}}{1-\cos a}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $V_n = U_n - \cot\dfrac{a}{2}$ នាំឲ្យ $U_n = V_n + \cot\dfrac{a}{2}$

ដោយ $V_n = V_0\times q^n = (1-\cot\dfrac{a}{2})\cos^n a$

គេបាន $U_n = (1-\cot\dfrac{a}{2})\cos^n a + \cot\dfrac{a}{2}$

និង $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[(1-\cot\dfrac{a}{2})\cos^n a+\cot\dfrac{a}{2}\right] = \cot\dfrac{a}{2}$ ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^n a = 0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n = \cot\dfrac{a}{2}$ ។

លំហាត់ទី២៧

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ ៖

$U_0 = 0$; $U_1 = 1$ និង $\forall n \in IN : U_{n+2} = 2U_{n+1}\cos a - U_n$ ដែល $a \in IR$ ។

ក. តាង $Z_n = U_{n+1} - (\cos a - i\sin a)\, U_n$, $\forall n \in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា $Z_{n+1} = (\cos a + i\sin a)\, Z_n$ រួចទាញរក Z_n ជាអនុគមន៍ n និង a ។

ខ. ទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{a\to 0} U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $Z_{n+1} = (\cos a + i\sin a)\, Z_n$

យើងមាន $Z_n = U_{n+1} - (\cos a - i\sin a)U_n$

យើងបាន
$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= U_{n+2} - (\cos a - i\sin a)U_{n+1} \\ &= 2U_{n+1}\cos a - U_n - (\cos a - i\sin a)U_{n+1} \\ &= (\cos a + i\sin a)U_{n+1} - U_n \\ &= (\cos a + i\sin a)\left(U_{n+1} - \frac{U_n}{\cos a + i\sin a}\right) \\ &= (\cos a + i\sin a)\left[U_{n+1} - (\cos a - i\sin a)U_n\right] \\ &= (\cos a + i\sin a)\, U_n \end{aligned}$$

ដូចនេះ $Z_{n+1} = (\cos a + i\sin a)\, Z_n$ ។

គណនា Z_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ៖

ដោយ $Z_{n+1} = (\cos a + i\sin a)\, Z_n$ នាំឲ្យ (Z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច

ដែលមានរេសុង $q = \cos a + i\sin a$ និងតួ $Z_0 = U_1 - (\cos a - i\sin a)U_0 = 1$ ។

តាមរូបមន្ត $Z_n = Z_0 \times q^n = (\cos a + i\sin a)^n = \cos(na) + i\sin(na)$

ដូចនេះ $\boxed{Z_n = \cos(na) + i.\sin(na)}$ ។

ខ. ទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $Z_n = U_{n+1} - (\cos a - i\sin a)U_n$ (1)

និង $\overline{Z}_n = U_{n+1} - (\cos a + i\sin a)U_n$ (2)

ដកសមីការ (1) និង (2) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$Z_n - \overline{Z}_n = 2i\sin a \ U_n$ នាំឲ្យ $U_n = \dfrac{Z_n - \overline{Z}_n}{2i\sin a}$ ដែល $\sin a \neq 0$ ។

ដោយ $Z_n = \cos(na) + i\sin(na)$ និង $\overline{Z}_n = \cos(na) - i\sin(na)$

គេបាន $U_n = \dfrac{\cos(na) + i\sin(na) - \cos(na) + i\sin(na)}{2i\sin a} = \dfrac{\sin(na)}{\sin a}$

ដូចនេះ $\boxed{U_n = \dfrac{\sin(na)}{\sin a}}$ ។

ហើយ $\lim\limits_{a\to 0} U_n = \lim\limits_{a\to 0} \dfrac{\sin(na)}{\sin a} = n \lim\limits_{a\to 0} \dfrac{\sin(na)}{(na)} \times \dfrac{a}{\sin a} = n$

ដូចនេះ $\lim\limits_{a\to 0} U_n = n$ ។

លំហាត់ទី២៨

គេឲ្យស៊ីត (u_n) នៃចំនួនពិតកំនត់លើ IN* ដោយ $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ។

ក. កំនត់ចំនួនពិត A, B, C ដែល $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{A}{n} + \dfrac{B}{n+1} + \dfrac{C}{n+2}$ ។

ខ. តាង $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

គ. ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ គេតាង $V_n = u_n - \int_n^{n+1} g(x).dx$ ដែល g ជាអនុគមន៍

កំនត់ដោយ $g(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$ និង $S'_n = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n$ ។

ចូរបង្ហាញថា $S'_n = S_n - \int_1^{n+1} g(x).dx$ ហើយទាញរក S'_n និង $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំនត់ចំនួនពិត A, B, C ដែល $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{A}{n} + \dfrac{B}{n+1} + \dfrac{C}{n+2}$

យើងបាន $1 = A(n+1)(n+2) + B(n+2)n + C(n+1)n$

សមមូល $1 = (A+B+C)n^2 + (3A+2B+C)n + 2A$

គេទាញ $\begin{cases} 2A = 1 \\ A+B+C = 0 \\ 3A+2B+C = 0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $A = \dfrac{1}{2}$, $B = -1$, $C = \dfrac{1}{2}$ ។

ខ. គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

មាន $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (u_k)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)} \right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2(k+2)} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)} + \dfrac{1}{2(n+2)} \right] = \dfrac{1}{4}$ ។

គ. បង្ហាញថា $S'_n = S_n - \int_1^{n+1} g(x).dx$ ហើយទាញរក S'_n និង $\lim_{n\to+\infty} S'_n$ ៖

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ យើងមាន $V_n = u_n - \int_n^{n+1} g(x).dx$ ដែល g ជាអនុគមន៍

កំនត់ដោយ $g(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ និង $S'_n = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$

យើងបាន $S'_n = \sum_{k=1}^{n}(V_n) = \sum_{k=1}^{n}\left[u_n - \int_n^{n+1} g(x).dx\right]$

$$= \sum_{k=1}^{n}(u_n) - \left[\int_1^2 g(x).dx + \int_2^3 g(x).dx + \dots + \int_n^{n+1} g(x).dx\right]$$

ដូចនេះ $S'_n = S_n - \int_1^{n+1} g(x).dx$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $g(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ មានលំនាំដូច $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

គេបាន $g(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}$

ដោយ $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

យើងបាន $S'_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} - \int_1^{n+1}\left[\frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}\right].dx$

$$= \frac{1}{4} - \frac{n+2-n-1}{2(n+1)(n+2)} - \left[\frac{1}{2}\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x+2|\right]_1^{n+1}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} - \frac{1}{2}\ln(n+1) + \ln(n+2) - \frac{1}{2}\ln(n+3) + \frac{1}{2}\ln 3 - \ln 2$$

$$= \frac{1}{4} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} + \ln\left[\frac{n+2}{\sqrt{(n+1)(n+3)}}\right]$$

ដូចនេះ $S'_n = \frac{1}{4} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} + \ln\left[\frac{n+2}{\sqrt{(n+1)(n+3)}}\right]$ ។

និង $\lim_{n\to+\infty} S'_n = \frac{1}{4} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

លំហាត់ទី២៩

គេឲ្យ $\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{2^2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}=2\cos\frac{\pi}{2^3}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^4}$

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅ និង ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនោះផង ។

ដំណោះស្រាយ

រករូបមន្តទូទៅ ៖

គេមាន $\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{2^2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}=2\cos\frac{\pi}{2^3}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^4}$

តាមលំនាំឧទាហរណ៍យើងអាចទាញរករូបមន្តទូទៅដូចខាងក្រោម ៖

$$\boxed{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.........+\sqrt{2}}}}}_{(n)}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនេះ ៖

យើងតាង $A_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+......+\sqrt{2}}}}}_{(n)}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$

យើងមាន $A_1=\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{2^2}$ ពិត

យើងឧបមាថាវាពិតដល់តួទី p គឺ $A_p=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+......+\sqrt{2}}}}}_{(p)}=2\cos\frac{\pi}{2^{p+1}}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $p+1$ គឺ $A_{p+1}=2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$ ពិត

យើងមាន $A_{p+1}=\sqrt{2+A_p}$ ដោយតាមការឧបមា $A_p=2\cos\frac{\pi}{2^{p+1}}$

យើងបាន $A_{p+1}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{p+1}}}=\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{p+2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$ ពិត

ដូចនេះ $$\boxed{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.........+\sqrt{2}}}}}_{(n)}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$ ។

លំហាត់ទី៣០

ដោយធ្វើវិចារតាមកំណើនចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន $A_n = 2^{6n+1} + 9^{n+1}$ ចែកដាច់នឹង 11 ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន $A_n = 2^{6n+1} + 9^{n+1}$ ចែកដាច់នឹង 11

-បើ $n = 0$ គេបាន $A_0 = 2 + 9 = 11$ ពិត (ចែកដាច់នឹង 11)

-បើ $n = 1$ គេបាន $A_1 = 2^7 + 9^2 = 209 = 11 \times 19$ ពិត (ចែកដាច់នឹង 11)

យើងឧបមាថាវាពិតដល់តួទី p គឺ $A_p = 2^{6p+1} + 9^{p+1}$ ចែកដាច់នឹង 11

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $P+1$ $A_{p+1} = 2^{6p+7} + 9^{p+2}$ ចែកដាច់នឹង 11

យើងមាន $A_{p+1} = 2^{6p+7} + 9^{p+2}$

$$A_{p+1} = 2^6(2^{6p+1} + 9^{p+1}) + (9^{p+2} - 2^6.9^{p+1})$$
$$A_{p+1} = 64A_p + 9^{p+1}(9 - 64)$$
$$A_{p+1} = 64A_p - 55.9^{p+1}$$

ដោយតាមការឧបមា A_p ចែកដាច់នឹង 11 ហើយ 55.9^{p+1} ចែកដាច់នឹង 11

គេទាញបាន $A_{p+1} = 64A_p - 55.9^{p+1}$ ចែកដាច់នឹង 11 ពិត ។

ដូចនេះចំនួន $A_n = 2^{6n+1} + 9^{n+1}$ ចែកដាច់នឹង 11 ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

✍ ✍ ✍ ✍ ✍

លំហាត់ទី៣១

គេឲ្យស៊ីត (x_n) កំនត់ដោយ $x_1=\frac{4}{3}$ និង $(2n+1)x_n=2^n+2nx_{n-1}$, $n=2;3;4;....$

ចូរស្រាយតាមវិចារដោយកំណើនថា $x_n=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{C(n;i)}{2i+1}\right]$, $n=1;2;3;...$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយតាមវិចារដោយកំណើនថា $x_n=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{C(n;i)}{2i+1}\right]$, $n=1;2;3;...$

បើ $n=1$ គេមាន $x_1=\sum_{i=0}^{1}\left[\frac{C(1;i)}{2i+1}\right]=\frac{C(1;0)}{1}+\frac{C(1;1)}{3}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ ពិត

(ព្រោះ $C(1;0)=\frac{1!}{0!(1-0)!}=1$, $C(1;1)=\frac{1!}{1!(1-1)!}=1$)

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី n គឺ $x_n=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{C(n;i)}{2i+1}\right]$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $(n+1)$ គឺ $x_{n+1}=\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{C(n+1;i)}{2i+1}\right]$ ពិត

យើងមាន $(2n+1)x_n=2^n+2nx_{n-1}$, $n=2;3;4;....$

គេបាន $x_n=\frac{2^n}{2n+1}+\frac{2n}{2n+1}x_{n-1}$ នាំឲ្យ $x_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{2n+3}+\frac{2n+2}{2n+3}x_n$

$$x_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{2n+3}+\frac{2n+2}{2n+3}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{C(n;i)}{2i+1}\right]$$

ដោយ $C(n,i)=\frac{n!}{i!(n-i)!}$

ហើយ $C(n+1,i)=\frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!}=\frac{n!(n+1)}{i!(n-i)!(n+1-i)}=\frac{n+1}{n+1-i}C(n,i)$

គេទាញ $C(n;i)=\frac{n+1-i}{n+1}C(n+1;i)$

គេបាន $x_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{2n+3}+\frac{2(n+1)}{2n+3}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{n+1-i}{(n+1)(2i+1)}C(n+1;i)\right]$

$$x_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{2n+3}+\frac{2}{2n+3}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{n+1-i}{2i+1}C(n+1;i)\right] \quad (1)$$

យើងពិនិត្យ $\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{C(n+1;i)}{2i+1}\right]=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{C(n+1,i)}{2i+1}\right]+\frac{C(n+1;n+1)}{2(n+1)+1}$

$$\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{C(n+1;i)}{2i+1}\right]=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{C(n+1,i)}{2i+1}\right]+\frac{1}{2n+3}$$ (ព្រោះ $C(n+1;n+1)=1$)

$$\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{C(n+1;i)}{2i+1}\right]=\frac{2}{2n+3}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{(2n+3)}{2(2i+1)}C(n+1;i)\right]+\frac{1}{2n+3}$$

ដោយ $\frac{2n+3}{2(2i+1)}=\frac{2(n+1-i)+(1+2i)}{2(2i+1)}=\frac{n+1-i}{2i+1}+\frac{1}{2}$

$$\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{C(n+1;i)}{2i+1}\right]=\frac{2}{2n+3}\sum_{i=0}^{n}\left[\left(\frac{n+1-i}{2i+1}+\frac{1}{2}\right)C(n+1;i)\right]+\frac{1}{2n+3}$$

$$\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{C(n+1;i)}{2i+1}\right]=\frac{2}{2n+3}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{n+1-i}{2i+1}C(n+1;i)\right]+\frac{1}{2n+3}\sum_{i=0}^{n}\left[C(n+1;i)\right]+\frac{1}{2n+3}$$

តាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុនគេមាន ៖

$$(1+x)^{n+1}=\sum_{i=0}^{n+1}\left[C(n+1;i)x^i\right]=\sum_{i=0}^{n}\left[C(n+1;i)x^i\right]+C(n+1,n+1)x^{n+1}$$

យក $x=1$ គេបាន $2^{n+1}=\sum_{i=0}^{n}\left[C(n+1;i)\right]+1$ (ព្រោះ $C(n+1;n+1)=1$)

គេទាញ $\sum_{i=0}^{n}\left[C(n+1;i)\right]=2^{n+1}-1$

គេបាន $\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{C(n+1;i)}{2i+1}\right]=\frac{2}{2n+3}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{n+1-i}{2i+1}C(n+1;i)\right]+\frac{1}{2n+3}(2^{n+1}-1)+\frac{1}{2n+3}$

$$\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{C(n+1;i)}{2i+1}\right]=\frac{2}{2n+3}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{n+1-i}{2i+1}C(n+1;i)\right]+\frac{2^{n+1}}{2n+3}\quad(2)$$

តាម (1) និង (2) គេទាញ $x_{n+1}=\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{C(n+1;i)}{2i+1}\right]$ ពិត

ដូចនេះ $x_n=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{C(n;i)}{2i+1}\right]$ ។

លំហាត់ទី៣២

គេឲ្យ $E_n = 831^n - 743^n + 709^n - 610^n \ , \ n \in IN$

ចូរបង្ហាញថា E_n ចែកដាច់នឹង 187 ជានិច្ចគ្រប់ $n \in IN$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា E_n ចែកដាច់នឹង 187 ជានិច្ចគ្រប់ $n \in IN$ ៖

ដោយ $187 = 11 \times 17$ ដែល 11 និង 17 ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ។

ដូចនេះដើម្បីស្រាយថា E_n ចែកដាច់នឹង 187 យើងត្រូវស្រាយឲ្យឃើញថា E_n ចែកដាច់ 11 និង 17 ។

គេមាន $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + b^{n-1}) = (a-b).N$

ដែល $N = a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + b^{n-1}$

គេបាន
$$\begin{aligned}
E_n &= 831^n - 743^n + 709^n - 610^n \ , \ n \in IN \\
&= \left(831^n - 743^n\right) + \left(709^n - 610^n\right) \\
&= (831 - 743)\, p + (709 - 610)\, q \\
&= 88p + 99q \\
&= 11\,(\,8p + 9q\,) \ ; \ p\,, q \in IN^*
\end{aligned}$$

គេទាញបាន E_n ចែកដាច់នឹង 11 ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន
$$\begin{aligned}
E_n &= 831^n - 743^n + 709^n - 610^n \ , \ n \in IN \\
&= (831^n - 610^n) + (709^n - 743^n) \\
&= (831 - 610)\alpha + (709 - 743)\beta \\
&= 221\alpha - 34\beta \\
&= 17\ (13\,\alpha - 2\,\beta) \ ; \ \alpha ; \beta \in IN^*
\end{aligned}$$

គេទាញបាន E_n ចែកដាច់នឹង 17 ។

ដូចនេះ E_n ចែកដាច់នឹង 187 ជានិច្ចគ្រប់ $n \in IN$ ។

លំហាត់ទី៣៣

គេឲ្យ $$\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2\times 3}\right)$$

$$\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}\times\frac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3\times 4}\right)$$

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅនិងស្រាយរូបមន្តនោះផង ។

ដំណោះស្រាយ

រករូបមន្តទូទៅ៖

គេមាន $$\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2\times 3}\right)$$

$$\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}\times\frac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3\times 4}\right)$$

តាមឧទាហរណ៍ខាងលើនេះយើងបានរូបមន្តទូទៅដូចខាងក្រោម ៖

$$\boxed{\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}\times\frac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}}\times\ldots\ldots\times\frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n\times(n+1)}\right)}$$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត ៖

តាង $$P_n=\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}\times\frac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}}\times\ldots\ldots\times\frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{1-\frac{1}{k^3}}{1+\frac{1}{k^3}}\right)$$

យើងមាន $\dfrac{1-\frac{1}{k^3}}{1+\frac{1}{k^3}}=\dfrac{k^3-1}{k^3+1}=\dfrac{k-1}{k+1}\times\dfrac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\dfrac{k-1}{k}\times\dfrac{k}{k+1}\times\dfrac{k(k+1)+1}{(k-1)k+1}$

គេបាន $P_n=\prod_{k=2}^{n}\left[\dfrac{k-1}{k}\times\dfrac{k}{k+1}\times\dfrac{k(k+1)+1}{(k-1)k+1}\right]$

$$=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right)\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\right)\prod_{k=2}^{n}\left[\frac{k(k+1)+1}{(k-1)k+1}\right]$$

$$=\frac{1}{n}.\frac{2}{n+1}.\frac{n(n+1)+1}{1.2+1}$$

$$=\frac{2}{3}\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{n\times(n+1)}\right]$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}\times\dfrac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}}\times......\times\dfrac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}=\dfrac{2}{3}\left(1+\dfrac{1}{n\times(n+1)}\right)}$ ។

លំហាត់ទ៣៤

ចូរគណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = e^x \sin x$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេទី n ៖

តាង $u = e^x$ និង $v = \sin x$

យើងបាន $u' = e^x \ , u'' = e^x \ ; u''' = e^x \ ;....; u^{(n)} = e^x$

ហើយ $v' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$$v'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{2\pi}{2})$$

$$v''' = \cos(x + \frac{2\pi}{2}) = \sin(x + \frac{3\pi}{2})$$

$$-----------------$$

$$v^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$$

តាមរូបមន្តឡៃបនិចគេមាន $(u.v)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} \left(C_n^p \, u^{(n-p)} \, v^p \right)$

យើងបាន $y^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} \left[C_n^p \, e^x \sin(x + \frac{p\pi}{2}) \right] = e^x \ \sum_{p=0}^{n} \left[C_n^p \sin(x + \frac{p\pi}{2}) \right]$

តាង $A = \sum_{p=0}^{n} \left[C_n^p \cos(x + \frac{p\pi}{2}) \right] \ ; \ B = \sum_{p=0}^{n} \left[C_n^p \sin(x + \frac{p\pi}{2}) \right]$

គេបាន $A + i.B = \sum_{p=0}^{n} \left[C_n^p \cos(x + \frac{p\pi}{2}) \right] + i \ \sum_{p=0}^{n} \left[C_n^p \sin(x + \frac{p\pi}{2}) \right]$

$$= \sum_{p=0}^{n} \left[C_n^p \left(\cos(x + \frac{p\pi}{2}) + i.\sin(x + \frac{p\pi}{2}) \right) \right]$$

$$= \sum_{p=0}^{p} \left[C_n^p e^{i(x + \frac{p\pi}{2})} \right] = e^{ix} \ . \sum_{p=0}^{n} \left[C_n^p \, e^{i.\frac{p\pi}{2}} \right] \quad (1)$$

តាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុន $(a + b)^n = \sum_{p=0}^{n} \left(C_n^p a^{n-p} b^p \right)$

យក $a=1\,,\ b=e^{i\frac{\pi}{2}}$ គេបាន $(1+e^{i.\frac{\pi}{2}})^n=\sum_{p=0}^{n}\left[C_n^p\,e^{i\frac{p\pi}{2}}\right]$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងទាញបាន $A+i.B=e^{i.x}\left(1+e^{i.\frac{\pi}{2}}\right)^n$

ដោយ $1+e^{i\frac{\pi}{2}}=1+i=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i.\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}e^{i.\frac{\pi}{4}}$

គេបាន $A+i.B=e^{i.x}\ \sqrt{2}^n\ e^{i.\frac{n\pi}{4}}=(\sqrt{2})^n\ e^{i(x+\frac{n\pi}{4})}$

គេទាញ $A=(\sqrt{2})^n\cos(x+\frac{n\pi}{2})$; $B=(\sqrt{2})^n\ \sin(x+\frac{n\pi}{2})$ ។

ដូចនេះ $\boxed{y^{(n)}=(\sqrt{2})^n e^x\sin(x+\frac{n\pi}{2})}$ ។

លំហាត់ទ៣៥

គេឱ្យស៊ីតនៃមួយចំនួន $U_1, U_2, U_3, ..., U_n$ ដែលកំនត់ដោយ :

$U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n = an^2 + bn$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ និង $a \neq 0$, $a, b \in IR$ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាស៊ីតនេះជាស៊ីតនព្វន្ត ។

ខ. ចូរគណនាតួទីមួយ U_1 និង ផលសងរួម d ជាអនុគមន៍នៃ a និង b ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថាស៊ីតជាស៊ីតនព្វន្ត :

តាង $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n = an^2 + bn$

យើងបាន $S_{n+1} = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n + U_{n+1} = S_n + U_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1)$

គេទាញ $U_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) - S_n = an^2 + 2an + a + bn + b - an^2 - bn$

ឬ $U_{n+1} = 2an + a + b$ និង $U_n = 2a(n-1) + a + b = 2an - 2a + a + b = 2an - a + b$

ដោយ $U_{n+1} - U_n = (2an + a + b) - (2an - a + b) = 2a$ ថេរ

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (U_n) ជាស៊ីតនព្វន្ត ។

ខ.គណនាតួទីមួយ U_1 និង ផលសងរួម d ជាអនុគមន៍នៃ a និង b

យើងមាន $U_n = 2an - a + b$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $U_1 = 2a - a + b = a + b$ ហើយ $d = U_{n+1} - U_n = 2a$

ដូចនេះ $\boxed{U_1 = a + b \ , \ d = 2a}$ ។

លំហាត់ទី៣៦

គេឱ្យស៊ីតនព្វន្ត $U_1, U_2, U_3, ..., U_n$ ដែលមានផលសងរួម d ហើយ $d \neq 0$ ។

គេពិនិត្យស៊ីត (V_n) មួយកំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ដោយ $V_n = a^{U_n}$, $a > 0$, $a \neq 1$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា (V_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា V_n ជាអនុគមន៍នៃ a, U_1, d និង n ។

ខ. ចូរស្រាយថា $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n = a^{U_1} . \dfrac{1 - a^{nd}}{1 - a^d}$ ។

គ. ចូរគណនាផលគុណ $P_n = V_1 \times V_2 \times V_3 \times ..... \times V_n$ ជាអនុគមន៍នៃ a, U_1 និង n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (V_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន $V_n = a^{U_n}$ នាំឱ្យ $V_{n+1} = a^{U_{n+1}}$

យើងបាន $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{a^{U_{n+1}}}{a^{U_n}} = a^{U_{n+1} - U_n} = a^d$ ថេរ (ព្រោះ $U_{n+1} - U_n = d$) ។

ដូចនេះ (V_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = a^d$ ។

គណនា V_n ជាអនុគមន៍នៃ a, U_1, d និង n

តាមរូបមន្ត $V_n = V_1 \times q^{n-1}$ ដោយ $V_1 = a^{U_1}$ និង $q = a^d$

គេបាន $\boxed{V_n = a^{U_1} . a^{(n-1)d} = a^{U_1 + (n-1)d}}$ ។

ខ.ស្រាយថា $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n = a^{U_1} . \dfrac{1 - a^{nd}}{1 - a^d}$

តាមរូបមន្ត $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n = V_1 . \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$ ដោយ $V_1 = a^{U_1}$ និង $q = a^d$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n = a^{U_1} . \dfrac{1 - a^{nd}}{1 - a^d}}$ ។

គ.គណនាផលគុណ $P_n = V_1 \times V_2 \times V_3 \times ..... \times V_n$ ជាអនុគមន៍នៃ a, U_1 និង n

យើងបាន $P_n = V_1 \times V_2 \times V_3 \times ..... \times V_n = a^{U_1} . a^{U_2} . a^{U_3} .... a^{U_n} = a^{U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n} = a^{\frac{n(U_1 + U_n)}{2}}$

ដូចនេះ $\boxed{P_n = a^{\frac{n(U_1 + U_n)}{2}}}$ ។

លំហាត់ទី៣៧

គេឱ្យ (U_n) ជាស៊ីតកំនត់ដោយ $U_{n+1} = aU_n + b$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ និង $a \neq 0, a, b \in IR$

ក. ចំពោះ $a = 1$ ចូររកប្រភេទនៃស៊ីត (U_n) ។

ខ. ចំពោះ $a \neq 1$ គេឧបមាថា $U_n = V_n + k$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យ (V_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

គ. ឧបមាថា $a \neq 1$ ។ ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ a, b និង n និងតួ U_1 ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ចំពោះ $a = 1$ រកប្រភេទនៃស៊ីត (U_n)

ចំពោះ $a = 1$ គេមានទំនាក់ទំនង $U_{n+1} = U_n + b$

-បើ $b = 0$ នោះ $U_{n+1} = U_n, \forall n \in IN^*$ នាំឱ្យ (U_n) ជាស៊ីតថេរ ។

-បើ $b \neq 0$ នោះ $U_{n+1} = U_n + b$ នាំឱ្យ (U_n) ជាស៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម b ។

ខ. កំនត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យ (V_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ

ចំពោះ $a \neq 1$ គេមាន $U_{n+1} = aU_n + b$

គេមាន $U_n = V_n + k$ នាំឱ្យ $U_{n+1} = V_{n+1} + k$ ដោយ $U_{n+1} = aU_n + b$

គេបាន $V_{n+1} + k = a(V_n + k) + b$ ឬ $V_{n+1} = aV_n + (a-1)k + b$

តាមទំនាក់ទំនងនេះ ដើម្បីឱ្យ (V_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រលុះត្រាតែ $(a-1)k + b = 0$

គេទាញបាន $k = -\frac{b}{a-1} = \frac{b}{1-a}$ ។

គ. គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ a, b និង n និងតួ U_1

តាមដំណោះស្រាយខាងលើយើងឃើញថាចំពោះ $a \neq 1$ ពេលដែល $k = \frac{b}{1-a}$ នោះស៊ីត (V_n)

ជាស៊ីតធរណីមាត្រ មានរេសុង $q = a$ និងតួ $V_1 = U_1 - k = U_1 - \frac{b}{1-a}$ ។

តាមរូបមន្ត $V_n = V_1 \times q^{n-1} = (U_1 - \frac{b}{1-a}).a^{n-1}$ ដោយ $U_n = V_n + k$

ដូចនេះ $\boxed{U_n = (U_1 - \frac{b}{1-a}).a^{n-1} + \frac{b}{1-a}}$ ។

លំហាត់ទី៣៨

គេឱ្យស្ទីត (U_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - \frac{3}{2}, n \in IN \end{cases}$

ក. ចូរគណនា U_1 និង U_2 ។

ខ. ស្ទីត $(V_n), n \in IN$ កំនត់ដោយ $V_n = U_n + 3$ ។ស្រាយបញ្ជាក់ថា (V_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រ

គ. គណនា V_n រួចទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចបញ្ជាក់ភាពកើន ឬ ចុះនៃស្ទីតទាំងនេះ។

ឃ. ចូរគណនាផលបូក $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ឃ. ចូរគណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right)$ និង $\lim_{n\to+\infty}(S_n + 3n)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា U_1 និង U_2

យើងមាន $U_0 = 1$ និង $\forall n \in IN : U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - \frac{3}{2}$

យើងបាន $U_1 = \frac{1}{2}U_0 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$ និង $U_2 = \frac{1}{2}U_1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$

ដូចនេះ $\boxed{U_1 = -1 , U_2 = -2}$ ។

ខ.ស្រាយបញ្ជាក់ថា (V_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រ

យើងមាន $V_n = U_n + 3$ នាំឱ្យ $V_{n+1} = U_{n+1} + 3$ ដោយ $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - \frac{3}{2}$

គេបាន $V_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - \frac{3}{2} + 3 = \frac{1}{2}U_n + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(U_n + 3) = \frac{1}{2}V_n$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (V_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{1}{2}$ ។

គ. គណនា V_n រួចទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមរូបមន្ត $V_n = V_0 \times q^n$ ដោយ $V_0 = U_0 + 3 = 1 + 3 = 4$ និង $q = \frac{1}{2}$

គេបាន $V_n = 4.(\frac{1}{2})^n = \frac{2^2}{2^n} = 2^{2-n}$ និង $U_n = V_n - 3 = 2^{2-n} - 3$

ដូចនេះ $\boxed{V_n = 2^{2-n} , U_n = 2^{2-n} - 3}$ ។

បញ្ជាក់ភាពកើន ឬ ចុះនៃស្វ៊ីត (V_n) និង (U_n) :

គេមាន $V_n = 2^{2-n} = \frac{1}{2^{n-2}}$ នាំឱ្យ $V_{n+1} = \frac{1}{2^{n-1}} < V_n = \frac{1}{2^{n-2}}$

ដូចនេះ (V_n) ជាស្វ៊ីតចុះជានិច្ច ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $V_n = U_n + 3$ ដោយ (V_n) ជាស្វ៊ីតចុះនោះ (U_n) ក៏ជាស្វ៊ីតចុះជានិច្ចដែរ ។

គ. គណនាផលបូក $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = \sum_{k=0}^{n}(U_k)$

ដោយ $V_n = U_n + 3$ នាំឱ្យ $U_n = V_n - 3$

គេទាញ $S_n = \sum_{k=0}^{n}(V_k - 3) = (V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_n) - 3(n+1)$

$$= V_0 . \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - 3(n+1) = 4 . \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 3n - 3$$

$$= 8 - 8(\frac{1}{2})^{n+1} - 3n - 3 = -3n + 5 - \frac{1}{2^{n-2}}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = -3n + 5 - \frac{1}{2^{n-2}}}$ ។

ឃ.គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right)$ និង $\lim_{n\to+\infty}(S_n + 3n)$

យើងមាន $S_n = -3n + 5 - \frac{1}{2^{n-2}}$

យើងបាន $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{-3n + 5 - \frac{1}{2^{n-2}}}{n} = -3$

និង $\lim_{n\to+\infty}(S_n + 3n) = \lim_{n\to+\infty}\left(5 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) = 5$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right) = -3 \ , \ \lim_{n\to+\infty}(S_n + 3n) = 5}$ ។

✍✍✍✍✍

លំហាត់ទី៣៩

គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n) កំនត់ដោយ $a_1 = 4$ និង $\forall n \in IN^*: a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2}$

ក. ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ចូរបង្ហាញថា $a_n \neq 3$ ។

ខ. គេយក $b_n = \frac{1}{a_n - 3}$ ។ ចូររកប្រភេទនៃស៊ីត (b_n) ?

គ. ចូរកំនត់តួ b_n និង a_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចគណនា $\lim\limits_{n \to +\infty} n$

ឃ. គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k . b_k)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ បង្ហាញថា $a_n \neq 3$

យើងមាន $a_1 = 4 \neq 3$ ពិត

$$a_2 = \frac{4a_1 - 9}{a_1 - 2} = \frac{16 - 9}{4 - 2} = \frac{7}{2} \neq 3 \text{ ពិត}$$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $a_k \neq 3$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $a_{k+1} \neq 3$ ពិត ។

យើងមាន $a_k \neq 3$ និង $a_{k+1} = \frac{4a_k - 9}{a_k - 2}$

យើងបាន $a_{k+1} - 3 = \frac{4a_k - 9}{a_k - 2} - 3 = \frac{a_k - 3}{a_k - 2} \neq 0$ ព្រោះ $a_k \neq 3$

គេទាញបាន $a_{k+1} \neq 3$ ពិត ។

ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ គេបាន $a_n \neq 3$ ។

ខ.រកប្រភេទនៃស៊ីត (b_n)

គេមាន $b_n = \frac{1}{a_n - 3}$ នាំឱ្យ $b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1} - 3} = \frac{1}{\frac{4a_n - 9}{a_n - 2} - 3} = \frac{a_n - 2}{a_n - 3}$

យើងបាន $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n - 2}{a_n - 3} - \frac{1}{a_n - 3} = \frac{a_n - 3}{a_n - 3} = 1$

ដោយ $b_{n+1} - b_n = 1$ ថេរនោះ (b_n) ជាស៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d = 1$ ។

គ.កំនត់រតួ b_n និង a_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមរូបមន្ត $b_n = b_1 + (n-1).d$ ដោយ $b_1 = \frac{1}{a_1 - 3} = \frac{1}{4-3} = 1$ និង $d = 1$

ដូចនេះ $\boxed{b_n = n}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $b_n = \frac{1}{a_n - 3}$ នាំឱ្យ $a_n = \frac{1}{b_n} + 3$

ដូចនេះ $\boxed{a_n = \frac{1}{n} + 3}$ ។

គណនាលីមីត

យើងមាន $a_n = \frac{1}{n} + 3$ កាលណា $n \to +\infty$ នោះ $\frac{1}{n} \to 0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 3}$ ។

ឃ. គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k.b_k)$

យើងមាន $a_k = \frac{1}{k} + 3$ និង $b_k = k$ នាំឱ្យ $a_k.b_k = k(\frac{1}{k} + 3) = 3k + 1$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n} (3k+1) = 4 + 7 + 10 + ... + (3n+1) = \frac{n(4+3n+1)}{2} = \frac{n(3n+5)}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \frac{n(3n+5)}{2}}$ ។

លំហាត់ទី៤០

គេឱ្យស្វ៊ីត (U_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} U_1 = 5 \\ U_n = 2U_{n-1} - n \quad , \forall n \in IN^* \end{cases}$

ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{U_n}{2^n} \right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាU_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $U_n = 2U_{n-1} - n \quad (1)$

តាង $U_n = V_n + an + b$ នាំឱ្យ $U_{n-1} = V_{n-1} + a(n-1) + b$ ដែល $a, b \in IR$

ទំនាក់ទំនង (1) អាចសរសេរ $V_n + an + b = 2[V_{n-1} + a(n-1) + b] - n$

$$V_n + an + b = 2V_{n-1} + 2an - 2a + 2b - n$$

$$V_n = 2V_{n-1} + (a-1)n - 2a + b \quad (2)$$

តាមទំនាក់ទំនង (2) បើ $\begin{cases} a - 1 = 0 \\ -2a + b = 0 \end{cases}$ ឬ $a = 1 \ , b = 2$

នោះគេបាន $V_n = 2V_{n-1}$ នាំឱ្យ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$ ។

តាមរូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រយើងបាន $V_n = V_1 \times q^{n-1}$

ដោយ $U_n = V_n + an + b = V_n + n + 2$ ព្រោះ $a = 1 \ , b = 2$

នាំឱ្យគេទាញ $U_1 = V_1 + 1 + 2 = 5$ ឬ $V_1 = 2$ ។

គេបាន $V_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$ តែ $U_n = V_n + n + 2$ នាំឱ្យ $U_n = 2^n + n + 2$

ដូចនេះតួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $\boxed{U_n = 2^n + n + 2}$ ។

ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{U_n}{2^n} \right)$

យើងបាន $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{U_n}{2^n} \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2^n + n + 2}{2^n} \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{n+2}{2^n} \right) = 1$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{U_n}{2^n} \right) = 1}$ ។

លំហាត់ទី៤១

គេឱ្យស្វ៊ីត (U_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n^2 - n + 1 \end{cases}$, $\forall n \in IN$

ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{U_n}{n^2}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n^2 - n + 1 \quad (1)$

បើសិនជាយើងបង្កើតស្វ៊ីត (V_n) មួយដែល $V_n = U_n + an^2 + bn + c \quad (2)$, $\forall n \in IN$

ហើយ a, b, c ជាបីចំនួនពិត ។

យើងបាន $V_{n+1} = U_{n+1} + a(n+1)^2 + b(n+1) + c$

$V_{n+1} = U_{n+1} + an^2 + (2a+b)n + (a+b+c) \ (3)$

ដោយយក (1) ជំនួសក្នុង (3) គេបានទំនាក់ទំនង :

$V_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n^2 - n + 1 + an^2 + (2a+b)n + (a+b+c)$

$V_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + (a+1)n^2 + (2a+b-1)n + (a+b+c+1)$

$3V_{n+1} = U_n + 3(a+1)n^2 + 3(2a+b-1)n + 3(a+b+c+1) \ (4)$

ដកសមីការ (4) និង (2) អង្គ និង អង្គយើងបាន :

$3V_{n+1} - V_n = 3(a+1)n^2 + 3(2a+b-1)n + 3(a+b+c+1) - an^2 - bn - c$

$3V_{n+1} - V_n = (2a+3)n^2 + (6a+2b-3)n + (3a+3b+2c+3) \ (5)$

បើ $\begin{cases} 2a+3=0 \\ 6a+2b-3=0 \\ 3a+3b+2c+3=0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $a = -\frac{3}{2}$, $b = 6$, $c = -\frac{33}{4}$

ទំនាក់ទំនង (5) ក្លាយទៅជា $3V_{n+1} - V_n = 0$ ឬ $V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (V_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=\frac{1}{3}$ ។

តាមរូបមន្តតួទី n នៃស៊ីតធរណីមាត្រយើងបាន $V_n = V_0 \times q^n$ ។

ចំពោះ $a=-\frac{3}{2}$, $b=6$, $c=-\frac{33}{4}$ គេមាន $V_n = U_n - \frac{3}{2}n^2 + 6n - \frac{33}{4}$ តាម (2) ។

បើ $n=0$ គេបាន $V_0 = U_0 - \frac{33}{4} = 1 - \frac{33}{4} = -\frac{29}{4}$ នាំឱ្យ $V_n = -\frac{29}{4}(\frac{1}{3})^n$ ។

ដោយហេតុថា $V_n = U_n - \frac{3}{2}n^2 + 6n - \frac{33}{4}$ នាំឱ្យ $U_n = V_n + \frac{3}{2}n^2 - 6n + \frac{33}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{U_n = -\frac{29}{4}.\frac{1}{3^n} + \frac{3}{2}n^2 - 6n + \frac{33}{4}}$ ។

<u>ទាញរកលីមីត</u> $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{U_n}{n^2}\right)$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $U_n = -\frac{29}{4}\frac{1}{3^n} + \frac{3}{2}n^2 - 6n + \frac{33}{4}$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{U_n}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{29}{4n^2}.\frac{1}{3^n} + \frac{3}{2} - \frac{6}{n} + \frac{33}{4n^2}\right) = \frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{U_n}{n^2}\right) = \frac{3}{2}}$ ។

លំហាត់ទី៤២

គេឱ្យស៊ីត (U_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + (n+1)2^n \ , \forall n \in IN^* \end{cases}$

ក. ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{U_n}{U_{n+1}-U_n}\right]$

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $U_{n+1} = U_n + (n+1).2^n$ នាំឱ្យ $U_{n+1} - U_n = (n+1)2^n$

ដោយ $(n+1)2^n = [2n-(n-1)].2^n = n.2^{n+1} - (n-1).2^n$

គេទាញ $U_{n+1} - U_n = n.2^{n+1} - (n-1)2^n$

យើងបាន $\begin{cases} U_2 - U_1 = 2^2 - 0 \\ U_3 - U_2 = 2.2^3 - 2^2 \\ U_4 - U_3 = 3.2^4 - 2.2^3 \qquad\qquad + \\ ------------- \\ U_n - U_{n-1} = (n-1)2^n - (n-2)2^{n-1} \end{cases}$

បូកទំនាក់ទំនងនេះគេបាន $U_n - U_1 = (n-1)2^n$ នាំឱ្យ $U_n = 1 + (n-1).2^n$

ដូចនេះ $\boxed{U_n = 1 + (n-1).2^n}$ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{U_n}{U_{n+1}-U_n}\right]$

យើងមាន $U_n = 1 + (n-1).2^n$ និង $U_{n+1} - U_n = (n+1).2^n$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{U_n}{U_{n+1}-U_n}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1+(n-1).2^n}{(n+1).2^n}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1).2^n} + \dfrac{n-1}{n+1}\right] = 1$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{U_n}{U_{n+1}-U_n}\right] = 1}$ ។

លំហាត់ទី៤៣

គេឧបមាថា S_m និង S_n ជាផលបូក m តួដំបូង និង n តួដំបូងរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ
ដែល $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}; (m\neq n)$ ។ គេតាង U_m ជាតួទី m និង U_n ជាតួទី n ។
ចូរបង្ហាញថា $\frac{U_m}{U_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$?

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{U_m}{U_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$?

យើងមាន $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$ ដោយ $S_m=\frac{m(U_1+U_m)}{2}$; $S_n=\frac{n(U_1+U_n)}{2}$

គេបាន $\frac{m(U_1+U_m)}{2}\times\frac{2}{n(U_1+U_n)}=\frac{m^2}{n^2}$ នាំឱ្យ $\frac{U_1+U_m}{U_1+U_n}=\frac{m}{n}$ (1)

ដោយ $U_m=U_1+(m-1).d$, $U_n=U_1+(n-1).d$ ដែល d ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីត ។

យក $U_m=U_1+(m-1).d$, $U_n=U_1+(n-1).d$ ជួសក្នុង (1) គេបាន

$\frac{2U_1+(m-1).d}{2U_1+(n-1)d}=\frac{m}{n}$ ឬ $2U_1n+n(m-1)d=2U_1m+m(n-1)d$

គេទាញ $U_1=\frac{n(m-1)d-m(n-1)d}{2(m-n)}=\frac{d(mn-n-mn+m)}{2(m-n)}=\frac{d}{2}$ ព្រោះ $m\neq n$ ។

យើងបាន $U_m=\frac{d}{2}+(m-1)d=\frac{2m-1}{2}.d.$; $U_n=\frac{d}{2}+(n-1).d=\frac{2n-1}{2}.d$

គេបាន $\frac{U_m}{U_n}=\frac{\frac{2m-1}{2}.d}{\frac{2n-1}{2}.d}=\frac{2m-1}{2n-1}$ បើ $d\neq 0$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\frac{U_m}{U_n}=\frac{2m-1}{2n-1}}$ ។

លំហាត់ទី៤៤

គេមាន $S_n=\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+.......+\frac{n}{1000....000}$

ក. ចូរស្រាយថា $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+.....+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}$, $\forall x\neq 1$, $n\in IN^*$

រួចទាញឱ្យបានថា $1+2x+3x^2+....+nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{[nx-(n+1)]x^n}{(1-x)^2}$ ។

ខ. ទាញរកតម្លៃនៃ S_n និង $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+.....+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}$, $\forall x\neq 1$, $n\in IN^*$

យើងមាន $1+x+x^2+x^3+...+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x}$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+....+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $(\frac{1}{1-x})'=(1+x+x^2+x^3+....+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x})'$ (ដេរីវេលើអង្គទាំងពីរ)

$$-\frac{(1-x)'}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+....+nx^{n-1}+\frac{(n+1)x^n(1-x)-(1-x)'x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+........+nx^{n-1}+\frac{[(n+1)-nx]x^n}{(1-x)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{1+2x+3x^2+....+nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{[nx-(n+1)]x^n}{(1-x)^2}}$

ខ. ទាញរកតម្លៃនៃ S_n និង $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

គេមាន $1+2x+3x^2+....+nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{[nx-(n+1)]x^n}{(1-x)^2}$ ដោយយក $x=\frac{1}{10}$

គេបាន $1+\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+....+\frac{n}{10^{n-1}}=\frac{100}{81}+\frac{100(\frac{1}{10}n-n-1)\frac{1}{10^n}}{81}=\frac{100}{81}-\frac{10(9n+10)}{81.10^n}$

ឬ $\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+....+\frac{n}{10^n}=\frac{10}{81}-\frac{9n+10}{81.10^n}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{S_n=\frac{10}{81}-\frac{9n+10}{81.10^n}}$ និង $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{10}{81}}$ ។

លំហាត់ទី៤៥

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(U_n)_{n\in IN}$ កំនត់ដោយ $\begin{cases} U_0 = \sqrt{5} \\ U_{n+1} = U_n^{\ 2} - 2 \ , \forall n \in IN \end{cases}$

ក. ចូរស្រាយថា $U_n > 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ខ. គេពិនិត្យស្វ៊ីត $(V_n)_{n\in IN}$ កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង $V_n = U_n + \sqrt{U_n^{\ 2} - 4}$ ។

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង V_{n+1} និង V_n ។

គ. ចូរគណនា V_n រួចទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $U_n > 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$

យើងមាន $U_0 = \sqrt{5} > 2$ ពិត

$$U_1 = U_0^{\ 2} - 2 = 5 - 2 = 3 > 2 \text{ ពិត}$$

យើងឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $U_k > 2$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $U_{k+1} > 2$ ពិត ។

យើងមាន $U_k > 2$ នាំឱ្យ $U_k^{\ 2} > 4$ ឬ $U_k^{\ 2} - 2 > 2$

ដោយ $U_{k+1} = U_k^{\ 2} - 2$ នោះគេទាញបាន $U_{k+1} > 2$ ពិត ។

ដូចនេះ $U_n > 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ខ. រកទំនាក់ទំនងរវាង V_{n+1} និង V_n

យើងមាន $V_n = U_n + \sqrt{U_n^{\ 2} - 4}$ នាំឱ្យ $V_{n+1} = U_{n+1} + \sqrt{U_{n+1}^2 - 4}$

តែ $U_{n+1} = U_n^{\ 2} - 2$ គេបាន $V_{n+1} = U_n^{\ 2} - 2 + \sqrt{(U_n^{\ 2} - 2)^2 - 4}$

$$V_{n+1} = U_n^{\ 2} - 2 + \sqrt{U_n^{\ 4} - 4U_n^{\ 2} + 4 - 4} = U_n^{\ 2} - 2 + \sqrt{U_n^{\ 2}(U_n^{\ 2} - 4)}$$

$$= U_n^2 - 2 + U_n\sqrt{U_n^{\ 2} - 4} = \frac{2U_n^{\ 2} - 4 + 2U_n\sqrt{U_n^{\ 2} - 4}}{2} = \frac{(U_n + \sqrt{U_n^{\ 2} - 4})^2}{2}$$

ដូចនេះគេបាន $\boxed{V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n^{\ 2}}$ ជាទំនាក់ទំនងដែលត្រូវរក ។

គ. គណនា V_n រួចទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n^{\ 2}$ នាំឱ្យ $\log_{\frac{1}{2}} V_{n+1}=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}V_n^{\ 2})$

$\log_{\frac{1}{2}} V_{n+1}=1+2\log_{\frac{1}{2}} V_n$ តាង $W_n=\log_{\frac{1}{2}} V_n$ នាំឱ្យ $W_{n+1}=\log_{\frac{1}{2}} V_{n+1}$

គេបាន $W_{n+1}=1+2W_n$ ឬ $(1+W_{n+1})=2(1+W_n)$

នាំឱ្យ $(1+W_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=2$ និងតួទីមួយ $1+W_0$

តែ $V_0=U_0+\sqrt{U_0^{\ 2}-4}=\sqrt{5}+\sqrt{5-4}=\sqrt{5}+1$ ព្រោះ $V_n=U_n+\sqrt{U_n^{\ 2}-4}$

គេបាន $1+W_0=1+\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{5}+1)=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{\sqrt{5}+1}{2})$ ។

តាមរូបមន្ត $1+W_n=(1+W_0).q^n=2^n\log_{\frac{1}{2}}(\frac{\sqrt{5}+1}{2})=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{2^n}$

ដោយ $W_n=\log_{\frac{1}{2}} V_n$ នោះ $1+W_n=1+\log_{\frac{1}{2}} V_n=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{V_n}{2})$

គេទាញ $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{V_n}{2})=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{2^n}$ នាំឱ្យ $V_n=2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n}$

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $V_n=U_n+\sqrt{U_n^{\ 2}-4}$ នាំឱ្យ $(V_n-U_n)^2=U_n^{\ 2}-4$

ឬ $V_n^{\ 2}-2V_nU_n+U_n^{\ 2}=U_n^{\ 2}-4$ គេទាញ $U_n=\frac{V_n^{\ 2}+4}{2V_n}=\frac{1}{2}V_n+\frac{2}{V_n}$

នាំឱ្យ $U_n=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n}+\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n}}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n}+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^n}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{U_n=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n}+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^n}\ ,\ V_n=2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n}}$

លំហាត់ទី៤៦

គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត (U) មានតួ $2,7,12,........$ និងស្វ៊ីតនព្វន្ត (V) មានតួ $2,5,8,.....$ ។
តើក្នុងចំណោម 151 តួនៃស្វ៊ីតទាំងពីរនេះ មានប៉ុន្មានតួដែលមានតម្លៃស្មើគ្នា ?

ដំណោះស្រាយ

យើងមានតួទី p នៃ ស្វ៊ីតនព្វន្ត (U) មានតួ $2,7,12,........$ គឺ $U_p = 2+5(p-1)$, $\forall p \in IN^*$

និងតួទី r នៃស្វ៊ីត នព្វន្ត (V) មានតួ $2,5,8,.....$ គឺ $V_r = 2+3(r-1)$, $\forall r \in IN^*$ ។

បើ $U_p = V_r$ នោះគេបាន $2+5(p-1) = 2+3(r-1)$

ឬ $5(p-1) = 3(r-1)$ (1)

ដោយ $p, r \in IN^*$ នោះសមីការ (1) មានចម្លើយកាលណាមាន $n \in IN$ ដែល :

$r-1 = 5n$ និង $p-1 = 3n$ នាំឱ្យគេទាញបាន $\begin{cases} p = 3n+1 \\ r = 5n+1 \end{cases}$

យើងសិក្សាក្នុងចំណោម 151 តួនៃស្វ៊ីតទាំងពីរនេះដែលមានតម្លៃស្មើគ្នាមានន័យថា

គេត្រូវឱ្យ $1 \le p \le 151$ និង $1 \le r \le 151$ នាំឱ្យគេទាញ $\begin{cases} 1 \le 3n+1 \le 151 \\ 1 \le 5n+1 \le 151 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} 0 \le n \le 50 \\ 0 \le n \le 30 \end{cases}$ នាំឱ្យ $0 \le n \le 30$ ឬ $n = \{0,1,2,3,....,30\}$ ។

ដូចនេះយើងសន្និដ្ឋានថាក្នុងចំណោម 151 តួនៃស្វ៊ីតទាំងពីរនេះគឺតួដែលមានតម្លៃស្មើគ្នា

មានចំនួន 31 តួ ។

លំហាត់ទី៤៧

គេឱ្យស្ទីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ :

$U_0 = 2$ និង ចំពោះគ្រប់ $n \in IN : U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 2n - \frac{7}{2}$

ក. បង្ហាញថាគេអាចកំនត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យស្ទីត $(V_n), n \in IN$ កំនត់ដោយ ទំនាក់ទំនង $V_n = U_n + an + b$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រ ។

ខ. ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំនត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យស្ទីត $(V_n), n \in IN$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រ :

យើងមាន $V_n = U_n + an + b$ នាំឱ្យ $V_{n+1} = U_{n+1} + a(n+1) + b = U_{n+1} + an + a + b$

ដោយ $n \in IN : U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 2n - \frac{7}{2}$

គេបាន $V_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 2n - \frac{7}{2} + an + a + b$ តែ $V_n = U_n + an + b$ ឬ $U_n = V_n - an - b$

នាំឱ្យ $V_{n+1} = \frac{1}{2}(V_n - an - b) - 2n - \frac{7}{2} + an + a + b$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n - \frac{1}{2}an - \frac{1}{2}b - 2n - \frac{7}{2} + an + a + b$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n + (\frac{1}{2}a - 2)n + (a + \frac{b}{2} - \frac{7}{2}) \quad (1)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) ដើម្បីឱ្យ (V_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រលុះត្រាតែ $\begin{cases} \frac{1}{2}a - 2 = 0 \\ a + \frac{b}{2} - \frac{7}{2} = 0 \end{cases}$

គេទាញបាន $a = 4$ និង $b = -1$ ។ ដូចនេះ $\boxed{a = 4 \, , \, b = -1}$ ។

ខ. គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $a = 4$ និង $b = -1$ នោះតាម(1)នាំឱ្យ $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$

នាំឱ្យ (V_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{1}{2}$ និងតួ $V_0 = U_0 + b = 2 - 1 = 1$

គេបាន $V_n = V_0.q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ។ ដូចនេះ $\boxed{U_n = \frac{1}{2^n} - 4n + 1}$

លំហាត់ទី៤៨

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ :

$U_0 = 1$ និង ចំពោះគ្រប់ $n \in IN : 3U_{n+1} = 2U_n + n^2 + 4n + 1$

ក. បង្ហាញថាគេអាចកំនត់បីចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឱ្យស្វ៊ីត $(V_n), n \in IN$ កំនត់ដោយ ទំនាក់ទំនង $V_n = U_n + an^2 + bn + c$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំនត់បីចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឱ្យស្វ៊ីត $(V_n), n \in IN$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន $V_n = U_n + an^2 + bn + c$ នាំឱ្យ $V_{n+1} = U_{n+1} + an^2 + (2a+b)n + a + b + c$

ដោយ $n \in IN : 3U_{n+1} = 2U_n + n^2 + 4n + 1$ នាំឱ្យ $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{n^2}{3} + \frac{4n}{3} + \frac{1}{3}$

គេបាន $V_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{n^2}{3} + \frac{4n}{3} + \frac{1}{3} + an^2 + (2a+b)n + a + b + c$

តែ $V_n = U_n + an^2 + bn + c$ នាំឱ្យ $U_n = V_n - an^2 - bn - c$

គេបាន $V_{n+1} = \frac{2}{3}(V_n - an^2 - bn - c) + \frac{n^2}{3} + \frac{4n}{3} + \frac{1}{3} + an^2 + (2a+b)n + a + b + c$

$$V_{n+1} = \frac{2}{3}V_n + \frac{1}{3}(a+1)n^2 + (2a + \frac{1}{3}b + \frac{4}{3})n + a + b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3} \qquad (1)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) ដើម្បីឱ្យ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រលុះត្រាតែ $\begin{cases} a + 1 = 0 \\ 2a + \frac{1}{3}b + \frac{4}{3} = 0 \\ a + b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$

នាំឱ្យគេទាញបាន $a = -1, b = 2, c = -4$ ។

ដូចនេះ $\boxed{a = -1, b = 2, c = -4}$ ។

ខ. គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ចម្លើយ $\boxed{U_n = 5\,(\frac{2}{3})^n + n^2 - 2n + 4}$ (សិស្សដោះស្រាយខ្លួនឯង)

លំហាត់ទី៤៩

គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត (U) មានតួ 5 , 9 , 13 ,17...... និងស្វ៊ីតនព្វន្ត (V) មានតួ 7 , 13 , 19 , 25,....

ក. តើក្នុងចំណោម 49 តួនៃស្វ៊ីត U មានប៉ុន្មានតួដែលជាការេប្រាកដ ?

ចូរកំនត់រកតម្លៃនៃតួទាំងនោះ ។

ខ. តើក្នុងចំណោម 49 តួនៃស្វ៊ីត V មានប៉ុន្មានតួដែជាការេប្រាកដ ?

ចូរកំនត់រកតម្លៃនៃតួទាំងនោះ ។

គ. តើក្នុងចំណោម 49តួនៃស្វ៊ីតទាំងពីរនេះមានប៉ុន្មានតួដែលមានតម្លៃស្មើគ្នា ?

ដំណោះស្រាយ

ក. តើក្នុងចំណោម 49 តួនៃស្វ៊ីត U មានប៉ុន្មានតួដែលជាការេប្រាកដ ?

តួទី p នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត (U) ដែលមានតួទីមួយ $U_1 = 5$ និងផលសងរួម $d = 9 - 5 = 4$

កំនត់ដោយ $U_p = 5 + 4(p-1) = 4p + 1$ ចំពោះគ្រប់ $p \in IN^*$ ។

ចំពោះគ្រប់ $1 \le p \le 49$ ឧបមាថា $U_p = N^2$, $N \in IN^*$

គេបាន $4p + 1 = N^2$ នាំឱ្យ $p = \dfrac{N^2 - 1}{4}$ (1)

តាមទំនាក់ទំនង (1) ដើម្បីឱ្យ p ជាចំនួនគត់លុះត្រាតែ k ជាចំនួនសេស ។

បើ $N = 2r + 1$, $r \in IN^*$ (ចំនួនសេស) នោះ $p = \dfrac{(2r+1)^2 - 1}{4} = r^2 + r$

តែ $1 \le p \le 49$ នាំឱ្យ $1 \le r^2 + r \le 49$ ដោយ $\forall r \in IN^*$ គេបាន $1 \le r \le 6$

ឬ $r = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$ ហើយ $p = \{2, 6, 12, 20, 30, 42\}$

ដូចនេះក្នុងចំណោម 49 តួនៃស្វ៊ីត U មាន6តួដែលជាការេប្រាកដ ។

តួទាំងនោះគឺ $U_2 = 4(2) + 1 = 9 = 3^2$

$U_6 = 4(6) + 1 = 25 = 5^2$

$U_{12} = 4(12) + 1 = 49 = 7^2$

$U_{20} = 4(20) + 1 = 81 = 9^2$

$U_{30} = 4(30) + 1 = 121 = 11^2$

$U_{42} = 4(42) + 2 = 169 = 13^2$

ខ. តើក្នុងចំណោម 49 តួនៃស្វ៊ីត V មានប៉ុន្មានតួដែលជាការេប្រាកដ ?

តួទី k នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត (V) ដែលមានតួទីមួយ $V_1 = 7$ និងផលសងរួម $d = 13 - 7 = 6$

កំនត់ដោយ $V_k = 7 + 6(k-1) = 6k + 1$ ចំពោះគ្រប់ $k \in IN^*$ ។

ចំពោះគ្រប់ $1 \le k \le 49$ ឧបមាថា $V_k = t^2$, $t \in IN^*$

គេទាញបាន $6k + 1 = t^2$ នាំឱ្យ $k = \dfrac{t^2 - 1}{6}$ (2)

តាម (2) ដើម្បីឱ្យ k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានលុះត្រាតែ $t^2 - 1$ ចែកដាច់នឹង 6 ។

យើងយក $t = 6m + r$ ដែល $m \in IN^*$, $r \in Z$, $-5 \le r \le 5$

គេបាន $t^2 - 1 = (6m + r)^2 - 1 = 36m^2 + 12mr + r^2 - 1 = 6(6mr^2 + 2mr) + r^2 - 1$

ដើម្បីឱ្យ $t^2 - 1$ ចែកដាច់នឹង 6លុះត្រា $r^2 - 1$ ចែកដាច់នឹង 6 ។

ដោយ $-5 \le r \le 5$ នោះគេបាន $r = \{ \pm 1 , \pm 2 , \pm 3 , \pm 4 , \pm 5 \}$

-ចំពោះ $r = \pm 1$ នោះ $r^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$ យក

-ចំពោះ $r = \pm 2$ នោះ $r^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$ (មិនយក)

-ចំពោះ $r = \pm 3$ នោះ $r^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$ (មិនយក)

-ចំពោះ $r = \pm 4$ នោះ $r^2 - 1 = 4^2 - 1 = 15$ (មិនយក)

-ចំពោះ $r = \pm 5$ នោះ $r^2 - 1 = 5^2 - 1 = 24$ យក

ដូចនេះគេបាន $t = 6m - 5$, $t = 6m - 1$, $t = 6m + 1$, $t = 6m + 5$

ដោយ $6m + 1 = 6(m+1) - 5 = 6m' - 5$, $6m + 5 = 6(m+1) - 1 = 6m' - 1$

ដូចនេះតម្លៃ t ដែលត្រូវយកមានតែ $t = 6m - 5$, $t = 6m - 1$

-បើ $t = 6m - 5$ គេបាន $k = \dfrac{(6m-5)^2 - 1}{6} = 6m^2 - 10m + 4$

ដោយ $1 \le k \le 49$ នាំឱ្យ $1 \le 6m^2 - 10m + 4 \le 49$ ឬ $2 \le m \le 3$

ក្នុងករណីនេះគេទាញបានតម្លៃ $k = \{ 8 , 28 \}$

-បើ $t = 6m - 1$ គេបាន $k = \dfrac{(6m-1)^2 - 1}{6} = 6m^2 - 2m$

ដោយ $1 \le k \le 49$ នាំឱ្យ $1 \le 6m^2 - 2m \le 49$ ឬ $1 \le m \le 3$

ក្នុងករណីនេះគេទាញបានតម្លៃ $k = \{ 4, 20 , 48\}$

ដូចនេះគេទទួលបានតម្លៃ $k = \{ 4,8,20,28,48\}$

ដូចនេះក្នុងចំណោម 49 តួនៃស្ទីត V មាន5តួដែលជាការេប្រាកដ ។

តួទាំងនោះគឺ
$$V_4 = 6(4) + 1 = 25 = 5^2$$
$$V_8 = 6(8) + 1 = 49 = 7^2$$
$$V_{20} = 6(20) + 1 = 121 = 11^2$$
$$V_{28} = 6(28) + 1 = 169 = 13^2$$
$$V_{48} = 6(48) + 1 = 289 = 17^2$$

គ. តើក្នុងចំណោម 49តួនៃស្ទីតទាំងពីរនេះមានប៉ុន្មានតួដែលមានតម្លៃស្មើគ្នា ?

-តួទី p នៃស្ទីតនព្វន្ត (U) ដែលមានតួទីមួយ $U_1 = 5$ និងផលសងរួម $d = 9 - 5 = 4$

កំនត់ដោយ $U_p = 5 + 4(p-1) = 4p + 1$ ចំពោះគ្រប់ $p \in IN^*$ ។

-តួទី k នៃស្ទីតនព្វន្ត (V) ដែលមានតួទីមួយ $V_1 = 7$ និងផលសងរួម $d = 13 - 7 = 6$

កំនត់ដោយ $V_k = 7 + 6(k-1) = 6k + 1$ ចំពោះគ្រប់ $k \in IN^*$ ។

ចំពោះ $1 \le p \le 49$ និង $1 \le k \le 49$ បើ $U_p = V_k$ នោះគេបាន ៖

$4p + 1 = 6k + 1$ ឬ $2p = 3k$ នាំឱ្យ $\begin{cases} p = 3r \\ k = 2r \quad , r \in IN^* \end{cases}$

ដោយ $1 \le p \le 49$ និង $1 \le k \le 49$ គេបាន $\begin{cases} 1 \le 3r \le 49 \\ 1 \le 2r \le 49 \end{cases}$ គេទាញ $1 \le r \le 16$

ឬ $r = \{ 1, 2, 3, \ldots\ldots, 16 \}$ ។

ដូចនេះក្នុងចំណោម 49តួនៃស្ទីតទាំងពីរនេះមាន16 តួដែលមានតម្លៃស្មើគ្នា ។

លំហាត់ទី៥០

គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ IN ដែល $\begin{cases} U_0 = -\frac{4}{7} \\ 2U_{n+1} - U_n = \sin\frac{n\pi}{4}, \forall n \in IN \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN: \ U_n = V_n + a\sin\frac{n\pi}{4} + b\cos\frac{n\pi}{4}$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃនៃពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ (V_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំនត់តម្លៃនៃពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ (V_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន $\forall n \in IN: \ U_n = V_n + a\sin\frac{n\pi}{4} + b\cos\frac{n\pi}{4}$

យើងបាន $U_{n+1} = V_{n+1} + a\sin(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) + b\cos(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{4})$

$$U_{n+1} = V_{n+1} + a\left(\sin\frac{n\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{n\pi}{4}\right) + b(\cos\frac{n\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4})$$

$$U_{n+1} = V_{n+1} + a\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{n\pi}{4} + a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{n\pi}{4} + b\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{n\pi}{4} - b\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{n\pi}{4}$$

$$U_{n+1} = V_{n+1} + \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)\sin\frac{n\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)\cos\frac{n\pi}{4}$$

ដោយគេមាន $2U_{n+1} - U_n = \sin\frac{n\pi}{4}$ យើងទាញបាន :

$$2\left[\ V_{n+1} + \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)\sin\frac{n\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)\cos\frac{n\pi}{4}\ \right] - (V_n + a\sin\frac{n\pi}{4} + b\cos\frac{n\pi}{4}) = \sin\frac{n\pi}{4}$$

$$2V_{n+1} + \sqrt{2}(a-b)\sin\frac{n\pi}{4} + \sqrt{2}(a+b)\cos\frac{n\pi}{4} - V_n - a\sin\frac{n\pi}{4} - b\cos\frac{n\pi}{4} = \sin\frac{n\pi}{4}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n + \frac{1}{2}[1 - \sqrt{2}(a-b) + a]\sin\frac{n\pi}{4} + \frac{1}{2}[b - \sqrt{2}(a+b)]\cos\frac{n\pi}{4} \qquad (1)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) ដើម្បីឱ្យ (V_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រលុះត្រាតែ :

$\begin{cases} 1 - \sqrt{2}(a-b) + a = 0 \\ b - \sqrt{2}(a+b) = 0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} (1-\sqrt{2})a + \sqrt{2}.b = -1 \\ \sqrt{2}.a + (1-\sqrt{2})b = 0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $a = -\frac{3-\sqrt{2}}{7}, b = -\frac{4+\sqrt{2}}{7}$

ដូចនេះ $\boxed{a = -\frac{3-\sqrt{2}}{7}\ ,\ b = -\frac{4+\sqrt{2}}{7}}$ ។

ខ. គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $a=-\frac{3-\sqrt{2}}{7}$, $b=-\frac{4+\sqrt{2}}{7}$

តាម (1) គេអាចទាញបាន $V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n$ គេបានស្វ៊ីត (V_n) ដែលកំនត់ដោយ

$\forall n\in IN:\ U_n=V_n+a\sin\frac{n\pi}{4}+b\cos\frac{n\pi}{4}=V_n-\frac{3-\sqrt{2}}{7}\sin\frac{n\pi}{4}-\frac{4+\sqrt{2}}{7}\cos\frac{n\pi}{4}$

ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុង $q=\frac{1}{2}$ និងតួ $U_0=V_0-\frac{4+\sqrt{2}}{7}=-\frac{4}{7}$ នាំឱ្យ $V_0=\frac{\sqrt{2}}{7}$ ។

តាមរូបមន្តយើងបាន $V_n=V_0\times q^n=\frac{\sqrt{2}}{7}.\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ដូចនេះ $\boxed{U_n=\frac{\sqrt{2}}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{3-\sqrt{2}}{7}\sin\frac{n\pi}{4}+\frac{4+\sqrt{2}}{7}\cos\frac{n\pi}{4}\right)}$ ។

លំហាត់ទី៥១

ក. ចំពោះ $x \geq -1$ និង $n \in IN^*$ ចូរស្រាយថា $(1+x)^n \geq 1+nx$ ។

ខ. ចូរប្រៀបធៀបចំនួន $2006^{2007} + 2007^{2007}$ និង 2008^{2007} ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $(1+x)^n \geq 1+nx$

យើងតាង $f(x) = (1+x)^n - (1+nx)$ ចំពោះ $x \geq -1$ និង $n \in IN^*$

យើងបាន $f'(x) = n(1+x)^{n-1} - n$

$$= n[\ (1+x)^{n-1} - 1\ ]$$

$$= n\,x[\,(1+x)^{n-2} + (1+x)^{n-3} + \dots + 1\ ]$$

ដោយ $x \geq -1$ នោះ $(1+x)^{n-2} + (1+x)^{n-3} + \dots\dots + 1 > 0$ ។

តារាងអថេរភាព

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$			
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

តាមតារាងអថេរភាពខាងលើយើងបាន $\forall x \geq -1 : f(x) \geq 0$ ។

ដូចនេះ $\boxed{(1+x)^n \geq 1+nx}$ ។

ខ.ប្រៀបធៀបចំនួន $2006^{2007} + 2007^{2007}$ និង 2008^{2007}

ចំពោះ $x \geq -1$ និង $n \in IN^*$ យើងមាន $(1+x)^n \geq 1+nx$

យក $n = 2007$, $x = \frac{1}{2007}$ នោះ $(1+\frac{1}{2007})^{2007} \geq 1+2007.\frac{1}{2007} = 2$

ឬ $2008^{2007} \geq 2.2007^{2007} > 2006^{2007} + 2007^{2007}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{2006^{2007} + 2007^{2007} < 2008^{2007}}$ ។

លំហាត់ទី៥២

គេឱ្យស្វ៊ីត $S_n=\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$ ដែល $n\in IN^*$ ។

ក-ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ ចូរបង្ហាញថា $S_n=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ ។

ខ-គណនាផលបូក $\Sigma_n=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+.....+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$

ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថា $S_n=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

យើងមាន $S_n=\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$ (ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$)

$$=\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+n^2+2n+1+n^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+2n(n+1)+1}{n^2(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{[n(n+1)+1]^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$=\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}$ ។

ខ-គណនាផលបូក :

គេបាន $\Sigma_n=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+.....+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sum_{k=1}^{n}(S_k)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=n+1-\frac{1}{n+1}=\frac{(n+1)^2-1}{n(n+1)}=\frac{n(n+2)}{n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{\Sigma_n=\frac{n(n+2)}{n+1}}$ ។

លំហាត់ទី៥៣

គេឱ្យស៊ីត $U_n = \frac{4n^2+1}{4n^2-1}$ ដែល $n \in IN^*$ ។

ក-ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ចូរបង្ហាញថា $U_n = 1 + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$

ខ-ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n}(U_k) = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថា $U_n = 1 + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$

គេមាន $U_n = \frac{4n^2+1}{4n^2-1}$ (ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$)

$$= \frac{(4n^2-1)+2}{4n^2-1} = 1 + \frac{2}{4n^2-1}$$

$$= 1 + \frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n+1)(2n-1)} = 1 + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{U_n = 1 + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}}$ ។

ខ-គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n}(U_k) = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$

$$= (1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + (1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + (1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}) + ... + (1 + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$$

$$= n + 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n^2+3n+1-1}{2n+1} = \frac{n(2n+3)}{2n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \frac{n(2n+3)}{2n+1}}$ ។

លំហាត់ទី៥៤

គេឱ្យស៊ីត $U_n = \sqrt{1+\frac{1}{(n+\frac{1}{3})^2}+\frac{1}{(n-\frac{2}{3})^2}}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n}(U_k) = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n}(U_k) = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$

គេមាន $U_n = \sqrt{1+\frac{1}{(n+\frac{1}{3})^2}+\frac{1}{(n-\frac{2}{3})^2}}$

$$= \sqrt{1+\frac{9}{(3n+1)^2}+\frac{9}{(3n-2)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(3n-2)^2(3n+1)^2+9(3n-2)^2+9(3n+1)^2}}{(3n+1)(3n-2)}$$

$$= \frac{\sqrt{(9n^2+3n-6n-2)^2+9[9n^2-12n+4+9n^2+6n+1]}}{(3n+1)(3n-2)}$$

$$= \frac{\sqrt{(9n^2-3n-2)^2+9[18n^2-6n+5]}}{(3n+1)(3n-2)}$$

$$= \frac{\sqrt{(9n^2-3n-2)^2+9[2(9n^2-3n-2)+9]}}{(3n+1)(3n-2)}$$

$$= \frac{\sqrt{(9n^2-3n-2)^2+18(9n^2-3n-2)+81}}{(3n+1)(3n-2)} = \frac{\sqrt{[(9n^2-3n-2)+9]^2}}{(3n+1)(3n-2)}$$

$$= \frac{(9n^2-3n-2)+9}{(3n+1)(3n-2)} = \frac{(3n+1)(3n-2)+3[(3n+1)-(3n-2)]}{(3n+1)(3n-2)}$$

$$= 1+\frac{3}{3n-2}-\frac{3}{3n+1}$$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}[1+\frac{3}{3k-2}-\frac{3}{3k+1}] = n+3-\frac{3}{3n+1} = \frac{3n^2+10n}{3n+1}$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \frac{n(3n+10)}{3n+1}}$ ។

លំហាត់ទី៥៥

គេឱ្យ $(U_n)_{n\in IN^*}$ ជាស៊្វីតនព្វន្តមួយដែលមានតួទាំងអស់វិជ្ជមាននិងផលសងរួម $d>0$ ។

គេតាង $S_n=\sqrt{\frac{1}{d^2}+\frac{1}{U_n^2}+\frac{1}{U_{n+1}^2}}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $S_1+S_2+S_3+...+S_n=\frac{n}{d}+\frac{1}{U_1}-\frac{1}{U_{n+1}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $S_1+S_2+S_3+...+S_n=\frac{n}{d}+\frac{1}{U_1}-\frac{1}{U_{n+1}}$

យើងមាន $S_n=\sqrt{\frac{1}{d^2}+\frac{1}{U_n^2}+\frac{1}{U_{n+1}^2}}$

ដោយ $(U_n)_{n\in IN^*}$ ជាស៊្វីតនព្វន្តមួយដែលមានផលសងរួម $d>0$ នោះ $U_{n+1}=U_n+d$

យើងមាន $S_n=\sqrt{\frac{1}{d^2}+\frac{1}{U_n^2}+\frac{1}{(U_n+d)^2}}$

$$=\sqrt{\frac{U_n^2(U_n+d)^2+d^2[(U_n+d)^2+U_n^2]}{d^2.U_n^2.(U_n+d)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{U_n^2(U_n+d)^2+d^2[U_n^2+2U_nd+d^2+U_n^2]}}{d.U_n(U_n+d)}$$

$$=\frac{\sqrt{U_n^2(U_n+d)^2+2U_n(U_n+d).d^2+d^4}}{d.U_n(U_n+d)}$$

$$=\frac{\sqrt{[U_n(U_n+d)+d^2]^2}}{d\,U_n(U_n+d)}=\frac{U_n(U_n+d)+d^2}{d.U_n(U_n+d)}=\frac{1}{d}+\frac{d}{U_n(U_n+d)}$$

$$=\frac{1}{d}+\frac{(U_n+d)-U_n}{U_n(U_n+d)}=\frac{1}{d}+\frac{1}{U_n}-\frac{1}{U_n+d}=\frac{1}{d}+\frac{1}{U_n}-\frac{1}{U_{n+1}}$$

យើងបាន $S_1+S_2+...+S_n=\sum_{k=1}^{n}(S_k)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{U_n}-\frac{1}{U_{n+1}}\right)=\frac{n}{d}+\frac{1}{U_1}-\frac{1}{U_{n+1}}$

ដូចនេះ $\boxed{S_1+S_2+S_3+...+S_n=\frac{n}{d}+\frac{1}{U_1}-\frac{1}{U_{n+1}}}$

លំហាត់ទី៥៦

គេឱ្យស៊្វីតនៃចំនួនពិត (x_n) កំនត់ដោយ $x_1 = 1$ និង $x_{n+1} - x_n = \dfrac{2}{x_n + \sqrt{2n+1}}$

ក-ចូរស្រាយថាចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ គេមាន $x_n = \sqrt{2n-1}$ ។

ខ-គណនា $S_n = \dfrac{1}{x_1 + \sqrt{3}} + \dfrac{1}{x_2 + \sqrt{5}} + ... + \dfrac{1}{x_n + \sqrt{2n+1}}$ ។

គ. ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \right]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$: $x_n = \sqrt{2n-1}$

គេមាន $x_1 = 1 = \sqrt{2.1-1}$ ពិត

បើ $n = 1$ នោះ $x_2 - x_1 = \dfrac{2}{x_1 + \sqrt{3}}$ នាំឱ្យ $x_2 = 1 + \dfrac{2}{1+\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3}$

គេបាន $x_2 = \sqrt{3} = \sqrt{2.2-1}$ ពិត ។

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $x_k = \sqrt{2k-1}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $x_{k+1} = \sqrt{2(k+1)-1} = \sqrt{2k+1}$

យើងមាន $x_{k+1} - x_k = \dfrac{2}{x_k + \sqrt{2k+1}}$ នាំឱ្យ $x_{k+1} = x_k + \dfrac{2}{x_k + \sqrt{2k+1}}$

ដោយ $x_k = \sqrt{2k-1}$ នោះ $x_{k+1} = \sqrt{2k-1} + \dfrac{2}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}}$

$$= \sqrt{2k-1} + \frac{2(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1})}{(2k+1) - (2k-1)}$$

$$= \sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}$$

$x_{k+1} = \sqrt{2k+1}$ ពិត ។

ដូចនេះ $\boxed{x_n = \sqrt{2n-1}}$ ។

ខ-គណនា $S_n = \dfrac{1}{x_1+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{x_2+\sqrt{5}} + ... + \dfrac{1}{x_n+\sqrt{2n+1}}$

យើងបាន $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_k+\sqrt{2k+1}}\right)$ ដោយ $x_{n+1} - x_n = \dfrac{2}{x_n+\sqrt{2n+1}}$

គេទាញ $\dfrac{1}{x_n+\sqrt{2n+1}} = \dfrac{1}{2}(x_{n+1} - x_n)$

គេបាន $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2}(x_{k+1} - x_k)\right] = \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_1)$

ដោយ $x_1 = 1$ ហើយ $x_n = \sqrt{2n-1}$ នោះ $x_{n+1} = \sqrt{2n+1}$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \dfrac{1}{2}(\sqrt{2n+1} - 1)}$ ។

គ. ទាញរកលីមីត $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right]$

យើងបាន $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2n+1}-1}{\sqrt{n}}\right]$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ ។

លំហាត់ទី៥៧

ចូរប្រៀបធៀបចំនួន 2007^{2007} និង $(2007!)^2$

ដំណោះស្រាយ

ប្រៀបធៀបចំនួន 2007^{2007} និង $(2007!)^2$

តាង $A=(2007!)^2=(1.2.3.........2006.2007)^2$

$=1^2.2^2.3^2.............2006^2.2007^2$

$=(1.2)(2.3)(3.4).(4.5)....(2005.2006).(2006.2007).2007$

គេបាន $\frac{2007}{A}=\frac{1}{1.2}.\frac{1}{2.3}.\frac{1}{3.4}.\frac{1}{4.5}.....\frac{1}{2005.2006}.\frac{1}{2006.2007}$

គេមាន $\frac{1}{1.2}=1-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$------$

$\frac{1}{2005.2006}=\frac{1}{2005}-\frac{1}{2006}$

$\frac{1}{2006.2007}=\frac{1}{2006}-\frac{1}{2007}$

គេបាន $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{2006.2007}=1-\frac{1}{2007}=\frac{2006}{2007}$

តាមវិសមភាពកូស៊ី $a_1+a_2+...+a_n\geq n\sqrt[n]{a_1.a_2.....a_n}$, $\forall a_k>0$

យើងបាន $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{2006.2007}>2006\sqrt[2006]{\frac{1}{1.2}.\frac{1}{2.3}.\frac{1}{3.4}.....\frac{1}{2006.2007}}$

ឬ $\frac{2006}{2007}>2006\sqrt[2006]{\frac{2007}{A}}$

គេទាញ $\sqrt[2006]{\frac{2007}{A}}<\frac{1}{2007}$ ឬ $\frac{2007}{A}<\frac{1}{2007^{2006}}$ នាំឱ្យ $A>2007^{2007}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{2007^{2007}<(2007!)^2}$ ។

លំហាត់ទី៥៨

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=(x+1).e^{2x}$ ដែល x ជាចំនួនពិត ។

ក. ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$,$f''(x)$,$f'''(x)$ និង $f^{(4)}(x)$ ។

ខ. ចូរបង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f មានទម្រង់ $f^{(n)}(x)=(a_n x+b_n).e^{2x}$

ដែល (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n \\ b_{n+1}=a_n+2b_n \quad ,\forall n\in IN^* \end{cases}$$

គ. ចូរកំនត់ a_n និង b_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកកន្សោម $f^{(n)}(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាដេរីវេ $f'(x)$,$f''(x)$,$f'''(x)$ និង $f^{(4)}(x)$

គេមាន $f(x)=(x+1).e^{2x}$

$$f'(x)=(x+1)'e^{2x}+(e^{2x})'(x+1)$$

$$=e^{2x}+2e^{2x}(x+1)=e^{2x}(1+2x+2)=(2x+3)e^{2x}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=(2x+3)e^{2x}}$

គេបាន $f''(x)=(2x+3)'e^{2x}+(e^{2x})'(2x+3)$

$$=2e^{2x}+2e^{2x}(2x+3)=e^{2x}(2+4x+6)=(4x+8)e^{2x}$$

ដូចនេះ $\boxed{f''(x)=(4x+8)e^{2x}}$

គេបាន $f'''(x)=(4x+8)'e^{2x}+(e^{2x})'(4x+8)$

$$=4e^{2x}+2e^{2x}(4x+8)=e^{2x}(4+8x+16)=(8x+20).e^{2x}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'''(x)=(8x+20)e^{2x}}$

គេបាន $f^{(4)}(x)=(8x+20)'e^{2x}+(e^{2x})'(8x+20)$

$$= 8e^{2x} + 2e^{2x}(8x+20) = e^{2x}(8+16x+40) = (16x+48)e^{2x}$$

ដូចនេះ $\boxed{f^{(4)}(x) = (16x+48)e^{2x}}$ ។

ខ.បង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f មានទម្រង់ $f^{(n)}(x) = (a_n x + b_n).e^{2x}$

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន ៖

$f'(x) = (2x+3)e^{2x} = (a_1 x + b_1)e^{2x}$ ដែល $a_1 = 2$, $b_1 = 3$

$f''(x) = (4x+8)e^{2x} = (a_2 x + b_2)e^{2x}$ ដែល $a_2 = 4$, $b_2 = 8$

$f'''(x) = (8x+20)e^{2x} = (a_3 x + b_3)e^{2x}$ ដែល $a_3 = 8$, $b_3 = 20$

$f^{(4)}(x) = (16x+48)e^{2x} = (a_4 x + b_4)e^{2x}$ ដែល $a_4 = 16$, $b_4 = 48$

....

ឧបមាថាវាពិតដល់ដេរីវេលំដាប់ទី n គឺ ៖ $f^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{2x}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយឱ្យឃើញថាវាពិតដល់ដេរីវេលំដាប់ទី $(n+1)$ គឺ ៖

$f^{(n+1)}(x) = (a_{n+1} x + b_{n+1})e^{2x}$

យើងមាន $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$ ដោយ $f^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{2x}$

គេបាន $f^{(n+1)}(x) = (a_n x + b_n)'e^{2x} + (e^{2x})'(a_n x + b_n)$

$f^{(n+1)}(x) = a_n e^{2x} + 2e^{2x}(a_n x + b_n)$

$f^{(n+1)}(x) = e^{2x}(a_n + 2a_n x + 2b_n)$

$f^{(n+1)}(x) = (2a_n x + a_n + 2b_n)e^{2x}$

គេទាញ $f^{(n+1)}(x) = (a_{n+1} x + b_{n+1})e^{2x}$ ពិត ដែល $a_{n+1} = 2a_n$ និង $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ ។

ដូចនេះ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f មានទម្រង់ $f^{(n)}(x) = (a_n x + b_n).e^{2x}$ ដែល (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $a_{n+1} = 2a_n$ និង $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ ។

គ.កំនត់ a_n និង b_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $a_{n+1} = 2a_n$ និង $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

តាមទំនាក់ទំនង $a_{n+1} = 2a_n$ នាំឱ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$ និងតួ $a_1 = 2$

តាមរូបមន្ត $a_n = a_1.q^{n-1} = 2.2^{n-1} = 2^n$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $b_{n+1} = a_n + 2b_n$

នាំឱ្យគេទាញ $b_{n+1} - 2b_n = a_n = 2^n$ ឬ $\frac{1}{2^n}b_{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}}b_n = 1$ បើគេតាង

$c_n = \frac{1}{2^{n-1}}b_n$

គេបាន $c_{n+1} - c_n = 1$ ថេរ នាំឱ្យ (c_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d = 2$ និងតួ

$c_1 = b_1 = 3$

តាមរូបមន្ត $c_n = c_1 + (n-1)d = 3 + 2(n-1) = 2n+1$

ដោយ $c_n = \frac{1}{2^{n-1}}b_n$ នាំឱ្យ $b_n = 2^{n-1}.c_n = (2n+1).2^{n-1}$

ដូចនេះ $\boxed{a_n = 2^n \quad , b_n = (2n+1).2^{n-1}}$ ។

ទាញរកកន្សោម $f^{(n)}(x)$ ៖

គេមាន $f^{(n)}(x) = (a_n x + b_n).e^{2x}$ ដោយ $a_n = 2^n$ និង $b_n = (2n+1)2^{n-1}$

គេបាន $f^{(n)}(x) = [2^n x + (2n+1)2^{n-1}].e^{2x} = 2^n(x + \frac{2n+1}{2}).e^{2x}$

ដូចនេះ $\boxed{f^{(n)}(x) = 2^n(x + \frac{2n+1}{2}).e^{2x}}$ ។

☞🕮🕮🕮☜

លំហាត់ទី៥៩

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=e^{x}.\sin x$

ក. ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)\ ,f''(x)\ ,f'''(x)$ និង $f^{(4)}(x)$ ។

ខ. ចូរបង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f មានទម្រង់ $f^{(n)}(x)=(a_n\sin x+b_n\cos x).e^{x}$

ដែល (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $\begin{cases} a_{n+1}=a_n-b_n \\ b_{n+1}=a_n+b_n \end{cases}\ ,\forall n\in IN^*$

គ. គេតាង $z_n=a_n+i.b_n$ ។

ចូរបង្ហាញថា $z_{n+1}=(1+i).z_n$ រួចសរសេរ z_n ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ឃ. ចូរកំនត់ a_n និង b_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកកន្សោម $f^{(n)}(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាដេរីវេ $f'(x)\ ,f''(x)\ ,f'''(x)$ និង $f^{(4)}(x)$

គេមាន $f(x)=e^{x}.\sin x$

គេបាន $f'(x)=(e^{x})'\sin x+(\sin x)'e^{x}$

$$=e^{x}\sin x+\cos x.e^{x}=e^{x}(\sin x+\cos x)$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=e^{x}(\sin x+\cos x)}$ ។

គេបាន $f''(x)=(e^{x})'(\sin x+\cos x)+(\sin x+\cos x)'e^{x}$

$$=e^{x}(\sin x+\cos x)+(\cos x-\sin x)e^{x}$$

$$=e^{x}(\sin x+\cos x+\cos x-\sin x)=2e^{x}\cos x$$

ដូចនេះ $\boxed{f''(x)=2e^{x}\cos x}$ ។

គេបាន $f'''(x)=2(e^{x})'\cos x+2(\cos x)'e^{x}$

$$=2e^{x}\cos x-2\sin x.e^{x}=2e^{x}(\cos x-\sin x)$$

ដូចនេះ $\boxed{f'''(x) = 2e^x(\cos x - \sin x)}$ ។

គេបាន $f^{(4)}(x) = 2(e^x)'(\cos x - \sin x) + 2(\cos x - \sin x)'e^x$

$$= 2e^x(\cos x - \sin x) + 2(-\sin x - \cos x)e^x$$

$$= 2e^x(\cos x - \sin x - \sin x - \cos x) = -4e^x \sin x$$

ដូចនេះ $\boxed{f^{(4)}(x) = -4e^x \sin x}$ ។

ខ. បង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f មានទម្រង់ $f^{(n)}(x) = (a_n \sin x + b_n \cos x).e^x$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន :

$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)e^x = (a_1 \sin x + b_1 \cos x)e^x$

ដែល $\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 1 \end{cases}$

$f''(x) = 2e^x \cos x = (0.\sin x + 2\cos x)e^x = (a_2 \sin x + b_2 \cos x)e^x$

ដែល $\begin{cases} a_2 = 0 \\ b_2 = 2 \end{cases}$

$f'''(x) = 2e^x(\cos x - \sin x) = (-2\sin x + 2\cos x)e^x = (a_3 \sin x + b_3 \cos x)e^x$

ដែល $\begin{cases} a_3 = -2 \\ b_3 = 2 \end{cases}$

$f^{(4)}(x) = -4e^x \sin x = (-4\sin x + 0.\cos x)e^x = (a_4 \sin x + b_4 \cos x)e^x$

ដែល $\begin{cases} a_4 = -4 \\ b_4 = 0 \end{cases}$

....

ឧបមាថាវាពិតដល់ដេរីវេលំដាប់ទី n គឺ $f^{(n)}(x) = (a_n \sin x + b_n \cos x).e^x$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ដេរីវេលំដាប់ទី $(n+1)$ គឺ

$f^{(n+1)}(x) = (a_{n+1} \sin x + b_{n+1} \cos x)e^x$

យើងមាន $f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)}(x))'$

$$=(a_n\sin x+b_n\cos x)'e^x+(e^x)'(a_n\sin x+b_n\cos x)$$

$$f^{(n+1)}(x)=(a_n\cos x-b_n\sin x)e^x+e^x(a_n\sin x+b_n\cos x)$$
$$=(a_n\cos x-b_n\sin x+a_n\sin x+b_n\cos x)e^x$$
$$=\left[(a_n-b_n)\sin x+(a_n+b_n)\cos x\right].e^x$$

$f^{(n+1)}(x)=(a_{n+1}\sin x+b_{n+1}\cos x).e^x$ ពិត

(ព្រោះ $a_{n+1}=a_n-b_n$ និង $b_{n+1}=a_n+b_n$)

ដូចនេះ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f មានទម្រង់ $f^{(n)}(x)=(a_n\sin x+b_n\cos x).e^x$

ដែល (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $\begin{cases}a_{n+1}=a_n-b_n\\ b_{n+1}=a_n+b_n\quad,\forall n\in IN^*\end{cases}$

គ. បង្ហាញថា $z_{n+1}=(1+i).z_n$

គេមាន $z_n=a_n+i.b_n$ នាំឱ្យ $z_{n+1}=a_{n+1}+i.b_{n+1}$

ដោយ $\begin{cases}a_{n+1}=a_n-b_n\\ b_{n+1}=a_n+b_n\quad,\forall n\in IN^*\end{cases}$

គេបាន $z_{n+1}=(a_n-b_n)+i.(a_n+b_n)$
$$=a_n-b_n+i.a_n+i.b_n$$
$$=(1+i)a_n-(1-i)b_n$$
$$=(1+i)(a_n-\frac{1-i}{1+i}b_n)$$
$$=(1+i)(a_n+i.b_n)=(1+i)z_n$$

ដូចនេះ $\boxed{z_{n+1}=(1+i)z_n}$ ។

សរសេរ z_n ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ :

ដោយគេមាន $z_{n+1}=(1+i).z_n$ នាំឱ្យ (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចដែលមានរេសុង

$q=1+i=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i.\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})$ និងតួ $z_1=a_1+ib_1$

តែ $a_1=1, b_1=1$ នាំឱ្យ $z_1=1+i=q=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})$ ។

តាមរូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រគេអាចសរសេរ :

$$z_n=z_1\times q^{n-1}=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4}).\left[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})\right]^{n-1}$$

$$=(\sqrt{2})^n(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})^n$$

ដូចនេះ $\boxed{z_n=\sqrt{2^n}(\cos\frac{n\pi}{4}+i.\sin\frac{n\pi}{4})}$ (តាមរូបមន្តដឺម័រ) ។

ឃ. កំនត់ a_n និង b_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $z_n=a_n+i.b_n$ ដោយ $z_n=\sqrt{2^n}(\cos\frac{n\pi}{4}+i.\sin\frac{n\pi}{4})$

គេទាញ $a_n+i.b_n=\sqrt{2^n}(\cos\frac{n\pi}{4}+i.\sin\frac{n\pi}{4})$ នាំឱ្យ $\begin{cases} a_n=\sqrt{2^n}.\cos\frac{n\pi}{4} \\ b_n=\sqrt{2^n}.\sin\frac{n\pi}{4} \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a_n=\sqrt{2^n}.\cos\frac{n\pi}{4}\ ,b_n=\sqrt{2^n}.\sin\frac{n\pi}{4}}$ ។

ទាញរកកន្សោម $f^{(n)}(x)$:

គេមាន $f^{(n)}(x)=(a_n\sin x+b_n\cos x)e^x$

ដោយ $a_n=\sqrt{2^n}.\cos\frac{n\pi}{4}\ ,b_n=\sqrt{2^n}.\sin\frac{n\pi}{4}$

គេបាន $f^{(n)}(x)=(\sqrt{2^n}.\cos\frac{n\pi}{4}.\sin x+\sqrt{2^n}\cos x.\sin\frac{n\pi}{4}).e^x$

$$=\sqrt{2^n}(\cos\frac{n\pi}{4}\sin x+\sin\frac{n\pi}{4}\cos x).e^x=\sqrt{2^n}.\sin(x+\frac{n\pi}{2}).e^x$$

ដូចនេះ $\boxed{f^{(n)}(x)=\sqrt{2^n}.e^x\sin(x+\frac{n\pi}{4})}$ ។

លំហាត់ទី៦០

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, $-1<x<1$

ក. ចំពោះគ្រប់ $a,b\in]-1,1[$ ចូរបង្ហាញថា $f(a)+f(b)=f(\frac{a+b}{1+ab})$

ខ. ចូរគណនា $S_n=f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{3})+f(\frac{1}{4})+......+f(\frac{1}{n})$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថា $f(a)+f(b)=f(\frac{a+b}{1+ab})$

យើងបាន $f(a)+f(b)=\ln(\frac{1-a}{1+a})+\ln(\frac{1-b}{1+b})$

$$=\ln\left[\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}\right]=\ln\left(\frac{1-(a+b)+ab}{1+(a+b)+ab}\right)$$

$$=\ln[\frac{(1+ab)-(a+b)}{(1+ab)+(a+b)}]==\ln(\frac{1-\frac{a+b}{1+ab}}{1+\frac{a+b}{1+ab}})=f(\frac{a+b}{1+ab})$$

ដូចនេះ $\boxed{f(a)+f(b)=f(\frac{a+b}{1+ab})}$ ។

ខ. គណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n

$$S_n=f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{3})+f(\frac{1}{4})+......+f(\frac{1}{n})=\sum_{k=1}^{n}\left[f(\frac{1}{k})\right]$$

$$=\sum_{k=2}^{n}[\ln(\frac{1-\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}})]=\sum_{k=2}^{n}[\ln(\frac{k-1}{k+1})]$$

$$=\ln(\frac{1}{3})+\ln(\frac{2}{4})+\ln(\frac{3}{5})+\ln(\frac{4}{6})+...+\ln(\frac{n-3}{n-1})+\ln(\frac{n-2}{n})+\ln(\frac{n-1}{n+1})$$

$$=\ln\left(\frac{1}{3}.\frac{2}{4}.\frac{3}{5}.\frac{4}{3}....\frac{n-3}{n-1}.\frac{n-2}{n}.\frac{n-1}{n+1}\right)=\ln\left(\frac{2}{n(n+1)}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n=f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{3})+f(\frac{1}{4})+......+f(\frac{1}{n})=\ln\left(\frac{2}{n(n+1)}\right)}$ ។

លំហាត់ទី៦១

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$, $x\neq -1$

ចូរគណនា $F_n(x)=f\big[\ f\ [.....f\ [f(x)].....]\ \big]$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $F_n(x)=f\big[\ f\ [.....f\ [f(x)].....]\ \big]$

យើងមាន $F_1(x)=f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

$$F_2(x)=f\left[f(x)\right]=f\left[F_1(x)\right]$$

$$F_3(x)=f\left[f\left[f(x)\right]\right]=f\left[F_2(x)\right]$$

$$----------------$$

$$F_n(x)=f\left[F_{n-1}(x)\right]=\frac{F_{n-1}(x)}{\sqrt[3]{1+F_{n-1}^3(x)}}$$

យើងបាន $F_n^3(x)=\frac{F_{n-1}^3(x)}{1+F_{n-1}^3(x)}$ នាំឱ្យ $\frac{1}{F_n^3(x)}=\frac{1+F_{n-1}^3(x)}{F_{n-1}^3(x)}=\frac{1}{F_{n-1}^3(x)}+1$

គេទាញ $\frac{1}{F_n^3(x)}-\frac{1}{F_{n-1}^3(x)}=1$ ថេរ នាំឱ្យគេទាញបានថា $\left(\frac{1}{F_n^3(x)}\right)$

ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d=1$ និងតួទីមួយ $U_1=\frac{1}{F_1{}^3(x)}=\frac{1+x^3}{x^3}$ ។

តាមរូបមន្ត $U_n=U_1+(n-1).d$ គេបាន $\frac{1}{F_n{}^3(x)}=\frac{1+x^3}{x^3}+n-1=\frac{1+nx^3}{x^3}$

គេទាញ $F_n{}^3(x)=\sqrt[3]{\frac{x^3}{1+nx^3}}=\frac{x}{\sqrt[3]{1+nx^3}}$

ដូចនេះ $\boxed{F_n(x)=f\big[\ f\ [.....f\ [f(x)].....]\ \big]=\frac{x}{\sqrt[3]{1+nx^3}}}$ ។

លំហាត់ទី៦២

គេមានពហុធា $P_n(x)=(x\sin\theta+\cos\theta)^n$, $\theta\in IR$, $n\geq 2$

ចូររកសំណល់នៃវិធីចែករវាងពហុធា $P_n(x)$ និង x^2+1 ។

ដំណោះស្រាយ

រកសំណល់នៃវិធីចែករវាងពហុធា $P_n(x)$ និង x^2+1

តាង $R(x)$ ជាអនុគមន៍សំណល់នៃវិធីចែករវាងពហុធា $P_n(x)$ និង x^2+1

នាំឱ្យអនុគមន៍ $R(x)$ ត្រូវមានដឺក្រេតូចជាងឬស្មើមួយ ។

យក $R(x)=ax+b$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិតត្រូវរកហើយឧបមាថា $Q(x)$ ជាអនុគមន៍

ផលចែក រវាងពហុធា $P_n(x)$ និង x^2+1 នោះគេបានទំនាក់ទំនង :

$$P_n(x)=Q(x).(x^2+1)+R(x)$$

$$(x\sin\theta+\cos\theta)^n=Q(x).(x^2+1)+ax+b$$

យើងជ្រើសរើសយក $x=i$ ដែល $i^2=-1$ យើងបាន :

$$(i.\sin\theta+\cos\theta)^n=Q(i)(i^2+1)+ai+b$$

$$i.\sin(n\theta)+\cos(n\theta)=ai+b$$

ព្រោះ $(i.\sin\theta+\cos\theta)^n=i.\sin(n\theta)+\cos(n\theta)$ (រូបមន្តដឺម័រ)

គេទាញបាន $a=\sin(n\theta)$, $b=\cos(n\theta)$ ។

ដូចនេះ $\boxed{R(x)=x.\sin(n\theta)+\cos(n\theta)}$ ។

លំហាត់ទី៦៣

គេឲ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត $(U_n)_{n\in IN}$ ដោយ $U_{n+1}=\frac{7U_n^3-9U_n^2+3U_n}{6U_n^3-6U_n^2+1}$ និង $U_1=2$

ក_គេតាង $V_n=\frac{U_n-1}{2U_n-1}\ ,\forall n\in IN^*$ ។ ចូរបង្ហាញថា $V_{n+1}=V_n^3$

ខ_គេយក $W_n=\ln V_n\ ,\forall n\in IN^*$ ។ ចូរបង្ហាញថា $(W_n)_{,n\in IN}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា W_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ_ចូរទាញរក V_n និង U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចគណនា $\lim_{n\to+\infty}U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក_ បង្ហាញថា ៖ $V_{n+1}=V_n^3$

យើងមាន $V_n=\frac{U_n-1}{2U_n-1}\ ,\forall n\in IN^*$

យើងបាន $V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-1}{2U_{n+1}-1}$ ដោយ $U_{n+1}=\frac{7U_n^3-9U_n^2+3U_n}{6U_n^3-6U_n^2+1}$

$$V_{n+1}=\frac{\frac{7U_n^3-9U_n^2+3U_n}{6U_n^3-6U_n^2+1}-1}{2\left(\frac{7U_n^3-9U_n^2+3U_n}{6U_n^3-6U_n^2+1}\right)-1}$$

$$V_{n+1}=\frac{7U_n^3-9U_n^2+3U_n-6U_n^3+6U_n^2-1}{14U_n^3-18U_n^2+6U_n-6U_n^3+6U_n^2-1}$$

$$V_{n+1}=\frac{U_n^3-3U_n^2+3U_n-1}{8U_n^3-12U_n^2+6U_n-1}=\frac{(U_n-1)^3}{(2U_n-1)^3}=\left(\frac{U_n-1}{2U_n-1}\right)^3$$

ដូចនេះ $V_{n+1}=V_n^3$ ។

ខ_បង្ហាញថា $(W_n)_{,n\in IN}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ៖

យើងមាន $W_n=\ln V_n$ នាំឲ្យ $W_{n+1}=\ln V_{n+1}$ ដោយ $V_{n+1}=V_n^3$

យើងបាន $W_{n+1}=\ln V_n^3=3\ln V_n=3W_n$

ដូចនេះ $(W_n)_{,n\in IN}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុង $q=3$ ។

_គណនា W_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

តាមរូបមន្ត $W_n = W_1 \times q^{n-1}$

ដោយ $W_1 = \ln V_1 = \ln\left(\frac{U_1 - 1}{2U_1 - 1}\right) = \ln(\frac{2-1}{4-1}) = \ln(\frac{1}{3})$ និង $q = 3$

យើងបាន $W_n = \ln(\frac{1}{3}) \times (3)^n = 3^n \ln(\frac{1}{3})$ ។

គ_ទាញរក V_n និង U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $W_n = \ln V_n$ ដោយ $W_n = 3^n \ln(\frac{1}{3})$

យើងបាន $\ln V_n = 3^n \ln(\frac{1}{3})$ នាំឲ្យ $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{3^n}$

ម្យ៉ាងទៀត $V_n = \frac{U_n - 1}{2U_n - 1}$ នាំឲ្យ $U_n = \frac{1 - V_n}{1 - 2V_n} = \frac{1 - (\frac{1}{3})^{3^n}}{1 - 2(\frac{1}{3})^{3^n}} = \frac{3^{3^n} - 1}{3^{3^n} - 2}$

ដូចនេះ $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{3^n}$ និង $U_n = \frac{3^{3^n} - 1}{3^{3^n} - 2}$ ។

_គណនាលីមីត ៖ $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

យើងមាន $U_n = \frac{3^{3^n} - 1}{3^{3^n} - 2}$

យើងបាន $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{3^{3^n} - 1}{3^{3^n} - 2}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{3^{3^n}}}{1 - \frac{2}{3^{3^n}}} = 1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$ ។

✍📖📖📖📖✍

លំហាត់ទី៦៤

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំនត់ក្នុងសំណុំ IR ដោយ $f(x)=\dfrac{x^3}{3(x^2+3x+3)}$

ក_គេពិនិត្យស្វ៊ីត (U_n) កំនត់ដោយ $U_{n+1}=f(U_n)$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $1+\dfrac{3}{U_{n+1}}=\left(1+\dfrac{3}{U_n}\right)^3$ ។

ខ_គេតាង $F_n(x)=f_n[f\ [......f[f(x)]......]]$ (អនុគមន៍បណ្ដាក់លំដាប់ n)

ចូរគណនា $F_n(x)$ ។

គ_គេសន្មតថា $U_1=\dfrac{3}{7}$ និង $V_n=\ln(3+U_n)-\ln U_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ ។

ចូរបង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា V_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ឃ_ទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចបញ្ជាក់តម្លៃ $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក_ស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $1+\dfrac{3}{U_{n+1}}=\left(1+\dfrac{3}{U_n}\right)^3$

យើងមាន $U_{n+1}=f(U_n)$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x^3}{3(x^2+3x+3)}$

យើងបាន $U_{n+1}=\dfrac{U_n{}^3}{3(U_n{}^2+3U_n+3)}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $U_{n+1}+3=\dfrac{U_n{}^3}{3(U_n{}^2+3U_n+3)}+3$

$$U_{n+1}+3=\frac{U_n{}^3+9U_n{}^2+27U_n+27}{3(U_n{}^2+3U_n+3)}$$

$$U_{n+1}+3=\frac{(U_n+3)^3}{3(U_n{}^2+3U_n+3)} \quad (2)$$

ចែកទំនាក់ទំនង (2) និង (1) អង្គនិងអង្គយើងបាន ៖

$\dfrac{U_{n+1}+3}{U_{n+1}}=\dfrac{(U_n+3)^3}{U_n{}^3}$ ឬ $1+\dfrac{3}{U_{n+1}}=\left(1+\dfrac{3}{U_n}\right)^3$ ។

ខ_គណនា $F_n(x)$ ៖

យើងមាន $F_n(x) = f_n[f\ [......f[f(x)]......]]$ (អនុគមន៍បណ្ដាក់លំដាប់ n)

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ យើងយក ៖

$$U_1 = f(x) = \frac{x^3}{3(x^2+3x+3)}$$
$$U_2 = f[f(x)] = f(U_1)$$
$$U_3 = f[f[f(x)]] = f(U_2)$$
$$-----------------$$
$$U_n = f[f[........f[f(x)]......]] = f(U_{n-1})$$
$$U_{n+1} = f(U_n) = \frac{U_n{}^3}{3(U_n{}^2+3U_n+3)}$$

ដូចនេះគេទាញ $F_n(x) = f[f[........f[f(x)]........]] = U_n$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $1+\dfrac{3}{U_{n+1}} = \left(1+\dfrac{3}{U_n}\right)^3$

គេបាន $\ln\left(1+\dfrac{3}{U_{n+1}}\right) = 3\ln\left(1+\dfrac{3}{U_n}\right)$ ដោយតាង $T_n = \ln\left(1+\dfrac{3}{U_n}\right)$

គេបាន $T_{n+1} = 3T_n$ នាំឲ្យ (T_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 3$

និងតួ $T_1 = \ln\left(1+\dfrac{3}{U_1}\right) = \ln\left(1+\dfrac{3}{f(x)}\right) = \ln\left(1+\dfrac{9x^2+27x+27}{x^3}\right) = \ln\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^3$

តាមរូបមន្ត $T_n = T_1 \times q^{n-1} = 3^{n-1}.\ln\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^3 = \ln\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{3^n}$

តែ $T_n = \ln\left(1+\dfrac{3}{U_n}\right)$ គេទាញ $1+\dfrac{3}{U_n} = \left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{3^n}$

នាំឲ្យ $U_n = \dfrac{3}{\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{3^n} - 1} = \dfrac{3x^{3^n}}{(x+3)^{3^n} - x^{3^n}}$

ដូចនេះ $\boxed{F_n(x) = f[f[........f[f(x)]........]] = \dfrac{3x^{3^n}}{(x+3)^{3^n} - x^{3^n}}}$ ។

គ_បង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

គេមាន $U_1 = 3$ និង $V_n = \ln(3+U_n) - \ln U_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

យើងបាន $V_n = \ln\left(\frac{3+U_n}{U_n}\right) = \ln\left(1+\frac{3}{U_n}\right)$

នាំឲ្យ $V_{n+1} = \ln\left(1+\frac{3}{U_{n+1}}\right)$ ដោយ $1+\frac{3}{U_{n+1}} = \left(1+\frac{3}{U_n}\right)^3$

គេបាន $V_{n+1} = \ln\left(1+\frac{3}{U_n}\right)^3 = 3\ln\left(1+\frac{3}{U_n}\right) = 3V_n$

ដូចនេះ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 3$

និងតួ $V_1 = \ln\left(1+\frac{3}{U_1}\right) = \ln 8$ ។

_គណនា V_n ជាអនុគមន៏នៃ n ៖

តាមរូបមន្ត $V_n = V_1 \times q^{n-1} = 3^{n-1}.\ln 8 = 3^n \ln 2$ ។

ឃ_ទាញរក U_n ជាអនុគមន៏នៃ n រួចបញ្ជាក់តម្លៃ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ៖

គេមាន $V_n = \ln\left(1+\frac{3}{U_n}\right)$ ដោយ $V_n = 3^n \ln 2 = \ln(2)^{3^n}$

គេទាញ $1+\frac{3}{U_n} = (2)^{3^n}$ នាំឲ្យ $U_n = \frac{3}{2^{3^n}-1}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{U_n = \frac{3}{2^{3^n}-1}}$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ ។

✍✍✍✍✍✍

លំហាត់ទី៦៥

គេឲ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត $U_n=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+....+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}$ មាន n រ៉ាឌីកាល់ ។

ចូរស្រាយថា $U_n<3$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $U_n<3$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$

សម្មតិកម្ម $U_n=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+....+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}$

យើងមាន $U_1=\sqrt{6}<3$ ពិត

$U_2=\sqrt{6+\sqrt{6}}=\sqrt{6+U_1}<\sqrt{6+3}<3$ ពិត ។

សន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $U_k=\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}<3$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $U_{k+1}=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+....+\sqrt{6}}}}<3$

យើងមាន $U_{k+1}=\sqrt{6+U_k}$ ដោយ $U_k<3$ នាំឲ្យ $6+U_k<9$

គេទាញបាន $U_{k+1}=\sqrt{6+U_k}<3$ ពិត ។

ដូចនេះ $U_n<3$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

១_គេឲ្យ $x_0=\sqrt{2}$; $x_1=\sqrt{3}$ និង $x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$ ។

ចូរស្រាយថា $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3}$ ។

២_គេឲ្យ $a_1=7$; $a_2=4$ និង $4a_{n+2}-5a_{n+1}+a_n=0$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ។

ដោយសរសេរទំនាក់ទំនងក្នុងទម្រង់ $a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_{n+1}-a_n)$ ចូរស្រាយថា ៖

$a_{n+1}-a_n=-3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ បន្ទាប់មកគណនា a_n និងបង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=3$ ។

៣_គេឲ្យ $f_n(x)=\frac{x(x+1)(x+2)......(x+n-1)}{n!}$

ក.ដោយធ្វើវិចារតាមកំនើនចូរស្រាយថា ៖

$(i):\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)=f_N(x)-1$

$(ii)\;\; 0<f_N(x)<\frac{1}{\sqrt{2N+1}}$

ខ. ដោយយក $x=-\frac{1}{2}$ ចូរស្រាយថា ៖

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2.4}+\frac{1.3}{2.4.6}+\frac{1.3.5}{2.4.6.8}+.....+\frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6.....(2n+2)}\right]=\frac{1}{2}$$ ។

៤_គេឲ្យស្វីតចំនួនពិត (x_n) និង (y_n) កំនត់ដោយ ៖

$x_1=y_1=1$; $x_{n+1}=x_n+2y_n$ និង $y_{n+1}=x_n+y_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$

ក.ចូរស្រាយថា $\forall n\in IN^*$: $x_n\geq n$; $y_n\geq n$ និង $x_n{}^2-y_n{}^2=(-1)^n$ ។

ខ.ទាញថា $\frac{x_n}{y_n}<\sqrt{2}$ បើ n គូ និង $\frac{x_n}{y_n}>\sqrt{2}$ បើ n សេស ។

បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=\sqrt{2}$ ។

គ.ចូរបង្ហាញថា $\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-\sqrt{2}\right|<\left|\frac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}\right|$ ។

៥_គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}, \forall n \in IN$

ក.បង្ហាញថាស្វ៊ីត $v_n = \ln u_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ.គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ.គណនា $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ និង $P_n = u_0.u_1.u_2.....u_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៦_គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n^{\ 2}} \end{cases}, \forall n \in IN$

ក.បង្ហាញថាស្វ៊ីត $v_n = \ln u_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ.គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ.គណនា $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ និង $P_n = u_0.u_1.u_2.....u_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៧_គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - \dfrac{2}{3} \end{cases}, \forall n \in IN$

ក.បង្ហាញថាស្វ៊ីត $v_n = 2 + u_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ.គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៨_គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}, \forall n \in IN$

ក.កំនត់តម្លៃ k ដើម្បីឲ្យ $v_n = u_n + k$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ.គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និងរក $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ ។

៩_គេមានស្វ៊ីត $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^{\ 2} + 4u_n + 2 \end{cases}, \forall n \in IN$

ក.បង្ហាញថាស្វ៊ីត $v_n = \ln(2 + u_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ.គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ.គណនា $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

និង $P_n = (2+u_0)(2+u_1).....(2+u_n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១០_គេឲ្យស្វ៊ីត $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + 2n + 7 \ , n \in IN \end{cases}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១១_គេឲ្យស្វ៊ីត $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n^2 - 2n + 4 \ , n \in IN \end{cases}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១២_គេឲ្យស្វ៊ីត $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + (3n-1).2^n \ , n \in IN \end{cases}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១៣_គេឲ្យស្វ៊ីត $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \sin\frac{n\pi}{4} \ , n \in IN \end{cases}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១៤_គេឲ្យស្វ៊ីត $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + \sqrt{2}\cos\frac{n\pi}{4} \ , n \in IN \end{cases}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១៥_គេឲ្យស្វ៊ីត $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = {u_n}^2 + 6u_n + 6 \ , n \in IN \end{cases}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១៦_គេមានស្វ៊ីត $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 2}{u_n + 2}, \forall n \in IN \end{cases}$

ក.បង្ហាញថាស្វ៊ីត $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 2}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ.គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១៧_គេឲ្យស៊ីត $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{2(2u_n - 3)}{u_n - 1} \end{cases}$, $n \in IN$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និងរក $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

១៨_គេឲ្យស៊ីត $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n^3 - 6u_n^2 + 12u_n - 6 \end{cases}$, $\forall n \in IN$

ក.ស្រាយថា $v_n = \ln(u_n - 2)$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ.គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១៩_គេឲ្យស៊ីត $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} + u_n = \dfrac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \end{cases}$, $n \in IN$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និងរក $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

២០_គេឲ្យស៊ីត $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$, $n \in IN^*$

ក.ស្រាយថា $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ.គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

២១_គេឲ្យស៊ីត $u_n = \dfrac{3n^2 + 3n + 1}{n^3(n+1)^3}$, $\forall n \in IN^*$

ក. បង្ហាញថា $u_n = \dfrac{1}{n^3} - \dfrac{1}{(n+1)^3}$

ខ. គណនា $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

២២_គេឲ្យស៊ីត $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{3n^2 + 3n + 1}{n^3(n+1)^3} \end{cases}$, $n \in IN^*$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និងរក $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

២៣_គេឲ្យស៊ីត $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^3 - 1}{(n+1)^3 + 1} u_n \end{cases}$, $n \in IN^*$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និងរក $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

២៤_គេឲ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត $\begin{cases} u_0 = 2 \ , \ u_1 = 6 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n \ , \ n \in IN \end{cases}$

ក.គេតាង $x_n = u_{n+1} - 2u_n$ និង $y_n = u_{n+1} - 4u_n$ ។

បង្ហាញថា (x_n) និង (y_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ.គណនា x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ.ទាញរក u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ឃ.កំនត់ n ដើម្បីឲ្យ $u_n = 1049600$ ។

២៥_គេឲ្យស៊ីត $\begin{cases} u_0 = 2 \ , \ u_1 = 4 \\ 3u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0 \ , n \in N \end{cases}$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និងរក $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

២៦_គេឲ្យស៊ីត $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1 + u_n^{\ 2}} \ , \ n \in IN \end{cases}$

ក.បង្ហាញថា $v_n = \ln\left(\dfrac{1-u_n}{1+u_n}\right)$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ.គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

២៧_គេឲ្យស៊ីត $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\ 2}}{2(1+u_n)} \ , \ n \in IN \end{cases}$

ក.បង្ហាញថា $v_n = \ln\left(\dfrac{2+u_n}{u_n}\right)$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ.គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

២៨_គេឲ្យស៊្វីតនៃចំនួនពិត $u_0=3$ និង $\forall n\in IN: u_{n+1}=\dfrac{u_n^2-2}{2u_n-3}$

ក. គេតាង $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n-2}$ ។ បង្ហាញថា $v_{n+1}=v_n^2$ រួចទាញថា $v_n=v_0^{2^n}$

ខ. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ ។

២៩_គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^3-6x+6}{3x^2-9x+7}$

គេពិនិត្យស៊្វីត $u_0=3$, $u_{n+1}=f(u_n)$, $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n-2}$ និង $w_n=\ln v_n$

ក.ចូរស្រាយថា (w_n) ជាស៊្វីតធរណីមាត្រ រួចគណនា w_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ.គណនា v_n រួចទាញរក u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ.គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ ។

៣០_គេមានស៊្វីត $\begin{cases} a_0=2 \\ a_{n+1}=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{a_n-\sqrt{1+4a_n}}{4} \end{cases}$, $n\in IN$

ក.តាង $b_n=1+\sqrt{1+4a_n}$ ។ បង្ហាញថា (b_n) ជាស៊្វីតធរណីមាត្រ ។

គណនា b_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ.គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ ។

៣១_គេឲ្យស៊្វីត (u_n) កំនត់លើ IN^* ដោយ ៖

$u_1=0$, $|u_2|=|1+u_1|$, ..., $\forall n\in IN^*: |u_{n+1}|=|1+u_n|$

ចូរស្រាយថា $\dfrac{u_1+u_2+u_3+.....+u_n}{n}\ge-\dfrac{1}{2}$ ។

៣២_គេឲ្យស៊្វីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{(n+1)^2} \end{cases}$, $\forall n\in IN^*$

ក.បង្ហាញថា $u_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{n^2}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $u_n<2$ ។

៣៣_ចូរស្រាយថា $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+.........+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}<\frac{1}{2}$ ។

៣៤_ចូរស្រាយថា $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{5}).......(1+\frac{2}{n^2+3n})<3$ ។

៣៥_គេឲ្យស្វ៊ីត $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=\frac{n+1}{5n}u_n \ , \ n\in IN^* \end{cases}$

ក.គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ.គណនាផលបូក $S_n=u_1+u_2+....+u_n$ រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty}S_n$ ។

៣៦_គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+9x^2}}$

ដោយធ្វើវិចារតាមកំនើនថា $f_n[f[\ \ f(f(x))\ \ ]\ ]=\frac{x}{\sqrt{1+9nx^2}}$

៣៧_គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^2-2}{2x-3}\ ,\ x\neq\frac{3}{2}$ ។

គណនា $f_n[f[......f[f(x)]......]\ ]$

៣៨_គេឲ្យស្វ៊ីត $\begin{cases} a_0=4 \\ a_{n+1}=(a_n+1)(a_n+4)\ ,\ n\in IN \end{cases}$

ក.គ្រប់ $n\in IN$ ស្រាយថា a_n ចែកដាច់នឹង 4 ។

ខ.ស្រាយថា (a_n) ជាស្វ៊ីតកើនជានិច្ច ។

គ.ស្រាយថា $\left(a_{n+1}+\frac{5}{2}\right)^2>\left(a_n+\frac{5}{2}\right)$ រួចបង្ហាញថា $\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty$ ។

ឃ.តាង $S_n=\frac{1}{a_0+3}+\frac{1}{a_1+3}+\frac{1}{a_2+3}+.........+\frac{1}{a_n+3}$ ។ គណនា $\lim_{n\to+\infty}S_n$

៣៩_គេឲ្យ $p\in IN^*$ និង គ្រប់ $n\in IN^*$ គេមាន $u_n=\frac{(n+1)^p-n^p}{(n^2+n)^p}$ ។

តាង $S_n=u_1+u_2+u_3+........+u_n$ ។

ក. គណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង p ។

ខ. គណនា $\lim_{n\to+\infty}S_n$ ។

៩០_គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} u_0 = 7 \ , \ u_1 = 35 \\ u_{n+2} = 11u_{n+1} - 18u_n \ , \ n \in IN \end{cases}$$

ចូរស្រាយថា u_n ចែកដាច់នឹង 7 ជានិច្ចគ្រប់ $n \in IN$ ។

៩១_គេឲ្យ $u_n = 1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p$ ដែល p ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានសេស ។

ចូរស្រាយថា u_n ចែកដាច់នឹង $\frac{n(n+1)}{2}$ ។

៩២_គេឲ្យសំណុំនៃចំនួនគត់ពីរ ៖

$E_p = \{ u_1 , u_2 , u_3 , ... , u_p \}$ និង $F_q = \{ v_1 , v_2 , v_3 , ... , v_q \}$

ដែល (u_p) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានតួ 2 , 9 , 11 , 18 , 25 , ...

និង (v_q) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានតួ 4 , 9 , 14 , 19 , 24 , ... ។

ក.តើសំណុំ E_{2007} មានធាតុដែលជាការេប្រាកដប៉ុន្មាន និង សំណុំ F_{2007} មានធាតុដែលជាការេប្រាកដប៉ុន្មាន ។

ខ. តើសំណុំ E_{2007} និង F_{2007} មានធាតុស្មើគ្នាប៉ុន្មាន ?

គ. តើសំណុំ E_{2007} មានធាតុចែកដាច់នឹង 3 ប៉ុន្មានធាតុ ?

ឃ. តើសំណុំ F_{2007} មានធាតុចែកដាច់នឹង 3 ប៉ុន្មានធាតុ ?

៩៣_គេឲ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់គ្រប់ $n \in IN^*$ ។

គេមានម៉ាទ្រីសការេ $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$ ។

គេដឹងថាផលគុណនៃធាតុទាំងបីតាមជួរដេកនីមួយៗ ផលគុណនៃធាតុទាំងបីតាមជួរឈរនីមួយៗ និង ផលគុណនៃធាតុទាំងបីតាមអង្កត់ទ្រូងស្មើនឹង m ដូចគ្នា ។

បង្ហាញថា m ជាគូបនៃចំនួនគត់ ។

៩៤_គេឲ្យ $b_n = 1 + a^{2^n}$, $a > 0$, $a \neq 1$ ។ ចូរស្រាយថា $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{\ x} \right)^{\frac{n}{x}} < \frac{1}{1-a}$ ។

៩៥_គេឲ្យស្វ៊ីត $u_n=\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$

ក.កំនត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យ ៖

$$u_n=\frac{A}{(3n-2)(3n+1)}-\frac{B}{(3n+1)(3n+4)}$$

ខ.គណនាផលបូក $S_n=u_1+u_2+u_3+...+u_n$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ។

៩៦_គេឲ្យស្វ៊ីត $u_n=\dfrac{1}{(4n-3)\sqrt{4n+1}+(4n+1)\sqrt{4n-3}}$, $n\in IN$

ក.កំនត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យ ៖

$$u_n=\frac{A}{\sqrt{4n-3}}-\frac{B}{\sqrt{4n+1}}$$

ខ.គណនាផលបូក $S_n=u_1+u_2+u_3+...+u_n$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ។

៩៧_គេឲ្យស្វ៊ីត $a_n=\dfrac{6n-7}{(3n-2)(3n+1)}$, $\forall n\in IN^*$

ក.កំនត់ពីរចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឲ្យ $a_n=\dfrac{A}{3n+1}+\dfrac{B}{3n-2}$ ។

ខ.គណនា $S_n=a_1+3a_2+3^2a_3+.....+3^{n-1}a_n$ ។

៩៨_គេឲ្យស្វ៊ីត $b_n=\dfrac{4n+9}{2^n(4n+1)(4n+5)}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

តាង $S_n=b_0+b_1+b_2+....+b_n$ ។ ចូរគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ។

៩៩_គេឲ្យស្វ៊ីត $t_n=\dfrac{9n^2-3n+2}{9n^2-3n-2}$, $\forall n\in IN^*$

ក.ចូរកំនត់បីចំនួន a , b , c ដើម្បីឲ្យ $t_n=a+\dfrac{b}{3n-2}+\dfrac{c}{3n+1}$

ខ.គណនា $S_n=t_1+t_2+t_3+.....+t_n$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n-n)$ ។

៥០_គេឲ្យស្វ៊ីត $\begin{cases}a_0=2\\ a_{n+1}=\dfrac{a_n{}^2+5a_n+1}{3}\end{cases}$, $\forall n\in IN$

គេតាង $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\dfrac{1}{a_k+4}\right)$ ។ ចូរគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ។

៥១-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់លើចន្លោះ $]0\,,\frac{\pi}{2}[$ ដោយ $f(x)=\tan x$ ។

ក. ដោយប្រើនិយមន័យចូរគណនា $f'(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in]0\,,\frac{\pi}{2}[$ ។

ខ. ឧបមាថា a និង b ជាពីរចំនួនពិតនៃចន្លោះ $]0\,,\frac{\pi}{2}[$ ដែល $a<b$ ។

ចូរស្រាយថា $\forall x\in[a,b]$ គេបាន $\frac{1}{\cos^2 a}\le f'(x)\le\frac{1}{\cos^2 b}$ រួចដោយប្រើវិសមភាព

កំណើនមានកំត់ចូរទាញថា $\frac{b-a}{\cos^2 a}\le \tan b-\tan a\le\frac{b-a}{\cos^2 b}$ ។

គ. ចូររកកន្សោមអមនៃ $S_n=\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{n}}+\frac{1}{\cos^2\frac{2\theta}{n}}+\frac{1}{\cos^2\frac{3\theta}{n}}+\dots+\frac{1}{\cos^2\frac{n\theta}{n}}$

រួចទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ($\theta\in\,]0\,,\frac{\pi}{2}[$) ។

52-គេឱ្យអនុគមន៍ $f_n(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4).....(1+x^{2^n})$

$$g(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x^3}{1+x^4}+......+\frac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$$

ក. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $g(x)=\frac{f'_n(x)}{f_n(x)}$

ខ. ចូរគណនា $f_n(x)$ រួចទាញ $g_n(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ n និង x ។

គ. ចូរគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}g_n(x)$ បើ $|x|<1$ ។

53- ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ គេមានស៊ីត $x_1=1$ និង $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n+\sqrt{n+1}}$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+....+\frac{1}{x_n}>\frac{n}{1+\sqrt{n+1}}$ ។

54-គេឱ្យ $f(n)=4^n+5^n+6^n+7^n+9^n+11^n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $f(5)=12^5$

ខ. ចំពោះគ្រប់ $n>5$ ចូរបង្ហាញថា $f(n)<12^n$ ។

55-ចូរបង្ហាញថា $\sqrt[2007]{4}+\sqrt[2007]{6}+\sqrt[2007]{8}+\sqrt[2007]{9}+\sqrt[2007]{14}>\sqrt[2007]{15}$ ។

56-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $F_n(x)=f_n\left[\, f\left[\, ...f\left[\, f(x)\,\right]....\,\right]\right]=\dfrac{(1+x)^{2^n}-(1-x)^{2^n}}{(1+x)^{2^n}+(1-x)^{2^n}}$

57-ចូរប្រៀបធៀបចំនួន $A=\dfrac{2.468642}{1+(1.234321)^2}$ និង $B=\dfrac{2.468644}{1+(1.234322)^2}$

58-គេមានត្រីធា $f(x)=2007x^2+2006x+1$ ។

ចូរប្រៀបធៀបតម្លៃ $f(\log_{2006}2007)$ និង $f(\log_{2007}2008)$

59-ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ ចូរបង្ហាញថា $(2n)!\geq 2(n!)$ ។

60-ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $123456789^{123456789}<(123456789!)^2$

61-មានស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\in IN^*}$ កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1=-1 \\ u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ $,\forall n\in IN^*$

ក. គេតាង $\forall n\in IN^*: v_n=2u_n+3$ ។

ចូរបង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយដែលគេនឹងបញ្ជាក់រេសុង ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n=v_1+v_2+v_3+....+v_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. ចូរគណនាតួ v_n រួចទាញរក u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

62-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\in IN^*}$ កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1=4 \\ u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n-2(2n+\dfrac{5}{3}) \end{cases}$ $,\forall n\in IN^*$

ក. គេតាង $v_n=\dfrac{1}{2}u_n+3n-2$ ។ ចូរបង្ហាញថាស្វ៊ីត $(v_n)_{n\in IN^*}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n=v_1+v_2+v_3+....+v_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. ចូរគណនាតួ v_n រួចទាញរក u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

63-គេឱ្យស្វ៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $u_1=-1$ $,u_2=1$ និង $\forall n\in IN^*: u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n$ ។

គេតាង $v_n=u_{n+1}-2u_n$ និង $w_n=u_{n+1}-3u_n$ គ្រប់ $n\in IN^*$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា (v_n) និង (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា v_n និង w_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. ទាញរកតួ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

64-គេឱ្យស្វ៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 4}{u_n + 3} \end{cases}, n \in IN^*$

បង្ហាថាស្វ៊ីត $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$,$\forall n \in IN^*$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនាតួ v_n

និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

65-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ កំនត់ពីសំណុំ IN^* ទៅ IR ដោយ :

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n) = n^2.f(n) \end{cases}$$

ក. គណនាតម្លៃនៃ $f(2)$ និង $f(3)$ ។

ខ. ចូរគណនា $f(n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

66-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់គ្រប់ $n \in IN^*$ ដោយ $\begin{cases} u_1 = \sqrt{5} \\ u_{n+1} = u_n^{\ 2} - 2 \end{cases}$

ក. ចូរបង្ហាញថា $\forall n \in IN : u_n > 2$ ។

ខ. គេតាង $v_n = u_n + \sqrt{u_n^{\ 2} - 4}$ គ្រប់ $n \in IN^*$ ។ ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង v_{n+1} និង v_n ។

គ. គណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

67-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់លើ IN^* ដោយ $\begin{cases} u_1 = 5 + 3\sqrt{5} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{5}{u_n}\right) \end{cases}$

ក. គេតាង $\forall n \in IN^* : v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{5}}{u_n + \sqrt{5}}$ ។ ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង v_{n+1} និង v_n ។

ខ. គណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. គេតាង $w_n = 1 + v_n$ ចំពោះ $\forall n \in IN^*$ ។ គណនាផលគុណ $P_n = w_1.w_2.w_3.....w_n$

68- គេឱ្យ (U_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតកំនត់ចំពោះគ្រប់ $n > 0$ ដោយ :

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$$ ។

ក. ចំពោះគ្រប់ $n, p \in IN^*$ ដែល $1 \le p \le n$ ចូរបង្ហាញថា $n \le \sqrt{n^2 + p} \le n + 1$ ។

ខ. ទាញបង្ហាញថា $\frac{2n}{2n+1} \le U_n \le 2$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

69- គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិតកំនត់ដោយ ៖

$$U_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + ... + \frac{n}{n^2+n} \ , \ n \ge 1 \quad ។$$

ក. បង្ហាញថា $\forall n \ge 1 \ ; \ \frac{n}{n^2+n} \le U_n \le \frac{n^2}{n^2+1}$ ។

ខ.ទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

70- គេឱ្យស៊្វីតចំនួនពិត ៖ $\begin{cases} U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+U_n} \ , \forall n \in IN \end{cases}$

ក. ដោយធ្វើវិចារតាមកំនើនចូរបង្ហាញថា $\frac{\sqrt{2}}{2} \le U_n \le 1$ ។

ខ. បង្ហាញថាស្វ៊ីត (U_n) មានលីមីតស្មើ L_0 មួយដែលគេនឹង កំនត់រក ។

គ. ចូរបង្ហាញតាមកំនើនថា $\forall n \in IN^* : U_n = \cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})$ រួចទាញរកឡើងវិញនៃ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

71-គេឱ្យ $U_n = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+.....+\sqrt{a}}}}$ ។ ចូរបង្ហាញថា $U_n \le \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$ ។

72-គេពិនិត្យស្វ៊ីត (U_n) កំនត់ដោយ ៖

$$U_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.......+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{(n)} \quad ។$$

ក. ដោយធ្វើវិចារ្យតាមកំនើនចូរបង្ហាញថា $U_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

ខ. គេមាន $V_n = \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+........+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{(n)}$ ។ ចូរស្រាយថា $V_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$ ។

គ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ and $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n.V_n\right)$ ។

73- គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត ៖ $\begin{cases} a_0 = 2 \ , \ b_0 = 4 \\ a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n) \quad , n \in IN \end{cases}$

ក. កំនត់ចំនួនពិត λ ដើម្បីឱ្យ $C_n = a_n + \lambda.b_n$ ជាស៊ីតថេរ ។

ខ. បង្ហាញថា $U_n = a_n - b_n$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

គ. ទាញរក a_n និង b_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចបញ្ជាក់លីមីតវា ។

74-គេឱ្យកន្សោម $S_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{9}} + ... + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$

ក. ចំពោះគ្រប់ $x \in [n , n+1]$ និង $n \in IN^*$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}} \le \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \quad ។$$

ខ. ទាញឱ្យបានថា $\int_1^{n+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{n^2}} \le 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{9}} + ... + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \le 1 + \int_1^n \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ ។

គ. ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ ។

75-គេមានសមីការ $(E) : x^3 - (2m+3)x + 28x - 24 = 0$ ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ចូរកំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសបី x_1, x_2, x_3 បង្កើតបានជាស៊ីតនព្វន្តមួយ រួចដោះស្រាយសមីការ ។

76-គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់លើសំណុំ IN^* ដោយ :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ (n - \frac{1}{2})u_{n+1} - (n + \frac{1}{2}).u_n = 4n^2 - 1 \ , \forall n \in IN^* \end{cases}$$

ក. ចូរគណនាតម្លៃនៃតួ u_2, u_3 និង u_4 ។

ខ. គេតាង $v_n = \frac{1}{2n-1}.u_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។ បង្ហាញថា (v_n) ជាស៊ីតនព្វន្តមួយ ។

គ. ចូរគណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

77-គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ :

$$U_0 = 2006 \text{ និង } U_{n+1} = \frac{2006}{2007}U_n + 2008 , \forall n \in IN \quad ។$$

ចូរកំនត់រកតួ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ ។

78- គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ ៖

$U_0 = 4$ និង $U_{n+1} = 2U_n^{\frac{3}{4}}, \forall n \in IN$ ។

ចូរកំនត់រកតួ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

79-គេមានស៊ីតចំនួនពិត $\begin{cases} U_0 = -1, U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n, \forall n \in IN \end{cases}$

ក-កំនត់ចំនួនពិត d ដើម្បីឱ្យស៊ីត $V_n = U_{n+1} - d.U_n, \forall n \in IN$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ-កំនត់ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

80-គេមានស៊ីតចំនួនពិត $\begin{cases} U_0 = 1, U_1 = 3 \\ U_{n+2} = 4U_{n+1} - 4U_n, \forall n \in IN \end{cases}$

ក-កំនត់ចំនួនពិត d ដើម្បីឱ្យស៊ីត $V_n = U_{n+1} - d.U_n, \forall n \in IN$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ-កំនត់ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

81-គេមានស៊ីតចំនួនពិត $\begin{cases} U_0 = -1, U_1 = 1 \\ U_{n+2} = 2U_{n+1} - 2U_n, \forall n \in IN \end{cases}$

ក-កំនត់ចំនួនកុំផ្លិច d ដើម្បីឱ្យស៊ីត $V_n = U_{n+1} - d.U_n, \forall n \in IN$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ-កំនត់ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

82-គេមានស៊ីតចំនួនពិត $\begin{cases} U_0 = 0, U_1 = 1 \\ U_{n+2} = 2U_{n+1} + 3U_n - 4, \forall n \in IN \end{cases}$

ក-កំនត់ចំនួនពិត d និង k ដើម្បីឱ្យស៊ីត $V_n = U_{n+1} - d.U_n + k, \forall n \in IN$

ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ-កំនត់ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

83-គេឱ្យស៊ីត $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^2}{2U_n - 1}, \forall n \in IN \end{cases}$

ក. ស្រាយថា $U_n > 1$ គ្រប់ $n \in IN$ ។

ខ. តាង $V_n = \ln(U_n - 1) - \ln U_n$ ។

បង្ហាញថា (V_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

គ. គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចរក $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

84-គេមានស៊ីតចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ :

$U_0 = 4$ និង $U_{n+1} = 2U_n + 3$ គ្រប់ចំនួន $n \in IN$ ។

ចូរកំនត់រកតួ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

85- គេឱ្យស៊ីតចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ :

$U_0 = 3$ $U_1 = 4$ និង $U_{n+2} = \frac{5}{3}U_{n+1} - \frac{2}{3}U_n$ (ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$) ។

ក. ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ $n \in IN : U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 2$ ។

ខ. កំនត់តម្លៃ k ដែល $U_{n+1} - k = \frac{2}{3}(U_n - k)$ ។

គ. គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចរក $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

86-គេឱ្យស៊ីតចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង :

$U_0 = 2$ និងគ្រប់ $n \in IN$ មាន $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 4$

ក.កំនត់ចំនួនពិត λ ដើម្បីឱ្យ $V_n = U_n + \lambda$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចរក $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

87-គេឱ្យស៊ីត $\begin{cases} U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ U_{n+1} = 4U_n^3 - 3U_n , n \in IN \end{cases}$

ចូរស្រាយតាមកំនើនថា $U_n = \cos(\frac{3^n \pi}{4})$ ។

88-គេមានស៊ីតចំនួនពិត $(U_n), n \in IN$ កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = 2\sqrt[3]{U_n^2} , \forall n \in IN \end{cases}$$

ក. គេតាង $\forall n \in IN : V_n = -3 + \log_2 U_n$ ។ បង្ហាញថា (V_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចរក $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

89-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតមួយ (U_n) កំនត់ដោយ :

$U_0=1$ និង $U_{n+1}=-\frac{1}{U_n}+\sqrt{1+\frac{1}{U_n^2}}$ គ្រប់ $n\in IN$

ចូរស្រាយតាមកំណើនថា $U_n=\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$ ។

90-គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង :

$U_0=2$ និង $U_{n+1}^5=32U_n^4$ គ្រប់ $n\in IN$

គណនា U_n ជាអនុគមន៏នៃ n រួចរក $\lim_{n\to+\infty}U_n$ ។

91-គេមានអនុគមន៏ $f(x)$ កំនត់លើចន្លោះ $]-1\ ,1\ [$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$f(\frac{1}{2})=-\ln 3$ និង $\forall x,y\in]-1,1[:f(x)+f(y)=f(\frac{x+y}{1+xy})$

ក. គណនាតម្លៃ $f(0)$ ។

ខ. ចូរកំនត់រកអនុគមន៏ $f(x)$ ។

92-គេឱ្យអនុគមន៏ $f_n(x)$ កំនត់ដោយ :

$f_1(x)=\sqrt{6+x}-3\ ,f_2(x)=\sqrt{6+\sqrt{6+x}}-3\ ,f_3(x)=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+x}}}-3,.....$

$f_n(x)=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+.......+\sqrt{6+\sqrt{6+x}}}}}-3$ ដែល $n\in IN^*$ ។

ចូរគណនាលីមីត $L_1=\lim_{x\to3}\frac{f_1(x)}{x-3}$ និង $L_n=\lim_{x\to3}\frac{f_n(x)}{x-3}$ ។

93-គេឱ្យអនុគមន៏ $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x-1}$ ដែល a,b,c ជាបីចំនួនពិត ។

ចូរកំនត់បីចំនួនពិត a ,b និង c ដើម្បីឱ្យ $f(0)=-2$ និង $\lim_{x\to1}f(x)=-1$ ។

94.គេមានអនុគមន៏ $f(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a\neq0,a,b,c\in IR$ និង $a+b+c=1$ ។

គណនាលីមីត $\lim_{x\to1}\frac{f[f(x)]-x}{f(x)-x}$ ជាអនុគមន៏នៃចំនួនពិត a,b,c ។

95-គេឱ្យអនុគមន៏ $f_n(x)$ កំនត់ដោយ :

$f_1(x)=\sqrt{2x+3}-3\ ,f_2(x)=\sqrt{2x+\sqrt{2x+3}}-3\ ,f_3(x)=\sqrt{2x+\sqrt{2x+\sqrt{2x+3}}}-3,.....$

$f_n(x)=\sqrt{2x+\sqrt{2x+\sqrt{2x+.......+\sqrt{2x+\sqrt{2x+3}}}}}-3$ ដែល $n\in IN^*$ ។

ចូរគណនាលីមីត $L_1=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f_1(x)}{x-3}$ និង $L_n=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f_n(x)}{x-3}$ ។

96-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) និង (V_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} U_0=1\ ,\ V_0=0 \\ U_{n+1}=\dfrac{5U_n-3V_n}{12} \\ V_{n+1}=\dfrac{U_n+9V_n}{12} \quad ,\ n\in IN \end{cases}$

ចូរគណនា U_n និង V_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចបញ្ជាក់លីមីតវា

97-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) និង (V_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} U_0=1\ ,\ V_0=4 \\ U_{n+1}=-\dfrac{1}{2}U_n-\dfrac{3}{2}V_n \\ V_{n+1}=U_n+2V_n \quad ,\ n\in IN \end{cases}$

ក-ចូរបង្ហាញថា $W_n=U_n+V_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា W_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ-ចូរបង្ហាញថា $t_n=2U_n+3V_n$ ជាស្វ៊ីតថេរត្រូវកំនត់ ។

គ-ទាញរក U_n និង V_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចបញ្ជាក់លីមីតវា.

98- គេឱ្យស្វ៊ីត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ ៖

$U_0=1\ ,\ U_1=4$ និង $\forall n\in IN:\ U_{n+2}=\sqrt{U_{n+1}.U_n}$

ក-គេតាង $\forall n\in IN: V_n=\ln(\dfrac{U_{n+1}}{U_n})$ ។

ចូរបង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនាតួ V_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$

ខ-ចូរបង្ហាញថា $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(V_k)=\ln\left(\dfrac{U_n}{U_0}\right)$ រួចទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ ។

99-គេឱ្យស្វ៊ីត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ ៖

$U_0=-1\ ,\ U_1=1$ និង $U_{n+2}=\dfrac{11}{10}U_{n+1}-\dfrac{1}{10}U_n$

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ ។

100-គេឱ្យស៊ីត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ $U_0 = 1$, $U_1 = 2$ និង $U_{n+2}^3 = \frac{U_{n+1}^4}{U_n}$

ក-គេតាង $V_n = \ln(\frac{U_{n+1}}{U_n})$, $\forall n \in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា (V_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនាតួ V_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង $\lim_{n\to+\infty} V_n$

ខ-គេតាង $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_n$ ។

បង្ហាញថា $U_n = U_0.e^{S_{n-1}}$ ។រួចទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃn និងបញ្ជាក់លីមីត $\lim_{n\to+\infty} U_n$ ។

101-គេឱ្យស៊ីត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ $U_0 = 1$, $U_1 = 2$

និង $\forall n \in IN: U_{n+2} = U_{n+1}.U_n$ ។

ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

102-គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត $(U_n)_{n\in IN^*}$ កំនត់ដោយ :

$U_n = \frac{2n-3}{2^{n+1}}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ក. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $U_n = \frac{2n-1}{2^n} - \frac{2n+1}{2^n}$

ខ. គណនាជាអនុគមន៍នៃ n នូវផលបូក $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$

រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

103-គេឱ្យកន្សោម $S_n = \frac{1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p}{n^{p+1}}$, $n \in IN^*$, $p \in IR$

ក. ចំពោះគ្រប់ $x \in [n , n+1]$ និង $n \in IN^*$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព :

$$n^p \le \int_n^{n+1} x^p dx \le (n+1)^p$$ ។

ខ. ទាញឱ្យបានថា $1 + \int_1^n x^p dx \le 1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p \le \int_1^{n+1} x^p dx$ ។

គ. ទាញរកលីមីត $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

104-គេមានស្វ៊ីត$(U_n)_{n\in IN^*}$ កំនត់ដោយ :

$$U_n=\frac{n}{(n^2-n+1)\sqrt{n^2+n+1}+(n^2+n+1)\sqrt{n^2-n+1}}$$

ក.កំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យស្វ៊ីតអាចសរសេរ :

$$U_n=\frac{a}{\sqrt{n^2-n+1}}+\frac{b}{\sqrt{n^2+n+1}}$$

ខ.គណនា $S_n=U_1+U_2+U_3+.....+U_n$ ជាអនុគមន៍នៃn

រួចទាញរកលីមីត $\lim_{n\to+\infty}S_n$ ។

105-គេឱ្យស្វ៊ីត $U_n=\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ ។

គេតាង $S_n=\sum_{k=1}^{n}(U_k)=U_1+U_2+U_3+.....+U_n$ ។ចូរបង្ហាញថា $S_n=\frac{n(n+2)}{(n+1)}$ ។

106-គេឱ្យស្វ៊ីត $U_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2).....(n+k)}$

ដែល $n\in IN^*$, $k\in IN^*$ ។

ចូរគណនា$S_n=\sum_{k=1}^{n}(U_k)=U_1+U_2+U_3+.....+U_n$ ។

107-គេឱ្យ $S_n=\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+...+\frac{n}{1000...000}$ ។

ក.ចូរគណនា $T_n=S_n-\frac{1}{10}S_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ.ទាញរក S_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

108-គេឧបមាថា $(U_n)_{,n\in IN^*}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែលមានតួ $U_1,U_2,U_3,....,U_n$

សុទ្ធតែវិជ្ជមាន ។គេតាង d ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនេះ ។

ចូរស្រាយថា $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{U_k\sqrt{U_{k+1}}+U_{k+1}\sqrt{U_k}}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{U_1}}-\frac{1}{\sqrt{U_{n+1}}}\right)$

109-គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\ln(1+x)$, $x>0$ ។

ក.ចូរបង្ហាញថា $x-\frac{x^2}{2}\le f(x)\le x$ ។

ខ.គេមាន $P_n=(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})(1+\frac{3}{n^2})....(1+\frac{n}{n^2})$ ។ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $P_n=e^{\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n^2}\right)\right]}$ ។

គ.រកកន្សោមអមនៃ $\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n^2}\right)\right]$ រួចទាញរកលីមីត

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty}\left[(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})(1+\frac{3}{n^2})...(1+\frac{n}{n^2})\right]$$

110-គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\sin x$, $x\in IR$

ក. ចូរស្រាយថា $x-\frac{x^3}{6} \le f(x) \le x$ គ្រប់ $x\in IR$ ។

ខ. គេពិនិត្យផលបូក $S_n=\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+\sin\frac{3}{n^2}+......+\sin\frac{n}{n^2}$ ។

ចូររកកន្សោមអមនៃផលបូកនេះ ។

គ. ចូរគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

111-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{4x}{\sqrt{x^2+16}}$

ចូរគណនា $F_n(x)=f_n\left[f[....f[f(x)].....]\right]$ ។

112-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

ចូរគណនា $F_n(x)=f_n\left[f[....f[f(x)].....]\right]$ ។

113-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{2x}{\sqrt[3]{5+4x^3}}$

ចូរគណនា $F_n(x)=f_n\left[f[....f[f(x)].....]\right]$ ។

114-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^3+3x}{3x^2+1}$

ចូរគណនា $F_n(x)=f_n\left[f[....f[f(x)].....]\right]$ ។

115-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{2-2x+5x^2}{1+8x-2x^2}$

ចូរគណនា $F_n(x)=f_n\left[f[....f[f(x)].....]\right]$ ។

116-គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ $U_1=1$ និង $\forall n\in IN^*: U_{n+1}=\frac{2U_n}{\sqrt[3]{8+{U_n}^3}}$

ក.ចូររកប្រភេទនៃស្វ៊ីត $V_n=\frac{1}{U_n^3}$ ។

ខ. គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

117- គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ $U_1 = 1$ និង $\forall n \in IN^* : U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt[5]{4 + U_n^5}}$

ក.ចូររកប្រភេទនៃស្វ៊ីត $V_n = \dfrac{4^n}{U_n^5}$ ។

ខ. គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

118-គេមានអនុគមន៍ $f(x) = x^3 + -6x^2 + 12x - 6$

ក. ចូរគណនា $F_n(x) = f_n\left[f[....f[f(x)].....]\right]$

ខ. កំនត់ x ដើម្បីឱ្យ $F_n(x) = 1$ ។

119*-គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 + 3x + 1}$

ក. ចូរបង្ហាញថា $1 + f(x) > 0$, $\forall x > -1$ ។

ខ. គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) , (V_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} U_1 = f(x) , \forall x > -1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \\ V_n = \dfrac{U_n}{1 + U_n} \qquad , n \in IN^* \end{cases}$

ចូរបង្ហាញថា $V_{n+1} = V_n^{\ 3}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

120-គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $-2 \le f(x) \le 2$, $\forall x \in IR$ ។

ខ. គេមានស្វ៊ីត $\begin{cases} U_1 = f(x) \\ U_{n+1} = f(U_n) , \forall n \in IN^* \end{cases}$

ចូរស្រាយថា $\dfrac{2 - U_{n+1}}{2 + U_{n+1}} = \left(\dfrac{2 - U_n}{2 + U_n}\right)^2$?

គ. ចូរទាញរក U_n ជាអនុគមន៍ n និង x ។

121-គេមានអនុគមន៍ $f(x) = x^2 - 2$

គេមានស្វ៊ីត $\begin{cases} U_1 = f(x) \\ U_{n+1} = f(U_n) , \forall n \in IN^* \end{cases}$

ក. ចូរស្រាយថាបើ $x>2$ នោះ គេបាន $\forall n\in IN^*: U_n>2$ ។

ខ. គេឧបមាថា $x>2$ ។ គេបង្កើតស្វ៊ីត $V_n=U_n+\sqrt{U_n^2-4}$ $,\forall n\in IN^*$

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង V_{n+1} និង V_n ។

គ. ចូរគណនា V_n និង U_n ជាអនុគមន៍ n និង x ។

ឃ. ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរគណនាអនុគមន៍ ចូរគណនា $F_n(x)=f_n\left[f[\ldots.f[f(x)].....]\right]$