រៀបរៀងដោយ លោក តាត់ វិសុទ្ធី
សាស្ត្រាចារ្យ គណិតវិទ្យា
នៃវិទ្យាល័យបាក់ទូក

លោក លឹម ផល្គុន
បរិញ្ញាបត្រផ្នែកគណិតវិទ្យា

123

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

សម្រាប់សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា

☞ រួមមាន ៖

- មេរៀនសង្ខេប
- 123 លំហាត់ជ្រើសរើសពិសេស
- ដំណោះស្រាយខ្លីៗតែច្បាស់លាស់

123

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

សម្រាប់សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា

គណៈកម្មការរៀបរៀង និង និពន្ធ

លោក **លឹម ផល្គុន** លោក **គាត់ វិសុទ្ធី**

លោក **យ៉ង់ ឆារី** លោក **សែន ពិសិដ្ឋ**

លោក **អ៊ឹង សំណាង**

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក **អ៊ឹង សំណាង** លោក **យ៉ង់ ឆារី**

លោក **សែន ពិសិដ្ឋ** លោក **ព្រឹម សុខនិត្យ**

លោក **ផល ម៉ុនឆាយ** លោកស្រី **ឱុយ រីណា**

អ្នករចនាក្រប

លោក **អ៊ឹង សំណាង**

បច្ចេកទេសកុំព្យូទ័រ

លោក **អ៊ឹង សំណាង** លោក **លឹម ផល្គុន**

អ្នកត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក **លឹម មិគ្គសិរ** យុវសិស្ស **យន វ៉ាន់នី**

◇◇◇◇◇☺◇◇◇◇◇

អារម្ភកថា

សួស្តីប្រិយ៍មិត្តអ្នកសិក្សាជាទីស្រឡាញ់រាប់អាន ! សៀវភៅដែលអ្នកសិក្សាកំពុងតែកាន់អាននៅក្នុងដៃនេះ យើងខ្ញុំអ្នកនិពន្ធ និង រៀបរៀងបានប្រមូលផ្តុំនូវលំហាត់ល្អៗផ្នែកអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រចំនួន 102 លំហាត់យកមកធ្វើដំណោះស្រាយគំរូខ្លីៗ តែច្បាស់លាស់ ដែលអាចធ្វើឲ្យប្រិយ៍មិត្តអ្នកសិក្សាងាយយល់ និងឆាប់ចងចាំអំពីល្បិចដោះស្រាយទាំងនោះ ហើយម្យ៉ាងទៀតលំហាត់ទាំងនេះសុទ្ធតែល្អៗដែលអាច និងចេញប្រឡងនានាដូចជាអាហារូបករណ៍នានា ក៏ដូចជាសិស្សពូកែ ដែលនេះជាចំណុចទាក់ទាញការចាប់អារម្មណ៍របស់យើងខ្ញុំដើម្បីរៀបរៀង និងបោះពុម្ពផ្សព្វផ្សាយសៀវភៅនេះឡើង ។

ម្យ៉ាងទៀតដើម្បីជាជំនួយក្នុងការអានសៀវភៅនេះ យើងខ្ញុំអ្នករៀបរៀងបានបែងចែកសៀវភៅនេះជាបីជំពូក ។ ជំពូកទី១ យើងខ្ញុំបានរំលឹកទ្រឹស្តីនិងរូបមន្តសំខាន់ៗដែលត្រូវយកទៅប្រើប្រាស់ក្នុងដំណោះស្រាយលំហាត់នីមួយៗ ។ ជំពូកទី២ ជាកម្រងលំហាត់ជ្រើសរើសចំនួន 102 លំហាត់ និង ជំពូកទី៣ ជាផ្នែកដំណោះស្រាយលំហាត់ទាំង 102 ។

ជាចុងបញ្ចប់យើងខ្ញុំអ្នករៀបរៀងសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះនឹងអាចចូលរួមចំណែកពង្រឹងចំណេះដឹងនិងពង្រីកការចាប់អារម្មណ៍ក្នុងវិស័យគណិតវិទ្យាជាក់ជាមិនខាន។

បាត់ដំបង ថ្ងៃទី ១២ ខែធ្នូ ឆ្នាំ ២០១២

អ្នករៀបរៀង **លឹម ផល្គុន**

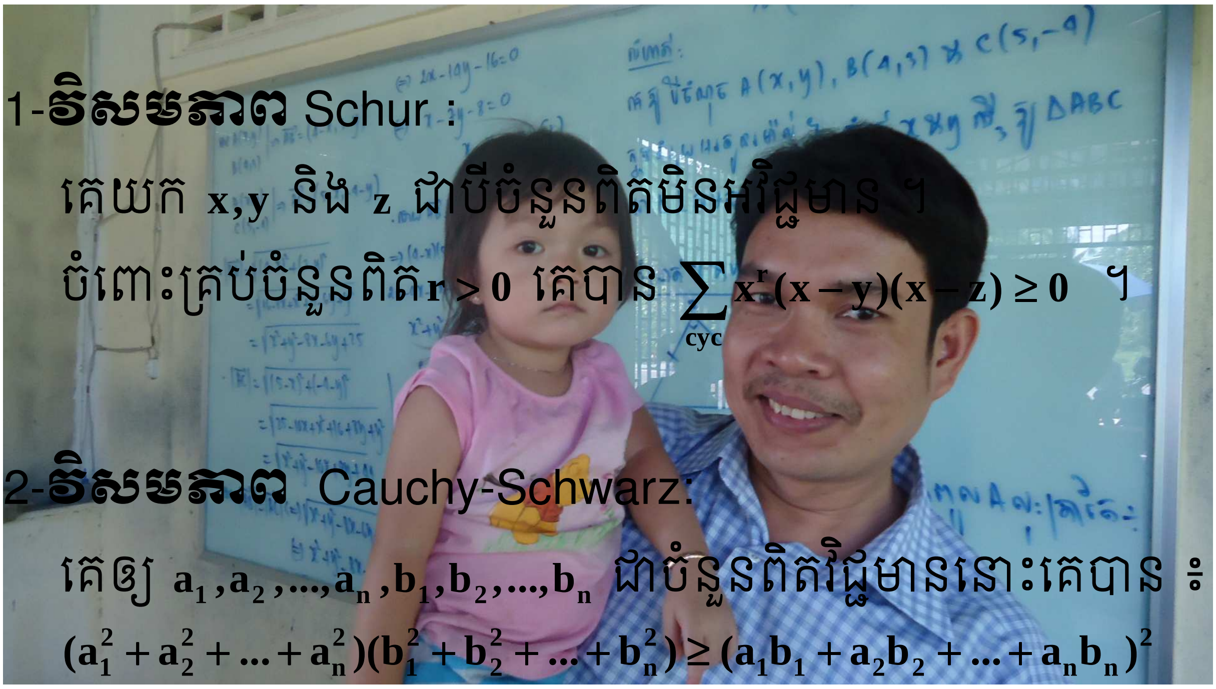
Tel : (017) 768 246

(077) 549 491

ជំពូកទី០១

សង្ខេបរូបមន្តសំខាន់ៗ

ទ្រឹស្តីបទវិសមភាព



1-**វិសមភាព** Schur :

គេយក x,y និង z ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $r>0$ គេបាន $\sum_{cyc} x^r(x-y)(x-z)\ge 0$ ។

2-**វិសមភាព** Cauchy-Schwarz:

គេឲ្យ $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាននោះគេបាន ៖

$$(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2$$

3-**វិសមភាព** AM-GM:

គេឲ្យ $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ ជា n ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។

គេបាន $\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2a_3...a_n}$ ។

វិសមភាពនេះពិតលុះត្រាតែ $a_1=a_2=...=a_n$ ។

4-វិសមភាព Holder :

គេឲ្យ $x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

សន្មតថា $p>1$ និង $q>1$ ដែល $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ នោះគេបាន

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$ ។

5-វិសមភាព Bernoulli :

ចំពោះគ្រប់ $r\ge 1$ និង $x\ge -1$ គេបាន $(1+x)^r\ge 1+rx$ ។

6-វិសមភាព Chebyshev:

គេឲ្យចំនួនពិត $x_1\ge x_2\ge ...\ge x_n$ និង $y_1\ge y_2\ge ...\ge y_n$ ។

គេបាន

$$\frac{x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n}{n}\ge \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}.\frac{y_1+y_2+...+y_n}{n}$$

7-វិសមភាព Minkowski:

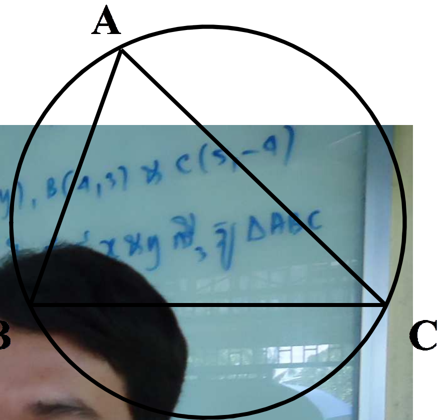
គេឲ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_n$ និង $p>1$ ។

គេបាន $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\ge \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ។

ទ្រឹស្តីបទក្នុងត្រីកោណ

1-ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង
$BC = a, AC = b, AB = c$
ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R ។



គេបាន $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

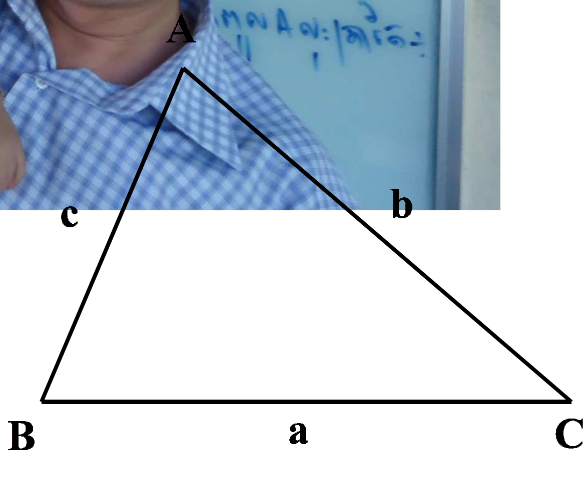
2-ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង
$BC = a, AC = b, AB = c$ គេបាន៖

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

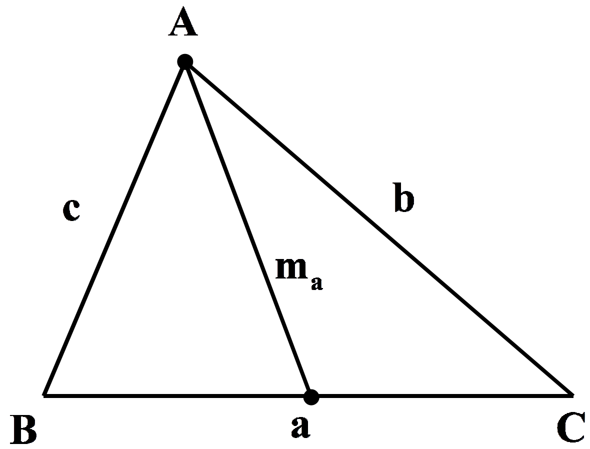


3-ទ្រឹស្តីបទមេដ្យាន

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$$m_b^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$$

$$m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

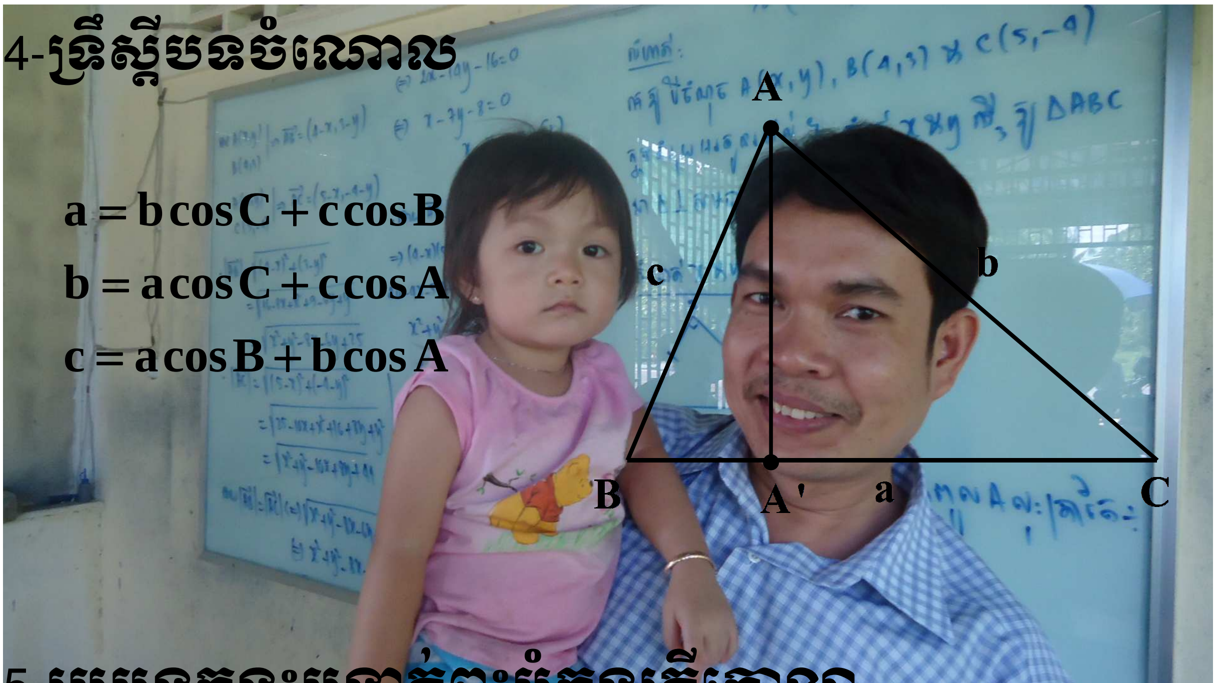


4-ទ្រឹស្តីបទចំណោល

$$a = b\cos C + c\cos B$$

$$b = a\cos C + c\cos A$$

$$c = a\cos B + b\cos A$$

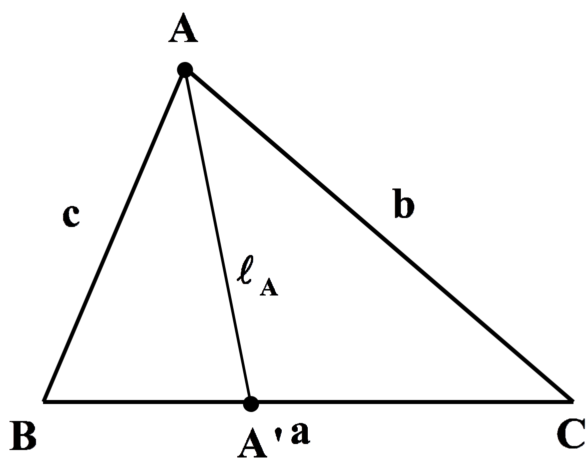


5-រូបមន្តកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុងត្រីកោណ

$$\ell_A = \frac{2bc}{b+c}.\cos\frac{A}{2}$$

$$\ell_B = \frac{2ac}{a+c}.\cos\frac{B}{2}$$

$$\ell_c = \frac{2ab}{a+b}.\cos\frac{C}{2}$$



6-រូបមន្តកន្លះមុំក្នុងត្រីកោណ

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a, AC = b, AB = c$

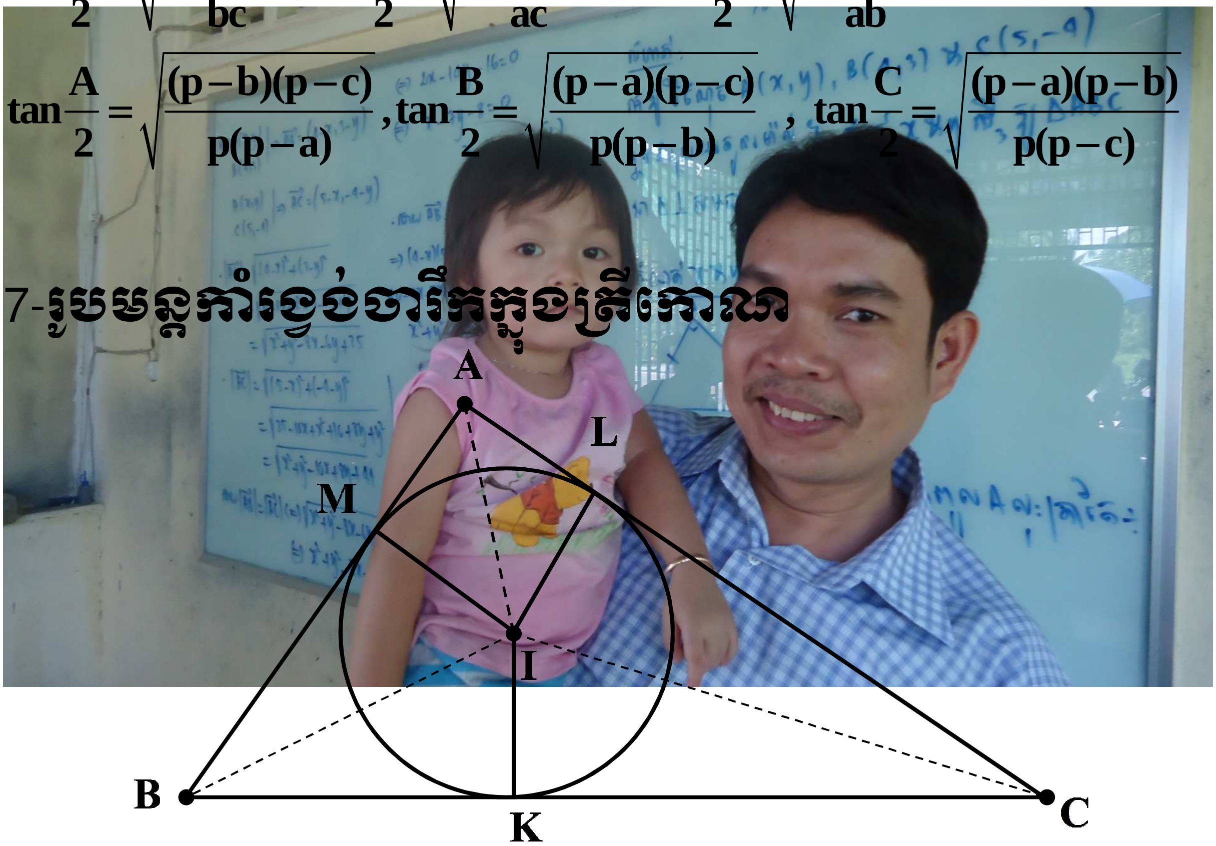
តាង $p = \frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\ ,\ \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\ ,\ \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\ ,\ \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\ ,\ \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

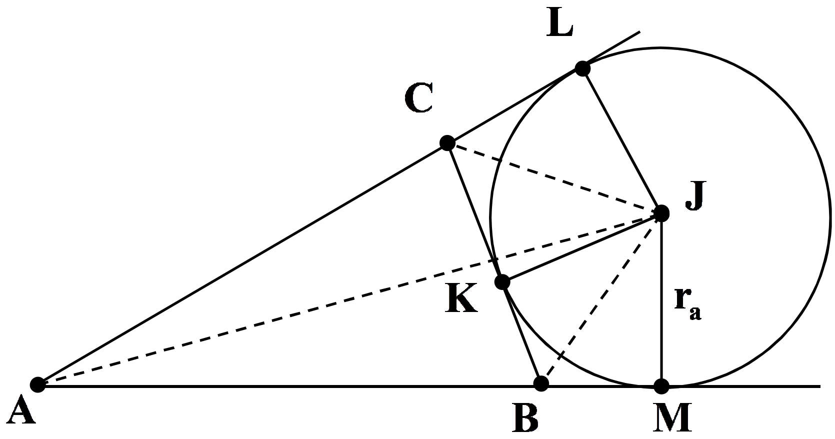
$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\ ,\ \tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}\ ,\ \tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

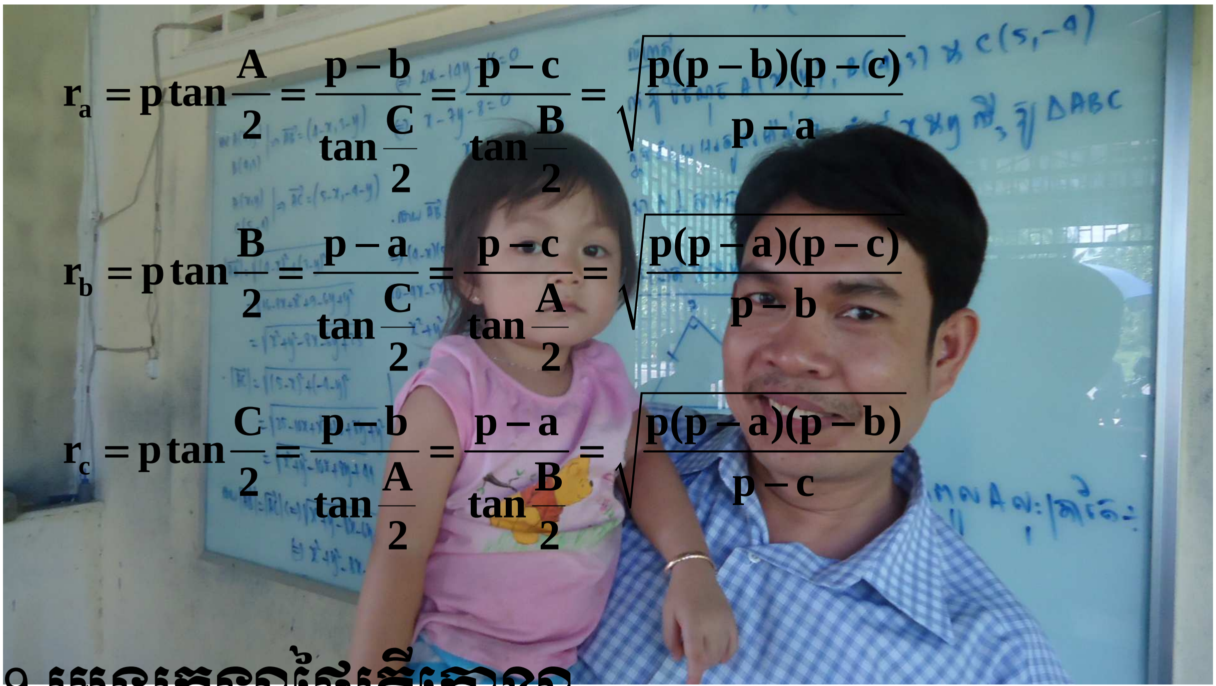
7-រូបមន្តកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ



$$r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

8-រូបមន្តកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំមួយនៃត្រីកោណ





$$r_a = p\tan\frac{A}{2} = \frac{p-b}{\tan\frac{C}{2}} = \frac{p-c}{\tan\frac{B}{2}} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$$

$$r_b = p\tan\frac{B}{2} = \frac{p-a}{\tan\frac{C}{2}} = \frac{p-c}{\tan\frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}$$

$$r_c = p\tan\frac{C}{2} = \frac{p-b}{\tan\frac{A}{2}} = \frac{p-a}{\tan\frac{B}{2}} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

9-រូបមន្តក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$

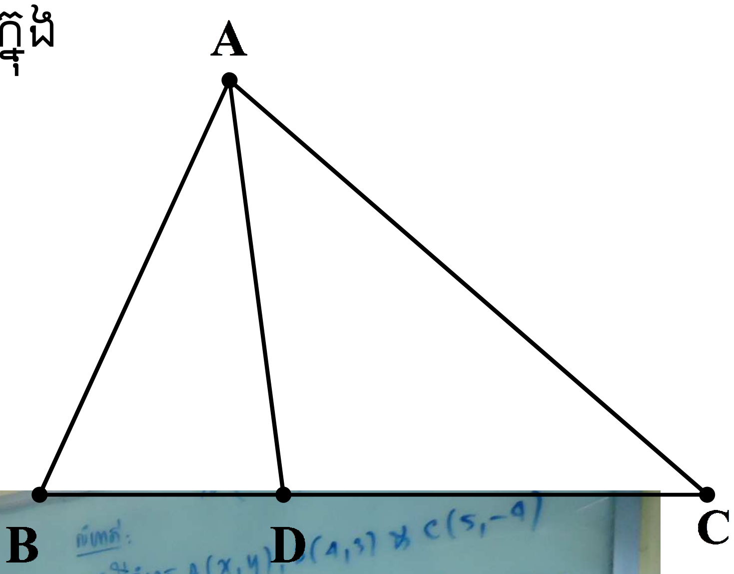
$$= pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R} = \sqrt{rr_ar_br_c}$$

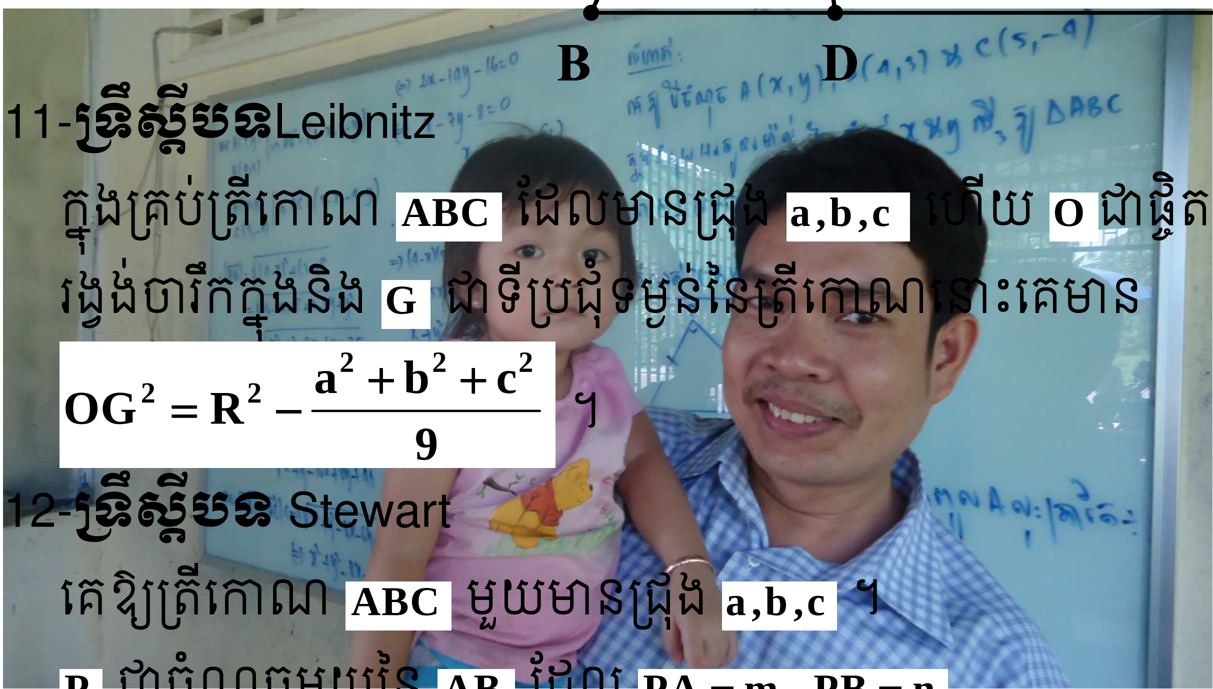
$$= (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c = 2R^2\sin A\sin B\sin C$$

10-ទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុងត្រីកោណ

បើ AD ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុង

គេបាន $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DC}$ ។





11-ទ្រឹស្តីបទLeibnitz

ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ដែលមានជ្រុង a,b,c ហើយ O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនិង G ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណនោះគេមាន

$OG^2=R^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{9}$ ។

12-ទ្រឹស្តីបទ Stewart

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

P ជាចំណុចមួយនៃ AB ដែល $PA=m$, $PB=n$

និង $m+n=c$ ។

គេបាន $ma^2+nb^2=(m+n).PC^2+mn^2+nm^2$ ។

13-ទ្រឹស្តីបទអឺលែ

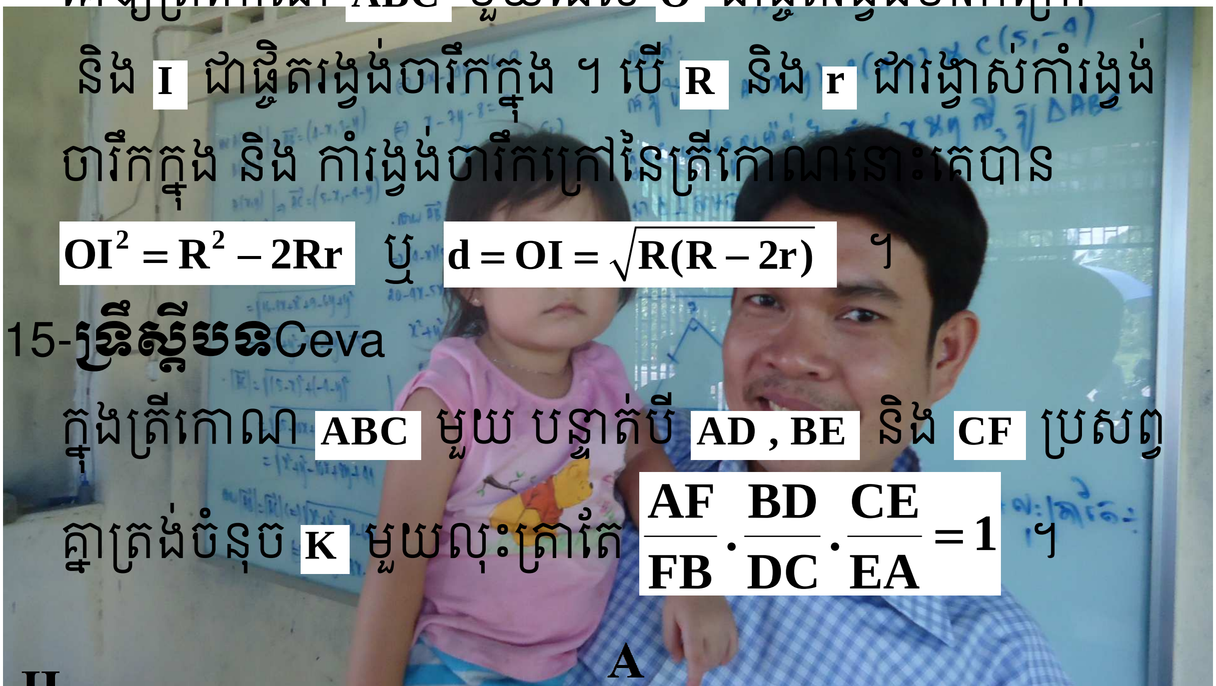
គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង **a,b,c** ។ តាង **I** ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនេះ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនុច **X** នៃប្លង់គេមានទំនាក់ទំនង៖

$$a.XA^2 + b.XB^2 + c.XC^2 = (a+b+c).XI^2 + abc$$ ។

14-ចម្ងាយរវាងផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយដែល **O** ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ

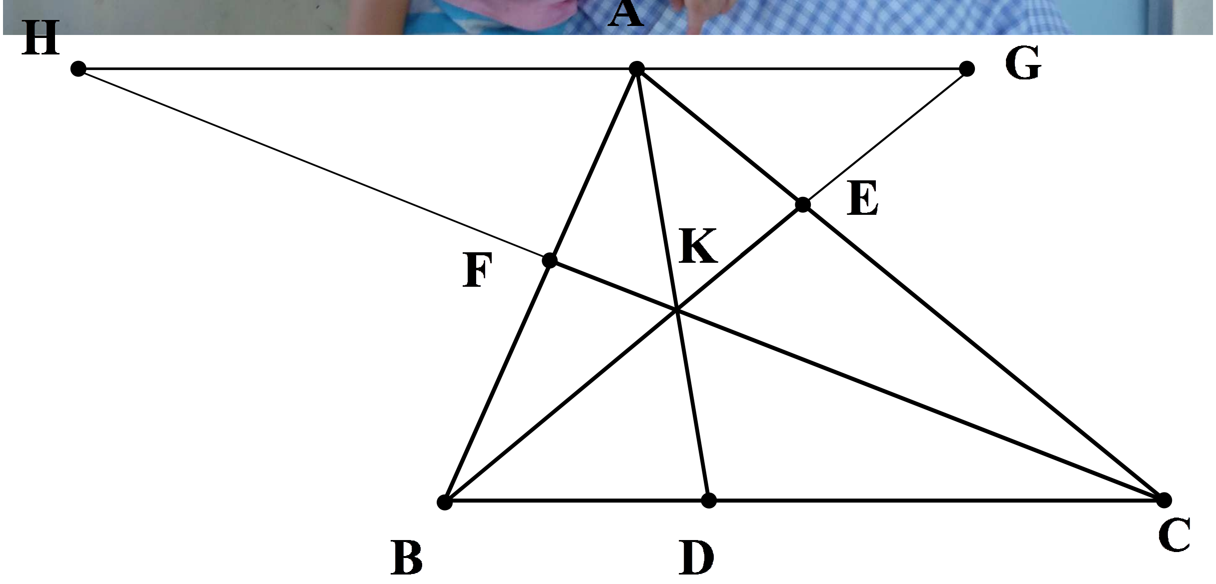


និង **I** ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង ។ បើ **R** និង **r** ជារង្វាស់កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណនោះគេបាន

$OI^2 = R^2 - 2Rr$ ឬ $d = OI = \sqrt{R(R-2r)}$ ។

15-ទ្រឹស្តីបទCeva

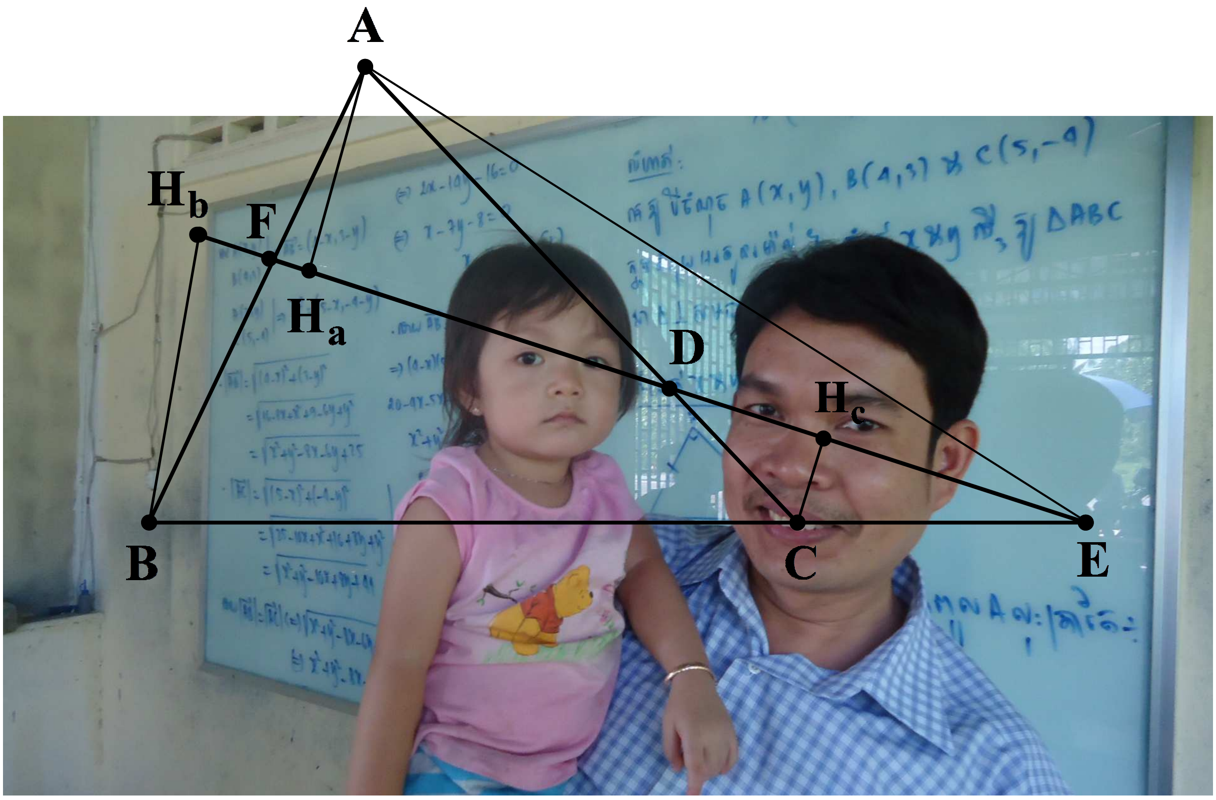
ក្នុងត្រីកោណ **ABC** មួយ បន្ទាត់បី **AD , BE** និង **CF** ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំនុច **K** មួយលុះត្រាតែ $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA} = 1$ ។



16-ទ្រឹស្តីបទ Menelaus

យកបីចំនុច **F,D** និង **E** ស្ថិតរៀងគ្នាលើជ្រុង **AB , BC** និង **AC** នៃត្រីកោណ **ABC** នោះចំណុចបីនេះរត់ត្រង់គ្នាបើ

$$\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}=1$$



អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

1-ទំនាក់ទំនងគ្រឹះ

ក/ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

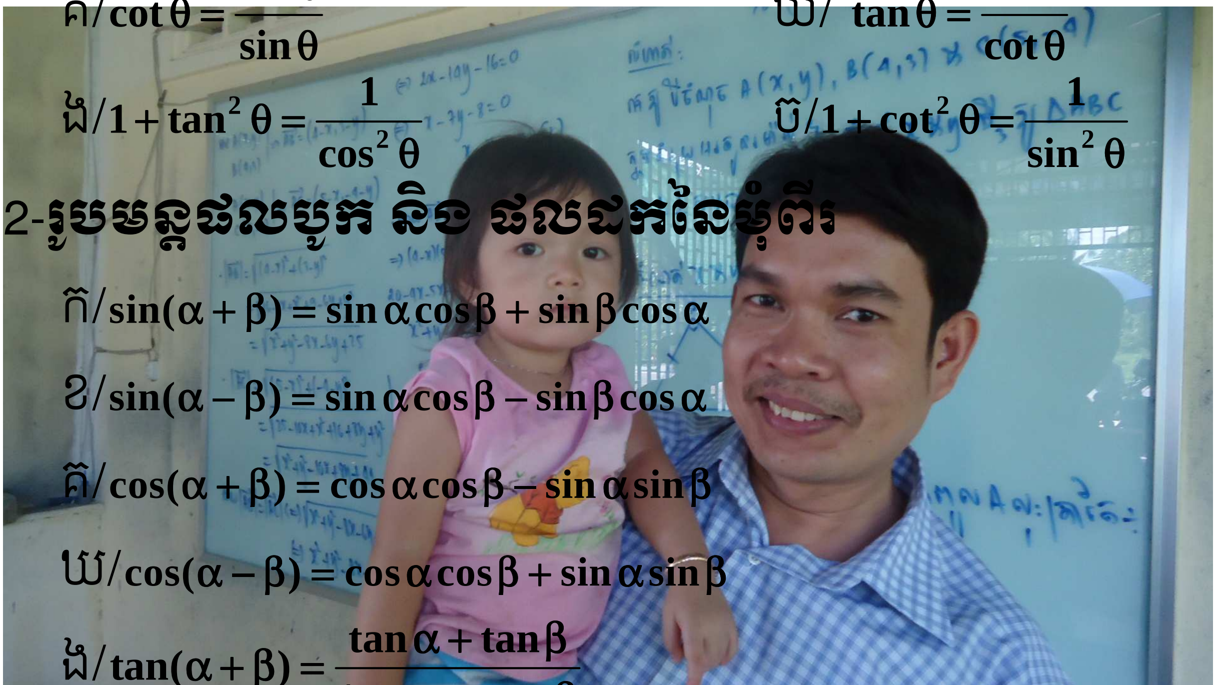
ខ/ $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

គ/ $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

ឃ/ $\tan\theta=\dfrac{1}{\cot\theta}$

ង/ $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

ច/ $1+\cot^2\theta=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$



2-រូបមន្តផលបូក និង ផលដកនៃមុំពីរ

ក/ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

ខ/ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

គ/ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

ឃ/ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

ង/ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

ច/ $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

3-រូបមន្តមុំឌុប និង មុំទ្រីប

ក/ $\sin 2a=2\sin a\cos a=\dfrac{2\tan a}{1+\tan^2 a}$

ខ/ $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a=\dfrac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$

គ/ $\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

ឃ/ $\cot 2a=\dfrac{\cot^2 a-1}{2\cot a}$

ង/ $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$

ច/ $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

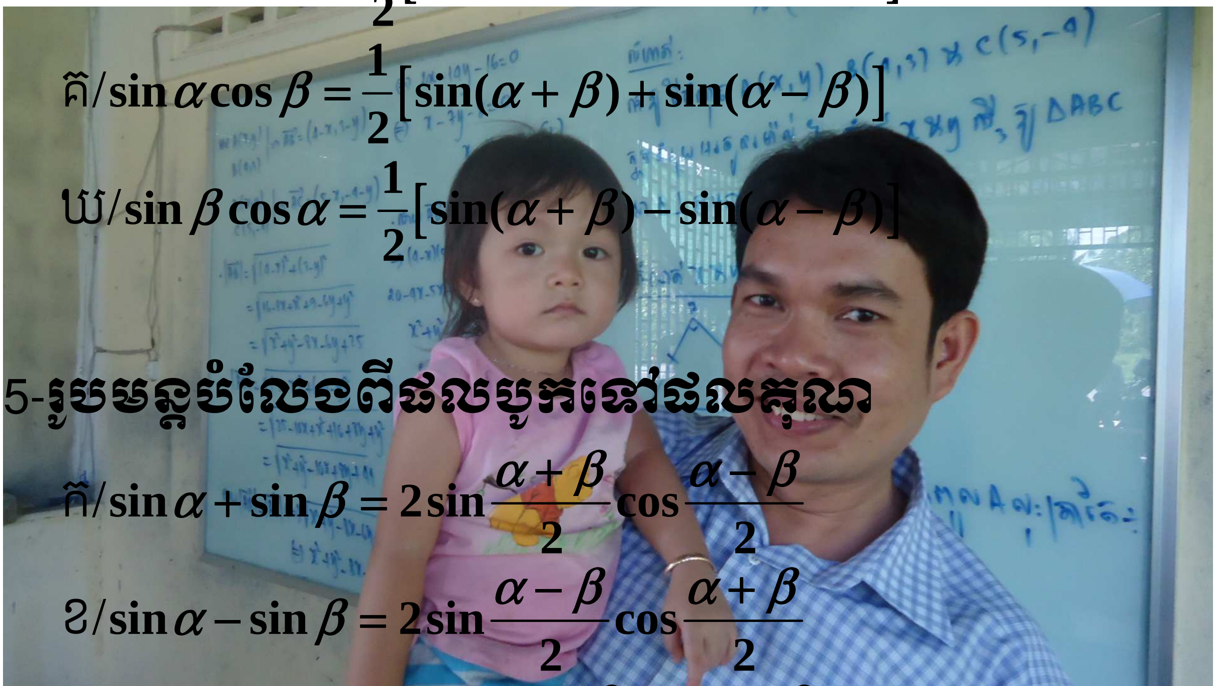
ឆ/ $\tan 3a = \dfrac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$

ជ/ $\cot 3a = \dfrac{\cot^3 a - 3\cot a}{3\cot^2 a - 1}$

4-រូបមន្តបំលែងពីផលគុណទៅផលបូក

ក/ $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$

ខ/ $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$



គ/ $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$

ឃ/ $\sin\beta\cos\alpha = \dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]$

5-រូបមន្តបំលែងពីផលបូកទៅផលគុណ

ក/ $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

ខ/ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

គ/ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

ឃ/ $\cos\alpha - \cos\beta = -\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

ង/ $\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

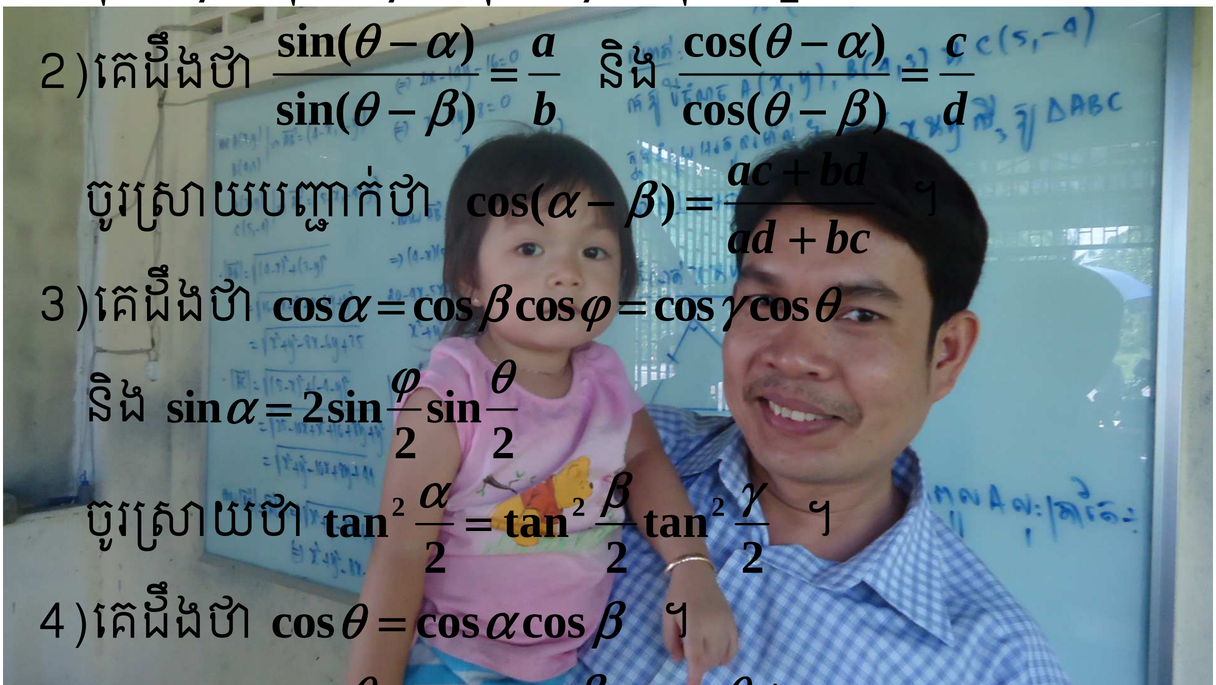
ច/ $\tan\alpha - \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

ជំពូកទី០២

កម្រងលំហាត់

1)ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}$$



2)គេដឹងថា $\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}=\frac{a}{b}$ និង $\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{c}{d}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cos(\alpha-\beta)=\frac{ac+bd}{ad+bc}$ ។

3)គេដឹងថា $\cos\alpha=\cos\beta\cos\varphi=\cos\gamma\cos\theta$

និង $\sin\alpha=2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

ចូរស្រាយថា $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\tan^2\frac{\beta}{2}\tan^2\frac{\gamma}{2}$ ។

4)គេដឹងថា $\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta$ ។

ស្រាយថា $\tan\frac{\theta-\alpha}{2}$, $\tan\frac{\beta}{2}$, $\tan\frac{\theta+\alpha}{2}$

ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

5)ចូរស្រាយថាបើគេមានសមភាព

$$\frac{\cos x}{a}=\frac{\cos(x+\theta)}{b}=\frac{\cos(x+2\theta)}{c}=\frac{\cos(x+3\theta)}{d}$$

នោះគេបាន $\frac{a+c}{b}=\frac{b+d}{c}$ ។

6)ចូរស្រាយថាបើ $\cos(\theta-\alpha)=a$ និង $\sin(\theta-\beta)=b$

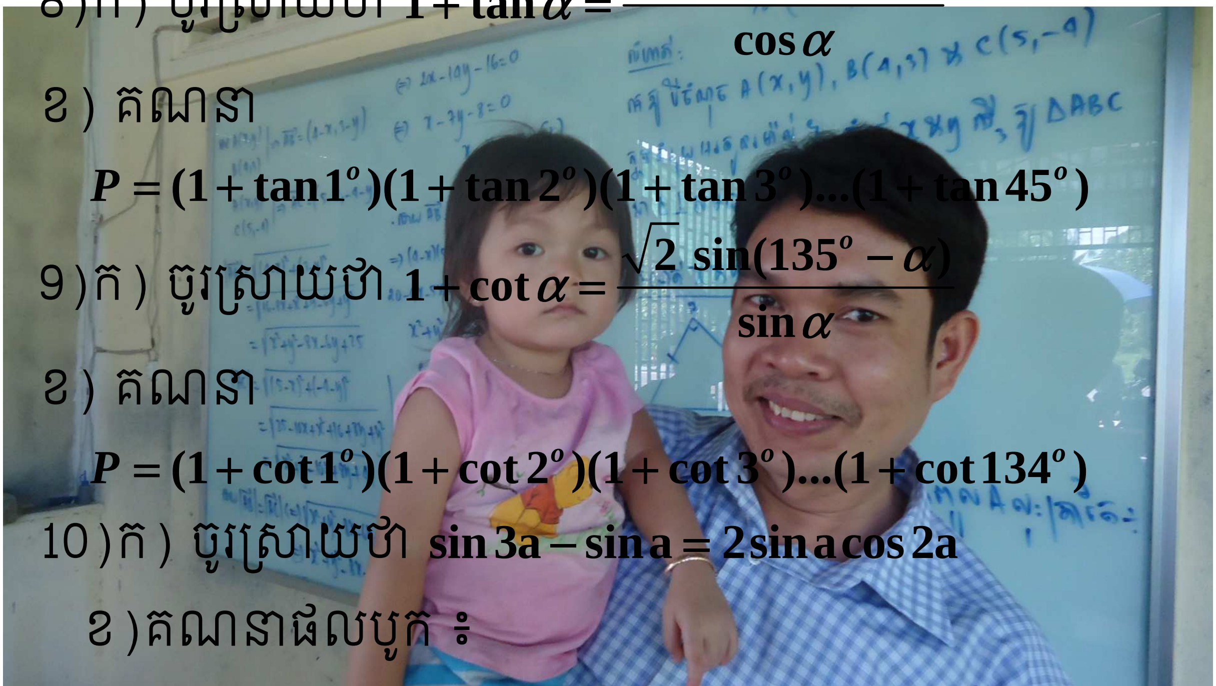
នោះគេបាន $a^2-2ab\sin(\alpha-\beta)+b^2=\cos^2(\alpha-\beta)$ ។

7)ដោយដឹងថា $\dfrac{x}{\tan(\theta+\alpha)}=\dfrac{y}{\tan(\theta+\beta)}=\dfrac{z}{\tan(\theta+\gamma)}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=0$$

8)ក) ចូរស្រាយថា $1+\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{2}\cos(45^o-\alpha)}{\cos\alpha}$



ខ) គណនា

$P=(1+\tan1^o)(1+\tan2^o)(1+\tan3^o)...(1+\tan45^o)$

9)ក) ចូរស្រាយថា $1+\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{2}\sin(135^o-\alpha)}{\sin\alpha}$

ខ) គណនា

$P=(1+\cot1^o)(1+\cot2^o)(1+\cot3^o)...(1+\cot134^o)$

10)ក) ចូរស្រាយថា $\sin3a-\sin a=2\sin a\cos2a$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S=\sin x\cos2x+\sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}+...+\sin\frac{x}{3^n}\cos\frac{2x}{3^n}$$

11)ក) ចូរស្រាយថា $\sin a\sin^2\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{4}(2\sin a-\sin2a)$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S=\sin a\sin^2\frac{a}{2}+2\sin\frac{a}{2}\sin^2\frac{a}{4}+....+2^n\sin\frac{a}{2^n}\sin^2\frac{a}{2^{n+1}}$$

12)ក) ចូរស្រាយថា $\cos a-\cos 3a=2\sin a\sin 2a$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S=\sin a\sin 2a+\sin\frac{a}{3}\sin\frac{2a}{3}+....+\sin\frac{a}{3^n}\sin\frac{2a}{3^n}$$

13)ក) ចូរស្រាយថា $\cos^2 a-\cos^2 2a=\sin a\sin 3a$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S=\sin a\sin 3a+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{3a}{2}+....+\sin\frac{a}{2^n}\sin\frac{3a}{2^n}$$

14)ក) ចូរស្រាយថា $\dfrac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin 2a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{\sin 2a}-\dfrac{1}{\sin a}\right)$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S=\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin 2a}+\frac{2\sin^2 a}{\sin 2^2 a}+\frac{2^2\sin^2 2a}{\sin 2^3 a}+....+\frac{2^n\sin^2 2^{n-1}a}{\sin 2^{n+1}a}$$

15)ក) ចូរស្រាយថា $\dfrac{\cos 2a}{\sin 3a}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sin a}-\dfrac{1}{\sin 3a}\right)$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{\cos 2a}{\sin 3a}+\frac{\cos\frac{2a}{3}}{\sin a}+\frac{\cos\frac{2a}{3^2}}{\sin\frac{a}{3}}+...+\frac{\cos\frac{2a}{3^n}}{\sin\frac{a}{3^{n-1}}}$$

16)ក) ចូរស្រាយថា $\dfrac{\sin^2 a}{\cos 3a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\cos 3a}-\dfrac{1}{\cos a}\right)$

ខ)គណនាផលបូក ៖

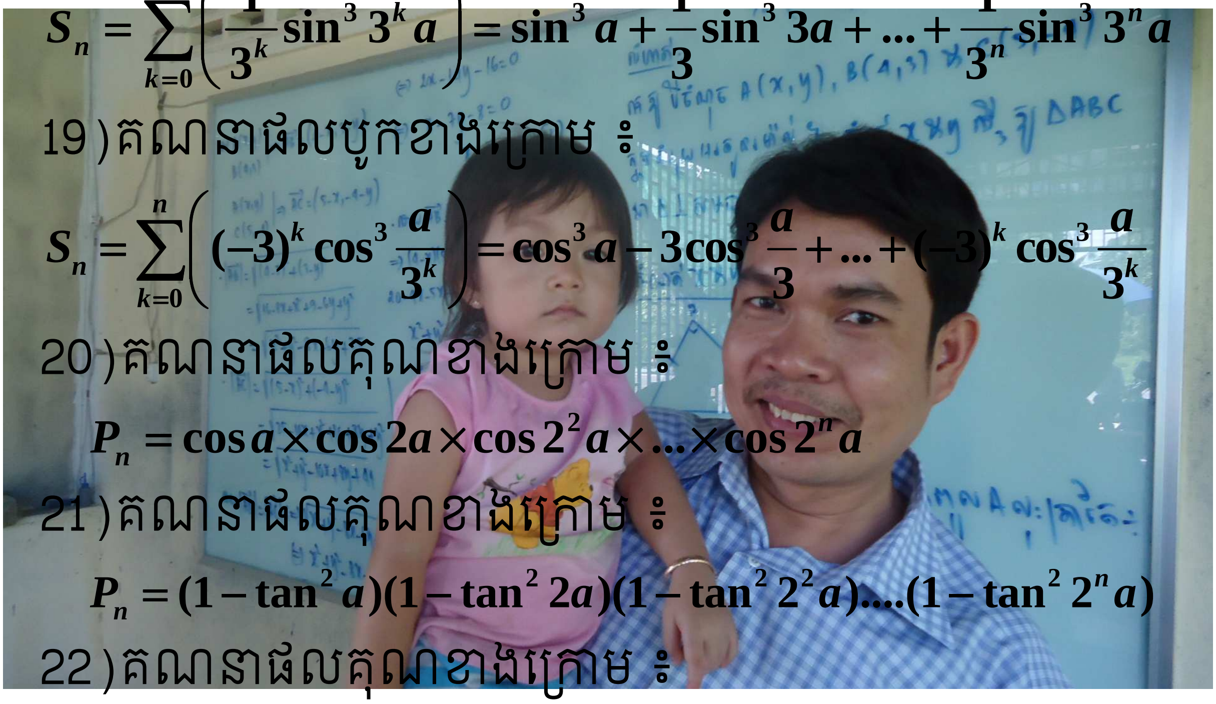
$$S_n=\frac{\sin^2 a}{\cos 3a}+\frac{\sin^2 3a}{\cos 3^2 a}+\frac{\sin^2 3^2 a}{\cos 3^3 a}+....+\frac{\sin^2 3^n a}{\cos 3^{n+1}a}$$ ។

17) ក) ចូរស្រាយថា $\dfrac{\sin a}{1+2\cos 2a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{\sin 3a}-\dfrac{1}{\sin a}\right)$

ខ) គណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{\sin a}{1+2\cos 2a}+\frac{\frac{1}{3}\sin\frac{a}{3}}{1+2\cos\frac{2a}{3}}+\dots\dots\frac{\frac{1}{3^n}\sin\frac{a}{3^n}}{1+2\cos\frac{2a}{3^n}}$$ ។

18) គណនាផលបូកខាងក្រោម ៖



$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3^k}\sin^3 3^k a\right)=\sin^3 a+\frac{1}{3}\sin^3 3a+\dots+\frac{1}{3^n}\sin^3 3^n a$$

19) គណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left((-3)^k\cos^3\frac{a}{3^k}\right)=\cos^3 a-3\cos^3\frac{a}{3}+\dots+(-3)^k\cos^3\frac{a}{3^k}$$

20) គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n=\cos a\times\cos 2a\times\cos 2^2 a\times\dots\times\cos 2^n a$$

21) គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n=(1-\tan^2 a)(1-\tan^2 2a)(1-\tan^2 2^2 a)\dots(1-\tan^2 2^n a)$$

22) គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n=(1+2\cos 2a)(1+2\cos\frac{2a}{3})(1+2\cos\frac{2a}{3^2})\dots(1+2\cos\frac{2a}{3^n})$$

23) គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n=(2\cos 2a-1)(2\cos\frac{2a}{3}-1)(2\cos\frac{2a}{3^2}-1)\dots(2\cos\frac{2a}{3^n}-1)$$

24) គណនា

$$P_n=(2\cos a-1)(2\cos\frac{a}{2}-1)(2\cos\frac{a}{2^2}-1)\dots(2\cos\frac{a}{2^n}-1)$$

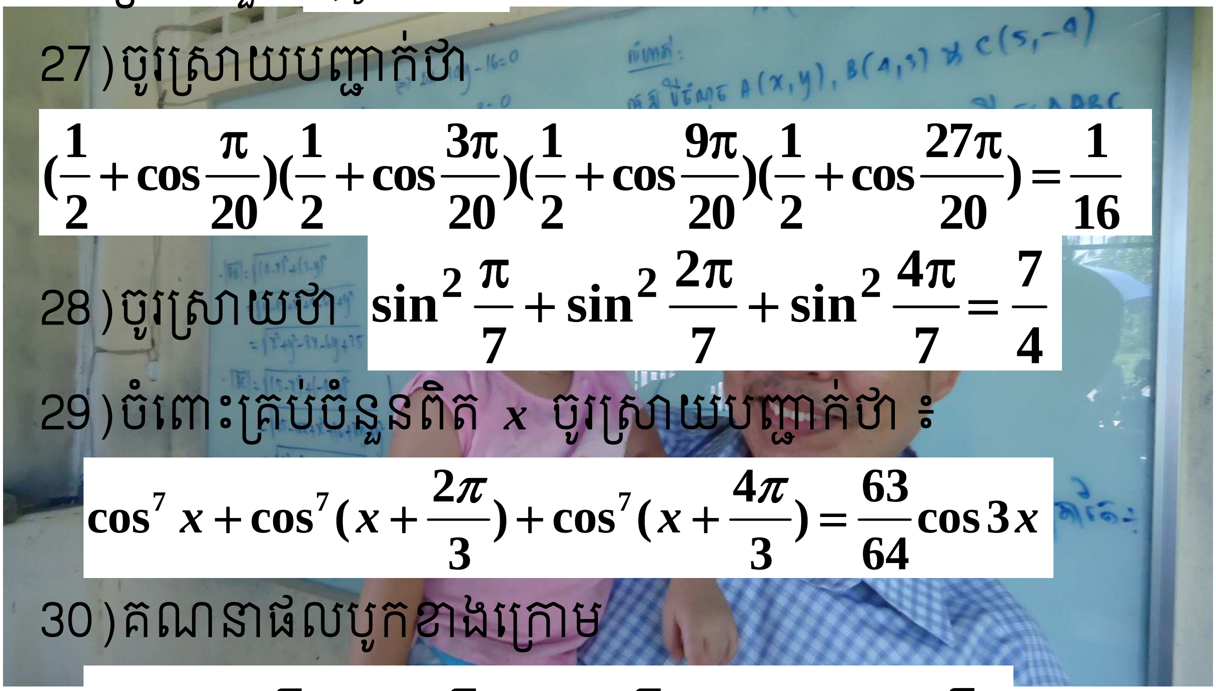
25) គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n=\left(1+\frac{8}{1-3\tan^2 a}\right)\left(1+\frac{8}{1-3\tan^2\frac{a}{3}}\right)\ldots\left(1+\frac{8}{1-3\tan^2\frac{a}{3^n}}\right)$$

26) ក) ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

ខ) ចូរស្រាយថា $x^2+(x-y)^2\le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គ្រប់ចំនួន $x,y\in IR$ ។



27) ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20}\right)=\frac{1}{16}$$

28) ចូរស្រាយថា $\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}=\frac{7}{4}$

29) ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\cos^7 x+\cos^7\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^7\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{63}{64}\cos 3x$$

30) គណនាផលបូកខាងក្រោម

$$S_n=\frac{\tan\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{4}}+\frac{\tan\frac{\pi}{16}}{\cos\frac{\pi}{8}}+\frac{\tan\frac{\pi}{32}}{\cos\frac{\pi}{16}}+\ldots+\frac{\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

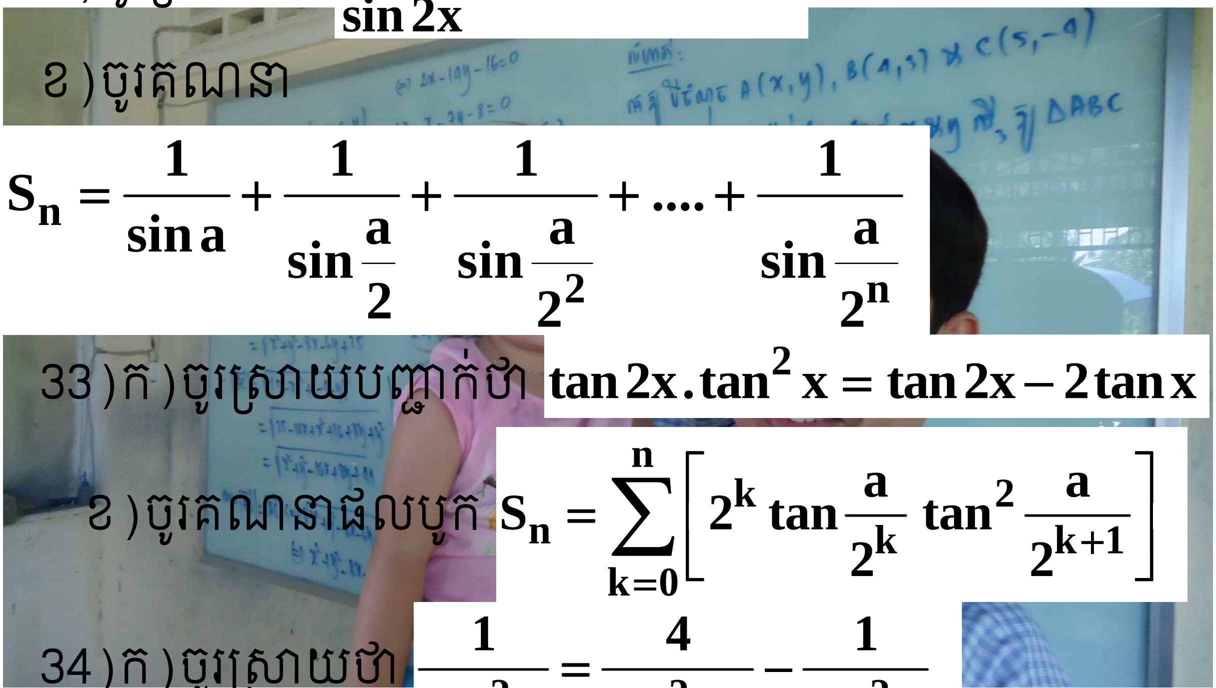
រួចទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n\to+\infty$ ។

31)ក)ចូរស្រាយថា $\dfrac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}=\dfrac{1}{2}\tan 2x-\tan x$

ខ)ចូរគណនាផលបូក $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{2^k\tan^3\dfrac{a}{2^n}}{1-\tan^2\dfrac{a}{2^n}}\right)$

32)គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

ក)ចូរស្រាយថា $\dfrac{1}{\sin 2x}=\cot x-\cot 2x$



ខ)ចូរគណនា

$$S_n=\frac{1}{\sin a}+\frac{1}{\sin\dfrac{a}{2}}+\frac{1}{\sin\dfrac{a}{2^2}}+....+\frac{1}{\sin\dfrac{a}{2^n}}$$

33)ក)ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan 2x.\tan^2 x=\tan 2x-2\tan x$

ខ)ចូរគណនាផលបូក $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left[2^k\tan\dfrac{a}{2^k}\tan^2\dfrac{a}{2^{k+1}}\right]$

34)ក)ចូរស្រាយថា $\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{4}{\sin^2 2x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

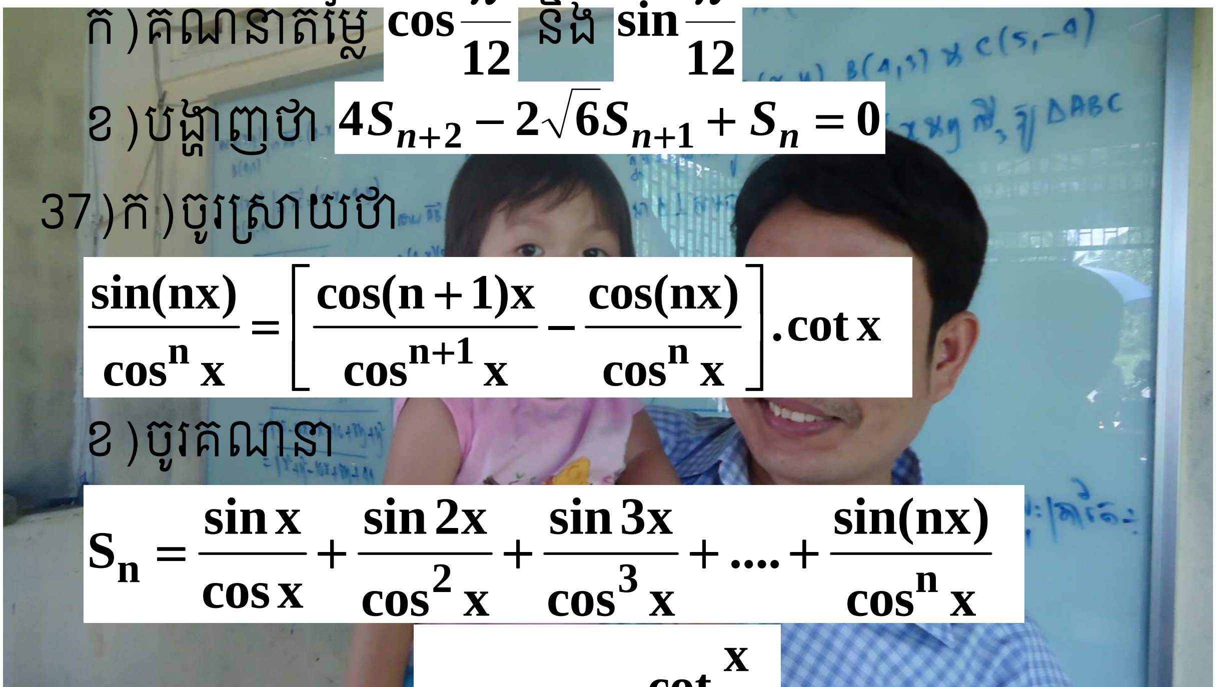
ខ)ចូរគណនា

$$S_n=\frac{1}{4\cos^2\dfrac{a}{2}}+\frac{1}{4^2\cos\dfrac{a}{2^2}}+....+\frac{1}{4^n\cos^2\dfrac{a}{2^n}}$$

35) ក) ចូរស្រាយថា $\dfrac{\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}=\dfrac{1}{8}(\tan 3x-3\tan x)$

ខ) ចូរគណនាផលបូក $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\left[\dfrac{3^k\tan^3\frac{a}{3^k}}{1-3\tan^2\frac{a}{3^k}}\right]$

36) ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ គេឱ្យ $S_n=\cos^n\dfrac{\pi}{12}+\sin^n\dfrac{\pi}{12}$



ក) គណនាតម្លៃ $\cos\dfrac{\pi}{12}$ និង $\sin\dfrac{\pi}{12}$

ខ) បង្ហាញថា $4S_{n+2}-2\sqrt{6}S_{n+1}+S_n=0$

37) ក) ចូរស្រាយថា

$$\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}=\left[\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-\frac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\cot x$$

ខ) ចូរគណនា

$$S_n=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}+\frac{\sin 3x}{\cos^3 x}+....+\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}$$

38) ក) ចូរស្រាយថា $1+\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$

ខ) គណនា

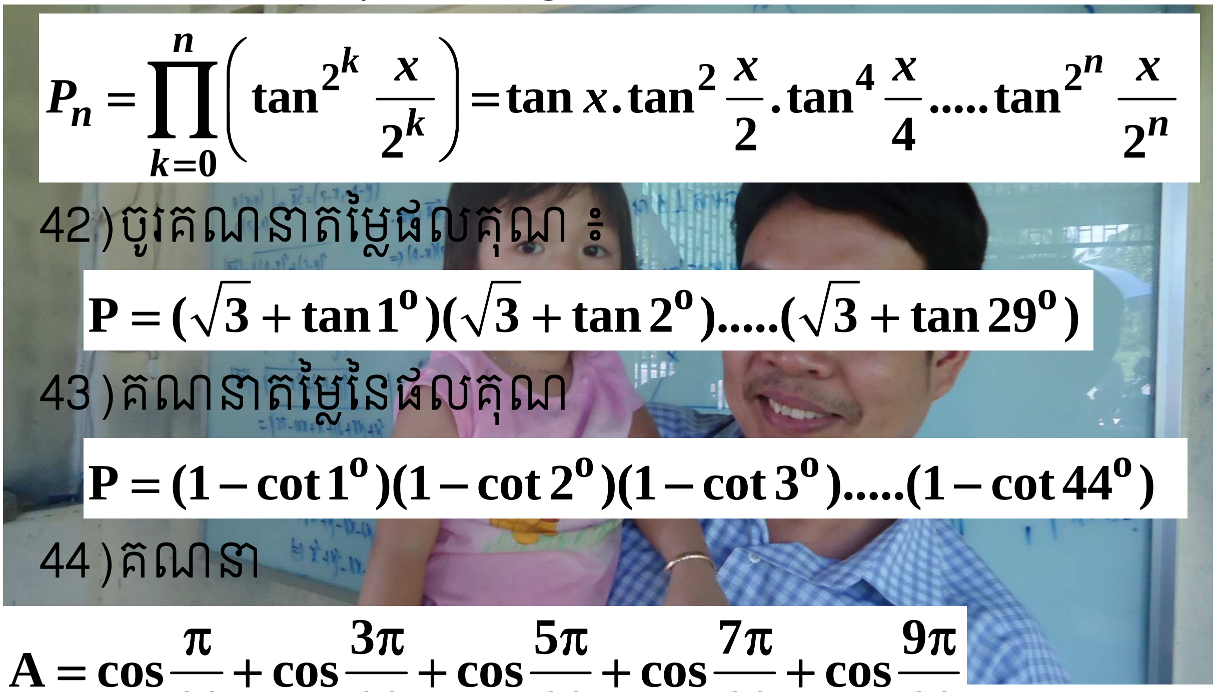
$$P_n=(1+\frac{1}{\cos a})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2}})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^2}}).....(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^n}})$$

39) គណនាផលគុណ $\mathbf{P_n = \prod_{k=1}^{n} \left[\dfrac{1+\tan^2 2^k x}{\left(1-\tan^2 2^k\right)^2} \right]}$

40) គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$\mathbf{P_n = \prod_{k=0}^{n} \left[(1-\tan^2 \frac{x}{2^k})^{2^k} \right]}$$

41) គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖



$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \left(\tan^{2^k} \frac{x}{2^k} \right) = \tan x . \tan^2 \frac{x}{2} . \tan^4 \frac{x}{4} ..... \tan^{2^n} \frac{x}{2^n}$$

42) ចូរគណនាតម្លៃផលគុណ ៖

$$\mathbf{P = (\sqrt{3}+\tan 1^o)(\sqrt{3}+\tan 2^o).....(\sqrt{3}+\tan 29^o)}$$

43) គណនាតម្លៃនៃផលគុណ

$$\mathbf{P = (1-\cot 1^o)(1-\cot 2^o)(1-\cot 3^o).....(1-\cot 44^o)}$$

44) គណនា

$$\mathbf{A = \cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11}}$$

45) គណនា $\mathbf{P = \cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o}$

46) គេឱ្យ $\mathbf{a ; b ; c ; d}$ និង $\mathbf{x}$ ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$\mathbf{\frac{\sin x}{a} = \frac{\sin 2x}{b} = \frac{\sin 3x}{c} = \frac{\sin 4x}{d}}$$

ដែល $\mathbf{x \neq k\pi \ ; \ k \in Z}$

ចូរបង្ហាញថា $\mathbf{a^3(4b^2-d^2) = b^4(3a-c)}$

47) គេឱ្យ a , b , c , d ជាចំនួននៅក្នុងចន្លោះ $[\,0\,;\,\pi\,]$

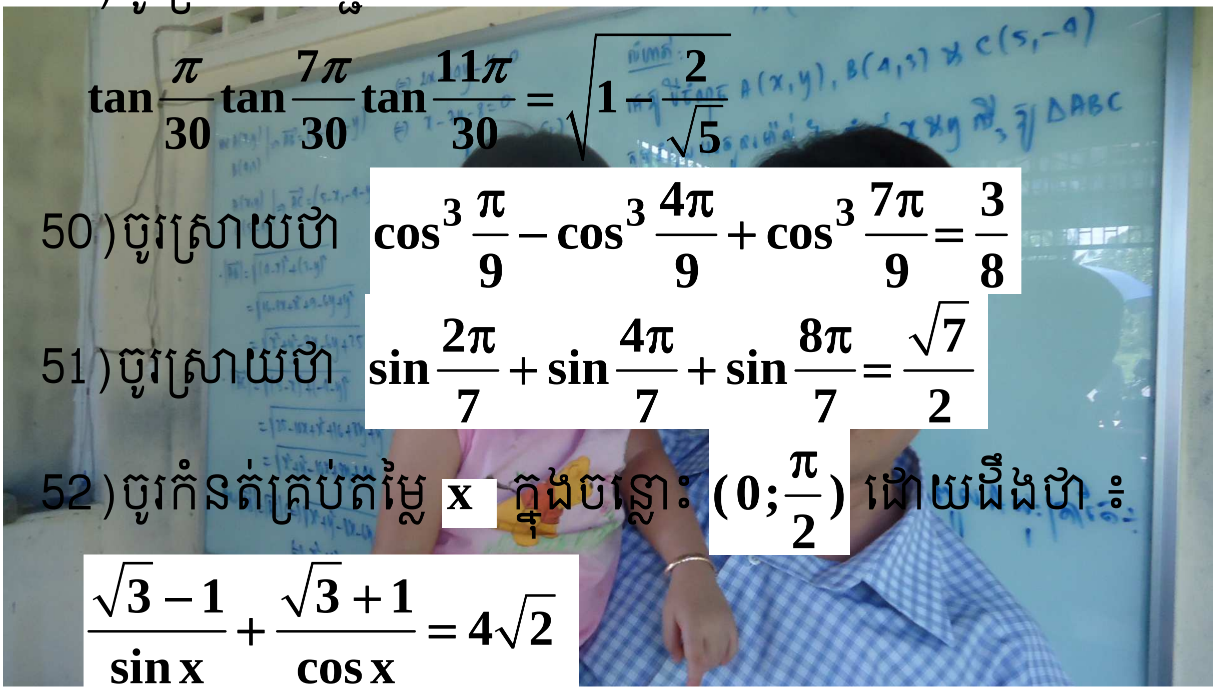
ដោយដឹងថា $\begin{cases} \sin a + 7\sin b = 4(\sin c + 2\sin d) \\ \cos a + 7\cos b = 4(\cos c + 2\cos d) \end{cases}$

ចូរបង្ហាញថា $2\cos(a-d) = 7\cos(b-c)$ ។

48) គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P = \tan\frac{\pi}{27}\tan\frac{6\pi}{27}\tan\frac{8\pi}{27}\tan\frac{10\pi}{27}\tan\frac{12\pi}{27}$$

49) ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖



$$\tan\frac{\pi}{30}\tan\frac{7\pi}{30}\tan\frac{11\pi}{30} = \sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

50) ចូរស្រាយថា $\cos^3\frac{\pi}{9} - \cos^3\frac{4\pi}{9} + \cos^3\frac{7\pi}{9} = \frac{3}{8}$

51) ចូរស្រាយថា $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

52) ចូរកំនត់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងចន្លោះ $(0;\frac{\pi}{2})$ ដោយដឹងថា ៖

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x} + \frac{\sqrt{3}+1}{\cos x} = 4\sqrt{2}$$

53) គេឲ្យ $a_0 = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ និង $a_{n+1} = \frac{a_n^{\,2}-5}{2(a_n+2)}$

គ្រប់ $n \geq 0$ ។

ចូរស្រាយថា $a_n = \cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right) - 2$

54)គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (t_n) កំណត់ដោយ ៖

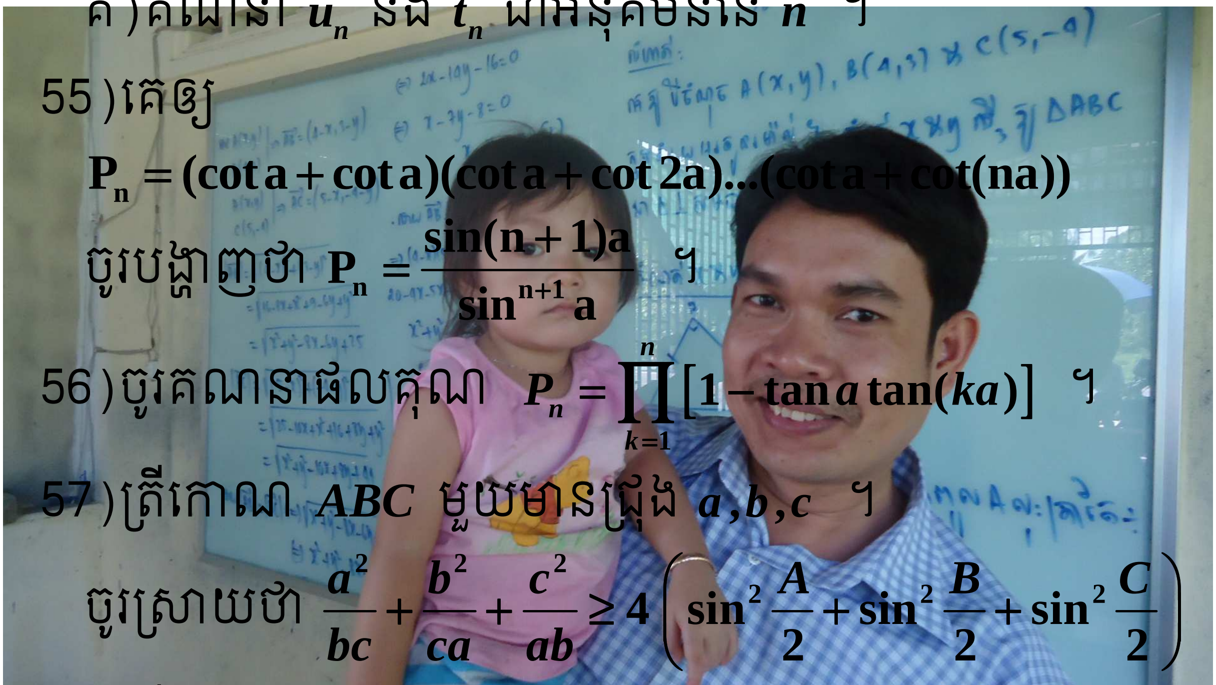
$t_1=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ និង $t_{n+1}=\dfrac{3t_n-t_n^3}{1-3t_n^2}$ ដែល $n\in IN$

ក) ចូរស្រាយថា $t_1=\tan\dfrac{\pi}{5}$ ។

ខ) គេតាង $t_n=\tan u_n$ ដែល $0<u_n<\dfrac{\pi}{2}$ គ្រប់ $n\in IN$ ។

ចូរស្រាយថា (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។

គ)គណនា u_n និង t_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។



55)គេឲ្យ

$\mathrm{P_n}=(\cot a+\cot a)(\cot a+\cot 2a)...(\cot a+\cot(na))$

ចូរបង្ហាញថា $\mathrm{P_n}=\dfrac{\sin(n+1)a}{\sin^{n+1}a}$ ។

56)ចូរគណនាផលគុណ $P_n=\prod_{k=1}^{n}\left[1-\tan a\tan(ka)\right]$ ។

57)ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}\geq 4\left(\sin^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}\right)$

58)ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{\cos A}{a^3}+\dfrac{\cos B}{b^3}+\dfrac{\cos C}{c^3}\geq\dfrac{3}{2abc}$ ។

59)ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2}\leq\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$

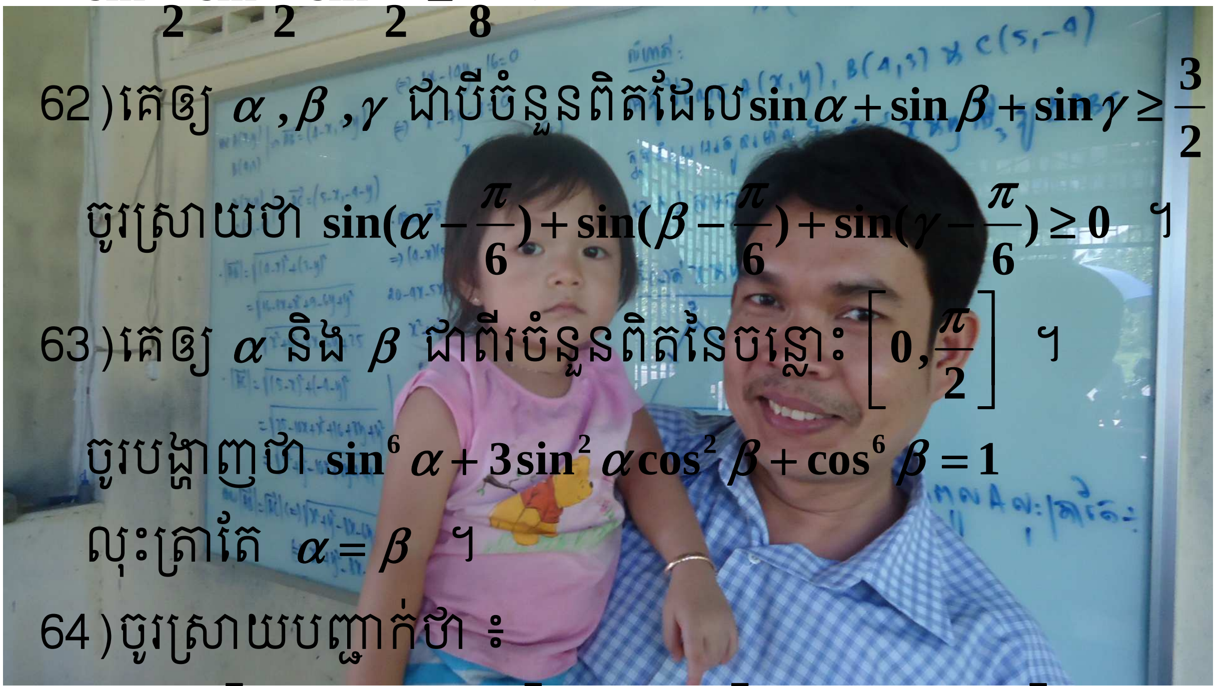
60)ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2}$ រួចសរសេររូបមន្តពីរទៀតដែលស្រដៀងគ្នានេះ ។

61)ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\sin\frac{A}{2}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}}$ រួចទាញថា

$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$ ។



62)គេឲ្យ α,β,γ ជាបីចំនួនពិតដែល $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\ge\frac{3}{2}$

ចូរស្រាយថា $\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})+\sin(\beta-\frac{\pi}{6})+\sin(\gamma-\frac{\pi}{6})\ge 0$ ។

63)គេឲ្យ α និង β ជាពីរចំនួនពិតនៃចន្លោះ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^6\beta=1$

លុះត្រាតែ $\alpha=\beta$ ។

64)ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\prod_{k=1}^{n}\tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]=\prod_{k=1}^{n}\cot\left[\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]$$

65)គេដឹងថា

$$\frac{\cos x+\cos y+\cos z}{\cos(x+y+z)}=\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\sin(x+y+z)}=a$$

ចូរស្រាយថា $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$

66)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុង A,B,C ។

ចូរបង្ហាញថា ៖

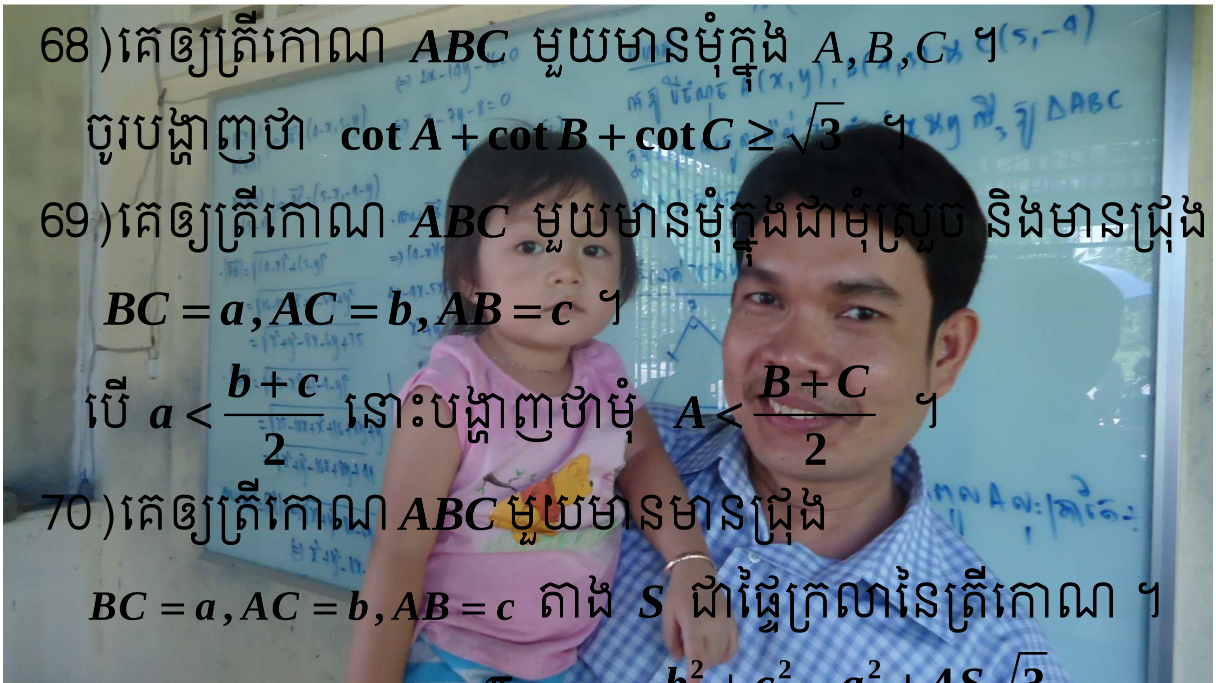
$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$$

រួចទាញថាបើ A,B,C ជាមុំស្រួចនោះ គេបាន

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C>2$ ។

67)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុង A,B,C ។

ចូរបង្ហាញថា $\cos A+\sqrt{2}(\cos B+\cos C)\le 2$ ។



68)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុង A,B,C ។

ចូរបង្ហាញថា $\cot A+\cot B+\cot C\ge\sqrt{3}$ ។

69)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច និងមានជ្រុង

$BC=a, AC=b, AB=c$ ។

បើ $a<\dfrac{b+c}{2}$ នោះបង្ហាញថាមុំ $A<\dfrac{B+C}{2}$ ។

70)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមានជ្រុង

$BC=a, AC=b, AB=c$ តាង S ជាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ ។

ក) ចូរស្រាយថា $\cos(\dfrac{\pi}{3}-A)=\dfrac{b^2+c^2-a^2+4S\sqrt{3}}{4bc}$

ខ) ទាញឲ្យបានថា $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S$ ។

71)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយកែងត្រង់ A ។

តាងជ្រុង $BC=a, AC=b$ និង $AB=c$ ។

ចូរស្រាយថា $\cos^2\dfrac{B-C}{2}\ge\dfrac{2bc}{a^2}$?

72) គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ $A>\frac{\pi}{2}$ ។

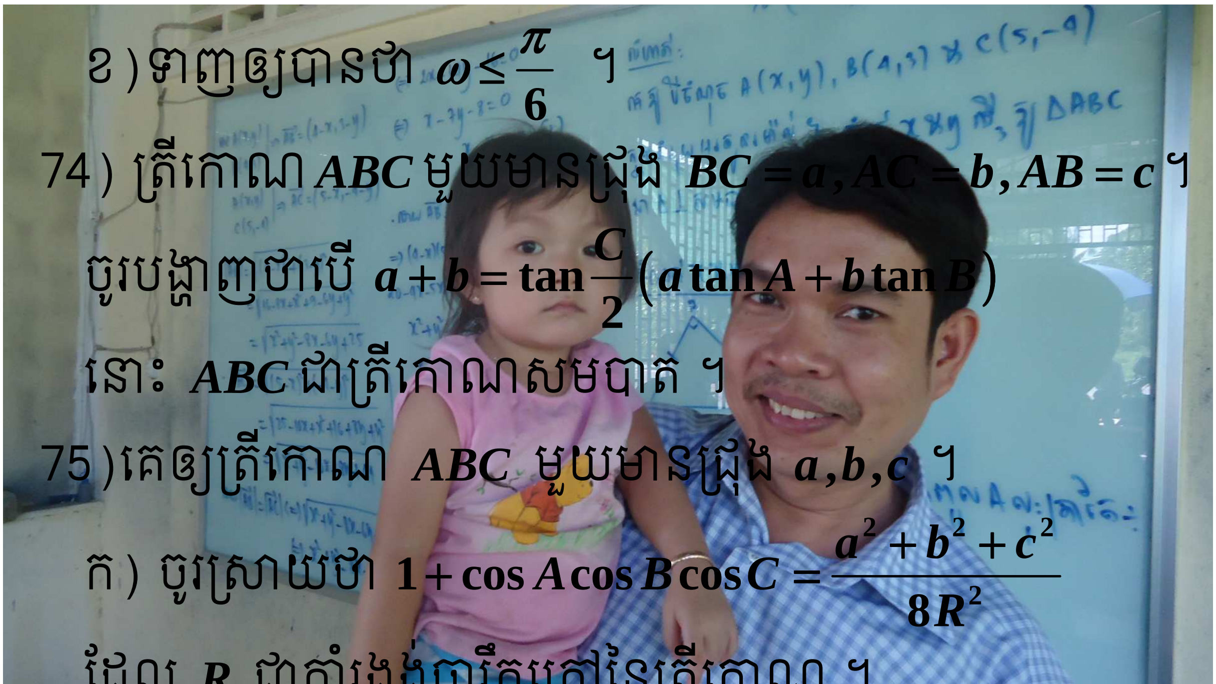
តាងជ្រុង $BC=a, AC=b$ និង $AB=c$ ។

ស្រាយថា $|\cos A|\le\frac{a^6}{54b^3c^3}$?

73) គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ P ជាចំណុចនៅក្នុង ΔABC

ដែល $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\omega$ ។

ក) ចូរស្រាយថា $\cot\omega=\cot A+\cot B+\cot C$ ។



ខ) ទាញឲ្យបានថា $\omega\le\frac{\pi}{6}$ ។

74) ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a, AC=b, AB=c$ ។

ចូរបង្ហាញថាបើ $a+b=\tan\frac{C}{2}(a\tan A+b\tan B)$

នោះ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

75) គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ក) ចូរស្រាយថា $1+\cos A\cos B\cos C=\frac{a^2+b^2+c^2}{8R^2}$

ដែល R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ខ) ទាញឲ្យបានថា $a^2+b^2+c^2\le 9R^2$ ។

76) គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x$$

ដែល a,b,A,B ជាចំនួនពិត ។

ចូរស្រាយថាបើគ្រប់ $x\in IR: f(x)\ge 0$ នោះ $a^2+b^2\le 2$

និង $A^2+B^2\le 1$ ។

77) គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

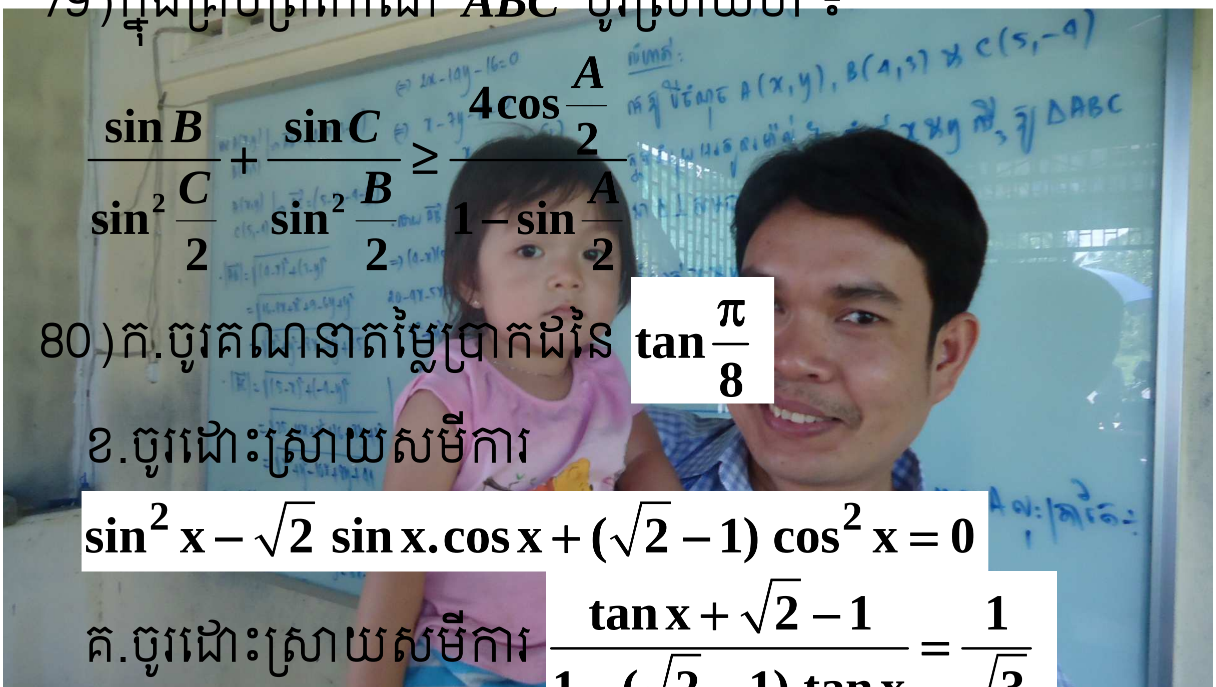
ចូរស្រាយថា $A\le\frac{\pi}{3}$ លុះត្រាតែ $(p-b)(p-c)\le\frac{bc}{4}$

ដែល a,b,c ជាជ្រុង និង $p=\frac{a+b+c}{2}$ ។

78) គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូររកប្រភេទនៃត្រីកោណនេះដោយដឹងថា $\sin\frac{A}{2}=\frac{a}{2\sqrt{bc}}$ ។

79) ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា ៖



$$\frac{\sin B}{\sin^2\frac{C}{2}}+\frac{\sin C}{\sin^2\frac{B}{2}}\ge\frac{4\cos\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}}$$

80) ក.ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{8}$

ខ.ចូរដោះស្រាយសមីការ

$$\sin^2 x-\sqrt{2}\,\sin x.\cos x+(\sqrt{2}-1)\,\cos^2 x=0$$

គ.ចូរដោះស្រាយសមីការ $\frac{\tan x+\sqrt{2}-1}{1-(\sqrt{2}-1)\tan x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

81) គេឲ្យសមីការ $(E):\ \cos^3 x\cos 3x+\sin^3 x\sin 3x=m$

ក.ចូរដោះស្រាយសមីការនេះកាលណា $m=\frac{3\sqrt{3}}{8}$

ខ.រកលក្ខខ័ណ្ឌសម្រាប់ m ដើម្បីឲ្យសមីការនេះមានឫស ។

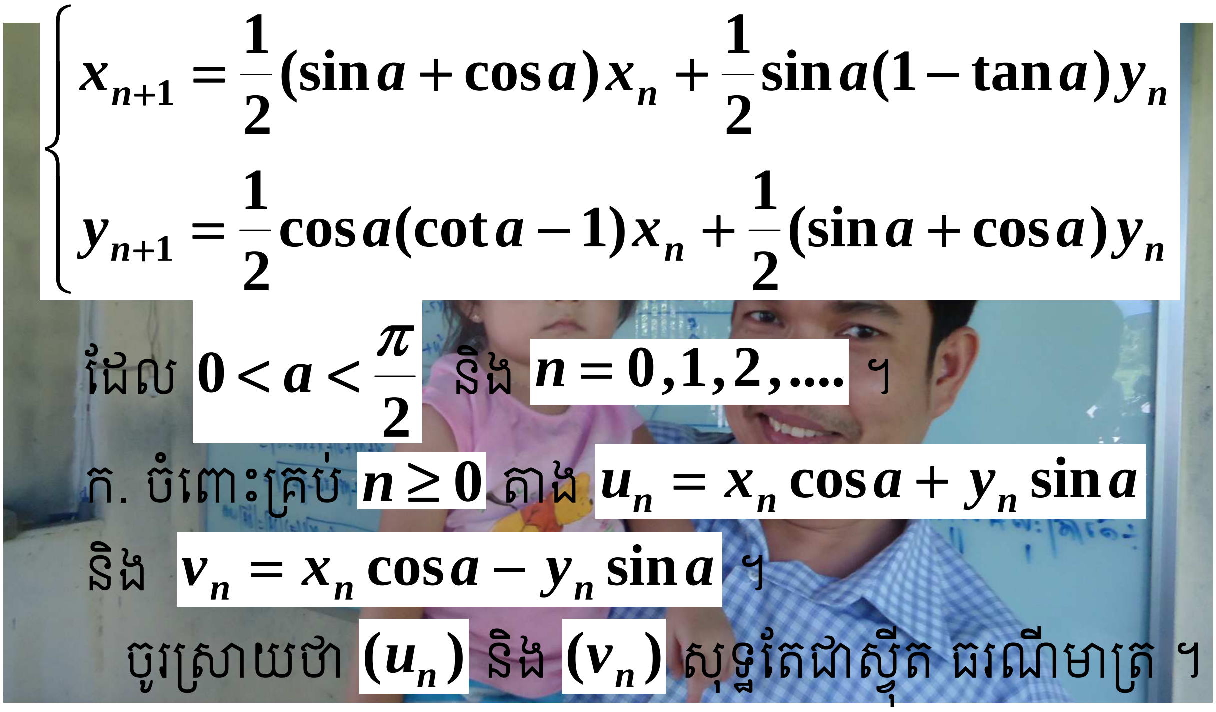
82) គេមានអនុគមន៍លេខ f កំនត់ពីសំណុំ IN ទៅសំណុំ IR

ដោយ $f(0)=0$ និង $f(n+1)=2f(n)+\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$

ចូរកំនត់រក $f(n)$?

83) គេមានស្វ៊ីត (x_n) និង (y_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$

និងទំនាក់ទំនងកំណើន ៖



$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin a+\cos a)x_n + \frac{1}{2}\sin a(1-\tan a)y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}\cos a(\cot a-1)x_n + \frac{1}{2}(\sin a+\cos a)y_n \end{cases}$$

ដែល $0<a<\frac{\pi}{2}$ និង $n=0,1,2,....$ ។

ក. ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ តាង $u_n = x_n\cos a + y_n \sin a$

និង $v_n = x_n\cos a - y_n\sin a$ ។

ចូរស្រាយថា (u_n) និង (v_n) សុទ្ធតែជាស្វ៊ីត ធរណីមាត្រ ។

ខ.គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

គ. ទាញរក x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

84) គេយក a, b, c ជាចំនួនពិតនៃចន្លោះ $(0,1)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$

85) គេឱ្យ A ; B ; C ជាមុំក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}$

86)គេឱ្យ $A\,;\,B\,;C$ ជាមុំស្រួចក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ

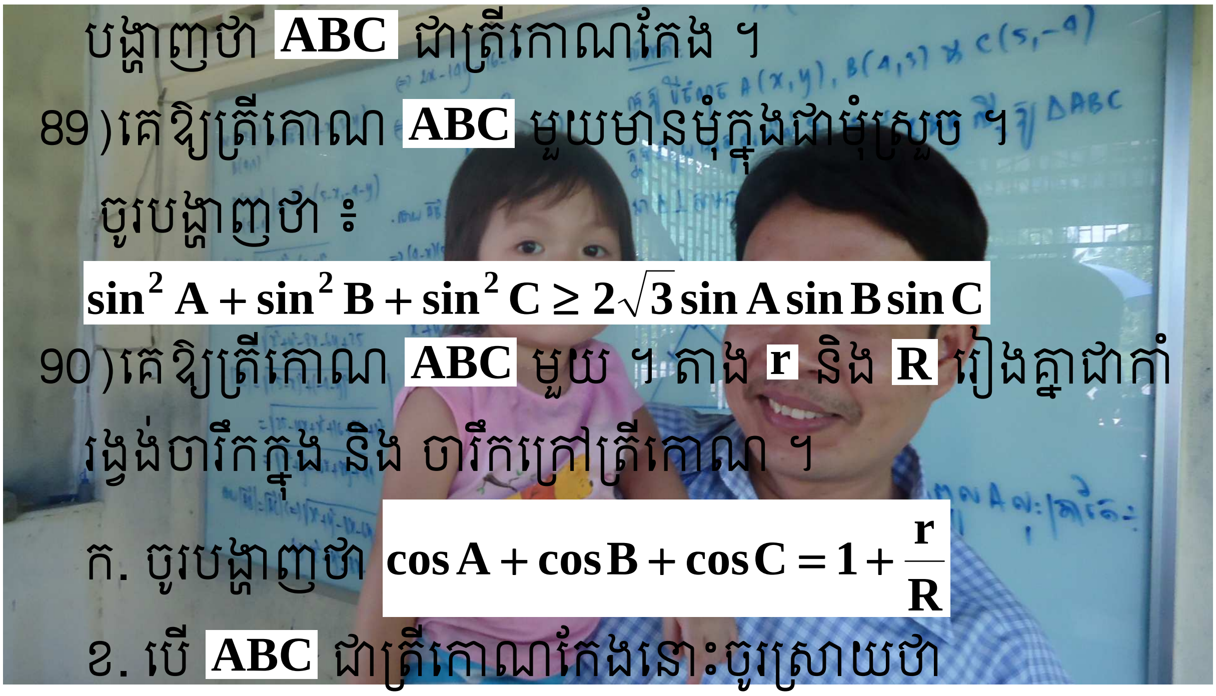
ចូរបង្ហាញថា $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C)\geq(1+\sqrt{3})^3$

87)គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ A,B,C ជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\dfrac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\dfrac{\sin^2 C}{\cos^3 C}\geq 18$ ។

88)គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ

$\sin^2 B+\sin^2 C=1+\sin B\sin C\cos A$ ។



បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង ។

89)គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរបង្ហាញថា ៖

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\geq 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$

90)គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ តាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\cos A+\cos B+\cos C=1+\dfrac{r}{R}$

ខ. បើ ABC ជាត្រីកោណកែងនោះចូរស្រាយថា

$R\geq(\sqrt{2}+1)r$ ។

91)គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

តាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ $\Delta\,ABC$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $a\cos A+bosB+c\cos C=\dfrac{2pr}{R}$

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

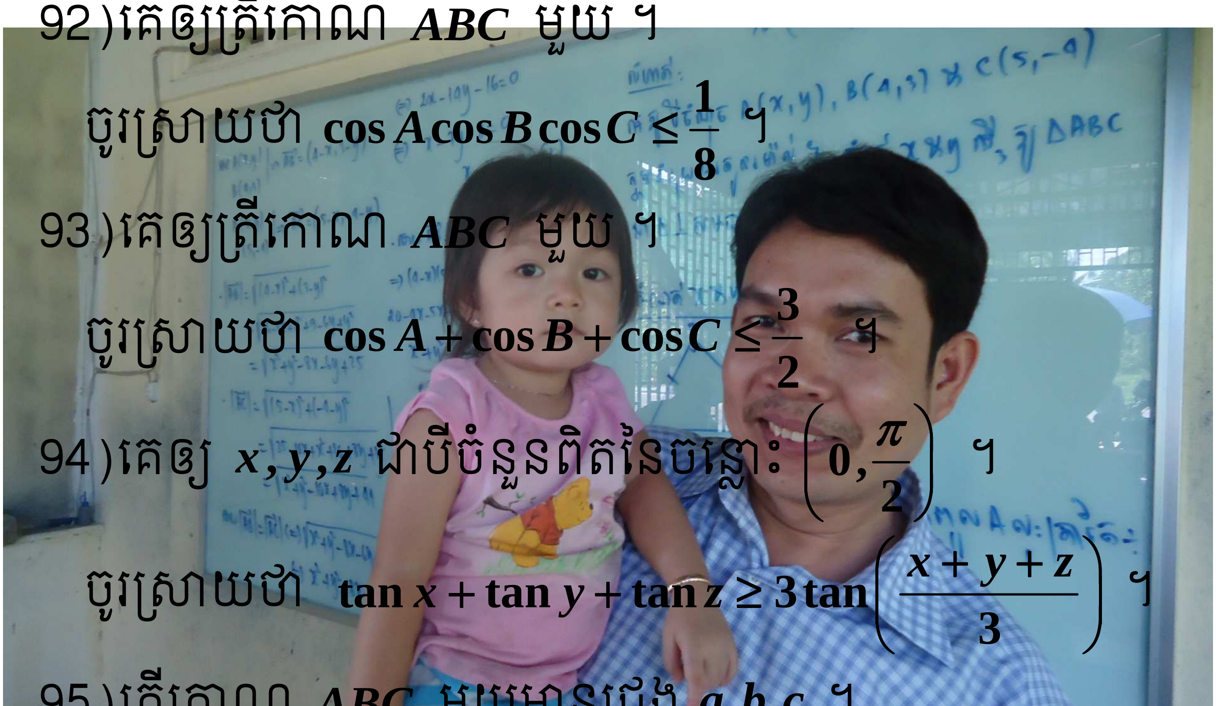
$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$$

ដែល $p=\frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $a^2+b^2+c^2\ge 4(R+r)^2$ ។

(A,B,C ជាមុំស្រួច)

92)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។



ចូរស្រាយថា $\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$ ។

93)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរស្រាយថា $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$ ។

94)គេឲ្យ x,y,z ជាបីចំនួនពិតនៃចន្លោះ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ។

ចូរស្រាយថា $\tan x+\tan y+\tan z\ge 3\tan\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$ ។

95)ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $bc+ca+ab\ge 4\sqrt{3}\ S$?

(S ជាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ)។

96)ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a^2+b^2+c^2\ge(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2+4\sqrt{3}\ S$$?

(S ជាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ)។

97)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានផ្ទៃក្រលា S ។

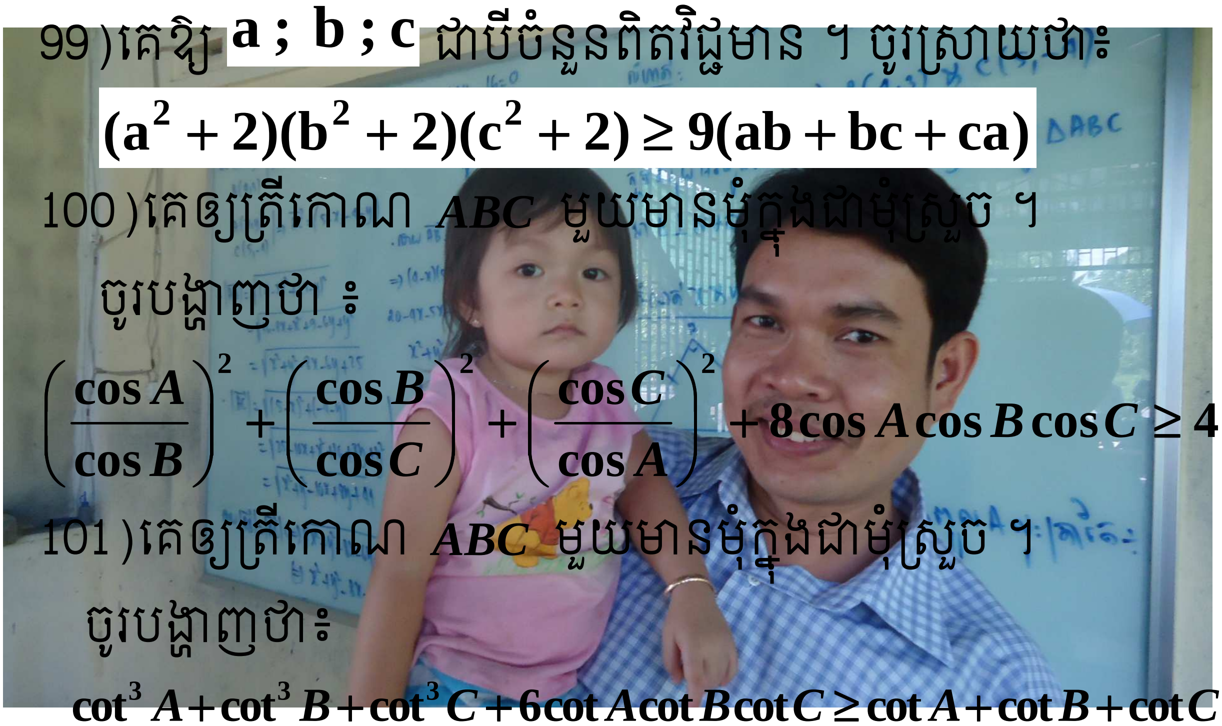
AK, BL, CM ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A, B, C រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{AK^2+BL^2+CM^2}{S}\geq 3\sqrt{3}$ ។

98)គេឱ្យ **a ; b ; c** ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា ៖

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 9(ab+bc+ca)$$



99)គេឱ្យ **a ; b ; c** ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា៖

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 9(ab+bc+ca)$$

100)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2+8\cos A\cos B\cos C\geq 4$$

101)គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរបង្ហាញថា៖

$$\cot^3 A+\cot^3 B+\cot^3 C+6\cot A\cot B\cot C\geq \cot A+\cot B+\cot C$$

102)ចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា ៖

$$\cos\frac{B-C}{2}\geq\sqrt{\frac{2r}{R}}$$

ដែល r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔABC

103)ចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា ៖

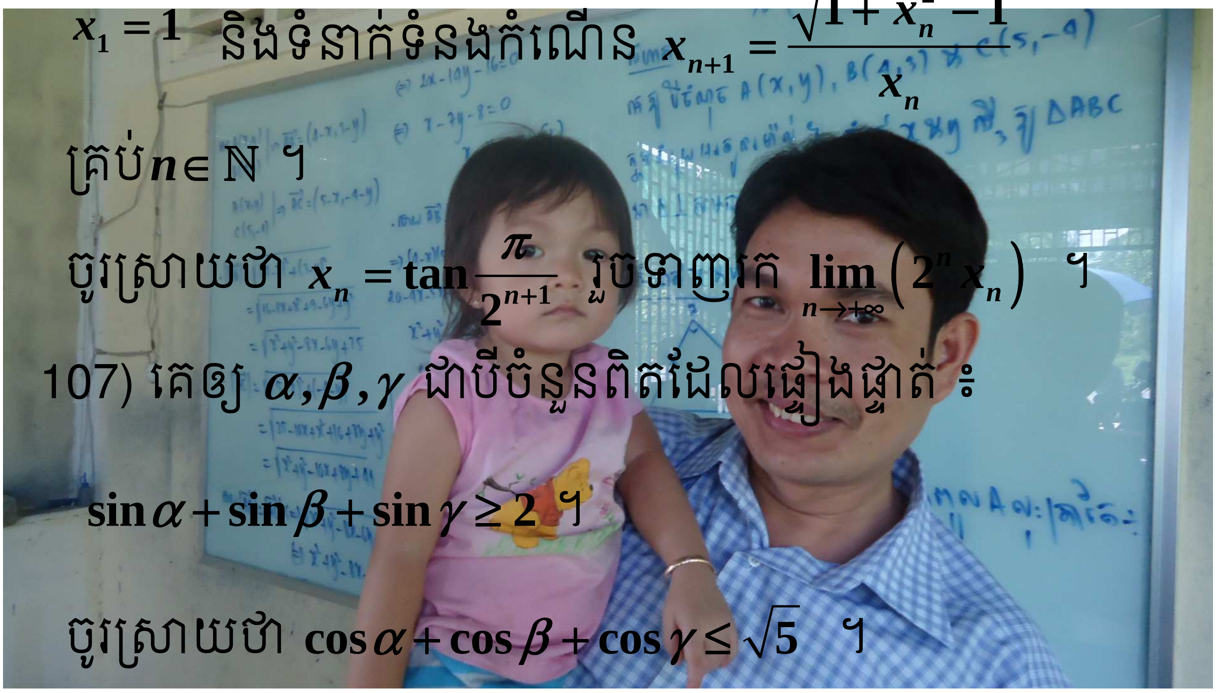
$$4\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)+\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\geq 4$$

104)គណនាតម្លៃ

$$S=\sin 39^o+\sin 69^o+\sin 183^o+\sin 213^o$$

105)ចូរបង្ហាញថា $\cot\frac{\pi}{22}-4\cos\frac{3\pi}{22}=\sqrt{11}$ ។

106)គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (x_n) កំណត់ដោយ ៖



$x_1=1$ និងទំនាក់ទំនងកំណើន $x_{n+1}=\frac{\sqrt{1+x_n^2}-1}{x_n}$

គ្រប់$n\in\mathbb{N}$ ។

ចូរស្រាយថា $x_n=\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n x_n\right)$ ។

107) គេឲ្យ α,β,γ ជាបីចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\geq 2$ ។

ចូរស្រាយថា $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\sqrt{5}$ ។

108)គេឲ្យ $P_n=\prod\limits_{k=3}^{n}\left[1-\tan^4\left(\frac{\pi}{2^k}\right)\right]$ ។

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$?

109)ចូរបង្ហាញថា $\tan 10^o+\frac{1}{\sin 40^o}=\sqrt{3}$ ។

110)គេយក A, B, C ជាមុំបីនៃត្រីកោណ ABC ។

តាងអនុគមន៍ $y = \cot A + \dfrac{2\sin A}{\cos A + \cos(B - C)}$

រកតម្លៃអប្បរមានៃអនុគមន៍នេះ ?

111)ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ គេឱ្យ $S_n = \cos^n \dfrac{\pi}{12} + \sin^n \dfrac{\pi}{12}$

ក. គណនាតម្លៃ $\cos\dfrac{\pi}{12}$ និង $\sin\dfrac{\pi}{12}$

ខ. បង្ហាញថា $4S_{n+2} - 2\sqrt{6}S_{n+1} + S_n = 0$

112)ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា ៖

ក/ $(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C) = \dfrac{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{2}$

ខ/ $\left(1 + \dfrac{\cos A + \cos B + \cos C}{3}\right)^3 \geq \left(\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sqrt{2}}\right)^2$

113)រកតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍ ៖

$$P(x) = \tan^2 x + \cot^2 x - 2(\tan x + \cot x) + 27$$

$$Q(x) = \tan^2 x + \cot^2 x - 8(\tan x + \cot x) + 87$$

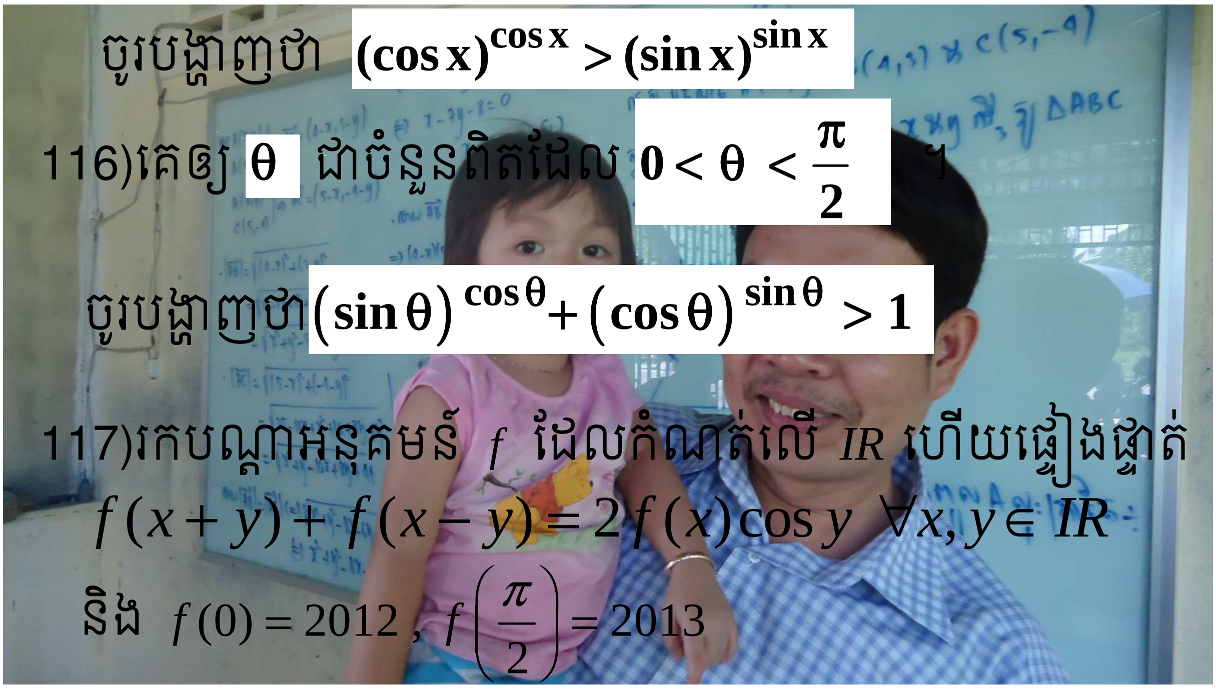
ដែល $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ ។

114)គេឲ្យ $0<a<\frac{\pi}{2}$ និង $0<b<\frac{\pi}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\left(\frac{\sin^2 a}{\sin b}\right)^2+\left(\frac{\cos^2 a}{\cos b}\right)^2=1$

លុះត្រាតែ $a=b$ ។

115)ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\in(0,\frac{\pi}{4})$



ចូរបង្ហាញថា $(\cos x)^{\cos x}>(\sin x)^{\sin x}$

116)គេឲ្យ θ ជាចំនួនពិតដែល $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(\sin\theta)^{\cos\theta}+(\cos\theta)^{\sin\theta}>1$

117)រកបណ្តាអនុគមន៍ f ដែលកំណត់លើ IR ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y\ \ \forall x,y\in IR$

និង $f(0)=2012$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2013$

118)រកដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=\cos x+\sin x$ ។

119) គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) $\begin{cases} u_0=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ u_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-u_n^2}} \end{cases}$, $n\ge 0$

កំណត់កន្សោម u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

120) គេឲ្យអនុគមន៍ $f : IR \to IR$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$f(\frac{\pi}{2}) = 1$ និង $f(x+y) - f(x-y) = 2f(y)\cos x$

ចំពោះគ្រប់ $x , y \in IR$ ។ ចូរកំណត់រកអនុគមន៍ $y = f(x)$

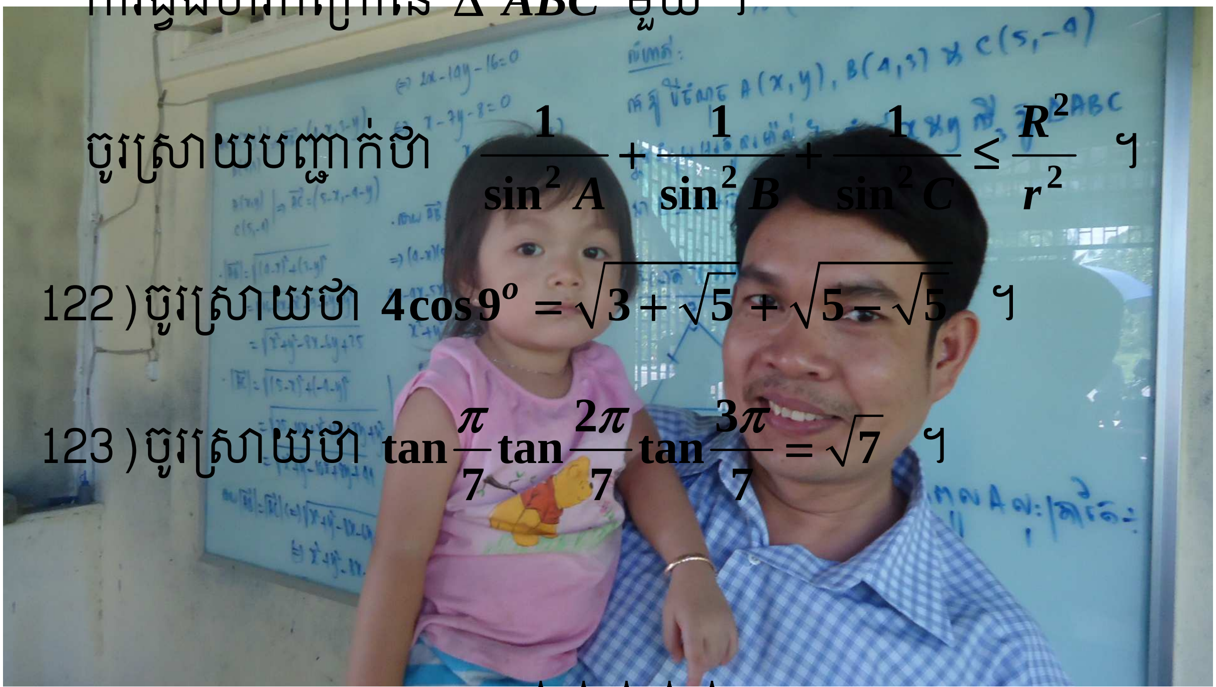
121) គេតាង r និង R រៀងគ្នាជារង្វាស់កាំនៃរង្វង់ចារឹកក្នុង និង

កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ ΔABC មួយ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \le \frac{R^2}{r^2}$ ។

122) ចូរស្រាយថា $4\cos 9^o = \sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}$ ។

123) ចូរស្រាយថា $\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7} = \sqrt{7}$ ។



✧✧✧✧✧

ជំពូកទី០៣

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី០១

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}$$

តាង $x_1=\cos\frac{2\pi}{7}\ ,\ x_2=\cos\frac{4\pi}{7}\ ,\ x_3=\cos\frac{8\pi}{7}$

$$A=x_1+x_2+x_3\ ,\ B=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3\ ,\ C=x_1x_2x_3$$

$$S=\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[3]{x_3}\ ,\ T=\sqrt[3]{x_1x_2}+\sqrt[3]{x_2x_3}+\sqrt[3]{x_1x_3}$$

ជាដំបូងយើងត្រូវគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ A,B,C ។

គណនា $A=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}$

តាមរូបមន្តបម្លែងមុំ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

គេមាន $\begin{cases} \cos\frac{2\pi}{7} = \cos(\pi - \frac{5\pi}{7}) = -\cos\frac{5\pi}{7} \\ \cos\frac{4\pi}{7} = \cos(\pi - \frac{3\pi}{7}) = -\cos\frac{3\pi}{7} \\ \cos\frac{8\pi}{7} = \cos(\pi + \frac{\pi}{7}) = -\cos\frac{\pi}{7} \end{cases}$

គេបាន $A = -\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7} - \cos\frac{5\pi}{7}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $2\sin\frac{\pi}{7}$ គេបាន ៖

$$2A\sin\frac{\pi}{7} = -2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} - 2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} - 2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

តាមរូបមន្ត $2\cos a\sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$ គេបាន ៖

$$2A\sin\frac{\pi}{7} = -\sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{6\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7}$$

$$2A\sin\frac{\pi}{7} = -\sin\frac{6\pi}{7} = -\sin(\pi - \frac{\pi}{7}) = -\sin\frac{\pi}{7}$$

គេទាញបាន $A = -\frac{1}{2}$

គណនា $B = \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$

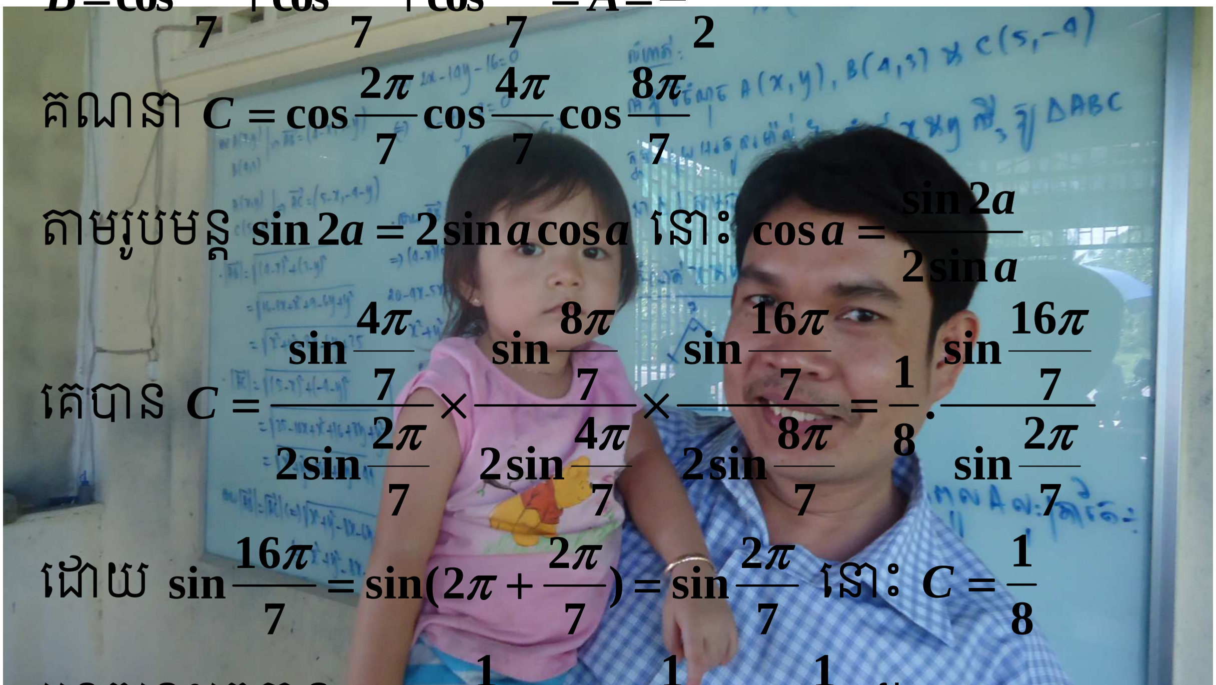
តាមរូបមន្ត $\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a+b)]$

$$B = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\right) + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{12\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}\right) + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{10\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right)$$

ដោយ $\begin{cases} \cos\frac{6\pi}{7} = \cos(2\pi - \frac{8\pi}{7}) = \cos\frac{8\pi}{7} \\ \cos\frac{12\pi}{7} = \cos(2\pi - \frac{2\pi}{7}) = \cos\frac{2\pi}{7} \\ \cos\frac{10\pi}{7} = \cos(2\pi - \frac{4\pi}{7}) = \cos\frac{4\pi}{7} \end{cases}$

$$B=\frac{1}{2}(\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7})+\frac{1}{2}(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7})+\frac{1}{2}(\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7})$$

$$B=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}=A=-\frac{1}{2}$$



គណនា $C=\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$

តាមរូបមន្ត $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ នោះ $\cos a = \frac{\sin 2a}{2\sin a}$

គេបាន $C=\dfrac{\sin\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}\times\dfrac{\sin\frac{8\pi}{7}}{2\sin\frac{4\pi}{7}}\times\dfrac{\sin\frac{16\pi}{7}}{2\sin\frac{8\pi}{7}}=\frac{1}{8}.\dfrac{\sin\frac{16\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}}$

ដោយ $\sin\frac{16\pi}{7}=\sin(2\pi+\frac{2\pi}{7})=\sin\frac{2\pi}{7}$ នោះ $C=\frac{1}{8}$

ហេតុនេះគេបាន $A=-\frac{1}{2}\ ,\ B=-\frac{1}{2}\ ,\ C=\frac{1}{8}$ ។

ដោយប្រើឯកលក្ខណៈភាព ៖

$$(a+b+c)^3=(a^3+b^3+c^3)+3(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$$

តាម $S=\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[3]{x_3}\ ,\ T=\sqrt[3]{x_1x_2}+\sqrt[3]{x_2x_3}+\sqrt[3]{x_1x_3}$

គេបាន $S^3=A+3S.T-3\sqrt[3]{C}=-\frac{1}{2}+3ST-\frac{3}{2}=3ST-2$

$$T^3 = B + 3T\left(\sqrt[3]{x_1^2x_2x_3} + \sqrt[3]{x_1x_2^2x_3} + \sqrt[3]{x_1x_2x_3^2}\right) - 3\sqrt[3]{C^2}$$

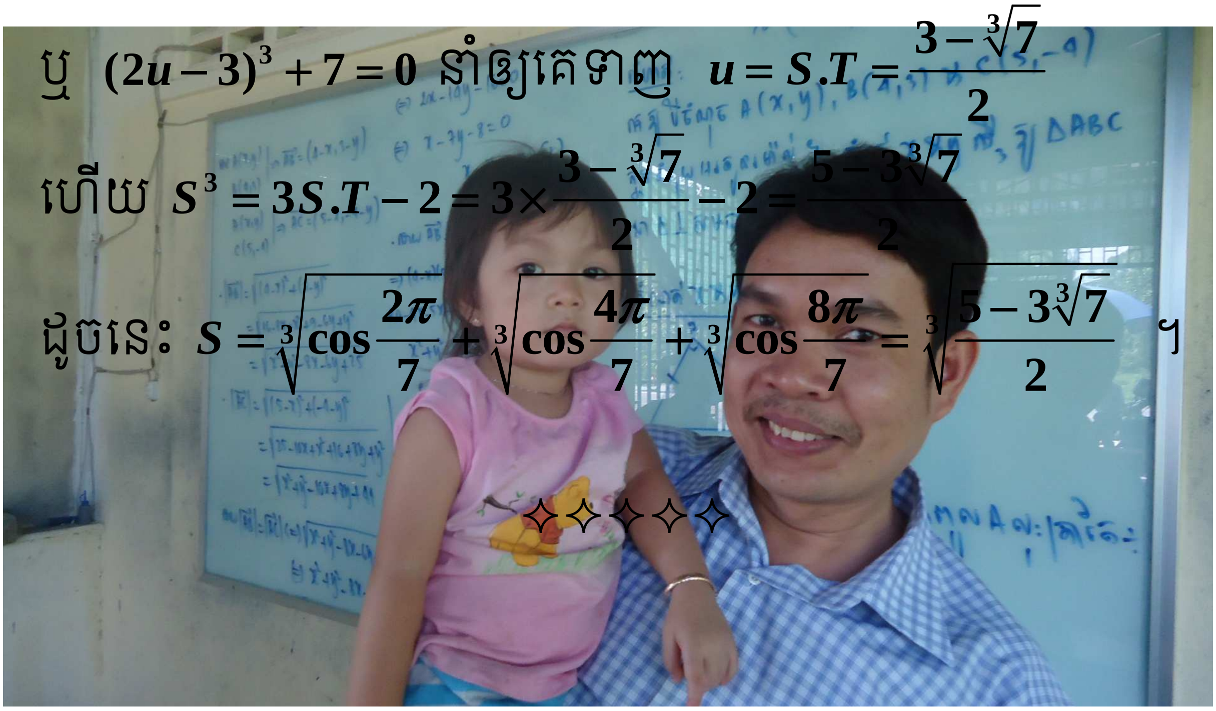
$$T^3 = -\frac{1}{2} + 3T\sqrt[3]{x_1x_2x_3}\left(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_3}\right) - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}ST - \frac{5}{4}$$

គេបាន $S^3T^3 = (3ST-2)(\frac{3}{2}ST - \frac{3}{4}) = \frac{(3ST-2)(6ST-5)}{4}$

ឬ $4S^3T^3 - 18S^2T^2 + 27ST - 10 = 0$ តាង $u = S.T$

គេបាន $4u^3 - 18u^2 + 27u - 10 = 0$ ឬ

$8u^3 - 36u^2 + 54u - 20 = 0$



ឬ $(2u-3)^3 + 7 = 0$ នាំឲ្យគេទាញ $u = S.T = \frac{3-\sqrt[3]{7}}{2}$

ហើយ $S^3 = 3S.T - 2 = 3\times\frac{3-\sqrt[3]{7}}{2} - 2 = \frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}$

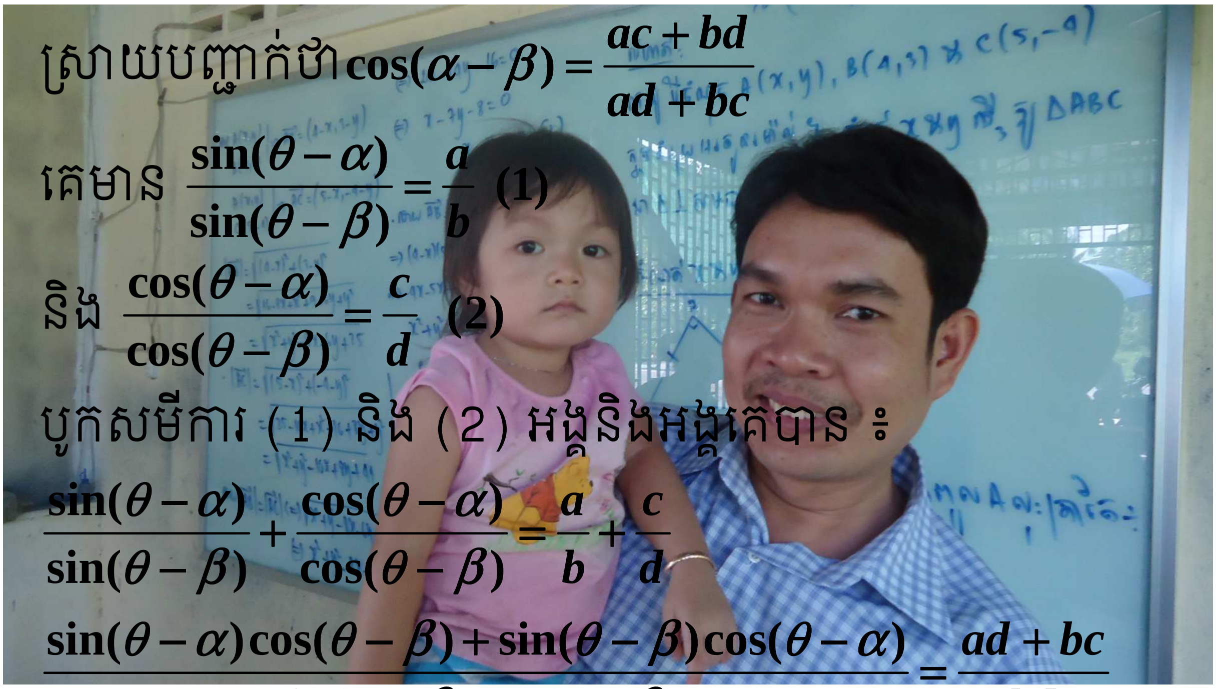
ដូចនេះ៖ $S = \sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}$ ។

លំហាត់ទី០២

គេដឹងថា $\dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}=\dfrac{a}{b}$ និង $\dfrac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\dfrac{c}{d}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{ac+bd}{ad+bc}$ ។

ដំណោះស្រាយ



ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{ac+bd}{ad+bc}$

គេមាន $\dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}=\dfrac{a}{b}$ (1)

និង $\dfrac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\dfrac{c}{d}$ (2)

បូកសមីការ (1) និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}+\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$$

$$\frac{\sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\beta)+\sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\beta)}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{\sin(2\theta-\alpha-\beta)}{\sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\beta)}=\frac{ad+bc}{bd}\quad(3)$$

តាម (2) គេទាញ $\dfrac{\cos(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\alpha)}=\dfrac{d}{c}$ (4)

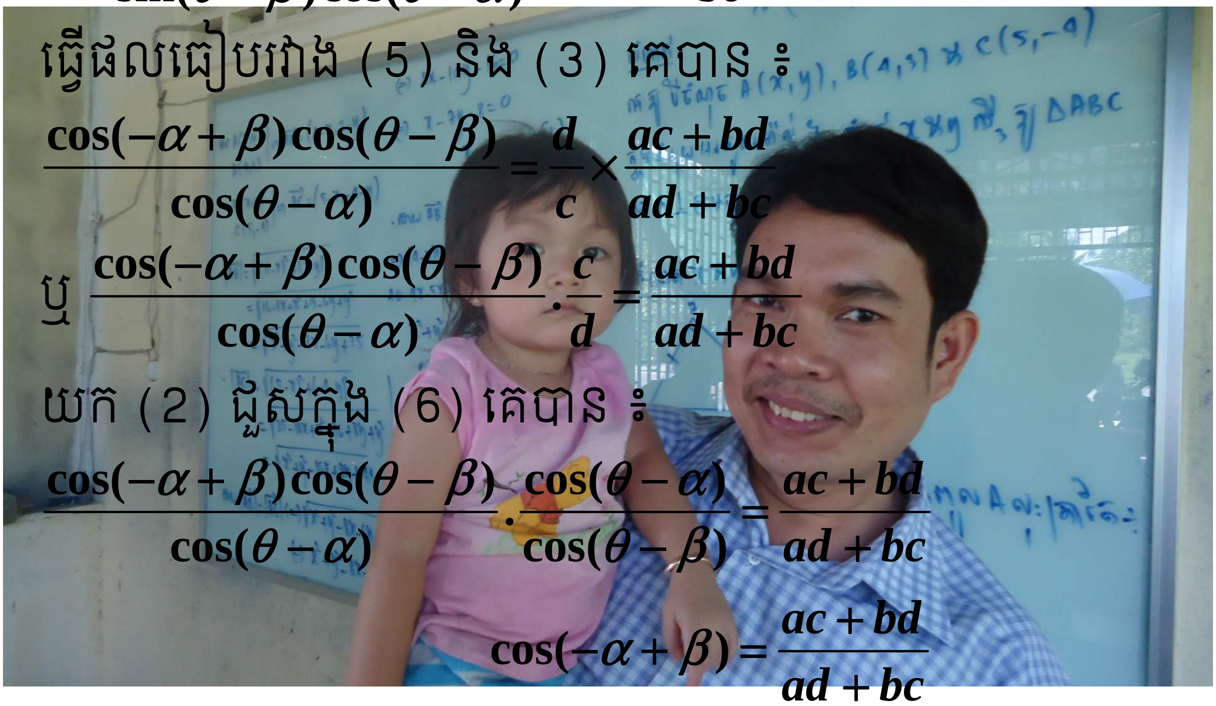
បូកសមីការ (1) និង (4) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}+\frac{\cos(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\alpha)}=\frac{a}{b}+\frac{d}{c}$$

$$\frac{\sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha)+\sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\beta)}{\sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\alpha)}=\frac{ac+bd}{bc}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\sin(2\theta-2\alpha)+\frac{1}{2}\sin(2\theta-2\beta)}{\sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\alpha)}=\frac{ac+bd}{bc}$$

$$\frac{\sin(2\theta-\alpha-\beta)\cos(-\alpha+\beta)}{\sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\alpha)}=\frac{ac+bd}{bc}\quad(5)$$



ធ្វើផលធៀបរវាង (5) និង (3) គេបាន ៖

$$\frac{\cos(-\alpha+\beta)\cos(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\alpha)}=\frac{d}{c}\times\frac{ac+bd}{ad+bc}$$

ឬ $$\frac{\cos(-\alpha+\beta)\cos(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\alpha)}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac+bd}{ad+bc}$$

យក (2) ជួសក្នុង (6) គេបាន ៖

$$\frac{\cos(-\alpha+\beta)\cos(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\alpha)}\cdot\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{ac+bd}{ad+bc}$$

$$\cos(-\alpha+\beta)=\frac{ac+bd}{ad+bc}$$

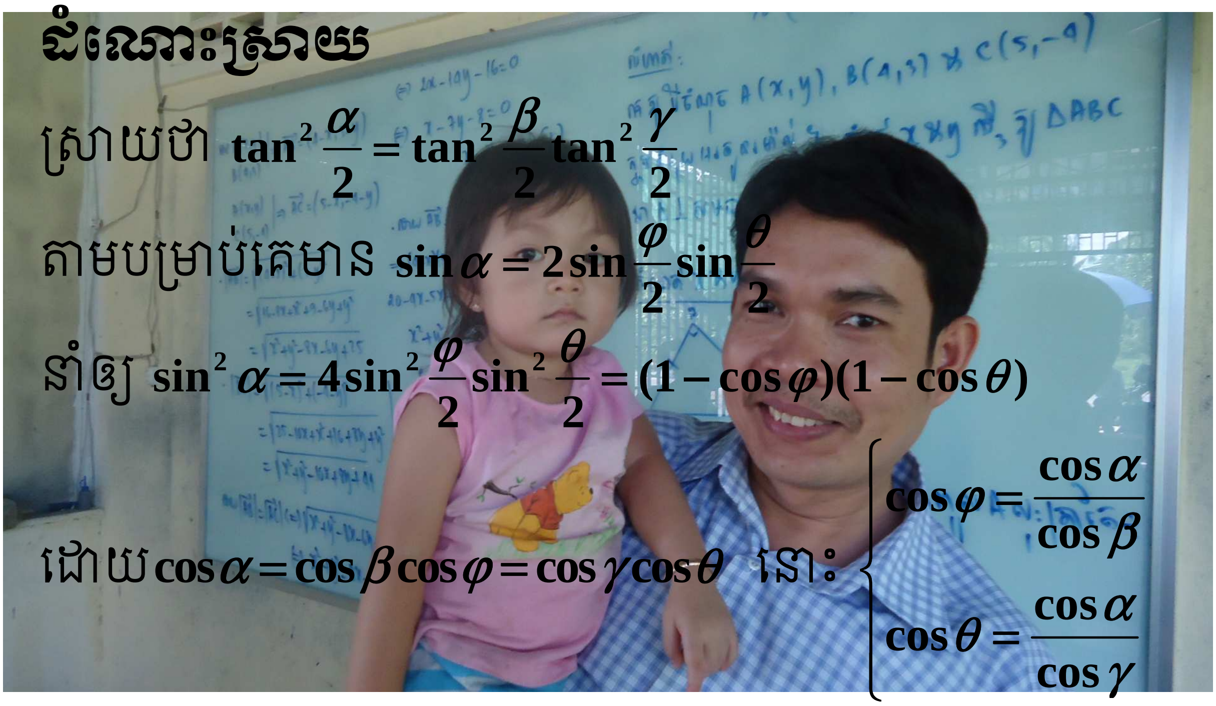
ដូចនេះ $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{ac+bd}{ad+bc}$ ។

លំហាត់ទី០៣

គេដឹងថា $\cos\alpha = \cos\beta\cos\varphi = \cos\gamma\cos\theta$

និង $\sin\alpha = 2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

ចូរស្រាយថា $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \tan^2\frac{\beta}{2}\tan^2\frac{\gamma}{2}$ ។



ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \tan^2\frac{\beta}{2}\tan^2\frac{\gamma}{2}$

តាមបម្រាប់គេមាន $\sin\alpha = 2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

នាំឲ្យ $\sin^2\alpha = 4\sin^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} = (1-\cos\varphi)(1-\cos\theta)$

ដោយ $\cos\alpha = \cos\beta\cos\varphi = \cos\gamma\cos\theta$ នោះ៖ $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} \\ \cos\theta = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma} \end{cases}$

គេបាន $\sin^2\alpha = (1-\frac{\cos\alpha}{\cos\beta})(1-\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma})$

$$1-\cos^2\alpha = 1-\frac{\cos\beta+\cos\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}\cos\alpha + \frac{1}{\cos\beta\cos\gamma}\cos^2\alpha$$

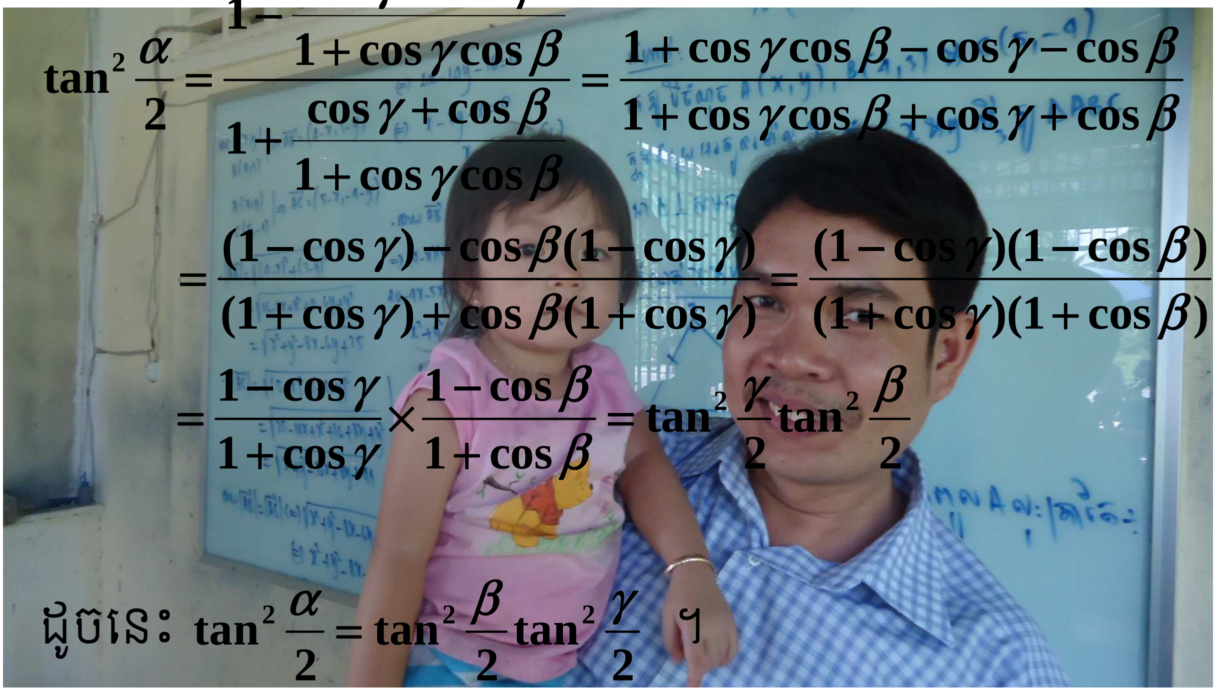
$$\left(1+\frac{1}{\cos\gamma\cos\beta}\right)\cos^2\alpha = \frac{\cos\gamma+\cos\beta}{\cos\gamma\cos\beta}\cos\alpha$$

ដោយសន្មតថា $\cos\alpha \neq 0$ នោះគេទាញបាន ៖

$$\cos\alpha = \frac{\cos\gamma + \cos\beta}{1+\cos\gamma\cos\beta} \quad (1)$$

គេមាន $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \quad (2)$

យកទំនាក់ទំនង (1) ជួសក្នុង (2) គេបាន ៖



$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\dfrac{\cos\gamma+\cos\beta}{1+\cos\gamma\cos\beta}}{1+\dfrac{\cos\gamma+\cos\beta}{1+\cos\gamma\cos\beta}} = \frac{1+\cos\gamma\cos\beta-\cos\gamma-\cos\beta}{1+\cos\gamma\cos\beta+\cos\gamma+\cos\beta}$$

$$= \frac{(1-\cos\gamma)-\cos\beta(1-\cos\gamma)}{(1+\cos\gamma)+\cos\beta(1+\cos\gamma)} = \frac{(1-\cos\gamma)(1-\cos\beta)}{(1+\cos\gamma)(1+\cos\beta)}$$

$$= \frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}\times\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta} = \tan^2\frac{\gamma}{2}\tan^2\frac{\beta}{2}$$

ដូចនេះ $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \tan^2\frac{\beta}{2}\tan^2\frac{\gamma}{2}$ ។

✧✧✧✧✧

លំហាត់ទី០៤

គេដឹងថា $\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$ ។

ចូរស្រាយថា $\tan\frac{\theta-\alpha}{2}$, $\tan\frac{\beta}{2}$, $\tan\frac{\theta+\alpha}{2}$

ជាស្វីតធរណីមាត្រ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\tan\frac{\theta-\alpha}{2}, \tan\frac{\beta}{2}, \tan\frac{\theta+\alpha}{2}$ ជាស្វីតធរណីមាត្រ

គេត្រូវស្រាយឲ្យឃើញថា $\tan^2\frac{\beta}{2} = \tan\frac{\theta+\alpha}{2}.\tan\frac{\theta-\alpha}{2}$ ។

គេមាន $\tan\frac{\theta+\alpha}{2} = \dfrac{\tan\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\alpha}{2}}$

និង $\tan\frac{\theta-\alpha}{2} = \dfrac{\tan\frac{\theta}{2}-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\alpha}{2}}$

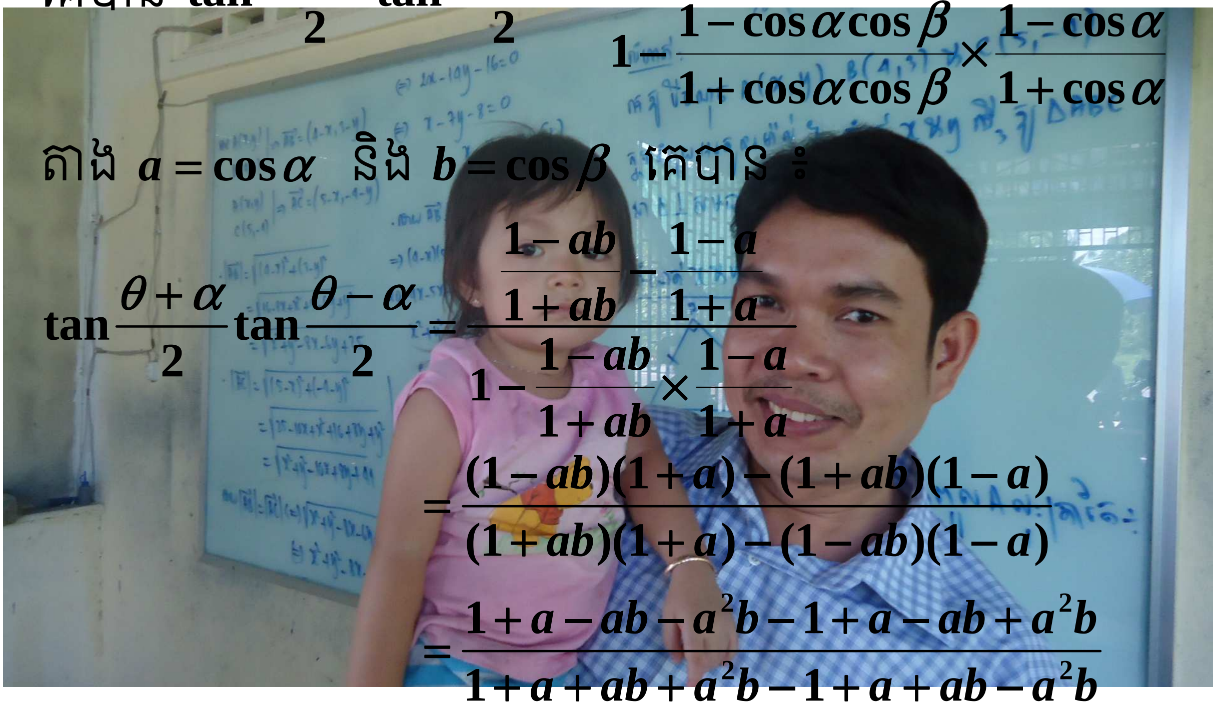
គេបាន $\tan\frac{\theta+\alpha}{2}\tan\frac{\theta-\alpha}{2} = \dfrac{\tan^2\frac{\theta}{2}-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

ដោយ $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$$

(ព្រោះ $\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$)

គេបាន $\tan\frac{\theta+\alpha}{2}\tan\frac{\theta-\alpha}{2} = \dfrac{\frac{1-\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta} - \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}{1 - \frac{1-\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}\times\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$



តាង $a=\cos\alpha$ និង $b=\cos\beta$ គេបាន ៖

$$\tan\frac{\theta+\alpha}{2}\tan\frac{\theta-\alpha}{2} = \frac{\frac{1-ab}{1+ab} - \frac{1-a}{1+a}}{1-\frac{1-ab}{1+ab}\times\frac{1-a}{1+a}}$$

$$= \frac{(1-ab)(1+a)-(1+ab)(1-a)}{(1+ab)(1+a)-(1-ab)(1-a)}$$

$$= \frac{1+a-ab-a^2b-1+a-ab+a^2b}{1+a+ab+a^2b-1+a+ab-a^2b}$$

$$= \frac{2a-2ab}{2a+2ab} = \frac{1-b}{1+b} = \frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta} = \tan^2\frac{\beta}{2}$$

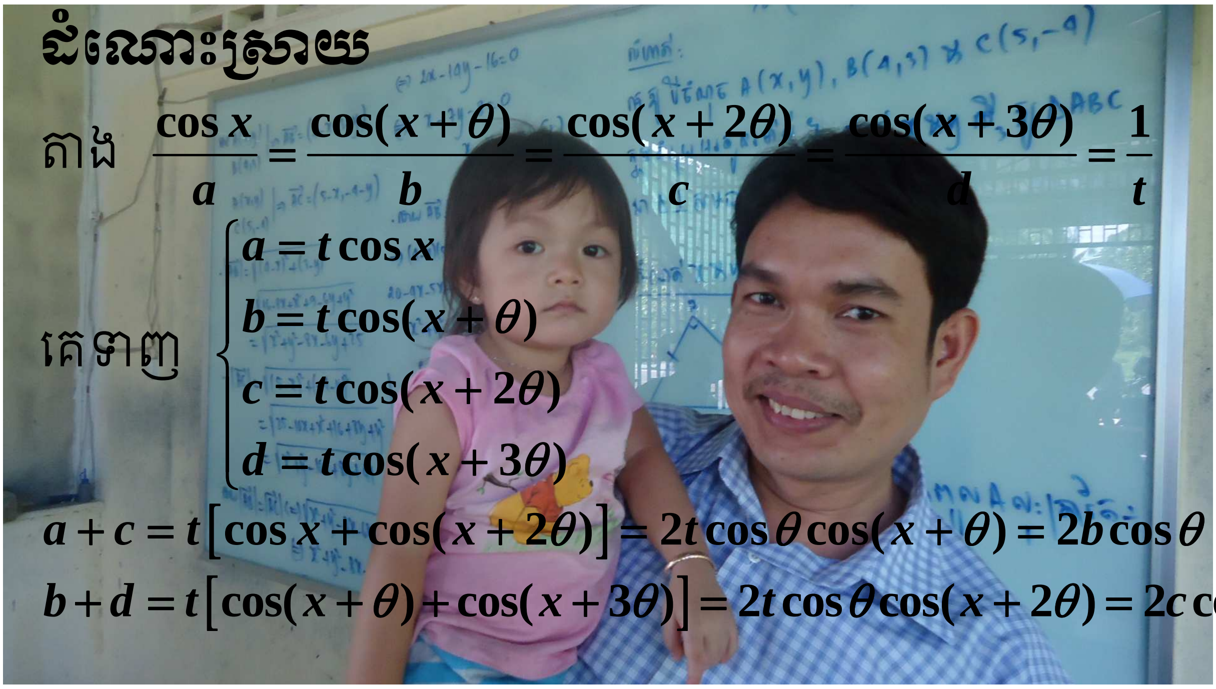
ដូចនេះ៖ $\tan\frac{\theta-\alpha}{2}$, $\tan\frac{\beta}{2}$, $\tan\frac{\theta+\alpha}{2}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

លំហាត់ទី០៥

ចូរស្រាយថាបើគេមានសមភាព

$$\frac{\cos x}{a}=\frac{\cos(x+\theta)}{b}=\frac{\cos(x+2\theta)}{c}=\frac{\cos(x+3\theta)}{d}$$

នោះគេបាន $\frac{a+c}{b}=\frac{b+d}{c}$ ។



ដំណោះស្រាយ

តាង $\frac{\cos x}{a}=\frac{\cos(x+\theta)}{b}=\frac{\cos(x+2\theta)}{c}=\frac{\cos(x+3\theta)}{d}=\frac{1}{t}$

គេទាញ $\begin{cases} a=t\cos x \\ b=t\cos(x+\theta) \\ c=t\cos(x+2\theta) \\ d=t\cos(x+3\theta) \end{cases}$

$$a+c=t\left[\cos x+\cos(x+2\theta)\right]=2t\cos\theta\cos(x+\theta)=2b\cos\theta$$

$$b+d=t\left[\cos(x+\theta)+\cos(x+3\theta)\right]=2t\cos\theta\cos(x+2\theta)=2c\cos\theta$$

គេបាន $\frac{a+c}{b+d}=\frac{2b\cos\theta}{2c\cos\theta}=\frac{b}{c}$ សមមូល $\frac{a+c}{b}=\frac{b+d}{c}$ ។

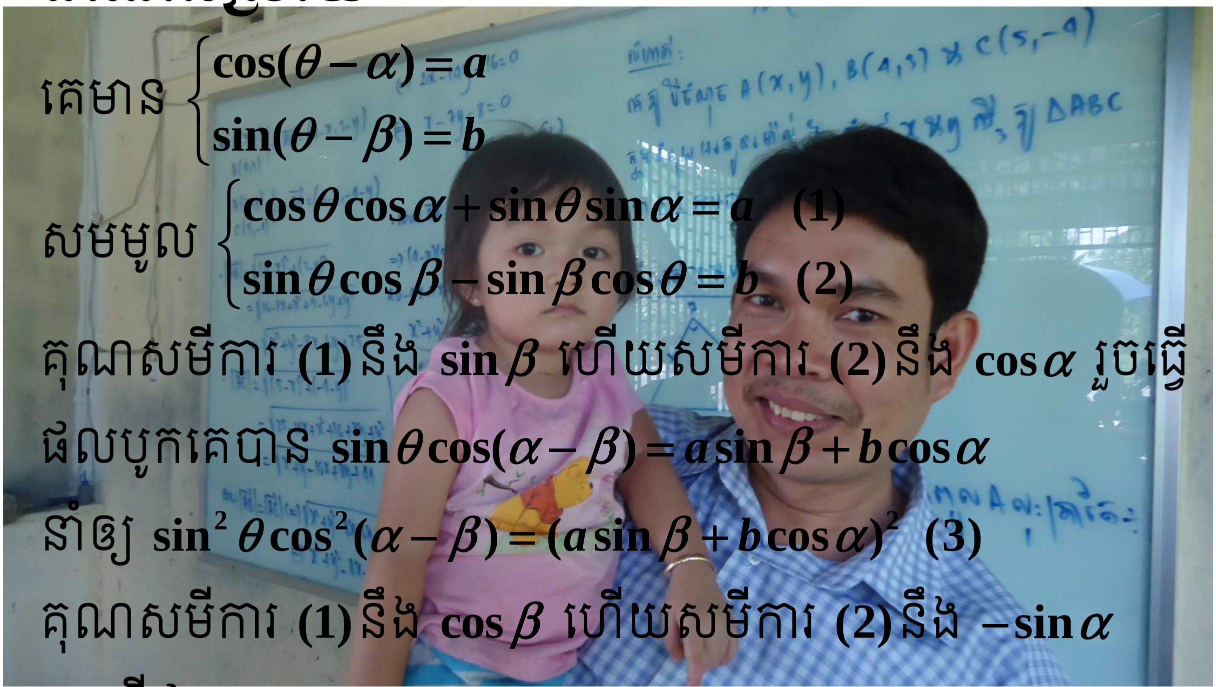
ដូចនេះ $\frac{a+c}{b}=\frac{b+d}{c}$ ។

លំហាត់ទី០៦

ចូរស្រាយថាបើ $\cos(\theta-\alpha)=a$ និង $\sin(\theta-\beta)=b$

នោះគេបាន $a^2-2ab\sin(\alpha-\beta)+b^2=\cos^2(\alpha-\beta)$ ។

ដំណោះស្រាយ



គេមាន $\begin{cases}\cos(\theta-\alpha)=a\\ \sin(\theta-\beta)=b\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=a & (1)\\ \sin\theta\cos\beta-\sin\beta\cos\theta=b & (2)\end{cases}$

គុណសមីការ (1) នឹង $\sin\beta$ ហើយសមីការ (2) នឹង $\cos\alpha$ រួចធ្វើ

ផលបូកគេបាន $\sin\theta\cos(\alpha-\beta)=a\sin\beta+b\cos\alpha$

នាំឲ្យ $\sin^2\theta\cos^2(\alpha-\beta)=(a\sin\beta+b\cos\alpha)^2$ (3)

គុណសមីការ (1) នឹង $\cos\beta$ ហើយសមីការ (2) នឹង $-\sin\alpha$

រួចធ្វើផលបូកគេបាន $\cos\theta\cos(\alpha-\beta)=a\cos\beta-b\sin\alpha$

នាំឲ្យ $\cos^2\theta\cos^2(\alpha-\beta)=(a\cos\beta-b\sin\alpha)^2$ (4)

បូកសមីការ (3) និង (4) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\cos^2(\alpha-\beta)=(a\sin\beta+b\cos\alpha)^2+(a\cos\beta-b\sin\alpha)^2$$

$$\cos^2(\alpha-\beta)=a^2+b^2-2ab(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)$$

$$\cos^2(\alpha-\beta)=a^2+b^2-2ab\sin(\alpha-\beta)$$

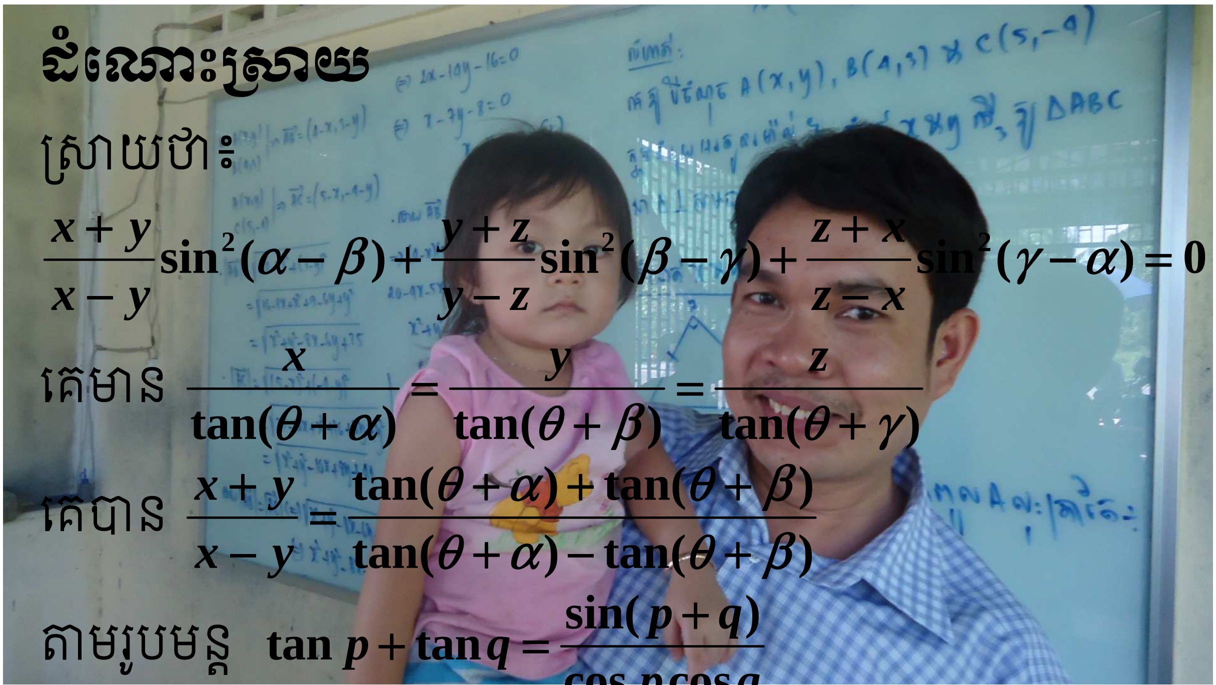
ដូចនេះ $a^2-2ab\sin(\alpha-\beta)+b^2=\cos^2(\alpha-\beta)$ ។

លំហាត់ទី០៧

ដោយដឹងថា $\dfrac{x}{\tan(\theta+\alpha)}=\dfrac{y}{\tan(\theta+\beta)}=\dfrac{z}{\tan(\theta+\gamma)}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=0$$



ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា៖

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=0$$

គេមាន $\dfrac{x}{\tan(\theta+\alpha)}=\dfrac{y}{\tan(\theta+\beta)}=\dfrac{z}{\tan(\theta+\gamma)}$

គេបាន $\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{\tan(\theta+\alpha)+\tan(\theta+\beta)}{\tan(\theta+\alpha)-\tan(\theta+\beta)}$

តាមរូបមន្ត $\tan p+\tan q=\dfrac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$

និង $\tan p-\tan q=\dfrac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$ នោះគេបាន ៖

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{\sin(2\theta+\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)=\sin(2\theta+\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)=\frac{\cos(2\theta+2\beta)-\cos(2\theta+2\alpha)}{2}\quad(1)$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន ៖

$$\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)=\frac{\cos(2\theta+2\gamma)-\cos(2\theta+2\beta)}{2} \quad (2)$$

$$\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=\frac{\cos(2\theta+2\alpha)-\cos(2\theta+2\gamma)}{2} \quad (3)$$

ធ្វើផលបូក (1) , (2) និង (3) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=0$$

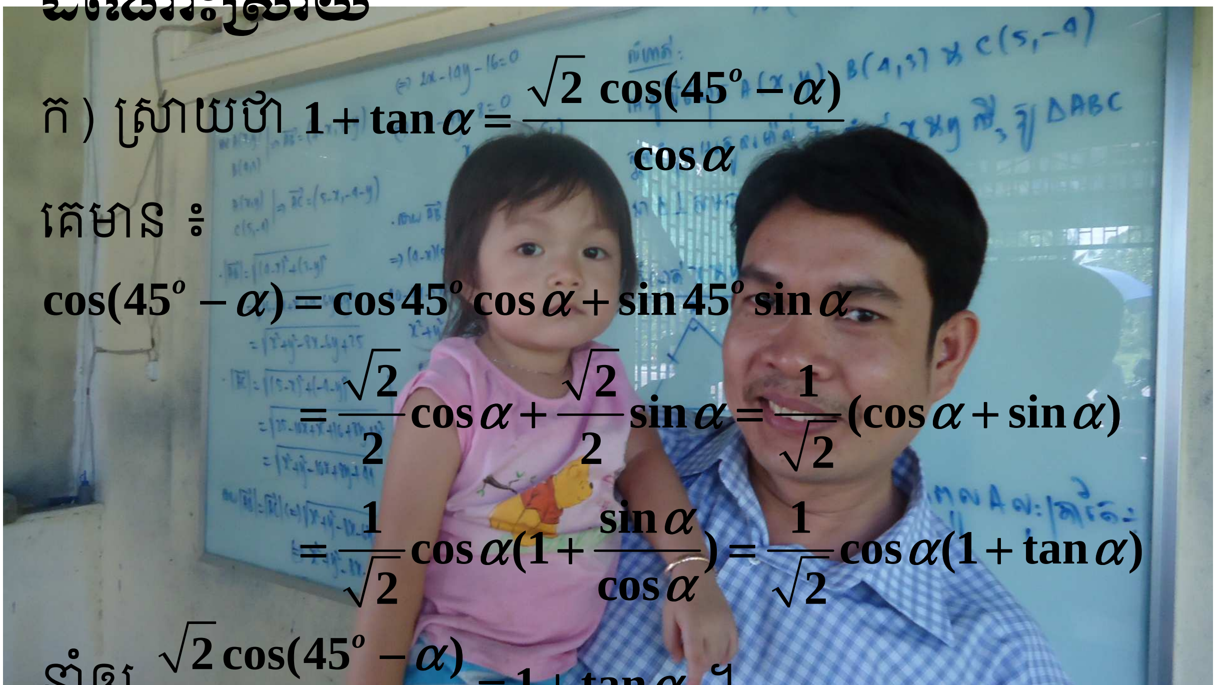
លំហាត់ទី០៨

ក) ចូរស្រាយថា $1+\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{2}\,\cos(45^o-\alpha)}{\cos\alpha}$

ខ) គណនា

$P=(1+\tan 1^o)(1+\tan 2^o)(1+\tan 3^o)...(1+\tan 45^o)$

ដំណោះស្រាយ



ក) ស្រាយថា $1+\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{2}\,\cos(45^o-\alpha)}{\cos\alpha}$

គេមាន ៖

$$\cos(45^o-\alpha)=\cos 45^o\cos\alpha+\sin 45^o\sin\alpha$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha+\sin\alpha)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha(1+\tan\alpha)$$

នាំឲ្យ $\dfrac{\sqrt{2}\cos(45^o-\alpha)}{\cos\alpha}=1+\tan\alpha$ ។

ដូចនេះ៖ $1+\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{2}\,\cos(45^o-\alpha)}{\cos\alpha}$ ។

ខ) គណនា

$P=(1+\tan 1^o)(1+\tan 2^o)(1+\tan 3^o)...(1+\tan 45^o)$

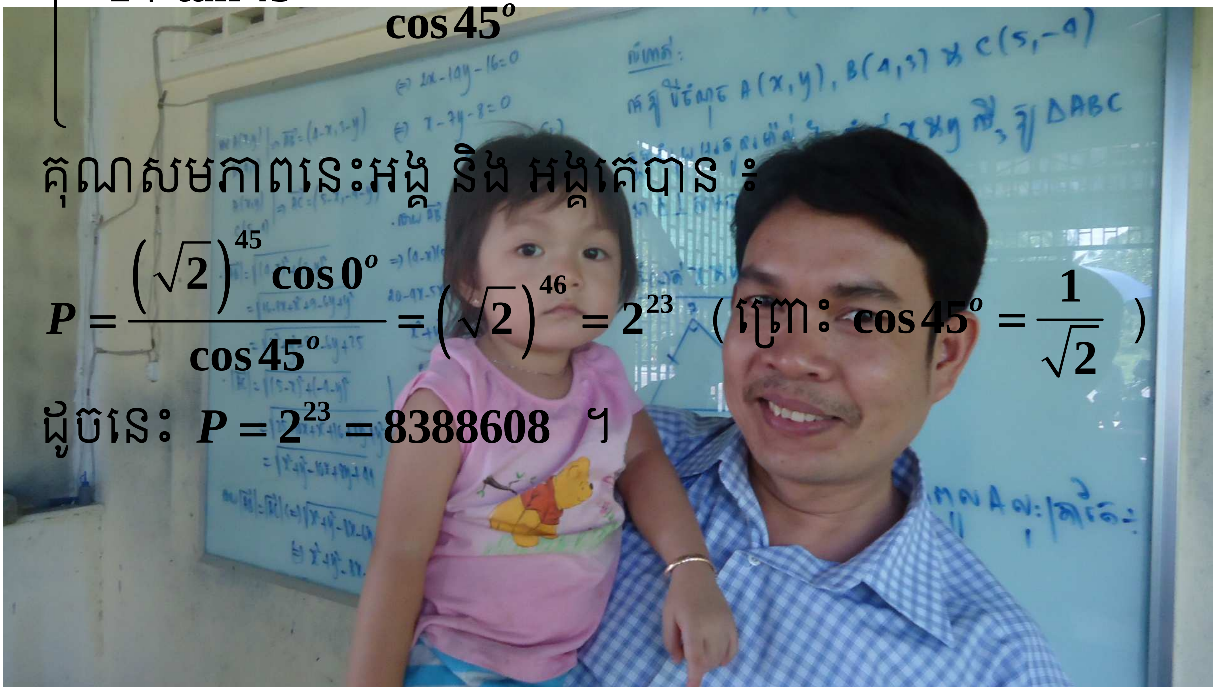
តាមសមភាព $1+\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{2}\,\cos(45^o-\alpha)}{\cos\alpha}$ នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases} 1+\tan 1^o = \dfrac{\sqrt{2}\cos 44^0}{\cos 1^o} \\ 1+\tan 2^o = \dfrac{\sqrt{2}\cos 43^o}{\cos 2^o} \\ 1+\tan 3^o = \dfrac{\sqrt{2}\cos 42^o}{\cos 3^o} \\ -------------- \\ 1+\tan 45^o = \dfrac{\sqrt{2}\cos 0^o}{\cos 45^o} \end{cases}$$

គុណសមភាពនេះអង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$P = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{45}\cos 0^o}{\cos 45^o} = \left(\sqrt{2}\right)^{46} = 2^{23} \ \left(\text{ព្រោះ } \cos 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

ដូចនេះ $P = 2^{23} = 8388608$ ។

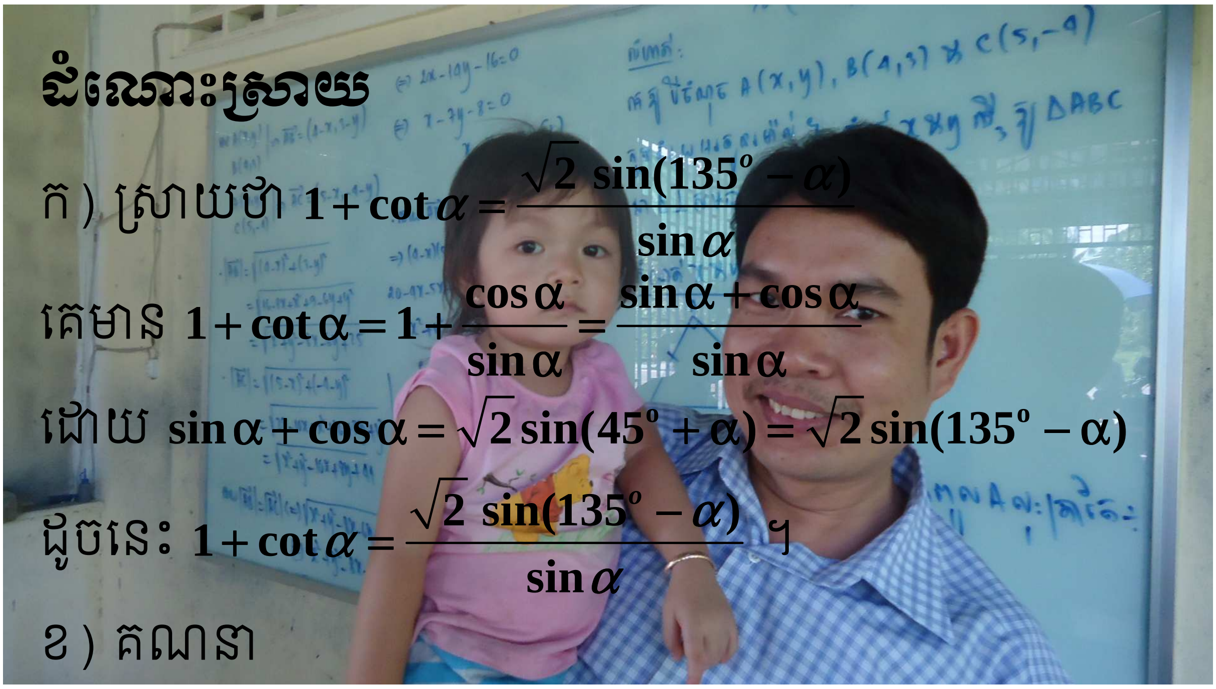


លំហាត់ទី០៩

ក) ចូរស្រាយថា $1+\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{2}\sin(135^o-\alpha)}{\sin\alpha}$

ខ) គណនា

$P=(1+\cot 1^o)(1+\cot 2^o)(1+\cot 3^o)...(1+\cot 134^o)$



ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $1+\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{2}\sin(135^o-\alpha)}{\sin\alpha}$

គេមាន $1+\cot\alpha=1+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

ដោយ $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(45^o+\alpha)=\sqrt{2}\sin(135^o-\alpha)$

ដូចនេះ៖ $1+\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{2}\sin(135^o-\alpha)}{\sin\alpha}$ ។

ខ) គណនា

$P=(1+\cot 1^o)(1+\cot 2^o)(1+\cot 3^o)...(1+\cot 134^o)$

ដោយប្រើសមភាព $1+\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{2}\sin(135^o-\alpha)}{\sin\alpha}$ គេបាន ៖

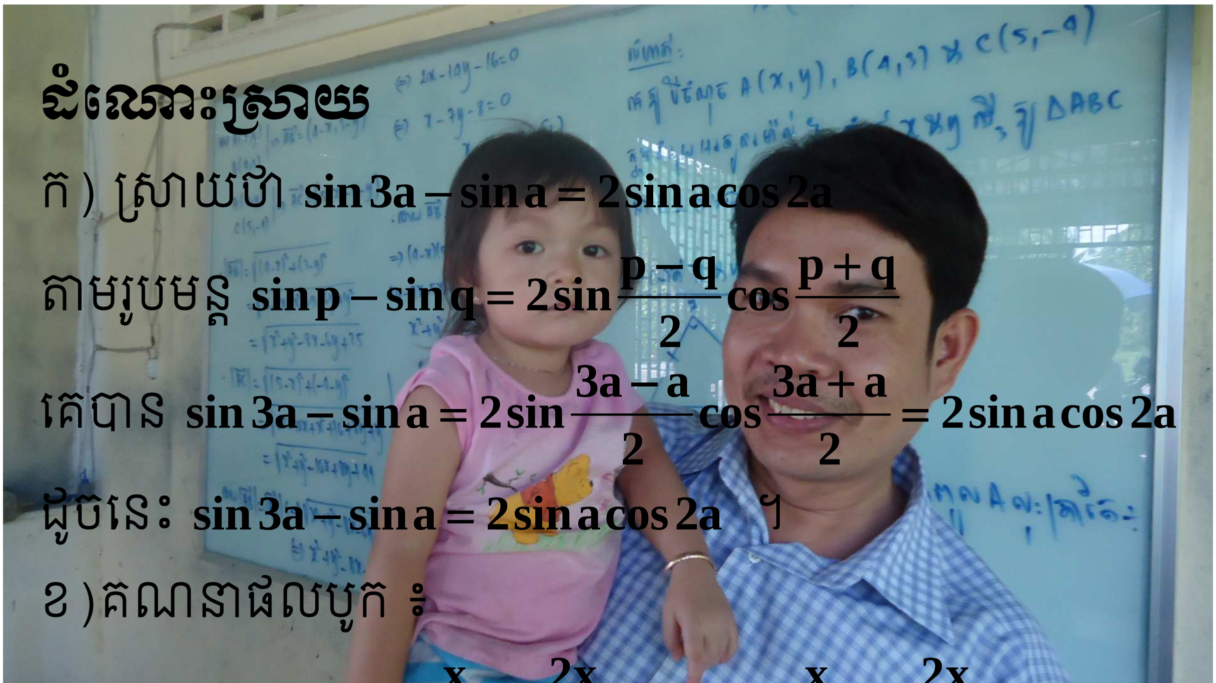
$P=\left(\sqrt{2}\right)^{134}=2^{67}=147573952589676412928$ ។

លំហាត់ទី១០

ក) ចូរស្រាយថា $\sin 3a - \sin a = 2\sin a\cos 2a$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S = \sin x\cos 2x + \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3} + ... + \sin\frac{x}{3^n}\cos\frac{2x}{3^n}$$



ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\sin 3a - \sin a = 2\sin a\cos 2a$

តាមរូបមន្ត $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

គេបាន $\sin 3a - \sin a = 2\sin\frac{3a-a}{2}\cos\frac{3a+a}{2} = 2\sin a\cos 2a$

ដូចនេះ $\sin 3a - \sin a = 2\sin a\cos 2a$ ។

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S = \sin x\cos 2x + \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3} + ... + \sin\frac{x}{3^n}\cos\frac{2x}{3^n}$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\sin 3a - \sin a = 2\sin a\cos 2a$

យក $a = \frac{x}{2^k}$ គេបាន $\sin\frac{x}{3^{k-1}} - \sin\frac{x}{3^k} = 2\sin\frac{x}{3^k}\cos\frac{2x}{3^k}$

ឬ $\sin\frac{x}{3^k}\cos\frac{2x}{3^k} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{x}{3^{k-1}} - \sin\frac{x}{3^k}\right)$

ចំពោះ $k = 0,1,2,3,....,n$ គេបាន ៖

$$\begin{cases} \sin x\cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x) \\ \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3} = \frac{1}{2}(\sin x - \sin\frac{x}{3}) \\ -------------------- \\ \sin\frac{x}{3^n}\cos\frac{2x}{3^n} = \frac{1}{2}(\sin\frac{x}{3^{n-1}} - \sin\frac{x}{3^n}) \end{cases}$$

ធ្វើផលបូកអង្គ និង អង្គគេបាន ៖

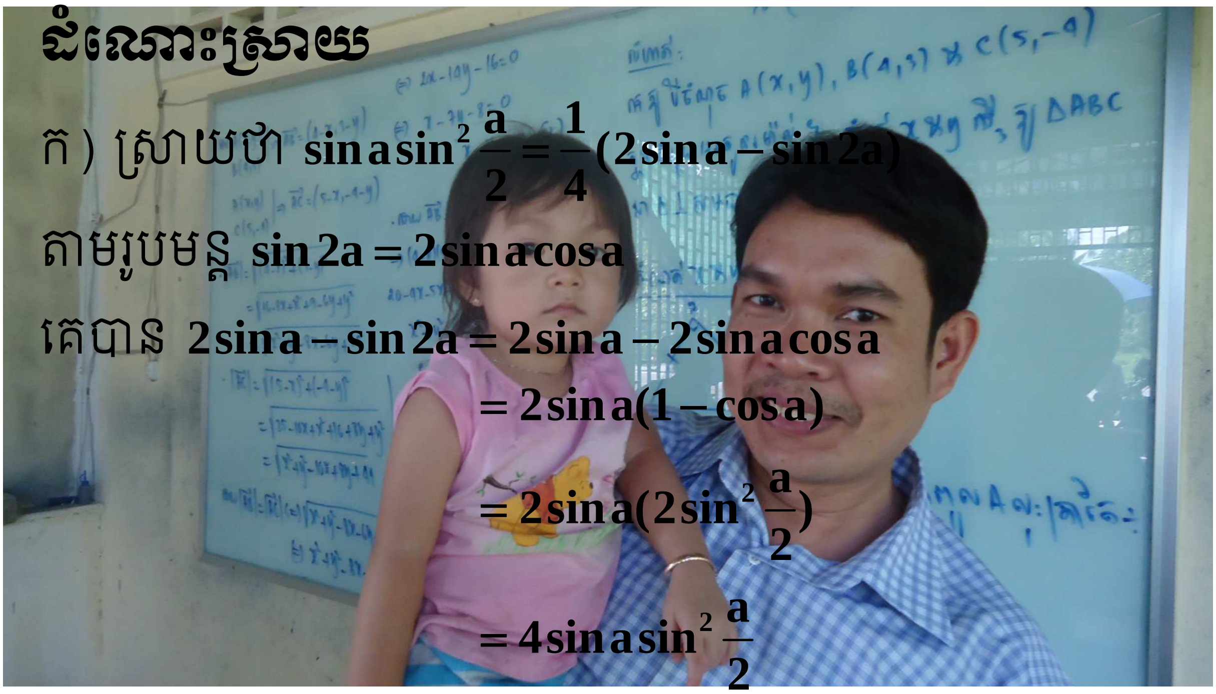
$S = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin\frac{x}{3^n})$ ។

លំហាត់ទី១០

ក) ចូរស្រាយថា $\sin a \sin^2\frac{a}{2} = \frac{1}{4}(2\sin a - \sin 2a)$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S = \sin a \sin^2\frac{a}{2} + 2\sin\frac{a}{2}\sin^2\frac{a}{4} + ... + 2^n \sin\frac{a}{2^n}\sin^2\frac{a}{2^{n+1}}$$



ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\sin a \sin^2\frac{a}{2} = \frac{1}{4}(2\sin a - \sin 2a)$

តាមរូបមន្ត $\sin 2a = 2\sin a\cos a$

គេបាន $2\sin a - \sin 2a = 2\sin a - 2\sin a\cos a$

$$= 2\sin a(1-\cos a)$$

$$= 2\sin a(2\sin^2\frac{a}{2})$$

$$= 4\sin a\sin^2\frac{a}{2}$$

ដូចនេះ $\sin a \sin^2\frac{a}{2} = \frac{1}{4}(2\sin a - \sin 2a)$ ។

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S = \sin a \cos^2\frac{a}{2} + 2\sin\frac{a}{2}\cos^2\frac{a}{4} + ... + 2^n \sin\frac{a}{2^n}\cos^2\frac{a}{2^{n+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(2^k \sin\frac{a}{2^k}\sin^2\frac{a}{2^{k+1}}\right)$$

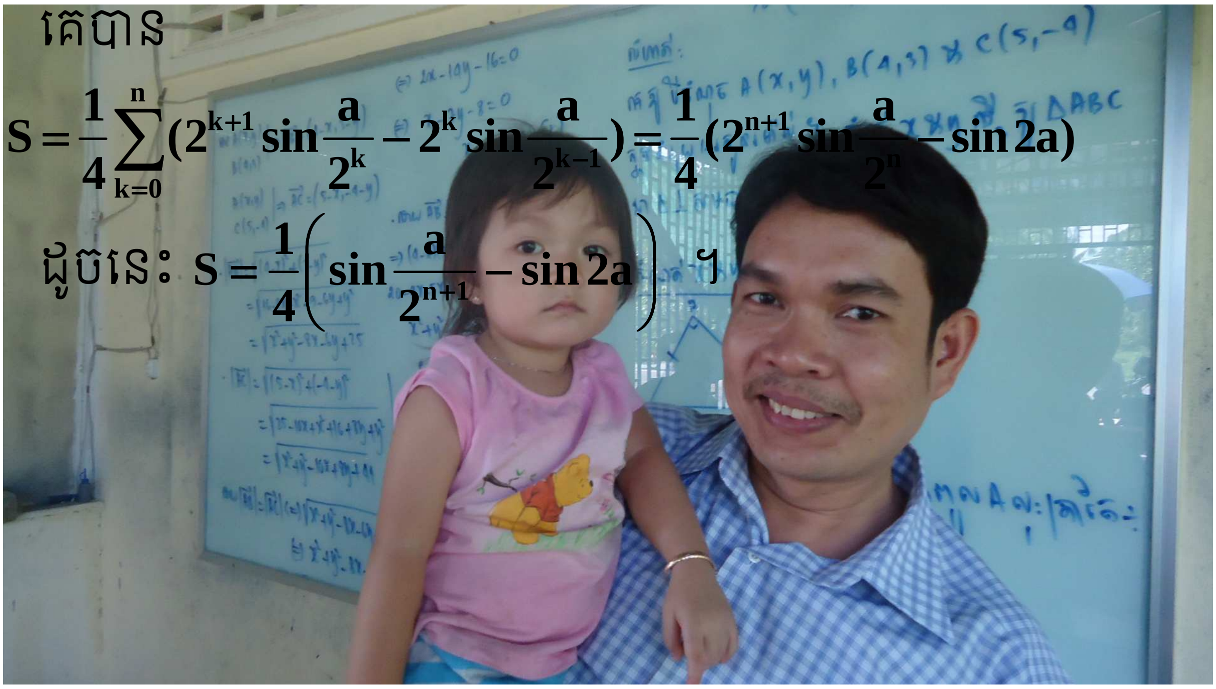
គេមាន $\sin a\sin^2\frac{a}{2}=\frac{1}{4}(2\sin a-\sin 2a)$

ជំនួស a ដោយ $\frac{a}{2^k}$ គេបាន ៖

$$\sin\frac{a}{2^k}\sin^2\frac{a}{2^{k+1}}=\frac{1}{4}\left(2\sin\frac{a}{2^k}-\sin\frac{a}{2^{k-1}}\right)$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង 2^k ៖

$$2^k\sin\frac{a}{2^k}\sin^2\frac{a}{2^{k+1}}=\frac{1}{4}(2^{k+1}\sin\frac{a}{2^k}-2^k\sin\frac{a}{2^{k-1}})$$



គេបាន

$$S=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}(2^{k+1}\sin\frac{a}{2^k}-2^k\sin\frac{a}{2^{k-1}})=\frac{1}{4}(2^{n+1}\sin\frac{a}{2^n}-\sin 2a)$$

ដូចនេះ: $S=\frac{1}{4}\left(\sin\frac{a}{2^{n+1}}-\sin 2a\right)$ ។

លំហាត់ទី១១

ក) ចូរស្រាយថា $\cos a - \cos 3a = 2\sin a \sin 2a$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S = \sin a \sin 2a + \sin\frac{a}{3}\sin\frac{2a}{3} + ... + \sin\frac{a}{3^n}\sin\frac{2a}{3^n}$$

ដំណោះស្រាយ

ក) ចូរស្រាយថា $\cos a - \cos 3a = 2\sin a \sin 2a$

តាមរូបមន្ត $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$

គេបាន $\cos a - \cos 3a = -2\sin\frac{a-3a}{2}\sin\frac{a+3a}{2}$

$$= -2\sin(-a)\sin 2a$$

$$= 2\sin a \sin 2a$$

ដូចនេះ $\cos a - \cos 3a = 2\sin a \sin 2a$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S = \sin a \sin 2a + \sin\frac{a}{3}\sin\frac{2a}{3} + ... + \sin\frac{a}{3^n}\sin\frac{2a}{3^n}$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\cos a - \cos 3a = 2\sin a \sin 2a$

ជំនួស a ដោយ $\frac{a}{3^k}$ គេបាន $\cos\frac{a}{3^k} - \cos\frac{a}{3^{k-1}} = 2\sin\frac{a}{3^k}\sin\frac{2a}{3^k}$

គេទាញ $\sin\frac{a}{3^k}\sin\frac{2a}{3^k} = \frac{1}{2}(\cos\frac{a}{3^k} - \cos\frac{a}{3^{k-1}})$

បើ $k=0: \sin a \sin 2a = \frac{1}{2}(\cos a - \cos 3a)$

បើ $k=1: \sin\frac{a}{3}\sin\frac{2a}{3} = \frac{1}{2}(\cos\frac{a}{3} - \cos a)$

បើ $k=2: \sin\frac{a}{3^2}\sin\frac{2a}{3^2} = \frac{1}{2}(\cos\frac{a}{3^2} - \cos\frac{a}{3})$

$-----------------------$

បើ $k=n: \sin\frac{a}{3^n}\sin\frac{2a}{3^n} = \frac{1}{2}(\cos\frac{a}{3^n} - \cos\frac{a}{3^{n-1}})$

ធ្វើផលបូកអង្គ និង អង្គគេបាន $S=\frac{1}{2}(\cos\frac{a}{3^n} - \cos 3a)$ ។

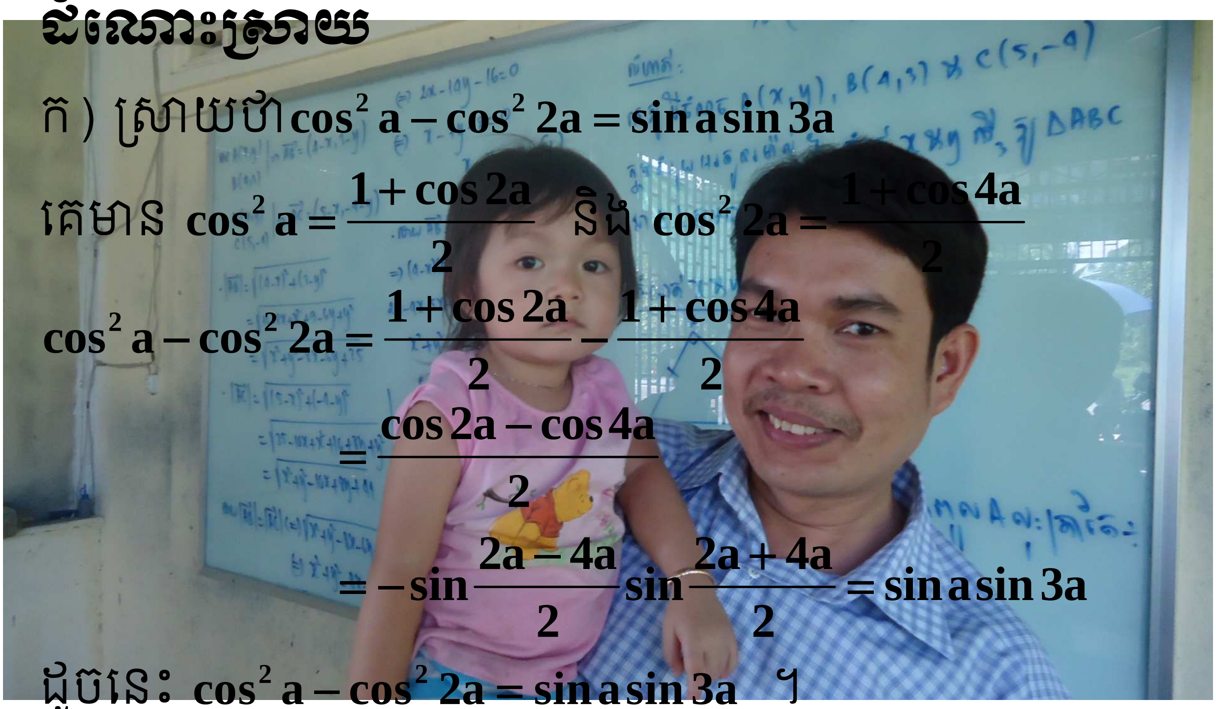
លំហាត់ទី១២

ក) ចូរស្រាយថា $\cos^2 a-\cos^2 2a=\sin a\sin 3a$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S=\sin a\sin 3a+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{3a}{2}+....+\sin\frac{a}{2^n}\sin\frac{3a}{2^n}$$

ដំណោះស្រាយ



ក) ស្រាយថា $\cos^2 a-\cos^2 2a=\sin a\sin 3a$

គេមាន $\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$ និង $\cos^2 2a=\dfrac{1+\cos 4a}{2}$

$$\cos^2 a-\cos^2 2a=\frac{1+\cos 2a}{2}-\frac{1+\cos 4a}{2}$$

$$=\frac{\cos 2a-\cos 4a}{2}$$

$$=-\sin\frac{2a-4a}{2}\sin\frac{2a+4a}{2}=\sin a\sin 3a$$

ដូចនេះ $\cos^2 a-\cos^2 2a=\sin a\sin 3a$ ។

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S=\sin a\sin 3a+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{3a}{2}+....+\sin\frac{a}{2^n}\sin\frac{3a}{2^n}$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\cos^2 a-\cos^2 2a=\sin a\sin 3a$

ជំនួស a ដោយ $\dfrac{a}{2^k}$ គេបាន

$$\cos^2\frac{a}{2^k}-\cos^2\frac{a}{2^{k-1}}=\sin\frac{a}{2^k}\sin\frac{3a}{2^k}$$

ចំពោះ $k=0 : \sin a \sin 3a = \cos^2 a - \cos^2 2a$

ចំពោះ $k=1 : \sin\frac{a}{2}\sin\frac{3a}{2} = \cos^2\frac{a}{2} - \cos^2 a$

ចំពោះ $k=3 : \sin\frac{a}{2^2}\sin\frac{3a}{2^2} = \cos^2\frac{a}{2^2} - \cos^2\frac{a}{2}$

ចំពោះ $k=n : \sin\frac{a}{2^n}\sin\frac{3a}{2^n} = \cos^2\frac{a}{2^n} - \cos^2\frac{a}{2^{n-1}}$

ធ្វើផលបូកអង្គ និង អង្គ គេបាន $S = \cos\frac{a}{2^n} - \cos 2a$ ។

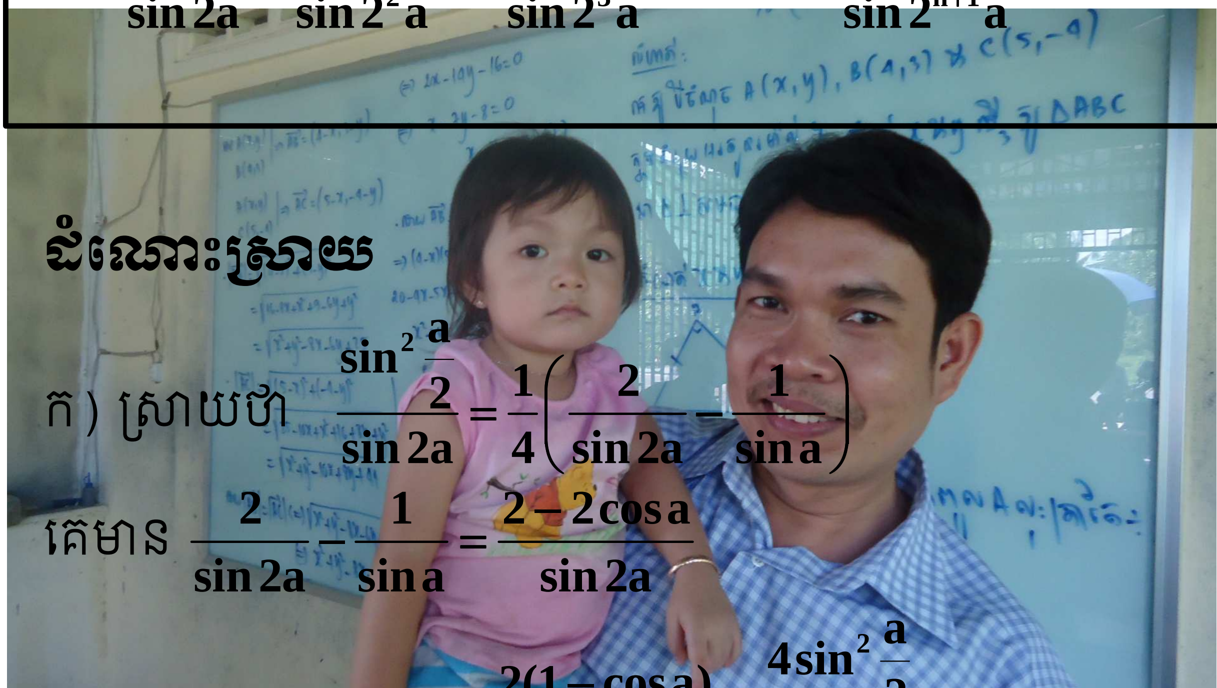
ដូចនេះ $S = \cos\frac{a}{2^n} - \cos 2a$ ។

លំហាត់ទី១៣

ក) ចូរស្រាយថា $\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin 2a}=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\sin 2a}-\frac{1}{\sin a}\right)$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S=\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin 2a}+\frac{2\sin^2 a}{\sin 2^2 a}+\frac{2^2\sin^2 2a}{\sin 2^3 a}+....+\frac{2^n\sin^2 2^{n-1}a}{\sin 2^{n+1}a}$$



ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin 2a}=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\sin 2a}-\frac{1}{\sin a}\right)$

គេមាន $\frac{2}{\sin 2a}-\frac{1}{\sin a}=\frac{2-2\cos a}{\sin 2a}$

$$=\frac{2(1-\cos a)}{\sin 2a}=\frac{4\sin^2\frac{a}{2}}{\sin 2a}$$

ដូចនេះ $\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin 2a}=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\sin 2a}-\frac{1}{\sin a}\right)$ ។

ខ)គណនា

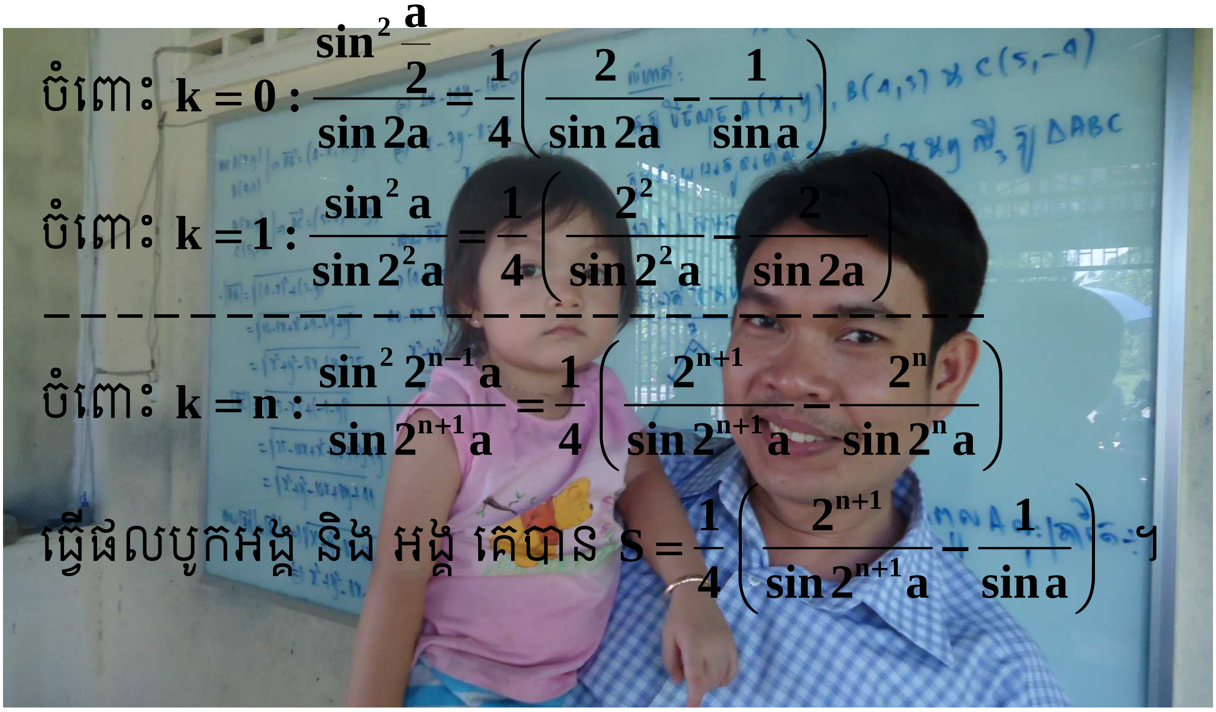
$$S=\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin 2a}+\frac{2\sin^2 a}{\sin 2^2 a}+\frac{2^2\sin^2 2a}{\sin 2^3 a}+....+\frac{2^n\sin^2 2^{n-1}a}{\sin 2^{n+1}a}$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\dfrac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin 2a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{\sin 2a}-\dfrac{1}{\sin a}\right)$

ជំនួស a ដោយ $2^k a$ គេបាន

$$\frac{\sin^2 2^{k-1}a}{\sin 2^{k+1}a}=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\sin 2^{k+1}a}-\frac{1}{\sin 2^k a}\right)$$

ហេតុនេះ: $\dfrac{2^k\sin^2 2^{k-1}a}{\sin 2^{k+1}a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2^{k+1}}{\sin 2^{k+1}a}-\dfrac{2^k}{\sin 2^k a}\right)$



ចំពោះ $k=0:\dfrac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin 2a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{\sin 2a}-\dfrac{1}{\sin a}\right)$

ចំពោះ $k=1:\dfrac{\sin^2 a}{\sin 2^2 a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2^2}{\sin 2^2 a}-\dfrac{2}{\sin 2a}\right)$

ចំពោះ $k=n:\dfrac{\sin^2 2^{n-1}a}{\sin 2^{n+1}a}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2^{n+1}}{\sin 2^{n+1}a}-\dfrac{2^n}{\sin 2^n a}\right)$

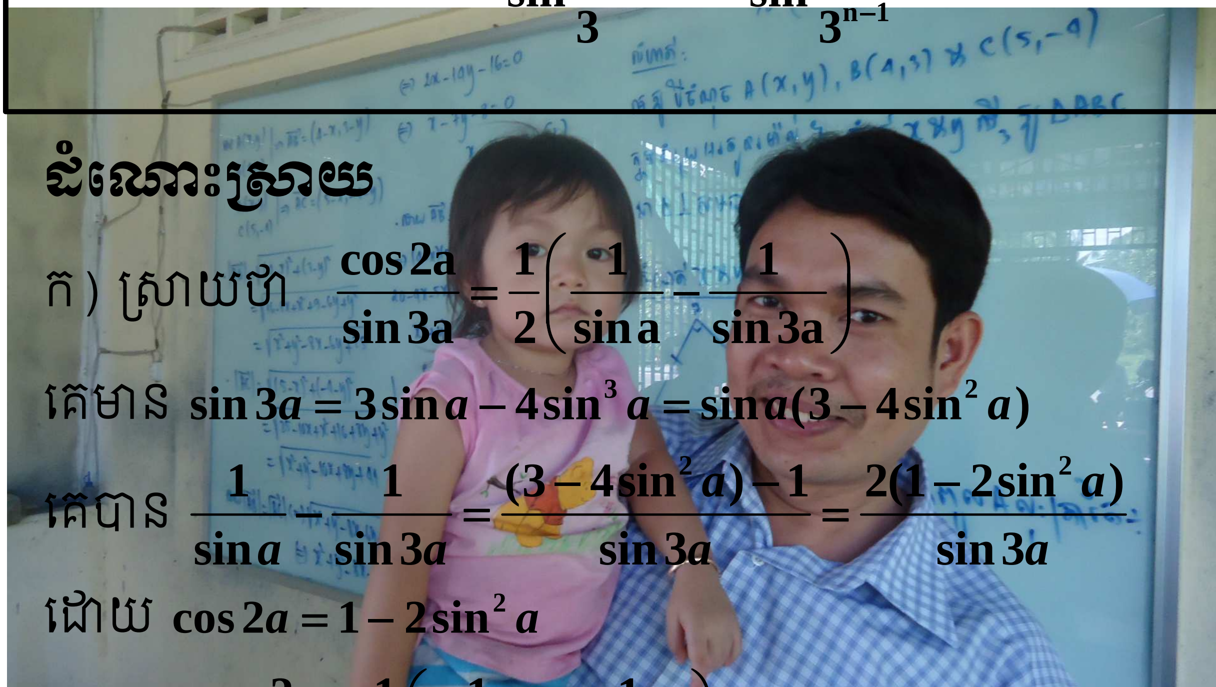
ធ្វើផលបូកអង្គ និង អង្គ គេបាន $S=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2^{n+1}}{\sin 2^{n+1}a}-\dfrac{1}{\sin a}\right)$។

លំហាត់ទី១៤

ក) ចូរស្រាយថា $\dfrac{\cos 2a}{\sin 3a}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sin a}-\dfrac{1}{\sin 3a}\right)$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{\cos 2a}{\sin 3a}+\frac{\cos\frac{2a}{3}}{\sin a}+\frac{\cos\frac{2a}{3^2}}{\sin\frac{a}{3}}+\dots+\frac{\cos\frac{2a}{3^n}}{\sin\frac{a}{3^{n-1}}}$$



ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\dfrac{\cos 2a}{\sin 3a}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sin a}-\dfrac{1}{\sin 3a}\right)$

គេមាន $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a=\sin a(3-4\sin^2 a)$

គេបាន $\dfrac{1}{\sin a}-\dfrac{1}{\sin 3a}=\dfrac{(3-4\sin^2 a)-1}{\sin 3a}=\dfrac{2(1-2\sin^2 a)}{\sin 3a}$

ដោយ $\cos 2a=1-2\sin^2 a$

ដូចនេះ៖ $\dfrac{\cos 2a}{\sin 3a}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sin a}-\dfrac{1}{\sin 3a}\right)$ ។

ខ)គណនាផលបូក ៖

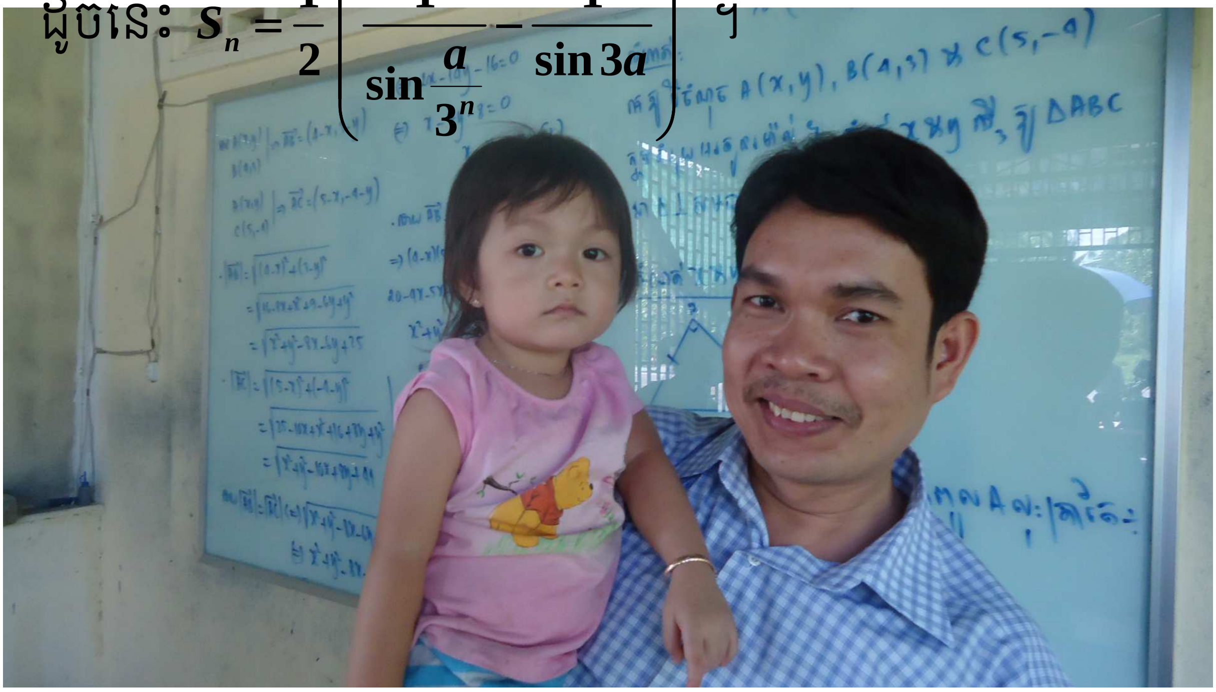
$$S_n=\frac{\cos 2a}{\sin 3a}+\frac{\cos\frac{2a}{3}}{\sin a}+\frac{\cos\frac{2a}{3^2}}{\sin\frac{a}{3}}+\dots+\frac{\cos\frac{2a}{3^n}}{\sin\frac{a}{3^{n-1}}}$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\dfrac{\cos 2a}{\sin 3a}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sin a}-\dfrac{1}{\sin 3a}\right)$

ជំនួស a ដោយ $\frac{a}{3^k}$ គេបាន $\dfrac{\cos\frac{2a}{3^k}}{\sin\frac{a}{3^{k-1}}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sin\frac{a}{3^k}}-\dfrac{1}{\sin\frac{a}{3^{k-1}}}\right)$

គេបាន $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{\cos\frac{2a}{3^k}}{\sin\frac{a}{3^{k-1}}}=\dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{1}{\sin\frac{a}{3^k}}-\dfrac{1}{\sin\frac{a}{3^{k-1}}}\right)$

ដូចនេះ $S_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sin\frac{a}{3^n}}-\dfrac{1}{\sin 3a}\right)$ ។

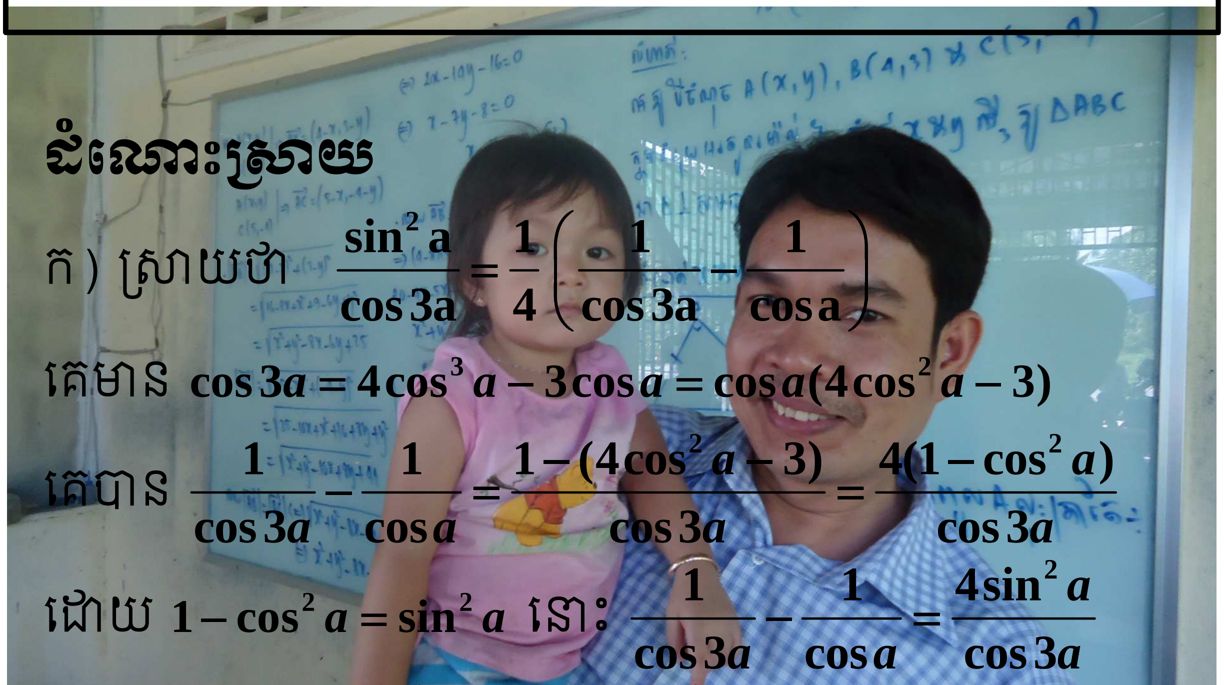


លំហាត់ទី១៥

ក) ចូរស្រាយថា $\frac{\sin^2 a}{\cos 3a}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 3a}-\frac{1}{\cos a}\right)$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{\sin^2 a}{\cos 3a}+\frac{\sin^2 3a}{\cos 3^2 a}+\frac{\sin^2 3^2 a}{\cos 3^3 a}+....+\frac{\sin^2 3^n a}{\cos 3^{n+1} a}$$ ។



ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\frac{\sin^2 a}{\cos 3a}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 3a}-\frac{1}{\cos a}\right)$

គេមាន $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a=\cos a(4\cos^2 a-3)$

គេបាន $\frac{1}{\cos 3a}-\frac{1}{\cos a}=\frac{1-(4\cos^2 a-3)}{\cos 3a}=\frac{4(1-\cos^2 a)}{\cos 3a}$

ដោយ $1-\cos^2 a=\sin^2 a$ នោះ $\frac{1}{\cos 3a}-\frac{1}{\cos a}=\frac{4\sin^2 a}{\cos 3a}$

ដូចនេះ $\frac{\sin^2 a}{\cos 3a}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 3a}-\frac{1}{\cos a}\right)$ ។

ខ)គណនាផលបូក

$$S_n=\frac{\sin^2 a}{\cos 3a}+\frac{\sin^2 3a}{\cos 3^2 a}+\frac{\sin^2 3^2 a}{\cos 3^3 a}+....+\frac{\sin^2 3^n a}{\cos 3^{n+1} a}$$

គេមាន $\frac{\sin^2 a}{\cos 3a}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 3a}-\frac{1}{\cos a}\right)$ ជំនួស a ដោយ $3^k a$

គេបាន $\dfrac{\sin^2 3^k a}{\cos 3^{k+1} a} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\cos 3^{k+1} a} - \dfrac{1}{\cos 3^k a}\right)$

$$S_n = \frac{\sin^2 a}{\cos 3a} + \frac{\sin^2 3a}{\cos 3^2 a} + \frac{\sin^2 3^2 a}{\cos 3^3 a} + \dots + \frac{\sin^2 3^n a}{\cos 3^{n+1} a}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\cos 3^{k+1} a} - \frac{1}{\cos 3^k a}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 3^{n+1} a} - \frac{1}{\cos a}\right)$$

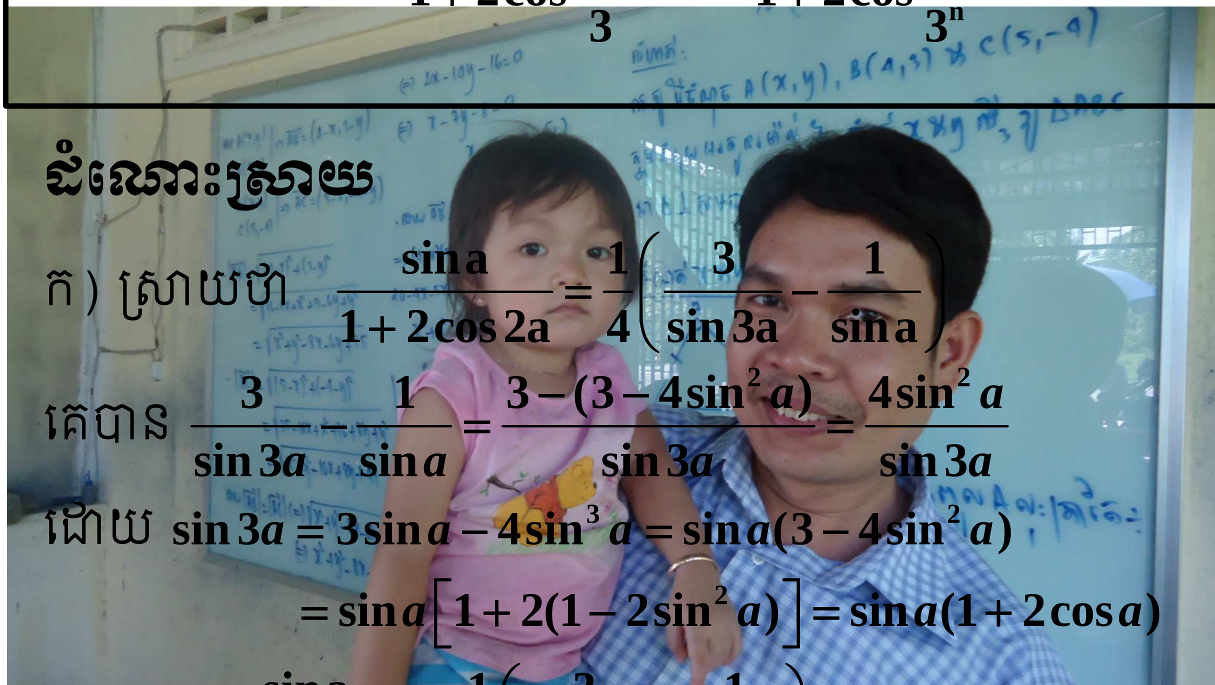
ដូចនេះ $S_n = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\cos 3^{n+1} a} - \dfrac{1}{\cos a}\right)$ ។

លំហាត់ទី១៦

ក) ចូរស្រាយថា $\frac{\sin a}{1+2\cos 2a}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{\sin 3a}-\frac{1}{\sin a}\right)$

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{\sin a}{1+2\cos 2a}+\frac{\frac{1}{3}\sin\frac{a}{3}}{1+2\cos\frac{2a}{3}}+\dots\dots\frac{\frac{1}{3^n}\sin\frac{a}{3^n}}{1+2\cos\frac{2a}{3^n}}$$ ។



ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\frac{\sin a}{1+2\cos 2a}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{\sin 3a}-\frac{1}{\sin a}\right)$

គេបាន $\frac{3}{\sin 3a}-\frac{1}{\sin a}=\frac{3-(3-4\sin^2 a)}{\sin 3a}=\frac{4\sin^2 a}{\sin 3a}$

ដោយ $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a=\sin a(3-4\sin^2 a)$

$$=\sin a\left[1+2(1-2\sin^2 a)\right]=\sin a(1+2\cos a)$$

ដូចនេះ៖ $\frac{\sin a}{1+2\cos 2a}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{\sin 3a}-\frac{1}{\sin a}\right)$ ។

ខ)គណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{\sin a}{1+2\cos 2a}+\frac{\frac{1}{3}\sin\frac{a}{3}}{1+2\cos\frac{2a}{3}}+\dots\dots\frac{\frac{1}{3^n}\sin\frac{a}{3^n}}{1+2\cos\frac{2a}{3^n}}$$

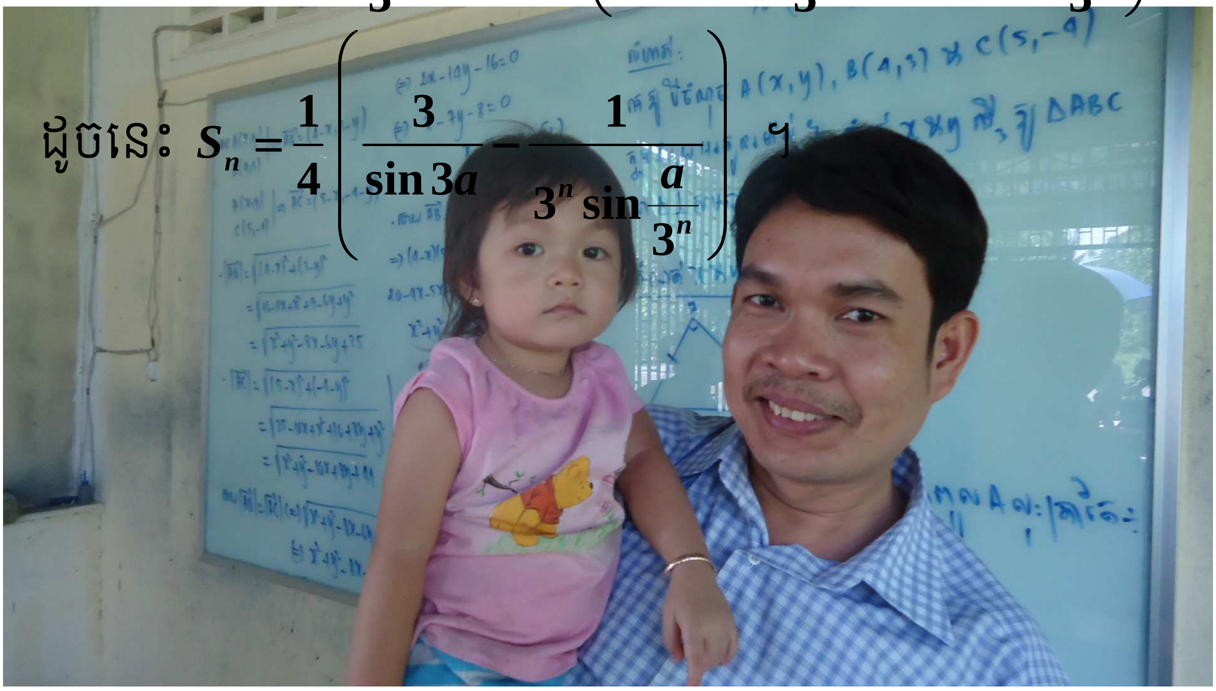
គេមាន $\frac{\sin a}{1+2\cos 2a}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{\sin 3a}-\frac{1}{\sin a}\right)$ ជំនួស a ដោយ $\frac{a}{3^k}$

រួចគុណអង្គទាំងពីរនឹង $\frac{1}{3^k}$ គេបាន ៖

$$\frac{\frac{1}{3^k}\sin\frac{a}{3^k}}{1+2\cos\frac{2a}{3^k}}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^{k-1}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{a}{3^{k-1}}}-\frac{1}{3^k}\cdot\frac{1}{\sin\frac{a}{3^k}}\right)$$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{\frac{1}{3^k}\sin\frac{a}{3^k}}{1+2\cos\frac{2a}{3^k}}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3^{k-1}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{a}{3^{k-1}}}-\frac{1}{3^k}\cdot\frac{1}{\sin\frac{a}{3^k}}\right)$$

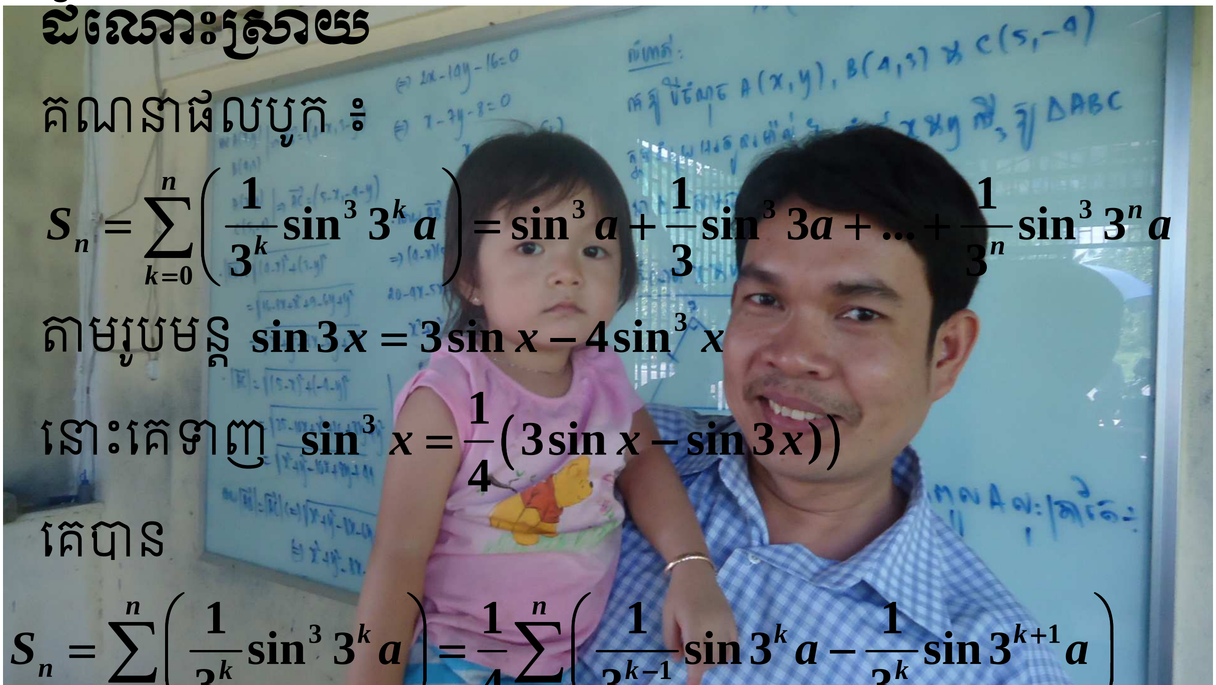
ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{\sin 3a}-\frac{1}{3^n\sin\frac{a}{3^n}}\right)$ ។



លំហាត់ទី១៧

គណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3^k}\sin^3 3^k a\right)=\sin^3 a+\frac{1}{3}\sin^3 3a+\ldots+\frac{1}{3^n}\sin^3 3^n a$$



ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក ៖

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3^k}\sin^3 3^k a\right)=\sin^3 a+\frac{1}{3}\sin^3 3a+\ldots+\frac{1}{3^n}\sin^3 3^n a$$

តាមរូបមន្ត $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

នោះគេទាញ $\sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x))$

គេបាន

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3^k}\sin^3 3^k a\right)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3^{k-1}}\sin 3^k a-\frac{1}{3^k}\sin 3^{k+1}a\right)$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{4}\left(3\sin a-\frac{1}{3^n}\sin 3^{n+1}a\right)$ ។

លំហាត់ទី១៨

គណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left((-3)^k\cos^3\frac{a}{3^k}\right)=\cos^3 a-3\cos^3\frac{a}{3}+\ldots+(-3)^k\cos^3\frac{a}{3^k}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left((-3)^k\cos^3\frac{a}{3^k}\right)=\cos^3 a-3\cos^3\frac{a}{3}+\ldots+(-3)^k\cos^3\frac{a}{3^k}$$

តាមរូបមន្ត $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

នោះគេទាញ $\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left((-3)^k\cos^3\frac{a}{3^k}\right)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left[(-3)^k\cos\frac{a}{3^{k-1}}-(-3)^{k+1}\cos\frac{a}{3^k}\right]$$

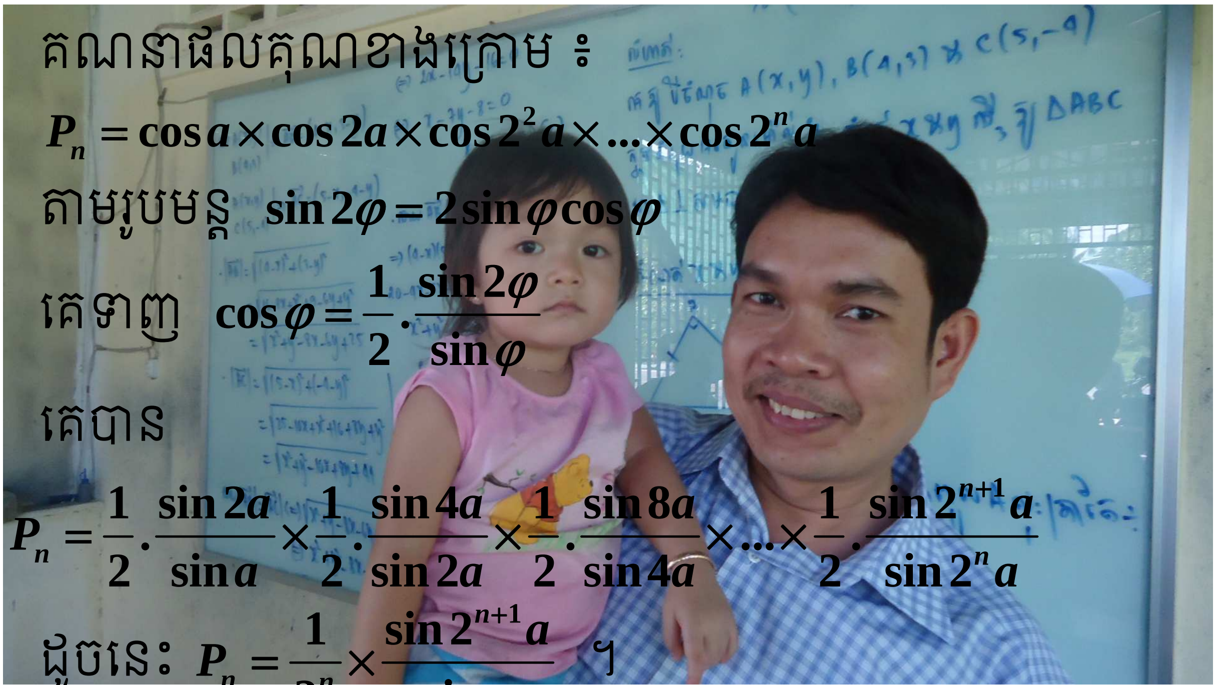
ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{4}\left[\cos 3a-(-3)^{n+1}\cos\frac{a}{3^n}\right]$ ។

លំហាត់ទី១៩

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$P_n = \cos a \times \cos 2a \times \cos 2^2 a \times \ldots \times \cos 2^n a$

ដំណោះស្រាយ



គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$P_n = \cos a \times \cos 2a \times \cos 2^2 a \times \ldots \times \cos 2^n a$

តាមរូបមន្ត $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$

គេទាញ $\cos\varphi = \frac{1}{2}.\frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi}$

គេបាន

$$P_n = \frac{1}{2}.\frac{\sin 2a}{\sin a} \times \frac{1}{2}.\frac{\sin 4a}{\sin 2a} \times \frac{1}{2}.\frac{\sin 8a}{\sin 4a} \times \ldots \times \frac{1}{2}.\frac{\sin 2^{n+1} a}{\sin 2^n a}$$

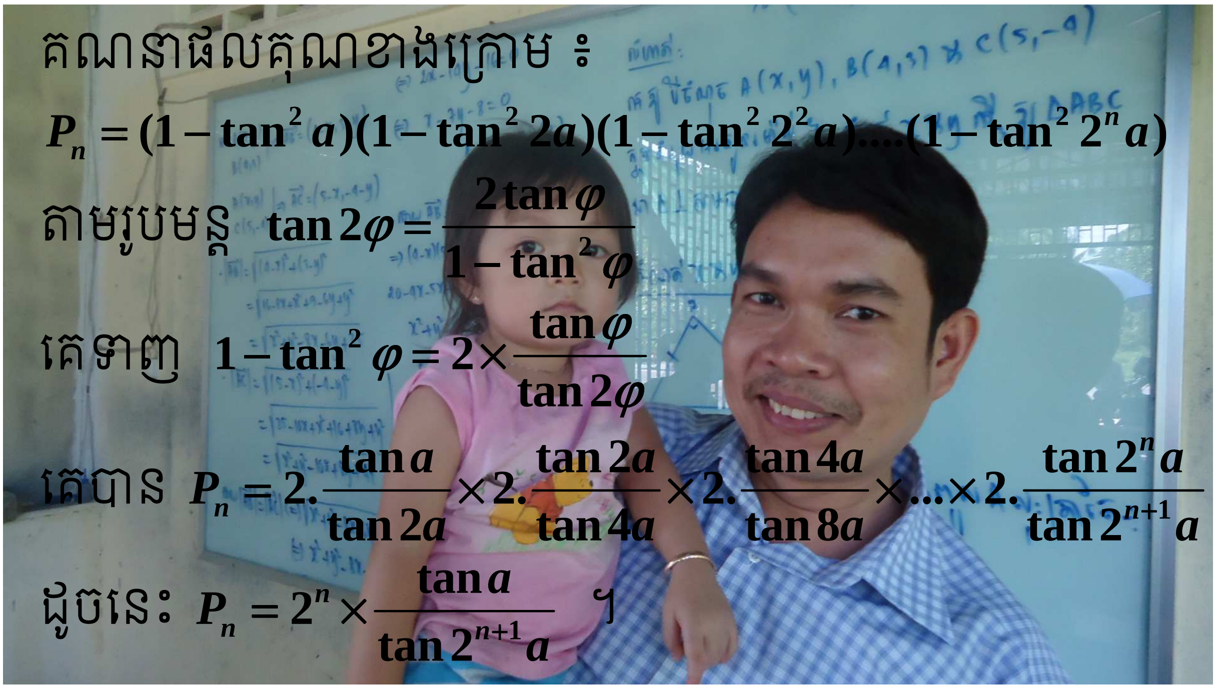
ដូចនេះ $P_n = \frac{1}{2^n} \times \frac{\sin 2^{n+1} a}{\sin a}$ ។

លំហាត់ទី២០

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n = (1-\tan^2 a)(1-\tan^2 2a)(1-\tan^2 2^2 a)....(1-\tan^2 2^n a)$$

ដំណោះស្រាយ



គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n = (1-\tan^2 a)(1-\tan^2 2a)(1-\tan^2 2^2 a)....(1-\tan^2 2^n a)$$

តាមរូបមន្ត $\tan 2\varphi = \dfrac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}$

គេទាញ $1-\tan^2\varphi = 2\times\dfrac{\tan\varphi}{\tan 2\varphi}$

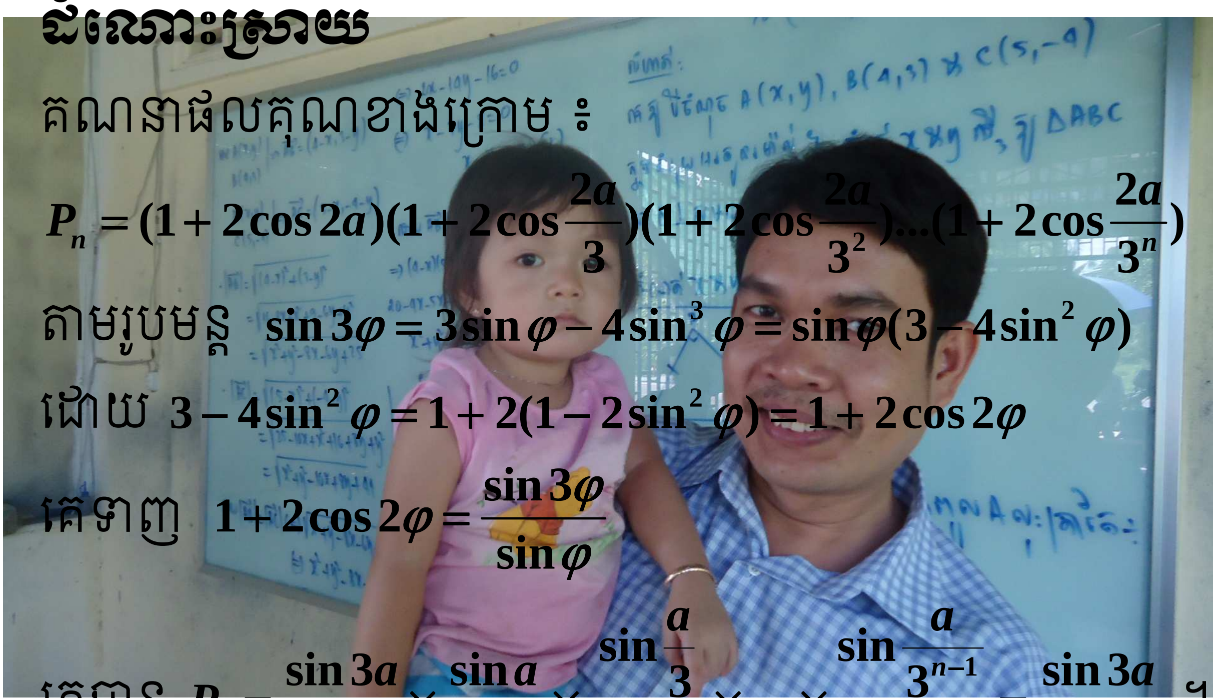
គេបាន $P_n = 2.\dfrac{\tan a}{\tan 2a}\times 2.\dfrac{\tan 2a}{\tan 4a}\times 2.\dfrac{\tan 4a}{\tan 8a}\times ...\times 2.\dfrac{\tan 2^n a}{\tan 2^{n+1} a}$

ដូចនេះ៖ $P_n = 2^n\times\dfrac{\tan a}{\tan 2^{n+1} a}$ ។

លំហាត់ទី២១

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n=(1+2\cos 2a)(1+2\cos\frac{2a}{3})(1+2\cos\frac{2a}{3^2})...(1+2\cos\frac{2a}{3^n})$$



ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n=(1+2\cos 2a)(1+2\cos\frac{2a}{3})(1+2\cos\frac{2a}{3^2})...(1+2\cos\frac{2a}{3^n})$$

តាមរូបមន្ត $\sin 3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi=\sin\varphi(3-4\sin^2\varphi)$

ដោយ $3-4\sin^2\varphi=1+2(1-2\sin^2\varphi)=1+2\cos 2\varphi$

គេទាញ $1+2\cos 2\varphi=\dfrac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}$

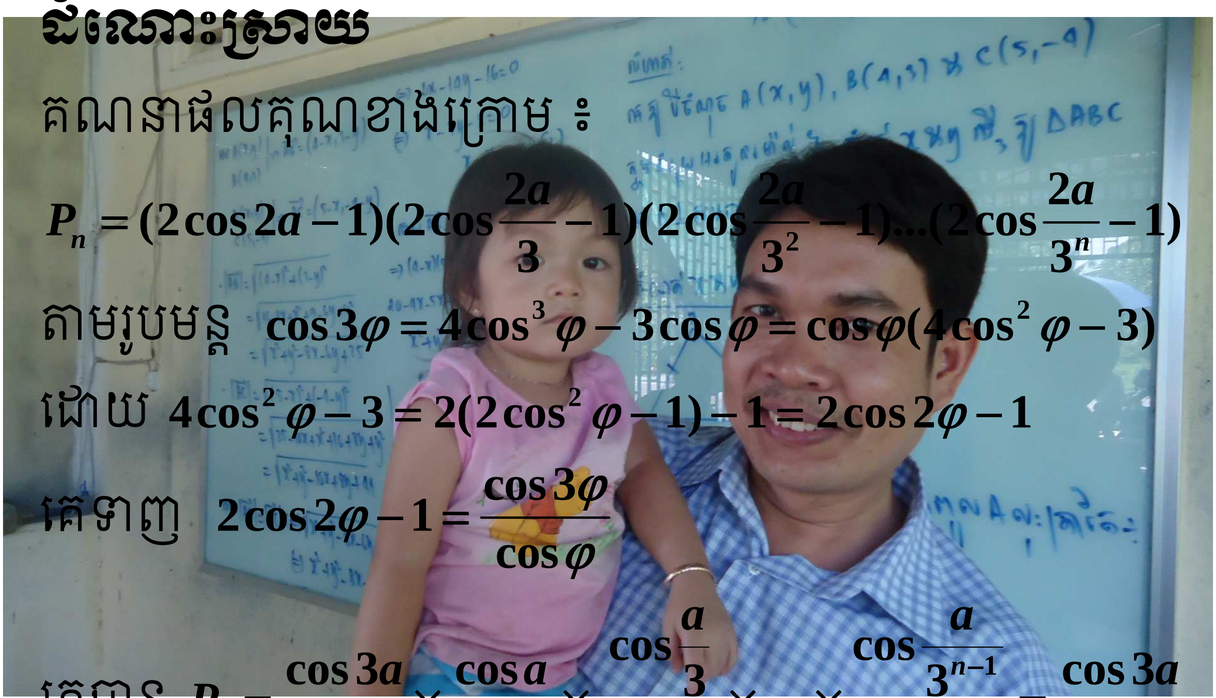
គេបាន $P_n=\dfrac{\sin 3a}{\sin a}\times\dfrac{\sin a}{\sin\frac{a}{3}}\times\dfrac{\sin\frac{a}{3}}{\sin\frac{a}{3^2}}\times....\times\dfrac{\sin\frac{a}{3^{n-1}}}{\sin\frac{a}{3^n}}=\dfrac{\sin 3a}{\sin\frac{a}{3^n}}$ ។

លំហាត់ទី២២

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n=(2\cos 2a-1)(2\cos\frac{2a}{3}-1)(2\cos\frac{2a}{3^2}-1)...(2\cos\frac{2a}{3^n}-1)$$

ដំណោះស្រាយ



គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n=(2\cos 2a-1)(2\cos\frac{2a}{3}-1)(2\cos\frac{2a}{3^2}-1)...(2\cos\frac{2a}{3^n}-1)$$

តាមរូបមន្ត $\cos 3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi=\cos\varphi(4\cos^2\varphi-3)$

ដោយ $4\cos^2\varphi-3=2(2\cos^2\varphi-1)-1=2\cos 2\varphi-1$

គេទាញ $2\cos 2\varphi-1=\dfrac{\cos 3\varphi}{\cos\varphi}$

គេបាន $P_n=\dfrac{\cos 3a}{\cos a}\times\dfrac{\cos a}{\cos\frac{a}{3}}\times\dfrac{\cos\frac{a}{3}}{\cos\frac{a}{3^2}}\times....\times\dfrac{\cos\frac{a}{3^{n-1}}}{\cos\frac{a}{3^n}}=\dfrac{\cos 3a}{\cos\frac{a}{3^n}}$

ដូចនេះ $P_n=\dfrac{\cos 3a}{\cos\frac{a}{3^n}}$ ។

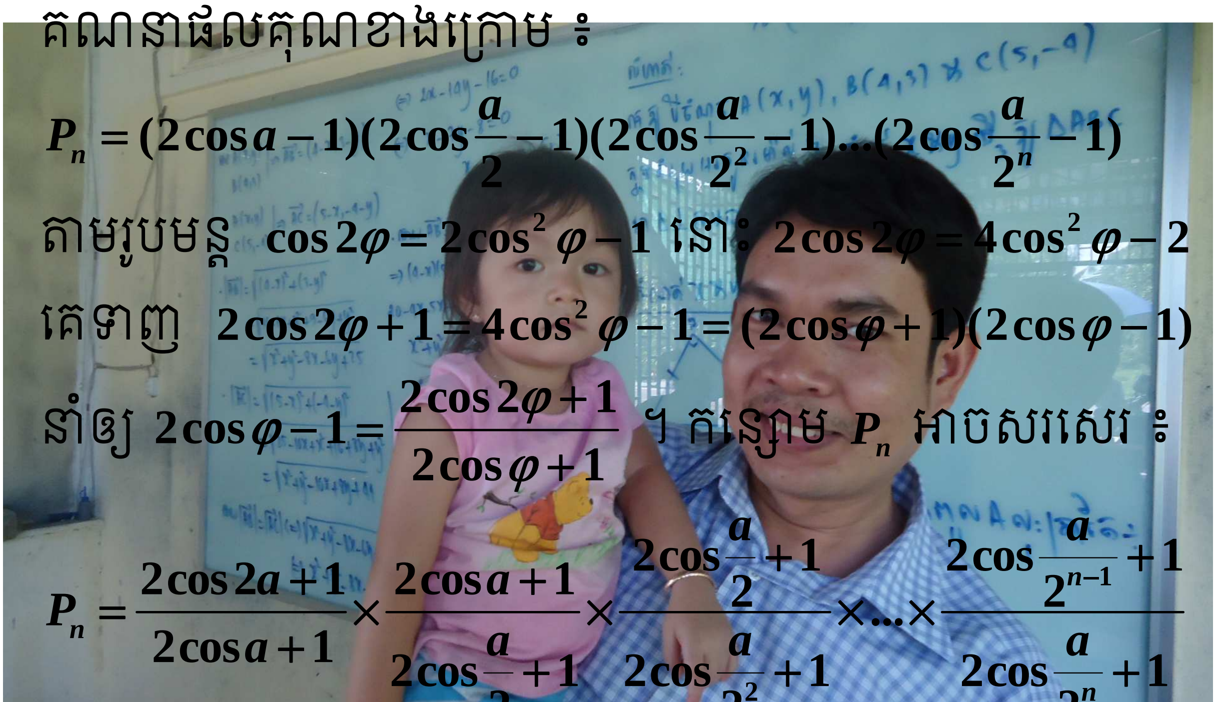
លំហាត់ទី២៣

គណនា

$$P_n = (2\cos a - 1)(2\cos\frac{a}{2} - 1)(2\cos\frac{a}{2^2} - 1)...(2\cos\frac{a}{2^n} - 1)$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖



$$P_n = (2\cos a - 1)(2\cos\frac{a}{2} - 1)(2\cos\frac{a}{2^2} - 1)...(2\cos\frac{a}{2^n} - 1)$$

តាមរូបមន្ត $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$ នោះ $2\cos 2\varphi = 4\cos^2\varphi - 2$

គេទាញ $2\cos 2\varphi + 1 = 4\cos^2\varphi - 1 = (2\cos\varphi + 1)(2\cos\varphi - 1)$

នាំឲ្យ $2\cos\varphi - 1 = \dfrac{2\cos 2\varphi + 1}{2\cos\varphi + 1}$ ។ កន្សោម P_n អាចសរសេរ ៖

$$P_n = \frac{2\cos 2a + 1}{2\cos a + 1} \times \frac{2\cos a + 1}{2\cos\frac{a}{2} + 1} \times \frac{2\cos\frac{a}{2} + 1}{2\cos\frac{a}{2^2} + 1} \times ... \times \frac{2\cos\frac{a}{2^{n-1}} + 1}{2\cos\frac{a}{2^n} + 1}$$

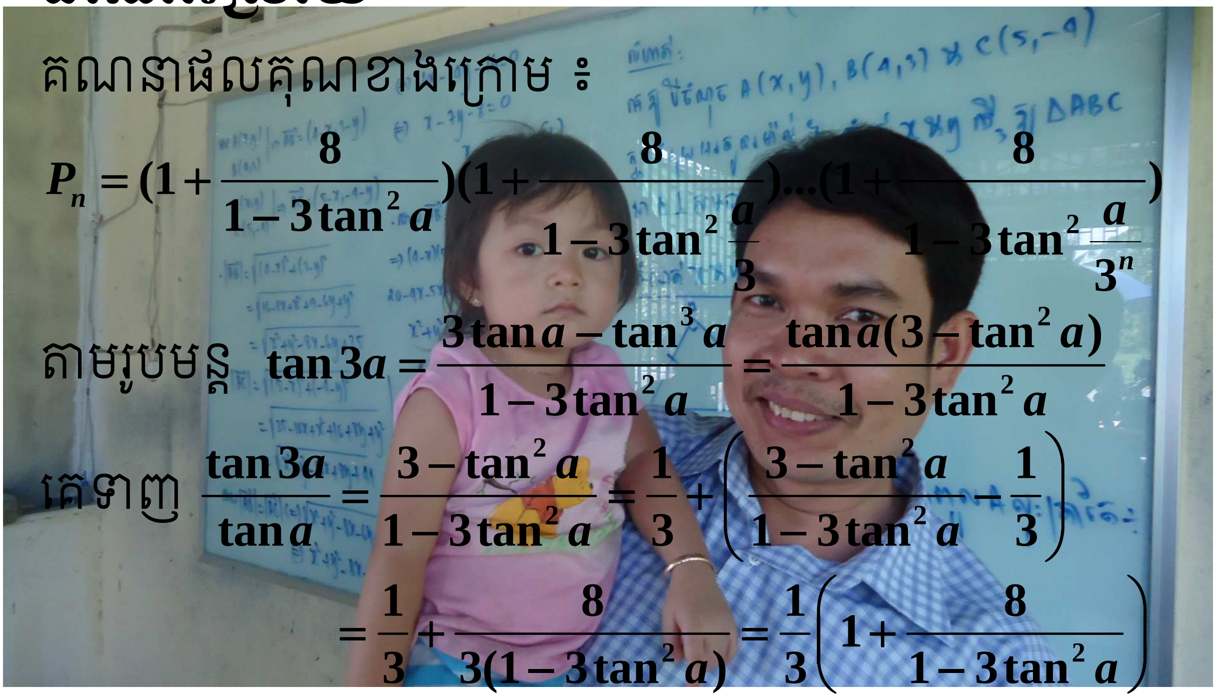
ដូចនេះ $P_n = \dfrac{2\cos 2a + 1}{2\cos\frac{a}{2^n} + 1}$ ។

លំហាត់ទី២៤

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n=(1+\frac{8}{1-3\tan^2 a})(1+\frac{8}{1-3\tan^2\frac{a}{3}})...(1+\frac{8}{1-3\tan^2\frac{a}{3^n}})$$

ដំណោះស្រាយ



គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n=(1+\frac{8}{1-3\tan^2 a})(1+\frac{8}{1-3\tan^2\frac{a}{3}})...(1+\frac{8}{1-3\tan^2\frac{a}{3^n}})$$

តាមរូបមន្ត $\tan 3a=\frac{3\tan a-\tan^3 a}{1-3\tan^2 a}=\frac{\tan a(3-\tan^2 a)}{1-3\tan^2 a}$

គេទាញ $\frac{\tan 3a}{\tan a}=\frac{3-\tan^2 a}{1-3\tan^2 a}=\frac{1}{3}+\left(\frac{3-\tan^2 a}{1-3\tan^2 a}-\frac{1}{3}\right)$

$$=\frac{1}{3}+\frac{8}{3(1-3\tan^2 a)}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{8}{1-3\tan^2 a}\right)$$

នាំឲ្យ $1+\frac{8}{1-3\tan^2 a}=\frac{3\tan 3a}{\tan a}$

ជំនួស a ដោយ $\frac{a}{3^k}$ គេបាន $1+\frac{8}{1-3\tan^2\frac{a}{3^k}}=\frac{3\tan\frac{a}{3^{k-1}}}{\tan\frac{a}{3^k}}$

ចំពោះ $k=0:1+\frac{8}{1-3\tan^2 a}=\frac{3\tan 3a}{\tan a}$

ចំពោះ $k=1 : 1+\dfrac{8}{1-3\tan^2\dfrac{a}{3}}=\dfrac{3\tan a}{\tan\dfrac{a}{3}}$

ចំពោះ $k=2\ :\ 1+\dfrac{8}{1-3\tan^2\dfrac{a}{3^2}}=\dfrac{3\tan\dfrac{a}{3}}{\tan\dfrac{a}{3^2}}$

– –

ចំពោះ $k=n : 1+\dfrac{8}{1-3\tan^2\dfrac{a}{3^n}}=\dfrac{3\tan\dfrac{a}{3^{n-1}}}{\tan\dfrac{a}{3^n}}$

គុណទំនាក់ទំនងខាងលើអង្គ និង អង្គគេបាន ៖

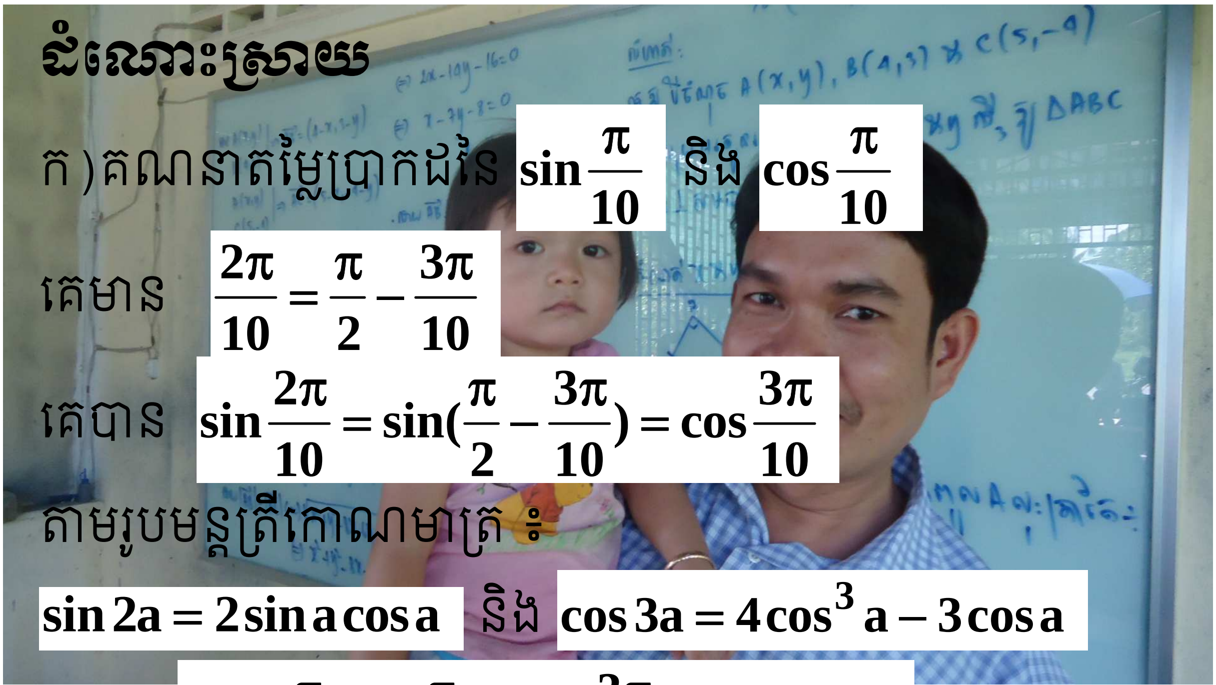
$P_n=\dfrac{3^n\tan 3a}{\tan\dfrac{a}{3^n}}=3^n\tan 3a\cot\dfrac{a}{3^n}$ ។

លំហាត់ទី២៥

ក) ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

ខ) ចូរស្រាយថា $x^2+(x-y)^2 \le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គ្រប់ចំនួន $x,y\in IR$ ។



ដំណោះស្រាយ

ក)គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

គេមាន $\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}$

គេបាន $\sin\frac{2\pi}{10}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10})=\cos\frac{3\pi}{10}$

តាមរូបមន្តត្រីកោណមាត្រ ៖

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$ និង $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}=\cos\frac{3\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}=3\cos\frac{\pi}{10}-4\cos^3\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}=3-4\cos^2\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}=3-4(1-\sin^2\frac{\pi}{10})$$

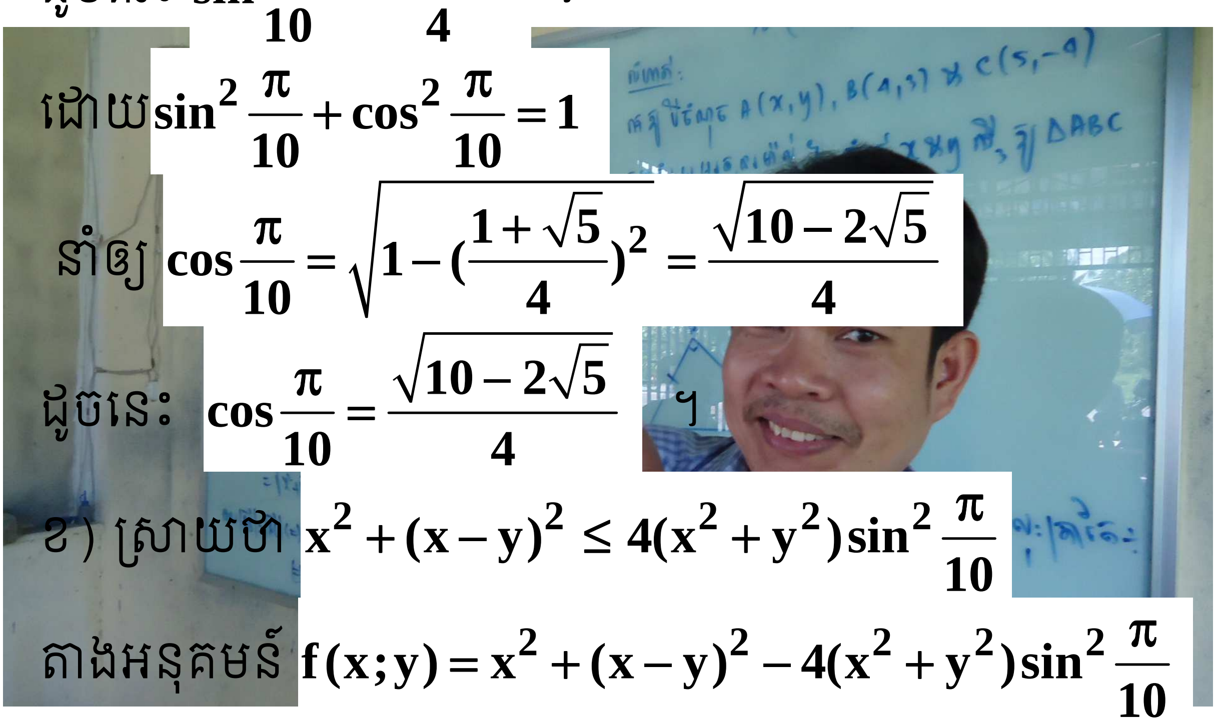
ឬ $4\sin^2\frac{\pi}{10}-2\sin\frac{\pi}{10}-1=0$

តាង $t=\sin\frac{\pi}{10}>0$

គេបាន $4t^2-2t-1=0$, $\Delta'=1+4=5>0$

គេទាញឫស $t_1=\frac{1-\sqrt{5}}{4}<0$, $t_2=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

ដូចនេះ $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ។



ដោយ $\sin^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{\pi}{10}=1$

នាំឲ្យ $\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{1-(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ ។

ខ) ស្រាយថា $x^2+(x-y)^2\le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

តាងអនុគមន៍ $f(x;y)=x^2+(x-y)^2-4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គេបាន

$$f(x;y)=x^2+x^2-2xy+y^2-4(x^2+y^2)(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2$$

$$= 2x^2 - 2xy + y^2 - 4(x^2 + y^2)\frac{6 + 2\sqrt{5}}{16}$$

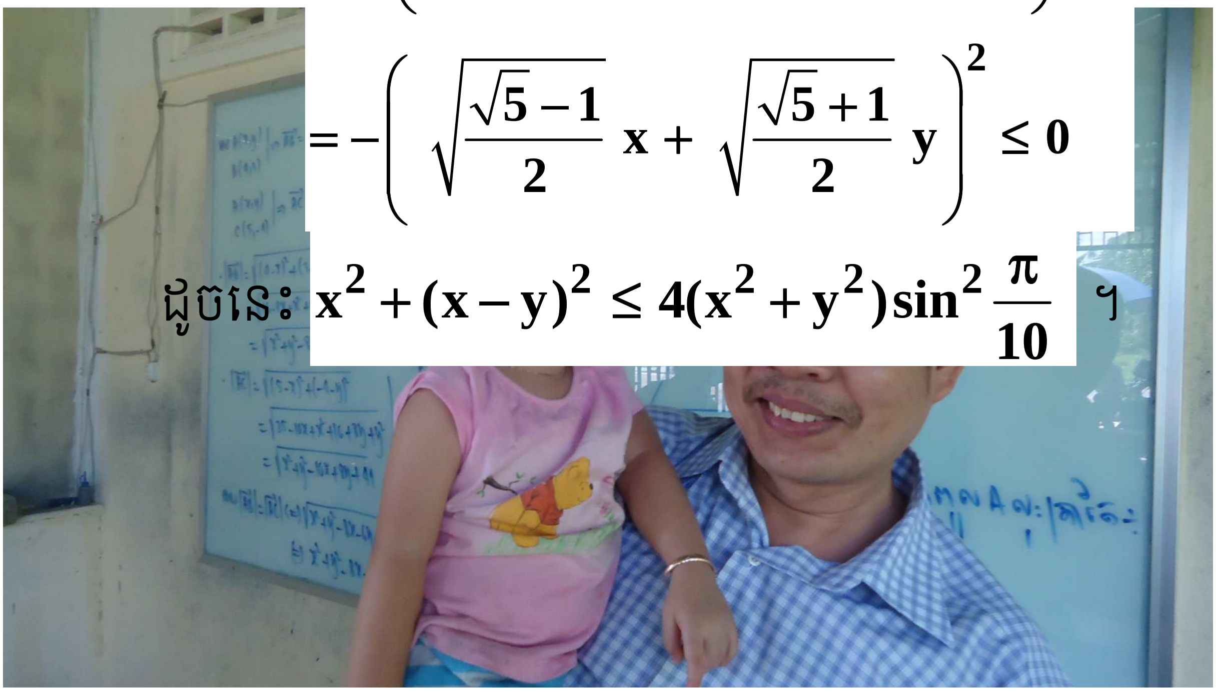
$$= 2x^2 - 2xy + y^2 - (x^2 + y^2)\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x^2 - 2xy - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}y^2$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}x^2 + 2xy + \frac{\sqrt{5} + 1}{2}y^2\right)$$

$$= -\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}\,x + \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}}\,y\right)^2 \le 0$$

ដូចនេះ $x^2 + (x - y)^2 \le 4(x^2 + y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$ ។

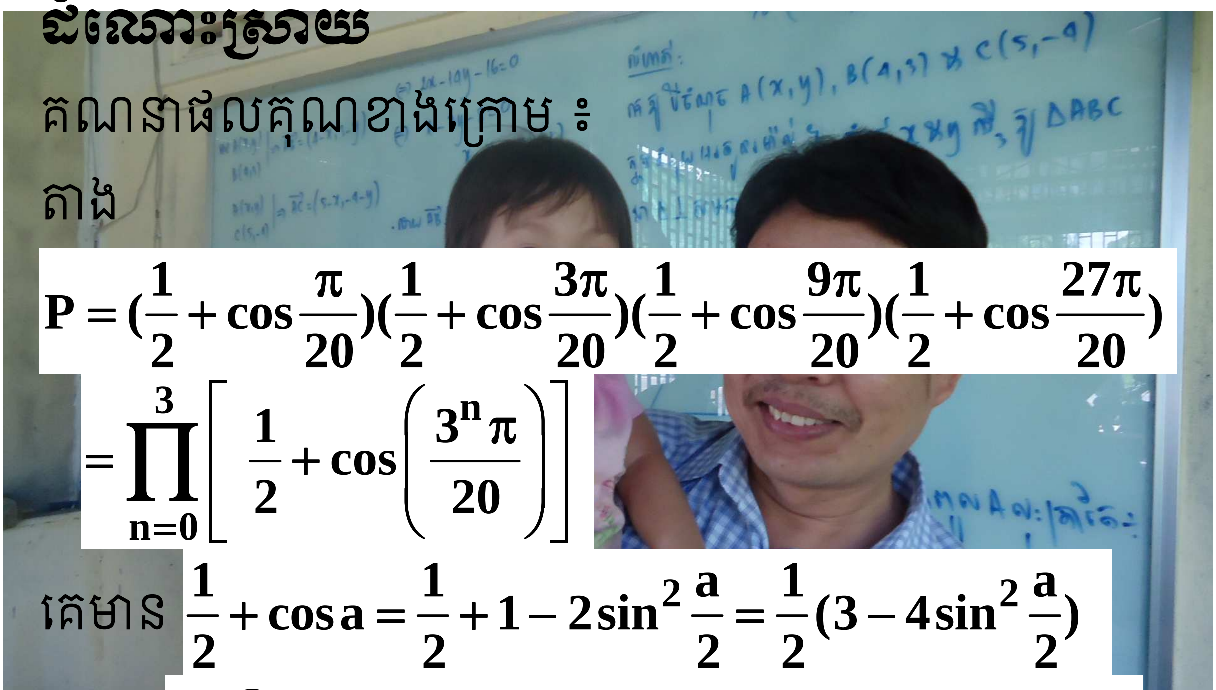


លំហាត់ទី២៦

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20})=\frac{1}{16}$$

ដំណោះស្រាយ



គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

តាង

$$P=(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20})$$

$$=\prod_{n=0}^{3}\left[\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{3^n\pi}{20}\right)\right]$$

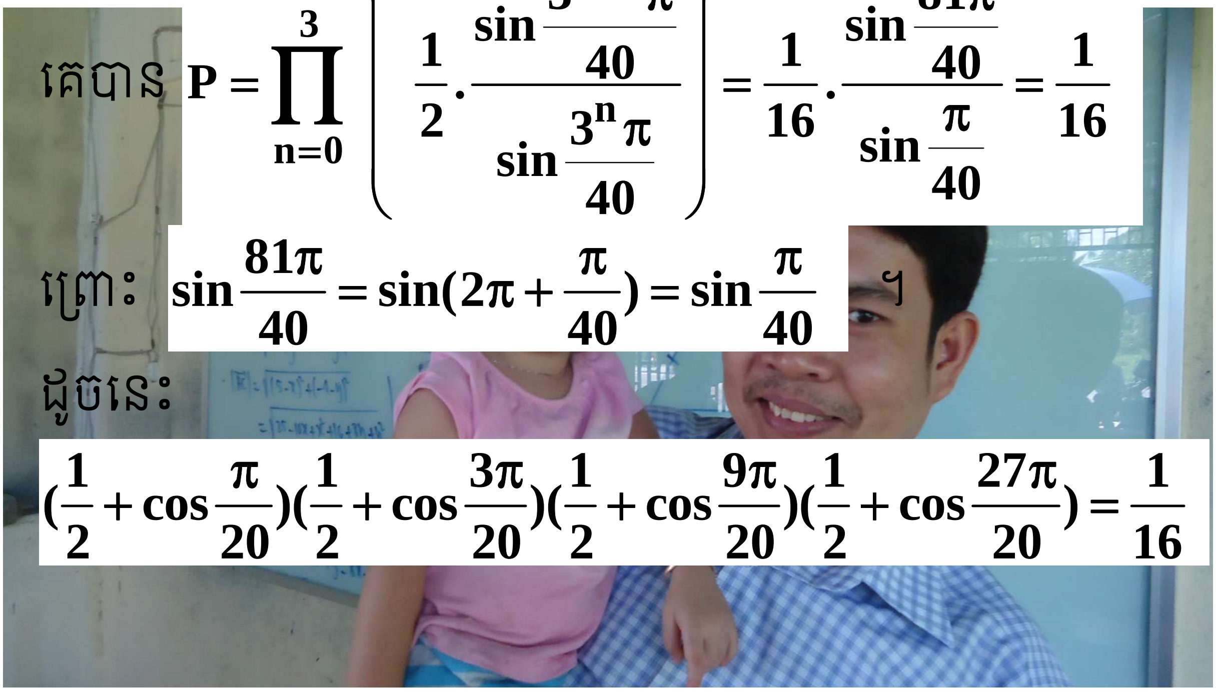
គេមាន $\frac{1}{2}+\cos a=\frac{1}{2}+1-2\sin^2\frac{a}{2}=\frac{1}{2}(3-4\sin^2\frac{a}{2})$

ហើយ $\sin\frac{3a}{2}=3\sin\frac{a}{2}-4\sin^2\frac{a}{2}=\sin\frac{a}{2}(3-4\sin^2\frac{a}{2})$

នាំឱ្យ $3-4\sin^2\frac{a}{2}=\dfrac{\sin\frac{3a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$

ហេតុនេះ $$\frac{1}{2}+\cos a=\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{3a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$$

យក $a=\frac{3^n\pi}{20}$ គេបាន $$\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{3^n\pi}{20}\right)=\frac{1}{2}.\frac{\sin\frac{3^{n+1}\pi}{40}}{\sin\frac{3^n\pi}{40}}$$



គេបាន $$P=\prod_{n=0}^{3}\left(\frac{1}{2}.\frac{\sin\frac{3^{n+1}\pi}{40}}{\sin\frac{3^n\pi}{40}}\right)=\frac{1}{16}.\frac{\sin\frac{81\pi}{40}}{\sin\frac{\pi}{40}}=\frac{1}{16}$$

ព្រោះ $\sin\frac{81\pi}{40}=\sin(2\pi+\frac{\pi}{40})=\sin\frac{\pi}{40}$ ។

ដូចនេះ

$$(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20})=\frac{1}{16}$$

លំហាត់ទី២៧

ចូរស្រាយថា $\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}=\frac{7}{4}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}=\frac{7}{4}$

តាង $S=\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}$

យើងបាន $S=\frac{1-\cos\frac{2\pi}{7}}{2}+\frac{1-\cos\frac{4\pi}{7}}{2}+\frac{1-\cos\frac{8\pi}{7}}{2}$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}\right)$$

តាង $T=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}$

$$=\cos(\pi-\frac{5\pi}{7})+\cos(\pi-\frac{3\pi}{7})+\cos(\pi+\frac{\pi}{7})$$

$$=-\cos\frac{5\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $2\sin\frac{\pi}{7}$ គេបាន ៖

$$2T\sin\frac{\pi}{7}=-2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

តាមរូបមន្ត $2\cos a\sin b=\sin(a+b)-\sin(a-b)$

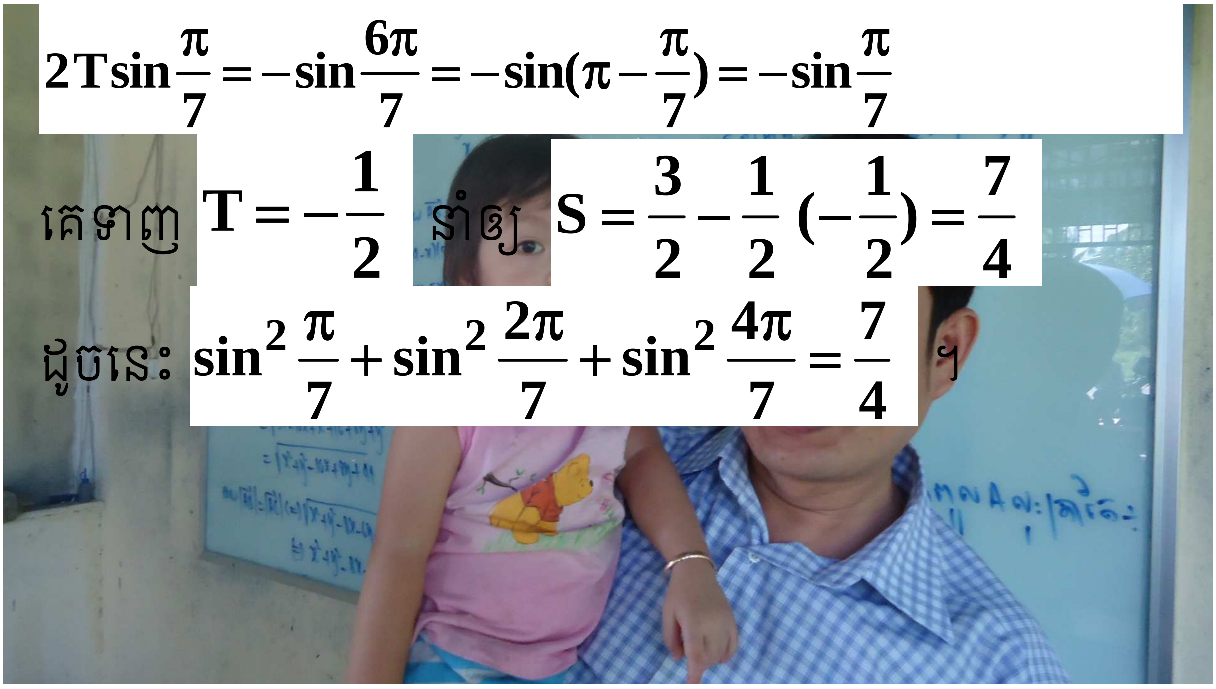
$$2T\sin\frac{\pi}{7}=-2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

$$2T\sin\frac{\pi}{7}=-(\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7})-(\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7})-\sin\frac{2\pi}{7}$$

$$2T\sin\frac{\pi}{7}=-\sin\frac{6\pi}{7}=-\sin(\pi-\frac{\pi}{7})=-\sin\frac{\pi}{7}$$

គេទាញ $T=-\frac{1}{2}$ នាំឲ្យ $S=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})=\frac{7}{4}$

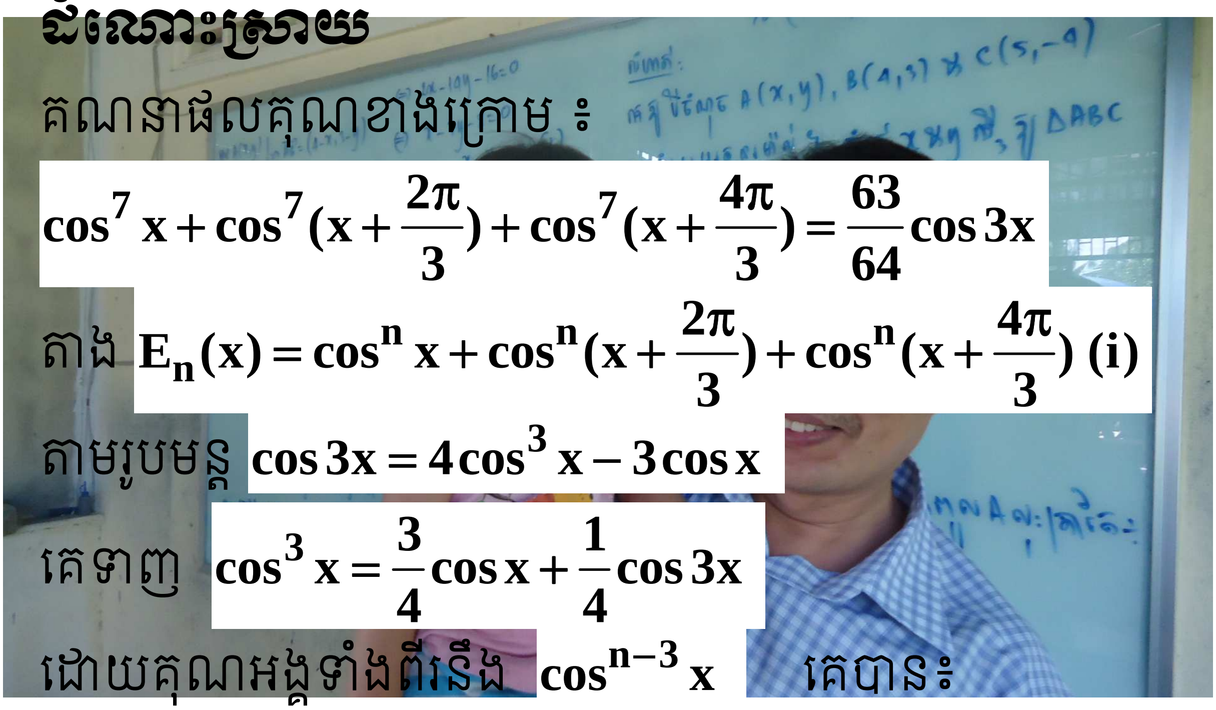
ដូចនេះ $\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{4\pi}{7}=\frac{7}{4}$ ។



លំហាត់ទី២៨

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\cos^7 x+\cos^7(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^7(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{63}{64}\cos 3x$$



ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$\cos^7 x+\cos^7(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^7(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{63}{64}\cos 3x$$

តាង $E_n(x)=\cos^n x+\cos^n(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^n(x+\frac{4\pi}{3})$ (i)

តាមរូបមន្ត $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

គេទាញ $\cos^3 x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$

ដោយគុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^{n-3} x$ គេបាន៖

$$\cos^n x=\frac{3}{4}\cos^{n-2} x+\frac{1}{4}\cos 3x\cos^{n-3} x \quad (1)$$

ដូចគ្នាដែរគេទាញបាន៖

$$\cos^n(x+\frac{2\pi}{3})=\frac{3}{4}\cos^{n-2}(x+\frac{2\pi}{3})+\frac{1}{4}\cos 3x\cos^{n-3}(x+\frac{2\pi}{3}) \quad (2)$$

$$\cos^n(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{3}{4}\cos^{n-2}(x+\frac{4\pi}{3})+\frac{1}{4}\cos 3x\cos^{n-3}(x+\frac{4\pi}{3}) \quad (3)$$

ដោយបូកសមីការ (1); (2) និង (3) គេបាន $E_0(x)=3$

$$E_n(x)=\frac{3}{4}E_{n-2}(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\,E_{n-3}(x) \quad (ii)$$

តាម (i) ចំពោះ $n=0\ ;\ n=1\ ,\ n=2$ គេ

$$E_1(x)=\cos x+\cos(x+\frac{2\pi}{3})+\cos(x+\frac{4\pi}{3})$$

$$E_1(x)=\cos x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=0$$

$$E_2(x)=\cos^2 x+(-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^2+(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^2$$

$$E_2(x)=\frac{3}{2}\cos^2 x+\frac{3}{2}\sin^2 x=\frac{3}{2}$$

តាម (ii) ចំពោះ $n=3\ ;\ n=4\ ,\ n=5\ ;\ n=7$ គេបាន

$$E_3(x)=\frac{3}{4}E_1(x)+\frac{1}{4}\cos 3x E_0(x)=\frac{3}{4}\cos 3x$$

$$E_4(x)=\frac{3}{4}E_2(x)+\frac{1}{4}\cos 3x E_1(x)=\frac{9}{8}$$

$$E_5(x)=\frac{3}{4}E_3(x)+\frac{1}{4}\cos 3x E_2(x)=\frac{9}{16}\cos 3x+\frac{3}{8}\cos 3x=\frac{15}{16}\cos 3x$$

$$E_7(x)=\frac{3}{4}E_5(x)+\frac{1}{4}\cos 3x E_4(x)=\frac{45}{64}\cos 3x+\frac{9}{32}\cos 3x=\frac{63}{64}\cos 3x$$

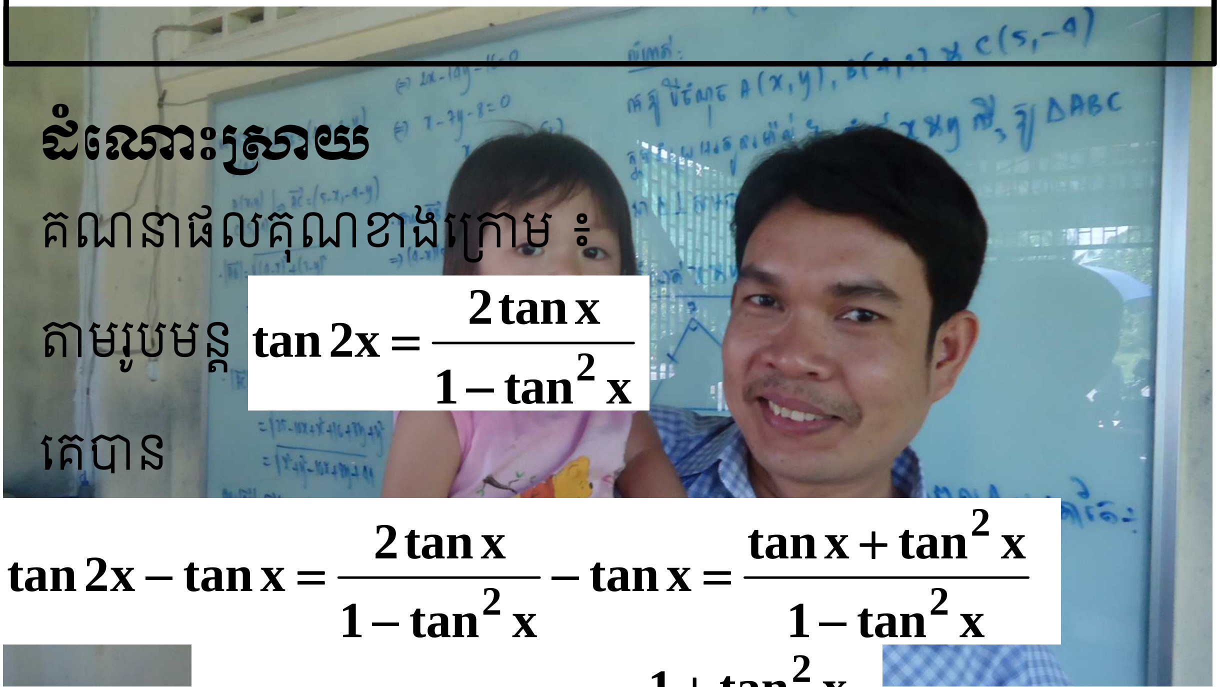
ដូចនេះ $\cos^7 x+\cos^7(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^7(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{63}{64}\cos 3x$

លំហាត់ទី២៩

គណនាផលបូកខាងក្រោម

$$S_n = \frac{\tan\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{4}} + \frac{\tan\frac{\pi}{16}}{\cos\frac{\pi}{8}} + \frac{\tan\frac{\pi}{32}}{\cos\frac{\pi}{16}} + \ldots\ldots + \frac{\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

រួចទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$ ។



ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

តាមរូបមន្ត $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

គេបាន

$$\tan 2x - \tan x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} - \tan x = \frac{\tan x + \tan^2 x}{1-\tan^2 x}$$

$$\tan 2x - \tan x = \tan x . \frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x}$$

ដោយ $\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

នោះ $\tan 2x - \tan x = \dfrac{\tan x}{\cos 2x}$ (*)

ដោយជ្រើសរើស $x = \dfrac{\pi}{2^{k+2}}$ ជួសក្នុង (*)

គេបាន $\tan\frac{\pi}{2^{k+1}} - \tan\frac{\pi}{2^{k+2}} = \frac{\tan\frac{\pi}{2^{k+2}}}{\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\tan\frac{\pi}{2^{k+1}} - \tan\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)$$

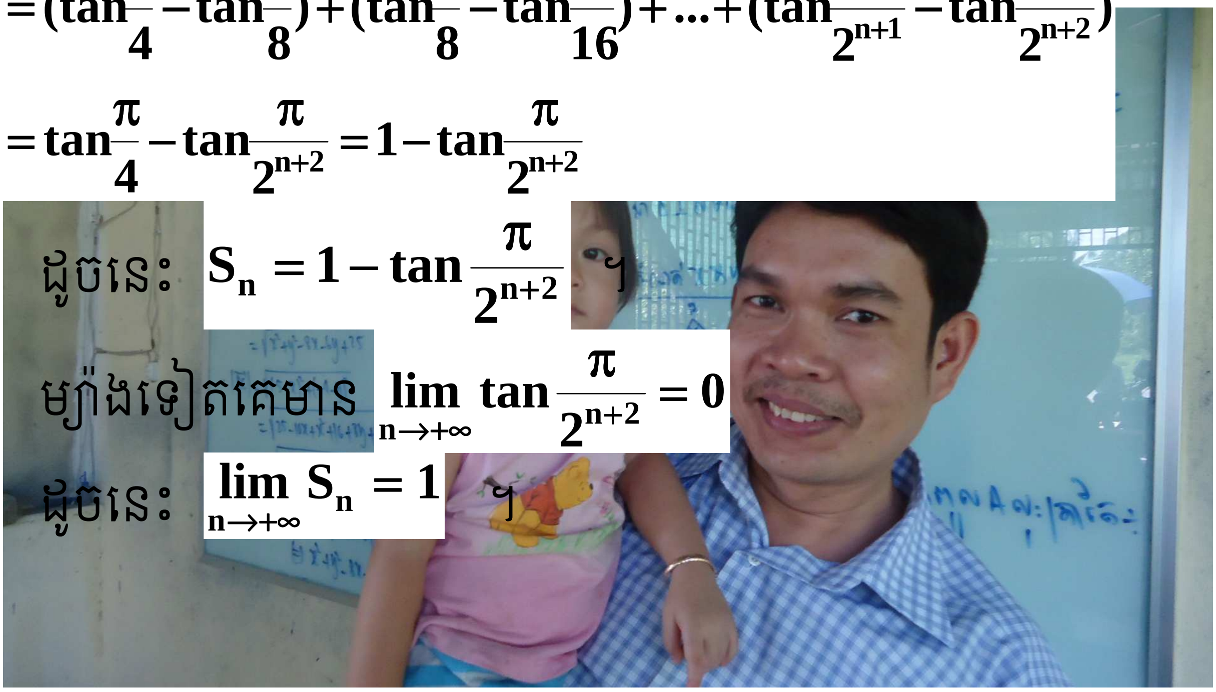
$$=(\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{8})+(\tan\frac{\pi}{8}-\tan\frac{\pi}{16})+\ldots+(\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}-\tan\frac{\pi}{2^{n+2}})$$

$$=\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}=1-\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

ដូចនេះ $S_n = 1 - \tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $\lim\limits_{n\to+\infty} \tan\frac{\pi}{2^{n+2}} = 0$

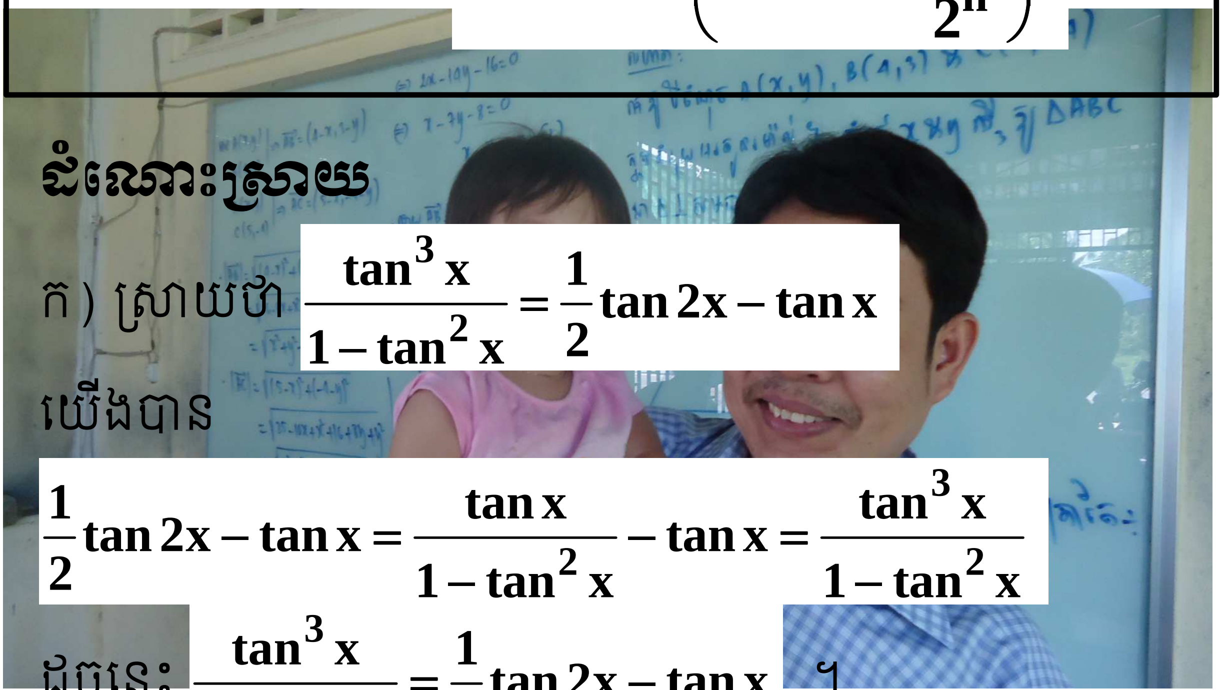
ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$ ។



លំហាត់ទី៣០

ក)ចូរស្រាយថា $\dfrac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}=\dfrac{1}{2}\tan 2x-\tan x$

ខ)ចូរគណនាផលបូក $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^k\tan^3\frac{a}{2^n}}{1-\tan^2\frac{a}{2^n}}\right)$



ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\dfrac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}=\dfrac{1}{2}\tan 2x-\tan x$

យើងបាន

$$\frac{1}{2}\tan 2x-\tan x=\frac{\tan x}{1-\tan^2 x}-\tan x=\frac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}$$

ដូចនេះ: $\dfrac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}=\dfrac{1}{2}\tan 2x-\tan x$ ។

ខ)គណនាផលបូក $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^k\tan^3\frac{a}{2^k}}{1-\tan^2\frac{a}{2^k}}\right)$

គេមាន $\dfrac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}=\dfrac{1}{2}\tan 2x-\tan x$ យក $x=\dfrac{a}{2^k}$

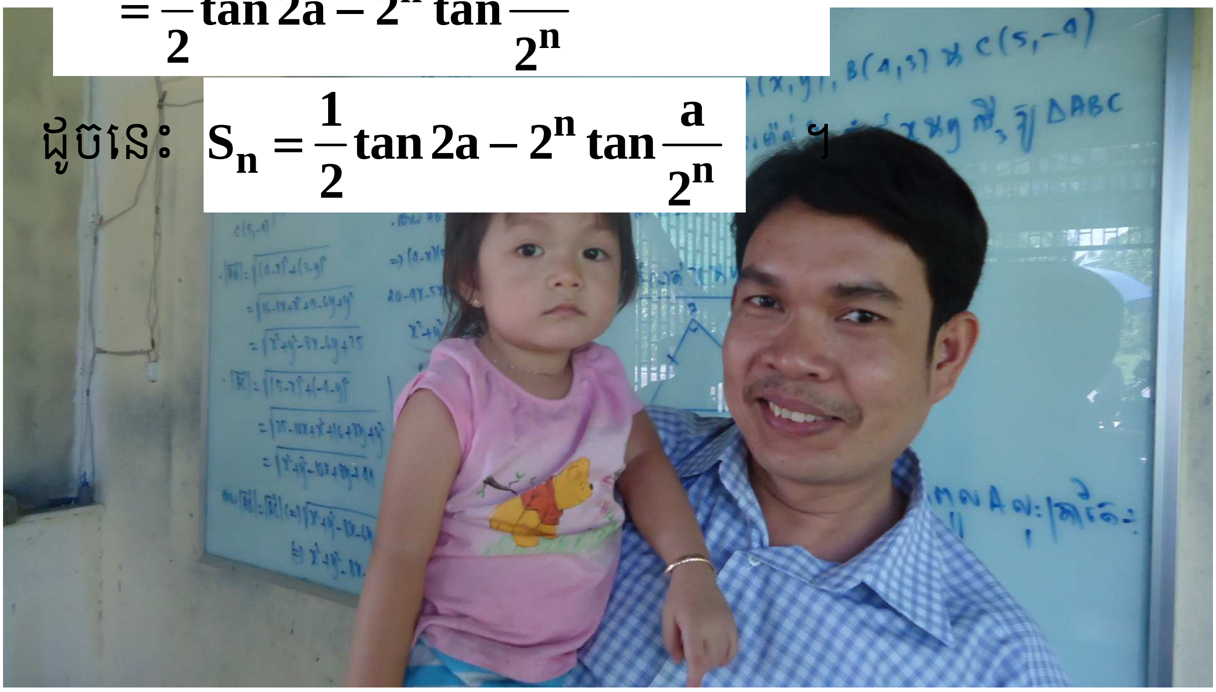
គេបាន $$\frac{\tan^3\frac{a}{2^k}}{1-\tan^2\frac{a}{2^k}}=\frac{1}{2}\tan\frac{a}{2^{k-1}}-\tan\frac{a}{2^k}$$

យើងបាន៖

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(2^{k-1}\tan\frac{a}{2^{k-1}}-2^k\tan\frac{a}{2^k}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\tan 2a-2^n\tan\frac{a}{2^n}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{2}\tan 2a-2^n\tan\frac{a}{2^n}$ ។



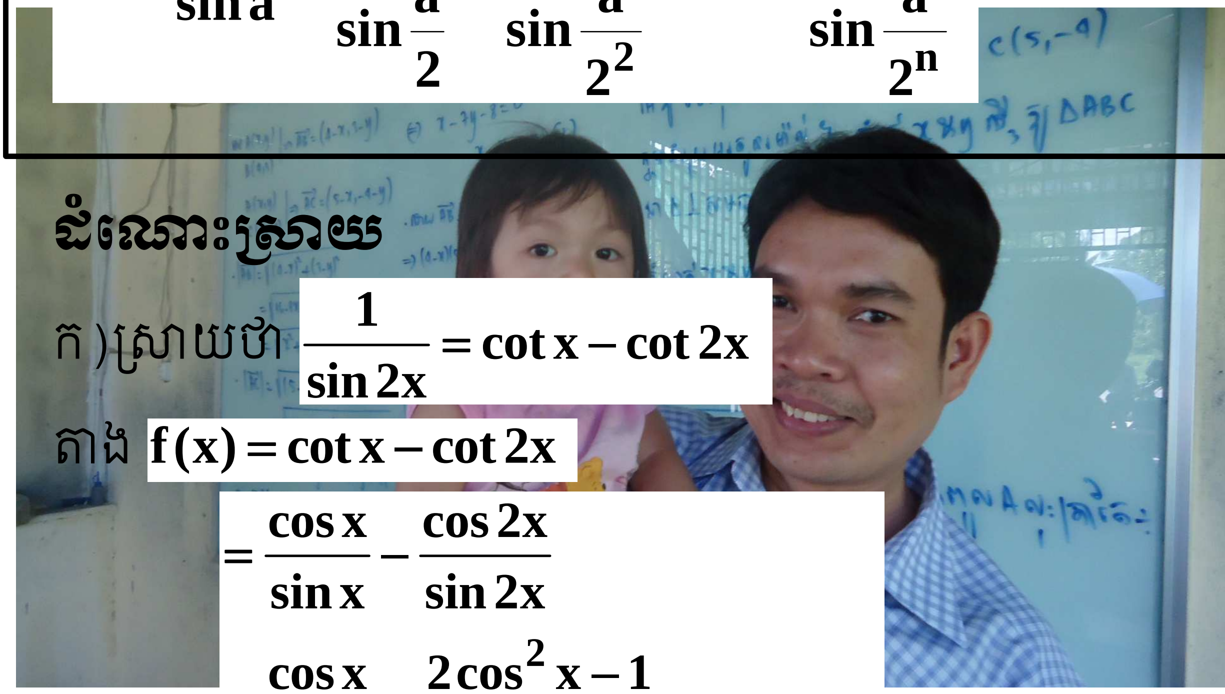
លំហាត់ទី៣១

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

ក)ចូរស្រាយថា $\frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$

ខ)ចូរគណនា

$$S_n = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin \frac{a}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{a}{2^2}} + ... + \frac{1}{\sin \frac{a}{2^n}}$$



ដំណោះស្រាយ

ក)ស្រាយថា $\frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$

តាង $f(x) = \cot x - \cot 2x$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{2\cos^2 x - 1}{2\sin x \cos x}$$

$$= \frac{2\cos^2 x - 2\cos^2 x + 1}{2\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

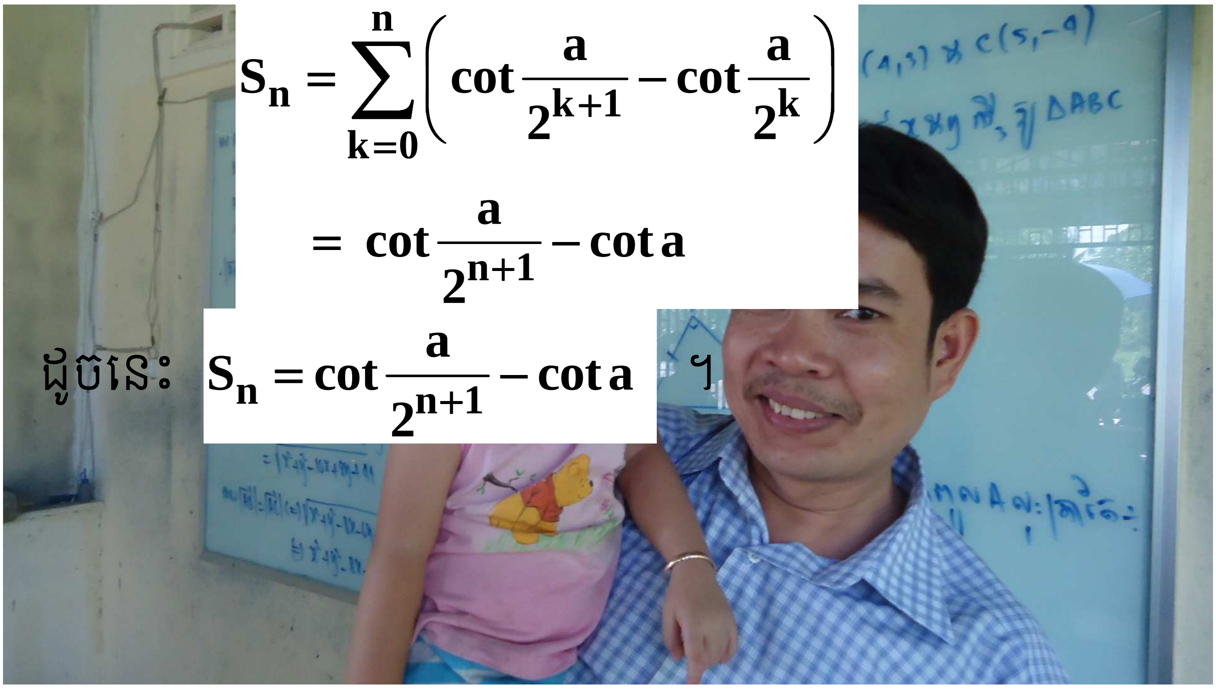
ដូចនេះ៖ $\frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$ ។

ខ)គណនា

$$S_n = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin \frac{a}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{a}{2^2}} + ... + \frac{1}{\sin \frac{a}{2^n}}$$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{\sin \frac{a}{2^k}} \right)$

ដោយ $\frac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$



$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\cot \frac{a}{2^{k+1}} - \cot \frac{a}{2^k} \right)$$

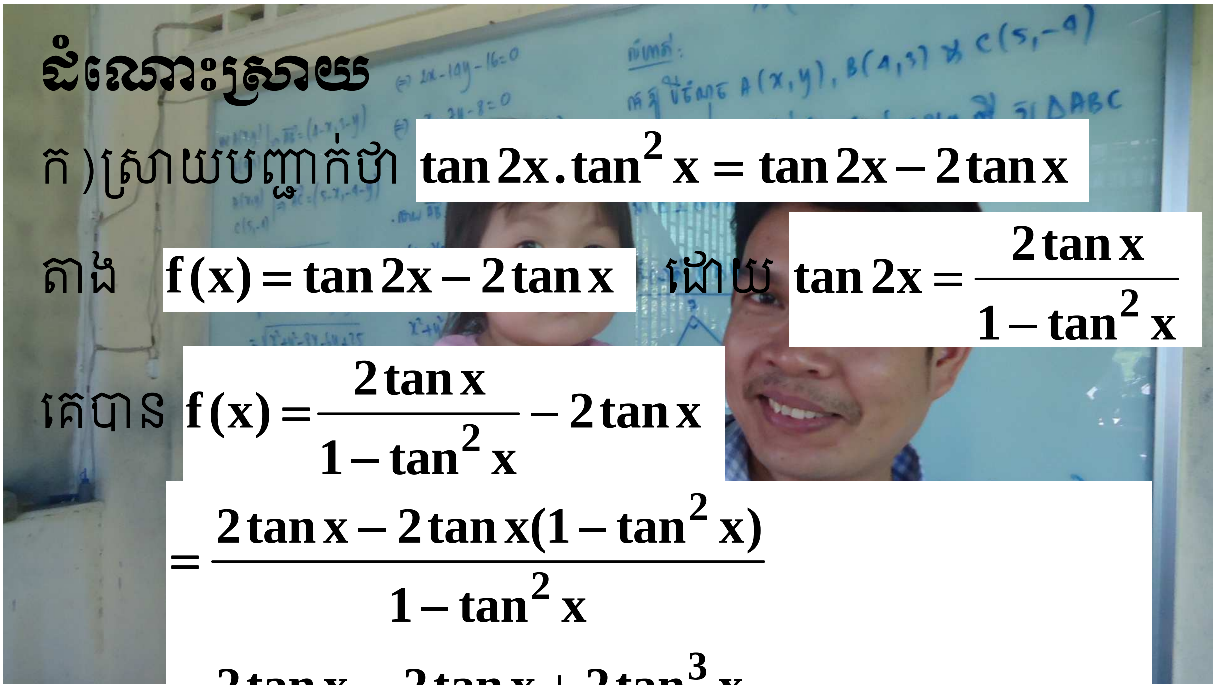
$$= \cot \frac{a}{2^{n+1}} - \cot a$$

ដូចនេះ $S_n = \cot \frac{a}{2^{n+1}} - \cot a$ ។

លំហាត់ទី៣២

ក)ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan 2x.\tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$

ខ)ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[2^k \tan\frac{a}{2^k}\tan^2\frac{a}{2^{k+1}}\right]$



ដំណោះស្រាយ

ក)ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan 2x.\tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$

តាង $f(x) = \tan 2x - 2\tan x$ ដោយ $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

គេបាន $f(x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} - 2\tan x$

$$= \frac{2\tan x - 2\tan x(1-\tan^2 x)}{1-\tan^2 x}$$

$$= \frac{2\tan x - 2\tan x + 2\tan^3 x}{1-\tan^2 x}$$

$$= \frac{2\tan^3 x}{1-\tan^2 x} = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.\tan^2 x = \tan 2x.\tan^2 x$$

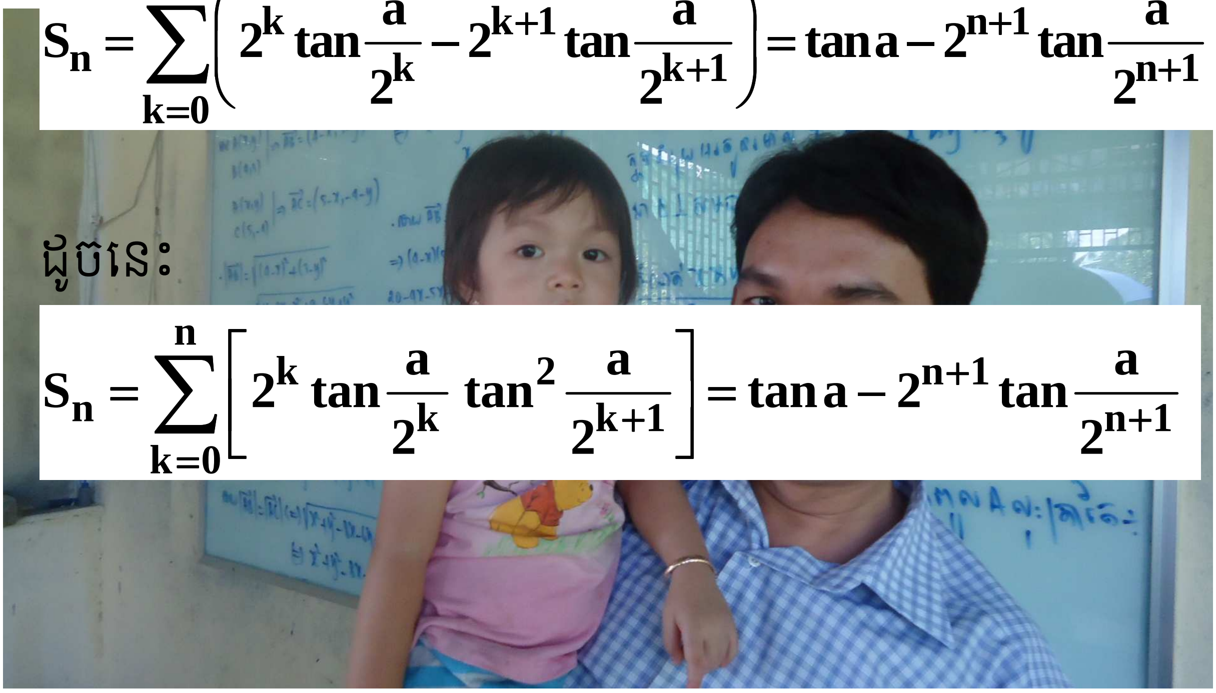
ដូចនេះ $\tan 2x.\tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$ ។

ខ)គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[2^k \tan\frac{a}{2^k}\tan^2\frac{a}{2^{k+1}}\right]$

យើងមាន $\tan 2x.\tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$

ដោយយក $x = \frac{a}{2^{k+1}}$

គេបាន $\tan\frac{a}{2^k}\tan^2\frac{a}{2^{k+1}} = \tan\frac{a}{2^k} - 2\tan\frac{a}{2^{k+1}}$



$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(2^k\tan\frac{a}{2^k} - 2^{k+1}\tan\frac{a}{2^{k+1}}\right) = \tan a - 2^{n+1}\tan\frac{a}{2^{n+1}}$$

ដូចនេះ

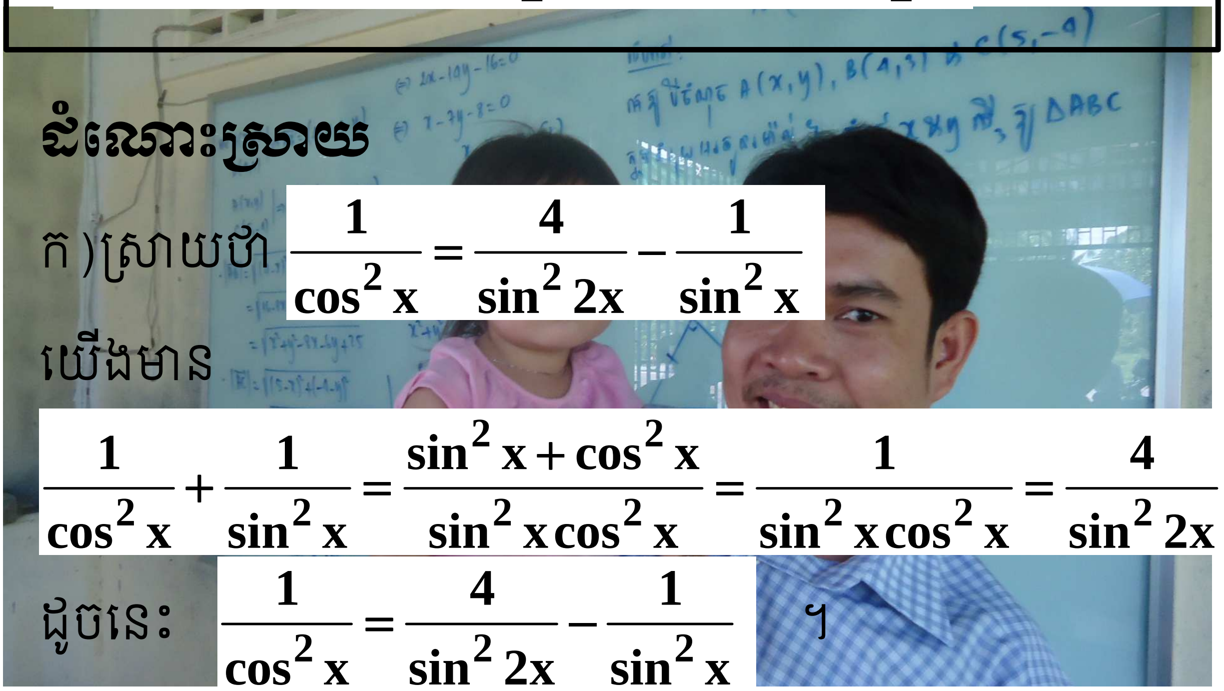
$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[2^k \tan\frac{a}{2^k}\tan^2\frac{a}{2^{k+1}}\right] = \tan a - 2^{n+1}\tan\frac{a}{2^{n+1}}$$

លំហាត់ទី៣៣

ក) ចូរស្រាយថា $\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{4}{\sin^2 2x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

ខ) ចូរគណនា

$$S_n=\frac{1}{4\cos^2\frac{a}{2}}+\frac{1}{4^2\cos\frac{a}{2^2}}+....+\frac{1}{4^n\cos^2\frac{a}{2^n}}$$



ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{4}{\sin^2 2x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

យើងមាន

$$\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{4}{\sin^2 2x}$$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{4}{\sin^2 2x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ ។

ខ) គណនាផលបូក៖

$$S_n=\frac{1}{4\cos^2\frac{a}{2}}+\frac{1}{4^2\cos\frac{a}{2^2}}+....+\frac{1}{4^n\cos^2\frac{a}{2^n}}$$

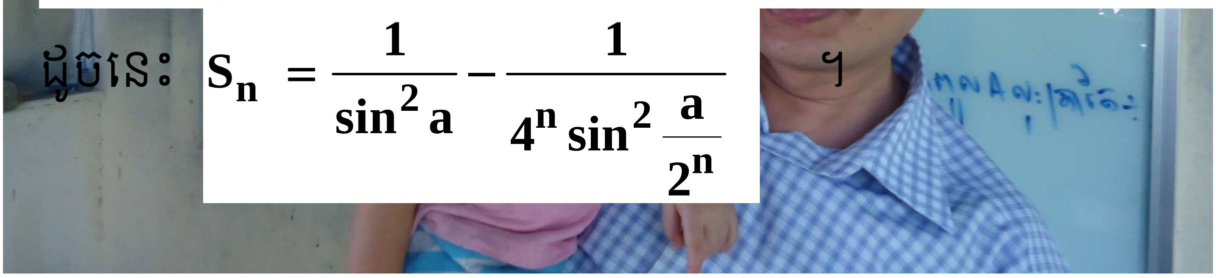
យើងបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4^k} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{a}{2^k}} \right)$

ដោយ $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x} - \frac{1}{\sin^2 x}$

គេបាន ៖

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{4^k} \left(\frac{4}{\sin^2 \frac{a}{2^{k-1}}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{a}{2^k}} \right) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4^{k-1}} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{a}{2^{k-1}}} - \frac{1}{4^k} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{a}{2^k}} \right) = \frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{4^n \sin^2 \frac{a}{2^n}}$$

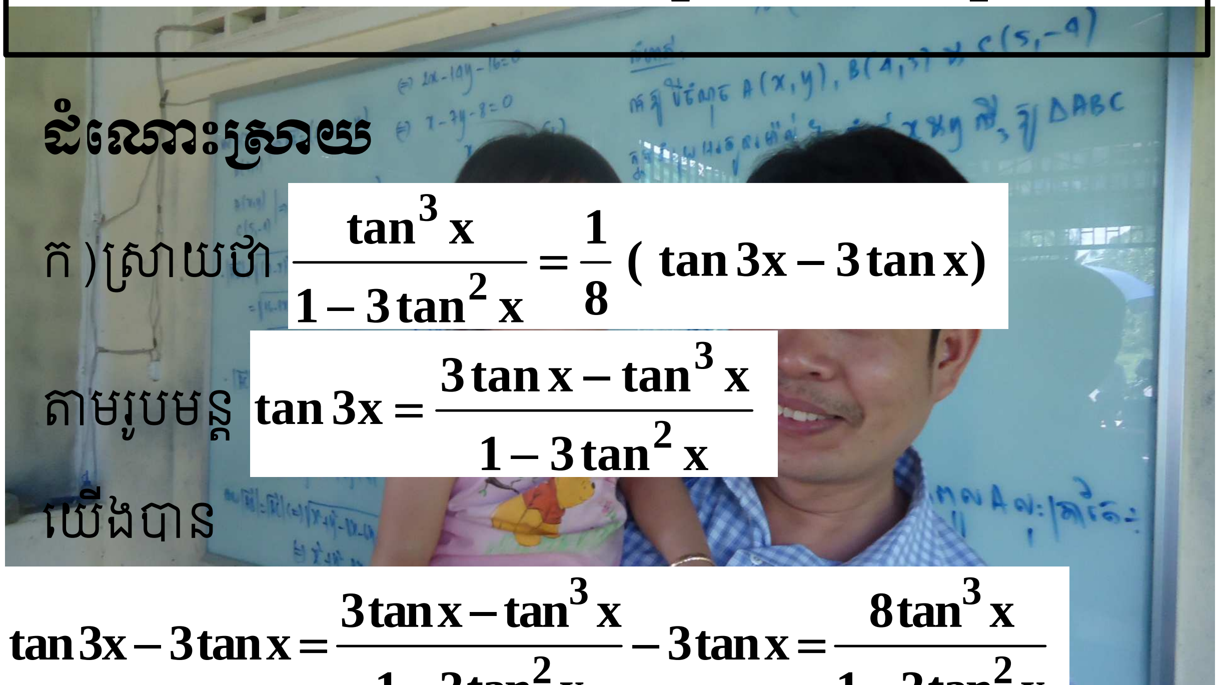


ដូចនេះ $S_n = \frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{4^n \sin^2 \frac{a}{2^n}}$ ។

លំហាត់ទី៣៤

ក)ចូរស្រាយថា $\dfrac{\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}=\dfrac{1}{8}(\tan 3x-3\tan x)$

ខ)ចូរគណនាផលបូក $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\left[\dfrac{3^k\tan^3\dfrac{a}{3^k}}{1-3\tan^2\dfrac{a}{3^k}}\right]$



ដំណោះស្រាយ

ក)ស្រាយថា $\dfrac{\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}=\dfrac{1}{8}(\tan 3x-3\tan x)$

តាមរូបមន្ត $\tan 3x=\dfrac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

យើងបាន

$$\tan 3x-3\tan x=\frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}-3\tan x=\frac{8\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$$

ដូចនេះ $\dfrac{\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}=\dfrac{1}{8}(\tan 3x-3\tan x)$ ។

ខ)គណនាផលបូក $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\left[\dfrac{3^k\tan^3\dfrac{a}{3^k}}{1-3\tan^2\dfrac{a}{3^k}}\right]$

យើងមាន $\dfrac{\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}=\dfrac{1}{8}(\tan 3x-3\tan x)$

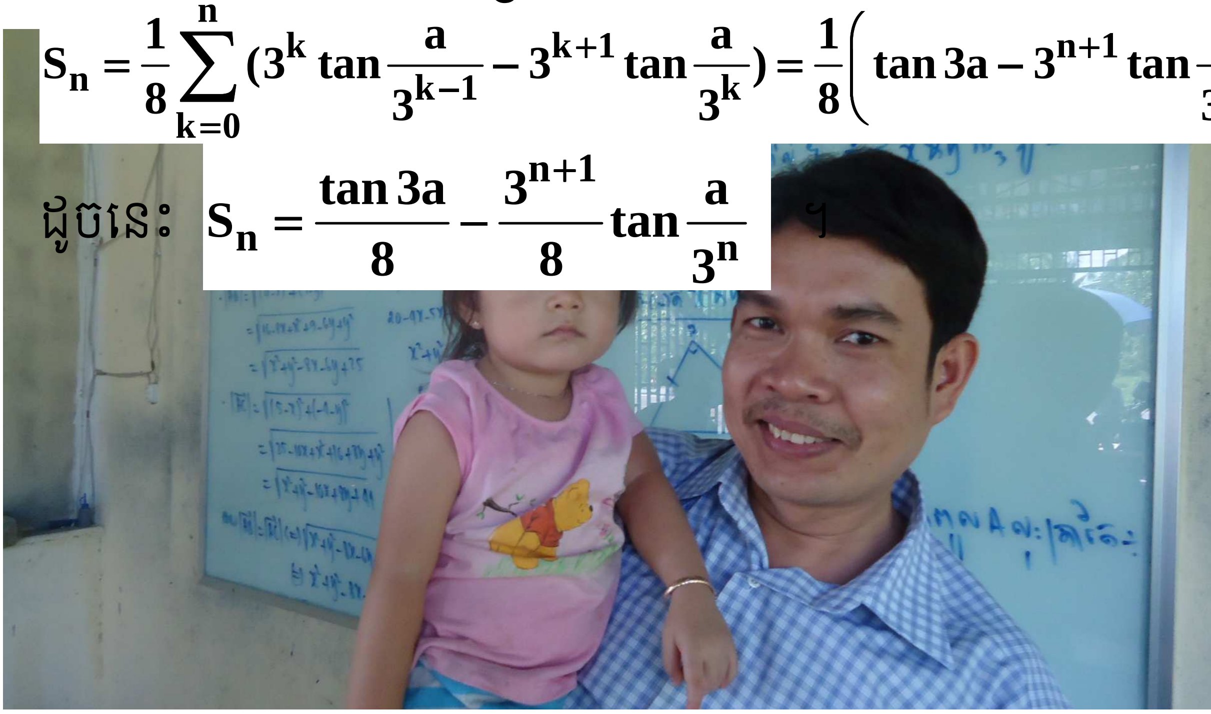
ដោយយក $x=\dfrac{a}{3^k}$

គេបាន

យើងបាន $\dfrac{\tan^3\dfrac{a}{3^k}}{1-3\tan^2\dfrac{a}{3^k}}=\dfrac{1}{8}\left(\tan\dfrac{a}{3^{k-1}}-3\tan\dfrac{a}{3^k}\right)$

$$S_n=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{n}\left(3^k\tan\frac{a}{3^{k-1}}-3^{k+1}\tan\frac{a}{3^k}\right)=\frac{1}{8}\left(\tan 3a-3^{n+1}\tan\frac{a}{3^n}\right)$$

ដូចនេះ $S_n=\dfrac{\tan 3a}{8}-\dfrac{3^{n+1}}{8}\tan\dfrac{a}{3^n}$ ។

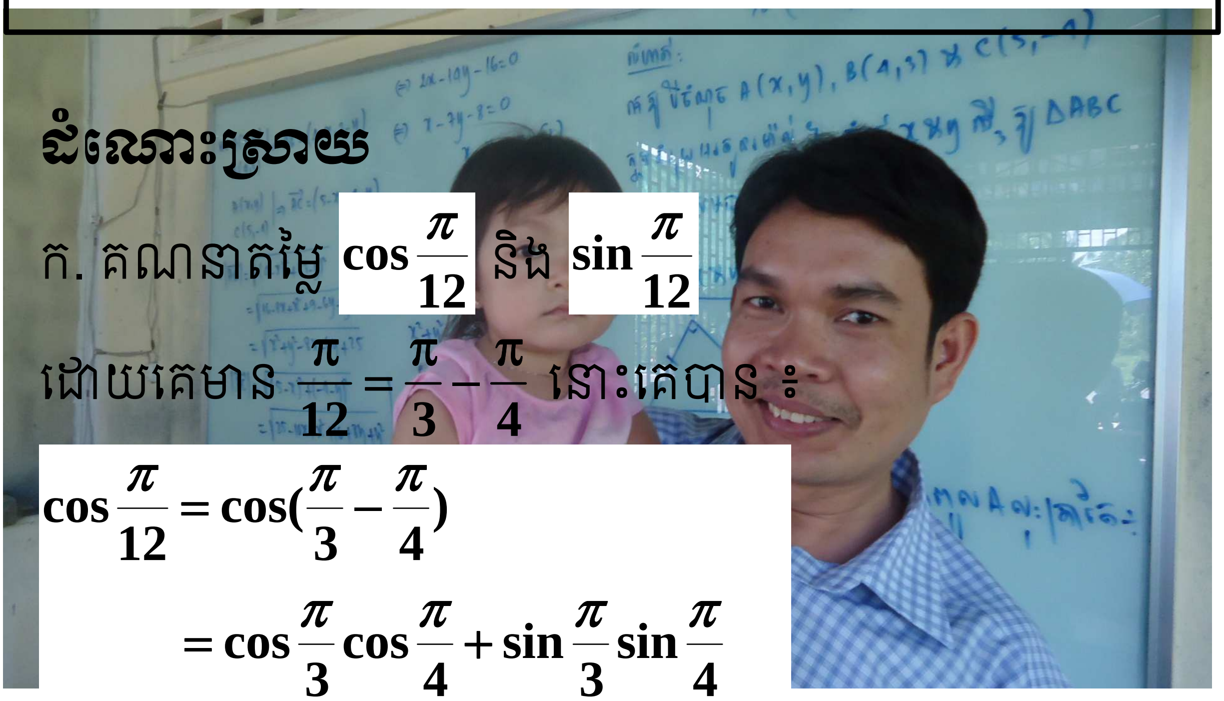


លំហាត់ទី៣៥

ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ គេឱ្យ $S_n=\cos^n\frac{\pi}{12}+\sin^n\frac{\pi}{12}$

ក)គណនាតម្លៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

ខ)បង្ហាញថា $4S_{n+2}-2\sqrt{6}S_{n+1}+S_n=0$



ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាតម្លៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

ដោយគេមាន $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ នោះគេបាន ៖

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})$$

$$=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})$$

$$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

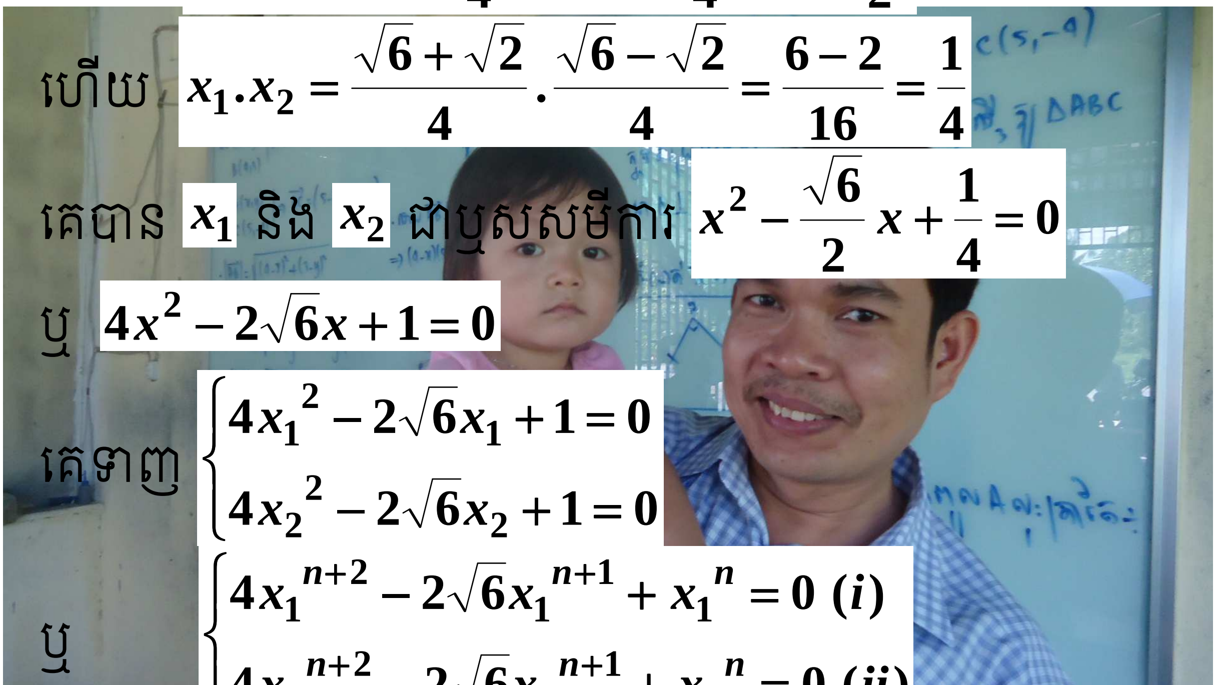
ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{12}$; $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{12}$ ។

ខ)បង្ហាញថា $4S_{n+2}-2\sqrt{6}S_{n+1}+S_n=0$

គេមាន $S_n=\cos^n\frac{\pi}{12}+\sin^n\frac{\pi}{12}$

តាង $x_1=\cos\frac{\pi}{12}$; $x_2=\sin\frac{\pi}{12}$ នោះ $S_n=x_1{}^n+x_2{}^n$

គេមាន $x_1+x_2=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$



ហើយ $x_1.x_2=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{6-2}{16}=\frac{1}{4}$

គេបាន x_1 និង x_2 ជាឫសសមីការ $x^2-\frac{\sqrt{6}}{2}x+\frac{1}{4}=0$

ឬ $4x^2-2\sqrt{6}x+1=0$

គេទាញ $\begin{cases}4x_1{}^2-2\sqrt{6}x_1+1=0\\4x_2{}^2-2\sqrt{6}x_2+1=0\end{cases}$

ឬ $\begin{cases}4x_1{}^{n+2}-2\sqrt{6}x_1{}^{n+1}+x_1{}^n=0\ (i)\\4x_2{}^{n+2}-2\sqrt{6}x_2{}^{n+1}+x_2{}^n=0\ (ii)\end{cases}$

បូកសមីការ (i) និង (ii) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$4(x_1{}^{n+2}+x_2{}^{n+2})-2\sqrt{6}(x_1{}^{n+1}+x_2{}^{n+1})+(x_1{}^n+x_2{}^n)=0$$

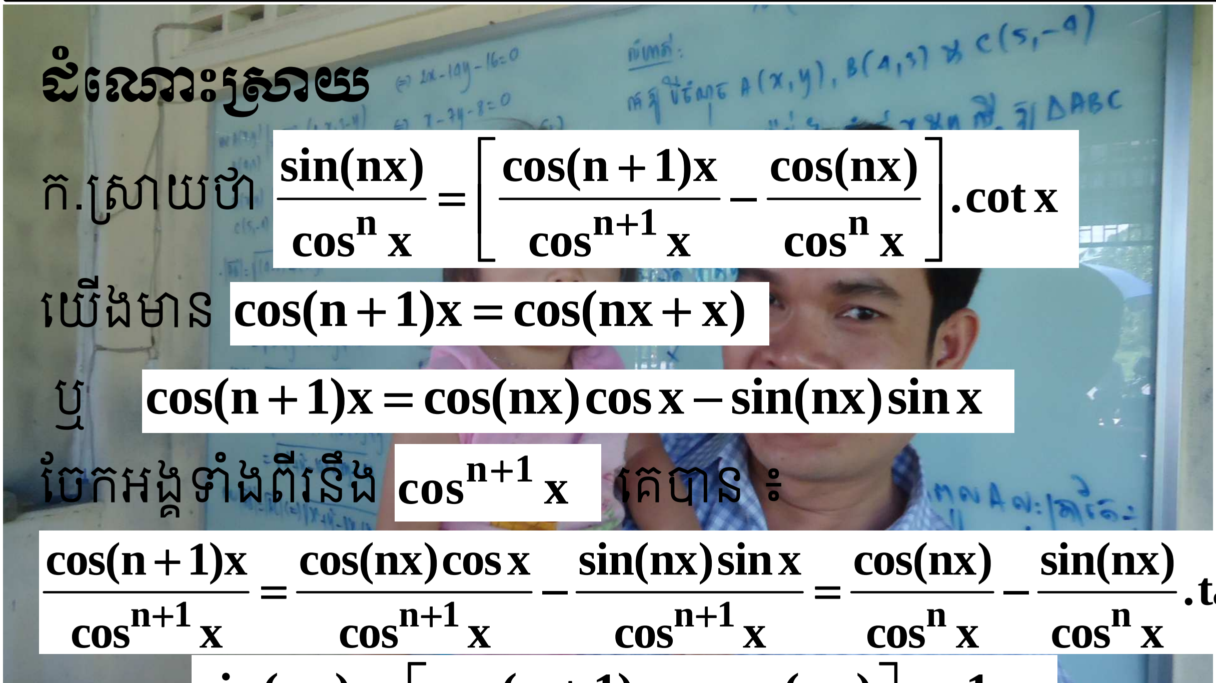
ដូចនេះ $4S_{n+2}-2\sqrt{6}S_{n+1}+S_n=0$ ។

លំហាត់ទី៣៦

ក)ចូរស្រាយថា $\dfrac{\sin(nx)}{\cos^n x}=\left[\dfrac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-\dfrac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\cot x$

ខ)ចូរគណនា

$$S_n=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}+\frac{\sin 3x}{\cos^3 x}+....+\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}$$



ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $\dfrac{\sin(nx)}{\cos^n x}=\left[\dfrac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-\dfrac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\cot x$

យើងមាន $\cos(n+1)x=\cos(nx+x)$

ឬ $\cos(n+1)x=\cos(nx)\cos x-\sin(nx)\sin x$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^{n+1}x$ គេបាន ៖

$$\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}=\frac{\cos(nx)\cos x}{\cos^{n+1}x}-\frac{\sin(nx)\sin x}{\cos^{n+1}x}=\frac{\cos(nx)}{\cos^n x}-\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}.\tan x$$

នាំឲ្យ $\dfrac{\sin(nx)}{\cos^n x}=\left[\dfrac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-\dfrac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\dfrac{1}{\tan x}$

ដូចនេះ $\dfrac{\sin(nx)}{\cos^n x}=\left[\dfrac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-\dfrac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\cot x$ ។

ខ.គណនា $S_n=\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\sin 2x}{\cos^2 x}+\dfrac{\sin 3x}{\cos^3 x}+....+\dfrac{\sin(nx)}{\cos^n x}$

យើងបាន $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin(kx)}{\cos^k x}\right]$

ដោយ $\frac{\sin(kx)}{\cos^k x} = \left[\frac{\cos(k+1)x}{\cos^{k+1} x} - \frac{\cos(kx)}{\cos^k x}\right].\cot x$

$$S_n = \cot x \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\cos(k+1)x}{\cos^{k+1} x} - \frac{\cos(kx)}{\cos^k x}\right) = \cot x\left(\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1} x} - 1\right)$$

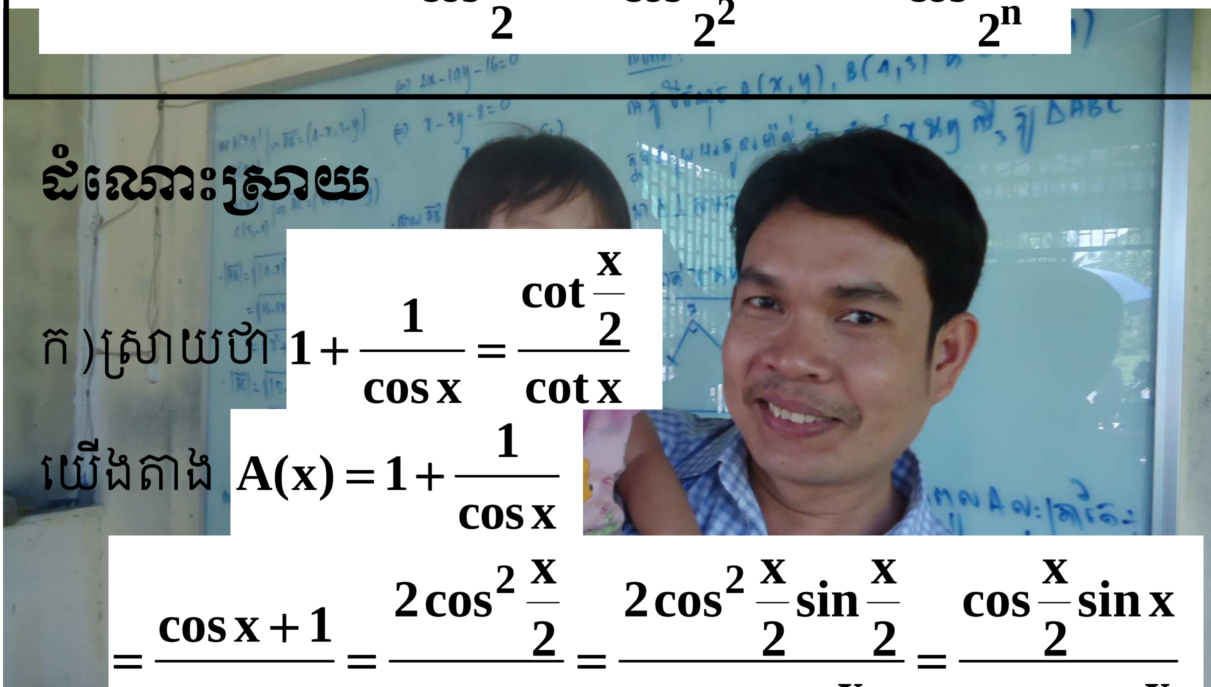
ដូចនេះ $S_n = \frac{\cot x[\cos(n+1)x - \cos^{n+1} x]}{\cos^{n+1} x}$ ។

លំហាត់ទី៣៧

ក) ចូរស្រាយថា $1+\frac{1}{\cos x}=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$

ខ) គណនា

$$P_n=(1+\frac{1}{\cos a})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2}})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^2}}).....(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^n}})$$



ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $1+\frac{1}{\cos x}=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$

យើងតាង $A(x)=1+\frac{1}{\cos x}$

$$=\frac{\cos x+1}{\cos x}=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{\cos x}=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos x\sin\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}\sin x}{\cos x\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.\frac{\sin x}{\cos x}=\tan\frac{x}{2}\ \tan x=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$$

ដូចនេះ $1+\frac{1}{\cos x}=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$ ។

ខ)គណនាផលគុណ

$$P_n = \left(1+\frac{1}{\cos a}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^2}}\right).....\left(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^n}}\right)$$

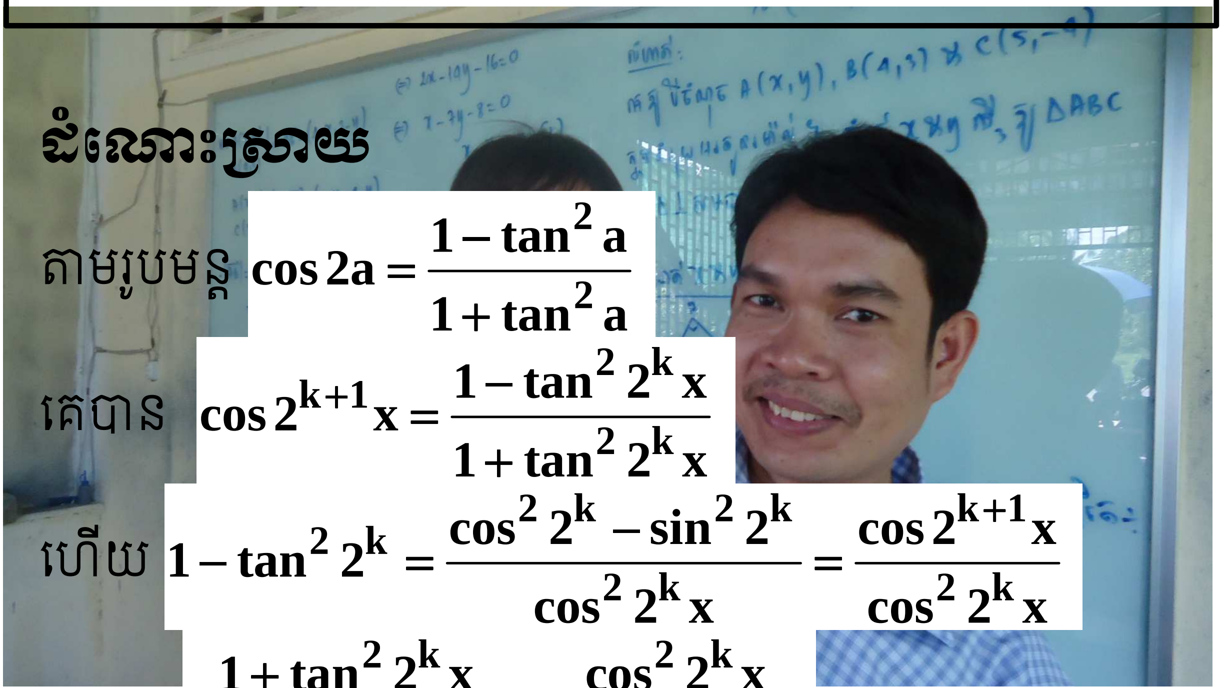
$$= \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^k}}\right) = \prod_{k=0}^{n}\left[\frac{\cot\frac{a}{2^{k+1}}}{\cot\frac{a}{2^k}}\right]$$

ដូចនេះ $P_n = \tan\frac{a}{2^{n+1}}.\cot a$ ។

លំហាត់ទី៣៨

គណនាផលគុណខាងក្រោមនេះ

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1+\tan^2 2^k x}{\left(1-\tan^2 2^k\right)^2}\right]$$ ដែល $|x|<\frac{\pi}{2^{n+2}}$



ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $\cos 2a=\frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$

គេបាន $\cos 2^{k+1}x=\frac{1-\tan^2 2^k x}{1+\tan^2 2^k x}$

ហើយ $1-\tan^2 2^k=\frac{\cos^2 2^k-\sin^2 2^k}{\cos^2 2^k x}=\frac{\cos 2^{k+1}x}{\cos^2 2^k x}$

គេបាន $\frac{1+\tan^2 2^k x}{(1-\tan^2 2^k x)^2}=\frac{\cos^2 2^k x}{\cos^2 2^{k+1}x}$

ដូចនេះ $P_n=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\cos^2 2^k x}{\cos^2 2^{k+1}x}\right)=\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 2^{n+1}x}$ ។

លំហាត់ទី៣៩

គណនាផលគុណខាងក្រោម៖

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left[(1-\tan^2\frac{x}{2^k})^{2^k}\right]$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ $P_n = \prod_{k=0}^{n}\left[(1-\tan^2\frac{x}{2^k})^{2^k}\right]$

យើងមាន $1-\tan^2\frac{x}{2^k} = \dfrac{\cos^2\frac{x}{2^k}-\sin^2\frac{x}{2^k}}{\cos^2\frac{x}{2^k}} = \dfrac{\cos\frac{2x}{2^k}}{\cos^2\frac{x}{2^k}}$

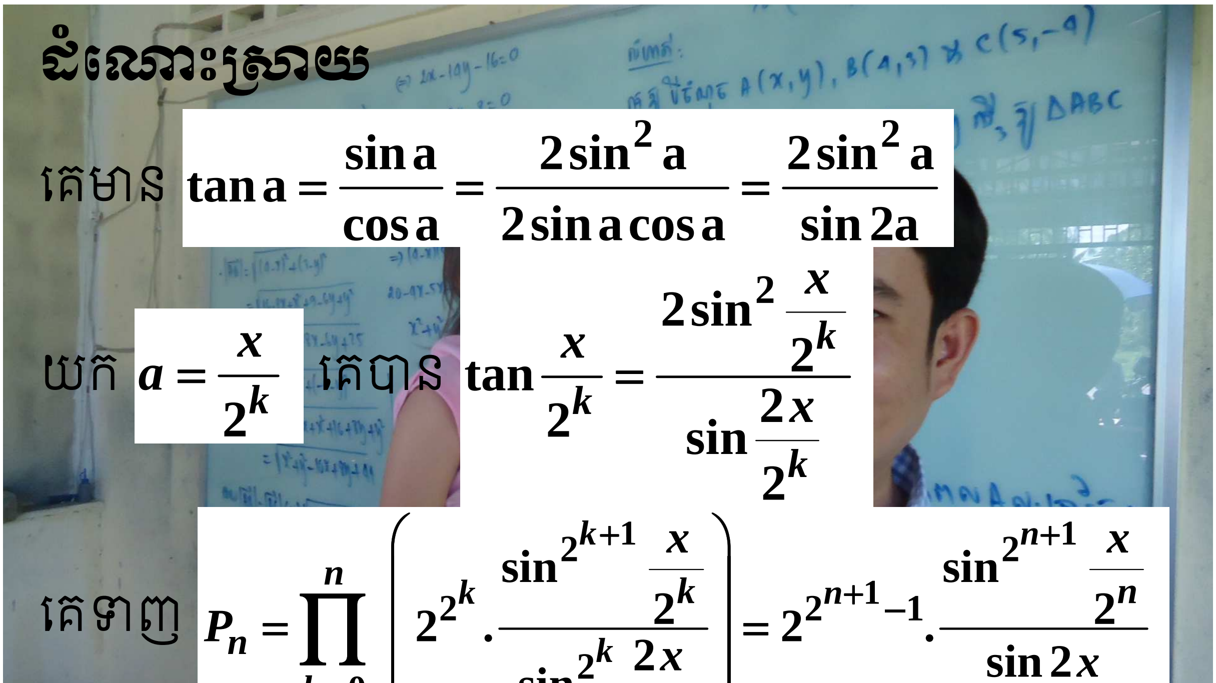
គេបាន $P_n = \prod_{k=0}^{n}\left[\dfrac{\cos^{2^k}\frac{x}{2^{k-1}}}{\cos^{2^{k+1}}\frac{x}{2^k}}\right] = \dfrac{\cos 2x}{\cos^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}$

ដូចនេះ៖ $P_n = \dfrac{\cos 2x}{\cos^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}$ ។

លំហាត់ទី៤០

គណនាផលគុណខាងក្រោម៖

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(\tan^{2^k}\frac{x}{2^k}\right) = \tan x.\tan^2\frac{x}{2}.\tan^4\frac{x}{4}.....\tan^{2^n}\frac{x}{2^n}$$



ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\tan a = \dfrac{\sin a}{\cos a} = \dfrac{2\sin^2 a}{2\sin a\cos a} = \dfrac{2\sin^2 a}{\sin 2a}$

យក $a = \dfrac{x}{2^k}$ គេបាន $\tan\dfrac{x}{2^k} = \dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2^k}}{\sin\dfrac{2x}{2^k}}$

គេទាញ $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(2^{2^k}.\frac{\sin^{2^{k+1}}\dfrac{x}{2^k}}{\sin^{2^k}\dfrac{2x}{2^k}}\right) = 2^{2^{n+1}-1}.\frac{\sin^{2^{n+1}}\dfrac{x}{2^n}}{\sin 2x}$

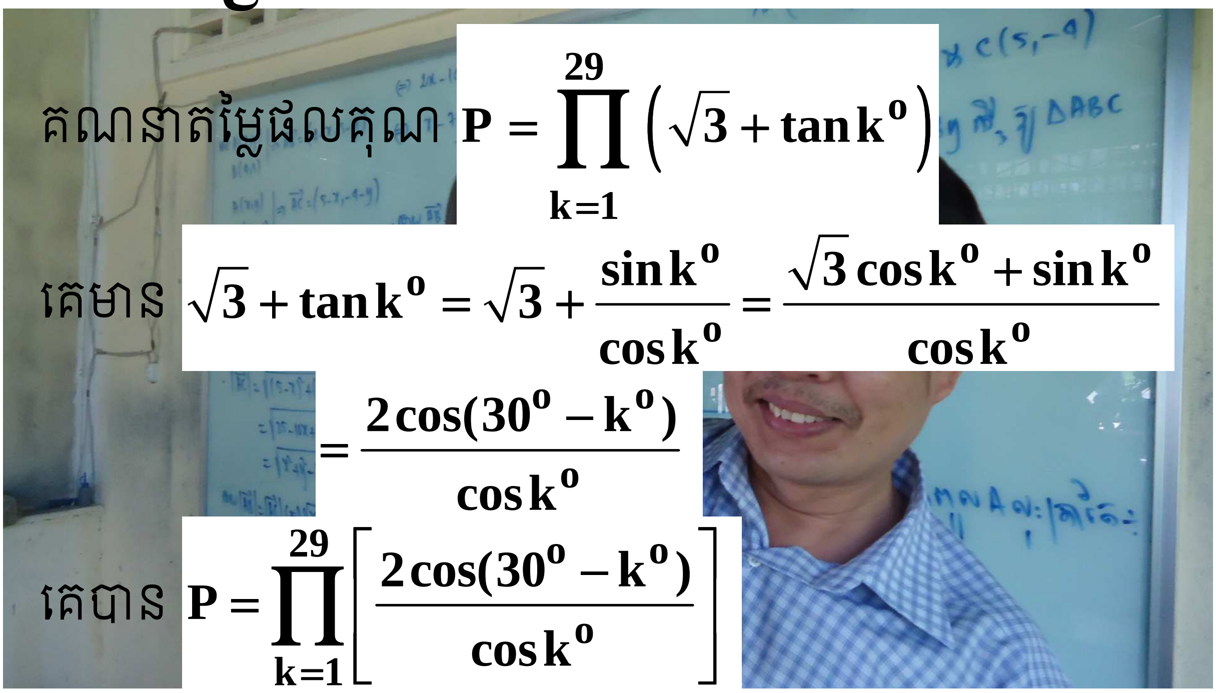
ដូចនេះ៖ $P_n = 2^{(2^{n+1}-1)}.\dfrac{\sin^{2^{n+1}}\dfrac{x}{2^n}}{\sin 2x}$ ។

លំហាត់ទី៤១

ចូរគណនាតម្លៃផលគុណ៖

$$P=(\sqrt{3}+\tan 1^o)(\sqrt{3}+\tan 2^o).....(\sqrt{3}+\tan 29^o)$$

ដំណោះស្រាយ



គណនាតម្លៃផលគុណ $P=\prod_{k=1}^{29}\left(\sqrt{3}+\tan k^o\right)$

គេមាន $\sqrt{3}+\tan k^o=\sqrt{3}+\dfrac{\sin k^o}{\cos k^o}=\dfrac{\sqrt{3}\cos k^o+\sin k^o}{\cos k^o}$

$$=\frac{2\cos(30^o-k^o)}{\cos k^o}$$

គេបាន $P=\prod_{k=1}^{29}\left[\dfrac{2\cos(30^o-k^o)}{\cos k^o}\right]$

$$=\frac{2^{29}\cos 29^o\cos 28^o.....\cos 2^o\cos 1^o}{\cos 1^o\cos 2^o.....\cos 28^o\cos 29^o}=2^{29}$$

ដូចនេះ

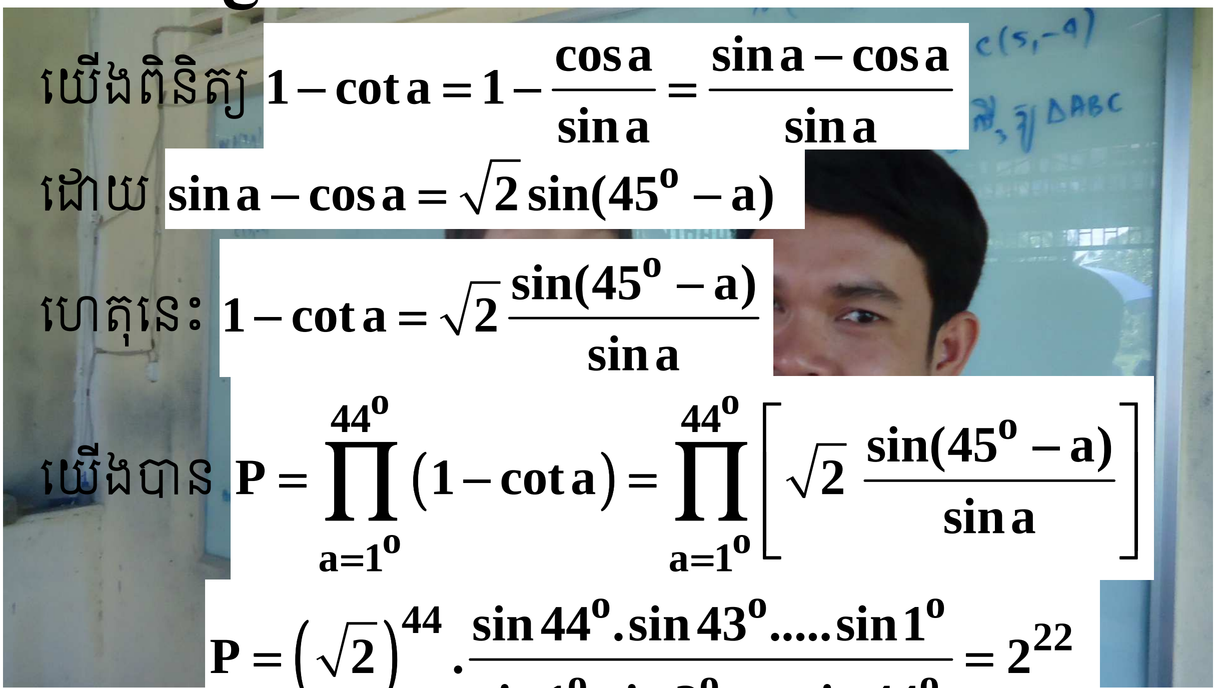
$$(\sqrt{3}+\tan 1^o)(\sqrt{3}+\tan 2^o).....(\sqrt{3}+\tan 29^o)=2^{29}$$ ។

លំហាត់ទី៤២

គណនាតម្លៃនៃផលគុណ

$$P=(1-\cot 1^o)(1-\cot 2^o)(1-\cot 3^o).....(1-\cot 44^o)$$

ដំណោះស្រាយ



យើងពិនិត្យ $1-\cot a=1-\dfrac{\cos a}{\sin a}=\dfrac{\sin a-\cos a}{\sin a}$

ដោយ $\sin a-\cos a=\sqrt{2}\sin(45^o-a)$

ហេតុនេះ $1-\cot a=\sqrt{2}\,\dfrac{\sin(45^o-a)}{\sin a}$

យើងបាន $P=\prod\limits_{a=1^o}^{44^o}(1-\cot a)=\prod\limits_{a=1^o}^{44^o}\left[\sqrt{2}\,\dfrac{\sin(45^o-a)}{\sin a}\right]$

$$P=\left(\sqrt{2}\right)^{44}.\frac{\sin 44^o.\sin 43^o.....\sin 1^o}{\sin 1^o.\sin 2^o......\sin 44^o}=2^{22}$$

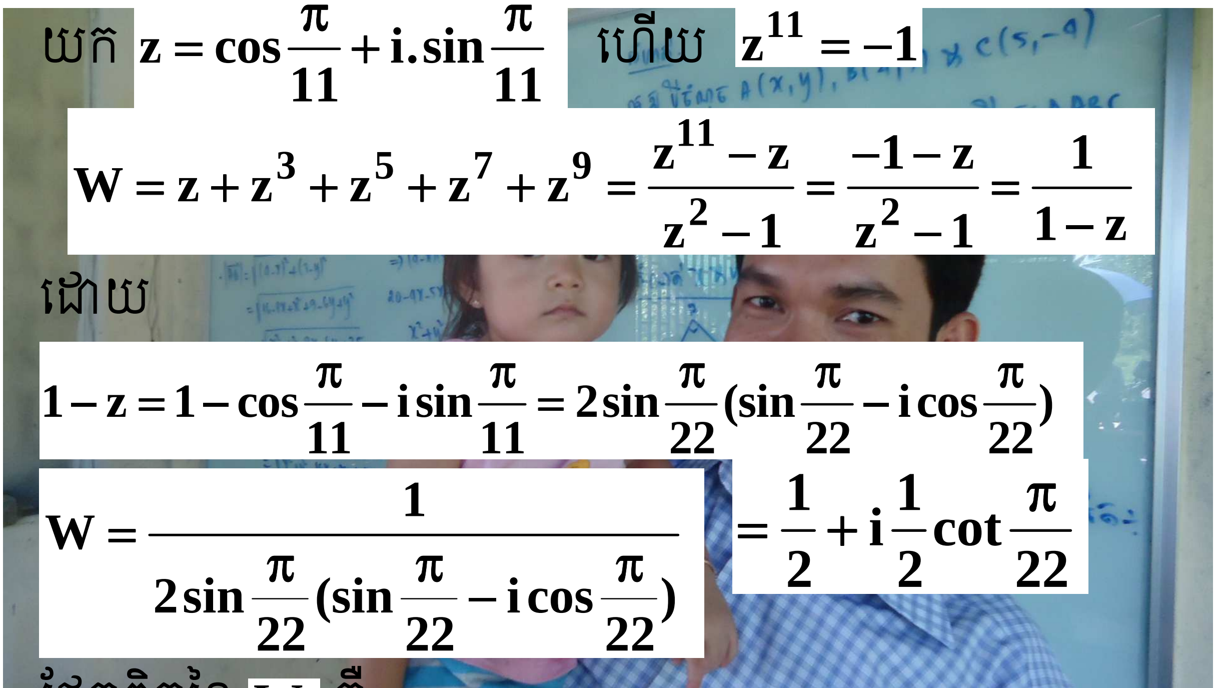
ដូចនេះ $P=(1-\cot 1^o)(1-\cot 2^o).....(1-\cot 44^o)=2^{22}$

លំហាត់ទី៤៣

គណនា

$$A=\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$$

ដំណោះស្រាយ



យក $z=\cos\frac{\pi}{11}+i.\sin\frac{\pi}{11}$ ហើយ $z^{11}=-1$

$$W=z+z^3+z^5+z^7+z^9=\frac{z^{11}-z}{z^2-1}=\frac{-1-z}{z^2-1}=\frac{1}{1-z}$$

ដោយ

$$1-z=1-\cos\frac{\pi}{11}-i\sin\frac{\pi}{11}=2\sin\frac{\pi}{22}(\sin\frac{\pi}{22}-i\cos\frac{\pi}{22})$$

$$W=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{22}(\sin\frac{\pi}{22}-i\cos\frac{\pi}{22})}=\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{22}$$

ផ្នែកពិតនៃ W គឺ

$$\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$$

ដូចនេះ

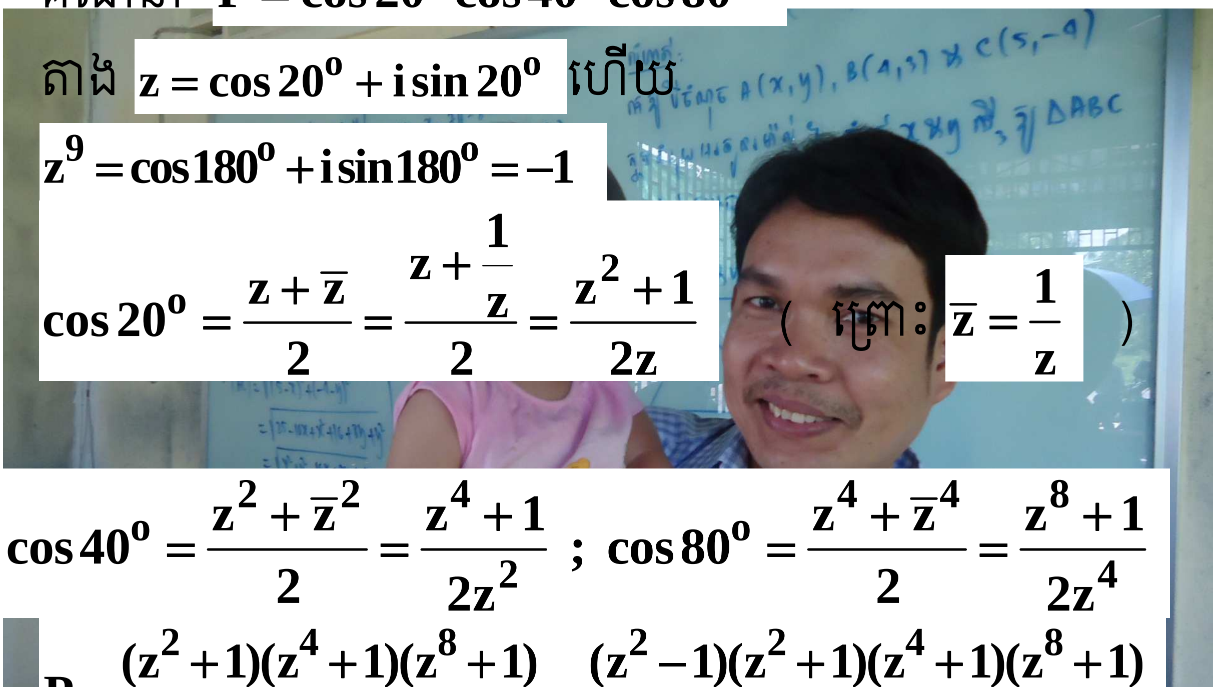
$$A=\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$$

លំហាត់ទី៤៤

គណនា $P = \cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $P = \cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o$



តាង $z = \cos 20^o + i\sin 20^o$ ហើយ

$z^9 = \cos 180^o + i\sin 180^o = -1$

$$\cos 20^o = \frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$$ (ព្រោះ $\overline{z} = \frac{1}{z}$)

$$\cos 40^o = \frac{z^2+\overline{z}^2}{2} = \frac{z^4+1}{2z^2} \;;\; \cos 80^o = \frac{z^4+\overline{z}^4}{2} = \frac{z^8+1}{2z^4}$$

$$P = \frac{(z^2+1)(z^4+1)(z^8+1)}{8z^7} = \frac{(z^2-1)(z^2+1)(z^4+1)(z^8+1)}{8z^7(z^2-1)}$$

$$= \frac{z^{16}-1}{8(z^9-z^7)} = \frac{-z^7-1}{8(-1-z^7)} = \frac{1}{8}$$

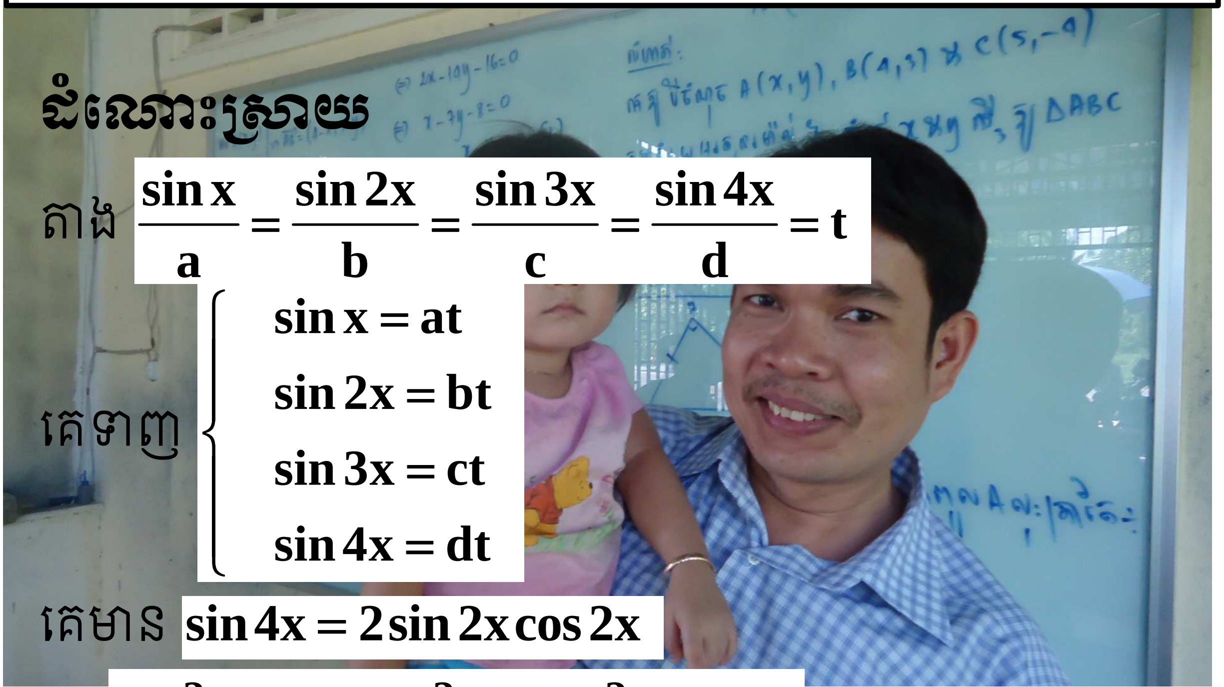
ដូចនេះ $P = \cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o = \frac{1}{8}$ ។

លំហាត់ទី៤៥

គេឱ្យ $a\,;b\,;c\,;d$ និង x ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់៖

$$\frac{\sin x}{a}=\frac{\sin 2x}{b}=\frac{\sin 3x}{c}=\frac{\sin 4x}{d}$$ ដែល $x\neq k\pi\ ;\ k\in Z$

ចូរបង្ហាញថា $a^3(4b^2-d^2)=b^4(3a-c)$



ដំណោះស្រាយ

តាង $\dfrac{\sin x}{a}=\dfrac{\sin 2x}{b}=\dfrac{\sin 3x}{c}=\dfrac{\sin 4x}{d}=t$

គេទាញ $\begin{cases}\sin x=at\\ \sin 2x=bt\\ \sin 3x=ct\\ \sin 4x=dt\end{cases}$

គេមាន $\sin 4x=2\sin 2x\cos 2x$

$$\sin^2 4x=4\sin^2 2x\cos^2 2x$$

$$\sin^2 4x=4\sin^2 2x(1-\sin^2 2x)$$

$$d^2t^2\quad=4b^2t^2(1-b^2t^2)$$

គេទាញ $t^2=\dfrac{1}{b^2}\left(1-\dfrac{d^2}{4b^2}\right)$ (1)

ម៉្យាងទៀត $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

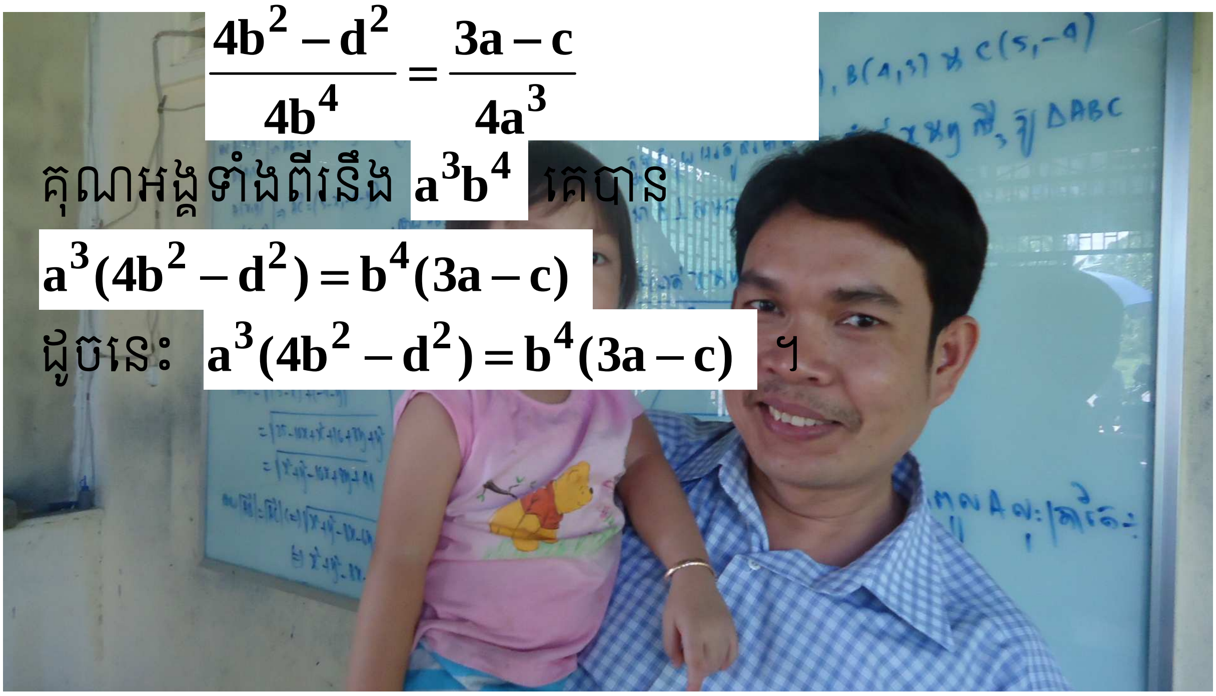
$$\sin 3x = \sin x(3 - 4\sin^2 x)$$

$$ct = at(3 - 4a^2t^2)$$

គេទាញ $t^2 = \frac{1}{4a^2}(3 - \frac{c}{a}) \quad (2)$

ផ្ទឹម (1) និង (2) គេបាន៖

$$\frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{d^2}{4b^2}\right) = \frac{1}{4a^2}\left(3 - \frac{c}{a}\right)$$



$$\frac{4b^2 - d^2}{4b^4} = \frac{3a - c}{4a^3}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង a^3b^4 គេបាន

$a^3(4b^2 - d^2) = b^4(3a - c)$

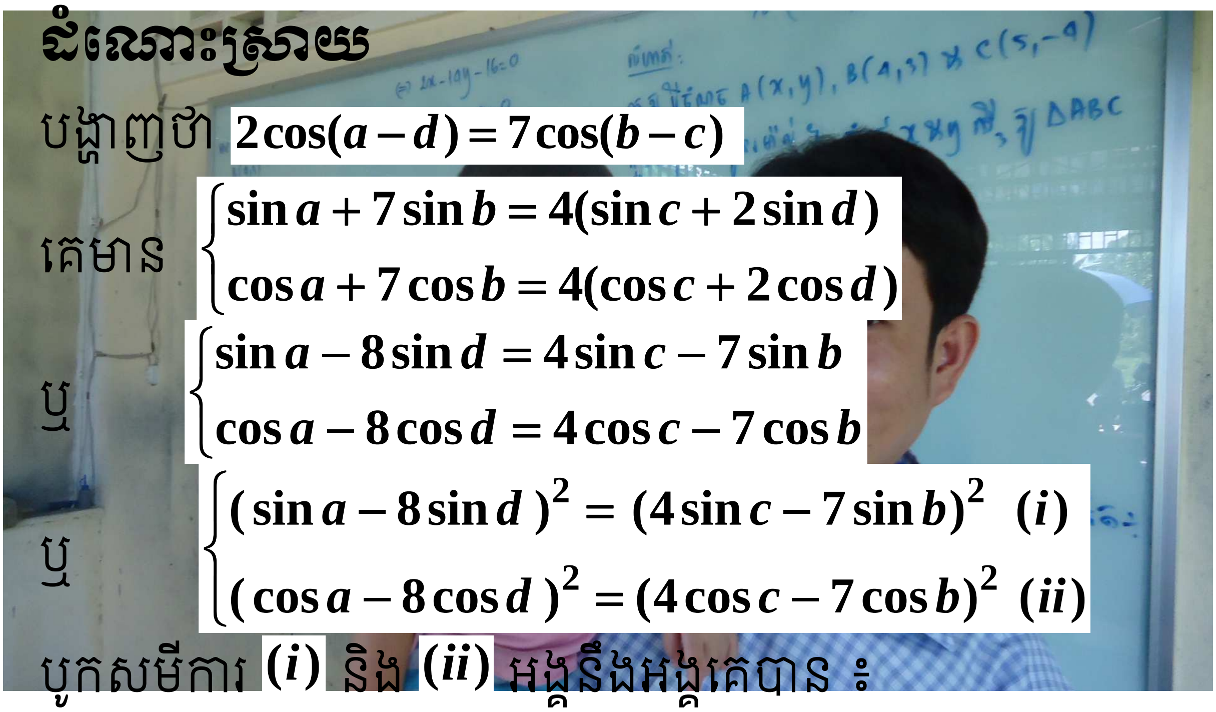
ដូចនេះ $a^3(4b^2 - d^2) = b^4(3a - c)$ ។

លំហាត់ទី៤៦

គេឱ្យ a, b, c, d ជាចំនួននៅក្នុងចន្លោះ $[\,0\,;\,\pi\,]$

ដោយដឹងថា $\begin{cases} \sin a + 7\sin b = 4(\sin c + 2\sin d) \\ \cos a + 7\cos b = 4(\cos c + 2\cos d) \end{cases}$

ចូរបង្ហាញថា $2\cos(a-d) = 7\cos(b-c)$ ។



ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $2\cos(a-d) = 7\cos(b-c)$

គេមាន $\begin{cases} \sin a + 7\sin b = 4(\sin c + 2\sin d) \\ \cos a + 7\cos b = 4(\cos c + 2\cos d) \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} \sin a - 8\sin d = 4\sin c - 7\sin b \\ \cos a - 8\cos d = 4\cos c - 7\cos b \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} (\sin a - 8\sin d)^2 = (4\sin c - 7\sin b)^2 \quad (i) \\ (\cos a - 8\cos d)^2 = (4\cos c - 7\cos b)^2 \quad (ii) \end{cases}$

បូកសមីការ (i) និង (ii) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$65 - 16\cos(a-d) = 65 - 56\cos(b-c)$$

$$-16\cos(a-d) = -56\cos(b-c)$$

ដូចនេះ $2\cos(a-d) = 7\cos(b-c)$ ។

លំហាត់ទី៤៧

គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P=\tan\frac{\pi}{27}\tan\frac{6\pi}{27}\tan\frac{8\pi}{27}\tan\frac{10\pi}{27}\tan\frac{12\pi}{27}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ $P=\tan\frac{\pi}{27}\tan\frac{6\pi}{27}\tan\frac{8\pi}{27}\tan\frac{10\pi}{27}\tan\frac{12\pi}{27}$

គេមាន $\tan\frac{8\pi}{27}=\tan(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{27})=\dfrac{\sqrt{3}-\tan\frac{\pi}{27}}{1+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{27}}$

$$\tan\frac{10\pi}{27}=\tan(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{27})=\frac{\sqrt{3}+\tan\frac{\pi}{27}}{1-\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{27}}$$

គេទាញ $\tan\frac{\pi}{27}\tan\frac{8\pi}{27}\tan\frac{10\pi}{27}=\dfrac{3\tan\frac{\pi}{27}-\tan^3\frac{\pi}{27}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{27}}=\tan\frac{\pi}{9}$

គេបាន $P=\tan\frac{\pi}{9}\tan\frac{2\pi}{9}\tan\frac{4\pi}{9}$

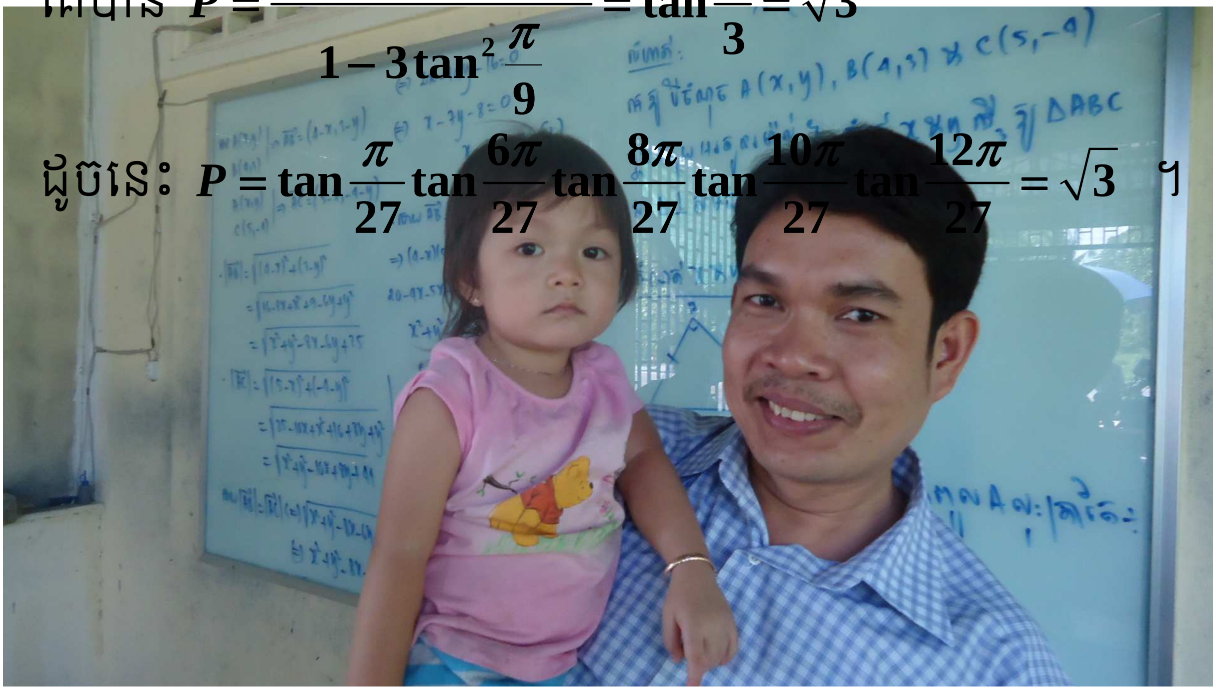
គេមាន $\tan\frac{2\pi}{9}=\tan(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{9})=\dfrac{\sqrt{3}-\tan\frac{\pi}{9}}{1+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{9}}$

$$\tan\frac{4\pi}{9} = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} + \tan\frac{\pi}{9}}{1 - \sqrt{3}\tan\frac{\pi}{9}}$$

គេទាញ $\tan\frac{2\pi}{9}\tan\frac{4\pi}{9} = \dfrac{3 - \tan^2\frac{\pi}{9}}{1 - 3\tan^2\frac{\pi}{9}}$

គេបាន $P = \dfrac{3\tan\frac{\pi}{9} - \tan^3\frac{\pi}{9}}{1 - 3\tan^2\frac{\pi}{9}} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

ដូចនេះ: $P = \tan\frac{\pi}{27}\tan\frac{6\pi}{27}\tan\frac{8\pi}{27}\tan\frac{10\pi}{27}\tan\frac{12\pi}{27} = \sqrt{3}$ ។

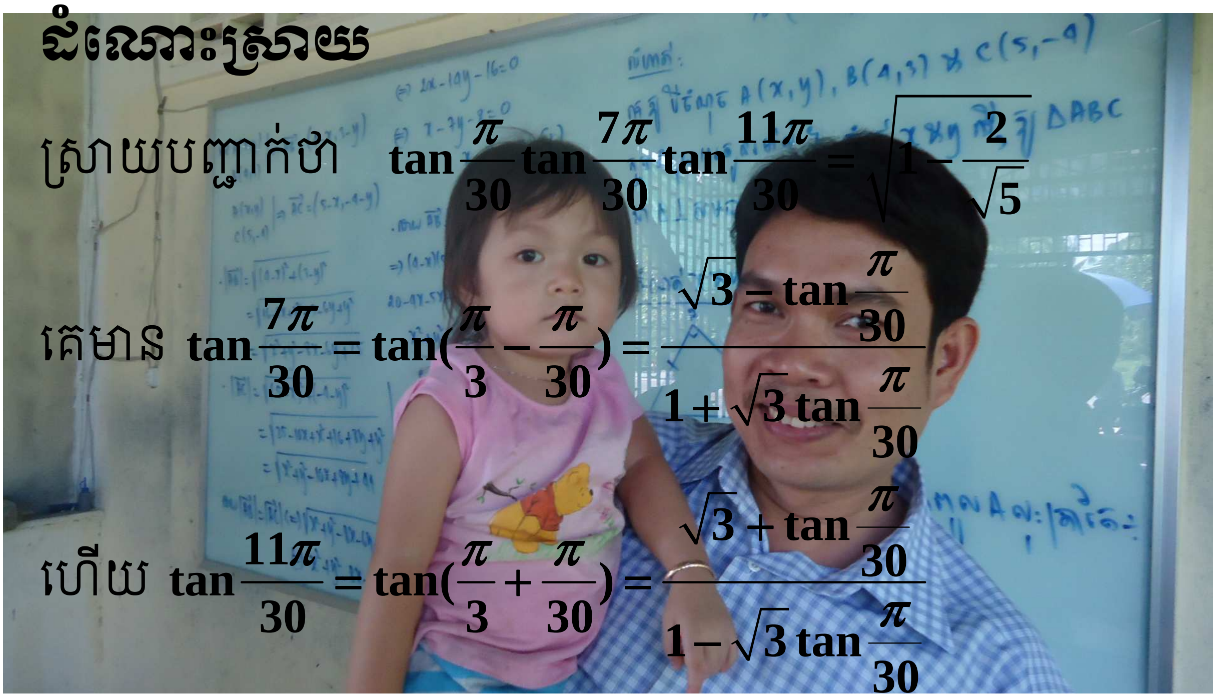


លំហាត់ទី៤៨

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\tan\frac{\pi}{30}\tan\frac{7\pi}{30}\tan\frac{11\pi}{30}=\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

ដំណោះស្រាយ



ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan\frac{\pi}{30}\tan\frac{7\pi}{30}\tan\frac{11\pi}{30}=\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$

គេមាន $\tan\frac{7\pi}{30}=\tan(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{30})=\frac{\sqrt{3}-\tan\frac{\pi}{30}}{1+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{30}}$

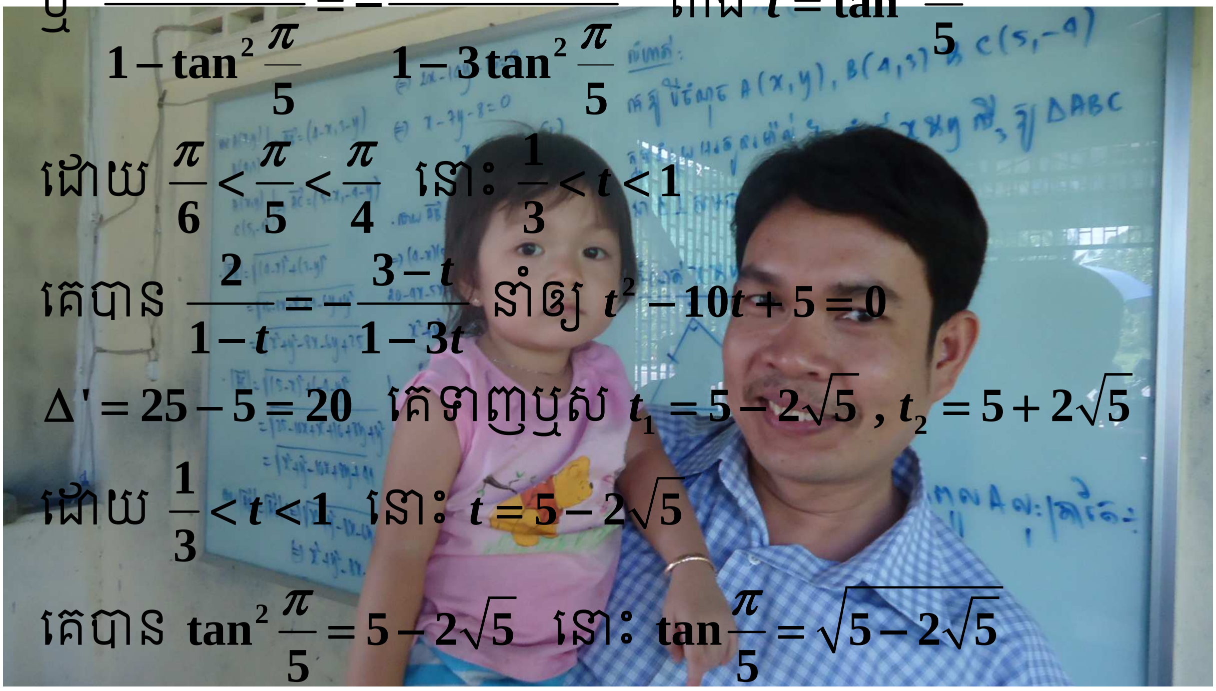
ហើយ $\tan\frac{11\pi}{30}=\tan(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{30})=\frac{\sqrt{3}+\tan\frac{\pi}{30}}{1-\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{30}}$

គេបាន $\tan\frac{\pi}{30}\tan\frac{7\pi}{30}\tan\frac{11\pi}{30}=\frac{3\tan\frac{\pi}{30}-\tan^3\frac{\pi}{30}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{30}}=\tan\frac{\pi}{10}$

គេមាន $\frac{2\pi}{5}=\pi-\frac{3\pi}{5}$ នោះ $\tan\frac{2\pi}{5}=\tan(\pi-\frac{3\pi}{5})=-\tan\frac{3\pi}{5}$

ដោយ $\tan\frac{2\pi}{5}=\dfrac{2\tan\frac{\pi}{5}}{1-\tan^2\frac{\pi}{5}}$ និង $\tan\frac{3\pi}{5}=\dfrac{3\tan\frac{\pi}{5}-\tan^3\frac{\pi}{5}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{5}}$

គេបាន $\dfrac{2\tan\frac{\pi}{5}}{1-\tan^2\frac{\pi}{5}}=-\dfrac{3\tan\frac{\pi}{5}-\tan^3\frac{\pi}{5}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{5}}$



ឬ $\dfrac{2}{1-\tan^2\frac{\pi}{5}}=-\dfrac{3-\tan^2\frac{\pi}{5}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{5}}$ តាង $t=\tan^2\frac{\pi}{5}$

ដោយ $\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{4}$ នោះ $\frac{1}{3}<t<1$

គេបាន $\dfrac{2}{1-t}=-\dfrac{3-t}{1-3t}$ នាំឲ្យ $t^2-10t+5=0$

$\Delta'=25-5=20$ គេទាញឫស $t_1=5-2\sqrt{5}\,,\ t_2=5+2\sqrt{5}$

ដោយ $\frac{1}{3}<t<1$ នោះ $t=5-2\sqrt{5}$

គេបាន $\tan^2\frac{\pi}{5}=5-2\sqrt{5}$ នោះ $\tan\frac{\pi}{5}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

តាមរូបមន្ត $\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

គេបាន $\tan\frac{\pi}{5}=\dfrac{2\tan\frac{\pi}{10}}{1-\tan^2\frac{\pi}{10}}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ តាង $u=\tan\frac{\pi}{10}>0$

គេបាន $\dfrac{2u}{1-u^2}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ ឬ $u^2+\dfrac{2}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}u-1=0$

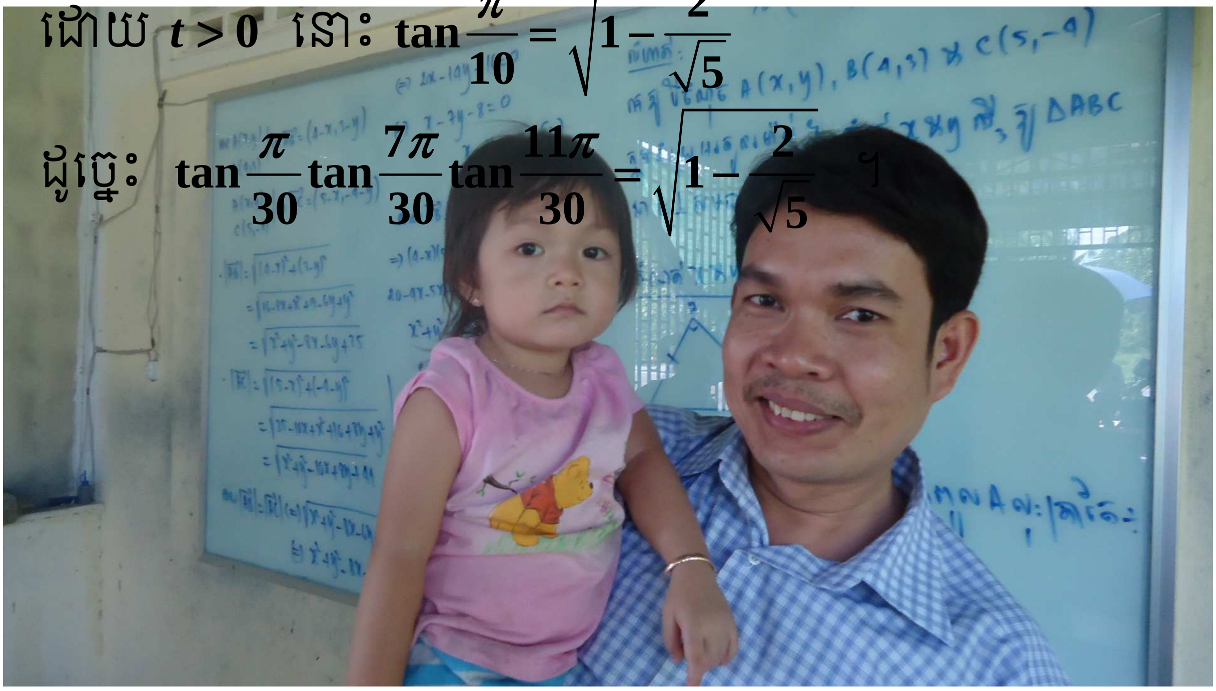
$$\Delta' = \frac{1}{5-2\sqrt{5}} + 1 = \frac{6-2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{5-2\sqrt{5}}$$

គេទាញ

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} - \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} \\ t_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} + \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \sqrt{1-\dfrac{2}{\sqrt{5}}} \end{array}\right.$$

ដោយ $t > 0$ នោះ $\tan\frac{\pi}{10} = \sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$

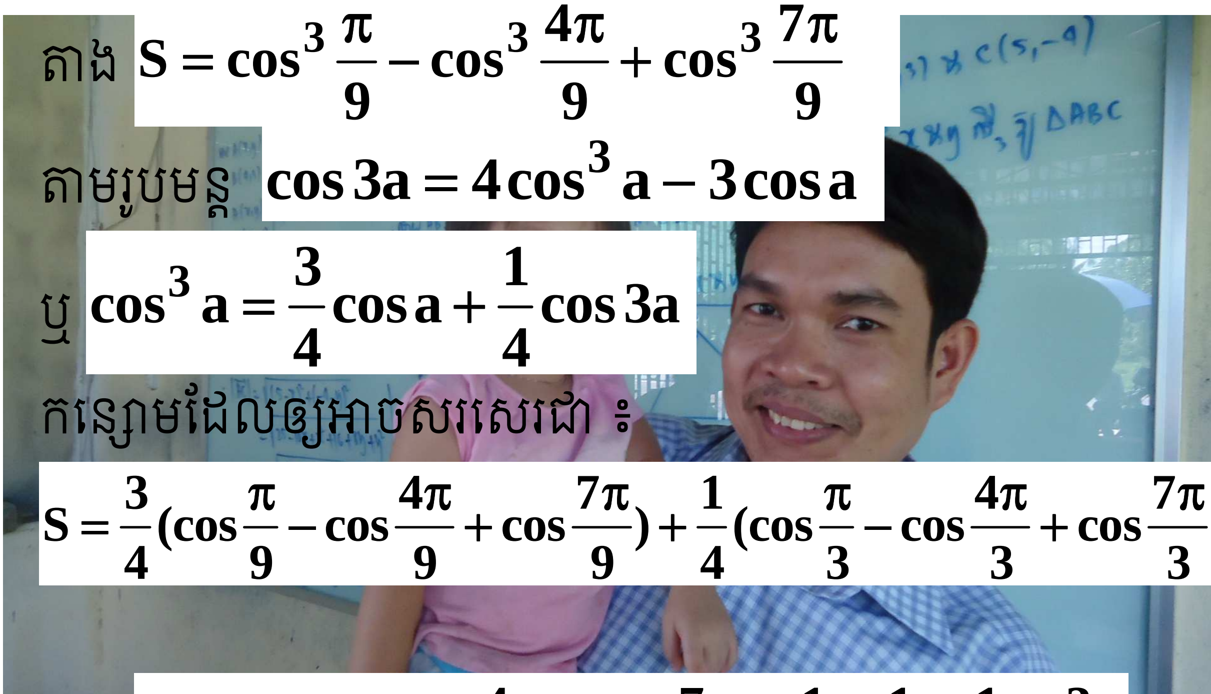
ដូច្នេះ $\tan\frac{\pi}{30}\tan\frac{7\pi}{30}\tan\frac{11\pi}{30} = \sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$ ។



លំហាត់ទី៤៩

ចូរស្រាយថា $\cos^3\frac{\pi}{9}-\cos^3\frac{4\pi}{9}+\cos^3\frac{7\pi}{9}=\frac{3}{8}$

ដំណោះស្រាយ



តាង $S=\cos^3\frac{\pi}{9}-\cos^3\frac{4\pi}{9}+\cos^3\frac{7\pi}{9}$

តាមរូបមន្ត $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$

ឬ $\cos^3 a=\frac{3}{4}\cos a+\frac{1}{4}\cos 3a$

កន្សោមដែលឲ្យអាចសរសេរជា ៖

$$S=\frac{3}{4}(\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9})+\frac{1}{4}(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{7\pi}{3})$$

តាង $A=\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{7\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

ហើយ $B=\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}$

ដោយ $-\cos\frac{4\pi}{9}=\cos\frac{13\pi}{9}$

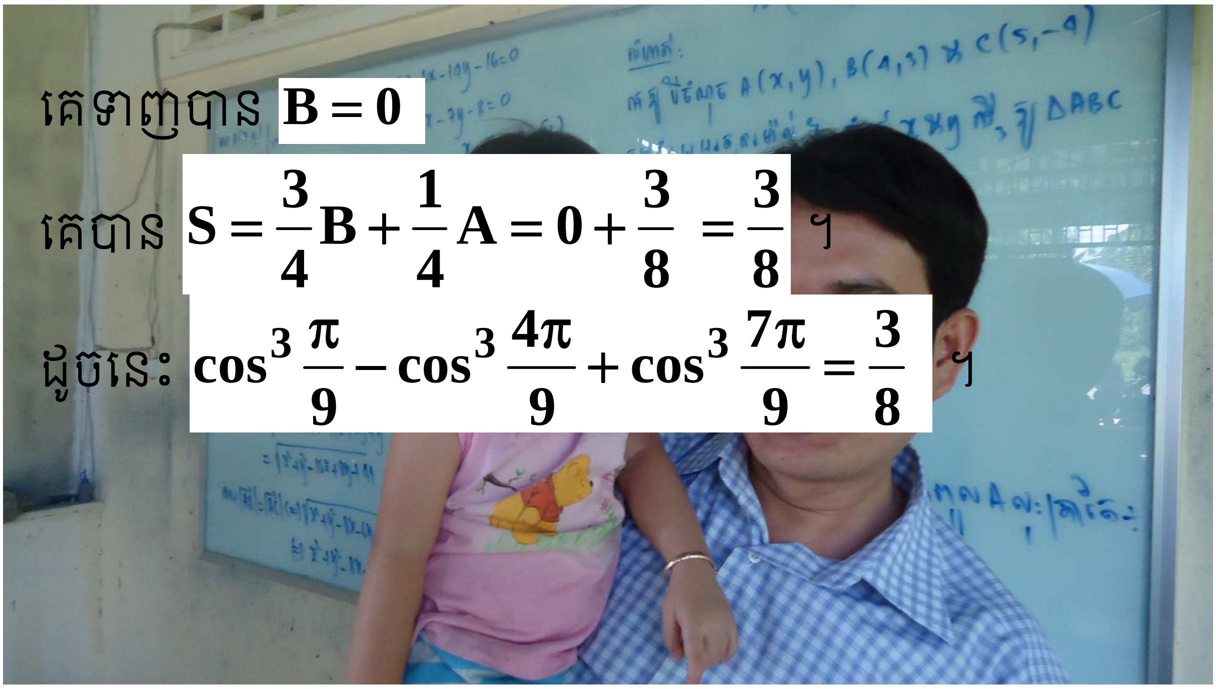
$$B=\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{13\pi}{9}$$

គុណនឹង $2\sin\frac{\pi}{3}$ គេបាន

$$2B.\sin\frac{\pi}{3}=2\cos\frac{\pi}{9}\sin\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{7\pi}{9}\sin\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{13\pi}{9}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$2\,B.\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{4\pi}{9}-\sin(-\frac{2\pi}{9})+\sin\frac{10\pi}{9}-\sin\frac{4\pi}{9}+\sin\frac{16\pi}{9}-\sin\frac{10\pi}{9}$$

$$B\sqrt{3}=\sin\frac{2\pi}{9}+\sin\frac{16\pi}{9}=2\,\sin\pi\,\cos(-\frac{7\pi}{9})=0$$



គេទាញបាន $B=0$

គេបាន $S=\frac{3}{4}B+\frac{1}{4}A=0+\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$ ។

ដូចនេះ $\cos^3\frac{\pi}{9}-\cos^3\frac{4\pi}{9}+\cos^3\frac{7\pi}{9}=\frac{3}{8}$ ។

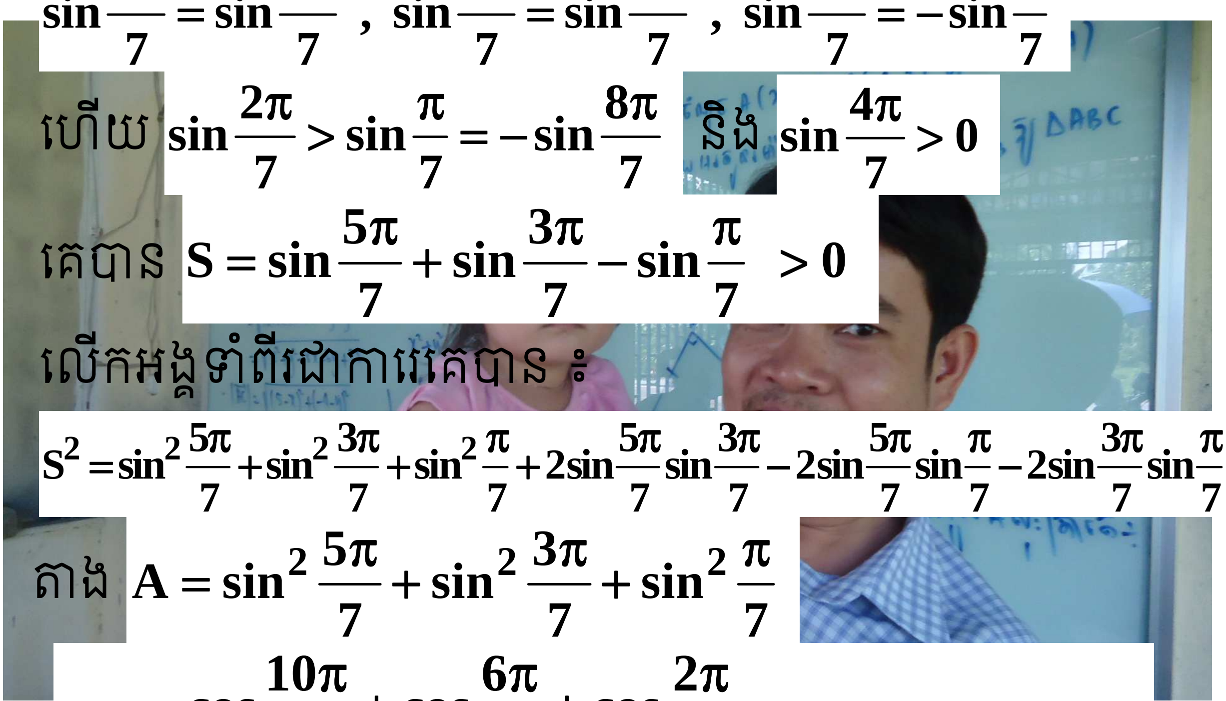
លំហាត់ទី៥០

ចូរស្រាយថា $\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

ដំណោះស្រាយ

តាង $S=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}$

$\sin\frac{2\pi}{7}=\sin\frac{5\pi}{7}$, $\sin\frac{4\pi}{7}=\sin\frac{3\pi}{7}$, $\sin\frac{8\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}$



ហើយ $\sin\frac{2\pi}{7}>\sin\frac{\pi}{7}=-\sin\frac{8\pi}{7}$ និង $\sin\frac{4\pi}{7}>0$

គេបាន $S=\sin\frac{5\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}>0$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន ៖

$$S^2=\sin^2\frac{5\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}+2\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}-2\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

តាង $A=\sin^2\frac{5\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}$

$$=\frac{3}{2}-\frac{\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}}{2}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left[\cos(\pi+\frac{3\pi}{7})+\cos(\pi-\frac{\pi}{7})+\cos(\pi-\frac{5\pi}{7})\right]$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{5\pi}{7}\right)$$

យក $B=-\cos\frac{5\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}$

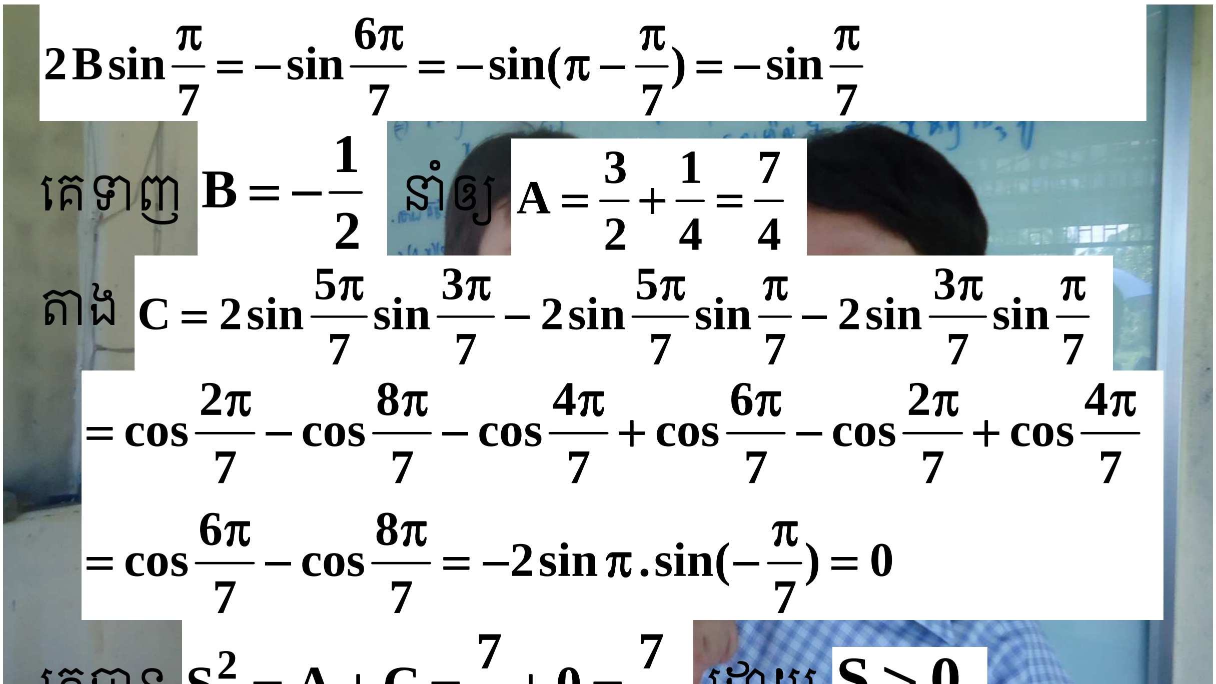
គុណអង្គទាំងពីរនឹង $2\sin\frac{\pi}{7}$ គេបាន ៖

$$2B\sin\frac{\pi}{7}=-2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

តាមរូបមន្ត $2\cos a\sin b=\sin(a+b)-\sin(a-b)$

$$2B\sin\frac{\pi}{7}=-2\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

$$2B\sin\frac{\pi}{7}=-(\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7})-(\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7})-\sin\frac{2\pi}{7}$$



$$2B\sin\frac{\pi}{7}=-\sin\frac{6\pi}{7}=-\sin(\pi-\frac{\pi}{7})=-\sin\frac{\pi}{7}$$

គេទាញ $B=-\frac{1}{2}$ នាំឲ្យ $A=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

តាង $C=2\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}-2\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}-2\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$

$$=\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{8\pi}{7}-\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}$$

$$=\cos\frac{6\pi}{7}-\cos\frac{8\pi}{7}=-2\sin\pi.\sin(-\frac{\pi}{7})=0$$

គេបាន $S^2=A+C=\frac{7}{4}+0=\frac{7}{4}$ ដោយ $S>0$

នោះ $S=\frac{\sqrt{7}}{2}$ ។

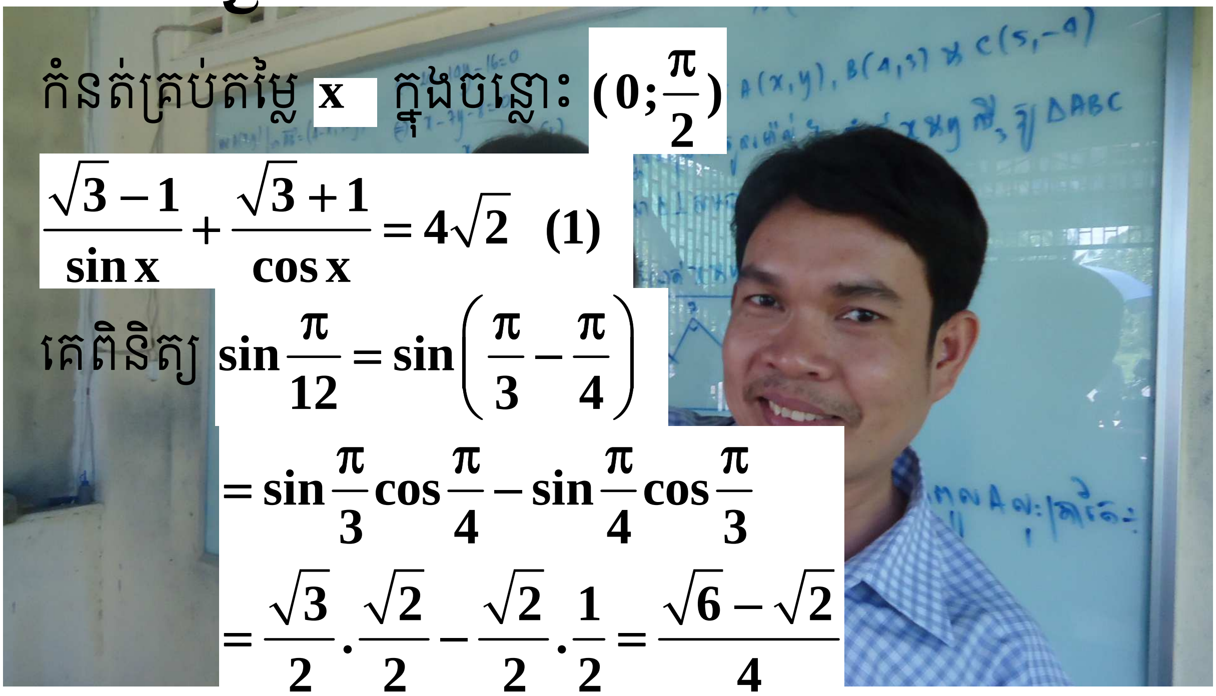
ដូចនេះ $\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៥១

ចូរកំនត់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងចន្លោះ $(0;\frac{\pi}{2})$ ដោយដឹងថា ៖

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2}$$

ដំណោះស្រាយ



កំនត់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងចន្លោះ $(0;\frac{\pi}{2})$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2} \quad (1)$$

គេពិនិត្យ $\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ហើយ $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{2}$$

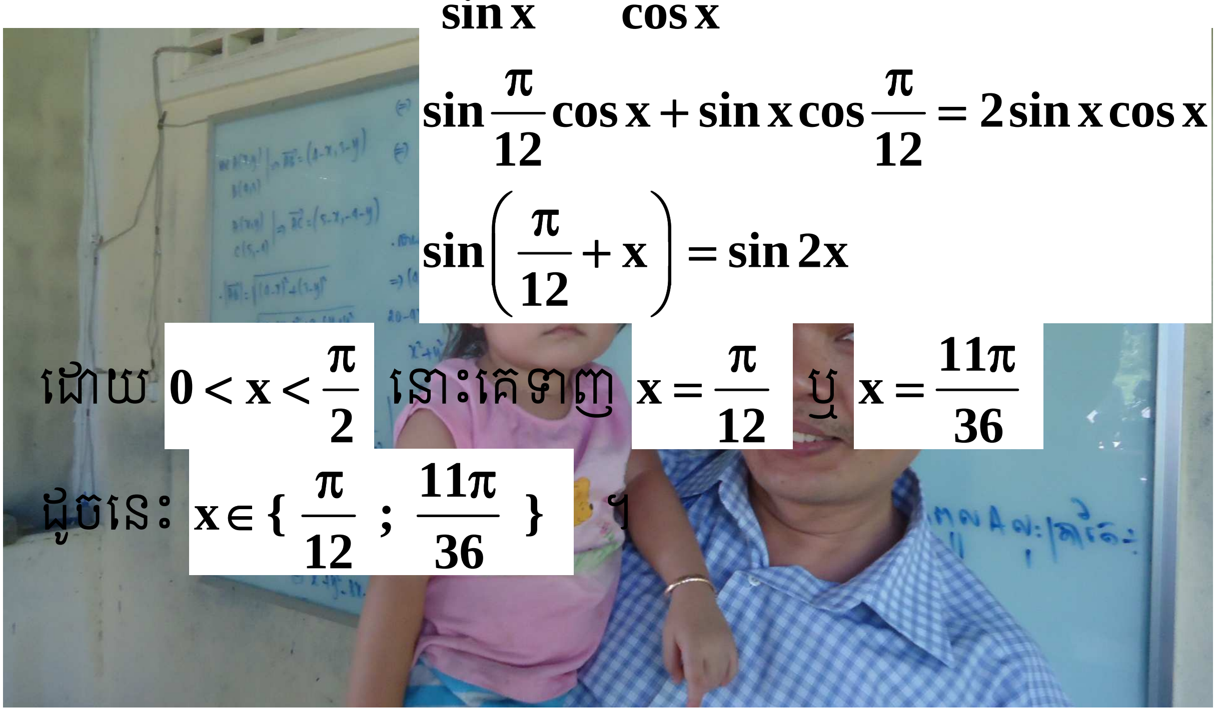
$$=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

សមីការ (1) អាចសរសេរទៅជា ៖

$$\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\sin x}+\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\cos x}=2$$

$$\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\sin x}+\frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\cos x}=2$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\sin x}+\frac{\cos\frac{\pi}{12}}{\cos x}=2$$



$$\sin\frac{\pi}{12}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{12}=2\sin x\cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}+x\right)=\sin 2x$$

ដោយ $0<x<\frac{\pi}{2}$ នោះគេទាញ $x=\frac{\pi}{12}$ ឬ $x=\frac{11\pi}{36}$

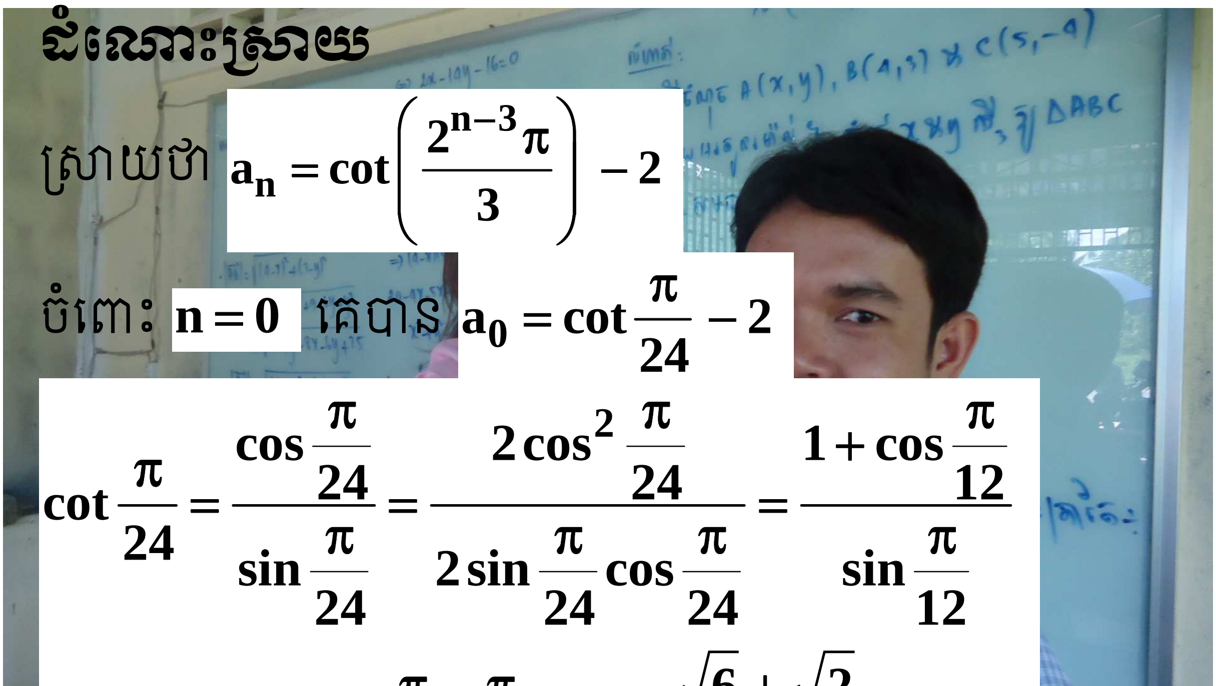
ដូចនេះ $x\in\{\frac{\pi}{12}\,;\,\frac{11\pi}{36}\}$ ។

លំហាត់ទី៥២

គេឲ្យ $a_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ និង $a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^2-5}{2(a_n+2)}$

គ្រប់ $n\geq 0$

ចូរស្រាយថា $a_n=\cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$



ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $a_n=\cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$

ចំពោះ $n=0$ គេបាន $a_0=\cot\dfrac{\pi}{24}-2$

$$\cot\frac{\pi}{24}=\frac{\cos\frac{\pi}{24}}{\sin\frac{\pi}{24}}=\frac{2\cos^2\frac{\pi}{24}}{2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}$$

$$=\frac{1+\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}=\frac{1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

$$=\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

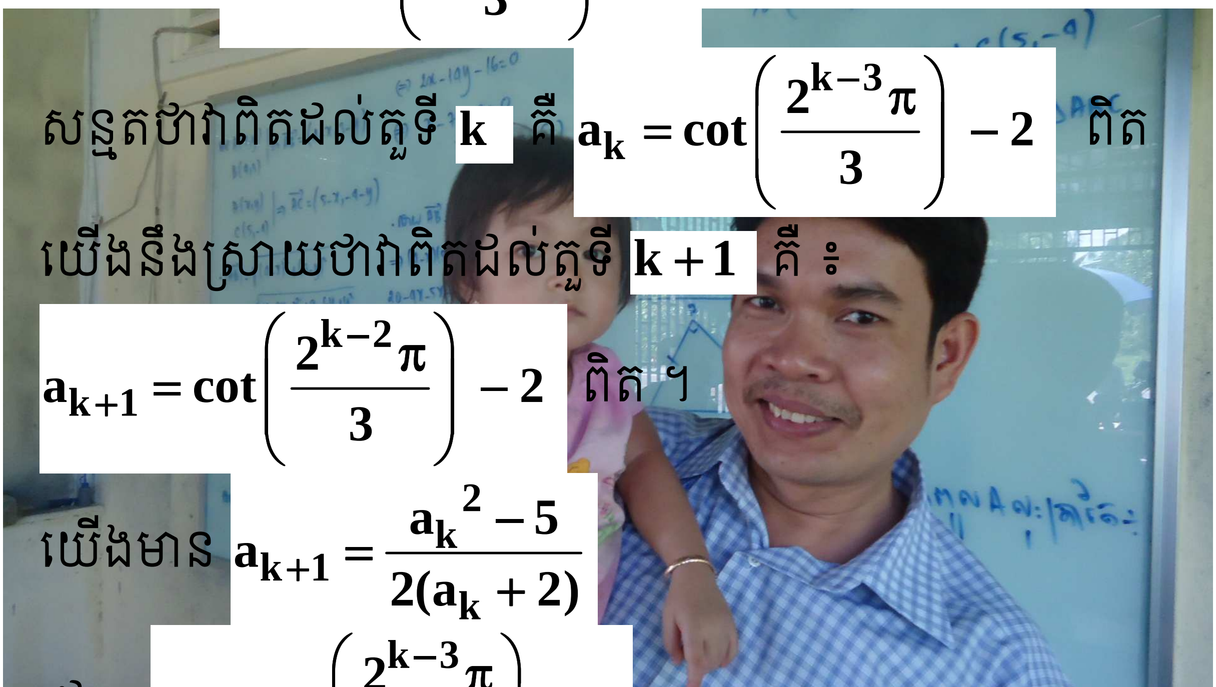
$$\cot\frac{\pi}{24}=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4}$$

$$=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})+8+4\sqrt{3}}{4}$$

$$=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

គេទាញ $a_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$

ហេតុនេះ $a_n=\cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ពិតចំពោះ $n=0$ ។



សន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $a_k=\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ ៖

$a_{k+1}=\cot\left(\frac{2^{k-2}\pi}{3}\right)-2$ ពិត ។

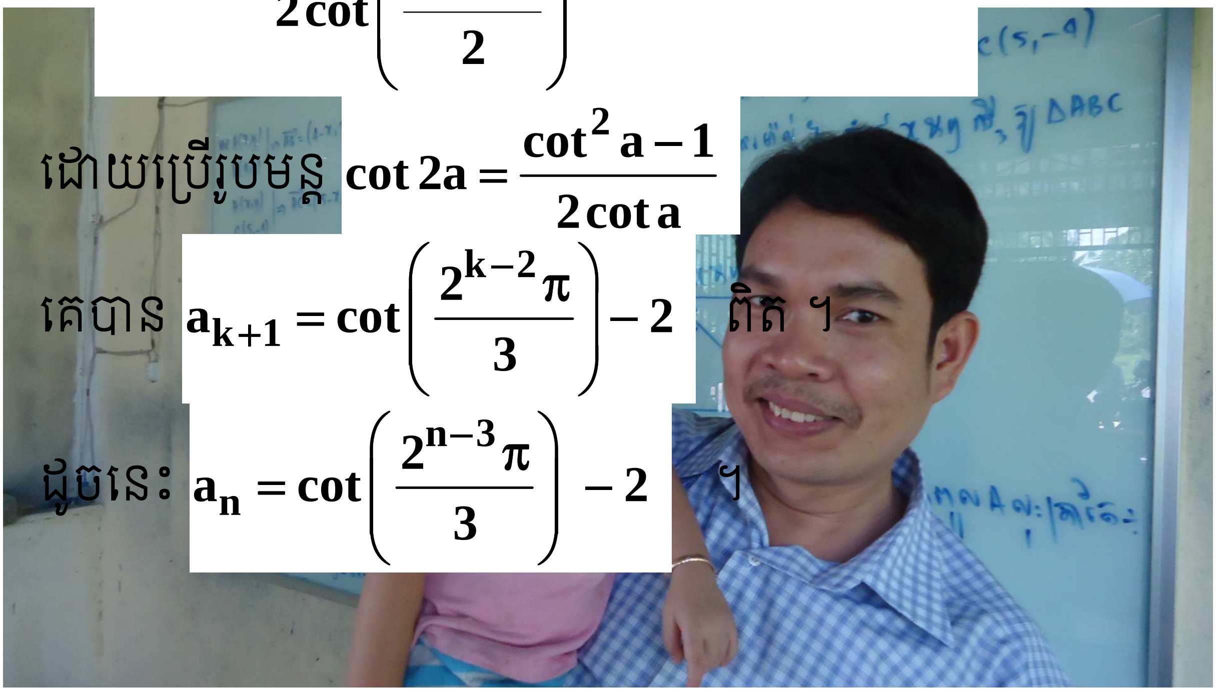
យើងមាន $a_{k+1}=\frac{{a_k}^2-5}{2(a_k+2)}$

ដោយ $a_k=\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2$

នោះ $$a_{k+1}=\frac{\left[\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2\right]^2-5}{2\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)}$$

$$a_{k+1}=\frac{\cot^2\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-4\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-1}{2\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)}$$

$$=\frac{\cot^2\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-1}{2\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{2}\right)}-2$$



ដោយប្រើរូបមន្ត $\cot 2a=\frac{\cot^2 a-1}{2\cot a}$

គេបាន $a_{k+1}=\cot\left(\frac{2^{k-2}\pi}{3}\right)-2$ ពិត ។

ដូចនេះ: $a_n=\cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ។

លំហាត់ទី៥៣

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (t_n) កំណត់ដោយ ៖

$t_1 = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ និង $t_{n+1} = \dfrac{3t_n - t_n^3}{1 - 3t_n^2}$ ដែល $n \in IN$

ក) ចូរស្រាយថា $t_1 = \tan\dfrac{\pi}{5}$ ។

ខ) គេតាង $t_n = \tan u_n$ ដែល $0 < u_n < \dfrac{\pi}{2}$ គ្រប់ $n \in IN$ ។

ចូរស្រាយថា (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។

គ)គណនា u_n និង t_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $t_1 = \tan\dfrac{\pi}{5}$

គេមាន $\dfrac{2\pi}{5} = \pi - \dfrac{3\pi}{5}$

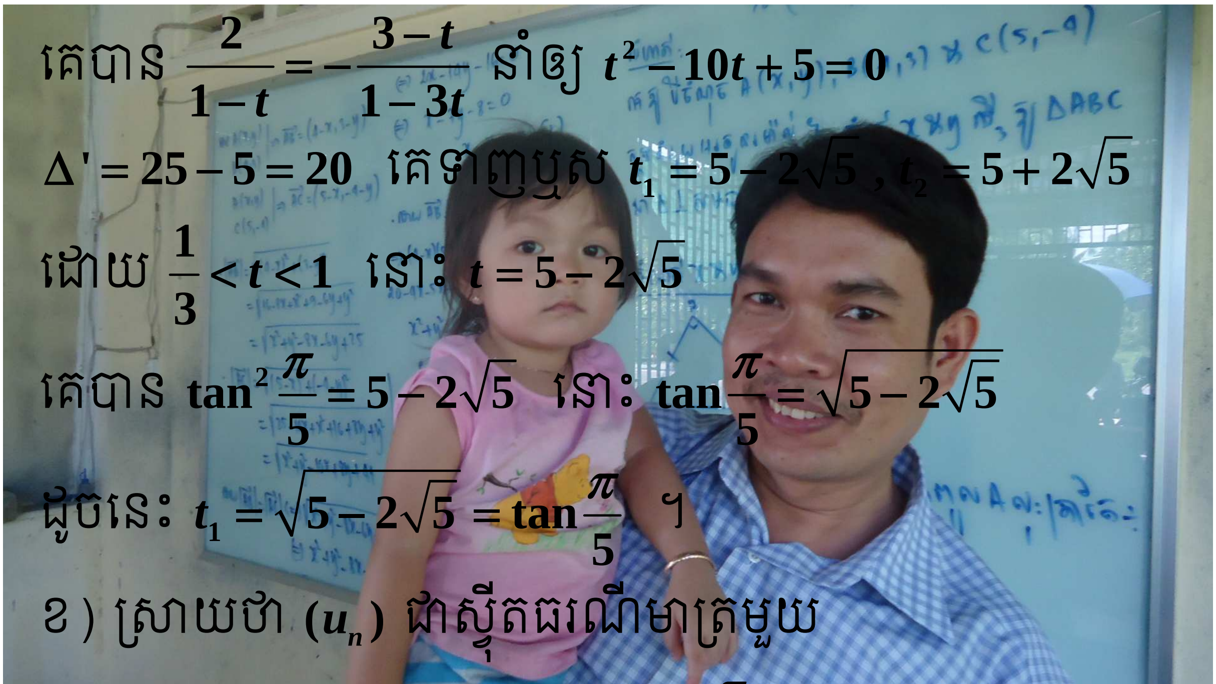
នោះ $\tan\dfrac{2\pi}{5} = \tan(\pi - \dfrac{3\pi}{5}) = -\tan\dfrac{3\pi}{5}$

ដោយ $\tan\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{2\tan\dfrac{\pi}{5}}{1 - \tan^2\dfrac{\pi}{5}}$ និង $\tan\dfrac{3\pi}{5} = \dfrac{3\tan\dfrac{\pi}{5} - \tan^3\dfrac{\pi}{5}}{1 - 3\tan^2\dfrac{\pi}{5}}$

គេបាន $\dfrac{2\tan\frac{\pi}{5}}{1-\tan^2\frac{\pi}{5}} = -\dfrac{3\tan\frac{\pi}{5}-\tan^3\frac{\pi}{5}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{5}}$

ឬ $\dfrac{2}{1-\tan^2\frac{\pi}{5}} = -\dfrac{3-\tan^2\frac{\pi}{5}}{1-3\tan^2\frac{\pi}{5}}$ តាង $t=\tan^2\dfrac{\pi}{5}$

ដោយ $\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{5}<\dfrac{\pi}{4}$ នោះ $\dfrac{1}{3}<t<1$



គេបាន $\dfrac{2}{1-t}=-\dfrac{3-t}{1-3t}$ នាំឲ្យ $t^2-10t+5=0$

$\Delta'=25-5=20$ គេទាញឫស $t_1=5-2\sqrt{5}$, $t_2=5+2\sqrt{5}$

ដោយ $\dfrac{1}{3}<t<1$ នោះ $t=5-2\sqrt{5}$

គេបាន $\tan^2\dfrac{\pi}{5}=5-2\sqrt{5}$ នោះ $\tan\dfrac{\pi}{5}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

ដូចនេះ $t_1=\sqrt{5-2\sqrt{5}}=\tan\dfrac{\pi}{5}$ ។

ខ) ស្រាយថា (u_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រមួយ

គេមាន $t_n=\tan u_n$ ដែល $0<u_n<\dfrac{\pi}{2}$ គ្រប់ $n\in IN$

គេបាន $t_{n+1}=\tan u_{n+1}$ ដោយ $t_{n+1}=\dfrac{3t_n-t_n^3}{1-3t_n^2}$

នោះ $\tan u_{n+1}=\dfrac{3\tan u_n-\tan^3 u_n}{1-3\tan^2 u_n}=\tan 3u_n$

គេទាញ $u_{n+1}=3u_n$ គ្រប់ $n\in IN$ ។

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=3$ ។

គ)គណនា u_n និង t_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

ដោយ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=3$ នោះគេបាន

$u_n=u_1\times q^{n-1}$ ដោយ $t_1=\tan u_1=\tan\frac{\pi}{5}$ នោះ $u_1=\frac{\pi}{5}$

ដូចនេះ $u_n=\frac{\pi}{5}\times 3^{n-1}$ និង $t_n=\tan\left(\frac{\pi}{5}\times 3^{n-1}\right)$ ។

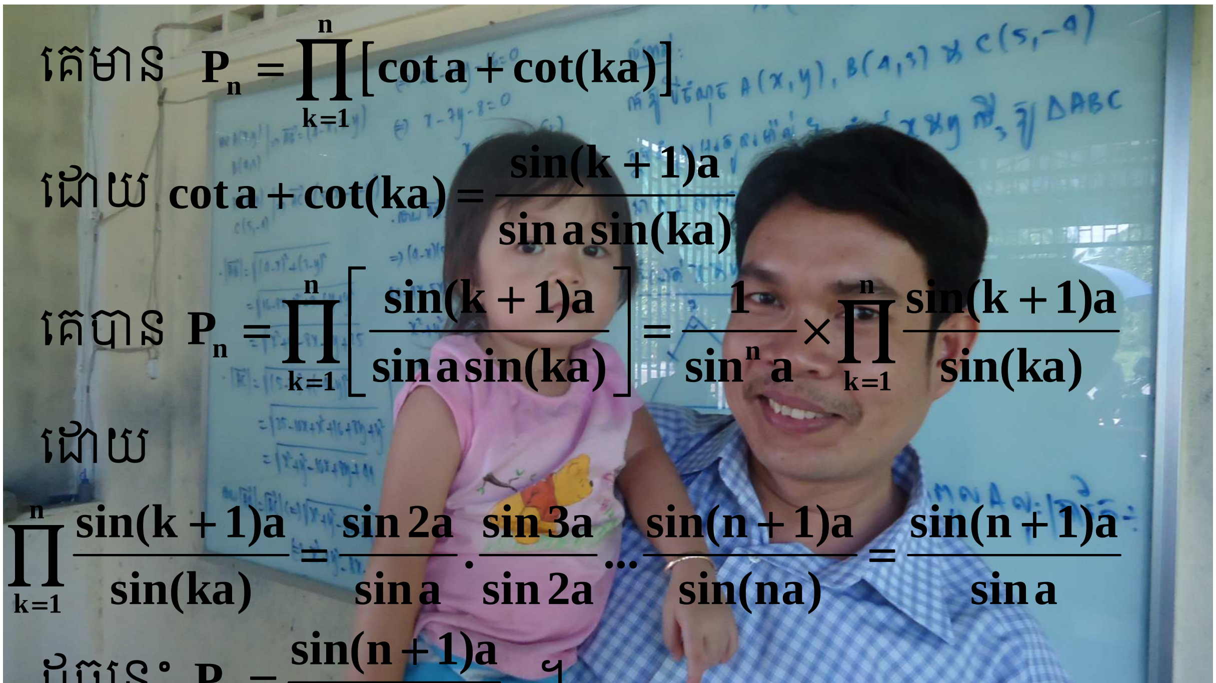
លំហាត់ទី៥៤

គេឲ្យ $P_n = (\cot a + \cot a)(\cot a + \cot 2a)...(\cot a + \cot(na))$

ចូរបង្ហាញថា $P_n = \dfrac{\sin(n+1)a}{\sin^{n+1} a}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $P_n = \dfrac{\sin(n+1)a}{\sin^{n+1} a}$



គេមាន $P_n = \prod_{k=1}^{n} [\cot a + \cot(ka)]$

ដោយ $\cot a + \cot(ka) = \dfrac{\sin(k+1)a}{\sin a \sin(ka)}$

គេបាន $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left[\dfrac{\sin(k+1)a}{\sin a \sin(ka)} \right] = \dfrac{1}{\sin^n a} \times \prod_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(k+1)a}{\sin(ka)}$

ដោយ

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin(k+1)a}{\sin(ka)} = \frac{\sin 2a}{\sin a} \cdot \frac{\sin 3a}{\sin 2a} \cdots \frac{\sin(n+1)a}{\sin(na)} = \frac{\sin(n+1)a}{\sin a}$$

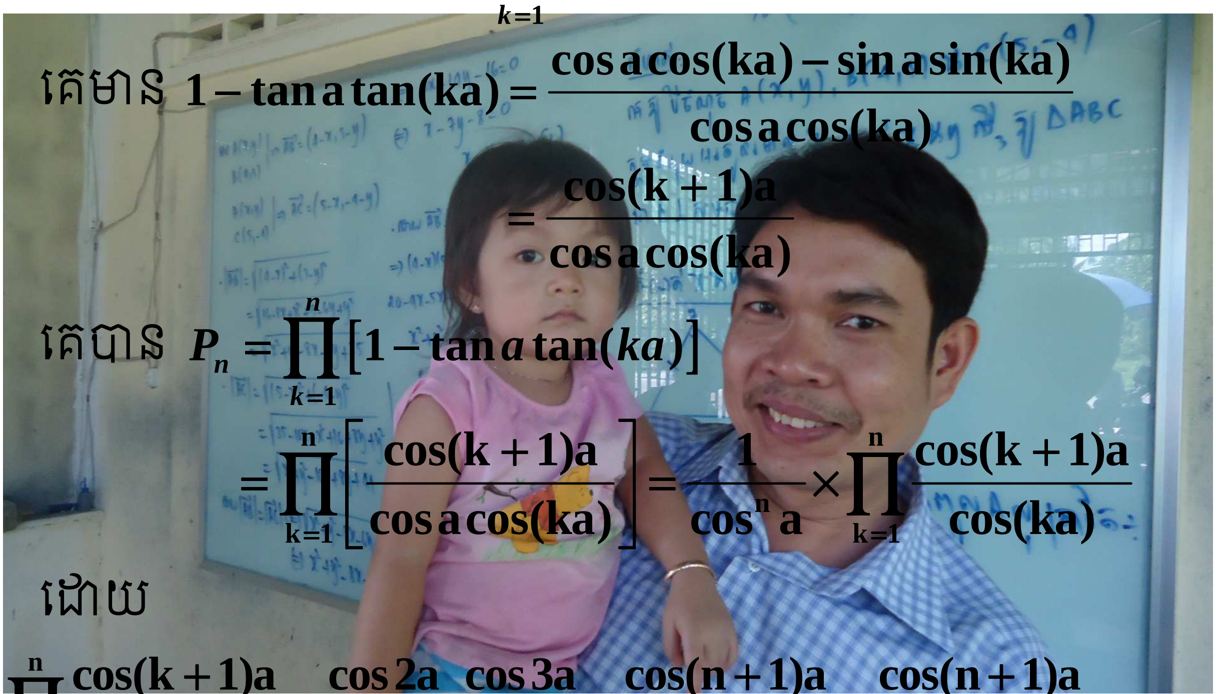
ដូចនេះ $P_n = \dfrac{\sin(n+1)a}{\sin^{n+1} a}$ ។

លំហាត់ទី៥៥

ចូរគណនាផលគុណ $P_n = \prod_{k=1}^{n} [1 - \tan a \tan(ka)]$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ $P_n = \prod_{k=1}^{n} [1 - \tan a \tan(ka)]$



គេមាន $1 - \tan a \tan(ka) = \dfrac{\cos a \cos(ka) - \sin a \sin(ka)}{\cos a \cos(ka)}$

$$= \frac{\cos(k+1)a}{\cos a \cos(ka)}$$

គេបាន $P_n = \prod_{k=1}^{n} [1 - \tan a \tan(ka)]$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{\cos(k+1)a}{\cos a \cos(ka)} \right] = \frac{1}{\cos^n a} \times \prod_{k=1}^{n} \frac{\cos(k+1)a}{\cos(ka)}$$

ដោយ

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{\cos(k+1)a}{\cos(ka)} = \frac{\cos 2a}{\cos a} \cdot \frac{\cos 3a}{\cos 2a} \dots \frac{\cos(n+1)a}{\cos(na)} = \frac{\cos(n+1)a}{\cos a}$$

ដូចនេះ $P_n = \dfrac{\cos(n+1)a}{\cos^{n+1} a}$ ។

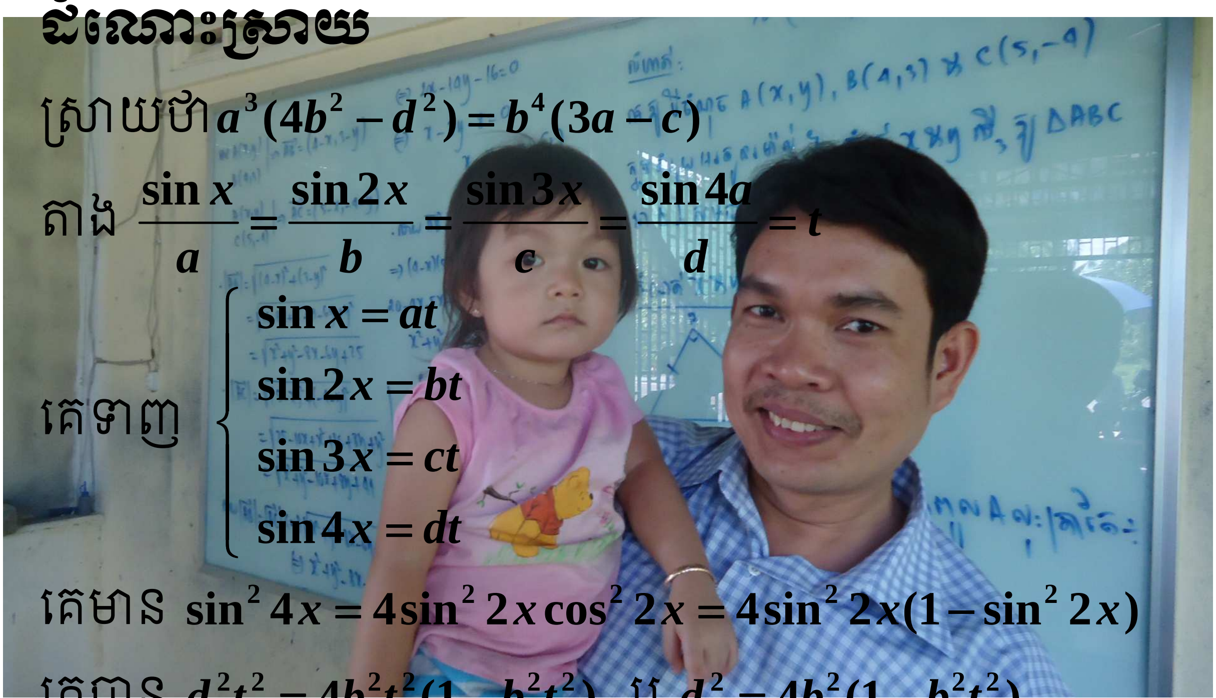
លំហាត់ទី៥៦

គេឲ្យ a,b,c,d,x ជាចំនួនពិតដោយដឹងថា $x \neq k\pi \ ,k \in \mathbb{Z}$

និង $\dfrac{\sin x}{a} = \dfrac{\sin 2x}{b} = \dfrac{\sin 3x}{c} = \dfrac{\sin 4x}{d}$ ។

ចូរស្រាយថា $a^3(4b^2 - d^2) = b^4(3a - c)$ ។

ដំណោះស្រាយ



ស្រាយថា $a^3(4b^2 - d^2) = b^4(3a - c)$

តាង $\dfrac{\sin x}{a} = \dfrac{\sin 2x}{b} = \dfrac{\sin 3x}{c} = \dfrac{\sin 4a}{d} = t$

គេទាញ $\begin{cases} \sin x = at \\ \sin 2x = bt \\ \sin 3x = ct \\ \sin 4x = dt \end{cases}$

គេមាន $\sin^2 4x = 4\sin^2 2x \cos^2 2x = 4\sin^2 2x(1 - \sin^2 2x)$

គេបាន $d^2t^2 = 4b^2t^2(1 - b^2t^2)$ ឬ $d^2 = 4b^2(1 - b^2t^2)$

គេទាញ $4b^2 - d^2 = 4b^4t^2$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = \sin x(3 - 4\sin^2 x)$

គេបាន $ct = at(3 - 4a^2t^2)$ ឬ $c = a(3 - 4a^2t^2)$

គេទាញបាន $3a - c = 4a^3t^2$ (2)

ចែកសមីការ (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

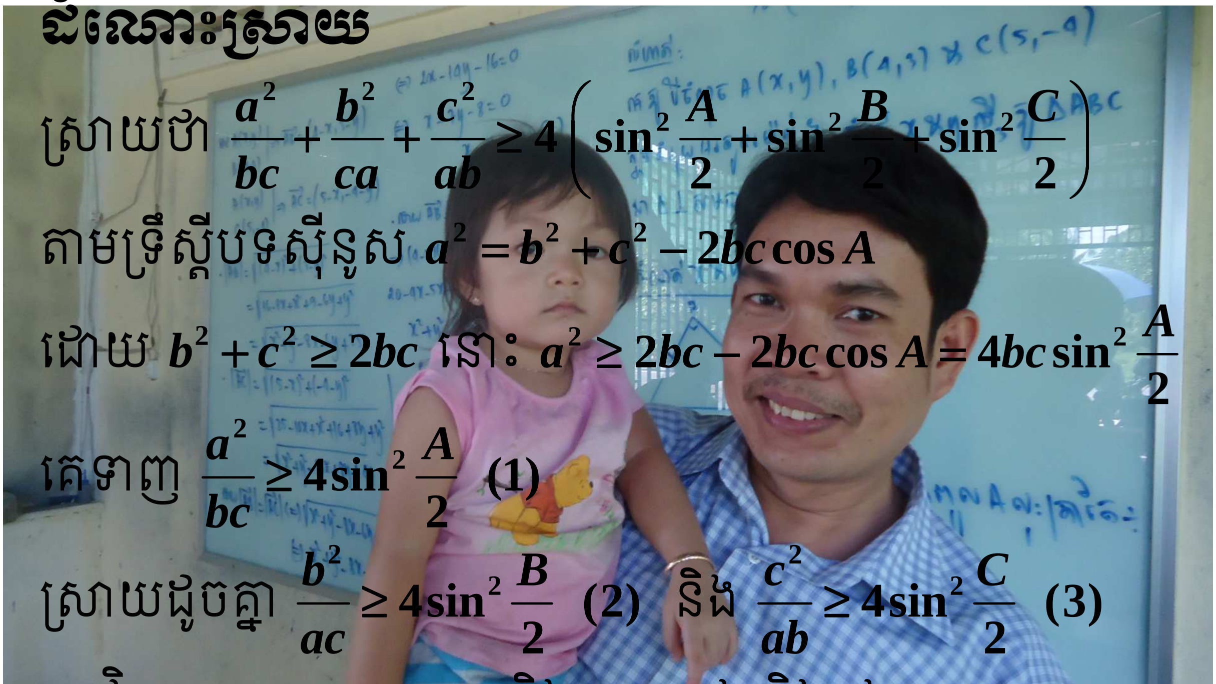
$\dfrac{4b^2-d^2}{3a-c}=\dfrac{b^4}{a^3}$ នាំឲ្យ $a^3(4b^2-d^2)=b^4(3a-c)$ ។

ដូចនេះ $a^3(4b^2-d^2)=b^4(3a-c)$ ។

លំហាត់ទី៥៧

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geq 4\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)$



ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geq 4\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

ដោយ $b^2+c^2\geq 2bc$ នោះ $a^2\geq 2bc-2bc\cos A=4bc\sin^2\frac{A}{2}$

គេទាញ $\frac{a^2}{bc}\geq 4\sin^2\frac{A}{2}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នា $\frac{b^2}{ac}\geq 4\sin^2\frac{B}{2}$ (2) និង $\frac{c^2}{ab}\geq 4\sin^2\frac{C}{2}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) , (2) និង (3) អង្គ និងអង្គគេបាន ៖

$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geq 4\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)$ ។

លំហាត់ទី៥៨

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos B}{b^3}+\frac{\cos C}{c^3}\ge\frac{3}{2abc}$ ។ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos B}{b^3}+\frac{\cos C}{c^3}\ge\frac{3}{2abc}$ ។ ។

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

គេទាញបាន $\frac{2bc\cos A}{a^2}+1=\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{2bc}{a^2}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរ

$\frac{2ac\cos B}{b^2}+1\ge\frac{2ac}{b^2}$ (2) និង $\frac{2ab\cos C}{c^2}+1\ge\frac{2ab}{c^2}$ (3)

បូក (1),(2)និង(3)គេបាន ៖

$$\frac{2bc\cos A}{a^2}+\frac{2ca\cos B}{b^2}+\frac{2ab\cos C}{c^2}+3\ge2\left(\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}\right)\ge6$$

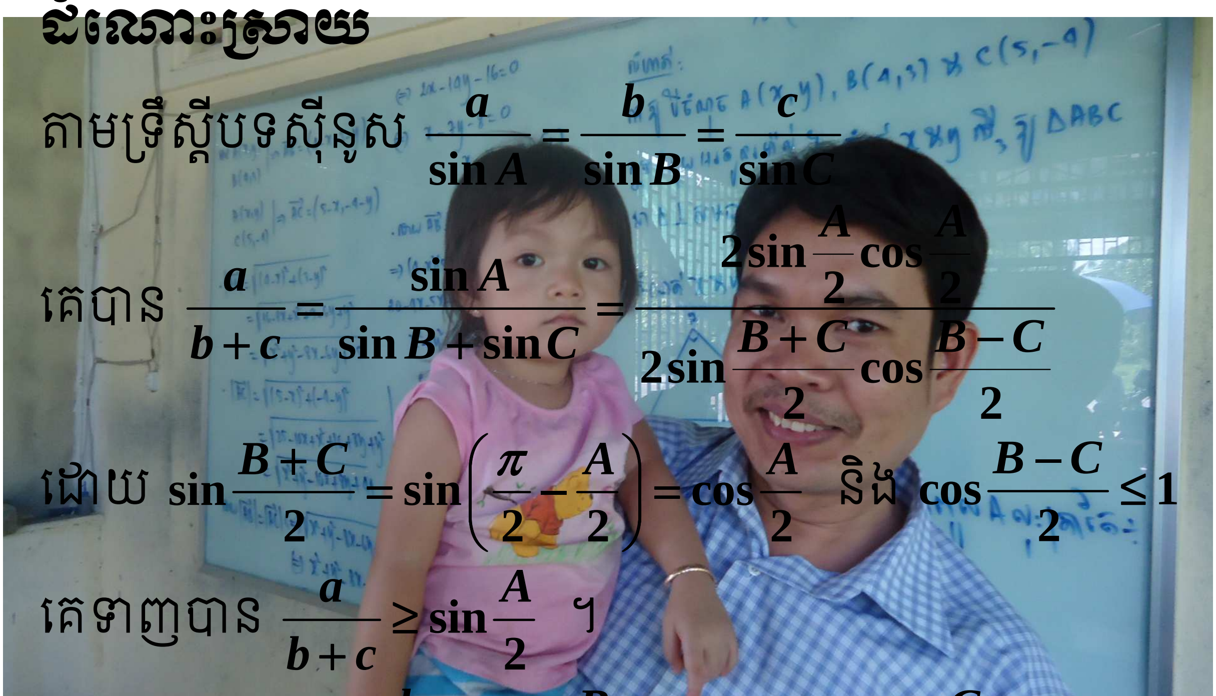
គេទាញ $\frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos B}{b^3}+\frac{\cos C}{c^3}\ge\frac{3}{2abc}$ ។

លំហាត់ទី៥៩

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$

ដំណោះស្រាយ



តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

គេបាន $\frac{a}{b+c}=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$

ដោយ $\sin\frac{B+C}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$ និង $\cos\frac{B-C}{2}\le 1$

គេទាញបាន $\frac{a}{b+c}\ge\sin\frac{A}{2}$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\frac{b}{c+a}\ge\sin\frac{B}{2}$ និង $\frac{c}{a+b}\ge\sin\frac{C}{2}$ ។

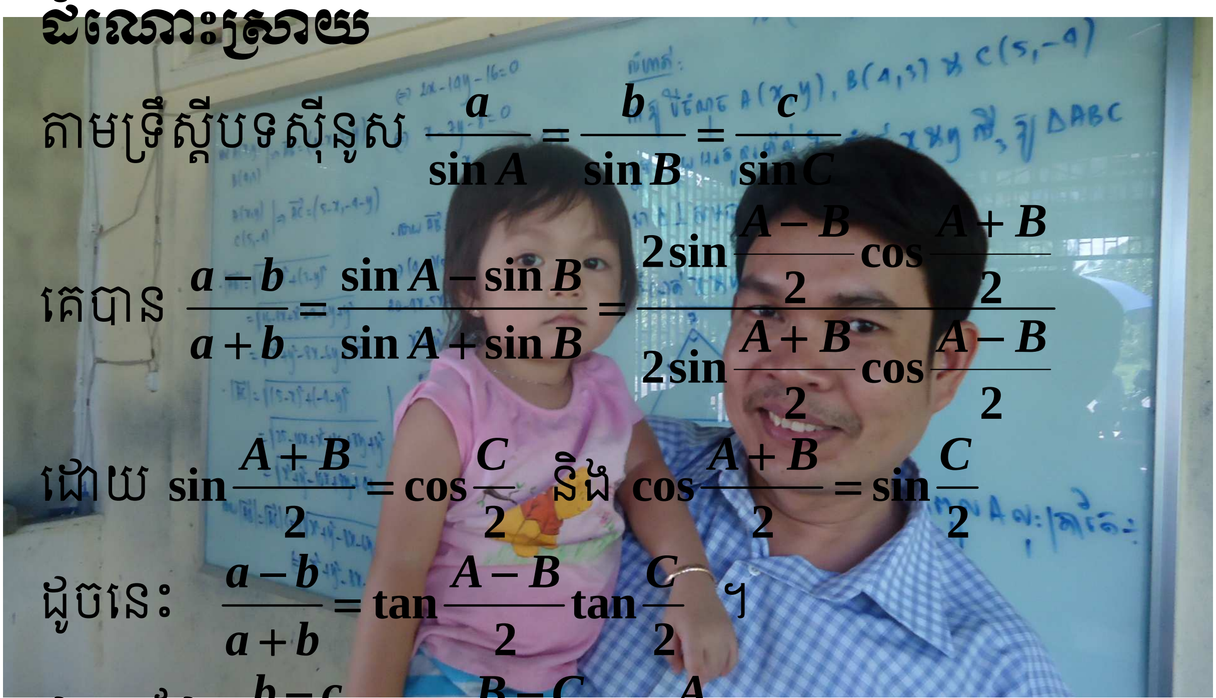
ដូចនេះ $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ ពិត

លំហាត់ទី៦០

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2}$ រួចសរសេររូបមន្តពីរទៀតដែលស្រដៀងគ្នានេះ ។

ដំណោះស្រាយ



តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

គេបាន $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$

ដោយ $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$ និង $\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$

ដូចនេះ $\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2}$ ។

ដូចគ្នាដែរ $\frac{b-c}{b+c}=\tan\frac{B-C}{2}\tan\frac{A}{2}$

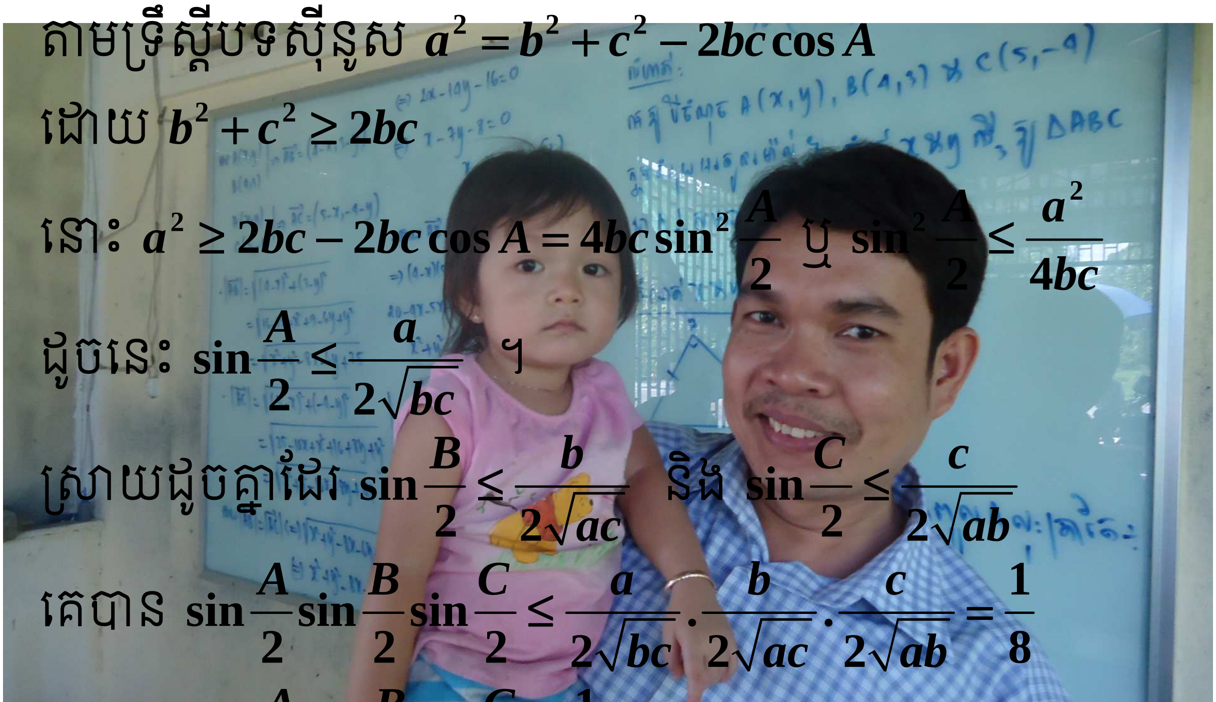
និង $\frac{c-a}{c+a}=\tan\frac{C-A}{2}\tan\frac{B}{2}$ ។

លំហាត់ទី៦១

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយថា $\sin\frac{A}{2}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}}$ រួចទាញថា $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$

ដំណោះស្រាយ



តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

ដោយ $b^2+c^2\ge 2bc$

នោះ $a^2\ge 2bc-2bc\cos A=4bc\sin^2\frac{A}{2}$ ឬ $\sin^2\frac{A}{2}\le\frac{a^2}{4bc}$

ដូចនេះ $\sin\frac{A}{2}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}}$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\sin\frac{B}{2}\le\frac{b}{2\sqrt{ac}}$ និង $\sin\frac{C}{2}\le\frac{c}{2\sqrt{ab}}$

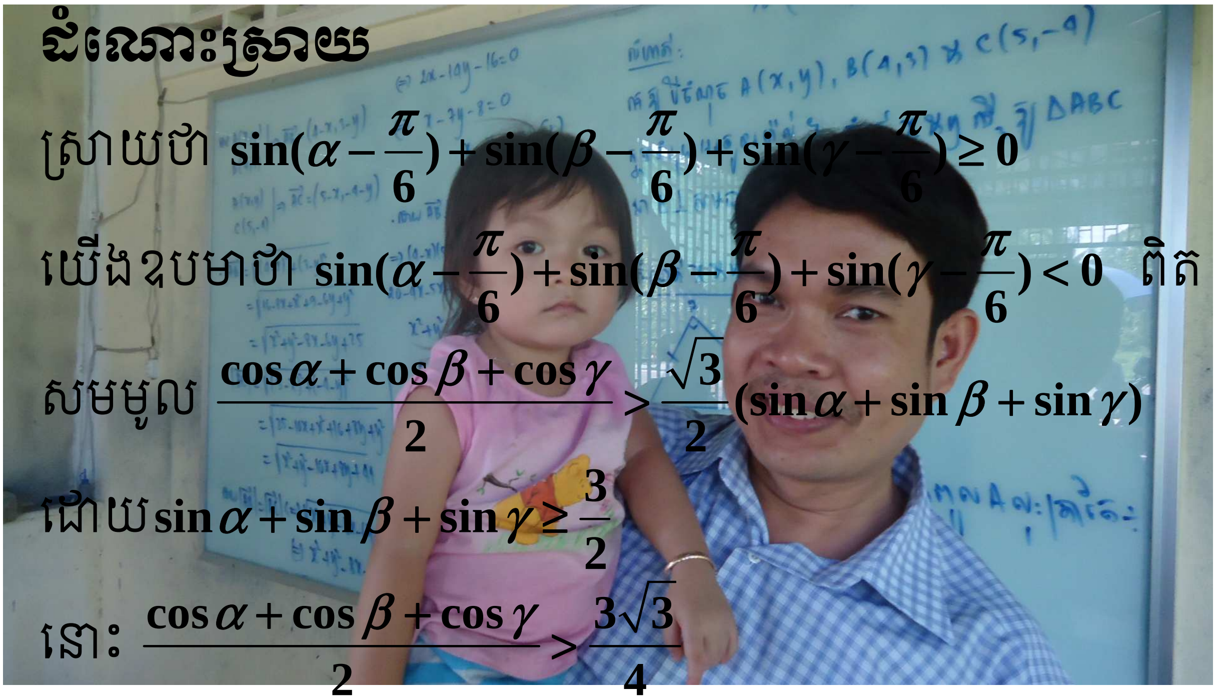
គេបាន $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}}\cdot\frac{b}{2\sqrt{ac}}\cdot\frac{c}{2\sqrt{ab}}=\frac{1}{8}$

ដូចនេះ $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$ ។

លំហាត់ទី៦២

គេឲ្យ α ,β ,γ ជាបីចំនួនពិតដែល $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \geq \frac{3}{2}$

ចូរស្រាយថា $\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})+\sin(\beta-\frac{\pi}{6})+\sin(\gamma-\frac{\pi}{6}) \geq 0$ ។



ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})+\sin(\beta-\frac{\pi}{6})+\sin(\gamma-\frac{\pi}{6}) \geq 0$

យើងឧបមាថា $\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})+\sin(\beta-\frac{\pi}{6})+\sin(\gamma-\frac{\pi}{6}) < 0$ ពិត

សមមូល $\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$

ដោយ $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \geq \frac{3}{2}$

នោះ $\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{2} > \frac{3\sqrt{3}}{4}$

គេទាញ $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma > \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ។

ពិនិត្យ $T = \sin(\alpha+\frac{\pi}{3})+\sin(\beta+\frac{\pi}{3})+\sin(\gamma+\frac{\pi}{3})$

$$= \frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{2} + \frac{\sqrt{3}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)}{2}$$

ដោយ $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \geq \frac{3}{2}$ និង

$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma > \frac{3\sqrt{3}}{2}$

គេទាញ $T > \frac{3}{4}+\frac{9}{4}=3$ មិនពិត ព្រោះគ្រប់ចំនួនពិត α ,β ,γ គេមាន

$$T=\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})+\sin(\beta+\frac{\pi}{3})+\sin(\gamma+\frac{\pi}{3}) \leq 1+1+1=3$$

នាំឲ្យការឧបមាខាងលើខុស ។

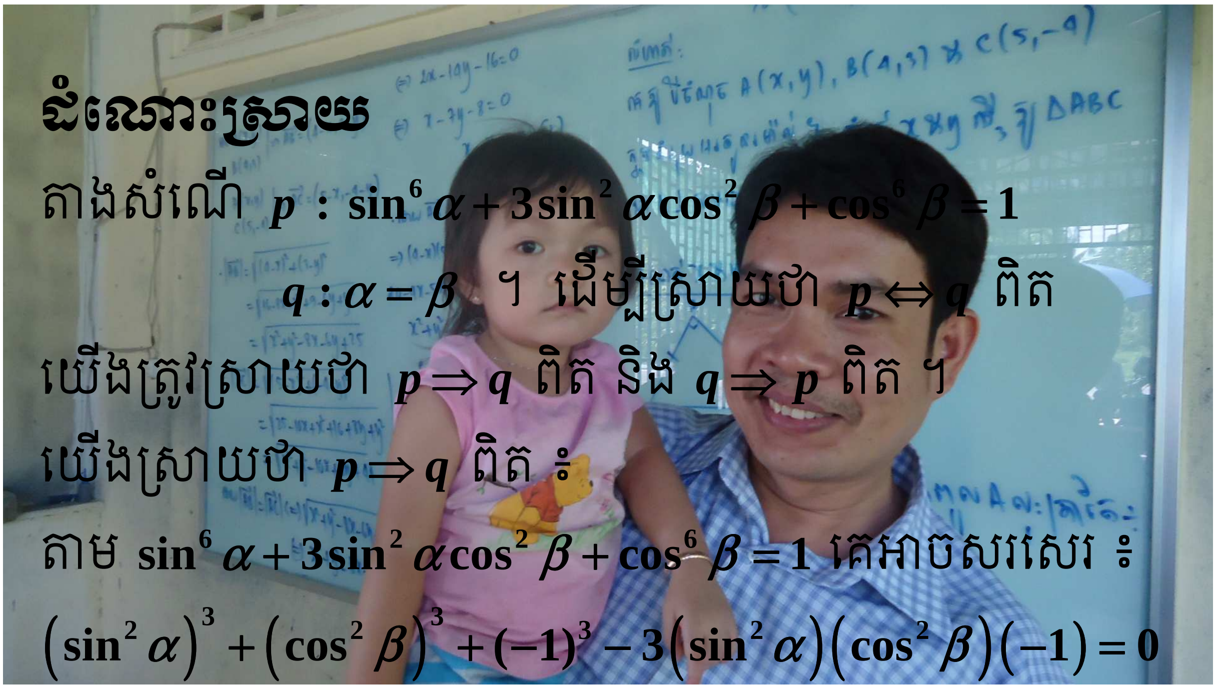
ដូចនេះ $\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})+\sin(\beta-\frac{\pi}{6})+\sin(\gamma-\frac{\pi}{6}) \geq 0$ ។

លំហាត់ទី៦៣

គេឲ្យ α និង β ជាពីរចំនួនពិតនៃចន្លោះ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^6\beta=1$

លុះត្រាតែ $\alpha=\beta$ ។



ដំណោះស្រាយ

តាងសំណើ $p:\ \sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^6\beta=1$

$q:\alpha=\beta$ ។ ដើម្បីស្រាយថា $p\Leftrightarrow q$ ពិត

យើងត្រូវស្រាយថា $p\Rightarrow q$ ពិត និង $q\Rightarrow p$ ពិត ។

យើងស្រាយថា $p\Rightarrow q$ ពិត ៖

តាម $\sin^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^6\beta=1$ គេអាចសរសេរ ៖

$$\left(\sin^2\alpha\right)^3+\left(\cos^2\beta\right)^3+(-1)^3-3\left(\sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\beta\right)(-1)=0$$

ដោយប្រើសមភាព ៖

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

បើគេយក $a=\sin^2\alpha$, $b=\cos^2\beta$, $c=-1$ នោះគេបាន ៖

$$\left[\begin{array}{ll} a+b+c=0 & (1) \\ (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 & (2) \end{array}\right.$$

តាម (2) គេទាញ $a=b=c$

ឬ $\sin^2\alpha = \cos^2\beta = -1$ (មិនអាច)

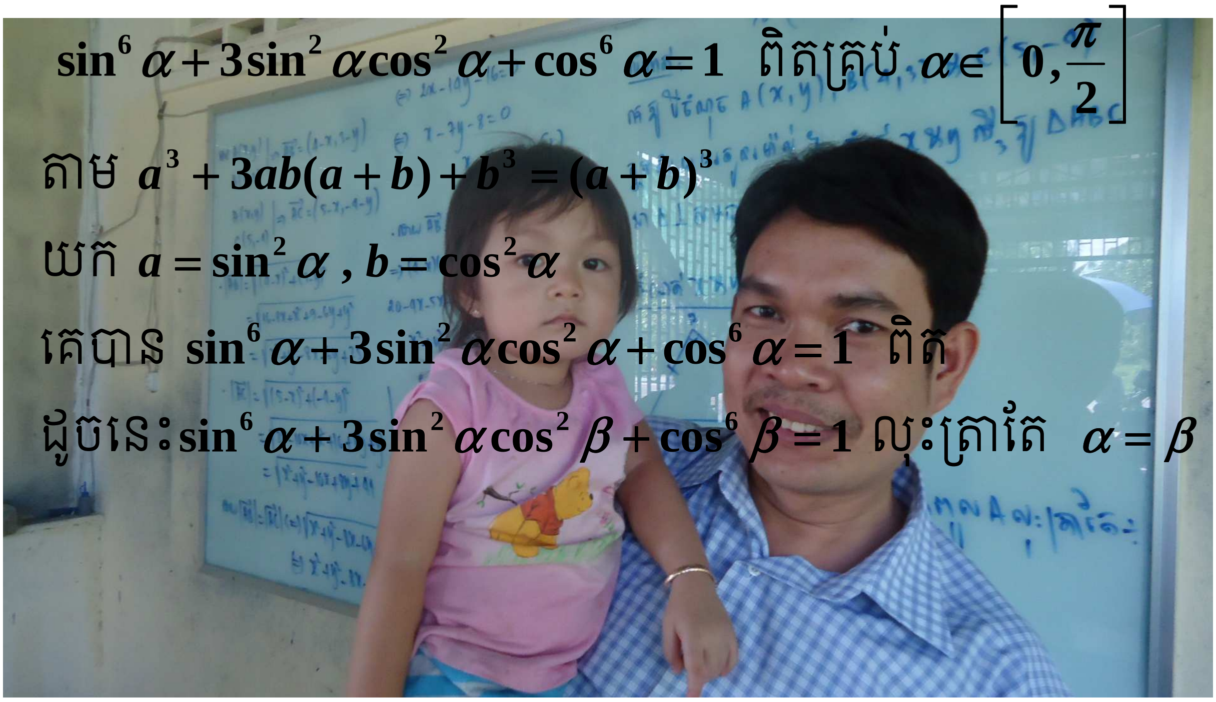
តាម(1)គេបាន$\sin^2\alpha + \cos^2\beta - 1 = 0$

ឬ$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\beta = \sin^2\beta$

ដោយ $\alpha, \beta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ នោះ $\alpha = \beta$ ។

យើងស្រាយថា $q \Rightarrow p$ ពិត ៖

បើ $\alpha = \beta$ នោះយើងត្រូវស្រាយថា ៖



$\sin^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^6\alpha = 1$ ពិតគ្រប់ $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

តាម $a^3 + 3ab(a+b) + b^3 = (a+b)^3$

យក $a = \sin^2\alpha$, $b = \cos^2\alpha$

គេបាន $\sin^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^6\alpha = 1$ ពិត

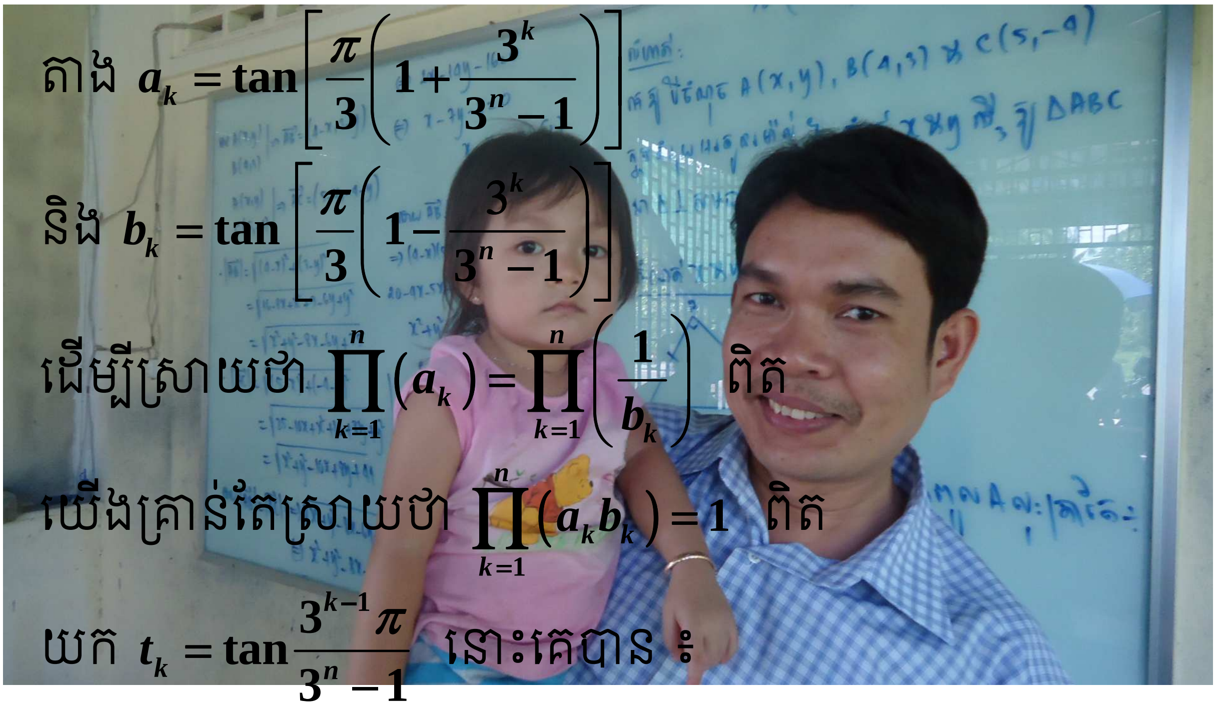
ដូចនេះ$\sin^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^6\beta = 1$ លុះត្រាតែ $\alpha = \beta$

លំហាត់ទី៦៤ (APMC 1982)

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\prod_{k=1}^{n}\tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]=\prod_{k=1}^{n}\cot\left[\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]$$

ដំណោះស្រាយ



តាង $a_k=\tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]$

និង $b_k=\tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]$

ដើម្បីស្រាយថា $\prod_{k=1}^{n}(a_k)=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{b_k}\right)$ ពិត

យើងគ្រាន់តែស្រាយថា $\prod_{k=1}^{n}(a_kb_k)=1$ ពិត

យក $t_k=\tan\frac{3^{k-1}\pi}{3^n-1}$ នោះគេបាន ៖

$$a_k=\tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3^{k-1}\pi}{3^n-1}\right)=\frac{\sqrt{3}+t_k}{1-\sqrt{3}t_k}$$

និង $$b_k=\tan\left[\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3^k}{3^n-1}\right)\right]=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3^{k-1}\pi}{3^n-1}\right)=\frac{\sqrt{3}-t_k}{1+\sqrt{3}t_k}$$

គេបាន $$a_kb_k=\frac{3-t_k^{\ 2}}{1-3t_k^{\ 2}}=\frac{1}{t_k}\times\frac{3t_k-t_k^3}{1-3t_k^{\ 2}}=\frac{t_{k+1}}{t_k}$$

ព្រោះតាមរូបមន្ត $\tan 3\varphi = \dfrac{3\tan\varphi - \tan^3\varphi}{1-3\tan^2\varphi}$

គេបាន $\dfrac{3t_k - t_k^3}{1-3t_k^{\ 2}} = t_{k+1}$ ។

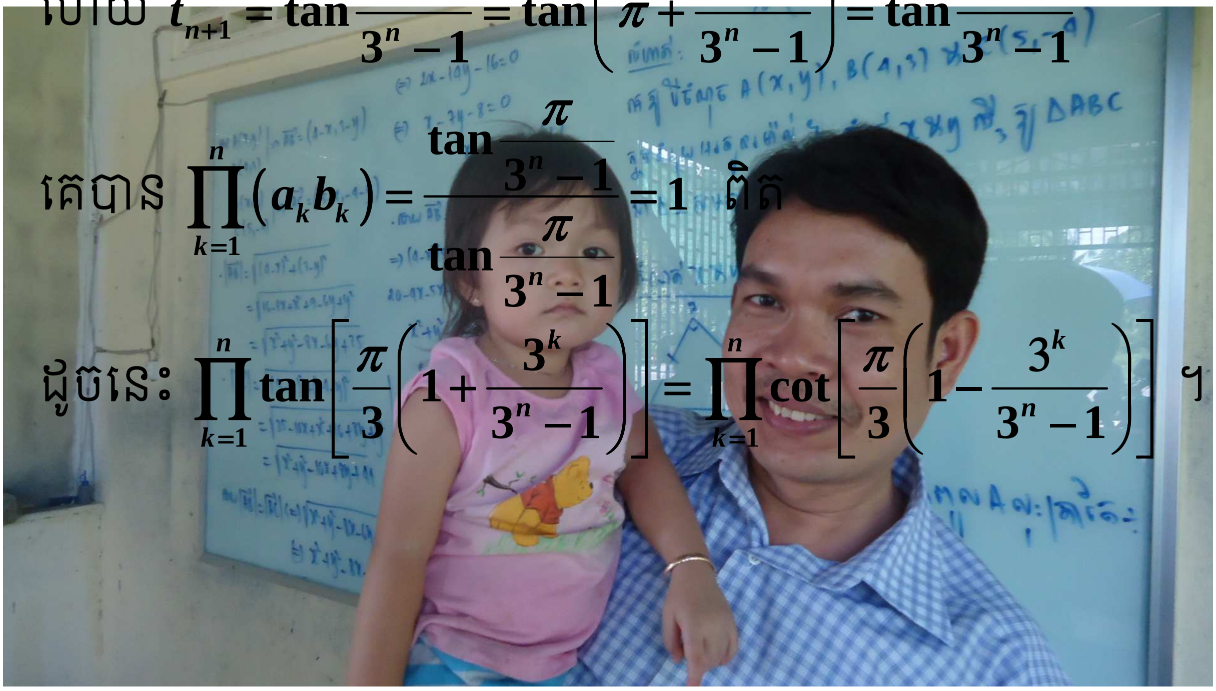
ហេតុនេះ $\prod_{k=1}^{n}(a_k b_k) = \prod_{k=1}^{n}\dfrac{t_{k+1}}{t_k} = \dfrac{t_2}{t_1}.\dfrac{t_3}{t_2}...\dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \dfrac{t_{n+1}}{t_1}$

ដោយ $t_k = \tan\dfrac{3^{k-1}\pi}{3^n-1}$ នោះ $t_1 = \tan\dfrac{\pi}{3^n-1}$

ហើយ $t_{n+1} = \tan\dfrac{3^n\pi}{3^n-1} = \tan\left(\pi + \dfrac{\pi}{3^n-1}\right) = \tan\dfrac{\pi}{3^n-1}$

គេបាន $\prod_{k=1}^{n}(a_k b_k) = \dfrac{\tan\dfrac{\pi}{3^n-1}}{\tan\dfrac{\pi}{3^n-1}} = 1$ ពិត

ដូចនេះ $\prod_{k=1}^{n}\tan\left[\dfrac{\pi}{3}\left(1+\dfrac{3^k}{3^n-1}\right)\right] = \prod_{k=1}^{n}\cot\left[\dfrac{\pi}{3}\left(1-\dfrac{3^k}{3^n-1}\right)\right]$ ។

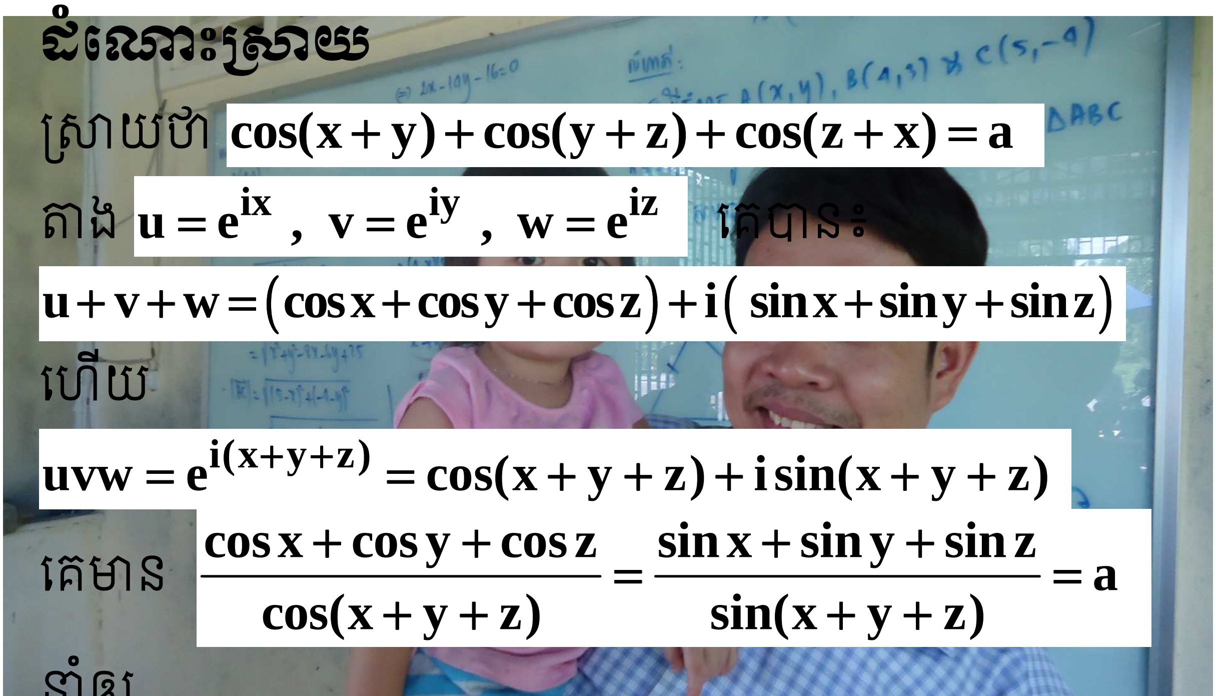


លំហាត់ទី៦៥

គេដឹងថា

$$\frac{\cos x+\cos y+\cos z}{\cos(x+y+z)}=\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\sin(x+y+z)}=a$$

ចូរស្រាយថា $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$



ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$

តាង $u=e^{ix}\ ,\ v=e^{iy}\ ,\ w=e^{iz}$ គេបាន៖

$$u+v+w=\left(\cos x+\cos y+\cos z\right)+i\left(\sin x+\sin y+\sin z\right)$$

ហើយ

$$uvw=e^{i(x+y+z)}=\cos(x+y+z)+i\sin(x+y+z)$$

គេមាន $\dfrac{\cos x+\cos y+\cos z}{\cos(x+y+z)}=\dfrac{\sin x+\sin y+\sin z}{\sin(x+y+z)}=a$

នាំឲ្យ

$$\frac{(\cos x+\cos y+\cos z)+i(\sin x+\sin y+\sin z)}{\cos(x+y+z)+i\cos(x+y+z)}=a$$

$$\frac{u+v+w}{uvw}=a$$

$$\frac{1}{vw}+\frac{1}{uw}+\frac{1}{uv}=a$$

$$e^{-i(y+z)}+e^{-i(x+z)}+e^{-i(x+y)}=a$$

តាមសមភាពនេះគេទាញបាន ៖

$\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$

និង $\sin(x+y)+\sin(y+z)+\sin(z+x)=0$

ដូចនេះ $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$ ។

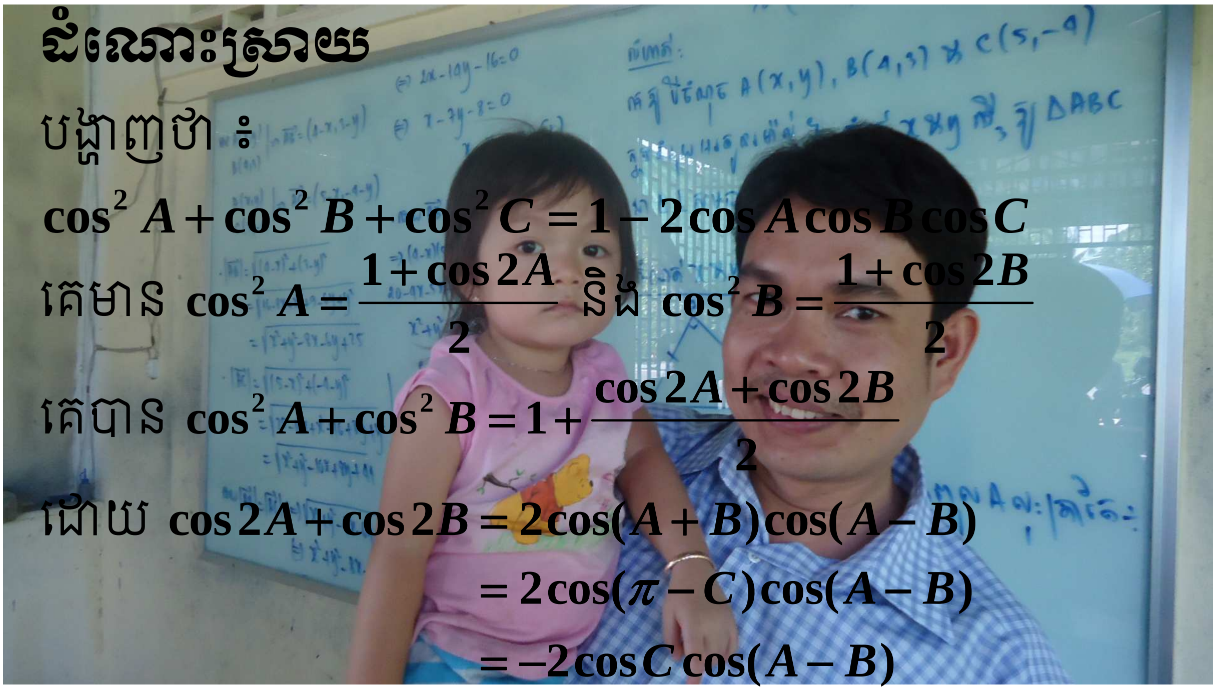
លំហាត់ទី៦៦ (MOSP 2000)

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុង A,B,C ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$$

រួចទាញថាបើ A,B,C ជាមុំស្រួចនោះ គេបាន

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C>2$ ។



ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ៖

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$$

គេមាន $\cos^2 A=\dfrac{1+\cos 2A}{2}$ និង $\cos^2 B=\dfrac{1+\cos 2B}{2}$

គេបាន $\cos^2 A+\cos^2 B=1+\dfrac{\cos 2A+\cos 2B}{2}$

ដោយ $\cos 2A+\cos 2B=2\cos(A+B)\cos(A-B)$

$$=2\cos(\pi-C)\cos(A-B)$$

$$=-2\cos C\cos(A-B)$$

នោះ $\cos^2 A+\cos^2 B=1-\cos C\cos(A-B)$

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-\cos C\cos(A-B)+\cos^2 C$$

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-\cos C\left[\cos(A-B)-\cos C\right]$$

$$=1-\cos C\left[\cos(A-B)+\cos(A+B)\right]$$

$$=1-2\cos A\cos B\cos C$$

ដូចនេះ $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$

ទាញថាបើ A,B,C ជាមុំស្រួចនោះ

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C>2$

គេមាន $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$

តាមរូបមន្ត $\cos^2\varphi=1-\sin^2\varphi$ នោះគេបាន ៖

$3-(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)=1-2\cos A\cos B\cos C$

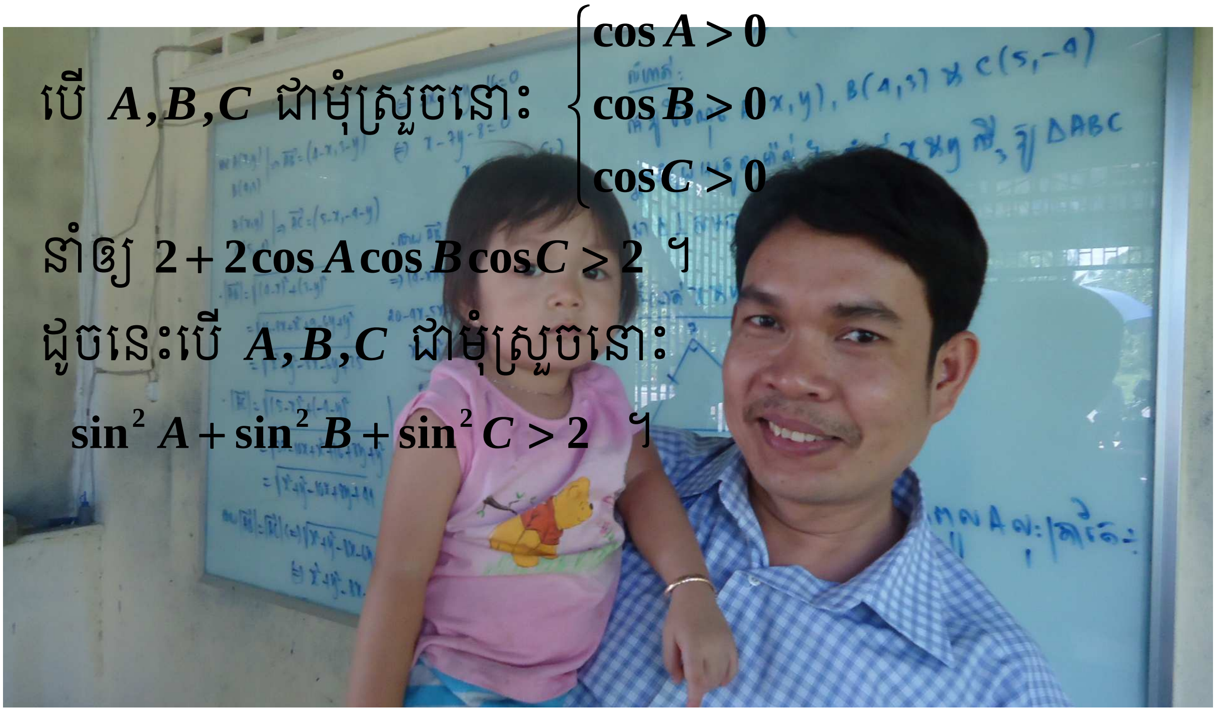
គេទាញ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$

បើ A,B,C ជាមុំស្រួចនោះ $\begin{cases}\cos A>0\\ \cos B>0\\ \cos C>0\end{cases}$

នាំឲ្យ $2+2\cos A\cos B\cos C>2$ ។

ដូចនេះបើ A,B,C ជាមុំស្រួចនោះ

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C>2$ ។

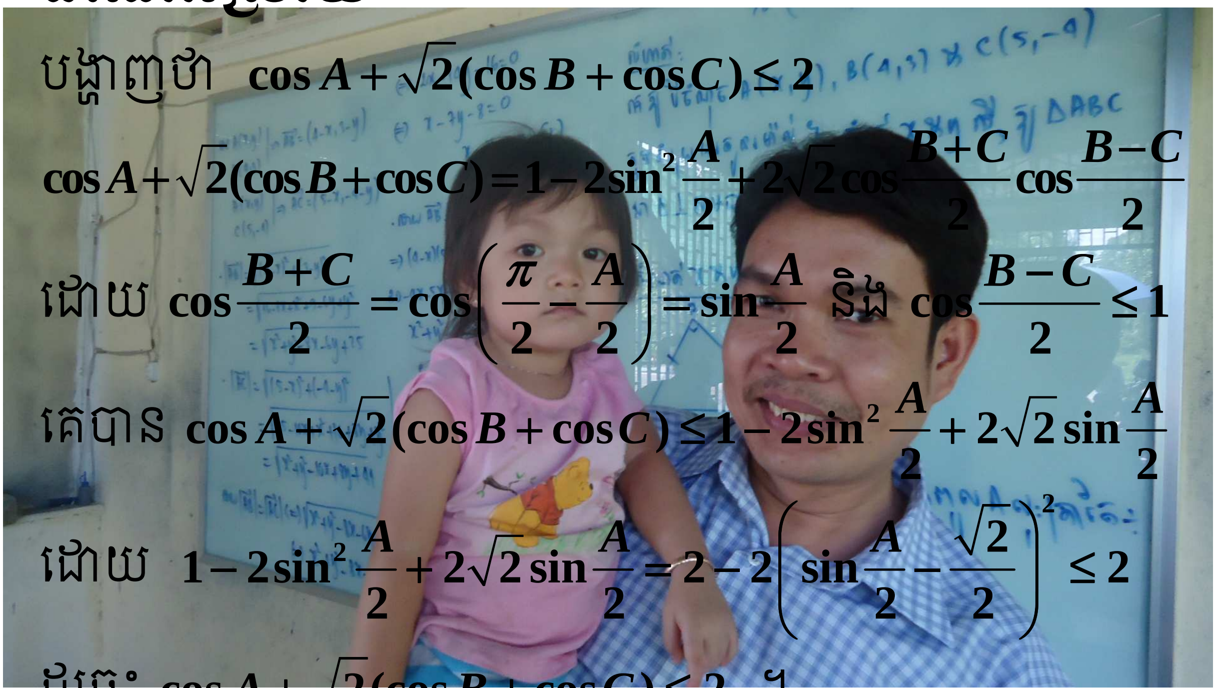


លំហាត់ទី៦៧

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុង A,B,C ។

ចូរបង្ហាញថា $\cos A+\sqrt{2}(\cos B+\cos C)\le 2$ ។

ដំណោះស្រាយ



បង្ហាញថា $\cos A+\sqrt{2}(\cos B+\cos C)\le 2$

$$\cos A+\sqrt{2}(\cos B+\cos C)=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sqrt{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

ដោយ $\cos\frac{B+C}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$ និង $\cos\frac{B-C}{2}\le 1$

គេបាន $\cos A+\sqrt{2}(\cos B+\cos C)\le 1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}$

ដោយ $1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}=2-2\left(\sin\frac{A}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\le 2$

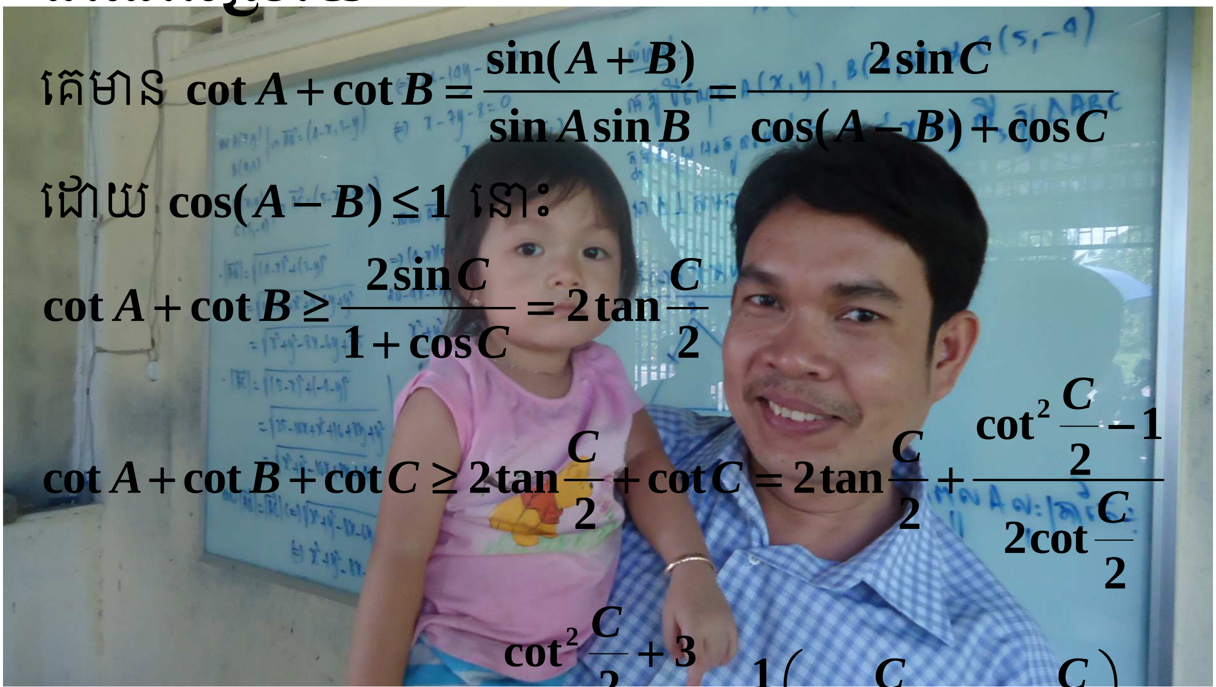
ដូចេ្នះ $\cos A+\sqrt{2}(\cos B+\cos C)\le 2$ ។

លំហាត់ទី៦៨

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុង A,B,C ។

ចូរបង្ហាញថា $\cot A+\cot B+\cot C\geq\sqrt{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ



គេមាន $\cot A+\cot B=\dfrac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}=\dfrac{2\sin C}{\cos(A-B)+\cos C}$

ដោយ $\cos(A-B)\leq 1$ នោះ

$$\cot A+\cot B\geq\frac{2\sin C}{1+\cos C}=2\tan\frac{C}{2}$$

$$\cot A+\cot B+\cot C\geq 2\tan\frac{C}{2}+\cot C=2\tan\frac{C}{2}+\frac{\cot^2\frac{C}{2}-1}{2\cot\frac{C}{2}}$$

$$\cot A+\cot B+\cot C\geq\frac{\cot^2\frac{C}{2}+3}{2\cot\frac{C}{2}}=\frac{1}{2}\left(\cot\frac{C}{2}+3\tan\frac{C}{2}\right)$$

ដោយ $\cot\dfrac{C}{2}+3\tan\dfrac{C}{2}\geq\sqrt{3}$ (តាម $AM-GM$) ។

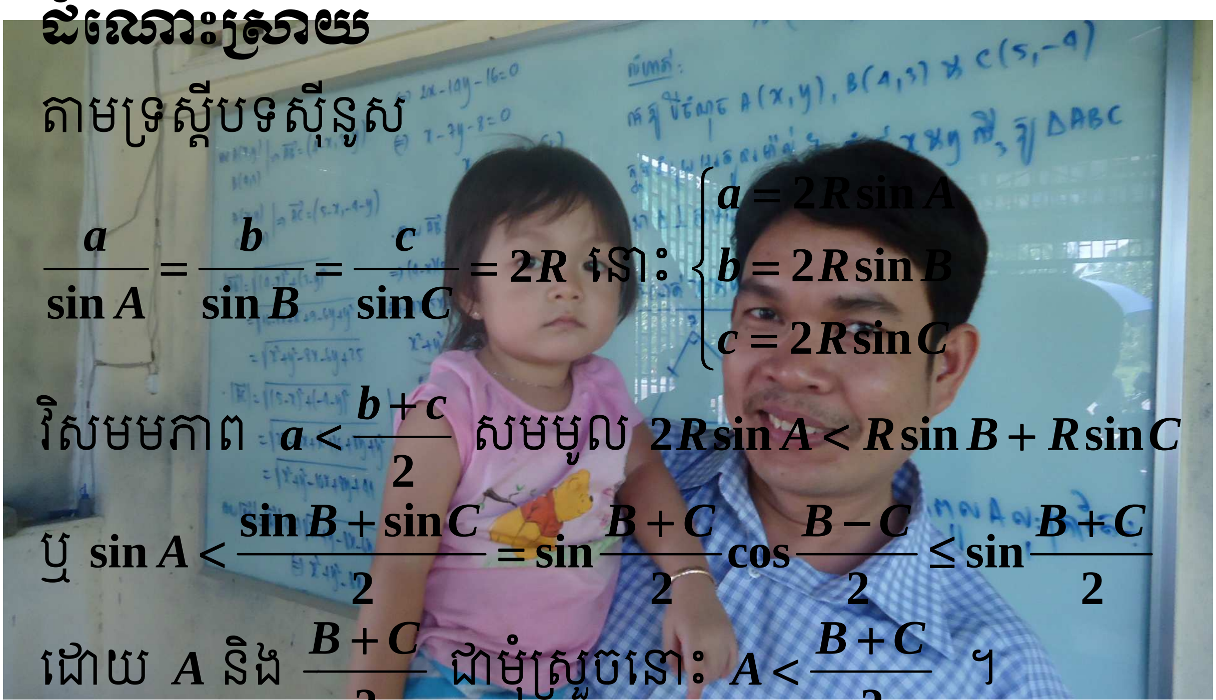
ដូចនេះ $\cot A+\cot B+\cot C\geq\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៦៩

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច និងមានជ្រុង $BC=a, AC=b, AB=c$ ។

បើ $a<\frac{b+c}{2}$ នោះបង្ហាញថាមុំ $A<\frac{B+C}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ



តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \text{ នោះ } \begin{cases} a=2R\sin A \\ b=2R\sin B \\ c=2R\sin C \end{cases}$$

វិសមភាព $a<\frac{b+c}{2}$ សមមូល $2R\sin A<R\sin B+R\sin C$

ឬ $\sin A<\frac{\sin B+\sin C}{2}=\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\le\sin\frac{B+C}{2}$

ដោយ A និង $\frac{B+C}{2}$ ជាមុំស្រួចនោះ $A<\frac{B+C}{2}$ ។

ដូចនេះ បើ $a<\frac{b+c}{2}$ នោះ $A<\frac{B+C}{2}$ ។

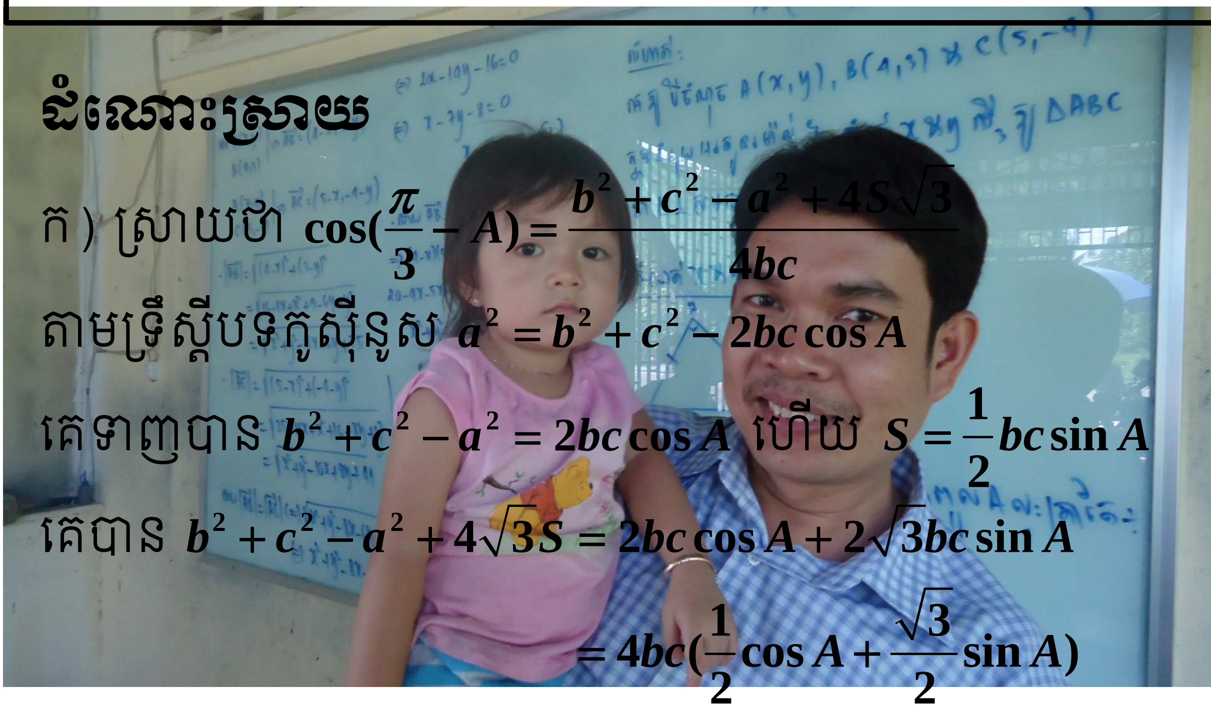
លំហាត់ទី៧០

ត្រីកោណ ABC មួយមានមានជ្រុង $BC=a, AC=b, AB=c$ ។

តាង S ជាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ ។

ក) ចូរស្រាយថា $\cos(\frac{\pi}{3}-A)=\frac{b^2+c^2-a^2+4S\sqrt{3}}{4bc}$

ខ) ទាញឲ្យបានថា $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S$ ។



ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\cos(\frac{\pi}{3}-A)=\frac{b^2+c^2-a^2+4S\sqrt{3}}{4bc}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

គេទាញបាន $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$ ហើយ $S=\frac{1}{2}bc\sin A$

គេបាន $b^2+c^2-a^2+4\sqrt{3}S=2bc\cos A+2\sqrt{3}bc\sin A$

$$=4bc(\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A)$$

$$=4bc\cos\left(\frac{\pi}{3}-A\right)$$

ដូចនេះ $\cos(\frac{\pi}{3}-A)=\frac{b^2+c^2-a^2+4S\sqrt{3}}{4bc}$ ។

ខ) ទាញឲ្យបានថា $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S$

គេមាន $\cos(\frac{\pi}{3}-A)=\frac{b^2+c^2-a^2+4S\sqrt{3}}{4bc}$

ដោយ $\cos\left(\frac{\pi}{3}-A\right)\le 1$ នោះ $\frac{b^2+c^2-a^2+4S\sqrt{3}}{4bc}\le 1$

គេទាញ $4bc\ge b^2+c^2-a^2+4S\sqrt{3}$

សមមូល $a^2+b^2+c^2\ge 2(b-c)^2+4\sqrt{3}S$ ដោយ $(b-c)^2\ge 0$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S$ ។

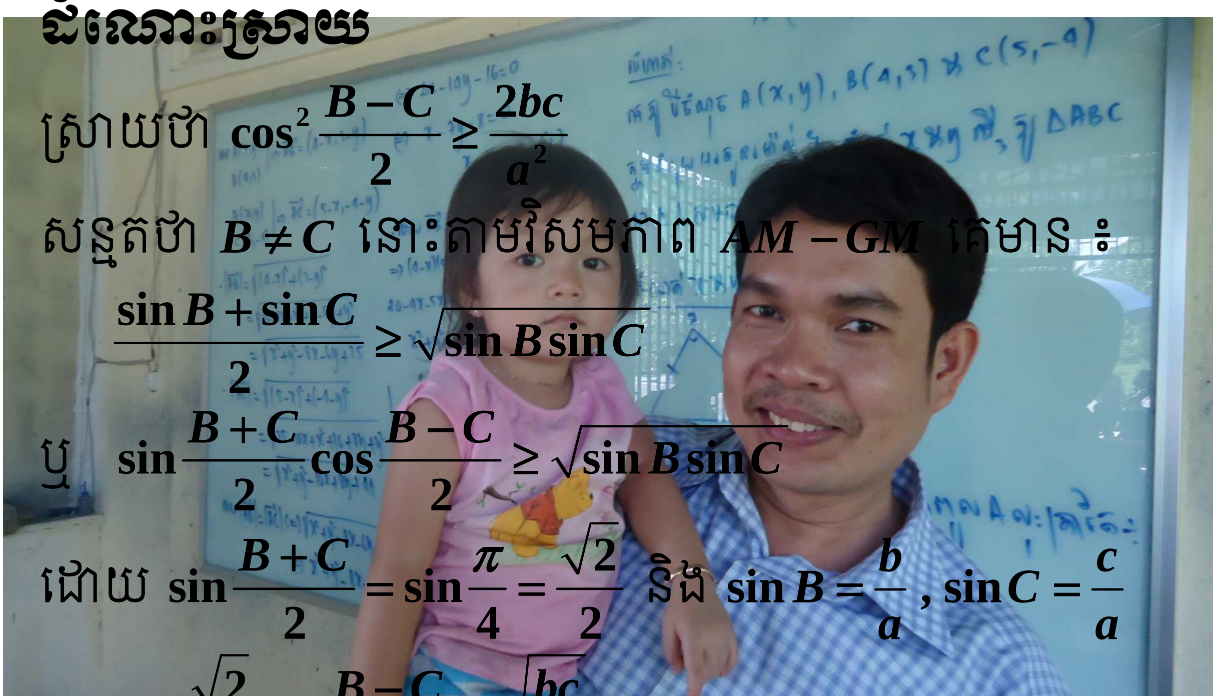
លំហាត់ទី៧១

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយកែងត្រង់ A ។

តាងជ្រុង $BC=a, AC=b$ និង $AB=c$ ។

ចូរស្រាយថា $\cos^2\frac{B-C}{2}\ge\frac{2bc}{a^2}$?

ដំណោះស្រាយ



ស្រាយថា $\cos^2\frac{B-C}{2}\ge\frac{2bc}{a^2}$

សន្មតថា $B\ne C$ នោះតាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន ៖

$$\frac{\sin B+\sin C}{2}\ge\sqrt{\sin B\sin C}$$

ឬ $\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\ge\sqrt{\sin B\sin C}$

ដោយ $\sin\frac{B+C}{2}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $\sin B=\frac{b}{a}, \sin C=\frac{c}{a}$

គេបាន $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{B-C}{2}\ge\sqrt{\frac{bc}{a^2}}$

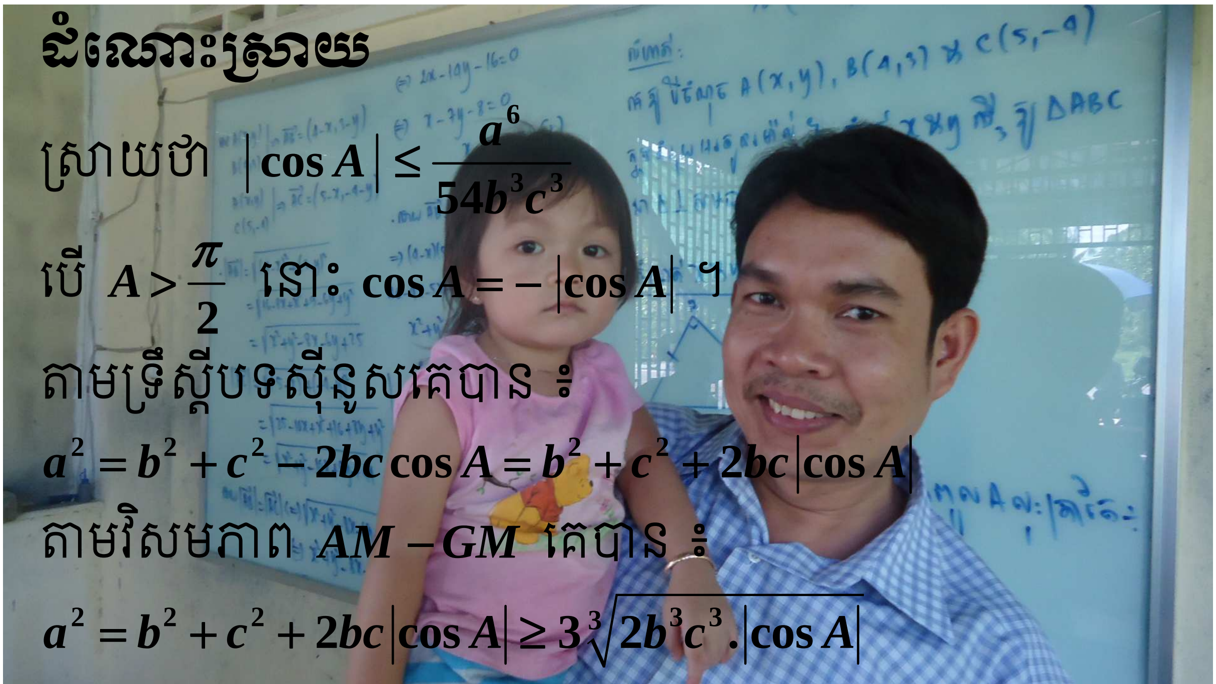
សមមូល $\cos^2\frac{B-C}{2}\ge\frac{2bc}{a^2}$ ពិត។

លំហាត់ទី៧២

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ $A>\frac{\pi}{2}$ ។

តាងជ្រុង $BC=a, AC=b$ និង $AB=c$ ។

ចូរស្រាយថា $|\cos A|\le\frac{a^6}{54b^3c^3}$?



ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $|\cos A|\le\frac{a^6}{54b^3c^3}$

បើ $A>\frac{\pi}{2}$ នោះ $\cos A=-|\cos A|$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសគេបាន ៖

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2+2bc|\cos A|$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន ៖

$$a^2=b^2+c^2+2bc|\cos A|\ge 3\sqrt[3]{2b^3c^3.|\cos A|}$$

គេទាញ $|\cos A|\le\frac{a^6}{54b^3c^3}$ ពិត ។

លំហាត់ទី៧៣

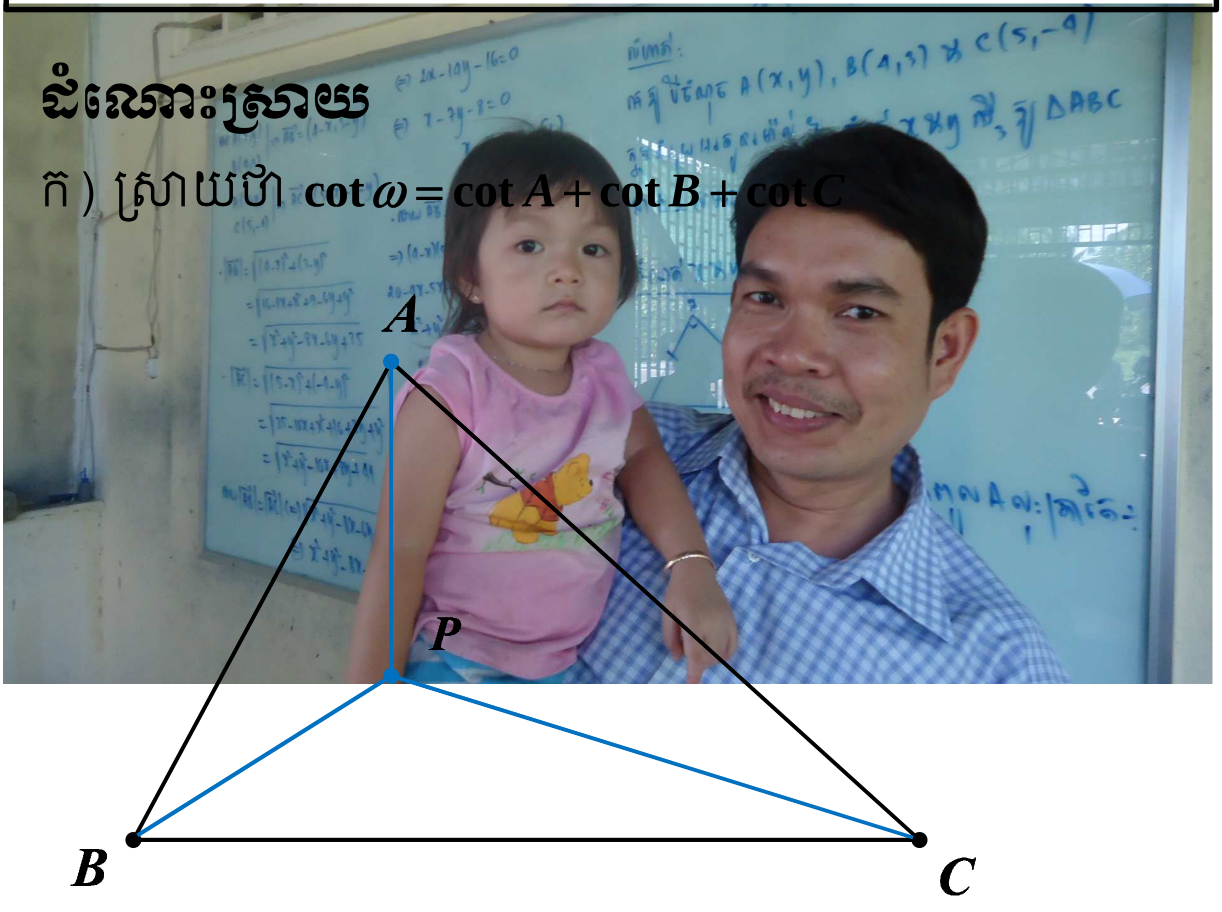
គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ P ជាចំណុចនៅក្នុង ΔABC ដែល $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \omega$ ។

ក) ចូរស្រាយថា $\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C$ ។

ខ) ទាញឲ្យបានថា $\omega \le \frac{\pi}{6}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C$



តាង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $PA = x$, $PB = y$, $PC = z$

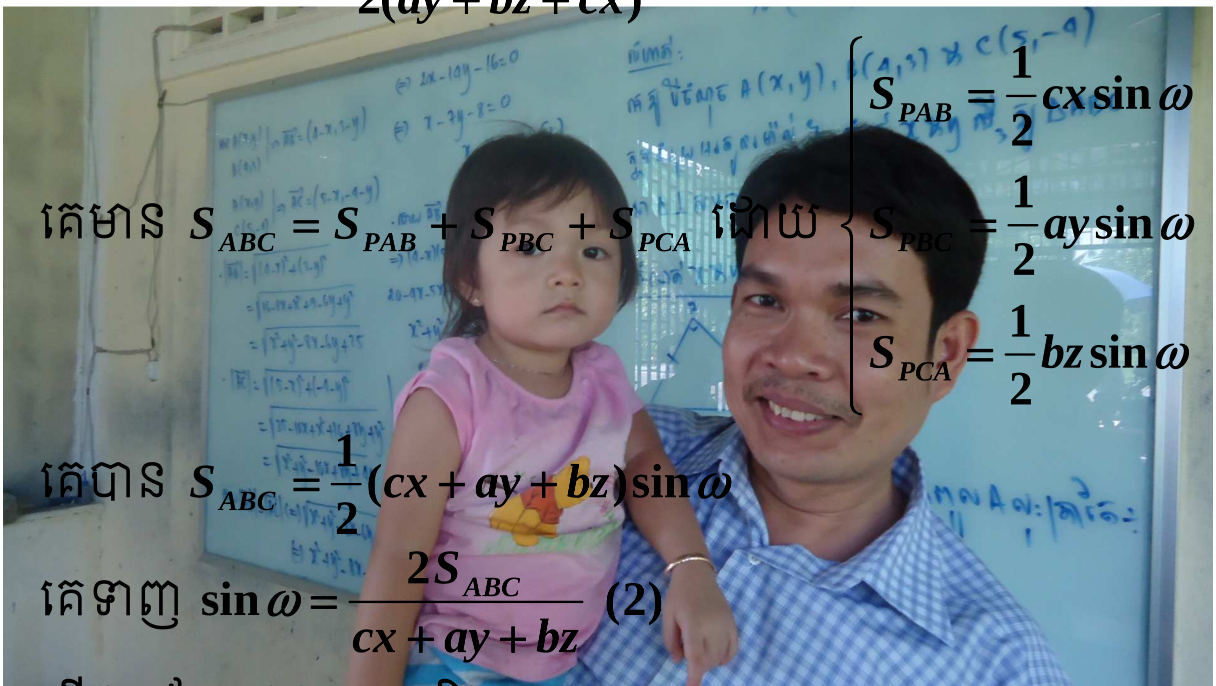
តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុង ΔPAB , ΔPBC , ΔPCA

គេបាន $\begin{cases} x^2 = z^2 + b^2 - 2bz\cos\omega \\ y^2 = x^2 + c^2 - 2cx\cos\omega \\ z^2 = y^2 + a^2 - 2ay\cos\omega \end{cases}$

បូកសមីការបីនេះអង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2(ay + bz + cx)\cos\omega$$

គេទាញ $\cos\omega = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2(ay + bz + cx)}$ (1)



គេមាន $S_{ABC} = S_{PAB} + S_{PBC} + S_{PCA}$ ដោយ $\begin{cases} S_{PAB} = \dfrac{1}{2}cx\sin\omega \\ S_{PBC} = \dfrac{1}{2}ay\sin\omega \\ S_{PCA} = \dfrac{1}{2}bz\sin\omega \end{cases}$

គេបាន $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}(cx + ay + bz)\sin\omega$

គេទាញ $\sin\omega = \dfrac{2S_{ABC}}{cx + ay + bz}$ (2)

ធ្វើផលចែករវាង (1) និង (2) គេបាន

$$\cot\omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S_{ABC}} \quad (3)$$

ម្យ៉ាងទៀតតាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

គេទាញ $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ហើយ $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin A$

គេទាញ $\sin A = \frac{2S_{ABC}}{bc}$ ។ ហេតុនេះ $\cot A = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$

ដូចគ្នាដែរ $\cot B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cot C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

គេបាន $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S_{ABC}}$ (4)

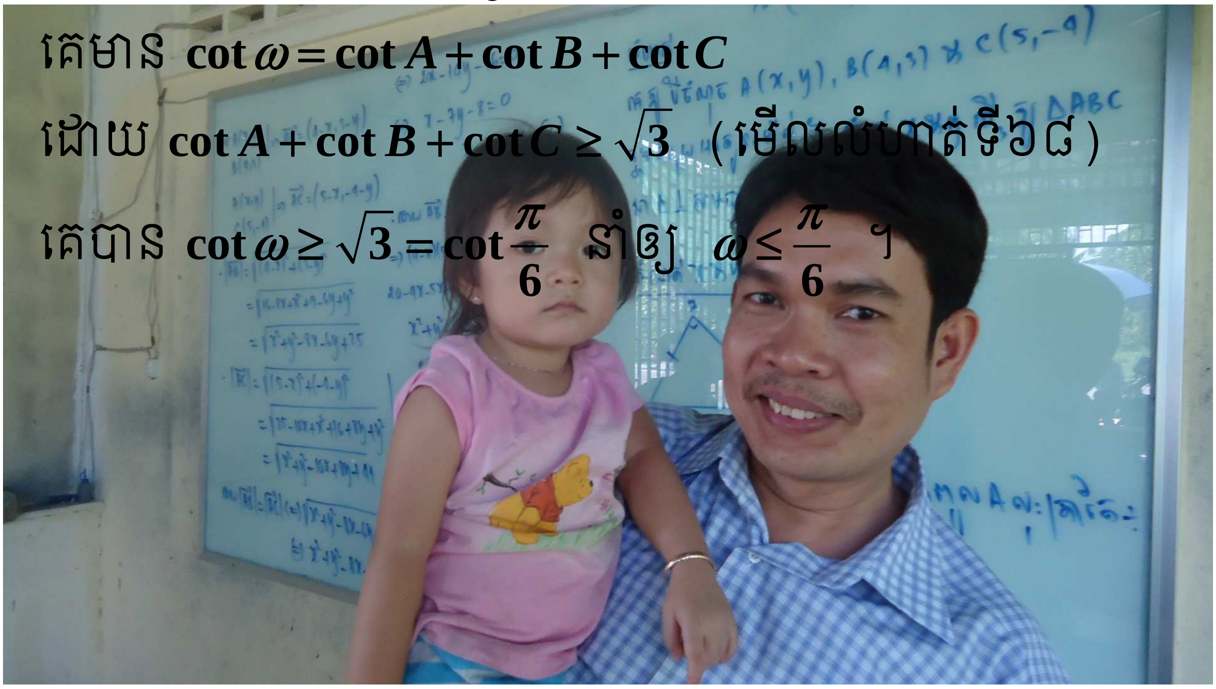
តាម (3) និង (4) គេបាន $\cot \omega = \cot A + \cot B + \cot C$ ពិត

ខ)ទាញឲ្យបានថា $\omega \le \frac{\pi}{6}$

គេមាន $\cot \omega = \cot A + \cot B + \cot C$

ដោយ $\cot A + \cot B + \cot C \ge \sqrt{3}$ (មើលលំហាត់ទី៦៨)

គេបាន $\cot \omega \ge \sqrt{3} = \cot \frac{\pi}{6}$ នាំឲ្យ $\omega \le \frac{\pi}{6}$ ។



លំហាត់ទី៧៤ (IMO1966)

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a, AC = b, AB = c$ ។
ចូរបង្ហាញថាបើ $a+b=\tan\frac{C}{2}\left(a\tan A+b\tan B\right)$ នោះ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u=\tan\frac{A}{2}$ និង $v=\tan\frac{C}{2}$

គេបាន $\tan\frac{C}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)=\cot\frac{A+B}{2}=\frac{1-uv}{u+v}$

ហើយ $\tan A=\frac{2u}{1-u^2}, \tan B=\frac{2v}{1-v^2}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស $a=2R\sin A=2R\frac{2u}{1+u^2}, b=2R\frac{2v}{1+v^2}$

ដែល R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

សមភាព $a+b=\tan\frac{C}{2}\left(a\tan A+b\tan B\right)$ សមមូល ៖

$$4R\left(\frac{u}{1+u^2}+\frac{v}{1+v^2}\right)=4R\frac{1-uv}{u+v}\left(\frac{u^2}{(1+u^2)(1-u^2)}+\frac{v^2}{(1+v^2)(1-v^2)}\right)$$

បន្ទាប់ពីបង្រួមគេបាន ៖

$$(u+v)^2(1-u^2)(1-v^2)=2(1-uv)^2(u^2+v^2)$$

គេមាន $(u+v)^2\le 2(u^2+v^2)$ (1)

(វិសមភាព $Cauchy-Schwarz$)

$(1-u^2)(1-v^2)=(1-uv)^2-(u-v)^2\le(1-uv)^2$ (2)

គុណវិសមភាព(1)និង(2) អង្គ និង អង្គគេបាន

$(u+v)^2(1-u^2)(1-v^2)\le 2(1-uv)^2(u^2+v^2)$

ដើម្បីឲ្យវិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ (1) និង (2) ក្លាជាសមភាពពោលគឺគេត្រូវឲ្យ $u=v$ នោះ $\tan\frac{A}{2}=\tan\frac{B}{2}$ សមមូល $A=B$ សមមូល $a=b$ ។

ដូចនេះបើ $a+b=\tan\frac{C}{2}\left(a\tan A+b\tan B\right)$ នោះ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

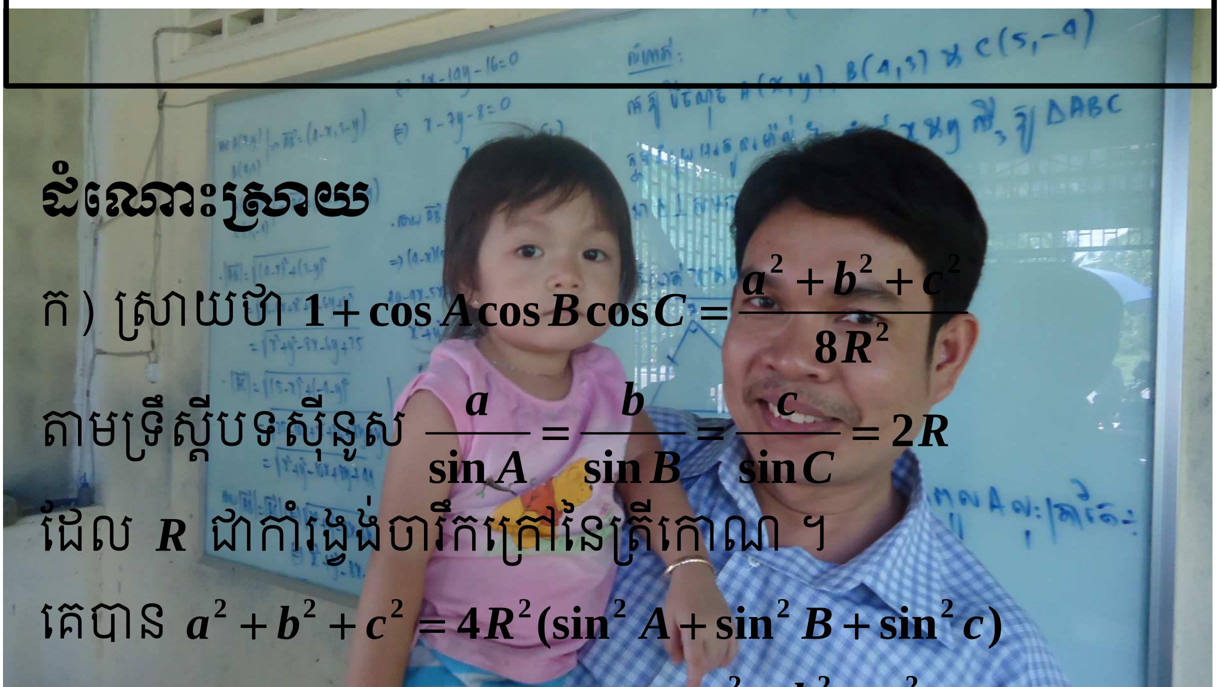
លំហាត់ទី៧៥

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ក) ចូរស្រាយថា $1+\cos A\cos B\cos C=\frac{a^2+b^2+c^2}{8R^2}$

ដែល R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ខ) ទាញឲ្យបានថា $a^2+b^2+c^2\le 9R^2$ ។



ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយថា $1+\cos A\cos B\cos C=\frac{a^2+b^2+c^2}{8R^2}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

ដែល R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

គេបាន $a^2+b^2+c^2=4R^2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 c)$

គេទាញ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}$ (1)

យើងនឹងស្រាយថា ៖

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$$

គេមាន $\sin^2 A=\frac{1-\cos 2A}{2}$ និង $\sin^2 B=\frac{1-\cos 2B}{2}$

គេបាន $\sin^2 A+\sin^2 B=1-\frac{\cos 2A+\cos 2B}{2}$

$$= 1 - \cos(A+B)\cos(A-B)$$
$$= 1 - \cos(\pi - C)\cos(A-B)$$
$$= 1 + \cos C\cos(A-B)$$

ហើយ $\sin^2 C = 1 - \cos^2 C$ នោះគេបាន

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + \cos C\cos(A-B) - \cos^2 C$$
$$= 2 + \cos C\left[\cos(A-B) - \cos C\right]$$
$$= 2 + \cos C\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$$
$$= 2 + 2\cos A\cos B\cos C$$

ដូចនេះ $1 + \cos A\cos B\cos C = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{8R^2}$ ។

ខ) ទាញឲ្យបានថា $a^2+b^2+c^2 \le 9R^2$

តាមទ្រឹស្ដីបទកូស៊ីនូស

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\ ,\ \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

និង $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ។

គេបាន

$$\cos A\cos B\cos C = \frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{8a^2b^2c^2}$$

តាង $\begin{cases} x = b^2+c^2-a^2 \\ y = c^2+a^2-b^2 \\ z = a^2+b^2-c^2 \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} x+y = 2c^2 \\ y+z = 2a^2 \\ z+x = 2b^2 \end{cases}$

គេបាន $\cos A\cos B\cos C = \dfrac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $\begin{cases} x+y\geq 2\sqrt{xy} \\ y+z\geq 2\sqrt{yz} \\ z+x\geq 2\sqrt{zx} \end{cases}$

នាំឲ្យ $(x+y)(y+z)(z+x)\geq 2\sqrt{xy}.2\sqrt{yz}.2\sqrt{zx}=8xyz$

គេទាញ $\cos A\cos B\cos C=\dfrac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\leq\dfrac{1}{8}$

គេទាញ $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{8R^2}=1+\cos A\cos B\cos C\leq 1+\dfrac{1}{8}=\dfrac{9}{8}$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2\leq 9R^2$ ។

លំហាត់ទី៧៦ (IMO 1977)

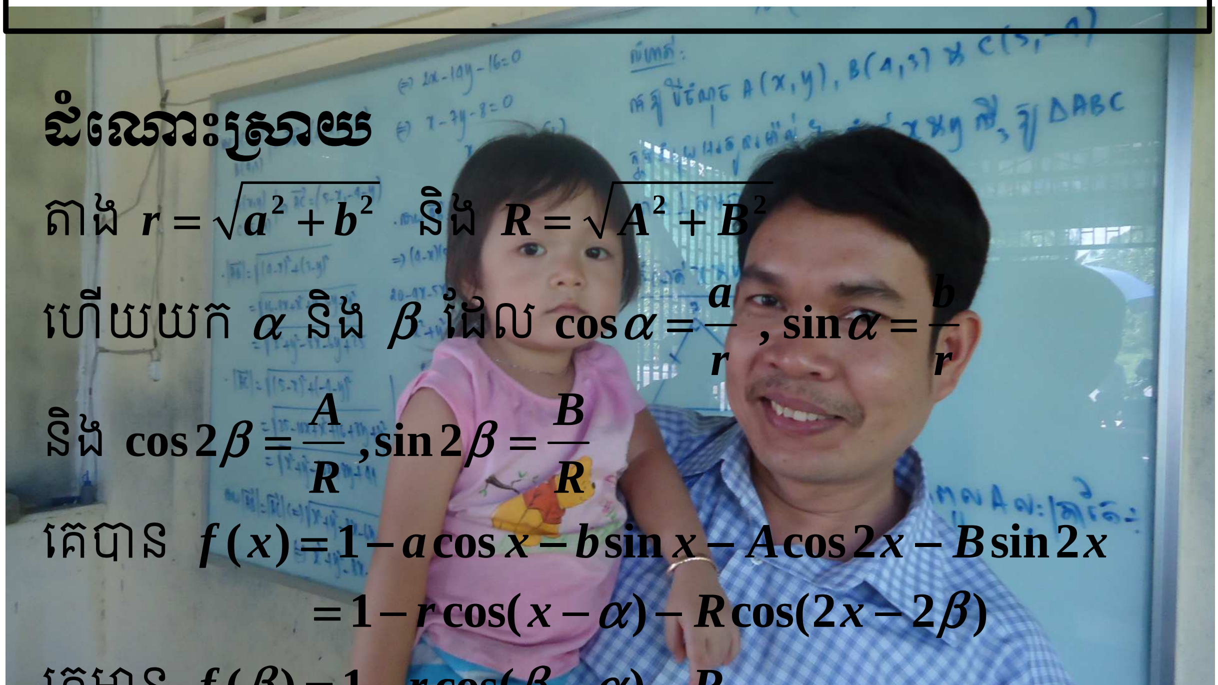
គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x$

ដែល a,b,A,B ជាចំនួនពិត ។

ចូរស្រាយថាបើគ្រប់ $x\in IR:\ f(x)\geq 0$ នោះ $a^2+b^2\leq 2$

និង $A^2+B^2\leq 1$ ។



ដំណោះស្រាយ

តាង $r=\sqrt{a^2+b^2}$ និង $R=\sqrt{A^2+B^2}$

ហើយយក α និង β ដែល $\cos\alpha=\dfrac{a}{r}\ ,\sin\alpha=\dfrac{b}{r}$

និង $\cos 2\beta=\dfrac{A}{R},\sin 2\beta=\dfrac{B}{R}$

គេបាន $f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x$

$$=1-r\cos(x-\alpha)-R\cos(2x-2\beta)$$

គេមាន $f(\beta)=1-r\cos(\beta-\alpha)-R$

និង

$f(\pi+\beta)=1-r\cos(\pi+\beta-\alpha)-R=1+r\cos(\beta-\alpha)-R$

គេបាន $f(\beta)+f(\pi+\beta)=2-2R\geq 0$ នោះ $R\leq 1$

សមមូល $\sqrt{A^2+B^2}\leq 1$ ឬ $A^2+B^2\leq 1$ ។

គេមាន $f(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=1-r\dfrac{\sqrt{2}}{2}+R\sin(2\alpha-2\beta)$

និង $f(\alpha-\frac{\pi}{4})=1-r\frac{\sqrt{2}}{2}R\sin(2\alpha-2\beta)$

គេបាន $f(\alpha+\frac{\pi}{4})+f(\alpha-\frac{\pi}{4})=2-\sqrt{2}r\geq 0$ នោះ $r\leq\sqrt{2}$

សមមូល $\sqrt{a^2+b^2}\leq 2$ ឬ $a^2+b^2\leq 2$ ។

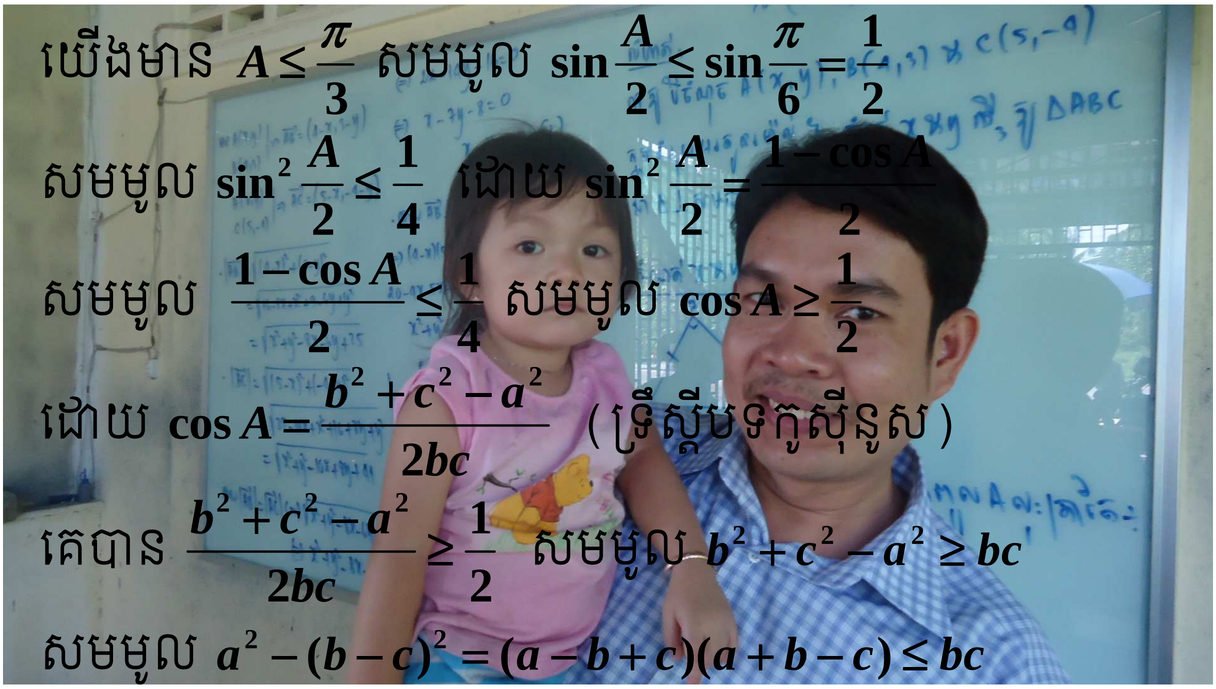
ដូចនេះបើគ្រប់ $x\in IR$: $f(x)\geq 0$ នោះ $a^2+b^2\leq 2$

និង $A^2+B^2\leq 1$ ។

លំហាត់ទី៧៧

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ ចូរស្រាយថា $A \le \frac{\pi}{3}$ លុះត្រាតែ $(p-b)(p-c) \le \frac{bc}{4}$ ដែល a,b,c ជាជ្រុង និង $p = \frac{a+b+c}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ



យើងមាន $A \le \frac{\pi}{3}$ សមមូល $\sin\frac{A}{2} \le \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

សមមូល $\sin^2\frac{A}{2} \le \frac{1}{4}$ ដោយ $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2}$

សមមូល $\frac{1-\cos A}{2} \le \frac{1}{4}$ សមមូល $\cos A \ge \frac{1}{2}$

ដោយ $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស)

គេបាន $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \ge \frac{1}{2}$ សមមូល $b^2+c^2-a^2 \ge bc$

សមមូល $a^2-(b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c) \le bc$

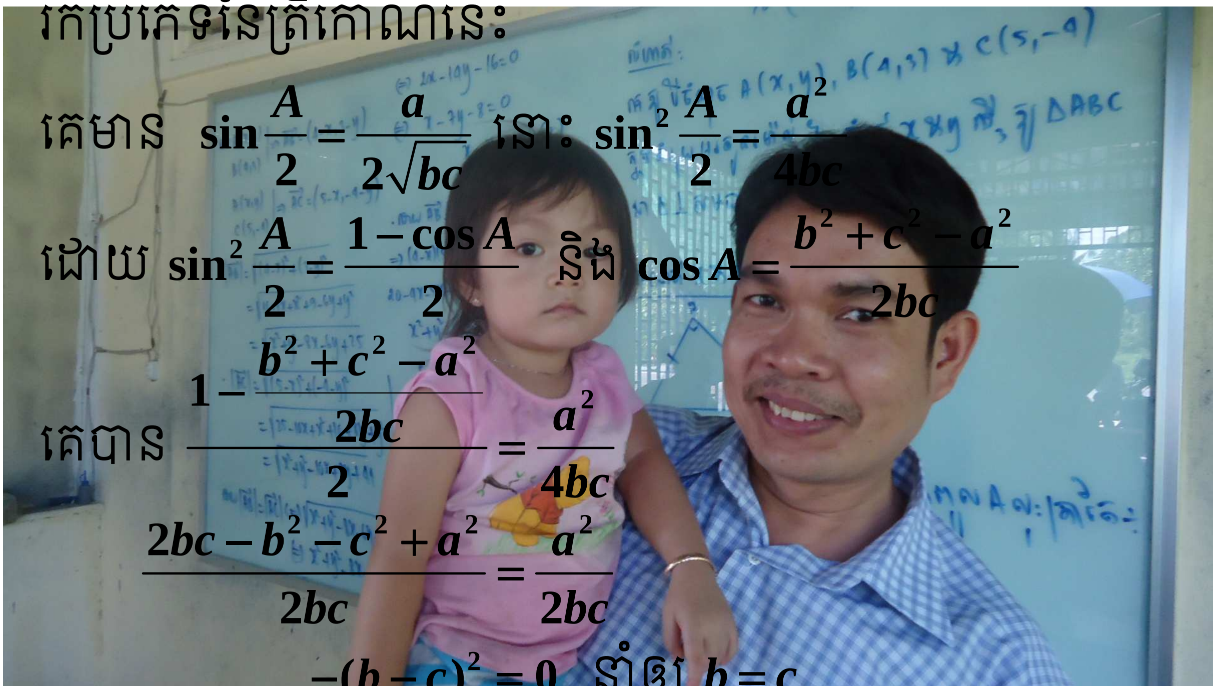
សមមូល $4(p-b)(p-c) \le bc$ ឬ $(p-b)(p-c) \le \frac{bc}{4}$ ពិត ។

លំហាត់ទី៧៨

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូររកប្រភេទនៃត្រីកោណនេះដោយដឹងថា $\sin\frac{A}{2}=\frac{a}{2\sqrt{bc}}$ ។

ដំណោះស្រាយ



រកប្រភេទនៃត្រីកោណនេះ

គេមាន $\sin\frac{A}{2}=\frac{a}{2\sqrt{bc}}$ នោះ $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{a^2}{4bc}$

ដោយ $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}$ និង $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

គេបាន $\dfrac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}=\frac{a^2}{4bc}$

$$\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2}{2bc}$$

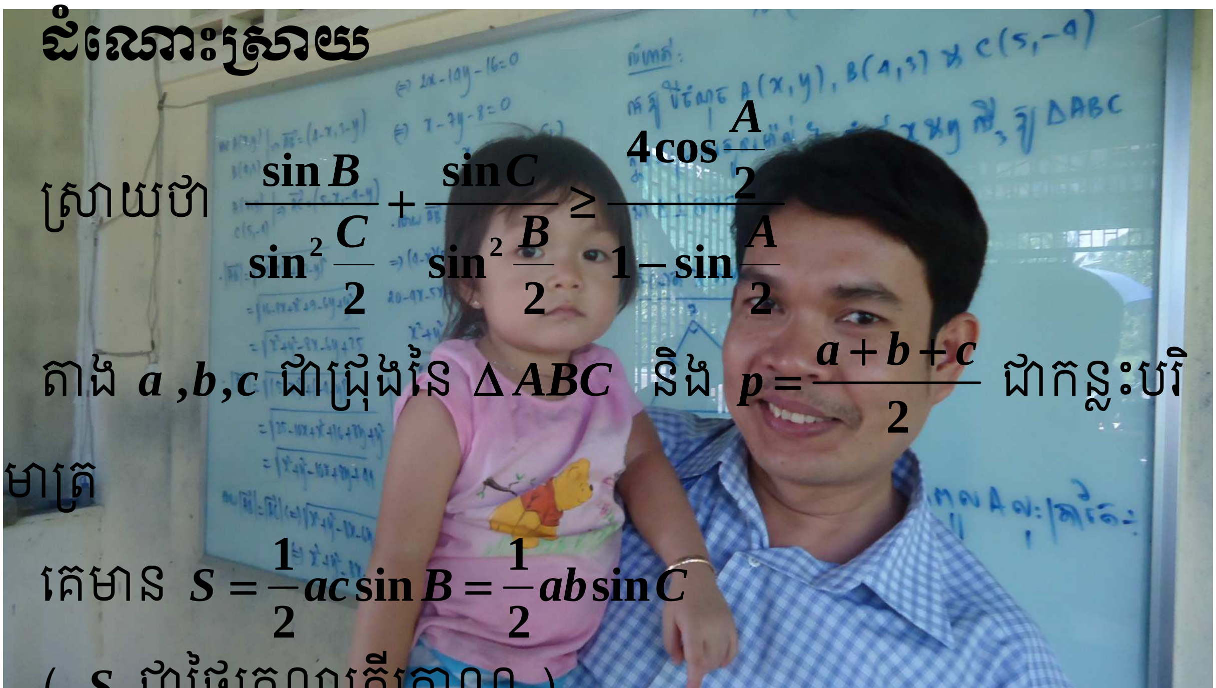
$-(b-c)^2=0$ នាំឲ្យ $b=c$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល A ។

លំហាត់ទី៧៩

ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{\sin B}{\sin^2\frac{C}{2}}+\frac{\sin C}{\sin^2\frac{B}{2}}\ge\frac{4\cos\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}}$$



ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{\sin B}{\sin^2\frac{C}{2}}+\frac{\sin C}{\sin^2\frac{B}{2}}\ge\frac{4\cos\frac{A}{2}}{1-\sin\frac{A}{2}}$

តាង $a\,,b,c$ ជាជ្រុងនៃ ΔABC និង $p=\frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ

គេមាន $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

(S ជាផ្ទៃក្រលាត្រីកោណ)

គេបាន $\sin B=\frac{2S}{ac}$ និង $\sin C=\frac{2S}{ab}$ ។

ហើយ $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$, $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$

$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$ និង $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ ។

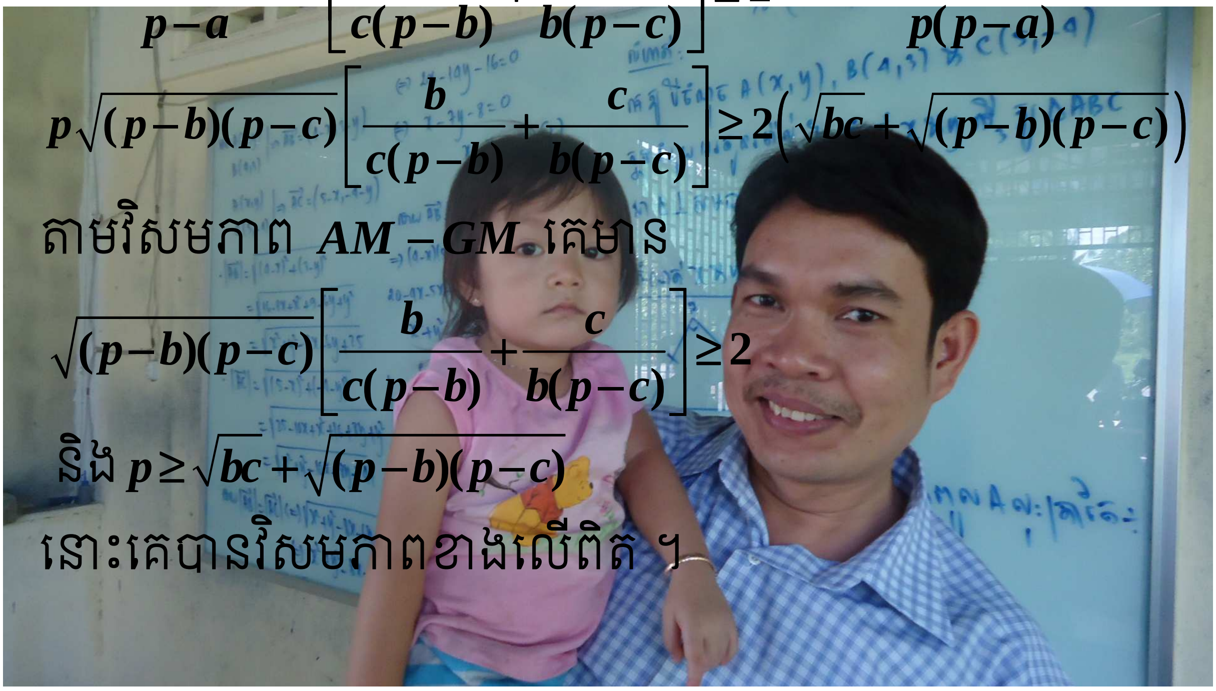
វិសមភាពសមមូល ៖

$$\frac{\frac{2S}{ac}}{\frac{(p-b)(p-a)}{ab}}+\frac{\frac{2S}{ab}}{\frac{(p-c)(p-a)}{ac}}\geq 4\,\frac{\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}{1-\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}$$

$$\frac{2S}{p-a}\left[\frac{b}{c(p-b)}+\frac{c}{b(p-c)}\right]\geq\frac{\sqrt{p(p-a)}}{\sqrt{bc}-\sqrt{(p-b)(p-c)}}$$

ដោយ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ នោះគេបាន ៖

$$\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{p-a}\left[\frac{b}{c(p-b)}+\frac{c}{b(p-c)}\right]\geq 2\,\frac{\sqrt{bc}+\sqrt{(p-b)(p-c)}}{p(p-a)}$$



$$p\sqrt{(p-b)(p-c)}\left[\frac{b}{c(p-b)}+\frac{c}{b(p-c)}\right]\geq 2\left(\sqrt{bc}+\sqrt{(p-b)(p-c)}\right)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន

$$\sqrt{(p-b)(p-c)}\left[\frac{b}{c(p-b)}+\frac{c}{b(p-c)}\right]\geq 2$$

និង $p\geq\sqrt{bc}+\sqrt{(p-b)(p-c)}$

នោះគេបានវិសមភាពខាងលើពិត ។

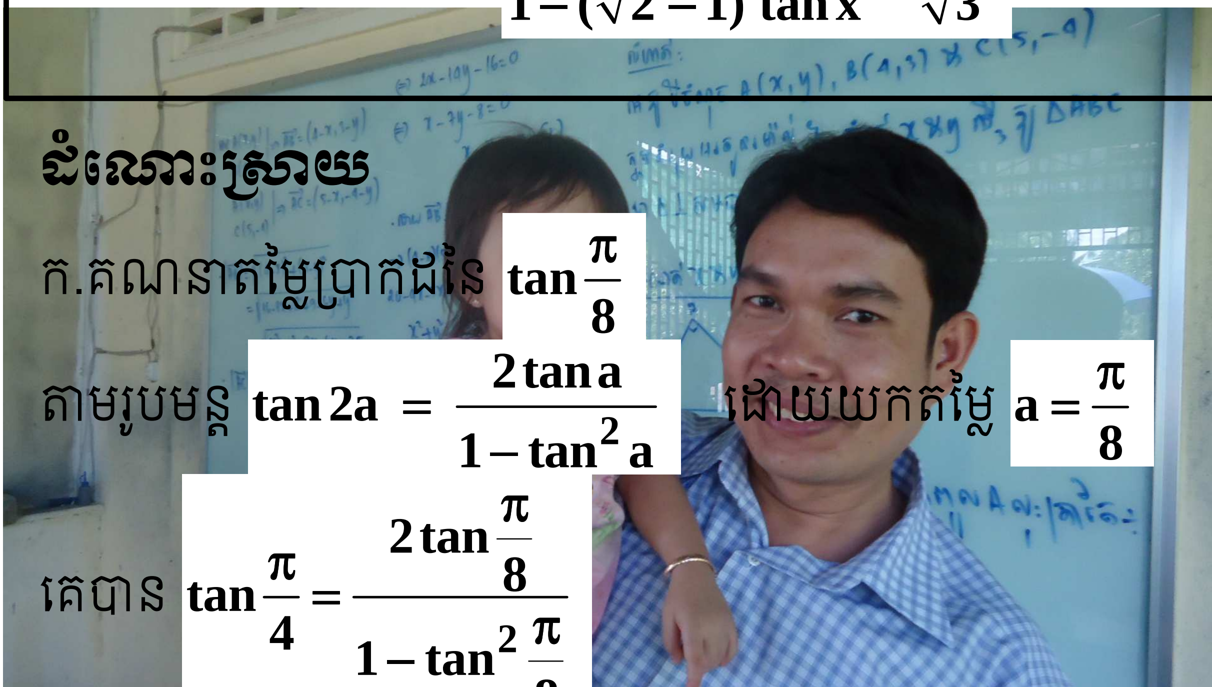
លំហាត់ទី៨០

ក.ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{8}$

ខ.ចូរដោះស្រាយសមីការ

$$\sin^2 x-\sqrt{2}\,\sin x.\cos x+(\sqrt{2}-1)\cos^2 x=0$$

គ.ចូរដោះស្រាយសមីការ $\dfrac{\tan x+\sqrt{2}-1}{1-(\sqrt{2}-1)\tan x}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



ដំណោះស្រាយ

ក.គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\tan\frac{\pi}{8}$

តាមរូបមន្ត $\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ ដោយយកតម្លៃ $a=\frac{\pi}{8}$

គេបាន $\tan\frac{\pi}{4}=\dfrac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$

$$1=\frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$$

នាំឲ្យ $\tan^2\frac{\pi}{8}+2\tan\frac{\pi}{8}-1=0$

តាង $t=\tan\frac{\pi}{8}$ ដែល $t>0$

គេបាន $t^2+2t-1=0$; $\Delta'=1+1=2$

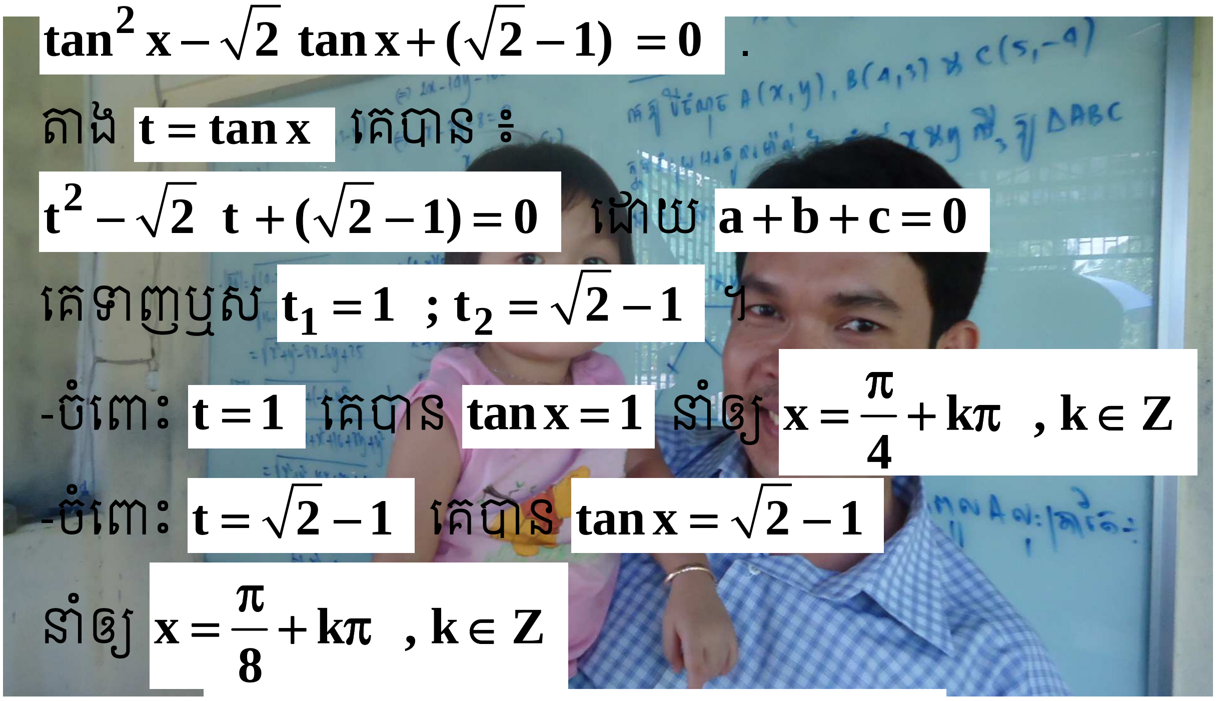
គេទាញឫស $t_1=-1+\sqrt{2}$, $t_2=-1-\sqrt{2}<0$ (មិនយក)

ដូចនេះ $\boxed{\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1}$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x.\cos x+(\sqrt{2}-1)\cos^2 x=0$$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^2 x\neq 0$ គេបានសមីការ ៖



$\tan^2 x-\sqrt{2}\tan x+(\sqrt{2}-1)=0$.

តាង $t=\tan x$ គេបាន ៖

$t^2-\sqrt{2}\ t+(\sqrt{2}-1)=0$ ដោយ $a+b+c=0$

គេទាញឫស $t_1=1$; $t_2=\sqrt{2}-1$ ។

-ចំពោះ $t=1$ គេបាន $\tan x=1$ នាំឲ្យ $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$

-ចំពោះ $t=\sqrt{2}-1$ គេបាន $\tan x=\sqrt{2}-1$

នាំឲ្យ $x=\frac{\pi}{8}+k\pi$, $k\in Z$

ដូចនេះ $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{8}+k\pi$, $k\in Z$ ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\frac{\tan x+\sqrt{2}-1}{1-(\sqrt{2}-1)\tan x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ដោយ $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$

គេបាន

$$\frac{\tan x+\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan x.\tan\frac{\pi}{8}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan(x+\frac{\pi}{8})=\tan\frac{\pi}{6}$$

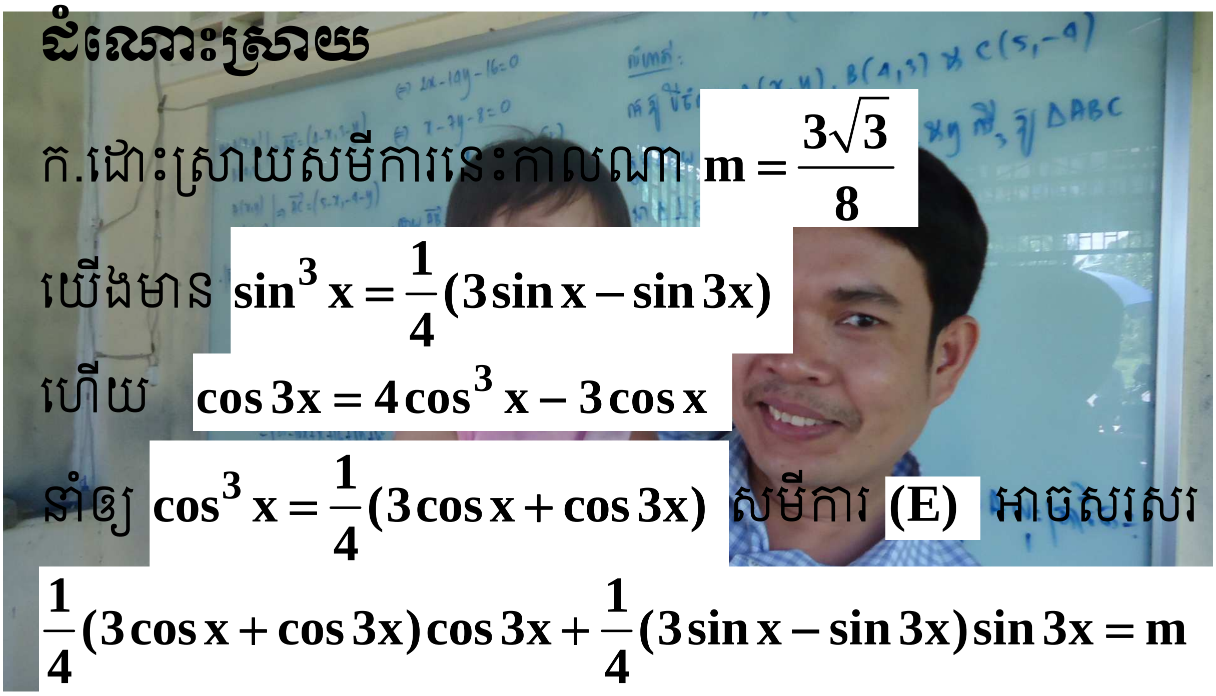
គេទាញ $x+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{6}+k\pi$ ឬ $x=\frac{\pi}{24}+k\pi$, $k\in Z$ ។

លំហាត់ទី៨១

គេឲ្យសមីការ (E) : $\cos^3 x\cos 3x + \sin^3 x\sin 3x = m$

ក.ចូរដោះស្រាយសមីការនេះកាលណា $m = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

ខ.រកលក្ខខ័ណ្ឌសម្រាប់ m ដើម្បីឲ្យសមីការនេះមានឫស ។



ដំណោះស្រាយ

ក.ដោះស្រាយសមីការនេះកាលណា $m = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

យើងមាន $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

ហើយ $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

នាំឲ្យ $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$ សមីការ (E) អាចសរសេរ

$$\frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)\cos 3x + \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)\sin 3x = m$$

$$3\cos x\cos 3x + \cos^2 3x + 3\sin x\sin 3x - \sin^2 3x = 4m$$

$$3(\cos 3x\cos x + \sin 3x\sin x) + (\cos^2 3x - \sin^2 3x) = 4m$$

$$3\cos 2x + \cos 6x = 4m$$

$$4\cos^3 2x = 4m$$

$$\cos 2x = \sqrt[3]{m}$$

ដោយ $\mathbf{m=\frac{3\sqrt{3}}{8}}$ គេបាន $\mathbf{\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}}$

នាំឲ្យ $\mathbf{x=\pm\frac{\pi}{12}+k\pi\ ,k\in Z}$

ខ. រកលក្ខខ័ណ្ឌសម្រាប់ $\mathbf{m}$ ៖

ដើម្បីឲ្យសមីការនេះមានឬសគេគ្រាន់តែឲ្យ $\mathbf{-1 \le \sqrt[3]{m} \le 1}$

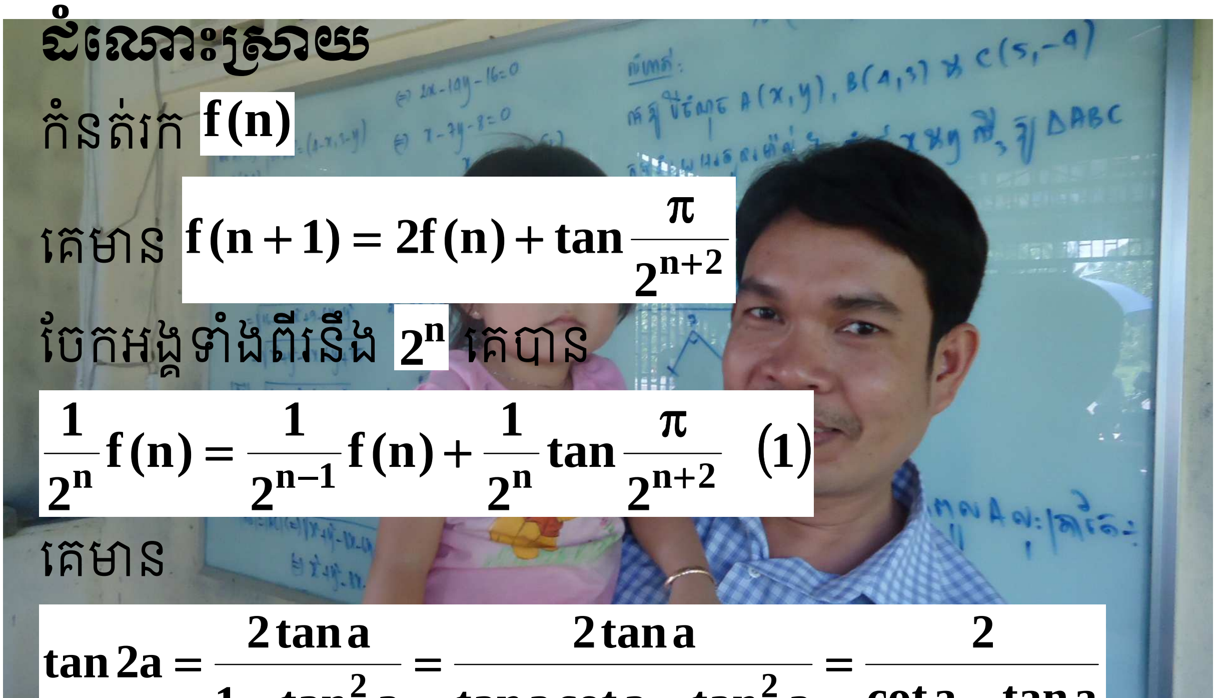
ឬ $\mathbf{m\in[-1\ ,1]}$ ។

លំហាត់ទី៨២

គេមានអនុគមន៍លេខ f កំនត់ពីសំណុំ $\mathbb{N}$ ទៅសំណុំ $\mathbb{R}$

ដោយ $f(0)=0$ និង $f(n+1)=2f(n)+\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$

ចូរកំនត់រក $f(n)$?



ដំណោះស្រាយ

កំនត់រក $f(n)$

គេមាន $f(n+1)=2f(n)+\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 2^n គេបាន

$$\frac{1}{2^n}f(n)=\frac{1}{2^{n-1}}f(n)+\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^{n+2}} \quad (1)$$

គេមាន

$$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}=\frac{2\tan a}{\tan a\cot a-\tan^2 a}=\frac{2}{\cot a-\tan a}$$

គេទាញ $\tan a=\cot a-2\cot 2a$ ដោយយក $a=\frac{\pi}{2^{n+2}}$

គេបាន $\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}=\cot\frac{\pi}{2^{n+2}}-2\cot\frac{\pi}{2^{n+1}} \quad (2)$

យក (២) ជួសក្នុង (១) គេបាន

$$\frac{1}{2^n}f(n+1)-\frac{1}{2^{n-1}}f(n)=\frac{1}{2^n}\cot\frac{\pi}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{2^k}f(k+1)-\frac{1}{2^{k-1}}f(k)\right]=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{2^k}\cot\frac{\pi}{2^{k+2}}-\frac{1}{2^{k-1}}\cot\frac{\pi}{2^{k+1}}\right]$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}f(n)-2f(0)=\frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{\pi}{2^{n+1}}\Rightarrow f(n)=\cot\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

ដូចនេះ $f(n)=\cot\frac{\pi}{2^{n+1}}$ ។

លំហាត់ទី៨៣

គេមានស្វ៊ីត (x_n) និង (y_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ និង

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\sin a + \cos a)x_n + \dfrac{1}{2}\sin a(1 - \tan a)y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}\cos a(\cot a - 1)x_n + \dfrac{1}{2}(\sin a + \cos a)y_n \end{cases}$$

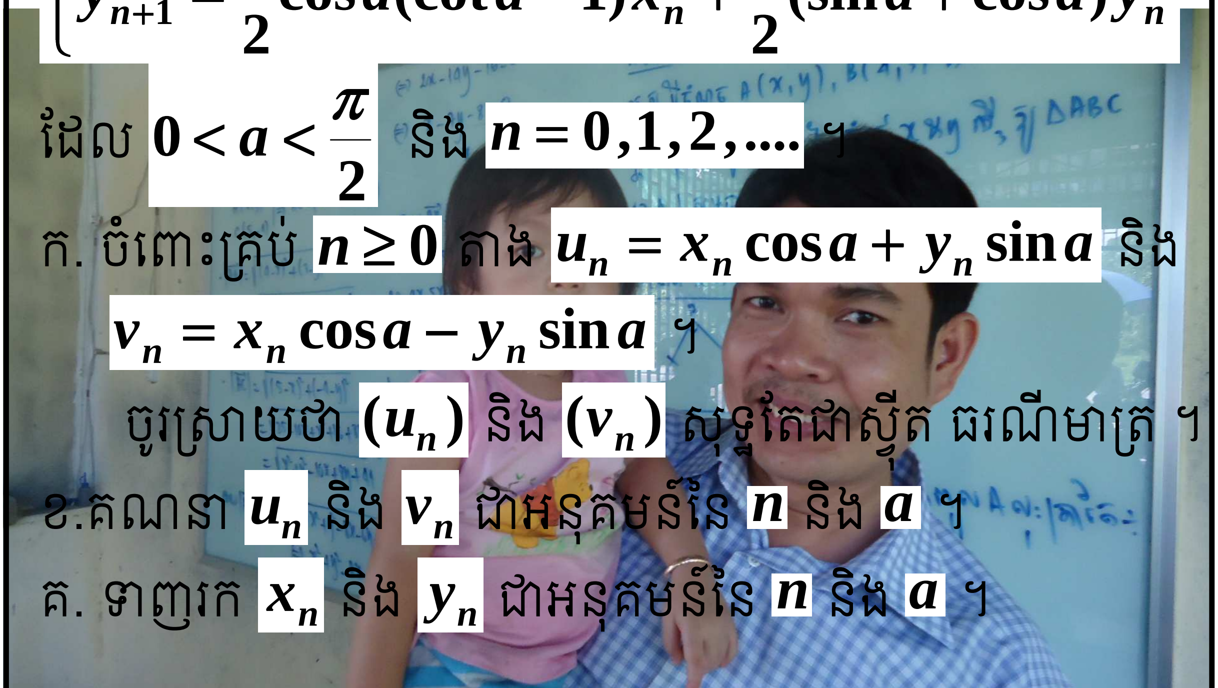
ដែល $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ និង $n = 0, 1, 2, ...$ ។

ក. ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ តាង $u_n = x_n \cos a + y_n \sin a$ និង $v_n = x_n \cos a - y_n \sin a$ ។

ចូរស្រាយថា (u_n) និង (v_n) សុទ្ធតែជាស្វ៊ីត ធរណីមាត្រ ។

ខ.គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

គ. ទាញរក x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។



ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា (u_n) និង (v_n) សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន ៖

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin a + \cos a)x_n + \frac{1}{2}\sin a(1 - \tan a)y_n$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cos a$ គេបាន ៖

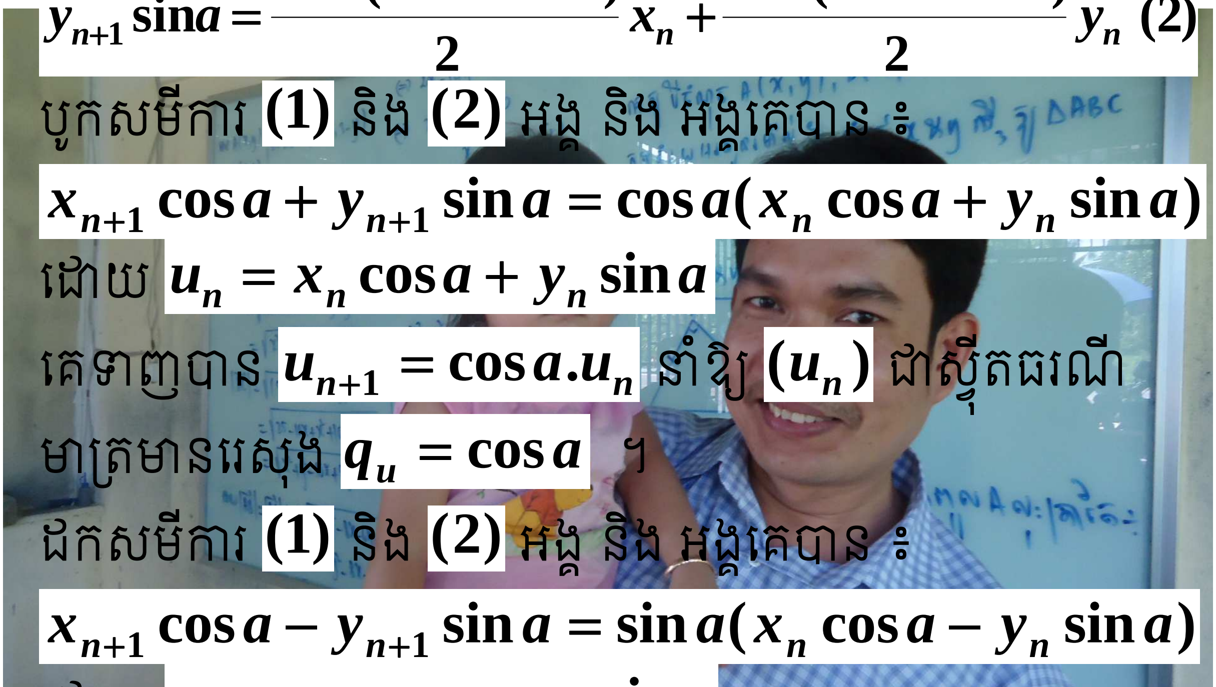
$$x_{n+1}\cos a = \frac{\cos a(\sin a + \cos a)}{2}x_n + \frac{\sin a(\cos a - \sin a)}{2}y_n \ (1)$$

គេមាន ៖

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\cos a(\cot a - 1)x_n + \frac{1}{2}(\sin a + \cos a)y_n$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\sin a$ គេបាន ៖

$$y_{n+1}\sin a = \frac{\cos a(\cos a - \sin a)}{2}x_n + \frac{\sin a(\sin a + \cos a)}{2}y_n \ (2)$$



បូកសមីការ (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$x_{n+1}\cos a + y_{n+1}\sin a = \cos a(x_n\cos a + y_n\sin a)$$

ដោយ $u_n = x_n\cos a + y_n\sin a$

គេទាញបាន $u_{n+1} = \cos a . u_n$ នាំឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណី

មាត្រមានរេសុង $q_u = \cos a$ ។

ដកសមីការ (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$x_{n+1}\cos a - y_{n+1}\sin a = \sin a(x_n\cos a - y_n\sin a)$$

ដោយ $v_n = x_n\cos a - y_n\sin a$ គេទាញ

$v_{n+1} = \sin a . v_n$

នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q_v = \sin a$ ។

ខ.គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a

គេមាន $u_0 = x_0\cos a + y_0\sin a = \cos a$

គេបាន $u_n = u_0 \times q_u{}^n = \cos a . \cos^n a = \cos^{n+1} a$

ហើយ $v_0 = x_0\cos a - y_0\sin a = \cos a$

គេបាន $v_n = v_0 \times q_v{}^n = \cos a.\sin^n a$

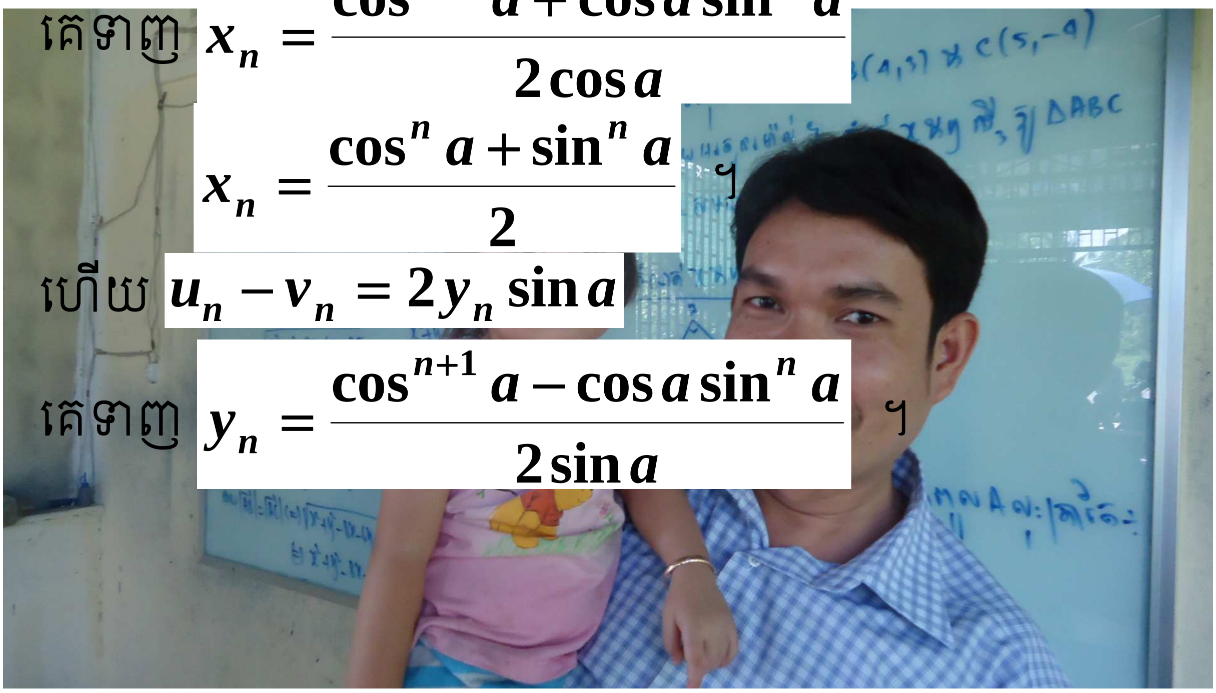
ដូចនេះ $u_n = \cos^{n+1} a$, $v_n = \cos a \sin^n a$ ។

គ. ទាញរក x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a

ដោយ $u_n = x_n \cos a + y_n \sin a$

និង $v_n = x_n \cos a - y_n \sin a$

គេបាន $u_n + v_n = 2x_n \cos a$



គេទាញ $x_n = \dfrac{\cos^{n+1} a + \cos a \sin^n a}{2\cos a}$

$$x_n = \frac{\cos^n a + \sin^n a}{2} \text{ ។}$$

ហើយ $u_n - v_n = 2y_n \sin a$

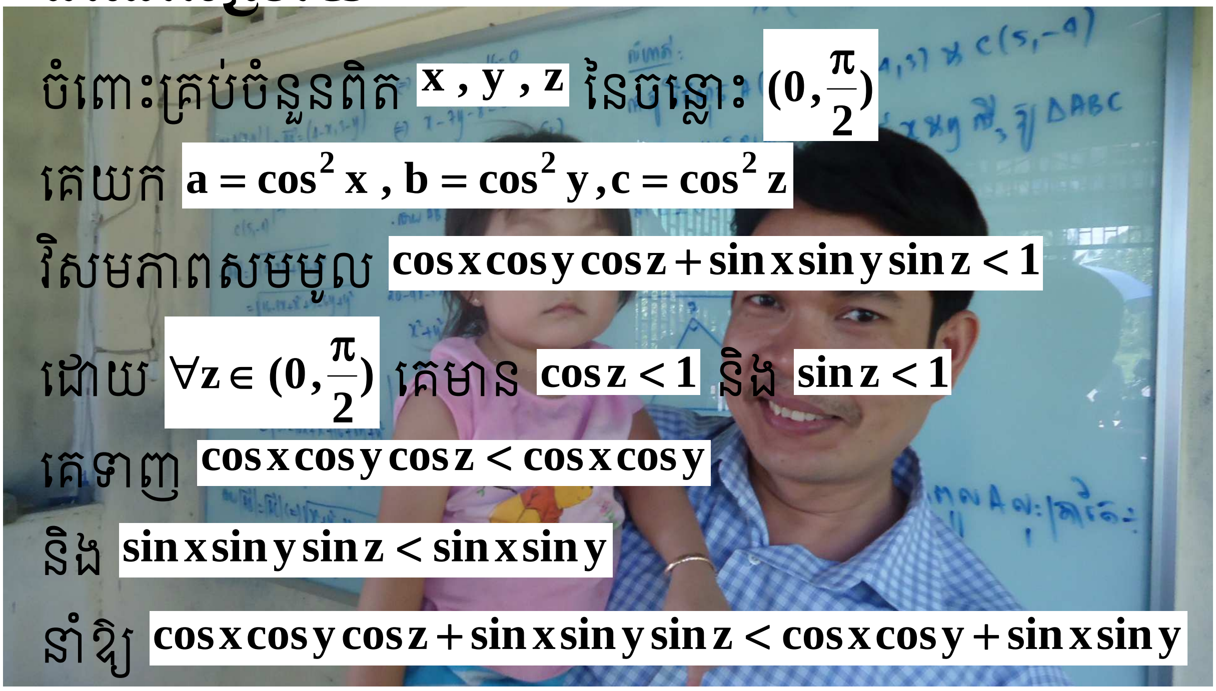
គេទាញ $y_n = \dfrac{\cos^{n+1} a - \cos a \sin^n a}{2\sin a}$ ។

លំហាត់ទី៨៤

គេយក a, b, c ជាចំនួនពិតនៃចន្លោះ $(0, 1)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$

ដំណោះស្រាយ



ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, y, z នៃចន្លោះ $(0, \frac{\pi}{2})$

គេយក $a = \cos^2 x$, $b = \cos^2 y, c = \cos^2 z$

វិសមភាពសមមូល $\cos x \cos y \cos z + \sin x \sin y \sin z < 1$

ដោយ $\forall z \in (0, \frac{\pi}{2})$ គេមាន $\cos z < 1$ និង $\sin z < 1$

គេទាញ $\cos x \cos y \cos z < \cos x \cos y$

និង $\sin x \sin y \sin z < \sin x \sin y$

នាំឱ្យ $\cos x \cos y \cos z + \sin x \sin y \sin z < \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$$\cos x \cos y \cos z + \sin x \sin y \sin z < \cos(x-y)$$

ដោយ $\cos(x-y) \le 1$ នោះ $\cos x \cos y \cos z + \sin x \sin y \sin z < 1$

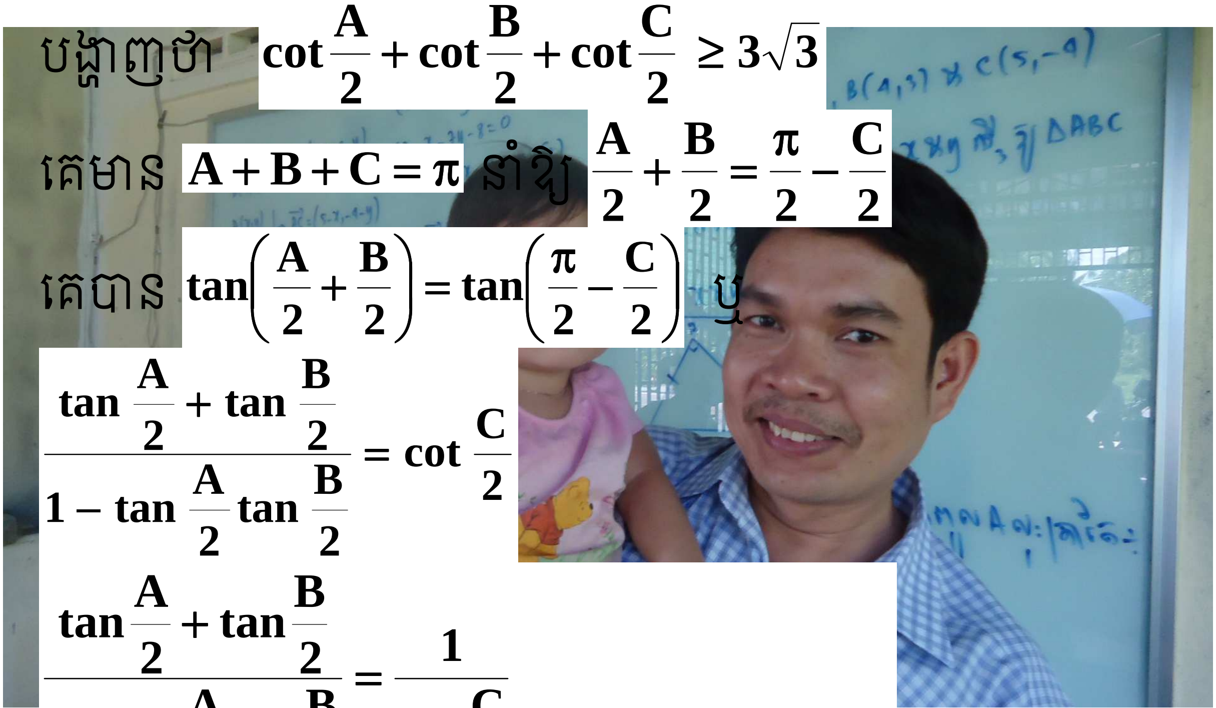
ដូចនេះ $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$ ។

លំហាត់ទី៨៥

គេឱ្យ $A\,;\,B\,;C$ ជាមុំក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}$

ដំណោះស្រាយ



បង្ហាញថា $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}$

គេមាន $A+B+C=\pi$ នាំឱ្យ $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$

គេបាន $\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$ ឬ

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\cot\frac{C}{2}$$

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\tan\frac{C}{2}(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2})=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ គេបាន ៖

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

ដោយ $0 < A ; B ; C < \pi$ នោះ $0 < \frac{A}{2} ; \frac{B}{2} ; \frac{C}{2} < \frac{\pi}{2}$

គេបាន $\cot\frac{A}{2} > 0$; $\cot\frac{B}{2} > 0$; $\cot\frac{C}{2} > 0$

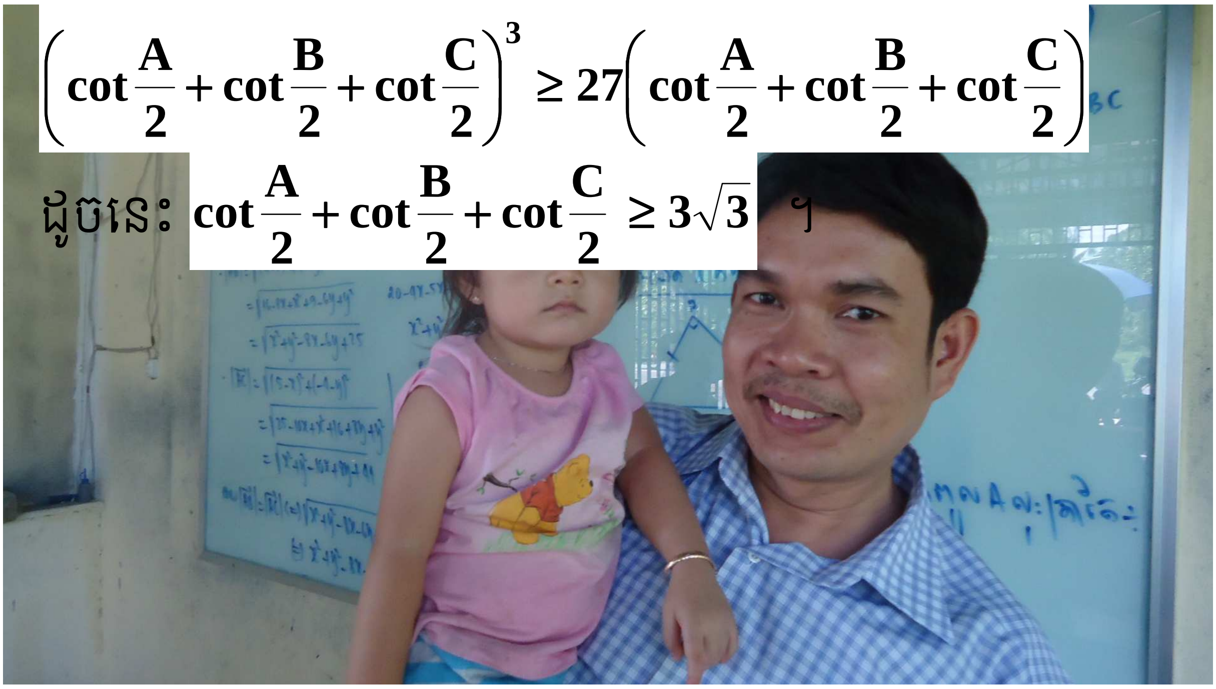
តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេបាន ៖

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} \geq 3\sqrt[3]{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}$$

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} \geq 3\sqrt[3]{\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}}$$

$$\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)^3 \geq 27\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$$

ដូចនេះ $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$ ។

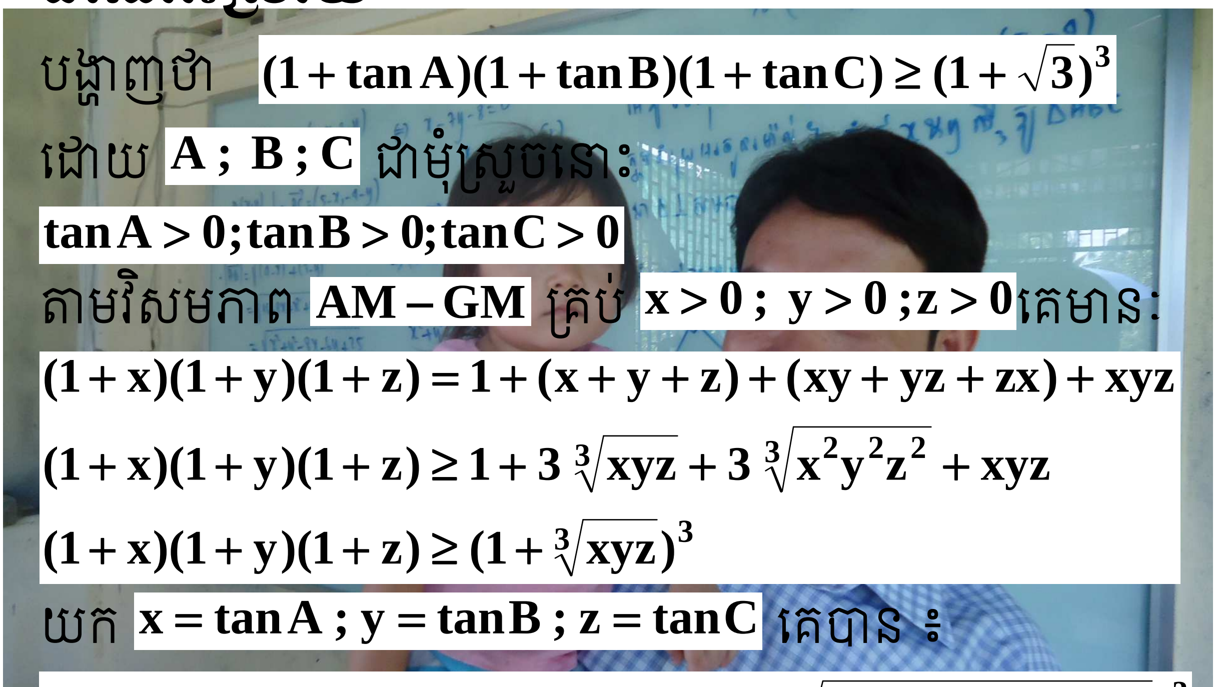


លំហាត់ទី៨៦

គេឱ្យ $A\,;\,B\,;\,C$ ជាមុំស្រួចក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C)\ge(1+\sqrt{3})^3$

ដំណោះស្រាយ



បង្ហាញថា $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C)\ge(1+\sqrt{3})^3$

ដោយ $A\,;\,B\,;\,C$ ជាមុំស្រួចនោះ

$\tan A>0;\tan B>0;\tan C>0$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គ្រប់ $x>0\,;\,y>0\,;z>0$ គេមាន:

$$(1+x)(1+y)(1+z)=1+(x+y+z)+(xy+yz+zx)+xyz$$

$$(1+x)(1+y)(1+z)\ge 1+3\sqrt[3]{xyz}+3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}+xyz$$

$$(1+x)(1+y)(1+z)\ge(1+\sqrt[3]{xyz})^3$$

យក $x=\tan A\,;\,y=\tan B\,;\,z=\tan C$ គេបាន ៖

$$(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C)\ge(1+\sqrt{\tan A\tan B\tan C})^3$$

គេមាន $\tan(A+B)=\tan(\pi-C)$

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$$

គេទាញ $\tan A+\tan B+\tan B=\tan A\tan B\tan C$

$$x+y+z=xyz$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន ៖

$x+y+z \ge 3\sqrt[3]{xyz}$

$xyz \ge 3\sqrt[3]{xyz}$

គេទាញ $xyz \ge 3\sqrt{3}$ ឬ $\tan A\tan B\tan C \ge 3\sqrt{3}$

គេបាន $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan B) \ge (1+\sqrt[3]{3\sqrt{3}})^3$

ដូចនេះ $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C) \ge (1+\sqrt{3})^3$ ។

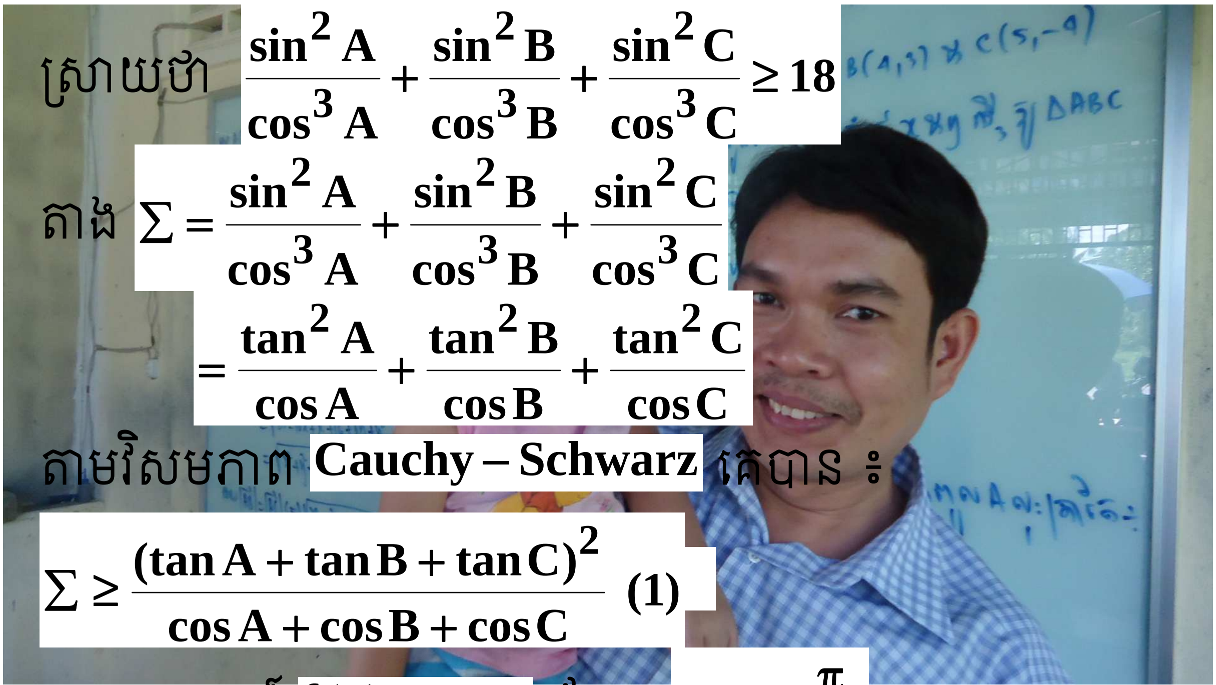
✧✧✧✧✧
✧✧✧✧
✧✧✧
✧✧
✧

លំហាត់ទី៨៧

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ A,B,C ជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\frac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\frac{\sin^2 C}{\cos^3 C}\geq 18$

ដំណោះស្រាយ



ស្រាយថា $\frac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\frac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\frac{\sin^2 C}{\cos^3 C}\geq 18$

តាង $\sum=\frac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\frac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\frac{\sin^2 C}{\cos^3 C}$

$$=\frac{\tan^2 A}{\cos A}+\frac{\tan^2 B}{\cos B}+\frac{\tan^2 C}{\cos C}$$

តាមវិសមភាព Cauchy – Schwarz គេបាន ៖

$$\sum\geq\frac{(\tan A+\tan B+\tan C)^2}{\cos A+\cos B+\cos C}\quad(1)$$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\tan x$ ដែល $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

គេបាន $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

$$f''(x)=2\tan x(1+\tan^2 x)>0$$

តាមវិសមភាព Jensen គេបាន ៖

$$f(A)+f(B)+f(C)\geq 3f(\frac{A+B+C}{3})$$

ឬ $\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\tan(\frac{A+B+C}{3})=3\tan\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$

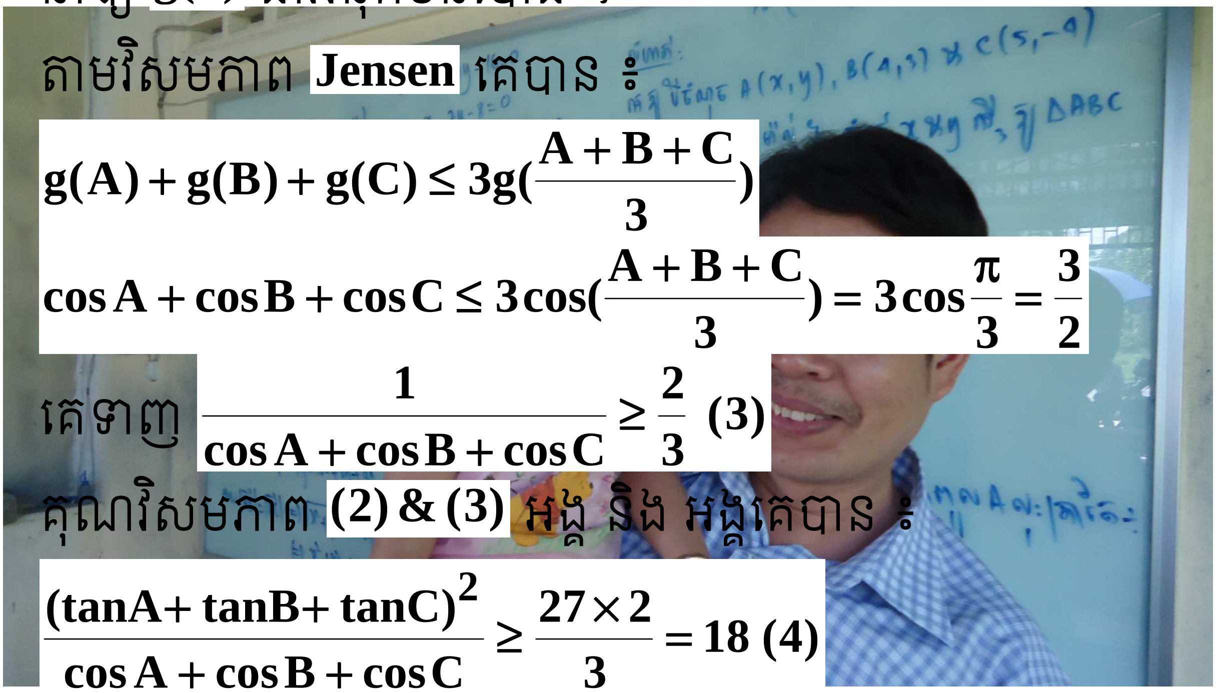
គេទាញ $(\tan A+\tan B+\tan C)^2\geq 27$ (2)

តាងអនុគមន៍ $g(x)=\cos x$ ដែល $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

គេបាន $g'(x)=-\sin x$

$$g''(x)=-\cos x<0\ ,\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$$

នាំឱ្យ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ប៉ោង ។



តាមវិសមភាព Jensen គេបាន ៖

$$g(A)+g(B)+g(C)\leq 3g(\frac{A+B+C}{3})$$

$$\cos A+\cos B+\cos C\leq 3\cos(\frac{A+B+C}{3})=3\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$$

គេទាញ $\frac{1}{\cos A+\cos B+\cos C}\geq\frac{2}{3}$ (3)

គុណវិសមភាព (2) & (3) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$\frac{(\tan A+\tan B+\tan C)^2}{\cos A+\cos B+\cos C}\geq\frac{27\times 2}{3}=18\ (4)$$

តាម (1) & (4) គេទាញបាន $\sum\geq 18$ ។

ដូចនេះ $\frac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\frac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\frac{\sin^2 C}{\cos^3 C}\geq 18$ ។

លំហាត់ទី៨៨

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ

$\sin^2 B+\sin^2 C=1+\sin B\sin C\cos A$ ។

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង ។

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសគេមាន $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

គេទាញ $a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$

ដោយ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ (ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស)

$4R^2\sin^2 A=4R^2(\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A)$

$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A \quad (1)$

តែ $\sin^2 B+\sin^2 C=1+\sin B\sin C\cos A \quad (2)$

យកសមីការ (2) ជួសនៅក្នុង (1) គេទាញ $\sin^2 A=1$

នាំឲ្យ $A=90^0$ ។ ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែង ។

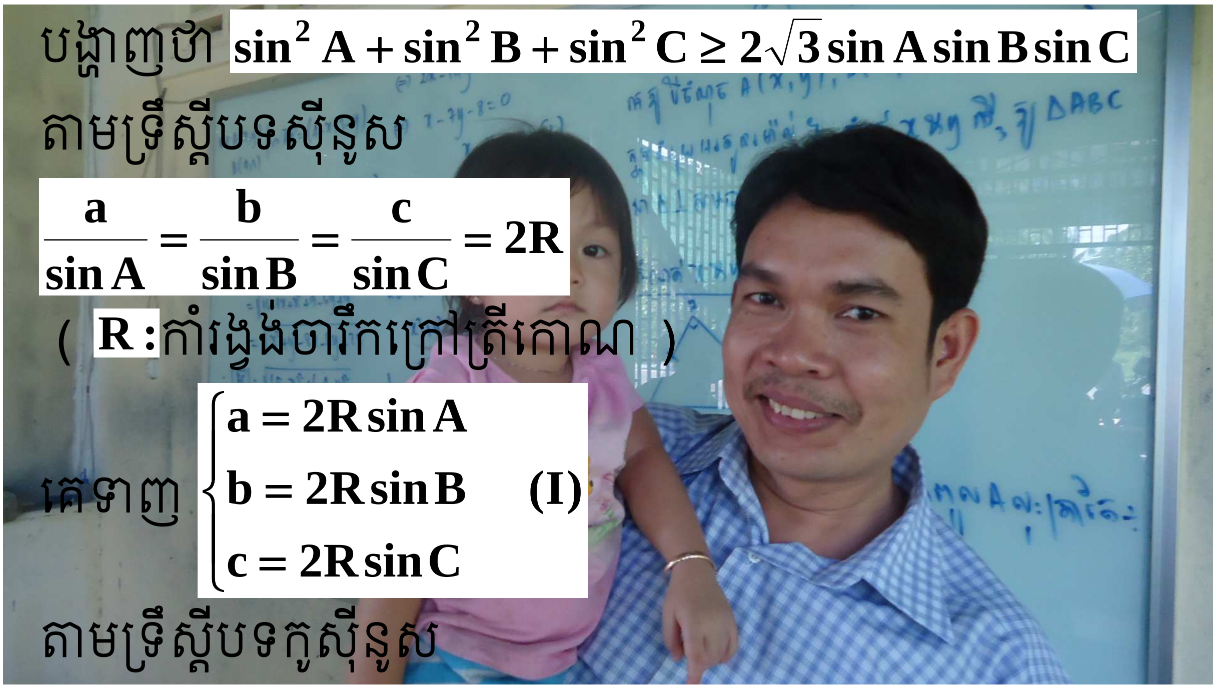
លំហាត់ទី៨៩

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq 2\sqrt{3}\sin A \sin B \sin C$$

ដំណោះស្រាយ



បង្ហាញថា $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq 2\sqrt{3}\sin A \sin B \sin C$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនួស

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(R :កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ)

គេទាញ $\begin{cases} a = 2R\sin A \\ b = 2R\sin B \\ c = 2R\sin C \end{cases} \quad (I)$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនួស

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad (II)$$

យក (I) ជួសក្នុង (II) គេបាន ៖

$$4R^2\sin^2 A = 4R^2\sin^2 B + 4R^2\sin^2 C - 8R^2\sin B\sin C\cos A$$

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A$$

គេទាញ $\cos A = \dfrac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2\sin B\sin C}$

ហេតុនេះ $\cot A = \dfrac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2\sin B\sin C\sin A} \quad (1)$

ដូចគ្នាដែរ $\cot B = \dfrac{\sin^2 C + \sin^2 A - \sin^2 B}{2\sin C \sin A \sin B}$ (2)

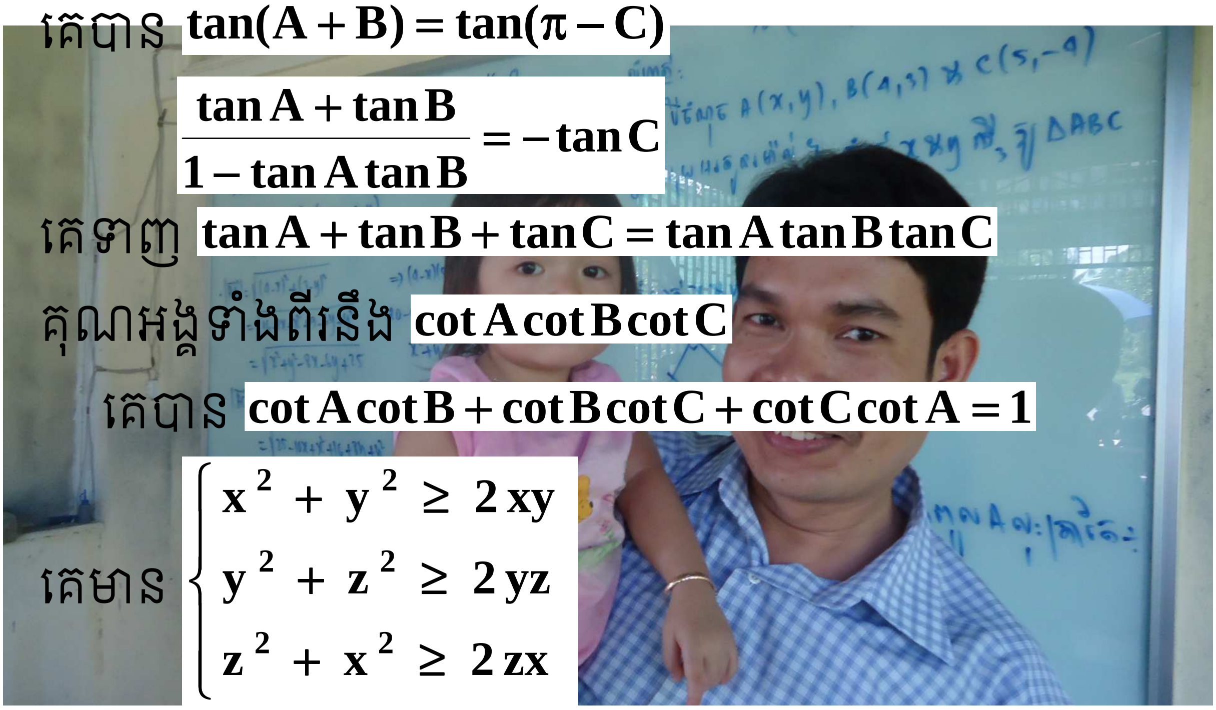
ហើយនឹង $\cot C = \dfrac{\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C}$ (3)

បូកទំនាក់ទំនង (1) ; (2) និង (3) គេទទួលបាន ៖

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C} \quad (4)$$

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $A + B + C = \pi$ ឬ $A + B = \pi - C$

គេបាន $\tan(A + B) = \tan(\pi - C)$



$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$$

គេទាញ $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cot A \cot B \cot C$

គេបាន $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$

គេមាន $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2xy \\ y^2 + z^2 \geq 2yz \\ z^2 + x^2 \geq 2zx \end{cases}$

នោះគេបាន $2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + zx)$

ឬ $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2xy + 2yz + 2zx$ គេបាន ៖

$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$

យក $x = \cot A$; $y = \cot B$; $z = \cot C$

គេបាន $(\cot A + \cot B + \cot C)^2 \geq 3$

នាំឱ្យ $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$ (5)

តាម (4) និង (5) គេបាន $\dfrac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C} \geq \sqrt{3}$

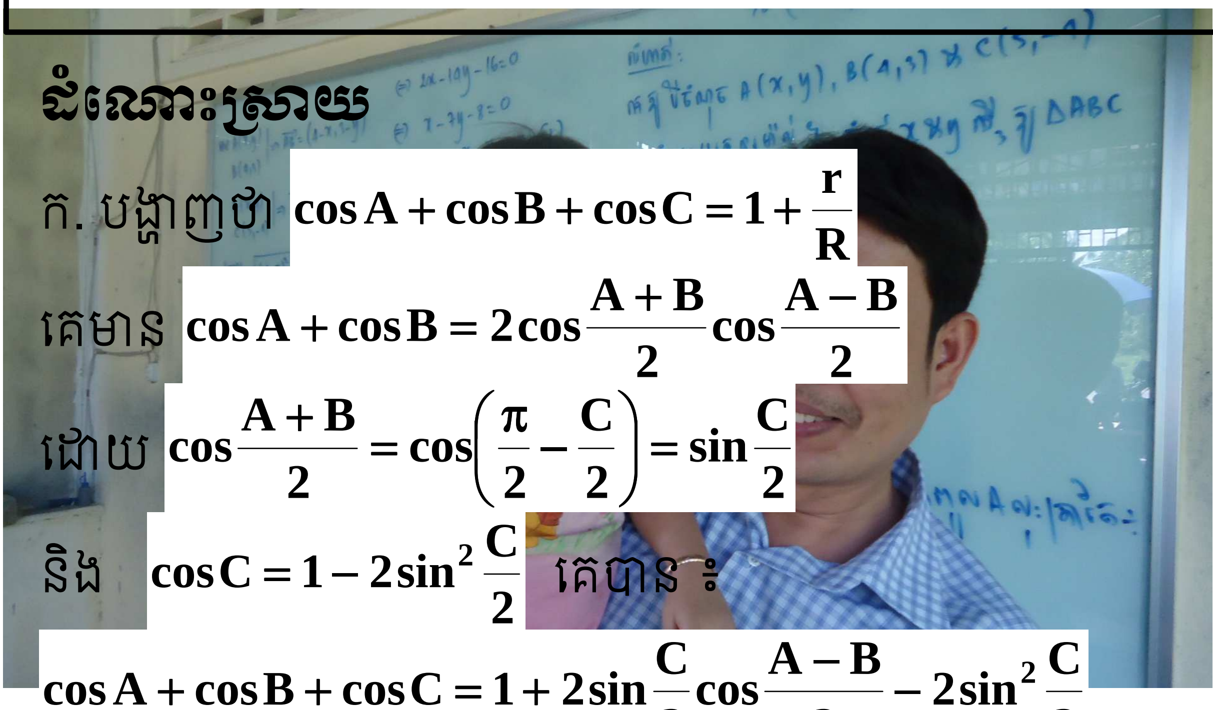
ដូចនេះ $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq 2\sqrt{3}\sin A \sin B \sin C$ ។

លំហាត់ទី៩០

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ តាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$

ខ. បើ ABC ជាត្រីកោណកែងនោះចូរស្រាយថា $R\geq(\sqrt{2}+1)r$



ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$

គេមាន $\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

ដោយ $\cos\frac{A+B}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}$

និង $\cos C=1-2\sin^2\frac{C}{2}$ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}\cos A+\cos B+\cos C&=1+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}\\&=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\\&=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\\&=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\end{aligned}$$

គេបាន $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

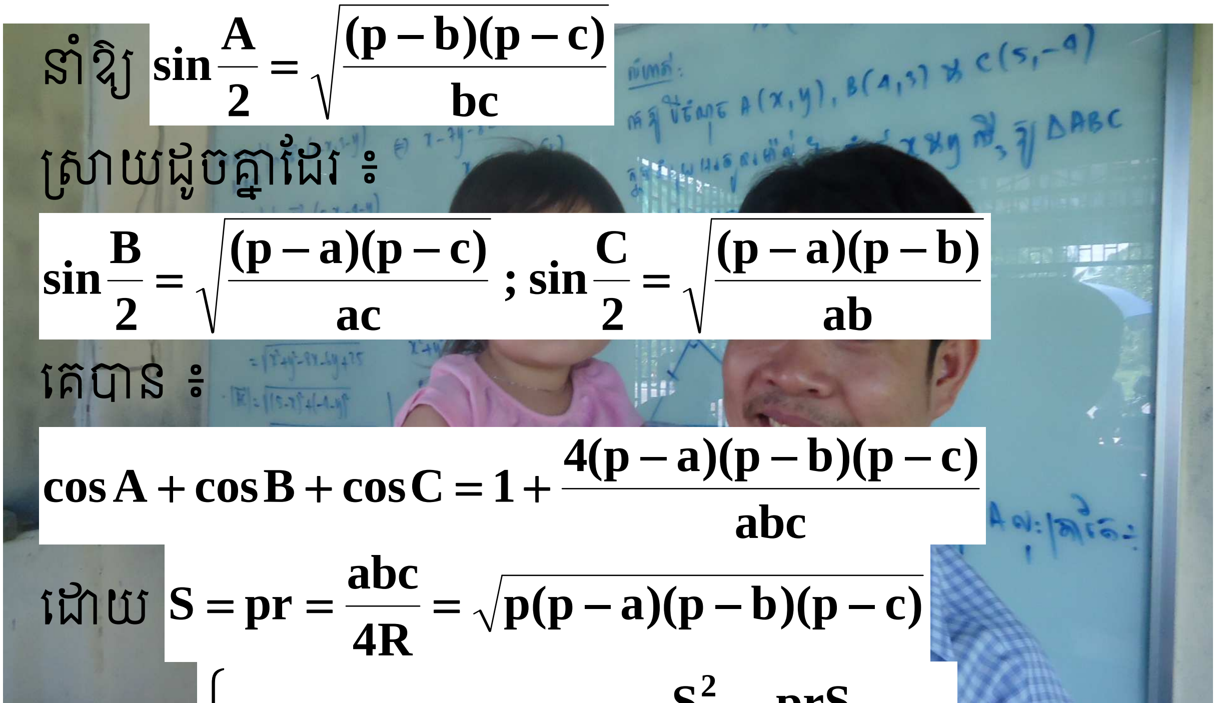
តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស ៖

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ដោយ $\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(1 - 2\sin^2\frac{A}{2})$

គេទាញ $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$

$$= \frac{(2p-2c)(2p-2b)}{4bc} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$$



នាំឱ្យ $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ ៖

$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$; $\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

គេបាន ៖

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

ដោយ $S = pr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

គេទាញ $\begin{cases} (p-a)(p-b)(p-c) = \frac{S^2}{p} = \frac{prS}{p} = Sr \\ abc = 4SR \end{cases}$

នាំឱ្យ $\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{r}{4R}$

ដូចនេះ៖ $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$

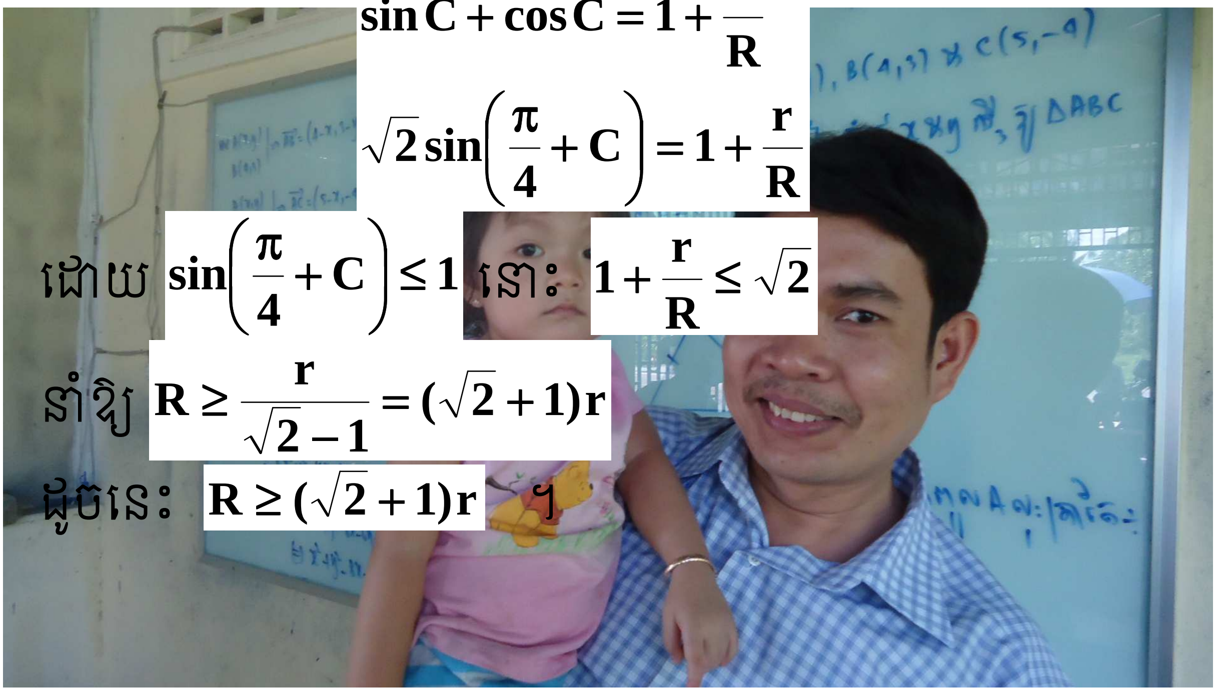
ខ. បើ ABC ជាត្រីកោណកែងនោះចូរស្រាយថា $R \ge (\sqrt{2}+1)r$

ឧបមាថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A នោះ

$$A=\frac{\pi}{2}; B=\frac{\pi}{2}-C$$

ដោយ $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$

គេបាន $0+\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)+\cos C=1+\frac{r}{R}$



$$\sin C+\cos C=1+\frac{r}{R}$$

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+C\right)=1+\frac{r}{R}$$

ដោយ $\sin\left(\frac{\pi}{4}+C\right)\le 1$ នោះ $1+\frac{r}{R}\le\sqrt{2}$

នាំឱ្យ $R\ge\frac{r}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)r$

ដូចនេះ $R\ge(\sqrt{2}+1)r$ ។

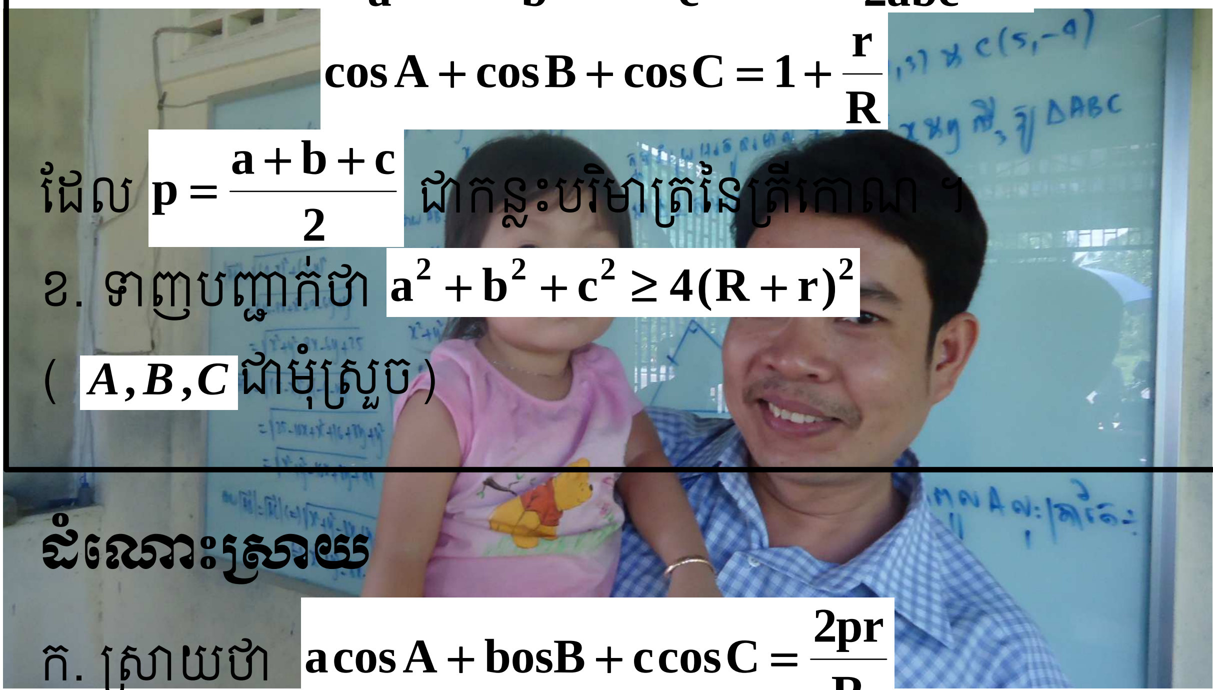
លំហាត់ទី៩១

គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{a,b,c}$ ។ តាង $\mathbf{r}$ និង $\mathbf{R}$ រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ $\Delta\ \mathbf{ABC}$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $\mathbf{a\cos A + bosB + c\cos C = \dfrac{2pr}{R}}$

$$\mathbf{\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}}$$

$$\mathbf{\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}}$$



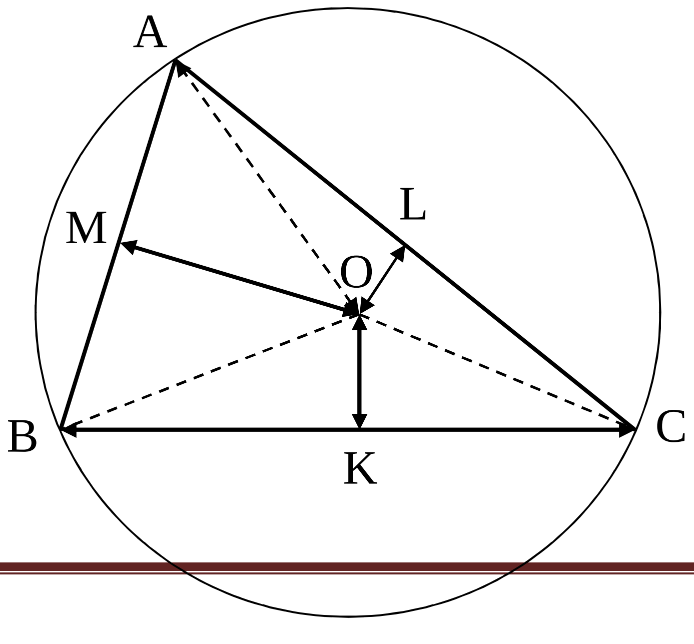
ដែល $\mathbf{p = \dfrac{a+b+c}{2}}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $\mathbf{a^2+b^2+c^2 \geq 4(R+r)^2}$

(A,B,C ជាមុំស្រួច)

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $\mathbf{a\cos A + bosB + c\cos C = \dfrac{2pr}{R}}$



គេមាន $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BOK$

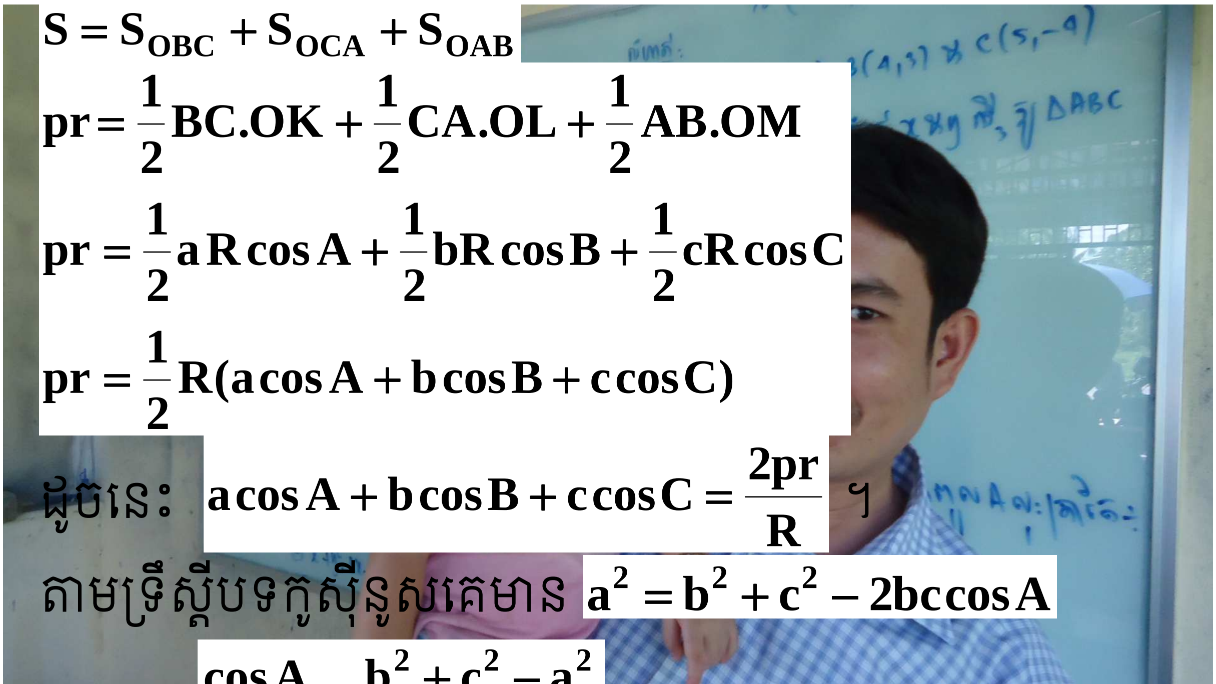
(មុំផ្ចិត និង មុំចារឹកក្នុងរង្វង់)

ក្នុងត្រីកោណកែង OKB គេមាន $\cos\angle BOK = \frac{OK}{OB} = \frac{OK}{R}$

គេទាញ $OK = R\cos\angle BOK = R\cos A$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $OL = R\cos B$, $OM = R\cos C$

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC នោះគេបាន ៖



$$S = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB}$$

$$pr = \frac{1}{2}BC.OK + \frac{1}{2}CA.OL + \frac{1}{2}AB.OM$$

$$pr = \frac{1}{2}aR\cos A + \frac{1}{2}bR\cos B + \frac{1}{2}cR\cos C$$

$$pr = \frac{1}{2}R(a\cos A + b\cos B + c\cos C)$$

ដូចនេះ $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{2pr}{R}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

គេទាញ $\frac{\cos A}{a} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc}$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន ៖

$\frac{\cos B}{b} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2abc}$ និង $\frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2abc}$

ដូចនេះ $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន ៖

$$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)-(a^3+b^3+c^3)}{2abc}$$

$$=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-2(a^3+b^3+c^3)}{2abc} \quad (*)$$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុងគេមាន $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន ៖

$$p(p-a)(p-b)(p-c)=p^2r^2$$

$$(p-a)(p-b)(p-c)=pr^2$$

$$p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p-abc=pr^2$$

ដោយ $a+b+c=2p$ ហើយ $S=\frac{abc}{4R}=pr$ នោះ $abc=4Rpr$

គេបាន $p^3-2p^3+(ab+bc+ca)p-4Rpr=pr^2$

គេទាញ $ab+bc+ca=p^2+r^2+4rR$

ដោយ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

គេបាន $a^2+b^2+c^2=4p^2-2(p^2+r^2+4rR)$

ឬ $a^2+b^2+c^2=2(p^2-r^2-4rR)$

ហើយ

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

គេទាញបាន $a^3+b^2+c^3=2(p^3-3pr^2-6Rpr)$

ទំនាក់ទំនង (*) អាចសរសេរ ៖

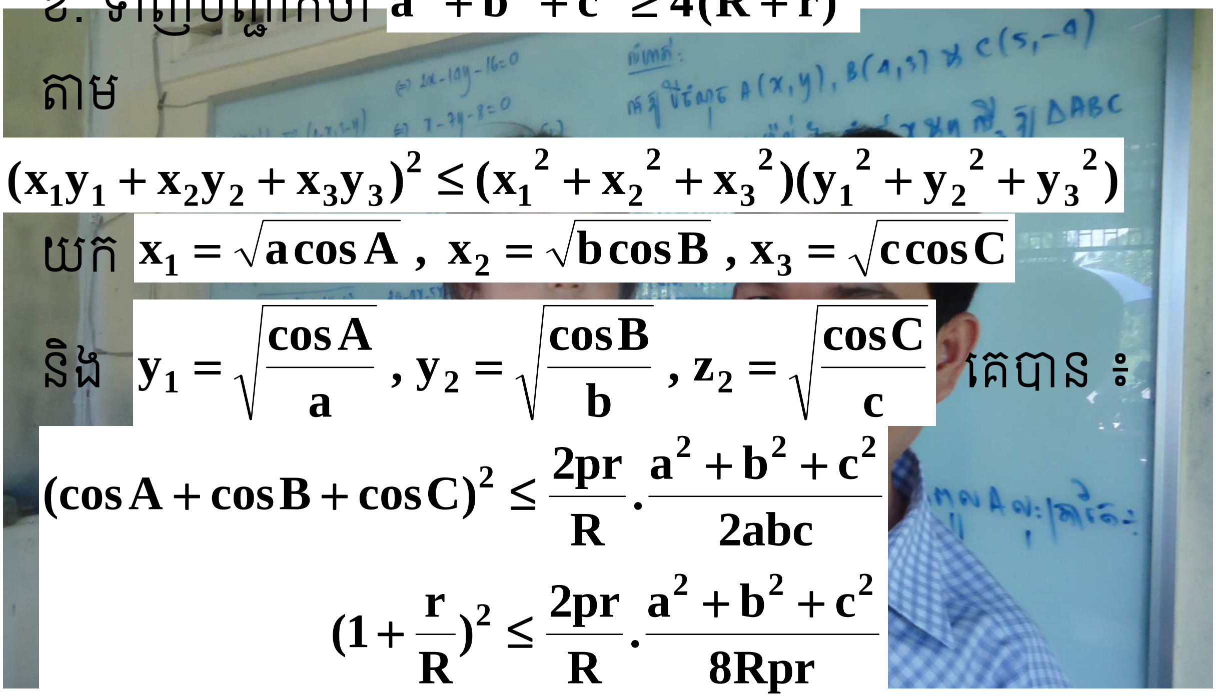
$$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{4p(p^2-r^2-4Rr)-(p^3-3pr^2-6Rpr)}{8Rpr}$$

$$=\frac{p^2-r^2-4Rr-p^2+3r^2+6Rr}{2Rr}$$

$$=\frac{2r^2+2Rr}{2Rr}=\frac{r}{R}+1$$

ដូចនេះ៖ $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $a^2+b^2+c^2\geq 4(R+r)^2$



តាម

$$(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\leq(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)(y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2)$$

យក $x_1=\sqrt{a\cos A}$, $x_2=\sqrt{b\cos B}$, $x_3=\sqrt{c\cos C}$

និង $y_1=\sqrt{\frac{\cos A}{a}}$, $y_2=\sqrt{\frac{\cos B}{b}}$, $z_2=\sqrt{\frac{\cos C}{c}}$ គេបាន ៖

$$(\cos A+\cos B+\cos C)^2\leq\frac{2pr}{R}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

$$(1+\frac{r}{R})^2\leq\frac{2pr}{R}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{8Rpr}$$

$$\frac{(r+R)^2}{R^2}\leq\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}$$

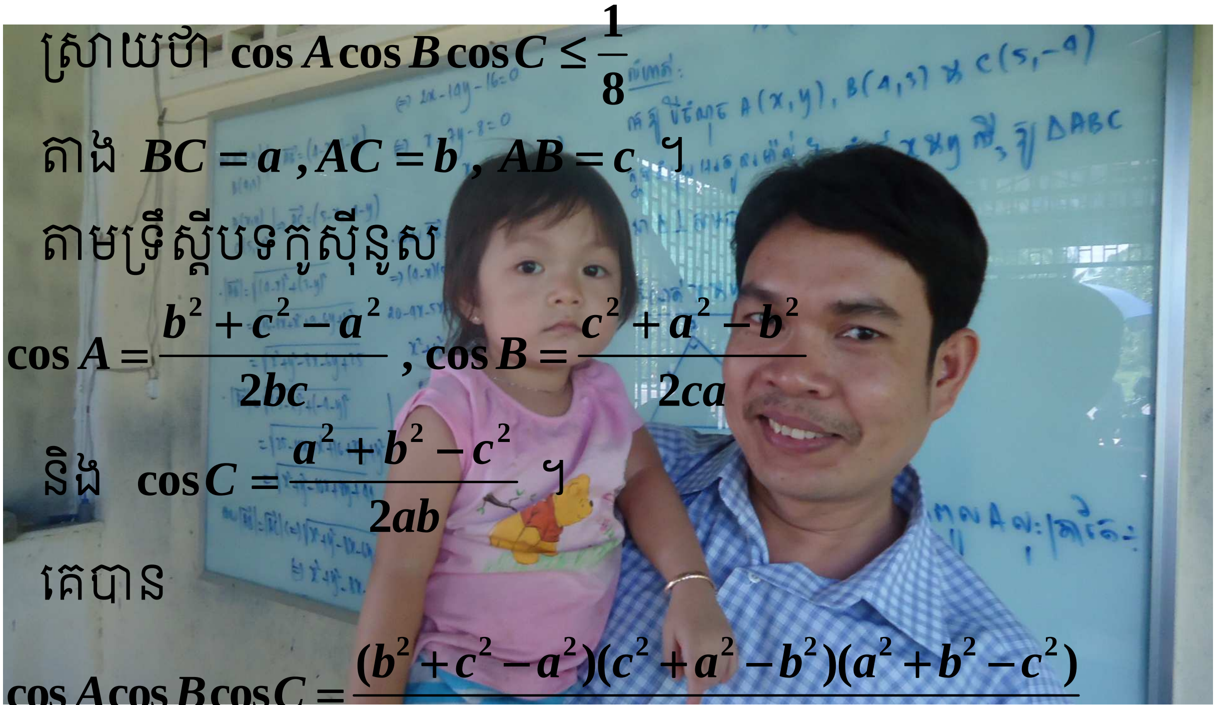
ដូចនេះ៖ $a^2+b^2+c^2\geq 4(R+r)^2$ ។

លំហាត់ទី៩២

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរស្រាយថា $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$ ។

ដំណោះស្រាយ



ស្រាយថា $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$

តាង $BC = a\,, AC = b\,, AB = c$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\,, \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

និង $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ។

គេបាន

$$\cos A\cos B\cos C = \frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{8a^2b^2c^2}$$

តាង $\begin{cases} x = b^2+c^2-a^2 \\ y = c^2+a^2-b^2 \\ z = a^2+b^2-c^2 \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} x+y = 2c^2 \\ y+z = 2a^2 \\ z+x = 2b^2 \end{cases}$

គេបាន $\cos A\cos B\cos C = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន $\begin{cases} x + y \geq 2\sqrt{xy} \\ y + z \geq 2\sqrt{yz} \\ z + x \geq 2\sqrt{zx} \end{cases}$

នាំឲ្យ $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 2\sqrt{xy}.2\sqrt{yz}.2\sqrt{zx} = 8xyz$

គេទាញ $\cos A \cos B \cos C = \dfrac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \dfrac{1}{8}$

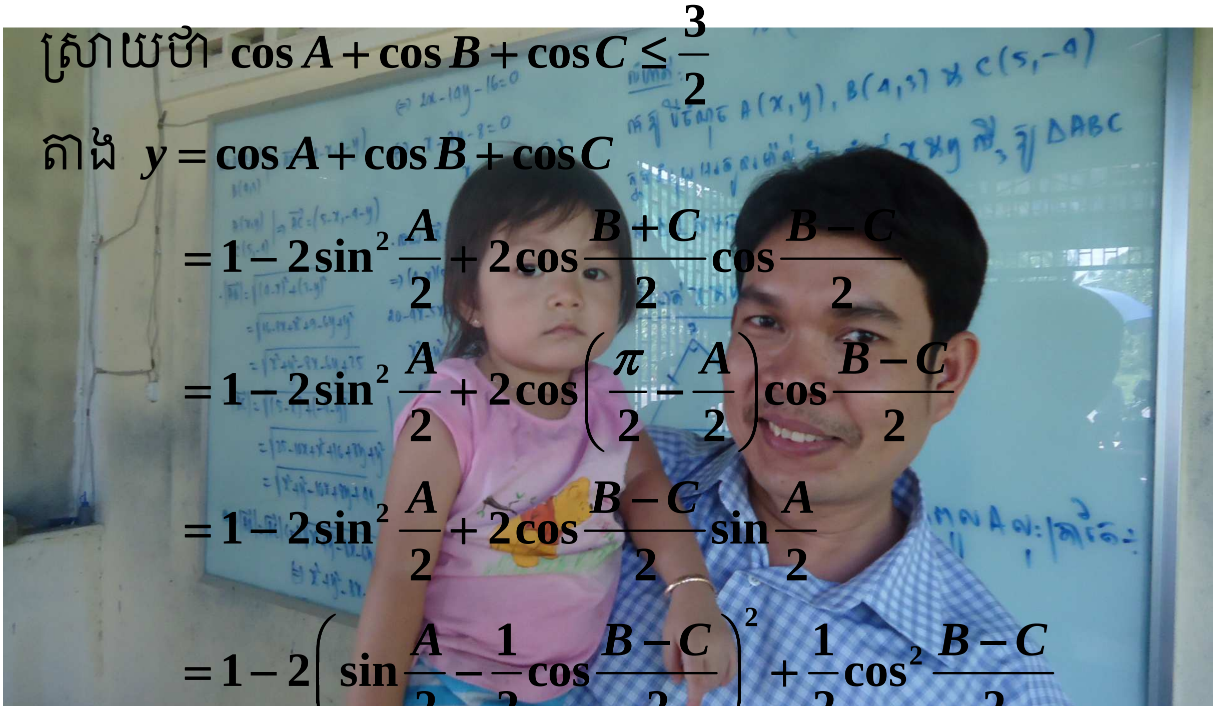
ដូចនេះ $\cos A \cos B \cos C \leq \dfrac{1}{8}$ ។

លំហាត់ទី៩៣

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរស្រាយថា $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ



ស្រាយថា $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

តាង $y=\cos A+\cos B+\cos C$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}$$

$$=1-2\left(\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cos^2\frac{B-C}{2}$$

$$=\frac{3}{2}-2\left[\left(\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2\frac{B-C}{2}\right]$$

ដោយ $\left(\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2\frac{B-C}{2}\ge 0$

គេទាញ

$$y=\frac{3}{2}-2\left[\left(\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2\frac{B-C}{2}\right]\le\frac{3}{2}$$

ដូចនេះ $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$ ។

សម្គាល់ ៖

គេអាចស្រាយថា $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$

ដែល r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ។តាមវិសមភាព $Euler$ គេមាន $R\ge 2r$

ឬ $\frac{r}{R}\le\frac{1}{2}$

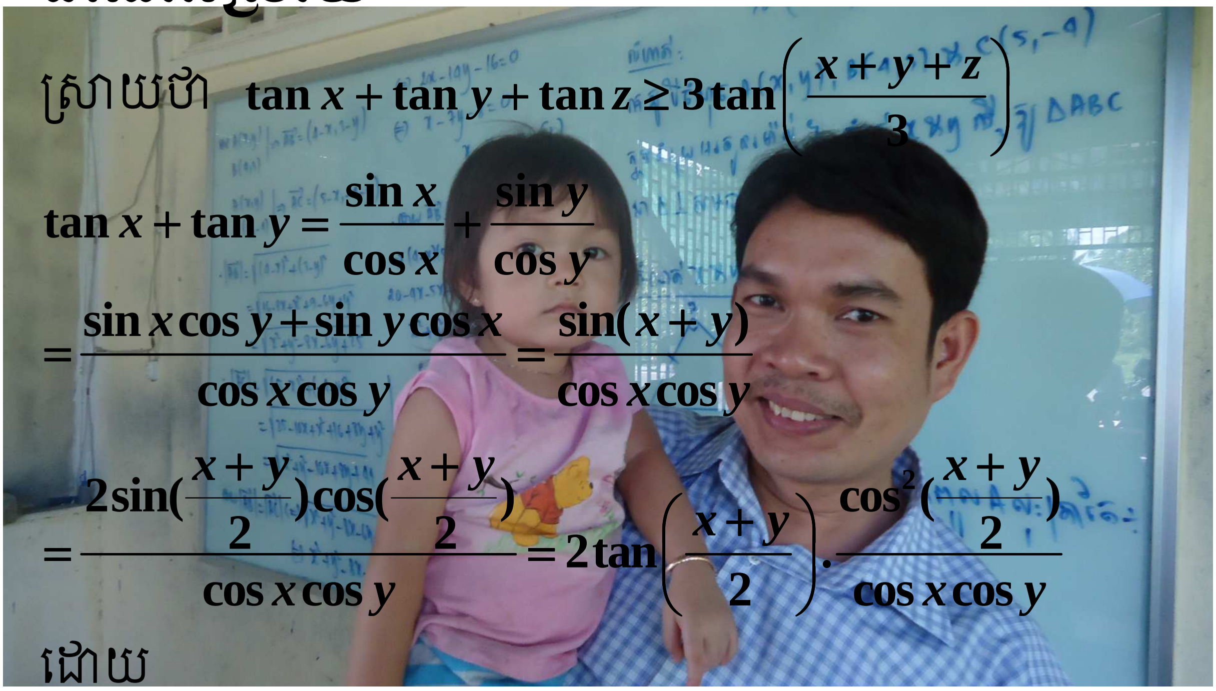
គេបាន $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}\le 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី៩៤

គេឲ្យ x, y, z ជាបីចំនួនពិតនៃចន្លោះ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ។

ចូរស្រាយថា $\tan x + \tan y + \tan z \geq 3\tan\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ



ស្រាយថា $\tan x + \tan y + \tan z \geq 3\tan\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$

$$\tan x + \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}$$

$$= \frac{\sin x\cos y + \sin y\cos x}{\cos x\cos y} = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$$

$$= \frac{2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x+y}{2})}{\cos x\cos y} = 2\tan\left(\frac{x+y}{2}\right).\frac{\cos^2(\frac{x+y}{2})}{\cos x\cos y}$$

ដោយ

$$\cos^2\frac{x+y}{2} = \frac{1+\cos(x+y)}{2} = \frac{1+\cos x\cos y - \sin x\sin y}{2}$$

ឧបមាថា $\frac{\cos^2\frac{x+y}{2}}{\cos x\cos y} \geq 1$ សមមូល $\cos^2\frac{x+y}{2} \geq \cos x\cos y$

សមមូល $\frac{1+\cos x\cos y - \sin x\sin y}{2} \geq \cos x\cos y$

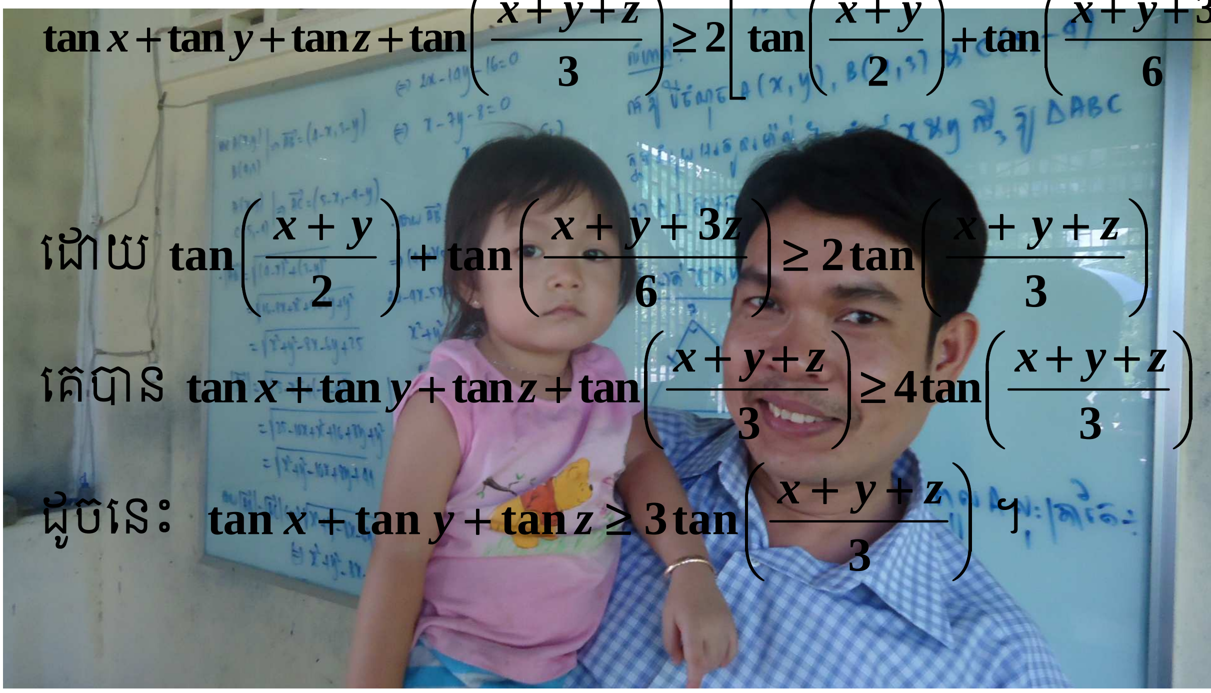
សមមូល $1+\cos x\cos y - \sin x\sin y \geq 2\cos x\cos y$

សម្មូល $\cos x\cos y+\sin x\sin y=\cos(x-y)\le 1$ ពិត

គេទាញបាន $\tan x+\tan y\ge 2\tan\left(\frac{x+y}{2}\right)$ **(1)**

$$\tan z+\tan\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\ge 2\tan\left(\frac{z+\frac{x+y+z}{3}}{2}\right)=2\tan\left(\frac{x+y+4z}{6}\right)\quad\textbf{(2)}$$

បូកវិសមភាព (1) និង (2) គេបាន ៖



$$\tan x+\tan y+\tan z+\tan\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\ge 2\left[\tan\left(\frac{x+y}{2}\right)+\tan\left(\frac{x+y+3z}{6}\right)\right]$$

ដោយ $\tan\left(\frac{x+y}{2}\right)+\tan\left(\frac{x+y+3z}{6}\right)\ge 2\tan\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$

គេបាន $\tan x+\tan y+\tan z+\tan\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\ge 4\tan\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$

ដូចនេះ៖ $\tan x+\tan y+\tan z\ge 3\tan\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$ ។

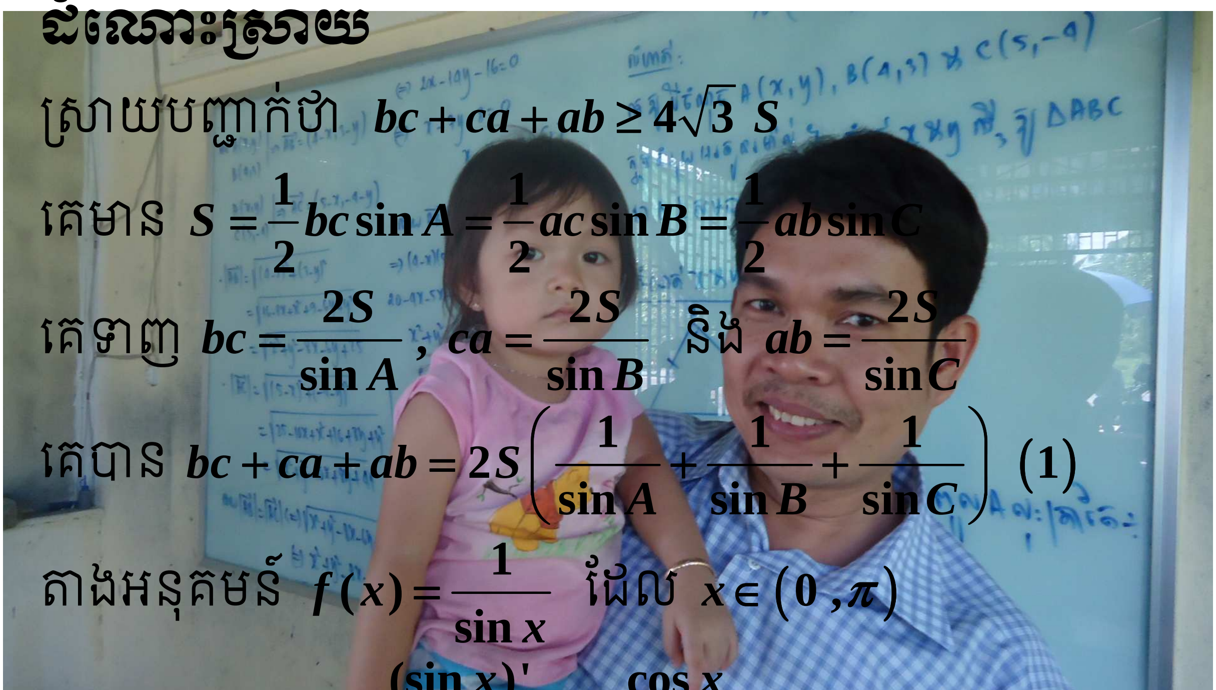
លំហាត់ទី៩៥

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $bc+ca+ab \geq 4\sqrt{3}\ S$?

(S ជាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ)។

ដំណោះស្រាយ



ស្រាយបញ្ជាក់ថា $bc+ca+ab \geq 4\sqrt{3}\ S$

គេមាន $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

គេទាញ $bc=\frac{2S}{\sin A}$, $ca=\frac{2S}{\sin B}$ និង $ab=\frac{2S}{\sin C}$

គេបាន $bc+ca+ab=2S\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)\quad(1)$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ ដែល $x\in(0,\pi)$

គេមាន $f'(x)=-\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

ហើយ

$$f''(x)=-\frac{(\cos x)'\sin^2 x-(\sin^2 x)'\cos x}{\sin^4 x}=\frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x}>0$$

តាមវិសមភាព *Jensen* គេបាន ៖

$$f(A)+f(B)+f(C)\geq 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)=3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

ដោយ $f(A)+f(B)+f(C)=\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}$

ហើយ $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

គេបាន $\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\geq 2\sqrt{3}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $bc+ca+ab\geq 4\sqrt{3}\ S$ ។

ដូចនេះ៖ $bc+ca+ab\geq 4\sqrt{3}\ S$ ។

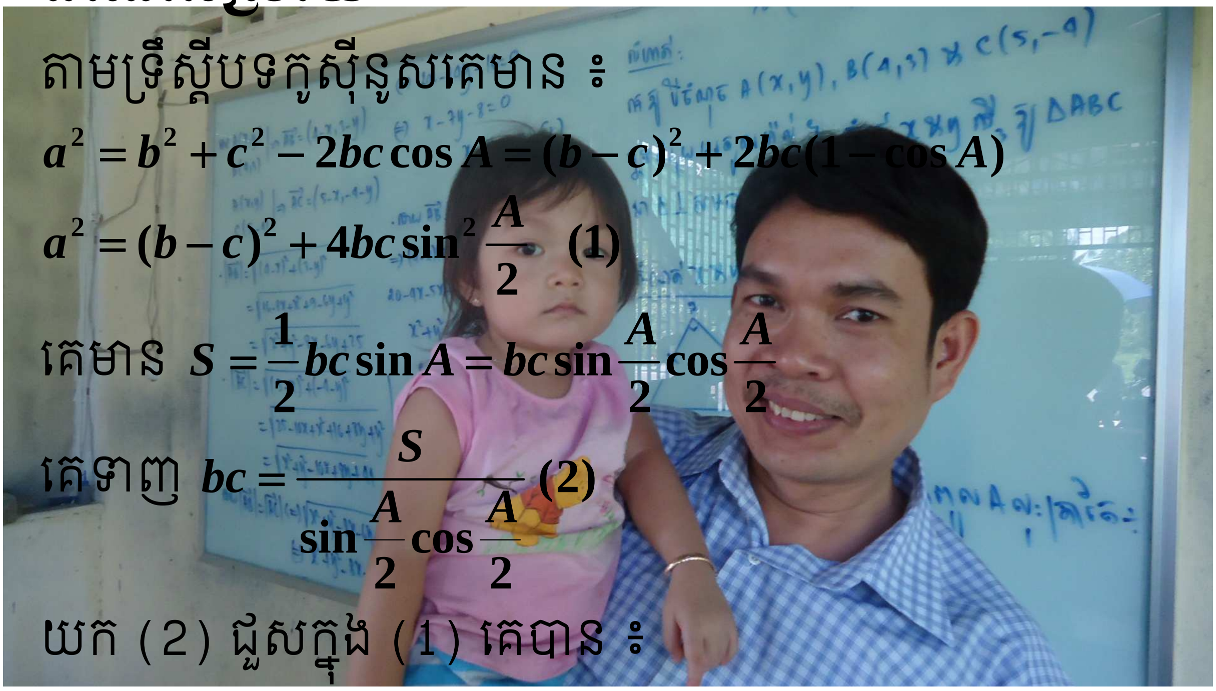
លំហាត់ទី៩៦

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a,b,c ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a^2+b^2+c^2 \ge (b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2+4\sqrt{3}\ S \quad ?$$

(S ជាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ)។

ដំណោះស្រាយ



តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន ៖

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b-c)^2+2bc(1-\cos A)$$

$$a^2=(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{A}{2} \quad (1)$$

គេមាន $S=\frac{1}{2}bc\sin A=bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

គេទាញ $bc=\dfrac{S}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} \quad (2)$

យក (2) ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$a^2=(b-c)^2+4\times\frac{S}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\times\sin^2\frac{A}{2}=(b-c)^2+4S\tan\frac{A}{2} \quad (1)$$

ស្រាយដូចគ្នា $b^2=(c-a)^2+4S\tan\frac{B}{2} \quad (2)$

និង $c^2=(a-b)^2+4S\tan\frac{C}{2} \quad (3)$ ។

បូកសមភាព (1) , (2) និង (3) គេបាន ៖

$$a^2+b^2+c^2=(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2+4S.T \quad (4)$$

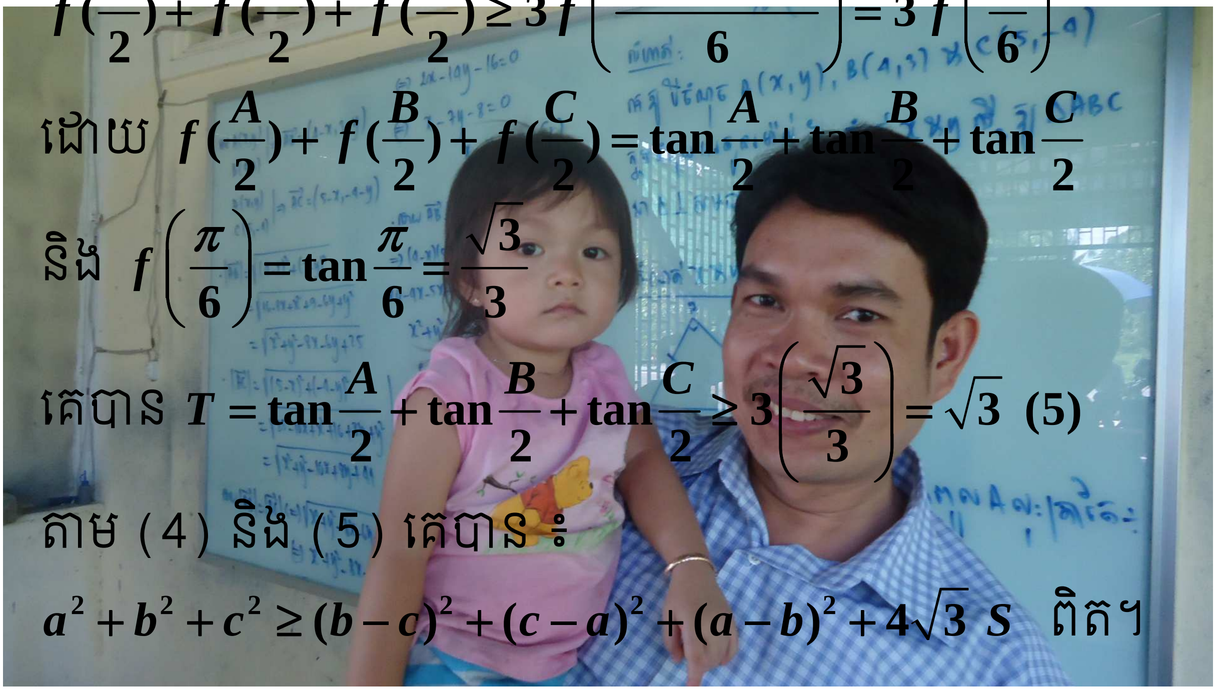
ដែល $T=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}$ ។

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\tan x$ ដែល $0<x<\frac{\pi}{2}$

គេបាន $f'(x)=(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

ហើយ $f''(x)=2(\tan x)'\tan x=2\tan x(1+\tan^2 x)>0$

តាមវិសមភាព *Jensen* គេបាន ៖



$$f(\frac{A}{2})+f(\frac{B}{2})+f(\frac{C}{2})\geq 3f\left(\frac{A+B+C}{6}\right)=3f\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

ដោយ $f(\frac{A}{2})+f(\frac{B}{2})+f(\frac{C}{2})=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}$

និង $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

គេបាន $T=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq 3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\sqrt{3}\ \ (5)$

តាម (4) និង (5) គេបាន ៖

$a^2+b^2+c^2\geq(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2+4\sqrt{3}\,S$ ពិត។

លំហាត់ទី៩៨

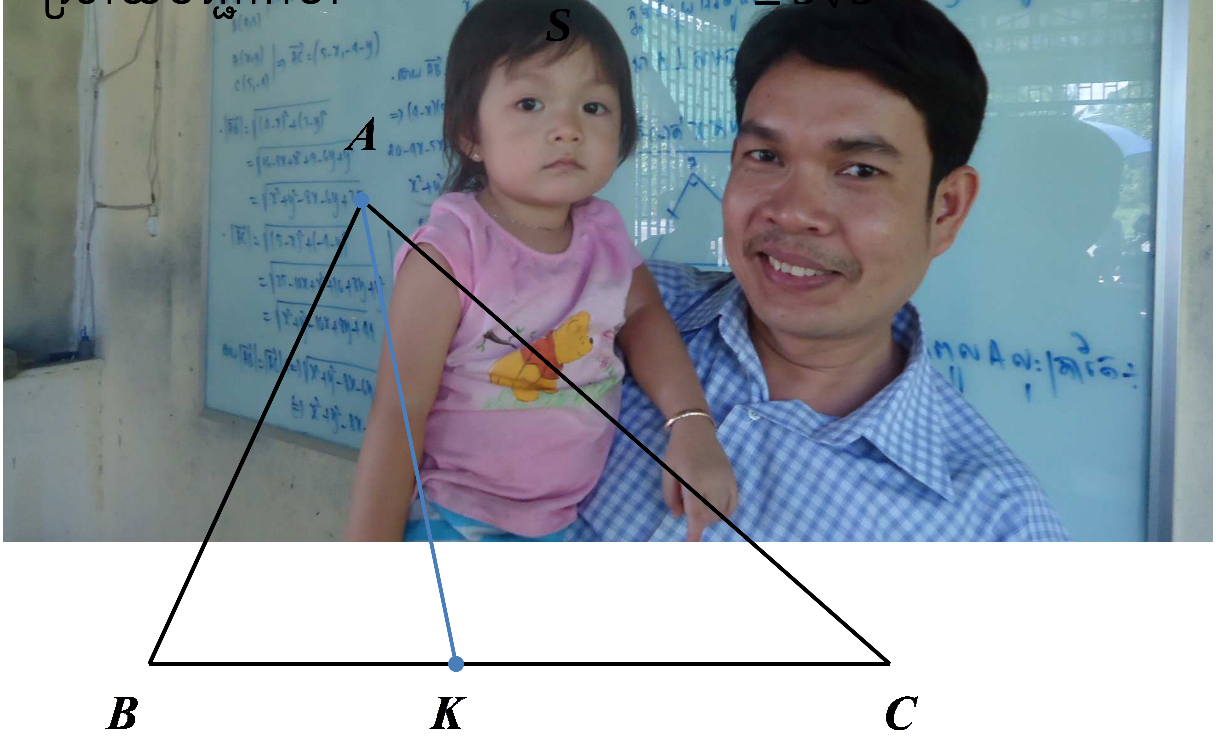
គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានផ្ទៃក្រលា S ។

AK, BL, CM ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A, B, C រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{AK^2+BL^2+CM^2}{S} \geq 3\sqrt{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{AK^2+BL^2+CM^2}{S} \geq 3\sqrt{3}$

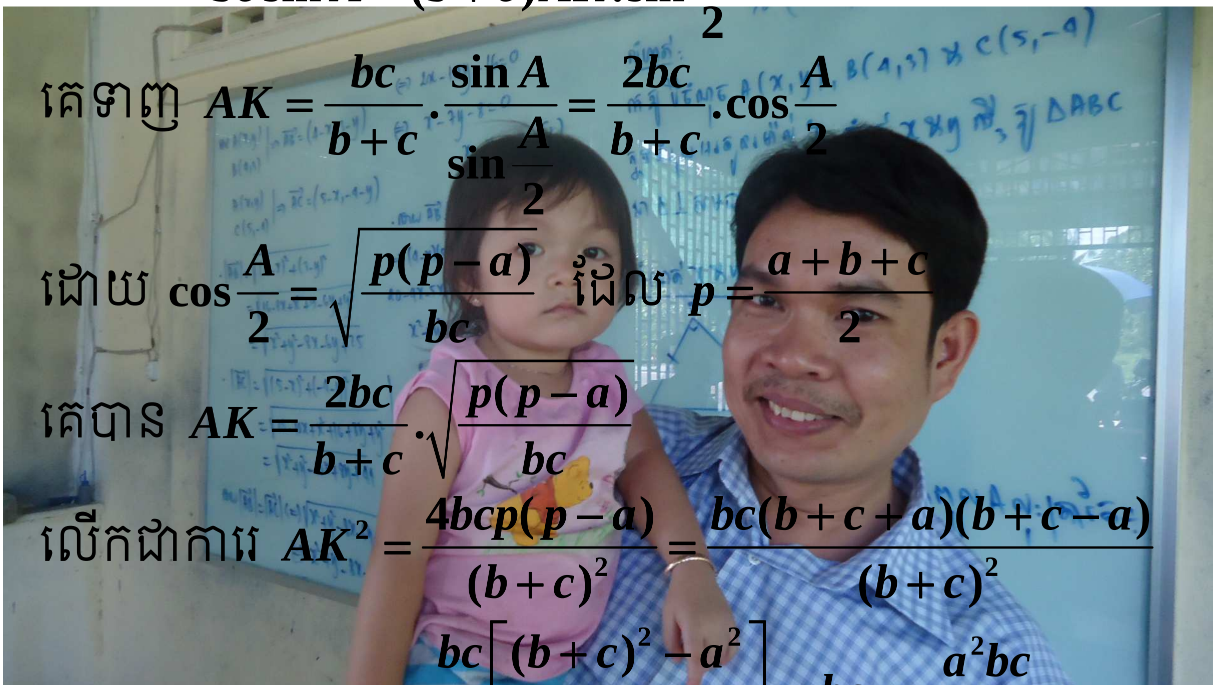


តាង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ ជាជ្រុងនៃត្រីកោណ ។

គេមាន $S_{ABC}=S_{ABK}+S_{AKC}$ ដោយ $\begin{cases} S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A \\ S_{AKC}=\frac{1}{2}c.AK\sin\frac{A}{2} \\ S_{AKC}=\frac{1}{2}AK.b\sin\frac{A}{2} \end{cases}$

គេបាន $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}c.AK\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}b.AK\sin\frac{A}{2}$

$$bc\sin A=(b+c)AK.\sin\frac{A}{2}$$



គេទាញ $AK=\frac{bc}{b+c}\cdot\frac{\sin A}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{2bc}{b+c}.\cos\frac{A}{2}$

ដោយ $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ ដែល $p=\frac{a+b+c}{2}$

គេបាន $AK=\frac{2bc}{b+c}.\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

លើកជាការេ $AK^2=\frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}=\frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}$

$$=\frac{bc\left[(b+c)^2-a^2\right]}{(b+c)^2}=bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

ដោយ $b+c\ge 2\sqrt{bc}$ នោះ $\frac{bc}{(b+c)^2}\le\frac{1}{4}$

គេទាញបាន $AK^2\ge bc-\frac{a^2}{4}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $BL^2\ge ca-\frac{b^2}{4}$ (2) និង $CM^2\ge ab-\frac{c^2}{4}$ (3)

បូកវិសមភាព **(1),(2)** និង **(3)** គេបាន ៖

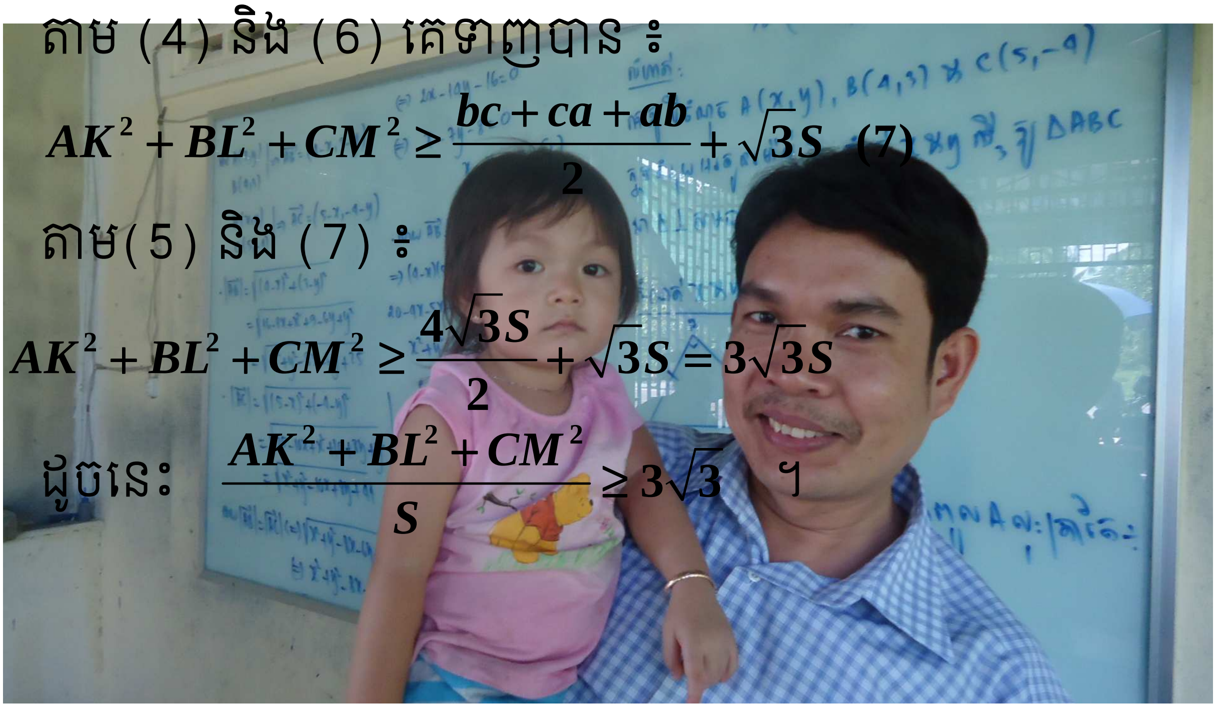
$$AK^2+BL^2+CM^2 \geq bc+ca+ab-\frac{a^2+b^2+c^2}{4} \quad \textbf{(4)}$$

គេមាន $bc+ca+ab \geq 4\sqrt{3}\ S$ **(5)** (មើលលំហាត់ទី៩៥)

ហើយ $a^2+b^2+c^2 \geq (b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2+4\sqrt{3}\ S$

ឬ $a^2+b^2+c^2 \leq 2(ab+bc+ca)-4\sqrt{3}\,S$ **(6)**

(មើលលំហាត់ ៩៦)



តាម (4) និង (6) គេទាញបាន ៖

$$AK^2+BL^2+CM^2 \geq \frac{bc+ca+ab}{2}+\sqrt{3}S \quad \textbf{(7)}$$

តាម(5) និង (7) ៖

$$AK^2+BL^2+CM^2 \geq \frac{4\sqrt{3}S}{2}+\sqrt{3}S=3\sqrt{3}S$$

ដូចនេះ $\dfrac{AK^2+BL^2+CM^2}{S} \geq 3\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៩៩

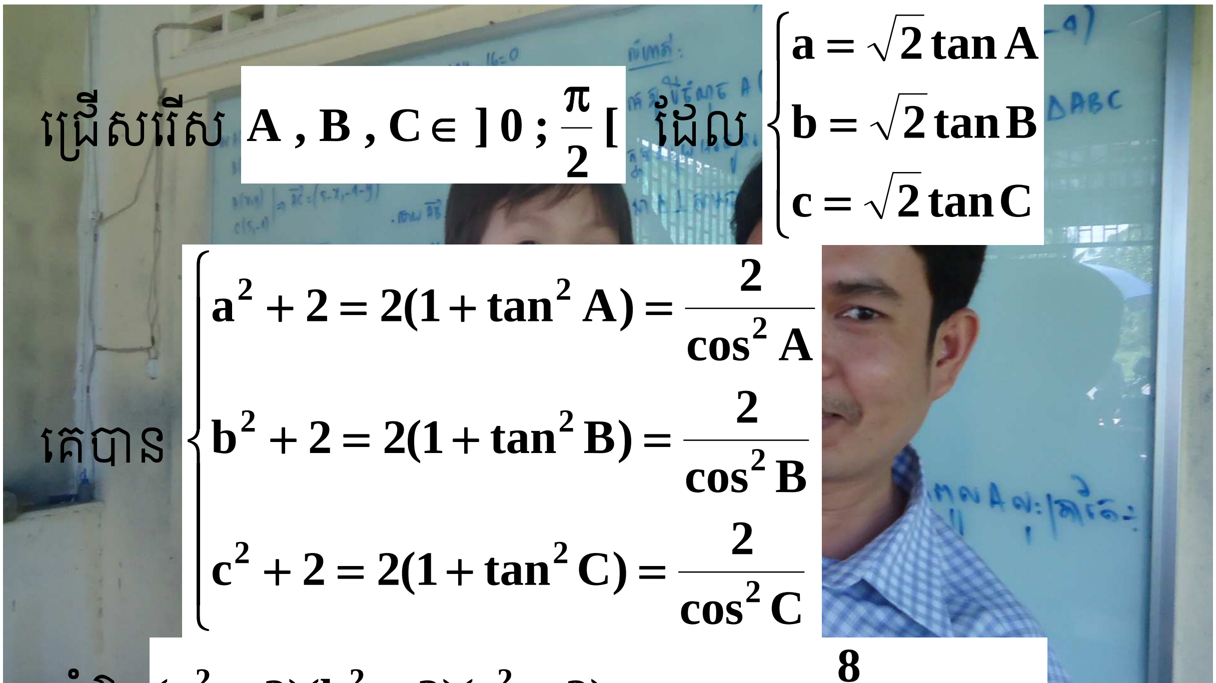
គេឱ្យ $a\,;\,b\,;\,c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា៖

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 9(ab+bc+ca)$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា៖

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 9(ab+bc+ca)\quad(1)$$



ជ្រើសរើស $A\,,B\,,C\in\,]\,0\,;\frac{\pi}{2}\,[$ ដែល $\begin{cases}a=\sqrt{2}\tan A\\ b=\sqrt{2}\tan B\\ c=\sqrt{2}\tan C\end{cases}$

គេបាន $\begin{cases}a^2+2=2(1+\tan^2 A)=\dfrac{2}{\cos^2 A}\\ b^2+2=2(1+\tan^2 B)=\dfrac{2}{\cos^2 B}\\ c^2+2=2(1+\tan^2 C)=\dfrac{2}{\cos^2 C}\end{cases}$

នាំឱ្យ $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)=\dfrac{8}{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}$

តាង $T=ab+bc+ca$

$$T=2(\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A)$$

$$T=\frac{2(\sin A\sin B\cos C+\sin B\sin C\cos A+\sin C\sin A\cos B)}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$=\frac{2\,[\,\cos A\cos B\cos C-\cos(A+B+C)\,]}{\cos A\cos B\cos C}$$

វិសមភាព (1) សមមូលនឹង៖

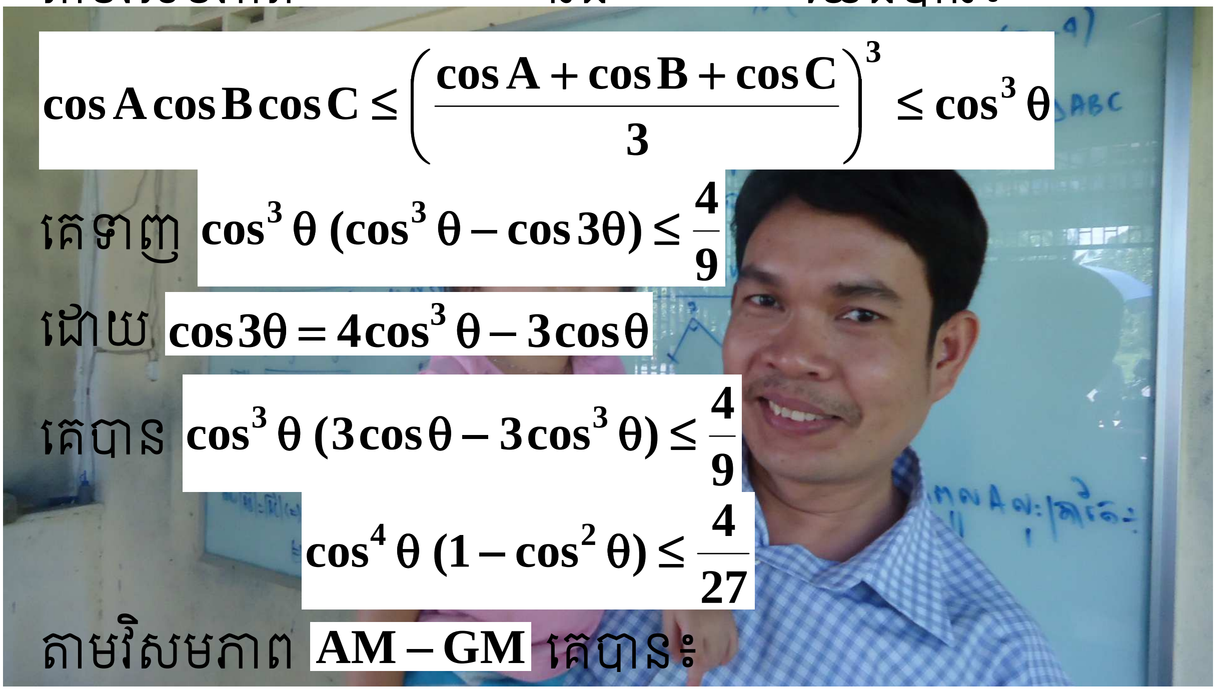
$$\frac{8}{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C} \geq \frac{18\,[\cos A\cos B\cos C - \cos(A+B+C)]}{\cos A\cos B\cos C}$$

គេទាញបាន៖

$$\cos A\cos B\cos C\left[\cos A\cos B\cos C - \cos(A+B+C)\right] \leq \frac{4}{9}$$

តាង $\theta = \dfrac{A+B+C}{3}$ ។

តាមវិសមភាព $AM-GM$ និង Jensen យើងបាន៖



$$\cos A\cos B\cos C \leq \left(\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3 \leq \cos^3\theta$$

គេទាញ $\cos^3\theta\,(\cos^3\theta - \cos 3\theta) \leq \dfrac{4}{9}$

ដោយ $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

គេបាន $\cos^3\theta\,(3\cos\theta - 3\cos^3\theta) \leq \dfrac{4}{9}$

$$\cos^4\theta\,(1-\cos^2\theta) \leq \frac{4}{27}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន៖

$$\frac{\cos^2\theta}{2}.\frac{\cos^2\theta}{2}.(1-\cos^2\theta) \leq \left(\frac{\frac{\cos^2\theta}{2}+\frac{\cos^2\theta}{2}+1-\cos^2\theta}{3}\right)^3$$

នាំឱ្យ $\cos^4\theta\,(1-\cos^2\theta) \leq \dfrac{4}{27}$ ពិត ។

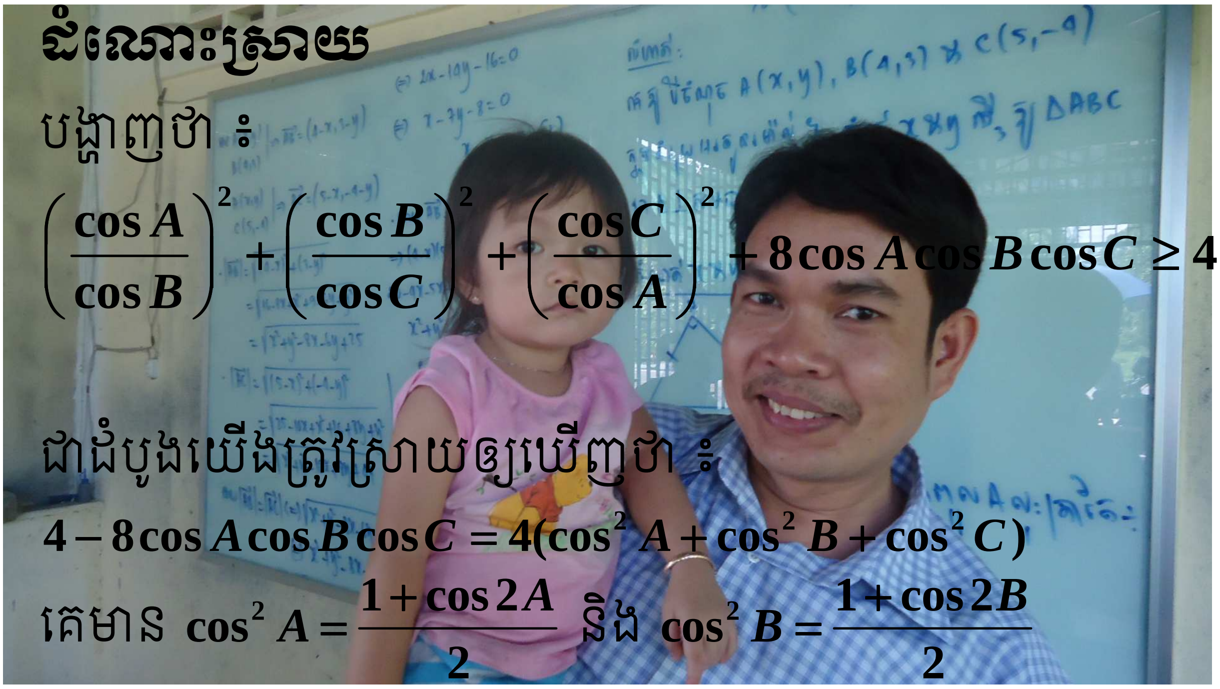
ដូចនេះ $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca)$ ពិត។

លំហាត់ទី១០០ (MOSP 2000)

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2+8\cos A\cos B\cos C\geq 4$$



ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ៖

$$\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2+\left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2+\left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2+8\cos A\cos B\cos C\geq 4$$

ជាដំបូងយើងត្រូវស្រាយឲ្យឃើញថា ៖

$$4-8\cos A\cos B\cos C=4(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)$$

គេមាន $\cos^2 A=\dfrac{1+\cos 2A}{2}$ និង $\cos^2 B=\dfrac{1+\cos 2B}{2}$

គេបាន $\cos^2 A+\cos^2 B=1+\dfrac{\cos 2A+\cos 2B}{2}$

ដោយ $\cos 2A+\cos 2B=2\cos(A+B)\cos(A-B)$

$$=2\cos(\pi-C)\cos(A-B)$$

$$=-2\cos C\cos(A-B)$$

នោះ $\cos^2 A+\cos^2 B=1-\cos C\cos(A-B)$

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-\cos C\cos(A-B)+\cos^2 C$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - \cos C\left[\cos(A-B) - \cos C\right]$$
$$= 1 - \cos C\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$$
$$= 1 - 2\cos A\cos B\cos C$$

ដូចនេះ

$$4(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) = 4 - 8\cos A\cos B\cos C$$

នោះវិសមភាពសមមូល

$$\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2 + \left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2 + \left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2 \geq 4(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$$

តាង $u = \cos A$, $v = \cos B$, $w = \cos C$ នោះវិសមភាពទៅជា ៖

$$\left(\frac{u}{v}\right)^2 + \left(\frac{v}{w}\right)^2 + \left(\frac{w}{u}\right)^2 \geq 4\left(u^2 + v^2 + v^2\right) \quad (*)$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន ៖

$$\left(\frac{u}{v}\right)^2 + \left(\frac{u}{v}\right)^2 + \left(\frac{v}{w}\right)^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{u^4}{v^2w^2}} = \frac{3u^2}{\sqrt[3]{u^2v^2w^2}}$$

គេទាញ $2\left(\frac{u}{v}\right)^2 + \left(\frac{v}{w}\right)^2 \geq \frac{3u^2}{\sqrt[3]{u^2v^2w^2}} \ (1)$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $2\left(\frac{v}{w}\right)^2 + \left(\frac{w}{u}\right)^2 \geq \frac{3v^2}{\sqrt[3]{u^2v^2w^2}} \ (2)$

និង $2\left(\frac{w}{u}\right)^2 + \left(\frac{u}{v}\right)^2 \geq \frac{3w^2}{\sqrt[3]{u^2v^2w^2}} \ (3)$ ។

ធ្វើផលបូកវិសមភាព (1),(2) និង (3) គេបាន

$$3\left[\left(\frac{u}{v}\right)^2 + \left(\frac{v}{w}\right)^2 + \left(\frac{w}{u}\right)^2\right] \geq \frac{3}{\sqrt[3]{u^2v^2w^2}}\left(u^2 + v^2 + v^2\right)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)^2+\left(\frac{v}{w}\right)^2+\left(\frac{w}{u}\right)^2 \ge \frac{1}{\sqrt[3]{u^2v^2w^2}}\left(u^2+v^2+v^2\right)$$ ។

ដើម្បីស្រាយថា (*) ពិតគេត្រូវស្រាយថា $\frac{1}{\sqrt[3]{u^2v^2w^2}} \ge 4$

ឬ $uvw \le \frac{1}{8}$ ឬ $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$ ។

តាង $BC=a\ , AC=b\ , AB=c$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\ , \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

និង $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ។

គេបាន

$$\cos A\cos B\cos C=\frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{8a^2b^2c^2}$$

តាង $\begin{cases} x=b^2+c^2-a^2 \\ y=c^2+a^2-b^2 \\ z=a^2+b^2-c^2 \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} x+y=2c^2 \\ y+z=2a^2 \\ z+x=2b^2 \end{cases}$

គេបាន $\cos A\cos B\cos C=\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $\begin{cases} x+y \ge 2\sqrt{xy} \\ y+z \ge 2\sqrt{yz} \\ z+x \ge 2\sqrt{zx} \end{cases}$

នាំឲ្យ $(x+y)(y+z)(z+x) \ge 2\sqrt{xy}.2\sqrt{yz}.2\sqrt{zx}=8xyz$

គេទាញ $\cos A\cos B\cos C = \dfrac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \le \dfrac{1}{8}$ ពិត

ដូចនេះ

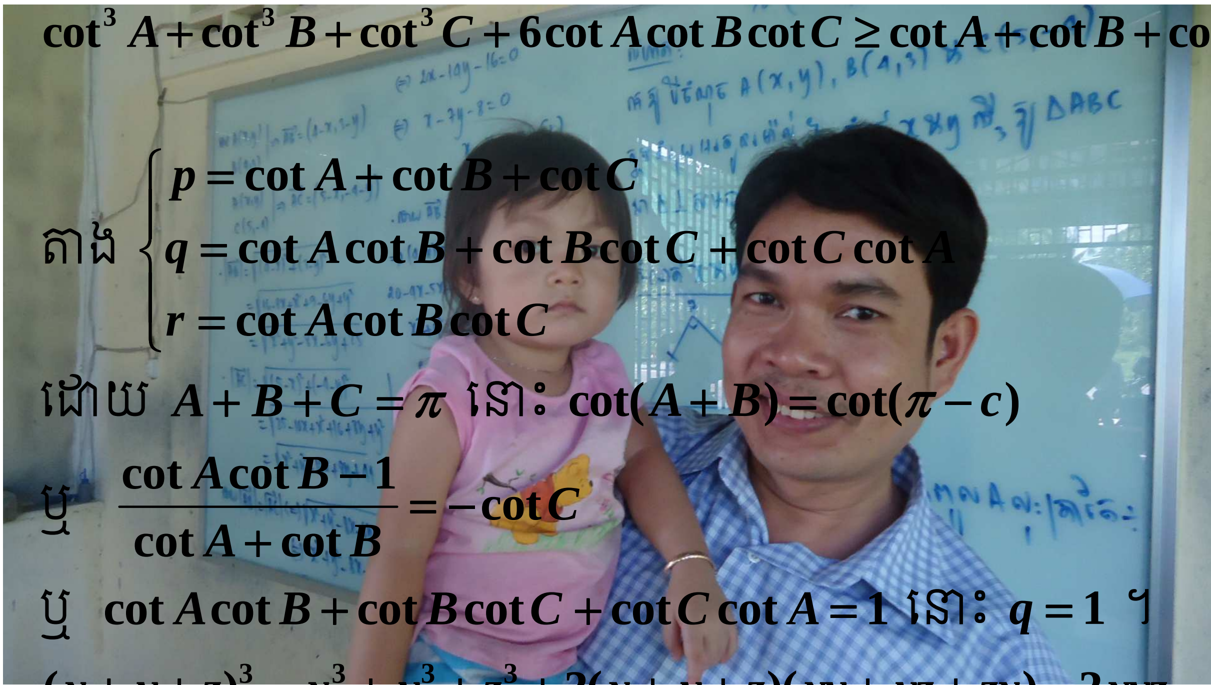
$$\left(\frac{\cos A}{\cos B}\right)^2 + \left(\frac{\cos B}{\cos C}\right)^2 + \left(\frac{\cos C}{\cos A}\right)^2 + 8\cos A\cos B\cos C \ge 4$$

លំហាត់ទី១០១

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ ចូរបង្ហាញថា៖

$$\cot^3 A+\cot^3 B+\cot^3 C+6\cot A\cot B\cot C\ge \cot A+\cot B+\cot C$$

ដំណោះស្រាយ



បង្ហាញថា៖

$$\cot^3 A+\cot^3 B+\cot^3 C+6\cot A\cot B\cot C\ge \cot A+\cot B+\cot C$$

តាង $\begin{cases} p=\cot A+\cot B+\cot C \\ q=\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A \\ r=\cot A\cot B\cot C \end{cases}$

ដោយ $A+B+C=\pi$ នោះ $\cot(A+B)=\cot(\pi-c)$

ឬ $\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}=-\cot C$

ឬ $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$ នោះ $q=1$ ។

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+yz+zx)-3xyz$$

$$x^3+y^3+z^3+6xyz=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)+9xyz$$

នោះវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយសមមូល $p^3-3pq+9r\ge p$

ឬ $p^3-4pq+9r\ge 0$ ព្រោះ $q=1$ ។

តាមវិសមភាព *Schur* គ្រប់ $x,y,z\ge 0$ និង $r>0$គេមាន ៖

$\sum_{cyc} x^r(x-y)(x-z)\ge 0$ ។ យក $r=1$ និង $\begin{cases} x=\cot A \\ y=\cot B \\ z=\cot C \end{cases}$

គេបាន $\sum_{cyc} x(x-y)(x-z) = p^3 - 4pq + 9r \geq 0$ ពិត

ដូចនេះ

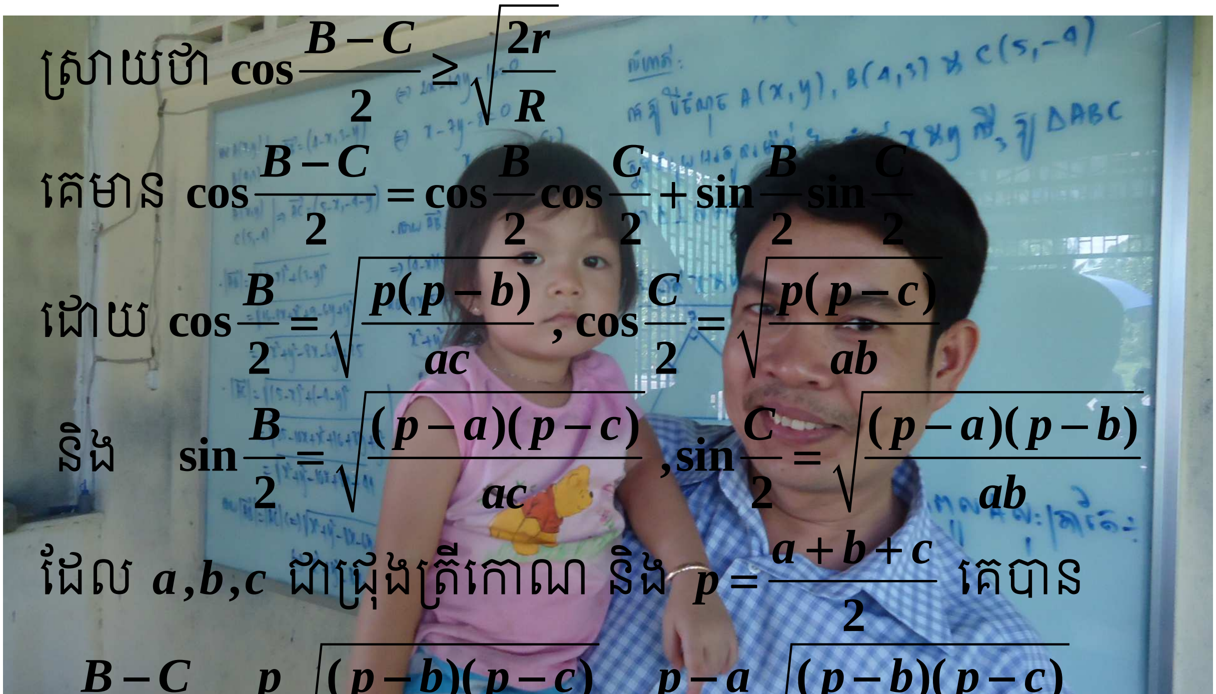
$$\cot^3 A + \cot^3 B + \cot^3 C + 6\cot A \cot B \cot C \geq \cot A + \cot B + \cot C$$

លំហាត់ទី១០២

ចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា $\cos\frac{B-C}{2} \geq \sqrt{\frac{2r}{R}}$

ដែល r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔABC ។

ដំណោះស្រាយ



ស្រាយថា $\cos\frac{B-C}{2} \geq \sqrt{\frac{2r}{R}}$

គេមាន $\cos\frac{B-C}{2} = \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

ដោយ $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$, $\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

និង $\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$, $\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

ដែល a,b,c ជាជ្រុងត្រីកោណ និង $p = \frac{a+b+c}{2}$ គេបាន

$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{p}{a}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} + \frac{p-a}{a}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{2p-a}{a}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} = \frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}$$

ក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC គឺ $S = \frac{1}{2}bc\sin A = pr = \frac{abc}{4R}$

$2r = \frac{bc\sin A}{p}$ និង $R = \frac{a}{2\sin A}$ នោះ $\frac{2r}{R} = \frac{2bc\sin^2 A}{ap}$

យើងត្រូវស្រាយថា $\frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2} \ge \sqrt{\frac{2bc\sin^2 A}{ap}}$

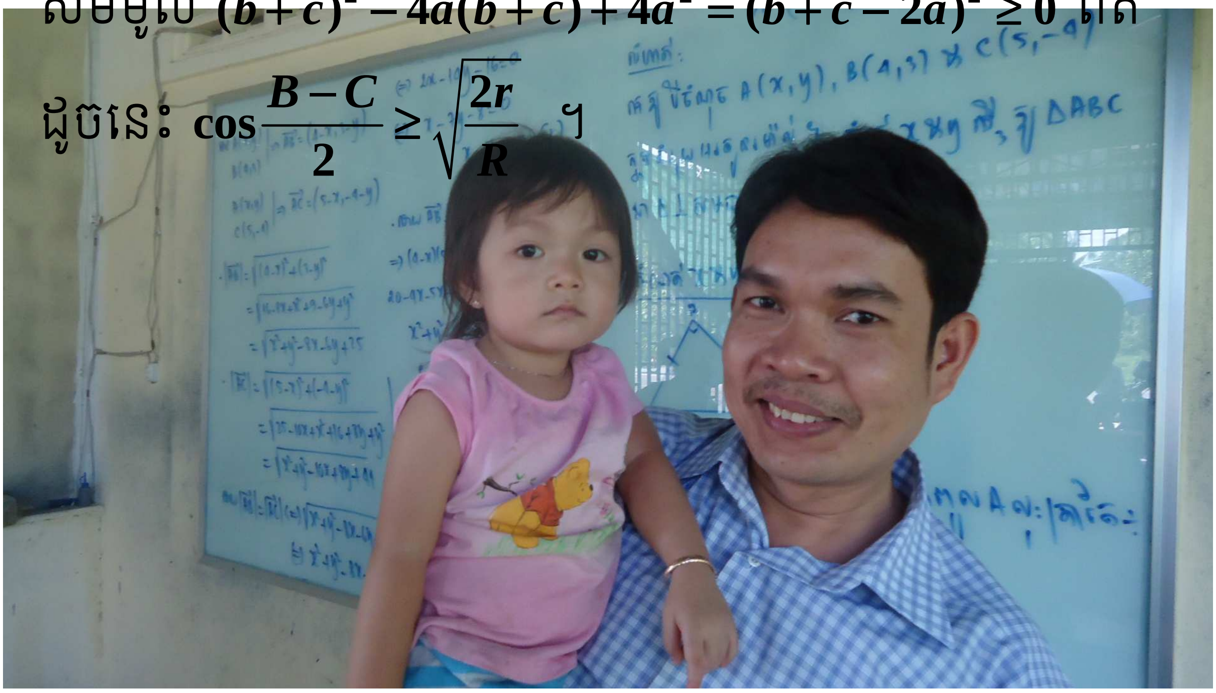
ឬ $\frac{(b+c)^2}{a^2}\sin^2\frac{A}{2} \ge \frac{2bc\sin^2 A}{ap} = \frac{8bc\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}}{ap}$

$(b+c)^2 \ge \frac{8abc}{p}\cos^2\frac{A}{2} = \frac{8abc}{p}.\frac{p(p-a)}{bc} = 8a(p-a)$

សមមូល $(b+c)^2 \ge 4a(b+c-a) = 4a(b+c)-4a^2$

សមមូល $(b+c)^2-4a(b+c)+4a^2 = (b+c-2a)^2 \ge 0$ ពិត

ដូចនេះ $\cos\frac{B-C}{2} \ge \sqrt{\frac{2r}{R}}$ ។

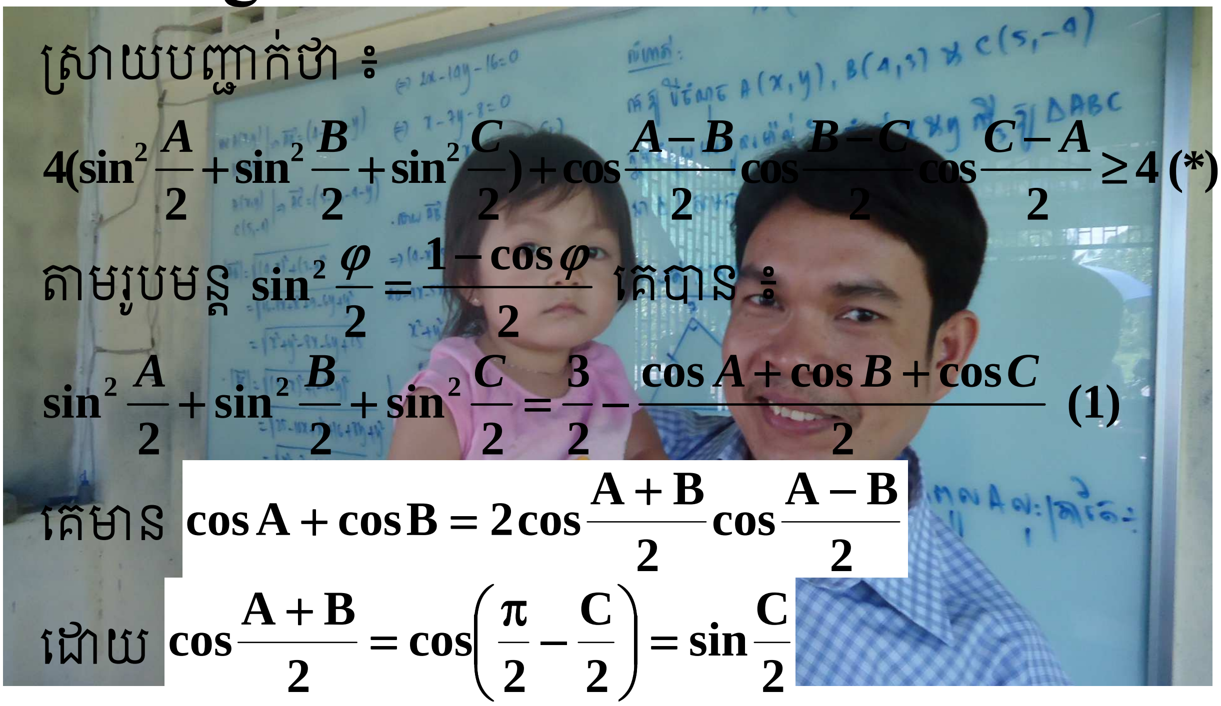


លំហាត់ទី១០៣

ចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា ៖

$$4\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)+\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\geq 4$$

ដំណោះស្រាយ



ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$4\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)+\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\geq 4 \quad (*)$$

តាមរូបមន្ត $\sin^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1-\cos\varphi}{2}$ គេបាន ៖

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\frac{3}{2}-\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{2} \quad (1)$$

គេមាន $\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

ដោយ $\cos\frac{A+B}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}$

និង $\cos C=1-2\sin^2\frac{C}{2}$ គេបាន ៖

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}$$

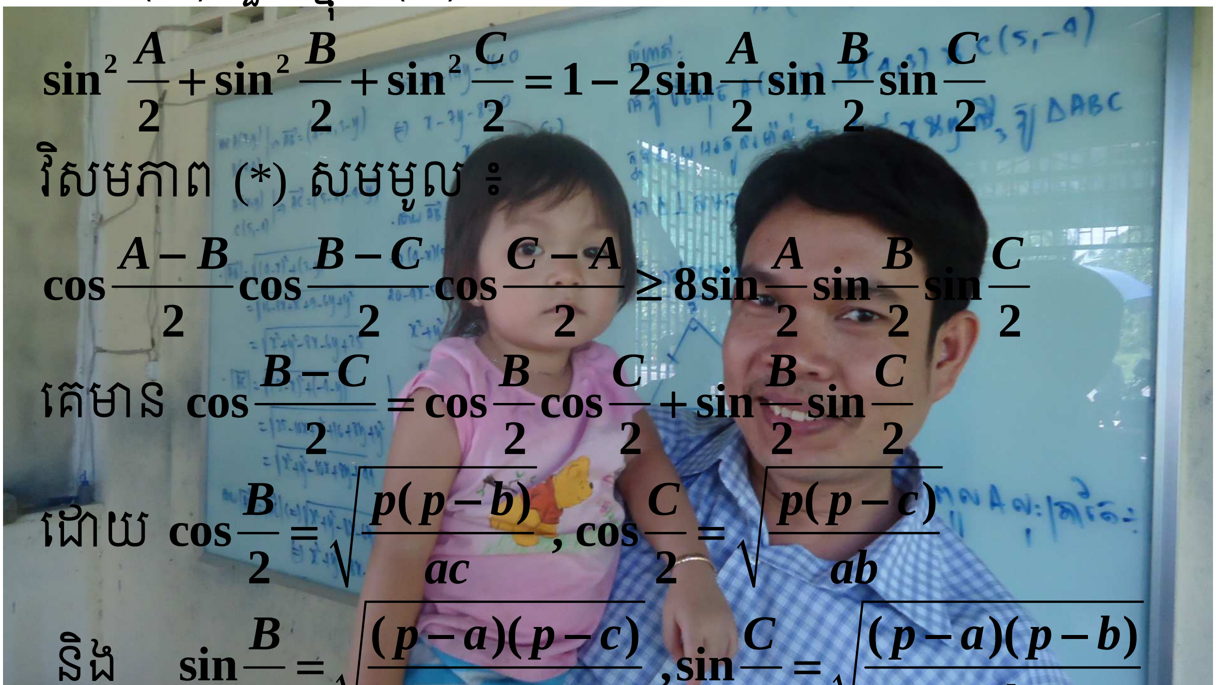
$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \quad (2)$$

យក (2) ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖



$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

វិសមភាព (*) សមមូល ៖

$$\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\geq 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

គេមាន $\cos\frac{B-C}{2}=\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

ដោយ $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}, \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

និង $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}, \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

ដែល a,b,c ជាជ្រុងត្រីកោណ និង $p=\frac{a+b+c}{2}$ គេបាន

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{p}{a}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}+\frac{p-a}{a}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{2p-a}{a}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}=\frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}$$

ដូចគ្នាដែរ $\cos\frac{C-A}{2}=\frac{c+a}{2}\sin\frac{B}{2}$

និង $\cos\frac{A-B}{2}=\frac{a+b}{2}\sin\frac{C}{2}$

គេបាន ៖

$$\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\geq\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

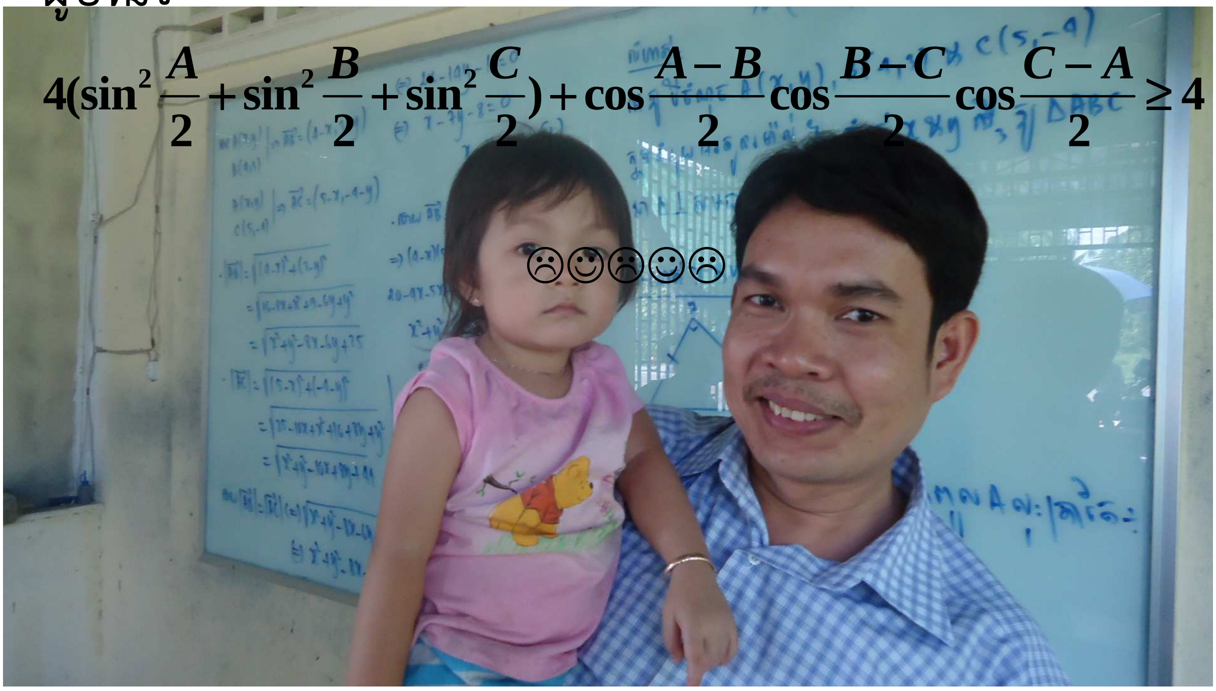
ដោយ $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca}=8abc$

គេទាញ $\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\geq 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

ដូចនេះ

$$4(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2})+\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\geq 4 \quad (*)$$

☹☺☹☺☹



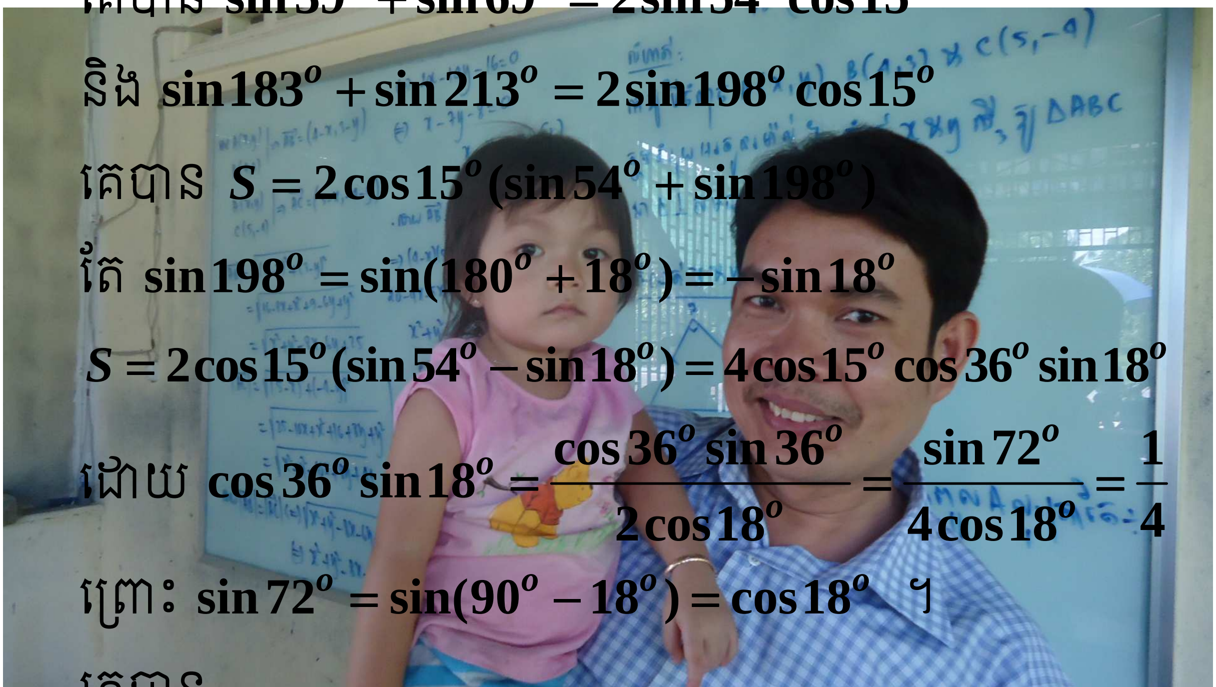
លំហាត់ទី១០៤

គណនាតម្លៃ $S=\sin 39^o+\sin 69^o+\sin 183^o+\sin 213^o$

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្ត $\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

គេបាន $\sin 39^o+\sin 69^o=2\sin 54^o\cos 15^o$



និង $\sin 183^o+\sin 213^o=2\sin 198^o\cos 15^o$

គេបាន $S=2\cos 15^o(\sin 54^o+\sin 198^o)$

តែ $\sin 198^o=\sin(180^o+18^o)=-\sin 18^o$

$S=2\cos 15^o(\sin 54^o-\sin 18^o)=4\cos 15^o\cos 36^o\sin 18^o$

ដោយ $\cos 36^o\sin 18^o=\frac{\cos 36^o\sin 36^o}{2\cos 18^o}=\frac{\sin 72^o}{4\cos 18^o}=\frac{1}{4}$

ព្រោះ $\sin 72^o=\sin(90^o-18^o)=\cos 18^o$ ។

គេបាន

$$S=\cos 15^o=\sqrt{\frac{1+\cos 30^o}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

ដូចនេះ $S=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ។

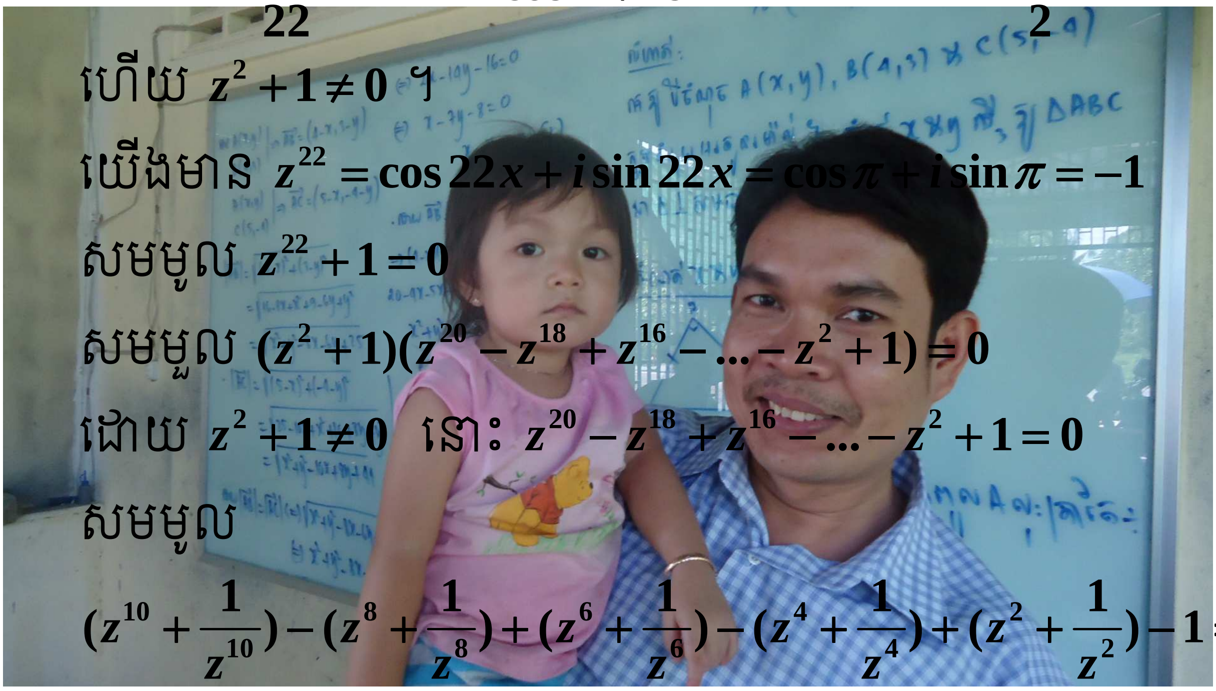
លំហាត់ទី១០៥

ចូរបង្ហាញថា $\cot\frac{\pi}{22}-4\cos\frac{3\pi}{22}=\sqrt{11}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\cot\frac{\pi}{22}-4\cos\frac{3\pi}{22}=\sqrt{11}$

យក $x=\frac{\pi}{22}$ និង $z=\cos x+i\sin x$ នោះ $11x=\frac{\pi}{2}$



ហើយ $z^2+1\neq 0$ ។

យើងមាន $z^{22}=\cos 22x+i\sin 22x=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

សមមូល $z^{22}+1=0$

សមមូល $(z^2+1)(z^{20}-z^{18}+z^{16}-...-z^2+1)=0$

ដោយ $z^2+1\neq 0$ នោះ $z^{20}-z^{18}+z^{16}-...-z^2+1=0$

សមមូល

$$(z^{10}+\frac{1}{z^{10}})-(z^8+\frac{1}{z^8})+(z^6+\frac{1}{z^6})-(z^4+\frac{1}{z^4})+(z^2+\frac{1}{z^2})-1=0$$

$\forall n\in\mathbb{Z}:\ z^n=\cos(nx)+i\sin(nx)$

និង $\frac{1}{z^n}=\cos(nx)-i\sin(nx)$

នោះ $z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos(nx)$ ។ ហេតុនេះគេបាន ៖

$$2\cos 10x-2\cos 8x+2\cos 6x-2\cos 4x+2\cos 2x-1=0\ (*)$$

ម្យ៉ាងទៀតឧបមាថា $\cot\frac{\pi}{22}-4\cos\frac{3\pi}{22}=\sqrt{11}$ ពិត

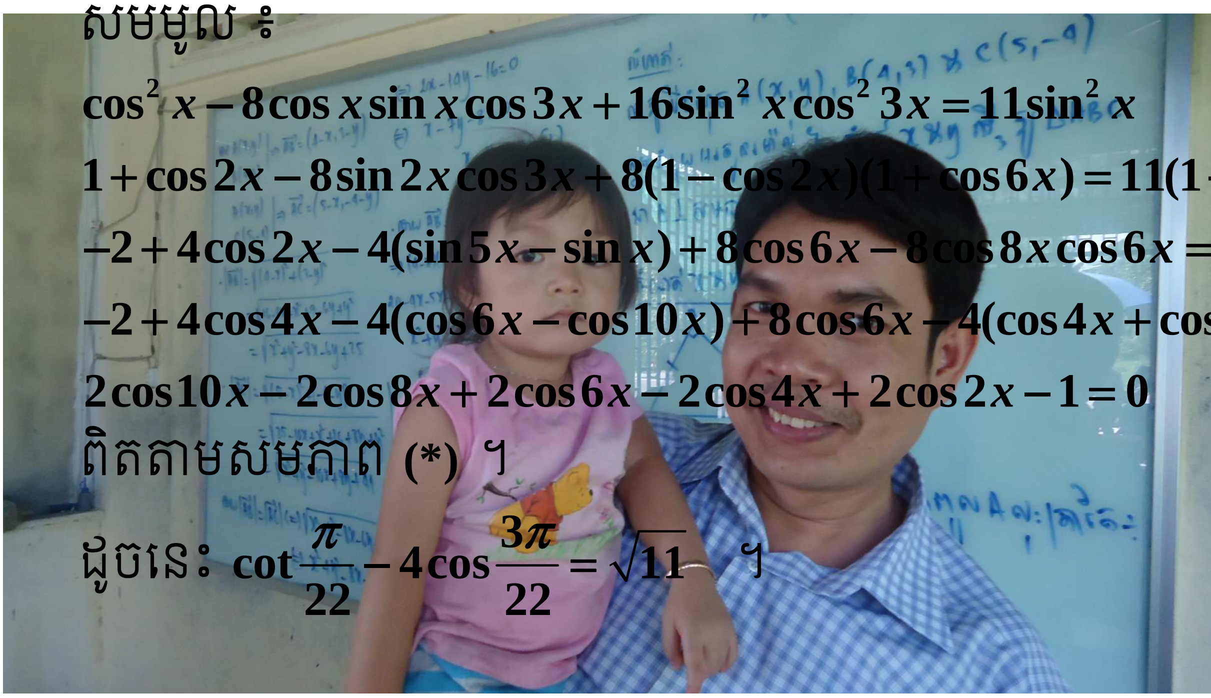
ឬ $\cot x - 4\cos 3x = \sqrt{11}$ ដែល $x = \dfrac{\pi}{22}$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន ៖

$(\cot x - 4\cos 3x)^2 = 11$ ដោយ $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$$\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \cos 3x\right)^2 = 11$$

សមមូល $(\cos x - 4\sin x\cos 3x)^2 = 11\sin^2 x$



សមមូល ៖

$$\cos^2 x - 8\cos x\sin x\cos 3x + 16\sin^2 x\cos^2 3x = 11\sin^2 x$$

$$1 + \cos 2x - 8\sin 2x\cos 3x + 8(1-\cos 2x)(1+\cos 6x) = 11(1-\cos 2x)$$

$$-2 + 4\cos 2x - 4(\sin 5x - \sin x) + 8\cos 6x - 8\cos 8x\cos 6x = 0$$

$$-2 + 4\cos 4x - 4(\cos 6x - \cos 10x) + 8\cos 6x - 4(\cos 4x + \cos 8x) = 0$$

$$2\cos 10x - 2\cos 8x + 2\cos 6x - 2\cos 4x + 2\cos 2x - 1 = 0$$

ពិតតាមសមភាព (*) ។

ដូចនេះ៖ $\cot\dfrac{\pi}{22} - 4\cos\dfrac{3\pi}{22} = \sqrt{11}$ ។

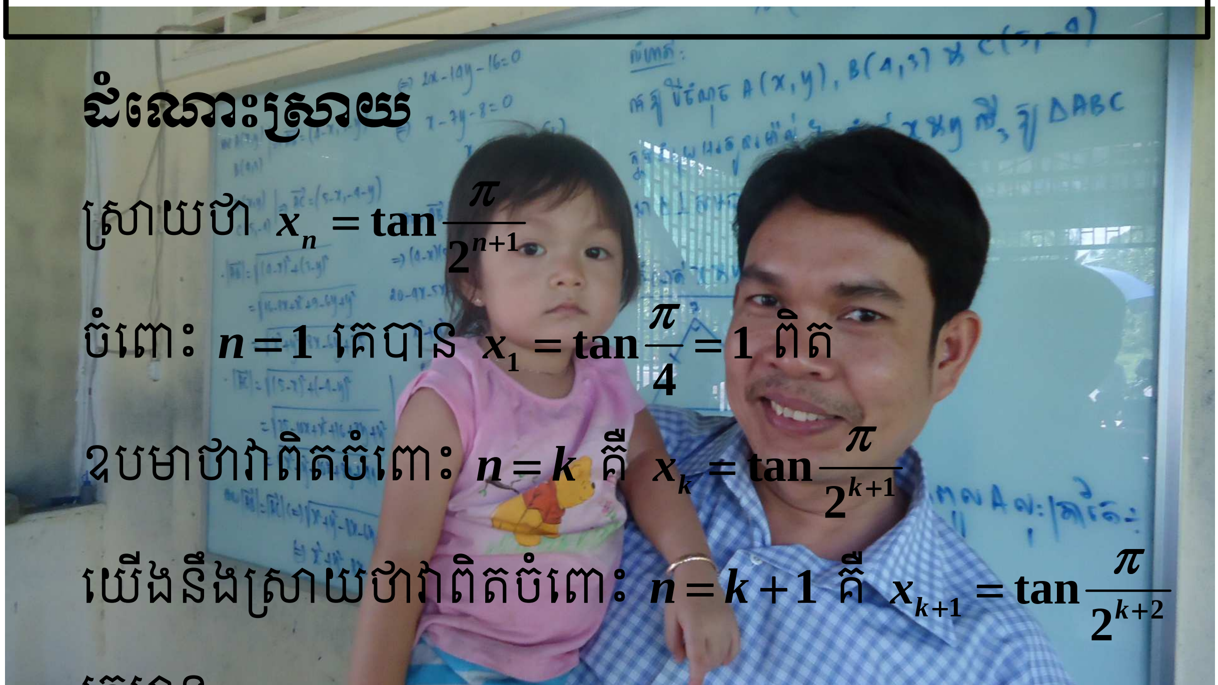
លំហាត់ទី១០៦

គេឲ្យស្វីតចំនួនពិត (x_n) កំណត់ដោយ ៖

$x_1 = 1$ និងទំនាក់ទំនងកំណើន $x_{n+1} = \dfrac{\sqrt{1+x_n^2}-1}{x_n}$

គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

ចូរស្រាយថា $x_n = \tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n x_n\right)$ ។



ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $x_n = \tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

ចំពោះ $n=1$ គេបាន $x_1 = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតចំពោះ $n=k$ គឺ $x_k = \tan\dfrac{\pi}{2^{k+1}}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n=k+1$ គឺ $x_{k+1} = \tan\dfrac{\pi}{2^{k+2}}$

គេមាន

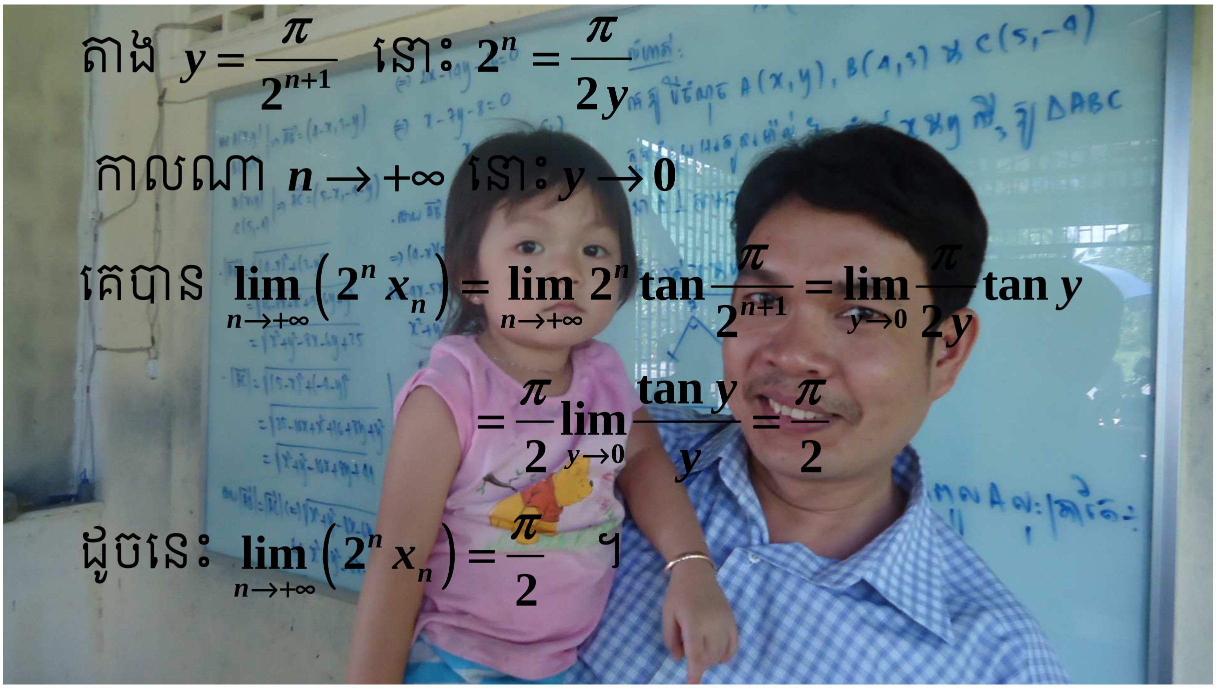
$$x_{k+1} = \frac{\sqrt{1+x_k^2}-1}{x_k} = \frac{\sqrt{1+\tan^2\dfrac{\pi}{2^{k+1}}}-1}{\tan\dfrac{x}{2^{k+1}}} = \frac{\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2^{k+1}}}-1}{\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2^{k+1}}}{\cos\dfrac{\pi}{2^{k+1}}}}$$

$$x_{k+1}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}=\frac{2\sin^2\frac{\pi}{2^{k+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{k+2}}\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}}=\tan\frac{\pi}{2^{k+2}}$$ ពិត

ដូចនេះ $x_n=\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$ ។

រកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n x_n\right)$ ៖

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n x_n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}2^n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$



តាង $y=\frac{\pi}{2^{n+1}}$ នោះ $2^n=\frac{\pi}{2y}$

កាលណា $n\to+\infty$ នោះ $y\to 0$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n x_n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}2^n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\pi}{2y}\tan y$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\tan y}{y}=\frac{\pi}{2}$$

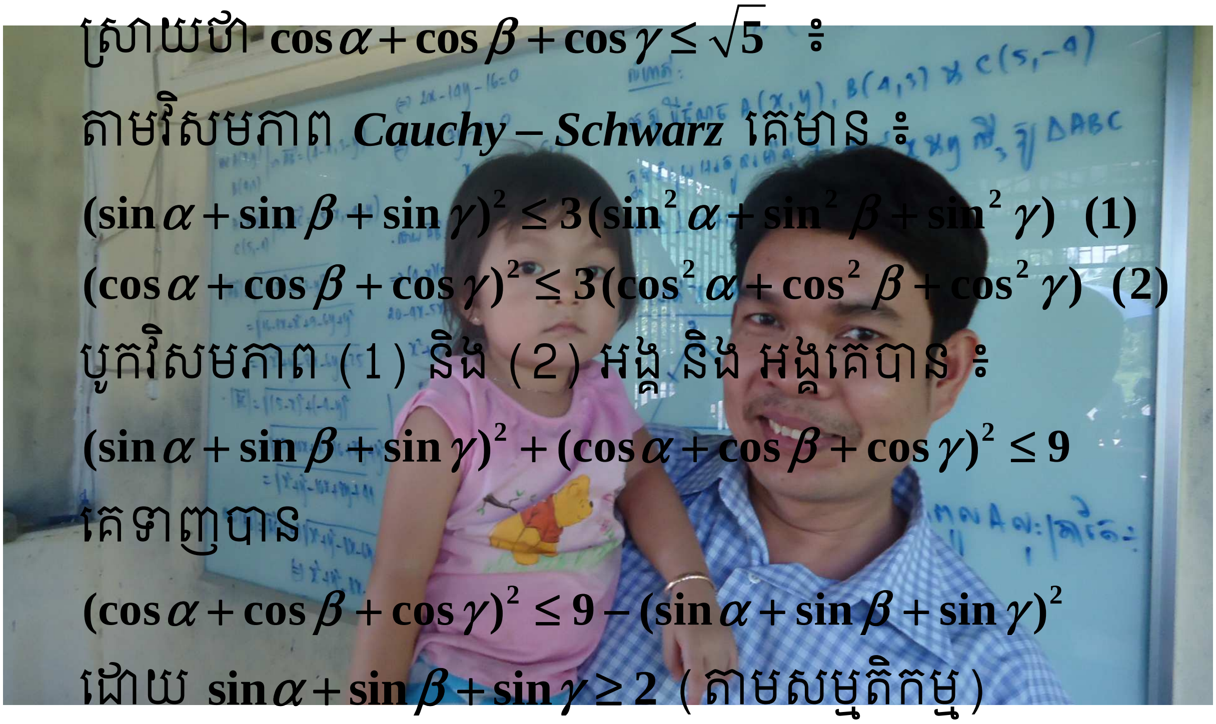
ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n x_n\right)=\frac{\pi}{2}$ ។

លំហាត់ទី១០៧

គេឲ្យ α,β,γ ជាបីចំនួនពិតដែល $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\geq 2$ ។

ចូរស្រាយថា $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\sqrt{5}$ ។

ដំណោះស្រាយ



ស្រាយថា $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\sqrt{5}$ ៖

តាមវិសមភាព *Cauchy – Schwarz* គេមាន ៖

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2\leq 3(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)\quad (1)$$

$$(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2\leq 3(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\quad (2)$$

បូកវិសមភាព (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2+(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2\leq 9$$

គេទាញបាន

$$(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2\leq 9-(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2$$

ដោយ $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\geq 2$ (តាមសម្មតិកម្ម)

នោះ $(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2\leq 9-4=5$

ដូចនេះ $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\sqrt{5}$ ។

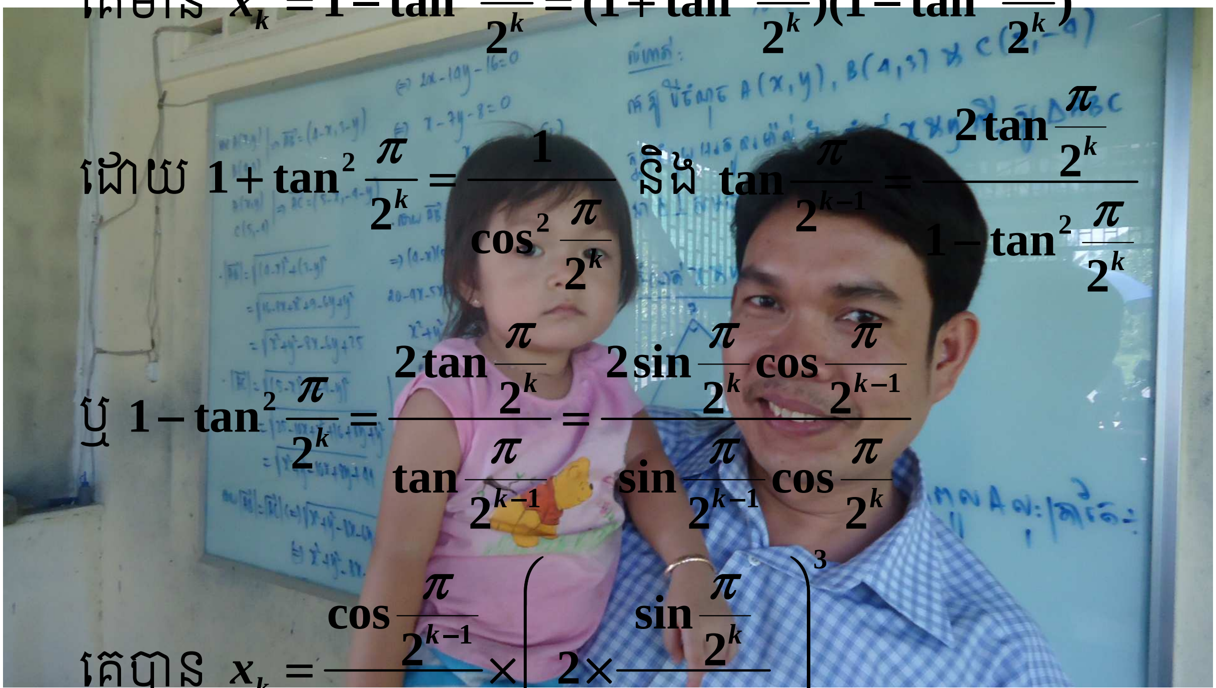
លំហាត់ទី១០៨

គេឲ្យ $P_n=\prod_{k=3}^{n}\left[1-\tan^4\left(\frac{\pi}{2^k}\right)\right]$ ។ គណនា $\lim_{n\to+\infty}P_n$?

ដំណោះស្រាយ

គណនា $\lim_{n\to+\infty}P_n$

គេមាន $x_k=1-\tan^4\frac{\pi}{2^k}=(1+\tan^2\frac{\pi}{2^k})(1-\tan^2\frac{\pi}{2^k})$



ដោយ $1+\tan^2\frac{\pi}{2^k}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2^k}}$ និង $\tan\frac{\pi}{2^{k-1}}=\frac{2\tan\frac{\pi}{2^k}}{1-\tan^2\frac{\pi}{2^k}}$

ឬ $1-\tan^2\frac{\pi}{2^k}=\frac{2\tan\frac{\pi}{2^k}}{\tan\frac{\pi}{2^{k-1}}}=\frac{2\sin\frac{\pi}{2^k}\cos\frac{\pi}{2^{k-1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{k-1}}\cos\frac{\pi}{2^k}}$

គេបាន $x_k=\frac{\cos\frac{\pi}{2^{k-1}}}{\cos\frac{\pi}{2^k}}\times\left(2\times\frac{\sin\frac{\pi}{2^k}}{\sin\frac{\pi}{2^{k-1}}}\right)^3$

គេទាញ

$$P_n=\prod_{k=3}^{n}(x_k)=\prod_{k=3}^{n}\frac{\cos\frac{\pi}{2^{k-1}}}{\cos\frac{\pi}{2^k}}\times\prod_{k=3}^{n}\left(2\times\frac{\sin\frac{\pi}{2^k}}{\sin\frac{\pi}{2^{k-1}}}\right)^3$$

$$P_n = \frac{\cos\frac{\pi}{2^2}}{\cos\frac{\pi}{2^n}} \times 2^{3(n-3)} . \frac{\sin^3\frac{\pi}{2^n}}{\sin^3\frac{\pi}{2^2}} = \frac{1}{2^8} \times \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^n}} \times \left(2^n \sin\frac{\pi}{2^n}\right)^3$$

គេមាន $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{\cos 0} = 1$

និង $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{2^n} = \lim\limits_{x\to 0}(\pi . \frac{\sin x}{x}) = \pi$ ដែល $x = \frac{\pi}{2^n}$ ។

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{2^8} \times \pi^3 = \frac{\pi}{2^8}$ ។

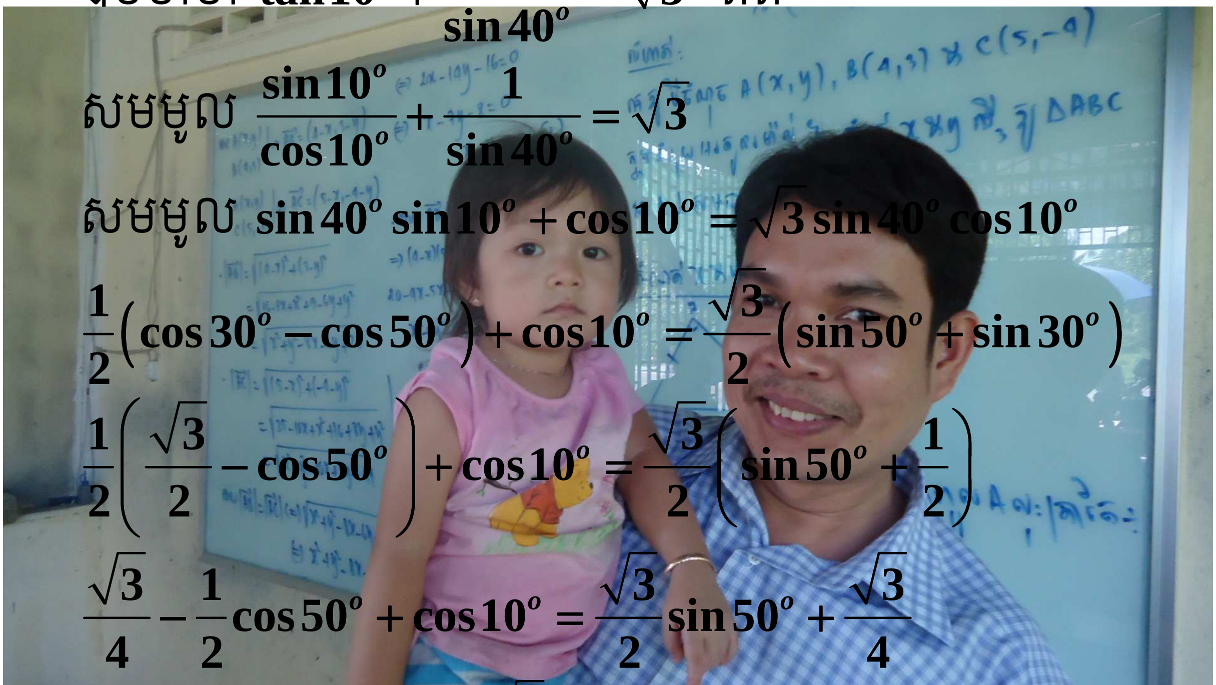
លំហាត់ទី១០៩

ចូរបង្ហាញថា $\tan 10^o + \dfrac{1}{\sin 40^o} = \sqrt{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\tan 10^o + \dfrac{1}{\sin 40^o} = \sqrt{3}$

ឧបមាថា $\tan 10^o + \dfrac{1}{\sin 40^o} = \sqrt{3}$ ពិត



សមមូល $\dfrac{\sin 10^o}{\cos 10^o} + \dfrac{1}{\sin 40^o} = \sqrt{3}$

សមមូល $\sin 40^o \sin 10^o + \cos 10^o = \sqrt{3}\sin 40^o \cos 10^o$

$$\frac{1}{2}\left(\cos 30^o - \cos 50^o\right) + \cos 10^o = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sin 50^o + \sin 30^o\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos 50^o\right) + \cos 10^o = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sin 50^o + \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\cos 50^o + \cos 10^o = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 50^o + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos 10^o = \frac{1}{2}\cos 50^o + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 50^o$$

$$\cos 10^o = \cos 60^o \cos 50^o + \sin 60^o \sin 50^o$$

$\cos 10^o = \cos(60^o - 50^o)$ ពិត

ដូចនេះ $\tan 10^o + \dfrac{1}{\sin 40^o} = \sqrt{3}$ ។

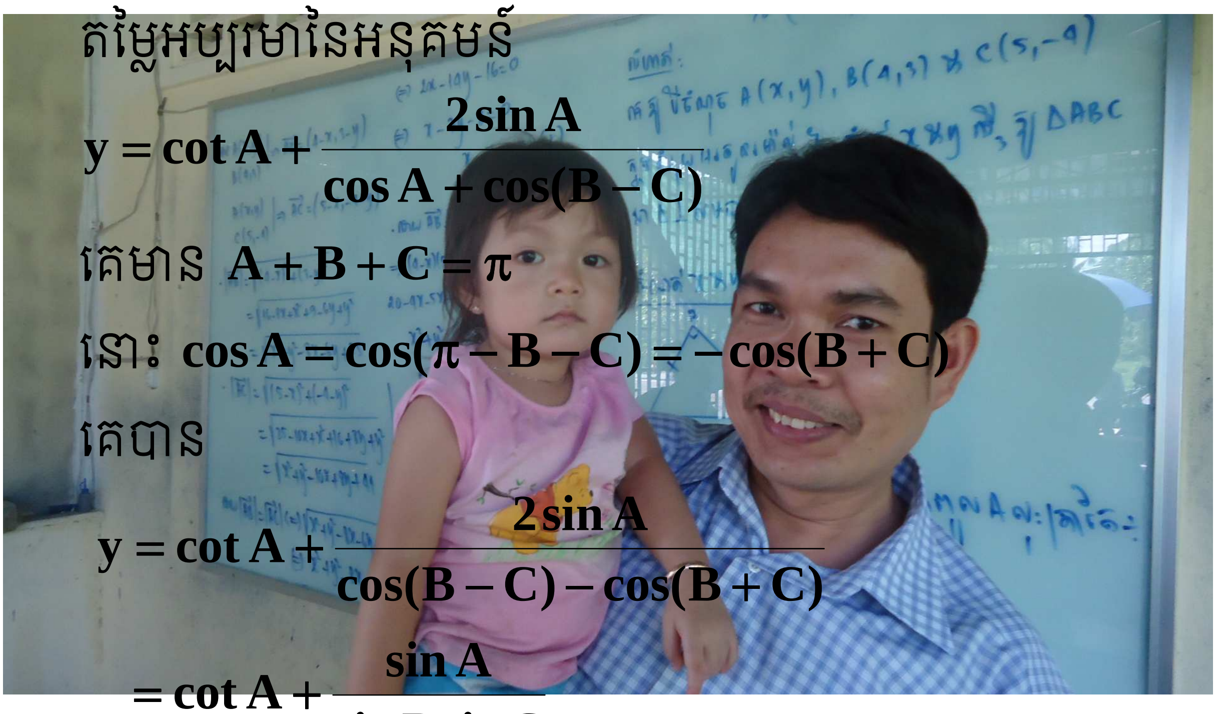
លំហាត់ទី១១០

គេយក A, B, C ជាមុំបីនៃត្រីកោណ ABC ។

តាងអនុគមន៍ $y = \cot A + \dfrac{2\sin A}{\cos A + \cos(B - C)}$

រកតម្លៃអប្បរមានៃអនុគមន៍នេះ ?

ដំណោះស្រាយ



តម្លៃអប្បរមានៃអនុគមន៍

$$y = \cot A + \frac{2\sin A}{\cos A + \cos(B - C)}$$

គេមាន $A + B + C = \pi$

នោះ $\cos A = \cos(\pi - B - C) = -\cos(B + C)$

គេបាន

$$y = \cot A + \frac{2\sin A}{\cos(B - C) - \cos(B + C)}$$

$$= \cot A + \frac{\sin A}{\sin B \sin C}$$

$$= \frac{\cos A \sin B \sin C + \sin^2 A}{\sin A \sin B \sin C}$$

យក a , b , c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណនេះ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសគេមាន

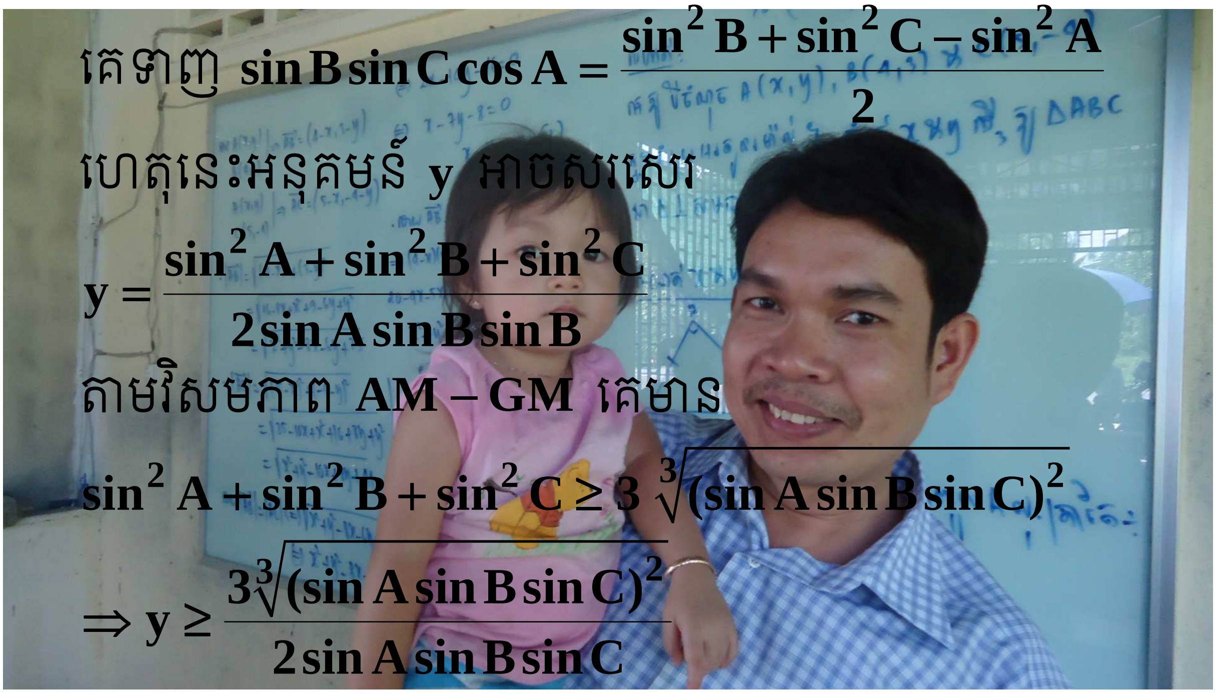
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \text{ នាំឲ្យ } \begin{cases} a=2R\sin A \\ b=2R\sin B \quad (1) \\ c=2R\sin C \end{cases}$$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \quad (2)$$

យកទំនាក់ទំនង **(1)** ជួសក្នុង **(2)** គេបាន

$$4R^2\sin^2 A=4R^2(\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A)$$



គេទាញ $\sin B\sin C\cos A=\dfrac{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A}{2}$

ហេតុនេះអនុគមន៍ y អាចសរសេរ

$$y=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin B}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\geq 3\sqrt[3]{(\sin A\sin B\sin C)^2}$$

$$\Rightarrow y\geq\frac{3\sqrt[3]{(\sin A\sin B\sin C)^2}}{2\sin A\sin B\sin C}$$

$$\Rightarrow y\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}}$$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\sin x$ ដែល $0<x<\pi$

គេមាន $f''(x)=-\sin x<0\ ,\ \forall x\in(0;\pi)$

នាំឲ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ប៉ោង ។

តាមទ្រឹស្តីបទ **Jensen** គេបាន

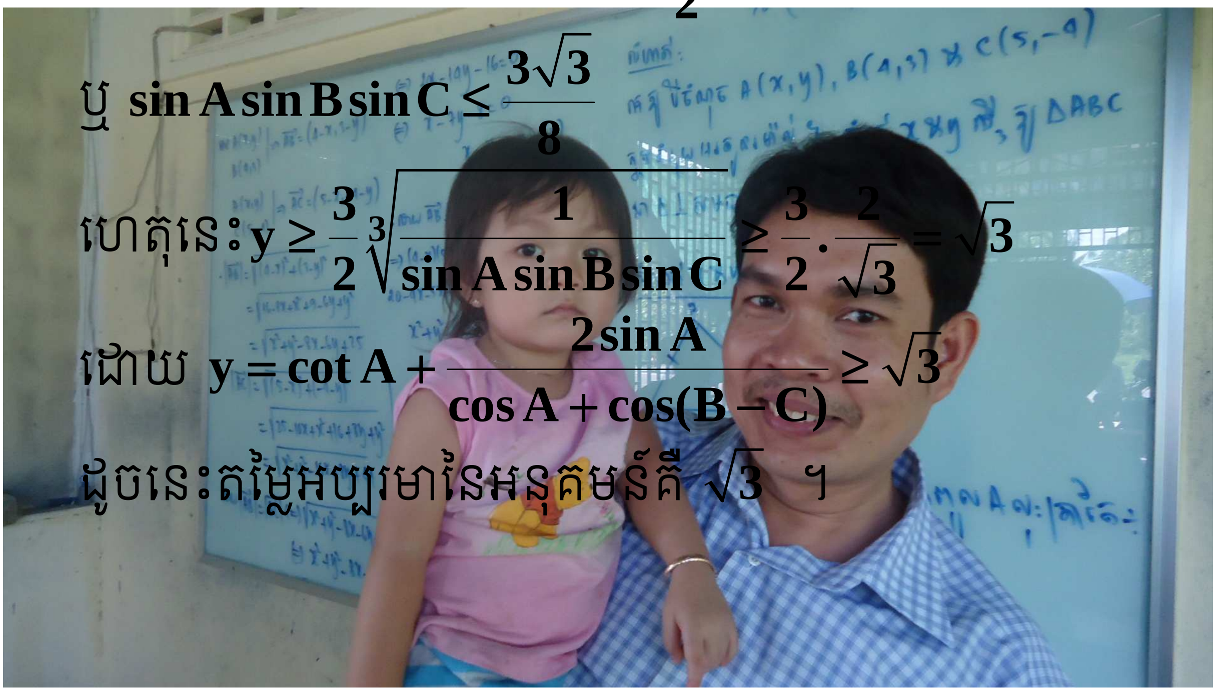
$$\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3} \le f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$$

ឬ $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3} \le \sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

តាម វិសមភាព $AM-GM$ គេមាន

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3} \ge \sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}$$

គេទាញ $\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C} \le \frac{\sqrt{3}}{2}$



ឬ $\sin A\sin B\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$

ហេតុនេះ: $y \ge \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}} \ge \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

ដោយ $y = \cot A + \frac{2\sin A}{\cos A+\cos(B-C)} \ge \sqrt{3}$

ដូចនេះតម្លៃអប្បរមានៃអនុគមន៍គឺ $\sqrt{3}$ ។

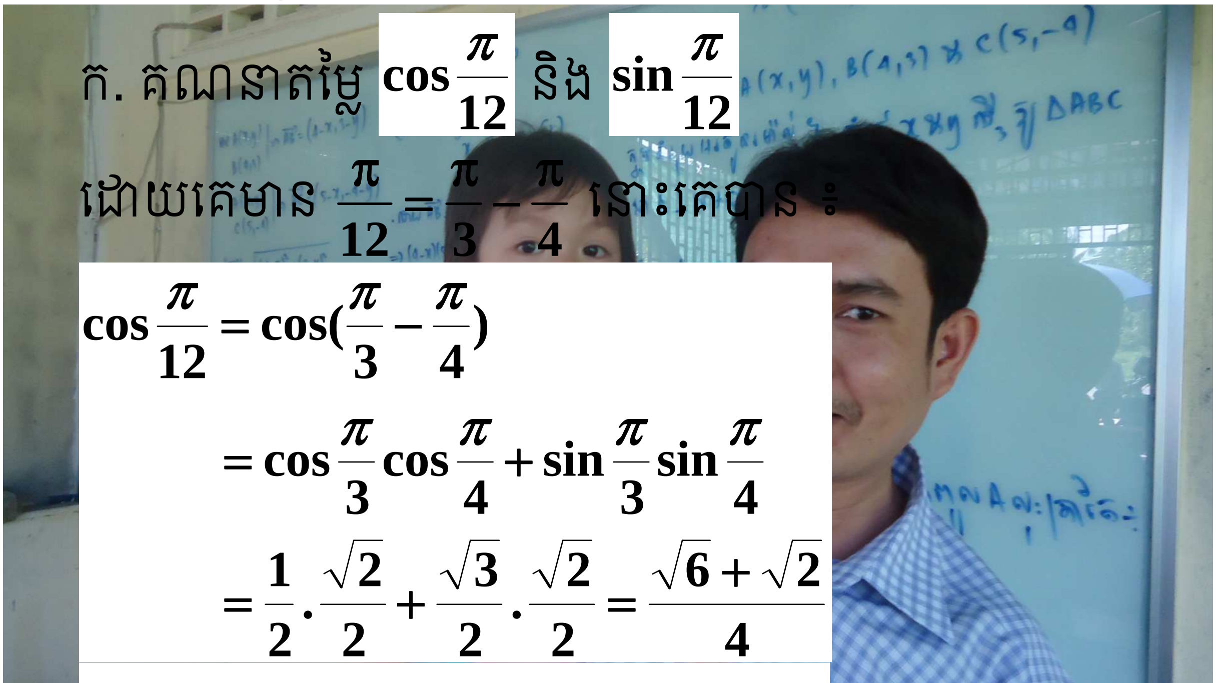
លំហាត់ទី១១១

ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ គេឱ្យ $S_n=\cos^n\frac{\pi}{12}+\sin^n\frac{\pi}{12}$

ក. គណនាតម្លៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

ខ. បង្ហាញថា $4S_{n+2}-2\sqrt{6}S_{n+1}+S_n=0$

ដំណោះស្រាយ



ក. គណនាតម្លៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

ដោយគេមាន $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ នោះគេបាន ៖

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})$$

$$=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})$$

$$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{12}$; $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{12}$ ។

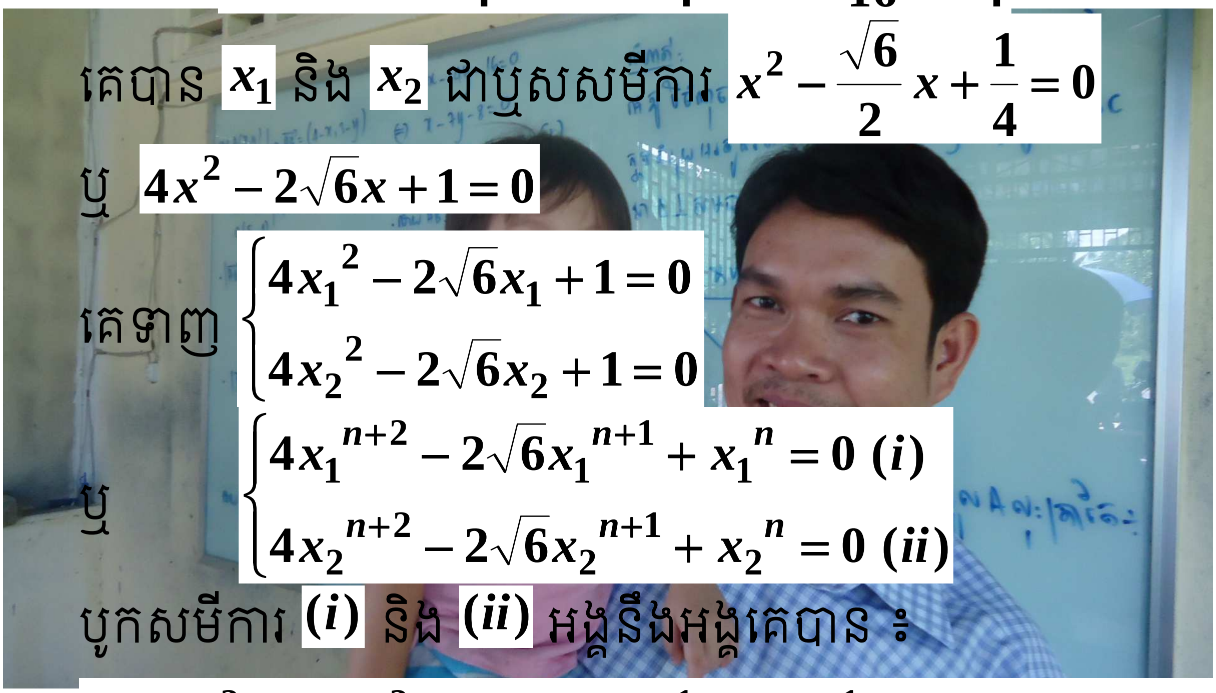
ខ. បង្ហាញថា $4S_{n+2}-2\sqrt{6}S_{n+1}+S_n=0$

គេមាន $S_n=\cos^n\frac{\pi}{12}+\sin^n\frac{\pi}{12}$

តាង $x_1=\cos\frac{\pi}{12}$; $x_2=\sin\frac{\pi}{12}$ នោះ $S_n=x_1^{\ n}+x_2^{\ n}$

គេមាន $x_1+x_2=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

ហើយ $x_1.x_2=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{6-2}{16}=\frac{1}{4}$



គេបាន x_1 និង x_2 ជាឫសសមីការ $x^2-\frac{\sqrt{6}}{2}x+\frac{1}{4}=0$

ឬ $4x^2-2\sqrt{6}x+1=0$

គេទាញ $\begin{cases}4x_1^{\ 2}-2\sqrt{6}x_1+1=0\\4x_2^{\ 2}-2\sqrt{6}x_2+1=0\end{cases}$

ឬ $\begin{cases}4x_1^{\ n+2}-2\sqrt{6}x_1^{\ n+1}+x_1^{\ n}=0\ (i)\\4x_2^{\ n+2}-2\sqrt{6}x_2^{\ n+1}+x_2^{\ n}=0\ (ii)\end{cases}$

បូកសមីការ (i) និង (ii) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$4(x_1^{\ n+2}+x_2^{\ n+2})-2\sqrt{6}(x_1^{\ n+1}+x_2^{\ n+1})+(x_1^{\ n}+x_2^{\ n})=0$$

ដូចនេះ $4S_{n+2}-2\sqrt{6}S_{n+1}+S_n=0$ ។

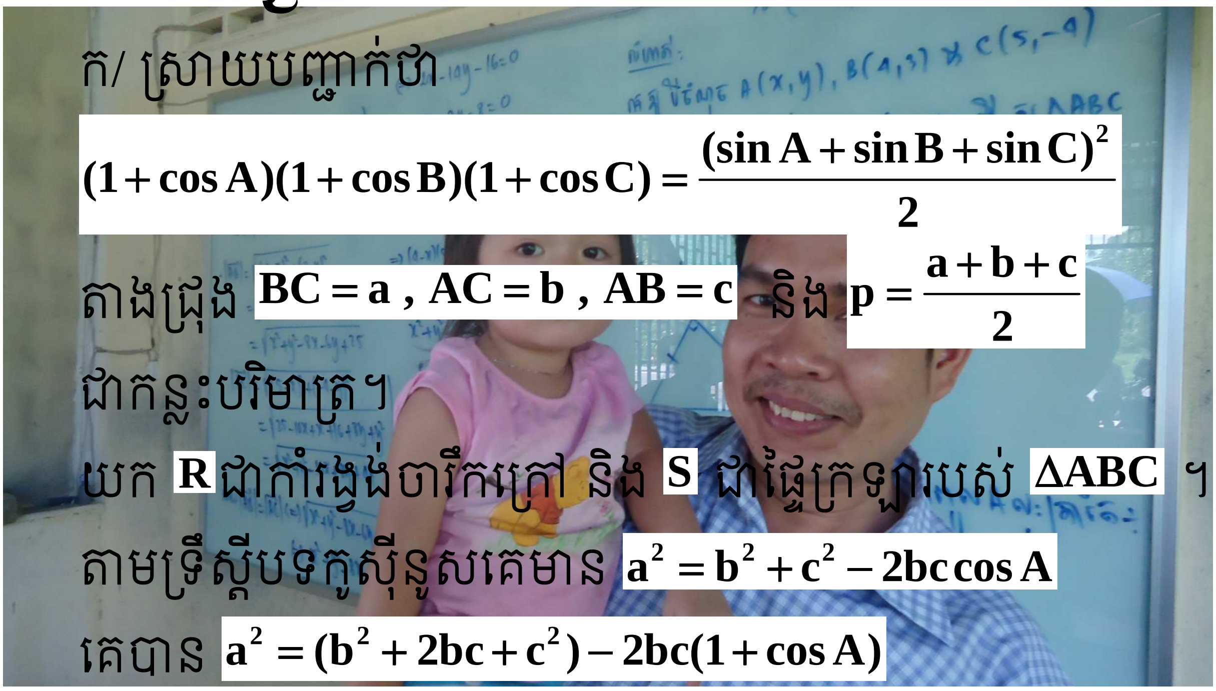
លំហាត់ទី១១២

ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា ៖

ក/ $(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\dfrac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{2}$

ខ/ $\left(1+\dfrac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3\ge\left(\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sqrt{2}}\right)^2$

ដំណោះស្រាយ



ក/ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{2}$$

តាងជ្រុង $BC=a\ ,\ AC=b\ ,\ AB=c$ និង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$

ជាកន្លះបរិមាត្រ ។

យក R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង S ជាផ្ទៃក្រឡារបស់ ΔABC ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

គេបាន $a^2=(b^2+2bc+c^2)-2bc(1+\cos A)$

គេទាញ $1+\cos A=\dfrac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$

ដោយ $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ នោះ $a+b+c=2p$

និង $b+c-a=2(p-a)$

គេបាន $1+\cos A=\dfrac{4p(p-a)}{2bc}=\dfrac{2p(p-a)}{bc}$

ដូចគ្នាដែរ $1+\cos B=\dfrac{2p(p-b)}{ac}\ ,\ 1+\cos C=\dfrac{2p(p-c)}{ab}$

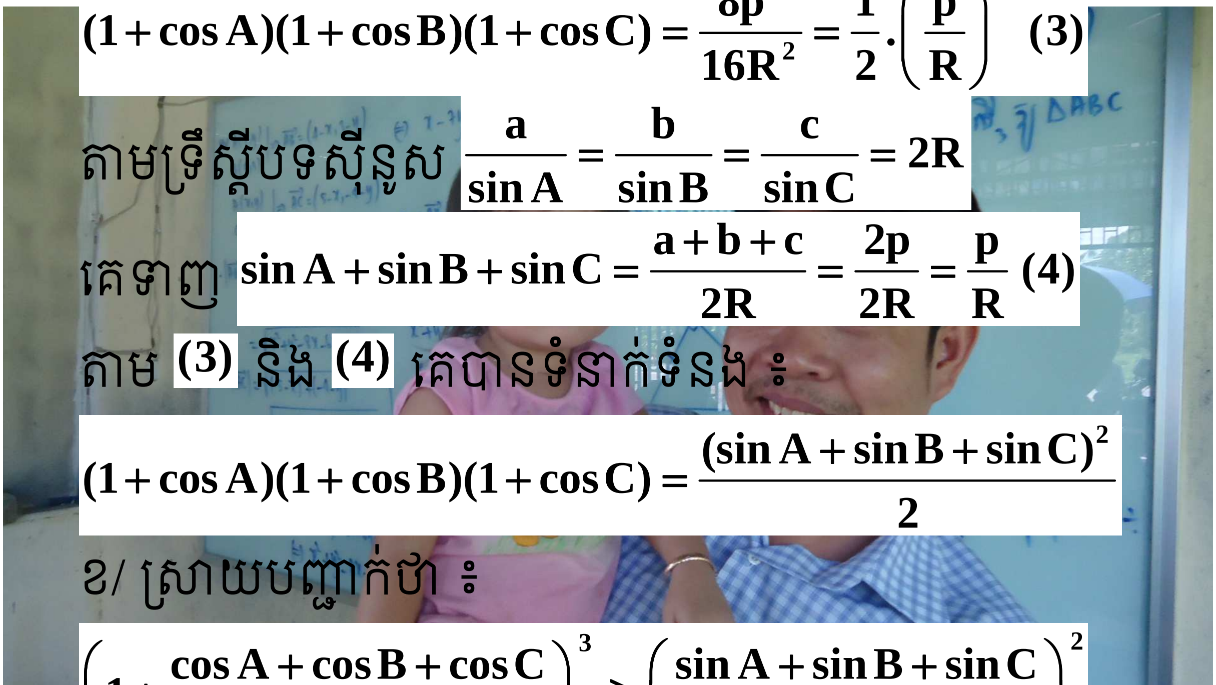
គេបាន

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{8p^2.p(p-a)(p-b)(p-c)}{(abc)^2}\quad(1)$$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abc}{4R}$

គេទាញ $\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(abc)^2}=\frac{1}{16R^2}\quad(2)$

យកទំនាក់ទំនង (2) ជំនួសក្នុង (1) គេបាន ៖



$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{8p^2}{16R^2}=\frac{1}{2}.\left(\frac{p}{R}\right)^2\quad(3)$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

គេទាញ $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a+b+c}{2R}=\frac{2p}{2R}=\frac{p}{R}\quad(4)$

តាម (3) និង (4) គេបានទំនាក់ទំនង ៖

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{2}$$

ខ/ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\left(1+\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3\geq\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sqrt{2}}\right)^2$$

ដោយប្រើវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត មធ្យមធរណីមាត្រគេបាន ៖

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)\leq\left(\frac{1+\cos A+1+\cos B+1+\cos C}{3}\right)^3$$

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)\leq\left(1+\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3$$

ដោយ

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{2}$$

ដូចនេះ

$$\left(1+\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3\geq\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sqrt{2}}\right)^2$$ ពិត។

លំហាត់ទី១១៣

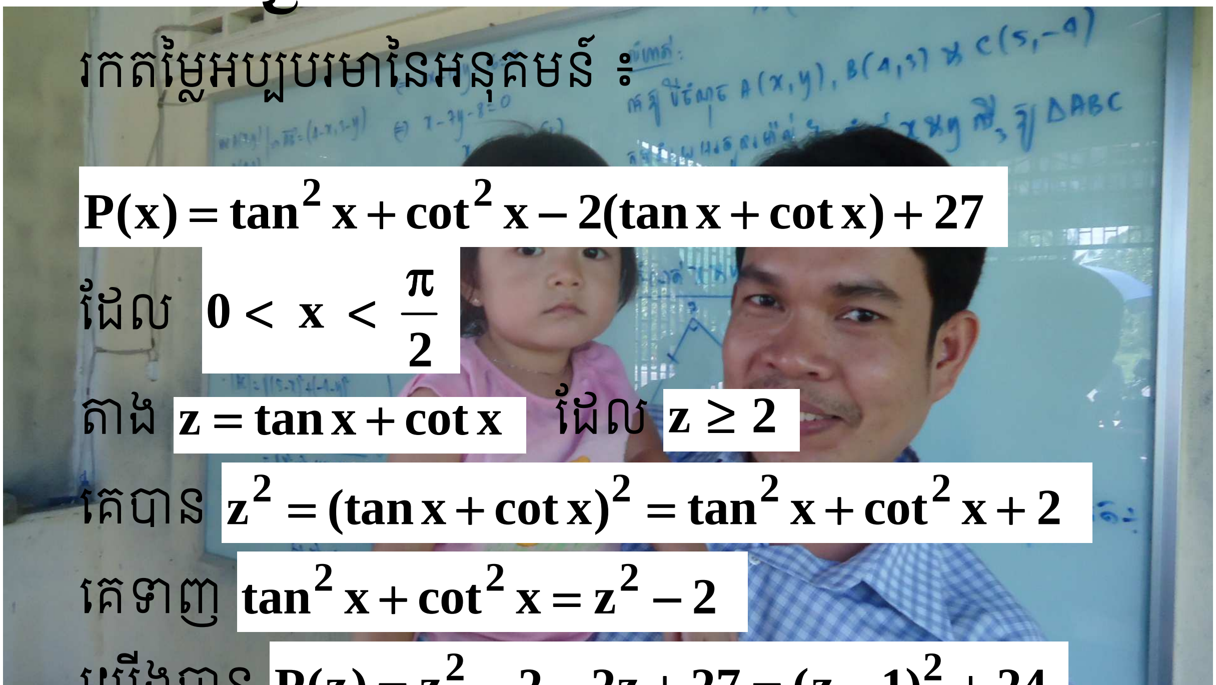
រកតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍ ៖

$$P(x) = \tan^2 x + \cot^2 x - 2(\tan x + \cot x) + 27$$

$$Q(x) = \tan^2 x + \cot^2 x - 8(\tan x + \cot x) + 87$$

ដែល $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ



រកតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍ ៖

$$P(x) = \tan^2 x + \cot^2 x - 2(\tan x + \cot x) + 27$$

ដែល $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

តាង $z = \tan x + \cot x$ ដែល $z \geq 2$

គេបាន $z^2 = (\tan x + \cot x)^2 = \tan^2 x + \cot^2 x + 2$

គេទាញ $\tan^2 x + \cot^2 x = z^2 - 2$

យើងបាន $P(z) = z^2 - 2 - 2z + 27 = (z-1)^2 + 24$

ដោយ $z \geq 2$ ហេតុនេះគេបាន $P(z) \geq 1 + 24 = 25$

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ $P(x)$ គឺ $m = 25$ ។

$$Q(x) = \tan^2 x + \cot^2 x - 8(\tan x + \cot x) + 87$$

គេបាន $Q(z) = z^2 - 2 - 8z + 87 = (z-4)^2 + 69$

ដោយ $z \geq 2$ ដើម្បីឲ្យ Q អប្បបរមាលុះត្រាតែ $z = 4$ ។

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ $Q(x)$ គឺ $m = 69$ ។

លំហាត់ទី១១៤

គេឲ្យ $0<a<\frac{\pi}{2}$ និង $0<b<\frac{\pi}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\left(\frac{\sin^2 a}{\sin b}\right)^2+\left(\frac{\cos^2 a}{\cos b}\right)^2=1$

លុះត្រាតែ $a=b$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\left(\frac{\sin^2 a}{\sin b}\right)^2+\left(\frac{\cos^2 a}{\cos b}\right)^2=1$

សមមូល $(\sin^2 b+\cos^2 b)\left(\frac{\sin^4 a}{\sin^2 b}+\frac{\cos^4 a}{\cos^2 b}\right)=1$

$$\sin^4 a+\cos^4 a+\frac{\cos^2 b}{\sin^2 b}\sin^4 a+\frac{\sin^2 b}{\cos^2 b}\cos^4 a=1$$

$$1-2\sin^2 a\cos^2 a+\frac{\cos^2 b}{\sin^2 b}\sin^4 a+\frac{\sin^2 b}{\cos^2 b}\cos^4 a=1$$

$$\left(\frac{\cos b}{\sin b}\sin^2 a-\frac{\sin b}{\cos b}\cos^2 a)\right)^2=0$$

គេទាញ $\frac{\cos b}{\sin b}\sin^2 a=\frac{\sin b}{\cos b}\cos^2 a$

សមមូល $\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}=\frac{\sin^2 b}{\cos^2 b}$ សមមូល $\tan^2 a=\tan^2 b$

ដោយ $0<a<\frac{\pi}{2}$ និង $0<b<\frac{\pi}{2}$ នោះគេទាញ $a=b$ ។

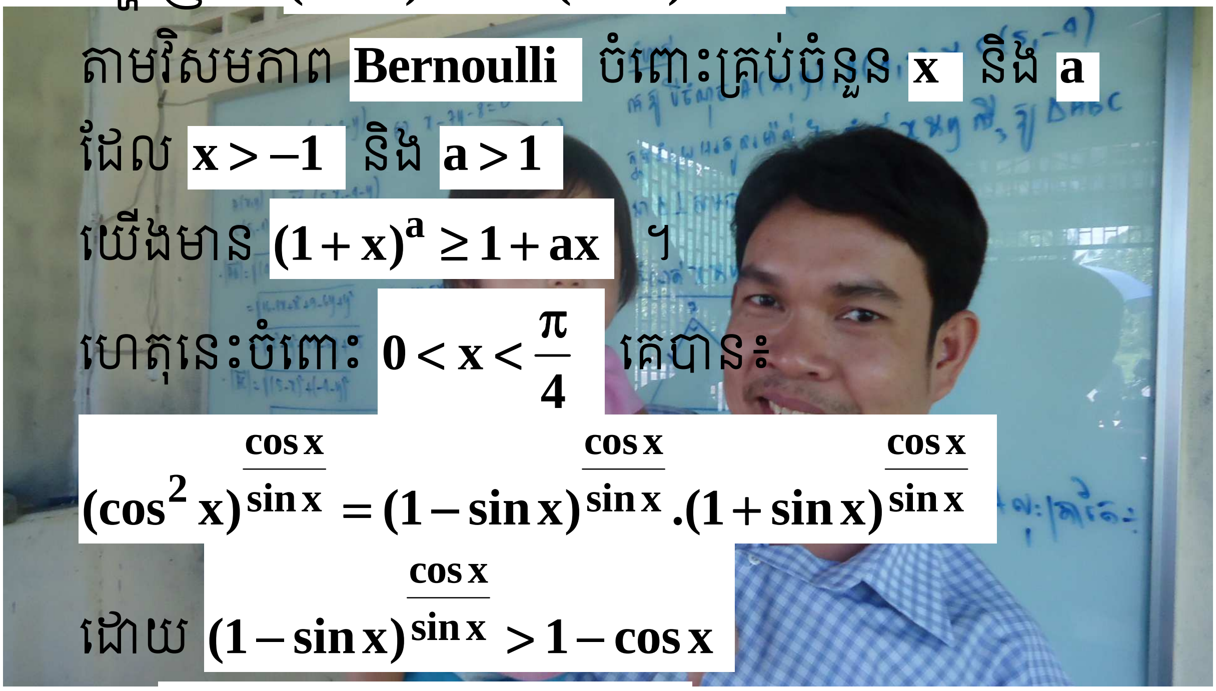
លំហាត់ទី១១៥

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \in (0, \frac{\pi}{4})$

ចូរបង្ហាញថា $(\cos x)^{\cos x} > (\sin x)^{\sin x}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(\cos x)^{\cos x} > (\sin x)^{\sin x}$



តាមវិសមភាព **Bernoulli** ចំពោះគ្រប់ចំនួន x និង a

ដែល $x > -1$ និង $a > 1$

យើងមាន $(1+x)^a \ge 1 + ax$ ។

ហេតុនេះចំពោះ $0 < x < \frac{\pi}{4}$ គេបាន៖

$$(\cos^2 x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} = (1-\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} . (1+\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}}$$

ដោយ $(1-\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > 1 - \cos x$

និង $(1+\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > 1 + \cos x$

គេបាន $(\cos^2 x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > (1-\cos x)(1+\cos x) = \sin^2 x$

គេទាញ $(\cos x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > \sin x$

$$\ln(\cos x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > \ln(\sin x)$$

$$\frac{\cos x}{\sin x}\ln(\cos x) > \ln(\sin x)$$

$$\cos x \ln(\cos x) > \sin x \ln(\sin x)$$

$$\ln(\cos x)^{\cos x} > \ln(\sin x)^{\sin x}$$

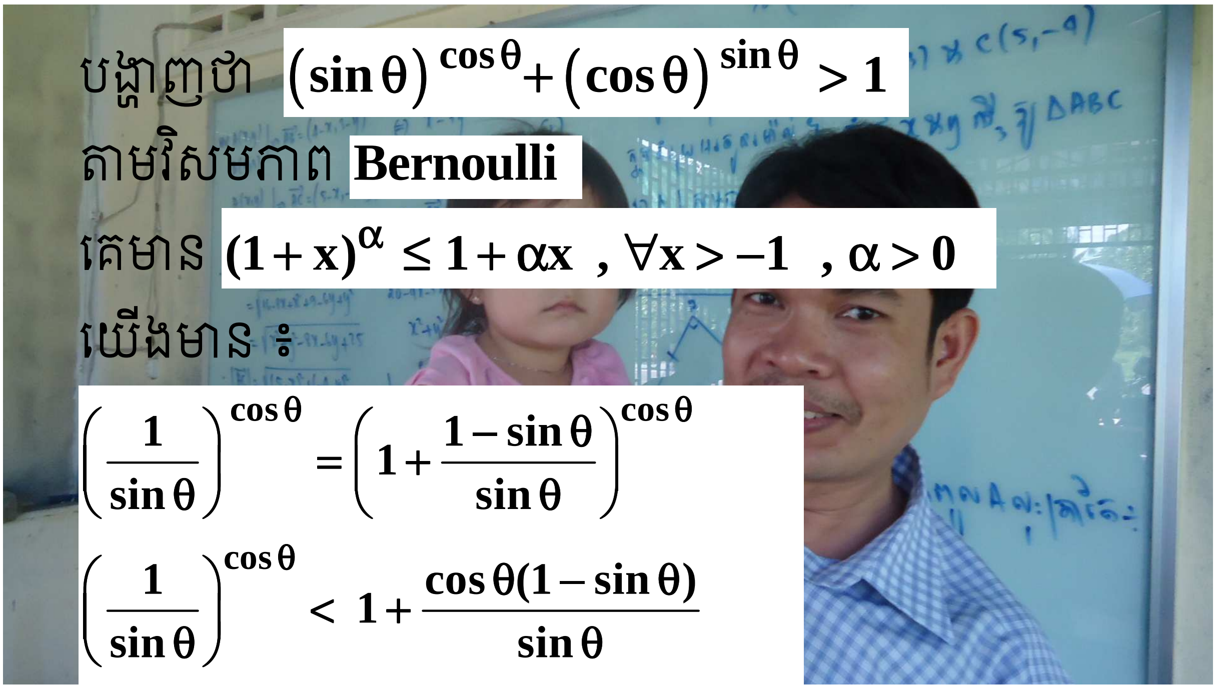
ដូចនេះ $(\cos x)^{\cos x} > (\sin x)^{\sin x}$ ។

លំហាត់ទី១១៦

គេឲ្យ θ ជាចំនួនពិតដែល $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(\sin\theta)^{\cos\theta}+(\cos\theta)^{\sin\theta}>1$

ដំណោះស្រាយ



បង្ហាញថា $(\sin\theta)^{\cos\theta}+(\cos\theta)^{\sin\theta}>1$

តាមវិសមភាព **Bernoulli**

គេមាន $(1+x)^{\alpha}\le 1+\alpha x\ ,\ \forall x>-1\ ,\ \alpha>0$

យើងមាន ៖

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^{\cos\theta}=\left(1+\frac{1-\sin\theta}{\sin\theta}\right)^{\cos\theta}$$

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^{\cos\theta}<1+\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{\sin\theta}$$

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^{\cos\theta}<\frac{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}$$

ឬ $$(\sin\theta)^{\cos\theta}>\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta}\quad(1)$$

ស្រាយដូចខាងលើនេះដែរយើងបាន៖

$$(\cos\theta)^{\sin\theta}>\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta}\quad(2)$$

បូកវិសមភាព **(1)** និង **(2)** ខាងលើនេះយើងបាន ៖

$$(\sin\theta)^{\cos\theta}+(\cos\theta)^{\sin\theta}>\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta}$$

ដោយគេមាន $\frac{\text{son}\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta}>1$

ដូចនេះ $(\sin\theta)^{\cos\theta}+(\cos\theta)^{\sin\theta}>1$ ។

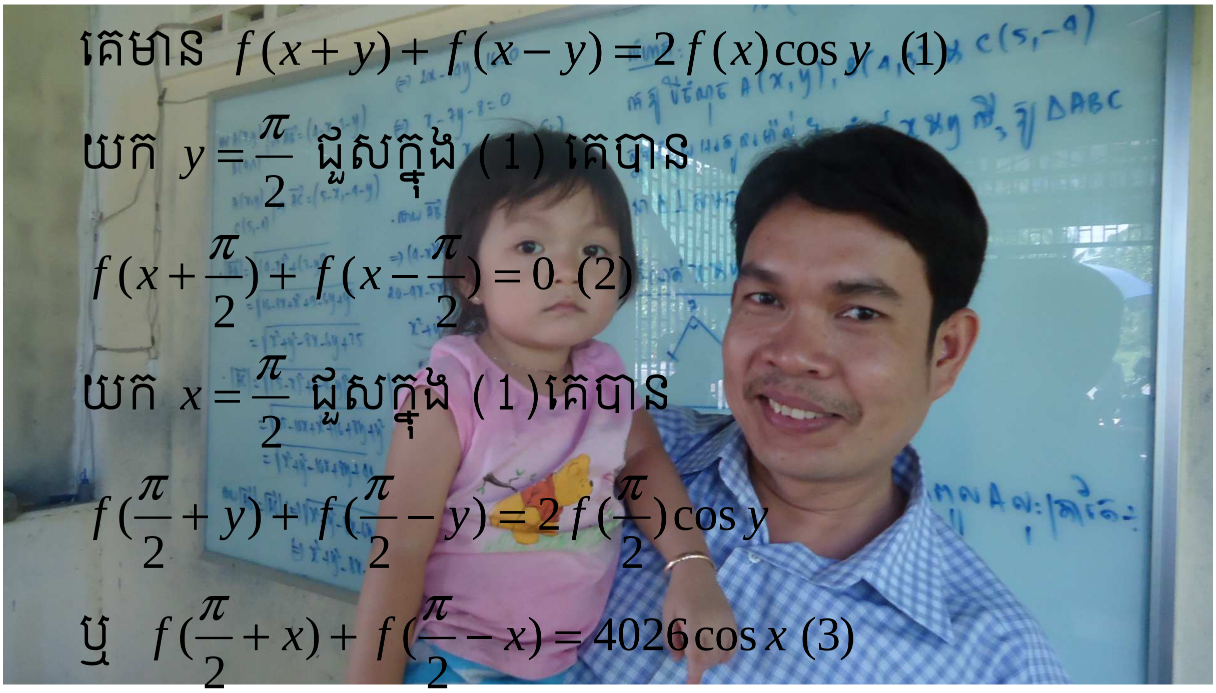
លំហាត់ទី១១៧

រកបណ្តាអនុគមន៍ f ដែលកំណត់លើ IR ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y \quad \forall x,y\in IR$

និង $f(0)=2012$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2013$

ដំណោះស្រាយ



គេមាន $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y$ (1)

យក $y=\dfrac{\pi}{2}$ ជួសក្នុង (1) គេបាន

$$f(x+\frac{\pi}{2})+f(x-\frac{\pi}{2})=0 \quad (2)$$

យក $x=\dfrac{\pi}{2}$ ជួសក្នុង (1) គេបាន

$$f(\frac{\pi}{2}+y)+f(\frac{\pi}{2}-y)=2f(\frac{\pi}{2})\cos y$$

ឬ $f(\dfrac{\pi}{2}+x)+f(\dfrac{\pi}{2}-x)=4026\cos x$ (3)

យក $x=0$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន

$$f(y)+f(-y)=2f(0)\cos y$$

ឬ $f(x)+f(-x)=4024\cos x$ (4)

ជំនួស x ដោយ $\dfrac{\pi}{2}-x$ ក្នុង (4) គេបាន

$$f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x-\frac{\pi}{2})=4024\sin x \quad (5)$$

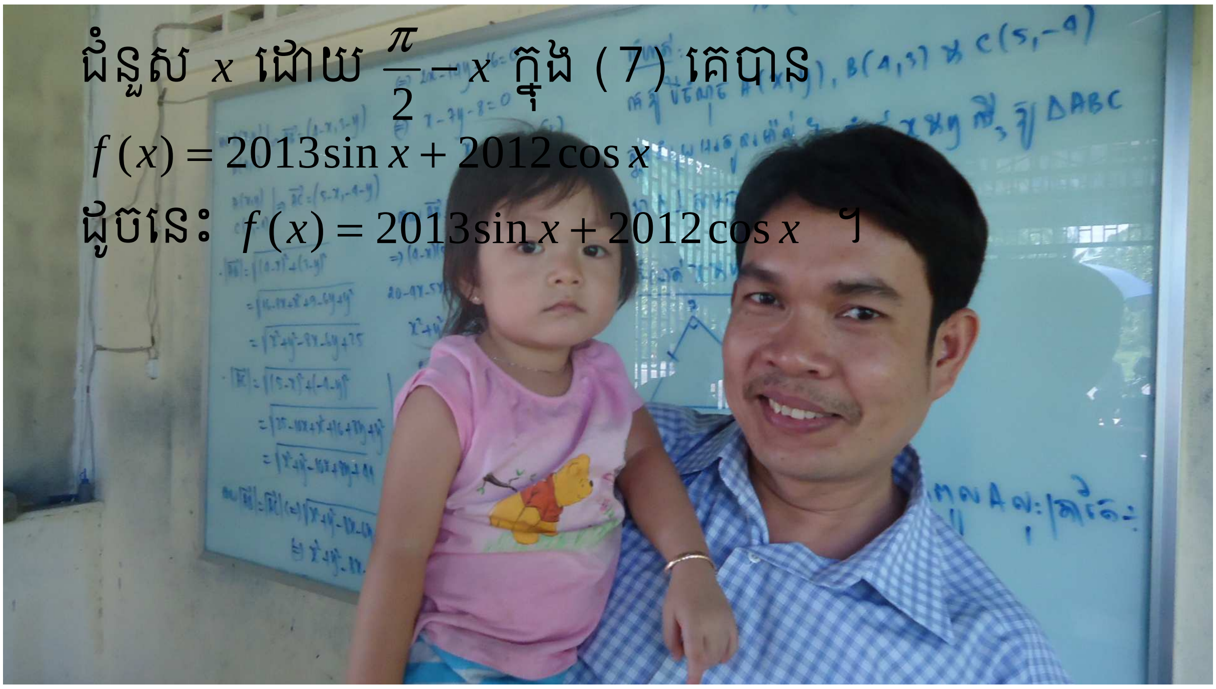
បូកសមីការ (3) និង (5)គេបាន ៖

$$f(\frac{\pi}{2}+x)+f(x-\frac{\pi}{2})+2f(\frac{\pi}{2}-x)=4026\cos x+4024\sin x \quad (6)$$

យក (2)ជំនួសក្នុង (6)គេបាន

$$2f(\frac{\pi}{2}-x)=4026\cos x+4024\sin x$$

ឬ $f(\frac{\pi}{2}-x)=2013\cos x+2012\sin x \quad (7)$



ជំនួស x ដោយ $\frac{\pi}{2}-x$ ក្នុង (7) គេបាន

$$f(x)=2013\sin x+2012\cos x$$

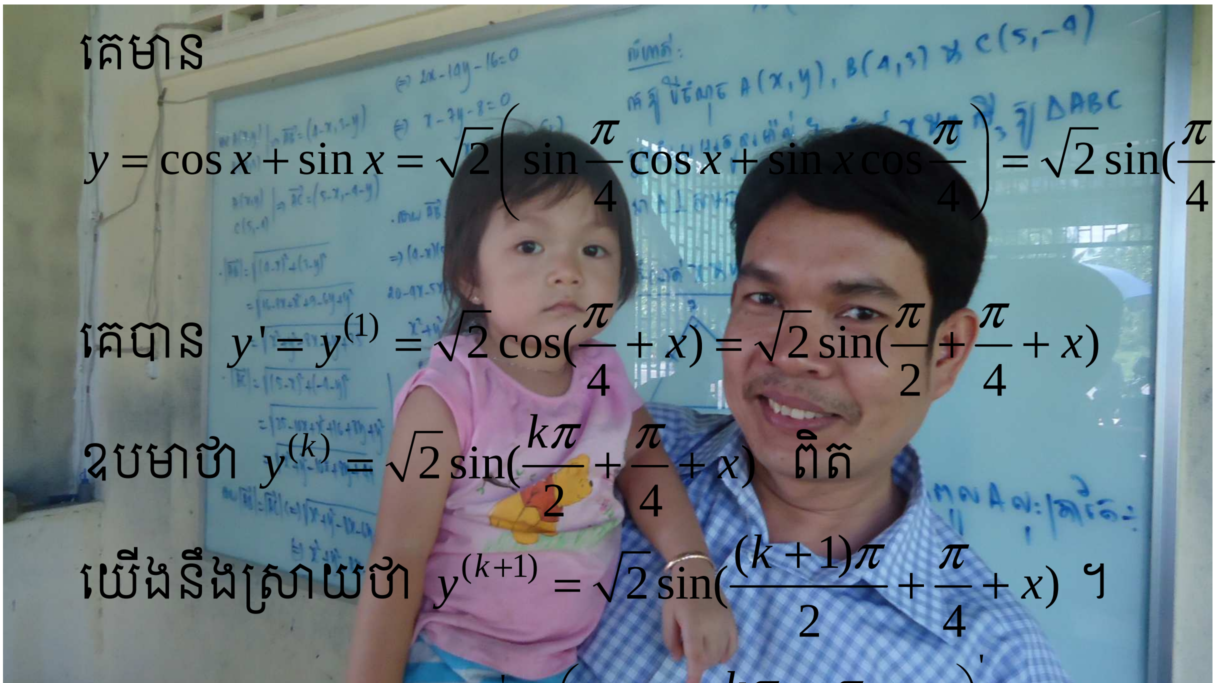
ដូចនេះ $f(x)=2013\sin x+2012\cos x$ ។

លំហាត់ទី១១៨

រកដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=\cos x+\sin x$ ជាអនុគមន៍នៃ n

ដំណោះស្រាយ

រកដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=\cos x+\sin x$



គេមាន

$$y=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$

គេបាន $y'=y^{(1)}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+x\right)$

ឧបមាថា $y^{(k)}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+x\right)$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា $y^{(k+1)}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+x\right)$ ។

គេមាន $y^{(k+1)}=\left(y^{(k)}\right)'=\left(\sqrt{2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+x\right)\right)'$

$$y^{(k+1)}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+x\right)$$

ដូចនេះ $y^{(n)}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}+x\right)$

លំហាត់ទី១១៩

គេឲ្យស៊ីត (u_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} u_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-u_n^2}} \end{cases} , n \geq 0$

កំណត់កន្សោម u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

ដំណោះស្រាយ

កំណត់កន្សោម u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេមាន $u_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{2^2}$

ចំពោះ $n = 0$ គេបាន

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-u_0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2\sin^2\frac{\pi}{8}} = \sin\frac{\pi}{2^3}$$

ឧបមាថា $u_n = \sin\dfrac{\pi}{2^{n+2}}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $n+1$ គឺ

$u_{n+1}=\sin\frac{\pi}{2^{n+3}}$ ។

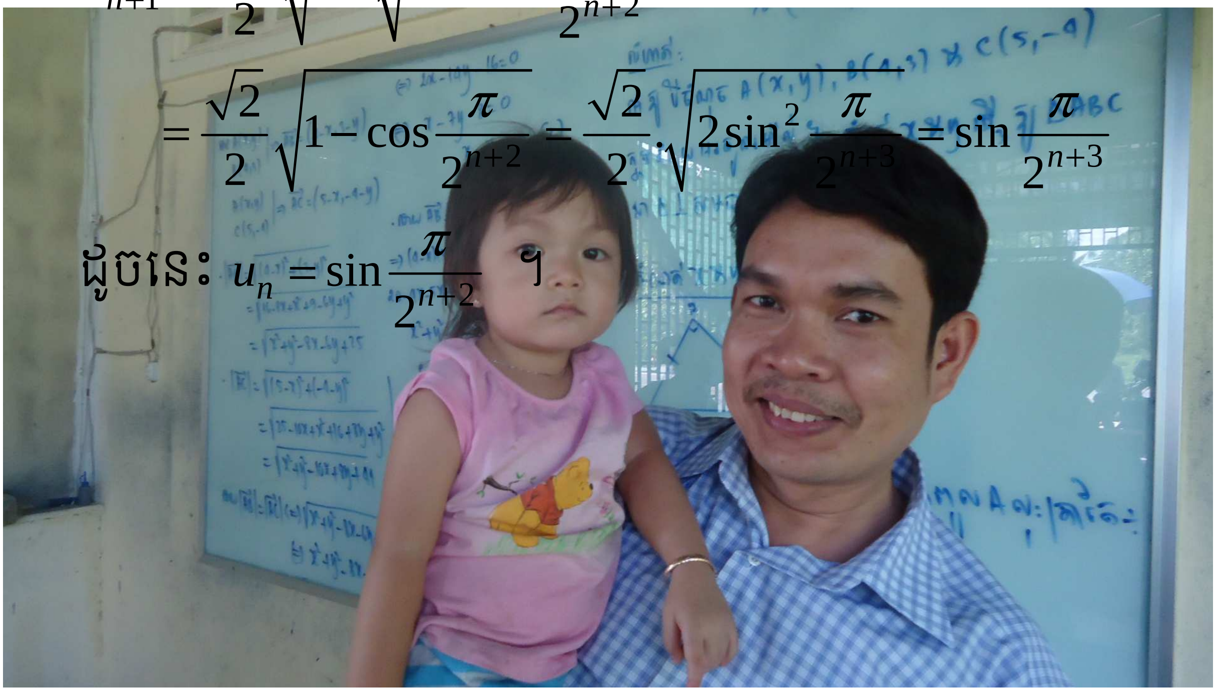
គេមាន $u_n=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1-\sqrt{1-u_n^2}}$ ដោយ $u_n=\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$

គេបាន

$$u_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^{n+2}}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2\sin^2\frac{\pi}{2^{n+3}}}=\sin\frac{\pi}{2^{n+3}}$$

ដូចនេះ $u_n=\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$ ។



លំហាត់ទី១២០

គេឲ្យអនុគមន៍ $f : IR \to IR$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$f(\frac{\pi}{2}) = 1$ និង $f(x+y) - f(x-y) = 2f(y)\cos x$

ចំពោះគ្រប់ $x , y \in IR$ ។ ចូរកំណត់រកអនុគមន៍ $y = f(x)$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់រកអនុគមន៍ $y = f(x)$

គេមាន $f(x+y) - f(x-y) = 2f(y)\cos x$ (*)

យក $x = 0$ ជួសក្នុង (*) គេបាន ៖

$f(y) - f(-y) = 2f(y)$ នោះ $f(-y) = -f(y)$

គេទាញបាន f ជាអនុគមន៍សេស ។

យក $y = \frac{\pi}{2}$ ជួសក្នុង (*) គេបាន ៖

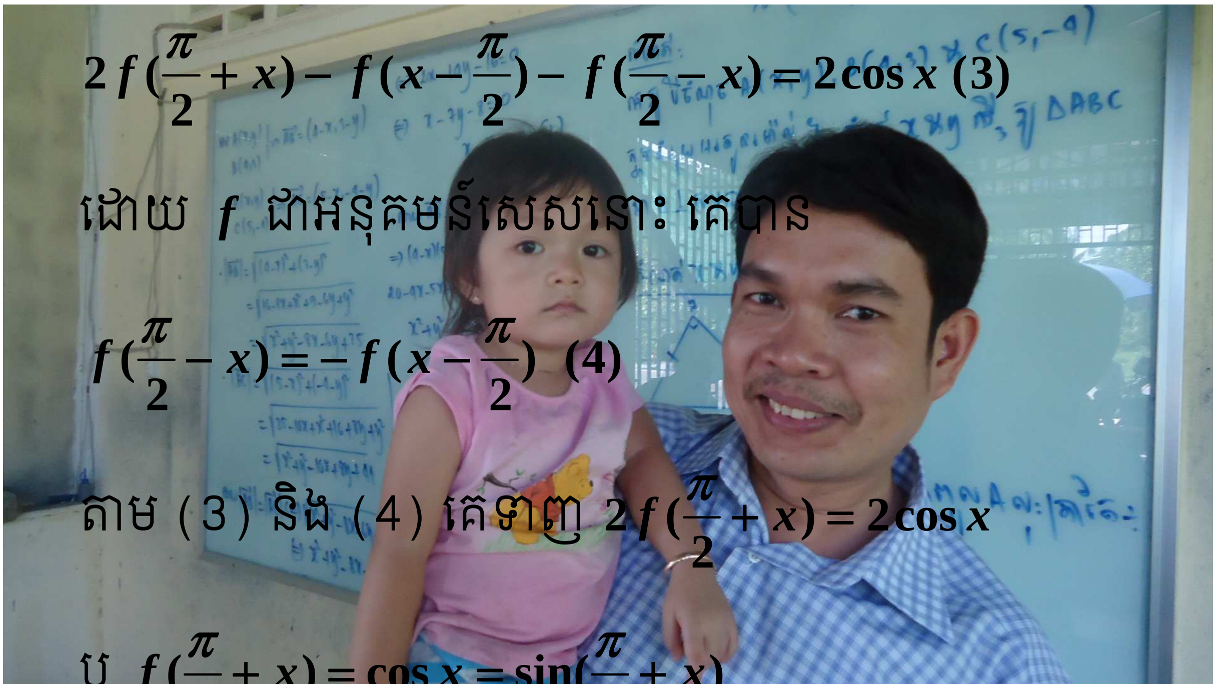
$$f(x + \frac{\pi}{2}) - f(x - \frac{\pi}{2}) = 2\cos x \quad (1)$$

យក $x=\frac{\pi}{2}$ ជួសក្នុង (*) គេបាន ៖

$$f(\frac{\pi}{2}+y)-f(\frac{\pi}{2}-y)=0$$

ឬ $f(\frac{\pi}{2}+x)-f(\frac{\pi}{2}-x)=0$ (2)

បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន



$$2f(\frac{\pi}{2}+x)-f(x-\frac{\pi}{2})-f(\frac{\pi}{2}-x)=2\cos x \quad (3)$$

ដោយ f ជាអនុគមន៍សេសនោះ គេបាន

$$f(\frac{\pi}{2}-x)=-f(x-\frac{\pi}{2}) \quad (4)$$

តាម (3) និង (4) គេទាញ $2f(\frac{\pi}{2}+x)=2\cos x$

ឬ $f(\frac{\pi}{2}+x)=\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}+x)$

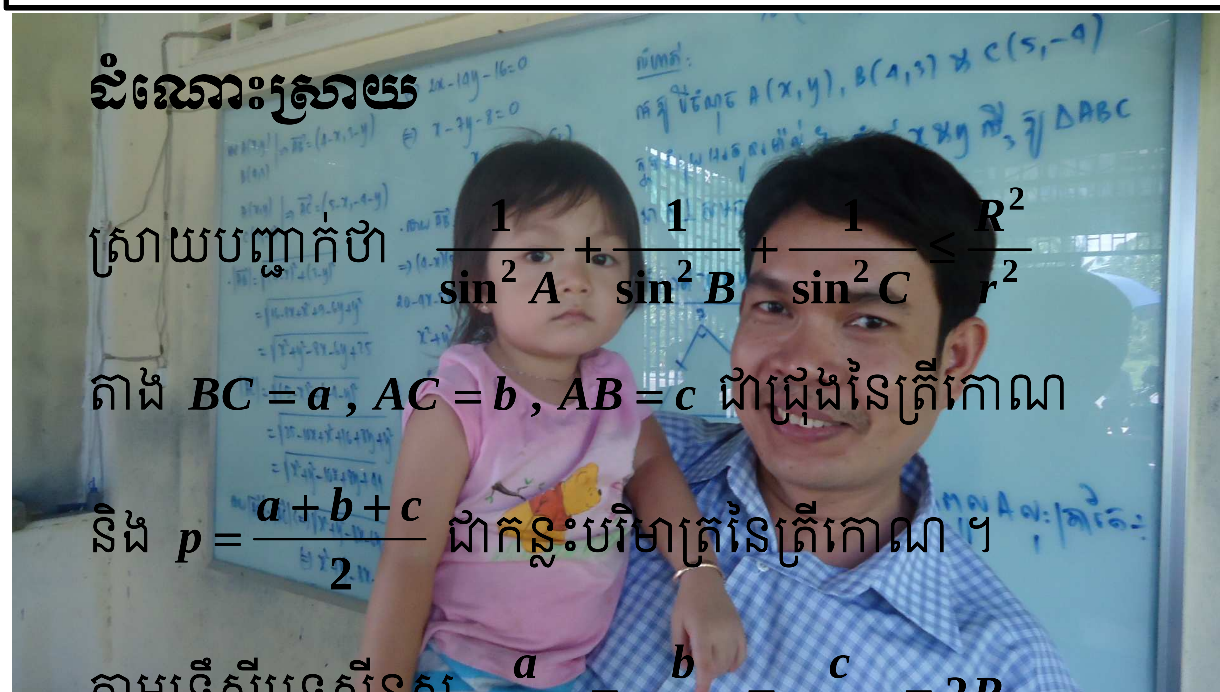
ដូចនេះ $f(x)=\sin x$ ។

លំហាត់ទី១២១

គេតាង r និង R រៀងគ្នាជារង្វាស់កាំនៃរង្វង់ចារឹកក្នុង និង

កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ $\Delta\, ABC$ មួយ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}\le\frac{R^2}{r^2}$



ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}\le\frac{R^2}{r^2}$

តាង $BC=a\,,\,AC=b\,,\,AB=c$ ជាជ្រុងនៃត្រីកោណ

និង $p=\frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

គេទាញ $\frac{1}{\sin A}=\frac{2R}{a}\,,\,\frac{1}{\sin B}=\frac{2R}{b}\,,\,\frac{1}{\sin C}=\frac{2R}{c}$

វិសមភាពសមមូល $4R^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\le\frac{R^2}{r^2}$

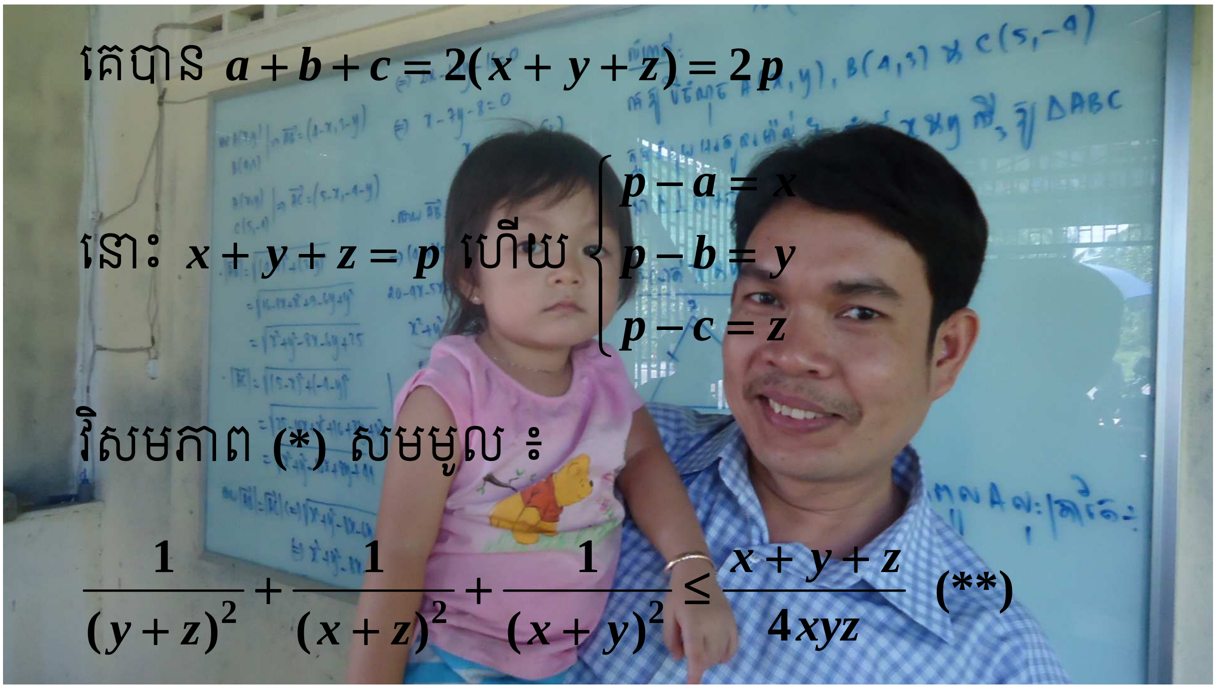
សមមូល $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{4r^2}$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង $S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

គេទាញ $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

គេបាន $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \le \frac{p}{4(p-a)(p-b)(p-c)}$ $(*)$

តាង $a = y+z$, $b = x+z$, $c = x+y$



គេបាន $a+b+c = 2(x+y+z) = 2p$

នោះ $x+y+z = p$ ហើយ $\begin{cases} p-a = x \\ p-b = y \\ p-c = z \end{cases}$

វិសមភាព (*) សមមូល ៖

$$\frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} + \frac{1}{(x+y)^2} \le \frac{x+y+z}{4xyz} \quad (**)$$

តាមវិសមភាព AM-GM គេមាន ៖

$(y+z)^2 \ge 4yz$ នោះ $\frac{1}{(y+z)^2} \le \frac{1}{4yz} = \frac{x}{4xyz}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{1}{(z+x)^2} \le \frac{y}{4xyz}$ (2) ; $\frac{1}{(x+y)^2} \le \frac{z}{4xyz}$ (3)

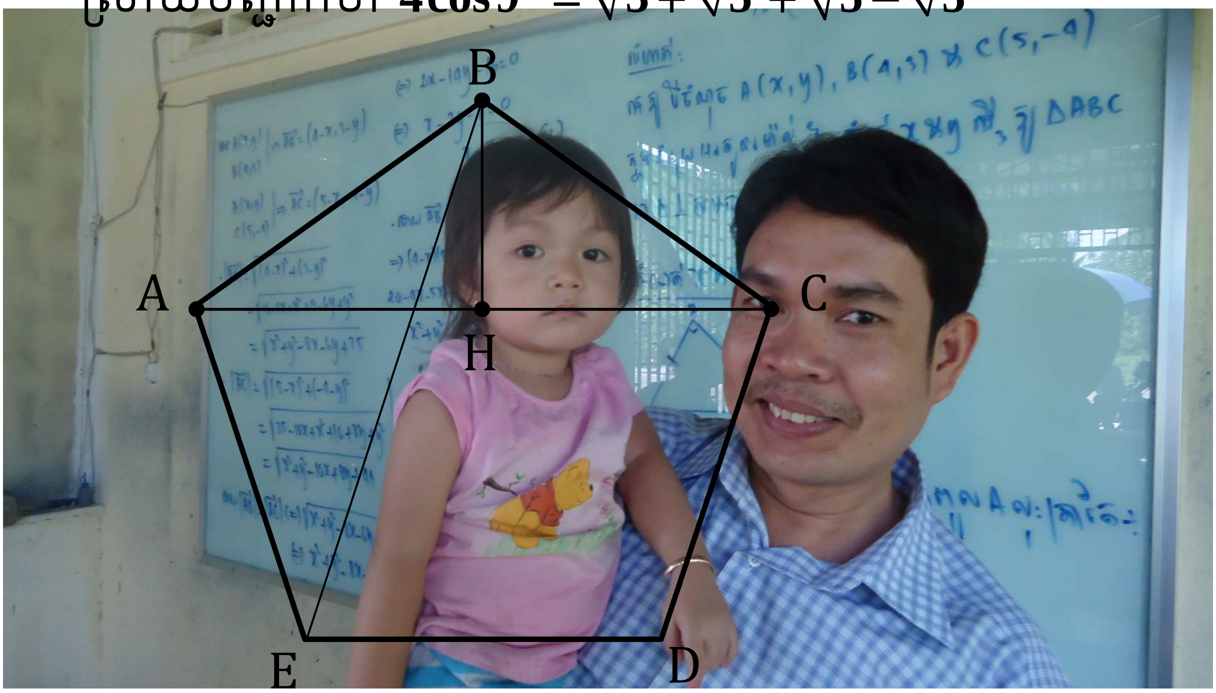
បូកវិសមភាព(1),(2) និង (3) នោះ (**) ពិត

លំហាត់ទី១២២

ចូរស្រាយថា $4\cos 9^o = \sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $4\cos 9^o = \sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}$



យក $ABCDE$ ជាបញ្ចចតុកោណនិយ័តមានជ្រុង

$AB = BC = CD = DE = EA = a$ និងអង្កត់ទ្រូង $AC = d$ ។

ដោយចតុកោណ $ABCE$ ចារឹកក្នុងរង្វង់នោះតាមទ្រឹស្តីបទ

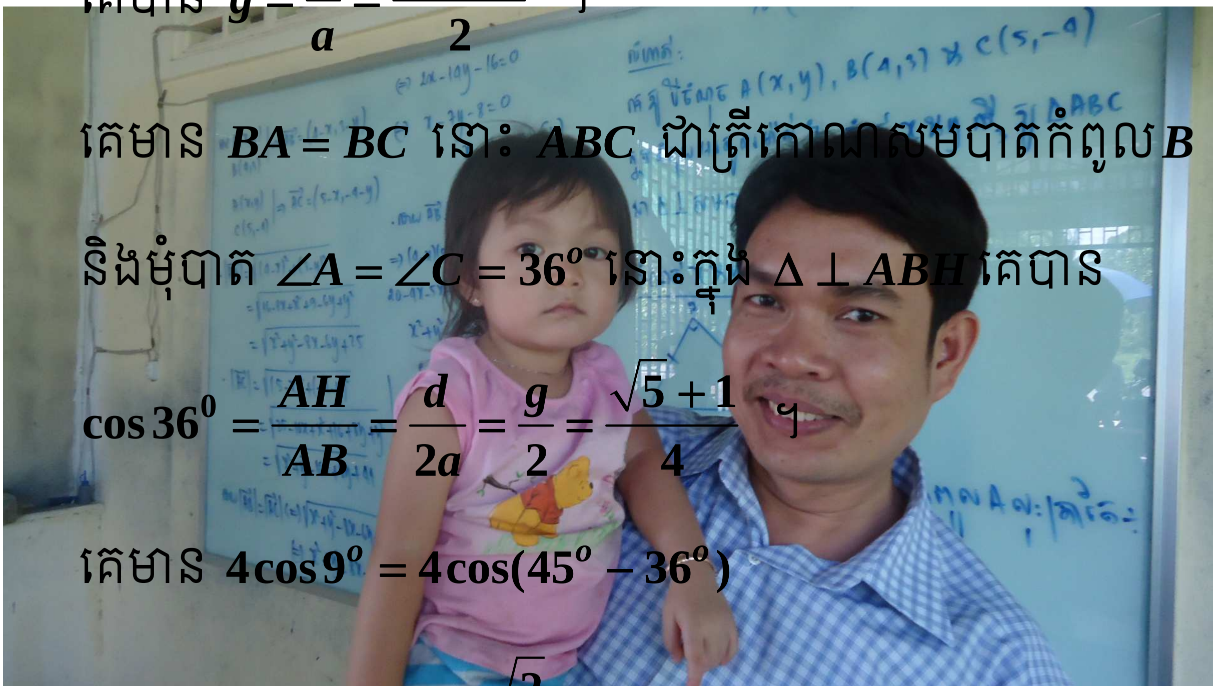
Ptolemy គេបាន $AC.BE = AB.CE + BC.EA$

នោះ $d^2 = ad + a^2$ ឬ $\left(\frac{d}{a}\right)^2 - \left(\frac{d}{a}\right) - 1 = 0$

តាង $g = \frac{d}{a} > 0$ នោះ $g^2 - g - 1 = 0$, $\Delta = 1 + 4 = 5$

គេទាញ $g_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $g_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ដោយ $g > 0$

គេបាន $g = \frac{d}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ។



គេមាន $BA = BC$ នោះ ABC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល B

និងមុំបាត $\angle A = \angle C = 36^o$ នោះក្នុង $\Delta \perp ABH$ គេបាន

$\cos 36^0 = \frac{AH}{AB} = \frac{d}{2a} = \frac{g}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ។

គេមាន $4\cos 9^o = 4\cos(45^o - 36^o)$

$$= 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 36^o + \sin 36^o)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos 36^o + \sqrt{1-\cos^2 36^o}\right)$$

ដោយ $\cos 36^o = \frac{g}{2}$ និង $g^2 - g - 1 = 0$

គេបាន $4\cos 9^o = 2\sqrt{2}\left(\frac{g}{2}+\sqrt{1-\frac{g^2}{4}}\right)$

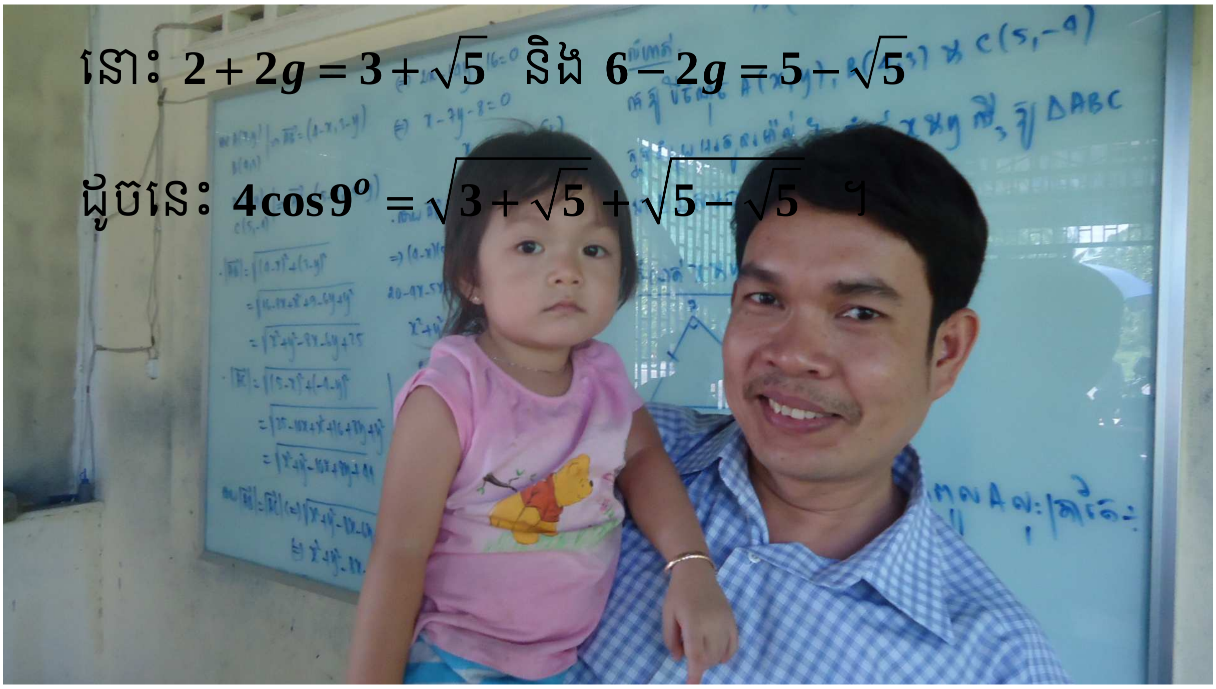
$= \sqrt{2}(g+\sqrt{4-g^2}) = \sqrt{2}\left(\sqrt{1+g}+\sqrt{3-g}\right)$

$= \sqrt{2+2g}+\sqrt{6-2g}$

ដោយគេមាន $g=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

នោះ $2+2g=3+\sqrt{5}$ និង $6-2g=5-\sqrt{5}$

ដូចនេះ $4\cos 9^o=\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}$ ។

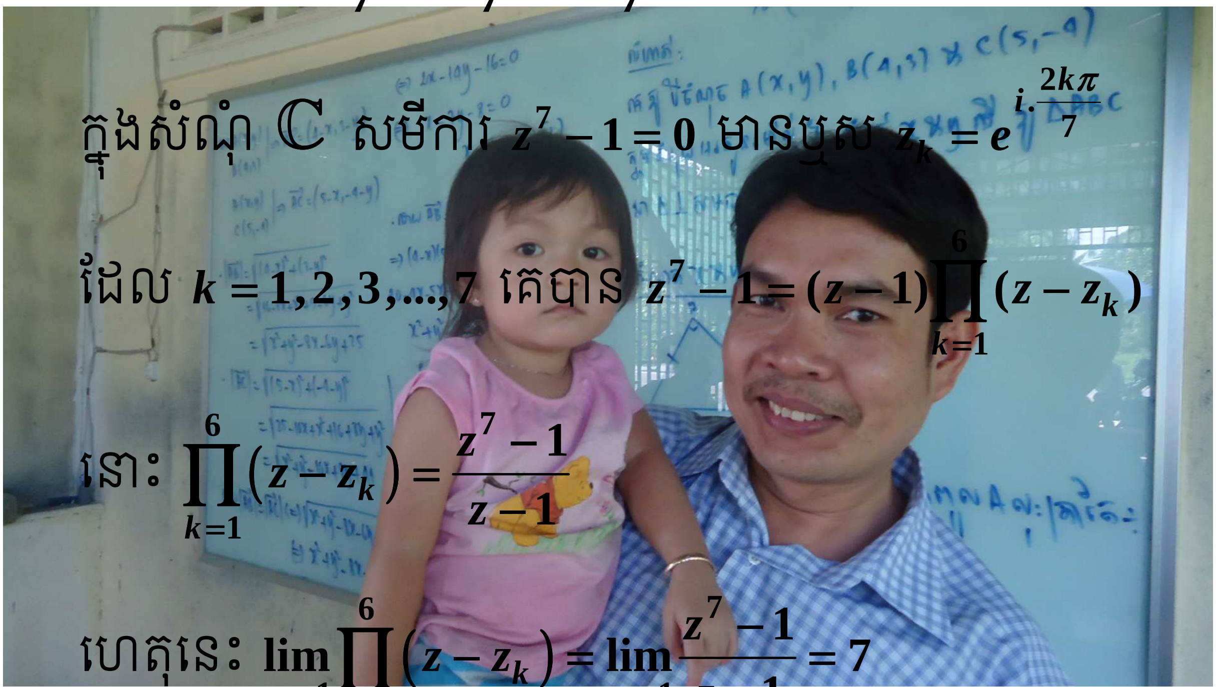


លំហាត់ទី១២៣

ចូរស្រាយថា $\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7}=\sqrt{7}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7}=\sqrt{7}$



ក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}$ សមីការ $z^7-1=0$ មានឫស $z_k=e^{i.\frac{2k\pi}{7}}$

ដែល $k=1,2,3,...,7$ គេបាន $z^7-1=(z-1)\prod_{k=1}^{6}(z-z_k)$

នោះ $\prod_{k=1}^{6}(z-z_k)=\frac{z^7-1}{z-1}$

ហេតុនេះ $\lim_{z\to1}\prod_{k=1}^{6}(z-z_k)=\lim_{z\to1}\frac{z^7-1}{z-1}=7$

ដោយ $\lim_{z\to1}\prod_{k=1}^{6}(z-z_k)=\prod_{k=1}^{6}(1-z_k)$

$$=\prod_{k=1}^{6}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{7}-i\sin\frac{2k\pi}{7}\right)$$

គេបាន $\prod_{k=1}^{6}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{7}-i\sin\frac{2k\pi}{7}\right)=7$

ជាម៉ូឌុល $\left|\prod_{k=1}^{6}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{7}-i\sin\frac{2k\pi}{7}\right)\right|=|7|=7$

សមមូល $\prod_{k=1}^{6}\left(\left|1-\cos\frac{2k\pi}{7}-i\sin\frac{2k\pi}{7}\right|\right)=7$

$$\left|1-\cos\frac{2k\pi}{7}-i\sin\frac{2k\pi}{7}\right|=\sqrt{\left(1-\cos\frac{2k\pi}{7}\right)^2+\left(\sin\frac{2k\pi}{7}\right)^2}$$

$$=2\sin\frac{k\pi}{7}$$

គេទាញ $\prod_{k=1}^{6}2\sin\frac{k\pi}{7}=7$ ឬ $\prod_{k=1}^{6}\sin\frac{k\pi}{7}=\frac{7}{2^6}$ (*)

ម្យ៉ាងទៀត $\lim_{z\to-1}\prod_{k=1}^{6}(z-z_k)=\lim_{z\to-1}\frac{z^7-1}{z-1}=1$

ដោយ $\lim_{z\to-1}\prod_{k=1}^{6}(z-z_k)=\prod_{k=1}^{6}(-1-z_k)=\prod_{k=1}^{6}(1+z_k)$

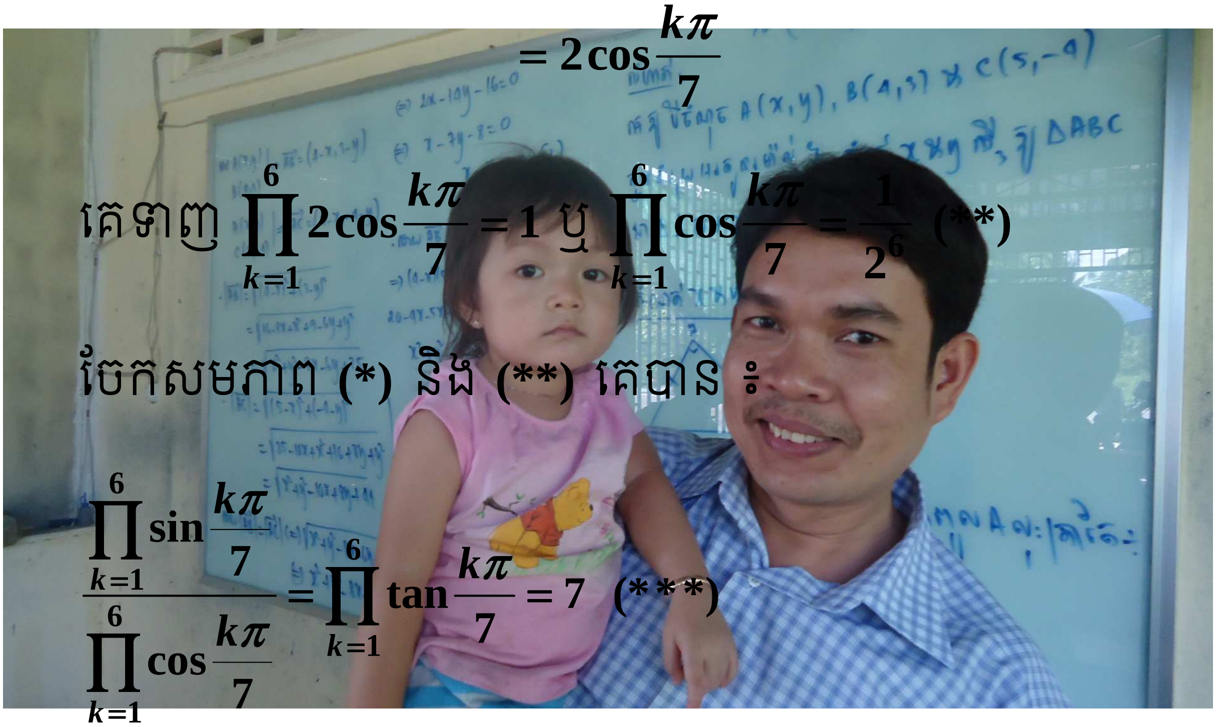
$$=\prod_{k=1}^{6}\left(1+\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}\right)$$

គេបាន $\prod_{k=1}^{6}\left(1+\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}\right)=1$

ជាម៉ូឌុល $\left|\prod_{k=1}^{6}\left(1+\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}\right)\right| = |1| = 1$

សមមូល $\prod_{k=1}^{6}\left(\left|1+\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}\right| \right) = 1$

$$\left|1+\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}\right| = \sqrt{\left(1+\cos\frac{2k\pi}{7}\right)^2+\left(\sin\frac{2k\pi}{7}\right)^2}$$



$$= 2\cos\frac{k\pi}{7}$$

គេទាញ $\prod_{k=1}^{6} 2\cos\frac{k\pi}{7} = 1$ ឬ $\prod_{k=1}^{6}\cos\frac{k\pi}{7} = \frac{1}{2^6}$ (**)

ចែកសមភាព (*) និង (**) គេបាន ៖

$$\frac{\prod_{k=1}^{6}\sin\frac{k\pi}{7}}{\prod_{k=1}^{6}\cos\frac{k\pi}{7}} = \prod_{k=1}^{6}\tan\frac{k\pi}{7} = 7 \quad (***)$$

ដោយ $\prod_{k=1}^{6}\tan\frac{k\pi}{7} = \tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7}\tan\frac{4\pi}{7}\tan\frac{5\pi}{7}\tan\frac{6\pi}{7}$

$$= \left(\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7}\right)^2 \quad (***)$$

តាម(**) និង (***) នោះ $\left(\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7}\right)^2 = 7$

ដូចនេះ $\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7}=\sqrt{7}$ ។

✧✧✧✧✧

ដំណឹងពិសេស!!!

សូមកុំភ្លេចស្វែងរកជាវសៀវភៅរបស់យើងខ្ញុំមានឈ្មោះថា

ឯកសារយោង

1) Geometric Inequalities Marathon
(Samer Seraj September 4, 2011)

2) Inequalities a Mathematical Olympiad Approach
(Radmila Bulajich Manfrino , Jose Antonio Gomez Ortega
Rogelio Valdez Delgado)

3) 103 Trigonometry Problems
(Titu Andreescu , Zuming Feng)

4) 360 Problems for Mathematical Contests

(Titut Andreescu , Dorin Andrica)

5) A problem book in algebra .
(Translated from the Russian by Victor Shiffer)