ស្វីត

និង

ស៊ើប

លំហាត់ទី១

បើ $5^{1+x}+5^{1-x}, \dfrac{a}{2}$ និង 25^x+25^{-x} ជាបីចំនួនតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត បង្ហាញថា $a \geq 12$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $5^{1+x}+5^{1-x}, \dfrac{a}{2}, 25^x+25^{-x}$

ជាបីចំនួនតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេបាន $2\times\dfrac{a}{2} = \left(5^{1+x}+5^{1-x}\right)+\left(25^x+25^{-x}\right)$

$$a = 5\cdot 5^x+5\cdot 5^{-x}+5^{2x}+5^{-2x}$$

តាង $t=5^x \Longrightarrow t>0$

គេបាន $a = 5t+\dfrac{5}{t}+t^2+\dfrac{1}{t^2}$

$$\begin{aligned}
&= \left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)+5\left(t+\frac{1}{t}\right)\\
&= \left[\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2\right]+5\left[\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2+2\right]\\
&= \left(t-\frac{1}{t}\right)^2+5\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2+12 \geq 12
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{a \geq 12}$

លំហាត់ទី២

ចំពោះចំនួនពិតវិជ្ជមានខុសពីមួយ x, y, z បើ $1, \log_y x, \log_z y, -15\log_x z$ ជាតួតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

បង្ហាញថា $x = z^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $1, \log_y x, \log_z y, -15\log_x z$

ជាតួតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

តាង d ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះ

គេបាន $\log_y x = 1+d \Longrightarrow x = y^{1+d}$

$$\log_z y = 1+2d \Longrightarrow y = z^{1+2d}$$

$$-15\log_x z = 1+3d \Longrightarrow z = x^{-(1+3d)/15}$$

គេបាន $x = y^{1+d} = \left(z^{1+2d}\right)^{1+d} = z^{(1+d)(1+2d)}$

$$= \left(x^{-(1+3d)/15}\right)^{(1+d)(1+2d)}$$

$$= x^{-(1+d)(1+2d)(1+3d)/15}$$

នាំឱ្យ $1 = \dfrac{(1+d)(1+2d)(1+3d)}{15}$

$$(1+d)(1+2d)(1+3d) = -15$$

$$6d^3+11d^2+6d+16 = 0$$

$$(d+2)(6d^2-d+8) = 0$$

ដោយ $6d^2-d+8 > 0 \forall d \in \mathbb{R}$

គេបាន $d+2=0 \Longleftrightarrow d=-2$

នាំឱ្យ $z = x^{5/15} = x^{1/3} \Longleftrightarrow x = z^3$

ដូចនេះ $\boxed{x = z^3}$

លំហាត់ទី៣

គេមានបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c ជាបីចំនួនតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត និង $abc = 4$ ។ រកតម្លៃអប្បរមានៃ b ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c ជាបីចំនួនតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

តាង d ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះ

គេបាន $a = b - d$ និង $c = b + d$

គេមាន $4 = abc = (b-d)b(b+d)$

$$= b(b^2 - d^2) = b^3 - bd^2$$

$\Longrightarrow b^3 = 4 + bd^2 \geq 4$ ព្រោះ $b > 0, d^2 \geq 0$

គេបាន $b^3 \geq 4 \Longrightarrow b \geq \sqrt[3]{4}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃអប្បរមានៃ } b \text{ គឺ } \sqrt[3]{4}}$

លំហាត់ទី៤

គណនាផលបូក $\dfrac{1^4}{1\cdot 3} + \dfrac{2^4}{3\cdot 5} + \dfrac{3^4}{5\cdot 7} + \cdots + \dfrac{n^4}{(2n-1)(2n+1)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $a_k = \dfrac{k^4}{(2k-1)(2k+1)} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{4k^4}{4k^2-1} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{4k^4 - k^2 + k^2}{4k^2-1}$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{k^2(4k^2-1) + k^2}{4k^2-1} = \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{4} \times \frac{k^2}{4k^2-1}$$

$$= \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{16} \times \frac{4k^2-1+1}{4k^2-1} = \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{4k^2-1}$$

$$= \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$= \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

គេបាន $\dfrac{1^4}{1\cdot 3} + \dfrac{2^4}{3\cdot 5} + \dfrac{3^4}{5\cdot 7} + \cdots + \dfrac{n^4}{(2n-1)(2n+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{16}\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{1}{32}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{1}{16}n + \frac{1}{32}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{16} + \frac{n}{16} + \frac{n}{16(2n+1)}$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1^4}{1\cdot 3} + \frac{2^4}{3\cdot 5} + \frac{3^4}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{n^4}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n^2(n+1)^2}{16} + \frac{n}{16} + \frac{n}{16(2n+1)}}$

លំហាត់ទី៥

រកតម្លៃអតិបរមានៃផលបូកស៊េរី $20 + 19\frac{1}{3} + 18\frac{2}{3} + 18 + \cdots$ ។ (សម្គាល់ $19\frac{1}{3}$ ជាចំនួនចម្រុះ)

ដំណោះស្រាយ

ផលបូកស៊េរី $20 + 19\frac{1}{3} + 18\frac{2}{3} + 18 + \cdots$

មានតម្លៃអតិបរមានកាលណាតួនីមួយនៃស៊េរីនេះជាចំនួនវិជ្ជមាន

តាង a_{k+1} ជាតួទី $k+1$ នៃស៊េរី

គេបាន $a_{k+1} = 20 - k + \frac{k}{3} = 20 - \frac{2}{3}k$

រក k ដើម្បីឱ្យ $a_{k+1} > 0$

គេបាន $20 - \frac{2k}{3} > 0 \iff k < 30$

តែ k ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន នាំឱ្យ $k = 29$

គេបានតម្លៃអតិបរមានៃផលបូកនៃស៊េរីគឺ

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{30} &= \sum_{k=0}^{29} a_{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{29}\left(20 - \frac{2}{3}k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{29} 20 - \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{29} k \\ &= 20\times 30 - \frac{2}{3}\times\frac{29\times 30}{2} = 310 \end{aligned}$$

លំហាត់ទី៦

ចំពោះចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង r ចូរគណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $\log a, \log(ar), \log(ar^2), \ldots$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $S_n = \log a + \log(ar) + \log(ar^2) + \cdots + \log(ar^{n-1})$

$$= \log a + (\log a + \log r) + (\log a + \log r^2) + \cdots + (\log a + \log r^{n-1})$$

$$= n\log a + \log r + 2\log r + 3\log r + \cdots + (n-1)\log r$$

$$= n\log a + [1+2+3+\cdots+(n-1)]\log r$$
$$= n\log a + \frac{n(n-1)}{2}\log r = \frac{1}{2}n\log a^2 + \frac{1}{2}n\log r^{n-1} = \frac{1}{2}n\log ar^{n-1}$$

លំហាត់ទី៧

តាង S_n ជាផលបូក n តួនីមួយៗនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះជាចំនួនវិជ្ជមាន និងផលសងរួម d ដែល $d = S_n - kS_{n-1} + S_{n-2}$ ។
ចូររកតម្លៃនៃចំនួនពិត k ។

ដំណោះស្រាយ

តាង a_n ជាតួទូទៅនៃស្វ៊ីតនព្វន្តនេះ

គេមាន $a_n = S_n - S_{n-1}$

ហើយ $a_{n-1} = S_{n-1} - S_{n-2}$

នាំឱ្យ $a_n - a_{n-1} = (S_n - S_{n-1}) - (S_{n-1} - S_{n-2})$

$$= S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2}$$

តែផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $d = a_n - a_{n-1}$

គេបាន $d = S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2}$

គេឱ្យ $d = S_n - kS_{n-1} + S_{n-2}$

នាំឱ្យ $S_n - kS_{n-1} + S_{n-2} = S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2}$

$\Longrightarrow k = 2$

ដូចនេះ $\boxed{k = 2}$

លំហាត់ទី៨

គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន និងជាតម្លៃនៃតួទី x, y, z រៀងគ្នា នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ។
ចូរគណនា $(y-z)\log a + (z-x)\log b + (x-y)\log c$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង p ជាតម្លៃនៃតួទី 1 និងផលធៀបរួម q

គេបាន $a = pq^{x-1}, \quad b = pq^{y-1}, \quad c = pq^{z-1}$

នាំឱ្យ $(y-z)\log a + (z-x)\log b + (x-y)\log c$

$$= \log a^{y-z} + \log b^{z-x} + \log c^{x-y}$$
$$= \log\left(a^{y-z}\cdot b^{z-x}\cdot c^{x-y}\right)$$
$$= \log\left[\left(pq^{x-1}\right)^{y-z}\cdot\left(pq^{y-1}\right)^{z-x}\cdot\left(pq^{z-1}\right)^{x-y}\right]$$
$$= \log\left[p^{y-z}q^{(x-1)(y-z)}p^{z-x}q^{(y-1)(z-x)}p^{x-y}q^{(z-1)(x-y)}\right]$$

$$= \log\left[p^{y-z+z-x+x-y} \cdot q^{(x-1)(y-z)+(y-1)(z-x)+(z-1)(x-y)}\right]$$
$$= \log\left(p^0 \cdot q^{xy-zx-y+z+yz-xy-z+x+zx-yz-x+y}\right)$$
$$= \log\left(q^0\right) = \log 1 = 0$$

ដូចនេះ $\boxed{(y-z)\log a + (z-x)\log b + (x-y)\log c = 0}$

លំហាត់ទី៩

គេឱ្យតួទី $p+q$ នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយគឺ a ដែល និងតួទី $p-q$ គឺ b ដែល $a > 0, b > 0,\ p, q$ ជាចំនួនគត់ និង $p > q$ ។ គណនាតម្លៃនៃតួទី p នៃស្វ៊ីតនេះ។

ដំណោះស្រាយ

តាង x ជាតួទីមួយ និង y ជាផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រនេះ

គេបាន $a = t_{p+q} = xy^{p+q-1} \qquad (1)$

និង $\ b = t_{p-q} = xy^{p-q-1} \qquad (2)$

យក (1) ចែក (2) គេបាន $\dfrac{a}{b} = \dfrac{xy^{p+q-1}}{xy^{p-q-1}} = y^{2q}$

$\Longrightarrow y = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\dfrac{1}{2q}}$ ជំនួសក្នុង (1)

គេបាន $a = x\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\dfrac{p+q-1}{2q}}$

$\Longrightarrow x = a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\dfrac{p+q-1}{2q}}$

នោះតួទី p នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រនេះគឺ

$$t_p = xy^{p-1} = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\dfrac{p+q-1}{2q}} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{\dfrac{p-1}{2q}}$$
$$= a^{1-\frac{p+q-1}{2q}+\frac{p-1}{2q}} \times b^{\frac{p+q-1}{2q}-\frac{p-1}{2q}}$$
$$= a^{\frac{2q-p-q+1+p-1}{2q}} \times b^{\frac{p+q-1-p+1}{2q}}$$
$$= a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តួទី } p \text{ គឺ } t_p = \sqrt{ab}}$

លំហាត់ទី១០

គេឱ្យស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយដែលមានតួទី n តាងដោយ a_n និង $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ ។ បើ $\sum\limits_{k=1}^{100} a_{2k} = \alpha$ និង $\sum\limits_{k=1}^{100} a_{2k-1} = \beta$ រកផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រនេះ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\alpha = \sum_{k=1}^{100} a_{2k}$
$$= a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{200}$$
$$= a_1 r + a_1 r^3 + a_1 r^5 + \cdots + a_1 r^{199}$$
$$= a_1 r(1 + r^2 + r^4 + \cdots + r^{198}) \quad (1)$$
ហើយ $\beta = \sum_{k=1}^{100} a_{2k-1}$
$$= a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{199}$$
$$= a_1 + a_1 r^2 + a_1 r^4 + \cdots + a_1 r^{198}$$
$$= a_1(1 + r^2 + r^4 + \cdots + r^{198}) \quad (2)$$
យក (1) ចែក (2) គេបាន $\frac{\alpha}{\beta} = r$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រនេះគឺ } r = \frac{\alpha}{\beta}}$

លំហាត់ទី១១

គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $a_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$

$$a_2 = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2^2}$$
$$a_3 = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{2^3}$$
$$a_4 = \frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{2^4}$$

....

$$a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

គេបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$
$$= \sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$
$$= n - \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}}$$
$$= n - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = n - 1 + \frac{1}{2^n}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = n - 1 + \frac{1}{2^n}}$

លំហាត់ទី១២

គណនាផលបូកនៃស៊េរី $\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \cdots$ ដែល $|x| < 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $a_k = \dfrac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}} = \dfrac{1+x^{2^{k-1}}-1}{\left(1-x^{2^{k-1}}\right)\left(1+x^{2^{k-1}}\right)} = \dfrac{1}{1-x^{2^{k-1}}} - \dfrac{1}{1-x^{2^k}}$

គេបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{1-x^{2^{k-1}}} - \dfrac{1}{1-x^{2^k}}\right)$

$$= \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}\right) + \left(\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1-x^{2^2}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{1-x^{2^{n-1}}} - \frac{1}{1-x^{2^n}}\right)$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^n}}$$

នាំឱ្យ $\dfrac{x}{1-x^2} + \dfrac{x^2}{1-x^4} + \dfrac{x^4}{1-x^8} + \cdots = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^{2^n}}\right) = \dfrac{1}{1-x} - 1 = \dfrac{x}{1-x}$

ព្រោះ $|x| < 1 \iff -1 < x < 1 \iff \lim_{n\to+\infty} x^{2^n} = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{x}{1-x^2} + \dfrac{x^2}{1-x^4} + \dfrac{x^4}{1-x^8} + \cdots = \dfrac{x}{1-x}}$

លំហាត់ទី១៣

គណនាផលបូក $\dfrac{3}{1\cdot 2}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{2\cdot 3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{5}{3\cdot 4}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \dfrac{n+2}{n(n+1)}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\dfrac{k+2}{k(k+1)}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^k = \dfrac{2(k+1)-k}{k(k+1)}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^k = \left(\dfrac{2}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^k = \dfrac{1}{k}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} - \dfrac{1}{k+1}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$

គេបាន $\dfrac{3}{1\cdot 2}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{2\cdot 3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{5}{3\cdot 4}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \dfrac{n+2}{n(n+1)}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k+2}{k(k+1)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \frac{1}{k+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\right] + \left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + \cdots + \left[\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{3}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{3\cdot 4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \frac{n+2}{n(n+1)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

លំហាត់ទី១៤

ចំពោះចំនួនពិត $y \neq 1$ គេមាន $(1-y)(1+2x+4x^2+8x^3+16x^4+32x^5) = 1-y^6$ ។ ចូរគណនាតម្លៃនៃ $\frac{y}{x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $(1-y)(1+2x+4x^2+8x^3+16x^4+32x^5) = 1-y^6$

$$(1-y)\times\left[\frac{1-(2x)^6}{1-(2x)}\right] = 1-y^6$$

នាំឱ្យ តម្លៃដែលអាចកើតមាននៃ y គឺ $y = 2x \Longleftrightarrow \frac{y}{x} = 2$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{y}{x} = 2}$

លំហាត់ទី១៥

គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ រកតម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម $a^{\log b - \log c} + b^{\log c - \log a} + c^{\log a - \log b}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាពកូស៊ី គេបាន

$$a^{\log b-\log c} + b^{\log c-\log a} + c^{\log a-\log b} \geq 3\sqrt[3]{a^{\log b-\log c}\cdot b^{\log c-\log a}\cdot c^{\log a-\log b}} \qquad (1)$$

តាង $x = a^{\log b-\log c}\cdot b^{\log c-\log a}\cdot c^{\log a-\log b}$

$$\Longrightarrow \log x = \log\left(a^{\log b-\log c}\cdot b^{\log c-\log a}\cdot c^{\log a-\log b}\right)$$

$$= \log a^{\log b-\log c} + \log b^{\log c-\log a} + \log c^{\log a-\log b}$$

$$= (\log b - \log c)\log a + (\log c - \log a)\log b + (\log a - \log b)\log c$$

$$= \log a\log b - \log a\log c + \log b\log c - \log a\log b + \log a\log c - \log b\log c = 0$$

នាំឱ្យ $\log x = 1 \Longleftrightarrow x = 1$

តាម (1) គេបាន $a^{\log b-\log c}+b^{\log c-\log a}+c^{\log a-\log b}\geq 3$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃតូចបំផុតនៃ } a^{\log b-\log c}+b^{\log c-\log a}+c^{\log a-\log b} \text{ គឺ } 3}$

លំហាត់ទី១៦

គណនាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចជាង 200 ដែលចែកមិនដាច់នឹង 3 ឬ 5 ។

ដំណោះស្រាយ

តាង S_{199} ជាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិពី 1 ដល់ 199

S_3 ជាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចជាង 200 ដែលចែកដាច់នឹង 3

S_5 ជាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចជាង 200 ដែលចែកដាច់នឹង 5

S_{15} ជាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចជាង 200 ដែលចែកដាច់នឹង 15

S ជាផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចជាង 200 ដែលចែកមិនដាច់នឹង 3 ឬ 5

គេបាន $S=S_{199}-S_3-S_5+S_{15}$

ដោយ $S_{199}=1+2+3+\cdots+199=\dfrac{199\times 200}{2}=19900$

$$S_3=3+6+9+\cdots+198=\frac{66}{2}\times(3+198)=6633$$

$$S_5=5+10+15+\cdots+195=\frac{39}{2}\times(5+195)=3900$$

$$S_{15}=15+30+45+\cdots+195=\frac{13}{2}\times(15+195)=1365$$

នាំឱ្យ $S=S_{199}-S_3-S_5-S_{15}=19900-6633-3900+1365=10732$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចជាង 200 ដែលចែកមិនដាច់នឹង 3 ឬ 5 ស្មើនឹង 10732}}$

លំហាត់ទី១៧

គណនា $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j}1$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j}1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}j=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{i(i+1)}{2}\right]=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(i^2+i\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]$

$$=\frac{n(n+1)}{12}(2n+1+3)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j}1=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}}$

លំហាត់ទី១៨

គណនាផលបូកនៃស៊េរី $\frac{9}{5^2\cdot 2\cdot 1}+\frac{13}{5^3\cdot 3\cdot 2}+\frac{17}{5^4\cdot 4\cdot 3}+\cdots$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $a_k=\frac{4k+1}{5^k\cdot k(k-1)}\ ,\ \ k\geq 2$

$$=\frac{5k-(k-1)}{5^k\cdot k(k-1)}=\frac{1}{5^{k-1}\cdot(k-1)}-\frac{1}{5^k\cdot k}$$

គេបាន $S_n=\frac{9}{5^2\cdot 2\cdot 1}+\frac{13}{5^3\cdot 3\cdot 2}+\frac{17}{5^4\cdot 4\cdot 3}+\cdots+\frac{4n+1}{5^n\cdot n(n-1)}=\sum_{k=2}^{n}a_k$

$$=\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{5^{k-1}\cdot(k-1)}-\frac{1}{5^k\cdot k}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5^2\cdot 2}\right)+\left(\frac{1}{5^2\cdot 2}-\frac{1}{5^3\cdot 3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5^{n-1}\cdot(n-1)}-\frac{1}{5^n\cdot n}\right)$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{5^n\cdot n}$$

នាំឱ្យ $\frac{9}{5^2\cdot 2\cdot 1}+\frac{13}{5^3\cdot 3\cdot 2}+\frac{17}{5^4\cdot 4\cdot 3}+\cdots=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5^n\cdot n}\right)=\frac{1}{5}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ផលបូកនៃស៊េរី}\ \ \frac{9}{5^2\cdot 2\cdot 1}+\frac{13}{5^3\cdot 3\cdot 2}+\frac{17}{5^4\cdot 4\cdot 3}+\cdots=\frac{1}{5}}$

លំហាត់ទី១៩

ចំពោះចំនួនគត់សេស $n \geq 1$ គណនាផលបូក $n^3-(n-1)^3+(n-2)^3-(n-3)^3+\cdots+(-1)^{n-1}1^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន n ជាចំនួនគត់សេស នាំឱ្យ $n-1$ ជាចំនួនគត់គូ គេបាន $(-1)^{n-1}=1$

គេបាន $n^3-(n-1)^3+(n-2)^3-(n-3)^3+\cdots+(-1)^{n-1}1^3$

$$=n^3-(n-1)^3+(n-2)^3-(n-3)^3+\cdots+1^3$$

$$=n^3+(n-1)^3+(n-2)^3+\cdots+1^3-3\left[(n-1)^3+(n-3)^3+(n-5)^3+\cdots+4^3+2^3\right]$$

$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2-2\times 2^3\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^3+\left(\frac{n-3}{2}\right)^3+\cdots+3^3+2^3+1^3\right]$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}-16\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\right]^2$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}-4\left[\frac{(n-1)(n+1)}{4}\right]^2$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{(n-1)^2(n+1)^2}{4}$$

$$=\frac{(n+1)^2}{4}\left[n^2-(n-1)^2\right]=\frac{(2n-1)(n+1)^2}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{n^3-(n-1)^3+(n-2)^3-(n-3)^3+\cdots+(-1)^{n-1}1^3=\frac{(2n-1)(n+1)^2}{4}}$

លំហាត់ទី២០

គេឱ្យ p,q,r ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $27pqr \geq (p+q+r)^3$ និង $3p+4q+5r=12$ ។

គណនាតម្លៃនៃ $p^3+q^4+r^5$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $27pqr \geq (p+q+r)^3 \qquad (1)$

តែតាមវិសមភាពកូស៊ី $p+q+r \geq 3\sqrt[3]{pqr} \iff 27pqr \leq (p+q+r)^3 \qquad (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន $27pqr = (p+q+r)^3$

នោះតាមវិសមភាពកូស៊ី សមភាពកើតមានកាលណា $p = q = r$

តែដោយ $3p + 4q + 5r = 12 \Longleftrightarrow p = q = r = 1$

គេបាន $p^3 + q^4 + r^5 = 1 + 1 + 1 = 3$

ដូចនេះ $\boxed{p^3 + q^4 + r^5 = 3}$

លំហាត់ទី២១

គណនាផលបូក $S_n = \dfrac{1}{1+1^2+1^4} + \dfrac{2}{1+2^2+2^4} + \dfrac{3}{1+3^2+3^4} + \cdots + \dfrac{n}{1+n^2+n^4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $a_k = \dfrac{k}{1+k^2+k^4} = \dfrac{k}{(1+k^2)^2 - k^2} = \dfrac{k}{(1-k+k^2)(1+k+k^2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-k+k^2} - \dfrac{1}{1+k+k^2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+(k-1)+(k-1)^2} - \frac{1}{1+k+k^2}\right] \ , \quad k \geq 2$$

គេបាន $S_n = \dfrac{1}{1+1^2+1^4} + \dfrac{2}{1+2^2+2^4} + \dfrac{3}{1+3^2+3^4} + \cdots + \dfrac{n}{1+n^2+n^4}$

$$= \frac{1}{1+1^2+1^4} + \sum_{k=2}^{n} a_k$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{1+(k-1)+(k-1)^2} - \frac{1}{1+k+k^2}\right]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1+1+1^2} - \frac{1}{1+2+2^2}\right) + \left(\frac{1}{1+2+2^2} - \frac{1}{1+3+3^2}\right) + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \left(\frac{1}{1+(n-1)+(n-1)^2} - \frac{1}{1+n+n^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1+n+n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+n+n^2)} = \frac{1+n+n^2-1}{2(1+n+n^2)} = \frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}}$

លំហាត់ទី២២

បើ $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = a$ និង $\sum_{n=1}^{+\infty} y^{n-1} = b$ ដែល $|x| < 1, |y| < 1$ ។ គណនា $\sum_{n=1}^{+\infty} (xy)^{n-1}$ ជាអនុគមន៍នៃ a, b ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $a = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$

$\Longrightarrow 1 - x = \dfrac{1}{a} \Longrightarrow x = 1 - \dfrac{1}{a} = \dfrac{a-1}{a}$

ហើយ $b = \sum_{n=1}^{+\infty} y^{n-1} = 1 + y + y^2 + y^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-y}$

$\Longrightarrow 1 - y = \dfrac{1}{b} \Longrightarrow y = 1 - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-1}{b}$

គេបាន $\sum_{n=1}^{+\infty} (xy)^{n-1} = 1 + (xy) + (xy)^2 + (xy)^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-xy}$

$$= \frac{1}{1 - \frac{a-1}{a} \times \frac{b-1}{b}} = \frac{ab}{ab - (a-1)(b-1)}$$

$$= \frac{ab}{ab - ab + a + b - 1} = \frac{ab}{a+b-1}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (xy)^{n-1} = \dfrac{ab}{a+b-1}}$

លំហាត់ទី២៣

បើ $\lambda = \sum_{i=1}^{+\infty} \dfrac{1}{i^4}$ ។ គណនា $\sum_{i=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2i-1)^4}$ ជាអនុគមន៍នៃ λ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\lambda = \sum_{i=1}^{+\infty} \dfrac{1}{i^4} = 1 + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{4^4} + \cdots$

គេបាន $\sum_{i=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2i-1)^4} = 1 + \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{5^4} + \dfrac{1}{7^4} + \cdots$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \cdots\right)$$

$$= \lambda - \frac{1}{2^4}\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right) = \lambda - \frac{1}{16}\lambda = \frac{15}{16}\lambda$$

ដូចនេះ $\boxed{\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{(2i-1)^4}=\frac{15}{16}\lambda}$

លំហាត់ទី២៤

រកតម្លៃអប្បរមានៃកន្សោម $8^{\sin\frac{x}{8}}+8^{\cos\frac{x}{8}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាពកូស៊ី គេបាន

$8^{\sin\frac{x}{8}}+8^{\cos\frac{x}{8}}\geq 2\sqrt{8^{\sin\frac{x}{8}}\times 8^{\cos\frac{x}{8}}}$

តែ $8^{\sin\frac{x}{8}}\times 8^{\cos\frac{x}{8}}=8^{\sin\frac{x}{8}+\cos\frac{x}{8}}$

$$=8^{\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{8}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=2^{3\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{8}-\frac{\pi}{2}\right)}$$

តម្លៃធំបំផុតនៃ $2^{3\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{8}-\frac{\pi}{2}\right)}$ គឺ $2^{3\sqrt{2}}=2^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$

គេបាន $8^{\sin\frac{x}{8}}+8^{\cos\frac{x}{8}}\geq 2\times 2^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$

ឬ $8^{\sin\frac{x}{8}}+8^{\cos\frac{x}{8}}\geq 2^{\frac{3\sqrt{2}+2}{2}}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃអប្បរមាគឺ } 2^{\frac{3\sqrt{2}+2}{2}}}$

លំហាត់ទី២៥

រកមេគុណនៃ x^{49} នៃផលគុណ $(x-1)(x-3)\cdots(x-99)$ ។

ដំណោះស្រាយ

មេគុណនៃ x នៃផលគុណ $(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$ គឺ $-1-3=-4$

មេគុណនៃ x^2 នៃផលគុណ $(x-1)(x-3)(x-5)=x^3-9x^2+23x-15$ គឺ $-1-3-5=-9$

មេគុណនៃ x^3 នៃផលគុណ $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)=x^4-16x^3+86x^2-176x+105$

គឺ $-1-3-5-7=-16$

មេគុណនៃ x^{49} គឺ $-(1+3+5+\cdots+99)=-50^2=-2500$

លំហាត់ទី២៦

គណនាផលបូក $\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+\cdots+\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+9^3}{1+3+5+\cdots+17}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $a_k=\dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3}{1+3+5+\cdots+(2k-1)}=\dfrac{\left[\dfrac{k(k+1)}{2}\right]^2}{k^2}=\dfrac{(k+1)^2}{4}$

គេបាន $\dfrac{1^3}{1}+\dfrac{1^3+2^3}{1+3}+\dfrac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+\cdots+\dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+9^3}{1+3+5+\cdots+17}$

$$=\sum_{k=1}^{9}a_k=\sum_{k=1}^{9}\left[\frac{(k+1)^2}{4}\right]=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{9}(k+1)^2$$

$$=\frac{1}{4}(2^2+3^2+4^2+\cdots+10^2)$$

$$=\frac{1}{4}\left[(1^2+2^2+3^2+\cdots10^2)-1\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{10\times11\times21}{6}-1\right]=\frac{1}{4}(385-1)=96$$

ដូនចេះ $\boxed{\dfrac{1^3}{1}+\dfrac{1^3+2^3}{1+3}+\dfrac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+\cdots+\dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+9^3}{1+3+5+\cdots+17}=96}$

លំហាត់ទី២៧

គណនាផលបូកនៃស៊េរី $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{(\sqrt{2})^k}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{(\sqrt{2})^2}+\frac{5}{(\sqrt{2})^3}+\cdots+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$

$$\sqrt{2}S_n=\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{(\sqrt{2})^2}+\frac{5}{(\sqrt{2})^3}+\cdots+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}\right]$$

$$=1+\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{5}{(\sqrt{2})^2}+\frac{7}{(\sqrt{2})^3}+\cdots+\frac{2n-3}{(\sqrt{2})^{n-2}}+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^{n-1}}$$

$$=1+\frac{2+1}{\sqrt{2}}+\frac{2+3}{(\sqrt{2})^2}+\frac{2+5}{(\sqrt{2})^3}+\cdots+\frac{2+2n-5}{(\sqrt{2})^{n-2}}+\frac{2+2n-3}{(\sqrt{2})^{n-1}}$$

$$=1+\left[\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{2}{(\sqrt{2})^3}+\cdots+\frac{2}{(\sqrt{2})^{n-1}}\right]+$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{(\sqrt{2})^2}+\frac{5}{(\sqrt{2})^3}+\cdots+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}\right]-\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$$

$$=1+2\times\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}\right)}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}+S_n-\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$$

$$(\sqrt{2}-1)S_n=1+\frac{2}{\sqrt{2}-1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}\right)-\frac{2n-1}{\sqrt{2^n}}$$

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{2}{(\sqrt{2}-1)^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}\right)-\frac{2n-1}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2^n}}$$

$$=\sqrt{2}+1+2(\sqrt{2}+1)^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}\right)-\frac{2n-1}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2^n}}$$

គេបាន $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{2}+1+2(\sqrt{2}+1)^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}\right)-\frac{2n-1}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2^n}}\right]$

$$=\sqrt{2}+1+2(\sqrt{2}+1)^2=7+5\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}=7+5\sqrt{2}}$

លំហាត់ទី២៨

គេមាន $S_n=\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{C(n,r)}$ និង $P_n=\sum_{r=0}^{n}\frac{r}{C(n,r)}$ ដែល $C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ ។ គណនា $\frac{P_n}{S_n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $S_n=\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{C(n,r)}=\frac{1}{C(n,0)}+\frac{1}{C(n,1)}+\frac{1}{C(n,2)}+\cdots+\frac{1}{C(n,n)}$

$$P_n=\sum_{r=0}^{n}\frac{r}{C(n,r)}=\frac{0}{C(n,0)}+\frac{1}{C(n,1)}+\frac{2}{C(n,2)}+\cdots+\frac{n-1}{C(n,n-1)}+\frac{n}{C(n,n)} \quad .....(1)$$

$$P_n=\frac{n}{C(n,n)}+\frac{n-1}{C(n,n-1)}+\cdots+\frac{2}{C(n,2)}+\frac{1}{C(n,1)}+\frac{0}{C(n,0)}$$

$$=\frac{n}{C(n,0)}+\frac{n-1}{C(n,1)}+\frac{n-2}{C(n,2)}+\cdots+\frac{1}{C(n,n-1)}+\frac{0}{C(n,n)} \quad ......(2)$$

យក $(1)+(2)$ គេបាន

$$\Longrightarrow 2P_n = n\left[\frac{1}{C(n,0)}+\frac{1}{C(n,1)}+\frac{1}{C(n,2)}+\cdots+\frac{1}{C(n,n)}\right] = nS_n \Longrightarrow \frac{P_n}{S_n}=\frac{n}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{P_n}{S_n}=\frac{n}{2}}$

លំហាត់ទី២៩

រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_0=3, x_1=4$ និង $x_{n+1}=x_{n-1}^2-nx_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងនឹងស្រាយថា $x_n=n+3$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n=0,1,2,3,...,n$

❄ បើ $n=0,1$ គេបាន $x_0=3, x_1=4$ ពិត

❄ ឧបមាថាពិតដល់ $n=k$ គឺ $x_k=k+3$

❄ ចំពោះ $n=k+1$

គេមាន $x_{k+1}=x_{k-1}^2-kx_k=(k+2)^2-k(k+3)=k^2+4k+4-k^2-3k=(k+1)+3$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{x_n=n+3 \text{ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ } n\geq 0}$

លំហាត់ទី៣០

គេឱ្យ $x_1,x_2,...,x_n$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

(i) $-1\leq x_i\leq 2$, ចំពោះ $i=1,2,...,n$

(ii) $x_1+x_2+\cdots+x_n=19$

(iii) $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=99$

រកតម្លៃតូចបំផុត និងធំបំផុតនៃ $x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $x_1,x_2,...,x_n$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ នោះតាម (i) គេបាន $x_i=-1$ ឬ $x_i=0$ ឬ $x_i=1$ ឬ $x_i=2$ ចំពោះ $i=1,2,...,n$

តាង a,b,c ជាចំនួនតួនៃស្វ៊ីតដែលមានតម្លៃស្មើ $-1,1,2$ រៀងគ្នា នោះ a,b,c ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន

តាម (ii) និង (iii) គេបាន $\begin{cases} -a+b+2c=19 \\ a+b+4c=99 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a=40-c \\ b=59-3c \end{cases}$

តែដោយ $b \geq 0 \Longleftrightarrow 59-3c \geq 0 \Longleftrightarrow 0 \leq c \leq 19$

គេបាន $x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3=-a+b+8c=-(40-c)+(59-3c)+8c=19+6c$

ដោយ $0 \leq c \leq 19 \Longleftrightarrow 19 \leq 19+6c \leq 133 \Longleftrightarrow 19 \leq x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3 \leq 133$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃតូចបំផុតគឺ 19 និងធំបំផុតគឺ 133}}$

លំហាត់ទី៣១

ចំពោះស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots\}$ តាង ΔA ជាស្វ៊ីតនៃ $\{a_2-a_1,a_3-a_2,a_4-a_3,\ldots\}$ ។ បើគ្រប់តួនៃស្វ៊ីត $\Delta(\Delta A)$ ស្មើនឹង 1 និង $a_{19}=a_{92}=0$ ចូររក a_1 ។

ដំណោះស្រាយ

តាង d ជាតម្លៃនៃតួទីមួយនៃស្វ៊ីត ΔA

គេបាន $\Delta A=\{d,d+1,d+2,d+3,\ldots\}$ ព្រោះ $\Delta(\Delta A)=\{1,1,1,\ldots,1\}$

នាំឱ្យ ΔA ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ដែលមានតួទី n គឺ $d+n-1$

គេបាន $A=\{a_1,a_1+d,a_1+d+(d+1),a_1+d+(d+1)+(d+2),\ldots\}$

គេបានទំនាក់ទំនង n នៃ A គឺ $a_n=a_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(d+k-1)=a_1+(d-1)(n-1)+\frac{1}{2}n(n-1)$

ដោយ $\begin{cases} a_{19}=0 \\ a_{92}=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1+18(d-1)+171=0 \\ a_1+91(d-1)+4186=0 \end{cases} \Longleftrightarrow a_1=819$

ដូចនេះ $\boxed{a_1=819}$

លំហាត់ទី៣២

គេមាន $(a_n)_{n\geq 1}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត ដែល $a_1=2$ និង $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ។ កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីតនេះ។

ដំណោះស្រាយ

សមីការសម្គាល់ $x=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x} \Longrightarrow 2x^2=x^2+2 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

គេបាន $a_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}-\sqrt{2}=\frac{a_n^2-2\sqrt{2}a_n+2}{2a_n}=\frac{(a_n-\sqrt{2})^2}{2a_n}$ ...(1)

ហើយ $a_{n+1}+\sqrt{2}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}+\sqrt{2}=\frac{a_n^2+2\sqrt{2}a_n+2}{2a_n}=\frac{(a_n+\sqrt{2})^2}{2a_n}$ ...(2)

យក (1) ចែក (2) គេបាន $\frac{a_{n+1}-\sqrt{2}}{a_{n+1}+\sqrt{2}}=\frac{(a_n-\sqrt{2})^2}{(a_n+\sqrt{2})^2}=\left(\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}\right)^2$

តាង $b_n=\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}$ គេបាន $b_{n+1}=b_n^2$

$\Longrightarrow b_n=(b_{n-1})^2=(b_{n-2})^{2^2}=(b_{n-3})^{2^3}=\cdots=(b_1)^{2^{n-1}}$

គេបាន $\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}=\left(\frac{a_1-\sqrt{2}}{a_1+\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}}=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}}=\left(\frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}\right)^{2^{n-1}}=(\sqrt{2}-1)^{2^n}$

$\Longrightarrow a_n-\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^{2^n}(a_n+\sqrt{2})=(\sqrt{2}-1)^{2^n}a_n+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{2^n}$

$\Longrightarrow a_n\left[(\sqrt{2}-1)^{2^n}-1\right]=-\sqrt{2}-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{2^n}=-\sqrt{2}\left[1+(\sqrt{2}-1)^{2^n}\right]$

$\Longrightarrow a_n=\frac{-\sqrt{2}\left[1+(\sqrt{2}-1)^{2^n}\right]}{(\sqrt{2}-1)^{2^n}-1}=\frac{\sqrt{2}\left[1+(\sqrt{2}-1)^{2^n}\right]}{1-(\sqrt{2}-1)^{2^n}}$

ដូចនេះ $\boxed{a_n=\frac{\sqrt{2}\left[1+(\sqrt{2}-1)^{2^n}\right]}{1-(\sqrt{2}-1)^{2^n}}}$