

រៀបរៀងដោយ **លីម ផល្គុន**
បរិញ្ញាបត្រផ្នែកគណិតវិទ្យា

គណិតវិទ្យាគ្រឹះក្នុងលំហ

សម្រាប់ថ្នាក់ទី

១២

ផលគុណស្កាលែ-ផលគុណវ៉ិចទ័រ

$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \varphi \cdot \vec{k}$$

រក្សាសិទ្ធិ

ជំពូកទី១

សង្ខេបរូបមន្តសំខាន់ៗ

១-ផលគុណស្កាលែក្នុងលំហ

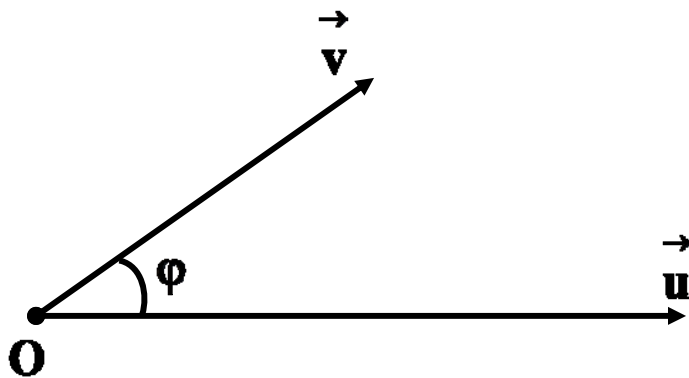
1/កន្សោមផលគុណស្កាលែក

ក-និយមន័យ

ផលគុណស្កាលែករវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ក្នុងលំហគឺជា

ចំនួនពិតកំណត់ដោយ $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \varphi$ ។

φ ជាមុំផ្គុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។



លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ខ-កន្សោមវិភាគផលគុណស្កាលែ

ក្នុងគោលអរតូណរម៉ាល់នៃលំហា ផលគុណស្កាលែរវាង
ពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ និង $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ ក្នុងលំហាគឺជា
ចំនួនពិតកំណត់ដោយ $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ ។

គ-ស្កាលែ និង ណាមនៃវ៉ិចទ័រ

បើគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (a, b, c)$ នោះស្កាលែ និង ណាមនៃ $\vec{u}$
កំណត់ដោយ $|\vec{u}|^2 = a^2 + b^2 + c^2$ និង $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ។

ឃ-កូស៊ីនុសនៃមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ

កូស៊ីនុសនៃមុំរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ និង វ៉ិចទ័រ
 $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ ក្នុងលំហាកំណត់ដោយ ៖

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad \text{។}$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

2/លក្ខណៈ

$$\text{ក/ } \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\text{ខ/ } \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$$

$$\text{គ/ } \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$\text{ឃ/ } \vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$\text{ង/ } \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v}) , \lambda \in \mathbb{R}$$

3/វិច្ឆេទអរតូកូណាល់ និង វិច្ឆេទកូលីនេអ៊ែរ

ក-វិច្ឆេទអរតូកូណាល់

$\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាពីរវិច្ឆេទអរតូកូណាល់គ្នា លុះត្រាតែ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

បើ $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ និង $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ នោះគេបាន ៖

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0 \quad \text{។}$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ខ- វ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែរ

$\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាពីរវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែរ គ្នា លុះត្រាតែមានចំនួនពិត

λ មួយដែល $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$ ។

បើ $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ និង $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ នោះគេបាន ៖

$$\vec{u} // \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \\ z_1 = \lambda z_2 \end{cases} \quad \text{ឬ} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad .$$

4/សមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហ

ក-សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំណុច

$A(x_A, y_A, z_A)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (a, b, c)$

$$\text{កំណត់ដោយ} \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

២-សមីការឆ្លុះ

សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំណុច $A(x_A, y_A, z_A)$

និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (a, b, c)$ កំណត់ដោយ ៖

$$(L): \frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c} \quad \text{។}$$

5/សមីការប្លង់ក្នុងលំហ

សមីការ នៃប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $A(x_A, y_A, z_A)$

និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (a, b, c)$ កំណត់ដោយ ៖

$$(P): a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \quad \text{។}$$

6/សមីការស្វ៊ែក្នុងលំហ

សមីការស្វ៊ែក្នុងលំហ (S) មានផ្ចិត $I(a, b, c)$ និងកាំ R

$$(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \quad \text{។}$$

7/ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅប្លង់ក្នុងលំហ

ចម្ងាយពីចំណុច $A(x_A, y_A, z_A)$ ទៅប្លង់ (P) មានសមីការ

$ax + by + cz + d = 0$ កំណត់ដោយ ៖

$$D = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{។}$$

២-ផលគុណវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

1/លំហមានទិសដៅ

គេឱ្យ $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ជាតម្រុយអរតូណរម៉ាល់នៃលំហ ។

គេថា $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ជាតម្រុយមានទិសដៅវិជ្ជមានកាលណា

អ្នកសង្កេតនៅលើកន្លះបន្ទាត់ $(\vec{o}, \vec{k})$ ហើយប្រអប់ជើងនៅចំ

គល់ O បែរមុខតៅចំទិសនៃ $\vec{i}$ ហើយមានវ៉ិចទ័រ $\vec{j}$ នៅខាង

ឆ្វេងដៃនៃអ្នកសង្កេត ។

2/និយមន័យផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ

គេឲ្យ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាពីរវ៉ិចទ័រនៃលំហ ។

ផលគុណរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ គឺជាវ៉ិចទ័រ $\vec{u} \times \vec{v}$ ឬ $\vec{u} \wedge \vec{v}$

កំណត់ដោយ $\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \varphi \cdot \vec{k}$ ។

ដែល φ ជាមុំផ្គុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

3/លក្ខណៈនៃផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ

ក/ $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

ខ/ $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

គ/ $(\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$

ឃ/ $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$

ង/ $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

4/កន្សោមផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រក្នុងគោលអរតូណរម៉ាល់

មានទិសដៅវិជ្ជមាន ៖

គេឲ្យ $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ជាតម្រុយមានទិសដៅវិជ្ជមាន ។

បើ $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ និង $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ នោះគេបាន ៖

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

5/ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ និង ប្រលេឡូក្រាម

ក-ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC កំណត់ដោយ ៖

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}|$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ខ-ប្រលេឡូក្រាម

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABCD កំណត់ដោយ ៖

$$S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| \quad ។$$

6/ផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ

ក-និយមន័យ

គេមាន $\vec{u}$, $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ជាបីវ៉ិចទ័រនៃលំហ ។

ផលគុណចម្រុះនៃបីវ៉ិចទ័ររៀបតាមលំដាប់ $\vec{u}$, $\vec{v}$ និង $\vec{w}$

គឺជាចំនួនពិតកំណត់ដោយ $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ ។

ខ-ទ្រឹស្តីបទ

បើ $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ និង $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$

នោះគេបាន ៖

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad ។$$

7/មាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែត និង មាឌតេត្រាអ៊ែត

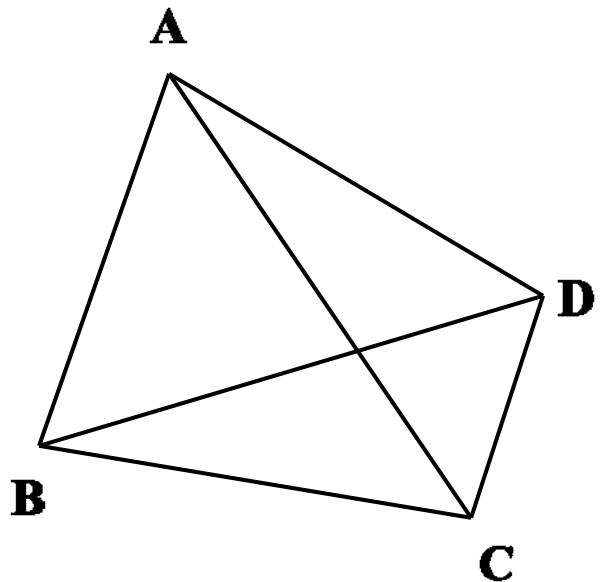
ក-មាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែត

មាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែតដែលសង់លើ $\vec{u}$, $\vec{v}$ និង $\vec{w}$

$$\text{កំណត់ដោយ } V = \left| \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \right| \quad ។$$

ខ- មាឌតេត្រាអ៊ែត

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \right|$$



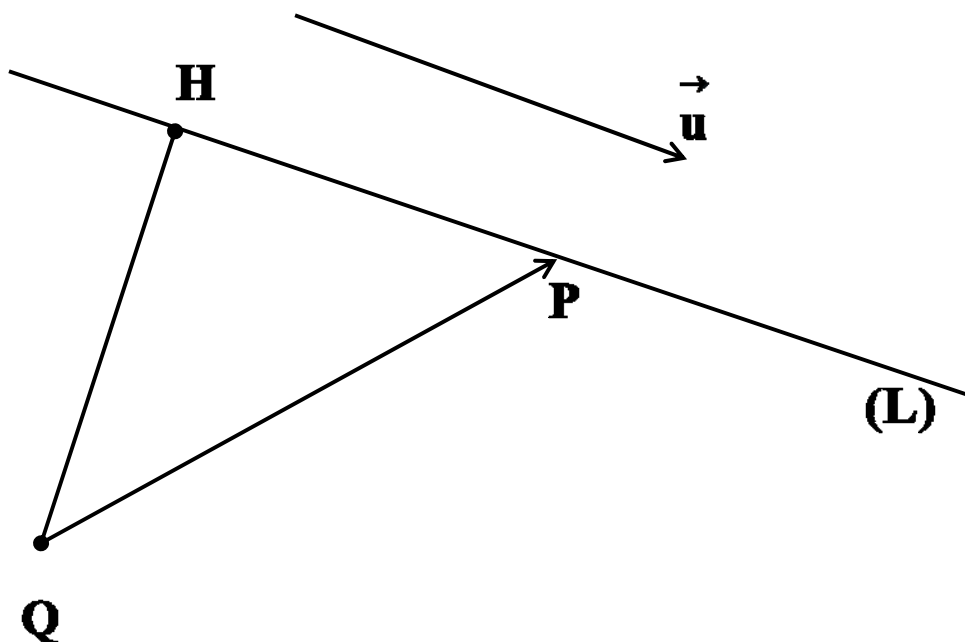
8/ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅបន្ទាត់មួយក្នុងលំហ

ទ្រឹស្តីបទ ៖

ចម្ងាយពីចំណុច Q ទៅបន្ទាត់ (L) កំណត់ដោយ ៖

$$D = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} \quad \text{។}$$

ដែល $P \in (L)$ និង $\vec{u}$ ជារ៉ឺចង្វាក់ប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ ។



ជំពូកទី២

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស

១-ក្នុងតម្រុយអរតូណូម៉ាល់ $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានបីចំណុច $A(-1, 2, 3)$

$B(0, -1, 1)$ និង $C(2, 3, 5)$ ។

ក-ចូរកំណត់សមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹង

វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}$ និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L) កាត់តាមពីរចំណុច

B និង C ។

ខ-គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ H រវាងបន្ទាត់ (L)

ជាមួយប្លង់ (P) ។

គ-រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC រួចគណនាផ្ទៃក្រលានៃ $\triangle ABC$ ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

២-ក្នុងតម្រុយអរតូណរ៉ាល់ $(\mathbf{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានប្លង់ចំណុច $A(4,0,0)$

$B(0,-2,0)$, $C(0,0,2)$ និង $D(4,2,2)$ ។

ក-បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

ខ-ចូរកំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BC) និងសមីការនៃប្លង់កាត់តាមបីចំណុច A, B និង C ។

គ-យក H ជាចំណោលកែងនៃ A លើបន្ទាត់ (BC) ។

រកកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចគណនា AH និងផ្ទៃក្រលាប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ។

ឃ-គេមានចំណុច $S(1,6,-6)$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ (SA) កែងនឹងប្លង់ $(ABCD)$ រួចគណនាមាឌនៃពីរ៉ាមីត $SABCD$ ។

៣-ក្នុងតម្រុយអរតូណរ៉ាល់ $(\mathbf{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1,2,3)$

និងប្លង់ $(\alpha): x+2y-2z-8=0$ ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ក-កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) គូសចេញពីចំណុច A

ហើយកែងនឹងប្លង់ (β) ត្រង់ចំណុច H ។

ខ-គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និងចំណុច A' ឆ្លុះគ្នានឹង A

ធៀបនឹងប្លង់ (α) ។

គ-កំណត់សមីការប្លង់ (β) កាត់តាមចំណុច A' ហើយស្របនឹង

ប្លង់ (α) ខាងលើ ។

$$\text{៤-គេឲ្យ } (\alpha): 2x + 2y + z - 9 = 0 \text{ និង } (\Delta): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 6 - 4t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

ក-រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (Δ) និងប្លង់ (α) ។

ខ-កំណត់រង្វាស់មុំស្រួចរវាងបន្ទាត់ (Δ) និង ប្លង់ (α) ។

គ-កំណត់សមីការប្លង់ (β) កែងនឹងបន្ទាត់ (Δ) ត្រង់ចំណុច A ។

ឃ-កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ (α) និង (β)

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

៥-គេឲ្យប្លង់ $(\alpha): 2x - 2y + z - 1 = 0$ និងស្វ៊ី (S) មានសមីការ

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8y - 4z + 12 = 0 \quad ។$$

ក-បង្ហាញថាប្លង់ (α) ប៉ះនឹងស្វ៊ី (S) ត្រង់ចំណុច A មួយ ។

ខ-កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ A ។

គ-កំណត់សមីការបន្ទាត់ (Δ) កែងនឹងប្លង់ (α) ត្រង់ចំណុច A ។

ឃ-ក្រៅពីចំណុច A បន្ទាត់ (Δ) ប្រសព្វស្វ៊ី (S) ត្រង់ចំណុច B

មួយទៀត ។ ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច B រួចកំណត់សមីការ

នៃប្លង់ (β) ដែលប៉ះស្វ៊ី (S) ត្រង់ B ។

៦-គេឲ្យបន្ទាត់ $(\Delta): \frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{4}$ និងស្វ៊ី (S) មានសមីការ

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0 \quad ។$$

ក-រកកូអរដោនេនៃចំណុច A និង B ប្រសព្វរវាង (Δ) និង (S) ។

ខ-រកសមីការប្លង់ (α) និង (β) ដែលប៉ះស្វ៊ី (S) ត្រង់ A និង B ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

គ-កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ') ជាប្រសព្វរវាងប្លង់

(α) និង (β) ខាងលើ ។

៧-គេឲ្យបន្ទាត់ $(d): \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$ និងស្វ៊ែរ (S) មានសមីការ

ទូទៅ $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$ ។

ក-កំណត់កូអរដោនេផ្ចិត I និង កាំ R របស់ស្វ៊ែរ (S) ។

ខ-តាង A ជាចំណោលកែងនៃ I លើបន្ទាត់ (d) ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច A ។ គណនា IA រួចទាញថាបន្ទាត់ (d) ប៉ះនឹងស្វ៊ែរ (S) ។

គ-កំណត់សមីការប្លង់កែងនឹងបន្ទាត់ (d) ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែរ (S) ។

៨-គេឲ្យបន្ទាត់ $(d): \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{4}$ និងប្លង់ (α) មានសមីការ

$(\alpha): x + 2y + 2z - 10 = 0$ ។

ក-កំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាង (d) និងប្លង់ (α) ។

ខ-រកសមីការស្វ៊ែរកាំ $R=3$ ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (α) ត្រង់ចំណុច A ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

៩-គេឲ្យប្លង់ពីរ $(\alpha): x + 2y + 2z - 11 = 0$ និង $(\beta): 2x - 2y + z - 1 = 0$

និងបន្ទាត់ $(\Delta): x = 3 + t, y = 6 - 4t, z = 7 - t$ ដែល $t \in \mathbb{R}$

ក-គណនាកូអរដោណេចំណុចប្រសព្វ A និង B រវាងបន្ទាត់ (Δ)

ជាមួយប្លង់ (α) និង (β) រៀងគ្នា ។

ខ-យក C ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x = 1$ ហើយស្ថិតនៅក្នុងប្លង់

(α) និង (β) ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច C រួចរកប្រភេទនៃ ΔABC

គ-កំណត់សមីការស្វ៊ែរ (S) មានផ្ចិតនៅលើបន្ទាត់ (Δ) ហើយប៉ះ

រួមទៅនឹងប្លង់ (α) និង (β) ។

១០-គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ (d_1) និង (d_2) មានសមីការឆ្លុះរៀងគ្នា ៖

$$(d_1): \frac{x-5}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2} \quad \text{និង} \quad (d_2): \frac{x-6}{-4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3}$$

A ជាចំណុចមួយនៃ (d_1) មានអាប់ស៊ីស $x_A = 1$ ហើយ B ជា

ចំណុចមួយនៃ (d_2) មានអាប់ស៊ីស $x_B = t$ ដែល $t \in \mathbb{R}$ ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ក-ចូរស្រាយថា $AB = \frac{\sqrt{26(t-2)^2 + 144}}{4}$

ខ-កំណត់តម្លៃ t ដើម្បីឲ្យ (AB) មានតម្លៃអប្បបរមា ។

គ-ចំពោះតម្លៃ t ដែលបានរកឃើញខាងលើ ចូរបង្ហាញថា (AB)

ជាបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) រួចទាញរកចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) ។

១១-គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ (d_1) និង (d_2) មានសមីការឆ្លុះរៀងគ្នា ៖

$$(d_1): x-2 = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{2} \quad \text{និង} \quad (d_2): \frac{x-3}{-1} = y = \frac{z-4}{4}$$

ចូររកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2)

១២-នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

គេឲ្យមានចំណុច $A(-1,4,4); B(1,2,3)$ និង $C(3,2,4)$ ។

ក-គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំណុច A, B, C

រត់មិនត្រង់គ្នា។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ខ-កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

គ-គណនាមាឌនៃចតុមុខ OABC រួចទាញរកចម្ងាយពីចំណុច O ទៅប្លង់ (ABC) ។

១៣-នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

គេឲ្យមានចំណុច $A(0,2,1), B(2,1,-1), C(-4,5,3)$ និង $D(4,6,3)$ ។

ក-ចូរស្រាយថា $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC ។

ខ-កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

គ-គណនា $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$ រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត ABCD ។

ឃ-ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) ។

១៤-នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

គេឲ្យមានចំណុច $A(2,2,1), B(3,1,1), C(-2,4,5)$ និង $D(1,-1,0)$ ។

ក-គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}$ រួចទាញថាបីចំណុច A, B, C

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC ។

ខ-កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

គ-គណនា $(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BD}$ រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ។

ឃ-ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) ។

១៥-គេឲ្យប្លង់ (P) កាត់តាម $A(4, -2, 2)$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

$$\vec{n} = (1, 2, 2) \text{ ហើយបន្ទាត់ } (L): \frac{x-1}{-1} = \frac{y-4}{4} = z-2 \text{ ។}$$

ក-កំណត់សមីការនៃប្លង់ (P) រួចគណនាកូអរដោនេចំណុច M

ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) ។

ខ-យក B, C, D ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) ជាមួយអ័ក្ស $(ox), (oy), (oz)$

រៀងគ្នាហើយ S ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) និងអ័ក្ស (oz) ។

ចូរស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាមរួចគណនាផ្ទៃ

ក្រលាបសំរា ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

គ-បង្ហាញថាបន្ទាត់ (SA)អរតូកូណាល់នឹងប្លង់ (ABCD) ។

គណនាផ្ទៃសាទរ SA រួចទាញរកមាឌនៃពីរ៉ាមីត SABCD ។

១៦-ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

គេមានចំណុច $A(2,1,-1)$ និងប្លង់ពីរ (P) និង (Q) មាន

សមីការរៀងគ្នា $x + 2y + 2z - 11 = 0$ និង $3x + y - 4z + 7 = 0$

ក-រកសមីការប្លង់(R) កាត់តាមចំណុច A ហើយកែងរួម

ទៅនឹងប្លង់ពីរ (P) និង (Q) ។

ខ-រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ទាំងបី(P),(Q),(R)

គ-យក C ជាប្រសព្វរវាងប្លង់(R) ជាមួយនឹងអ័ក្ស (oz) ។

រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC រួចគណនាផ្ទៃក្រឡារបស់វា

ឃ-រកកូអរដោនេ D ដោយដឹងថាចតុកោណ ABCD

ជាប្រលេឡូក្រាម ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ង-តាង E ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AB]$ និង F ជាចំណុច

កណ្តាលនៃ $[CD]$ ។ បង្ហាញថា $EAFC$ ជាការេ ។

១៧-នៅក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន

គេឱ្យ $(L): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+8}{3}$ និង $(P): x - 2y - 2z - 14 = 0$ ។

ក-គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ A រវាង (L) និង (P)

ខ-រកសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមបន្ទាត់ (L) ហើយកែងនឹងប្លង់ (P)

គ-សរសេរប្រពន្ធសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) ដែលជាប្រសព្វ
រវាងប្លង់ (P) និង (Q) ។

ឃ-រកសមីការស្វ៊ែកាំ $R=6$ ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (P) ត្រង់ចំនុច A ។

១៨-ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន

គេឱ្យប្លង់ពីរ $(P): x - 2y + z + 4 = 0$ និង $(Q): 2x + 3y - 2z - 13 = 0$ ។

ក-រកសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង (Q) ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ខ-ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (R) កាត់តាមចំនុច $A(0,6,8)$ ហើយកែង
រួមទៅនឹងប្លង់ទាំងពីរ (P) និង (Q) ខាងលើ ។

គ-រកកូអរដោនេនៃចំនុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (L) និង ប្លង់ (R) ។

១៩-ក្នុងតំរុយអវត្ថុណាម៉ាល់ (O,i,j,k) ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន

គេឱ្យបន្ទាត់ (L): $\frac{x+3}{-3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-1}{3}$ និងចំនុច $A(2,-3,4)$ ។

ក-ចូរគណនាចំងាយពីចំនុច A ទៅបន្ទាត់ (L) ។

ខ-ចូរសរសេរសមីការប្លង់កំនត់ដោយបន្ទាត់ (L) និង ចំនុច A ។

គ-រកសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមបន្ទាត់ (L) ហើយកែងនឹងប្លង់ (P)

២០-ក្នុងតំរុយអវត្ថុណាម៉ាល់ (O,i,j,k) ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន ។

គេឱ្យបីចំនុច $A(-2,3,4)$, $B(-5,7,7)$ និង $C(7,7,3)$ ។

ក-គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ។

ទាញថាបីចំនុច A,B,C រត់មិនត្រង់គ្នា ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ខ-គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។

គ-សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ។

ឃ-គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត OABC ។

២១-ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(\mathbf{o}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ។

(គេយកឯកតា 1cm នៅលើអ័ក្ស) គេឱ្យបន្ទាត់ពីរ (L_1) និង (L_2)

មានសមីការឆ្លុះរៀងគ្នា

$$(L_1): \frac{x+5}{9} = \frac{y+4}{4} = \frac{z-3}{-1} \quad \text{និង} \quad (L_2): \frac{x+1}{3} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z+1}{-3} \quad .$$

ក-ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (P) កាត់តាម (L_1) ហើយស្របនឹង (L_2)

ខ-ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាម (L_2) ហើយស្របនឹង (L_1)

គ-គណនាចំងាយរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

២២-ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(\mathbf{o}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ មានឯកតា 1cm នៅលើអក្សរគេអោយប្លង់ $(P): x + 2y + 2z - 6 = 0$ ។

គេតាង A, B, C ជាចំនុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) ជាមួយអក្សរ $(Ox), (Oy), (Oz)$ ។

ក. កំនត់កូអរដោនេនៃចំនុច A, B និង C រួចសង់ប្លង់ (P)

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) កាត់តាមគល់ O ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) ខាងលើ ។

គ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចទាញរកក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។

ឃ. គណនាមាឌតេត្រាអែត $OABC$ រួចទាញរកចំងាយពីគល់ O ទៅប្លង់ (ABC) ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

២៣-គេអោយគូប ABCDEFGH មួយមានទ្រនុងស្មើ១។

លំហាមានទិសដៅតាមតំរុយអវត្ថុណាម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន

$\left(\vec{A}, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE} \right)$ គេយក I ជាចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ [EF] និង K

ជាផ្ចិតការេ ADHE ។

ក. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\vec{BK} = \vec{IG} \times \vec{IA}$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃ ΔIGA ។

ខ. គណនាមាឌតេត្រាអែត ABIG រួចទាញរកចំងាយពីចំនុច B ទៅប្លង់ (AIG) ។

២៤-ក្នុងតំរុយអវត្ថុណាម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

គេមានបីចំណុច $A(0,6,0)$, $B(0,4,2)$ និង $C(2,0,5)$ ។

ក. ចូរសង់ចតុមុខ OABC ។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{AB} \times \vec{AC}$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

គ.គណនា $\left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \right) \cdot \overrightarrow{OC}$ រួចទាញរកមាឌនៃចតុមុខ $OABC$ ។

ឃ. ទាញរកចំងាយពីចំនុច O ទៅប្លង់ (ABC) ។

ង.សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ។

២៥-តំរូវអវត្ថុណាម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

គេឲ្យបួន ចំនុច $A(0,0,2)$, $B(2,0,1)$, $C(2,2,3)$ និង $D(0,2,4)$ ។

ក.ដៅចំនុច A,B,C និង D រួចបង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ គណនាក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ។

គ.សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L) កែងនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ D ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ឃ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច E បើគេដឹងថា $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right)$

ង. គណនាមាឌរបស់ព្រឹសត្រង់ដែលមានកំពស់ [AE] និងបាតជា
ចតុកោណ ABCD ។



ជំពូកទី៣

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

ក្នុងតម្រុយអរតូណរ៉ាល់ $(\mathbf{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានបីចំណុច $A(-1, 2, 3)$

$B(0, -1, 1)$ និង $C(2, 3, 5)$ ។

ក-ចូរកំណត់សមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹង

វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}$ និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L) កាត់តាមពីរចំណុច

B និង C ។

ខ-គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ H រវាងបន្ទាត់ (L)

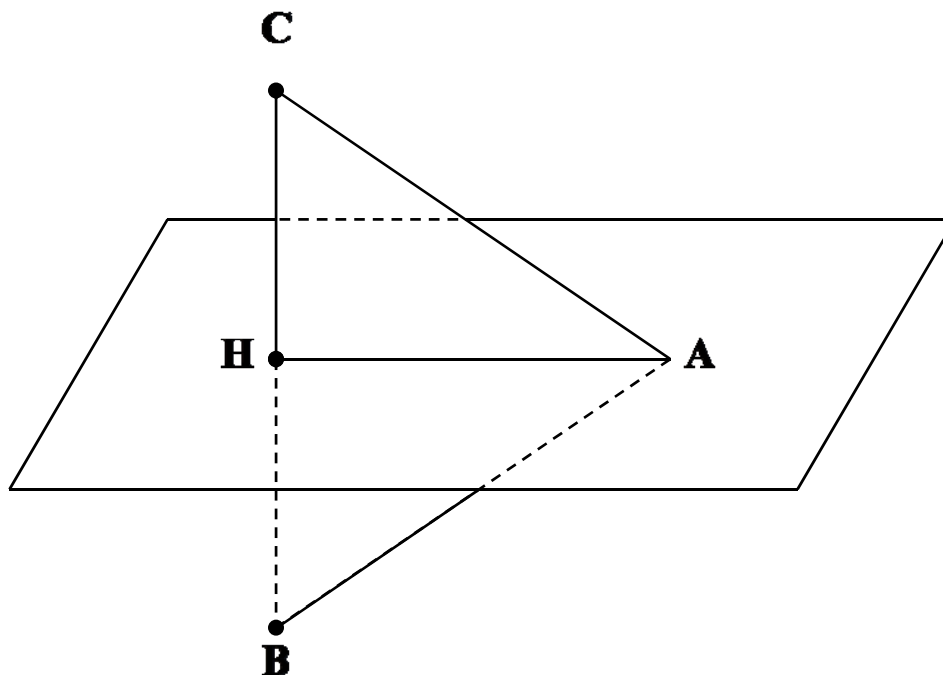
ជាមួយប្លង់ (P) ។

គ-រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC រួចគណនាផ្ទៃក្រលានៃ $\triangle ABC$ ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ជំនេរស្រាវ

ក- កំណត់សមីការប្លង់ (P) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L) ៖



វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) គឺ $\vec{n} = \overrightarrow{BC} = (2, 4, 4)$ ។

សមីការប្លង់(P) កាត់តាមចំណុច A អាចសរសេរតាមរូបមន្ត

$$(P): a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$(P): 2(x + 1) + 4(y - 2) + 4(z - 3) = 0$$

$$(P): 2x + 4y + 4z - 18 = 0$$

$$(P): x + 2y + 2z - 9 = 0$$

ដូចនេះ (P): $x + 2y + 2z - 9 = 0$ ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) គឺ $\vec{u} = \overrightarrow{BC} = (2, 4, 4)$

សមីការបន្ទាត់ (L) កាត់តាមពីរចំណុច B និង C អាចសរសេរ

$$\text{តាមរូបមន្ត (L):} \begin{cases} x = x_B + at \\ y = y_B + bt \\ z = z_B + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{ដូចនេះ (L):} \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 1 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

ខ-គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ H ៖

យកសមីការ (L) ជំនួសក្នុង (P) គេបាន ៖

$$2t + 2(-1 + 4t) + 2(1 + 4t) - 9 = 0$$

$$2t - 2 + 8t + 2 + 8t - 9 = 0$$

$$18t - 9 = 0 \quad \text{នាំឲ្យ} \quad t = \frac{1}{2} \quad \text{។}$$

$$\text{យកតម្លៃ } t = \frac{1}{2} \text{ ជួសក្នុងសមីការ (L) គេបាន } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 2 = 1 \\ z = 1 + 2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ: } H(1, 1, 3) \quad \text{។}$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

គ-រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC រួចគណនាផ្ទៃក្រលានៃ $\triangle ABC$

គេមាន $\overrightarrow{AB} = (1, -3, -2)$; $\overrightarrow{BC} = (2, 4, 4)$; $\overrightarrow{CA} = (-3, -1, -2)$

ដោយ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$; $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

នោះគេទាញ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{14}$ ។

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល A ។

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{AH} = (2, -1, 0)$

គេបាន $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (2)(2) + (-1)(4) + (0)(4) = 0$ សមមូល $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$

នោះ AH ជាកម្ពស់នៃ $\triangle ABC$ ។ គេបាន $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC$

តែ $AH = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{4+16+16} = 6$

ដូចនេះ $S_{ABC} = 3\sqrt{5}$ (ឯកតាផ្ទៃ)។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

លំហាត់ទី២

ក្នុងតម្រុយអរតូណរ៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានប្លង់ចំណុច $A(4,0,0)$

$B(0,-2,0)$, $C(0,0,2)$ និង $D(4,2,2)$ ។

ក-បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

ខ-ចូរកំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BC) និងសមីការនៃប្លង់កាត់តាមបីចំណុច A, B និង C ។

គ-យក H ជាចំណោលកែងនៃ A លើបន្ទាត់ (BC) ។

រកកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចគណនា AH និងផ្ទៃក្រលាប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ។

ឃ-គេមានចំណុច $S(1,6,-6)$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ (SA) កែងនឹងប្លង់ $(ABCD)$ រួចគណនាមាឌនៃពីរ៉ាមីត $SABCD$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម

គេមាន $\overrightarrow{AD} = (0, 2, 2)$ និង $\overrightarrow{BC} = (0, 2, 2)$

ដោយ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ នោះ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

ខ-កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BC) ៖

បន្ទាត់ (BC) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{BC} = (0, 2, 2)$

$$\text{តាមរូបមន្ត } (BC): \begin{cases} x = x_B + at \\ y = y_B + bt \\ z = z_B + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{ដូចនេះ } (BC): \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + 2t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

កំណត់សមីការនៃប្លង់កាត់តាមបីចំណុច A, B និង C ៖

តាង $(P): ax + by + cz + d = 0$ ជាប្លង់កាត់តាមបីចំណុច A, B និង C

នោះកូអរដោនេនៃចំណុច A, B និង C ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (P)

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

$$\text{គេបានប្រព័ន្ធគ្រប់} \begin{cases} 4a + d = 0 \\ -2b + d = 0 \\ 2c + d = 0 \end{cases} \text{ នាំឱ្យ } a = -\frac{d}{4}, b = \frac{d}{2}, c = -\frac{d}{2}$$

យក $a = -\frac{d}{4}, b = \frac{d}{2}, c = -\frac{d}{2}$ ជួសក្នុង (P) គេបាន ៖

$$-\frac{d}{4}x + \frac{d}{2}y - \frac{d}{2}z + d = 0 \quad \text{ឬ} \quad (P): x - 2y + 2z - 4 = 0 \quad \text{។}$$

គ-រកកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចគណនា AH និងផ្ទៃក្រលាប្រលេ
ឡូក្រាម ABCD ៖

តាង $H(x_H, y_H, z_H)$ ។

$$\text{ដោយ } H \in (BC) \text{ នោះ } \begin{cases} x_H = 0 \\ y_H = -2 + 2t \\ z_H = 2t \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{AH} = (-4, -2 + 2t, 2t)$$

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (0)(-4) + 2(-2 + 2t) + 2(2t) = 0 \text{ នោះ } t = \frac{1}{2}$$

លំហាត់ចរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

យក $t = \frac{1}{2}$ ជួសក្នុង (1) គេបាន $x_H = 0, y_H = -2 + 1 = -1, z_H = 1$ ។

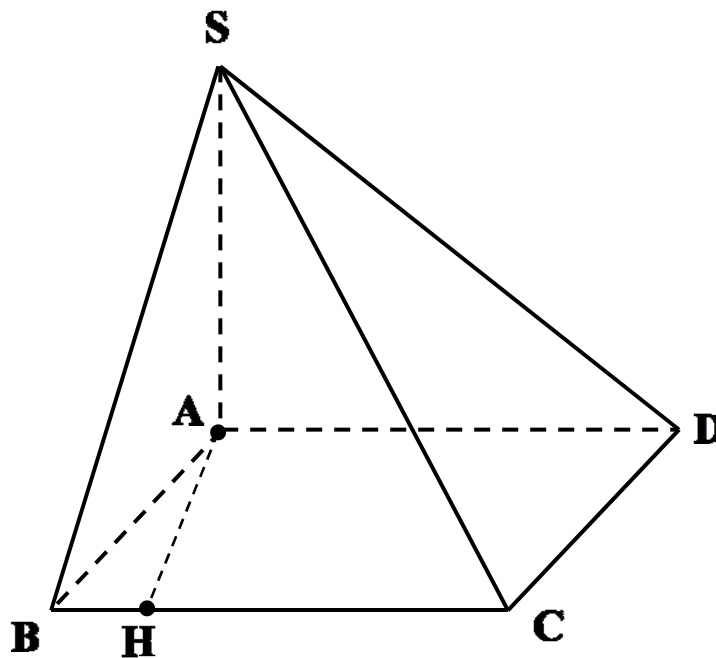
ដូចនេះ $H(0, -1, 1)$ ។

ហើយ $AH = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}$ និង $BC = \sqrt{0^2 + 4^2 + 4^2} = 2\sqrt{2}$

គេបាន $S_{ABCD} = AH \cdot BC = (3\sqrt{2})(2\sqrt{2}) = 12$ ។

ដូចនេះ $AH = 3\sqrt{2}, S_{ABCD} = 12$ (ឯកតាផ្ទៃ) ។

យ- បង្ហាញថាបន្ទាត់ (SA) កែងនឹងប្លង់ (ABCD) ៖



លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

$$\overrightarrow{SA} = (3, -6, 6), \overrightarrow{AB} = (-4, -2, 0), \overrightarrow{AD} = (0, 2, 2)$$

$$\text{គេមាន } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} = -12 + 12 + 0 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\text{ហើយ } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 - 12 + 12 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} \perp \overrightarrow{AD}$$

នោះគេទាញបាន $(SA) \perp (ABCD)$ ។

គណនាមាឌនៃពីរ៉ាមីត $SABCD$ ៖

$$\text{តាមរូបមន្ត } V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \times SA \quad \text{ដោយ } SA = \sqrt{9 + 36 + 36} = 9$$

$$\text{ដូចនេះ } V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times 12 \times 9 = 36 \text{ (ឯកតាមាឌ)។}$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

លំហាត់ទី៣

ក្នុងតម្រុយអរតូណូម៉ាល់ $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1,2,3)$

និងប្លង់ $(\alpha): x + 2y - 2z - 8 = 0$ ។

ក-កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) គូសចេញពីចំណុច A

ហើយកែងនឹងប្លង់ (β) ត្រង់ចំណុច H ។

ខ-គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និងចំណុច A' ឆ្លុះគ្នានឹង A

ធៀបនឹងប្លង់ (α) ។

គ-កំណត់សមីការប្លង់ (β) កាត់តាមចំណុច A' ហើយស្របនឹង

ប្លង់ (α) ខាងលើ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) ៖

ប្លង់ $(\alpha): x + 2y - 2z - 8 = 0$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (1, 2, -2)$ ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ដោយបន្ទាត់ $(\Delta) \perp (\alpha)$ នោះ $\vec{n} = (1, 2, -2)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (Δ)

ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ (Δ) កាត់តាម $A(1, 2, 3)$ សរសេរ ៖

$$(\Delta): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

ខ-គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និងចំណុច A' ឆ្លុះគ្នានឹង A

ធៀបនឹងប្លង់ (α) ៖

យកសមីការ (Δ) ជួសក្នុង (α) គេបាន ៖

$$(1+t) + 2(2+2t) - 2(3-2t) - 8 = 0$$

$$1+t+4+4t-6+4t-8=0$$

$$9t-9=0$$

គេទាញបាន $t = \frac{9}{9} = 1$ យកជួសក្នុងសមីការ (Δ) គេបាន

$H(2, 4, 1)$ ។ ហើយដោយចំណុច A' ឆ្លុះគ្នានឹង A ធៀបនឹងប្លង់ (α)

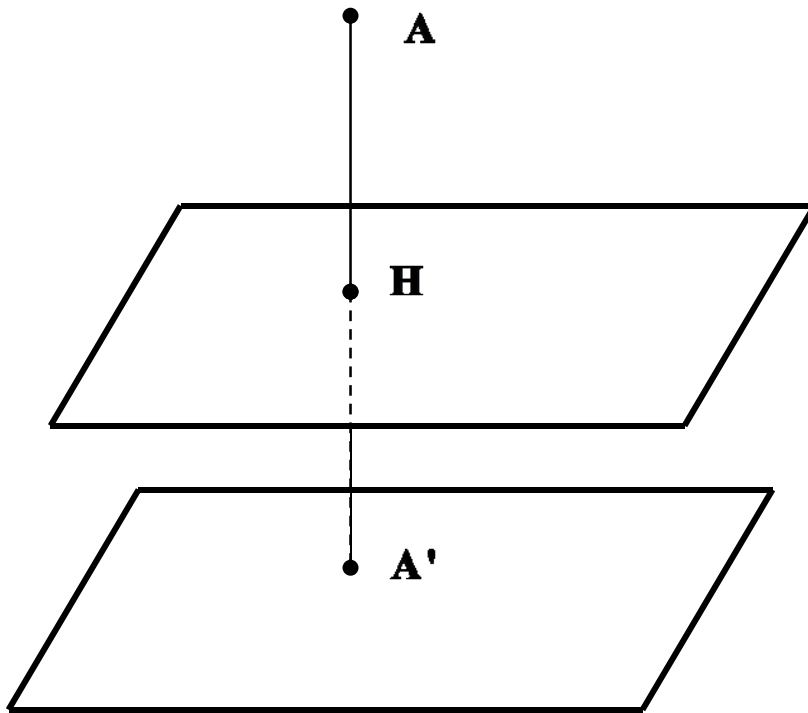
នោះចំណុច H ជាចំណុចកណ្តាលនៃ AA' ។

$$\text{គេបាន } x_{A'} = 2x_H - x_A = 4 - 1 = 3, y_{A'} = 2y_H - y_A = 8 - 2 = 6$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

និង $z_{A'} = 2z_H - z_A = 2 - 3 = -1$ ។ ដូច្នេះនេះ $A'(3, 6, -1)$ ។

គ-កំណត់សមីការប្លង់ (β) ៖



ដោយ $(\beta) // (\alpha)$ នោះ $\vec{n} = (1, 2, -2)$ ជារ៉ឺឌីងទ័រណរម៉ាល់នៃ (β) ។

ដោយ (β) កាត់តាមចំណុច $A'(3, 6, -1)$ នោះគេបាន ៖

$$(\beta) : 1 \cdot (x - 3) - 2(y - 6) + 2(z + 1) = 0$$

$$(\beta) : x - 3 - 2y + 12 + 2z + 2 = 0$$

$$(\beta) : x - 2y + 2z + 11 = 0$$

ដូច្នេះនេះ $(\beta) : x - 2y + 2z + 11 = 0$ ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

លំហាត់ទី៤

$$\text{គេឲ្យ } (\alpha): 2x + 2y + z - 9 = 0 \text{ និង } (\Delta): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 6 - 4t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

ក-រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (Δ) និងប្លង់ (α) ។

ខ-កំណត់រង្វាស់មុំស្រួចរវាងបន្ទាត់ (Δ) និង ប្លង់ (α) ។

គ-កំណត់សមីការប្លង់ (β) កែងនឹងបន្ទាត់ (Δ) ត្រង់ចំណុច A ។

ឃ-កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ (α) និង (β)

ដំណោះស្រាយ

ក-រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (Δ) និងប្លង់ (α) ៖

យកសមីការ (Δ) ជួសក្នុង (α) គេបាន ៖

$$2(2 - t) + 2(6 - 4t) + (2 + t) - 9 = 0$$

$$4 - 2t + 12 - 8t + 2 + t - 9 = 0$$

$$-9t + 9 = 0$$

គេទាញបាន $t = 1$ យកជួសក្នុង (Δ) គេបាន $x = 1, y = 2, z = 3$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ជូចនេះ $A(1,2,3)$ ។

ខ-កំណត់រង្វាស់មុំស្រួចរវាងបន្ទាត់ (Δ) និង ប្លង់ (α) ៖

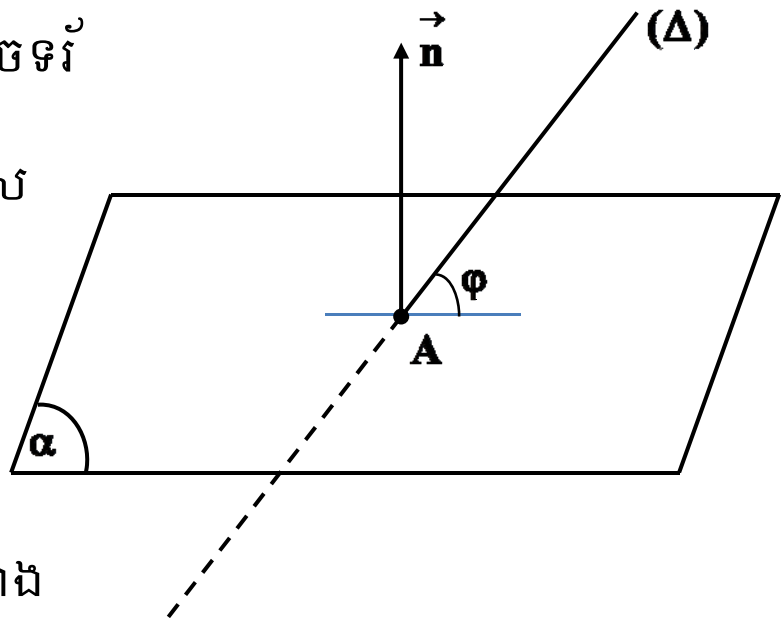
តាង $\vec{n}$ និង $\vec{u}$ រៀងគ្នាជារ៉ឺឌ័រ

នរម៉ាល់ និងរ៉ឺឌ័រប្រាប់ទិស

នៃប្លង់ (α) និងបន្ទាត់ (Δ)

ហើយ θ ជាមុំរវាងរ៉ឺឌ័រ

$\vec{n}$ និង $\vec{u}$ ហើយ φ ជាមុំរវាង



បន្ទាត់ (Δ) និងប្លង់ (α) នោះ គេបាន $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$ ។

គេមាន $\vec{n} = (2, 2, 1)$; $\vec{u} = (-1, -4, 1)$ ។

$$\cos \theta = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{u}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} \right| = \left| \frac{-2 - 8 + 1}{\sqrt{4 + 4 + 1} \sqrt{1 + 16 + 1}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{គេបាន } \theta = \frac{\pi}{4}$$

ជូចនេះ $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

គ-កំណត់សមីការប្លង់ (β) កែងនឹងបន្ទាត់ (Δ) ត្រង់ចំណុច A ៖

ដោយ $(\beta) \perp (\Delta)$ នៅ៖ $\vec{u} = (-1, -4, 1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (β)

$$\text{តាមរូបមន្ត } (\beta): a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\text{ដោយ } A \in (\beta) \text{ នៅ៖ } (\beta): -(x-1) - 4(y-2) + (z-3) = 0$$

$$\text{ដូចនេះ } (\beta): -x - 4y + z + 6 = 0 \quad 1$$

ឃ-កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ (α) និង (β)

$$\text{យក } z = t, t \in \mathbb{R} \text{ នៅ៖ } \begin{cases} 2x + 2y + t - 9 = 0 \\ -x - 4y + t + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន } x = 4 - t, y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$$

$$\text{ដូចនេះ } (d): \begin{cases} x = 4 - t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

លំហាត់ទី៥

គេឲ្យប្លង់ $(\alpha) : 2x - 2y + z - 1 = 0$ និងស្វ៊ី (S) មានសមីការ

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8y - 4z + 12 = 0 \quad ។$$

ក-បង្ហាញថាប្លង់ (α) ប៉ះនឹងស្វ៊ី (S) ត្រង់ចំណុច A មួយ ។

ខ-កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ A ។

គ-កំណត់សមីការបន្ទាត់ (Δ) កែងនឹងប្លង់ (α) ត្រង់ចំណុច A ។

ឃ-ក្រៅពីចំណុច A បន្ទាត់ (Δ) ប្រសព្វស្វ៊ី (S) ត្រង់ចំណុច B

មួយទៀត ។ ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច B រួចកំណត់សមីការ

នៃប្លង់ (β) ដែលប៉ះស្វ៊ី (S) ត្រង់ B ។

ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថាប្លង់ (α) ប៉ះនឹងស្វ៊ី (S) ត្រង់ចំណុច A មួយ ៖

សមីការស្វ៊ី (S) អាចសរសេរជាទម្រង់ស្តង់ដារដូចខាងក្រោម ៖

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

(S) : $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 9$ នោះគេទាញបាន I(-1,4,2)

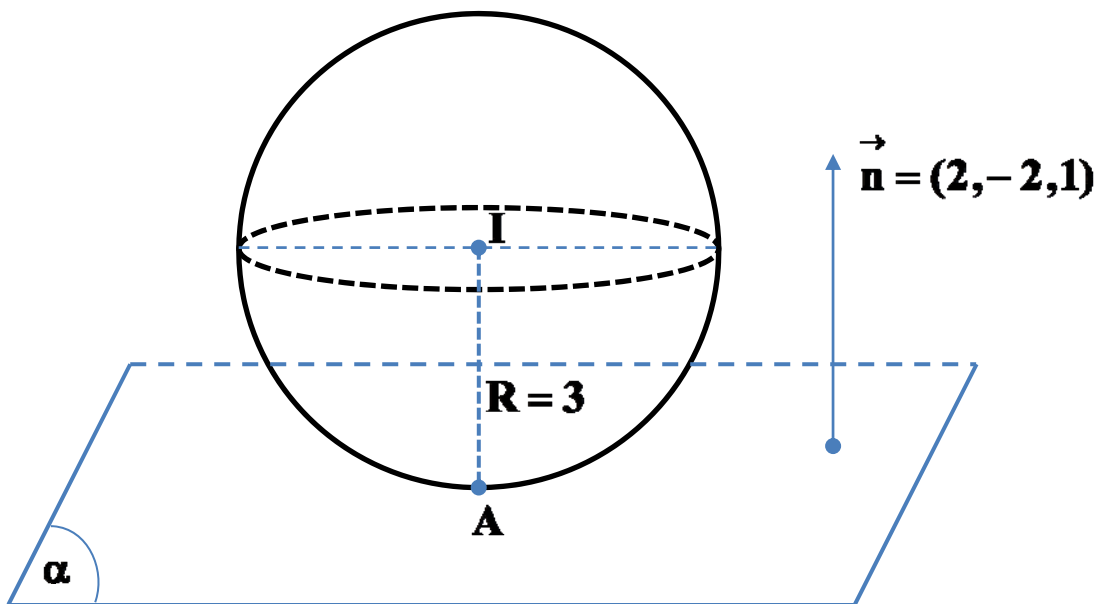
ជាផ្ចិត និង $R=3$ ជារង្វាស់កាំរបស់ស្វ៊ី ។

ចម្ងាយពីចំណុច I ទៅប្លង់ (α) កំណត់ដោយ ៖

$$d(I, \alpha) = \frac{|2x_I - 2y_I + z_I - 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-2 - 8 + 2 - 1|}{3} = 3$$

ដោយ $d(I, \alpha) = R = 3$ នោះប្លង់(α) ប៉ះនឹងស្វ៊ី (S) ត្រង់ចំណុចមួយ

ខ-កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ A ៖



លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

តាង $A(x_A, y_A, z_A)$ ជាចំណុចប៉ះដែលត្រូវរក ។

គេមាន $A \in (\alpha)$ នៅ៖ $2x_A - 2y_A + z_A - 1 = 0$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{IA} // \vec{n}$ នៅ៖ $\overrightarrow{IA} = t \cdot \vec{n}$

ដោយ $\overrightarrow{IA} = (x_A + 1, y_A - 4, z_A - 2)$ និង $\vec{n} = (2, -2, 1)$

$$\text{គេបាន } \begin{cases} x_A + 1 = 2t \\ y_A - 4 = -2t \\ z_A - 2 = t \end{cases} \quad \text{ឬ} \quad \begin{cases} x_A = 2t - 1 \\ y_A = -2t + 4 \\ z_A = t + 2 \end{cases} \quad (2)$$

យកសមីការ (2) ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$2(2t - 1) - 2(-2t + 4) + (t + 2) - 1 = 0$$

$$4t - 2 + 4t - 8 + t + 2 - 1 = 0$$

$$9t - 9 = 0$$

គេទាញបាន $t = 1$ យកជំនួសក្នុង(2)គេបាន $x_A = 1, y_A = 2, z_A = 3$

ដូចនេះ $A(1, 2, 3)$ ។

គ-កំណត់សមីការបន្ទាត់ (Δ) កែងនឹងប្លង់ (α) ត្រង់ចំណុច A ៖

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (Δ) ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (α)

នោះគេបាន $\vec{u} = \vec{n} = (2, -2, 1)$ ហើយដោយ $A \in (\Delta)$ នោះ

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃ (Δ) អាចសរសេរ ៖

$$(\Delta): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

យកណត់កូអរដោនេចំណុច B ៖

$$\text{តាង } B(x_B, y_B, z_B) \text{ ដោយ } B \in (\Delta) \text{ នោះ } \begin{cases} x_B = 1 + 2t \\ y_B = 2 - 2t \\ z_B = 3 + t \end{cases} \quad (3)$$

យក (3) ជំនួសក្នុងសមីការស្តង់ដារនៃ (S) គេបាន ៖

$$(1 + 2t + 1)^2 + (2 - 2t - 4)^2 + (3 + t - 2)^2 = 9$$

$$(2t + 2)^2 + (-2t - 2)^2 + (t + 1)^2 = 9$$

$$4(t + 1)^2 + 4(t + 1)^2 + (t + 1)^2 = 9$$

$$9(t + 1)^2 = 9$$

$$\text{គេទាញបាន } t_1 = 0, t_2 = -2$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

-ចំពោះ $t=0$ នោះតាម(3)គេបាន $x=1, y=2, z=3$ ជាចំណុច A

-ចំពោះ $t=-2$ នោះតាម(3)គេបាន $x=-3, y=6, z=1$ ។

ដូចនេះ $B(-3, 6, 1)$ ។

កំណត់សមីការនៃប្លង់ (β) ដែលប៉ះស្វ៊ី (S) ត្រង់ B ៖

ប្លង់ (β) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(2, -2, 1)$ ។

ដូចនេះ (β): $2(x+3)-2(y-6)+(z-1)=0$

ឬ (β): $2x-2y+z+17=0$ ។

លំហាត់ទី៦

គេឲ្យបន្ទាត់ $(\Delta): \frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{4}$ និងស្វ៊ី (S) មានសមីការ

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0 \quad ។$$

ក-រកកូអរដោនេចំណុច A និង B ប្រសព្វរវាង (Δ) និង (S) ។

ខ-រកសមីការប្លង់ (α) និង (β) ដែលប៉ះស្វ៊ី(S) ត្រង់ A និង B ។

គ-កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ') ជាប្រសព្វរវាងប្លង់

(α) និង (β) ខាងលើ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-រកកូអរដោនេចំណុច A និង B ប្រសព្វរវាង (Δ) និង (S) ៖

$$\begin{cases} \frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{4} & (\Delta) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0 & (S) \end{cases}$$

$$\text{តាង } \frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{4} = t \text{ នោះ } \begin{cases} x = 3t - 4 \\ y = 3t - 2 \\ z = 4t - 3 \end{cases} \quad (1)$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

យកសមីការ (1) ជួសក្នុងសមីការ (S) គេបាន ៖

$$(3t-4)^2 + (3t-2)^2 + (4t-3)^2 - 2(3t-4) - 4(3t-2) - 6(4t-3) + 5 = 0$$
$$34t^2 - 102t + 68 = 0$$

គេទាញយកបាន $t_1 = 1$; $t_2 = 2$ ។

-ចំពោះ $t=1$ តាម(1)គេបាន $x=-1, y=1, z=1$ ។

-ចំពោះ $t=2$ តាម(2) គេបាន $x=2, y=4, z=5$ ។

ដូចនេះ $A(-1, 1, 1)$ និង $B(2, 4, 5)$ ។

ខ-រកសមីការប្លង់ (α) និង (β) ដែលប៉ះស្វ៊ី(S) ត្រង់ A និង B ៖

សមីការស្តង់ដារនៃស្វ៊ី (S) អាចសរសេរដូចខាងក្រោម ៖

$$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9 \quad \text{។}$$

គេបានកូអរដោនេនៃផ្ចិតស្វ៊ី (S) គឺ $I(1, 2, 3)$ ។

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (α) និង (β) ដែលប៉ះស្វ៊ី(S) ត្រង់ A និង B គឺ

$$\overrightarrow{IA} = (-2, -1, -2) \quad \text{និង} \quad \overrightarrow{IB} = (1, 2, 2) \quad \text{។}$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

សមីការនៃប្លង់ (α) និង (β) អាចសរសេរ ៖

$$(\alpha) : -2(x+1) - (y-1) - 2(z-1) = 0 \quad \text{ឬ} \quad (\alpha) : 2x + y + 2z - 1 = 0$$

$$(\beta) : 1 \cdot (x-2) + 2(y-4) + 2(z-5) = 0 \quad \text{ឬ} \quad (\beta) : x + 2y + 2z - 20 = 0 \quad \text{។}$$

គ-រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ') ជាប្រសព្វរវាង (α) និង (β)

$$\text{គេមាន} \begin{cases} 2x + y + 2z - 1 = 0 \\ x + 2y + 2z - 20 = 0 \end{cases}$$

$$\text{យក } z = t \in \mathbb{R} \text{ គេបាន} \begin{cases} 2x + y + 2t - 1 = 0 \\ x + 2y + 2t - 20 = 0 \end{cases}$$

$$\text{បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន} \begin{cases} x = -6 - \frac{2}{3}t \\ y = 13 - \frac{2}{3}t \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ } (\Delta') : \begin{cases} x = -6 - \frac{2}{3}t \\ y = 13 - \frac{2}{3}t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{។}$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

លំហាត់ទី៧

គេឲ្យបន្ទាត់ (d): $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$ និងស្វ៊ែរ (S) មានសមីការ

$$\text{ទូទៅ (S): } x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0 \quad ។$$

ក-កំណត់កូអរដោនេផ្ចិត I និង កាំ R របស់ស្វ៊ែរ (S) ។

ខ-តាង A ជាចំណោលកែងនៃ I លើបន្ទាត់ (d) ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច A ។ គណនា IA រួចទាញថាបន្ទាត់ (d) ប៉ះនឹងស្វ៊ែរ (S) ។

គ-កំណត់សមីការប្លង់កែងនឹងបន្ទាត់ (d) ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែរ (S) ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំណត់កូអរដោនេផ្ចិត I និង កាំ R របស់ស្វ៊ែរ (S) ៖

$$\text{សមីការ (S): } x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0 \quad \text{អាចសរសេរ ៖}$$

$$(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9 \quad ។$$

ដូចនេះកូអរដោនេនៃផ្ចិតស្វ៊ែរគឺ $I(2, -1, 1)$ និងកាំ $R=3$ ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ខ- រកកូអរដោនេនៃចំណុច A ៖

តាង $A(x_A, y_A, z_A)$ ។

ដោយ $A \in (d)$ នោះកូអរដោនេ A ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (d) ។

$$\text{គេបាន } \frac{x_A - 3}{2} = \frac{y_A - 3}{2} = \frac{z_A - 2}{-1} = t \quad \text{នោះ } \begin{cases} x_A = 3 + 2t \\ y_A = 3 + 2t \\ z_A = 2 - t \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{គេមាន } \overrightarrow{IA} = (1 + 2t, 4 + 2t, 1 - t) \quad ។$$

បន្ទាត់ (d) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (2, 2, -1)$ ។

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{IA} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\text{គេបាន } 2(1 + 2t) + 2(4 + 2t) - (1 - t) = 0$$

$$2 + 4t + 8 + 4t - 1 + t = 0$$

$$9t + 9 = 0$$

គេទាញ $t = -1$ យកជំនួសក្នុង(1)គេបាន $x_A = 1, y_A = 1, z_A = 3$ ។

ដូចនេះ $A(1, 1, 3)$ ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

គណនា IA រួចទាញថាបន្ទាត់ (d) ប៉ះនឹងស្វ៊ី (S) ៖

$$\text{គេបាន } IA = \sqrt{(1-2)^2 + (1+1)^2 + (3-1)^2} = 3 \text{ ។}$$

ដោយ $IA = R = 3$ ដូចនេះបន្ទាត់ (d) ប៉ះនឹងស្វ៊ី (S) ត្រង់ A ។

គ-កំណត់សមីការប្លង់កែងនឹងបន្ទាត់ (d) ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ី (S) ៖

តាង α ជាប្លង់កែងនឹងបន្ទាត់ (d) នោះ $\vec{u} = (2, 2, -1)$ ជានុវិច្ឆ័យ

នរម៉ាល់នៃប្លង់ α ។ សមីការប្លង់ α អាចសរសេរ

$(\alpha): 2x + 2y - z + d = 0$ ។ ដោយប្លង់ α ប៉ះនឹងស្វ៊ី (S) នោះគេបាន

$$d(I, \alpha) = R = 3$$

$$\frac{|4 - 2 - 1 + d|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 3$$

$$|1 + d| = 9$$

គេទាញបាន $d_1 = 8$ ឬ $d_2 = -10$ ។

ដូចនេះសមីការប្លង់ដែលត្រូវរកគឺ ៖ $(\alpha_1): 2x + 2y - z + 8 = 0$ និង

$(\alpha_2): 2x + 2y - z - 10 = 0$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឲ្យបន្ទាត់ (d): $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{4}$ និងប្លង់(α) មានសមីការ

$$(\alpha): x + 2y + 2z - 10 = 0 \quad \text{។}$$

ក-កំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាង (d) និងប្លង់(α) ។

ខ-រកសមីការស្វ៊ែកាំ $R=3$ ហើយប៉ះនឹងប្លង់(α) ត្រង់ចំណុច A ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ A រវាង (d) និងប្លង់(α)

$$\begin{cases} \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{4} & (d) \\ x + 2y + 2z - 10 = 0 & (\alpha) \end{cases}$$

$$\text{តាង } \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{4} = t \text{ នោះ: } \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -2t + 3 \\ z = 4t - 1 \end{cases} \quad (1)$$

យក (1) ជួសក្នុង (α) គេបាន ៖

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

$$(3t - 1) + 2(-2t + 3) + 2(4t - 1) - 10 = 0$$

$$3t - 1 - 4t + 6 + 8t - 2 - 10 = 0$$

$$7t - 7 = 0$$

គេទាញបាន $t=1$ យកជួសក្នុង (1) គេបាន $x=2, y=1, z=3$

ដូចនេះ $A(2,1,3)$ ។

ខ-រកសមីការស្វ៊ែរកាំ $R=3$ ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (α) ត្រង់ចំណុច A ៖

តាង $I(a,b,c)$ ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែរ (S) ដែលត្រូវរក ។

សមីការស្វ៊ែរជាងនៃស្វ៊ែរអាចសរសេរ ៖

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 = 9$$

ដោយ (S) ប៉ះប្លង់ (α) ត្រង់ A នោះគេបាន $\overrightarrow{AI} // \vec{n}$ ។

គេមាន $\overrightarrow{AI} = (a-2, b-1, c-3)$ និង $\vec{n} = (1, 2, 2)$ ជារ៉ឺចទ័រណរម៉ាល់

នៃប្លង់ (α) ។

ដោយ $\overrightarrow{AI} // \vec{n}$ នោះ $\overrightarrow{AI} = t \cdot \vec{n}$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

$$\text{គេទាញ} \begin{cases} a-2=t \\ b-1=2t \\ c-3=2t \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} a=t+2 \\ b=2t+1 \\ c=2t+3 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{ហើយ } |\vec{AI}| = |t| \cdot |\vec{n}| \quad \text{នោះ } |t| = \frac{|\vec{AI}|}{|\vec{n}|} = \frac{R}{|\vec{n}|} = \frac{3}{\sqrt{1+4+4}} = 1$$

$$\text{គេទាញ } t_1 = -1; t_2 = 1 \quad \text{។}$$

$$\text{-ចំពោះ } t = -1 \text{ តាម (2) គេបាន } a=1, b=-1, c=1$$

$$\text{ដូចនេះ } (S_1): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9 \quad \text{។}$$

$$\text{-ចំពោះ } t = 1 \text{ តាម (2) គេបាន } a=3, b=3, c=5$$

$$\text{ដូចនេះ } (S_2): (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 9 \quad \text{។}$$

លំហាត់ទី៩

គេឲ្យប្លង់ពីរ $(\alpha): x + 2y + 2z - 11 = 0$ និង $(\beta): 2x - 2y + z - 1 = 0$

និងបន្ទាត់ $(\Delta): x = 3 + t, y = 6 - 4t, z = 7 - t$ ដែល $t \in \mathbb{R}$

ក-គណនាកូអរដោណេចំណុចប្រសព្វ A និង B រវាងបន្ទាត់ (Δ)

ជាមួយប្លង់ (α) និង (β) រៀងគ្នា ។

ខ-យក C ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x = 1$ ហើយស្ថិតនៅក្នុងប្លង់

(α) និង (β) ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច C រួចរកប្រភេទនៃ ΔABC

គ-កំណត់សមីការស្វ័យ (S) មានផ្ចិតនៅលើបន្ទាត់ (Δ) ហើយប៉ះ

រួមទៅនឹងប្លង់ (α) និង (β) ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាកូអរដោណេចំណុចប្រសព្វ A និង B ៖

យកសមីការ (Δ) ជួសក្នុងសមីការ (α) គេបាន៖

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

$$(3+t)+2(6-4t)+2(7-t)-11=0$$

$$3+t+12-8t+14-2t-11=0$$

$$-9t+18=0 \Rightarrow t=2$$

យក $t=2$ ជួសក្នុង (Δ) គេបាន $x=5, y=-2, z=5$ ។

ដូចនេះ $A(5, -2, 5)$ ។

យកសមីការ (Δ) ជួសក្នុងសមីការ (β) គេបាន៖

$$2(3+t)-2(6-4t)+(7-t)-1=0$$

$$6+2t-12+8t+7-t-1=0$$

$$9t=0 \Rightarrow t=0$$

យក $t=0$ ជួសក្នុង (Δ) គេបាន $x=3, y=6, z=7$ ។

ដូចនេះ $B(3, 6, 7)$ ។

ខ-រកកូអរដោនេនៃចំណុច C រួចរកប្រភេទនៃ ΔABC

$$\text{ចំពោះ } x=1 \text{ គេបាន } \begin{cases} 1+2y+2z-11=0 \\ 2-2y+z-1=0 \end{cases} \quad \text{ឬ} \quad \begin{cases} 2y+2z-10=0 \\ -2y+z+1=0 \end{cases}$$

គេទាញបាន $y=2, z=3$ ។ ដូចនេះ $C(1, 2, 3)$ ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

គេមាន $\overrightarrow{CA} = (4, -4, 2) ; \overrightarrow{CB} = (2, 4, 4)$

គេបាន $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 8 - 16 + 8 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$

ហើយ $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6 ; |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$

គេទាញបាន $CA = CB = 6$ ។

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល C ។

គ-កំណត់សមីការស្វ័យ (S) ៖

តាង $I(a, b, c)$ ជាផ្ចិតរបស់ស្វ័យ (S) មានផ្ចិតនៅលើបន្ទាត់ (Δ)

ហើយប៉ះរួមទៅនឹងប្លង់ (α) និង (β) ។

$$\text{គេបាន } \begin{cases} a = 3 + t \\ b = 6 - 4t \\ c = 7 - t \end{cases} \quad (1)$$

ហើយ $R = d(I, \alpha) = d(I, \beta)$

$$\frac{|(3 + t) + 2(6 - 4t) + 2(7 - t) - 11|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{|2(3 + t) - 2(6 - 4t) + (7 - t) - 1|}{\sqrt{4 + 4 + 1}}$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

$$\text{ឬ } \frac{|-9t+18|}{3} = \frac{|9t|}{3} \Rightarrow t=1 \quad \text{យកជួរសក្តី (1) គេបាន } \begin{cases} a=4 \\ b=2 \\ c=6 \end{cases}$$

ហើយ $R = \frac{9}{3} = 3$ ។ ដូចនេះសមីការស្តង់ដារនៃសមីការស្វ៊ែរសរសេរ

$$(S): (x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-6)^2 = 9 \quad \text{។}$$

លំហាត់ទី១០

គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ (d_1) និង (d_2) មានសមីការឆ្លុះរៀងគ្នា ៖

$$(d_1): \frac{x-5}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2} \quad \text{និង} \quad (d_2): \frac{x-6}{-4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3}$$

A ជាចំណុចមួយនៃ (d_1) មានអាប់ស៊ីស $x_A = 1$ ហើយ B ជា

ចំណុចមួយនៃ (d_2) មានអាប់ស៊ីស $x_B = t$ ដែល $t \in \mathbb{R}$ ។

ក-ចូរស្រាយថា $AB = \frac{\sqrt{26(t-2)^2 + 144}}{4}$

ខ-កំណត់តម្លៃ t ដើម្បីឲ្យ (AB) មានតម្លៃអប្បបរមា ។

គ-ចំពោះតម្លៃ t ដែលបានរកឃើញខាងលើ ចូរបង្ហាញថា (AB)

ជាបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) រួចទាញរកចម្ងាយរវាង

បន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) ។

ដំណោះស្រាយ

ក-ស្រាយថា $AB = \frac{\sqrt{26(t-2)^2 + 144}}{4}$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

គេមាន $A \in (d_1)$ ដែល $x_A = 1$ នៅ៖ $\frac{1-5}{-2} = \frac{y_A-1}{-1} = \frac{z_A+2}{2}$

គេទាញបាន $y_A = -1, z_A = 2$ នៅ៖ $A(1, -1, 2)$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $B \in (d_2)$ ដែល $x_B = t$ នៅ៖ $\frac{t-6}{-4} = \frac{y_B-2}{-1} = \frac{z_B-1}{3}$

គេទាញបាន $y_B = \frac{t+2}{4}, z_B = \frac{22-3t}{4}$ នៅ៖ $B(t, \frac{t+2}{4}, \frac{22-3t}{4})$ ។

គេបាន $\overrightarrow{AB} = (t-1, \frac{t+6}{4}, \frac{14-3t}{4})$

ហេតុនេះ $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(t-1)^2 + \frac{(t+6)^2}{16} + \frac{(14-3t)^2}{16}}$

ដូចនេះ $AB = \frac{\sqrt{26t^2 - 104t + 248}}{4} = \frac{\sqrt{26(t-2)^2 + 144}}{4}$ ។

ខ-កំណត់តម្លៃ t ដើម្បីឲ្យ AB មានតម្លៃអប្បបរមា ៖

គេមាន $AB = \frac{\sqrt{26(t-2)^2 + 144}}{4}$ (សម្រាយខាងលើ)

ដើម្បីឲ្យ AB មានតម្លៃអប្បបរមាលុះត្រាតែ $t-2=0$ ឬ $t=2$

ដូចនេះ $t=2$ ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

គ- បង្ហាញថា (AB) ជាបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) ៖

ចំពោះ $t=2$ គេបាន $B(2, 1, 4)$ និង $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 2)$ ។

តាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជារ៉ឺចឡីប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) ។

គេបាន $\vec{u} = (-2, -1, 2)$ និង $\vec{v} = (-4, -1, 3)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = -2 - 2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}$ ។

ហើយ $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = -4 - 2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \vec{v}$ នោះ $(AB) \perp (d_2)$ ។

ដូចនេះ (AB) ជាបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) ។

ទាញរកចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) ៖

ដោយ (AB) ជាបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) នោះ AB

ជាចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) ។

ដូចនេះ $d(d_1, d_2) = AB = \sqrt{1+4+4} = 3$ ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

លំហាត់ទី១១

គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ (d_1) និង (d_2) មានសមីការឆ្លុះរៀងគ្នា ៖

$$(d_1): x-2 = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{2} \quad \text{និង} \quad (d_2): \frac{x-3}{-1} = y = \frac{z-4}{4}$$

ចូររកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2)

ដំណោះស្រាយ

រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) ៖

តាង $A(x_A, y_A, z_A) \in (d_1)$ និង $B(x_B, y_B, z_B) \in (d_2)$

$$\text{គេបាន} \begin{cases} x_A - 2 = \frac{y_A - 4}{2} = \frac{z_A - 5}{2} = p \\ \frac{x_B - 3}{-1} = y_B = \frac{z_B - 4}{4} = q \end{cases}$$

$$\text{នោះ} \begin{cases} x_A = p + 2 \\ y_A = 2p + 4 \\ z_A = 2p + 5 \end{cases} \quad (1) \quad \text{និង} \quad \begin{cases} x_B = -q + 3 \\ y_B = q \\ z_B = 4q + 4 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{គេបាន} \quad \overrightarrow{AB} = (-q - p + 1, q - 2p - 4, 4q - 2p - 1)$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

តាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជារ៉ឺចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2) ។

គេបាន $\vec{u} = (1, 2, 2)$ និង $\vec{v} = (-1, 1, 4)$ ។

ដើម្បីឲ្យ (AB) ជាបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (d_1) និង (d_2)

$$\text{លុះត្រាតែ } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{AB} \perp \vec{v} \end{cases} \quad \text{សមមូល } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

$$\text{សមមូល } \begin{cases} -q - p + 1 + 2q - 4p - 8 + 8q - 4p - 2 = 0 \\ q + p - 1 + q - 2p - 4 + 16q - 8p - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{សមមូល } \begin{cases} 9q - 9p - 9 = 0 \\ 18q - 9p - 9 = 0 \end{cases} \quad \text{នាំឲ្យ } p = -1, q = 0 \quad \text{។}$$

យក $p = -1, q = 0$ ជួសក្នុង (1) និង (2) គេបាន ៖

$A(1, 2, 3)$ និង $B(3, 0, 4)$ ហើយគេបាន $\overrightarrow{AB} = (2, -2, 1)$

$$\text{ដូចនេះ } (AB): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad \text{។}$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

លំហាត់ទី១២

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរ៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មួយ

គេឲ្យមានចំណុច $A(-1, 4, 4); B(1, 2, 3)$ និង $C(3, 2, 4)$ ។

ក-គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{AB} \times \vec{AC}$ រួចទាញថាបីចំណុច A, B, C

រត់មិនត្រង់គ្នា។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

ខ-កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

គ-គណនាមាឌនៃចតុមុខ $OABC$ រួចទាញរកចម្ងាយពីចំណុច O

ទៅប្លង់ (ABC) ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{AB} \times \vec{AC} \div$

គេមាន $\vec{AB} = (2, -2, -1)$ និង $\vec{AC} = (4, -2, 0)$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2, -4, 4) \quad \text{។}$$

ទាញថាបីចំណុច A, B, C រត់មិនត្រង់គ្នា៖

ដោយ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ នោះវិចារ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ មិនកូលីនេអ៊ែរគ្នា

ដូចនេះ បីចំណុច A, B, C រត់មិនត្រង់គ្នា ។

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ៖

$$\text{តាមរូបមន្ត } S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2, -4, 4) \quad \text{នោះ: } |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$$

$$\text{ដូចនេះ: } S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \quad (\text{ឯកតាផ្ទៃ}) \quad \text{។}$$

ខ-កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ៖

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (-2, -4, 4)$

តាមរូបមន្ត (ABC): $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$$-2(x + 1) - 4(y - 4) + 4(z - 4) = 0$$

ដូចនេះ (ABC): $-x - 2y + 2z - 1 = 0$ ។

គ-គណនាមាឌនៃចតុមុខ OABC ៖

តាមរូបមន្ត $V_{OABC} = \frac{1}{6} \left| (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AO} \right|$

ដោយ $\vec{AB} \times \vec{AC} = (-2, -4, 4)$ និង $\vec{AO} = (1, -4, -4)$

$$\text{គេបាន } V_{OABC} = \frac{1}{6} |(-2)(1) + (-4)(-4) + (4)(-4)| = \frac{1}{3}$$

ដូចនេះ $V_{OABC} = \frac{1}{3}$ (ឯកតាមាឌ) ។

ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច O ទៅប្លង់ (ABC) ៖

តាមរូបមន្ត $V_{OABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times h$ ដែល $h = d(o, (ABC))$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

$$\text{គេទាញបាន } d(o,(ABC)) = \frac{3V_{OABC}}{S_{ABC}} = \frac{3 \times \frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{3}$$

ដូចនេះចម្ងាយពី O ទៅប្លង់ (ABC) ស្មើនឹង $\frac{1}{3}$ (ឯកតាប្រវែង) ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

លំហាត់ទី១៣

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរ៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មួយ

គេឲ្យមានចំណុច $A(0,2,1), B(2,1,-1), C(-4,5,3)$ និង $D(4,6,3)$ ។

ក-ចូរស្រាយថា $\vec{AB} \times \vec{AC} = \vec{AD}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃ $\triangle ABC$ ។

ខ-កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

គ-គណនា $(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}$ រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ។

ឃ-ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) ។

ដំណោះស្រាយ

ក-ស្រាយថា $\vec{AB} \times \vec{AC} = \vec{AD}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃ $\triangle ABC$ ៖

គេមាន $\vec{AB} = (2, -1, -2), \vec{AC} = (-4, 3, 2)$ និង $\vec{AD} = (4, 4, 2)$

$$\text{គេបាន } \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} = (4, 4, 2)$ ។

ខ-កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ៖

ប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (4, 4, 2)$

តាមរូបមន្ត (ABC) : $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$$4(x - 0) + 4(y - 2) + 2(z - 1) = 0$$

ដូចនេះ (ABC) : $2x + 2y + z - 5 = 0$ ។

គ-គណនា $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$ រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ីត ABCD ៖

គេមាន $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

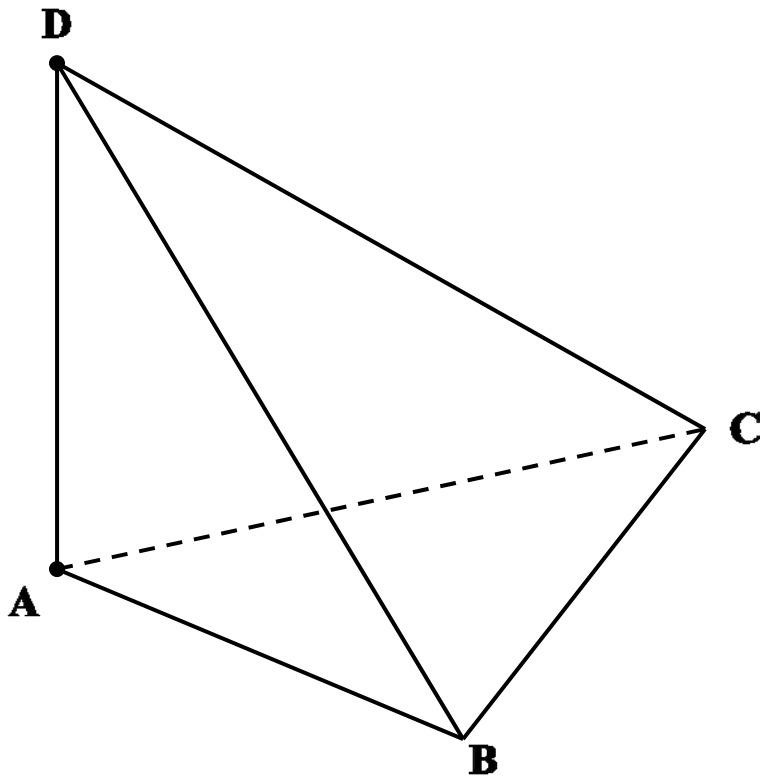
ដូចនេះ $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AD}|^2 = 16 + 16 + 4 = 36$ ។

តាមរូបមន្ត $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} \times 36 = 6$ (ឯកតាមាឌ) ។

ដូចនេះ $V_{ABCD} = 6$ (ឯកតាមាឌ) ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

យ-ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) ៖



$$\text{គេមាន } V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times d(D, (ABC))$$

ដែល $d(D, (ABC)) = h$ ជាកម្ពស់នៃតេត្រាអែតគូសពីកំពូល D ។

$$\text{គេទាញ } d(D, (ABC)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{3 \times 6}{3} = 6 \text{ (ឯកតាប្រវែង)} \text{ ។}$$

លំហាត់ទី១៤

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មួយ

គេឲ្យមានចំណុច $A(2,2,1), B(3,1,1), C(-2,4,5)$ និង $D(1,-1,0)$ ។

ក-គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{BA} \times \vec{BC}$ រួចទាញថាបីចំណុច A, B, C

មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃ $\triangle ABC$ ។

ខ-កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

គ-គណនា $(\vec{BA} \times \vec{BC}) \cdot \vec{BD}$ រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអែត $ABCD$ ។

ឃ-ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{BA} \times \vec{BC}$

គេមាន $\vec{BA} = (-1, 1, 0), \vec{BC} = (-5, 3, 4)$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\text{ដូចនេះ } \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = (4, 4, 2) \quad \text{។}$$

ដោយ $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = (4, 4, 2) \neq \vec{O} = (0, 0, 0)$ នោះ $\overrightarrow{BA}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ជាវ៉ិចទ័រ

មិនកូលីនេអ៊ែរ។

ដូចនេះបីចំណុច A, B, C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

គណនាផ្ទៃក្រលានៃ $\triangle ABC$ ៖

$$\text{គេបាន } S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 16 + 4} = 3 \text{ (ឯកតាផ្ទៃ)} \quad \text{។}$$

ខ-កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ៖

$$\text{ប្លង់ } (ABC) \text{ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ } \vec{n} = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = (4, 4, 2)$$

$$\text{តាមរូបមន្ត } (ABC) : a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

$$4(x-2)+4(y-2)+2(z-1)=0$$

$$4x-8+4y-8+2z-2=0$$

$$4x+4y+2z-18=0$$

ដូចនេះ $(ABC): 2x+2y+z-9=0$ ។

គ-គណនា $(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BD}$ រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ីត ABCD ៖

គេមាន $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = (4, 4, 2)$ និង $\overrightarrow{BD} = (-2, -2, -1)$

ដូចនេះ $(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BD} = -8 - 8 - 2 = -18$ ។

តាមរូបមន្ត $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BD} \right|$

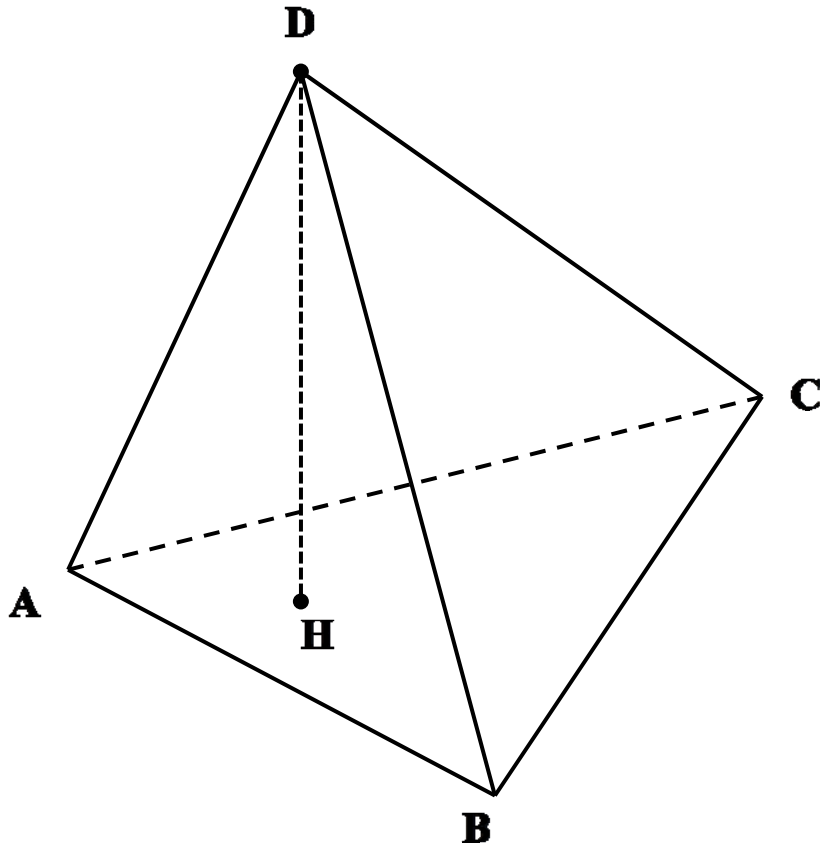
ដោយ $(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BD} = -8 - 8 - 2 = -18$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BD} \right| = \frac{1}{6} \times |-18| = 3$$

ដូចនេះ $V_{ABCD} = 3$ (ឯកតាមាឌ) ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

យ-ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) ៖



គេមាន $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times d(D, (ABC))$

ដែល $d(D, (ABC)) = DH = h$ ជាកម្ពស់នៃតេត្រាអ៊ែតគូសពីកំពូល D

គេទាញ $d(D, (ABC)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{3 \times 3}{3} = 3$ (ឯកតាប្រវែង) ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

លំហាត់ទី១៥

គេឲ្យប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច $A(4,-2,2)$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

$\vec{n} = (1,2,2)$ ហើយបន្ទាត់ (L): $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-4}{4} = z-2$ ។

ក-កំណត់សមីការនៃប្លង់(P) រួចគណនាកូអរដោនេចំណុច M

ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់(P) ។

ខ-យក B,C,D ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) ជាមួយអ័ក្ស (ox),(oy),(oz)

រៀងគ្នា ។ ចូរស្រាយថាចតុកោណ ABCD ជាប្រលេឡូក្រាម

រួចគណនាផ្ទៃក្រលារបស់វា ។

គ-គេឲ្យ $S(2,-6,-2)$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ (SA) អវតូកូណាល់នឹង

ប្លង់ (ABCD) ។ គណនាផ្ទៃស្រទាប់ SA រួចទាញរកមាឌនៃពីរ៉ាមីត

SABCD ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំណត់សមីការនៃប្លង់ (P) ៖

តាមរូបមន្ត (P) : $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

ដោយ $A(4, -2, 2)$ និង $\vec{n} = (1, 2, 2)$

គេបាន $1 \cdot (x - 4) + 2(y + 2) + 2(z - 2) = 0$

$$x - 4 + 2y + 4 + 2z - 4 = 0$$

ដូចនេះ (P) : $x + 2y + 2z - 4 = 0$ ។

គណនាកូអរដោនេចំណុច M ៖

$$\text{តាង } \frac{x-1}{-1} = \frac{y-4}{4} = z-2 = t \text{ នាំឱ្យ } \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 4t + 4 \\ z = t + 2 \end{cases} \quad (1)$$

យកសមីការ(1)ជំនួសក្នុង (P) គេបាន ៖

$$(-t + 1) + 2(4t + 4) + 2(t + 2) - 4 = 0$$

$$9t + 9 = 0 \Rightarrow t = -1$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

យកតម្លៃ $t = -1$ ជួសក្នុង(1) គេបាន
$$\begin{cases} x = -(-1) + 1 = 2 \\ y = 4(-1) + 4 = 0 \\ z = -1 + 2 = 1 \end{cases}$$

ដូចនេះ: $M(2, 0, 1)$ ។

ខ-ស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ៖

គេមាន $(P): x + 2y + 2z - 4 = 0$

-បើ $y = 0, z = 0$ គេបាន $x - 4 = 0$ នៅ: $x = 4$

-បើ $x = 0, z = 0$ គេបាន $2y - 4 = 0$ នៅ: $y = 2$

-បើ $x = 0, y = 0$ គេបាន $2z - 4 = 0$ នៅ: $z = 2$

គេបាន $B(4, 0, 0), C(0, 2, 0), D(0, 0, 2)$ ។

ដោយ $A(4, -2, 2)$ នៅ: $\overrightarrow{AB} = (0, 2, -2)$ និង $\overrightarrow{DC} = (0, 2, -2)$

ដោយ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ នៅ: $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

គណនាផ្ទៃក្រលានៃ ABCD ៖

តាមរូបមន្ត $S_{ABCD} = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$

ដោយ $\vec{AB} = (0, 2, -2)$, $\vec{AD} = (-4, 2, 0)$

គេបាន $\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 8\vec{j} + 8\vec{k}$

$S_{ABCD} = \sqrt{4^2 + 8^2 + 8^2} = 12$ (ឯកតាផ្ទៃ) ។

គ-បង្ហាញថាបន្ទាត់ (SA) អត្ថក្ខណាល់នឹងប្លង់ (ABCD) ៖

គេមាន $S(2, -6, -2)$ និង $A(4, -2, 2)$, $B(4, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$

នោះ $\vec{SA} = (2, 4, 4)$, $\vec{AB} = (0, 2, -2)$; $\vec{AC} = (-4, 4, -2)$

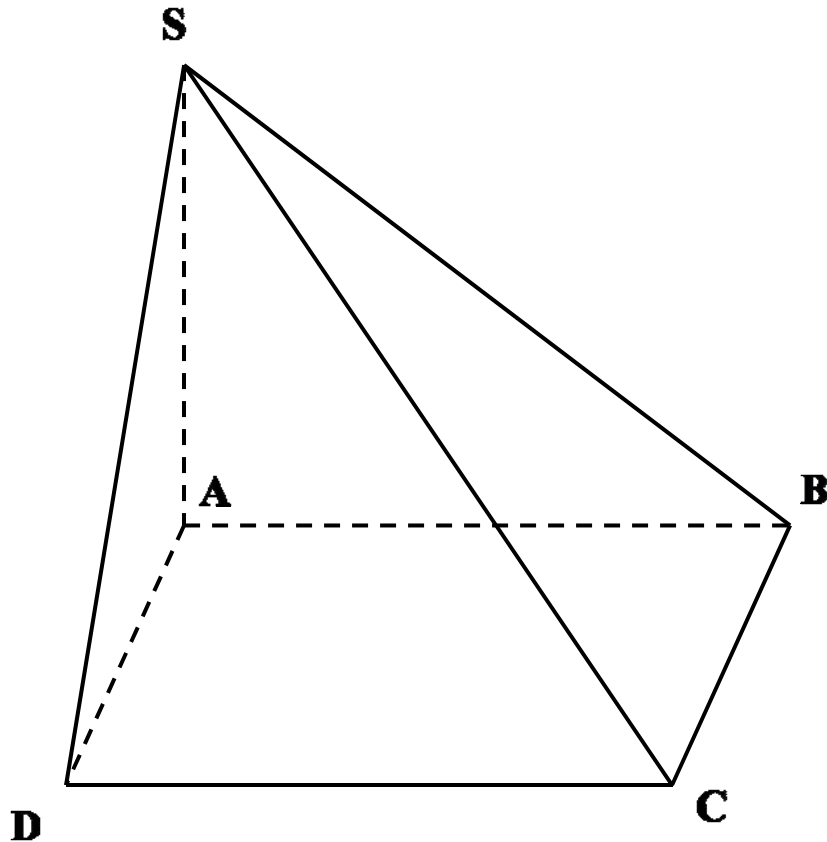
គេបាន $\vec{SA} \cdot \vec{AB} = 0 + 8 - 8 = 0 \Leftrightarrow \vec{SA} \perp \vec{AB}$

ហើយ $\vec{SA} \cdot \vec{AC} = -8 + 16 - 8 = 0 \Leftrightarrow \vec{SA} \perp \vec{AC}$

ដូចនេះ (SA) អត្ថក្ខណាល់នឹងប្លង់ (ABCD) ។

លំហាត់ចរណ៍មាត្រថ្នាក់ទី១២

គណនារង្វាស់ SA រួចទាញរកមាឌនៃពីរ៉ាមីត $SABCD$ ៖



$$\text{គេបាន } SA = |\vec{SA}| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6 \quad \text{។}$$

$$\text{តាមរូបមន្ត } V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \times SA \quad \text{ដោយ} \quad \begin{cases} SA = 6 \\ S_{ABCD} = 12 \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ: } V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times 6 \times 12 = 24 \quad (\text{ឯកតាមាឌ})$$

លំហាត់ទី១៦

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

គេមានចំណុច $A(2,1,-1)$ និងប្លង់ពីរ (P) និង (Q) មាន

សមីការរៀងគ្នា $x + 2y + 2z - 11 = 0$ និង $3x + y - 4z + 7 = 0$

ក-រកសមីការប្លង់ (R) កាត់តាមចំណុច A ហើយកែងរួម

ទៅនឹងប្លង់ពីរ (P) និង (Q) ។

ខ-រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ B រវាងប្លង់ទាំងបី $(P), (Q), (R)$

គ-យក C ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (R) ជាមួយនឹងអ័ក្ស (oz) ។

រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC រួចគណនាផ្ទៃក្រឡារបស់វា

ឃ-រកកូអរដោនេ D ដើម្បីឲ្យ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

ង-តាង E ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AB]$ និង F ជាចំណុច

កណ្តាលនៃ $[CD]$ ។ បង្ហាញថា $EAFC$ ជាការេ ។

ជំនេរស្រាវ

ក-រកសមីការប្លង់ (R) ៖

តាង $\vec{n}$ ជារ៉ឺចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (R) ។

ប្លង់ (P): $x + 2y + 2z - 11 = 0$ និង (Q): $3x + y - 4z + 7 = 0$

មានរ៉ឺចទ័រណរម៉ាល់រៀងគ្នា $\vec{n}_1 = (1, 2, 2)$ និង $\vec{n}_2 = (3, 1, -4)$

ដោយ (R) ជាប្លង់កែងរួមទៅនឹងប្លង់ពីរ (P) និង (Q)

$$\text{នោះគេបាន } \vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 10\vec{j} - 5\vec{k}$$

ដោយ $A(2, 1, -1) \in (R)$ នោះសមីការប្លង់ (R) អាចសរសេរ ៖

$$(R): -10(x - 2) + 10(y - 1) - 5(z + 1) = 0$$

$$(R): -10x + 20 + 10y - 10 - 5z - 5 = 0$$

$$(R): -10x + 10y - 5z + 5 = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } (R): -2x + 2y - z + 1 = 0 \quad \text{។}$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ខ-រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វនៃប្លង់ទាំងបី $(P), (Q), (R) :$

$$\text{គេបានប្រព័ន្ធនៃ} \begin{cases} x + 2y + 2z - 11 = 0 \\ 3x + y - 4z + 7 = 0 \\ -2x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases} \quad AF \perp CD$$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបានចម្លើយ $x=1, y=2, z=3$

ដូចនេះចំណុចប្រសព្វនៃប្លង់ទាំងបីគឺ $B(1,2,3)$ ។

គ-រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC រួចគណនាផ្ទៃក្រឡារបស់វា ៖

ដោយ C ជាប្រសព្វនៃប្លង់ (R) ជាមួយនឹងអ័ក្ស (oz) នោះ

$$x_c = y_c = 0 \quad \text{និង} \quad -z_c + 1 = 0 \quad \text{ឬ} \quad z_c = 1 \quad \text{នោះ} \quad C(0,0,1) \quad \text{។}$$

$$\text{គេមាន} \quad \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 4); \quad \overrightarrow{AC} = (-2, -1, 2) \quad \text{និង} \quad \overrightarrow{BC} = (-1, -2, -2)$$

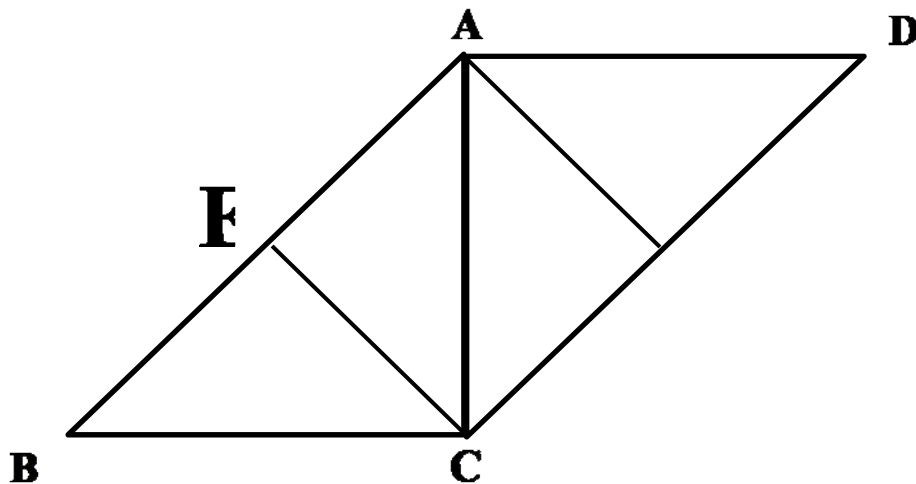
$$\text{គេបាន} \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+1+4} = 3, \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+4+4} = 3 \quad \text{នោះ} \quad AC = BC$$

$$\text{ហើយ} \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 + 2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \quad \text{។}$$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល C ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

យ-រកកូអរដោនេ **D** ដើម្បីឲ្យ **ABCD** ជាប្រលេឡូក្រាម ៖



តាង $D(x_D, y_D, z_D)$ ។ បើ **ABCD** ជាប្រលេឡូក្រាមនោះគេបាន

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \quad \text{ដោយ} \quad \begin{cases} \overrightarrow{AD} = (x_D - 2, y_D - 1, z_D + 1) \\ \overrightarrow{BC} = (-1, -2, -2) \end{cases}$$

$$\text{គេបាន} \quad \begin{cases} x_D - 2 = -1 \\ y_D - 1 = -2 \\ z_D + 1 = -2 \end{cases} \quad \text{នាំឲ្យ} \quad x_D = 1, y_D = -1, z_D = -3 \quad \text{។}$$

ដូចនេះ $D(1, -1, -3)$ ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

លំហាត់ទី១៧

នៅក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន

គេឱ្យ $(L): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+8}{3}$ និង $(P): x - 2y - 2z - 14 = 0$ ។

ក-គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ A រវាង (L) និង (P)

ខ-រកសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមបន្ទាត់ (L) ហើយកែងនឹងប្លង់ (P)

គ-សរសេរប្រពន្ធសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) ដែលជាប្រសព្វ
រវាងប្លង់ (P) និង (Q) ។

ឃ-រកសមីការស្វ៊ែកាំ $R=6$ ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (P) ត្រង់ចំនុច A ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ A រវាង (L) និង (P)

កូអរដោនេនៃចំនុចប្រសព្វ A ជាចំលើយរបស់ប្រពន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+8}{3} \\ x - 2y - 2z - 14 = 0 \end{cases}$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបាន $A(4, -3, -2)$ ។

ខ-រកសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមបន្ទាត់ (L) ហើយកែងនឹងប្លង់ (P)

យក $M(x, y, z)$ ជាចំណុចទូទៅនៃប្លង់ (Q) គេបាន ៖

$$\overrightarrow{AM} = (x-4, y+3, z+2)$$

តាង $\vec{n}_Q$ ជារ៉ឺចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (Q) នោះគេបាន $\vec{n}_Q = \vec{u} \times \overrightarrow{AM}$

ដែល $\vec{u} = (2, -2, 3)$ ជារ៉ឺចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) ។

$$\text{គេបាន } \vec{n}_Q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ x-4 & y+3 & z+2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n}_Q = (-2z - 3y - 13)\vec{i} - (-2z - 3x + 16)\vec{j} + (2y + 2x + 14)\vec{k} \quad ។$$

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $(Q) \perp (P)$ នាំឱ្យ $\vec{n}_Q \perp \vec{n}_P$ សមមូល $\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0$

$$\text{គេបាន } 1 \cdot (-2z - 3y - 13) - 2(-2z + 3x - 16) - 2(2y + 2x - 2) = 0$$

$$-2z - 3y - 13 + 4z - 6x + 32 - 4y - 4x + 4 = 0$$

$$-10x - 7y + 2z + 23 = 0$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ដូចនេះ (Q): $10x + 7y - 2z - 23 = 0$ ។

គ-សរសេរប្រពន្ធសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d)

បន្ទាត់(d) ដែលជាប្រសព្វរវាង (P) និង (Q) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស

$$\vec{u}_d = \vec{n}_P \times \vec{n}_Q$$

ដែល $\vec{n}_P = (1, -2, -2)$ និង $\vec{n}_Q = (10, 7, -2)$ ។

$$\text{គេបាន } \vec{u}_d = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -2 \\ 10 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 18\vec{i} - 18\vec{j} + 27\vec{k} \quad \text{។}$$

យក $N_0 \in (d)$ នាំឱ្យ $N_0 \in (P)$ និង $N_0 \in (Q)$ ។

$$\text{គេបាន } \begin{cases} x_0 - 2y_0 - 2z_0 - 14 = 0 \\ 10x_0 + 7y_0 - 2z_0 - 23 = 0 \end{cases}$$

យកតម្លៃ $x_0 = 0$ នាំឱ្យ $y_0 = 1, z_0 = -8$ ។ គេបាន $N_0(0, 1, -8)$ ។

$$\text{ដូចនេះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ អាចសរសេរ (d): } \begin{cases} x = 18t \\ y = 1 - 18t \\ z = -8 + 27t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

លំហាត់ទី១៨

នៅក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន

គេឱ្យប្លង់ពីរ $(P): x - 2y + z + 4 = 0$ និង $(Q): 2x + 3y - 2z - 13 = 0$ ។

ក-រកសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង (Q) ។

ខ-ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (R) កាត់តាមចំនុច $A(0, 6, 8)$ ហើយកែង
រួមទៅនឹងប្លង់ទាំងពីរ (P) និង (Q) ខាងលើ ។

គ-រកកូអរដោនេនៃចំនុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (L) និង ប្លង់ (R) ។

ដំណោះស្រាយ

ក-សរសេរសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L)

ប្លង់ (P) និង (Q) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់រៀងគ្នា

$$\vec{n}_P = (1, -2, 1) \text{ និង } \vec{n}_Q = (2, 3, -2) \quad \text{។}$$

តាង $\vec{u}_L$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) នោះគេបាន ៖

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

$$\vec{u}_L = \vec{n}_P \times \vec{n}_Q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k} \quad \text{។}$$

យក $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (L)$ នាំឱ្យ $M_0 \in (P)$ និង $M_0 \in (Q)$

$$\text{គេបាន} \begin{cases} x_0 - 2y_0 + z_0 + 4 = 0 \\ 2x_0 + 3y_0 - 2z_0 - 13 = 0 \end{cases}$$

សន្មតយក $z_0 = 0$ នាំឱ្យគេទាញបាន $x_0 = 2, y_0 = 3$ ។

ដូចនេះ $M_0(2, 3, 0)$ ។

ដូចនេះសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L) អាចសរសេរតាមរូបមន្ត ៖

$$(L): \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\text{ឬ } (L): \frac{x - 2}{1} = \frac{y - 3}{4} = \frac{z}{7} \quad \text{។}$$

ខ-សរសេរសមីការប្លង់ (R) ៖

តាង $\vec{n}_R$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (R) កាត់តាមចំណុច $A(0, 6, 8)$

ហើយកែងរួមទៅនឹងប្លង់ទាំងពីរ (P) និង (Q) ខាងលើ ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

គេមាន $(R) \perp (P)$ និង $(R) \perp (Q)$

នាំឱ្យ $\vec{n}_R \perp \vec{n}_P$ និង $\vec{n}_R \perp \vec{n}_Q$ នៅ៖ $\vec{n}_R = \vec{n}_P \times \vec{n}_Q$

$$\text{គេបាន } \vec{n}_R = \vec{n}_P \times \vec{n}_Q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k} \quad \text{។}$$

សមីការប្លង់ (R) អាចសរសេរតាមរូបមន្ត ៖

$$(R): a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$(R): 1.(x - 0) + 4(y - 6) + 7(z - 8) = 0$$

$$\text{ដូចនេះ} \quad (R): x + 4y + 7z - 80 = 0 \quad \text{។}$$

គ-គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M

កូអរដោនេចំណុចចំណុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (L) និង ប្លង់ (R)

ជាចំលើយប្រព័ន្ធសមីការ៖

$$\begin{cases} \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{7} & (1) \\ x + 4y + 7z - 80 = 0 & (2) \end{cases}$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

តាង $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{7} = t$

នាំឱ្យ $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 4t + 3 \\ z = 7t \end{cases}$ (3) យកទៅជួសក្នុងសមីការ (2)

គេបាន $t + 2 + 4(4t + 3) + 7(7t) - 80 = 0$

នាំឱ្យ $t = 1$ យកជួសក្នុង (3) គេបាន $x = 3, y = 7, z = 7$ ។

ដូចនេះ $M(3, 7, 7)$ ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

លំហាត់ទី១៩

នៅក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន ។

គេឱ្យបន្ទាត់ $(L): \frac{x+3}{-3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-1}{3}$ និងចំនុច $A(2, -3, 4)$ ។

ក-ចូរគណនាចំងាយពីចំនុច A ទៅបន្ទាត់ (L) ។

ខ-ចូរសរសេរសមីការប្លង់កំនត់ដោយបន្ទាត់ (L) និង ចំនុច A ។

គ-រកសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមបន្ទាត់ (L) ហើយកែងនឹងប្លង់ (P)

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាចំងាយពីចំនុច A ទៅបន្ទាត់ (L)

$$\text{បន្ទាត់ } (L): \frac{x+3}{-3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-1}{3}$$

ជាបន្ទាត់កាត់តាមចំនុច $M_0(-3, 4, 1)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស

$$\vec{u}_L(-3, 4, 3) \text{ ។}$$

$$\text{តាមរូបមន្ត } d(A, (L)) = \frac{|\overrightarrow{AM_0} \times \vec{u}_L|}{|\vec{u}_L|} \text{ ដោយ } \overrightarrow{AM_0}(-5, 7, -3)$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

គេមាន $\overrightarrow{AM_0} \times \vec{u}_L = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 7 & -3 \\ -3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 33\vec{i} - 24\vec{j} + \vec{k}$

គេទាញ $|\overrightarrow{AM_0} \times \vec{u}_L| = \sqrt{(33)^2 + (-24)^2 + 1^2} = \sqrt{1666}$

ហើយ $|\vec{u}_L| = \sqrt{9+16+9} = \sqrt{34}$ ។

គេបាន $d(A,(L)) = \frac{\sqrt{1666}}{\sqrt{34}} = \sqrt{\frac{1666}{34}} = \sqrt{49} = 7$ ។

ដូចនេះ $d(A,(L)) = 7$ (ឯកតាប្រវែង) ។

ខ-សរសេរសមីការប្លង់កំណត់ដោយបន្ទាត់ (L) និង ចំនុច A

តាង $\vec{n}_P$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) គេបាន $\vec{n}_P = \vec{u}_L \times \overrightarrow{M_0A}$

ដោយ $\vec{u}_L(-3,4,3)$ និង $\overrightarrow{M_0A}(5,-7,3)$ គេបាន ៖

$$\vec{n}_P = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & 3 \\ 5 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 33\vec{i} - 24\vec{j} + \vec{k} \quad \text{។}$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

សមីការប្លង់ (P) អាចសរសេរ ៖

$$(P): 33(x-2) - 24(y+3) + (z-4) = 0$$

$$(P): 33x - 24y + z - 142 = 0$$

គ-រកសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមបន្ទាត់ (L) ហើយកែងនឹងប្លង់ (P)

តាង $\vec{n}_Q$ ជារ៉ឺចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (Q) កាត់តាមបន្ទាត់ (L)

ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) ។

យក $M(x,y,z)$ ជាចំណុចទូទៅនៃប្លង់ (Q) គេបាន $\vec{n}_Q = \vec{u}_L \times \overrightarrow{M_0M}$

ដោយ $\vec{u}_L(-3,4,3)$ និង $\overrightarrow{M_0M}(x+3,y-4,z-1)$ គេបាន ៖

$$\begin{aligned} \vec{n}_Q &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & 3 \\ x+3 & y-4 & z-1 \end{vmatrix} \\ &= (4z-3y+8)\vec{i} - (-3z-3x-12)\vec{j} + (-3y-4x)\vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{n}_Q = (4z-3y+8, 3z+3x+12, -3y-4x) \quad \text{។}$$

ដោយ $(Q) \perp (P)$ នាំឱ្យ $\vec{n}_Q \perp \vec{n}_P$ សមមូល $\vec{n}_Q \cdot \vec{n}_P = 0$ គេបាន ៖

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

$$33(4z - 3y + 8) - 24(3z + 3x + 6) + (-3y - 4x) = 0$$

$$132z - 99y + 264 - 72z - 72x - 144 - 3y - 4x = 0$$

$$-76x - 102y + 60z + 120 = 0$$

ដូចនេះ: (Q): $38x + 51y - 30z - 60 = 0$ ។

លំហាត់ទី២០

នៅក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ $(\mathbf{o}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន ។

គេឱ្យបីចំនុច $A(-2, 3, 4)$, $B(-5, 7, 7)$ និង $C(7, 7, 3)$ ។

ក-គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$ ។

ទាញថាបីចំនុច A, B, C រត់មិនត្រង់គ្នា ។

ខ-គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។

គ-សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ។

ឃ-គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $OABC$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$

គេមាន $\vec{AB} = (-3, 4, 3)$ និង $\vec{AC} = (9, 4, -1)$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

$$\text{គេបាន } \vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & 3 \\ 9 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -16\vec{i} + 24\vec{j} - 48\vec{k}$$

ដោយ $\vec{AB} \times \vec{AC} \neq \vec{0}$ នាំឱ្យ $\vec{AB}$ និង $\vec{AC}$ ជារ៉ឺងទ័រមិនកូលីនេអ៊ែគ្នា ដូចនេះបីចំណុច A, B, C រត់មិនត្រង់គ្នា ។

ខ-គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC

$$\begin{aligned} \text{តាមរូបមន្ត } S_{ABC} &= \frac{1}{2} | \vec{AB} \times \vec{AC} | \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(-16)^2 + (24)^2 + (-48)^2} = 28 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $S_{ABC} = 28$ (ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ)។

គ-សរសេរសមីការប្លង់ (ABC)

ប្លង់ (ABC) មានរ៉ឺងទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (-16, 24, -48)$ ។

សមីការប្លង់ (ABC) អាចសរសេរ ៖

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

$$(ABC): a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$(ABC): -16(x + 2) + 24(y - 3) - 48(z - 4) = 0$$

ដូចនេះ: $(ABC): 2x - 3y + 6z - 11 = 0$ ។

យ-គណនាមាឌតេត្រាអ៊ីត $OABC$

$$\text{តាមរូបមន្ត } V_{OABC} = \frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right) \cdot \overrightarrow{AO} \right|$$

ដោយ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-16, 24, -48)$ និង $\overrightarrow{AO} = (2, -3, -4)$

គេបាន $V_{OABC} = \frac{1}{6} |(-16)(2) + (24)(-3) + (-48)(-4)| = \frac{44}{3}$ ។

ដូចនេះ: $V_{OABC} = \frac{44}{3}$ (ឯកត្តាមាឌ) ។

លំហាត់ទី២១

នៅក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(\mathbf{o}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ។

(គេយកឯកតា 1cm នៅលើអ័ក្ស) គេឱ្យបន្ទាត់ពីរ (L_1) និង (L_2)

មានសមីការឆ្លុះរៀងគ្នា

$$(L_1): \frac{x+5}{9} = \frac{y+4}{4} = \frac{z-3}{-1} \quad \text{និង} \quad (L_2): \frac{x+1}{3} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z+1}{-3} \quad .$$

ក-ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (P) កាត់តាម (L_1) ហើយស្របនឹង (L_2)

ខ-ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាម (L_2) ហើយស្របនឹង (L_1)

គ-គណនាចំងាយរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) ។

ដំណោះស្រាយ

ក-សរសេរសមីការប្លង់ (P) កាត់តាម (L_1) ហើយស្របនឹង (L_2)

$$(L_1): \frac{x+5}{9} = \frac{y+4}{4} = \frac{z-3}{-1}$$

ជាបន្ទាត់កាត់តាម $A(-5, -4, 3)$ ហើយស្របនឹង $\vec{u}_1(9, 4, -1)$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

$(L_2): \frac{x+1}{3} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z+1}{-3}$ ជាបន្ទាត់កាត់តាម $B(-1, 7, -1)$ ហើយស្របនឹង $\vec{u}_2(3, -4, -3)$ ។

តាង $\vec{n}_P$ ជារ៉ឺចទ័រណរម៉ាល់នៃ (P) កាត់តាម (L_1) ហើយស្រប (L_2)

$$\text{គេបាន } \vec{n}_P = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -16\vec{i} + 24\vec{j} - 48\vec{k} \quad \text{។}$$

សមីការប្លង់ (P) កាត់តាម (L_1) ហើយស្របនឹង (L_2) អាចសរសេរ ៖

$$(P): a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$(P): -16(x + 5) + 24(y + 4) - 48(z - 3) = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } (P): 2x - 3y + 6z - 20 = 0 \quad \text{។}$$

ខ-សរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាម (L_2) ហើយស្របនឹង (L_1)

តាង $\vec{n}_Q$ ជារ៉ឺចទ័រណរម៉ាល់ប្លង់ (Q) កាត់តាម (L_2) ស្របនឹង (L_1)

$$\text{គេបាន } \vec{n}_Q = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{n}_P = -16\vec{i} + 24\vec{j} - 48\vec{k} \quad \text{។}$$

សមីការប្លង់ (Q) អាចសរសេរតាមរូបមន្ត ៖

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

$$(Q): a(x - x_B) + b(y - y_B) + c(z - z_B) = 0$$

$$(Q): -16(x + 1) + 24(y - 7) - 48(z + 1) = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } (Q): 2x - 3y + 6z + 29 = 0 \quad \text{។}$$

គ-គណនាចំងាយរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2)

គេមាន $(L_1) \subset (P)$ ហើយ $(L_2) \subset (Q)$ ដែល $(P) // (Q)$

នោះគេទាញបាន $d((L_1), (L_2)) = d((P), (Q)) = d(A, (Q))$

(ព្រោះ: $A \in (P)$) ។

$$d((L_1), (L_2)) = \frac{|2x_A - 3y_A + 6z_A + 29|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}}$$

$$d((L_1), (L_2)) = \frac{|2(-5) - 3(-4) + 6(3) + 29|}{7} = \frac{49}{7} = 7$$

លំហាត់ទី២២

នៅក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មាន
ឯកតា 1cm នៅលើអ័ក្សតេអោយប្លង់ $(P): x + 2y + 2z - 6 = 0$ ។

គេតាង A, B, C ជាចំនុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) ជាមួយអ័ក្ស
 $(Ox), (Oy), (Oz)$ ។

ក. កំណត់កូអរដោនេនៃចំនុច A, B និង C រួចសង់ប្លង់ (P)

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) កាត់តាមគល់ O ហើយកែង
នឹងប្លង់ (P) ខាងលើ ។

គ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចទាញរកក្រឡាផ្ទៃត្រី
កោណ ABC ។

ឃ. គណនាមាឌតេត្រាអែត $OABC$ រួចទាញរកចំងាយពីគល់ O ទៅ
ប្លង់ (ABC) ។

ជំលោះស្រាប

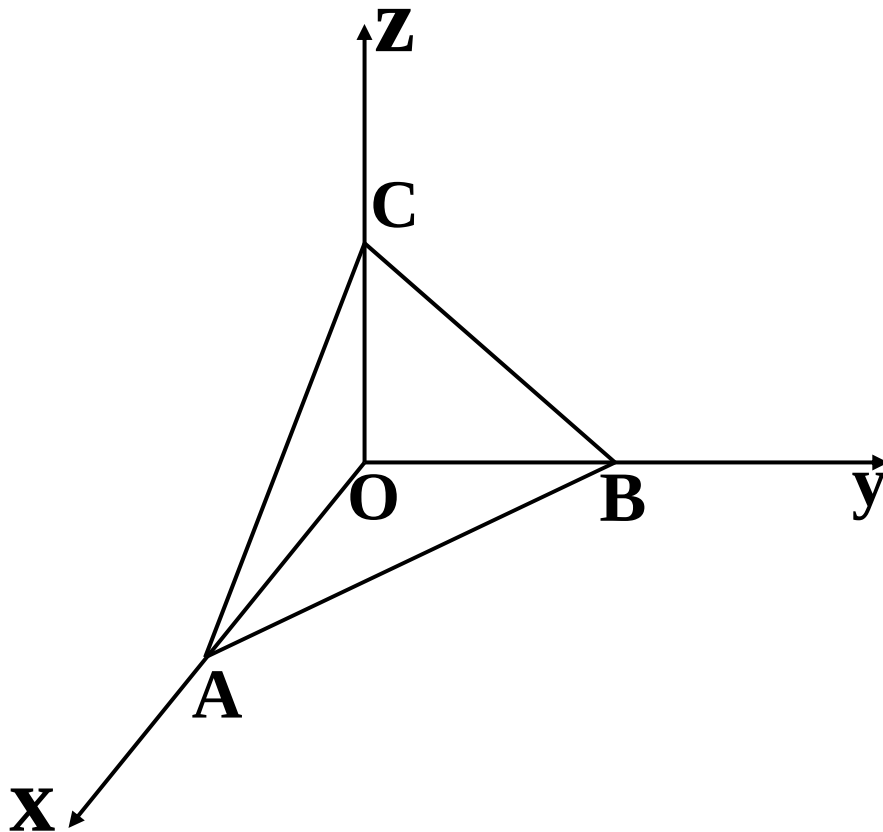
ក. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច A, B និង C រួចសង្ខេបប្លង់ (P)

គេមាន $(P): x + 2y + 2z - 6 = 0$

បើ $y = 0, z = 0$ នាំអោយ $x - 6 = 0$ ឬ $x = 6$ ។ គេបាន $A(6, 0, 0)$

បើ $x = 0, z = 0$ នាំអោយ $2y - 6 = 0$ ឬ $y = 3$ ។ គេបាន $B(0, 3, 0)$ ។

បើ $x = 0, y = 0$ នាំអោយ $2z - 6 = 0$ ឬ $z = 3$ ។ គេបាន $C(0, 0, 3)$ ។



លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ខ.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L)

$$\text{តាមរូបមន្ត (L):} \begin{cases} x = x_O + at \\ y = y_O + bt \\ z = z_O + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

ដោយបន្ទាត់ (L) កែងនឹងប្លង់ (P): $x + 2y + 2z - 6 = 0$

នាំអោយវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់។

គេបាន $\vec{u}_L = \vec{n}_P = (1, 2, 2)$ និង $O(0, 0, 0)$

$$\text{ដូចនេះ (L):} \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

គ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{AB} \times \vec{AC}$

គេមាន $\vec{AB} = (-6, 3, 0)$ និង $\vec{AC} = (-6, 0, 3)$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9\vec{i} + 18\vec{j} + 18\vec{k} \quad \text{។}$$

ដូច្នេះនេះ: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (9, 18, 18)$ ។

គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ៖

$$\text{តាមរូបមន្ត} \div S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9^2 + 18^2 + 18^2} = 13,5 \text{cm}^2$$

យ. គណនាមាឌតេត្រាអែត $OABC$ ៖

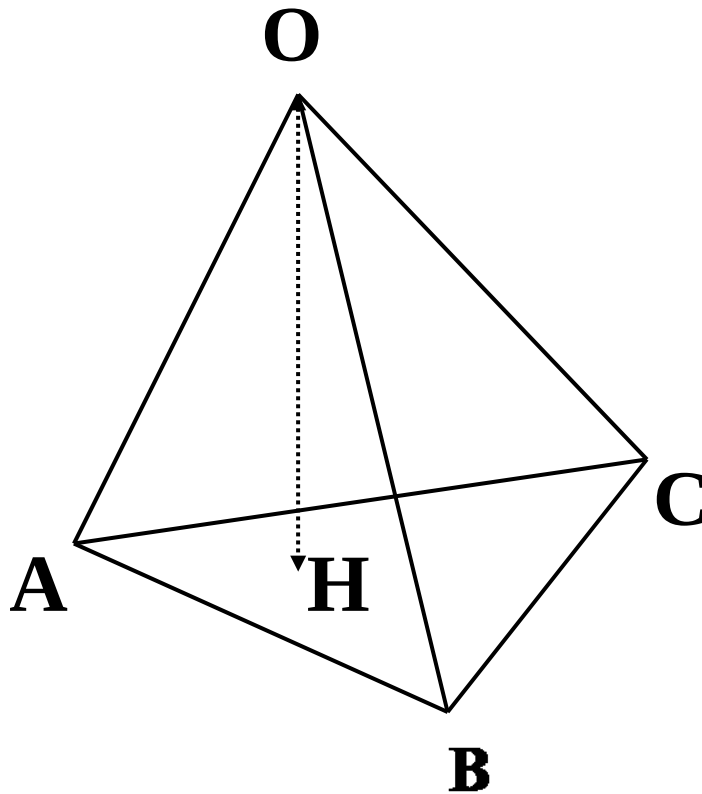
$$\text{តាមរូបមន្ត} \div V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot \left| \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right) \cdot \overrightarrow{AO} \right|$$

ដោយ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} (9, 18, 18)$ និង $\overrightarrow{AO} (-6, 0, 0)$

គេបាន $V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot |-54 + 0 + 0| = 9 \text{cm}^3$ ។ ដូច្នេះនេះ: $V_{OABC} = 9 \text{cm}^3$ ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ទាញរកចំងាយពីគល់ O ទៅប្លង់ (ABC) ៖



គេមាន $V_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \times d(O; ABC)$

ដែល $OH = d(O; ABC)$ ។

គេបាន $d(O; (ABC)) = \frac{3 \cdot V_{OABC}}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot 9}{13,5} = 2\text{cm}$ ។

លំហាត់ទី២៣

គេអោយគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ១។

លំហាមានទិសដៅតាមតំរុយអវតួណាម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន

$\left(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE} \right)$ គេយក I ជាចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[EF]$ និង K

ជាផ្ចិតការេ $ADHE$ ។

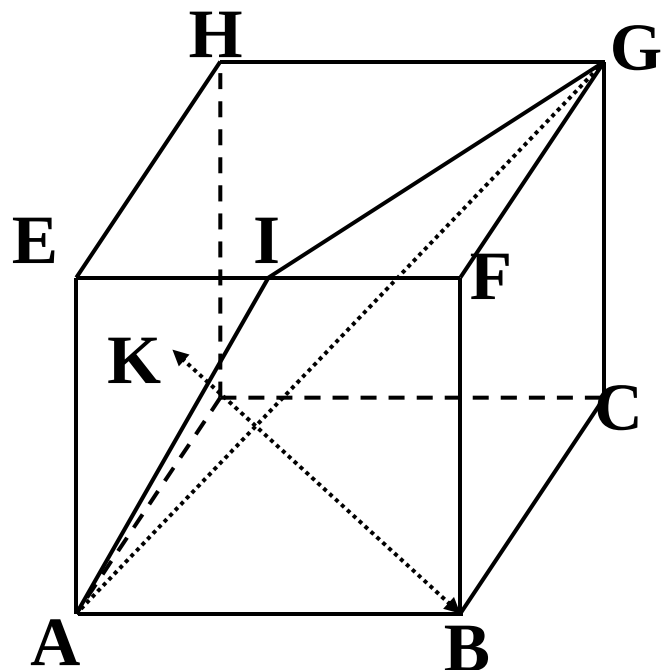
ក. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \times \overrightarrow{IA}$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃ ΔIGA ។

ខ. គណនាមាឌតេត្រាអែត $ABIG$ រួចទាញរកចំងាយពីចំនុច B ទៅប្លង់ (AIG) ។

ដំណោះស្រាយ

ក-ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \times \overrightarrow{IA}$

ក្នុងលំហ $\left(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE} \right)$



លំហាត់ចរណ៍មាត្រថ្នាក់ទី១២

គេមាន ៖

$$A(0,0,0) , B(1,0,0) , C(1,1,0) , D(0,1,0)$$

$$E(0,0,1) , F(1,0,1) , G(1,1,1) , H(0,1,1)$$

ដោយ I ជាចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ [EF] គេបាន

$I\left(\frac{0+1}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{1+1}{2}\right)$ ឬ $I\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$ និង K ជាផ្ចិតកាតេ ADHE នោះវាជា
ចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ [AH]

$$\text{គេបាន } K\left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{0+1}{2}\right) \text{ ឬ } K\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ ។}$$

$$\text{យើងបាន ៖ } \overrightarrow{BK} = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (1)$$

$$\text{ហើយ } \overrightarrow{IG} = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right) , \overrightarrow{IA} = \left(-\frac{1}{2}, 0, -1\right) \text{ គេបាន ៖}$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

$$\overrightarrow{\text{IG}} \times \overrightarrow{\text{IA}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{AB}} & \overrightarrow{\text{AD}} & \overrightarrow{\text{AE}} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{IG}} \times \overrightarrow{\text{IA}} = -\overrightarrow{\text{AB}} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{\text{AD}} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{\text{AE}}$$

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{\text{IG}} \times \overrightarrow{\text{IA}} \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad (2)$$

$$\text{តាម (1) និង (2) គេបាន } \overrightarrow{\text{BK}} = \overrightarrow{\text{IG}} \times \overrightarrow{\text{IA}} \quad \text{។}$$

គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ IGA ៖

$$\begin{aligned} \text{តាមរូបមន្ត } S_{\text{IGA}} &= \frac{1}{2} \cdot \left\| \overrightarrow{\text{IG}} \times \overrightarrow{\text{IA}} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \overrightarrow{\text{BK}} \right\| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{4} \text{ ឯកតាផ្ទៃ។} \end{aligned}$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ខ. គណនាមាឌតេត្រាអែត ABIG ៖

$$\text{តាមរូបមន្ត } V_{ABIG} = \frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{IG} \times \overrightarrow{IA} \right) \cdot \overrightarrow{IB} \right|$$

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{IB} = \left(\frac{1}{2}, 0, -1 \right) \text{ និង } \overrightarrow{IG} \times \overrightarrow{IA} = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{គេបាន } V_{ABIG} = \frac{1}{6} \cdot \left| -\frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{6} \text{ ឯកត្តាមាឌ ។}$$

រកចំងាយពីចំណុច B ទៅប្លង់ (AIG) ៖

$$\text{តាមរូបមន្ត } V_{ABIG} = \frac{1}{3} \cdot S_{IGA} \times d(B, (AIG))$$

$$\text{នាំអោយ } d(B, (AIG)) = \frac{3V_{ABIG}}{S_{IGA}}$$

$$\text{ដូចនេះ } d(B, (AIG)) = \frac{3 \cdot \frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ ។}$$

លំហាត់ទី២៤

ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ គេមាន
បីចំណុច $A(0,6,0)$, $B(0,4,2)$ និង $C(2,0,5)$ ។

ក. ចូរសង់ចតុមុខ $OABC$ ។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃត្រី
កោណ ABC ។

គ. គណនា $\left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \right) \cdot \overrightarrow{OC}$ រួចទាញរកមាឌនៃចតុមុខ $OABC$ ។

ឃ. ទាញរកចំងាយពីចំណុច O ទៅប្លង់ (ABC) ។

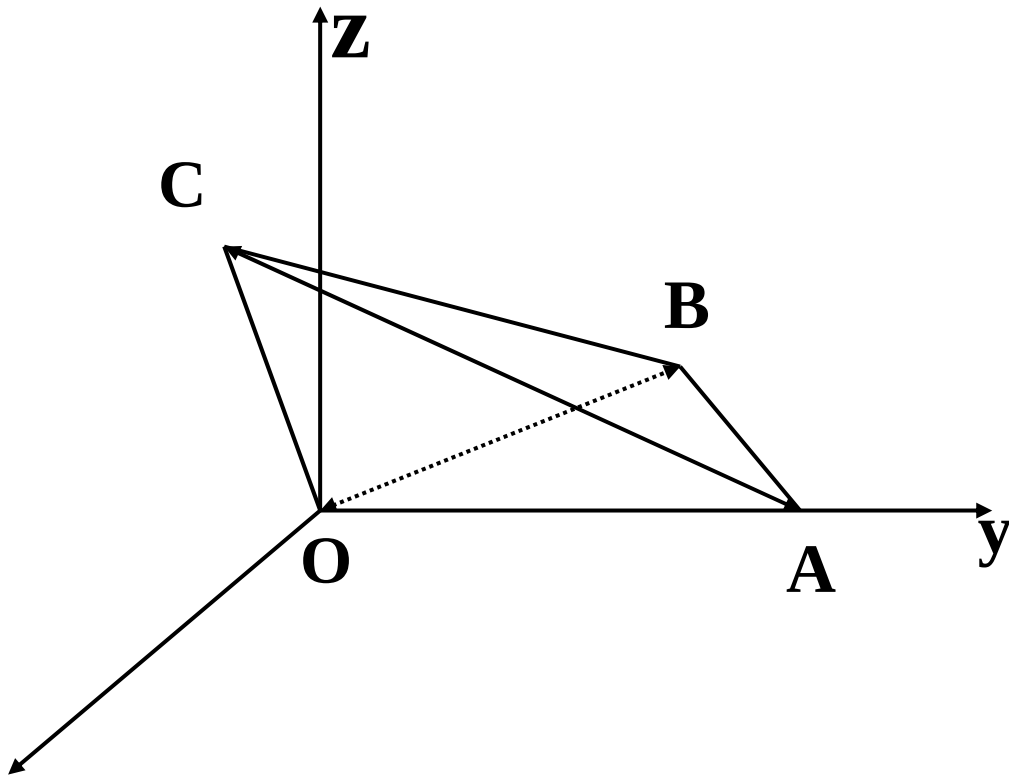
ង. សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សង់ចតុមុខ $OABC$

$A(0,6,0)$, $B(0,4,2)$ និង $C(2,0,5)$

លំហាត់ចរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២



ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} :$

គេមាន $\overrightarrow{AB} = (0, 2, -2)$ និង $\overrightarrow{AC} = (2, -6, 5)$

គេបាន $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -6 & 5 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2, -4, -4)$ ។

លំហាត់អនេក្លីមាត្រថ្នាក់ទី១២

គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ៖

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = 3 \text{ ។}$$

ដូចនេះ $S_{ABC} = 3$ ឯកតាផ្ទៃ ។

គ.គណនា $\left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \right) \cdot \overrightarrow{OC}$ ៖

គេមាន $\overrightarrow{OA} (0,6,0)$, $\overrightarrow{OB} (4,2,0)$, $\overrightarrow{OC} (2,0,5)$

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 0\vec{j} - 24\vec{k} = -24\vec{k}$$

ដូចនេះ $(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} = -24 \cdot 5 = -120$ ។

ទាញរកមាឌនៃចតុមុខ $OABC$ ៖

$$\text{តាមរូបមន្ត } V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot \left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \right) \cdot \overrightarrow{OC}$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

$$\text{ដូចនេះ: } V_{OABC} = \frac{1}{6} \times 120 = 20 \text{ ឯកតាមាឌ។}$$

យ. ទាញរកចំងាយពីចំនុច O ទៅប្លង់ (ABC) ៖

តាង $d(O, (ABC))$ ជាចំងាយពីចំនុច O ទៅប្លង់ (ABC) នាំឱ្យវាជា

កំពស់នៃ ចតុមុខ OABC ។

$$\text{តាមរូបមន្ត } V_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \times d(O, (ABC)) \text{ ។}$$

$$\text{នាំឱ្យ } d(O, (ABC)) = \frac{3 \cdot V_{OABC}}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot 20}{3} = 20 \text{ ឯកតាប្រវែង។}$$

ង. សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ៖

តាង $\vec{n}$ ជារ៉ឺចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) នាំឱ្យ

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} (-2, -4, -4)$$

$$\text{តាមរូបមន្ត (ABC): } a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$(ABC): -2(x - 0) - 4(y - 6) - 4(z - 0) = 0$$

$$(ABC): x + 2y + 2z - 12 = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } (ABC): x + 2y + 2z - 12 = 0 \text{ ។}$$

លំហាត់ទី២៥

ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$

គេឲ្យបួន ចំនុច $A(0,0,2)$, $B(2,0,1)$, $C(2,2,3)$ និង $D(0,2,4)$ ។

ក. ដោយចំនុច A, B, C និង D រួចបង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ គណនាក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ។

គ. សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L) កែងនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ D ។

ឃ. កំនត់កូអរដោនេនៃចំនុច E បើគេដឹងថា $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right)$

ង. គណនាមាឌរបស់ព្រិសត្រង់ដែលមានកំពស់ $[AE]$ និងបាតជាចតុកោណ $ABCD$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ដោយចំនុច A, B, C និង D រួចបង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជា
ប្រលេឡូក្រាម ៖

$$A(0,0,2) , B(2,0,1) , C(2,2,3) \text{ និង } D(0,2,4)$$

$$\text{គេមាន } \overrightarrow{AB} (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

$$\text{និង } \overrightarrow{CD} (x_D - x_C, y_D - y_C, z_D - z_C)$$

$$\text{នាំឱ្យ } \overrightarrow{AB} = (2, 0, -1) \text{ និង } \overrightarrow{DC} = (2, 0, -1)$$

$$\text{ដោយ } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ (កូអរដោនេដូចគ្នា)}$$

ដូចនេះ ចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

គេបាន $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2.\vec{i} - 4.\vec{j} + 4.\vec{k}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (-2, -4, 4)$ ។

តាមរូបមន្តក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម ABCD ៖

$$S_{ABCD} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (4)^2} = 6 \text{ (ឯកតាក្រឡាផ្ទៃ) ។}$$

គ.សមីការប្លង់(ABC)និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ(L) កែងនឹងប្លង់(ABC)

ត្រង់ D ៖

ដោយ ABCD ជាប្រលេឡូក្រាមនោះបួនចំនុច A,B,C,D នៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

តាង $\overrightarrow{n}$ ជារ៉ឺចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) នោះគេបាន

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} (-2, -4, 4)$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

សមីការប្លង់ (ABC) អាចសរសេរតាមរូបមន្ត ៖

$$(ABC): a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$(ABC): -2(x - 0) - 4(y - 0) + 4(z - 4) = 0$$

$$(ABC): -2x - 4y + 4z - 16 = 0$$

$$(ABC): -x - 2y + 2z - 8 = 0$$

ម្យ៉ាងទៀតតាង $\vec{u}$ ជារ៉ឺចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (L) កែងនឹងប្លង់(ABC)

ត្រង់ D ៗ គេបាន $\vec{u} = \vec{AB} \times \vec{AD} = (-2, -4, 4)$

$$\text{តាមរូបមន្ត (L):} \begin{cases} x = x_D + at \\ y = y_D + bt \\ z = z_D + ct, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ: (L):} \begin{cases} x = -2t \\ y = 2 - 4t \\ z = 4 + 4t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

យ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច E បើគេដឹងថា $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right)$

តាង $E(x_E, y_E, z_E)$ ។ គេមាន $\overrightarrow{AE} = (x_E, y_E, z_E - 2)$

និង $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (-2, -4, 4)$

ដោយ $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right)$ នាំឱ្យ $\begin{cases} x_E = -1 \\ y_E = -2 \\ z_E - 2 = 2 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x_E = -1 \\ y_E = -2 \\ z_E = 4 \end{cases}$

ដូចនេះ $E(-1, -2, 4)$ ។

ជំពូកទី៤

លំហាត់អនុវត្តន៍

1-គេឲ្យចតុមុខ $ABCD$ មួយមានទ្រនុងទាំង៦ សុទ្ធតែស្មើគ្នា ។

គេតាង A' ជាចំណោលកែងនៃចំនុច A ទៅលើប្លង់បាត (BCD)

ហើយ $O \in [AA']$ ដែល $OA = OB = 3.OA' = x > 0$ ។

ក-ចូរគណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

ខ-គណនាតម្លៃ $\cos \angle AOB$ រួចទាញរកប្រវែង AB ជាអនុគមន៍នៃ x

2-ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

គេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ ដែល $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$ ។

ក-ចូរសង់វ៉ិចទ័រ $\vec{a}$ រួចគណនាប្រវែង $|\vec{a}|$ ។

ខ-គេតាង α, β, γ រៀងគ្នាជាមុំរវាង $\vec{a}$ ជាមួយអ័ក្ស $(ox), (oy), (oz)$ ។

ចូរគណនា $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ រួចផ្ទៀងផ្ទាត់ $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

3-ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច

$A(1,2,3), B(0,3,-1)$ និង $C(2,2,-1)$ និង $D(-4,1,-5)$ ។

ក-បង្ហាញថា $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ។

ខ-ចូររកកូអរដោនេ H ជាជើងនៃកម្ពស់របស់តេត្រៃអ៊ែត $ABCD$

គូសពី A ។

4-ក្នុងប្លង់ (π) គេមានរង្វង់ (Γ) មានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$ ហើយ $M \in (\Gamma)$ ។

គេយក S ជាចំណុចមួយស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (Δ) ដែលកែងនឹងប្លង់

(π) ត្រង់ A ។ ចំពោះគ្រប់ចំណុច $M \in (\Gamma)$ ចូរស្រាយថា $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ ។

5-ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យបីចំណុច

$A(2,1,3), B(-1,4,2)$ និង $C(5,4,-2)$ ។

ក-ចូរកំណត់កូអរដោនេ G ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃ $\triangle ABC$

ខ-កំណត់កូអរដោនេចំនុច D ដើម្បីឲ្យ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

គ-កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច E ចែកក្រៅនៃអង្កត់ [DG]

តាមផលធៀប $\lambda = \frac{1}{3}$ ។

6-ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឱ្យបីចំណុច

$A(-2, 1, 3), B(1, 7, -3), C(9, -1, -7)$ ។

ក-បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ B រួចគណនាផ្ទៃសម្របជ្រុងរបស់វា ។

ខ-កំណត់ចំណុច D ដោយដឹងថា ABCD ជាចតុកោណកែង ។

គ-គេឱ្យចំនុច $E(4, 4, 9)$ ។ ចូរស្រាយថា (AE) អរតូកូណាលើនឹងប្លង់ (ABCD) ។

ឃ-គណនាមាឌព្រិសត្រង់ដែលមានបាត ABCD និងកំពស់ AE ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

7-គេឲ្យចំនុចបី $A(2,a,b), B(a+2,-1,3), C(4,a+2,b+1)$

ដែល a, b ជាចំនួនពិត ។

កំណត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឲ្យ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាត

កំពូល A ។

8-ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យចំណុច

$A(6,4,-2), B(6,2,0), C(4,2,-2)$ ។

ក-បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

ខ-គេឲ្យចំណុច $S(3,p,q)$ ជាកំពូលនៃពីរ៉ាមីតនិយត្តិ $SABC$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃនៃ p និង q រួចគណនាមាឌនៃពីរ៉ាមីតនេះ ?

9-គេឲ្យប្លង់ $(P): 2x - 3y + 6z + 19 = 0$ និងចំណុច $A(-2,4,3)$ ។

ក-ចូររកសមីការនៃប្លង់ $(Q) // (P)$ ដោយដឹងថា $A \in (Q)$ ។

ខ-គណនាចម្ងាយរវាងប្លង់ (P) និង (Q) ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

10-គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ $(L_1): \frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-1}{2}$ និង $(L_2): \frac{x+2}{2} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z+9}{6}$

ក-ចូរបង្ហាញថា $(L_1) \perp (L_2)$ ។

ខ-គណនាកូអរដោនេចំណុច A ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L_1) & (L_2)

11-គេឲ្យបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) មានសមីការរៀងគ្នាខាងក្រោម

$$(L): \frac{x-3}{-2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+5}{-1} \quad \text{និង} \quad (P): x - 4y - z - 1 = 0$$

ក-គណនាកូអរដោនេចំណុច A ជាប្រសព្វរវាង (L) និងប្លង់ (P) ។

ខ-រកសមីការនៃប្លង់ (Q) កែងនឹងបន្ទាត់ (L) ត្រង់ចំណុច A ។

គ-គណនារង្វាស់មុំរវាងប្លង់ (P) និង (Q)

12-គេឲ្យប្លង់ពីរ $(P): x + 4y - z - 3 = 0$ និង $(Q): x - 2y + 2z - 6 = 0$

ក-គណនារង្វាស់មុំរវាងប្លង់ (P) និង (Q) ។

ខ-ចូរកំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់

គ-កំណត់កូអរដោនេចំណុច A មានអាប់ស៊ីស $x_A = 2$ ក្នុងប្លង់
(P) និង (Q) ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

13-គេមានបន្ទាត់ពីរ $(L_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{-2}$

និង $(L_2): \frac{x+2}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{-1}$ ។

ក-ចូរបង្ហាញមិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ ។

ខ-គេដឹង $A \in (L_1)$ មានអាប់ស៊ីស $x_A = 3$ ហើយ H ជាចំណោល

កែងនៃ A លើបន្ទាត់ (L_2) ។

ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃ A និង H រួចទាញរក AH ។

គ-ស្រាយថា (AH) ជាបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) ។

ឃ-សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AH) រួចទ្រាកសមីការឆ្លុះ
របស់វា។

14-គេឲ្យបន្ទាត់ $(L): \frac{x-3}{-1} = \frac{y+6}{4} = \frac{z-5}{-1}$ និងប្លង់ $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$

ក-កំណត់មុំស្រួចដែលផ្គុំដោយបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) ។

ខ-រកកូអរដោនេចំណុច A ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P)

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

គ-រកសមីការទូទៅរបស់បន្ទាត់ (Δ) កាត់តាម A ហើយកែងនឹង (L)

នៅក្នុង (P) ។

15-គេឲ្យបីចំណុច $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$ នៅក្នុងតម្រុយអរតូ

ណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែលមាឌកតា 1cm នៅលើអ័ក្ស ។

ក-ចូរដៅចំណុច A, B, C រួចកំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

ខ-តាង H ជាជើងនៃចំណោលកែងចំណុច O លើប្លង់ (ABC) ។

គណនា OH ។

គ-ចូរស្រាយថា $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ ។

16-នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យពីរចំណុច

$A(0,0,-3)$ និង $B(2,0,-1)$ ។ (P) ជាប្លង់មួយមានសមីការ

$$-3x + 8y - 7z + 1 = 0 \quad \text{។}$$

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ក-តាង P ជាចំនុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (AB) និងប្លង់ (P) ។

រកកូអរដោនេនៃ P ។

ខ-តាង $Q \in (P)$ ដៃតម្រូវឲ្យ $\triangle ABC$ សមង្ស័យ ។ រកកូអរដោនេនៃ Q ។

17-គេឲ្យចតុមុខ $SABC$ មានបាតជាត្រីកោណ ABC ។

តាង G ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ ABC ។

ក-ចូរស្រាយថា $\overrightarrow{SG} = \frac{\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}}{3}$ ។

ខ-គេដឹងថា $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ ជារ៉ឺចទ័រអរតូកូណាល់គ្នាពីរៗ

ហើយ $|\overrightarrow{SA}| = |\overrightarrow{SB}| = 4$ និង $|\overrightarrow{SC}| = 7$ ។

គណនា $|\overrightarrow{SG}|$ និងរង្វាស់ជ្រុងនៃ $\triangle ABC$ ។

18-នៅក្នុងលំហគេឲ្យពីរចំណុចនឹង A និង B ដែល $AB = 8\text{cm}$ ។

យក I ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[AB]$ ។

ក-គ្រប់ចំណុច M នៃលំហចូរស្រាយថា $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ខ-កំណត់សំណុំចំណុច M ដើម្បីឲ្យ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 9$ ។

គ-កំណត់សំណុំចំណុច M ដើម្បីឲ្យ $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$ ។

19-គេឲ្យតេត្រាអែត $ABCD$ មួយ ។

ក-ចូរស្រាយថា $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ ។

ខ-បើ $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}$ និង $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$ នោះបង្ហាញថា $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ ។

20-នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឲ្យប្លង់

$(P): 2x - 3y - 6z + 17 = 0$ និងស្វ៊ែរ $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y + 4z - 25 = 0$

ក-ចូរកំណត់កូអរដោនេផ្ចិត និង ការបស់ស្វ៊ែរ (S) ។

ខ-ស្រាយថាប្លង់ (P) ប៉ះនឹងស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ចំណុច A មួយ ។

គ-គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ A ខាងលើ ។

21-ចូរកំណត់សមីការស្វ៊ែរចារឹកក្រៅតេត្រាអែត $ABCD$ មួយដែល

មានកំពូល $A(2,1,4); B(3,-2,1); C(1,-1,5)$ និង $D(-1,-1,3)$ ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

22-ក្នុងលំហាគេឲ្យបន្ទាត់ (L): $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+3}{2}$

និងស្វ៊ី (S): $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9$ ។

ក-គណនាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ P និង Q រវាងបន្ទាត់(L) និងស្វ៊ី (S) ។

ខ-ចូរកំណត់សមីការប្លង់ (P) និង (Q) ដែលប៉ះនឹងស្វ៊ី(S)ត្រង់P និង Q ។

គ-បង្ហាញថា (P) //(Q) រួចគណនាចម្ងាយរវាងប្លង់P និង Q ។

23-គេឲ្យបន្ទាត់ (L): $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-8}{4}$ និងចំណុច I(2,1,2) ។

ក-តាង Hជាចំណោលកែងនៃចំណុច I លើបន្ទាត់ (L) ។

កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច H រួចទាញរកចម្ងាយពីចំណុច I ទៅបន្ទាត់ (L) ។

ខ-រកសមីការស្វ៊ី (S) មានផ្ចិត I ហើយប៉ះនឹងបន្ទាត់ (L) ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

គ-រកសមីការប្លង់ទាំងអស់ដែលកែងនឹងបន្ទាត់ (L) ហើយប៉ះ

នឹងស្វែ (S) ។

24-គេឲ្យបន្ទាត់ $(L_1): \frac{x-5}{-4} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-3}{-1}$ និង $(L_2): \frac{x-9}{-6} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{4}$

ក-ចូរបង្ហាញថាបន្ទាត់ $(L_1) \& (L_2)$ គ្មានចំណុចរួម ។

ខ-សរសេរសមីការបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ $(L_1) \& (L_2)$ ។

គ-រកសមីការស្វែដែលមានកាំតូចបំផុតហើយប៉ះទៅនឹងបន្ទាត់

$(L_1) \& (L_2)$ ។

ឃ-រកសមីការប្លង់ស្របទៅនឹង $(L_1) \& (L_2)$ និងមានចម្ងាយស្មើទៅ

$(L_1) \& (L_2)$

25-គេឲ្យប្លង់ (P): $x - 2y + 2z + 6 = 0$ និងបន្ទាត់ (L):
$$\begin{cases} x = -2 - 5t \\ y = -t \\ z = 7 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

ក-រកកូអរដោនេចំណុច M ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

ខ-រកសមីការស្វ៊ែរកាំ $R=3$ មានផ្ចិតនៅលើបន្ទាត់(L) ហើយប៉ះនឹងប្លង់(P) ។

26-ចូររកសមីការស្វ៊ែរ(S) មានផ្ចិត $I(1,2,3)$ ហើយប៉ះនឹងប្លង់

(P): $2x + 2y + z - 6 = 0$ ត្រង់ចំណុច A រួចគណនាកូអរដោនេនៃ

ចំណុច A ។

27-ចូររកសមីការស្វ៊ែរ (S) មានកាំ $R=3$ ហើយប៉ះនឹងប្លង់

(P): $x + 2y + 2z - 4 = 0$ ត្រង់ចំណុច A មានអាប់ស៊ីស $x_A = 2$ និង

អរដោនេ $y_A = -3$ ។

28-ចូររកសមីការស្វ៊ែរ (S') មានផ្ចិត $I(2,-1,1)$ ហើយប៉ះខាងក្រៅទៅ

នឹងស្វ៊ែរ (S) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 10z + 18 = 0$ ត្រង់ចំណុច A រួច

កំណត់កូអរដោនេ A ។

លំហាត់ធរណីមាត្រថ្នាក់ទី១២

29-ចូររកសមីការស្វ័យ (S) មានផ្ចិត $I(2,3,5)$ ដែលប្រសព្វនឹងប្លង់ (P)

មានសមីការ $2x - 3y + 6z + 3 = 0$ បានរង្វង់មួយមានអង្កត់ផ្ចិត $d = 6$

30-គេឲ្យបន្ទាត់ (L): $\begin{cases} x = t \\ y = -6 + 5t \\ z = 7 + 3t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$ និងប្លង់ (P): $2x + 2y - z - 5 = 0$

(Q): $x - 2y - 2z - 4 = 0$ ។

ចូរកំណត់សមីការស្វ័យ (S) មានផ្ចិតនៅលើបន្ទាត់

(L) ហើយប៉ះរួមទៅនឹងប្លង់ (P) និង (Q) ទាំងពីរខាងលើ ។