សាកលវិទ្យាល័យ ឯកទេស នៃកម្ពុជា

CAMBODIAN UNIVERSITY FOR SPECIALTIES

Your route to the top

មុខវិជ្ជា:

វិភាគអថេរកុំផ្លិច

រៀបរៀងដោយ៖ អោ មណីចន្ធា

សម្រាប់ថ្នាក់ បរិញ្ញាបត្រ

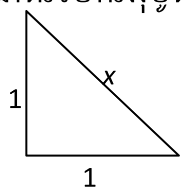
ឆ្នាំសិក្សា ២០១៩-២០២០

មាតិកា

ចំណងជើង	ទំព័រ
មាតិកា	i
សេចក្តីផ្តើម	1
តារាងឈ្មោះអក្សរឡាតាំង	2
និម្មិតសញ្ញា	3
មេរៀនទី ១ ប្លង់កុំផ្លិច	5
មេរៀនទី ២ ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពិជគណិត	10
មេរៀនទី ៣ ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ	16
មេរៀនទី ៤ អនុវត្តន៍ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងធរណីមាត្រ	28
មេរៀនទី ៥ ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងលោការីត	36
មេរៀនទី ៦ អនុគមន៍អថេរកុំផ្លិច	50
មេរៀនទី ៧ លីមីតនៃអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិច	60
មេរៀនទី ៨ ដេរីវេនៃអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិច	63
មេរៀនទី ៩ អនុគមន៍វិភាគនៃអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិច	67
មេរៀនទី ១០ អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិច	72
លំហាត់ស្រាវជ្រាវ	83
ឯកសារយោង	

សេចក្តីផ្តើម

ពីឆ្នាំ $500-275$ មុនគ.ស ទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ បានបន្សល់ទុកនូវសមីការ $x^2=2$ (1) ។ ដោយហេតុថាត្រីកោណកែងមួយដែលមានជ្រុងជាប់នឹងមុំកែងមានរង្វាស់ស្មើ1ឯកតាដូចគ្នា។តើត្រីកោណនេះមានអ៊ីប៉ូតេនុសប្រវែងប៉ុន្មាន ?



តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ គេបាន $x^2=2$ (1) មិនមានចម្លើយជាចំនួនសនិទានទេ។ បើសមីការ (1)មានចម្លើយនោះប្រភេទថ្មីមួយនៃចំនួនត្រូវប្រឌិតឡើងហៅថាចំនួនអសនិទាន ។ ចំនួនអសនិទាន $\sqrt{2}$ និង $-\sqrt{2}$ ជាចម្លើយទាំងពីរនៃសមីការ ។

ចំនួនអសនិទានមិនត្រូវបានដាក់ទៅក្នុងមូលដ្ឋាននៃគណិតវិទ្យាទេ រហូតដល់សតវត្សចុងក្រោយទើបត្រូវបានគេស្គាល់ ។ ចំនួនសនិទាន និងចំនួនអសនិទានទាំងពីរនេះ បង្កើតបានជាប្រព័ន្ធនៃចំនួនពិត ។

តើវាត្រូវមានប្រព័ន្ធចំនួនផ្សេងទៀតឬទេ ដែលនឹងត្រូវបានបង្កើតឡើង? វាសំខាន់ណាស់សម្រាប់ដោះស្រាយសមីការ $x^2=-1$ឱ្យមានចម្លើយ។ បើ xគឺជាចំនួនពិតនោះ$x^2\geq 0$។ នោះសមីការ $x^2=-1$ មិនមានចម្លើយជាចំនួនពិតទេនោះចំនួនថ្មីត្រូវតែបង្កើតឡើងគឺចំនួនដែលមានការអោចជាចំនួនអវិជ្ជមាន ដែលត្រូវបានគេហៅថាចំនួនកុំផ្លិច។ ចំនួនកុំផ្លិចបានធ្វើការវិវត្តក្នុងអំឡុងពេលយ៉ាងយូរប៉ុន្តែដូចប្រព័ន្ធនៃចំនួនពិតដែរតែនៅទីបំផុតគេនៅតែទទួលស្គាល់ប្រព័ន្ធចំនួនកុំផ្លិចនេះ។

<u>តារាងសង្ខេបនៃប្រវត្តិចំនួនកុំផ្លិច</u>

ឆ្នាំ	ឈ្មោះអ្នកប្រាជ្ញ	ព្រឹត្តិការណ៍
50	***Heron of Alexandria***	មនុស្សដំបូងដែលកត់ត្រាពីការជួបប្រទះនូវឫសការេនៃចំនួនអវិជ្ជមាន ។
850	***Mahavira of India***	បាននិយាយថា ចំនួនអវិជ្ជមានមិនមានឫសការេព្រោះវាមិនមែនជាការេ ។
1545	***Cardano of Italy***	ចម្លើយនៃសមីការដឺក្រេទី **3** បានរាប់បញ្ចូលឫសការេនៃចំនួនអវិជ្ជមាន ។
1637	***Discartes of France***	បានប្រកាសពីក្រុមនៃចំនួនពិត និងចំនួននិមិត្ត ។
1748	***Euler of Switzerland***	បានប្រើ i សម្រាប់ $\sqrt{-1}$ ។
1832	***Gauss of Germany***	បានប្រកាសពីក្រុមនៃចំនួនកុំផ្លិច ។

ដោយសារតែការបង្កើតចំនួននិម្មិត និងចំនួនកុំផ្លិចនេះហើយទើបបណ្តាលឲ្យវិទ្យាសាស្ត្ររីកចម្រើនដល់សព្វថ្ងៃ។ ចំនួនកុំផ្លិចត្រូវបានគេអភិវឌ្ឍន៍វានៅក្នុងវិស័យអេឡិចត្រូនិច អេឡិចត្រូម៉ាញ៉េទិចដែលធ្វើឲ្យវិទ្យាសាស្ត្រ និងបច្ចេកវិទ្យាមានសន្ទុះរីកចម្រើនកាន់តែខ្លាំង ។

តារាងឈ្មោះអក្សរឡាតាំង

អក្សរធំ	អក្សរតូច	ឈ្មោះជាភាសាអង់គ្លេស	ឈ្មោះជាភាសាខ្មែរ	សមមូល
Α	α	***Alpha***	អាល់ហ្វា	***A***
Β	β	***Beta***	បែតតា	***B***
Γ	γ	***Gamma***	ហ្គាម៉ា	***G***
Δ	δ	***Delta***	ដែលតា	***D***
Ε	ε	***Epsilon***	អែបស៊ីឡោន	***E***
Ζ	ζ	***zeta***	ហ្សែតា	***Z***
Η	η	***Eta***	អែតា	***E***
Θ	θ	***Theta***	តែតតា	***Th***
Ι	ι	***Iota***	អ៊ីអូតា	***I***
Κ	κ	***Kappa***	កាបប៉ា	***K***
Λ	λ	***Lambda***	ឡាមដា	***L***
Μ	μ	***Mu***	មុយ	***M***
Ν	ν	***Nu***	នុយ	***N***
Ξ	ξ	***Xi***	ហ្ស៊ី	***X***
Ο	o	***Omicron***	អូមីក្រុន	***O***
Π	π	***pi***	ពី	***P***
Ρ	ρ	***Rho***	រ៉ូ	***R***
Σ	σ	***Sigma***	សិចម៉ា	***S***
Τ	τ	***Tau***	តូ	***T***
Υ	υ	***Upsilon***	អាប់ស៊ីឡោន	***U***
Φ	φ	***Phi***	ហ្វី	***Ph***
Χ	χ	***Chi***	ឈី	***Ch***
Ψ	ψ	***Psi***	ស៊ី	***Ps***
Ω	ω	***Omega***	អូមេហ្គា	***O***

និម្មិតសញ្ញាចំនួនកុំផ្លិច

(*Sign of Complex Number*)

និមិត្តសញ្ញា	អត្ថន័យ
$\mathbb{N}$	សំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\{1, 2, 3, 4, ...\}$
$\mathbb{Z}$	សំណុំចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$
$\mathbb{Q}$	សំណុំចំនួនសនិទាន $\left\{x \mid x = \frac{p}{q} \ , \ p \in \mathbb{Z} \ , \ q \in \mathbb{Z} \ , \ q \neq 0\right\}$
$\mathbb{R}$	សំណុំចំនួនពិត $(-\infty , +\infty)$
$\mathbb{C}$	សំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\{z \mid z = a + ib \ , \ a \in \mathbb{R} \ , \ b \in \mathbb{R}\}$
$\mathrm{Re}(z)$	ផ្នែកពិតនៃចំនួនកុំផ្លិច z
$\mathrm{Im}(z)$	ផ្នែកនិម្មិតនៃចំនួនកុំផ្លិច z
$\overline{z}$	ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z
$\lvert z \rvert$	តម្លៃដាច់ខាត ឬ ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច z
$\arg(z)$	អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច z
$M(z)$	ចំណុច M ជារូបភាពនៃកុំផ្លិច z
$\overrightarrow{OM}(z)$	វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}$ ជារូបភាពនៃកុំផ្លិច z
$[AB]$	អង្កត់ AB
AB ឬ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	ប្រវែងអង្កត់ ឬ ប្រវែងវ៉ិចទ័រ AB
$\Rightarrow$	ឈ្នាប់នាំឲ្យ
$\Leftrightarrow$	ឈ្នាប់សមមូល
$<$	តូចជាង
$\leq$	តូចជាង ឬ ស្មើ
$>$	ធំជាង
$\geq$	ធំជាង ឬ ស្មើ
$\neq$	មិនស្មើនឹង , ខុសពី
$\pm$	បូក ឬ ដក
$\in$	ជារបស់
$\notin$	មិនមែនជារបស់
$\forall$	បរិមាណករគ្រប់
$\exists$	បរិមាណករមាន

$\therefore$	ហេតុនេះ , ដូចនេះ
$\because$	ពីព្រោះ , មកពី
(a,b)	ចន្លោះបើកសងខាង $a<x<b \Leftrightarrow (a\ ,\ b)$
$(a,b]$	ចន្លោះបើកខាងឆ្វេង $a<x\le b \Leftrightarrow (a\ ,\ b]$
$[a,b)$	ចន្លោះបើកខាងស្តាំ $a\le x<b \Leftrightarrow [a\ ,\ b)$
$[a,b]$	ចន្លោះបិទសងខាង $a\le x\le b \Leftrightarrow [a\ ,\ b]$
$\max(z)$	តម្លៃអតិបរមានៃចំនួនកុំផ្លិច z
$\min(z)$	តម្លៃអប្បបរមានៃចំនួនកុំផ្លិច z
$!$	សញ្ញាហ្វាក់តូរ្យែល $n!=1\times 2\times 3\times ...\times n$
$\binom{n}{r}, C_n^r$	បន្សំនៃ n ធាតុដកយកម្តង r ធាតុ
$\sum$	និម្មិតសញ្ញាផលបូក $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$
π	ពី ឬ ផៃ $\pi = 3.1415926536...$
e	គោលនៃលោការីតធម្មជាតិ $e = 2.7182818285...$
$\log_a x$	លោការីតគោល a នៃ x
$\ln x$	លោការីតនេពែរ ឬលោការីតគោល e នៃ x
$\log x$	លោការីតទសភាគ ឬលោការីតគោល 10 នៃ x
$i.e$	បើ
$\int_{C^+}$	អាំងតេក្រាលក្នុងប្លង់កុំផ្លិចតាមទិសដៅវិជ្ជមាន
$\int_{C^-}$	អាំងតេក្រាលក្នុងប្លង់កុំផ្លិចតាមទិសដៅអវិជ្ជមាន
$\oint_{C^+}$	អាំងតេក្រាលក្នុងប្លង់កុំផ្លិចដែលមានខ្សែដែនបិទជិត

មេរៀនទី១

ប្លង់កុំផ្លិច

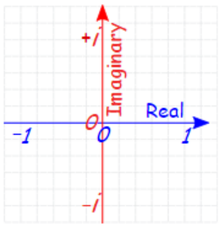
The Complex Plane

I. សេចក្តីផ្តើម (Introduction)

ក.ផ្នែកពិត និងផ្នែកនិមិត្តបង្កើតបានជាចំនួនកុំផ្លិច

ចំនួនកុំផ្លិច គឺជាការផ្សំរវាងចំនួនពិតមួយ និងចំនួននិមិត្តមួយ។

ចំនួនពិតគឺជាប្រភេទនៃចំនួនដែលយើងប្រើជារៀងរាល់ថ្ងៃ។



A **plane** for **complex** numbers!

ឧទាហរណ៍៖ $12.38\,,\ \frac{1}{2}\,,0\ ,-2000$

ពេលយើងលើកចំនួនពិតជាការេយើងទទួលបានចំនួនវិជ្ជមាន ឬសូន្យដូចជា៖

$2^2 = 2\times 2 = 4$

$1^2 = 1\times 1 = 1$

$0^2 = 0\times 0 = 0$

តើយើងអាចលើកចំនួនប៉ុន្មានជាការេដើម្បីបាន -1? $?^2 = -1$

ការេស្មើ -1 មិនមានទេព្រោះ ផលគុណនៃចំនួនអវិជ្ជមានបានចំនួនវិជ្ជមាន $(-1)\times(-1) = +1$ ហើយគ្មានចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ចំនួននេះឡើយ។

ដូច្នេះ ហាក់ដូចជាគណិតវិទ្យាគឺមិនពេញលេញ ប៉ុន្តែយើងអាចបំពេញចន្លោះនេះដោយការនិមិត្ត មានចំនួន មួយដែលផលគុណខ្លួនវាស្មើ -1 ហៅថា ចំនួននិមិត្ត i: $i^2 = -1$។ ចំនួននិមិត្តពេលលើកជាការេវាឱ្យលទ្ធផលជាចំនួនអវិជ្ជមាន: $imaginary^2 \to negative$

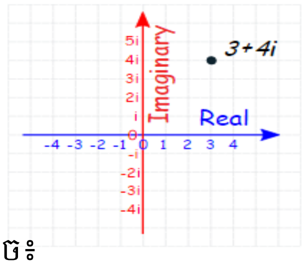
ឧទាហរណ៍ ៖ $5i, -3.6i\ ,\ i/2\ ,\ 500i$

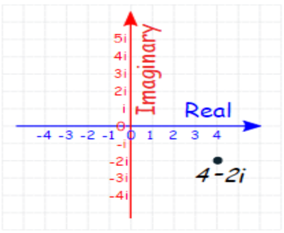
ជារួមមក ចំនួនកុំផ្លិចគឺជាការរួមបញ្ចូលគ្នានៃចំនួនពិត និងចំនួននិមិត្ត ។

ឧទាហរណ៍៖ $3.6+4i\ ,\ -0.02+1.2i\ ,\ 25-0.3i\ ,0+2i$

ខ. ដៅចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច Putting a Complex on a Plane

ឧទាហរណ៍៖ ដៅចំនុច $3+4i\ ,\ 4-2i$ ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច



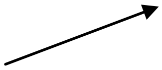


វាជាប្លង់កុំផ្លិច៖

- កុំផ្លិចព្រោះវាជាការរួមបញ្ចូលនៃផ្នែកពិតនិងនិមិត្ត
- ប្លង់ព្រោះវាដូចជាប្លង់ធរណីមាត្រ (ពីរវិមាត្រ)

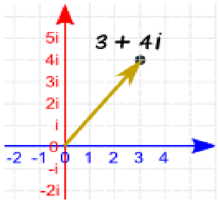
គ.លក្ខណៈប្លង់

i. ចំនួនកុំផ្លិចជាវ៉ិចទ័រ Complex Number as a Vector



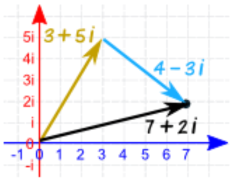
យើងអាចគិតចំនួនកុំផ្លិចជាវ៉ិចទ័រៈ វាមានប្រវែងនិងទិសដៅ

ឧទាហរណ៍៖ ចំនួនកុំផ្លិច $3+4i$



យើងអាចបូកចំនួនកុំផ្លិចជាវ៉ិចទ័រដែរគឺ៖

- បូកចំនួនពិត
- បូកចំនួននិមិត្ត

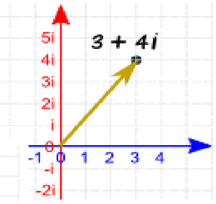


ឧទាហរណ៍៖ $(3+5i)+(4-3i)=3+4+(5-3)i=7+2i$

ii. ទម្រង់ប៉ូលែរ Polar Form

ប្រើ $3+4i$ ម្តងទៀត

គេបានជាទម្រង់ប៉ូលែរ



ឧទាហរណ៍៖ ចូរបម្លែង $3+4i$ ពីទម្រង់កូអរដោនេដេកាត ទៅទម្រង់ប៉ូលែរ

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5 \quad , \quad \theta=\tan^{-1}(y/x)=\tan^{-1}(4/3)=0.927$$

នោះយើងបាន ប្រវែងស្មើ 5 និងមុំ 0.927 រ៉ាដ្យង់

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x=r\cos\theta=5\cos(0.927)=5\times0.6002...=3$, $y=r\sin\theta=5\times\sin(0.927)=5\times0.7998...=4$

តាមពិតវិធីទូទៅដើម្បីសរសេរចំនួនកុំផ្លិចជាទម្រង់ប៉ូលែរគឺ $x+iy=r\cos\theta+i\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ហើយ $\cos\theta+i\sin\theta$ អាចសរសេរដោយខ្លីគឺ «$cis\,\theta$» ដូច្នេះ $x+iy=r\ cis\ \theta$ (cis គ្រាន់តែជាពាក្យបំព្រួញរបស់ $\cos\theta+i\sin\theta$)

ដូច្នេះយើងអាចសរសេរជា $3+4i=5\ cis\ 0.927$ (មុខវិជ្ជាមួយចំនួនដូចជាខាងអេឡិចត្រូនិច «$cis\,\theta$»ត្រូវបានប្រើច្រើនដែលមានអំព្លីទុត r និង ផាស θ ដែលតែងសរសេរជា $r\angle\theta$)

II. **នព្វន្តកុំផ្លិច (Complex Arithmetic)**

១. ចំនួនពិត (The Real Numbers)

យើងកំណត់ចំនួនពិតនៅក្នុងសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$។ យើងតាង $\mathbb{R}^2=\{(x,y):x\in\mathbb{R}\,,\,y\in\mathbb{R}\}$ ជាលក្ខណៈគូនៃចំនួនពិត។

យើងឃើញថាចំនួនកុំផ្លិចជាសំណុំដែលធំជាងសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}^2$ វាជារចនាសម្ព័ន្ធពីជគណិតដ៏ពិសេស។

២. ចំនួនកុំផ្លិច (The Complex Numbers)

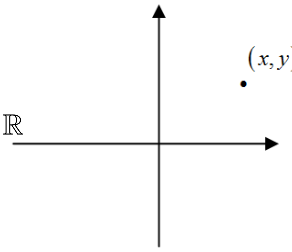
សំណុំចំនួនកុំផ្លិចតាងដោយ $\mathbb{C}$ គេបានទំនាក់ទំនងពីជគណិតពិសេសមួយទៅលើសំណុំនេះដោយការបង្ហាញតាមប្រមាណវិធីបូក និងគុណនៃគូចំនួនពិតដូចខាងក្រោម៖

$(x\,,\,y)+(x'\,,y')=(x+x'\,,\,y+y')$

$(x\,,y\,)\cdot(x'\,,y')=(xx'-yy'\,,\,xy'+yx')$

យើងកំណត់ $(1,0)$ ដោយ 1 ហើយ $(0,1)$ ដោយ i ។ បើ $\alpha\in\mathbb{R}$ នោះយើងបាន α ដែលជាចំនួនកុំផ្លិច $(\alpha\,,0)$ ។ គេបាន $\alpha\cdot(x,y)=(\alpha,0)\cdot(x,y)=(\alpha x,\alpha y)$ ។

ម្យ៉ាងទៀតបើ (x,y) ជាចំនួនកុំផ្លិចផ្សេងទៀតនោះ



$(x,y)=(x,0)+(0,y)=x\cdot(1,0)+y\cdot(0,1)=x\cdot 1+y\cdot i\equiv x+iy$

គ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច (x,y) អាចសរសេរជាទម្រង់ $x\cdot 1+y\cdot i$ ដែល $x,y\in\mathbb{R}$ ឬ $x+iy$ ។ នោះច្បាប់នៃប្រមាណវិធីបូកនិងគុណក្លាយជា៖

$(x\,,iy)+(x'\,,iy')\qquad=(x+x')+i(y+y')$

$(x+iy\,)\cdot(x'+iy')\qquad=(xx'-yy')+i(\,xy'+yx')$

ដែល $i\cdot i=-1$ គេអាចតាង $z=(x,y)$, $i=(0,1)$ គេអាចសរសេរ $z=x+iy$ នោះ $\mathbb{C}=\{z=x+iy\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}$ ។

និយមន័យ១៖ ចំពោះចំនួនកុំផ្លិច $z=x+iy$ ចំនួន $\operatorname{Re}z=x$ ហៅថាផ្នែកពិត (*real part*) នៃ z និង ចំនួន $\operatorname{Im}z=y$ ហៅថាផ្នែកនិមិត្ត (*imaginary part*) ។ បើ $x=0$ នោះ z ជាចំនួននិមិត្ត។

<u>លក្ខណៈ</u>

i). $z_1+z_2=z_2+z_1$ *ii*). $z_1z_2=z_2z_1$

iii). $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ *iv*). $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$

v). $z+0=0+z=z$ *vi*). $z\cdot 1=z$

vii). $-z=(-x\,,-y)$ *viii*). $z+(-z)=0$ *ix*). $zz^{-1}=1$

បើ $(x,y)+(u,v)=(0,0)$ នោះ $u=-x\;\;and\;\;\;v=-y$

បើ $(x,y)(u,v)=(1,0)$ នោះ $xu-yv=1\,,\,yu+xv=0$

ឧទាហរណ៍៖ បង្ហាញថា ៖

1. $\left(\sqrt{2}-i\right)-i\left(1-\sqrt{2}i\right)=-2i$ 2. $(2,-3)(-2,1)=(-1,8)$ 3). $(3,1)(3,-1)\left(\frac{1}{5},\frac{1}{10}\right)=(2,1)$

ក. ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ (Complex Conjugate)

ចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ មានចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គឺ $\overline{z}=a-bi$ ។

លក្ខណៈ   ១. $\overline{\overline{z}}=z$ ២. $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$ ៣. $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ ៤. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

ឧទាហរណ៍១៖ គណនាតម្លៃខាងក្រោម៖

a). $\overline{\overline{z}}$ ចំពោះ $z=3-15i$

b). $\overline{z_1-z_2}$ ចំពោះ $z_1=5+i\;\;and\;\;z_2=-8+3i$

c). $\overline{z_1}-\overline{z_2}$ ចំពោះ $z_1=5+i\;\;and\;\;z_2=-8+3i$

ដោយ $z+\overline{z}=a+bi+(a-bi)=2a$, $z-\overline{z}=a+bi-(a-bi)=2bi$

ហើយ $\operatorname{Re}z=a\;\;and\;\;\operatorname{Im}z=b$ នោះយើងសង្កេតឃើញថា៖ $\operatorname{Re}z=\frac{z+\overline{z}}{2}$, $\operatorname{Im}z=\frac{z-\overline{z}}{2}$

ខ. ម៉ូឌុល (Modulus)

ដោយចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ គេបាន ម៉ូឌុលរបស់វាគឺ $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

សម្គាល់ បើ z ជាចំនួនពិត $(i.e.\ z=a+0i)$ នោះ $|z|=\sqrt{a^2}=|a|$

លក្ខណៈ ១. $|z|^2=a^2+b^2=(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Im} z)^2$ ២. $|z|^2=(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Im} z)^2\ge(\operatorname{Re} z)^2$

៣. $|z|\ge|\operatorname{Re} z|$ ៤. $|z|\ge|\operatorname{Re} z|\ge \operatorname{Re} z$

៥. $|z|\ge|\operatorname{Im} z|\ge \operatorname{Im} z$ ៦. $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

៧. $z\bar{z}=|z|^2$ ៨. $|z|=|\bar{z}|$

៩. $|-z|=|z|$ ១០. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$

ឧទាហរណ៍១៖ រកម៉ូឌុលនៃ $z=4+3i$, $z=3-2i$

ឧទាហរណ៍២៖ គណនា $\frac{6+3i}{10+8i}$

ករណីនេះយើងមាន $z_1=6+3i$ និង $z_2=10+8i$ គេបាន $\overline{z_2}=10-8i$, $|z_2|^2=10^2+8^2=164$

នោះផលចែក $\frac{6+3i}{10+8i}=\frac{(6+3i)(10-8i)}{164}=\frac{60-48i+30i-24i^2}{164}=\frac{21}{41}-\frac{9}{82}i$

លក្ខណៈ៖ ១. បើ $|z|=0$ នោះ $z=0$ ២. $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ ៣. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$

$|z_1z_2|^2=(z_1z_2)\overline{(z_1z_2)}=(z_1z_2)\left(\overline{z_1}\,\overline{z_2}\right)=z\overline{z_1}\,z_2\overline{z_2}=|z_1|^2|z_2|^2$

គេបាន $|z_1z_2|^2=|z_1|^2|z_2|^2$

វិសមភាពត្រីកោណ និង វ៉ាំរ្យង់

១. $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ ២. $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\left(\overline{z_1+z_2}\right)=(z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)$

លំហាត់

១. គណនា $a).\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2-i}{5i}$ $b).\frac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$ $c).(1-i)^4$ $d).\frac{-1+3i}{2-i}$

២. កំណត់ z_1+z_2 និង z_1-z_2 ដោយ៖

$a).\ z_1=2i\ ,\ z_2=\frac{2}{3}-i$ $b).\ z_1=\left(-\sqrt{3}\ ,1\right)\ ,\ z_2=\left(\sqrt{3}\ ,0\right)$

$c).\ z_1=(-3,1)\ ,\ z_2=(1,4)$ $d).\ z_1=x_1+iy_1\ ,\ z_2=x_1-iy_1$

៣.ប្រើលក្ខណៈកុំផ្លិចឆ្លាស់បង្ហាញថា៖

$a).\ \overline{z+3i}=z-3i$ $b).\ \overline{iz}=-i\bar{z}$

$c).\ \overline{(2+i)^2}=3-4i$ $d).\ |(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)|=\sqrt{3}\,|2z+5|$

៤. គណនា $a).(1+2i)+(3+2i)-4/i^3$ $b).\frac{(i-2)(1-2i)}{(i-3)(1-3i)}$ $c).(1+2i)^{-2}$

៥. បើផលបូកនិងផលគុណនៃ២ចំនួនកុំផ្លិចជាចំនួនពិត ចូរបង្ហាញថាផ្នែកពិតរបស់កុំផ្លិចទាំងពីរស្មើគ្នា ហើយផ្នែក និមិត្តជាកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា។

៧. បង្ហាញថា $z=(\pm1\pm i)/\sqrt{2}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $z^4+1=0$ ចំពោះគ្រប់សញ្ញាទាំងអស់។

<u>ចម្លើយ</u>

៦. តាង ចំនួនកុំផ្លិចទាំងពីរគឺ $(a+bi)$ and $(c+id)$

តាមលក្ខខណ្ឌ គឺ $\operatorname{Im}((a+ib)+(c+id))=0$ (១)

និង $\operatorname{Im}((a+ib)(c+id))=0$ (២)

តាម (១) គេបាន $b=-d$ ហើយ (២) គេបាន $ad+bc=0$

នោះ $b(c-a)=0$ គេបាន $b=0$ and $d=0$ (ជាចំនួនពិតទាំងពីរ)

ឬ $a=c$ and $b=-d$ (ជាកុំផ្លិចឆ្លាស់)

៧. ករណីសញ្ញាវិជ្ជមានទាំងពីរ៖ $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right]^4=\frac{1}{4}(1+4i+6i^2+4i^3+i^4)=\frac{1}{4}(1+4i-6-4i+1)=-1$

៣. កាយនៃចំនួនកុំផ្លិច (The Complex Numbers as a Field)

បើ 0 តាងចំនួន $0+i0$ ។ បើ $z\in\mathbb{C}$ នោះ $z+0=z$ ។ បន្ថែមពីនេះ គេបាន $-z=-x-iy$ ហើយ $z+(-z)=0$

ដូច្នេះរាល់ចំនួនកុំផ្លិចគឺមានលក្ខណៈត្រលប់ និងលក្ខណៈបញ្ច្រាស់ដូចជា៖

$1=1+i0$ ហើយ $1\cdot z=z\cdot1=z$ គ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច z , $z\neq0$ នោះ $|z|^2\neq0$ ហើយ $z\cdot\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)=\frac{|z|^2}{|z|^2}=1$

ឧទាហរណ៍១៖ ដោយប្រើកាយសន្ទត់ ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ $z, w\in\mathbb{C}$ នោះ $\frac{1}{z\cdot w}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{w}$ ។

យើងចង់បង្ហាញថា $(z\cdot w)^{-1}=z^{-1}\cdot w^{-1}$

ចូរកត់សម្គាល់ថា $(z^{-1}\cdot w^{-1})\cdot(z\cdot w)=(z^{-1}\cdot w^{-1})\cdot(w\cdot z)=z^{-1}\cdot(w^{-1}\cdot w)\cdot z=z^{-1}\cdot1\cdot z=z^{-1}\cdot z=1$

ដូច្នេះ $(z\cdot w)$ គឺជាបញ្ច្រាស់ផលគុណនៃ $(z^{-1}\cdot w^{-1})$ ហើយផ្ទុយមកវិញ $z^{-1}\cdot w^{-1}$ គឺជាបញ្ច្រាសផលគុណនៃ $z\cdot w$ ។

ប៉ុន្តែ $(z\cdot w)^{-1}$ ក៏ជាបញ្ច្រាសផលគុណនៃ $z\cdot w$ ហើយដោយលក្ខណៈពិសេសនៃបញ្ច្រាសផលគុណយើងបាន $(z\cdot w)^{-1}=z^{-1}\cdot w^{-1}$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ ឧបមាថា $\frac{x-yi}{x+yi}=a+bi$ នោះគេបាន $a^2+b^2=1$ ។

តាង $z=x+iy$ នោះ $\bar{z}=x-yi$ គេបាន $\frac{\bar{z}}{z}=a+bi$

យកម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិចទាំងពីរជំនួសចូលគេបាន

$$\left|\frac{\bar{z}}{z}\right|=|a+bi|\Rightarrow\frac{|\bar{z}|}{|z|}=\sqrt{a^2+b^2}$$

យើងដឹងថា $|z|=|\bar{z}|$ គ្រប់ $z\in\mathbb{C}$ ដូច្នេះ $\frac{|\bar{z}|}{|z|}=1$, $1=\sqrt{a^2+b^2}$ or $1=a^2+b^2$

មេរៀនទី ២

ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត
(*Algebra of Complex Number*)

១. ចំនួនកុំផ្លិច (*Complex Number*)

ក. ចំនួននិម្មិត (*Image Number*)

និយមន័យ: ចំនួននិម្មិតជាផលគុណរវាងចំនួនពិត c ខុសពីសូន្យនឹង i ហៅថា ចំនួននិម្មិត ។

i ហៅថា " ឯកតានិម្មិត " ដែល $i^2 = -1$ ឬ $i = \sqrt{-1}$ ។

ឧទាហរណ៍: ចំនួន $3i, -2i, 3\sqrt{5}i, \frac{3}{5}i$ ជាចំនួននិម្មិត ។

ខ. ឫសការេនៃចំនួនអវិជ្ជមាន (*Square Roots of a Negative Number*)

បើ $c > 0$ នោះគេបាន $\sqrt{-c} = \sqrt{ci^2} = \sqrt{c}i$ ។

ឧទាហរណ៍: គណនា

ក. $\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = \sqrt{4i^2} = 2i$ ខ. $3 + \sqrt{-16} = 3 + 4i$

គ. $-1 - \sqrt{-12} = -1 - \sqrt{12i^2} = -1 - 2i\sqrt{3}$ ឃ. $2 - \sqrt{-7} = 2 - i\sqrt{7}$

លក្ខណ: បើ $x^2 = -a$ $(a > 0)$ នោះ $x = \pm i\sqrt{a}$ $(x = i\sqrt{a}$ ឬ $x = -i\sqrt{a})$

ឧទាហរណ៍: គណនាតម្លៃ x ក្នុងករណីខាងក្រោម៖

ក. $x^2 = -9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$ ខ. $x^2 = -18 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-18} = \pm 3i\sqrt{2}$

គ. និយមន័យចំនួនកុំផ្លិច (*Definition of Complex number*)

☞ **និយមន័យ:** ចំនួនកុំផ្លិចជាចំនួនដែលមានរាង $z = a + ib$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត ។ គេតាងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចដោយ $\mathbb{C}$ ។

ឧទាហរណ៍: $1 + 3i$, $-2 - 2i$, $6 - 4i$, $-1 - 3i$, $7i$, $-8i$ ហៅថាចំនួនកុំផ្លិច ។

☞ **ទម្រង់ពិជគណិត** ឬទម្រង់ស្តង់ដា ឬទម្រង់ដេកាតនៃចំនួនកុំផ្លិចបើ a ជាផ្នែកពិត តាងដោយ $a = \text{Re}(z)$ (***Real Part***) b ជាផ្នែកនិម្មិត តាងដោយ $b = \text{Im}(z)$ (***Imaginary Part***) រាងពិជគណិតនៃចំនួនកុំផ្លិចគឺ $z = a + bi$ ។

- ករណី $b = 0$ នាំឲ្យ $a + ib = a + 0i = a$ ជាចំនួនពិត នោះ z ជាចំនួនពិត
- ករណី $a = 0$ នាំឲ្យ $a + ib = 0 + ib = ib$ ជាចំនួននិម្មិត នោះ z ជាចំនួននិម្មិត
- ចំនួនកុំផ្លិច $a + ib = 0$ កាលណា $a = b = 0$

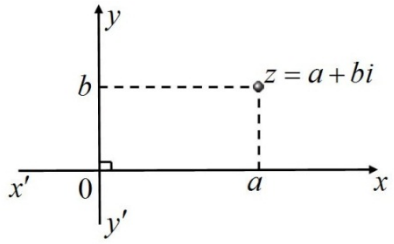
ឧទាហរណ៍: រកផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិតនៃ $z = 2 + 3i$ ។

ផ្នែកពិតគឺ $Re(z) = 2$ និងផ្នែកនិម្មិត $Im(z) = 3$ ។

☞ **ការតាងចំនួនកុំផ្លិចតាមបែបធរណីមាត្រ (ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច)**

គេតាងចំនួនកុំផ្លិចដោយចំណុចនៅក្នុងតម្រុយអរតូណាមេគូមានលំដាប់ (a, b) ប្លង់កុំផ្លិចជាប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណាមេតាងចំនួនកុំផ្លិចដែល

+ អ័ក្ស $(x'x)$ហៅថាអ័ក្សនៃចំនួនពិត + អ័ក្ស $(y'y)$ ហៅថាអ័ក្សនៃចំនួននិមិត្ត



☞ **ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់** ជាចំនួនកុំផ្លិចពីរដែលមាន សញ្ញានិមិ្មតផ្ទុយគ្នាហៅថា ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់។ ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ $z = a + bi$ តាងដោយ $\bar{z} = a - bi$ ។

ឧទាហរណ៍: ចំនួនកុំផ្លិច $z = 2 + 3i$ នឹង $\bar{z} = 2 - 3i$ ជាចំនួនកុំផ្លិចពីរឆ្លាស់គ្នា ។

☞ **កុំផ្លិចផ្ទុយគ្នា** ជាចំនួនកុំផ្លិចពីរដែលមាន សញ្ញាផ្ទុយគ្នា ហៅថា ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយគ្នា ។ ចំនួនកុំផ្លិចផ្ទុយនៃ $z = a + bi$ តាងដោយ $-z = -a - bi$ ។

ឧទាហរណ៍: ចំនួនកុំផ្លិច $z = 2 + 3i$ នឹង $-z = -(2 + 3i) = -2 - 3i$ ជាចំនួនកុំផ្លិចពីរផ្ទុយគ្នា។

☞ **ចំនួនកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នា** គេមាន $\boldsymbol{z = a + bi}$ និង $\boldsymbol{w = x + iy}$បើ $\boldsymbol{z}$និង $\boldsymbol{w}$ស្មើគ្នាកាលណា $\boldsymbol{a = x}$និង $\boldsymbol{b = y}$។

បញ្ជាក់: ចំនួនកុំផ្លិចគ្មានលំដាប់ទេ មានន័យថា បើយើងមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ z នឹង w យើងមិនអាចនិយាយថា $z > w$ ឬ $\boldsymbol{w > z}$ បានទេ ។

២. ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិច (*Operations of Complex number*)

ក. ប្រមាណវិធីបូក និងដកចំនួនកុំផ្លិច (*Operation of Addition and Subtraction*)

ដើម្បីបូក ឬដកចំនួនកុំផ្លិច គេត្រូវយកផ្នែកពិតបូកឬដកផ្នែកពិត ផ្នែកនិម្មិតបូកឬដកផ្នែកនិម្មិត ដាច់ដោយឡែកពីគ្នា ។

ជាទូទៅ បើ $\boldsymbol{z_1 = a_1 + ib_1}$ និង $\boldsymbol{z_2 = a_2 + ib_2}$ នោះ គេបាន

- ផលបូកនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
- ផលដកនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$

ឧទាហរណ៍: គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $\boldsymbol{z_1 = -5 + 3i}$ និង $\boldsymbol{z_2 = 7 + 6i}$ ។ គណនា $\boldsymbol{z_1 + z_2}$ និង $\boldsymbol{z_1 - z_2}$។

គេបាន $\boldsymbol{z_1 + z_2 = (-5 + 3i) + (7 + 6i) = (-5 + 7) + (3 + 6)i}$

ដូចនេះ $\boldsymbol{z_1 + z_2 = 2 + 9i}$ ។

គេបាន $\boldsymbol{z_1 - z_2 = (-5 + 3i) - (7 + 6i) = (-5 - 7) + (3 - 6)i}$

ដូចនេះ $z_1 + z_2 = -12 - 3i$ ។

ខ. វិធីគុណ និង វិធីចែកចំនួនកុំផ្លិច (***Multiplication and Division***)

➢ **វិធីគុណចំនួនកុំផ្លិច**

វិធីគុណចំនួនកុំផ្លិច ដូចគ្នានឹងវិធីគុណកន្សោមពិជគណិតដែរ ។

ឧបមាថាគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = a + bi$ និង $z_2 = c + di$ ដែល a, b, c, d ជាចំនួនពិត

គេបាន $z_1 \times z_2 = (a + bi)(c + di)$

$= ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd$

ដូចនេះ $z_1 \times z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$ ។

ឧទាហរណ៍: គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 2 - i$ និង $z_2 = 3 + 2i$ ។ គណនា $z_1 \times z_2$ ។

គេបាន $z_1 \times z_2 = (2 - i)(3 + 2i) = 6 + 4i - 3i - 2i^2 = 4 + i$

ដូចនេះ $z_1 \times z_2 = 4 + i$ ។

➢ **វិធីចែកចំនួនកុំផ្លិច**

ដើម្បីចែកចំនួនកុំផ្លិច គេត្រូវគុណភាគយក និងភាគបែង នឹងចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃភាគបែង ។

ឧបមាថាគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = a + bi$ និង $z_2 = c + di$ ដែល a, b, c, d ជាចំនួនពិត

គេបាន $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \dfrac{(ac - bd) + (ad + bc)i}{c^2 + d^2}$

ដូចនេះ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(ac - bd) + (ad + bc)i}{c^2 + d^2}$ ។

ឧទាហរណ៍: គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 2 + 3i$ និង $z_2 = 4 - 2i$ ។ គណនា $\dfrac{z_1}{z_2}$ ។

គេបាន $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2 + 3i}{4 - 2i} = \dfrac{(2 + 3i)(4 + 2i)}{(4 - 2i)(4 + 2i)}$

$= \dfrac{8 + 4i + 12i - 6}{4^2 - (2i)^2} = \dfrac{2 + 16i}{16 + 4} = \dfrac{2 + 16i}{20}\dfrac{2}{20} + \dfrac{16i}{20} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{4}{5}i$

ដូចនេះ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{4}{5}i$

៣. ស្វ័យគុណនៃ i (*Power of i*)

គេមាន $i^1 = i$; $i^2 = -1$

$i^3 = -i$; $i^4 = i^3 \times i = -i \times i = 1$

$i^5 = i^4 \times i = i$; $i^6 = i^4 \times i^2 = -1$

....

ជាទូទៅ $i^{4k} = 1$; $i^{4k+1} = i$

$i^{4k+2} = -1$; $i^{4k+3} = -i$; $k = 0, 1, 2........$

ឧទាហរណ៍: គណនា i^{50} ; i^{200} ; i^{2017} ។

ចម្លើយ: $i^{50} = i^{4\times12+2} = -1$ $i^{200} = i^{4\times50+0} = 1$

$i^{2017} = i^{4\times504+1} = i$

៤. អនុវត្តន៍កុំផ្លិចក្នុងការដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី ២ (*Apply to Solve Eqaution Degree* 2)

គេមសីការដឺក្រេទី ២ $ax^2 + bx + c = 0$ (*) ដែល a, b និង c ជាចំនួនពិត ហើយ $a \neq 0$ ។

☞ **ករណីបើ** $\Delta = b^2 - 4ac$ **ជាការប្រាកដ**

ក. បើ $\Delta > 0$ សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនពិត $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

ខ. បើ $\Delta = 0$ សមីការមានឬសឌុបជាចំនួនពិត $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$

គ. បើ $\Delta < 0$ សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{-\Delta}i}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{-\Delta}i}{2a}$

ឧទាហរណ៍: ដោះស្រាយសមីការ៖ ក. $z^2+z+1=0$ ខ. $z^2 - iz + i\sqrt{3} = 0$

ចម្លើយ ក. $z^2+z+1=0$

មាន $\Delta = b^2-4ac = -3$ នោះ $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{-\Delta}i}{2a} = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ និង $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{-\Delta}i}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

ខ. $z^2 - iz + i\sqrt{3} = 0$

មាន $\Delta = b^2-4ac = -1-4\sqrt{3}i$ នោះ $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$ និង $z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{-\Delta}}{2a} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3i}{2}$ ។

☞ **ករណីបើ $\Delta = b^2 - 4ac$ មិនមែនជាការេប្រាកដ**

តាង $y^2 = \Delta = u + iv$ នាំឲ្យ $r = |\Delta| = \sqrt{u^2+v^2}$

គេបាន $y_1 = -\left(\sqrt{\dfrac{r+u}{2}} + (signv)i\sqrt{\dfrac{r-u}{2}}\right)$

$y_2 = \left(\sqrt{\dfrac{r+u}{2}} + (signv)i\sqrt{\dfrac{r-u}{2}}\right)$ $(\boldsymbol{sign(v)}$: សញ្ញារបស់ $\boldsymbol{v})$

នោះ $\boldsymbol{z_{1,2} = \dfrac{1}{2a}(-b + y_{1,2})}$

ឧទាហរណ៍: ដោះស្រាយសមីការ $z^2 - 8(1-i)z + 63 - 16i = 0$

គេបាន $\Delta' = (-4(1-i))^2 - (63-16i) = 16(1-2i-1) - 63 + 16i = -32i - 63 + 16i = -63 - 16i$

នោះ $r = |\Delta| = \sqrt{63^2+16^2} = 65$

នាំឲ្យ $y_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\dfrac{65+(-63)}{2}} - i\sqrt{\dfrac{65+63}{2}}\right) = \pm(1-8i)$

យើងបាន $z_{1,2} = \dfrac{4(1-i)\pm(1-8i)}{1}$

នាំឲ្យ $\begin{cases} z_1 = 4-4i+1-8i \\ z_2 = 4-4i-1+8i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 5-12i \\ z_2 = 3+4i \end{cases}$

☞ **បើ α និង β ជាឫសនៃសមីការ** $(*)$

គេបាន $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ និង $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ $(*)$ អាចសរសេរជារាង $x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$ ។

ឧទាហរណ៍:គេឲ្យ $\boldsymbol{z_1 = 1 + i}$ ជាឫសនៃសមីការ $\boldsymbol{z^2 + (1-3i)z - 4 = 0}$។ ចូររកឫសមួយទៀតនៃសមីការ។

ចម្លើយ: តាង $\boldsymbol{z_2}$ ជាឫសមួយទៀត

គេបាន $\boldsymbol{z_2 + 1 + i = -(1-3i)}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{z_2 = -2 + 2i}$

ដូចនេះ $\boldsymbol{z_2 = -2 + 2i}$ ។

លំហាត់ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត

1. បំលែងចំនួនខាងក្រោមជាចំនួននិម្មិត

1. $\sqrt{-9}$ **2.** $\sqrt{-121}$ **3.** $\sqrt{-\frac{9}{25}}$ **4.** $-\sqrt{-28}$

2. បំលែងចំនួនខាងក្រោមជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមានទម្រង់ពិជគណិត

1. $A = 4-\sqrt{-100}$ 2. $B = -5+\sqrt{-9}$ 3. $C = -5+\sqrt{-18}$

4. $D = 9-2i-(4-4i)$ 5. $E = (1+2i)^2 - i(4+2i)$ 6. $F = (2-3i)(-1+i)+(2-i)^2$

7. $G = (2-5i)(3+i)$ 8. $H = (4+2i)^2$ 9. $I = (1+2i)^3$

10. $J = (3+2i)^4$ 11. $K = \frac{1}{4+3i}$ 12. $L = \frac{2-3i}{1+i}+\frac{1-2i}{1-i}$

13. $M = \frac{(2+i)(1-i)}{1+2i}$ 14. $N = \frac{-1+\sqrt{3}i}{(11-4\sqrt{3}i)^3}$ 15. $O = \frac{(1+2i)^2-(1-i)^2}{(3+2i)^3-(2+i)^3}$

16. $P = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}+\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}+i-1$ 17. $Q = \sqrt{4-3i}$ 18. $R = \frac{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}$

3. បើ $Z_1 = 2-5i$ និង $Z_2 = 1-4i$ សរសេរកន្សោមខាងក្រោមជារាង $a+bi$ ៖

ក. $Z_1+\overline{Z_2}$ ខ. $Z_1\overline{Z_2}$ គ. $\frac{1}{\overline{Z_1}}$ ឃ. $i\overline{Z_1}Z_2$

4. បើ $Z_1 = x_1+iy_1$ និង $Z_2 = x_2+iy_2$ បង្ហាញថា $Z_1\overline{Z_2}+\overline{Z_1}Z_2$ ជាចំនួនពិត ។

5. គេយក $z_1 = 2-3i$ និង $z_2 = -4+i$ ។ ចូរសរសេរក្រោមទម្រង់ពិជគណិត

ក. z_1+z_2 ខ. $3z_1-2z_2$ គ. z_1z_2 ឃ. $(1-z_1)(5+z_2)$ ង. $\frac{1}{z_1^2}$ ច. $\frac{1-z_1}{5+z_2}$

6. ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ពិជគណិតដែល $j = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

1. $z_1 = \frac{1-j+j^2}{1+j-j^2}$ 2. $z_2 = \left(\frac{1-j}{1+j}\right)^3+\left(\frac{j+j^2}{j-j^2}\right)$

7. គណនា

ក. $\frac{1}{2i}\left(i^7-\frac{1}{i^7}\right)$ ខ. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{33}+(1-i)^{10}+(2+3i)(2-3i)+\frac{1}{i}$ គ. $i^9+i^{10}+i^{11}+i^{12}+i^{13}$

ឃ. គណនា i^2, i^3, i^4, i^5 ។ ទាញរក i^{24} និង i^{25}

ង. គណនា $1+i+i^2+i^3$ ។ រួចទាញរក $i^{2013}+i^{2012}+i^{2011}+i^{2010}$ ។

8. កំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឱ្យសមភាពនីមួយៗខាងក្រោមពិត

ក. $(2x+3iy)-(xi+3y) = i(7+4i)$ ខ. $(x+iy)(1-i) = 3-i$ គ. $\frac{x+iy}{4-3i} = \frac{5}{25}+\frac{10}{25}i$

ឃ. $\frac{x+iy}{1-i}+\frac{1-i}{1+i} = 0$ ង. $\frac{3-2i}{5+i} = x+iy$ ច. $(y^2-4^x-8)+i(2^{x+1}+y+1) = 0$

ឆ. $\left(3^x\cdot 2^y-\frac{1}{9}\right)+i(y-x-2) = 0$ ជ. $(1-2i)x+(1+2i)y = 1+i$

9. កំណត់ចំនួនពិត x ដើម្បីឲ្យចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម:

ក. $Z_1=\frac{x^2-x-2}{x}+\left(x^3-3x+2\right)i$ ខ. $Z_2=\left(2^{x^2+3x-2}-4\right)+\left(\log_2\left(x^2+x\right)-1\right)i$

គ. $Z_3=(\sin x-1)+i\sin x$ ឃ. $Z_4=(\cos x+1)+i\cos x$ ង. $Z_5=\sin x+1+(\cos x-1)i$

1. ជាចំនួនពិត 2. ជាចំនួននិម្មិត ។

10. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=1-2i$ និង $w=5+3i$ ។

ក. បង្ហាញថា $\overline{w+z}=\bar{w}+\bar{z}$ ខ. $\overline{z-w}=\bar{z}-\bar{w}$

គ. គេឱ្យ $M=(1-i)x+(1+i)y$ ។ កំណត់តម្លៃ x និង y ដើម្បីឱ្យ $M=z^2+w+3i$ ។

11. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=3+i$ និង $z_1=8+6i$ ។

ក. បង្ហាញថា $z^2=z_1$ ។

ខ. គណនា $w=z+z_1$ ។ សង់ $w,\ z,\ z_1$ នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ។

គ. គេឱ្យ $w=(x+1)+(y+3)i$ ។ កំណត់តម្លៃ x និង y ។

12. គេមានចំនួនកុំផ្លិចមិនសូន្យ $z_1,z_2,z_3,z_4,\ ...,z_n$ ។

ក. បង្ហាញថា $\overline{z_1 z_2 z_3\ \cdots\ z_n}=\bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3\ \cdots\ \bar{z}_n$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\overline{z_1+z_2+z_3+\ ...\ +z_n}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3+\ ...\ +\bar{z}_n$ ។

13. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C}$

1. $x^2+2x+2=0$ 2. $(t+1)^2+8=0$ 3. $z^2+2z+5=0$

4. $z^2-2\left(\sqrt{2}-1\right)z+6-4\sqrt{2}=0$ 5. $z\bar{z}+(1+3i)+\frac{\bar{z}}{2+i}=19+5i$ 6. $iz+2\bar{z}=i-1$

7. $z^2-2\bar{z}+1=0$ 8. $|z|+z=3+4i$ 9. $x^2-(3-i)x+4=0$

10. $2z-|z|=\frac{9-7i}{1+i}$ 11. $z^4+6(1+i)z^2+5+6i=0$ 12. $(1+i)z^2+z+11i=0$

13. $(3+i)z^2+(8+6i)z+(25+5i)=0$ 14. $z^2=1-2i\sqrt{2}$ 15. $z^2+2z+1+2i=0$

16. $z^3+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}=0$ 17. $z^4+10z^2+169=0$ 18. $e^{ix}+e^{iy}+e^{iz}=0$

19. $\log_5|z|+\frac{z+i\bar{z}}{7}=3+i$ 20. $\left(\frac{iz+3}{z-2i}\right)^2-3\left(\frac{iz+3}{z-2i}\right)-4=0$

14. រកចំនួនពិត a,b ដើម្បីឲ្យ $2-i$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2-ax-b=0$ ។

15. រកអនុគមន៍ដឺក្រេទី ២ $f(Z)=Z^2+aZ+b$ ដែល $a,b\in\mathbb{R}$ បើគេដឹងថា $f(-1-2i)=0$ ។

16. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការក្នុង $\mathbb{C}$ ខាងក្រោម

1. $\begin{cases} ix-3y=2-3i \\ (1+i)x+2iy=5-i \end{cases}$ 2. $\begin{cases} (3-i)x+(4+2i)y=2+6i \\ (4+2i)x-(2+3i)y=5+4i \end{cases}$

3. $\begin{cases} (2+i)x+7y=1+2i \\ (1-i)\bar{x}-i\bar{y}=4-i \end{cases}$ 4. $\begin{cases} (2+i)x+(4+2i)y=6 \\ (3+2i)x+(3-2i)y=8 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x^2y+xy^2=6 \\ x^3+y^3=9 \end{cases}$

មេរៀនទី ៣

ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

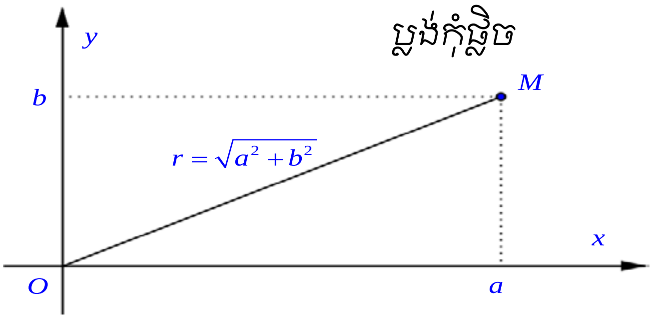
(*Trigonometric of Complex Number*)

១. ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច ឬ តម្លៃដាច់ខាតនៃចំនួនកុំផ្លិចលើប្លង់ *Gauss*

(***Modulus or Absolute Value of Complex number on the gaussian Plane***)

ក.និយមន័យ (***Definition***)

ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ (xoy)គេយក $M(a,b)$ជារូបភាពនៃ $z = a + ib$ ។ រង្វាស់ MO ហៅថាម៉ូឌុលនៃ $z = a + ib$ ។ គេកំណត់ម៉ូឌុលនៃ $z = a + ib$ ដោយ $|z|$ ឬ r ដែល $|z| = r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ ។



ក្នុងត្រីកោណកែង OMa គេមាន $OM^2 = Ma^2 + Oa^2$ (ទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ)

ដោយ $Oa = a$, $Ma = b$

គេបាន $OM^2 = a^2 + b^2$ ឬ $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ ។

ដូចនេះ: $|z| = r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ ។

ឧទាហរណ៍: ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច $z = 1 + 2i$ គឺ $|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច $w = 6i$ គឺ $|w| = \sqrt{0^2 + 6^2} = 6$

ឧទាហរណ៍: គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -1 + 2i$ និង $z_2 = 1 + i$ ។ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា

ក. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ខ. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ គ. $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

ចម្លើយ:

ក. $z_1 = -1 + 2i$ នោះ $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$z_2 = 1 + i$ នោះ $|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

គេបាន $|z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{5} \times \sqrt{2} = \sqrt{10}$ (1)

$z_1 z_2 = (-1 + 2i)(1 + i) = -3 + i$ នោះ $|z_1 z_2| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ (2)

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

ខ. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(-1 + 2i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \dfrac{-1 + i + 2i - 2i^2}{1 + 1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$

នោះ $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad (1)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

គ. $z_1 + z_2 = -1 + 2i + 1 + i = 3i$

$|z_1 + z_2| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3 \quad (1)$

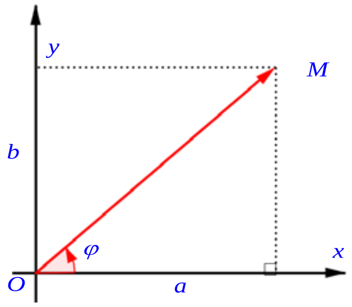
$|z_1| + |z_2| = \sqrt{5} + \sqrt{2} > 3 \quad (2)$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

២. អាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច (*Argument of Complex number*)

ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ (xoy) គេយក $M(a,b)$ ជារូបភាព $z = a + ib$ ។ មុំដែលផ្គុំដោយ $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ ហៅថាអាគុយម៉ង់នៃ $z = a + ib$ ។ គេតាង φ ឬ $Arg(z)$ ជាអាគុយម៉ង់នៃ $z = a + ib$ ។

គេបាន $\arg(z) = \varphi + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$



ក្នុងត្រីកោណកែង OMP

គេមាន $r^2 = OM^2 = a^2 + b^2$ ឬ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (តាមទ្រឹស្តីពីតាគ័រ)

$$\cos\varphi = \frac{OP}{OM} = \frac{a}{r} \quad \text{និង} \quad \sin\varphi = \frac{MP}{OM} = \frac{b}{r}$$ ។

ដើម្បីរកអាគុយម៉ង់នៃ $z = a + ib$ គេដោះស្រាយសមីការ:

$\cos\varphi = \frac{a}{r}$ និង $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ គេបាន $Arg(z) = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ។

ឧទាហរណ៍: រកអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

តាមរូបមន្ត $r = |z| = \sqrt{2 + 2} = 2$, $\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $\sin\varphi = \frac{b}{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះអាគុយម៉ង់នៃ z គឺ $Arg(z) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ។

៣. ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ឬ ទម្រង់ប៉ូលែនៃចំនួនកុំផ្លិច

(*Trigonometric Form or Polar Form of Complex number*)

ចំនួនកុំផ្លិច $z = a + ib$ ហៅថាទម្រង់ពីជគណិត ។ គេអាចសរសេរជា $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

គេបាន $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ហៅថាម៉ូឌុលនៃ $z = a + ib$

$\cos\varphi = \frac{a}{r}$ និង $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ ដែល φ ហៅថាអាគុយម៉ង់នៃ z ។

គេបាន $$z = a + ib = r\left(\frac{a}{r} + i\frac{b}{r}\right) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

ដូចនេះ $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ហៅថាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ (ទម្រង់ប៉ូលែរ) នៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a + ib$

សម្គាល់: + ចំនួនកុំផ្លិច z ជាចំនួនពិតកាលណា $\sin\varphi = 0$ ឬ $\varphi = k\pi \ , k \in \mathbb{Z}$

+ ចំនួនកុំផ្លិច z ជាចំនួននិម្មិតកាលណា $\cos\varphi = 0$ ឬ $\varphi = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ , k \in \mathbb{Z}$

ឧទាហរណ៍: សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $z = 1 + i$ ជាទំរង់ត្រីកោណមាត្រ ។

យើងមាន $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ និង

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ ។

៤. ប្រមាណវិធីចំនួនកុំផ្លិចក្នុងទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

(***Operation of Trigonometric Form of Complex number***)

ក.ផលគុណនៃចំនួនកុំផ្លិចក្នុងទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ (***Multiplication of Trigonometric Form***)

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$ និង $Z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$ គេបាន

$$Z_1 \times Z_2 = [r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)][r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)]$$
$$= r_r r_2(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$$
$$= r_1 r_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + i^2\sin\alpha_1\sin\alpha_2 + i\sin\alpha_2\cos\alpha_1)$$
$$= r_1 r_2[\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2 + i(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_2\cos\alpha_1)]$$

តែ $\cos\alpha_1\cos_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2 = \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$

$\sin\alpha_1\sin\alpha_2 + \cos\alpha_1\cos\alpha_2 = \sin(\alpha_1 + \sin\alpha_2)$

ដូច្នេះ $Z_1 Z_2 = r_1 r_2[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$

ជាទូទៅ បើ $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))$ និង $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$

នោះគេបាន $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$

វិបាក: តាមន័យធរណីមាត្រនៃផលគុណចំនួនកុំផ្លិច

+ $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ + $Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$

ឧទាហរណ៍: គេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ $z_1 = \sqrt{2}\left(cos\frac{ð}{3} + isin\frac{ð}{3}\right)$ និង $z_2 = \frac{1}{2}\left(cos\frac{ð}{6} + isin\frac{ð}{6}\right)$

ចូរគណនា $z_1 \cdot z_2$ ព្រមទាំងកំណាត់ម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ $z_1 \cdot z_2$

ចម្លើយ

- គណនា $z_1 \cdot z_2$

គេមាន $z_1 = \sqrt{2}\left(cos\dfrac{ð}{3} + isin\dfrac{ð}{3}\right)$, $z_2 = \dfrac{1}{2}\left(cos\dfrac{ð}{6} + isin\dfrac{ð}{6}\right)$

គេបាន $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2} \times \dfrac{1}{2}\left[\cos\left(\dfrac{ð}{3} + \dfrac{ð}{6}\right) + isin\left(\dfrac{ð}{3} + \dfrac{ð}{6}\right)\right] = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\dfrac{3ð}{6} + isin\dfrac{3ð}{6}\right)$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\frac{ð}{2} + isin\frac{ð}{2}\right)$$

ដូច្នេះ $z_1 \cdot z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\dfrac{ð}{2} + isin\dfrac{ð}{2}\right)$

- កំណត់ម៉ូឌុល - អាគុយម៉ង់នៃ $z_1 \cdot z_2$

ដោយ $\quad z_1 \cdot z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\frac{\text{ð}}{2} + isin\frac{\text{ð}}{2}\right)$

នោះគេបាន $|z_1 \cdot z_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $Arg(z_1 \cdot z_2) = \frac{\text{ð}}{2}$

ដូច្នេះ ម៉ូឌុល $|r| = |z_1 \cdot z_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ និងអាគុយម៉ង់ $Arg(z_1 \cdot z_2) = \frac{\text{ð}}{2}$

ខ. ផលចែកនៃចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $(\textit{Division of Trigonometric Form})$

ចំនួនកុំផ្លិច $\quad z = r\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right)$

នោះចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គឺ $\quad \bar{z} = r\left(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi)\right) = r\left(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right)$

គេមាន ចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = r_1\left(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)\right)$ និង $z_2 = r_2\left(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)\right)$

គេបាន $\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$

$$= \frac{r_1\left(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)\right)}{r_2\left(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)\right)} \cdot \frac{r_2\left(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)\right)}{r_2\left(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)\right)}$$

$$= \frac{r_1\left(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)\right)\left(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)\right)}{r_2\left(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)\right)\left(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)\right)}$$

$$= \frac{r_1\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)}{r_2\left(\cos(\varphi_2 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_2 - \varphi_2)\right)} = \frac{r_1\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)}{r_2\left(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ\right)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$$

ជាទូទៅ បើគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = r_1\left(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)\right)$ និង $z_2 = r_2\left(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)\right)$ ដែល $z_2 \neq 0$

នោះ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$ ។

វិបាក: តាមន័យធរណីមាត្រនៃផលគុណចំនួនកុំផ្លិច

+ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ $\qquad$ + $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

ឧទាហរណ៍: សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $z = \frac{-1+i}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ចម្លើយ: តាង $z_1 = -1 + i$ និង $z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

គេមាន $z_1 = -1 + i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \quad = \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

គេបាន $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

ដូច្នេះ $$z=\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

៥. ស្វ័យគុណទី n ឬ ដឺម័រនៃចំនួនកុំផ្លិច ($\boldsymbol{Power\ n\,th\ or\ de\,Moivre\,of\ Complex\ number}$)

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=r\left(\cos(\varphi)++i\sin(\varphi)\right)$

តាមរូបមន្ត $z_1z_2=r_1r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$

គេបាន $zz=rr\left[\cos(\varphi+\varphi)+i\sin(\varphi+\varphi)\right]$

$$z^2=r^2\left(\cos(2\varphi)+i\sin(2\varphi)\right)$$

$$z^3=z^2z=r^2r\left[\cos(2\varphi+\varphi)+i\sin(2\varphi+\varphi)\right]=r^3\left(\cos(3\varphi)+i\sin(3\varphi)\right)$$

…………………………………………………………………………………….

$$z^n=z^{n-1}z=r^n\left(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)\right)$$

ជាទូទៅ បើ $z=r\left(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)\right)$

នោះ $z^n=\left[r\left(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)\right)\right]^n$

$$z^n=r^n\left(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)\right),\ \forall n\in\mathrm{N}$$

គេបាន $\left(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)\right)^n=\left(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)\right)$ ហៅថា រូបមន្តដឺម័រ ។

ឧទាហរណ៍: គេមានចំនួនកុំផ្លិច $\boldsymbol{z=\sqrt{2}\left(cos\frac{ð}{6}+isin\frac{ð}{6}\right)}$ ។ គណនា $\boldsymbol{z^{12}}$

យើងមាន $\boldsymbol{z=\sqrt{2}\left(cos\frac{ð}{6}+isin\frac{ð}{6}\right)}$

គេបាន $\boldsymbol{z^{12}=\left[\sqrt{2}\left(cos\frac{ð}{6}+isin\frac{ð}{6}\right)\right]^{12}=(\sqrt{2})^{12}\left(cos\frac{12ð}{6}+isin\frac{12ð}{6}\right)}$

$\boldsymbol{=2^6(cos2ð+isin2ð)=64(cos2ð+isin2ð)=64}$

ដូច្នេះ $\boldsymbol{z^{12}=64}$

ឧទាហរណ៍: .ចូរគណនា $\mathbf{sin}\,2á$, $\mathbf{cos}\,2á$ ជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{sin}\,á$, $\mathbf{cos}\,á$ ។

តាមរូបមន្តដឺម័រ $\boldsymbol{(cosá+isiná)^2=\mathbf{cos}\,2á+isin\,2á}$ (1)

តែ $\boldsymbol{(cosá+isiná)^2=cos^2á+2isinácosá+(isiná)^2=\left(cos^2á-sin^2á\right)+2isinácosá}$ (2)

តាម (1) និង (2) នោះគេបាន $\boldsymbol{\mathbf{cos}\,2á=cos^2á-sin^2á}$ និង $\boldsymbol{sin\,2á=2sinácosá}$

ដូច្នេះ $\boldsymbol{\mathbf{cos}\,2á=cos^2á-sin^2á}$, $\boldsymbol{sin\,2á=2sinácosá}$

ឧទាហរណ៍: ចូរគណនា $\mathbf{sin}\,4\boldsymbol{x}$, $\mathbf{cos}\,4\boldsymbol{x}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}$, $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}$ ។

យើងមាន $\boldsymbol{(cosx+isinx)^4=cos^4x+4icos^3xsinx+6cos^2x(isinx)^2+4cosx(isinx)^3+(isinx)^4}$

$\boldsymbol{=\left(cos^4x-6cos^2xsin^2x+sin^4x\right)+i(4cos^3xsinx-4cosxsin^3x)}$ (1)

តាមរូបមន្តដឺម័រ $\boldsymbol{(cosx+isinx)^4=\mathbf{cos}\,4á+isin\,4á}$ (2)

តាម (1) និង (2) នោះគេបាន $\boldsymbol{\mathbf{cos}\,4x=cos^4x-6cos^2xsin^2x+sin^4x}$

$\boldsymbol{sin\,4x=4cos^3xsinx-4cosxsin^3x}$

ដូច្នេះ $\boldsymbol{\mathbf{cos}\,4x=cos^4x-6cos^2xsin^2x+sin^4x}$, $\boldsymbol{sin\,4x=4cos^3xsinx-4cosxsin^3x}$

៦. ឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិចក្នុងទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ (***Roots n th Complex number***)

បើ w ជាឫសទី n នៃចំនួនកុំផ្លិច z នោះគេបាន $w^n=z$ ។ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច z និង w គឺ $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ និង $w=s(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

គេបាន $w^n=\left[s(\cos\alpha+i\sin\alpha)\right]^n=s^n\left(\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)\right)$

គេទាញបាន $s^n\left(\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)\right)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

ចំនួនកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នាម៉ូលឌុលវាក៏ស្មើគ្នាដែរ ។

គេបាន $s^n=r$ ដោយ $s>0$ និង $r>0$ នោះ $s=\sqrt[n]{r}$ ហើយ $\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)=\cos\varphi+i\sin\varphi$

គេទាញបាន $\cos(n\alpha)=\cos\varphi$, $n\alpha=\varphi+2\pi k$ នោះ $\alpha=\dfrac{\varphi+2\pi k}{n},\ k\in Z$

ជំនួស $\alpha=\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}$ និង $s=\sqrt[n]{r}$ ក្នុងទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច w

គេបាន $w=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right]$

បើគេជំនួស $k=0,1,2,\cdots,n-1$ គេបាន n ឫសផ្សេងគ្នានៃចំនួនកុំផ្លិច

ជាទូទៅ បើ $z=r\left(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)\right),\ n\in Z_+$ នោះ z មានឫសទី n គឺ

$w_k=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right]$ ដែល $k=0,1,2,3,\cdots,n-1$ ។

ឧទាហរណ៍: ចូរគណនាឫសទី 4 នៃចំនួនកុំផ្លិច $z=1+i$

ចម្លើយ គណនាឫសទី 4 នៃចំនួនកុំផ្លិច $z=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(cos\frac{\eth}{4}+isin\frac{\eth}{4}\right)$

នាំឲ្យ $w_k=\sqrt[4]{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\dfrac{\frac{\eth}{4}+2k\eth}{4}\right)+isin\left(\dfrac{\frac{\eth}{4}+2k\eth}{4}\right)\right]$ ដែល $k=0,1,2,3$

$=\sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{\eth+8k\eth}{16}\right)+isin\left(\frac{\eth+8k\eth}{16}\right)\right]$

បើ $k=0$ គេបាន $w_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{\eth}{16}+isin\dfrac{\eth}{16}\right)$

បើ $k=1$ គេបាន $w_1=\sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\dfrac{\eth+8\eth}{16}\right)+isin\left(\dfrac{\eth+8\eth}{16}\right)\right]=\sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{9\eth}{16}+isin\dfrac{9\eth}{16}\right)$

បើ $k=2$ គេបាន $w_2=\sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\dfrac{\eth+16\eth}{16}\right)+isin\left(\dfrac{\eth+16\eth}{16}\right)\right]=\sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{17\eth}{16}+isin\dfrac{17\eth}{16}\right)$

បើ $k=3$ គេបាន $w_3=\sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\dfrac{\eth+24\eth}{16}\right)+isin\left(\dfrac{\eth+24\eth}{16}\right)\right]=\sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{25\eth}{16}+isin\dfrac{25\eth}{16}\right)$

លំហាត់ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

1. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 2-3i$, $z_2 = -2+i$ ។

ក. គណនា $|z_1|, |\overline{z}_1|, |z_2|^2$, $z_2 \cdot \overline{z}_2$, $|z_1 \cdot z_2|$ និង $|z_1| \cdot |z_2|$ ។

ខ. ប្រៀបធៀប $|z_1|$ ជាមួយ $|\overline{z}_1|$ និង $|z_2|^2$ ជាមួយ $z_2 \cdot \overline{z}_2$ ហើយ $|z_1 \cdot z_2|$ ជាមួយ $|z_1| \cdot |z_2|$ ។

គ. បង្ហាញថា $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ និង $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ ។

2. គណនាម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម

ក. $z_1 = -2015$

ខ. $z_2 = 2i(3+i)(1+i)$

គ. $z_3 = \dfrac{(2+3i)(1+2i)}{(-1+i)(1+i)}$

ឃ. $z_4 = \dfrac{(1+i)^4}{2+i}$

ង. $z_5 = \dfrac{(1-\sqrt{3}i)^2}{(-\sqrt{3}+i)^3}(-3-4i)^5$

ច. $z_6 = \dfrac{2+i}{1-i} + \dfrac{2i}{1+i}$

3. រកម៉ូលឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម

ក. $z = -6i$

ខ. $z = \dfrac{(1+i)^{13}}{(1-i)^7}$

គ. $z = \left(\sqrt{3}-i\right)^{100}$

ឃ. $z = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{210}$

ង. $z = -2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

ច. $z = -\sqrt{3}\left(\sin\dfrac{\pi}{4} + i\cos\dfrac{\pi}{4}\right)$

ឆ. $z = \cos\theta - i\sin\theta$

ជ. $z_7 = 1 + \cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}$

ឈ. $z_8 = 1 - \cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}$

4. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ (ទម្រង់ប៉ូលែរ) ។

១. $z = 1 + i\sqrt{3}$

២. $z = \sqrt{3} + 3i$

៣. $z = -\sqrt{5} + i\sqrt{15}$

៤. $z = -1 + \sqrt{3}i$

៥. $z = 2 - 2\sqrt{3}i$

៦. $z = 2 - 2i$

៧. $z = -1 - \sqrt{3}i$

៨. $z = -1 - i$

៩. $z = -i$

១០. $z = 5^{12}$

១១. $z = i^{12}$

១២. $z = -2$

១៣. $z = \dfrac{4}{1+\sqrt{3}i}$

១៤. $z = 3\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}i\right)$

១៥. $z = -\left(1+\sqrt{3}\right) - \left(1+\sqrt{3}\right)i$

១៦. $z = \left(2+\sqrt{3}\right) - \left(2+\sqrt{3}\right)i$

១៧. $z = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

១៨. $z = 1 + \sqrt{2} + i$

១៩. $z = 2 + \sqrt{3} + i$

២០. $z = 1 + \left(2-\sqrt{3}\right)i$

២១. $z = \sqrt{2} - \left(\sqrt{2}+2\right)i$

5. បម្លែងចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម ជាទម្រង់ប៉ូលែរ ៖

១. $z = 2\left(\sin\dfrac{\pi}{7} + i\cos\dfrac{\pi}{7}\right)$

២. $z = -\sqrt{2}\left(\sin\dfrac{\pi}{4} + i\cos\dfrac{\pi}{4}\right)$

៣. $z = i\cos\dfrac{\pi}{3} + \sin\dfrac{\pi}{3}$

៤. $z = 2i\left(\sin\dfrac{\pi}{3} + i\cos\dfrac{\pi}{3}\right)$

៥. $z = 1 + \cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}$

៦. $z = 1 + \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$

៧. $z = \dfrac{\cos x - i\sin x}{\sin x - i\cos x}$

៨. $z = \dfrac{1 - \cos x - i\sin x}{1 + \cos x + i\sin x}$

៩. $z = a\dfrac{(1+i\tan x)^2}{1+\tan^2\alpha}$

១០. $z=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)\left(\sin x+i\cos x\right)}{2\left(1-i\right)\left(\cos x-i\sin x\right)}$ ១១. $z=\left(1+\sqrt{3}i\right)\left(1+i\right)\left(\cos x+i\sin x\right)$

១២. $Z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha \quad \alpha\in\left(0,2\pi\right)$ ១៣. $Z=\sin\alpha+i\left(1+\cos\alpha\right) \quad \alpha\in\left(0,2\pi\right)$

6. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

១. $z=(1+i)^{12}$ ២. $z=\left(-4\sqrt{3}+4i\right)^{15}$ ៣. $z=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{25}$

៤. $z=\dfrac{\left(1+i\right)^{5}}{\left(1-i\right)^{3}}$ ៥. $z=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ ៦. $z=\left(1+i\right)^{8}\left(1-i\sqrt{3}\right)^{-6}$

៧. $z=\left(1-i\right)^{10}\left(\sqrt{3}+i\right)^{8}$ ៨. $z=\left(1-i\sqrt{3}\right)^{15}\left(i\right)^{12}$ ៩. $z=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$

១០. $z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ១១. $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}+\left(1-i\sqrt{3}\right)^{10}$ ១២. $z=\left(1+i\right)^{20}+\left(1-i\right)^{20}$

១៣. $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$ ១៤. $z=1+i\tan\dfrac{\pi}{3}$ ១៥. $z=1+i\cot\dfrac{\pi}{6}$

7. សរសេរជាទម្រង់ពិជគណិត

ក. $z=1+i+i^2+i^3+......+i^{20}$ ខ. $z=i+i^2+i^3+......+i^{2016}$

គ. $z=1+z+z^2+z^3+......+z^{2016}$ បើ $z=1+i\sqrt{3}$ ។

8. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច z ជាទម្រង់ពិជគណិតបើគេឲ្យ

ក. $|z|=2$ និង $\arg z=\dfrac{\pi}{3}$ ខ. $|z|=4$ និង $\arg z=\dfrac{3\pi}{4}$ គ. $|z|=1$ និង $\arg z=-\dfrac{\pi}{2}$

ឃ. $|z|=6$ និង $\arg z=\dfrac{7\pi}{6}$ ង. $|z|=\sqrt{2}$ និង $\arg z=\dfrac{5\pi}{4}$ ច. $|z|=\sqrt{3}$ និង $\arg z=-\dfrac{\pi}{3}$

9. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចជាទម្រង់ពិជគណិត

ក. $z=\sin\dfrac{\pi}{6}+i\cos\dfrac{\pi}{6}$ ខ. $z=1+\cos\dfrac{10\pi}{9}+i\sin\dfrac{10\pi}{9}$ គ. $z=1+\sin\dfrac{\pi}{6}+i\cos\dfrac{\pi}{6}$

ឃ. $z=1-i\tan\dfrac{\pi}{5}$ ង. $z=\tan\dfrac{5\pi}{8}+i$ ច. $z=\sin\varphi+2i\sin\dfrac{\varphi}{2}$

ឆ. $z=\cos\varphi+i\left(1+\sin\varphi\right)$ ជ. $z=\dfrac{1+\sin\frac{\pi}{9}+i\cos\frac{\pi}{9}}{1+\sin\frac{\pi}{9}-i\cos\frac{\pi}{9}}$ ឈ. $z=\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^{8}$

10. គណនា

ក. $z=\sqrt{9\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}$ ខ. $z=\sqrt[5]{1+i}$ គ. $z=\sqrt[8]{-1}$

ឃ. $z=\sqrt[6]{1+i\sqrt{3}}$ ង. $z=\sqrt[4]{-2-i2\sqrt{3}}$ ច. $z=\sqrt[5]{(2-2i)^4}$

ឆ. $w=\sqrt[3]{-2+2i}$ ជ. $w=\sqrt[4]{-4}$ ឈ. $w=\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt{3}-i}{8+8i}}$

11. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច

ក. $z^2+25=0$ ខ. $z^3+8i=0$ គ. $z^4+81=0$ ឃ. $z^4=8\left(-1+\sqrt{3}i\right)$

ង. $z^3=4\sqrt{2}-4i$ ច. $z^5+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i=0$ ឆ. $z^4+8+i8\sqrt{3}=0$ ជ. $z^2+\left|z\right|^2=0$

12. ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថារូបមន្តដឺម័រ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប n

ខ. ដោយប្រើរូបមន្តដែលមានស្រាយរួចខាងលើ បង្ហាញថាសមភាពខាងក្រោមពិត៖

១. $\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$ ២. $(\sin\theta+i\cos\theta)^n=\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

13. ស្រាយបញ្ជាក់ថា

ក. $\frac{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^5(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)^3}{(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)^{-9}(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)^9}=1$ ។

ខ. $\left(\frac{1+\sin\alpha+i\cos\alpha}{1+\sin\alpha-i\cos\alpha}\right)^n=\cos\left[n\left(90^\circ-\alpha\right)\right]+i\sin\left[n\left(90^\circ-\alpha\right)\right]$ ។

គ. $(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$ ។ ឃ. $\left(\sqrt{3}+i\right)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$ ។

ង. $\left(\frac{1+i\tan x}{1-i\tan x}\right)^n=\frac{1+i\tan nx}{1-i\tan nx}$ ។

ច. $\frac{(1+\sin x+i\cos x)^n}{(1+\sin x-i\cos x)^n}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ។

ឆ. គេឲ្យ $z=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$ បង្ហាញថា $(1+z)^3=8\cos^3\frac{2\pi}{5}\left(\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$ ។

ជ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $x+\frac{1}{x}=2\cos\alpha$ នោះ $x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\alpha$ ។

14. គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម៖

១. $\left(\frac{i}{1+i}\right)^{2016}$ ២. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2017}$ ៣. $\frac{1}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{619}}$

៤. $\left(\sqrt{3}-i\right)^{1/2}$ ៥. $\left(2+2i\sqrt{3}\right)^{-5/2}$ ៦. i^n , $n\in\mathbb{N}$

៧. $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^m}$, $n,m\in\mathbb{N}$ ៨. $\left(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ\right)^{-4}$ ៩. $(1+\cos a+i\sin a)^n$

១០. $(1-i)^{-2}+(1+i)^{-2}$ ១១. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2p}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2p}$, $p\in\mathbb{N}$

15. ក. ដោះស្រាយសមីការ $\boldsymbol{Z^2-2Z\sin}$ á $\boldsymbol{-2i+\sin^2}$ á $\boldsymbol{=0}$; (á $\in\mathbb{R}$) $(\boldsymbol{1})$

ខ. តាង $\boldsymbol{Z'}$; $\boldsymbol{Z''}$ ជាឬសសមីការនេះដែល $\boldsymbol{Z=\frac{Z'-Z''}{2}+\sqrt{2}}$ ។ គណនា $|\boldsymbol{Z}|$; $\boldsymbol{arg(Z)}$

16. ដោះស្រាយសមីការ:

ក. $\boldsymbol{\left|Z-1-\sqrt{2i}\right|^{\log_{|Z|}(Z\bar{Z})}=\log_{|Z|}\left|\frac{2+\sqrt{3i}}{2-\sqrt{3i}}\right|}$ ខ. $\boldsymbol{\frac{Z}{3+4i}+\frac{Z-1}{5i}=\frac{5}{3-4i}}$

គ. $\boldsymbol{(Z^2+Z+1)+(Z^2+2Z+3)+\cdots+(Z^2+20Z+39)=-4500}$

17. បង្ហាញថា បើ α ជាឬសនៃពហុធាមួយមានមេគុណជាចំនួនពិត នោះ $\overline{\alpha}$ ក៏ជាឬសដែរ។ តើលទ្ធផលនេះត្រឹមត្រូវឬទេ ចំពោះពហុធាមានមេគុណកុំផ្លិច ?

18. រកចំនួនកុំផ្លិច z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $\frac{50}{\overline{z}}-\frac{10}{z}=2+9i$ ដែល $|z|=2\sqrt{10}$ ។

19. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទដឺម័រតាមវិចារអនុមានរួមណិតវិទ្យា $z^n=\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)$ ដែល $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ ចំពោះ $n=1,2,3,\cdots$ ។

20. គេឲ្យពហុធា $P(z)=z^3-(2+i)z^2+2(1+i)z-2i$ ។ចូរគណនា $P(i)$ រួចដោះស្រាយសមីការ $P(z)=0$ ក្នុង $\mathbb{C}$ ។

21. គេកំណត់កន្សោម $Z=f(z)=\frac{iz^2}{\overline{z}}$

ក. គណនា $f(i)$ និង $f(2-3i)$ ជាទម្រង់ពិជគណិត ។

ខ. គណនាម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ Z រួចទាញរកតម្លៃនៃអាគុយម៉ង់ដែលនាំឲ្យ $Z\in\mathbb{R}$ ។

22. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $u=1+i\sqrt{3}$ និង $v=1+i$ ។

ក. សរសេរ u និង v ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. សរសេរ $w=\frac{u}{v}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចជាទម្រង់ពីជគណិត ។

គ. ទាញរកតម្លៃពិតប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$ ។

23. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $w=1+i\sqrt{3}$ និង $z=1-i$ ។

ក. សរសេរ z និង w ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. សរសេរ $u=\frac{w}{z}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចជាទម្រង់ពីជគណិត ។

គ. បង្ហាញថា u^{1200} ជាចំនួនពិត ។

ឃ. គណនាតម្លៃពិតប្រាកដនៃ $\cos\frac{7\pi}{12}$ និង $\sin\frac{7\pi}{12}$ ។

24. គេឲ្យ $z=\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)^2\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)$

ក សរសេរ z ជាទម្រង់ពិជគណិត និង ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ខ គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$ គ គណនា z^{2015} ជាទម្រង់ពិជគណិត

25. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\sqrt{3}+i$ ។

ក. កំណត់ $n\in\mathbb{N}$ ដើម្បីឲ្យ Z^n ជាចំនួនពិត។ ខ. កំណត់ $n\in\mathbb{N}$ ដើម្បីឲ្យ Z^n ជាចំនួននិម្មិត។

26. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\cos\varphi+i\sin\varphi$

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $Z^n+Z^{-n}=2\cos n\varphi$, $Z^n-Z^{-n}=2i\sin\varphi$ ។

ខ. ប្រើលទ្ធផលខាងលើរកចម្លើយនៃ $\left(Z+\overline{Z}\right)^5$, $\left(Z-\overline{Z}\right)^5$ និងគណនា $\cos 5\varphi$, $\sin 5\varphi$ ជាអនុគមន៍នៃ $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ និង $\cos 3\varphi$, $\sin 3\varphi$ ។

27. ក. សរសេរ $Z=1+\left(\sqrt{2}-1\right)i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ខ. គណនា $\cos\frac{\pi}{8}$ និង $\sin\frac{\pi}{8}$ ។

28. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងចំនួនកុំផ្លិច:

ក. $3x^3-24=0$ ខ. $2x^4+16=0$ គ. $(Z+1)^n-(Z-1)^n=0 \quad n\in\mathbb{N}$

29. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\cos\varphi+i\sin\varphi \quad ,\varphi\in\mathbb{R}$ ។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 1$ គេមាន $Z^n+\frac{1}{Z^n}=2\cos n\varphi$ និង $Z^n-\frac{1}{Z^n}=2i\sin n\varphi$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cos^4\varphi=\frac{1}{8}(\cos 4\varphi+4\cos 2\varphi+3)$ និង $\sin^5\varphi=\sin 5\varphi-5\sin 3\varphi+10\sin\varphi$ ។

30. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z^2=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

ក. សរសេរ Z ជារាងពិជគណិត ។ ខ. សរសេរ Z ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

គ. រកតម្លៃពិតប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{8}$ *and* $\sin\frac{\pi}{8}$ ។

31. គេឲ្យ $z=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

ក. សរសេរ z^2 ជាទម្រង់ពិជគណិត

ខ. សរសេរ z^2 និង z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គ. ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{8}$ និង $\sin\frac{\pi}{8}$ ។

32. w និង z ជាចំនួនកុំផ្លិច កំណត់ដោយ $w=2+2i\sqrt{3}$ និង $z=4i\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ក. សរសេរ z និង w ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. សរសេរ $U=w+z$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ. សរសេរ w^{2014} និង z^{2014} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

33. គេមានសមីការនៃចំនួនកុំផ្លិច $|z-3-i|^2+2z+\overline{z}=7+i$ ។

ក. ចូរដោះស្រាយសមីការខាងលើដោយយក z_1 និង z_2 ជាឫសនៃសមីការដែល $|z_1|<|z_2|$ ។

ខ. សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ. គណនា $w=z_2+z_1^{\,2}+z_1^{\,3}+z_1^{\,4}+...+z_1^{\,2015}$ ។

34. បើ z និង z' ជាចំនួនកុំផ្លិចមានម៉ូឌុល 1 ហើយ a ជាចំនួនពិត ។ គេកំណត់ $Z=z+z'+azz'+1$ និង $Z'=z+z'+zz'+a$ ។

ក. បង្ហាញថា $Z'=zz'\overline{Z}$ និង $|Z|=|Z'|$ ។

ខ. គេសន្មតថា $1+zz'\neq 0$ ។ បង្ហាញថា ចំនួន $u=\frac{z+z'}{1+zz'}$ ជាចំនួនពិត ។

35. ក. បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $(u,v)\in\mathbb{C}^2$: $|u|+|v|\leq|u+v|+|u-v|$ ។

ខ. សិក្សាថា ចំពោះគ្រប់ $(z_1,z_2,z_3,z_4)\in\mathbb{C}$

គេបាន $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|\leq|z_1+z_2|+|z_1+z_3|+|z_1+z_4|+|z_2+z_3|+|z_2+z_4|+|z_3+z_4|$

36. បង្ហាញថា

1. $C_n^0+C_n^3+C_n^6+\cdots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$

2. $C_n^1+C_n^4+C_n^7+\cdots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$

3. $C_n^2+C_n^5+C_n^8+\cdots=\frac{1}{3}\left(2^n+\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right)$

4. $C_n^0+C_n^4+C_n^8+\cdots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$

5. $C_n^1+C_n^5+C_n^9+\cdots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

6. $C_n^2+C_n^6+C_n^{10}+\cdots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$

7. $C_n^3+C_n^7+C_n^{11}+\cdots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

មេរៀនទី ៤

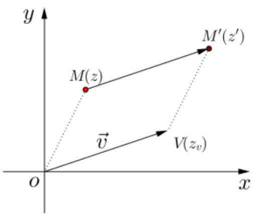
អនុវត្តន៍ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងធរណីមាត្រ

(Complex Number Apply to Geometry)

១. បំលែងនៃចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់

ក. បំលែងកិលនៃចំនួនកុំផ្លិច

ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) មាន Mជាអាហ្វិចនៃ z ហើយ M' ជាអាហ្វិចនៃ z' បើចំណុច Mផ្លាស់ទីទៅចំណុច M' តាមទិសវ៉ិចទ័រ $\vec{v}$ ជារូបភាពនៃ z_vនោះគេបាន $z' = z + z_v$ ។



សម្រាយបញ្ជាក់

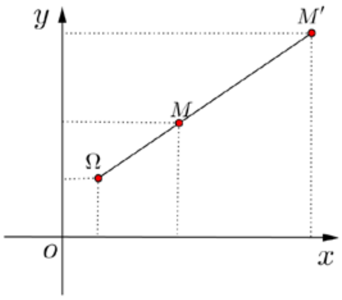
យើងមាន $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

ដោយ $\overrightarrow{MM'} = z' - z$ និង $\vec{v} = z_v$

នាំឲ្យ $z' - z = z_v \quad \Rightarrow \quad z' = z + z_v$

ខ. បំលែងចាំងផ្ចិត Ω

ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច(xoy) គេមាន Mជាអាហ្វិចនៃ z ហើយ M'ជាអាហ្វិចនៃ z' បើចំណុច M ផ្លាស់ទីទៅចំណុច M' តាមបំលែងចាំងផ្ចិត Ωជារូបភាពនៃ z_Ω នោះគេបាន$z' - z_\Omega = \lambda(z - z_\Omega)$ ។



សម្រាយបញ្ជាក់

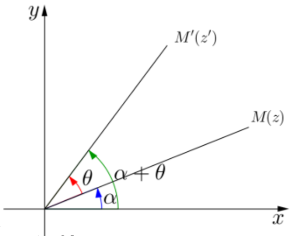
យើងមាន $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda\overrightarrow{\Omega M}$

តែ $\overrightarrow{\Omega M'}(z' - z_\Omega)$ និង $\overrightarrow{\Omega M}(z - z_\Omega)$

គេបាន $z' - z_\Omega = \lambda(z - z_\Omega)$

គ. បំលែងវិលជុំវិញគល់តម្រុយនៃប្លង់កុំផ្លិច

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ មានរូបភាព $M(z)$ ហើយ $M(z)$ វិលជុំវិញផ្ចិត O តាមមុំ θ បានរូបភាព $M'(z')$ នោះគេបាន $z' = (\cos\theta + i\sin\theta)z$ ។



សម្រាយបញ្ជាក់

តាមរូបយើងមាន $z' = \cos(\alpha+\theta) + i\sin(\alpha+\theta)$

គេបាន $z' = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\theta + i\sin\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)z$

ឧទាហរណ៍១ នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xOy) គេឲ្យចំណុច M ជាចំណុចរូភាពនៃ $z = \sqrt{3} + i$ ។

ចូរកំណត់ z' ដោយដឹងថា $M'(z')$ ជារូបភាពនៃ M តាមបំលែងវិលផ្ចិត O និង មុំ $\theta = \frac{\pi}{12}$ ។

ចម្លើយ: បើ $M'(z')$ ជារូបភាពនៃ $M(z)$ តាមបំលែងវិលផ្ចិត O និងមុំ $\theta = \frac{\pi}{12}$

នោះគេបាន $z' = \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)z$

ដោយ $z = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

គេបាន $z' = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)\right)$

ដូចនេះ $z' = 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ឧទាហរណ៍២ នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xOy)គេឲ្យចំណុច M ជាចំណុចរូភាពនៃ $z = 1-i\sqrt{3}$ ។

ចូរកំណត់ z' ដោយដឹងថា $M'(z')$ ជារូបភាពនៃ M តាមបំលែងវិលផ្ចិត O និង មុំ $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ។

ចម្លើយ: បើ $M'(z')$ ជារូបភាពនៃ $M(z)$តាមបំលែងវិលផ្ចិត O និងមុំ $\theta = \frac{2\pi}{3}$

នោះគេបាន $z' = \left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)z$

ដោយ $z = 1-i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)$

គេបាន $z' = 2\left(\cos(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3})\right)$

ដូចនេះ $z' = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ឃ. បារីសង់នៃប្រព័ន្ធចំណុចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

គេឲ្យ $(A_k, \alpha_k)_{1\le k\le n}$ ជាប្រព័ន្ធមួយមាន n ចំណុចរៀងគ្នា ដែលមានរូបភាព z_{A_k} ។

បើ $\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k)\neq 0$ នោះបារីសង់ G នៃប្រព័ន្ធអាហ្វិចមួយ កំណត់ដោយ $z_G = \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k z_{A_k}\right)}{\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k)}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាមនិយមន័យ បើ G ជាបារីសង់នៃប្រព័ន្ធ $(A_k, \alpha_k)_{1\le k\le n}$ គឺ $\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\overrightarrow{GA_k}\right)=\vec{0}$ ។

តែ $\overrightarrow{GA_k} = \overrightarrow{OA_k} - \overrightarrow{OG}$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\overrightarrow{OA_k}-\alpha_k\overrightarrow{OG}\right)=\vec{0}$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\overrightarrow{OA_k}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\overrightarrow{OG}\right)=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\overrightarrow{OA_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\overrightarrow{OG}\right)$$

$$\overrightarrow{OG}\cdot\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k)=\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\overrightarrow{OA_k}\right) \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{OG}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\overrightarrow{OA_k}\right)}{\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k)}$$

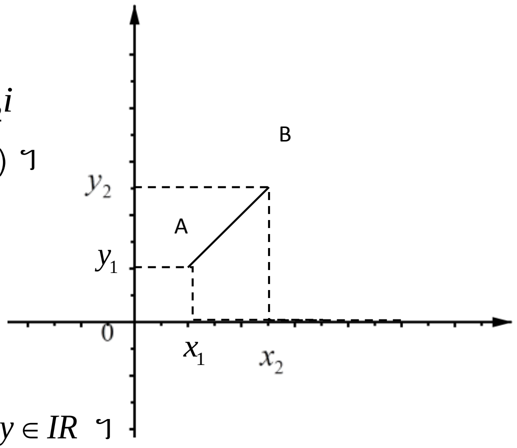
ដូចនេះ $z_G = \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\overrightarrow{OA_k}\right)}{\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k)}$, $\left(\overrightarrow{OG}=z_G\right)$

២. កូអរដោនេនៃចំនួនកុំផ្លិចក្នុងប្លង់ធរណីមាត្រ

ក.ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច

គេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ $z_1 = x_1 + y_1 i$ នឹង $z_2 = x_2 + y_2 i$

តាង ***A*** និង ***B*** ជាចំណុចនៃ z_1 នឹង z_2 ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) ។



គេបាន $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

ហើយ $z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)$

នោះ $|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

ដូច្នេះ $AB = |z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, $\forall x, y \in IR$ ។

ឧទាហរណ៍: គេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ $z_1 = 1 + 2i$ និង $z_2 = -2 + 6i$ ហើយ ***A*** ; ***B***ជាចំណុចរូបរៀងគ្នានៃ z_1, z_2 ។ រកប្រវែង ***AB*** ។

ចម្លើយ រកប្រវែង ***AB***

គេបាន $AB = |z_2 - z_1|$

$z_2 - z_1 = -2 + 6i - (1 + 2i) = -3 + 4i$

$|z_2 - z_1| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

ដូច្នេះ ***AB = 5*** ឯកតាប្រវែង

ឧទាហរណ៍ គេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ $z_1 = 2 + a + i$ និង $z_2 = 3 + i(6 - a), \forall a \in IR$ ក្នុងប្លង់ចំនួនកុំផ្លិច (xoy) គេតាង ***A*** និង ***B*** ជាចំណុចរូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z_1 នឹង z_2 ។ ចូរកំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យចម្ងាយ ***AB*** ខ្លីបំផុត។

ចម្លើយ កំណត់តម្លៃ a

ដោយ $AB = |z_2 - z_1|$

ហើយ $z_2 - z_1 = 3 + i(6 - a) - (2 + a + i) = (1 - a) + i(5 - a)$

នោះ $|z_2 - z_1| = \sqrt{(1 - a)^2 + (5 - a)^2} = \sqrt{1 - 2a + a^2 + 25 - 10a + a^2}$

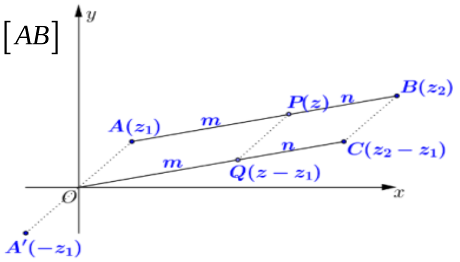
$= \sqrt{2a^2 - 12a + 26} = \sqrt{2(a - 3)^2 + 8}$

ដើម្បីបាន ***AB*** ខ្លីបំផុតកាលណាឲ្យ $(a - 3)^2 = 0$ នោះ: $a = 3$

ដូចនេះ: ចំនួនពិត $a = 3$ នោះ:ប្រវែង ***AB*** ខ្លីបំផុត

ខ.ចំណុចចែកក្នុងអង្កត់តាមផលធៀបមួយ

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = a_1 + b_1 i$ និង $z_2 = a_2 + b_2 i$ ដែលមានរូបភាពតាងដោយចំណុច $A(z_1)$ និង $B(z_2)$ រៀងគ្នា។ តាងចំណុច ***P***(z) ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច ***Z*** ដែលស្ថិតនៅលើ $[AB]$ ហើយចែក $[AB]$ តាមផលធៀប $\frac{m}{n}$ ។



យើងចង់រកចំនួនកុំផ្លិច z ។ ភ្ជាប់ចំណុច 0 និង A ។

តាមចំណុច 0 គេគូសអង្កត់ស្របនិង $[AB]$ និងតាមចំណុច B គូសបន្ទាត់ស្របនឹង $[0A]$ ភ្ជាប់ហើយអង្កត់ទាំងពីរជួបគ្នាត្រង់ចំណុច C ។ តាមចំណុច P គូសបន្ទាត់ $[A0]$ កាត់ $[0C]$ ត្រង់ចំណុច Q តាង $A'(-z_1)$ ជារូបភាពនៃ $-z_1$ គេបាន $Q(z-z_1)$ ជារូបភាពនៃ $z+(-z_1)$ ឬ $z-z_1$

$C(z_2-z_1)$ ជារូបភាពនៃ $z_2+(-z_1)$ ឬ z_2-z_1

យើងបាន $\dfrac{m}{m+n}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1} \Rightarrow z-z_1=\dfrac{m}{m+n}(z_2-z_1)$

$$\Rightarrow z = \frac{mz_2}{m+n}-\frac{mz_1}{m+n}+\frac{mz_1+nz_1}{m+n}=\frac{nz_1+mz_2}{m+n}$$

រូបភាពម៉្យាងទៀត $z=\dfrac{nz_1+mz_2}{m+n}=\dfrac{z_1+\frac{m}{n}z_2}{1+\frac{m}{n}}$

បើគេតាង $\dfrac{m}{n}=\lambda$ គេបាន $z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$

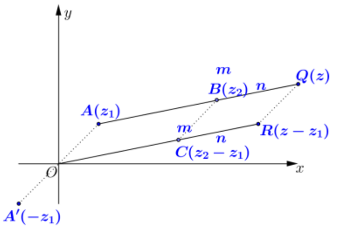
ជាទូទៅ បើគេមាន Z_1 និង Z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមានរូបភាពរៀងគ្នា $A(z_1)$ និង $B(z_2)$ ហើយចំណុច P(z) ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច Z ដែលស្ថិតនៅលើ $[AB]$ ហើយចែក $[AB]$ តាមផលធៀប $\dfrac{m}{n}$ នោះគេបាន $z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ ដែល $\dfrac{m}{n}=\lambda$ ។

សម្គាល់

- បើ $\lambda=1$ នោះ P ស្ថិតនៅលើចំណុចកណ្តាលអង្កត់ $[AB]$
- បើ $\lambda>0$ នោះ P ស្ថិតនៅលើចន្លោះ A និង B
- បើ $\lambda<0$ នោះ P ស្ថិតនៅលើបន្លាយនៃ $[AB]$ ឬ នៅក្រៅ $[AB]$ ។

គ. ចំណុចចែកក្រៅអង្កត់តាមផលធៀបមួយ

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z_1=a_1+b_1i$ និង $z_2=a_2+b_2i$ ដែលមានរូបភាពតាងដោយចំណុច $A(z_1)$ និង $B(z_2)$ រៀងគ្នា។ តាងចំណុច $\boldsymbol{Q(z)}$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $\boldsymbol{Z}$ ដែលស្ថិតនៅលើ $[AB]$ ហើយចែក $[AB]$ តាមផលធៀប $\boldsymbol{\frac{m}{n}}$ ។ យើងចង់រកចំនួនកុំផ្លិច $\boldsymbol{z}$ ។ ភ្ជាប់ចំណុច O និង A ។ តាមចំណុច 0 គេគូសអង្កត់ស្របនិង $[AB]$ និងតាមចំណុច $\boldsymbol{B}$ គូសបន្ទាត់ស្របនិង $[OA]$ ភ្ជាប់ហើយអង្កត់ទាំងពីរជួបគ្នាត្រង់ចំណុច C ។ តាមចំណុច $\boldsymbol{Q}$ គូសបន្ទាត់ $[AO]$ កាត់ $[OC]$ ត្រង់ចំណុច $\boldsymbol{R}$ តាង $A'(-z_1)$ ជារូបភាពនៃ $-z_1$ ។ គេបាន $R(z-z_1)$ ជារូបភាពនៃ $z+(-z_1)$ ឬ $z-z_1$



$C(z_2-z_1)$ ជារូបភាពនៃ $z_2+(-z_1)$ ឬ z_2-z_1

យើងបាន $\dfrac{m}{m-n}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1} \Rightarrow z-z_1=\dfrac{m}{m-n}(z_2-z_1)$

$$z=\frac{mz_2}{m-n}-\frac{mz_1}{m-n}+\frac{m-n}{m-n}z_1=\frac{mz_2-mz_1+mz_1-nz_1}{m-n}=\frac{mz_2-nz_1}{m-n}$$

រូបភាពម៉្យាងទៀត $z = \frac{nz_1 - mz_2}{n-m} = \frac{z_1 - \frac{m}{n}z_2}{1-\frac{m}{n}}$

បើគេតាង $\frac{m}{n} = \lambda$ គេបាន $z = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1-\lambda}$

ជាទូទៅ បើគេមាន Z_1 និង Z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមានរូបភាពរៀងគ្នា $A(z_1)$ និង $B(z_2)$ ហើយចំណុច P(z) ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច Z ដែលស្ថិតនៅលើ$[AB]$ហើយចែក$[AB]$តាមផលធៀប $\frac{m}{n}$ នោះគេបាន $z = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1-\lambda}$ ដែល $\frac{m}{n} = \lambda$ ។

ឧទាហរណ៍ គេមានពីរចំណុច ***A*** និង ***B*** ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_A = 2+7i$ និង $z_B = -1+i$ ។ ***P*** ជារូបភាពនៃ z_P ជាចំណុចចែកក្នុងនៃ$[AB]$តាមផលធៀប $n = \frac{1}{3}$ និង ***Q***ជារូបភាពនៃ z_Q ជាចំណុចចែកក្រៅនៃ$[AB]$ តាមផលធៀប $m = \frac{2}{3}$ ។ ចូរកំណត់ z_P និង z_Q ។

ចម្លើយ កំណត់ z_P និង z_Q

យើងមាន $z_A = 2+7i$ និង $z_B = -1+i$

ដោយ ***P*** ជារូបភាពនៃ z_P ជាចំណុចចែកក្នុង$[AB]$តាមផលធៀប $n = \frac{1}{3}$

នោះ $$z_p = \frac{z_A + nz_B}{1+n} = \frac{(2+7i) + \frac{1}{3}(-1+i)}{1+\frac{1}{3}} = \frac{5+22i}{4}$$

ដោយ ***Q*** ជារូបភាពនៃ z_Q ជាចំណុចចែកក្រៅ $[AB]$តាមផលធៀប $m = \frac{1}{3}$

នោះ $$z_Q = \frac{z_A - mz_B}{1-m} = \frac{(2+i) - \frac{2}{3}(-1+i)}{1-\frac{2}{3}} = 8+19i$$

ដូច្នេះ $z_P = \frac{5}{4} + i\frac{11}{2}$ និង $z_Q = 8+19i$

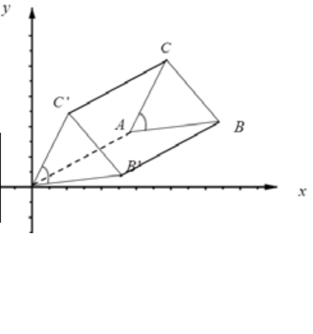
ឃ. ផលធៀបជ្រុងនឹង មុំនៃត្រីកោណក្នុងប្លង់

ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) គេមានបីចំណុច ***A*** ,***B*** , ***C*** ជាចំណុចរូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z_A , z_B , z_C ។ សង់វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{AC}$ នោះគេបាន $\Delta OB'C'$ និង ΔABC ជាត្រីកោណប៉ុនគ្នានោះ $\angle BAC = \angle B'OC'$ ។

គេបាន $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$ និង $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{AC}(z_C - z_A)$

គេមាន $\angle B'OC' = \angle xOC - \angle xOB'$ ឬ $\angle BAC = \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A)$

$= \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$ ហើយផលធៀបជ្រុង $\frac{AC}{AB} = \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right|$



ដូចនេះ បើ $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ បង្កើតបានជាត្រីកោណ ***ABC*** នោះគេបាន

$$\frac{AC}{AB}=\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right| \quad \text{និង} \quad \angle BAC=\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍: នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) គេអោយបីចំណុច ***A*** ,***B*** , ***C*** មានអាហ្វិចរៀងគ្នា $z_A=2+i$; $z_B=3+4i$ និង $z_C=-2+9i$ ។ ចូរគណនាផលធៀបជ្រុង $\frac{AC}{AB}$ និង $\angle BAC$ ។

ចម្លើយ គណនាផលធៀបជ្រុង $\frac{AC}{AB}$ និង $\angle BAC$

ដោយ $\quad \frac{AC}{AB}=\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right| \quad$ និង $\quad \angle BAC=\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)$

យើងមាន $\quad \frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{(-2+9i)-(2+i)}{(3+4i)-(2+i)}=\frac{(-4+8i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}$

$$=\frac{20+20i}{10}=2+2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ដូច្នេះ $\quad \frac{AC}{AB}=\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=2\sqrt{2} \quad$ និង $\quad \angle BAC=\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{4}$

ង. សំណុំចំណុចក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

ក្នុងប្លង់កុំផ្លិចប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(0,\vec{i},\vec{j})$ គេតាងចំណុច $P(x,y)$ ជាចំណុចរូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=x+iy$ ។ សំណុំនៃរូបភាព ***P*** ទាំងអស់ដែលអាចមានទៅតាមលក្ខខណ្ឌដែលត្រូវបំពេញនៃ z បង្កើតបានជាសំណុំចំណុចនៃ ***P*** ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច។

ឧទាហរណ៍: ១. គេអោយចំនួនកុំផ្លិច z ផ្ទៀងផ្ទាត់ $(1+i)z+(1-i)\bar{z}=4$ ដែល ***P*** ជា រូបភាពនៃចំនួន z ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) ។ រកសំណុំចំណុចនៃ ***P*** ។

ចម្លើយ រកសំណុំចំណុចនៃ ***P***

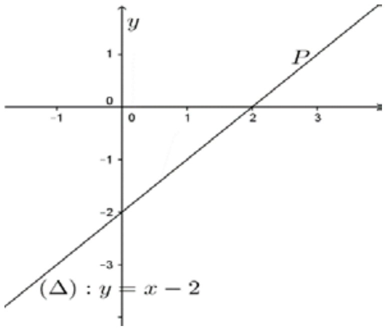
តាង $\quad z=x+iy$ និង $\bar{z}=x-iy$

នោះ $\quad (1+i)z+(1-i)\bar{z}=4$

$$\Leftrightarrow (1+i)(x+iy)+(1-i)(x-iy)=4 \quad \Leftrightarrow \quad x+iy+ix-y+x-iy-ix-y=4$$

$$\Rightarrow 2x-2y=4 \qquad \text{នោះ} \quad \Rightarrow y=x-2$$

ដូចនេះ សំណុំចំណុចនៃ ***P*** គឺជាបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $(\Delta): y=x-2$ ។



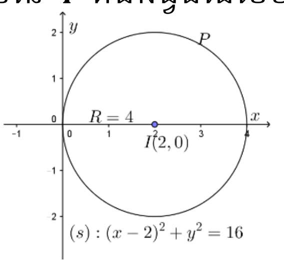
ឧទាហរណ៍: ២. គេអោយចំនួនកុំផ្លិច z ផ្ទៀងផ្ទាត់ $|z-2|=4$ ដែល P ជារូបភាពនៃចំនួន z ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច (xoy) ។ រកសំណុំចំណុចនៃ P ។

ចម្លើយ រកសំណុំចំណុចនៃ P

តាង $z=x+iy$ នោះ $|z-2|=4 \Leftrightarrow |x+iy-2|=4$

$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=4^2$

ដូចនេះ សំណុំចំណុចនៃ P គឺជារង្វង់ដែលមានផ្ចិត $I(2,0)$ និង កាំ $R=4$



លំហាត់ចំនួនកុំផ្លិច

1. រកសំណុំចំណុច P ដែលជារូបភាពនៃ z ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

ក. $|z|=2$ ខ. $|z+1|=3$ គ. $|z-i|=3$

ឃ. $|z+1-i|=5$ ង. $|2z-1|=1$ ច. $|3-z|=2$

ឆ. $|z-2+i|=3$ ជ. $\left|\dfrac{z-2+2i}{z-i}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ឈ. $\arg(z)=\dfrac{\pi}{3}$

ញ. $\arg(z+1)=\dfrac{3\pi}{4}$ ដ. $\arg(z+3i)=\dfrac{\pi}{3}$ ឋ. $\arg(z-2+2i)=\dfrac{\pi}{4}$

ឌ. $|z-4|=|z|$ ឍ. $|z+2i|=|z-1|$ ណ. $|z-4+i|=|z-1-2i|$

2. គេឲ្យ $P(z)$, $Q(iz)$, $R(2+2i)$ កំណត់សំណុំចំណុច P ដើម្បីឲ្យ P,Q,R រត់ត្រង់គ្នា ។

3. ១. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z_1=cos\frac{\pi}{4}+i\,sin\frac{\pi}{4}$ និង $Z_2=cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}$ ។

ក. គណនា $S=Z_1+Z_2$; $P=Z_1-Z_2$; $Q=\frac{Z_1}{z_2}$ ។

ខ. ទាញរកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ S ; P ; Q ។

២.ក. ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{C}$ សមីការ $(Z^2+4)(Z^2-2Z+5)=0$ (1) ។

ខ. តាងរូបភាពនៃចម្លើយ (1) ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ។ ប្រាប់ប្រភេទចតុកោណនេះ ។

៣.ក. ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{C}$ សមីការ $Z^3-7Z^2+17Z-15=0$ ។

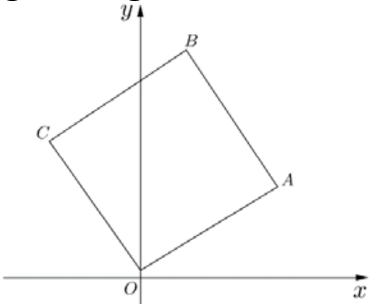
ខ. ក្នុងប្លង់កុំផ្លិចគេតាង M, N, P ជាចំនុចអាភិចនៃចម្លើយនៃសមីការខាងលើ ។
ចូរសង់រូប រួចបង្ហាញថា MNP ជាត្រីកោណកែងសមបាត ។

4. ចំណុច A,B,Cជារូបភាពរៀងគ្នានៃចំនួនកុំផ្លិច $-3+i$, $-2+2i$, $1-3i$។ ប្រាប់ប្រភេទនៃត្រីកោណABC

5. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $2+i$, -1 , $3-2i$ ដែលមានរូបភាពរៀងគ្នាតាងដោយចំណុច A,B,C ។ គណនាមេដ្យានទាំងបីនៃត្រីកោណ ។

6. រូបខាងស្តាំបង្ហាញពីការេ $OABC$ ។បើ $\overrightarrow{OA}=5+2i$ សរសេរវិចទ័រខាងក្រោមជាទម្រង់ $a+bi$

   ក. $\overrightarrow{CB}$ ខ. $\overrightarrow{BC}$ គ. $\overrightarrow{OC}$



7. គេឲ្យចំនួនពិត α មួយដែល $-\pi<\alpha<\pi$ ។

   ក.បង្ហាញថា $\sin^2\alpha-2(1+\cos\alpha)=-4\cos^4\frac{\alpha}{4}$ ។

   ខ.ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{C}$ សមីការ $Z^2-2Z\sin\alpha+2(1+\cos\alpha)=0$ ។

   គ.រកម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់ នៃឬសនីមួយៗជាអនុគមន៍ α ។

8. នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិចមួយ A និង B ជារូបតំណាងឲ្យចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 រៀងគ្នា ។ គណនាប្រវែង AB និងកូអរដោនេចំណុចកណ្តាលនៃ AB បើ

   ក. $z_1=4+5i$ និង $z_2=3+2i$ ខ. $z_1=11-6i$ និង $z_2=-1$

   គ. $z_1=2+i$ និង $z_2=2i$ ឃ. $z_1=3+2i$ និង $z_2=-1-i$

9. គណនាចម្ងាយរវាងពីរចំណុច A និង B នៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម

   ក. A និង B មានអាហ្វិចរៀងគ្នា $z_1=1+i$, $z_2=2-2i$ ។

   ខ. A និង B មានអាហ្វិចរៀងគ្នា $z_1=2+2i$, $z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{3}$ ។

   គ. A និង B មានអាហ្វិចរៀងគ្នា $z_1=3-2i$, $z_2=1+i$ ។

10. គេមានពីរចំណុច A និង B ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_A=2-7i$ និង $z_B=1-i$ ។ P ជារូបភាពនៃ z_p ជាចំណុចចែកក្នុងនៃអង្កត់ $[AB]$ តាមផលធៀប $\lambda_p=\frac{1}{4}$ ហើយ Q ជារូបភាពនៃ z_Q ជាចំណុចចែកក្រៅនៃអង្កត់$[AB]$ តាមផលធៀប $\lambda_Q=\frac{3}{4}$ ។ ចូររក z_p និង z_Q ។

11. គេមានពីរចំណុច A និង B ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_A=2+i\sqrt{2}$ និង $z_B=\sqrt{3}+i\sqrt{2}$ ។ P ជា រូបភាពនៃ z_P ជាចំណុចចែកក្នុងនៃអង្កត់ $[AB]$ តាមផលធៀប $\lambda_P=\frac{2}{3}$ ហើយ Q ជារូបភាពនៃ z_Q ជាចំណុចចែកក្រៅនៃអង្កត់ $[AB]$ តាមផលធៀប $\lambda_Q=\frac{3}{4}$ ។ ចូររក z_P និង z_Q ។

12. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $2-3i$ និង $-1-3i$ មានរូបភាពរៀងគ្នាក្នុងប្លង់កុំផ្លិចតាងដោយ A និង B។

    ក. កំណត់អាហ្វិច P នៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែល P ចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុងតាមផលធៀប $2:1$ ។

    ខ. កំណត់អាហ្វិច Q នៃចំនួនកុំផ្លិច z' ដែល Q ចែកអង្កត់ AB ខាងក្រៅតាមផលធៀប $2:1$ ។

13. ឧបមាថាចំនួនកុំផ្លិច z បំពេញលក្ខខណ្ឌ $|z|=1$ ។

    ក. ចូររករ៉ង់នៃនៃតម្លៃ $|z-2|$ ខ. ចូររករ៉ង់នៃតម្លៃ $arg(z-2)$ ។

14. តាង α, β,γ ជាចំនួនកុំផ្លិចនៅលើរង្វង់ $|z|=R$ និង $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ ។ ចូររកតម្លៃ $\frac{|\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha|}{|\alpha+\beta+\gamma|}$ ។

មេរៀនទី ៥

ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងលោការីត

(*Exponentail and Logarith of Complex Number*)

១. ទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនៃចំនួនកុំផ្លិច

ក. រូបមន្តអឺលែ (*Euler's formula*)

ទម្រង់អឺលែ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ ដែល x ជាមុំហើយ $e = 2{,}7182...$ ជាគោលលោការីតនេពែ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទីមួយ

គេតាងអនុគមន៍ $g(x) = \cos x + i\sin x$

គេមាន $g'(x) = -\sin x + i\cos x$

គុណអង្គទាំពីរនិង i គេបាន $ig'(x) = -i\sin x - \cos x$

គេបាន $g(x) + ig'(x) = 0$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយ

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $g(x) = ke^{ix}$

បើ $x = 0$ នោះ $g(0) = k$ តែ $g(0) = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

នោះ $k = 1$ គេបាន $g(x) = e^{ix}$ ។

ដូចនេះ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$

សម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ពីរ

តាង $y = e^{ix}$

នោះ $y' = ie^{ix} \Rightarrow y'' = i^2e^{ix} = -e^{ix}$

គេបាន $y'' + y' = -e^{ix} + e^{ix} = 0$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនលំដាប់ពីរ

នាំឲ្យចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'' + y' = 0$ គឺ

$y = A\cos x + B\sin x$ (ព្រោះ $\lambda^2 + 1 = 0$ មាន $\Delta < 0$ ហើយ $\lambda = 0 \pm i$)

តែ $y(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = A$ និង $y(0) = e^{i0} = 1$ នាំឲ្យ $A = 1$

$y'(0) = -A\sin 0 + B\cos 0 = B$ និង $y'(0) = ie^0 = i$ នាំឲ្យ $B = i$

ដូចនេះ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$

សម្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើដេរីវេ

តាង អនុគមន៍អថេរកុំផ្លិចដោយ $f(x) = \dfrac{\cos x + i\sin x}{e^{ix}}$

គេបាន $f'(x) = \dfrac{(-\sin x + i\cos x)e^{ix} - ie^{ix}(\cos x + i\sin x)}{e^{2ix}}$

$$f'(x) = \frac{-e^{ix}\sin x + ie^{ix}\cos x - ie^{ix}\cos x + e^{ix}\sin x}{e^{2ix}} = 0$$

នោះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ថេរគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

បើ $f(x)=f(0)=\dfrac{\cos 0+i\sin 0}{e^0}=1$

នាំឲ្យ $\dfrac{\cos x+i\sin x}{e^{ix}}=1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{ix}=\cos x+i\sin x$

ដូចនេះ $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

<u>**រូបមន្តអឺលែរ Euler**</u> $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

ទ្រឹស្តីបទ Taylor (Taylor's Theorem)

ចំពោះចំណុច x និង a ក្នុងចន្លោះ I យើងបាន $\int_a^x f'(t)dt=f(x)-f(a)$ នោះ

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a)+\int_a^x 1\cdot f'(t)dt \\
&= f(a)+\int_a^x \{-(x-t)\}' f'(t)dt \\
&= f(a)+[-(x-t)f'(t)]_a^x+\int_a^x (x-t)f''(t)dt \\
&= f(a)+(x-a)f'(a)+\int_a^x (x-t)f''(t)dt
\end{aligned}$$

ចូរកត់សម្គាល់ថា x គឺជាចំនួនថេរមួយ ហើយ t គឺជាអថេរក្នុងអាំងតេក្រាល $\int_a^x \{-(x-t)\}' f'(t)dt$ ។

ការធ្វើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកបន្តបន្ទាប់យើងបាន

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a)+(x-a)f'(a)+\int_a^x (x-t)f''(t)dt \\
&= f(a)+(x-a)f'(a)+\int_a^x \left(-\frac{(x-t)^2}{2}\right)' f''(t)dt \\
&= f(a)+(x-a)f'(a)+\left[-\frac{(x-t)^2}{2}f''(t)\right]_a^x-\int_a^x \left(-\frac{(x-t)^2}{2}\right) f'''(t)dt \\
&= f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(a)+\int_a^x \frac{(x-a)^2}{2} f'''(t)dt \\
&= f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(a)+\int_a^x \left(-\frac{(x-t)^3}{2\cdot 3}\right)' f'''(t)dt \\
&= f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{2\cdot 3}f'''(a)+\int_a^x \frac{(x-a)^3}{2\cdot 3} f^{(4)}(t)dt \\
&= f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a)+\int_a^x \frac{(x-a)^3}{3!} f^{(4)}(t)dt
\end{aligned}$$

ប្រសិនបើយើងបន្តវិធីនេះរហូតយើងបាន

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

ដោយអនុគមន៍ $f^{(n+1)}(t)$ ជាប់ក្នុងចន្លោះ $[a,x]$ នោះ $f^{(n+1)}(t)$ មានតម្លៃតូចបំផុតតាងដោយ m និង តម្លៃធំ បំផុតតាងដោយ M ក្នុង $[a,x]$ នោះយើងបាន $m\le f^{(n+1)}(t)\le M$ ចំពោះ $a\le t\le x$

អនុគមន៍ $g(t)=\dfrac{(x-t)^n}{n!}$ វិជ្ជមាន ចំពោះគ្រប់ $t\in[a,x]$ ដូច្នេះយើងបាន

$$\frac{(x-t)^n}{n!}m\le\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\le\frac{(x-t)^n}{n!}M$$

$$m\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}dt\le\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\le M\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

$$\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}m\le\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\le\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}M$$

ដោយអនុគមន៍ $f^{(n+1)}(t)$ ជាប់នោះមានតម្លៃ $\xi\in[a,x]$ ដែល $\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$

ដូច្នេះយើងបាន

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

ជាទូទៅ ប្រសិនបើអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ នោះវាមានដេរីវេមិនកំណត់លើចន្លោះ I ហើយប្រសិនបើ

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)=0$ ដែល $\xi\in[a,x]$ និង $a,x\in I$ នោះ $f(x)$ ត្រូវបានគេសរសេរជាស៊េរីគឺ

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)$$

ទ្រឹស្តីបទ ស៊េរី Maclaurin (Maclaurin Series)

ឧបមាថាអនុគមន៍ $f(x)$ កំណត់លើចន្លោះ 0 ។ ប្រសិនបើយើងតាង $f(x)$ ក្នុងទ្រឹស្តីបទ ស៊េរី Taylor នោះ យើងបានស៊េរីដូចខាងក្រោម៖

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\cdots$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)$$ ស៊េរីនេះហៅថា ស៊េរី Maclaurin ។

ឧទាហរណ៍៖

$$\cos x=\cos 0-x\sin 0-\frac{x^2}{2!}\cos 0+\frac{x^3}{3!}\sin 0+\frac{x^4}{4!}\cos 0-\frac{x^5}{5!}\sin 0-\frac{x^6}{6!}\cos 0+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$ ចំពោះ $-\infty<x<\infty$

$$\sin x=\sin 0+x\cos 0-\frac{x^2}{2!}\sin 0-\frac{x^3}{3!}\cos 0+\frac{x^4}{4!}\sin 0+\frac{x^5}{5!}\cos 0-\frac{x^6}{6!}\sin 0-\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$ ចំពោះ $-\infty<x<\infty$

$$e^x=e^0+xe^0+\frac{x^2}{2!}e^0+\frac{x^3}{3!}e^0+\frac{x^4}{4!}e^0+\frac{x^5}{5!}e^0+\frac{x^6}{6!}e^0+\cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$ ចំពោះ $-\infty < x < \infty$

ចំពោះចំនួនកុំផ្លិច e^{ix} **យើងបាន**

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \cdots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + \left(ix - i\frac{x^3}{3!} + i\frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \end{aligned}$$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

ដូចនេះយើងបានរូបមន្ត Euler $\boxed{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$

ខ. ទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

គ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច $z = a + bi$ ដែល a, b ជាចំនួនពិតអាចសរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រគឺ $z = r(\cos x + i\sin x) = re^{i\alpha}$ ដែល $r = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos\alpha = \frac{a}{r}, \sin\alpha = \frac{b}{r}$ ។ ទម្រង់ $z = re^{i\alpha}$ ហៅថាទម្រង់ អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល នៃ $z = a + bi$ ។

គ. ទំនាក់ទំនងអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad (1)$

ជំនួស x ដោយ $-x$

គេបាន $e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i\sin x \quad (2)$

បូកសមីការ (1) និង (2)

គេបាន $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$ គេទាញបាន $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ ។

ដកសមីការ (1) និង (2)

គេបាន $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x$ គេទាញបាន $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ ។

ដូចនេះ $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$; $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ រូបមន្តនេះពិតចំពោះ x ជាចំនួនកុំផ្លិច ។

ឧទាហរណ៍១៖ បង្ហាញថា $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

ចម្លើយ

$$\begin{aligned} \sin 2x &= \frac{e^{i2x} - e^{-2x}}{2i} \\ &= \frac{\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)}{2i} \\ &= 2\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = 2\sin x\cos x \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍២៖ រកតម្លៃ $4\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)$

ចម្លើយ $$4\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2+\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{i}\right)^2$$

$$=e^{2ix}+2+e^{-2ix}-\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)=4$$

ឧទាហរណ៍៣៖ គណនា $\sin^3 x$ ជាផលបូកនៃស៊ីនីស និងកូស៊ីនីសដោយគ្មានស្វ័យគុណ

ចម្លើយ:

$$\sin^3 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3$$

$$=\left(\frac{1}{2i}\right)^3\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^3$$

$$=\left(\frac{1}{2i}\right)^3\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2i}\right)^3\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2i}\right)^3\left(e^{3ix}-2e^{ix}+e^{-ix}-e^{ix}+2e^{-ix}-e^{-3ix}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2i}\right)^3\left(\left(e^{3ix}-e^{-3ix}\right)-3\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{4}\right)\left[\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}-3\cdot\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right]$$

$$=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}$$

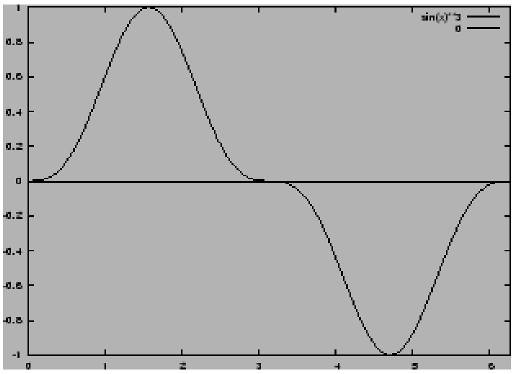


Figure: What is $\sin(x)^3$?

ឃ. ទំនាក់ទំនងជាមួយអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

យើងមាន $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

ជំនួស x ដោយ ix

គេបាន $\cos(ix)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\cosh x$ និង $\sin(ix)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2i}=i\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2}=i\sinh x$

ម្យ៉ាងវិញទៀត $\cosh x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ និង $\sinh x=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2}$

ជំនួស x ដោយ ix

គេបាន $\cosh(ix)=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\cos x$ និង $i\sinh(ix)=i\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}=\sin x$

ឧទាហរណ៍: សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ក. $z=1+\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ ខ. $z=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2016}$

ចម្លើយ សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ក. $z=1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

ដោយ $1+\cos\frac{\pi}{3}=2\cos^2\frac{\pi}{6},\sin\frac{\pi}{3}=2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}$

នាំឲ្យ $z=2\cos^2\frac{\pi}{6}+i2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}=2\cos\frac{\pi}{6}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

ខ. $z=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2016}$

គេបាន $z=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2016}=\left[\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}\right]^{2016}$

$$=\frac{e^{i\frac{2016\times7\pi}{4}}}{e^{i\frac{2016\pi}{4}}}=e^{i3024\pi}=e^{i3024\pi}$$

ឧទាហរណ៍: ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងចំនួនកុំផ្លិច

ក. $\cos x=2$ ខ. $\sin x=-3$

ចម្លើយ ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងចំនួនកុំផ្លិច

ក. $\cos x=2$

តាមរូបមន្តអឺលែ $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

គេបាន $\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=2$

$$e^{ix}+e^{-ix}-4=0$$

$$e^{2ix}-4e^{ix}+1=0$$

តាង $t=e^{ix}$

គេបានសមីការ $t^2-4t+1=0$

$\Delta'=4-1=3$

គេបានឫស $t_1=2-\sqrt{3}$; $t_2=2+\sqrt{3}$

ចំពោះ $t_1=2-\sqrt{3}$

គេបាន $e^{ix}=2-\sqrt{3}\Rightarrow ix=\ln(2-\sqrt{3})\Rightarrow x=-i\ln(2-\sqrt{3})$

ចំពោះ $t_2=2+\sqrt{3}$

គេបាន $e^{ix}=2+\sqrt{3}\Rightarrow ix=\ln(2+\sqrt{3})\Rightarrow x=-i\ln(2+\sqrt{3})$

ខ. $\sin x=-3$

តាមរូបមន្តអឺលែ $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

គេបាន $\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=-3 \quad \Rightarrow e^{2ix}+6e^{ix}-1=0$

តាង $t=e^{ix}$

គេបានសមីការ $t^2+6t-1=0$

$\Delta' =9+1=10$

គេបានឫស $t_1=-3-\sqrt{10} \quad ; \quad t_2=-3+\sqrt{10}$

ចំពោះ $t_1=-3-\sqrt{10}$

គេបាន $e^{ix}=-\left(3+\sqrt{10}\right)=\left(3+\sqrt{10}\right)e^{i\pi}=e^{i\pi+\ln\left(3+\sqrt{10}\right)}$

$\Rightarrow ix=i\pi+\ln\left(3+\sqrt{10}\right) \quad \Rightarrow x=\pi-i\ln\left(3+\sqrt{10}\right)$

ចំពោះ $t_2=-3+\sqrt{10}$

គេបាន $e^{ix}=-\left(3-\sqrt{10}\right)=\left(3-\sqrt{10}\right)e^{i\pi}=e^{i\pi+\ln\left(3-\sqrt{10}\right)}$

$\Rightarrow ix=i\pi+\ln\left(3-\sqrt{10}\right) \quad \Rightarrow x=\pi-i\ln\left(3-\sqrt{10}\right)$

ង.ទម្រង់ប៉ូលែរនៃចំនួនកុំផ្លិច (Polar Form of a Complex Number)

- ចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ មានទម្រង់ប៉ូលែរនៃចំនួនកុំផ្លិចគឺ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

  ដែល $a=r\cos\theta$, $b=r\sin\theta$, $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $r=|z|$, $\theta=\tan^{-1}\left(y/x\right)$

  ដូច្នេះពេលខ្លះទម្រង់ប៉ូលែរត្រូវបានសរសេរជា $z=|z|\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$,

  តែ $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ គេបាន $z=re^{i\theta}$

- មុំ θ ត្រូវបានហៅថា «អាគុយម៉ង់» (argument) កំណត់ដោយ $\theta=\arg z$ អាចរកបានដោយគណនា $\tan\theta=\frac{b}{a}$

ឧទាហរណ៍៖ រកទម្រង់ប៉ូលែរនៃ ៖ 1). $1+i$ 2). $\sqrt{3}-i$

- $z^{-1}=\left(re^{i\theta}\right)^{-1}=r^{-1}\left(e^{i\theta}\right)^{-1}=r^{-1}e^{-i\theta}=\frac{1}{r}e^{i(-\theta)} \quad \Rightarrow z^{-1}=\frac{1}{r}e^{i(-\theta)}$

  ឬ $z^{-1}=\frac{1}{r}\left(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right)$

- បើគេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ $z_1=r_1e^{i\theta_1}$ *and* $z_2=r_2e^{i\theta_2}$

  យើងបាន $z_1z_2=\left(r_1e^{i\theta_1}\right)\left(r_2e^{i\theta_2}\right)=r_1r_2e^{i\left(\theta_1+\theta_2\right)}$ ឬ $z_1z_2=r_1r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$

  $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i\left(\theta_1-\theta_2\right)}$ ឬ $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$

- $\arg\left(z_1z_2\right)=\arg z_1+\arg z_2$ (1) ហើយ $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2$ (2)

ឧទាហរណ៍៖ យើងមាន $z_1=i$ និង $z_2=-1$ ក្នុងករណីនេះយើងបាន $z_1z_2=-i$ ហើយតម្លៃគោលនៃអាគុយម៉ង់នីមួយៗគឺ៖ $\arg\left(i\right)=\frac{\pi}{2}$ $\arg\left(-1\right)=\pi$ $\arg\left(-i\right)=-\frac{\pi}{2}$

តែ $\arg\left(i\right)+\arg\left(-1\right)=\frac{3\pi}{2}\neq-\frac{\pi}{2}$

ដូច្នេះ (1) មិនអនុវត្តន៍ចំពោះតម្លៃគោលនៃអាគុយម៉ង់ ។ បើយើងប្រើ

$\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ $\arg(-1)=\pi$ នោះ $\arg(i)+\arg(-1)=\frac{3\pi}{2}$

គឺត្រឹមត្រូវចំពោះ $\frac{3\pi}{2}$ ជាអាគុយម៉ង់ចំពោះ $-i$ តែវានៅតែមិនមែនជាតម្លៃគោលនៃអាគុយម៉ង់

ចូរកត់សម្គាល់ផងដែរចំពោះ (2) វាផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះឧទាហរណ៍នេះបើយើងប្រើអាគុយម៉ង់គោល។ វាមិនអនុ វត្តន៍ទូទៅទេ ហេតុនេះចូរអនុវត្តន៍ដោយប្រុងប្រយ័ត្ន។

យើងនឹងអនុវត្តផ្នែកនេះឱ្យបានត្រឹមត្រូវពិតប្រាកដចំពោះសមភាពនៃចំនួនកុំផ្លិចពីរ។

គេមាន $z_1=r_1e^{i\theta_1}$ និង $z_2=r_2e^{i\theta_2}$ ដោយដឹងថា $z_1=z_2$ ក្នុងករណីនេះយើងមាន $r_1e^{i\theta_1}=r_2e^{i\theta_2}$

នោះយើងបាន $z_1=z_2$ ទាញបាន $r_1=r_2$ ហើយ $\theta_2=\theta_1++2k\pi$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $k\ (i.e.\ k=0,\pm1,\pm1,\ldots)$

- បើ n ជាស្វ័យគុណចំនួនគត់នៃ $z=re^{i\theta}$ គេបាន $z^n=\left(re^{i\theta}\right)^n=r^ne^{in\theta}$
- បើ $r=1$ នោះ $z^n=\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$ តាមរូបមន្តដឺម៉័រគេបាន $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$

  $,n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

ឧទាហរណ៍៖ គណនា $(1+i)^{2006}$

- គណនាឬសទី n នៃកុំផ្លិចឯកតា $n=2,3,4,\ldots$

  បើ $z^n=1$ នោះ $z=1$ ជាឬសមួយនៃសមីការ

  បើ $z_1=z_2$ នោះ $r_1=r_2$ ហើយ $\theta_2=\theta_1+2\pi k$ ចំពោះចំនួនគត់ $k\ (i.e.\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$

  $\left(re^{i\theta}\right)^n=1e^{i(0)} \quad\Rightarrow\quad r^ne^{in\theta}=1e^{i(0)}$

  $r^n=1 \quad ,n\theta=0+2\pi k \quad ,k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

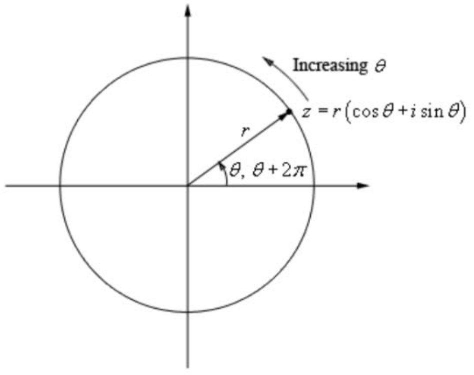
  $\Rightarrow r=1\ ,\theta=\frac{2\pi k}{n} \quad ,k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

  គេបានចម្លើយសមីការគឺ $z=\exp\left(i\frac{2\pi k}{n}\right),k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

  $$\exp\left(i\frac{2\pi k}{n}\right)=\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \quad ,k=0,1,2,\ldots,n-1$$

  គេបានឬសទី n នៃកុំផ្លិចឯកតាមួយដំបូងកំណត់ដោយ $\omega_n=\exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$

  នោះ $\omega_n^k=\left(\exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)\right)^k=\exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right),k=0,1,2,\ldots n-1$



ឧទាហរណ៍៖ ១. រកឬសទី៣នៃ 2

២. គណនា $a).\ (2i)^{\frac{1}{2}}$ $b).\left(\sqrt{3}-i\right)^{\frac{1}{3}}$

<u>**ចម្លើយ**</u>

២. $a).\ 2i=2\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)\ \Rightarrow\theta_0=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \quad a_k=\sqrt{2}\exp\left(i\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)\right) \quad k=0,1$ គេបាន

$$a_0=\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=1+i$$

$$a_1=\sqrt{2}\exp\left(i\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)=-1-i$$

b). $\sqrt{3}-i=2\exp\left(i\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$a_k=\sqrt[3]{2}\exp\left(i\left(-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{3}\right)\right)$ $k=0,1,2$ គេបាន

$$a_0=\sqrt[3]{2}\exp\left(i\left(-\frac{\pi}{18}\right)\right)=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{18}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)\right)=1.24078+0.21878i$$

$$a_1=\sqrt[3]{2}\exp\left(i\frac{11\pi}{18}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{18}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{18}\right)\right)=-0.43092+1.18394i$$

$$a_2=\sqrt[3]{2}\exp\left(i\frac{23\pi}{18}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{23\pi}{18}\right)+i\sin\left(\frac{23\pi}{18}\right)\right)=-0.80986-0.96516i$$

ប្រតិបត្តិ ៖

១. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ប៉ូលែរ៖

a). $z=-1+\sqrt{3}$ b). $z=-9$ c). $z=12i$

២. គណនា $(3+3i)^5$, $(-8i)^{1/3}$

៣. គណនាឫសទី n នៃកុំផ្លិចឯកតាចំពោះ $n=2,3,and\ 4$

<u>**ចម្លើយ**</u>

៣. បើ $n=2$ $\omega_2=\exp\left(i\frac{2\pi}{2}\right)=e^{i\pi}$

នោះ $1=1$ ហើយ $\omega_2=e^{i\pi}=\cos(\pi)+i\sin(\pi)=-1$ $\left(z^2=1\Rightarrow z=-1\,,1\right)$

បើ $n=3$ $\left(z^3=1\right)$

$\omega_3=\exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)$ គេបាន

$1=1$, $\omega_3=\exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

, $\omega_3^2=\exp\left(i\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

បើ $n=4$ $\Rightarrow$ $\omega_4=\exp\left(i\frac{2\pi}{4}\right)=\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$ នោះ៖

$1=1$ $\omega_4=\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)=i$ $\omega_4^2=\exp(i\pi)=-1$ $\omega_4^3=\exp\left(i\frac{3\pi}{2}\right)=-i$

- ករណី $z^n=z_0$ គេបាន $\left(re^{i\theta}\right)^n=r_0e^{i\theta_0}$ $\Rightarrow$ $r^ne^{in\theta}=r_0e^{i\theta_0}$

នោះ $r=\sqrt[n]{r_0}$, $\theta=\frac{\theta_0}{n}+\frac{2\pi k}{n}, k=0,\pm1,\pm2,...$

$$a_k=\sqrt[n]{r_0}\exp\left(i\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)\right) \qquad k=0,1,2,...,n-1$$

គេបានឫសទី n នៃ z_0 គឺ $a, a\omega_n$, $a\omega_n^2$, ..., $a\omega_n^{n-1}$

២. ប្រមាណវិធីចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ក. ប្រមាណវិធីគុណចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=re^{i\beta}$ និង $w=pe^{i\alpha}$ ដែល $r\succ 0; p\succ 0$ ហើយ $\alpha;\beta$ ជាចំនួនពិត ។ គេបាន $z.w=re^{i\beta}.pe^{i\alpha}=rpe^{i(\beta+\alpha)}$ ។

ខ. ប្រមាណវិធីចែកចំនួនកុំផ្លិចតាមទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=re^{i\beta}$ និង $w=pe^{i\alpha}$ ដែល $r\succ 0; p\succ 0$ ហើយ $\alpha;\beta$ ជាចំនួនពិត ។ គេបាន $\frac{z}{w}=\frac{r}{p}e^{i(\beta-\alpha)}$

៣. អនុវត្តន៍ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងត្រីកោណមាត្រ

ក. រូបមន្តមុំឌុប

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេមាន $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$; $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

គេបាន $$\cos^2 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2=\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$$

គេទាញ $$\cos 2x=2\cos^2 x-1$$

ហើយ $$\sin 2x=\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}=2\cdot\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\cdot\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

ដូចនេះ $\sin 2x=2\sin x\cos x$

ខ. រូបមន្តមុំទ្រីប

គេមាន $$\cos^3 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3$$

$$=\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}+3(e^{ix}+e^{-ix})}{8}=\frac{2\frac{(e^{3ix}+e^{-3ix})}{2}+\frac{6(e^{ix}+e^{-ix})}{2}}{8}$$

$$=\frac{2\cos 3x+6\cos x}{8}=\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}$$

នោះគេបាន $$4\cos^3 x=\cos 3x+3\cos x$$

គេទាញបាន $$\cos 3x=4\cos^2 x-3\cos x$$

ហើយ $$\sin^3 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3=\frac{(e^{3ix}-e^{-3ix})-3(e^{ix}-e^{-ix})}{8i}=\frac{2i\sin 3x-6i\sin x}{-4}$$

គេទាញបាន $\boldsymbol{sin3x = 3sinx - 4sin^3x}$ ។

គ. រូបមន្តផលបូក និង ផលដកនៃមុំពីរ

គេមាន $e^{i(a+b)} = e^{ai} \cdot e^{bi}$ គ្រប់ចំនួនពិត $\boldsymbol{a}$ និង $\boldsymbol{b}$

ដោយ $e^{ai} \cdot e^{bi} = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$

$e^{ai} \cdot e^{bi} = (\cos a \cos a - i\sin a \sin b) + i(\sin a \cos b + \sin b \cos a)$

ហើយ $e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$

ដូចនេះ $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

ម្យ៉ាងទៀត $e^{i(a-b)} = e^{ai} \cdot e^{-bi}$ គ្រប់ចំនួនពិត $\boldsymbol{a}$ និង $\boldsymbol{b}$

ដោយ $e^{ai} \cdot e^{-bi} = (\cos a + i\sin a)(\cos b - i\sin b)$

$e^{ai} \cdot e^{-bi} = (\cos a \cos a + i\sin a \sin b) + i(\sin a \cos b - \sin b \cos a)$

ហើយ $e^{i(a-b)} = \cos(a-b) + i\sin(a-b)$

ដូចនេះ $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

ឃ. រូបមន្តបំលែងពីផលគុណ ទៅផលបូក

គេបាន $\cos a \cos b = \dfrac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \cdot \dfrac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}$

$$= \frac{e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)} + e^{-i(a+b)}}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}}{2} - \frac{e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)}}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

ដូចនេះ $\sin a \sin b = -\dfrac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$

<u>៤.អនុវត្តន៍ចំនួនកុំផ្លិចក្នុងស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត</u>

ចំពោះស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើ $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ ដែល $a,b \in IR$ ។

សមីការសម្គាល់នៃស្វ៊ីត $r^2 = ar + b$ ឬ $r^2 - ar - b = 0$

ក្នុងករណី $\Delta = (-a)^2 + 4b < 0$ នោះសមីការមានឬសជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់

គឺ $r_1 = a' - b'i$ ឬ $r_2 = a' + b'i$ ដែល $a', b' \in IR$ ។

ដើម្បីគណនា (u_n) គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចតទៅ

- តាងស្វ៊ីតជំនួយ $z_n = a_{n+1} - r_1 a_n$
- បន្ទាប់ស្រាយថា z_n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច

- ចុងក្រោយគណនា z_n នឹងទាញរក (u_n) ជាអនុគមន៍នៃ n

ឧទាហរណ៍១ គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $u_{n+2}=u_{n+1}-u_n$ ដែល $u_0=0$ និង $u_1=1$ ដែល $n=\{0,1,2,\ldots\}$ ។ ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ចម្លើយ គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $u_{n+2}=u_{n+1}-u_n$

នោះសមីការសម្គាល់ $r^2=r-1$ ឬ $r^2-r+1=0$

$\Delta=(-1)^2-4=-3$

នោះយើងបាន $r_1=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$; $r_2=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $z_n=u_{n+1}-r_1u_n=u_{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)u_n$

$$z_{n+1}=u_{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)u_{n+1}=u_{n+1}-u_n-\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)u_{u+1}$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)u_{n+1}-u_n=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(u_{n+1}-\frac{2}{1+\sqrt{3}i}u_n\right)$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(u_{n+1}-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}u_n\right)=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right).z_n$$

នោះ $z_{n+1}=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right).z_n$, z_n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចដែលមានរេសុង $q=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

ដោយ $q=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ នោះ $z_0=u_1-\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)u_0=1$

គេបាន $z_n=z_0\times q^n=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^n=\cos\dfrac{n\pi}{3}+i\sin\dfrac{n\pi}{3}$ (1)

និង $z_n=\left(u_{n+1}-\dfrac{1}{2}\right)+i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}u_n\right)$ (2)

តាម **(1)** និង **(2)**

គេបាន $\dfrac{\sqrt{3}}{2}u_n=\sin\dfrac{n\pi}{3}\Rightarrow u_n=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{n\pi}{3}$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $u_0=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{0\pi}{3}=0$ ពិត និង $u_1=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\pi}{3}=1$ ពិត

ដូចនេះ $u_n=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{n\pi}{3}$, $\forall n=0,1,2,\ldots$

ឧទាហរណ៍២ គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=0, u_2=1$ និង $u_{n+2}=2u_{n+1}-2u_n, \forall n\in\mathbb{N}$ ។ ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ចំលើយ គណនា (u_n) ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $u_{n+2}=u_{n+1}-u_n$ និង $u_1=0,u_2=1;\forall\,\mathrm{n}\in IN$

សមីការសម្គាល់ $r^2=2r-2$ ឬ $r^2-2r+2=0$

មាន $\Delta=(-2)^2-8=-4<0$ នោះ $\begin{cases} r_1=\dfrac{2-2i}{2}=1-i \\ r_2=\dfrac{2+2i}{2}=1+i \end{cases}$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $z_n=u_{n+1}-r_1u_n=u_{n+1}-(1-i)u_n$

ដោយ $z_{n+1}=2u_{n+1}-2u_n-(1-i)u_{n+1}=(1+i)\left[u_{n+1}-(1-i)u_n\right]=(1+i)z_n$

នោះ z_n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច មានរេសុង $q=1+i$

$$q=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

និង $z_1=u_2-(1-i)u_1=1$

គេបាន $z_n=z_1\times q^{n-1}\left[\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^{n-1}=2^{\frac{n-1}{2}}\left(\cos\dfrac{(n-1)\pi}{4}+i\sin\dfrac{(n-1)\pi}{4}\right)$

នោះ $z_n=2^{\frac{n-1}{2}}\cos\left(\dfrac{(n-1)\pi}{4}\right)+i2^{\frac{n-1}{2}}\sin\left(\dfrac{(n-1)\pi}{4}\right)\ (1)$

តែ $z_n=u_{n+1}-1+iu_n\quad(2)$

តាម **(1)** និង **(2)**

ទាញបាន $u_n=2^{\frac{n-1}{2}}\sin\left(\dfrac{(\mathrm{n}-1)\pi}{4}\right)$

ដូច្នេះ $u_n=2^{\frac{n-1}{2}}\sin\left(\dfrac{(n-1)\pi}{4}\right)\ \forall n\in IN$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $u_1=0$ ពិត $u_2=1$ ពិត

លំហាត់ចំនួនកុំផ្លិច

1. គេឲ្យ $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $z_3 = \sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ សរសេរជាទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនូវចំនួនកុំផ្លិច

   ក. $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$ ខ. $\dfrac{1}{z_1}$ គ. z_3^2 ឃ. $\dfrac{z_2}{z_3}$

2. សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចជាទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនូវចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម

   ក. $z = 4 - 4i\sqrt{3}$ ខ. $z = \dfrac{1}{1+i}$ គ. $z = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2+2i\sqrt{3}}$ ឃ. $z = -4\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

3. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ពិជគណិត

   ក. $z = e^{i\pi}$ ខ. $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$ គ. $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ឃ. $z = e^{-2i\pi}$

4. សរសេរជាទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលនូវចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម

   ក. $z = (-3+3i)^{11}$ ខ. $z = (-1-i)^{70}$ គ. $z = \left(\sqrt{8} - i\sqrt{8}\right)^{200}$ ឃ. $z = \left(\sqrt{2} + i\sqrt{6}\right)^{2017}$

5. ដោយប្រើ $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ និង $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ បង្ហាញថា

   ក. $\sin^3\theta = \dfrac{3}{4}\sin\theta - \dfrac{1}{4}\sin 3\theta$ ខ. $\cos^4\theta = \dfrac{1}{8}\cos 4\theta + \dfrac{1}{2}\cos 2\theta + \dfrac{3}{8}$

   គ. $\cos^2\theta + \sin^2 = 1$ ឃ. $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$

6. រកគ្រប់ចំនួនគត់ n ដែល $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2$ ។

7. ចូរកំណត់តួទី $\boldsymbol{n}$ នៃស្វ៊ីតចំនួនពិតខាងក្រោម

   ក. $\begin{cases} a_0 = 0 \; ; \; a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \end{cases}$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ខ. $\begin{cases} a_1 = 0 \; ; \; a_2 = 2 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n \end{cases}$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

   គ. $\begin{cases} a_0 = 0 \; ; \; a_1 = 1 \\ a_{n+2} = -a_{n+1} - a_n \end{cases}$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

8. គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (z_n)កំណត់ដោយ $z_1 = \dfrac{2+\sqrt{3}+i}{2}$ និង $z_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}z_n + \dfrac{2-\sqrt{3}-i}{2}$ ដែល $n = 1,2,3,...$

   ក. តាង $\boldsymbol{w_n = z_n - 1}$ ។ បង្ហាញថា $(\boldsymbol{w_n})$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច រួចគណនា $\boldsymbol{w_n}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\boldsymbol{n}$ ដោយឲ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

   ខ. ទាញបង្ហាញថា $z_n = 2\cos\dfrac{n\pi}{12}\left(\cos\dfrac{n\pi}{12} + i\sin\dfrac{n\pi}{12}\right)$ ។

9. គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច $(\boldsymbol{u_n})$ និង $(\boldsymbol{v_n})$កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ v_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ និង $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n - v_n}{\sqrt{2}} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{\sqrt{2}} \end{cases}$ ដែល$\boldsymbol{n \geq 1}$

   ក. គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច $\boldsymbol{z_n = u_n + iv_n}$ ។ ស្រាយថា $(\boldsymbol{z_n})$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា $\boldsymbol{z_n}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\boldsymbol{n}$ ដោយឲ្យលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

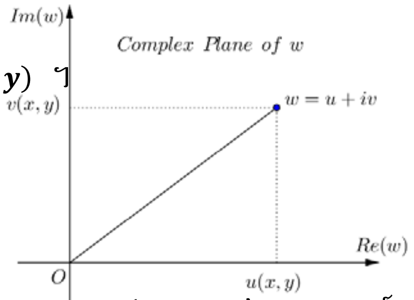
   ខ. បំលែង $\boldsymbol{u_n}$ និង $\boldsymbol{v_n}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\boldsymbol{n}$ ។

មេរៀនទី ៦

អនុគមន៍អថេរកុំផ្លិច
(*Complex Variable Funtion*)

១. និយមន័យអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិច (*Definition of Complex Variable Funtion*)

គ្រប់តម្លៃអថេរកុំផ្លិច $z = x + yi$ (x, y ជាចំនួនពិត) នៅក្នុងដែនកំណត់ $\mathcal{D}$ មានទំនាក់ទំនងជាមួយតម្លៃអថេរកុំផ្លិច $w = u + vi$ (u, v ជាចំនួនពិត) នោះគេនិយាយថា w ជាអនុគមន៍នៃ z តាមរយៈ f គេបាន $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ។ ដែល $u(x, y)$ ជាផ្នែកពិតនៃអនុគមន៍ $f(z)$ និង $v(x, y)$ ជាផ្នែកនិម្មិតនៃអនុគមន៍ $f(z)$ ។



២. អនុគមន៍ច្រាស់ (*Inverse Funtion*)

បើ $w = f(z)$ យើងឃើញថា z ជាអនុគមន៍នៃ w គេអាចសរសេរ $z = f^{-1}(w)$ ហៅថាអនុគមន៍ច្រាស់។ ប្តូរ z ទៅ w ហើយ w ទៅ z នោះគេបាន $w = f^{-1}(z)$។ ដូចនេះ $w = f(z)$និង$w = f^{-1}(z)$ជាអនុគមន៍ច្រាស់គ្នា។

៣. អនុគមន៍ពហុធា (*Polynomial Funtion*)

អនុគមន៍ពហុធាមានរាង $w = P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ ដែល $a_0 \neq 0$ ។ $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n$ ជាចំនួនពិត (មេគុណនៃចំនួនកុំផ្លិច)និង n ជាដឺក្រេនៃពហុធា $P(z)$ ដែល $n \in \mathbb{N}$ ។

បើ $w = az + b$ ហៅថាបន្ទាត់ ។

ឧទាហរណ៍: ១. កំណត់ផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិតនៃអនុគមន៍ $w = f(z)$ បើ $w = z^2$ ។

តាង $z = x + iy$

នាំឲ្យ $w = f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$

ដូចនេះ $u(x, y) = x^2 - y^2$ និង $v(x, y) = 2xy$ ។

ឧទាហរណ៍: ២. រកផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិតនៃអនុគមន៍ $z = 3 + i$ បើ $w = f(z) = 2z^2 - 3z + 9$ ។

យើងមាន $z = 3 + i$

នាំឲ្យ $w = f(z) = 2z^2 - 3z + 9 = 2(3 + i)^2 - 3(3 + i) + 9$

$= 18 + 12i - 2 - 9 - 3i + 9 = 16 + 9i$

ដូចនេះ $u(x, y) = 16$ និង $v(x, y) = 9$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ សរសេរ $f(z) = z^4$ ជាទម្រង់គូអរដោនេដេកាត $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$

<u>ដំណោះស្រាយ</u> ដោយប្រើរូបមន្តពហុធា យើងមាន

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+iy) \\ &= (x+iy)^4 \\ &= x^4 + 4x^3(iy) + 6x^2(iy)^2 + 4x(iy)^3 + (iy)^4 \\ &= x^4 + 4x^3(iy) + 6x^2(i)^2 y^2 + 4x(i)^3 y^3 + (i)^4 y^4 \end{aligned}$$

$$= x^4 + 4ix^3y - 6x^2y^2 - 4ixy^3 + y^4$$
$$= \left(x^4 - 6x^2y^2 + y^4\right) + i\left(4x^3y - 4xy^3\right)$$

យើងឃើញថាផ្នែកពិតគឺ $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

ហើយផ្នែកនិមិត្តគឺ $v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3$

ឧទាហរណ៍៤៖ រកអនុគមន៍ $f(z) = \bar{z}\,\mathrm{Re}[z] + z^2 + \mathrm{Im}[z]$ ជាទម្រង់កូអរដោនេដេកាត

$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+iy) \\ &= \overline{(x+iy)}\,\mathrm{Re}[x+iy] + (x+iy)^2 + \mathrm{Im}[x+iy] \\ &= (x-iy)x + (x+iy)^2 + y \\ &= x^2 - iy + x^2 - y^2 + 2ixy + y \\ &= 2x^2 - y^2 + y + ixy \end{aligned}$$

យើងឃើញថាផ្នែកពិតគឺ $u(x,y) = 2x^2 - y^2 + y$

ហើយផ្នែកនិមិត្តគឺ $v(x,y) = xy$

ឧទាហរណ៍ទី៣និងទី៤ បង្ហាញពីរបៀបរក $u(x,y)$ និង $v(x,y)$ នៅពេលក្បួនសម្រាប់គណនា $f(z)$ត្រូវបានអនុវត្តន៍។

ឧទាហរណ៍៥៖ គេឲ្យ $w = f(z) = z^2 - 2z + 3$ ដោយ $z = x + iy\,, x, y \in \mathbb{R}$ រកកូអរដោនេដេកាត?

$$w = f(x+iy) = (x+iy)^2 - 2(x+iy) + 3 = x^2 + 2ixy - y^2 - 2x - 2iy + 3 = (x^2 - y^2 - 2x + 3) + i(2xy - 2y)$$

ដូចនេះ $w = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = (\mathrm{x}^2 - y^2 - 2x + 3) + i(2xy - 2y)$

ដែល $u(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 3$ និង $v(x,y) = 2xy - 2y$ ជាអនុគមន៍តម្លៃពិត។

ផ្ទុយមកវិញ $u(x,y)$ និង $v(x,y)$ ជាអនុគមន៍តម្លៃពិតនៃអថេរពិតប្រាកដ x and y ដែលកំណត់អនុគមន៍តម្លៃកុំផ្លិច $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ ហើយយើងអាចប្រើរូបមន្ត $x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ and $y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ ដើម្បីរករូបមន្តសម្រាប់ $f(z)$ដែលពាក់ព័ន្ធនឹងអថេរ z and $\bar{z}$ ។

ឧទាហរណ៍៦៖ រក $f(z) = f(x+iy) = 4x^2 + i4y^2$ ដោយប្រើរូបមន្តដែលពាក់ព័ន្ធនឹងអថេរ z and $\bar{z}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u> យើងមាន $z = x + iy$ ហើយ $x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ and $y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

យើងបាន

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+iy) \\ &= 4\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + i4\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 \\ &= 4\left(\frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4}\right) + i4\left(\frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{-4}\right) \end{aligned}$$

$$=z^2+2z\overline{z}+\overline{z}^2-i\left(z^2-2z\overline{z}+\overline{z}^2\right)$$

$$=(1-i)z^2+(2+2i)z\overline{z}+(1-i)\overline{z}^2$$

ឧទាហរណ៍១៖ គេឲ្យ $f(z)=(1+i)z^2-(3+2i)z+2-i$ ដែល $z\in\mathbb{C}$

គេបាន $f(x+iy)=(1+i)(x+iy)^2-(3+2i)(x+iy)+2-i$

$$=(1+i)(x^2-y^2+2ixy)-(3x+3iy+2ix-2y)+2-i$$

$$=x^2-y^2+2ixy+ix^2-iy^2-2xy-3x-3iy-2ix+2y+2-i$$

$$=(x^2-y^2-2xy-3x+2y+2)+i(x^2-y^2+2xy-2x-3y-1)$$

ដូចនេះ $f(z)=f(x+iy)=(x^2-y^2-2xy-3x+2y+2)+i(x^2-y^2+2xy-2x-3y-1)$ ។

<u>ទ្រឹស្តីបទទេ្វធា binomial theorem</u>

$$(1+z)^n=1+nz+\frac{n(n-1)}{2!}z^2+...+z^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k z^k \quad \text{ដែល } C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$ ។

ឧទាហរណ៍៖ គណនាកន្សោម $(1+2i)^8$ ។

$$(1+2i)^8=\binom{8}{0}(1)^8(2i)^0+\binom{8}{1}(1)^7(2i)^1+\binom{8}{2}(1)^6(2i)^2+\binom{8}{3}(1)^5(2i)^3+\binom{8}{4}(1)^4(2i)^4$$

$$+\binom{8}{5}(1)^3(2i)^5+\binom{8}{6}(1)^2(2i)^6+\binom{8}{7}(1)^1(2i)^7+\binom{8}{8}(1)^0(2i)^8$$

$$=1(1)^8(2i)^0+8(1)^7(2i)^1+28(1)^6(2i)^2+56(1)^5(2i)^3+70(1)^4(2i)^4+56(1)^3(2i)^5+28(1)^2(2i)^6+8(1)^1(2i)^7+1(1)^0(2i)^8$$

$$=1(1)(1)+8(1)(2i)+28(1)(4i^2)+56(1)(8i^3)+70(1)(16i^4)+56(1)(32i^5)+28(1)(64i^6)+8(1)(128i^7)+1(1)(256i^8)$$

$$=1+16i-112-448i+1120+1792i-1792-1024i+256=-527+336i$$

ប្រតិបត្តិ៖ គណនា ១. $(2+3i)^4$ ២. $(1+i)^3$ ៣. $(2+i)^5$

<u>៤. អនុគមន៍សនិទានពិជគណិត (*Rational Algebraic Funtions*)</u>

ជាអនុគមន៍ដែលមានរាង $\boldsymbol{w=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_{m-1}z+b_m}}$ ។

ករណីពិសេស៖ $w=\frac{az+b}{cz+d}, ad-bc\neq 0$ ហៅថា ទ្វេលីនេអ៊ែរ(***Bilinear***)ឬប្រភាគលីនេអ៊ែរ(Fractional Linear)។

ឧទាហរណ៍: ១. គេឲ្យអនុគមន៍ $w=f(z)=\frac{1}{z}$ ។ រកផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិតនៃអនុគមន៍ $\boldsymbol{w=f(z)}$ ។

តាង $\boldsymbol{z=x+iy}$

នាំឲ្យ $f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i$

ដូចនេះ $u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ និង $v(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$ ។

ឧទាហរណ៍: ២. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(z)=\frac{z^2-1}{2z+3}$ ។ រកផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិតនៃអនុគមន៍បើ $\boldsymbol{z=i-1}$

តាង $\boldsymbol{z=i-1}$

នាំឲ្យ $f(z)=\frac{(i-1)^2-1}{2(i-1)+3}=\frac{-1-2i+1-1}{2i-2+3}=\frac{-1-2i}{2i+1}=-1$

ដូចនេះ $u(x,y)=-1$ និង $v(x,y)=0$ ។

៥. អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ (*Trigonometric Funtion*)

យើងកំណត់អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ឬ អនុគមន៍រង្វង់ ដោយ $\sin z$,$\cos z$,$\tan z$...។ ដែលមានទំនាក់ទំនង

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\ ,\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\ ;\quad \sec z=\frac{1}{\cos z}=\frac{2}{e^{iz}+e^{-iz}}\ ,\ \csc z=\frac{1}{\sin z}=\frac{2i}{e^{iz}-e^{-iz}}$$ និង

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)}\ ,\quad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}=\frac{i\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)}{e^{iz}-e^{-iz}}$$ ...... និងមានរូបមន្តជាច្រើនទៀត ។

ឧទាហរណ៍: ១. ស្រាយរូបមន្ត $\mathbf{1+\tan^2 z=\frac{1}{\cos^2 z}=\sec^2 z}$ ។

យើងមាន $$1+\tan^2 z=1+\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}=\frac{\cos^2 z+\sin^2 z}{\cos^2 z}=\frac{1}{\cos^2 z}=\sec^2 z$$

ព្រោះ $$\cos^2 z+\sin^2 z=\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2=\frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4}+\frac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{-4}$$

$$=\frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4}-\frac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{4}=\frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}-e^{2iz}+2-e^{-2iz}}{4}=\frac{4}{4}=1$$

ឧទាហរណ៍: ២. ស្រាយរូបមន្ត $\mathbf{1+\cot^2 z=\frac{1}{\sin^2 z}=\csc^2 z}$ ។

យើងមាន $$1+\cot^2 z=1+\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z}=\frac{\cos^2 z+\sin^2 z}{\sin^2 z}=\frac{1}{\sin^2 z}=\csc^2 z$$

ឧទាហរណ៍៣៖ រក $f(z)=z^2$ ទាំងជាទម្រង់កូអរដោនេដេកាត និងទម្រង់កូអរដោនេប៉ូលែរ

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

- ចំពោះទម្រង់កូអរដោនេដេកាត $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ គេបាន

  $f(z)\ =f(x+iy)=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$

  យើងឃើញថាផ្នែកពិតគឺ $u(x,y)=x^2-y^2$

  ហើយផ្នែកនិមិត្តគឺ $v(x,y)=2xy$

- ចំពោះទម្រង់កូអរដោនេប៉ូលែរ $f(z)=f\left(re^{i\theta}\right)=U(r,\theta)+iV(r,\theta)$ គេបាន

  $f(z)\ =f\left(re^{i\theta}\right)=\left(re^{i\theta}\right)^2=r^2\left(e^{i\theta}\right)^2=r^2e^{i2\theta}=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=r^2\cos 2\theta+ir^2\sin 2\theta$

  យើងឃើញថាផ្នែកពិតគឺ $U(r,\theta)=r^2\cos 2\theta$

  ហើយផ្នែកនិមិត្តគឺ $V(r,\theta)=r^2\sin 2\theta$

ចំណាំ នៅពេលយើងបានកំណត់ $u(x,y)$ និង $v(x,y)$ ចំពោះអនុគមន៍ $f(z)$ នៅក្នុងទម្រង់ដេកាត យើងត្រូវប្រើនិ មិត្តសញ្ញាប្រសិនបើយើងចង់រក $f(z)$ នៅក្នុងទម្រង់ប៉ូលែរ។ ការបញ្ជាក់៖ អនុគមន៍ $u(x,y)$ និង $U(r,\theta)$ គឺពិតជា ខុសគ្នា ហើយ $v(x,y)$ និង $V(r,\theta)$ ក៏ខុសគ្នាដែរ។ បើយើងប្រើកូអរដោនេដេកាត យើងអាចប្រើនិមិត្តសញ្ញាណាមួយ ជំនួស។ ដូចគ្នានេះដែរប្រសិនបើយើងកំពុងគណនាជាមួយកូអរដោនេប៉ូលែរយើងអាចប្រើនិមិត្តសញ្ញាណាមួយ ដែលយើងបានជ្រើសរើស។

ឧទាហរណ៍៤៖ រក $f(z)=z^5+4z^2-6$ ជាទម្រង់កូអរដោនេដេកាត និងទម្រង់កូអរដោនេប៉ូលែរ

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

- ចំពោះទម្រង់ដេកាត

ដោយ $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$ ហើយ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

ជំនួស $a=x$ ហើយ $b=iy$ នោះ

$$\begin{aligned}f(z)&=f(x+iy)\\&=(x+iy)^5+4(x+iy)^2-6\\&=x^5+5x^4(iy)+10x^3(iy)^2+10x^2(iy)^3+5x(iy)^4+(iy)^5+4\left(x^2+2x(iy)+(iy)^2\right)-6\\&=(x^5-10x^3y^2+4x^2-4y^2+5xy^4-6)+i\left(5x^4y-10x^2y^2+8xy+y^5\right)\end{aligned}$$

យើងបានផ្នែកពិតគឺ $u(x,y)=x^5-10x^2y^2+4x^2-4y^2+5xy^4-6$

ហើយផ្នែកនិមិត្តគឺ $v(x,y)=5x^4y-10x^2y^2+8xy+y^5$

- ចំពោះទម្រង់ប៉ូលែរ ដោយប្រើ $z=re^{i\theta}$ នោះ

$$\begin{aligned}f(z)&=f\left(re^{i\theta}\right)\\&=\left(re^{i\theta}\right)^5+4\left(re^{i\theta}\right)^2-6\\&=\left(r^5\cos5\theta+4r^2\cos2\theta-6\right)+i\left(r^5\sin5\theta+4r^2\sin2\theta\right)\end{aligned}$$

យើងបានផ្នែកពិតគឺ $U(r,\theta)=r^5\cos5\theta+4r^2\cos2\theta-6$

ហើយផ្នែកនិមិត្តគឺ $V(r,\theta)=r^5\sin5\theta+4r^2\sin2\theta$

ប្រតិបត្តិ

១. តាង $w=f(z)=z^2+3z$ ។ រក u *and* v រួចគណនាតម្លៃនៃអនុគមន៍ f បើ $z=1+3i$ ។

<u>Solution</u> $u=\operatorname{Re} f(z)=x^2-y^2+3x$ *and* $v=2xy+3y$. Also,

$$f(1+3i)=(1+3i)^2+3(1+3i)=1-9+6i+3+9i=-5+15i$$

This shows that $u(1,3)=-5$ and $v(1,3)=15$.

២. Let $w=f(z)=2iz+6\bar{z}$. Find u and v and the value of f at $z=\frac{1}{2}+4i$

Solution. $f(z)=2i(x+iy)+6(x-iy)$ gives $u(x,y)=6x-2y$ and $v(x,y)=2x-6y$. Also

$$f\left(\frac{1}{2}+4i\right)=2i\left(\frac{1}{2}+4i\right)+6\left(\frac{1}{2}-4i\right)=i-8+3-24i=-5-23i$$

៣. Find Re f, and Im f and their values at the given point z

i). $f(z)=5z^2-12z+3+2i$ *at* $4-3i$

ii). $f(z)=1/(1-z)$ *at* $1-i$

iii). $f(z)=(z-2)/(z+2)$ *at* $8i$

៦. អនុគមន៍ច្រាស់នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ (*Inverse Trigonometric Funtions*)

បើ $\boldsymbol{z = \sin w}$ នោះ $\boldsymbol{w = \sin^{-1} z}$ ហៅថាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រច្រាស់នៃ $\boldsymbol{z}$ ។ យើងកំណត់អនុគមន៍ច្រាស់ត្រីកោណមាត្រ ឬ អនុគមន៍ច្រាស់រង្វង់ ដោយ $\boldsymbol{\sin^{-1} z = \arcsin z}$,
$\boldsymbol{\cos^{-1} z = \arccos z}$, $\boldsymbol{\tan^{-1} z = \arctan z}$ …… ។ ដែលមានទំនាក់ទំនង

១. $\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន $w = \sin^{-1} z \quad \Rightarrow \quad z = \sin w$

គេបាន $z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \quad \Leftrightarrow \quad 2iz = e^{iw} - e^{-iw}$

$e^{iw} - \frac{1}{e^{iw}} - 2iz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$

តាង $t = e^{iw}$, $t > 0$

$t^2 - 2izt - 1 = 0$

$\Delta' = (iz)^2 + 1 = 1 - z^2$

នោះ $t_1 = iz - \sqrt{1-z^2} < 0$, $t_2 = iz + \sqrt{1-z^2}$

យើងបាន $e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2} \quad \Rightarrow \quad w = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$

ដូចនេះ $\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$

២. $\cos^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$

៣. $\csc^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{i + \sqrt{z^2-1}}{z}\right)$

៤. $\sec^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{1 + \sqrt{1-z^2}}{z}\right)$

៥. $\tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$

៦. $\cot^{-1} z = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$ (ស្រាយដូចគ្នា)

៧. អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក (*Hyperbolic Funtions*)

យើងកំណត់អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក ដោយ $\boldsymbol{\sinh z}$, $\boldsymbol{\cosh z}$, $\boldsymbol{\tanh z}$ …… ។ ដែលមានទំនាក់ទំនង

$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\cos z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$; $\text{sech}\, z = \frac{1}{\cosh z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}}$, $\text{csch}\, z = \frac{1}{\sinh z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}}$ និង

$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$, $\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$ …… និងមានរូបមន្តជាច្រើនទៀត ។

៨. អនុគមន៍ច្រាស់នៃអនុគមន៍អីពែបូលិក (*Inverse Hyperbolic Funtion*)

បើ $\boldsymbol{z = \sinh w}$ នោះ $\boldsymbol{w = \sinh^{-1} z}$ ហៅថាអនុគមន៍អីពែបូលិកច្រាស់នៃ $\boldsymbol{z}$ ។ យើងកំណត់អនុគមន៍អីពែបូលិកច្រាស់ ឬ អនុគមន៍រង្វង់ច្រាស់ ដោយ $\boldsymbol{\sinh^{-1} z = \text{arcsinh}\, z}$,
$\boldsymbol{\cosh^{-1} z = \text{arccosh}\, z}$, $\boldsymbol{\tanh^{-1} z = \text{arctanh}\, z}$ …… ។ ដែលមានទំនាក់ទំនង

១. $\sinh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន $w=\sinh^{-1}z \quad \Rightarrow \quad z=\sinh w$

គេបាន $z=\sinh w=\dfrac{e^{w}-e^{-w}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2z=e^{w}-e^{-w}$

$e^{w}-\dfrac{1}{e^{w}}-2z=0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2w}-2ze^{w}-1=0$

តាង $t=e^{w} \quad , \quad t>0$

$t^{2}-2zt-1=0$

$\Delta'=z^{2}+1$

នោះ $t_1=z-\sqrt{z^{2}+1}<0 \quad , \quad t_2=z+\sqrt{z^{2}+1}$

យើងបាន $e^{w}=z+\sqrt{z^{2}+1} \quad \Rightarrow \quad w=\ln\left(z+\sqrt{z^{2}+1}\right)$

ដូចនេះ $\sinh^{-1}z=\ln\left(z+\sqrt{z^{2}+1}\right)$

២. $\cosh^{-1}z=\ln\left(z+\sqrt{z^{2}-1}\right)$

៣. $\operatorname{csch}^{-1}z=\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{z^{2}+1}}{z}\right)$

៤. $\operatorname{sech}^{-1}z=\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-z^{2}}}{z}\right)$

៥. $\tanh^{-1}z=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$

៦. $\coth^{-1}z=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$ (ស្រាយដូចគ្នា)

៩. អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល (*Exponentail Funtion*)

ក. និយមន័យ (*Definition*)

អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលជាអនុគមន៍ដែលមានរាង e^{z} ហើយអាចសរសេរជាអនុគមន៍នៃ $\cos y$, $\sin y$ និង e^{x} ។ គេសរសេរដោយ $e^{z}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$ ឬ $e^{z}=e^{x}(\cos y,\sin y)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងតាង $z=x+yi$

នាំឲ្យ $e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}\cdot e^{iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$

ឧទាហរណ៍: ១. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(z)=e^{z+1}$ ។ រកផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិតនៃអនុគមន៍បើ $z=1+\pi i$

តាង $z=1+i\pi$

នាំឲ្យ $w=f(z)=e^{z}=e^{1+i\pi}=e\cdot e^{i\pi}=e(\cos\pi+i\sin\pi)=-e$

ដូចនេះ $u(x,y)=-e$ និង $v(x,y)=0$ ។

ខ. លក្ខណៈ:

បើ $z_1=r_1e^{i\theta_1}$ និង $z_2=r_2e^{i\theta_2}$ ដែល r_1 , $r_2\in\mathbb{R}$; r_1 , $r_2>0$ និង $\theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}$

\+ $\overline{z_1}=r_1e^{-i\theta_1}$ \+ $-z_1=r_1e^{i(\theta_1+\pi)}$ \+ $z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

\+ $\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{1}{r_1}e^{-i\theta_1}$ \+ $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ \+ $z_1^{n}=r_1^{n}e^{in\theta_1}$; $n\in\mathbb{N}$

សម្គាល់ $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$; $e^{i\pi} = -1$ បើ $|z| = r = 1$ ។

១០. អនុគមន៍លោការីត (*Logarithmic Funtions*)

អនុគមន៍លោការីត កំណត់ដោយ $w = f(z) = \ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$ ជាអនុគមន៍ច្រាស់នៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យើងមាន $z = x + iy$ ដែល $z \neq 0$

គេបាន $w = \ln z \Rightarrow z = e^w$

ប្តូរអថេរ $w = u + iv$ និង $z = re^{i\theta}$ (1)

គេបាន $z = e^w = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv}$ (2)

តាម (1) និង (2) នោះ $e^u = r \Rightarrow u = \ln r$

$e^{i\theta} = e^{iv} \Rightarrow v = \theta + 2k\pi$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$

យើងបាន $w = \ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$ ដែល $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\theta = \arg(z)$

ឧទាហរណ៍: កំណត់ផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិតនៃអនុគមន៍ $f(z) = 1 + z - \ln z$ ដែល $z = \sqrt{3} + i$ ។

យើងមាន $z = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

គេបាន $f(z) = 1 + z + \ln z = 1 + \sqrt{3} + i + \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$

$f(z) = 1 + \sqrt{3} + \ln 2 + i\left(1 + \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$

ដូចនេះ $u(x,y) = 1 + \sqrt{3} + \ln 2$ និង $v(x,y) = 1 + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

- ជាដំបូងបើយើងសរសេរ $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

យើងបាន $\ln z = \ln r + i\theta$ ។

ជាទូទៅគេអាចសរសេរ $z = re^{i(\theta+2k\pi)}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

ដូចនេះ $\ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គណនា $\ln(-1)$

គេមាន $-1 = \cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi) = e^{i(\pi+2k\pi)}$

គេបាន $\ln(-1) = i(\pi + 2k\pi) = i\pi(1 + 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$ ។

បើ $k = 0$ នោះ $\ln(-1) = i\pi$ (ហៅថាតម្លៃគោល)

ឧទាហរណ៍២៖ រកតម្លៃគោលនៃ i^i ។

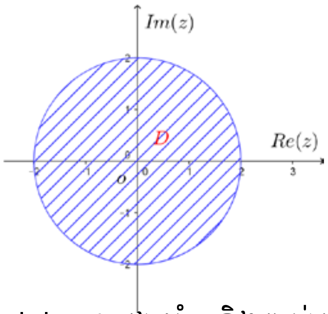
គេមាន $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ នោះ $i^i = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^i = e^{\frac{i^2\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ រកតម្លៃគោលនៃ $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^i$ ។

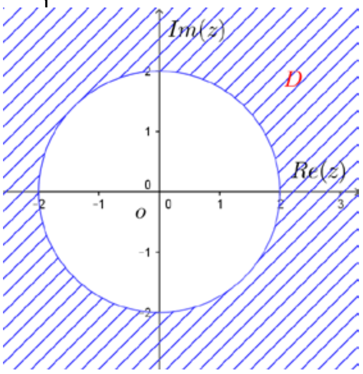
គេមាន $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ នោះ $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^i = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^i = e^{\frac{i^2\pi}{3}} = e^{-\frac{\pi}{3}}$ ។

១១. ដែនតំណាងក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

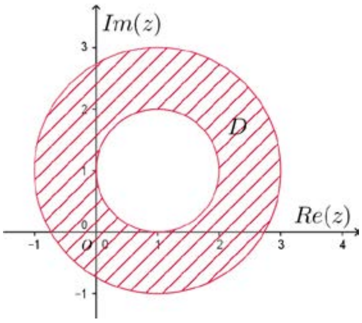
ឧទាហរណ៍: ១. រកដែនតំណាងនៃ $|z| \le 1$ ជាកាំ និងគល់តម្រុយ o ជាផ្ចិត ។



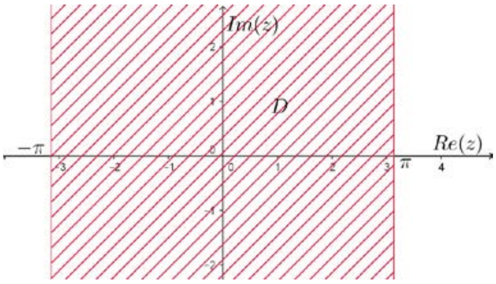
ឧទាហរណ៍: ២. រកដែនតំណាងនៃ $|z| \ge 1$ ជាកាំ និងគល់តម្រុយ o ជាផ្ចិត ។



ឧទាហរណ៍: ៣. រកដែនតំណាងនៃ $1 \le |z-1| \le 4$ ។



ឧទាហរណ៍: ៤. រកដែនតំណាងនៃ $-\pi \le Re(z) \le \pi$ ។



លំហាត់

១. គណនាតម្លៃអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិចខាងក្រោមត្រង់ចំណុច $f(3+i)$, $f(-1)$, $f(-2+4i)$, $f(\sqrt{-9})$

ក. $f(z)=z^3+2z$ ខ. $f(z)=2z^2+z-3$ គ. $f(z)=\dfrac{1}{1+z}$

ឃ. $f(z)=\dfrac{1}{1-z^2}$ ង. $f(z)=\dfrac{1}{z^3}$ ច. $f(z)=\dfrac{1+z^2-2i}{3i+z}$

២. គណនាផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិត នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $f(z)=z^2+4z-1$ ខ. $f(z)=z^3-1$ គ. $f(z)=\dfrac{z}{1+z}$

ឃ. $f(z)=\dfrac{z^3-8}{z-2}$ ង. $f(z)=3e^{2z}+e^{-z}+4z$ ច. $f(z)=e^{2z}-3z+\ln z^3$

៣. កំណត់ដែនតំណាងនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $|z-4i|=4$ ខ. $|z+1+>2$ គ. $\frac{1}{3}<|z-a|<6$

ឃ. $0<\operatorname{Re}(z)<\frac{\pi}{2}$ ង. $-\pi<\operatorname{Im}(z)<\pi$ ច. $\operatorname{Im}(z^2)=2$

ឆ. $|\arg(z)|\le\frac{\pi}{4}$ ជ. $\left|\frac{z+1}{z-1}\right|=1$ ឈ. $|z-1|\le|z+1|$

៤. បង្ហាញថា

ក. $\cos(-z)=\cos z$ ខ. $\sin(-z)=-\sin z$ គ. $\tan(-z)=-\tan z$

ឃ. $1-\tanh^2 z=\operatorname{sech}^2 z$ ង. $\cos iz=\cosh z$ ច. $\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\,\text{sinhy}$

៥. ចូរសរសេរអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ $u(x,y)+iv(x,y)$

ក) $w=f(z)=z^2$ ខ) $w=f(z)=\frac{z-1}{z+1}$

គ) $w=f(z)=z^2-2z$ ឃ) $w=f(z)=(1+z)^4$

ង) $w=f(z)=\frac{z^2}{z+1}$ ច) $w=f(z)=2z^2-3z+1$

៦. ចូរសរសេរពហុធាអថេរកុំផ្លិចខាងក្រោមជាទម្រង់ $u(x,y)+iv(x,y)$

ក) $f(z)=z^2+iz+1-2i$ ខ) $f(z)=iz^2-3z+2+i$

គ) $f(z)=(1-i)z^2+(1+i)z+3-2i$ ឃ) $f(z)=z^3+iz^2-(1+i)z+3+2i$

ង) $f(z)=(1+i)z^3+(1-i)z^2+(2+i)z-1+2i$

៧. ចូរបម្លែងអនុគមន៍ខាងក្រោមជាទម្រង់ $u(x,y)+iv(x,y)$ ដែល $z=x+iy$

ក) $f(z)=2z^3-iz^2$ ខ) $f(z)=z\sin z$

គ) $f(z)=z^4$ ឃ) $f(z)=\frac{1+z}{1-z}$

៨. ចូរកំណត់គ្រប់តម្លៃនៃ ៖ ក) $\ln(i^{\frac{1}{2}})$ ខ) $\ln(-ei)$

គ) $\ln(1-i)$ ឃ) $(1+i)^i$

៩. ចូរកំណត់តម្លៃគោលនៃកុំផ្លិចនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក) $(1+i\sqrt{3})^i$ ខ) 2^i

គ) $(1-i)^{4i}$ ឃ) $(\sqrt{3}+i)^i$

១០. ចូរស្រាយថា $e^z\neq 0$ ចំពោះគ្រប់ z ។

១១. ចូរកំណត់គ្រប់ឬសនៃសមីការ ៖

ក) $e^z=-3$ ខ) $\ln z=\frac{1}{2}i\pi$

គ) $\sin z=2$ ឃ) $\cos z=3$

១២. ចូរកំណត់តម្លៃគោលនៃ ៖

ក) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^i$ ខ) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^i$

គ) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{i}$

ឃ) $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^{i}$

មេរៀនទី ៧

លីមីតនៃអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិច

(*Limit of Complex Variable Funtions*)

១. និយមន័យ (*Definition*)

លីមីតនៃអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិចកំណត់ដោយ $w=f(z)$ ពេលដែល $z\to z_0$ គេបាន $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=L$ កាលណា $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ ដែល $0<|z-z_0|<\delta$ នោះ $|f(z)-L|<\varepsilon$ ។

ឧទាហរណ៍: បើ $f(z)=z^2$ បង្ហាញថា $\lim\limits_{z\to 2i} f(z)=-4$ ។

យើងមាន $|f(z)-L|<\varepsilon \Leftrightarrow |z^2+4|<\varepsilon$

$|(z-2i)(z+2i)|<\varepsilon \Leftrightarrow |z-2i||z+2i|<\varepsilon$

ដែល $i<z<3i \Leftrightarrow 3i<z+2i<5i$

$|3i|<|z+2i|<|5i| \Leftrightarrow 9<|z+2i|<25$

$9|z-2i|<|z-2i||z+2i|<25|z-2i|$

នាំឲ្យ $9|z-2i|<\varepsilon \Rightarrow |z-2i|<\dfrac{\varepsilon}{9}$

តាង $\delta=\dfrac{\varepsilon}{9}$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$

នោះ $0<|z-2i|<\delta$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{z\to 2i} f(z)=-4$

<u>ឧទាហរណ៍</u> បង្ហាញថា $\lim\limits_{z\to(2+i)} 3Z^2=9+12i$ ។

យើងមាន $|f(z)-L|<\varepsilon \Leftrightarrow |3Z^2-(9+12i)|<\varepsilon$

$|3Z^2-9-12i|<\varepsilon \Leftrightarrow 3|Z^2-3-4i|<\varepsilon$

$3|Z^2-(4+4i+i^2)|<\varepsilon \Leftrightarrow 3|Z^2-(2+i)^2|<\varepsilon$

$3|(Z-(2+i))(Z+(2+i))|<\varepsilon \Leftrightarrow 3|Z-(2+i)||Z+(2+i)|<\varepsilon$

បើ $Z\to 2+i$

គេបាន $|3+2i|<|Z+(2+i)|<|5+3i| \Leftrightarrow \sqrt{13}<|Z+(2+i)|<\sqrt{34}$

ឬ $3\sqrt{13}<3|Z+(2+i)|<3\sqrt{344}$

$3\sqrt{13}|Z-(2+i)|<3|Z-(2+i)||Z+(2+i)|<3\sqrt{34}|Z-(2+i)|$

គេបាន $3\sqrt{13}|Z-(2+i)|<\varepsilon \Leftrightarrow |Z-(2+i)|<\dfrac{\varepsilon}{3\sqrt{13}}$

តាង $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3\sqrt{13}}$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$

ដូចនេះ: $|Z-(2+i)|<\delta$

២. លក្ខណ:

បើ $Z_0=x_0+y_0 i$

$f(x+yi)=u(x,y)+iv(x,y)$ និង $L=A+Bi$

នោះ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=A \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=B \end{cases}$

៣. ការគណនាលីមីត

បើ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_1$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=w_2$

យើងបានលក្ខណៈ:

ក. $\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)\pm g(z)\right]=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\pm\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=w_1\pm w_2$

ខ. $\lim\limits_{z\to z_0}\left[kf(z)\right]=k\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=kw_1$

គ. $\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)\times g(z)\right]=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\times\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=w_1\times w_2$

ឃ. $\lim\limits_{z\to z_0}\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}=\dfrac{w_1}{w_2},\ \left(g(z)\neq 0\right)$

ឧទាហរណ៍ គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{z\to 2i}\left(3z^2+4z-5\right)$ ខ. $\lim\limits_{z\to -1+i}\dfrac{z^2-z+15i}{z-i^2-i}$ គ. $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{2z^4+1}{z^4+1}$

ឃ. $\lim\limits_{z\to -2+2i}\sqrt{z^2-i}$ ង. $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{\sqrt{z^2+3}-2}{z-1}$ ច. $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2+1}{z^6+1}$

ចម្លើយ គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{z\to 2i}\left(3z^2+4z-5\right)=3(2i)^2+4(2i)-5=-12+8i-5=-17+8i$

ខ. $\lim\limits_{z\to -1+i}\dfrac{z^2-z+15i}{z-i^2-i}=\dfrac{(-1+i)^2-(-1+i)+15i}{-1+i-i^2-i}=\dfrac{1-2i-1+1-i+15i}{0}=\dfrac{1+12i}{0}=\infty$

គ. $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{2z^4+1}{z^4+1}=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^4\left(2+\dfrac{1}{z^4}\right)}{z^4\left(1+\dfrac{1}{z^4}\right)}=2$

ឃ. $\lim\limits_{z\to -2+2i}\sqrt{z^2-i}=\sqrt{(-2+2i)^2-i}=\sqrt{4-8i-4-i}=\sqrt{-9i}=3\times i^{\frac{3}{2}}$

ង. $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{\sqrt{z^2+3}-2}{z-1}=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z^2+3-4}{(z-1)\left(\sqrt{z^2+3}+2\right)}=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z^2-1}{(z-1)\left(\sqrt{z^2+3}+2\right)}=\dfrac{1+1}{2+2}=\dfrac{1}{2}$

ច. $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2+1}{z^6+1}=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2+1}{\left(z^2\right)^3+1}=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2+1}{\left(z^2+1\right)\left(z^4-z^2+1\right)}=\dfrac{1}{i^4-i^2+1}=\dfrac{1}{3}$

៤. ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

+ អនុគមន៍ $f(z)$ ជាប់ត្រង់ចំណុច z_0 បើ $f(z)$ មានន័យត្រង់ z_0 និង $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$

+ អនុគមន៍ $f(z)$ ជាអនុគមន៍ជាប់នៅក្នុងដែនកំណត់ D បើ $f(z)$ ជាប់គ្រប់ចំណុចនៃ D ។

+ បើអនុគមន៍ $f(z)$ និង $g(z)$ ជាប់ត្រង់ z_0 ហើយ k ជាចំនួនថេរនោះ យើងបាន

• $f(z)\pm g(z)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ z_0

• $kf(z)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ z_0

• $\frac{f(z)}{g(z)},\ g(z)\neq 0$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ z_0

+ គ្រប់អនុគមន៍ពហុធា ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $\forall z\in\mathbb{C}$

+ គ្រប់អនុគមន៍សនិទាន ជាអនុគមន៍ជាប់លើកលែងតែឫសភាគបែង។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យ $f(z)=\frac{1}{2}z_2+4z-5$ ។ បង្ហាញថា $f(z)$ ជាប់ត្រង់ $z_0=2+i$ ។

ចម្លើយ $f(z)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ $z_0=2+i$ កាលណា $\underset{z\to z_0}{Lim}f(z)=f(z_0)$

$$\bullet f(z_0)=\left[\frac{1}{2}(2+i)^2+4(2+i)-5\right]=\frac{9}{2}+6i \qquad (1)$$

$$\bullet \underset{z\to z_0}{Lim}f(z)=\underset{z\to 2+i}{Lim}\left(\frac{1}{2}z_2+4z-5\right)=\left[\frac{1}{2}(2+i)^2+4(2+i)-5\right]$$

$$=\frac{1}{2}(4+4i-1)+8+4i-5=\frac{3}{2}+2i+3+4i=\frac{9}{2}+6i \qquad (2)$$

តាម (1) និង (2) នាំឲ្យ $\underset{z\to z_0}{Lim}f(z)=f(z_0)=\frac{9}{2}+6i$

ដូច្នេះ $f(z)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ $z_0=2+i$ ។

លំហាត់

១. ដោយប្រើនិយមន័យលីមីតបង្ហាញថា

ក. $\underset{z\to 3i}{Lim}\left(z^2+2-i\right)=-7-i$ ខ. $\underset{z\to 1-i}{Lim}\frac{1}{1-z}=-i$ គ. $\underset{z\to 1+i}{Lim}\frac{z^2-z+1-i}{z^2-2z+2}=1-\frac{1}{2}i$

២. គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\underset{z\to 2i}{Lim}\left(iz^4+3z^2-10i\right)$ ខ. $\underset{z\to \frac{i}{2}}{Lim}\frac{(2z-3)(4z+i)}{(iz-1)^2}$ គ. $\underset{z\to 1+i}{Lim}\left(\frac{z-1-i}{z^2-2z+2}\right)^2$

ឃ. $\underset{z\to e^{\frac{\pi i}{4}}}{Lim}\frac{z^2}{z^4+z+1}$ ង. $\underset{z\to\infty}{Lim}\frac{iz^2-iz+1-3i}{(2z+4i-3)(z-i)}$ ច. $\underset{z\to\infty}{Lim}\sqrt{z}\left(\sqrt{z+2i}-\sqrt{z+i}\right)$

៣. រកគ្រប់ចំណុចដែលធ្វើឲ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមមិនជាប់

ក. $f(z)=\frac{3z^2+4}{z^4-16}$ ខ. $f(z)=\cot z$ គ. $f(z)=\frac{1}{z}-\sec z$

៤. បង្ហាញថា $f(z)=z^2-2z+3$ ជាប់គ្រប់ចំណុចនៅក្នុងប្លង់ ។

៥. បង្ហាញថា $f(z)=\frac{z^2+1}{z^3+9}$

ក. ជាប់ ។ ខ. ជាប់ក្នុងដែន $|z|\leq 2$ ។

មេរៀនទី ៨

ដេរីវេនៃអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិច

(*Derivative of Complex Variable Funtion*)

១. ដេរីវេត្រង់ចំណុច z_0

និយមន័យ

$f(z)$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ I ហើយ z_0 ជាចំនួនកុំផ្លិចនៅក្នុងចន្លោះ I និង k ជាចំនួន ពិតមិនសូន្យ ដែល z_0+k , I ជាចំនួនដេរីវេត្រង់ចំណុច z_0 ជាលីមីតនៃអត្រាកំណើននៃអនុគមន៍ $f(z)$ រវាង z_0 និង z_0+k កាលណា k ឬ Δz ខិតទៅជិត 0 ។ ចំនួនដេរីវេត្រង់ z_0 នៃអនុគមន៍ $f(z)$ កំណត់ដោយ

$$f(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{k\to 0}\frac{f(z_0+k)-f(z_0)}{k}$$

ឧទាហរណ៍ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(z)=z^2+z$ ត្រង់ $z_0=2i$ ។

តាមនិយមន័យលីមីត $z_0=2i$ យើងបាន

$$f'(2i)=\lim_{k\to 0}\frac{f(2i+k)-f(2i)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{(2i+k)^2+(2i+k)-\left[(2i)^2+2i\right]}{k}$$

$$=\lim_{k\to 0}\left(\frac{-4+4ik+k^2+2i+k+4-2i}{k}\right)=\lim_{k\to 0}\left(\frac{4ik+k+k^2}{k}\right)$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{k\left(4ik+k+k^2\right)}{k}=1+4i$$

ដូច្នេះ $f'(z)=1+4i$

❖ <u>សំគាល់៖</u>

- $\Delta z=z_0-z$ ហៅថាបម្រែបម្រួលអថេរ
- $(f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\Delta f$ ហៅថាបម្រែបម្រួលអនុគមន៍
- $f(z_0)$ ជាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(z)$ ត្រង់ចំណុច z_0

ដេរីវេនៃអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិចមានលក្ខណ:ដូចនឹងដេរីវេនៃ អនុគមន៍អថេរពិតដែរ ។

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$ ។

២. លក្ខណ:ដេរីវេ

បើ $f(z)$ និង $g(z)$ ជាអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិចកំណត់ គេបាន

ក. $[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z)$

ខ. $[kf(z)]'=kf'(z)$

គ. $[f(z)\times g(z)]'=f'(z)\times g(z)+g'(z)\times f(z)$

ឃ. $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]'=\dfrac{f'(z)\times g(z)-g'(z)\times f(z)}{[g(z)]^2}$

ឧទាហរណ៍ គណនាអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិចខាងក្រោម $(f+g)'$, $(f\times g)'$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)'$

បើ $f(z)=z^2+2z-1$ ហើយ $g(z)=\dfrac{1}{z^2}$ ។

ដោយ $f(z)=z^2+2z-1 \Rightarrow f'(z)=2z+2$

$$g(z)=\frac{1}{z^2} \Rightarrow g'(z)=\frac{-2}{z^3}$$

យើងបាន $\bullet(f+g)'=f'+g'=2z+2-\dfrac{2}{z^3}=2\left(z+1-\dfrac{1}{z^3}\right)$ ឬ $\dfrac{2(z_4+z^3-1)}{z^3}$

$$\bullet(f\times g)'=f'+g'=(2z+2)\left(\frac{1}{z^3}\right)+\left(-\frac{2}{z^3}\right)(z^2+2z-1)$$

$$=\left(\frac{2z+2}{z^2}\right)+\left(-\frac{2}{z}-\frac{4}{z^2}+\frac{2}{z^3}\right)=\frac{2}{z^3}-\frac{2}{z^2}=\frac{2}{z^2}\left(\frac{1}{z}-1\right)$$

$$\bullet\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}=\frac{\left(\frac{2z+2}{z^2}\right)+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\frac{2}{z^3}}{\left(\frac{1}{z^2}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{2z}{z^2}+\frac{2}{z^2}+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\frac{2}{z^3}}{\frac{1}{z^4}}=z^4\left(\frac{4}{z}+\frac{6}{z^2}+\frac{2}{z^3}\right)=4z^3+6z^2+2z$$

៣. រូបមន្តខ្លះៗ នៃដេរីវេអថេរកុំផ្លិច

មានលក្ខណៈដូចអថេរពិតដែរគឺ ៖

១. $f(z)=a$ នោះ $f'(z)=0$, $(a\neq 0)$

២. $f(z)=az$ នោះ $f'(z)=a$

៣. $f(z)=az^2+b$ នោះ $f'(z)=2az$, $(a,b\neq 0)$

៤. $f(z)=z^n$ នោះ $f'(z)=nz^{n-1}$ $(n\neq 0, n\succ 1)$

៥. $f(z)=\sqrt{z}$ នោះ $f'(z)=\dfrac{1}{2\sqrt{z}}$, $(z\succ 0)$

៦. $f(z)=\dfrac{1}{z}$ នោះ $f'(z)=-\dfrac{1}{z^2}$, $(z\neq 0)$

៧. $f(z)=[u(z)]^n$ នោះ $f'(z)=nu'(z)\times u(z)^{n-1}$

៨. $f(z)=\sqrt{u(z)}$ នោះ $f'(z)=\dfrac{u'(z)}{2\sqrt{u(z)}}$

៩. $f(z)=\cos z$ នោះ $f'(z)=-\sin z$

១០. $f(z)=\sin z$ នោះ $f'(z)=\cos z$

១១. $f(z)=\tan z$ នោះ $f'(z)=\dfrac{1}{\cos^2 z}=1+\tan^2 z$

១២. $f(z)=\cot z$ នោះ $f'(z)=-\dfrac{1}{\sin^2 z}=-(1+\cot^2 z)$

១៣. $f(z)=e^z$ នោះ $f'(z)=e^z$

១៤. $f(z)=e^{az}$ នោះ $f'(z)=ae^{az}$

១៥. $f(z)=\ln z$ នោះ $f'(z)=\dfrac{1}{z}$

ឧទាហរណ៍ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $f(z)=\left(z^2+2z\right)^2$ ខ. $f(z)=\sqrt{3z^3+1}$ គ. $f(z)=\dfrac{z-1}{z^3+3}$

ឃ. $f(z)=\left(\sqrt{z}+4z\right)^2$ ង. $f(z)=e^z\cos 2z$ ច. $f(z)=\dfrac{e^z+1}{e^z-1}$

ចម្លើយ គណនាដេរីវេ

ក. $f(z)=(z^2+2z)^3$

$$f'(z)=3(z^2+2z)'(z^2+2z)^2=3(2z+2)(z^4+4z^3+4z^2)$$
$$=6z^5+24z^4+24z^3+6z^4+24z^3+24z^2$$
$$f'(z)=6z^5+30z^4+48z^3+24z^2$$

ខ. $f(z)=\sqrt{3z^2+1}=(3z^2+1)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(z)=\frac{1}{2}(3z^2+1)'(3z^2+1)^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}(6z)(3z^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$
$$f'(z)=\frac{3z}{\sqrt{3z^2+1}}$$

គ. $f(z)=\dfrac{z^3-1}{z+3}$

$$f'(z)=\frac{3z^2(z+3)-(z^3-1)}{(z+3)^2}=\frac{3z^3+9z^2-z^3+1}{(z+3)^2}$$
$$f'(z)=\frac{2z^3+9z^2+1}{(z+3)^2}$$

ឃ. $f(z)=\left(\sqrt{z}+4z\right)^2$

$$f'(z)=2\left(\sqrt{z}+4z\right)'\left(\sqrt{z}+4z\right)=2\left(\frac{1}{2\sqrt{z}}+4\right)\left(\sqrt{z}+4z\right)$$
$$f'(z)=\left(\frac{2}{\sqrt{z}}+8\right)\left(\sqrt{z}+4z\right)$$

ង. $f(z)=e^z\cos 2z$

$$f'(z)=(e^z\cos 2z)'=(e^z)'\cos 2z+e^z(\cos 2z)'=e^z\cos 2z-2e^z\sin 2z$$

ច. $f(z)=\dfrac{e^z+1}{e^z-1}$

$$f'(z)=\frac{(e^z+1)'(e^z-1)-(e^z-1)'(e^z+1)}{(e^z-1)^2}=\frac{e^z(e^z-1)-e^z(e^z+1)}{(e^z-1)^2}$$
$$=\frac{e^z\left[(e^z-1)-(e^z+1)\right]}{(e^z-1)^2}$$

៤. អត្ថិភាពនៃដេរីវេ Existence of a Derivative

ចំពោះអនុគមន៍កុំផ្លិចនៃអថេរកុំផ្លិច ដែល $f(z)=u(z)+iv(z)$ ដែល $z=x+iy$ and u,v ជាអនុគមន៍ពិតប្រាកដ

ដេរីវេនៃ $f(z)$ កំណត់ដោយ $f'(z)=\dfrac{df}{dz}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ ឱ្យដោយលីមីត ជាការ

ឯករាជ្យនៃវិធីសាស្រ្តពិសេសត្រង់ចំណុច z នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិច។ វាតែងតែពិតដូចដែលឱ្យដោយលក្ខខណ្ឌ

Cauchy-Riemann (C-R) គឺ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$

ឧទាហរណ៍៖ គណនាដេរីវេនៃ $w(z)=z^2$

$$w(z)=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^{23}$$

$$u(x,y)=x^2-y^2 \ \ and \ \ v(x,y)=2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x=\frac{\partial v}{\partial y} \ \ and \ \ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y=-\frac{\partial v}{\partial y}$$

គេបាន $$\frac{dw}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x+2yi=2z$$

ឧទាហរណ៍២៖ គណនាដេរីវេនៃ $w(z)=\dfrac{1}{z}$

$$w(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{z}\cdot\frac{\bar{z}}{\bar{z}}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2} \ \ and \ \ v(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2} \ \ \text{or} \ \ \frac{d(1/z)}{dz}=-\frac{1}{z^2}$$

លំហាត់

១. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍តាមនិយមន័យដេរីវេ

ក. $f(z)=\dfrac{z}{1+z}$ ខ. $f(z)=2e^z$ គ. $f(z)=\cos z$

២. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

ក. $f(z)=(z^3+1)(z^2-i)$ ខ. $f(z)=\dfrac{z+i}{z-i}$ គ. $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-i)^2}$

ឃ. $f(z)=\sqrt{z^2+z-1}$ ង. $f(z)=e^{2z}(\cos z+2i)$ ច. $f(z)=\ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)$

ឆ. $f(z)=\sin^{-1}z$ ជ. $f(z)=\sinh^{-1}z$ ឈ. $f(z)=\operatorname{sech}^{-1}z$

៣. គណនាដេរីវេត្រង់ចំណុច z_0 នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $f(z)=(3z+i)^6$ ត្រង់ $z_0=2+i$ ខ. $f(z)=\cos 3z+z$ ត្រង់ $z_0=\pi i$

គ. $f(z)=e^{3z-z^2}$ ត្រង់ $z_0=0$ ឃ. $f(z)=\ln(z-i)$ ត្រង់ $z_0=1$

៤. បង្ហាញថា ក. $\dfrac{d}{dz}\left(\cos^{-1}z\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ ខ. $\dfrac{d}{dz}(\cosh z)=\sinh z$

គ. $\dfrac{d}{dz}\left(\csc^{-1}z\right)=-\dfrac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$ ឃ. $\dfrac{d}{dz}\left(\cosh^{-1}z\right)=\dfrac{1}{\sqrt{z^2-1}}$

ង. $\dfrac{d}{dz}(\operatorname{csch} z)=-\operatorname{csch} z\cdot\coth z$ ច. $\dfrac{d}{dz}\left(\tanh^{-1}z\right)=\dfrac{1}{1-z^2}$

មេរៀនទី ៩

អនុគមន៍វិភាគនៃអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិច

(Analysis Funtion of Complex Variable Funtion)

១. អនុគមន៍វិភាគ ឬ អនុគមន៍អូឡូម៉រភី (*Analysis Funtion or Holomophic*)

អនុគមន៍ $f(z)$ ហៅថា អនុគមន៍វិភាគ ឬ អនុគមន៍អូឡូម៉រភី (**Holomophic**)ត្រង់ z_0 ក្នុង $\mathbb{R}$ បើវាកំណត់ និងមានដេរីវេត្រង់គ្រប់ចំណុចដែលក្បែរៗ z_0 ក្នុង $\mathbb{R}$ ឬ គេអាចនិយាយម៉្យាងទៀតថា មានដែននៃរង្វង់ $D=|z-z_0|\prec R$ ជារង្វង់បើកមួយដែលកំណត់ និងមានដេរីវេត្រង់គ្រប់ចំណុចនៃរង្វង់បើក D នោះ ។

២. សមីការកូស៊ីរីមែន (*Chauchy – Riemann Equations*)

ទ្រឹស្តីបទទី១ បើ $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ជាអនុគមន៍វិភាគក្នុងដែនកំណត់ D នោះវាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការកូស៊ីរីមែន។ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial y}$ នៅក្នុងដែនកំណត់ D ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យ $f(z)=z^3$ ដែល $z=x+iy$ ។ បង្ហាញថា $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគ ។

យើងមាន៖ $f(z)=z^3$ និង $z=x+iy$

យើងបាន $f(z)=z^3=(x+iy)^3=x^3+3x^2iy+3xy^2i^2+y^3i^3$

$$=x^3+3x^2iy-3xy^2-y^3i=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$$

ដោយ $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

នោះ $u(x,y)=x^3-3xy^2$, $v(x,y)=3x^2-y^3$

$$\left.\begin{aligned}&\bullet\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2\\&\bullet\frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ (i)\qquad\left.\begin{aligned}&\bullet\frac{\partial u}{\partial y}=-6xy\\&\bullet\frac{\partial v}{\partial x}=-(-6xy)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}\ (ii)$$

តាម (i) និង (ii) នោះ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគ។

ទ្រឹស្តីបទទី២ បើ u,v ជាអនុគមន៍មានដេរីវេដោយផ្នែកត្រង់ (x_0,y_0) ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ***Chauchy – Riemann*** នោះ f មានដេរីវេត្រង់ $z_0=x_0+iy_0$ ដែល $f'(z_0)=\dfrac{\partial u}{\partial x_0}+i\dfrac{\partial v}{\partial x_0}=\dfrac{\partial v}{\partial y_0}-i\dfrac{\partial u}{\partial y_0}$

ឧទាហរណ៍ បង្ហាញថា $f(z)=z^2$ ដែល $z=x+iy$ ជាអនុគមន៍វិភាគ។

យើងមាន $f(z)=z^2$ និង $z=x+iy$

យើងបាន $f(z)=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xiy$

$$\bullet\ f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x+2iy$$

$$\bullet\ f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=2x-(-2iy)=2x+2iy$$

ដោយ $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial v}=\dfrac{\partial v}{\partial y}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}$ នោះ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគ។

ទ្រឹស្តីបទទី៣ ក្រោមទម្រង់ប៉ូលែគេបាន $Z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ នោះលក្ខខណ្ឌ ***Chauchy − Riemann***

មានទម្រង់ $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha} & / \ f(z)=u(r,\alpha)+iv(r,\alpha)\\ \dfrac{\partial v}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\alpha} & (r>0)\end{cases}$

បើ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគនោះ $f'(z)=r(\cos\alpha+ision\alpha)\dfrac{\partial f}{\partial r}$ ឬ $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial r}+i\dfrac{\partial v}{\partial r}$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យ $f(z)=z^4$ ដែល $f(z)=r(\cos\alpha+ision\alpha)$ ។

បង្ហាញថា $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគ រួចគណនា $f'(z)$ ។

យើងមាន $f(z)=z^4$ និង $f(z)=r(\cos\alpha+ision\alpha)$

យើងបាន $f(z)=z^4=r^4(\cos\alpha+ision\alpha)^4=r^4\cos4\alpha+ir^4sion4\alpha$

ដោយ $f(z)=u(r,\alpha)+iv(r,\alpha)$

នាំឲ្យ $u(r,\alpha)=r^4\cos4\alpha$, $v(r,\alpha)=\sin4\alpha$

$$\bullet\frac{\partial u}{\partial r}=4r^3\cos4\alpha=\frac{1}{r}(4r^4\cos4\alpha)$$

$$\bullet\frac{\partial v}{\partial\alpha}=4r^4\cos4\alpha$$

នោះ $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\quad(i)$

$$\bullet\frac{\partial v}{\partial r}=4r^3\sin4\alpha=-\frac{1}{r}(-4r^4\sin4\alpha)$$

$$\bullet\frac{\partial u}{\partial\alpha}=4r^4\sin4\alpha$$

នោះ $\dfrac{\partial v}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\quad(ii)$

តាម (i) និង (ii) នោះ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគ ។

- រក $f'(z)$

ដោយ $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial r}+i\dfrac{\partial v}{\partial r}\Rightarrow f'(z)=4r^3\cos4\alpha+4ir^3\sin4\alpha$

៣. អនុគមន៍អាម៉ូនិច (***Harmonic Funtion***)

បើ $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ជាអនុគមន៍វិភាគនោះអនុគមន៍ $f(z)$ ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ *Chauchy − Riemann* ហើយ $f(z)$ មានដេរីវេដោយផ្នែកគ្រប់លំដាប់ និងជាអនុគមន៍ជាប់ផងដែរ។ យើងបាន៖

$$\bullet\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}\quad(E)$$

$$\bullet\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}\quad(F)$$

បូក (E) និង (F) យើងបាន៖ $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$ ឬ $\Delta u=0$ ។

សនិដ្ឋាន ផ្នែកពិត និងផ្នែកនិម្មិតនៃអនុគមន៍វិភាគ $f(z)$ ដែល $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ក្នុងដែនកំណត់ D សុទ្ធសឹងតែជាចម្លើយសមីការ ***Laplace's Equation*** គឺ $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ ;\Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ ហៅថា អនុគមន៍ $u(x,y)$ និង $v(x,y)$ ជាអនុគមន៍អាម៉ូនិច ។

ឧទាហរណ៍ ចូរគណនាផ្នែកមួយទៀតនៃអនុគមន៍ ដើម្បីបង្កើតបានជាអនុគមន៍អាម៉ូនិច។

$A\ .\ u(x,y)=2xy \quad , \quad B\ .\ v(x,y)=xy \quad , \quad C\ .\ u\in(x,y)=e^x\cos 2y$

<u>ចម្លើយ៖</u>

$A\ .\ u(x,y)=2xy$

តាមលក្ខខណ្ឌ ***Chauchy − Riemann*** គឺ $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

$\bullet \frac{\partial u}{\partial x}=2y=\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow\int\frac{\partial v}{\partial y}dy=2\int ydy=y^2+C(x)$ ឬ $V=y^2+C(x)$

$\bullet \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2x=-\frac{\partial v}{\partial x} \quad (i)$

តែ $V=y^2+C(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x}=C'(x) \quad (ii)$

តាម (i) និង (ii) យើងបាន៖ $C'(x)=-2x \quad \Rightarrow\int C'(x)dx=-2\int xdx \quad \Rightarrow C(x)=-x^2$

ដូច្នេះ $V(x,y)=y^2-x^2$ ។

$B.\ v(x,y)=xy$

តាមលក្ខខណ្ឌ ***Cauchy Rieman*** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

$\bullet \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=x \quad \Rightarrow \quad \int\frac{\partial u}{\partial x}dx=\int xdx=\frac{1}{2}x^2+C(y)$ ឬ $u=x^2+c(y)\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=c'(y)\ (i)$

$\bullet \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-y \quad (ii)$

តាម (i) និង (ii) យើងបាន៖ $C'(\mathrm{y})=-y \quad \Rightarrow C(x)=-\frac{1}{2}y^2$

ដូច្នេះ $V(x,y)=x^2-\frac{1}{2}y^2$ ។

$C\ .\ u(x,y)=e^x\cos 2y$

$\bullet \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos 2y \quad \Rightarrow\int\frac{\partial v}{\partial y}dy=\int e^x\cos 2ydy \quad \Leftrightarrow V=\frac{1}{2}e^x\sin 2y+C(x) \quad \Rightarrow\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2}e^x\sin 2y+C'(x) \quad (i)$

$\bullet \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-(-2e^x\sin 2y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x}=2e^x\sin 2y \quad (ii)$

$2e^x\sin 2y=\frac{1}{2}e^x\sin 2y+C'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{C}'(x)=\frac{3}{2}(e^x\sin 2y)$

$\Rightarrow \quad \mathrm{C}(x)=\frac{3}{2}\int e^x\sin 2ydx=\frac{3}{2}e^x\sin 2y$

ដូច្នេះ $V(x,y)=\frac{1}{2}e^x\sin 2y+\frac{3}{2}e^x\sin 2y=2e^x\sin 2y$

ឧទាហរណ៍ ចូរបង្កើតប្លង់ w $(w-plan)$ មួយដែល $w=z+2+i$ បើគេឲ្យប្លង់កុំផ្លិចមួយដែល ៖

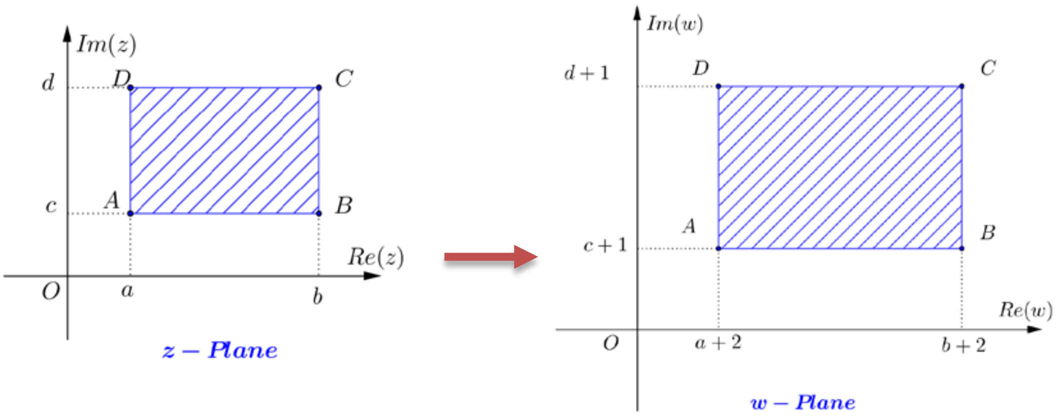
$$z-plan\begin{cases} z=x+iy \\ c\le y\le d \\ a\le x\le b \end{cases}$$ ។

បំណកស្រាយ

យើងមាន $w=z+2+i$

ដោយ $z=x+iy \quad \Rightarrow w=x+iy+2+i=(x+2)+i(y+1)=u+iv$

ដែល $a+2\le u\le b+2$ និង $c+1\le v\le d+1$



លំហាត់

១. បង្ហាញថាអនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍វិភាគ

ក. $f(z)=z^3$ ខ. $f(z)=z^5$ គ. $f(z)=z^6$ ឃ. $f(z)=z^8$

ង. $f(z)=z-\overline{z}$ ច. $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ ឆ. $f(z)=\dfrac{1}{z^4}$ ជ. $f(z)=\dfrac{1}{1-z^4}$

ឈ. $f(z)=z+\dfrac{1}{z}$ ញ. $f(z)=\text{Re}(z^2)$ ដ. $f(z)=\text{Re}(z)^2$ ឋ. $f(z)=e^z(\cos y+i\sin y)$

២. គណនាផ្នែកមួយទៀតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមដើម្បីបង្កើតបានអនុគមន៍អាម៉ូនិក

ក. $u(x,y)=xy$ ខ. $v(x,y)=xy$ គ. $u(x,y)=x^3-3xy^2$ ឃ. $v(x,y)=y^2+4x^2y$

ង. $u(x,y)=3x^3-4xy^3$ ច. $v(x,y)=2x-3y^2$ ឆ. $u(x,y)=\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{3}y^3$ ជ. $v(x,y)=-\dfrac{5}{2}x^3+\dfrac{3}{4}xy^2$

ឈ. $v(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ ញ. $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ ដ. $u(x,y)=e^x\cos 2y$ ឋ. $v(x,y)=e^{2x}\sin y$

៣. គេឲ្យប្លង់កុំផ្លិចមួយដែល $z-plane\begin{cases} z=x+yi \\ a\le x\le b \\ c\le y\le d \end{cases}$ ។ ចូរបង្កើតប្លង់ $w-Plane$ មួយដែល

ក. $w=z-2i+1$ ខ. $w=\overline{z}-i+2$ គ. $w=z+\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$ ឃ. $w=z+\overline{z}+e^{\pi i}$

សម្គាល់

១. អាចប្រើត្រីកោណប៉ាស្កាល់

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

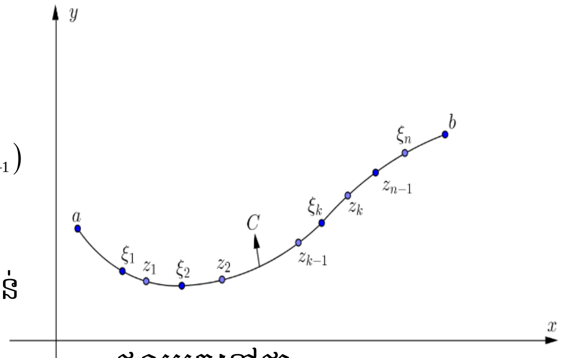
២. អាចប្រើពន្លាតទ្វេធា

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^{n-r} y^r = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \ldots\ldots\ldots + C_n^{n-2} x^2 y^{n-2} + C_n^{n-1} x y^{n-1} + C_n^n y^n$$

មេរៀនទី ១០

អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិច
(*Integration of Complex Variable Funtion*)

១. អាំងតេក្រាលតាមខ្សែកោងកុំផ្លិច(*Integration Spend Bunds Complex*)



បើ $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ជាអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិចជាប់ចំពោះចំណុចនៅលើខ្សែកោង(C) ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច z ។ ប្រវែងខ្សែ $S_n=f(\xi_1)(z_1-a)+f(\xi_2)(z_2-z_1)+......+f(\xi_n)(b-z_{n-1})$ យើងអាចសរសេរ $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$ នោះគេបាន $S_n=\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)(z_k-z_{k-1})=\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$ (1) បើចំនួន n កាន់តែធំទៅៗ នោះ លីមីត $\max[z_k,z_{k-1}]$ ខិតជិត 0 កាលណា $n\to+\infty$ ផលបូកទៅជា $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k=\int_C f(z)dz=\int_a^b f(z)dz$ (1) ដែល $z_0=a$; $z_1,z_2,z_3,.....,z_n=b$ ជាចំនួនបន្តបន្ទាប់នៅលើខ្សែកោង C ; $f(\xi_n)$ ជាចំណុចណាមួយ នៃអង្កត់ $[z_k,z_{k-1}]$ របស់ខ្សែកោង ។

- អាំងតេក្រាលនៃ (1) យើងបាន

$$\int_{c^+} f(z)dz=\int_{c^+}[u(x,y)+iv(x,y)](dx+idy)$$
$$=\int_{c^+}[u(x,y)dx+iu(x,y)dy+iv(x,y)dx+i^2v(x,y)dy]$$
$$=\int_{c^+}[u(x,y)dx-v(x,y)dy+i(u(x,y)dx+v(x,y)dy)]$$

២. លក្ខណប្រមាណវិធីអាំងតេក្រាល (*Operations of Integration*)

ក. $\int_{c^+}[af(z)\pm bg(z)]dz=a\int_{c^+} f(z)dz\pm b\int_{c^+} g(z)dz$

ខ. $\int_{c^+} f(z)dz=\int_{c_1^+} f(z)dz+\int_{c_2^+} f(z)dz$

គ. $\int_{c^+} dz=L$ ដែល L ជាប្រវែងរបស់ខ្សែងកោង(c^+)

ឃ. បើ $|f(z)\le M|$ លើ c^+ នោះ $\left|\int_{c^+} f(z)dz\right|\le M.L$

ង. $\int_{c^+} f(z)dz=-\int_{c^-} f(z)dz$

- c^+ ជាធ្នូរង្វង់មានទិសដៅវិជ្ជមាន
- c^- ជាធ្នូរង្វង់មានទិសដៅអវិជ្ជមាន

ឧទាហរណ៍ ចូរគណនា $\int_{c^+} z^2dz$ ដែល

ក. c^+ ជាអង្កត់ភ្ជាប់ពីចំណុច $0\to 2+i$

ខ. ខ្សែកោង c^+ ផ្គុំដោយខ្សែកោង c_1^+ និង c_2^+ ដែលភ្ជាប់ពី 0 ទៅ 2 រួចពី $2+i$ ទៅ ។

បំណកស្រាយ

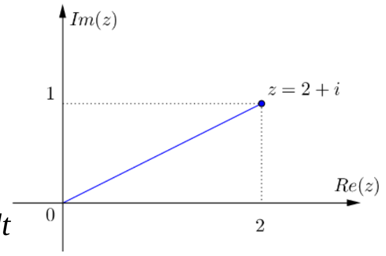
ក. សមីការខ្សែកោង c^+ ជាបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $0(0,0)$ និង $A(2,1)$ ។

នៅលើអ័ក្សចំនួនពិត មានសមីការ $y=\frac{1}{2}x$

ដែល $z=x+iy$ បើយក $x=t$ $\Rightarrow y=\frac{1}{2}t$

នោះ $z=t+i\frac{1}{2}t$, $0\le z\le 2$

$$\Rightarrow dz=dt+i\frac{1}{2}dt=\left(1+\frac{i}{2}\right)dt$$



នោះ $$\int_{c^+}z^2dz=\int_0^2\left(t+\frac{i}{2}t\right)^2\left(1+\frac{i}{2}\right)dt$$

$$=\int_0^2\left(1+\frac{i}{2}\right)^3t^2dt=\left(1+\frac{i}{2}\right)^3\int_0^2t^2dt=\left(1+\frac{i}{2}\right)^3\times\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^2$$

$$=\left(1+\frac{3}{2}i+\frac{3}{4}i^2+\frac{i^3}{8}\right)\frac{8}{3}=\left(\frac{1}{4}+\frac{11}{8}i\right)\frac{8}{3}=\frac{2}{3}+\frac{11}{3}i$$

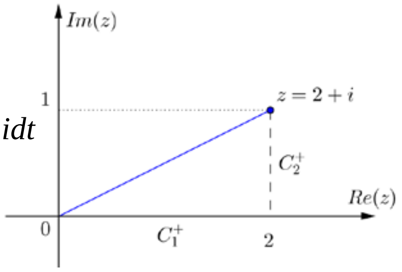
ខ. ខ្សែកោង c^+ ផ្គុំដោយខ្សែកោង c_1^+ និង c_2^+

\+ ចំពោះ c_1^+ ចេញពី 0 ទៅ 2

តាង $x=t$ នោះ $y=0$ $z=t\Rightarrow dz=dt$

\+ ចំពោះ c_2^+ ចេញពី 2 ទៅ $2+i$ ៖

តាង $x=2\Rightarrow y=t$, $0\le y\le 1$ នោះ $z=2+t\Rightarrow dz=idt$



យើងបាន

$$\int_{c^+}z^2dz=\int_{c_1^+}z^2dz+\int_{c_2^+}z^2dz$$

$$=\int_0^2t^2dt+\int_0^1(2+it)^2dt=\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^2+\int_0^1(4+4it-t^2)dt$$

$$=\frac{8}{3}+i\left.\left(4i+2it^2-\frac{t^3}{3}\right)\right|_0^1=\frac{8}{3}+4i-2-\frac{i}{3}=\frac{2}{3}+\frac{11}{3}i$$

ដូច្នេះ $$\int_{c^+}z^2dz=\frac{2}{3}+\frac{11}{3}i$$

សន្និដ្ឋាន អាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អថេរកុំផ្លិចមិនទាក់ទងនឹងខ្សែកោងរបស់អាំតេក្រាលទេមានន័យថា ឲ្យតែចំណុចចាប់ផ្តើម និងចំណុចបញ្ចប់ស្មើគ្នា គឺមានតម្លៃស្មើគ្នា។

៣. រូបមន្តអាំងតេក្រាលខ្លះៗ

១. $\int z^ndz=\frac{z^{n+1}}{n+1}$, $n\neq-1$

២. $\int\frac{dz}{z}=\ln z$

៣. $\int e^zdz=e^z$

៤. $\int a^zdz=\frac{a^z}{\ln a}$, $a\in\mathbb{R}$

៥. $\int e^{(a+ib)x}dx=\frac{e^{(a+bi)x}}{a+ib}$, $a,b\in\mathbb{R}$

៦. $\int\cos zdz=\sin z$

៧. $\int\sin z\,dz=-\cos z$

៨. $\int\cot zdz=\ln\sin z=\ln\csc z$

៩. $\int \tan z dz = -\ln \cos z = \ln \sec z$

ឧទាហរណ៍ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

ក. $\int \left(3z^2 + e^z - \cos z\right) dz = z^3 + e^z - \sin z$

ខ. $\int e^{(2+i)z} dz = \dfrac{1}{2+i} e^{(2+i)z}$

ឃ. $\int_1^i z e^z dz = \left(z e^z - e^z\right)_1^i = i e^i - e^i - e + e = e^i (i-1) = (i-1)(\cos 1 + i \sin 1)$

ង. $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} z i \sin z dz = i\left(-z\cos z + \sin z\right)_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = i\left(-\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2} + \sin\dfrac{\pi}{2} - \pi\cos(-\pi) - \sin(-\pi)\right) = i(1+\pi)$

៤. របៀបដោះស្រាយ

- ចំពោះអាំងតេក្រាល $I = \int e^{ax} \cos bx dx$ ត្រូវគណនាតាម $I = \mathrm{Re}\int e^{ax}\left(\cos bx + i \sin bx\right) dx = \mathrm{Re}\int e^{(a+ib)x} dx$

  ហើយប្រើរូមន្ត $\int e^{(a+ib)x} dx = \dfrac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}$

- ចំពោះអាំងតេក្រាល $I = \int e^{ax} \sin bx dx$ ត្រូវគណនាតាម $I = \mathrm{Im}\int e^{ax}\left(\cos bx + i \sin bx\right) dx = \mathrm{Im}\int e^{(a+ib)x} dx$

  ហើយប្រើរូមន្ត $\int e^{(a+ib)x} dx = \dfrac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}$

ឧទាហរណ៍: គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

ក. $I = \int e^{3x} \cos 5x dx$

គេបាន $I = \mathrm{Re}\int e^{3x}\left(\cos 5x + i \sin 5x\right) dx$ ប្រើរូបមន្ត $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$

នោះ $I = \mathrm{Re}\int e^{3x} e^{5ix} dx = \mathrm{Re}\int e^{(3+5i)x} dx$ ប្រើរូមន្ត $\int e^{(a+ib)x} dx = \dfrac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}$

នាំឲ្យ $I = \mathrm{Re}\int e^{(3+5i)x} dx = \mathrm{Re}\left[\dfrac{e^{(3+5i)x}}{3+5i}\right] = \mathrm{Re}\left[\dfrac{e^{3x} e^{5ix}}{3+5i}\right]$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{e^{3x}\left(\cos 5x + i \sin 5x\right)}{3+5i}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{e^{3x}\left(\cos 5x + i \sin 5x\right)(3-5i)}{3^2+5^2}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{e^{3x}\left(3\cos 5x + 3i \sin 5x - 5i\cos 5x + 5\sin 5x\right)}{9+25}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{e^{3x}\left(3\cos 5x + 5\sin 5x\right) + i\left(3\sin 5x - 5\cos 5x\right)}{34}\right]$$

ដោយអាំងតេក្រាលផ្នែកពិតនោះ $I = \dfrac{e^{3x}}{34}\left(3\cos 5x + 5\sin 5x\right) + c$

ដូចនេះ: $I = \dfrac{e^{3x}}{34}\left(3\cos 5x + 5\sin 5x\right) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$

ខ. $I = \int 3^x \sin 3x \, dx$

គេបាន $I = \int 3^x \sin 3x dx = \mathrm{Im}\int e^{\ln 3^x}\left(\cos 3x + i \sin 3x\right) dx$

$$= \mathrm{Im}\int \mathrm{e}^{x\ln 3}\left(\cos 3x + \mathrm{i} \sin 3x\right) dx = \mathrm{Im}\int e^{(\ln 3 + 3i)x} dx = \mathrm{Im}\left[\frac{e^{(\ln 3+3i)x}}{\ln 3 + 3i}\right]$$

$$= \mathrm{Im}\left[\frac{e^{x\ln 3}(\cos 3x + i\sin 3x)}{\ln 3 + 3i}\right] = \mathrm{Im}\left[\frac{e^{\ln 3^x}(\cos 3x + i\sin 3x)(\ln 3 - 3i)}{\ln^2 3 + 9}\right]$$

$$= \mathrm{Im}\left[\frac{3^x(\ln 3\cos 3x + i\ln 3\sin 3x - 3i\cos 3x + 3\sin 3x)}{\ln^2 3 + 9}\right]$$

$$= \mathrm{Im}\left[\frac{3^x(\ln 3\cos 3x + 3\sin 3x) + i(\ln 3\sin 3x - 3\cos 3x)}{\ln^2 3 + 9}\right]$$

ដោយអាំងតេក្រាលផ្នែកនិម្មិតនោះ $I = \dfrac{3^x(\ln 3\sin 3x - 3\cos 3x)}{\ln^2 3 + 9} + c$

ដូចនេះ $I = \dfrac{3^x(\ln 3\sin 3x - 3\cos 3x)}{\ln^2 3 + 9} + c$

គ. $A = \int \dfrac{\cos x}{e^x}dx$ និង $B = \int \dfrac{\sin x}{e^x}dx$

យក $A + Bi = \int \dfrac{\cos x}{e^x}dx + i\int \dfrac{\sin x}{e^x}dx = \int\left(\dfrac{\cos x}{e^x} + i\dfrac{\sin x}{e^x}\right)dx$

$$= \int \frac{\cos x + i\sin x}{e^x}dx = \int \frac{e^{ix}}{e^x}dx = \int e^{(i-1)x}dx$$

$$= \frac{1}{i-1}e^{x(i-1)} + C = \frac{1}{i-1}\left(\frac{\cos x + i\sin x}{e^x}\right) + C = \frac{-1-i}{2}\left(\frac{\cos x + i\sin x}{e^x}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2e^x}(-\cos x - i\sin x - i\cos x + \sin x) + C$$

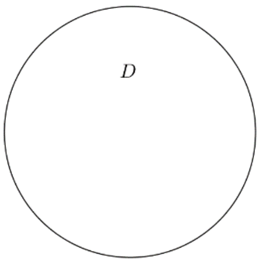
$$= \left(\frac{\sin x - \cos x}{2e^x}\right) - \left(\frac{\sin x + \cos x}{2e^x}\right)i + C$$

នោះ $A = \dfrac{\sin x - \cos x}{2e^x} + C_1$; $B = -\dfrac{\sin x + \cos x}{2e^x} + C_1$

៥. *Green's Theorem* ក្នុងប្លង់

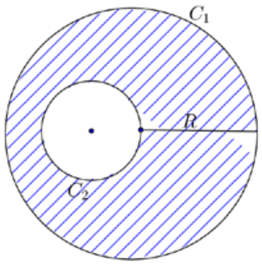
បើ $z = x + yi$ ហើយ $w = f(z) = u + iv$ តាង $u = P(x,y)$; $v = Q(x,y)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ ហើយមានដេរីវេជាប់ដោយផ្នែកនៅក្នុងប្លង់ $\mathbb{R}$ និងនៅក្នុងខ្សែដែន C គេបាន $\oint_C Pdx + Qdy = \iint_{\Re}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$ ។

៦. ទ្រឹស្តីបទកូស៊ី(*Cauchy's Theorem*) ដែននៅក្នុងទ្រឹស្តីបទកូស៊ីមាន



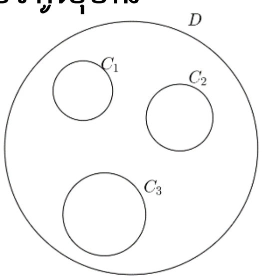
Simplement Connected

ដែនធម្មតា



Doubplement Connected

ដែនឌុប

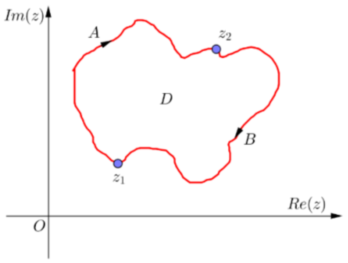


Multiplement Connected

ដែនទ្រីប

៧. ទ្រឹស្តីបទទី១

បើ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគក្នុងដែនសាមញ្ញគ្រប់ខ្សែកោងបិត C^+ ក្នុងដែន D កំណត់ដោយ $\oint_{C^+} f(z)dz = 0$ ។



ស្រាយបញ្ជាក់

ឧបមាថាមានពីចំណុចនៅក្នុងដែន D $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគ នោះគេបាន

អាំងតេក្រាលពីចំណុច z_1 ទៅ z_2 គឺ $\int_{z_1Az_2Bz_1} f(z)dz = \int_{z_1Az_2} f(z)dz + \int_{z_2Bz_1} f(z)dz$

$$\int_{z_1z_2} f(z)dz + \int_{z_2z_1} f(z)dz = \int_{z_1z_2} f(z)dz - \int_{z_1z_2} f(z)dz = 0$$

៨. ទ្រឹស្តីបទទី២ បើ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគក្នុងដែនសាមញ្ញ ហើយ $F(z)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(z)$

គេបាន $F(z) = \int_{C^+} f(z)dz = \int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a)$ ។

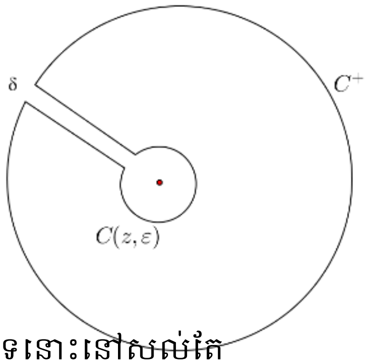
ឧទាហរណ៍ គណនាអាំងតេក្រាល $\int_{3i}^{1-i} 4zdz$

ស្រាយបញ្ជាក់ យើងបាន $\int_{3i}^{1-i} 4zdz = 2z^2\Big|_{3i}^{1-i} = 2(1-i)^2 - 2(3i)^2 = 2(-2i) + 2\times 9 = 18 - 4i$

៩. ទ្រឹស្តីបទទី៣ បើ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគក្នុងដែនសាមញ្ញ D ។ គ្រប់ចំណុច $z_0 \in D$ និងខ្សែ

កោងសាមញ្ញ C^+ នៅក្នុង D ដែលព័ទ្ធជុំវិញ z_0 គេបាន $\int_{C^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0)$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់



តាង δ ជាប្រវែងទទឹងចន្លោះបើកនៃរង្វង់មួយ

ε ជាកាំរបស់រង្វង់តូចដែលមានផ្ចិត z

យក $f(z_0) = F(z_0)(z_0 - z)$

នាំឲ្យ $F(z_0) = \frac{f(z_0)}{z_0 - z}$ ជាអនុគមន៍វិភាគពេលដែល $z_0 = z$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីគេបាន $\int_{C^+} F(z_0)dz_0 = 0$

បើ $\delta \to 0$ នោះ F ជាប់ និងមានលីមីត នោះ C^+ ជារង្វង់បិទនោះនៅសល់តែ

រង្វង់ ធំ C^+ និង រង្វង់តូច C

គេបាន $\int_{C_\varepsilon} F(z_0)dz_0 = \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z_0) - f(z) + f(z)}{z_0 - z} dz_0 = \int_{C_\varepsilon} \left(\frac{f(z_0) - f(z)}{z_0 - z} + \frac{f(z)}{z_0 - z} \right) dz_0$

កំណត់យក f ជាអនុគមន៍វិភាគ ពេល $C_\varepsilon \to 0$ បើ $\varepsilon \to 0$

គេបាន $\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z_0 - z} dz_0 = f(z) \int_{C_\varepsilon} \frac{dz_0}{z_0 - z}$

តាង $z_0 - z = \varepsilon e^{-it} \quad \Rightarrow \quad dz_0 = -i\varepsilon e^{-it} dt$

ដែល $0 \le t \le 2\pi$

នាំឲ្យ $f(z) \int_{C_\varepsilon} \frac{dz_0}{z_0 - z} = -f(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{-it}}{\varepsilon e^{-it}} dt = -f(z_0) \int_0^{2\pi} idt = -2i\pi f(z_0)$

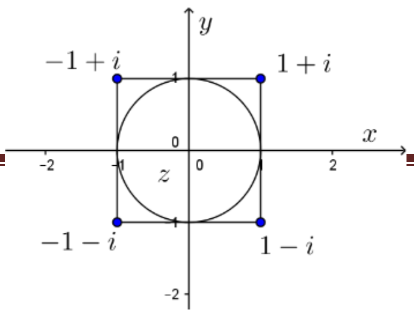
សមមូល $f(z) \int_{C_\varepsilon} \frac{dz_0}{z_0 - z} = -2i\pi f(z_0) \quad \Rightarrow \quad 2i\pi f(z_0) = \int_{C^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$

ឧទាហរណ៍ គណនា $\int_{C^+} \frac{dz}{z}$ ដែល C^+ ជាបរិមាត្រការេដែលមានកំពូល $\boldsymbol{-1 - i}$, $\boldsymbol{-1 + i}$,

$\boldsymbol{1 - i}$, $\boldsymbol{1 + i}$ ។

ចម្លើយ

$f(z) = \frac{1}{z}$ ជាអនុគមន៍វិភាគលើកលែងត្រង់ $z = 0$



នោះ c^+ ជារង្វង់ដែលមានផ្ចិត 0 កាំ $r = 1$

តាង $z = \cos t + i\sin t$ ដែល $0 \le t \le 2\pi$

$$dz = (-\sin t + i\cos t)dt = i(\cos t + i\sin t)dt = izdt$$

គេបាន $\int_{C^+} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{iz}{z} dt = \int_0^{2\pi} idt = it \,|_0^{2\pi} = 2\pi i$

១០. ទ្រឹស្តីបទទី៤ ដេរីវេទី n នៃអថេរកុំផ្លិច

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលកូស៊ី: $\int_{c^+} \frac{f(z)}{z - z_o} dz = 2\pi i$ បើ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគនៅក្នុង

ដែនកំណត់ D មានដេរីវេគ្រប់លំដាប់នោះ គេបាន៖ $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c^+} \frac{f(z)}{z - z_o} dz = 2\pi i$

គេបាន $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \quad \Rightarrow \int_{c^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(z_0)$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i}\int_{c^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz \quad \Rightarrow \int_{c^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(z_0)$$

$$f'''(z_0) = \frac{3!}{2\pi i}\int_{c^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^4} dz \quad \Rightarrow \int_{c^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} f'''(z_0)$$

$$\vdots$$

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{c^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \quad \Rightarrow \int_{c^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^n(z_0)$$

ឧទាហរណ៍ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម $\int_{c^+} \frac{9(z^2+2)}{z(z+1)^2(z-2)} dz$ ដែលជារង្វង់ហើយ

$|z| = 3$ ។

- របៀបទី១

អនុគមន៍ $\int_{c^+} \frac{9(z^2+2)}{z(z+1)^2(z-2)} dz$ អាចបំបែកជា

$$\frac{\boldsymbol{9(z^2+2)}}{\boldsymbol{z(z+1)^3(z_2-2)}} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{z}} + \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{(z-2)}} + \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{(z+1)}} + \frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{(z+1)^2}} + \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{(z+1)^3}}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\boldsymbol{z}$ យក $\boldsymbol{z = 0}$

គេបាន $\frac{2\times 9}{-2} = A \quad \Rightarrow \quad A = -9$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\boldsymbol{z - 2}$ យក $\boldsymbol{z = 2}$

គេបាន $\frac{9(4+2)}{2(2+1)^3} = B \quad \Rightarrow \quad B = 1$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\boldsymbol{(z+1)^3}$យក $\boldsymbol{z = -1}$

គេបាន៖ $\frac{9(z^2+1)}{z(z-2)} = \frac{A(z+1)^3}{z} + \frac{B((z+1)^3}{(z-2)} + c(z+1)^2 + D(z+1) + E$

$$\frac{9(1+2)}{-1(-1-2)} = E \quad \Rightarrow \quad E = 9$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\boldsymbol{(z+1)^3}$ រួចធ្វើដេរីវេទី $\boldsymbol{1}$ យក $\boldsymbol{z = -1}$

គេបាន $$D=\left[\frac{9(z^2+2)}{z(z-2)}\right]'=\frac{18z^2(z-2)-9(z^2+2)(2z-2)}{z^2(z-2)^2}$$

$$=\frac{\mathbf{18(-3)-9(3)(-4)}}{\mathbf{1(-3)^2}}=\frac{\mathbf{54}}{\mathbf{9}}=\mathbf{6}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(\boldsymbol{z+1})^{\mathbf{3}}$ រួចធ្វើដេរីវេទី2 យក $\boldsymbol{z=-1}$

គេបាន $$2C=\left[\frac{18z^2(z-2)-9(z^2-2)(2z-2)}{z^2(z-2)^2}\right]'=\left[\frac{-18z^2-36z+36}{z^4-4z^3+4z^2}\right]'$$

$$=\frac{(-18z-36)(z^4-4z^3+4z^2)-(4z^3-12z^2+8z)(-18z^2-36z+36)}{\left(z^4-4z^3+4z^2\right)^2}$$

$$=\frac{0\times1-(-4-12-8)(-18+36+360)}{(1+4+16)^2}=\frac{24\times54}{81}=16$$

$$\Rightarrow C=6$$

យើងបាន $$f(z)=-\frac{9}{z}+\frac{1}{z-2}+\frac{8}{z+1}+\frac{6}{(z+1)^2}+\frac{9}{(z+1)^3}$$

នោះ $$\int_{c^+}f(z)dz=\int_{c^+}\left(-\frac{9}{z}+\frac{1}{z-2}+\frac{8}{z+1}+\frac{6}{(z+1)^2}+\frac{9}{(z+1)^3}\right)dz$$

$$=-9\int_{c^+}\frac{1}{z}dz+\int_{c^+}\frac{1}{z-2}dz+8\int_c\frac{1}{z+1}dz+6\int_c\frac{1}{(z+1)^2}dz+9\int_c\frac{1}{(z+1)^3}dz$$

$$=\mathbf{-9\times2\pi i}\boldsymbol{g}(\mathbf{0})=\mathbf{-18\pi i}$$ (ព្រោះ $\boldsymbol{g(z)=0}$ នាំឲ្យ $\boldsymbol{g(0)=1}$)

$$\int\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z-2}}\boldsymbol{dz}=\boldsymbol{2\pi ig(2)=2\pi i}$$ (ព្រោះ $\boldsymbol{g(z)=1}$ នាំឲ្យ $\boldsymbol{g(2)=1}$)

$$8\int\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z+1}}\boldsymbol{dz}=\mathbf{8\times2\pi i}\boldsymbol{g(-1)}=\mathbf{16\pi i}$$ (ព្រោះ $\boldsymbol{g(z)=0}$ នាំឲ្យ $\boldsymbol{g(-1)=1}$)

$$\mathbf{6}\int\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{z+1})^{\mathbf{2}}}\boldsymbol{dz}=\mathbf{6\times2\pi i}\boldsymbol{g'(-1)}=\mathbf{0}$$ (ព្រោះ $\boldsymbol{g(z)=1}$ នាំឲ្យ $\boldsymbol{g'(z)=o}$)

$$\int\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{z+1})^{\mathbf{3}}}\boldsymbol{dz}=\mathbf{9\times2\pi i}\boldsymbol{g''(-1)}=\mathbf{0}$$ (ព្រោះ $\boldsymbol{g'(z)=0}$ នាំឲ្យ $\boldsymbol{g''=o}$)

នាំឲ្យ $$\int_{c^+}f(z)dz=-18\pi i+16\pi i+2\pi i=0$$

- របៀបទី២

$$\int_{c^+}f(z)dz=\int_{c_1^+}f(z)dz=\int_{c_2^+}f(z)dz+\int_{c_3^+}f(z)dz$$

$$f(z)=\frac{9(z^2+1)}{z(z+1)^3(z_2-2)}=\frac{\frac{9(z^2+2)}{(z+1)^3(z-2)}}{z}+\frac{\frac{9(z^2+2)}{z(z+1)^3}}{z-2}+\frac{\frac{9(z^2+2}{z(z-2)}}{(z+1)^3}$$

$$\int_{c^+}f(z)=\int_{c^+}\frac{9(z^2+1)}{z(z+1)^3(z_2-2)}dz=\int_{c_1^+}\frac{\frac{9(z^2+2)}{(z+1)^3(z-2)}}{z}dz+\int_{c_2^+}\frac{\frac{9(z^2+2)}{z(z+1)^3}}{z-2}dz+\int_{c_3^+}\frac{\frac{9(z^2+2}{z(z-2)}}{(z+1)^3}dz$$

$$\int_{c_1^+}\frac{\frac{9(z^2+2)}{(z+1)^3(z-2)}}{z}dz=2\pi ig_1(0)=2\pi i(-8)=-182\pi$$

ព្រោះ $\quad g_1(z)=\dfrac{\dfrac{9(z^2+2)}{(z+1)^3(z-2)}}{z} \qquad \Rightarrow g_1(0)=\dfrac{18}{1(-20)}=-9$

$$\int_{c_2^+}\frac{\dfrac{9(z^2+2)}{z(z+1)^3}}{z-2}dz=2\pi i g_2(2)=2\pi i\times 1=2\pi i$$

ព្រោះ $\quad g_2(z)=\dfrac{\dfrac{9(z^2+2)}{z(z+1)^3}}{z-2} \qquad \Rightarrow g_2(2)=\dfrac{9\times 6}{2\times 3^3}=1$

$$\int_{c_3^+}\frac{\dfrac{9(z^2+2}{z(z-2)}}{(z+1)^3}dz=2\pi i g_3(-2)=\frac{2\pi i}{2!}\times 16=16\pi i$$

ព្រោះ $\quad g_3(z)=\dfrac{\dfrac{9(z^2+2}{z(z-2)}}{(z+1)^3} \qquad \Rightarrow g_3(-2)=16\pi i$

ដូចនេះ $\int_{c^+}f(z)dz=-18\pi i+2\pi i+16\pi i=0$

១១. ទ្រឹស្តីបទ (*Morera*)

បើ $f(z)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ក្នុងដែនសាមញ្ញ D ហើយ $\int_{C^+}f(z)dz=0$ គ្រប់គន្លងបិទជិតក្នុងដែននេះ នោះ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគក្នុងដែន D ។

១២. វិសមភាពកូស៊ី (*Cauchy Inequation*)

នៅក្នុងរូបមន្ត $f^n(z_0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\int_{C^+}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad \Rightarrow \quad \int_{C^+}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\dfrac{2\pi i}{n!}f^n(z_0)$ បើ C^+ ជារង្វង់មានកាំ r និងផ្ចិត z_0 ហើយ M ជាតម្លៃអតិបរមានៃអនុគមន៍ $f(z)$ ដែល $|f(z)|$ នៅលើ C^+ ។

គេបាន $\left|f^n(z_0)\right|=\dfrac{n!}{2\pi}\left|\int_{C^+}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right|\le\dfrac{n!}{2\pi}\times\dfrac{M}{r^{n+1}}\times 2\pi r \qquad ;\ (r=z-z_0\ ;\ P=2\pi r)$

នាំឲ្យ $\qquad \left|f^n(z_0)\right|=\dfrac{n!}{2\pi}\left|\int_{C^+}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right|\le n!\times\dfrac{M}{r^n}$ ។

១៣. ទ្រឹស្តីបទ *Lioville*

បើ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគលើគ្រប់ចំណុច z ក្នុងប្លង់ កុំផ្លិច ហើយ $|f(z)|\le k$ គ្រប់ចំណុច z នោះ $f(z)$ ជាអនុគមន៍ថេរ ។

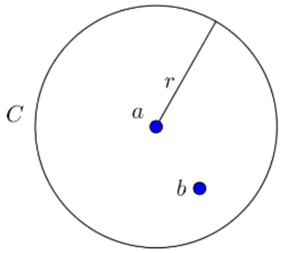
ស្រាយ

តាង $\quad a, b$ ជាចំណុចពីរផ្សេងគ្នាក្នុងប្លង់កុំផ្លិច

C ជាខ្សែនៃរង្វង់ដែលមានកាំ r ដែល a,b នៅក្នុងក្នុងខ្សែបិទ

តាមអាំងតេក្រាលកូស៊ី

$$f(b)-f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-b}dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz$$



$$=\frac{b-a}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-b)(z-a)}dz$$

បើ $|z-a|=r$

នោះ $|z-b|=|z-a+a-b|\geq|z-a|-|a-b|=r-|a-b|\geq\frac{r}{2}$

យក r កាន់តែធំ នោះ $|a-b|<\frac{r}{2}$

ដូចនេះ $\left|f(z)\right|\leq k$

$$\left|f(b)-f(a)\right|=\frac{|b-a|}{2\pi i}\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-b)(z-a)}dz\right|\leq\frac{|b-a|M2\pi r}{2\pi\frac{r}{2}r}=\frac{2|b-a|M}{r}$$

បើ $r\to\infty$ នោះ $\left|f(b)-f(a)\right|=0$ $\Rightarrow$ $f(b)=f(a)$

១៥. ស៊េរីតៃល័រ (Tailor Series)

គេមាន $f(z)=e^x$ ហើយគេចង់បំបែកជាពហុធាស្វ័យគុណនៃតួ $(z-z_o)$។ ដោយ $f(z)=e^x$ អាចបំបែកជាពហុធា

$$P(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+a_3(z-z_0)^3+\ \dots+a_n(z-z_0)^n$$

បើ $z=z_0$ នាំឲ្យ

$$f(z_o)\ =P(z_0)\ =a_0\quad\to\quad a_0=f(z_o)=e^{z_0}$$

$$f'(z_o)\ =P'(z_0)\ =a_1\quad\to\quad a_1=f'(z_o)=e^{z_0}$$

$$f''(z_o)\ =P''(z_0)\ =2!\,a_2\quad\to\quad a_2=\frac{1}{2!}f''(z_o)=\frac{e^{z_0}}{2!}$$

$$f'''(z_o)=P'''(z_0)=3!\,a_3\quad\to\quad a_1=\frac{1}{3!}f'(z_o)=\frac{e^{z_0}}{3!}$$

……………………………………………………………. .

$$f^n(z_o)=P^n(z_0)\ =n!\,a_n\quad\to\quad a_n=\frac{1}{n!}f'(z_o)=\frac{e^{z_0}}{n!}$$

នាំឲ្យ $e^x=e^{z_0}+e^{z_0}(z-z_0)+\frac{e^{z_0}}{2!}(z-z_0)^2+\frac{e^{z_0}}{3!}(z-z_0)^3+\cdots+\frac{e^{z_0}}{n!}(z-z_0)^n$

ដូចនេះ $e^z=e^{z_0}\left[1+(z-z_0)+\frac{1}{2!}(z-z_0)^2+\frac{1}{3!}(z-z_0)^3+\cdots+\frac{1}{n!}(z-z_0)^n\right]+\cdots$

$$=e^{z_0}\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{n!}$$

បើ $z_0=0$ នាំឲ្យ $e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n}{n!}$ គឺជាស៊េរីតៃល័រ ។

- $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=1+z+z^2+z^3+\dots\dots\dots\dots$
- $\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n=1-z+z^2-z^3+\dots\dots\dots\dots$
- $\ln(1-z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\dots\dots\dots\dots$
- $\ln(1+z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\dots\dots\dots\dots$

- $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ...\quad (-\infty < z < +\infty)$
- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + ... + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...\quad (-\infty < z < +\infty)$
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + ... + \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + ...\quad (-\infty < z < +\infty)$

១៥. ស៊េរីឡូរ៉ង (*Laurent Series*)

បើ $f(z)$ ជាអនុគមន៍វិភាគលើរង្វង់ពីរ c_1និង c_2ដែលមានផ្ចិតរួមត្រង់ a នោះអនុគមន៍

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n}$$

$$= a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots + \frac{c_1}{(z-a)} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c_n}{(z-a)^n}$$

ដែល $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c^+} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}} du$, $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c^+} (u-a)^{n+1} f(u) du$

ឬ គេអាចសរសេរតាងដោយ $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(z-a)^n$ ដែល $J_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c^+} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}} du$

ឧទាហរណ៍: ចូរបំបែកអនុគមន៍ខាងក្រោមជាស៊េរីឡូរ៉ង (*Laurent Series*) នៃស្វ័យគុណ z ដែល $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ នៅក្នុងដែន $1 < |z| < 3$ ។

យើងអាចបំបែកប្រភាគសនិទានជាផលបូកប្រភាគសនិទានងាយៈ

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z-3)}$$

- គុណអង្គទាំងពីរនឹង $z-1$ យក $z=1$

គេបាន $\frac{1}{1-3} = A \quad \rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}$

- គុណអង្គទាំងពីរនឹង $z-3$ យក$z=3$

គេបាន $\frac{1}{3-1} = B \quad \rightarrow \quad B = \frac{1}{2}$

នាំឲ្យ $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{2(z-3)}$

តាមរូបមន្ត $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$; $|u| < 1$

នោះ $-\frac{1}{2(z-1)} = -\frac{1}{2z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right) = -\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}$

ហើយ $\frac{1}{2(z-3)} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{3}}\right) = -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$

ដូចនេះ $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{3}\right)^n\right]$$

លំហាត់

១. គណនាអាំងតេក្រាលតាមខ្សែកោង C^+ នៃរង្វង់

ក. $\int_{C^+}\frac{e^z}{z-2}dz$ បើ C^+ ជារង្វង់ដែលមាន $|z|=\frac{3}{2}$

ខ. $\int_{C^+}\frac{2(z-1)}{z+1}dz$ បើ C^+ ជារង្វង់ដែលមាន $|z|=\frac{1}{2}$

គ. $\int_{C^+}\frac{e^{2z}}{z+1}dz$ បើ C^+ ជារង្វង់ដែលមាន $|z-i|=1$

ឃ. $\int_{C^+}\frac{z+1}{z(z-1)}dz$ បើ C^+ ជារង្វង់ដែលមាន $|z+1|=2$

ង. $\int_{C^+}\frac{z+2}{z(z-1)(z+1)^2}dz$ បើ C^+ ជារង្វង់ដែលមាន $|z-2|=1$

ច. $\int_{C^+}\frac{z+1}{z(z-1)^2}dz$ បើ C^+ ជារង្វង់ដែលមាន $|z+i|=1$

២. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

ក. $\int_0^{2i}zdz$ ខ. $\int_{2i}^{2i+1}e^zdz$ គ. $\int_{i+1}^{2+i}\left(z^2+2z-3\right)dz$ ឃ. $\int_i^{2i+1}\left(z^2-1\right)^2dz$

ង. $\int_{i-1}^{i+1}(z+i)^3dz$ ច. $\int_{-i\pi}^{i\pi}\cos zdz$ ឆ. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 zdz$ ជ. $\int_{-i\pi}^{i\pi}\sin^3 zdz$

ឈ. $\int_{-1}^{1}z\cos zdz$ ញ. $\int_1^i ze^{z^2}dz$ ដ. $\int_{1+i}^{i}z^3e^{z^4}dz$

៣. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

ក. $\int_C\frac{z^3}{(z+1)^3}dz$ ខ. $\int_C\frac{e^{\pi z}}{z}dz$ គ. $\int_C\frac{\cos z}{z^2}dz$ ឃ. $\int_C\frac{e^z\sin z}{z^2}dz$

ង. $\int_C\frac{z^n}{(z+1)^{n+1}}dz$ ច. $\int_C\frac{\sin z}{z^{2n}}dz$ ឆ. $\int_C\frac{\sin \pi z}{z^3}dz$ ជ. $\int_C\frac{e^{z^3}}{z^3}dz$

៤. គណនាអាំតេក្រាលតាមខ្សែកោងតាងឲ្យអនុគមន៍ $\int_C\frac{dz}{\left(z^2-1\right)\left(z^2+1\right)}$

ក. $|z-2i|=2$ ខ. $|z-i|=1$ គ. $|z|=\frac{1}{2}$ ឃ. $|z+i|=1$

៥. បង្ហាញថា $\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{e^{ax}\left(a\sin bx-b\cos bx\right)}{a^2+b^2}$ និង $\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{e^{ax}\left(a\cos bx+b\sin bx\right)}{a^2+b^2}$

លំហាត់ស្រាវជ្រាវ

1. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=r_1\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)$ និង $z_2=r_2\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)$ ដែល $\left(r_1,\theta_1\right),\left(r_2,\theta_2\right)$ ជាគូនៃម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ z_1,z_2 រៀងគ្នា ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត

   ក. $z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\left[\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right]$ ខ. $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\right],\ z_2\neq 0$

2. ដោះស្រាយសមីការ:

   ក. $\left|\boldsymbol{Z}-\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{2}}\boldsymbol{i}\right|^{\log_{|Z|}(Z\overline{Z})}=\log_{|Z|}\left|\dfrac{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{3}}\boldsymbol{i}}{\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{3}}\boldsymbol{i}}\right|$ ខ. $\dfrac{\boldsymbol{Z}}{\mathbf{3}+\mathbf{4}\boldsymbol{i}}+\dfrac{\boldsymbol{Z}-\mathbf{1}}{\mathbf{5}\boldsymbol{i}}=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}-\mathbf{4}\boldsymbol{i}}$

   គ. $\left(\boldsymbol{Z}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{Z}+\mathbf{1}\right)+\left(\boldsymbol{Z}^{\mathbf{2}}+\mathbf{2}\boldsymbol{Z}+\mathbf{3}\right)+\cdots+\left(\boldsymbol{Z}^{\mathbf{2}}+\mathbf{20}\boldsymbol{Z}+\mathbf{39}\right)=-\mathbf{4500}$

3. ក. រក $\boldsymbol{Z}$ ដែល $\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{n}}=\overline{\boldsymbol{Z}}$ $(\boldsymbol{n}\in\mathbb{N})$ ខ. រក $\boldsymbol{Z}$ ដែល $\overline{\boldsymbol{Z}}^{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{Z}$ $(\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^*)$

4. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=2+3i$ និង $w=5+i$ ។

   ក. បង្ហាញថា $\overline{zw}=\overline{z}\ \overline{w}$ និង $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$ ។

   ខ. គេឲ្យ $M=(3x-y)+(2x+y)i$ ។ កំណត់តម្លៃ x,y ដើម្បីឲ្យ $M=\overline{z+w}$ ។

   គ. សរសេរ $z_1=M-3$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចសរសេរ z_1^{2016} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

5. ក ដោះស្រាយសមីការ $z^2-z+1=0$ ក្នុង C

   ខ គេឲ្យ $z_1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ និង $z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ។ សរសេរ $z=\dfrac{z_1+1}{z_2-1}$ ជាទម្រង់ពិជគណិត រួចទាញរក ម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ z និង z^{2016} ។

6. កំណត់ Z ដើម្បីឲ្យ Z^7 និង $\dfrac{1}{Z^2}$ គឺជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ ។

7. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\cos\varphi+i\sin\varphi$

   ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $Z^n+Z^{-n}=2\cos n\varphi$, $Z^n-Z^{-n}=2i\sin\varphi$ ។

   ខ. ប្រើលទ្ធផលខាងលើរកចម្លើយនៃ $\left(Z+\overline{Z}\right)^5$, $\left(Z-\overline{Z}\right)^5$ និងគណនា $\cos 5\varphi$, $\sin 5\varphi$ ជាអនុគមន៍នៃ $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ និង $\cos 3\varphi$, $\sin 3\varphi$ ។

8. ក. សរសេរ $Z=1+\left(\sqrt{2}-1\right)i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

   ខ. គណនា $\cos\dfrac{\pi}{8}$ និង $\sin\dfrac{\pi}{8}$ ។

9. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\cos\varphi+i\sin\varphi$ $,\varphi\in\mathbb{R}$ ។

   ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 1$ គេមាន $Z^n+\dfrac{1}{Z^n}=2\cos n\varphi$ និង $Z^n-\dfrac{1}{Z^n}=2i\sin n\varphi$ ។

   ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cos^4\varphi=\dfrac{1}{8}(\cos 4\varphi+4\cos 2\varphi+3)$ និង $\sin^5\varphi=\sin 5\varphi-5\sin 3\varphi+10\sin\varphi$ ។

10. ឧបមាថា A_k $(k=1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots,n)$ គឺជាកំពូលនៃចតុកោណនិយ័តចារឹកក្នុងរង្វង់ ផ្ចិត O កាំ $R=1$ និង M ជាចំនួនចល័តលើរង្វង់ ។ បង្ហាញថា $MA_1+MA_2+\ldots\ldots\ldots+MA_n=2n$ ។

11. គេឲ្យ $z=\log_3\left(\frac{x+y}{2}\right)+i(\log_2 x+\log_2 y)$ និង $w=\frac{12+i}{1-2i}$ ដែល $x>0$, $y>0$ ។

ក. សរសេរ w ជាទម្រង់ពិជគណិត ។ ខ. កំណត់ x និង y ដើម្បីឲ្យ $z=w$ ។

12. គេមាន $z=2\sqrt{3}+2i$ និង $w=\left(1+\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)i$ ។

ក. សរសេរ $u=\frac{z}{w}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

ខ. សរសេរ u , z និង w ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ. រកតម្លៃពិតប្រាកដ នៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$ ។

13. បើ z និង z' ជាចំនួនកុំផ្លិចមានម៉ូឌុល 1 ហើយ a ជាចំនួនពិត ។ គេកំណត់ $Z=z+z'+azz'+1$ និង $Z'=z+z'+zz'+a$ ។

ក. បង្ហាញថា $Z'=zz'\overline{Z}$ និង $|Z|=|Z'|$ ។

ខ. គេសន្មតថា $1+zz'\neq 0$ ។ បង្ហាញថា ចំនួន $u=\frac{z+z'}{1+zz'}$ ជាចំនួនពិត ។

14. បង្ហាញថា $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}ki^{k-1}=\frac{i-ni^n-(n+1)i^{n+1}}{2}$ រួចសិក្សាផលបូកខាងក្រោម

$S_1=1-3+5-7+\cdots+(-1)^p(2p+1)$ និង $S_2=2-4+6-8+\cdots+(-1)^{p+1}2p$ ។

15. គណនាផលបូកខាងក្រោម

1. $S_1=\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ 2. $S_2=\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$ 3. $S_3=\sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx)$

4. $S_4=\sum_{k=0}^{n}\sin^2(kx)$ 5. $S_5=\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$ 6. $S_6=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(kx)}{\sin^k(x)}$

16. n ជាចំនួនគត់មានទម្រង់ $3k+1$ $(k\in\mathbb{N})$ បង្ហាញថា $\sum_{p=0}^{n-1}(-3)^p\binom{2n}{2p+1}=2^{2n-1}$ ។ ណែនាំ គណនា $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{2n}$ ដែល $\varphi=\frac{\pi}{3}$ ។

17. គណនា $(1+i)^{4n}$ រួចសិក្សាផលបូក $\sum_{p=0}^{2n}(-1)^p\binom{4n}{2p}$ និង $\sum_{p=0}^{2n-1}(-1)^p\binom{4n}{2p+1}$ ។

18. ចូរសម្រួលកន្សោម $P_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{1+k(k+1)+i}{1+k(k+1)-i}$ ។

19. ក. បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $(u,v)\in\mathbb{C}^2$: $|u|+|v|\le|u+v|+|u-v|$ ។

ខ. សិក្សាថា ចំពោះគ្រប់ $(z_1,z_2,z_3,z_4)\in\mathbb{C}$

គេបាន $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|\le|z_1+z_2|+|z_1+z_3|+|z_1+z_4|+|z_2+z_3|+|z_2+z_4|+|z_3+z_4|$

20. រកតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម

ក. $\sqrt{-1+(1-i)\sqrt{-1+(1-2i)\sqrt{-1+(1-3i)\sqrt{-1+\cdots}}}}$ ខ. $i\sqrt{-1+2i\sqrt{-1+3i\sqrt{-1+4i\sqrt{-1+\cdots}}}}$

ឯកសារយោង

1. គណិតវិទ្យាទី ១១ បោះពុម្ពឆ្នាំ ២០០៩
2. សៀវភៅសម្រាប់គ្រូ និងសិស្សមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ ភាគ ១ ដល់ ១២ បោះពុម្ពឆ្នាំ ២០០៣
3. វចនានុក្រមសម្ដេចសង្ឃរាជជួនណាត
4. អនុគមន៍អថេរកុំផ្លិចរៀបរៀងដោយ អនុបណ្ឌិត ថៃ ថាល់
5. វចនានុក្រមសេដ្ឋកិច្ចទំនើបអង់គ្លេស ខ្មែរ ឆ្នាំ ១៩៩៦
6. Advanced Mathematics By Dr. Chan roth
7. Advanced Engineering Mathematics (Seventh Edition)

   -Chapter 12 Complex Number, Complex analysis Fuctions
8. Complex Variables by MURRAY R. SPIEGEL, Ph.D