វិទ្យាល័យ ញ៉ឹម វណ្ណដា ពារាំង

2nd

គណិតវិទ្យា

ថ្នាក់ទី ១០ ថ្នាក់ទី ១១ ថ្នាក់ទី ១២

សម្រាយបញ្ជាក់

រូបមន្ត ទ្រឹស្តីបទ លក្ខណៈ

រៀបរៀងដោយ : គរុនិស្សិត ច្រើស ដារ៉ា

www.facebook.com/7khmer
fb : Entertainment And Knowledge

www.facebook.com/7khmer
fb : Entertainment And Knowledge

អារម្ភកថា

សួស្តី ! លោកគ្រូ-អ្នកគ្រូ ប្អូនៗសិស្សានុសិស្ស មិត្តអ្នកសិក្សាជាទីស្រឡាញ់ រាប់អាន ។ សៀវភៅគណិតវិទ្យា «**សម្រាយបញ្ជាក់ រូបមន្ត ទ្រឹស្តីបទ លក្ខណៈ**» ដែលលោកអ្នកកំពុងតែកាន់ក្នុងដៃនេះ គឺជាសៀវភៅថ្មីមួយ ដែលបង្កើតឡើងដើម្បីធ្វើការស្រាយបញ្ជាក់ រូបមន្ត ទ្រឹស្តីបទ និងលក្ខណៈផ្សេងៗនៃមេរៀនគណិតវិទ្យា ។ ជាការពិតមានរូបមន្ត ឬទ្រឹស្តីបទ ឬលក្ខណៈមួយចំនួន មានការស្រាយបញ្ជាក់ក្នុងសៀវភៅពុម្ពរបស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា រួចហើយ ក៏ប៉ុន្តែនៅមាន រូបមន្ត ឬទ្រឹស្តីបទ ឬលក្ខណៈមួយចំនួនធំទៀត ដែលអ្នកសិក្សាជួបប្រទះ ពុំទាន់មានការស្រាយបញ្ជាក់ ចេះតែថាតាមគេ ធ្វើតាមគេតៗគ្នា មិនដឹងពីមូលហេតុ ពេលខ្លះយើងចង់ដឹងពីមូលហេតុដែរ តែមិនដឹងទៅរកឯណា ។ ម្យ៉ាងទៀត ការស្រាយបញ្ជាក់ដែលមានរួចហើយនោះ គឺមានការលំបាកក្នុងការអានឱ្យងាយយល់ ព្រោះគេសរសេរជាអត្ថបទបន្តគ្នាដោយសារក្រសួងមានការកំណត់ចំនួនទំព័រ ។ ហើយជាពិសេសទៅទៀតនោះ ពេលខ្លះយើងយល់ យើងចេះពីការស្រាយបញ្ជាក់ រូបមន្ត ឬទ្រឹស្តីបទ ឬលក្ខណៈទាំងនោះ តែក្រោយមក យើងភ្លេចខ្លះ ឬភ្លេចទាំងស្រុង ដោយសារយើងខានជួបយូរ មិនដែលបានរំលឹក ឬរវល់ការងារផ្សេងៗច្រើនពេក នេះវាជារឿងធម្មតារបស់មនុស្សគ្រប់រូបទៅហើយ «តើនរណាមួយដែលថា មិនចេះភ្លេច ? មនុស្ស មិនមែនម៉ាស៊ីន !!! » ។

ហេតុនេះ ដើម្បីជួយសម្រួលដល់អ្នកសិក្សា ដែលចង់ដឹង ចង់យល់ ចង់ចេះ ពីមូលហេតុឫសគល់ នៃរូបមន្ត ទ្រឹស្តីបទ និងលក្ខណៈផ្សេងៗនៃមេរៀនគណិតវិទ្យា ទើបខ្ញុំបានរៀបរៀងបង្កើតសៀវភៅនេះឡើង សរសេរបែបជាអត្ថបទពន្យល់ មានបញ្ជាក់មូលហេតុច្បាស់លាស់ មានច្រើនរបៀប ។ អ្នកត្រូវដឹងថា ក្នុងមេរៀនមួយចំនួនមាន រូបមន្ត ឬទ្រឹស្តីបទ ឬលក្ខណៈខ្លះ ដាក់យកសិន ព្រោះវិធីនៃការស្រាយបញ្ជាក់លំហាត់នោះរៀនមិនទាន់ដល់ ។

ដូចដែលបានបញ្ជាក់ក្នុងអារម្ភកថានៃការបោះពុម្ពលើកទី១ ថា ខ្ញុំនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថ្នាក់ទី៧ ទី៨ ទី៩ និងទី១០ ជាបន្តបន្ទាប់តាមរយៈ ការធ្វើឱ្យទាន់សម័យ (Update) ក្នុងពេលបោះពុម្ពលើកក្រោយ ។ ដូចនេះ ក្នុងការបោះពុម្ពលើកទី ២ នេះ មានការស្រាយបញ្ជាក់ រូបមន្ត ឬទ្រឹស្តីបទ ឬលក្ខណៈ ថ្នាក់ទី១០ ទី១១ និងទី១២ ។ សូមរង់ចាំការបោះពុម្ពលើកក្រោយៗ ដែលមានការស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត ឬទ្រឹស្តីបទ ឬលក្ខណៈ នៃថ្នាក់តូចជាងនេះ និងការស្រាយបញ្ជាក់លើលំហាត់គណិតវិទ្យាផ្សេងៗទៀត ដែលគ្មានក្នុងកម្មវិធីសិក្សារបស់ក្រសួង ដោយលោកអ្នកគ្រាន់តែមើលក្របកែងខាងលើមានដាក់ថា 2nd , 3rd , 4th , ... ។

ខ្ញុំបាទសូមអភ័យទោសចំពោះកំហុសអចេតនាទាំងឡាយ ដែលមាននៅក្នុងសៀវភៅនេះ ខ្ញុំបាទនឹងទទួលយកការរិះគន់ ឬការផ្តល់ជាយោបល់ ឬការផ្តល់ជាគំនិតបកស្រាយថ្មីៗ ប្លែកៗ ដើម្បីអភិវឌ្ឍ សៀវភៅនេះ ឱ្យកាន់តែប្រសើរ ។

សូមជូនពរដល់អ្នកសិក្សាគ្រប់រូប មានសុខភាពល្អ និងទទួលបានជោគជ័យក្នុងដំណើរជីវិត ។

ព្រៃវែង , ថ្ងៃទី ៣០ ខែ កញ្ញា ឆ្នាំ ២០១៥

អ្នករៀបរៀង

www.facebook.com/7khmer
fb : Entertainment And Knowledge

www.facebook.com/7khmer
fb : Entertainment And Knowledge

បញ្ជីអត្ថបទ

		ចំណងជើងមេរៀន	ទំព័រ
➢ **ថ្នាក់ទី ១០**	១.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ តក្កវិទ្យា	1
	២.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ សំណុំ	15
	៣.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ ចំនួន	18
	៤.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ ពហុធា	25
	៥.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ សមីការ	30
	៦.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ វិសមីការ	40
	៧.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ ធរណីមាត្រក្នុងប្លង់	48
	៨.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ អនុគមន៍	58
	៩.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ ត្រីកោណមាត្រ	63
	១០.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ ចម្លាស់-បន្សំ	73
	១១.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ វ៉ិចទ័រ	80
	១២.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ បំលែងរូបក្នុងប្លង់	96
	១៣.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ ធរណីមាត្រក្នុងលំហ	101
➢ **ថ្នាក់ទី ១១**	១.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ ស្វ៊ីត និងស៊េរី	108
	២.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល	108
	៣.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ លោការីត	125
	៤.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ ត្រីកោណមាត្រ	130
	៥.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ ម៉ាទ្រីស និងដេទែមីណង់	151
	៦.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ បំលែងលីនេអ៊ែ	154
	៧.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ ធរណីមាត្រក្នុងលំហ	157
➢ **ថ្នាក់ទី ១២**	១.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ ចំនួនកុំផ្លិច	171
	២.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ លីមីត	182
	៣.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ ដេរីវេ	194
	៤.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ សិក្សាអនុគមន៍	213
	៥.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ អាំងតេក្រាល	220
	៦.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល	244
	៧.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ ធរណីមាត្រក្នុងលំហ	249
	៨.	លំហាត់ និងការស្រាយបញ្ជាក់ កោនិច	265
➢ **សេចក្តីបន្ថែម**		ការស្រាយបញ្ជាក់អំពីរង្វង់	281

www.facebook.com/7khmer
fb : Entertainment And Knowledge

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន តក្កវិទ្យា

1. បង្ហាញថា សំណើ $\overline{\overline{p}}$ និងសំណើ p ជាសំណើតែមួយ ។
2. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈដឺម៉ដេន (De Morgan) ៖ (i) $\overline{p\wedge q}=\overline{p}\vee\overline{q}$ និង (ii) $\overline{p\vee q}=\overline{p}\wedge\overline{q}$ ។
3. បង្ហាញថា សំណើ $p\Rightarrow q$ និងសំណើ $\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$ មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា ។
4. បង្ហាញថា $p\Leftrightarrow q=(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$ ។
5. បង្ហាញថា បើ x និង y ជាចំនួនសនិទាន នោះ $x+y$ ជាចំនួនសនិទាន ។
6. បង្ហាញថា បើ $|x|>|y|$ នោះ $x^2>y^2$ ។
7. បង្ហាញថា បើ x និង y ជាចំនួនគត់សេស នោះ $x+y$ ជាចំនួនគត់គូ ។
8. បង្ហាញថា បើ x និង y ជាចំនួនគត់សេស នោះ xy ក៏ជាចំនួនគត់សេសដែរ ។
9. បង្ហាញថា បើ n^2 ជាចំនួនគត់គូ នោះ n ក៏ជាចំនួនគត់គូ ។
10. បង្ហាញថា បើ mn មិនមែនជាពហុគុណនៃ 3 នោះ m និង n ក៏មិនមែនជាពហុគុណនៃ 3 ដែរ ។
11. បង្ហាញថា បើមុំឆ្លាស់ក្នុងពីរនៃបន្ទាត់ពីរជាមុំស្មើគ្នា នោះបន្ទាត់ទាំងពីរនោះស្របគ្នា ។
12. បង្ហាញថា $\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។
13. បង្ហាញថា $\sqrt{5}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។
14. បង្ហាញថា $\sqrt{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។
15. បង្ហាញថា $\sqrt[4]{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។
16. បង្ហាញថា $\sqrt{p}$ ជាចំនួនអសនិទាន ចំពោះគ្រប់ចំនួនបឋម p ។
17. បង្ហាញថា $1+\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។
18. បង្ហាញថា $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។
19. បង្ហាញថា $x^2+5x+6=0$ លុះត្រាតែ $x=-2$ ឬ $x=-3$ ។
20. បង្ហាញថា $x^3-4x=0$ លុះត្រាតែ $x=0$ ឬ $x=-2$ ឬ $x=2$ ។
21. បង្ហាញថា $x^2+y^2=0$ លុះត្រាតែ $x=0$ និង $y=0$ ។
22. បង្ហាញថា អង្គការអាស៊ានមានសមាជិកមកពីគ្រប់ប្រទេសក្នុងទ្វីបអាស៊ី ជាសំណើមិនពិត ។
23. បង្ហាញថា ចំនួនបឋមជាចំនួនគត់សេស ជាសំណើមិនពិត ។
24. បង្ហាញថា បើ p និង q ជាចំនួនបឋម ហើយ $n=p^2+q^2$ នោះ n ជាចំនួនបឋម ជាសំណើមិនពិត ។
25. បង្ហាញថា បើ $a>b$ នោះ $a^2>b^2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ជាសំណើមិនពិត ។
26. បង្ហាញថា បើ x និង y ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន និង xy ជាចំនួនគត់សេស នោះ x និង y ក៏ជាចំនួនគត់សេសដែរ ។
27. បង្ហាញថា បើ $x(x-2)<0$ នោះ $0<x<2$ ។
28. បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n បើ $n^2>25$ នោះ $n>5$ ។
29. បង្ហាញថា $x+\dfrac{1}{x}>2$ ចំពោះគ្រប់ $x>1$ ។
30. បង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប p និង q ដែល $\dfrac{p^2}{q^2}=2$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន តក្កវិទ្យា

1. **បង្ហាញថា សំណើ $\overline{\overline{p}}$ និងសំណើ p ជាសំណើតែមួយ**

គេមាន សំណើ p និងសំណើ $\overline{p}$ មានតម្លៃភាពពិតខុសគ្នា

គេសង់បានតារាងតម្លៃភាពពិត នៃសំណើ p , $\overline{p}$, $\overline{\overline{p}}$ បានដូចខាងក្រោម

p	$\overline{p}$	$\overline{\overline{p}}$
1	0	1
0	1	0

តាមតារាងតម្លៃភាពពិតឃើញថា សំណើ p និងសំណើ $\overline{\overline{p}}$ មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា

នាំឱ្យ សំណើ $\overline{\overline{p}}$ និងសំណើ p ជាសំណើតែមួយ

ដូចនេះ: សំណើ $\overline{\overline{p}}$ និងសំណើ p ជាសំណើតែមួយ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

2. **ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈដឺម៉ង់ហ្គង់** (De Morgan) ៖

➢ស្រាយបញ្ជាក់ថា (i) $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$

គេនឹងប្រើតារាងតម្លៃភាពពិត ដើម្បីបង្ហាញថា $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

តាមតារាងតម្លៃភាពពិតឃើញថា សំណើ $\overline{p \wedge q}$ និងសំណើ $\overline{p} \vee \overline{q}$ មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា

នាំឱ្យ គេបានសំណើ $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$

ដូចនេះ: លក្ខណៈដឺម៉ង់ហ្គង់ $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

➢ស្រាយបញ្ជាក់ថា (ii) $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$

គេនឹងប្រើតារាងតម្លៃភាពពិត ដើម្បីបង្ហាញថា $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

តាមតារាងតម្លៃភាពពិតឃើញថា សំណើ $\overline{p \wedge q}$ និងសំណើ $\overline{p} \vee \overline{q}$ មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា

នាំឱ្យ គេបានសំណើ $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$

ដូចនេះ: លក្ខណៈដឺម៉ង់ហ្គង់ $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

3. **បង្ហាញថា សំណើ $p \Rightarrow q$ និងសំណើ $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា**

គេសង់តារាងតម្លៃភាពពិនៃសំណើ $p \Rightarrow q$ និងសំណើ $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ បានដូចខាងក្រោម ៖

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \Rightarrow q$	$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

តាមតារាងតម្លៃភាពពិតឃើញថា សំណើ $p \Rightarrow q$ និងសំណើ $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា

ដូចនេះ: សំណើ $p \Rightarrow q$ និងសំណើ $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា ត្រូវបានបង្ហាញ ។

4. **បង្ហាញថា $p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$**

គេសង់តារាងតម្លៃភាពពិនៃសំណើ $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ និងសំណើ $p \Leftrightarrow q$ បានដូចខាងក្រោម ៖

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

តាមតារាងតម្លៃភាពពិតឃើញថា សំណើ $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ និងសំណើ $p \Leftrightarrow q$ មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា

ដូចនេះ: $p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

5. **បង្ហាញថា បើ x និង y ជាចំនួនសនិទាន នោះ $x + y$ ជាចំនួនសនិទាន**

គេមាន x និង y ជាចំនួនសនិទាន

គេតាង $x = \frac{a}{b}$ និង $y = \frac{c}{d}$ ដែល a , b , c , d ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប និង $b \neq 0 , d \neq 0$

គេបាន $x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

ដោយ $ad + bc$ និង bd ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប

នាំឱ្យ $x + y = \frac{ad + bc}{bd}$ ជាចំនួនសនិទា ន

ដូចនេះ: បើ x និង y ជាចំនួនសនិទាន នោះ $x + y$ ជាចំនួនសនិទាន ត្រូវបានបង្ហាញ ។

6. **បង្ហាញថា បើ $|x| > |y|$ នោះ $x^2 > y^2$**

គេមាន $|x| \geq 0$, $|y| \geq 0$ និង $|x| > |y|$ នោះគេបាន $|x|^2 > |y|^2$ (មិនប្តូរទិសដៅ)

តែ $|x|^2 = x^2$, $|y|^2 = y^2$

គេបាន $|x|^2 > |y|^2$ អាចសរសេរ $x^2 > y^2$

ដូចនេះ: បើ $|x| > |y|$ នោះ $x^2 > y^2$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

7. បង្ហាញថា បើ x និង y ជាចំនួនគត់សេស នោះ $x+y$ ជាចំនួនគត់គូ

គេមាន x និង y ជាចំនួនគត់សេស

គេតាងបាន $x=2m+1$ និង $y=2n+1$ ដែល m , n ជាចំនួនគត់

នាំឱ្យ
$$\begin{aligned} x+y &= 2m+1+2n+1 \\ &= 2m+2n+2 \\ &= 2(m+n+1) \\ &= 2k \ , \ k=m+n+1 \end{aligned}$$

ដោយ $x+y=2k$ មានទម្រង់ជាចំនួនគត់គូ នោះ $x+y$ ជាចំនួនគត់គូ

ដូចនេះ **បើ x និង y ជាចំនួនគត់សេស នោះ $x+y$ ជាចំនួនគត់គូ ត្រូវបានបង្ហាញ** ។

8. បង្ហាញថា បើ x និង y ជាចំនួនគត់សេស នោះ xy ក៏ជាចំនួនគត់សេសដែរ

គេមាន x និង y ជាចំនួនគត់សេស

គេតាងបាន $x=2m+1$ និង $y=2n+1$ ដែល m , n ជាចំនួនគត់

នាំឱ្យ
$$\begin{aligned} xy &= (2m+1)(2n+1) \\ &= 4mn+2m+2n+1 \\ &= 2(mn+m+n)+1 \\ &= 2k+1 \ , \ k=mn+m+n \end{aligned}$$

ដោយ $xy=2k+1$ មានទម្រង់ជាចំនួនគត់សេស នោះ xy ជាចំនួនគត់សេស

ដូចនេះ **បើ x និង y ជាចំនួនគត់សេស នោះ xy ក៏ជាចំនួនគត់សេសដែរ ត្រូវបានបង្ហាញ** ។

9. បង្ហាញថា បើ n^2 ជាចំនួនគត់គូ នោះ n ក៏ជាចំនួនគត់គូ

គេនឹងស្រាយតាមសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ព្រោះគេដឹងថា $p\Rightarrow q$ និង $\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$ មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា (បង្ហាញរួចខាងលើ)

គេតាង $p:\ n^2$ ជាចំនួនគត់គូ

$q:\ n$ ជាចំនួនគត់គូ

នាំឱ្យ $\overline{p}:\ n^2$ ជាចំនួនគត់សេស

$\overline{q}:\ n$ ជាចំនួនគត់សេស

ដោយ $\overline{q}:\ n$ ជាចំនួនគត់សេស នោះ $n=2k+1$, k ជាចំនួនគត់

នោះ
$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2+4k+1 \\ &= 2(2k^2+2k)+1 \\ &= 2m+1 \ , \ m=2k^2+2k \end{aligned}$$

គេបាន $n^2=2m+1$ ជាចំនួនគត់សេស ជាសំណើ $\overline{p}$

ដោយ គេស្រាយបាន $\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$ ជាសំណើពិត នោះសំណើ $p\Rightarrow q$ ក៏ជាសំណើពិតដែរ

ដូចនេះ **បើ n^2 ជាចំនួនគត់គូ នោះ n ក៏ជាចំនួនគត់គូ ត្រូវបានបង្ហាញ** ។

10. **បង្ហាញថា បើ mn មិនមែនជាពហុគុណនៃ 3 នោះ m និង n ក៏មិនមែនជាពហុគុណនៃ 3 ដែរ**

គេនឹងស្រាយតាមសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ព្រោះគេដឹងថា $p \Rightarrow q$ និង $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា (បង្ហាញរួចខាងលើ)

គេតាង $p:$ mn មិនមែនជាពហុគុណនៃ 3

$q:$ m និង n មិនមែនជាពហុគុណនៃ 3

នាំឱ្យ $\overline{p}:$ mn ជាពហុគុណនៃ 3

$\overline{q}:$ យ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំណោម m និង n ជាពហុគុណនៃ 3

ចេញពីសំណើ $\overline{q}$ គេនឹងស្រាយរហូតបាន $\overline{p}$ តាមករណីទាំងបីដូចខាងក្រោម ៖

- ករណី m ជាពហុគុណនៃ 3 និង n មិនមែនជាពហុគុណនៃ 3

 គេតាង $m = 3k$

 គេបាន $mn = 3k \cdot n = 3(kn)$ ជាពហុគុណនៃ 3 ជាសំណើ $\overline{p}$

- ករណី m មិនមែនជាពហុគុណនៃ 3 និង n ជាពហុគុណនៃ 3

 គេតាង $n = 3\ell$

 គេបាន $mn = m \cdot 3\ell = 3(m\ell)$ ជាពហុគុណនៃ 3 ជាសំណើ $\overline{p}$

- ករណី m ជាពហុគុណនៃ 3 និង n ជាពហុគុណនៃ 3

 គេតាង $m = 3u$, $n = 3v$

 គេបាន $mn = 3u \cdot 3v = 3(3uv)$ ជាពហុគុណនៃ 3 ជាសំណើ $\overline{p}$

ឃើញថា គ្រប់ករណីគេបានសំណើ $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ ជាសំណើពិត នោះសំណើ $p \Rightarrow q$ ក៏ជាសំណើពិតដែរ

ដូចនេះ | បើ mn មិនមែនជាពហុគុណនៃ 3 នោះ m និង n ក៏មិនមែនជាពហុគុណនៃ 3 ដែរ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

11. **បង្ហាញថា បើមុំឆ្លាស់ក្នុងពីរនៃបន្ទាត់ពីរជាមុំស្មើគ្នា នោះបន្ទាត់ទាំងពីរនោះស្របគ្នា**

គេនឹងស្រាយតាមសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ព្រោះគេដឹងថា $p \Rightarrow q$ និង $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា (បង្ហាញរួចខាងលើ)

គេតាង $p:$ មុំឆ្លាស់ក្នុងពីរនៃបន្ទាត់ពីរជាមុំស្មើគ្នា

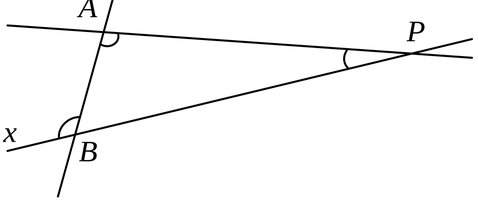
$q:$ បន្ទាត់ទាំងពីរនោះស្របគ្នា

នាំឱ្យ $\overline{p}:$ មុំឆ្លាស់ក្នុងពីរនៃបន្ទាត់ពីរជាមុំមិនស្មើគ្នា

$\overline{q}:$ បន្ទាត់ទាំងពីរនោះមិនស្របគ្នា

ចេញពីសំណើ $\overline{q}$ គេនឹងស្រាយរហូតបាន $\overline{p}$ ដូចខាងក្រោម ៖

គេមាន $\overline{q}:$ បន្ទាត់ទាំងពីរនោះមិនស្របគ្នា មានន័យថាបន្ទាត់ប្រសព្វគ្នា



តាមផលបូកមុំក្រៅនៃត្រីកោណ គេបាន ៖

$\angle BAP + \angle APB = \angle ABx$ នោះ $\angle ABx > \angle BAP$

គេបាន $\angle ABx \neq \angle BAP$

មានន័យថា មុំឆ្លាស់ក្នុងពីរនៃបន្ទាត់ពីរជាមុំមិនស្មើគ្នា ជាសំណើ $\overline{p}$

នាំឱ្យ $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ ជាសំណើពិត នោះ $p \Rightarrow q$ ក៏ពិតដែរ

ដូចនេះ | បើមុំឆ្លាស់ក្នុងពីរនៃបន្ទាត់ពីរជាមុំស្មើគ្នា នោះបន្ទាត់ទាំងពីរនោះស្របគ្នា ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

12. បង្ហាញថា $\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន

>របៀបទី១ តាមប្រភាគសម្រួលមិនបាន

គេនឹងបង្ហាញថា $\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន តាមសំណើផ្ទុយពីការពិត គេដឹងថា បើ $\overline{p}$ មិនពិត នោះ p ពិត

គេតាង $p:\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន នោះ $\overline{p}:\sqrt{2}$ ជាចំនួនសនិទាន

ឧបមាថា $\overline{p}:\sqrt{2}$ ជាចំនួនសនិទាន ជាសំណើពិត

គេបាន $\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន (ឬ a និង b ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ឬតួចែករួមធំបំផុតនៃ a និង b ស្មើ 1)

នាំឱ្យ $a^2=2b^2 \quad (1)$

ដោយ $a^2=2b^2$ មានទម្រង់ជាចំនួនគូ នោះ a^2 ជាចំនួនគូ នាំឱ្យ a ក៏ជាចំនួនគូដែរ (មើលលំហាត់ 9)

តាងបាន $a=2m$ ដែល m ជាចំនួនគត់

គេបាន $(1)\ :\ (2m)^2=2b^2 \Leftrightarrow 4m^2=2b^2 \Leftrightarrow 2m^2=b^2$

ដោយ $b^2=2m^2$ មានទម្រង់ជាចំនួនគូ នោះ b^2 ជាចំនួនគូ នាំឱ្យ b ក៏ជាចំនួនគូដែរ

តាងបាន $b=2n$ ដែល n ជាចំនួនគត់

ឃើញថា $\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{2m}{2n}$ អាចសម្រួលនឹង 2 បាន ផ្ទុយពីការពិត ដែលថា $\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន

នាំឱ្យ សំណើ $\overline{p}:\sqrt{2}$ ជាចំនួនសនិទាន ជាសំណើមិនពិត មានន័យថា $p:\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន ជាសំណើពិត

ដូចនេះ: **$\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន ត្រូវបានបង្ហាញ** ។

>របៀបទី២ តាមចំនួនកត្តាបឋម

គេតាង $p:\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន នោះ $\overline{p}:\sqrt{2}$ ជាចំនួនសនិទាន

ឧបមាថា $\overline{p}:\sqrt{2}$ ជាចំនួនសនិទាន ជាសំណើពិត

គេបាន $\sqrt{2}=\dfrac{a}{b} \Leftrightarrow a^2=2b^2 \quad (1)$

ដោយ ចំនួន a មានកត្តាបឋមតែមួយបែបគត់ តាងដោយ $a=a_1\times a_2\times a_3\times\ldots\times a_m$ មាន m កត្តាបឋម

ដែល $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ ជាចំនួនបឋម

នោះ $a^2=(a_1\times a_2\times a_3\times\ldots\times a_m)^2$ មាន $2m$ កត្តា គឺចំនួនគូកត្តា

ហើយ ចំនួន b មានកត្តាបឋមតែមួយបែបគត់ តាងដោយ $b=b_1\times b_2\times b_3\times\ldots\times b_n$ មាន n កត្តាបឋម

ដែល $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ ជាចំនួនបឋម

នោះ $b^2=(b_1\times b_2\times b_3\times\ldots\times b_n)^2$ មាន $2n$ កត្តា គឺចំនួនគូកត្តា

នាំឱ្យ $2b^2=2(b_1\times b_2\times b_3\times\ldots\times b_n)^2$ មាន $2n+1$ កត្តា គឺចំនួនសេសកត្តា

តាម (1) ឃើញថា អង្គទីមួយ a^2 មានគូកត្តាបឋម ឯអង្គទីពីរ $2b^2$ មានសេសកត្តាបឋម នោះ a^2 និង $2b^2$ មានកត្តាបឋមខុសគ្នា

នាំឱ្យ a^2 និង $2b^2$ មិនស្មើគ្នា នោះការឧបមាថា $\overline{p}:\sqrt{2}$ ជាចំនួនសនិទាន ជាសំណើមិនពិត

គេបាន $p:\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន ជាសំណើពិត

ដូចនេះ: **$\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន ត្រូវបានបង្ហាញ** ។

13. **បង្ហាញថា $\sqrt{5}$ ជាចំនួនអសនិទាន**

គេនឹងបង្ហាញថា $\sqrt{5}$ ជាចំនួនអសនិទាន តាមសំណើផ្ទុយពីការពិត គេដឹងថា បើ $\overline{p}$ មិនពិត នោះ p ពិត

គេតាង $p: \sqrt{5}$ ជាចំនួនអសនិទាន នោះ $\overline{p}: \sqrt{5}$ ជាចំនួនសនិទាន

ឧបមាថា $\overline{p}: \sqrt{5}$ ជាចំនួនសនិទាន ជាសំណើពិត

គេបាន $\sqrt{5} = \dfrac{a}{b} \Leftrightarrow a^2 = 5b^2 \quad (1)$

ដោយ ចំនួន a មានកត្តាបឋមតែមួយបែបគត់ តាងដោយ $a = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_m$ មាន m កត្តាបឋម ដែល $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ ជាចំនួនបឋម នោះ $a^2 = (a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_m)^2$ មាន $2m$ កត្តា គឺចំនួនគូកត្តា

ហើយ ចំនួន b មានកត្តាបឋមតែមួយបែបគត់ តាងដោយ $b = b_1 \times b_2 \times b_3 \times \ldots \times b_n$ មាន n កត្តាបឋម ដែល $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ ជាចំនួនបឋម នោះ $b^2 = (b_1 \times b_2 \times b_3 \times \ldots \times b_n)^2$ មាន $2n$ កត្តា គឺចំនួនគូកត្តា

នាំឱ្យ $5b^2 = 5(b_1 \times b_2 \times b_3 \times \ldots \times b_n)^2$ មាន $2n+1$ កត្តា គឺចំនួនសេសកត្តា

តាម (1) ឃើញថា អង្គទីមួយ a^2 មានគូកត្តាបឋម ឯអង្គទីពីរ $5b^2$ មានសេសកត្តាបឋម នោះ a^2 និង $5b^2$ មានកត្តាបឋមខុសគ្នា

នាំឱ្យ a^2 និង $5b^2$ មិនស្មើគ្នា នោះការឧបមាថា $\overline{p}: \sqrt{5}$ ជាចំនួនសនិទាន ផ្ទុយពីការពិត

គេបាន $p: \sqrt{5}$ ជាចំនួនអសនិទាន ជាសំណើពិត

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{5} \text{ ជាចំនួនអសនិទាន ត្រូវបានបង្ហាញ}}$ ។

14. **បង្ហាញថា $\sqrt{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន**

ឧបមាថា $\sqrt{3}$ ជាចំនួនសនិទាន

គេបាន $\sqrt{3} = \dfrac{a}{b} \Leftrightarrow a^2 = 3b^2 \quad (1)$

គេតាង $a = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_m$ មាន m កត្តាបឋម ដែល $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ ជាចំនួនបឋម

នោះ $a^2 = (a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_m)^2$ មាន $2m$ កត្តាបឋម គឺចំនួនគូកត្តាបឋម

គេតាង $b = b_1 \times b_2 \times b_3 \times \ldots \times b_n$ មាន n កត្តាបឋម ដែល $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ ជាចំនួនបឋម

នោះ $b^2 = (b_1 \times b_2 \times b_3 \times \ldots \times b_n)^2$ មាន $2n$ កត្តាបឋម គឺចំនួនគូកត្តាបឋម

នាំឱ្យ $3b^2 = 3(b_1 \times b_2 \times b_3 \times \ldots \times b_n)^2$ មាន $2n+1$ កត្តា គឺចំនួនសេសកត្តាបឋម

តាម (1) ឃើញថា អង្គទីមួយ a^2 មានគូកត្តាបឋម ឯអង្គទីពីរ $3b^2$ មានសេសកត្តាបឋម នោះ a^2 និង $3b^2$ មានកត្តាបឋមខុសគ្នា

នាំឱ្យ a^2 និង $3b^2$ មិនស្មើគ្នា នោះការឧបមាថា $\sqrt{3}$ ជាចំនួនសនិទាន ផ្ទុយពីការពិត

គេបាន $\sqrt{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន ជាសំណើពិត

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{3} \text{ ជាចំនួនអសនិទាន ត្រូវបានបង្ហាញ}}$ ។

សម្គាល់ - គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ គេអាចបំបែកជាផលគុណកត្តាបឋមបានតែមួយបែបគត់ ។

- ចំនួនពីរស្មើគ្នា កាលណាចំនួនទាំងពីរមានផលគុណកត្តាបឋមដូចគ្នា ។

15. **បង្ហាញថា $\sqrt[4]{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន**

ឧបមាថា $\sqrt[4]{2}$ ជាចំនួនសនិទាន

គេបាន $\sqrt[4]{2}=\frac{a}{b} \Leftrightarrow a^4=2b^4 \quad (1)$

គេតាង $a=a_1\times a_2\times a_3\times\ldots\times a_m$ មាន m កត្តាបឋម ដែល $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ ជាចំនួនបឋម

នោះ $a^4=\left(a_1\times a_2\times a_3\times\ldots\times a_m\right)^4$ មាន $4m=2(2m)$ កត្តាបឋម គឺចំនួនគូកត្តាបឋម

គេតាង $b=b_1\times b_2\times b_3\times\ldots\times b_n$ មាន n កត្តាបឋម ដែល $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ ជាចំនួនបឋម

នោះ $b^4=\left(b_1\times b_2\times b_3\times\ldots\times b_n\right)^4$ មាន $4n=2(2n)$ កត្តាបឋម គឺចំនួនគូកត្តាបឋម

នាំឱ្យ $2b^4=2\left(b_1\times b_2\times b_3\times\ldots\times b_n\right)^4$ មាន $2(2n)+1$ កត្តា គឺចំនួនសេសកត្តាបឋម

តាម (1) ឃើញថា អង្គទីមួយ a^4 មានគូកត្តាបឋម ឯអង្គទីពីរ $2b^4$ មានសេសកត្តាបឋម នោះ a^4 និង $2b^4$ មានកត្តាបឋមខុសគ្នា

នាំឱ្យ a^4 និង $2b^4$ ជាចំនួនមិនស្មើគ្នា នោះការឧបមាថា $\sqrt{3}$ ជាចំនួនសនិទាន មិនពិត

គេបាន $\sqrt[4]{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt[4]{2} \text{ ជាចំនួនអសនិទាន ត្រូវបានបង្ហាញ}}$ ។

16. **បង្ហាញថា $\sqrt{p}$ ជាចំនួនអសនិទាន ចំពោះគ្រប់ចំនួនបឋម p**

ឧបមាថា $\sqrt{p}$ ជាចំនួនសនិទាន

គេបាន $\sqrt{p}=\frac{a}{b} \Leftrightarrow a^2=pb^2 \quad (1)$

គេតាង $a=a_1\times a_2\times a_3\times\ldots\times a_m$ មាន m កត្តាបឋម ដែល $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ ជាចំនួនបឋម

នោះ $a^2=\left(a_1\times a_2\times a_3\times\ldots\times a_m\right)^2$ មាន $2m$ កត្តាបឋម គឺចំនួនគូកត្តាបឋម

គេតាង $b=b_1\times b_2\times b_3\times\ldots\times b_n$ មាន n កត្តាបឋម ដែល $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ ជាចំនួនបឋម

នោះ $b^2=\left(b_1\times b_2\times b_3\times\ldots\times b_n\right)^2$ មាន $2n$ កត្តាបឋម គឺចំនួនគូកត្តាបឋម

នាំឱ្យ $pb^2=p\left(b_1\times b_2\times b_3\times\ldots\times b_n\right)^2$ មាន $2n+1$ កត្តា គឺចំនួនសេសកត្តាបឋម ព្រោះ p ជាចំនួនបឋម

តាម (1) ឃើញថា អង្គទីមួយ a^2 មានគូកត្តាបឋម ឯអង្គទីពីរ pb^2 មានសេសកត្តាបឋម នោះ a^2 និង pb^2 មានកត្តាបឋមខុសគ្នា

នាំឱ្យ a^2 និង pb^2 ជាចំនួនមិនស្មើគ្នា នោះការឧបមាថា $\sqrt{p}$ ជាចំនួនសនិទាន មិនពិត

គេបាន $\sqrt{p}$ ជាចំនួនអសនិទាន ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{p} \text{ ជាចំនួនអសនិទាន ចំពោះគ្រប់ចំនួនបឋម } p \text{ ត្រូវបានបង្ហាញ}}$ ។

17. **បង្ហាញថា $1+\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន**

ឧបមាថា $1+\sqrt{2}$ ជាចំនួនសនិទាន

គេបាន $1+\sqrt{2}=\dfrac{a}{b} \Leftrightarrow \sqrt{2}b=a-b \Leftrightarrow 2b^2=(a-b)^2 \quad (1)$

តាម (1) $(a-b)^2$ ជាពហុគុណនៃ 2 នោះ $a-b$ ក៏ជាពហុគុណនៃ 2 ដែរ

គេតាង $a-b=2m$ ដែល m ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

គេបាន $(1):\ 2b^2=(2m)^2 \Leftrightarrow b^2=2m^2 \quad (2)$

តាម (2) b^2 ជាពហុគុណនៃ 2 នោះ b ក៏ជាពហុគុណនៃ 2 ដែរ

គេតាង $b=2k$ ដែល k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

គេបាន $a-b=2m \Leftrightarrow a-2k=2m \Leftrightarrow a=2(m+k)$

នាំឱ្យ a ជាពហុគុណនៃ 2 ដែលគេតាង $a=2\ell$, $\ell=m+k$

ឃើញថា $a=2\ell$ និង $b=2k$ សុទ្ធតែជាចំនួនគូ នោះវាមានតួចែករួមធំបំផុតខុសពី 1 (មិនមែនជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា)

នាំឱ្យ ការឧបមាថា $1+\sqrt{2}$ ជាចំនួនសនិទាន ជារឿងមិនពិត នោះ $1+\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន

ដូចនេះ $1+\sqrt{2}$ ជាចំនួនអសនិទាន ត្រូវបានបង្ហាញ ។

18. **បង្ហាញថា $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន**

ឧបមាថា $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ជាចំនួនសនិទាន

គេបាន $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\dfrac{a}{b} \Leftrightarrow 5+2\sqrt{6}=\dfrac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow 2\sqrt{6}b^2=a^2-5b^2 \Leftrightarrow 6(4b^4)=(a^2-5b^2)^2 \quad (1)$

តាម (1) $(a^2-5b^2)^2$ ជាពហុគុណនៃ 6 នោះ a^2-5b^2 ក៏ជាពហុគុណនៃ 6 ដែរ ហេតុនេះគេតាង $a^2-5b^2=6m$

នាំឱ្យ $6(4b^4)=(6m)^2 \Leftrightarrow 24b^4=36m^2 \Leftrightarrow 2b^4=3m^2$

ដោយ b^4 ជាពហុគុណនៃ 3 នោះ b ក៏ជាពហុគុណនៃ 3 ដែរ ហេតុនេះគេតាង $b=3n$

គេបាន $a^2-5b^2=6m \Leftrightarrow a^2-5(3n)^2=6m \Leftrightarrow a^2=6m+45n^2 \Leftrightarrow a^2=3(2m+15n^2)$

ដោយ a^2 ជាពហុគុណនៃ 3 នោះ a ក៏ជាពហុគុណនៃ 3 ដែរ ហេតុនេះគេតាង $a=3k$

ប៉ុន្តែ ប្រសិនបើ a និង b សុទ្ធតែជាពហុគុណនៃ 3 នោះ a និង b មិនមែនជាចំនួនបឋមរវាងគ្នាទេ

នាំឱ្យ ការឧបមាថា $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ជាចំនួនសនិទាន គឺជារឿងមិនពិត

គេបាន $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន គឺជារឿងពិត

ដូចនេះ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន ត្រូវបានបង្ហាញ ។

19. **បង្ហាញថា** $x^2+5x+6=0$ **លុះត្រាតែ** $x=-2$ ឬ $x=-3$

គេនឹងបង្ហាញតាម សម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេលក្ខខណ្ឌ គេដឹងថា $p \Leftrightarrow q=(p \Rightarrow q)\wedge(q \Rightarrow p)$

គេតាង $p:\ x^2+5x+6=0$

$q:\ x=-2$ ឬ $x=-3$

គេមាន $p:\ x^2+5x+6=0$

$(x+2)(x+3)=0$

នាំឱ្យ $x+2=0$ ឬ $x+3=0$

គេបាន $x=-2$ ឬ $x=-3$

គេស្រាយបានថា $p:\ x^2+5x+6=0$ នោះ $q:$ ($x=-2$ ឬ $x=-3$) មានន័យថា $p \Rightarrow q$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត បើ $x=-2$ នោះ $x^2+5x+6=(-2)^2+5(-2)+6=4-10+6=0$

បើ $x=-3$ នោះ $x^2+5x+6=(-3)^2+5(-3)+6=9-15+6=0$

គេស្រាយបានថា $q:$ ($x=-2$ ឬ $x=-3$) នោះ $p:\ x^2+5x+6=0$ មានន័យថា $q \Rightarrow p$ (2)

តាមរយៈ ទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន $p \Leftrightarrow q$ គឺ $x^2+5x+6=0$ លុះត្រាតែ $x=-2$ ឬ $x=-3$

ដូចនេះ $x^2+5x+6=0$ លុះត្រាតែ $x=-2$ ឬ $x=-3$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

20. **បង្ហាញថា** $x^3-4x=0$ **លុះត្រាតែ** $x=0$ ឬ $x=-2$ ឬ $x=2$

គេនឹងបង្ហាញតាម សម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេលក្ខខណ្ឌ គេដឹងថា $p \Leftrightarrow q=(p \Rightarrow q)\wedge(q \Rightarrow p)$

គេតាង $p:\ x^3-4x=0$

$q:\ x=0$ ឬ $x=-2$ ឬ $x=2$

គេមាន $p:\ x^3-4x=0$

$x(x^2-4)=0$

$x(x+2)(x-2)=0$

នាំឱ្យ $x=0$ ឬ $x+2=0$ ឬ $x-2=0$

គេបាន $x=0$ ឬ $x=-2$ ឬ $x=2$

គេស្រាយបានថា $p:\ x^3-4x=0$ នោះ $q:$ ($x=0$ ឬ $x=-2$ ឬ $x=2$) មានន័យថា $p \Rightarrow q$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត បើ $x=0$ នោះ $x^3-4x=0^3-4\cdot 0=0$

បើ $x=-2$ នោះ $x^3-4x=(-2)^3-4(-2)=-8+8=0$

បើ $x=2$ នោះ $x^3-4x=(2)^3-4(2)=8-8=0$

គេស្រាយបានថា $q:$ ($x=0$ ឬ $x=-2$ ឬ $x=2$) នោះ $p:\ x^3-4x=0$ មានន័យថា $q \Rightarrow p$ (2)

តាមរយៈ ទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន $p \Leftrightarrow q$ គឺ $x^3-4x=0$ លុះត្រាតែ $x=0$ ឬ $x=-2$ ឬ $x=2$

ដូចនេះ $x^3-4x=0$ លុះត្រាតែ $x=0$ ឬ $x=-2$ ឬ $x=2$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

21. **បង្ហាញថា $x^2+y^2=0$ លុះត្រាតែ $x=0$ និង $y=0$**

គេនឹងបង្ហាញតាម សម្រាយបញ្ជាក់ទ្វេលក្ខខណ្ឌ គេដឹងថា $p\Leftrightarrow q=(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$

គេតាង $p:\ x^2+y^2=0$

$q:\ x=0$ និង $y=0$

គេមាន $p:\ x^2+y^2=0$

ដោយ $x^2\geq 0$ និង $y^2\geq 0$

នោះមានតែមួយករណីគត់ដែលនាំឱ្យ $x^2+y^2=0$ គឺ $x=0$ និង $y=0$

គេស្រាយបានថា $p:\ x^2+y^2=0$ នោះ $q:$ ($x=0$ និង $y=0$) មានន័យថា $p\Rightarrow q$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត បើ $x=0$ និង $y=0$ នោះ $x^2+y^2=0^2+0^2=0$

គេស្រាយបានថា $q:$ ($x=0$ និង $y=0$) នោះ $p:\ x^2+y^2=0$ មានន័យថា $q\Rightarrow p$ (2)

តាមរយៈ ទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន $p\Leftrightarrow q$ គឺ $x^2+y^2=0$ លុះត្រាតែ $x=0$ និង $y=0$

ដូចនេះ $x^2+y^2=0$ លុះត្រាតែ $x=0$ និង $y=0$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

22. **បង្ហាញថា អង្គការអាស៊ានមានសមាជិកមកពីគ្រប់ប្រទេសក្នុងទ្វីបអាស៊ី ជាសំណើមិនពិត**

គេនឹងបង្ហាញសំណើខាងលើជាសំណើមិនពិត ដោយប្រើឧទាហរណ៍ផ្ទុយ (ត្រឹមតែរកឱ្យបានឧទាហរណ៍មួយមកផ្ទុយ)

ដោយ ប្រទេសជប៉ុន ជាប្រទេសនៅក្នុងទ្វីបអាស៊ីដែរ តែប្រទេសជប៉ុនមិនមែនជាសមាជិកអង្គការអាស៊ាន

នាំឱ្យ សំណើថា អង្គការអាស៊ានមានសមាជិកមកពីគ្រប់ប្រទេសក្នុងទ្វីបអាស៊ី ជាសំណើមិនពិត

ដូចនេះ អង្គការអាស៊ានមានសមាជិកមកពីគ្រប់ប្រទេសក្នុងទ្វីបអាស៊ី ជាសំណើមិនពិត ត្រូវបានបង្ហាញ ។

23. **បង្ហាញថា ចំនួនបឋមជាចំនួនគត់សេស ជាសំណើមិនពិត**

គេនឹងបង្ហាញសំណើខាងលើជាសំណើមិនពិត ដោយប្រើឧទាហរណ៍ផ្ទុយ (ត្រឹមតែរកឱ្យបានឧទាហរណ៍មួយមកផ្ទុយ)

ដោយ លេខ 2 ជាចំនួនបឋមដែរ តែលេខ 2 មិនមែនជាចំនួនគត់សេសទេ

នាំឱ្យ សំណើថា ចំនួនបឋមជាចំនួនគត់សេស ជាសំណើមិនពិត

ដូចនេះ ចំនួនបឋមជាចំនួនគត់សេស ជាសំណើមិនពិត ត្រូវបានបង្ហាញ ។

24. **បង្ហាញថា បើ p និង q ជាចំនួនបឋម ហើយ $n=p^2+q^2$ នោះ n ជាចំនួនបឋម ជាសំណើមិនពិត**

ដោយ $p=3$ និង $q=5$ ជាចំនួនបឋមដែរ ប៉ុន្តែ $n=p^2+q^2=3^2+5^2=9+25=34$ មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ

នាំឱ្យ សំណើថា បើ p និង q ជាចំនួនបឋម ហើយ $n=p^2+q^2$ នោះ n ជាចំនួនបឋម ជាសំណើមិនពិត

ដូចនេះ បើ p និង q ជាចំនួនបឋម ហើយ $n=p^2+q^2$ នោះ n ជាចំនួនបឋម ជាសំណើមិនពិត ត្រូវបានបង្ហាញ ។

25. **បង្ហាញថា បើ $a>b$ នោះ $a^2>b^2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ជាសំណើមិនពិត**

ដោយ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b គេយក $a=1>b=-2$ ប៉ុន្តែ $a^2=1^2<b^2=(-2)^2$

នាំឱ្យ សំណើថា បើ $a>b$ នោះ $a^2>b^2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ជាសំណើមិនពិត

ដូចនេះ បើ $a>b$ នោះ $a^2>b^2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ជាសំណើមិនពិត ត្រូវបានបង្ហាញ ។

26. បង្ហាញថា បើ x និង y ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន និង xy ជាចំនួនគត់សេស នោះ x និង y ក៏ជាចំនួនគត់សេសដែរ

គេនឹងស្រាយតាមសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ព្រោះគេដឹងថា $p \Rightarrow q$ និង $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា (បង្ហាញរួចខាងលើ!)

គេតាង $p:$ xy ជាចំនួនគត់សេស

$q:$ x និង y ជាចំនួនគត់សេស

នាំឱ្យ $\overline{p}:$ xy ជាចំនួនគត់គូ

$\overline{q}:$ យ៉ាងហោចណាស់មានមួយក្នុងចំណោម x និង y ជាចំនួនគត់គូ

ចេញពីសំណើ $\overline{q}$ គេនឹងស្រាយរហូតបាន $\overline{p}$ តាមករណីទាំងបីដូចខាងក្រោម ៖

- ករណី x ជាចំនួនគត់គូ និង y ជាចំនួនគត់សេស

  គេតាង $x=2a$ និង $y=2b-1$ ដែល a និង b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ

  គេបាន $xy=2a\times(2b-1)=2(2ab-a)$ ជាចំនួនគូ ជាសំណើ $\overline{p}$

- ករណី x ជាចំនួនគត់សេស និង y ជាចំនួនគត់គូ

  គេតាង $x=2c-1$ និង $y=2d$ ដែល c និង d ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ

  គេបាន $xy=(2c-1)\times 2d=2(2cd-d)$ ជាចំនួនគូ ជាសំណើ $\overline{p}$

- ករណី x ជាចំនួនគត់គូ និង y ជាចំនួនគូ

  គេតាង $x=2e$ និង $y=2f$ ដែល e និង f ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ

  គេបាន $xy=2e\times 2f=2(2ef)$ ជាចំនួនគូ ជាសំណើ $\overline{p}$

ឃើញថា គ្រប់ករណីគេបានសំណើ $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ ជាសំណើពិត នោះសំណើ $p \Rightarrow q$ ក៏ជាសំណើពិតដែរ

ដូចនេះ បើ x និង y ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន និង xy ជាចំនួនគត់សេស នោះ x និង y ក៏ជាចំនួនគត់សេសដែរ ។

27. បង្ហាញថា បើ $x(x-2)<0$ នោះ $0<x<2$

គេនឹងស្រាយតាមសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ព្រោះគេដឹងថា $p \Rightarrow q$ និង $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា (បង្ហាញរួចខាងលើ!)

គេតាង $p:$ $x(x-2)<0$

$q:$ $0<x<2$

នាំឱ្យ $\overline{p}:$ $x(x-2)\geq 0$

$\overline{q}:$ $x\leq 0$ ឬ $x\geq 2$

ចេញពីសំណើ $\overline{q}$ គេនឹងស្រាយរហូតបាន $\overline{p}$ ដូចខាងក្រោម ៖

-ចំពោះ $x\leq 0$ នោះ $x-2\leq -2$ នាំឱ្យ $x(x-2)\geq -2x$ (ត្រូវប្តូរទិសដៅ ព្រោះគុណនឹង $x\leq 0$ អវិជ្ជមាន)

  ដោយ $x\leq 0$ នោះ $-2x\geq 0$ គេបាន $x(x-2)\geq -2x\geq 0$ នាំឱ្យ $x(x-2)\geq 0$ ជាសំណើ $\overline{p}$

-ចំពោះ $x\geq 2$ នោះ $x-2\geq 0$ នាំឱ្យ $x(x-2)\geq 0$ (មិនប្តូរទិសដៅ ព្រោះគុណនឹង $x\geq 2$ វិជ្ជមាន) ជាសំណើ $\overline{p}$

ឃើញថា គេស្រាយបានថា សំណើ $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ ជាសំណើពិត នាំឱ្យសំណើ $p \Rightarrow q$ ក៏ជាសំណើពិតដែរ

គេបាន $p \Rightarrow q$ គឺ បើ $x(x-2)<0$ នោះ $0<x<2$ ជាសំណើពិត

ដូចនេះ បើ $x(x-2)<0$ នោះ $0<x<2$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

28. **បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n បើ $n^2>25$ នោះ $n>5$**

គេនឹងស្រាយតាមសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ព្រោះគេដឹងថា $p\Rightarrow q$ និង $\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$ មានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា (បង្ហាញរួចខាងលើ!)

គេតាង $p:\ n^2>25$

$q:\ n>5$

នាំឱ្យ $\overline{p}:\ n^2\le 25$

$\overline{q}:\ n\le 5$

ចេញពីសំណើ $\overline{q}$ គេនឹងស្រាយរហូតបាន $\overline{p}$ ដូចខាងក្រោម ៖

ដោយ n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ហើយ $n\le 5$ នោះ $n=1,2,3,4,5$

ចំពោះ $n=1$ នោះ $n^2=1\le 25$ ពិត

ចំពោះ $n=2$ នោះ $n^2=4\le 25$ ពិត

ចំពោះ $n=3$ នោះ $n^2=9\le 25$ ពិត

ចំពោះ $n=4$ នោះ $n^2=16\le 25$ ពិត

ចំពោះ $n=5$ នោះ $n^2=25\le 25$ ពិត

ឃើញថា គេស្រាយបានថា សំណើ $\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$ ជាសំណើពិត នាំឱ្យសំណើ $p\Rightarrow q$ ក៏ជាសំណើពិតដែរ

គេបាន $p\Rightarrow q$ គឺ បើ $n^2>25$ នោះ $n>5$ ជាសំណើពិត

ដូចនេះ បើ $n^2>25$ នោះ $n>5$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

29. **បង្ហាញថា $x+\frac{1}{x}>2$ ចំពោះគ្រប់ $x>1$**

គេនឹងស្រាយតាមសំណើផ្ទុយពីការពិត ព្រោះគេដឹងថា បើសំណើ $\overline{p}$ មិនពិត នោះសំណើ p ពិត

គេតាង $p:\ x+\frac{1}{x}>2$ នោះគេបាន $\overline{p}:\ x+\frac{1}{x}\le 2$

គេមាន $\overline{p}:\ x+\frac{1}{x}\le 2$ (គុណអង្គទាំងពីរ និង $x>1$ វិជ្ជមាន មិនប្តូរទិសដៅ)

$x^2+1\le 2x$

$x^2-2x+1\le 0$

$(x-1)^2\le 0$ មិនពិត ព្រោះ $(x-1)^2>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>1$

គេបាន សំណើ $p:\ x+\frac{1}{x}>2$ ចំពោះគ្រប់ $x>1$ ជាសំណើពិត

ដូចនេះ $x+\frac{1}{x}>2$ ចំពោះគ្រប់ $x>1$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

30. **បង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប p និង q ដែល $\frac{p^2}{q^2}=2$**

ឧបមាថា មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប p និង q ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{p^2}{q^2}=2$

គេមាន $\frac{p^2}{q^2}=2$ អាចសរសេរ $p^2=2q^2 \quad (1)$

ដោយ គ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប p និង q គេអាចបំបែក p និង q ជាកត្តាបឋមបានតែមួយបែបគត់

គេតាង $p=p_1\times p_2\times p_3\times\ldots\times p_m$ មាន m កត្តាបឋម ដែល $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$ ជាចំនួនបឋម

នោះ $p^2=(p_1\times p_2\times p_3\times\ldots\times p_m)^2$ មាន $2m$ កត្តាបឋម គឺចំនួនគូកត្តាបឋម

គេតាង $q=q_1\times q_2\times q_3\times\ldots\times q_n$ មាន n កត្តាបឋម ដែល $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ ជាចំនួនបឋម

នោះ $q^2=(q_1\times q_2\times q_3\times\ldots\times q_n)^2$ មាន $2n$ កត្តាបឋម គឺចំនួនគូកត្តាបឋម

នាំឱ្យ $2q^2=2(q_1\times q_2\times q_3\times\ldots\times q_n)^2$ មាន $2n+1$ កត្តា គឺចំនួនសេសកត្តាបឋម

តាម (1) ឃើញថា អង្គទីមួយ p^2 មានគូកត្តាបឋម ឯអង្គទីពីរ $2q^2$ មានសេសកត្តាបឋម នោះ p^2 និង $2q^2$ មានកត្តាបឋមខុសគ្នា នាំឱ្យ p^2 និង $2q^2$ ជាចំនួនមិនស្មើគ្នា

នោះ មិនអាចមាន ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប p និង q ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{p^2}{q^2}=2$ នោះទេ

ដូចនេះ: | គ្មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប p និង q ដែល $\frac{p^2}{q^2}=2$ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន សំណុំ

1. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈដឺម៉ រ៉េង (De Morgan) ៖

   (i) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

   (ii) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ ។

2. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើគេមានបីសំណុំ A , B និង C នោះគេបានលក្ខណៈផ្តុំដូចខាងក្រោម ៖

   ក. $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ ។

   ខ. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ ។

3. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើគេមានបីសំណុំ A , B និង C នោះគេបានលក្ខណៈបំបែកដូចខាងក្រោម ៖

   ក. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ។

   ខ. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ ។

4. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើគេមានសំណុំ A និង U ជាចំណុំសកល ហើយ $\overline{A}$ ជាសំណុំរងបំពេញនៃ A នោះគេបាន ៖

   ក. $A\cap\overline{A}=\varnothing$ ។

   ខ. $A\cup\overline{A}=U$ ។

   គ. $n(A)+n(\overline{A})=n(U)$ ។

5. គេមានពីរសំណុំ A និង B ជាសំណុំរាប់អស់ ៖

   ក. បង្ហាញថា $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ ។

   ខ. ទាញថា $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$ ។

6. បង្ហាញថា បើ $A\cap B=\varnothing$ នោះ A និង B ជាពីរសំណុំដាច់គ្នា ។

7. បង្ហាញថា $A=\{x|x^2-4=0\}$ ជាសំណុំរាប់អស់ ។

8. បង្ហាញថា $B=\{y|1<y<2\}$ ជាសំណុំរាប់មិនអស់ ឬសំណុំអនន្ត ។

9. បង្ហាញថា បើ A ជាសំណុំរងនៃសំណុំ B នោះគេបាន $n(A)\le n(B)$ ។

10. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំនួនសំណុំរងនៃសំណុំមួយដែលមាន n ធាតុ ស្មើនឹង 2^n ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន សំណុំ

1. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈដឺម៉ជេន (De Morgan) ៖

➢របៀបទី១ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(i)\quad \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

គេមាន $\quad A\cup B=\{x \mid x\in A$ ឬ $x\in B\}$

នាំឱ្យ $\quad \overline{A\cup B}=\{x \mid x\notin A$ និង $x\notin B\}$

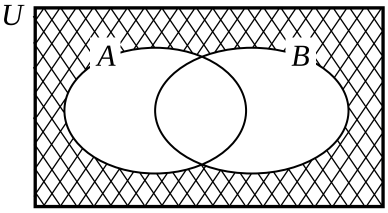
$=\{x \mid x\in \overline{A}$ និង $x\in \overline{B}\}$

$=\{x \mid x\in \overline{A}\}\cap\{x \mid x\in \overline{B}\}$

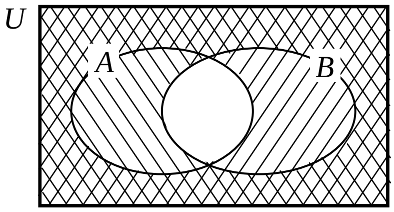
$=\overline{A}\cap\overline{B}$

ដូចនេះ: | លក្ខណៈដឺម៉ជេន $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➢របៀបទី២ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(i)\quad \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ ដោយប្រើដ្យាក្រាមវិន



ផ្ទៃកឆូតខ្វែងជាសំណុំ $\overline{A\cup B}$



ផ្ទៃកឆូតខ្វែងជាសំណុំ $\overline{A}\cap\overline{B}$

ផ្ទៃកឆូតស្របទ្រេតទៅខាងស្តាំជាសំណុំ $\overline{A}$

ផ្ទៃកឆូតស្របទ្រេតទៅខាងឆ្វេងជាសំណុំ $\overline{B}$

តាមដ្យាក្រាមវិនទាំងពីរ គេសង្កេតឃើញថា សំណុំ $\overline{A\cup B}$ និងសំណុំ $\overline{A}\cap\overline{B}$ ជាសំណុំតែមួយ នាំឱ្យ $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

ដូចនេះ: | លក្ខណៈដឺម៉ជេន $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➢របៀបទី១ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(ii)\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

គេមាន $\quad A\cap B=\{x \mid x\in A$ និង $x\in B\}$

នាំឱ្យ $\quad \overline{A\cap B}=\{x \mid x\notin A$ ឬ $x\notin B\}$

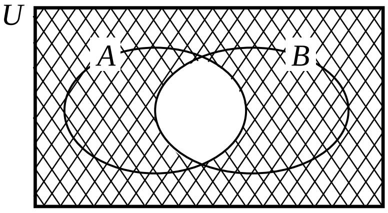
$=\{x \mid x\in \overline{A}$ ឬ $x\in \overline{B}\}$

$=\{x \mid x\in \overline{A}\}\cup\{x \mid x\in \overline{B}\}$

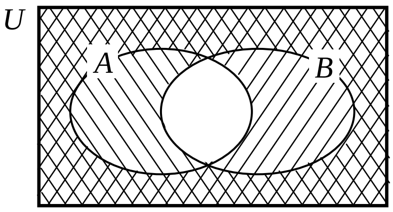
$=\overline{A}\cup\overline{B}$

ដូចនេះ: | លក្ខណៈដឺម៉ជេន $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➢របៀបទី២ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា (ii) $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$ ដោយប្រើដ្យាក្រាមវិន



ផ្នែកឆូតខ្វែងជាសំណុំ $\overline{A\cap B}$



ផ្នែកឆូតស្របទ្រេតទៅខាងស្តាំជាសំណុំ $\bar{A}$

ផ្នែកឆូតស្របទ្រេតទៅខាងឆ្វេងជាសំណុំ $\bar{B}$

ផ្នែកឆូតមួយជាន់និងពីរជាន់ ជាសំណុំ $\bar{A}\cup\bar{B}$

តាមដ្យាក្រាមវិនទាំងពីរ គេសង្កេតឃើញថា សំណុំ $\overline{A\cap B}$ និងសំណុំ $\bar{A}\cup\bar{B}$ ជាសំណុំតែមួយ នាំឱ្យ $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

ដូចនេះ

លក្ខណៈដឺម៉ដេន $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

2. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើគេមានបីសំណុំ A , B និង C នោះគេបានលក្ខណៈផ្តុំដូចខាងក្រោម ៖**

ក. របៀបទី១ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

គេមាន $A\cap B=\{x|x\in A \text{ និង } x\in B\}$

$B\cap C=\{x|x\in B \text{ និង } x\in C\}$

គេបាន $A\cap(B\cap C)=\{x|x\in A\}\cap\{x|x\in B \text{ និង } x\in C\}$

$=\{x|x\in A \text{ និង } x\in B \text{ និង } x\in C\}$

$=\{x|x\in A \text{ និង } x\in B\}\cap\{x|x\in C\}$

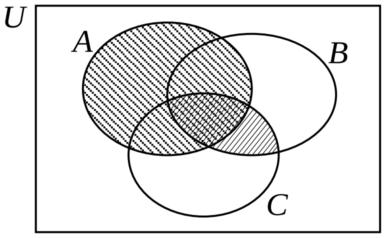
$=(A\cap B)\cap C$

ដូចនេះ

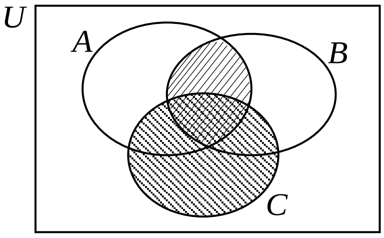
លក្ខណៈផ្តុំ $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

➢របៀបទី២ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$



ផ្នែកឆូតខ្វែងជាសំណុំ $A\cap(B\cap C)$



ផ្នែកឆូតខ្វែងជាសំណុំ $(A\cap B)\cap C$

តាមដ្យាក្រាមវិនទាំងពីរ គេសង្កេតឃើញថា សំណុំ $A\cap(B\cap C)$ និងសំណុំ $(A\cap B)\cap C$ ជាសំណុំតែមួយ

នាំឱ្យ $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

ដូចនេះ

លក្ខណៈផ្តុំ $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

ខ. របៀបទី១ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

គេមាន $A\cup B=\{x|x\in A \text{ ឬ } x\in B\}$

$B\cup C=\{x|x\in B \text{ ឬ } x\in C\}$

គេបាន $A\cup(B\cup C)=\{x|x\in A\}\cup\{x|x\in B \text{ ឬ } x\in C\}$

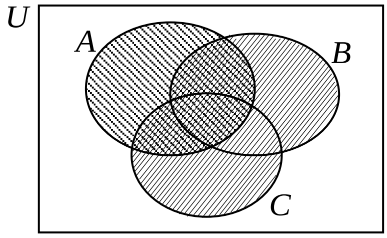
$=\{x|x\in A \text{ ឬ } x\in B \text{ ឬ } x\in C\}$

$=\{x|x\in A \text{ ឬ } x\in B\}\cap\{x|x\in C\}$

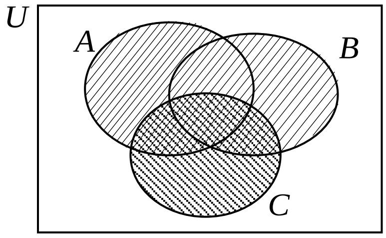
$=(A\cup B)\cup C$

ដូចនេះ លក្ខណៈផ្តុំ $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➢ **របៀបទី២ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា** $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$



ផ្នែកឆូតជាសំណុំ $A\cup(B\cup C)$



ផ្នែកឆូតជាសំណុំ $(A\cup B)\cup C$

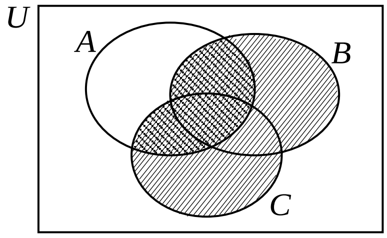
តាមដ្យាក្រាមវិនទាំងពីរ គេសង្កេតឃើញថា សំណុំ $A\cup(B\cup C)$ និងសំណុំ $(A\cup B)\cup C$ ជាសំណុំតែមួយ

នាំឱ្យ $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

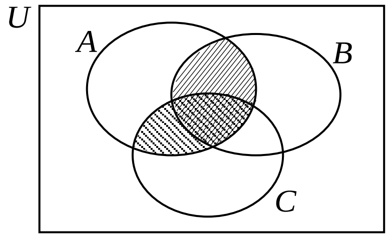
ដូចនេះ លក្ខណៈផ្តុំ $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

3. **បើគេមានបីសំណុំ** A , B **និង** C **នោះគេបានលក្ខណៈបំបែកដូចខាងក្រោម ៖**

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$



ផ្នែកឆូតពីរជាន់ជាសំណុំ $A\cap(B\cup C)$



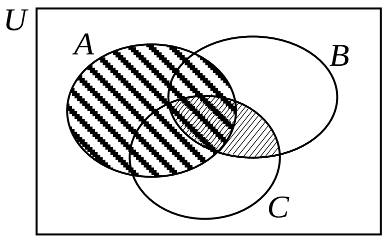
ទាំងផ្នែកឆូតមួយជាន់និងពីរជាន់ ជាសំណុំ $(A\cap B)\cup(A\cap C)$

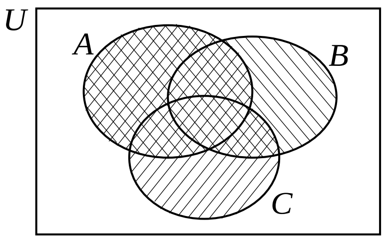
តាមដ្យាក្រាមវិនទាំងពីរ គេសង្កេតឃើញថា សំណុំ $A\cap(B\cup C)$ និងសំណុំ $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ជាសំណុំតែមួយ

នាំឱ្យ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

ដូចនេះ លក្ខណៈបំបែក $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$





ទាំងផ្នែកឆូតមួយជាន់និងពីរជាន់ ជាសំណុំ $A\cup(B\cap C)$ ផ្នែកឆូតពីរជាន់ជាសំណុំ $(A\cup B)\cap(A\cup C)$

តាមដ្យាក្រាមវិនទាំងពីរ គេសង្កេតឃើញថា សំណុំ $A\cup(B\cap C)$ និងសំណុំ $(A\cup B)\cap(A\cup C)$ ជាសំណុំតែមួយ

នាំឱ្យ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

ដូចនេះ **លក្ខណៈបំបែក $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់** ។

4. **គេមានសំណុំ A និង U ជាចំណុំសកល ហើយ $\bar{A}$ ជាសំណុំរងបំពេញនៃ A ៖**

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A\cap\bar{A}=\varnothing$

➤ **របៀបទី១**

គេមាន $\bar{A}=\{x|x\notin A\,,\,x\in U\}$

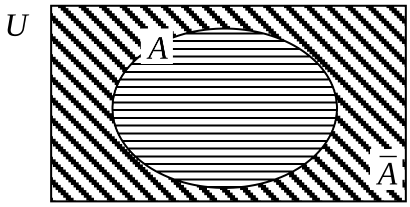
នាំឱ្យ $A\cap\bar{A}=\{x|x\in A$ និង $x\notin A\}$

$=\{$ គ្មាន x ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x\in A$ និង $x\notin A\}$

$=\{\ \}=\varnothing$

ដូចនេះ **$A\cap\bar{A}=\varnothing$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់** ។

➤ **របៀបទី២** តាមដ្យាក្រាមវិន



តាមក្រាបឃើញថា គ្មានចំណុចប្រសព្វរវាង A និង $\bar{A}$ សោះឡើយ នាំឱ្យ $A\cap\bar{A}=\varnothing$

ដូចនេះ **$A\cap\bar{A}=\varnothing$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់** ។

ខ. ➤ **របៀបទី១ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា** $A\cup\bar{A}=U$

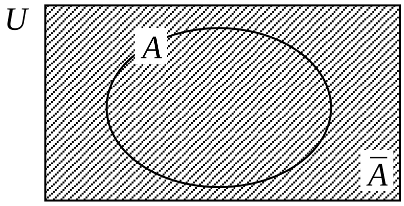
ដោយ $\bar{A}$ ជាសំណុំរងបំពេញនៃសំណុំ A

គេមាន $A\cup\bar{A}=\{x|x\in A$ ឬ $x\in\bar{A}\}$

$=U$

ដូចនេះ **$A\cup\bar{A}=U$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់** ។

➤ របៀបទី២ : តាមដ្យាក្រាមវិន



ផ្នែកឆូតជាសំណុំ $A\cup\bar{A}$ ដែលផ្នែកឆូតទាំងអស់ជាសំណុំ U

ដូចនេះ: $A\cup\bar{A}=U$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $n(A)+n(\bar{A})=n(U)$

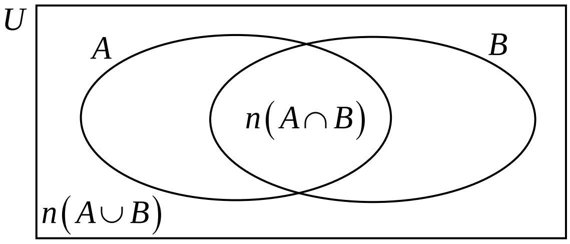
ដោយ $A\cup\bar{A}=U$ នាំឱ្យ $n(A)+n(\bar{A})=n(U)$

ដូចនេះ: $n(A)+n(\bar{A})=n(U)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

5. **គេមានពីរសំណុំ A និង B ជាសំណុំរាប់អស់ ៖**

ក. បង្ហាញថា $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

គេប្រើដ្យាក្រាមវិន



តាមដ្យាក្រាមវិន ដើម្បីរក $n(A\cup B)$ គេត្រូវយក $n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

ដូចនេះ: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ. ទាញថា $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

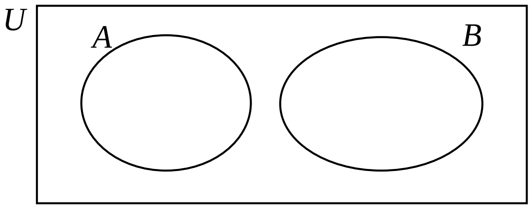
គេមាន រូបមន្ត $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

ទាញបាន $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

ដូចនេះ: $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

6. **បង្ហាញថា បើ $A\cap B=\varnothing$ នោះ A និង B ជាពីរសំណុំដាច់គ្នា**

គេប្រើដ្យាក្រាមវិន



ដោយ $A\cap B=\varnothing$ មានន័យថា សំណុំ A និង B គ្មានធាតុរួមគ្នាទេ ធ្វើឱ្យដ្យាក្រាមរបស់វាដាច់គ្នា

ដូចនេះ: បើ $A\cap B=\varnothing$ នោះ A និង B ជាពីរសំណុំដាច់គ្នា ត្រូវបានបង្ហាញ ។

7. **បង្ហាញថា** $A=\{x|x^2-4=0\}$ **ជាសំណុំរាប់អស់**

គេមាន $A=\{x|x^2-4=0\}$

$=\{x|(x-2)(x+2)=0\}$

$=\{2,-2\}$

ដោយ $n(A)=2$ ជាចំនួនកំណត់ (ជាចំនួនរាប់អស់)

នាំឱ្យ A ជាសំណុំរាប់អស់

ដូចនេះ | សំណុំ $A=\{x|x^2-4=0\}$ ជាសំណុំរាប់អស់ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

8. **បង្ហាញថា** $B=\{y|1<y<2\}$ **ជាសំណុំរាប់មិនអស់ ឬសំណុំអនន្ត**

គេមាន $B=\{y|1<y<2\}$

$=\{1.1, 1.2, 1.24, ..., 1.99, 1.9942, ...\}$

ឃើញថា សំណុំ B មានធាតុច្រើនរាប់មិនអស់

នាំឱ្យ B ជាសំណុំរាប់មិនអស់ ឬសំណុំអនន្ត

ដូចនេះ | សំណុំ $B=\{y|1<y<2\}$ ជាសំណុំរាប់មិនអស់ ឬសំណុំអនន្ត ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

9. **បង្ហាញថា បើ** A **ជាសំណុំរងនៃសំណុំ** B **នោះគេបាន** $n(A)\le n(B)$

ដោយ A ជាសំណុំរងនៃសំណុំ B

គេបាន $A=\{x|x\in A\Rightarrow x\in B\}$ មានន័យថា $n(A)<n(B)$

ម្យ៉ាងទៀត បើ $A=B$ នោះ សំណុំ A ក៏ជាសំណុំរងនៃសំណុំ B ដែរ

នាំឱ្យ $n(A)\le n(B)$

ដូចនេះ | បើ A ជាសំណុំរងនៃសំណុំ B នោះគេបាន $n(A)\le n(B)$ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

10. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំនួនសំណុំរងនៃសំណុំមួយដែលមាន** n **ធាតុ ស្មើនឹង** 2^n

សំណុំដែលមាន n ធាតុមានសំណុំរងដែលមាន 0 ធាតុ , 1 ធាតុ , 2 ធាតុ , ... , n ធាតុ

សំណុំរងទាំងអស់នៃសំណុំដែលមាន n ធាតុ ជាសំណុំបានពីបន្សំនៃ 0 ធាតុ , 1 ធាតុ , 2 ធាតុ , ... , n ធាតុ យកពី n ធាតុខុសគ្នា

គេបាន ចំនួនសំណុំរងនៃសំណុំដែលមាន n ធាតុ ស្មើនឹង $C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+C(n,3)+...+C(n,n)$

តាមរូបមន្ត $(a+b)^n=C(n,0)a^n+C(n,1)a^{n-1}b+C(n,2)a^{n-2}b^2+...+C(n,n)b^n$

ចំពោះ $a=1$ និង $b=1$

គេបាន $(1+1)^n=C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+...+C(n,n)$

$2^n=C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+...+C(n,n)$

ដូចនេះ | ចំនួនសំណុំរងនៃសំណុំមួយដែលមាន n ធាតុ ស្មើនឹង $C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+...+C(n,n)=2^n$ | ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ចំនួន

1. បង្ហាញថា សមភាព $|-a|=|a|$ ពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a ។
2. បង្ហាញថា $a^2=|a|^2$ ពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a ។
3. បង្ហាញថា $\sqrt{a^2}=|a|$ ពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a ។
4. បង្ហាញថា បើ $a>0$, $b>0$ និង $a<b$ នោះគេបាន $\sqrt{a}<\sqrt{b}$ ។
5. បង្ហាញថា បើ $a>b>0$ នោះគេបាន $\sqrt{a\pm 2\sqrt{ab}+b}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$
6. បង្ហាញថា ចំនួន 10101 ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល 2 ស្មើនឹងចំនួន 21 ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល 10 ។
7. បង្ហាញថា ចំនួន 120 ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល 10 ស្មើនឹងចំនួន 1111000 ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល 2 ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ចំនួន

1. **បង្ហាញថា សមភាព $|-a|=|a|$ ពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a**

តាមលក្ខណៈ: $|x|=\begin{cases} x & \text{បើ } x\geq 0 \\ -x & \text{បើ } x<0 \end{cases}$ គេនឹងបង្ហាញថា $|-a|=|a|$ ពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a

-ចំពោះ $a\geq 0$ គេបាន : $|a|=a$ និង $-a\leq 0$ នោះ $|-a|=-(-a)=a=|a|$ (1)

-ចំពោះ $a<0$ គេបាន : $|a|=-a$ និង $-a>0$ នោះ $|-a|=-a=|a|$ (2)

តាមករណី (1) និង (2) ខាងលើគ្រប់គ្រាន់បញ្ជាក់ថា $|-a|=|a|$ ពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a

ដូចនេះ | សមភាព $|-a|=|a|$ ពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

2. **បង្ហាញថា $a^2=|a|^2$ ពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a**

តាមលក្ខណៈ: $|x|=\begin{cases} x & \text{បើ } x\geq 0 \\ -x & \text{បើ } x<0 \end{cases}$ គេនឹងបង្ហាញថា $a^2=|a|^2$ ពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a

-ចំពោះ $a\geq 0$ គេបាន : $|a|^2=a^2$ (1)

-ចំពោះ $a<0$ គេបាន : $|a|^2=(-a)^2=a^2$ (2)

តាមករណី (1) និង (2) ខាងលើគ្រប់គ្រាន់បញ្ជាក់ថា $a^2=|a|^2$ ពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a

ដូចនេះ | សមភាព $|-a|=|a|$ ពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

3. **បង្ហាញថា $\sqrt{a^2}=|a|$ ពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a**

តាមលក្ខណៈ: $\sqrt{x^2}=\begin{cases} x & \text{បើ } x\geq 0 \\ -x & \text{បើ } x<0 \end{cases}$ និង $|x|=\begin{cases} x & \text{បើ } x\geq 0 \\ -x & \text{បើ } x<0 \end{cases}$ គេនឹងបង្ហាញថា $\sqrt{a^2}=|a|$ ពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a

-ចំពោះ $a\geq 0$ គេបាន : $\sqrt{a^2}=a$ និង $|a|=a$ នាំឱ្យ $\sqrt{a^2}=|a|$ (1)

-ចំពោះ $a<0$ គេបាន : $\sqrt{a^2}=-a$ និង $|a|=-a$ នាំឱ្យ $\sqrt{a^2}=|a|$ (2)

តាមករណី (1) និង (2) ខាងលើគ្រប់គ្រាន់បញ្ជាក់ថា $\sqrt{a^2}=|a|$ ពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a

ដូចនេះ | សមភាព $|-a|=|a|$ ពិត ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

4. **បង្ហាញថា បើ $a>0$, $b>0$ និង $a<b$ នោះគេបាន $\sqrt{a}<\sqrt{b}$**

គេមាន $a<b \Leftrightarrow a-b<0$ អាចសរសេរ $\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2<0$

ចំពោះ $a>0$, $b>0$ គេបាន $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)<0$ (ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$ មិនប្តូរទិសដៅ)

គេបាន $\sqrt{a}-\sqrt{b}<0$ ឬ $\sqrt{a}<\sqrt{b}$

ដូចនេះ | បើ $a>0$, $b>0$ និង $a<b$ នោះគេបាន $\sqrt{a}<\sqrt{b}$ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

5. **បង្ហាញថា បើ $a>b>0$ នោះគេបាន $\sqrt{a\pm 2\sqrt{ab}+b}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$**

គេមាន $\sqrt{a\pm 2\sqrt{ab}+b}=\sqrt{\sqrt{a^2}\pm 2\sqrt{ab}+\sqrt{b^2}}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)^2}$

$=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$

ព្រោះ $a>b>0$ នោះ $\sqrt{a}>\sqrt{b}>0$ នាំឱ្យ $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}>0$

ដូចនេះ: | បើ $a>b>0$ នោះគេបាន $\sqrt{a\pm 2\sqrt{ab}+b}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

6. **បង្ហាញថា ចំនួន 10101 ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល 2 ស្មើនឹងចំនួន 21 ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល 10**

គេមាន 10101 ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល 2

គេបាន $10101_2=1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0$

$=2^4+2^2+1$

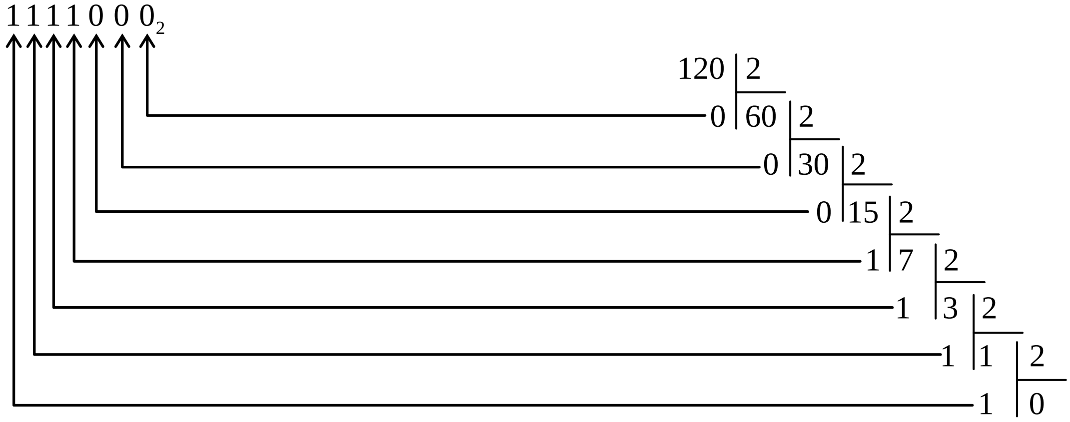
$=16+4+1$

$=21$

ដូចនេះ: | $10101_2=21$ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

7. **បង្ហាញថា ចំនួន 120 ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល 10 ស្មើនឹងចំនួន 1111000 ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល 2**

ដើម្បីបំបែក 120 ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល 10 ទៅចំនួនក្នុងប្រព័ន្ធគោល 2 គេត្រូវចែករកសំណល់ដូចខាងក្រោម



ដូចនេះ: | $120=1111000_2$ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ពហុធា

1. បង្ហាញថា x^{-1} , $2\sqrt{x}$, $12x^{0.4}$ មិនមែនជា ឯកធា ។
2. បង្ហាញថា 999 ជាឯកធា ។
3. បង្ហាញថា $2xy^2$ និង $-3y^2x$ ជាឯកធាដូចគ្នា ។
4. បង្ហាញថា $2x$ និង $2x^2$ ជាឯធាមិនដូចគ្នា ។
5. បង្ហាញថា ឯកធា $-52xy^2zt^3$ ជាឯកធាដែលមានដឺក្រេស្មើ 7 ។
6. បង្ហាញថា $x^2-10x^2+11x^2=2x^2$ ។
7. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$, $\left(a^m\right)^n=a^{m\times n}$, $\left(ab\right)^n=a^n\cdot b^n$ និង $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ ដែល $a\neq 0$ ។
8. បង្ហាញថា $3x^3+7xyz^2-12ab^2cx$ ជាពហុធាដែលមានដឺក្រេស្មើ 5 ។
9. បង្ហាញថា x^2+4x-5 ជាពហុធាដែលមានដឺក្រេស្មើ 2 លំដាប់ចុះ ។
10. បង្ហាញថា $(2x-1)(3x+2)=6x^2+x-2$ ។
11. បង្ហាញថា ៖
    - $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
    - $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
    - $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
    - $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$
    - $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
    - $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
    - $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$
    - $(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3+b^3$
    - $a^4-b^4=(a-b)(a+b)\left(a^2+b^2\right)$
12. បង្ហាញថា $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ ។
13. បង្ហាញថា $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$ ។
14. បង្ហាញថា $\sqrt{3+\sqrt{6}}+\sqrt{3-\sqrt{6}}=\sqrt{6+2\sqrt{3}}$ ពិត ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ពហុធា

1. **បង្ហាញថា** x^{-1} , $2\sqrt{x}$, $12x^{0.4}$ **មិនមែនជា ឯកធា**

តាមនិយមន័យ ឯកធា គឺជាកន្សោមដែលប្រមាណវិធីលើអថេរមានតែវិធីគុណ និងស្វ័យគុណ ដែលមាននិទស្សន្តជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ឬសូន្យ ។

ដោយ x^{-1} មាននិទស្សន្តនៃអថេរជាចំនួនគត់អវិជ្ជមាន នោះ x^{-1} មិនមែនជា ឯកធា

$2\sqrt{x} = 2x^{\frac{1}{2}}$ មាននិទស្សន្តនៃអថេរមិនមែនជាចំនួនគត់ នោះ $2\sqrt{x}$ មិនមែនជា ឯកធា

$12x^{0.4}$ មាននិទស្សន្តនៃអថេរមិនមែនជាចំនួនគត់ នោះ $2\sqrt{x}$ មិនមែនជា ឯកធា

ដូចនេះ x^{-1} , $2\sqrt{x}$, $12x^{0.4}$ មិនមែនជាឯកធា ត្រូវបានបង្ហាញ ។

2. **បង្ហាញថា** 999 **ជាឯកធា**

ដោយ $999 = 999x^0$ មាននិទស្សន្តនៃអថេរស្មើសូន្យ

តាមនិយមន័យនៃឯកធា បញ្ជាក់ថា 999 ជាឯកធា

ដូចនេះ 999 ជាឯកធា ត្រូវបានបង្ហាញ ។

3. **បង្ហាញថា** $2xy^2$ **និង** $-3y^2x$ **ជាឯកធាដូចគ្នា**

តាមនិយមន័យ ឯកធាដូចគ្នា គឺជាឯកធាដែលមានផ្នែកអថេរដូចគ្នា

ដោយ $2xy^2$ និង $-3y^2x$ មានផ្នែកអថេរ xy^2 ដូចគ្នា

នាំឱ្យ $2xy^2$ និង $-3y^2x$ ជាឯកធាដូចគ្នា

ដូចនេះ $2xy^2$ និង $-3y^2x$ ជាឯកធាដូចគ្នា ត្រូវបានបង្ហាញ ។

4. **បង្ហាញថា** $2x$ **និង** $2x^2$ **ជាឯធាមិនដូចគ្នា**

តាមនិយមន័យ ឯកធាដូចគ្នា គឺជាឯកធាដែលមានផ្នែកអថេរដូចគ្នា

ដោយ $2x$ មានផ្នែកអថេរស្មើ x និង $2x^2$ មានផ្នែកអថេរស្មើ x^2

នាំឱ្យ $2x$ និង $2x^2$ មានផ្នែកអថេរមិនដូចគ្នា នោះឯកធាទាំងពីរមិនដូចគ្នាទេ

ដូចនេះ $2x$ និង $2x^2$ ជាឯកធាមិនដូចគ្នា ត្រូវបានបង្ហាញ ។

5. **បង្ហាញថា ឯកធា** $-52xy^2zt^3$ **ជាឯកធាដែលមានដឺក្រេស្មើ** 7

តាមនិយមន័យ ដឺក្រេនៃឯកធា គឺជាផលបូកនិទស្សន្តរបស់អថេរនីមួយៗនៃឯធា ។

ដោយ ឯកធា $-52xy^2zt^3$ មានអថេរ x , y , z , t

នាំឱ្យ ផលបូកនិទស្សន្តនៃអថេរនីមួយៗគឺ $1+2+1+3=7$

គេបាន $-52xy^2zt^3$ ជាឯកធា ដែលមាននិទស្សន្តស្មើ 7

ដូចនេះ ឯកធា $-52xy^2zt^3$ ជាឯកធាដែលមានដឺក្រេស្មើ 7 ត្រូវបានបង្ហាញ ។

6. បង្ហាញថា $x^2-10x^2+11x^2=2x^2$

ដោយ x^2 , $-10x^2$, $11x^2$ ជាឯកធា ដែលមានផ្នែកអថេរស្មើ x^2 ដូចគ្នា

នាំឱ្យ គេបូកឬដកតែលេខមេគុណ និងរក្សាផ្នែកអថេរទុកនៅដដែល

គេបាន $x^2-10x^2+11x^2=(1-10+11)x^2=2x^2$

ដូចនេះ $\boxed{x^2-10x^2+11x^2=2x^2}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

7. ➢ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

តាមនិយមន័យ $\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{n\text{ កត្តា}}=a^n$

គេបាន $a^m\times a^n=\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{m\text{ កត្តា}}\times\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{n\text{ កត្តា}}=\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a\times a\times a}_{(m+n)\text{ កត្តា}}=a^{m+n}$

ដូចនេះ $\boxed{a^m\times a^n=a^{m+n}}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➢ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(a^m)^n=a^{m\times n}$

ពិនិត្យ $(a^m)^n=\underbrace{a^m\times a^m\times a^m\times\ldots\times a^m}_{n\text{ កត្តា}}=a^{\overbrace{m+m+m+\ldots+m}_{n\text{ កត្តា}}}=a^{m\times n}$ (ពង្រីកឱ្យធំស្រួលមើលស្វ័យគុណ)

ដូចនេះ $\boxed{(a^m)^n=a^{m\times n}}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➢ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(ab)^n=a^n\cdot b^n$

ពិនិត្យ $a^n\times b^n=\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{n\text{ កត្តា}}\times\underbrace{b\times b\times b\times\ldots\times b}_{n\text{ កត្តា}}=\underbrace{(ab)\times(ab)\times(ab)\times\ldots\times(ab)}_{n\text{ កត្តា}}=(ab)^n$

ដូចនេះ $\boxed{(ab)^n=a^n\times b^n}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➢ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ ដែល $a\neq 0$

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{\overbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}^{m\text{ កត្តា}}}{\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{n\text{ កត្តា}}}=\underbrace{\frac{a}{a}\times\frac{a}{a}\times\frac{a}{a}\times\ldots\times\frac{a}{a}}_{n\text{ កត្តា}}\times\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{(m-n)\text{ កត្តា}}=\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{(m-n)\text{ កត្តា}}=a^{m-n}$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\ ,\ a\neq 0}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

8. **បង្ហាញថា** $3x^3+7xyz^2-12ab^2cx$ **ជាពហុធាដែលមានដឺក្រេស្មើ** 5

ដោយ ដឺក្រេនៃពហុធា គឺជាដឺក្រេរបស់តួ ដែលមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេ

ហើយ តួ $3x^3$ មានដឺក្រេស្មើ 3 , $7xyz^2$ មានដឺក្រេស្មើ 4 និង $-12ab^2cx$ មានដឺក្រេស្មើ 5

នាំឱ្យ $3x^3+7xyz^2-12ab^2cx$ ជាពហុធាដែលមានដឺក្រេស្មើ 5

ដូចនេះ: $3x^3+7xyz^2-12ab^2cx$ ជាពហុធាដែលមានដឺក្រេស្មើ 5 ត្រូវបានបង្ហាញ ។

9. **បង្ហាញថា** x^2+4x-5 **ជាពហុធាដែលមានដឺក្រេស្មើ** 2 **លំដាប់ចុះ**

ដោយ ពហុធា x^2+4x-5 មានតួដែលមានដឺក្រេខ្ពស់ជាងគេស្មើ 2 និងរៀបតាមលំដាប់ចុះនៃដឺក្រេគឺ 2 , 1 , 0

នាំឱ្យ x^2+4x-5 ជាពហុធាដែលមានដឺក្រេស្មើ 2 លំដាប់ចុះ

ដូចនេះ: x^2+4x-5 ជាពហុធាដែលមានដឺក្រេស្មើ 2 លំដាប់ចុះ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

10. **បង្ហាញថា** $(2x-1)(3x+2)=6x^2+x-2$

យោងតាម ដើម្បីគុណពហុធានឹងពហុធា គេយកតួនីមួយៗនៃពហុធាទីមួយ គុណឱ្យគ្រប់តួនៃពហុធាទីពីរ រួចបង្រួមលទ្ធផល ។

គេបាន
$$(2x-1)(3x+2)=6x^2+4x-3x-2$$
$$=6x^2+x-2$$

ដូចនេះ: $(2x-1)(3x+2)=6x^2+x-2$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

11. **បង្ហាញថា ៖**

- $(a+b)^2$
$$=(a+b)(a+b)$$
$$=a^2+ab+ba+b^2$$
$$=a^2+2ab+b^2$$

- $(a-b)^2$
$$=(a-b)(a-b)$$
$$=a^2-ab-ba+b^2$$
$$=a^2-2ab+b^2$$

- $(a-b)(a+b)$
$$=a^2+ab-ba-b^2$$
$$=a^2-b^2$$

- $(a+b+c)^2$
$$=(a+b+c)(a+b+c)$$
$$=a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

- $(a+b)^3$
$$=(a+b)^2(a+b)$$
$$=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$$
$$=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

- $(a-b)^3$
$$=(a-b)^2(a-b)$$
$$=(a^2-2ab+b^2)(a-b)$$
$$=a^3-a^2b-2a^2b+2ab^2+b^2a-b^3$$
$$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

- $(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$$=a^3+a^2b+ab^2-ba^2-ab^2-b^3$$
$$=a^3-b^3$$

- $(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$$=a^3-a^2b+ab^2+ba^2-ab^2+b^3$$
$$=a^3+b^3$$

- $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

$=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$

$=(a^2)^2-(b^2)^2$

$=a^4-b^4$

12. បង្ហាញថា $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

គេមាន $x^2+(a+b)x+ab=x^2+ax+bx+ab$

$=(x+a)x+b(x+a)$

$=(x+a)(x+b)$

ដូចនេះ $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

13. បង្ហាញថា $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

គេមាន $acx^2+(ad+bc)x+bd=acx^2+adx+bcx+bd$

$=ax(cx+d)+b(cx+d)$

$=(cx+d)(ax+b)$

ដូចនេះ $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

14. បង្ហាញថា $\sqrt{3+\sqrt{6}}+\sqrt{3-\sqrt{6}}=\sqrt{6+2\sqrt{3}}$ ពិត

ពិនិត្យ $\sqrt{3+\sqrt{6}}+\sqrt{3-\sqrt{6}}=\sqrt{6+2\sqrt{3}}$

$\left[\sqrt{3+\sqrt{6}}+\sqrt{3-\sqrt{6}}\right]^2=\left[\sqrt{6+2\sqrt{3}}\right]^2$

$3+\sqrt{6}+2\sqrt{(3+\sqrt{6})(3+\sqrt{6})}+3-\sqrt{6}=6+2\sqrt{3}$

$6+2\sqrt{9-6}=6+2\sqrt{3}$

$6+2\sqrt{3}=6+2\sqrt{3}$ ពិត

ដូចនេះ $\sqrt{3+\sqrt{6}}+\sqrt{3-\sqrt{6}}=\sqrt{6+2\sqrt{3}}$ ពិត ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន សមីការ

1. បង្ហាញថា បើ a ជាចំនួនវិជ្ជមាន នោះ $\sqrt{-a}=i\sqrt{a}$ ។
2. បង្ហាញថា $-\sqrt{-2}$ ជាចំនួននិមិត្ត ។
3. បង្ហាញថា $\sqrt{-8}\times\sqrt{-18}=\sqrt{(-8)(-18)}=\sqrt{144}=12$ ខុស ។ ចូរឱ្យចម្លើយដែលត្រឹមត្រូវ ។
4. ស្រាយបញ្ជាក់ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិច ៖

   ក. $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

   ខ. $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

   គ. $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

   ឃ. $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$
5. ស្រាយថា បើ $A\times B=0$ លុះត្រាតែ $A=0$ ឬ $B=0$ ។
6. បង្ហាញថា $x=-2$ ឬ $x=4$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2-2x-8=0$ ។
7. បង្ហាញថា $x=\sqrt{b}$ ឬ $x=-\sqrt{b}$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2=b$ ។
8. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ មានឫស $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ។
9. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ មានឫស $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ ដែល ឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta=b^2-4ac$ ។

   ខ. បង្ហាញថា បើ $\Delta>0$ សមីការមានឫសជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នា $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ។

   គ. បង្ហាញថា បើ $\Delta=0$ សមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$ ។

   ឃ. បង្ហាញថា បើ $\Delta<0$ សមីការមានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា $x_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ។
10. ក. ចំពោះសមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ មាន b ជាចំនួនគូ ដែល $b=2b'$ នោះ $\Delta'=b'^2-ac$ ។

    ខ. បង្ហាញថា បើ $\Delta'>0$ សមីការមានឫសជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នា $x_1=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$, $x_2=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$ ។

    គ. បង្ហាញថា បើ $\Delta'=0$ សមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=\dfrac{-b'}{a}$ ។

    ឃ. បង្ហាញថា បើ $\Delta'<0$ សមីការមានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា $x_1=\dfrac{-b'-i\sqrt{-\Delta'}}{a}$, $x_2=\dfrac{-b'+i\sqrt{-\Delta'}}{a}$ ។
11. ចំពោះសមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ មាន x_1 និង x_2 ជាឫស ។

    ក. បង្ហាញថា ផលបូកឫស $S=x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}$ ។

    ខ. បង្ហាញថា ផលគុណឫស $P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}$ ។
12. ចំពោះសមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ មាន x_1 និង x_2 ជាឫស ។

    ក. បង្ហាញថា បើ $a+b+c=0$ នោះ $x_1=1$, $x_2=\dfrac{c}{a}$ ។

    ខ. បង្ហាញថា បើ $a-b+c=0$ នោះ $x_1=-1$, $x_2=-\dfrac{c}{a}$ ។

13. ចំពោះសមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ x_1 និង x_2 ។
បង្ហាញថា គេអាចសរសេរកន្សោមដឺក្រេទី២ ជាផលគុណកត្តា $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ ។
14. បង្ហាញថា បើគេស្គាល់ឫសសមីការគឺ x_1 និង x_2 នោះគេអាចបង្កើតសមីការបាន $x^2-Sx+P=0$ ដែល S ជាផលបូកឫស និង P ជាផលគុណឫស ។
15. ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទសំណល់ ៖ បើ R ជាសំណល់ក្នុងការចែកកន្សោមពហុធា $f(x)$ នឹង $x-\alpha$ នោះគេបាន $R=f(\alpha)$ ។
16. ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទកត្តា ៖ $f(x)$ ជាពហុធា ។ បើ α ជាចម្លើយនៃសមីការ $f(x)=0$ នោះ $x-\alpha$ ជាកត្តានៃ $f(x)$ ។
17. បង្ហាញថា $f(x)$ ចែកដាច់នឹង $ax+b$ ប្រសិនបើ $f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន សមីការ

1. **បង្ហាញថា** $\sqrt{-a}=i\sqrt{a}$

គេមាន a ជាចំនួនវិជ្ជមាន

ដោយ $i^2=-1$

គេបាន $\sqrt{-a}=\sqrt{(-1)\cdot a}=\sqrt{i^2\cdot a}=i\sqrt{a}$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{-a}=i\sqrt{a}}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

2. **បង្ហាញថា** $-\sqrt{-2}$ **ជាចំនួននិមិត្ត**

តាមនិយមន័យ ចំនួននិមិត្ត ជាផលគុណចំនួនពិតនឹងឯកតានិមិត្ត i

ដោយ $-\sqrt{-2}=-\sqrt{(-1)\cdot 2}=-\sqrt{i^2\cdot 2}=-\sqrt{2}\cdot i$ (ជាផលគុណចំនួនពិតនឹងឯកតានិតមិត្ត)

ដូចនេះ $-\sqrt{-2}$ ជាចំនួននិមិត្ត ត្រូវបានបង្ហាញ ។

3. **បង្ហាញថា** $\sqrt{-8}\times\sqrt{-18}=\sqrt{(-8)(-18)}=\sqrt{144}=12$ **ខុស និងឱ្យចម្លើយដែលត្រឹមត្រូវ**

គេមាន $\sqrt{-8}\times\sqrt{-18}=\sqrt{(-8)(-18)}=\sqrt{144}=12$

ព្រោះ រូបមន្ត $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ ប្រើបានតែ $a\ge 0$, $b\ge 0$ ប៉ុណ្ណោះ

ចម្លើយដែល ត្រឹមត្រូវគឺ $\sqrt{-8}\times\sqrt{-18}=\sqrt{i^2\cdot 8}\times\sqrt{i^2\cdot 18}=i\sqrt{8}\times i\sqrt{18}=i^2\times\sqrt{8\times 18}=(-1)\sqrt{144}=-12$

ដូចនេះ $\sqrt{-8}\times\sqrt{-18}=12$ ខុស ចម្លើយត្រឹមត្រូវគឺ $\sqrt{-8}\times\sqrt{-18}=-12$ ។

4. **ស្រាយបញ្ជាក់ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិច ៖**

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

ដើម្បីបូកចំនួនកុំផ្លិចជាមួយចំនួនកុំផ្លិច គេបូកផ្នែកពិតជាមួយផ្នែកពិត និងបូកផ្នែកនិមិត្តជាមួយផ្នែកនិមិត្ត

គេបាន $(a+bi)+(c+di)=a+c+bi+di=(a+c)+(b+d)i$

ដូចនេះ $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

ដើម្បីដកចំនួនកុំផ្លិចជាមួយចំនួនកុំផ្លិច គេដកផ្នែកពិតជាមួយផ្នែកពិត និងដកផ្នែកនិមិត្តជាមួយផ្នែកនិមិត្ត

គេបាន $(a+bi)-(c+di)=a-c+bi-di=(a-c)+(b-d)i$

ដូចនេះ $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

គេមាន $(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2$

$=ac-bd+adi+bci$

$=(ac-bd)+(ad+bc)i$

ដូចនេះ $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់ $\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

គេមាន $\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$

$=\frac{ac+bd-adi+bci}{c^2+d^2}$

$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

ដូចនេះ $\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

5. **ស្រាយថា បើ $A\times B=0$ លុះត្រាតែ $A=0$ ឬ $B=0$**

គេនឹងស្រាយតាមទ្វេលក្ខខណ្ឌ គេដឹងថា $p\Leftrightarrow q=(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$

ដោយ $A\times B=0\Rightarrow A=0$ ឬ $B=0$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត បើ $A=0\Rightarrow A\times B=0\times B=0$

បើ $B=0\Rightarrow A\times B=A\times 0=0$

នាំឱ្យ $(A=0$ ឬ $B=0)\Rightarrow A\times B=0$ (2)

តាមរយៈ ទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន $A\times B=0$ លុះត្រាតែ $A=0$ ឬ $B=0$

ដូចនេះ $A\times B=0$ លុះត្រាតែ $A=0$ ឬ $B=0$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

6. **បង្ហាញថា $x=-2$ ឬ $x=4$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2-2x-8=0$**

បើ $x=-2$ ឬ $x=4$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2-2x-8=0$ កាលណា $x=-2$ ឬ $x=4$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $x^2-2x-8=0$

ដោយ ចំពោះ $x=-2$ នោះ $x^2-2x-8=(-2)^2-2\cdot(-2)-8=4+4-8=0$ ពិត

ចំពោះ $x=4$ នោះ $x^2-2x-8=4^2-2\cdot4-8=16-8-8=0$ ពិត

នាំឱ្យ $x=-2$ ឬ $x=4$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2-2x-8=0$

ដូចនេះ $x=-2$ ឬ $x=4$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2-2x-8=0$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

7. **បង្ហាញថា** $x=\sqrt{b}$ **ឬ** $x=-\sqrt{b}$ **ជាឬសនៃសមីការ** $x^2=b$

បើ $x=\sqrt{b}$ ឬ $x=-\sqrt{b}$ ជាឬសនៃសមីការ $x^2=b$ កាលណា $x=\sqrt{b}$ ឬ $x=-\sqrt{b}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $x^2=b$

ដោយ ចំពោះ $x=\sqrt{b}$ នោះ $x^2=\left(\sqrt{b}\right)^2=b$ ពិត

ចំពោះ $x=-\sqrt{b}$ នោះ $x^2=\left(-\sqrt{b}\right)^2=b$ ពិត

នាំឱ្យ $x=\sqrt{b}$ ឬ $x=-\sqrt{b}$ ជាឬសនៃសមីការ $x^2=b$

ដូចនេះ $x=\sqrt{b}$ ឬ $x=-\sqrt{b}$ ជាឬសនៃសមីការ $x^2=b$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

8. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ** $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ **មានឬស** $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

គេមាន $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ (ចែកអង្គទាំងពីរនឹង a)

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(សូមបញ្ជាក់ថា ត្រង់ $\sqrt{4a^2}=2a$ តាមពិត $\sqrt{4a^2}=2|a|$ ចំពោះ $a\neq 0$ គេបាន $\sqrt{4a^2}=\pm 2a$ តែ $\frac{\pm}{\pm}=\pm$ ដដែល)

ដូចនេះ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ មានឬស $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

9. **ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ** $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ **មានឫស** $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

គេមាន $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ មានឫស $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (បានស្រាយរួចខាងលើ)

ចំពោះ ឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta=b^2-4ac$

គេបាន $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

ដូចនេះ: សមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ មានឫស $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ. បង្ហាញថា បើ $\Delta>0$ សមីការមានឫសជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នា $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

គេមាន $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ ជាឫសនៃសមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$

ចំពោះ $\Delta>0$ គេអាចសរសេរបាន $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

ដូចនេះ: បើ $\Delta>0$ សមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ មានឫស $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ។

គ. បង្ហាញថា បើ $\Delta=0$ សមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$

គេមាន $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ ជាឫសនៃសមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$

ចំពោះ $\Delta=0$ គេសរសេរបាន $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{0}}{2a}=\dfrac{-b}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{0}}{2a}=\dfrac{-b}{2a}$

ដូចនេះ: បើ $\Delta=0$ សមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ឃ. បង្ហាញថា បើ $\Delta<0$ សមីការមានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា $x_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

គេមាន $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ ជាឫសនៃសមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$

ចំពោះ $\Delta<0$ គេសរសេរបាន

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{-(-\Delta)}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{(-1)(-\Delta)}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{i^2\cdot(-\Delta)}}{2a}=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{-(-\Delta)}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{(-1)(-\Delta)}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{i^2\cdot(-\Delta)}}{2a}=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

ព្រោះ គេត្រូវទុករ៉ាឌីកង់ឱ្យវិជ្ជមាន ហេតុនេះ $-\Delta$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន ដោយសារតែ $\Delta<0$

ដូចនេះ: បើ $\Delta<0$ សមីការមានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា $x_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ។

10. **ក. ចំពោះសមីការ** $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ **មាន** b **ជាចំនួនគូ ដែល** $b=2b'$ **នោះ** $\Delta'=b'^2-ac$

គេមាន $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ មានឫស $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

ក្នុងករណី $b=2b'$ នោះ $x=\dfrac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-2b'\pm 2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

ដើម្បីសម្រួលរាងឱ្យងាយ គេតាង $\Delta'=b'^2-ac$ នោះគេបាន $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$

ដូចនេះ | គេបាន $\Delta'=b'^2-ac$ ចំពោះ $b=2b'$ | ។

ខ. បង្ហាញថា បើ $\Delta'>0$ **សមីការមានឫសជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នា** $x_1=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$, $x_2=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$

ក្នុងករណី $\Delta'=b'^2-ac$ គេមាន $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$

ចំពោះ $\Delta'>0$ គេអាចសរសេរ $x_1=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$, $x_2=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$

ដូចនេះ | បើ $\Delta'>0$ សមីការមានឫសជាចំនួនពិតពីរផ្សេងគ្នា $x_1=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$, $x_2=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$ | ។

គ. បង្ហាញថា បើ $\Delta'=0$ **សមីការមានឫសឌុប** $x_1=x_2=\dfrac{-b'}{a}$

គេមាន $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$

ចំពោះ $\Delta'=0$ គេសរសេរបាន $x_1=\dfrac{-b'-\sqrt{0}}{a}=\dfrac{-b'}{a}$, $x_1=\dfrac{-b'+\sqrt{0}}{a}=\dfrac{-b'}{a}$

ដូចនេះ | បើ $\Delta'=0$ សមីការមានឫសឌុប $x_1=x_2=\dfrac{-b'}{a}$ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

ឃ. បង្ហាញថា បើ $\Delta'<0$ **សមីការមានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា** $x_1=\dfrac{-b'-i\sqrt{-\Delta'}}{a}$, $x_2=\dfrac{-b'+i\sqrt{-\Delta'}}{a}$

គេមាន $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$

ចំពោះ $\Delta'<0$ គេសរសេរបាន

$$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-b'-\sqrt{-(-\Delta')}}{a}=\frac{-b'-\sqrt{(-1)(-\Delta')}}{a}=\frac{-b'-\sqrt{i^2\cdot(-\Delta')}}{a}=\frac{-b'-i\sqrt{-\Delta'}}{a}$$

$$x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-b'+\sqrt{-(-\Delta')}}{a}=\frac{-b'+\sqrt{(-1)(-\Delta')}}{a}=\frac{-b'+\sqrt{i^2\cdot(-\Delta')}}{a}=\frac{-b'+i\sqrt{-\Delta'}}{a}$$

ព្រោះ គេត្រូវទុករ៉ាឌីកង់ឱ្យវិជ្ជមាន ហេតុនេះ $-\Delta'$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន ដោយសារតែ $\Delta'<0$

ដូចនេះ | បើ $\Delta'<0$ សមីការមានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា $x_1=\dfrac{-b'-i\sqrt{-\Delta'}}{a}$, $x_2=\dfrac{-b'+i\sqrt{-\Delta'}}{a}$ | ។

11. **ចំពោះសមីការ** $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ **មាន** x_1 **និង** x_2 **ជាឫស ៖**

ក. បង្ហាញថា ផលបូកឫស $S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}$

គេមាន x_1 និង x_2 ជាឫសនៃសមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$

ដែល $x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

គេបាន $x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$

ដូចនេះ: ផលបូកឫស $S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។ (គួរដឹងថា $S=\text{Sum}=$ផលបូក)

ខ. បង្ហាញថា ផលគុណឫស $P=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

គេមាន x_1 និង x_2 ជាឫសនៃសមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$

ដែល $x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

គេបាន $x_1+x_2=\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$

ដូចនេះ: ផលគុណឫស $P=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។ (គួរដឹងថា $P=\text{Product}=$ផលគុណ)

12. **ចំពោះសមីការ** $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ **មាន** x_1 **និង** x_2 **ជាឫស**

ក. បង្ហាញថា បើ $a+b+c=0$ **នោះ** $x_1=1$, $x_2=\frac{c}{a}$

គេមាន សមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$

គេឱ្យ $x_1=1$ នោះគេបាន $a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=0$ ឬ $a+b+c=0$

ម្យ៉ាងទៀត $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ ឬ $1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ នោះ $x_2=\frac{c}{a}$

ដូចនេះ: ចំពោះសមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ បើ $a+b+c=0$ នោះ $x_1=1$, $x_2=\frac{c}{a}$ ។

ខ. បង្ហាញថា បើ $a-b+c=0$ **នោះ** $x_1=-1$, $x_2=-\frac{c}{a}$

គេមាន សមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$

គេឱ្យ $x_1=-1$ នោះគេបាន $a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=0$ ឬ $a-b+c=0$

ម្យ៉ាងទៀត $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ ឬ $(-1)\cdot x_2=\frac{c}{a}$ នោះ $x_2=-\frac{c}{a}$

ដូចនេះ: ចំពោះសមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ បើ $a-b+c=0$ នោះ $x_1=-1$, $x_2=-\frac{c}{a}$ ។

13. **ចំពោះសមីការ** $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ **មានឫសពីរផ្សេងគ្នាគឺ** x_1 **និង** x_2

បង្ហាញថា គេអាចសរសេរកន្សោមដឺក្រេទី២ ជាផលគុណកត្តា $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

គេមាន សមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ ដែល x_1 និង x_2 ជាឫស

គេបាន ទំនាក់ទំនងឫស និងមេគុណគឺ $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

ពិនិត្យ $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$

$$=a\left(x^2-\frac{-b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right]$$

$$=a\left[x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2\right]$$

$$=a\left[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right]$$

$$=a(x-x_1)(x-x_2)$$

ដូចនេះ: | បើកន្សោមដឺក្រេទី២មានឫស x_1 និង x_2 នោះដាក់ជាផលគុណកត្តាបាន $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ | ។

14. **បង្ហាញថា គេអាចបង្កើតបានសមីការដឺក្រេទី២** $x^2-Sx+P=0$

ដោយ x_1 និង x_2 ជាឫសនៃសមីការ

គេបាន $(x-x_1)(x-x_2)=0$

$$x^2-x_2x-x_1x+x_1x_2=0$$

$$x^2-(x_2+x_1)x+x_1x_2=0$$

$$x^2-Sx+P=0$$

ដូចនេះ: | គេអាចបង្កើតបានសមីការដឺក្រេទី២ $x^2-Sx+P=0$ បើស្គាល់ឫស x_1 , x_2 | ។

15. **ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទសំណល់ ៖ សំណល់** $R=f(\alpha)$

គេមាន R ជាសំណល់ក្នុងការចែកកន្សោមពហុធា $f(x)$ នឹង $x-\alpha$

គេតាង $q(x)$ ជាផលចែកនៃការចែកកន្សោមពហុធា $f(x)$ នឹង $x-\alpha$

នោះគេបាន ទំនាក់ទំនង $f(x)=(x-\alpha)q(x)+R$

ឬ $f(\alpha)=(\alpha-\alpha)q(\alpha)+R$ (បានពីជំនួស x ដោយ α)

$$f(\alpha)=R$$

ដូចនេះ: | $f(x)$ ចែកនឹង $x-\alpha$ បានសំណល់ R ដែល $R=f(\alpha)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

16. **ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទកត្តា ៖ បើ α ជាចម្លើយនៃសមីការ $f(x)=0$ នោះ $x-\alpha$ ជាកត្តាមួយនៃ $f(x)$**

គេមាន $f(x)$ ជាពហុធា និង α ជាចម្លើយនៃសមីការ $f(x)=0$

គេតាង $q(x)$ ជាផលចែកនៃការចែកពហុធា $f(x)$ នឹង $x-\alpha$

នោះគេបាន ទំនាក់ទំនង $f(x)=(x-\alpha)q(x)+R$

ឬ $f(\alpha)=(\alpha-\alpha)q(\alpha)+R$

$f(\alpha)=R$

ដោយ α ជាចម្លើយនៃសមីការ $f(x)=0$ នោះ $f(\alpha)=0$

គេបាន $R=0$ មានន័យថា ពហុធា $f(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-\alpha$

នាំឱ្យ $x-\alpha$ ជាកត្តាមួយនៃ $f(x)$

ដូចនេះ: | បើ α ជាចម្លើយនៃសមីការ $f(x)=0$ នោះ $x-\alpha$ ជាកត្តាមួយនៃ $f(x)$ | ។

17. **បង្ហាញថា $f(x)$ ចែកដាច់នឹង $ax+b$ ប្រសិនបើ $f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$**

គេតាង R ជាសំណល់ក្នុងការចែកកន្សោមពហុធា $f(x)$ នឹង $ax+b$

$q(x)$ ជាផលចែកនៃការចែកកន្សោមពហុធា $f(x)$ នឹង $ax+b$

នោះគេបាន ទំនាក់ទំនង $f(x)=(ax+b)q(x)+R$

ឬ $f\left(-\frac{b}{a}\right)=\left[a\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right]q\left(-\frac{b}{a}\right)+R$ (បានពីជំនួស x ដោយ $-\frac{b}{a}$)

$=(-b+b)q\left(-\frac{b}{a}\right)+R$

$=R$

តែគេឱ្យ $f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$ នោះ សំណល់ $R=0$ មានន័យថា $f(x)$ ចែកដាច់នឹង $ax+b$

ដូចនេះ: | $f(x)$ ចែកដាច់នឹង $ax+b$ ប្រសិនបើ $f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

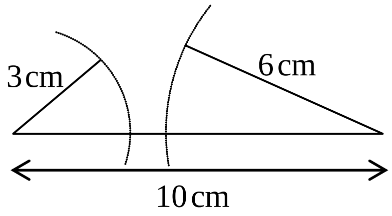
ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន វិសមីការ

1. ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមសភាពនៃត្រីកោណថា ៖
   -ផលបូករង្វាស់ជ្រុងពីរ ត្រូវធំជាងជ្រុងមួយទៀត ។
   -ផលដករង្វាស់ជ្រុងពីរ ត្រូវតូចជាងជ្រុងមួយទៀត ។
2. ក. បង្ហាញថា ទ្វេធា $f(x)=ax+b$ មានឫស $x=-\frac{b}{a}$ ។
   ខ. បង្ហាញថា បើ $x>-\frac{b}{a}$ នោះ $f(x)$ មានសញ្ញាដូច a ។
   គ. បង្ហាញថា បើ $x<-\frac{b}{a}$ នោះ $f(x)$ មានសញ្ញាផ្ទុយ a ។
3. ចំពោះសមីការ និងវិសមីការដឺក្រេទី១ដែលមានជាប់តម្លៃដាច់ខាត ហើយ $C>0$ ៖
   ក. បង្ហាញថា បើ $|Ax+B|=C$ នោះ $Ax+B=C$ ឬ $Ax+B=-C$ ។
   ខ. បង្ហាញថា បើ $|Ax+B|<C$ នោះ $-C<Ax+B<C$ ។
   គ. បង្ហាញថា បើ $|Ax+B|>C$ នោះ $Ax+B<-C$ ឬ $Ax+B>C$ ។
4. ស្រាយថា ត្រីធាដឺក្រេទី២ $f(x)=ax^2+bx+c$ ដែលមានឫស α និង β ហើយ $\alpha<\beta$ មាន ៖
   -សញ្ញាផ្ទុយ a កាលណា $\alpha<x<\beta$ (មានន័យថានៅចន្លោះឫស) ។
   -សញ្ញាដូច a កាលណា $x<\alpha$ ឬ $x>\beta$ (មានន័យថានៅក្រៅឫស) ។
5. ក. ស្រាយថា ត្រីធាដឺក្រេទី២ $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ ដែល $\Delta<0$ មានសញ្ញាដូច a ជានិច្ច ។
   ខ. ស្រាយថា ត្រីធាដឺក្រេទី២ $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ ដែល $\Delta=0$ មានសញ្ញាដូច a លើកលែងតែត្រង់ $x=-\frac{b}{2a}$ ។
6. ចូរបង្ហាញវិសមភាពខាងក្រោម ៖
   ក. $a^2+b^2\geq ab$ ខ. $a^2+ab+b^2\geq 0$
   គ. $5x^2-4xy+6y^2\geq 0$ ឃ. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$ ។
7. ក. ចំពោះ $a>0$, $b>0$ បង្ហាញថា $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ ។
   ខ. បង្ហាញវិសមភាព $\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$ ចំពោះ $a>b>0$ ។
   គ. បង្ហាញថា ចំពោះ $a\geq 0$, $b\geq 0$ នោះ $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (មធ្យមនព្វន្ត និងមធ្យមធរណីមាត្រ) ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន វិសមីការ

1. **➢ស្រាយបញ្ជាក់វិសមសភាពនៃត្រីកោណ ៖ ផលបូករង្វាស់ជ្រុងពីរ ត្រូវធំជាងជ្រុងមួយទៀត**

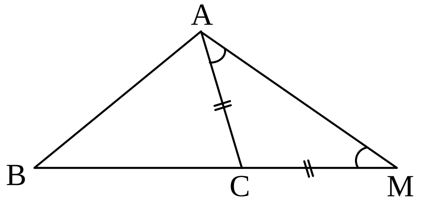
ណែនាំ : គេមិនមែនចេះតែសង់ត្រីកោណបានគ្រប់ករណីនោះទេ ។
ដូចជា ត្រីកោណដែលមានជ្រុង 3cm , 6cm , 10cm
គេមិនអាចសង់ត្រីកោណដែលមានជ្រុងបែបនេះបានទេ ។
ដូចនេះ ជ្រុងនៃត្រីកោណត្រូវមានលក្ខខណ្ឌកំណត់ច្បាស់លាស់ ។



ឧបមាថា គេមានត្រីកោណ ABC បន្លាយជ្រុង BC ឱ្យបាន $CM = CA$ ។

គេមាន $\angle BAM = \angle BAC + \angle CAM$ នោះ $\angle BAM > \angle CAM \quad (1)$

ដោយ ΔACM មាន $CM = CA$ នោះ ΔACM ជាត្រីកោណសមបាត
កំពូល C នាំឱ្យ $\angle CAM = \angle CMA$



គេបាន (1) $\angle BAM > \angle CMA$ អាចសរសេរ $\angle BAM > \angle BMA$

ក្នុង ΔBAM មាន $\angle BAM > \angle BMA$ គេបាន $BM > AB$

ដោយ $BM = BC + CM = BC + CA$ ព្រោះ $CM = CA$

គេបាន $BC + CA > AB$ ឬ $BC + AC > AB$ ។

តាមលំនាំដូចគ្នាខាងលើនេះ គេក៏អាចស្រាយបានថា $AB + AC > BC$ និង $AB + BC > AC$

ដូចនេះ | ក្នុងត្រីកោណមួយ ផលបូករង្វាស់ជ្រុងពីរ ត្រូវធំជាងជ្រុងមួយទៀត ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➢ស្រាយបញ្ជាក់វិសមសភាពនៃត្រីកោណ ៖ ផលដករង្វាស់ជ្រុងពីរ ត្រូវតូចជាងជ្រុងមួយទៀត

ឧបមាថា ត្រីកោណ ABC មានរង្វាស់ជ្រុង $AB > AC > BC$

តាមរយៈ សម្រាយខាងលើ ក្នុងត្រីកោណមួយ ផលបូករង្វាស់ជ្រុងពីរ ត្រូវធំជាងជ្រុងមួយទៀត

គេបាន $\begin{cases} AB + BC > AC & (1) \\ AC + BC > AB & (2) \\ AB + AC > BC & (3) \end{cases}$

តាម (1) $AB > AC - BC$

តាម (2) $AC > AB - BC$

តាម (2) $BC > AB - AC$

(ក្នុងត្រីកោណមួយ : ជ្រុងវែងជាងគេ ដកជ្រុងខ្លី ត្រូវតូចជាងជ្រុងមួយទៀត)

ដូចនេះ | ក្នុងត្រីកោណមួយ ផលដករង្វាស់ជ្រុងពីរ ត្រូវតូចជាងជ្រុងមួយទៀត ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

លំហាត់ស្រួលយ៉ាងណាក៏ដោយ តែបើយើងមិនចេះគឺវាលំបាក ។

លំហាត់ដែលខ្ញុំដោះស្រាយបាន គឺជាលំហាត់ដែលខ្ញុំធ្លាប់ជួប ឬមានលំនាំដូចលំហាត់ធ្លាប់ជួប ឬបំបែកគំនិតពីលំហាត់ធ្លាប់ជួប ឬ ... ។

2. **ក. បង្ហាញថា ទ្វេធា $f(x)=ax+b$ មានឫស $x=-\dfrac{b}{a}$**

ដើម្បីរកឫសនៃទ្វេធា $f(x)=ax+b$ គេត្រូវឱ្យ $f(x)=0$

សមមូល $ax+b=0 \Rightarrow x=-\dfrac{b}{a}$ ជាឫស ដែល $a\neq 0$

ដូចនេះ: ទ្វេធា $f(x)=ax+b$ មានឫស $x=-\dfrac{b}{a}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ខ. បង្ហាញថា បើ $x>-\dfrac{b}{a}$ នោះ $f(x)$ មានសញ្ញាដូច a (មានន័យថា ខាងស្តាំឫស មានសញ្ញាដូច a)

គេមាន $x>-\dfrac{b}{a}$ (1) ដែល $a\neq 0$ គេនឹងបង្ហាញថា $f(x)$ មានសញ្ញាដូច a គ្រប់ករណីនៃ a

-បើ $a>0$ នោះ $(1): ax>-b$ សមមូល $ax+b>0$ ឬ $f(x)>0$

មានន័យថា បើ a មានសញ្ញា $+$ នោះ ទ្វេធា $f(x)$ ក៏មានសញ្ញា $+$ ដែរ ។

-បើ $a<0$ នោះ $(1): ax<-b$ សមមូល $ax+b<0$ ឬ $f(x)<0$

មានន័យថា បើ a មានសញ្ញា $-$ នោះ ទ្វេធា $f(x)$ ក៏មានសញ្ញា $-$ ដែរ ។

ឃើញថា គ្រប់ករណីនៃ $a\neq 0$ នោះ $f(x)$ មានសញ្ញាដូច a

ដូចនេះ: បើ $x>-\dfrac{b}{a}$ នោះ $f(x)$ មានសញ្ញាដូច a ត្រូវបានបង្ហាញ ។

គ. បង្ហាញថា បើ $x<-\dfrac{b}{a}$ នោះ $f(x)$ មានសញ្ញាផ្ទុយ a (មានន័យថា ខាងឆ្វេងឫស មានសញ្ញាផ្ទុយ a)

គេមាន $x<-\dfrac{b}{a}$ (1) ដែល $a\neq 0$ គេនឹងបង្ហាញថា $f(x)$ មានសញ្ញាផ្ទុយ a គ្រប់ករណីនៃ a

-បើ $a>0$ នោះ $(1): ax<-b$ សមមូល $ax+b<0$ ឬ $f(x)<0$

មានន័យថា បើ a មានសញ្ញា $+$ នោះ ទ្វេធា $f(x)$ មានសញ្ញា $-$ ជាសញ្ញាផ្ទុយ a ។

-បើ $a<0$ នោះ $(1): ax>-b$ សមមូល $ax+b>0$ ឬ $f(x)>0$

មានន័យថា បើ a មានសញ្ញា $-$ នោះ ទ្វេធា $f(x)$ មានសញ្ញា $+$ ជាសញ្ញាផ្ទុយ a ។

ឃើញថា គ្រប់ករណីនៃ $a\neq 0$ នោះ $f(x)$ មានសញ្ញាផ្ទុយ a

ដូចនេះ: បើ $x<-\dfrac{b}{a}$ នោះ $f(x)$ មានសញ្ញាផ្ទុយ a ត្រូវបានបង្ហាញ ។

3. ចំពោះសមីការ និងវិសមីការដឺក្រេទី១ដែលមានជាប់តម្លៃដាច់ខាត ហើយ $C>0$ ៖

ក. បង្ហាញថា បើ $|Ax+B|=C$ នោះ $Ax+B=C$ ឬ $Ax+B=-C$

តាមលក្ខណៈ: $|x|=\begin{cases} x & \text{បើ } x\ge 0 \\ -x & \text{បើ } x<0 \end{cases}$ គេនឹងបង្ហាញថា បើ $|Ax+B|=C$ (1) នោះ $Ax+B=C$ ឬ $Ax+B=-C$

-ក្នុងករណី $Ax+B>0$ នោះគេបាន $|Ax+B|=Ax+B$

នាំឱ្យ (1) ទៅជា $Ax+B=C$ (i)

-ក្នុងករណី $Ax+B<0$ នោះគេបាន $|Ax+B|=-(Ax+B)$

នាំឱ្យ (1) ទៅជា $-(Ax+B)=C$ សមមូល $Ax+B=-C$ (ii)

តាមរយៈ (i) និង (ii) គេបាន $Ax+B=C$ ឬ $Ax+B=-C$

ដូចនេះ បើ $|Ax+B|=C$ នោះ $Ax+B=C$ ឬ $Ax+B=-C$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ខ. បង្ហាញថា បើ $|Ax+B|<C$ នោះ $-C<Ax+B<C$

តាមលក្ខណៈ: $|x|=\begin{cases} x & \text{បើ } x\ge 0 \\ -x & \text{បើ } x<0 \end{cases}$ គេនឹងបង្ហាញថា បើ $|Ax+B|<C$ (1) នោះ $-C<Ax+B<C$

-ក្នុងករណី $Ax+B>0$ នោះគេបាន $|Ax+B|=Ax+B$

នាំឱ្យ (1) ទៅជា $Ax+B<C$ (i)

-ក្នុងករណី $Ax+B<0$ នោះគេបាន $|Ax+B|=-(Ax+B)$

នាំឱ្យ (1) ទៅជា $-(Ax+B)<C$ សមមូល $Ax+B>-C$ (ii)

តាមរយៈ (i) និង (ii) គេអាចសរសេរបាន $-C<Ax+B<C$

ដូចនេះ បើ $|Ax+B|<C$ នោះ $-C<Ax+B<C$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

គ. បង្ហាញថា $|Ax+B|>C$ នោះ $Ax+B<-C$ ឬ $Ax+B>C$

តាមលក្ខណៈ: $|x|=\begin{cases} x & \text{បើ } x\ge 0 \\ -x & \text{បើ } x<0 \end{cases}$ គេនឹងបង្ហាញថា បើ $|Ax+B|>C$ (1) នោះ $Ax+B<-C$ ឬ $Ax+B>C$

-ក្នុងករណី $Ax+B>0$ នោះគេបាន $|Ax+B|=Ax+B$

នាំឱ្យ (1) ទៅជា $Ax+B>C$ (i)

-ក្នុងករណី $Ax+B<0$ នោះគេបាន $|Ax+B|=-(Ax+B)$

នាំឱ្យ (1) ទៅជា $-(Ax+B)>C$ សមមូល $Ax+B<-C$ (ii)

តាមរយៈ (i) និង (ii) គេបាន $Ax+B>C$ ឬ $Ax+B<-C$

ដូចនេះ បើ $|Ax+B|>C$ នោះ $Ax+B<-C$ ឬ $Ax+B>C$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

✓**សម្គាល់** : ហេតុអ្វីបានជាគេមិនឱ្យករណី $Ax+B=0$? ព្រោះថា អង្គទីពីរ $C>0$ បើគេឱ្យ $Ax+B=0$ ជាករណីមិនអាចមាន ។

4. **ស្រាយថា ត្រីធាដឺក្រេទី២ $f(x)=ax^2+bx+c$ ដែលមានឫស α និង β ហើយ $\alpha<\beta$ មាន ៖**

-សញ្ញាផ្ទុយ a កាលណា $\alpha<x<\beta$ (មានន័យថានៅចន្លោះឫស)

-សញ្ញាដូច a កាលណា $x<\alpha$ ឬ $x>\beta$ (មានន័យថានៅក្រៅឫស)

គេមាន បើ $f(x)=ax^2+bx+c$ ដែលមាន α និង β ជាឫស

នោះគេបាន $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ (បានស្រាយបញ្ជាក់រួចក្នុងមេរៀនសមីការ លំហាត់លេខ ១៣)

នាំឱ្យ $f(x)$ មានសញ្ញា $a(x-\alpha)(x-\beta)$

តារាងសញ្ញា នៃ $a(x-\alpha)(x-\beta)$

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
$x-\alpha$	$-$	0	$+$	$+$
$x-\beta$	$-$		$-$ 0	$+$
a	a		a	a
$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$	សញ្ញាដូច a	0	សញ្ញាផ្ទុយ a 0	សញ្ញាដូច a

តាមតារាងសញ្ញា គេសន្និដ្ឋានបានថា ៖

-ត្រីធា $f(x)$ មានសញ្ញាផ្ទុយ a កាលណា $\alpha<x<\beta$ (មានន័យថានៅចន្លោះឫស)

-ត្រីធា $f(x)$ មានសញ្ញាដូច a កាលណា $x<\alpha$ ឬ $x>\beta$ (មានន័យថានៅក្រៅឫស)

ដូចនេះ:
-ត្រីធា $f(x)$ មានសញ្ញាផ្ទុយ a កាលណា $\alpha<x<\beta$ (មានន័យថានៅចន្លោះឫសមានសញ្ញាផ្ទុយ a)
-ត្រីធា $f(x)$ មានសញ្ញាដូច a កាលណា $x<\alpha$ ឬ $x>\beta$ (មានន័យថានៅក្រៅឫសមានសញ្ញាដូច a) ។

5. **ក. ស្រាយថា ត្រីធាដឺក្រេទី២ $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ ដែល $\Delta<0$ មានសញ្ញាដូច a ជានិច្ច**

គេមាន
$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$
$$=a\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\frac{c}{a}\right)$$
$$=a\left[x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$$
$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

ដោយ $\Delta<0$ នោះ $b^2-4ac<0$ និង $4a^2>0$ នាំឱ្យ $\frac{b^2-4ac}{4a^2}<0$ សមមូល $-\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0$

ម្យ៉ាងទៀត $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ នោះកន្សោម $\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]>0$

គេបាន $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ មានសញ្ញាដូច a ជានិច្ច

ដូចនេះ: ត្រីធាដឺក្រេទី២ $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ ដែល $\Delta<0$ មានសញ្ញាដូច a ជានិច្ច ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ខ. ស្រាយថា ត្រីធាដឺក្រេទី២ $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ ដែល $\Delta=0$ មានសញ្ញាដូច a លើកលែងតែត្រង់ $x=-\dfrac{b}{2a}$

គេមាន $f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}\right)$

$$=a\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left[x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

ដោយ $\Delta=0$ នោះ $b^2-4ac=0$ និង $4a^2\neq 0$ នាំឱ្យ $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}=0$

គេបាន $f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$

ដោយ $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2>0$ លើកលែងតែ $x=-\dfrac{b}{2a}$

នាំឱ្យ $f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ មានសញ្ញាដូច a លើកលែងតែត្រង់ $x=-\dfrac{b}{2a}$

ដូចនេះ: ត្រីធាដឺក្រេទី២ $f(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $\Delta=0$ មានសញ្ញាដូច a លើកលែងតែត្រង់ $x=-\dfrac{b}{2a}$ ។

6. **បង្ហាញវិសមភាពខាងក្រោម ៖**

ក. បង្ហាញថា $a^2+b^2\geq ab$

គេមាន $a^2+b^2\geq ab$

$$a^2-ab+b^2\geq 0$$

$$a^2-ab+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+b^2\geq 0$$

$$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+b^2\geq 0$$

$$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geq 0$$

ដោយ $\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2\geq 0$ និង $\dfrac{3}{4}b^2\geq 0$ នោះគេបាន $\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2\geq 0$

ដូចនេះ: គេបង្ហាញបានថា $a^2+b^2\geq ab$ ។

ខ. បង្ហាញថា $a^2+ab+b^2\geq 0$

គេមាន $a^2+ab+b^2\geq 0$

$$a^2+ab+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+b^2\geq 0$$

$$\left(a+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+b^2\geq 0$$

$$\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geq 0$$

ដោយ $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2\geq 0$ និង $\frac{3}{4}b^2\geq 0$ នោះគេបាន $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geq 0$

ដូចនេះ **គេបង្ហាញបានថា $a^2+ab+b^2\geq 0$** ។

គ. បង្ហាញថា $5x^2-4xy+6y^2\geq 0$

គេមាន $5x^2-4xy+6y^2\geq 0$

$$5x^2-4xy+6y^2\geq 0$$

$$x^2-4xy+4y^2+4x^2+2y^2\geq 0$$

$$(x-2y)^2+4x^2+2y^2\geq 0$$

ដោយ $(x-2y)^2\geq 0$, $4x^2\geq 0$, $2y^2\geq 0$

នាំឱ្យ ផលបូក $(x-2y)^2+4x^2+2y^2\geq 0$ ជារឿងត្រឹមត្រូវ

ដូចនេះ **កន្សោម $5x^2-4xy+6y^2\geq 0$ ត្រូវបានបង្ហាញ** ។

ឃ. បង្ហាញថា $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$

គេមាន $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$

$$a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2\geq a^2x^2+2axby+b^2y^2$$

$$a^2y^2+b^2x^2\geq 2axby$$

$$a^2y^2-2axby+b^2x^2\geq 0$$

$$(ay)^2-2\cdot ay\cdot bx+(bx)^2\geq 0$$

$(ay+bx)^2\geq 0$ ពិតគ្រប់ករណីនៃ a , b , x និង y ជាចំនួនពិត

ដូចនេះ **កន្សោម $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$ ត្រូវបានបង្ហាញ** ។

☞ **ហេតុអ្វីបានជា $x^2\geq 0$ គ្រប់ x ចំនួនពិត ?** ព្រោះ

បើ $x<0$ នោះ $x^2>0$ ពិត
បើ $x=0$ នោះ $x^2=0$ ពិត
បើ $x>0$ នោះ $x^2>0$ ពិត

នាំឱ្យ $x^2\geq 0$ ពិតគ្រប់ x ចំនួនពិត

7. **ក. ចំពោះ** $a>0$, $b>0$ **បង្ហាញថា** $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

គេមាន $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ (លើកអង្គទាំងពីរជាការេ មិនប្តូរទិសដៅ ព្រោះ $a>0$, $b>0$)

គេបាន $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2>\left(\sqrt{a+b}\right)^2$

$a+2\sqrt{ab}+b>a+b$

$2\sqrt{ab}>0$

$\sqrt{ab}>0$

$ab>0$

ដោយ $a>0$, $b>0$ នាំឱ្យ $ab>0$ ជារឿងពិត

ដូចនេះ: $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ ចំពោះ $a>0$, $b>0$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ខ. បង្ហាញវិសមភាព $\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$ **ចំពោះ** $a>b>0$

គេមាន $\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$ (លើកអង្គទាំងពីរជាការេ មិនប្តូរទិសដៅ ព្រោះ $a>b>0$)

គេបាន $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2<\left(\sqrt{a-b}\right)^2$

$a-2\sqrt{ab}+b<a-b$

$2b<2\sqrt{ab}$

$b<\sqrt{ab}$

$b<a$

ដោយ គេមាន $a>b>0$ នាំឱ្យ $b<a$ ជារឿងពិត

ដូចនេះ: $\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$ ចំពោះ: $a>b>0$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

គ. បង្ហាញថា ចំពោះ $a\ge 0$, $b\ge 0$ **នោះ** $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ **(មធ្យមនព្វន្ត និងមធ្យមធរណីមាត្រ)**

គេមាន $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$

គេបាន $a+b\ge 2\sqrt{ab}$

$a-2\sqrt{ab}+b\ge 0$

$\sqrt{a^2}-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\sqrt{b^2}\ge 0$

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0$

ដោយ $a\ge 0$, $b\ge 0$ នាំឱ្យ $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0$ ពិត

ដូចនេះ: $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ ចំពោះ: $a\ge 0$, $b\ge 0$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ធរណីមាត្រក្នុងប្លង់

1. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច $A(a)$ និង $B(b)$ នៅលើបន្ទាត់មួយកំណត់ដោយ $AB=|b-a|=|a-b|$ ។
2. គេមានចំណុច $A(a)$ និង $B(b)$ នៅលើបន្ទាត់មួយ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើចំណុច $P(x)$ ចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុងតាមផលធៀប $m:n$ នោះ $x=\dfrac{mb+na}{m+n}$ ។
3. គេមានចំណុច $A(a)$ និង $B(b)$ នៅលើបន្ទាត់មួយ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើចំណុច $Q(x)$ ចែកអង្កត់ AB ខាងក្រៅតាមផលធៀប $m:n$ នោះ $x=\dfrac{mb-na}{m-n}$ ។
4. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្ងាយរវាងពីចំណុច $A(x_1\ ,\ y_1)$ និង $B(x_2\ ,\ y_2)$ គឺ $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ។
5. បើគេមានពីរចំណុច $A(x_a\ ,\ y_a)$ និង $B(x_b\ ,\ y_b)$ ជាពីរចំណុចក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ ។

   ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើចំណុច $P(x\ ,\ y)$ ចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុងតាមផលធៀប $m:n$ នោះ $P\left(\dfrac{mx_b+nx_a}{m+n}\ ,\ \dfrac{my_b+ny_a}{m+n}\right)$ ។

   ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើចំណុច $Q(x\ ,\ y)$ ចែកអង្កត់ AB ខាងក្រៅតាមផលធៀប $m:n$ នោះ $Q\left(\dfrac{mx_b-nx_a}{m-n}\ ,\ \dfrac{my_b-ny_a}{m-n}\right)$ ។
6. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $A(x_1\ ,\ y_1)$ និងមានមេគុណប្រាប់ទិស m គឺ $y-y_1=m(x-x_1)$ ។
7. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុច $A(x_1, y_1)$ និង $B(x_2, y_2)$ គឺ $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ ដែល $x_1\neq x_2$ ។
8. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ពីរស្របគ្នា លុះត្រាតែវាមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើគ្នា ។
9. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ពីរកែងគ្នា លុះត្រាតែផលគុណមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ទាំងពីរស្មើ -1 ។
10. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្ងាយ d រវាងចំណុច $P(x_1\ ,\ y_1)$ និងបន្ទាត់ $L: ax+by+c=0$ គឺ $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ។
11. ក. បង្ហាញថា មេដ្យានដែលគូសចេញពីកំពូលនៃមុំកែងស្មើនឹងពាក់កណ្ដាលអ៊ីប៉ូតេនុស ។

    ខ. បង្ហាញថា អង្កត់ទ្រូងនៃចតុកោណស្មើកែងគ្នា ។
12. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្ដង់ដានៃរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $I(a\ ,\ b)$ និងកាំ r គឺ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ។

    ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការទូទៅនៃរង្វង់មានរាង $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ ដែល $A\ ,\ B\ ,\ C$ ជាចំនួនថេរ ។
13. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ $x^2+y^2=r^2$ ត្រង់ចំណុច $(x_0\ ,\ y_0)$ គឺ $x_0x+y_0y=r^2$ ។

    ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ត្រង់ចំណុច $(x_0\ ,\ y_0)$ គឺ

    $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ធរណីមាត្រក្នុងប្លង់

1. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច $A(a)$ និង $B(b)$ នៅលើបន្ទាត់មួយកំណត់ដោយ $AB=|b-a|=|a-b|$**

ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច គឺជាតម្លៃមិនអវិជ្ជមាន

គេដឹងថា នៅលើបន្ទាត់ចំនួន ចំនួនដែលនៅខាងស្តាំ ត្រូវធំជាងចំនួនដែលនៅខាងឆ្វេង

ហើយទីតាំងរវាងពីចំណុច $A(a)$ និង $B(b)$ វាអាច A នៅខាងស្តាំ B ឬក៏ អាច B នៅខាងស្តាំ A

-ករណី A នៅខាងស្តាំ B នោះចម្ងាយ $AB=a-b$ (ព្រោះ $a>b$ ដែលធ្វើឱ្យ $AB=a-b>0$)

-ករណី B នៅខាងស្តាំ A នោះចម្ងាយ $AB=b-a$ (ព្រោះ $b>a$ ដែលធ្វើឱ្យ $AB=b-a>0$)

ដើម្បីឱ្យប្រាកដថា AB គឺជាតម្លៃមិនអវិជ្ជមាន គេបំពាក់តម្លៃដាច់ខាត

គេបាន $AB=|b-a|=|a-b|$

ដូចនេះ | ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច $A(a)$ និង $B(b)$ នៅលើបន្ទាត់មួយកំណត់ដោយ $AB=|b-a|=|a-b|$ | ។

2. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើចំណុច $P(x)$ ចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុងតាមផលធៀប $m:n$ នោះ $x=\dfrac{mb+na}{m+n}$**

គេមាន ចំណុច $A(a)$ និង $B(b)$ នៅលើបន្ទាត់មួយ និងចំណុចចែកក្នុង $P(x)$

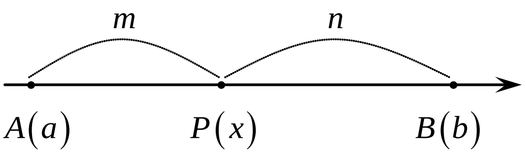
ផលធៀប ចែកក្នុង $m:n$ មានន័យថា $AP:PB=m:n$ អាចសរសេរ $\dfrac{AP}{m}=\dfrac{PB}{n}$

➢ ករណី $a<b$ នោះ $a<x<b$ ព្រោះ P នៅក្នុងអង្កត់ AB

នាំឱ្យ $AP=x-a$, $PB=b-x$

គេបាន $\dfrac{x-a}{m}=\dfrac{b-x}{n} \Leftrightarrow nx-na=mb-mx$

$$mx+nx=mb+na$$
$$(m+n)x=mb+na$$
$$x=\frac{mb+na}{m+n}$$



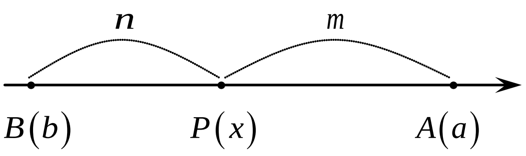
ដូចនេះ | បើចំណុច $P(x)$ ចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុងតាមផលធៀប $m:n$ នោះ $x=\dfrac{mb+na}{m+n}$ | ។

➢ ករណី $a>b$ នោះ $a>x>b$ ព្រោះ P នៅក្នុងអង្កត់ AB

នាំឱ្យ $AP=a-x$, $PB=x-b$

គេបាន $\dfrac{a-x}{m}=\dfrac{x-b}{n} \Leftrightarrow na-nx=mx-mb$

$$mb+na=mx+nx$$
$$mb+na=(m+n)x$$
$$x=\frac{mb+na}{m+n}$$



ដូចនេះ | បើចំណុច $P(x)$ ចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុងតាមផលធៀប $m:n$ នោះ $x=\dfrac{mb+na}{m+n}$ | ។

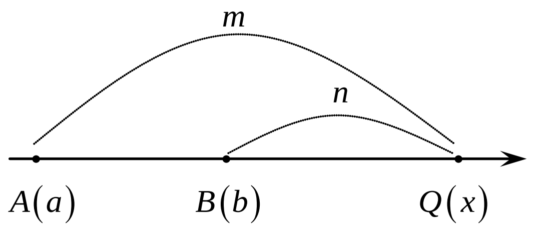
3. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើចំណុច $Q(x)$ ចែកអង្កត់ AB ខាងក្រៅតាមផលធៀប $m:n$ នោះ $x=\dfrac{mb-na}{m-n}$**

គេមាន ចំណុច $A(a)$ និង $B(b)$ នៅលើបន្ទាត់មួយ និងចំណុចចែកក្រៅ $Q(x)$

ផលធៀប ចែកក្រៅ $m:n$ មានន័យថា $AQ:QB=m:n$ អាចសរសេរ $\dfrac{AQ}{m}=\dfrac{QB}{n}$

➢ករណី $m>n$ និង $a<b$ នោះចំណុច Q ត្រូវតែនៅខាងស្តាំ B (ព្រោះបើ Q នៅខាងឆ្វេង B វានឹងធ្វើឱ្យ $m<n$)

នាំឱ្យ $AQ=x-a$, $QB=x-b$

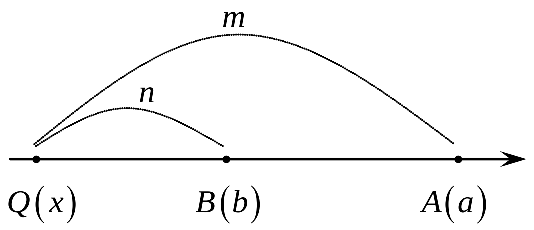


នាំឱ្យ $\dfrac{x-a}{m}=\dfrac{x-b}{n} \Leftrightarrow nx-na=mx-mb$

$$mx-nx=mb-na$$
$$(m-n)x=mb-na$$
$$x=\frac{mb-na}{m-n}$$

➢ករណី $m>n$ និង $a>b$ នោះចំណុច Q ត្រូវតែនៅខាងឆ្វេង B (ព្រោះបើ Q នៅខាងស្តាំ B វានឹងធ្វើឱ្យ $m<n$)

នាំឱ្យ $AQ=a-x$, $QB=b-x$

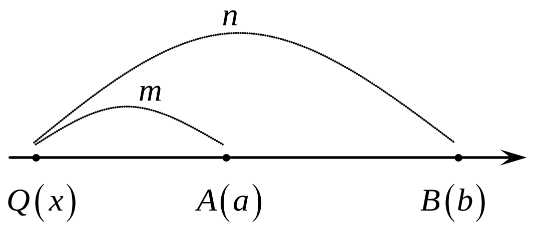


នាំឱ្យ $\dfrac{a-x}{m}=\dfrac{b-x}{n} \Leftrightarrow na-nx=mb-mx$

$$mx-nx=mb-na$$
$$(m-n)x=mb-na$$
$$x=\frac{mb-na}{m-n}$$

➢ករណី $m<n$ និង $a<b$ នោះចំណុច Q ត្រូវតែនៅខាងឆ្វេង B (ព្រោះបើ Q នៅខាងស្តាំ B វានឹងធ្វើឱ្យ $m>n$)

នាំឱ្យ $AQ=a-x$, $QB=b-x$

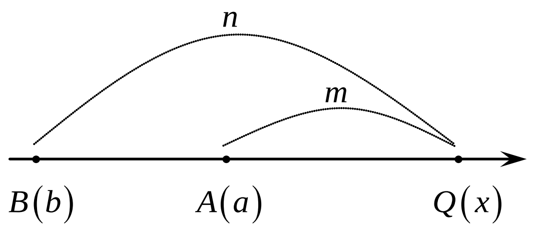


នាំឱ្យ $\dfrac{a-x}{m}=\dfrac{b-x}{n} \Leftrightarrow na-nx=mb-mx$

$$mx-nx=mb-na$$
$$(m-n)x=mb-na$$
$$x=\frac{mb-na}{m-n}$$

➢ករណី $m<n$ និង $a>b$ នោះចំណុច Q ត្រូវតែនៅខាងឆ្វេង B (ព្រោះបើ Q នៅខាងស្តាំ B វានឹងធ្វើឱ្យ $m>n$)

នាំឱ្យ $AQ=x-a$, $QB=x-b$



នាំឱ្យ $\dfrac{x-a}{m}=\dfrac{x-b}{n} \Leftrightarrow nx-na=mx-mb$

$$mx-nx=mb-na$$
$$(m-n)x=mb-na$$
$$x=\frac{mb-na}{m-n}$$

ដូចនេះ

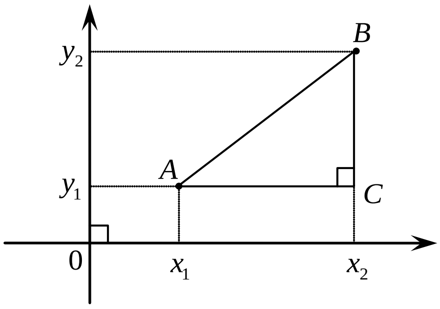
បើចំណុច $Q(x)$ ចែកអង្កត់ AB ខាងក្រៅតាមផលធៀប $m:n$ នោះ $x=\dfrac{mb-na}{m-n}$

។

4. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច A និង B គឺ $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$**

គេមាន ពីរចំណុច $A(x_1\ ,\ y_1)$ និង $B(x_2\ ,\ y_2)$

គេអាច បង្កើតបានត្រីកោណកែង ABC កែងត្រង់ C ដែល C ជាប្រសព្វរវាងអង្កត់ដេកគូសចេញពី A និងអង្កត់ឈរគូសចេញពី B



តាមរយៈ ទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ ចំពោះត្រីកោណកែង ABC កែងត្រង់ C

គេបាន $AB^2=AC^2+BC^2$ ឬ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$

ដោយ $AC=|x_2-x_1| \Rightarrow AC^2=(|x_2-x_1|)^2=(x_2-x_1)^2$

$BC=|y_2-y_1| \Rightarrow BC^2=(|y_2-y_1|)^2=(y_2-y_1)^2$

នាំឱ្យ $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

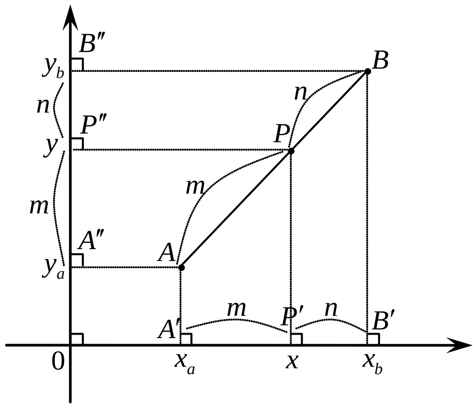
ដូចនេះ: ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច A និង B គឺ $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

5. **ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើចំណុច $P(x\ ,\ y)$ ចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុងតាមផលធៀប $m:n$ នោះ $P\left(\dfrac{mx_b+nx_a}{m+n}\ ,\ \dfrac{my_b+ny_a}{m+n}\right)$**

គេមាន $A(x_a\ ,\ y_a)$ និង $B(x_b\ ,\ y_b)$ ជាពីរចំណុចក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ

គេគូស $AA'\ ,\ PP'\ ,\ BB'$ កែងនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសរៀងគ្នាត្រង់ $A'\ ,\ P'\ ,\ B'$

គេបាន P' ក៏ជាចំណុចចែកក្នុងនៃ $A'B'$ តាមផលធៀប $m:n$ ដែរ (ព្រោះតាមទ្រឹស្តីបទតាលែស បើបន្ទាត់ស្របគ្នាកាត់ដោយខ្នាត់ពីរ នោះគេបានអង្កត់សមាមាត្រគ្នា)



នាំឱ្យ $\dfrac{A'P'}{m}=\dfrac{P'B'}{n}$ ដោយ $A'P'=x-x_a\ ,\ P'B'=x_b-x$

គេបាន $\dfrac{x-x_a}{m}=\dfrac{x_b-x}{n} \Leftrightarrow nx-nx_a=mx_b-mx$

$$mx+nx=mx_b+nx_a \Rightarrow x=\frac{mx_b+nx_a}{m+n}$$

ម្យ៉ាងទៀត គេគូស $AA''\ ,\ PP''\ ,\ BB''$ កែងនឹងអ័ក្សអរដោនេរៀងគ្នាត្រង់ $A''\ ,\ P''\ ,\ B''$

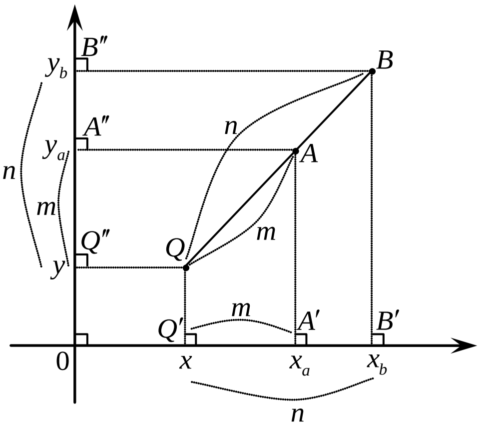
គេបាន P'' ក៏ជាចំណុចចែកក្នុងនៃ $A''B''$ តាមផលធៀប $m:n$ ដែរ (ព្រោះតាមទ្រឹស្តីបទតាលែស ដូចបានបញ្ជាក់ខាងលើ)

នាំឱ្យ $\dfrac{A''P''}{m}=\dfrac{P''B''}{n}$ ដោយ $A''P''=y-y_a\ ,\ P''B''=y_b-y$

គេបាន $\dfrac{y-y_a}{m}=\dfrac{y_b-y}{n} \Leftrightarrow ny-ny_a=my_b-my \Leftrightarrow my+ny=my_b+ny_a \Rightarrow y=\dfrac{my_b+ny_a}{m+n}$

ដូចនេះ: បើចំណុច $P(x\ ,\ y)$ ចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុងតាមផលធៀប $m:n$ នោះ $P\left(\dfrac{mx_b+nx_a}{m+n}\ ,\ \dfrac{my_b+ny_a}{m+n}\right)$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើចំណុច $Q(x\,,\,y)$ ចែកអង្កត់ AB ខាងក្រៅតាមផលធៀប $m:n$ នោះ $Q\left(\dfrac{mx_b-nx_a}{m-n}\,,\,\dfrac{my_b-ny_a}{m-n}\right)$



គេមាន $A(x_a\,,\,y_a)$ និង $B(x_b\,,\,y_b)$ ជាពីរចំណុចក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ

គេគូស $QQ'\,,\,AA'\,,\,BB'$ កែងនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសរៀងគ្នាត្រង់ $Q'\,,\,A',\,B'$

គេបាន Q' ក៏ជាចំណុចចែកក្រៅនៃ $A'B'$ តាមផលធៀប $m:n$ ដែរ (ព្រោះតាមទ្រឹស្តីបទតាលែស បើបន្ទាត់ស្របគ្នា កាត់ដោយខ្នាត់ពីរ នោះគេបានអង្កត់សមាមាត្រគ្នា)

នាំឱ្យ $\dfrac{A'Q'}{m}=\dfrac{Q'B'}{n}$ ដោយ $A'Q'=x_a-x\ ,\ Q'B'=x_b-x$

គេបាន $\dfrac{x_a-x}{m}=\dfrac{x_b-x}{n}\ \Leftrightarrow\ nx_a-nx=mx_b-mx$

$$mx-nx=mx_b-nx_a\ \Rightarrow\ x=\frac{mx_b-nx_a}{m-n}$$

ម្យ៉ាងទៀត គេគូស $QQ''\,,\,AA''\,,\,BB''$ កែងនឹងអ័ក្សអរដោនេរៀងគ្នាត្រង់ $Q''\,,\,A''\,,\,B''$

គេបាន Q'' ក៏ជាចំណុចចែកក្រៅនៃ $A''B''$ តាមផលធៀប $m:n$ ដែរ (ព្រោះតាមទ្រឹស្តីបទតាលែស)

នាំឱ្យ $\dfrac{A''Q''}{m}=\dfrac{Q''B''}{n}$ ដោយ $A''Q''=y_a-y\ ,\ Q''B''=y_b-y$

គេបាន $\dfrac{y_a-y}{m}=\dfrac{y_b-y}{n}\ \Leftrightarrow\ ny_a-ny=my_b-my\ \Leftrightarrow\ my-ny=my_b-ny_a\ \Rightarrow\ y=\dfrac{my_b-ny_a}{m-n}$

ដូចនេះ:

បើចំណុច $Q(x\,,\,y)$ ចែកអង្កត់ AB ខាងក្រៅតាមផលធៀប $m:n$ នោះ $Q\left(\dfrac{mx_b-nx_a}{m-n}\,,\,\dfrac{my_b-ny_a}{m-n}\right)$

។

6. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $A(x_1\,,\,y_1)$ និងមានមេគុណប្រាប់ទិស m គឺ $y-y_1=m(x-x_1)$**

គេមាន បន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $A(x_1\,,\,y_1)$

ដោយ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់មួយ ជាផលធៀបរវាង បម្រែបម្រួល y និងបម្រែបម្រួល x

គេបាន គ្រប់ចំណុច $M(x\,,\,y)$ នៃបន្ទាត់ L ផ្សេងពីចំណុច $A(x_1\,,\,y_1)$ នោះ ៖

មេគុណប្រាប់ទិស m នៃបន្ទាត់ L កំណត់ដោយ $m=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$ (គេអាចសរសេរ $m=\dfrac{y_1-y}{x_1-x}$ ក៏បាន)

ទាញបាន $y-y_1=m(x-x_1)$ ដែលគេហៅថា សមីការនៃបន្ទាត់

ដូចនេះ:

សមីការបន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $A(x_1\,,\,y_1)$ និងមានមេគុណប្រាប់ទិស m គឺ $y-y_1=m(x-x_1)$

។

7. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុច $A(x_1,\,y_1)$ និង $B(x_2,\,y_2)$ គឺ $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ ដែល $x_1\neq x_2$**

គេមាន សមីការបន្ទាត់កាត់តាម $A(x_1,\,y_1)$ និងមានមេគុណប្រាប់ទិស m គឺ $y-y_1=m(x-x_1)$ (1)

ដោយ បន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុច $A(x_1,\,y_1)$ និង $B(x_2,\,y_2)$ នោះបន្ទាត់មានមេគុណប្រាប់ទិស $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (2)

គេយក (2) ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

ដូចនេះ:

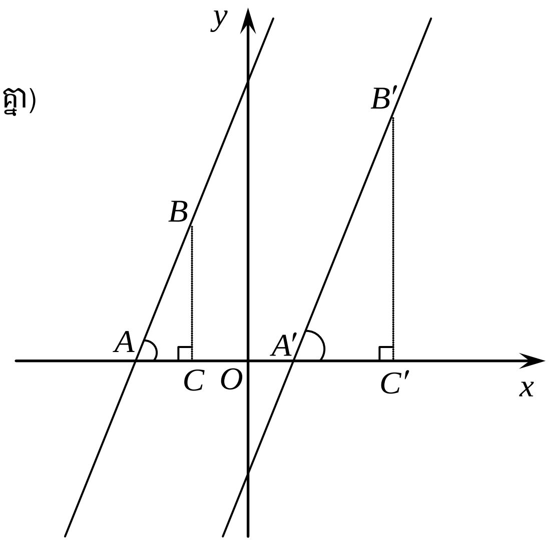
បន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុច $A(x_1,\,y_1)$ និង $B(x_2,\,y_2)$ គឺ $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ ដែល $x_1\neq x_2$

។

8. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ពីរស្របគ្នា លុះត្រាតែវាមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើគ្នា**

គេតាង $D : y = mx + n$ និង $D' : y = m'x + n'$ ជាបន្ទាត់ស្របគ្នា

គេនឹងបង្ហាញថា បើ $D // D' \Leftrightarrow m = m'$ (មានន័យថា មេគុណប្រាប់ទិសស្មើគ្នា)



- គេតាង A ជាប្រសព្វរវាង D និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស និង B ជាចំណុច នៅលើ D ហើយ C ជាចំណោលកែងនៃ B លើអ័ក្សអាប់ស៊ីស នោះ

គេបានមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ D គឺ $m = \dfrac{BC}{AC}$ ។

- គេតាង A' ជាប្រសព្វរវាង D' និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស និង B' ជាចំណុច នៅលើ D' ហើយ C' ជាចំណោលកែងនៃ B' លើអ័ក្សអាប់ស៊ីស នោះ

គេបានមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ D' គឺ $m' = \dfrac{B'C'}{A'C'}$ ។

- ដោយ ΔABC និង $\Delta A'B'C'$ ជាត្រីកោណកែងដែលមាន $\angle A = \angle A'$ (ជាមុំត្រូវគ្នាព្រោះ $D // D'$)

នាំឱ្យ $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (តាមលក្ខខណ្ឌដំណូច ម.ម)

វិបាក $\sim \left.\begin{matrix}\Delta ABC \\ \Delta A'B'C'\end{matrix}\right| \Rightarrow \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AB}{A'B'} \Leftrightarrow \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{B'C'}{A'B'}$ នាំឱ្យ $m = m'$

ដូចនេះ: | បន្ទាត់ពីរស្របគ្នា លុះត្រាតែវាមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើគ្នា ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

9. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ពីរកែងគ្នា លុះត្រាតែផលគុណមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ទាំងពីរស្មើ -1**

គេតាង $D_1 : y = mx + n$ និង $D_2 : y = m'x + n'$ ជាបន្ទាត់កែងគ្នា

គេនឹងបង្ហាញថា បើ $D_1 \perp D_2 \Leftrightarrow m \times m' = -1$ (មានន័យថា ផលគុណមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ -1)

សង់បន្ទាត់ $D_3 : y = mx$ និង $D_4 : y = m'x$

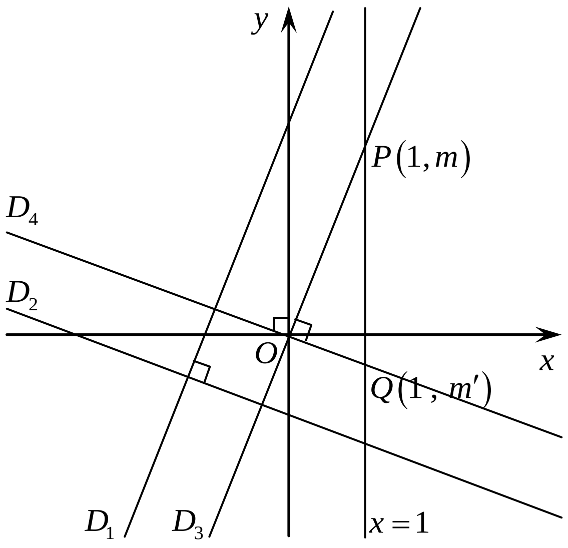
គេតាង P និង Q ជាចំណុចប្រសព្វរៀងគ្នា $x = 1$ និង D_3 , D_4

គេបាន កូអរដោនេ $P(1, m)$ និង $Q(1, m')$

ដោយ $D_1 \perp D_2$ នោះ $D_3 \perp D_4$ (ព្រោះ $D_1 \parallel D_3$, $D_2 \parallel D_4$)

នាំឱ្យ POQ ជាត្រីកោណកែង ត្រង់ O

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ $PQ^2 = OP^2 + OQ^2$



ដោយ $PQ^2 = (1-1)^2 + (m'-m)^2 = m'^2 - 2mm' + m^2$

$OP^2 = (1-0)^2 + (m-0)^2 = 1 + m^2$

$OQ^2 = (1-0)^2 + (m'-0)^2 = 1 + m'^2$

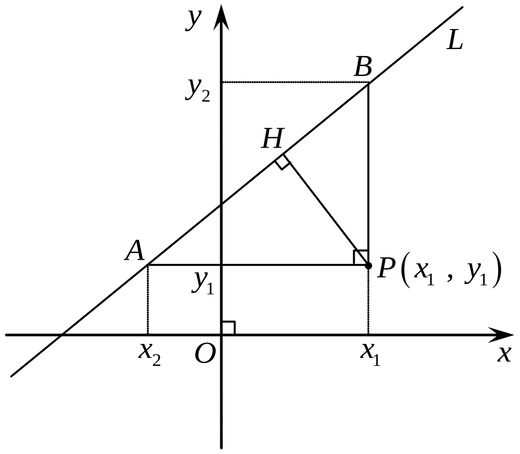
គេបាន $m'^2 - 2mm' + m^2 = 1 + m^2 + 1 + m'^2$

$-2mm' = 2$

$mm' = -1$

ដូចនេះ: | បន្ទាត់ពីរកែងគ្នា លុះត្រាតែផលគុណមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ទាំងពីរស្មើ -1 ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

10. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្ងាយ d រវាងចំណុច $P(x_1\ ,\ y_1)$ និងបន្ទាត់ $L:\ ax+by+c=0$ គឺ $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$**



គេមាន ចំណុច $P(x_1\ ,\ y_1)$ និងបន្ទាត់ $L:\ ax+by+c=0$

គេសន្មត់ថា $a\neq 0$ និង $b\neq 0$

គេគូស PA ស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស កាត់ L ត្រង់ A

PB ស្របអ័ក្សអរដោនេ កាត់ L ត្រង់ B

គេបាន កូអរដោនេ $A(x_2\ ,\ y_1)$ និង $B(x_1, y_2)$

គេតាង H ជាចំណោលកែងនៃ P លើបន្ទាត់ L

នាំឱ្យ APB ជាត្រីកោណកែងត្រង់ P និងមានកម្ពស់ PH

យើងចង់គណនាចម្ងាយពី P ទៅ L គឺចង់គណនា $PH=???$

ដោយ $P(x_1\ ,\ y_1)\notin L$ មានន័យថា $ax_1+by_1+c\neq 0$

គេតាងបាន $ax_1+by_1+c=k \quad (1)$ ដែល $k\neq 0$

ហើយ $A(x_2\ ,\ y_1)\in L$ នោះ $ax_2+by_1+c=0 \quad (2)$

$B(x_1,\ y_2)\in L$ នោះ $ax_1+by_2+c=0 \quad (3)$

គេយក $(1)-(2):\ ax_1-ax_2=k \ \Rightarrow\ x_1-x_2=\dfrac{k}{a}$

$(1)-(3):\ by_1-by_2=k \ \Rightarrow\ y_1-y_2=\dfrac{k}{b}$

ម្យ៉ាងទៀត $PA^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_1)^2=(x_1-x_2)^2$

$PB^2=(x_1-x_1)^2+(y_1-y_2)^2=(y_1-y_2)^2$

$AB^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

តាមរយៈ លក្ខណៈនៃត្រីកោណកែង $PH\cdot AB=PA\cdot PB$ ទាញបាន $PH=\dfrac{PA\cdot PB}{AB}$

នាំឱ្យ $$PH^2=\frac{PA^2\cdot PB^2}{AB^2}=\frac{(x_1-x_2)^2\cdot(y_1-y_2)^2}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\frac{\left(\frac{k}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{k}{b}\right)^2}{\left(\frac{k}{a}\right)^2+\left(\frac{k}{b}\right)^2}=\frac{\frac{k^2}{a^2}\cdot\frac{k^2}{b^2}}{\frac{k^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}}=\frac{\frac{k^4}{a^2b^2}}{\frac{k^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}}=\frac{k^2}{a^2+b^2}$$

ទាញបាន $$PH=\sqrt{\frac{k^2}{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{k^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

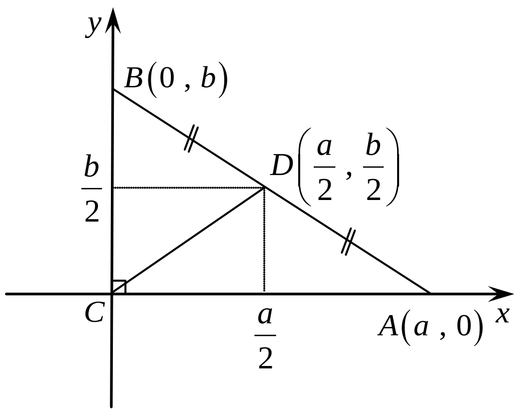
គេតាង $d=PH$ (ព្រោះ $d=\text{distance}=$ ចម្ងាយ) ត្រូវនឹងចម្ងាយពីចំណុចទៅបន្ទាត់ នោះ $d=PH=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ដូចនេះ

ចម្ងាយ d រវាងចំណុច $P(x_1\ ,\ y_1)$ និងបន្ទាត់ $L:\ ax+by+c=0$ គឺ $d=\dfrac{\lvert ax_1+by_1+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$

។

11. **ក. បង្ហាញថា មេដ្យានដែលគូសចេញពីកំពូលនៃមុំកែងស្មើនឹងពាក់កណ្តាលអ៊ីប៉ូតេនុស**



គេយក ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C ដែល C ជាគល់តម្រុយ

គេតាង $A(a\,,0)$ ជាចំណុចនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

$B(0\,,b)$ ជាចំណុចនៅលើអ័ក្សអរដោនេ

$D\left(\frac{a}{2}\,,\frac{b}{2}\right)$ ជាចំណុចកណ្តាលនៃ AB

គេបាន $AB=\sqrt{(0-a)^2+(b-0)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

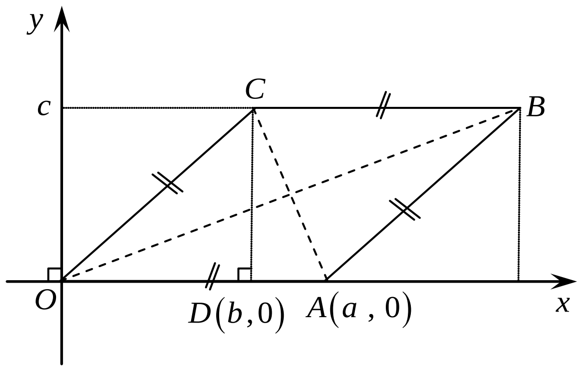
$AD=\frac{1}{2}AB$

$CD=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+\left(\frac{b}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}=\frac{1}{2}AB$

នាំឱ្យ $AD=CD=\frac{1}{2}AB$ មានន័យថា CD ជាមេដ្យានគូសចេញពីមុំកែង ស្មើពាក់កណ្តាលអ៊ីប៉ូតេនុស AB

ដូចនេះ | មេដ្យានដែលគូសចេញពីកំពូលនៃមុំកែងស្មើនឹងពាក់កណ្តាលអ៊ីប៉ូតេនុស ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

ខ. បង្ហាញថា អង្កត់ទ្រូងនៃចតុកោណស្មើកែងគ្នា



គេយក $OABC$ ជាចតុកោណស្មើមាន O ជាគល់តម្រុយ

$A(a,0)$ ត្រួតលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

$D(b,0)$ ជាចំណោលកែងនៃ C លើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

គេនឹងបង្ហាញថា $(CA)\perp(OB)$??? (អង្កត់ទ្រូងកែងគ្នា)

គេតាង m ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃ (CA)

នាំឱ្យ $m=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{c-0}{b-a}=-\frac{c}{a-b}$

គេតាង m' ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃ (OB)

នាំឱ្យ $m'=\frac{y_B-y_0}{x_B-x_0}=\frac{c-0}{(a+b)-0}=\frac{c}{a+b}$

នាំឱ្យ $m\times m'=\left(-\frac{c}{a-b}\right)\times\left(\frac{c}{a+b}\right)=\frac{-c^2}{a^2-b^2}$

ដោយ ក្នុងត្រីកោណ ODC កែងត្រង់ D មាន $OC^2=OD^2+CD^2$

អាចសរសេរបានថា $a^2=b^2+c^2$ នោះ $c^2=a^2-b^2$

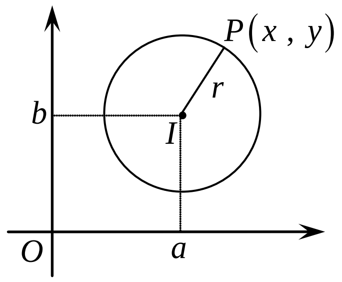
គេបាន $m\times m'=\frac{-(a^2-b^2)}{a^2-b^2}=-1$ ជាផលគុណមេគុណប្រាប់ទិសនៃ អង្កត់ទ្រូង CA និង OB នាំឱ្យ $(CA)\perp(OB)$

ដូចនេះ | អង្កត់ទ្រូងនៃចតុកោណស្មើកែងគ្នា ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

12\. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្តង់ដានៃរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $I(a\ ,b)$ និងកាំ r គឺ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

គេតាង $P(x\ ,y)$ ជាចំណុចនៅលើរង្វង់ គេបាន $IP=r$ ឬ $IP^2=r^2$

ចម្ងាយពី I ទៅ P កំណត់ដោយ $IP=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$



នាំឱ្យ $IP^2=(x-a)^2+(y-b)^2$

គេបាន $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

ដូចនេះ

សមីការស្តង់ដារង្វង់មានផ្ចិត $I(a\ ,b)$ និងកាំ r គឺ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការទូទៅនៃរង្វង់មានរាង $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ ដែល $A\ ,B\ ,C$ ជាចំនួនថេរ

គេមាន សមីការស្តង់ដានៃរង្វង់គឺ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

គេបាន $x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2$

$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$

បើតាង $A=-2a\ ,\ B=-2b\ ,\ C=a^2+b^2-r^2$

នោះគេបាន $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

ដូចនេះ

សមីការទូទៅនៃរង្វង់មានរាង $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ ដែល $A\ ,B\ ,C$ ជាចំនួនថេរ

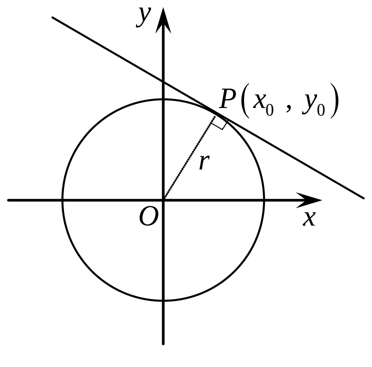
។

13\. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ $x^2+y^2=r^2$ ត្រង់ចំណុច $(x_0\ ,\ y_0)$ គឺ $x_0x+y_0y=r^2$

គេមាន សមីការរង្វង់ $x^2+y^2=r^2$ (ធ្វើដេរីវេធៀបនឹង x លើអង្គទាំងពីរ)

$2x+2y'y=0 \Rightarrow y'=-\frac{x}{y}$ ឬ $y'(x_0)=-\frac{x_0}{y_0}$

ដោយ សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង



$y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)+y_0$

$=\frac{-x_0x+x_0^2}{y_0}+y_0$

$=\frac{-x_0x+x_0^2+y_0^2}{y_0}$

នាំឱ្យ $y_0y=-x_0x+x_0^2+y_0^2$ ឬ $x_0x+y_0y=x_0^2+y_0^2$

ដោយ $P(x_0\ ,\ y_0)$ ជាចំណុចនៅលើរង្វង់ នោះវាផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_0^2+y_0^2=r^2$

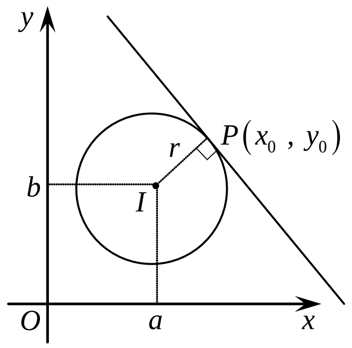
ដូចនេះ

សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ $x^2+y^2=r^2$ ត្រង់ចំណុច $(x_0\ ,\ y_0)$ គឺ $x_0x+y_0y=r^2$

។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

ត្រង់ចំណុច $(x_0\ ,\ y_0)$ គឺ $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$



គេមាន $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ (ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរធៀបនឹង x)

គេបាន $2(x-a)+2y'(y-b)=0$ ឬ $y'=-\dfrac{x-a}{y-b}$ ឬ $y'(x_0)=-\dfrac{x_0-a}{y_0-b}$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$$y=-\frac{x_0-a}{y_0-b}(x-x_0)+y_0$$

$$(y_0-b)(y-y_0)=-(x_0-a)(x-x_0)$$

$$(x_0-a)(x-a+a-x_0)+(y_0-b)(y-b+b-y_0)=0$$

$$(x_0-a)(x-a)-(x_0-a)^2+(y_0-b)(y-b)-(y_0-b)^2=0$$

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2$$

ដោយ $P(x_0\ ,\ y_0)$ ជាចំណុចនៅលើរង្វង់ នោះវាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់អាចសរសេរ $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន អនុគមន៍

1. គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើចន្លោះ $[a,b]$ដែល $\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$ ជាកំណើនអនុគមន៍ និង $\Delta x = x_2 - x_1$ ជាកំណើនអថេរ ៖

   ក. បង្ហាញថា បើ $\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើន លើចន្លោះ $[a,b]$ ។

   ខ. បង្ហាញថា បើ $\frac{\Delta f}{\Delta x} < 0$ នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះ លើចន្លោះ $[a,b]$ ។

2. បង្ហាញថា $g(x) = \frac{x-1}{3}$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $f(x) = 3x+1$ ។

3. បង្ហាញថា ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ និងក្រាបនៃអនុគមន៍ច្រាសរបស់វា $y = f^{-1}(x)$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ។

4. ក. បង្ហាញថា ប៉ារ៉ាបូល $y = ax^2 + bx + c$ អាចសរសេរជារាង $y = a(x-p)^2 + q$ ដែល p និង q ត្រូវកំណត់ ។

   ខ. បង្ហាញថា ប៉ារ៉ាបូលនេះមានកំពូល $S(p\,,\,q)$ និងអ័ក្សឆ្លុះមានសមីការ $p = -\frac{b}{2a}$ ។

5. គេឱ្យអនុគមន៍ដឺក្រេទី២ ៖ $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ។

   ក. បង្ហាញថា បើ $a > 0$ នោះអនុគមន៍មានតម្លៃ អប្បបរមា ស្មើ $y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ ត្រង់ $x = -\frac{b}{2a}$ និងគ្មានអតិបរមាទេ ។

   ខ. បង្ហាញថា បើ $a < 0$ នោះអនុគមន៍មានតម្លៃ អតិបរមា ស្មើ $y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ ត្រង់ $x = -\frac{b}{2a}$ និងគ្មានអប្បបរមា ទេ ។

6. បង្ហាញថា ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \sqrt{x}$ ឆ្លុះនឹងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = x^2$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ដែលត្រូវនឹង $x \geq 0$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន អនុគមន៍

1. **គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើចន្លោះ $[a,b]$ ៖**

ក. បង្ហាញថា បើ $\frac{\Delta f}{\Delta x}>0$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើន លើចន្លោះ $[a,b]$

គេដឹងថា ចំពោះគ្រប់ $x_2>x_1$ ដែល x_1 និង x_2 នៅលើចន្លោះ $[a,b]$ នោះគេបាន ៖

បើ $f(x_2)>f(x_1)$ គេថា f ជាអនុគមន៍កើន

បើ $f(x_2)<f(x_1)$ គេថា f ជាអនុគមន៍ចុះ

គេមាន $\Delta f=f(x_2)-f(x_1)$ និង $\Delta x=x_2-x_1$

ចំពោះ $x_2>x_1$ ដែល x_1 និង x_2 នៅលើចន្លោះ $[a,b]$ នាំឱ្យ $x_2-x_1>0$

គេបាន $\frac{\Delta f}{\Delta x}>0$ សមមូល $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$ (គុណអង្គទាំងពីរនឹង x_2-x_1 មិនប្តូរទិសដៅ)

$f(x_2)-f(x_1)>0$ នាំឱ្យ $f(x_2)>f(x_1)$

ឃើញថា $f(x_2)>f(x_1)$ នេះបញ្ជាក់ថា f ជាអនុគមន៍កើន លើចន្លោះ $[a,b]$

ដូចនេះ | បើ $\frac{\Delta f}{\Delta x}>0$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើន លើចន្លោះ $[a,b]$ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

ខ. បង្ហាញថា បើ $\frac{\Delta f}{\Delta x}<0$ នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះ លើចន្លោះ $[a,b]$

ចំពោះ $x_2<x_1$ ដែល x_1 និង x_2 នៅលើចន្លោះ $[a,b]$ នាំឱ្យ $x_2-x_1<0$

គេបាន $\frac{\Delta f}{\Delta x}<0$ សមមូល $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$ (គុណអង្គទាំងពីរនឹង x_2-x_1 មិនប្តូរទិសដៅ)

$f(x_2)-f(x_1)<0$ នាំឱ្យ $f(x_2)<f(x_1)$

ឃើញថា $f(x_2)>f(x_1)$ នេះបញ្ជាក់ថា f ជាអនុគមន៍ចុះ លើចន្លោះ $[a,b]$

ដូចនេះ | បើ $\frac{\Delta f}{\Delta x}<0$ នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះ លើចន្លោះ $[a,b]$ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

2. **បង្ហាញថា $g(x)=\frac{x-1}{3}$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $f(x)=3x+1$**

គេមានអនុគមន៍ : $f(x)=3x+1$

ប្តូរ $f(x)$ ជា y : $y=3x+1$

ប្តូរ y ជា x និង x ជា y : $x=3y+1$

ទាញរក y : $y=\frac{x-1}{3}$

នាំគេបានអនុគមន៍ច្រាស : $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{3}$

ដូចនេះ | $g(x)=f^{-1}(x)=\frac{x-1}{3}$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $f(x)=3x+1$ | ។

3. **បង្ហាញថា ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ និងក្រាបនៃអនុគមន៍ច្រាសរបស់វា $y=f^{-1}(x)$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$**

គេដឹងថា ចំណុច $M(x\,,y)$ ឆ្លុះគ្នានឹង $M'(x'\,,y')$ ធៀបនឹង បន្ទាត់ $y=x$ កាលណា $x=y'$ និង $y=x'$

តាមនិយមន័យអនុគមន៍ច្រាស : បើ f^{-1} ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ f នោះគេបាន $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

គេតាង $P(a\,,b)$ ជាចំណុចនៅលើក្រាបនៃអនុគមន៍ f នោះគេបាន $f(a)=b$

ដោយ f^{-1} ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃ f នោះគេបាន $f^{-1}(b)=a$ នេះបញ្ជាក់ថា ចំណុច $P'(b\,,a)$ នៅលើក្រាបនៃ f^{-1}

គេសង្កេត ឃើញថា $P(a\,,b)$ ជាចំណុចនៃ f និង $P'(b\,,a)$ ជាចំណុចនៃ f^{-1}

តាមនិយមន័យអនុគមន៍ច្រាស គេបាន $P'(b\,,a)$ ជាចំណុចឆ្លុះនៃ $P(a\,,b)$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$

ដោយ ក្រាបនៃអនុគមន៍ f និង f^{-1} មានគូៗចំណុច $P(a\,,b)$ និង $P'(b\,,a)$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$

នាំឱ្យ ក្រាបនៃអនុគមន៍ f និង f^{-1} ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$

ដូចនេះ | ក្រាបនៃអនុគមន៍ f និង f^{-1} ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ពុះទី១ $y=x$ | ។

4. **ក. បង្ហាញថា ប៉ារ៉ាបូល $y=ax^2+bx+c$ អាចសរសេរជារាង $y=a(x-p)^2+q$ ដែល p និង q ត្រូវកំណត់**

គេមាន $y=ax^2+bx+c$

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$

$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c$$

$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$=a\left[x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2+\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

ផ្ទឹមនឹង $y=a(x-p)^2+q$

ទាញបាន $p=-\dfrac{b}{2a}\ ,\ q=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

ដូចនេះ

សមីការ $y=ax^2+bx+c$ អាចសរសេរជារាង $y=a(x-p)^2+q$ បានគឺ

$$y=a\left[x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2+\left(-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$ ដែលកំណត់បាន $p=-\dfrac{b}{2a}\ ,\ q=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ ។

ខ. បង្ហាញថា ប៉ារ៉ាបូលនេះមានកំពូល $S(p\,,\,q)$ និងអ័ក្សឆ្លុះមានសមីការ $p=-\dfrac{b}{2a}$

គេដឹងថា $y=ax^2$ ជាប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល $O(0\,,\,0)$

ដោយ ប៉ារ៉ាបូល $y=a(x-p)^2+q$ បានពីរំកិល ប៉ារ៉ាបូល $y=ax^2$ ចំនួន p ឯកតាស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស និង q ឯកតាស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ

នាំឱ្យ កំពូលនៃប៉ារ៉ាបូល $y=a(x-p)^2+q$ បានពីរំកិលកំពូល $O(0\,,\,0)$ នៃប៉ារ៉ាបូល $y=ax^2$ ចំនួន p ឯកតាស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស និង q ឯកតា ស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ

គេបាន កំពូលនៃប៉ារ៉ាបូល $y=a(x-p)^2+q$ គឺ $S(p\,,\,q)$

ដូចនេះ

ប៉ារ៉ាបូល $y=a(x-p)^2+q$ មានកំពូល $S(p\,,\,q)$ ត្រូវបានបង្ហាញ

។

✓**សម្គាល់ : ប៉ារ៉ាបូល $y=ax^2+bx+c$ មានកំពូល $S(p\,,\,q)=\left(-\dfrac{b}{2a}\,,\,-\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$!!!!**

ម្យ៉ាងទៀត ប៉ារ៉ាបូល $y=ax^2$ មានអ័ក្សឆ្លុះ $x=0$

នាំឱ្យ អ័ក្សឆ្លុះនៃ $y=a(x-p)^2+q$ គឺបានពីរំកិលអ័ក្សឆ្លុះ $x=0$ ចំនួន p ឯកតាស្រប់នឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

គេបាន ប៉ារ៉ាបូល $y=a(x-p)^2+q$ មានអ័ក្សឆ្លុះ $x=p$ ដែល $p=-\dfrac{b}{2a}$

ដូចនេះ

ប៉ារ៉ាបូល $y=a(x-p)^2+q$ មានអ័ក្សឆ្លុះ $x=-\dfrac{b}{2a}$ ត្រូវបានបង្ហាញ

។

5. **ក. បង្ហាញថា បើ $a>0$ នោះអនុគមន៍មានតម្លៃ អប្បបរមា ស្មើ $y=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ ត្រង់ $x=-\dfrac{b}{2a}$ និងគ្មានអតិបរមាទេ**

គេមាន
$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$
$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+c$$
$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

ដោយ $a>0$ និង $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\ge 0$ នាំឱ្យ $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\ge 0$ នោះ $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}\ge-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

មានន័យថា y មានតម្លៃតូចបំផុត គឺ $y=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ កាលណា $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0\Rightarrow x=-\dfrac{b}{2a}$

ម្យ៉ាងទៀត $y\ge-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ គឺមិនអាចកំណត់តម្លៃធំបំផុតនៃ y បានទេ នោះ y គ្មានតម្លៃអតិបរមាទេ

ដូចនេះ

អនុគមន៍ $y=ax^2+bx+c$ មានតម្លៃ អប្បបរមា $y=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ ត្រង់ $x=-\dfrac{b}{2a}$ និងគ្មានអតិបរមាទេ

។

ខ. បង្ហាញថា បើ $a<0$ នោះអនុគមន៍មានតម្លៃ អតិបរមា ស្មើ $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ ត្រង់ $x=-\frac{b}{2a}$ និងគ្មានអប្បបរមា ទេ

គេមាន $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ (បានស្រាយរួចខាងលើ)

ដោយ $a<0$ និង $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ នាំឱ្យ $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\leq 0$

នោះ $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}\leq -\frac{b^2-4ac}{4a}$

មានន័យថា y មានតម្លៃធំបំផុត គឺ $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ កាលណា $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{2a}$

ម្យ៉ាងទៀត $y\leq -\frac{b^2-4ac}{4a}$ គឺមិនអាចកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ y បានទេ នោះ y គ្មានតម្លៃអប្បបរមាទេ

ដូចនេះ:

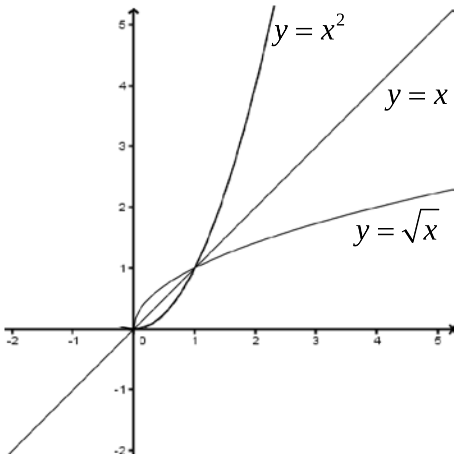
អនុគមន៍ $y=ax^2+bx+c$ មានតម្លៃ អតិបរមា $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$ ត្រង់ $x=-\frac{b}{2a}$ និងគ្មានអប្បបរមាទេ

។

6. បង្ហាញថា ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sqrt{x}$ ឆ្លុះនឹងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=x^2$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ដែលត្រូវនឹង $x\geq 0$

គេមាន អនុគមន៍ $y=\sqrt{x}$ និង $y=x^2$

បើក្រាបនៃ អនុគមន៍ $y=\sqrt{x}$ និង $y=x^2$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ដែលត្រូវនឹង $x\geq 0$ លុះត្រាតែ អនុគមន៍ $y=\sqrt{x}$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ $y=x^2$



ពិនិត្យអនុគមន៍ : $y=\sqrt{x}$

ប្តូរ y ជា x និង x ជា y : $x=\sqrt{y}$

ទាញរក y : $y=x^2$

ដូចនេះ:

ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\sqrt{x}$ ឆ្លុះនឹងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=x^2$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ដែលត្រូវនឹង $x\geq 0$

។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ផលធៀបត្រីកោណមាត្រ

1. ចូរបង្ហាញទំនាក់ទំនងខាងក្រោម ៖

ក. $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$ និង $\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}$ ។

ខ. $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ និង $\tan A\times\cot A=1$ ។

គ. $1+\tan^2 A=\dfrac{1}{\cos^2 A}$ និង $1+\cot^2 A=\dfrac{1}{\sin^2 A}$ ។

2. បង្ហាញថា ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ ដែលមានមុំ θ នោះគេបាន $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ។

3. ស្រាយបញ្ជាក់ផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំខាងក្រោម ៖

ក. $\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$ $\quad\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad\cot 30^\circ=\sqrt{3}$

ខ. $\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$ $\quad\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ $\quad\cot 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

គ. $\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\tan 45^\circ=1$ $\quad\cot 45^\circ=1$

4. ក្នុងត្រីកោណ ABC មានមុំកែងត្រង់ C ។ បង្ហាញថា ៖

$\sin(90^\circ-A)=\cos A$ $\quad\cos(90^\circ-A)=\sin A$ $\quad\tan(90^\circ-A)=\cot A$ $\quad\cot(90^\circ-A)=\tan A$ ។

5. ដោយប្រើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ បង្ហាញថា ៖

$\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$ $\quad\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ $\quad\tan(180^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$ $\quad\cot(180^\circ-\alpha)=-\cot\alpha$ ។

6. ដោយប្រើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ បង្ហាញថា ៖

$\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ $\quad\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$ $\quad\tan(90^\circ-\alpha)=\cot\alpha$ $\quad\cot(90^\circ-\alpha)=\tan\alpha$ ។

7. ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស ៖ ចំពោះត្រីកោណ ABC ចារឹកក្នុងរង្វង់កាំ R នោះគេបាន $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ ។

8. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស ៖ ចំពោះត្រីកោណ ABC គេបាន ៖

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ។

9. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ផ្ទៃក្រឡា S នៃត្រីកោណ ABC គឺ ៖ $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ ។

ខ. ទាញបង្ហាញថា $\dfrac{abc}{2S}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{a}{\sin A}$ ។

10. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ a , b , c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ និង p ជាកន្លះបរិមាត្រ នោះគេបានរូបមន្តហេរ៉ុង ផ្ទៃក្រឡា $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ផលធៀបត្រីកោណមាត្រ

1. **បង្ហាញទំនាក់ទំនងខាងក្រោម ៖**

ក. បង្ហាញថា $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$ **និង** $\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}$

និយមន័យ $\sin A$ ជាផលធៀបរវាង ជ្រុងឈម និងអ៊ីប៉ូតេនុស

$\cos A$ ជាផលធៀបរវាង ជ្រុងជាប់ និងអ៊ីប៉ូតេនុស

$\tan A$ ជាផលធៀបរវាង ជ្រុងឈម និងជ្រុងជាប់

$\cot A$ ជាផលធៀបរវាង ជ្រុងជាប់ និងជ្រុងឈម

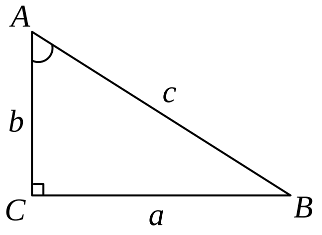
ដោយ $$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\dfrac{\text{ជ្រុងឈម}}{\text{អ៊ីប៉ូតេនុស}}}{\dfrac{\text{ជ្រុងជាប់}}{\text{អ៊ីប៉ូតេនុស}}}=\frac{\text{ជ្រុងឈម}}{\text{អ៊ីប៉ូតេនុស}}\times\frac{\text{អ៊ីប៉ូតេនុស}}{\text{ជ្រុងជាប់}}=\frac{\text{ជ្រុងឈម}}{\text{ជ្រុងជាប់}}=\tan A$$

ហើយ $$\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\dfrac{\text{ជ្រុងជាប់}}{\text{អ៊ីប៉ូតេនុស}}}{\dfrac{\text{ជ្រុងឈម}}{\text{អ៊ីប៉ូតេនុស}}}=\frac{\text{ជ្រុងជាប់}}{\text{អ៊ីប៉ូតេនុស}}\times\frac{\text{អ៊ីប៉ូតេនុស}}{\text{ជ្រុងឈម}}=\frac{\text{ជ្រុងជាប់}}{\text{ជ្រុងឈម}}=\cot A$$

ដូចនេះ: $\boxed{\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}\ \text{និង}\ \cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}\ \text{ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់}}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\sin^2 A+\cos^2 A=1$

ក្នុងត្រីកោណកែង ABC កែងត្រង់ C



គេបាន $\sin A=\dfrac{a}{c}\ \Rightarrow\ a=c\sin A$ និង $\cos A=\dfrac{b}{c}\ \Rightarrow\ b=c\cos A$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ $a^2+b^2=c^2$ ឬ $(c\sin A)^2+(c\cos A)^2=c^2$

នាំឱ្យ $c^2\cdot(\sin A)^2+c^2\cdot(\cos A)^2=c^2$ (ចែកអង្គទាំងពីរនឹង c^2)

$(\sin A)^2+(\cos A)^2=1$ (គេអាចសរសេរ $(\sin A)^2=\sin^2 A$ និង $(\cos A)^2=\cos^2 A$)

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$

ដូចនេះ: $\boxed{\sin^2 A+\cos^2 A=1\ \text{ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់}}$ ។

➤**បង្ហាញថា** $\tan A\times\cot A=1$

គេមាន $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$ និង $\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}$

គេបាន $\tan A\times\cot A=\dfrac{\sin A}{\cos A}\times\dfrac{\cos A}{\sin A}=1$

ដូចនេះ: $\boxed{\tan A\times\cot A=1\ \text{ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់}}$ ។

គ. បង្ហាញថា $1+\tan^2 A=\dfrac{1}{\cos^2 A}$

គេមាន $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ (គេចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^2 A$)

គេបាន $\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}+\dfrac{\cos^2 A}{\cos^2 A}=\dfrac{1}{\cos^2 A}$ ឬ $\tan^2 A+1=\dfrac{1}{\cos^2 A}$

ដូចនេះ $1+\tan^2 A=\dfrac{1}{\cos^2 A}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➢**បង្ហាញថា** $1+\cot^2 A=\dfrac{1}{\sin^2 A}$

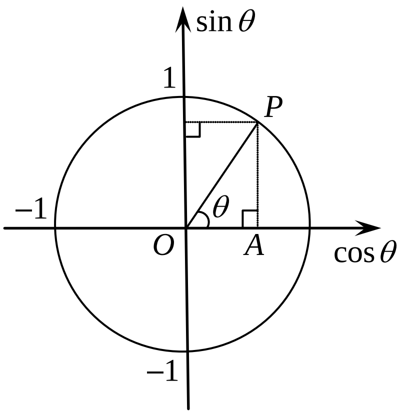
គេមាន $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ (គេចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\sin^2 A$)

គេបាន $\dfrac{\sin^2 A}{\sin^2 A}+\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}=\dfrac{1}{\sin^2 A}$ ឬ $1+\cot^2 A=\dfrac{1}{\sin^2 A}$

ដូចនេះ $1+\cot^2 A=\dfrac{1}{\sin^2 A}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

2. **បង្ហាញថា** $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

តាមរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ (រង្វង់ដែលមានកាំ $r=1$)



ចំពោះ ក្នុងត្រីកោណ OAP កែងត្រង់ A

គេមាន $OA=OP\cdot\cos\theta$ និង $AP=OP\cdot\sin\theta$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ ចំពោះត្រីកោណកែង OAP

គេបាន $OA^2+AP^2=OP^2$

ឬ $(OP\cdot\cos\theta)^2+(OP\cdot\sin\theta)^2=OP^2$

តែ $OP=1$ ជាកាំរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ

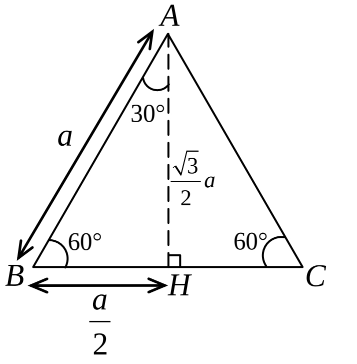
នាំឱ្យ $(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2=1^2$ គេអាចសរសេរ $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

ដូចនេះ $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

3. **ស្រាយបញ្ជាក់ផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំខាងក្រោម ៖**

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$ **និង** $\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

គេមានត្រីកោណសម័ង្ស ABC ដែលមានរង្វាស់ជ្រុងស្មើ a



នោះ ABH ជាត្រីកោណកែងកន្លះសម័ង្ស ដែលមាន $AH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$\sin 30^\circ=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{\frac{1}{2}a}{a}=\dfrac{1}{2}$ និង $\cos 30^\circ=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ដូចនេះ $\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$ និង $\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➢**ស្រាយបញ្ជាក់ថា** $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **និង** $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$

ដោយ $\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

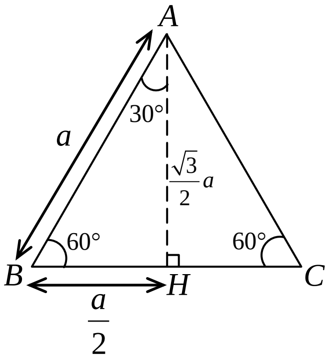
$\cot 30^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1} = \sqrt{3}$

ដូចនេះ: $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ និង $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **និង** $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

គេមានត្រីកោណសម័ង្ស ABC ដែលមានរង្វាស់ជ្រុងស្មើ a

នោះ ABH ជាត្រីកោណកែងកន្លះសម័ង្ស ដែលមាន $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$



$\sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $\cos 60^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2}$

ដូចនេះ: $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➢**ស្រាយបញ្ជាក់ថា** $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ **និង** $\cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ដោយ $\tan 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1} = \sqrt{3}$

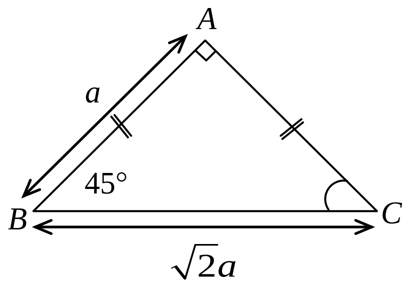
$\cot 60^\circ = \frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ដូចនេះ: $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ និង $\cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

- ✓ តើអ្នកដឹងទេថា បើត្រីកោណសម័ង្សមួយមានរង្វាស់ជ្រុងស្មើ a នោះគេបានកម្ពស់របស់វាមានរង្វាស់ស្មើ $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ។
- ✓ តើអ្នកដឹងទេថា បើការេមួយមានរង្វាស់ជ្រុងស្មើ a នោះគេបានប្រវែងអង្កត់ទ្រូងរបស់វាមានរង្វាស់ស្មើ $\sqrt{2}a$ ។
- ✓ តើអ្នកដឹងទេថា បើគូបមួយមានរង្វាស់ជ្រុងស្មើ a នោះគេបានប្រវែងអង្កត់ទ្រូងរបស់វាមានរង្វាស់ស្មើ $\sqrt{3}a$ ។

✍ គេអាចបកស្រាយ ហេតុផលខាងលើ ដោយប្រើ ទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **និង** $\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



គេមានត្រីកោណកែងសមបាត ABC ដែល $AB = AC = a$ និង $\angle B = 45^\circ$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ឬ $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$

នាំឱ្យ $BC = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$

គេបាន $$\sin 45^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ $\sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ និង $\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

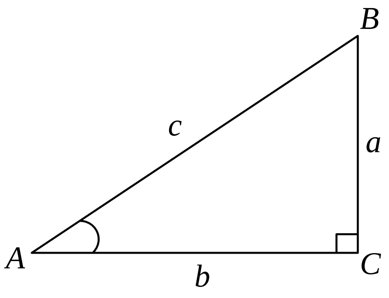
➢**ស្រាយបញ្ជាក់ថា** $\tan 45^\circ = 1$ **និង** $\cot 45^\circ = 1$

ដោយ $$\tan 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 1$$

ដូចនេះ $\tan 45^\circ = 1$ និង $\cot 45^\circ = 1$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

4. **បង្ហាញថា** $\sin(90^\circ - A) = \cos A$ **និង** $\cos(90^\circ - A) = \sin A$



គេមាន ត្រីកោណ ABC មានមុំកែងត្រង់ C នោះ $B = 90^\circ - A$

តាមផលធៀបត្រីកោណមាត្រ គេបាន៖

- $\cos A = \dfrac{b}{c}$, $\sin B = \dfrac{b}{c}$ នោះ $\cos A = \sin B$ ឬ $\cos A = \sin(90^\circ - A)$
- $\sin A = \dfrac{a}{c}$, $\cos B = \dfrac{a}{c}$ នោះ $\sin A = \cos B$ ឬ $\sin A = \cos(90^\circ - A)$

ដូចនេះ $\sin(90^\circ - A) = \cos A$ និង $\cos(90^\circ - A) = \sin A$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

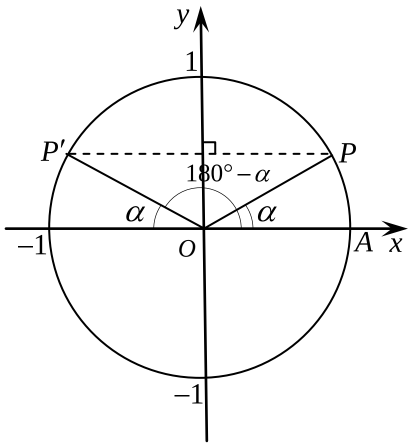
➢ **បង្ហាញថា** $\tan(90^\circ - A) = \cot A$ **និង** $\cot(90^\circ - A) = \tan A$

ដោយ $$\tan(90^\circ - A) = \frac{\sin(90^\circ - A)}{\cos(90^\circ - A)} = \frac{\cos A}{\sin A} = \cot A$$

$$\cos(90^\circ - A) = \frac{\cos(90^\circ - A)}{\sin(90^\circ - A)} = \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A$$

ដូចនេះ $\tan(90^\circ - A) = \cot A$ និង $\cot(90^\circ - A) = \tan A$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

5. **ដោយប្រើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ ៖**



➢**បង្ហាញថា** $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$ **និង** $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$

ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ គេតាង $\angle AOP=\alpha$ និង $\angle AOP'=180°-\alpha$

គេបាន កូអរដោនេនៃចំណុច P និង P' គឺ

$P(\cos\alpha\ ,\sin\alpha)$ និង $P'(\cos(180°-\alpha)\ ,\sin(180°-\alpha))$

ដោយ ចំណុច P និង P' ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្សអរដោនេ

តាមលក្ខណៈឆ្លុះ នោះចំណុចទាំងពីរមាន អាប់ស៊ីសផ្ទុយគ្នា និងអរដោនេដូចគ្នា

គេបាន $\cos\alpha=-\cos(180°-\alpha)$ និង $\sin\alpha=\sin(180°-\alpha)$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$ និង $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

➢**បង្ហាញថា** $\tan(180°-\alpha)=-\tan\alpha$ **និង** $\cot(180°-\alpha)=-\cot\alpha$

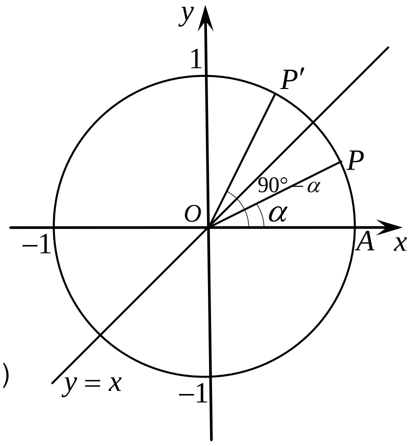
គេមាន រូបមន្ត $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ និង $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$ (បានស្រាយរួចខាងលើ)

គេបាន $$\tan(180°-\alpha)=\frac{\sin(180°-\alpha)}{\cos(180°-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\tan\alpha$$

$$\cot(180°-\alpha)=\frac{\cos(180°-\alpha)}{\sin(180°-\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\cot\alpha$$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\tan(180°-\alpha)=-\tan\alpha$ និង $\cot(180°-\alpha)=-\cot\alpha$ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

6. **ដោយប្រើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ ៖**



➢**បង្ហាញថា** $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$ **និង** $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$

ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ គេតាង $\angle AOP=\alpha$ និង $\angle AOP'=90°-\alpha$

គេបាន កូអរដោនេនៃចំណុច P និង P' គឺ

$P(\cos\alpha\ ,\sin\alpha)$ និង $P'(\cos(90°-\alpha)\ ,\sin(90°-\alpha))$

ដោយ ចំណុច P និង P' ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ពុះទី១ $y=x$

(នោះអាប់ស៊ីសនៃ P ស្មើអរដោនេនៃ P' និង អរដោនេនៃ P ស្មើអាប់ស៊ីសនៃ P')

គេបាន $\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$ និង $\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$ និង $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

➢**បង្ហាញថា** $\tan(90°-\alpha)=\cot\alpha$ **និង** $\cot(90°-\alpha)=\tan\alpha$

គេមាន $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$ និង $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$ (បង្ហាញរួចខាងលើ)

គេបាន $$\tan(90°-\alpha)=\frac{\sin(90°-\alpha)}{\cos(90°-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha$$

$$\cot(90°-\alpha)=\frac{\cos(90°-\alpha)}{\sin(90°-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\tan(90°-\alpha)=\cot\alpha$ និង $\cot(90°-\alpha)=\tan\alpha$ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

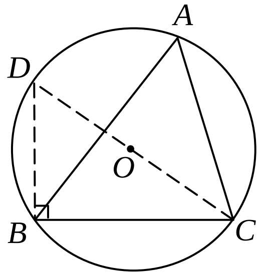
7. **ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស៖** $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

គេមាន ត្រីកោណ ABC ចារឹកក្នុងរង្វង់កាំ R ដែល $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$

គេនឹងស្រាយគ្រប់ករណីនៃមុំ A ដែលនាំឱ្យគេបាន $\dfrac{a}{\sin A}=2R$

ចំពោះត្រីកោណ ABC ចារឹកក្នុងរង្វង់ នោះមុំ A អាចជាមុំស្រួច ឬមុំទាល ឬមុំកែង

➢**ករណី A ជាមុំស្រួច**



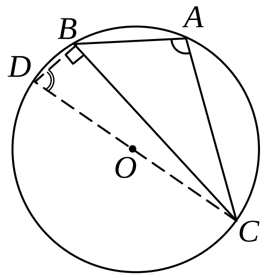
គេគូសអង្កត់ផ្ចិត CD នោះគេបាន ΔBCD ជាត្រីកោណកែងត្រង់ B

គេបាន $\sin D=\dfrac{BC}{CD}$

ដោយ $BC=a$, $CD=2R$ និង $\angle A=\angle D$ (មុំមានធ្នូស្កាត់រួម BC)

នាំឱ្យ $\sin A=\dfrac{a}{2R}$ (1)

➢**ករណី A ជាមុំទាល**



គេគូសអង្កត់ផ្ចិត CD នោះគេបាន ΔBCD ជាត្រីកោណកែងត្រង់ B

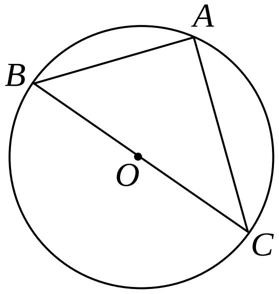
គេបាន $\sin D=\dfrac{BC}{CD}$ ឬ $\sin D=\dfrac{a}{2R}$ ព្រោះ $BC=a$, $CD=2R$

ម្យ៉ាងទៀត ABC ជាត្រីកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ នោះផលបូកមុំឈម $\angle A+\angle D=180^\circ$

នាំឱ្យ $\sin D=\sin(180^\circ-A)=\sin A$ ព្រោះ $\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$

គេបាន $\sin A=\dfrac{a}{2R}$ (2)

➢**ករណី A ជាមុំកែង**



គេមាន $\sin A=\sin 90^\circ=1$

ហើយ $BC=2R$ នោះ $\dfrac{BC}{2R}=1$ ឬ $\dfrac{a}{2R}=1$

នាំឱ្យ $\sin A=\dfrac{a}{2R}$ (3)

តាមរយៈ (1) , (2) និង (3) ឃើញថា គ្រប់ករណីនៃមុំ A គេបាន $\sin A=\dfrac{a}{2R}$ ឬ $\dfrac{a}{\sin A}=2R$

ដូចគ្នាដែរ ស្រាយដូចខាងលើចំពោះមុំ B និង C នោះគេបាន $\dfrac{b}{\sin B}=2R$, $\dfrac{c}{\sin C}=2R$

ដូចនេះ | ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

✓**បញ្ជាក់** -មុំចារឹកដែលមានធ្នូស្កាត់រួម ជាមុំប៉ុនគ្នា

-ត្រីកោណចារឹកកន្លះរង្វង់ ជាត្រីកោណមានជ្រុងមួយជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់ ហើយត្រីកោណនេះជាត្រីកោណកែង ។

-ផលបូកមុំក្នុងទាំងបីនៃត្រីកោណមួយ ស្មើនឹង 180° ។

-មុំចារឹកស្កាត់ដោយធ្នូមួយ មានរង្វាស់ស្មើនឹងពាក់កណ្តាលធ្នូស្កាត់នោះ ។

៨. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស ៖
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$$

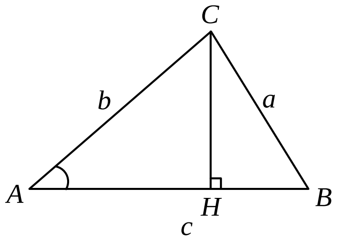
គេនឹងស្រាយគ្រប់ករណីនៃមុំ A ដែលនាំឱ្យគេបានទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$

ចំពោះត្រីកោណ ABC នោះមុំ A អាចជាមុំស្រួច ឬមុំទាល ឬមុំកែង

➢**ករណី A ជាមុំស្រួច**

គេសង់កម្ពស់ CH នៃត្រីកោណ ABC

គេបាន $CH=b\cdot\sin A$, $AH=b\cdot\cos A$ និង $HB=AB-AH$



តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ ចំពោះត្រីកោណកែង BCH ៖

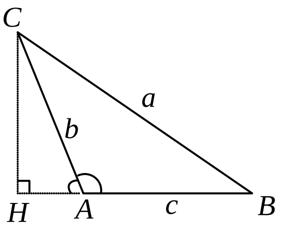
គេបាន $BC^2=CH^2+HB^2$ ឬ $BC^2=CH^2+\left(AB-AH\right)^2$

នាំឱ្យ $a^2=\left(b\cdot\sin A\right)^2+\left(c-b\cdot\cos A\right)^2$

$$=b^2\cdot\sin^2 A+c^2-2bc\cdot\cos A+b^2\cdot\cos^2 A$$
$$=b^2\left(\sin^2 A+\cos^2 A\right)+c^2-2bc\cdot\cos A$$
$$=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$

➢**ករណី A ជាមុំទាល**

គេសង់កម្ពស់ CH នៃត្រីកោណ ABC លើបន្លាយ AB



គេបាន $HB=AB+HA$, $\angle CAH=180°-A$

$CH=b\cdot\sin\left(180°-A\right)$ ឬ $CH=b\cdot\sin A$

$HA=b\cdot\cos\left(180°-A\right)$ ឬ $HA=-b\cdot\cos A$

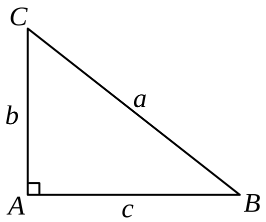
តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ ចំពោះត្រីកោណកែង BCH ៖

គេបាន $BC^2=CH^2+HB^2$ ឬ $BC^2=CH^2+\left(AB+HA\right)^2$

នាំឱ្យ $a^2=\left(b\cdot\sin A\right)^2+\left(c-b\cdot\cos A\right)^2$

$$=b^2\cdot\sin^2 A+c^2-2bc\cdot\cos A+b^2\cdot\cos^2 A$$
$$=b^2\left(\sin^2 A+\cos^2 A\right)+c^2-2bc\cdot\cos A$$
$$=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$

➢**ករណី A ជាកែង**



តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ គេបាន $a^2=b^2+c^2$

គេអាចសរសេរ $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot 0$

ឬ $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$ ព្រោះ $\cos A=\cos 90°=0$

ឃើញថា ទាំងបីករណីនៃមុំ A គេបាន $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ ចំពោះជ្រុង b និងជ្រុង c នោះគេបាន $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$

ដូចនេះ ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$$
ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

គេមាន
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$$
ជាទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស បានស្រាយបញ្ជាក់រួចខាងលើ

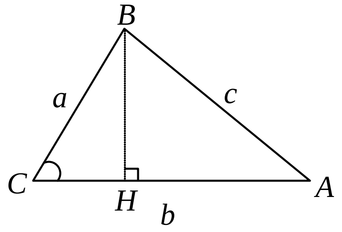
នាំឱ្យ
$$2bc\cdot\cos A=b^2+c^2-a^2$$
$$2ac\cdot\cos B=a^2+c^2-b^2$$
$$2ab\cdot\cos C=a^2+b^2-c^2$$
ទាញបាន
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

ដូចនេះ ទាញបានថា $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ។

9. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ផ្ទៃក្រឡា S នៃត្រីកោណ ABC គឺ ៖ $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

ចំពោះគ្រប់ករណីនៃមុំ C គេនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថា $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

➢ករណី C ជាមុំស្រួច

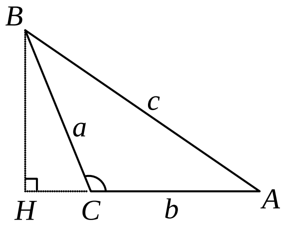


គេមាន $S=\dfrac{1}{2}\times AC\times BH$

ដោយ $BH=a\sin C$ និង $AC=b$

គេបាន $S=\dfrac{1}{2}\times b\times a\sin C$ ឬ $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

➢ករណី C ជាមុំទាល

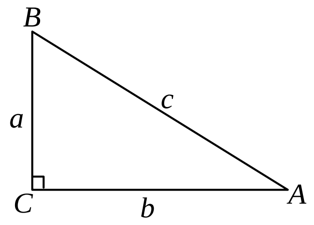


គេមាន $S=\dfrac{1}{2}\times AC\times BH$

ដោយ $BH=a\sin\left(180^\circ-C\right)=a\sin C$ និង $AC=b$

គេបាន $S=\dfrac{1}{2}\times b\times a\sin C$ ឬ $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

➢ករណី C ជាកែង



គេមាន $S=\dfrac{1}{2}\times AC\times BC$ ឬ $S=\dfrac{1}{2}\times AC\times BC\times 1$

ដោយ $AC=b$, $BC=a$ និង $1=\sin 90^\circ=\sin C$

គេបាន $S=\dfrac{1}{2}\times b\times a\times\sin C$ ឬ $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

ឃើញថា គ្រប់ករណីនៃមុំ C គេបានក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC គឺ $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

ស្រាយដូចគ្នា ចំពោះករណីនៃមុំ B និងមុំ A នោះគេបាន $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B$ និង $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

ដូចនេះ ផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC គឺ ៖ $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ. ទាញបង្ហាញថា $\frac{abc}{2S}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$

គេមាន $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$

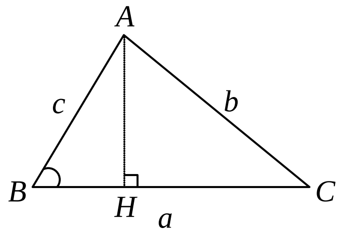
នាំឱ្យ $2S=ab\sin C=ac\sin B=bc\sin A$ (បានដោយគុណសមាមាត្រខាងលើនឹង 2)

អាចសរសេរ $\frac{1}{2S}=\frac{1}{ab\sin C}=\frac{1}{ac\sin B}=\frac{1}{bc\sin A}$ (ព្រោះបើ $a=b$ គេអាចសរសេរ $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$)

គេបាន $\frac{abc}{2S}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$ (បានដោយគុណសមាមាត្រខាងលើនឹង abc)

ដូចនេះ $\frac{abc}{2S}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

10. ស្រាយបញ្ជាក់ថា រូបមន្តហេរ៉ុង $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$



គេមាន $S=\frac{1}{2}bc\sin A \quad (1)$

ដោយ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ នោះ $\sin^2 A=1-\cos^2 A$

នាំឱ្យ $\sin^2 A=(1-\cos A)(1+\cos A)$ តែ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$\sin^2 A=\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\left(\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}\right)\left(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$=\left(\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\right)\left(\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\right)=\left(\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}\right)\left(\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}\right)$$

$$=\frac{1}{4b^2c^2}(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)$$

ដោយ $0^\circ<A<180^\circ$ នោះ $\sin A>0$

គេបាន $\sin A=\sqrt{\frac{1}{4b^2c^2}(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}$

$$\sin A=\frac{1}{2bc}\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}$$

នាំឱ្យ $(1):\ S=\frac{1}{2}bc\times\frac{1}{2bc}\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}$

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)} \quad (2)$$

ដោយ p ជាកន្លះបរិមាត្រ នោះ $p=\frac{a+b+c}{2}$ ឬ $a+b+c=2p$

ទាញបាន $a-b+c=2p-2b$, $a+b-c=2p-2c$, $b+c-a=2p-2a$

នាំឱ្យ $(2):\ S=\frac{1}{4}\sqrt{(2p-2b)\cdot(2p-2c)\cdot(2p-2a)\cdot 2p}=\sqrt{(p-b)(p-c)(p-a)p}$

ដូចនេះ រូបមន្តហេរ៉ុង $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ចម្លាស់-បន្សំ

1. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្លាស់នៃ n ធាតុខុសៗគ្នាស្មើ $n!$ ។
2. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្លាស់នៃ r ធាតុយកពី n ធាតុខុសៗគ្នា គឺ $P(n\,,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ ។
3. បង្ហាញថា $0!=1$
4. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្លាស់ច្រំដែលនៃ r ធាតុយកពី n ធាតុខុសៗគ្នា ស្មើនឹង n^r ។
5. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្លាស់វង់នៃ n ធាតុស្មើនឹង $\dfrac{n!}{n}=(n-1)!$ ។
6. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្សំនៃ r ធាតុយកពី n ធាតុខុសៗគ្នា គឺ $C(n\,,r)=\dfrac{P(n\,,r)}{r!}=\dfrac{n!}{(n-r)!\times r!}$ ។
7. បង្ហាញថា $C(n\,,n-r)=C(n\,,r)$ ។
8. បង្ហាញថា $C(n\,,0)=C(n\,,n)$ ។
9. បង្ហាញថា $C(3\,,0)+C(3\,,1)+C(3\,,2)+C(3\,,3)=2^3$ ។
10. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្លាស់បែងចែកបាននៃ n ធាតុ ដែលមានប្រភេទទី១ r_1 , ប្រភេទទី២ r_2 , ... , ប្រភេទទី k r_k គឺស្មើ $\dfrac{n!}{r_1!\times r_2!\times\ldots\times r_k!}$ ។
11. បង្ហាញថា $(1+a)^n=C(n,0)1+C(n,1)a+C(n,2)a^2+\ldots+C(n,r)a^r+\ldots+C(n,n)a^n$ ។
12. បង្ហាញថា $(a+b)^n=C(n,0)a^n+C(n,1)a^{n-1}b+C(n,2)a^{n-2}b^2+\ldots+C(n,r)a^{n-r}b^r+\ldots+C(n,n)b^n$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ចម្លាស់-បន្សំ

1. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្លាស់នៃ n ធាតុខុសៗគ្នាស្មើ $n!$**

តាមនិយមន័យចម្លាស់ : ចម្លាស់នៃ n ធាតុខុសគ្នា គឺជាតម្រៀបគិតលំដាប់នៃ n ធាតុជាជួរដេក ដែលធាតុមួយដាក់នៅលំដាប់ទីមួយ ធាតុមួយដាប់នៅលំដាប់ទីពីរ ធាតុមួយដាក់នៅលំដាប់ទីបី និងបន្តបន្ទាប់ ។ (១២ កម្មវិធីចាស់ ទំព័រ ១៩១)

ដោយ ធាតុដាក់នៅលំដាប់ទី 1 មាន n របៀប

ធាតុដាក់នៅលំដាប់ទី 2 មាន $n-1$ របៀប

ធាតុដាក់នៅលំដាប់ទី 3 មាន $n-2$ របៀប

....

ធាតុដាក់នៅលំដាប់ទី $n-2$ មាន 3 របៀប

ធាតុដាក់នៅលំដាប់ទី $n-1$ មាន 2 របៀប

ធាតុដាក់នៅលំដាប់ទី n មាន 1 របៀប

តាមគោលការណ៍ផលគុណនៃការតម្រៀប n វត្ថុជាបន្តបន្ទាប់គ្នា រហូតដល់តម្រៀបវត្ថុទី n នៅចុងគេបំផុត

នាំឱ្យ ចំនួនចម្លាស់នៃ n ធាតុខុសៗគ្នា $=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 3\times 2\times 1$

គេតាង $n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 3\times 2\times 1=n!$ (អានថា n ហ្វាក់តូរីយ៉ែល)

ដូចនេះ: **ចម្លាស់នៃ n ធាតុខុសៗគ្នាស្មើ $n!$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់** ។

2. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្លាស់នៃ r ធាតុយកពី n ធាតុខុសៗគ្នា គឺ $P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$**

គេចង់យក r ធាតុពី n ធាតុខុសគ្នា ដើម្បីយកមកតម្រៀប

បើគេយក r ធាតុចេញពី n ធាតុខុសគ្នា នោះធាតុដែលនៅសល់គឺ $n-r$

បើគេរៀប ធាតុនៅសល់ គឺបាន $(n-r)!$ របៀប

គេតាង $P(n,r)$ ជាចំនួនតម្រៀបនៃ r ធាតុយកពី n ធាតុខុសៗគ្នា

នាំឱ្យ របៀបនៃការរៀប r ធាតុយកពី n ធាតុខុសៗគ្នា គឺ $P(n,r)$ របៀប

ដោយ ការតម្រៀប n ធាតុខុសៗគ្នាស្មើ $n!$

តាមរយៈ គោលការណ៍ផលគុណគេបាន $(n-r)!\times P(n,r)=n!\quad\Rightarrow P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

ដូចនេះ: **ចម្លាស់នៃ r ធាតុយកពី n ធាតុខុសៗគ្នា គឺ $P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់** ។

✓**សម្គាល់** : $P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-r+1)$

3. **បង្ហាញថា** $0!=1$

➢របៀបទី១ តាមរូបមន្ត ចម្លាស់

គេមាន រូបមន្ត $P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

បើគេយក $r=n$ គេបាន $P(n,n)=\dfrac{n!}{(n-n)!}=\dfrac{n!}{0!}$ (1)

តែ នៅពេលដែល $r=n$ មានន័យថា ចម្លាស់នៃ n ធាតុយកពី n ធាតុខុសគ្នា ស្មើនឹងចម្លាស់នៃ n ធាតុ

គេបាន $P(n,n)=n!$ (2)

តាមរយៈ ទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន $\dfrac{n!}{0!}=n! \Rightarrow 0!=1$

ដូចនេះ

តម្លៃ $0!=1$ ត្រូវបានបង្ហាញ

។

➢របៀបទី២ តាមរូបមន្ត ហ្វាក់តូរ្យែល

គេមាន រូបមន្ត $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times3\times2\times1$ ដែល n ជាចំនួនគត់

ចំពោះ n ជាចំនួនគត់ និង $n>0$ នាំឱ្យ $(n-1)!=(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times3\times2\times1$

គេបាន $n!=n\times(n-1)!$ នាំឱ្យ $(n-1)!=\dfrac{n!}{n}$

បើគេឱ្យ $n=1$ នោះគេបាន $(1-1)!=\dfrac{1!}{1} \Leftrightarrow 0!=1$

ដូចនេះ

តម្លៃ $0!=1$ ត្រូវបានបង្ហាញ

។

4. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្លាស់ច្រំដែលនៃ r ធាតុយកពី n ធាតុខុសៗគ្នា ស្មើនឹង n^r**

គេមាន n ធាតុខុសគ្នា

គេយក r ធាតុមកមកធ្វើចម្លាស់ច្រំដែល

គេបាន ធាតុដាក់នៅលំដាប់ទី 1 មាន n របៀប

ធាតុដាក់នៅលំដាប់ទី 2 មាន n របៀប

ធាតុដាក់នៅលំដាប់ទី 3 មាន n របៀប

....

ធាតុដាក់នៅលំដាប់ទី $r-2$ មាន n របៀប

ធាតុដាក់នៅលំដាប់ទី $r-1$ មាន n របៀប

ធាតុដាក់នៅលំដាប់ទី r មាន n របៀប

តាមគោលការណ៍ផលគុណនៃការតម្រៀបច្រំដែលនៃ r វត្ថុជាបន្តបន្ទាប់គ្នា យកពី n ខុសគ្នា

នាំឱ្យ ចម្លាស់ច្រំដែលនៃ r ធាតុយកពី n គឺ $\underbrace{n\times n\times n\times\ldots\times n\times n\times n}_{r\text{ កត្តា}}=n^r$

ដូចនេះ

ចម្លាស់ច្រំដែលនៃ r ធាតុយកពី n ធាតុខុសៗគ្នា ស្មើនឹង n^r ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

5. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្លាស់រង់នៃ n ធាតុស្មើនឹង $\frac{n!}{n}=(n-1)!$**

គេមាន ចម្លាស់នៃ n ធាតុខុសៗគ្នារៀបតាមជួរដេក ស្មើ $n!$

ដោយ ពេលដែលរៀប n ធាតុខុសៗគ្នា ជារង្វង់ឃើញថា ឃើញថាវាតិចជាង រៀប n ធាតុខុសៗគ្នា ជាជួរដេក ចំនួន n ដង

នាំឱ្យ ចំនួនចម្លាស់រង់នៃ n ធាតុខុសៗគ្នា ស្មើនឹង $\frac{n!}{n}=\frac{n\times(n-1)!}{n}=(n-1)!$

ដូចនេះ: ចំនួនចម្លាស់រង់នៃ n ធាតុខុសៗគ្នា ស្មើនឹង $\frac{n!}{n}=(n-1)!$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

6. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្សំនៃ r ធាតុយកពី n ធាតុខុសៗគ្នា គឺ $C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!\times r!}$**

គេមាន ចម្លាស់នៃ r ធាតុយកពី n ធាតុខុសៗគ្នា គឺជាតម្រៀបគិតលំដាប់ តាងដោយ $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$

បន្សំនៃ r ធាតុយកពី n ធាតុខុសៗគ្នា គឺជាតម្រៀបមិនគិតលំដាប់ តាងដោយ $C(n,r)$

ដោយ បន្សំនៃ r ធាតុយកពី n ធាតុខុសៗគ្នា តិចជាង ចម្លាស់នៃ r ធាតុយកពី n ធាតុខុសៗគ្នា ចំនួន $r!$ ដង

នាំឱ្យ $C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}$ ឬ $C(n,r)=\frac{\frac{n!}{(n-r)!\times r!}}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!\times r!}$ ព្រោះ $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$

ដូចនេះ: បន្សំនៃ r ធាតុយកពី n ធាតុខុសៗគ្នា គឺ $C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!\times r!}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

7. **បង្ហាញថា $C(n,n-r)=C(n,r)$**

គេមាន

$$C(n,n-r)=\frac{n!}{[n-(n-r)]!\times(n-r)!}$$
$$=\frac{n!}{r!\times(n-r)!}$$
$$=\frac{n!}{(n-r)!\times r!}$$
$$=C(n,r)$$

ដូចនេះ: $C(n,n-r)=C(n,r)$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

8. **បង្ហាញថា $C(n,0)=C(n,n)$**

ដោយ $C(n,0)=\frac{n!}{(n-0)!\times 0!}=\frac{n!}{n!\times 0!}=\frac{1}{0!}=\frac{1}{1}=1$

ហើយ $C(n,n)=\frac{n!}{(n-n)!\times n!}=\frac{n!}{0!\times n!}=\frac{1}{0!}=\frac{1}{1}=1$

ដូចនេះ: $C(n,0)=C(n,n)$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

9. បង្ហាញថា $C(3,0)+C(3,1)+C(3,2)+C(3,3)=2^3$

ដោយ $C(3,0)+C(3,1)+C(3,2)+C(3,3)$

$$=\frac{3!}{3!\times 0!}+\frac{3!}{2!\times 1!}+\frac{3!}{1!\times 2!}+\frac{3!}{0!\times 3!}$$

$=1+3+3+1$

$=8=2^3$

ដូចនេះ: $C(3,0)+C(3,1)+C(3,2)+C(3,3)=2^3$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

10. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្លាស់បែងចែកបាននៃ n ធាតុ ដែលមានប្រភេទទី១ r_1 , ប្រភេទទី២ r_2 , ... , ប្រភេទទី k r_k

គឺស្មើ $\frac{n!}{r_1!\times r_2!\times\ldots\times r_k!}$

គេមាន ចម្លាស់នៃ n ធាតុស្មើ $n!$

-បើក្នុងចំណោម n ធាតុ មានប្រភេទទី១ ចំនួន r_1 ដូចគ្នា

នោះចំនួនចម្លាស់នៃ n ថយចុះ $r_1!$ ដង គឺ $\frac{n!}{r_1!}$

-បើក្នុងចំណោម n ធាតុ មានប្រភេទទី១ ចំនួន r_1 ដូចគ្នា និងប្រភេទទី២ ចំនួន r_2 ដូចគ្នា

នោះចំនួនចម្លាស់នៃ n ថយចុះ $r_1!\times r_2!$ ដង គឺ $\frac{n!}{r_1!\times r_2!}$

....

-បើក្នុងចំណោម n ធាតុ មានប្រភេទទី១ ចំនួន r_1 ដូចគ្នា ប្រភេទទី២ ចំនួន r_2 ដូចគ្នា , ... , ប្រភេទទី k ចំនួន r_k ដូចគ្នា

នោះចំនួនចម្លាស់នៃ n ថយចុះ $r_1!\times r_2!\times\ldots\times r_k!$ ដង គឺ $\frac{n!}{r_1!\times r_2!\times\ldots\times r_k!}$

ដូចនេះ: ចំនួនចម្លាស់អាចបែងចែកបាននៃ n ធាតុ ដែលមានប្រភេទទី១ r_1 , ប្រភេទទី២ r_2 , ... , ប្រភេទទី k r_k គឺស្មើ $\frac{n!}{r_1!\times r_2!\times\ldots\times r_k!}$

11. បង្ហាញថា $(1+a)^n=C(n,0)1+C(n,1)a+C(n,2)a^2+\ldots+C(n,r)a^r+\ldots+C(n,n)a^n$

គេអាចបំលែងធាតុនៃត្រីកោណប៉ាស្កាល់ ទៅជាបន្សំបានដូចខាងក្រោម ៖

1 1	$C(1,0)$ $C(1,1)$
1 2 1	$C(2,0)$ $C(2,1)$ $C(2,2)$
1 3 3 1	$C(3,0)$ $C(3,1)$ $C(3,2)$ $C(3,3)$
1 4 6 4 1	$C(4,0)$ $C(4,1)$ $C(4,2)$ $C(4,3)$ $C(4,4)$
1 5 10 10 5 1	$C(5,0)$ $C(5,1)$ $C(5,2)$ $C(5,3)$ $C(5,4)$ $C(5,5)$
1 6 15 20 15 6 1	$C(6,0)$ $C(6,1)$ $C(6,2)$ $C(6,3)$ $C(6,4)$ $C(6,5)$ $C(6,6)$
....	....

គេបាន ៖

$(1+a)^1 = 1+a \qquad = C(1,0)+C(1,1)a$

$(1+a)^2 = 1+2a+a^2 \qquad = C(2,0)+C(2,1)a+C(2,2)a^2$

$(1+a)^3 = 1+3a+3a^2+a^3 \qquad = C(3,0)+C(3,1)a+C(3,2)a^2+C(3,3)a^3$

$(1+a)^4 = 1+4a+6a^2+4a^3+a^4 \qquad = C(4,0)+C(4,1)a+C(4,2)a^2+C(4,3)a^3+C(4,4)a^4$

$(1+a)^5 = 1+5a+10a^2+10a^3+5a^4+a^5 \qquad = C(5,0)+C(5,1)a+C(5,2)a^2+C(5,3)a^3+C(5,4)a^4+C(5,5)a^5$

.... = ...

$(1+a)^n = \qquad = C(n,0)+C(n,1)a+C(n,2)a^2+C(n,3)a^3+\ldots+C(n,n)a^n$

ដូចនេះ $(1+a)^n = C(n,0)1+C(n,1)a+C(n,2)a^2+\ldots+C(n,r)a^r+\ldots+C(n,n)a^n$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

12. **បង្ហាញថា** $(a+b)^n = C(n,0)a^n+C(n,1)a^{n-1}b+C(n,2)a^{n-2}b^2+\ldots+C(n,r)a^{n-r}b^r+\ldots+C(n,n)b^n$

គេមាន $(a+b)^n$ អាចសរសេរ $(a+b)^n = \left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$

តាមរូបមន្ត $(1+a)^n = C(n,0)1+C(n,1)a+C(n,2)a^2+\ldots+C(n,r)a^r+\ldots+C(n,n)a^n$ (បានស្រាយរួច)

គេបាន $\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = C(n,0)1+C(n,1)\frac{b}{a}+C(n,2)\left(\frac{b}{a}\right)^2+C(n,3)\left(\frac{b}{a}\right)^3+\ldots+C(n,n)\left(\frac{b}{a}\right)^n$

$$= C(n,0)1+C(n,1)\frac{b}{a}+C(n,2)\frac{b^2}{a^2}+C(n,3)\frac{b^3}{a^3}+\ldots+C(n,n)\frac{b^n}{a^n}$$

នាំឱ្យ $a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = a^n\left[C(n,0)1+C(n,1)\frac{b}{a}+C(n,2)\frac{b^2}{a^2}+C(n,3)\frac{b^3}{a^3}+\ldots+C(n,n)\frac{b^n}{a^n}\right]$

$$= C(n,0)a^n+C(n,1)a^{n-1}b+C(n,2)a^{n-2}b^2+\ldots+C(n,n)b^n$$

ដូចនេះ $(a+b)^n = C(n,0)a^n+C(n,1)a^{n-1}b+C(n,2)a^{n-2}b^2+\ldots+C(n,r)a^{n-r}b^r+\ldots+C(n,n)b^n$ ។

13. **បង្ហាញថា** $C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+\ldots+C(n,n)=2^n$

គេមាន $(a+b)^n = C(n,0)a^n+C(n,1)a^{n-1}b+C(n,2)a^{n-2}b^2+\ldots+C(n,r)a^{n-r}b^r+\ldots+C(n,n)b^n$

ចំពោះ $a=1$ និង $b=1$

គេបាន $(1+1)^n = C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+\ldots+C(n,n)$

$2^n = C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+\ldots+C(n,n)$

ដូចនេះ $C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+\ldots+C(n,n)=2^n$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

14. **បង្ហាញថា** $C(n,0)-C(n,1)+C(n,2)-C(n,3)+...+(-1)^n C(n,n)=0$

គេមាន $(1+a)^n = C(n,0)1+C(n,1)a+C(n,2)a^2+C(n,3)a^3+...+C(n,n)a^n \quad (1)$

គេយក $a=-1$ ជំនួសក្នុង (1)

គេបាន $[1+(-1)]^n = C(n,0)+C(n,1)(-1)+C(n,2)(-1)^2+C(n,3)(-1)^3+...+C(n,n)(-1)^n$

$$0 = C(n,0)-C(n,1)+C(n,2)-C(n,3)+...+(-1)^n C(n,n)$$

ដូចនេះ $\boxed{C(n,0)-C(n,1)+C(n,2)-C(n,3)+...+(-1)^n C(n,n)=0}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន វិចទ័រ

1. គេឱ្យ A , B និង C ជាបីចំណុចរត់មិនត្រង់គ្នា ។ បង្ហាញថា $|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|>|\overrightarrow{AC}|$ ។
2. បង្ហាញលក្ខណៈគ្រឹះនៃវិចទ័រខាងក្រោម ៖

   ក. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (លក្ខណៈត្រឡប់)

   ខ. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (លក្ខណៈផ្តុំ)

   គ. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

   ឃ. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$
3. បង្ហាញថា ប្រមាណវិធីដកវិចទ័រ $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$ ។
4. បង្ហាញថា $-(\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}$ ។
5. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈគ្រឹះនៃវិចទ័រខាងក្រោម ៖

   ក. $(mn)\vec{a}=m(n\vec{a})$ (លក្ខណៈផ្តុំ)

   ខ. $(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$ (លក្ខណៈបំបែក I)

   គ. $m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$ (លក្ខណៈបំបែក II)
6. គេមានវិចទ័រ $\vec{a}\neq\vec{0}$ ។ បង្ហាញថា $\vec{i}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ ជាវិចទ័រឯកតា ដែលមានទិសដៅដូចទិសដៅវិចទ័រ $\vec{a}$ ។
7. បង្ហាញថា បើ $\vec{a}=(a_1\,,\,a_2)$ ប្រវែងនៃវិចទ័រ $\vec{a}$ គឺ $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ ។
8. បង្ហាញការគណនាវិចទ័រ ដោយប្រើកូអរដោនេដូចខាងក្រោម ៖

   ក. $(a_1\,,\,a_2)+(b_1\,,\,b_2)=(a_1+b_1\,,\,a_2+b_2)$

   ខ. $(a_1\,,\,a_2)-(b_1\,,\,b_2)=(a_1-b_1\,,\,a_2-b_2)$

   គ. $m(a_1\,,\,a_2)=(ma_1\,,\,ma_2)$
9. បង្ហាញថា បើ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ជាពីរវិចទ័រមិនសូន្យ នោះគេបាន $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ ។
10. ដោយប្រើនិយមន័យផលគុណស្កាលែ ៖

    ក. បង្ហាញថា $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$ ។

    ខ. បង្ហាញថា $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ ។
11. ក. បង្ហាញថា បើ $\vec{a}\perp\vec{b}$ លុះត្រាតែ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ។

    ខ. បង្ហាញថា បើ $\vec{a}=(a_1\,,\,a_2)$ និង $\vec{b}=(b_1\,,\,b_2)$ គេបាន $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ ។

    គ. បង្ហាញថា $\vec{a}\perp\vec{b}$ លុះត្រាតែ $a_1b_1+a_2b_2=0$ ។

    ឃ. បង្ហាញថា $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$ ។

12. ចំពោះគ្រប់វ៉ិចទ័រ $\vec{a}$, $\vec{b}$ និង $\vec{c}$ ៖

ក. បង្ហាញថា $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

ខ. បង្ហាញថា $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

គ. បង្ហាញថា $(m\vec{a})\cdot\vec{b}=m\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$

ឃ. បង្ហាញថា $\vec{a}\cdot\left(m\vec{b}\right)=m\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$

13. ក. បង្ហាញសមភាព $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$ ។

ខ. បង្ហាញសមភាព $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}$ ។

14. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$ ។

15. បង្ហាញថា ចំពោះវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ មិនសូន្យ ហើយបើ $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ នោះ $\vec{a}\perp\vec{b}$ ។

16. គេឱ្យ $A(\vec{a})$ និង $B\left(\vec{b}\right)$ បង្ហាញថា $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ ។

17. ក. ចំណុច $C(\vec{c})$ ចែក $[AB]$ ខាងក្នុងតាមផលធៀប $m:n$ ហើយ $A(\vec{a})$ និង $B\left(\vec{b}\right)$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំង ។

បង្ហាញថា $\vec{c}=\dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$ ។

ខ. ចំណុច $D\left(\vec{d}\right)$ ចែក $[AB]$ ខាងក្រៅតាមផលធៀប $m:n$ ហើយ $A(\vec{a})$ និង $B\left(\vec{b}\right)$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំង ។

បង្ហាញថា $\vec{d}=\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$ ។

គ. បង្ហាញថា វ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំណុចកណ្ដាលរបស់អង្កត់ AB គឺ $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ ។

18. បង្ហាញថា មេដ្យានទាំងបីនៃត្រីកោណមួយប្រសព្វគ្នាបានមួយចំណុច ដោយប្រើវ៉ិចទ័រទីតាំង ។

19. បង្ហាញថា អង្កត់ដែលភ្ជាប់ចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុងពីររបស់ត្រីកោណមួយ ស្របទៅនឹងជ្រុងទីបី ហើយស្មើពាក់កណ្ដាលនៃប្រវែងជ្រុងទីបីនេះ ដោយប្រើវ៉ិចទ័រទីតាំង ។

20. បង្ហាញថាកូអរដោនេនៃចំណុច C ដែលចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុង ដែលភ្ជាប់ពីចំណុច $A(x_1\,,\,y_1)$ និង $B(x_2\,,\,y_2)$ តាមផលធៀប $m:n$ ឱ្យដោយរូបមន្ត $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$, $y=\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}$ ។

21. បង្ហាញថា សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $P_0(x_0\,,\,y_0)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(a\,,b)$ កំណត់ដោយ ៖

ក. $\vec{p}=\vec{p}_0+t\vec{u}$ ជាសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រទម្រង់វ៉ិចទ័រ ។

ខ. $\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\end{cases}$ ដែល t ជាចំនួនពិត ជាសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រទម្រង់កូអរដោនេ ។

គ. បើ $a\neq 0$ និង $b\neq 0$ ទាញបង្ហាញថា គេបាន $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}$ រួចទាញបន្តថា $y-y_0=\dfrac{b}{a}(x-x_0)$ ។

22. បង្ហាញថា បន្ទាត់ដែលកាត់តាមពីរចំណុច $A(\vec{a})$ និង $B\left(\vec{b}\right)$ មានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $\vec{p}=\vec{a}+t\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$ ។

23. បង្ហាញថា ដើម្បីឱ្យចំណុច $C(\vec{c})\in AB$ ដែល $A(\vec{a})$ និង $B\left(\vec{b}\right)$ គឺមានចំនួនពិត m និង n ដែល $m+n=1$ ហើយ $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ ។

24. ក. បង្ហាញថា សមីការបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច $P_0(x_0\ ,\ y_0)$ ហើយកែងទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(a\ ,\ b)$ គឺ

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{p}_0)=0\\ a(x-x_0)+b(y-y_0)=0\end{cases}$$ ។

ខ. បើតាង $c=-ax_0-by_0$ គេអាចសរសេរ $ax+by+c=0$ ដែលគេហៅថា សមីការទូទៅនៃបន្ទាត់ ។

25. បង្ហាញថា ចម្ងាយរវាងបន្ទាត់ $ax+by+c=0$ និងចំណុច $P(x_0\ ,\ y_0)$ គឺស្មើ $d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ។

26. ក. បង្ហាញថា សមីការរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $C(x_0\ ,\ y_0)$ និងមានកាំ r គឺ $\begin{cases}|\vec{p}-\vec{c}|=r\\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2\end{cases}$ ។

ខ. បង្ហាញថា សមីការរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $O(0\ ,\ 0)$ និងកាំ r គឺ $x^2+y^2=r^2$ ។

27. បង្ហាញថា បើ M ជាចំណុចកណ្តាលជ្រុង AB នៃត្រីកោណ ABC នោះគេបាន $AB^2+AC^2=2\left(AM^2+BM^2\right)$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន វ៉ិចទ័រ

1. **បង្ហាញថា** $\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|>\left|\overrightarrow{AC}\right|$

គេមាន A , B និង C ជាបីចំណុចរត់មិនត្រង់គ្នា

នាំឱ្យ យើងភ្ជាប់បានត្រីកោណ ABC (ដូចរូប)

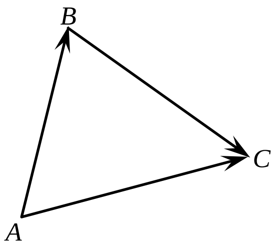
តាមវិសមភាពក្នុងត្រីកោណ ផលបូកជ្រុងពីរត្រូវធំជាង

ជ្រុងមួយទៀត នោះគេបាន $AB+BC>AC$

តែ $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $BC=\left|\overrightarrow{BC}\right|$, $AC=\left|\overrightarrow{AC}\right|$

នាំឱ្យ $\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|>\left|\overrightarrow{AC}\right|$

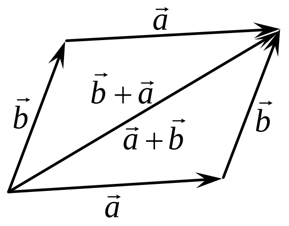
ដូចនេះ $\boxed{\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|>\left|\overrightarrow{AC}\right|}$ ។



2. **បង្ហាញលក្ខណៈគ្រឹះនៃវ៉ិចទ័រខាងក្រោម ៖**

ក. បង្ហាញថា $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

គេបកស្រាយតាមរូបដូចខាងក្រោម ៖



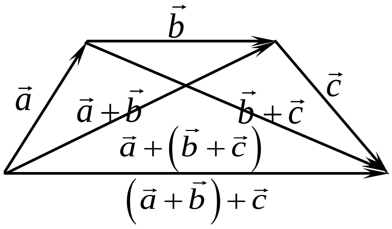
តាមរូបឃើញថា $\vec{a}+\vec{b}$ និង $\vec{b}+\vec{a}$

ជាវ៉ិចទ័រតែមួយ

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

គេបកស្រាយតាមរូបដូចខាងក្រោម ៖



តាមរូបឃើញថា $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ និង $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

ជាវ៉ិចទ័រតែមួយ

ដូចនេះ $\boxed{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)}$ ។

គ. បង្ហាញថា $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

តាង $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ នោះគេបាន $\vec{0}=\overrightarrow{BB}$

នាំឱ្យ $\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$

ហើយតាមសម្រាយ ក. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}}$ ។

ឃ. បង្ហាញថា $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$

តាង $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ នោះគេបាន $-\vec{a}=-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$

នាំឱ្យ : $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}}$ ។

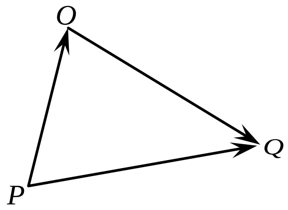
3. **បង្ហាញថា ប្រមាណវិធីដកវ៉ិចទ័រ** $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$

តាមរូបខាងស្តាំ យើងបាន $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}$ (ទំនាក់ទំនងសាល)

$=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{PO}$ (លក្ខណៈត្រឡប់)

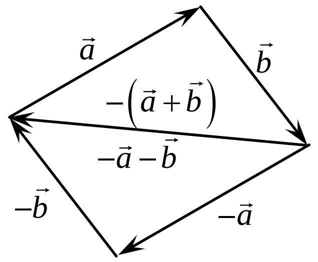
$=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{PO}$ (លក្ខណៈផ្ទុយនៃវ៉ិចទ័រ)

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}}$ ។



4. **បង្ហាញថា** $-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=-\vec{a}-\vec{b}$

គេអាចស្រាយតាមរូបដូចខាងស្ដាំ ៖



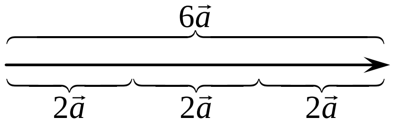
តាមរូបឃើញថា $-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ និង $-\vec{a}-\vec{b}$ ជាវិចទ័រតែមួយ

ដូចនេះ $\boxed{-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=-\vec{a}-\vec{b}}$ ។

5. **ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈគ្រឹះនៃវិចទ័រខាងក្រោម ៖**

ក. បង្ហាញថា $(mn)\vec{a}=m(n\vec{a})$ (លក្ខណៈផ្តុំ)

➢ **របៀបទី១** : ប្រើរូបដើម្បីបង្ហាញ



តាមរូបឃើញថា $6\vec{a}=3(2\vec{a})$ ឬ $(2\cdot 3)\vec{a}=3(2\vec{a})$

សន្និដ្ឋាន $\boxed{(mn)\vec{a}=m(n\vec{a})}$ ។

➢ **របៀបទី២** : ប្រើកូអរដោនេដើម្បីបង្ហាញ

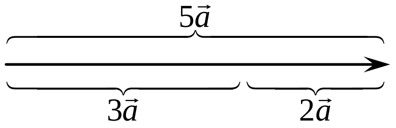
តាង $\vec{a}=(a_1\ ,\ a_2)$ អាចសរសេរ $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$

គេបាន
$$\begin{aligned}(mn)\vec{a}&=(mn)\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}\right)\\&=mna_1\vec{i}+mna_2\vec{j}\\&=m\left(na_1\vec{i}+na_2\vec{j}\right)\\&=m\left[n\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}\right)\right]=m(n\vec{a})\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{(mn)\vec{a}=m(n\vec{a})}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$ (លក្ខណៈបំបែក I)

➢ **របៀបទី១** : ប្រើរូបដើម្បីបង្ហាញ



តាមរូបឃើញថា $5\vec{a}=3\vec{a}+2\vec{a}$ ឬ $(3+2)\vec{a}=3\vec{a}+2\vec{a}$

សន្និដ្ឋាន $\boxed{(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}}$ ។

➢ **របៀបទី២** : ប្រើកូអរដោនេដើម្បីបង្ហាញ

តាង $\vec{a}=(a_1\ ,\ a_2)$ អាចសរសេរ $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$

គេបាន
$$\begin{aligned}(m+n)\vec{a}&=(m+n)\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}\right)\\&=(m+n)a_1\vec{i}+(m+n)a_2\vec{j}\\&=ma_1\vec{i}+na_1\vec{i}+ma_2\vec{j}+na_2\vec{j}\\&=m\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}\right)+n\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}\right)\\&=m\vec{a}+n\vec{a}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}}$ ។

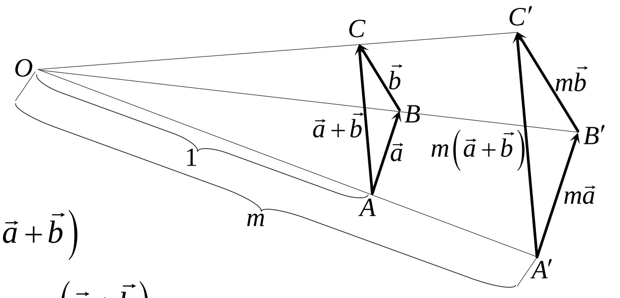
គ. បង្ហាញថា $m\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=m\vec{a}+m\vec{b}$ (លក្ខណៈបំបែក II)

➢ **របៀបទី១** : ប្រើរូបដើម្បីបង្ហាញ

ក្នុងត្រីកោណ ABC មាន $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ និង $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$

និងមាន $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

តាមបំលែងចាំងផ្ចិត O ផលធៀប m គេបាន ៖



$\overrightarrow{A'B'}=m\overrightarrow{AB}=m\vec{a}$, $\overrightarrow{B'C'}=m\overrightarrow{BC}=m\vec{b}$, $\overrightarrow{A'C'}=m\overrightarrow{AC}=m\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$

តាមរូបគេសង្កេតឃើញថា $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{A'C'}$ ជំនួសបាន $m\vec{a}+m\vec{b}=m\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{m\vec{a}+m\vec{b}=m\left(\vec{a}+\vec{b}\right)}$ ។

➤ **របៀបទី២** : ប្រើកូអរដោនេដើម្បីបង្ហាញថា $m\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=m\vec{a}+m\vec{b}$

តាង $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ និង $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}$

នោះ $\vec{a}+\vec{b}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+b_1\vec{i}+b_2\vec{j}=\left(a_1+b_1\right)\vec{i}+\left(a_2+b_2\right)\vec{j}$

គេបាន $m\vec{a}+m\vec{b}=m\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}\right)+m\left(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}\right)$

$$=ma_1\vec{i}+ma_2\vec{j}+mb_1\vec{i}+mb_2\vec{j}$$
$$=m\left(a_1+b_1\right)\vec{i}+m\left(a_2+b_2\right)\vec{j}$$
$$=m\left[\left(a_1+b_1\right)\vec{i}+\left(a_2+b_2\right)\vec{j}\right]=m\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{m\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=m\vec{a}+m\vec{b}}$ ។

6. **បង្ហាញថា** $\vec{i}=\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\dfrac{1}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}$ **ជាវិចទ័រឯកតា ដែលមានទិសដៅដូចទិសដៅវិចទ័រ** $\vec{a}$

គេមានវិចទ័រ $\vec{a}\neq\vec{0}$ និង $\left|\vec{a}\right|$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន នោះ $\vec{i}=\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$ មានទិសដៅដូច $\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$ ឬ មានមានទិសដៅដូច $\vec{a}$ (ព្រោះ $\left|\vec{a}\right|>0$)

តាមនិយមន័យ បើ $\vec{i}$ ជាវិចទ័រឯកតា លុះត្រាតែ $\left|\vec{i}\right|=1$

គេបាន $\left|\vec{i}\right|=\left|\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}\right|=\left|\dfrac{1}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}\right|=\left|\dfrac{1}{\left|\vec{a}\right|}\right|\left|\vec{a}\right|=\dfrac{1}{\left\|\vec{a}\right\|}\left|\vec{a}\right|=\dfrac{1}{\left|\vec{a}\right|}\left|\vec{a}\right|=1$ (ព្រោះថា $\left\|\vec{a}\right\|=\left|\vec{a}\right|$ ជាណមឬប្រវែងដូចគ្នា)

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $\boxed{\vec{i}=\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\dfrac{1}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}}$ ជាវិចទ័រឯកតាមានទិសដៅដូចវិចទ័រ $\vec{a}$ ។

7. **បង្ហាញថា** $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

គេមាន $\vec{a}=\left(a_1\ ,\ a_2\right)$

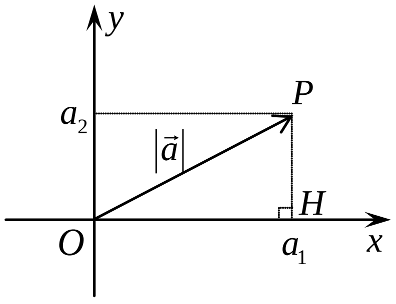
តាមរូប OHP ជាត្រីកោណកែងត្រង់ H

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ $OP^2=OP^2+HP^2$

ដោយ $OP=\left|\vec{a}\right|$, $OH=a_1$, $HP=a_2$

គេបាន $\left|\vec{a}\right|^2=a_1^2+a_2^2$

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ (ព្រោះ $\left|\vec{a}\right|>0$)



ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $\boxed{\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$ ។

8. **បង្ហាញការគណនាវិចទ័រ ដោយប្រើកូអរដោនេដូចខាងក្រោម ៖**

ក. បង្ហាញថា $\left(a_1\ ,\ a_2\right)+\left(b_1\ ,\ b_2\right)=\left(a_1+b_1\ ,\ a_2+b_2\right)$

តាង $\vec{a}=\left(a_1\ ,\ a_2\right)$ និង $\vec{b}=\left(b_1\ ,\ b_2\right)$ នោះគេបាន $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ និង $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}$

គេបាន $\vec{a}+\vec{b}=\left(a_1\ ,\ a_2\right)+\left(b_1\ ,\ b_2\right)\quad(1)$

ម្យ៉ាងទៀត $\vec{a}+\vec{b}=\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}\right)+\left(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}\right)=\left(a_1+b_1\right)\vec{i}+\left(a_2+b_2\right)\vec{j}=\left(a_1+b_1\ ,\ a_2+b_2\right)\quad(2)$

តាម (1) និង (2) ទាញបាន $\left(a_1\ ,\ a_2\right)+\left(b_1\ ,\ b_2\right)=\left(a_1+b_1\ ,\ a_2+b_2\right)$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $\boxed{\left(a_1\ ,\ a_2\right)+\left(b_1\ ,\ b_2\right)=\left(a_1+b_1\ ,\ a_2+b_2\right)}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $(a_1 , a_2)-(b_1 , b_2)=(a_1-b_1 , a_2-b_2)$

គេតាង $\vec{a}=(a_1 , a_2)$ និង $\vec{b}=(b_1 , b_2)$ នោះគេអាចសរសេរ $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ និង $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}$

គេបាន $\vec{a}-\vec{b}=(a_1 , a_2)-(b_1 , b_2)$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\vec{a}-\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j})-(b_1\vec{i}+b_2\vec{j})=(a_1-b_1)\vec{i}+(a_2-b_2)\vec{j}=(a_1-b_1 , a_2-b_2)$ (2)

តាមរយៈ ទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញបាន $(a_1 , a_2)-(b_1 , b_2)=(a_1-b_1 , a_2-b_2)$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $\boxed{(a_1 , a_2)-(b_1 , b_2)=(a_1-b_1 , a_2-b_2)}$ ។

គ. បង្ហាញថា $m(a_1 , a_2)=(ma_1 , ma_2)$

គេតាង $\vec{a}=(a_1 , a_2)$ នោះគេអាចសរសេរ $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$

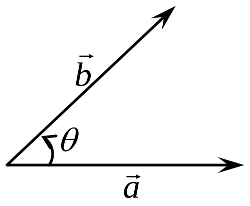
គេបាន $m\vec{a}=m(a_1 , a_2)$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $m\vec{a}=m(a_1\vec{i}+a_2\vec{j})=ma_1\vec{i}+ma_2\vec{j}=(ma_1 , ma_2)$ (2)

នាំឱ្យបាន $m(a_1 , a_2)=(ma_1 , ma_2)$

ដូចនេះ បង្ហាញថា $\boxed{m(a_1 , a_2)=(ma_1 , ma_2)}$ ។

9. **បង្ហាញថា** $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$



$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$

បើ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ផ្គុំបានមុំ θ នោះ $\vec{b}$ ផ្គុំជាមួយ $\vec{a}$ វិញបានមុំ $-\theta$

តាមនិយមន័យផលគុណស្កាលែ

គេបាន $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$ (1)

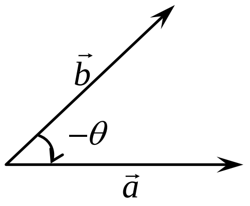
ហើយ $\vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos(-\theta)=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\theta$ (2)

ព្រោះ $\cos(-\theta)=\cos\theta$ មុំផ្ទុយ

គេដឹងថា $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|$ ផលគុណនៃពីរចំនួនមានលក្ខណៈត្រឡប់

តាម (1) និង (2) នោះគេបាន $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}}$ ។



$\vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos(-\theta)$

10. **ដោយប្រើនិយមន័យផលគុណស្កាលែ ៖**

ក. បង្ហាញថា $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$

តាមលក្ខណៈត្រីកោណមាត្រ $-1\le\cos\theta\le1$ នោះ $0\le|\cos\theta|\le1$

ចំពោះវិសមីការ $|\cos\theta|\le1$ គុណអង្គទាំងពីរនៃវិសមីការនឹង $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|>0$ (ដោយសារ $|\vec{a}|>0$, $|\vec{b}|>0$)

គេបាន $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\cos\theta|\le1\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ ឬ $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\cos\theta|\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

ម្យ៉ាងទៀត $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$ នោះ $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=\big||\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta\big|=\big||\vec{a}|\big|\cdot\big||\vec{b}|\big|\cdot|\cos\theta|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\cos\theta|$

តាម (1) និង (2) ទាញបាន $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $\boxed{|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

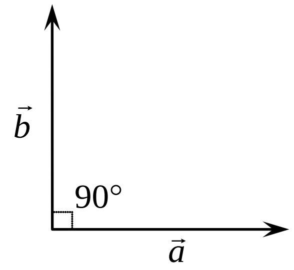
តាមនិយមន័យផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$

បើគេយក $\vec{a}=\vec{b}$ នោះគេបានមុំផ្តុំ $\cos\theta=\cos(\vec{a},\vec{a})=\cos 0^\circ=1$

គេបាន $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^\circ$ នាំឱ្យ $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2}$ ។

11. **ក. បង្ហាញថា បើ** $\vec{a}\perp\vec{b}$ **លុះត្រាតែ** $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$



តាមនិយមន័យផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$

បើ $\vec{a}\perp\vec{b}$ នោះ $\cos\theta=\cos 90^\circ=0$

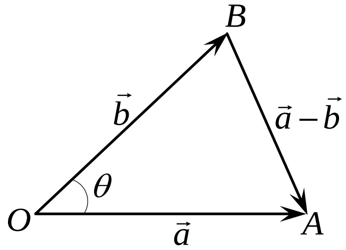
គេបាន $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot 0=0$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $\boxed{\vec{a}\perp\vec{b}\ \Leftrightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

សន្មត់ថាកូអរដោនេនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{a}=(a_1\ ,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1\ ,\ b_2)$

និង $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\angle AOB=\theta$ (ដូចរូបខាងស្តាំ)



ក្នុងត្រីកោណ AOB តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសគឺ គេបាន ៖

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\theta$$

នាំឱ្យ $2OA\cdot OB\cos\theta=OA^2+OB^2-BA^2 \quad (1)$

ដោយ $OA=|\vec{a}|$, $OB=|\vec{b}|$, $BA=|\vec{a}-\vec{b}|$

$$OA^2=|\vec{a}|^2=\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2}\right)^2=a_1^2+a_2^2$$

$$OB^2=|\vec{b}|^2=\left(\sqrt{b_1^2+b_2^2}\right)^2=b_1^2+b_2^2$$

$$BA^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2=\left[\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}\right]^2=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2$$

គេបាន (1) ទៅជា $2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta=a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-\left[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2\right]$

$$=a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-\left[a_1^2-2a_1b_1+b_1^2+a_2^2-2a_2b_2+b_2^2\right]$$

$$=2(a_1b_1+a_2b_2)$$

នាំឱ្យ $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$ មានន័យថា $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2}$ ។

គ. បង្ហាញថា $\vec{a}\perp\vec{b}$ **លុះត្រាតែ** $a_1b_1+a_2b_2=0$

យើងមាន $\vec{a}\perp\vec{b}$ គេបាន $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ (សម្រាយ ក.)

តែ $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ នាំឱ្យគេបាន $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2=0$

ដូចនេះ បើ $\vec{a}\perp\vec{b}$ លុះត្រាតែ $\boxed{a_1b_1+a_2b_2=0}$ ។

ឃ. បង្ហាញថា $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

តាមនិយមន័យផលគុណស្កាលែ $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$ នាំឱ្យ $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

ដោយ $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ និង $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$

គេបាន $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $\boxed{\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}}$ ។

12. **ចំពោះគ្រប់វិចទ័រ $\vec{a}$, $\vec{b}$ និង $\vec{c}$ ៖**

ក. បង្ហាញថា $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

សន្មត់ថាកូអរដោនេវិចទ័រ $\vec{a} = (a_1\ ,\ a_2)$, $\vec{b} = (b_1\ ,\ b_2)$ និង $\vec{c} = (c_1\ ,\ c_2)$

នោះ $\vec{b}+\vec{c} = (b_1 + c_1\ ,\ b_2 + c_2)$

គេបាន
$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) &= a_1(b_1+c_1) + a_2(b_2+c_2)\\ &= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2\\ &= (a_1b_1 + a_2b_2) + (a_1c_1 + a_2c_2)\\ &= \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot c\end{aligned}$$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $\boxed{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$

សន្មត់ថាកូអរដោនេវិចទ័រ $\vec{a} = (a_1\ ,\ a_2)$, $\vec{b} = (b_1\ ,\ b_2)$ និង $\vec{c} = (c_1\ ,\ c_2)$

នោះ $\vec{a}+\vec{b} = (a_1 + b_1\ ,\ a_2 + b_2)$

គេបាន
$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} &= (a_1+b_1)c_1 + (a_2+b_2)c_2\\ &= a_1c_1 + b_1c_1 + a_2c_2 + b_2c_2\\ &= (a_1c_1 + a_2c_2) + (b_1c_1 + b_2c_2)\\ &= \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $\boxed{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}}$ ។

គ. បង្ហាញថា $(m\vec{a})\cdot\vec{b} = m(\vec{a}\cdot\vec{b})$

សន្មត់ថាកូអរដោនេវិចទ័រ $\vec{a} = (a_1\ ,\ a_2)$, $\vec{b} = (b_1\ ,\ b_2)$ នោះ $m\vec{a} = m(a_1\ ,\ a_2) = (ma_1\ ,\ ma_2)$

គេបាន $(m\vec{a})\cdot\vec{b} = ma_1b_1 + ma_2b_2 = m(a_1b_1 + a_2b_2) = m(\vec{a}\cdot\vec{b})$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $\boxed{(m\vec{a})\cdot\vec{b} = m(\vec{a}\cdot\vec{b})}$ ។

ឃ. បង្ហាញថា $\vec{a}\cdot\left(m\vec{b}\right)=m\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$

សន្មត់ថាកូអរដោនៃវិចទ័រ $\vec{a}=\left(a_1\ ,\ a_2\right)$, $\vec{b}=\left(b_1\ ,\ b_2\right)$

នោះ $m\vec{b}=m\left(b_1\ ,\ b_2\right)=\left(mb_1\ ,\ mb_2\right)$

គេបាន $\vec{a}\cdot\left(m\vec{b}\right)=a_1mb_1+a_2mb_2=m\left(a_1b_1+a_2b_2\right)=m\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $\boxed{\vec{a}\cdot\left(m\vec{b}\right)=m\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}$ ។

13. ក. បង្ហាញសមភាព $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$

សន្មត់ថាកូអរដោនៃវិចទ័រ $\vec{a}=\left(a_1\ ,\ a_2\right)$, $\vec{b}=\left(b_1\ ,\ b_2\right)$ និង $\vec{c}=\left(c_1\ ,\ c_2\right)$

នោះ $\vec{b}-\vec{c}=\left(b_1-c_1\ ,\ b_2-c_2\right)$

គេបាន
$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)&=a_1\left(b_1-c_1\right)+a_2\left(b_2-c_2\right)\\&=a_1b_1-a_1c_1+a_2b_2-a_2c_2\\&=\left(a_1b_1+a_2b_2\right)-\left(a_1c_1+a_2c_2\right)\\&=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $\boxed{\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}}$ ។

ខ. បង្ហាញសមភាព $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}$

សន្មត់ថាកូអរដោនៃវិចទ័រ $\vec{a}=\left(a_1\ ,\ a_2\right)$, $\vec{b}=\left(b_1\ ,\ b_2\right)$ និង $\vec{c}=\left(c_1\ ,\ c_2\right)$

នោះ $\vec{a}-\vec{b}=\left(a_1-b_1\ ,\ a_2-b_2\right)$

គេបាន
$$\begin{aligned}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{c}&=\left(a_1-b_1\right)c_1+\left(a_2-b_2\right)c_2\\&=a_1c_1-b_1c_1+a_2c_2-b_2c_2\\&=\left(a_1c_1+a_2c_2\right)-\left(b_1c_1+b_2c_2\right)\\&=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}\end{aligned}$$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $\boxed{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}}$ ។

14. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$

តាមលំនាំ $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$ នោះ
$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2&=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\\&=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}+\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{b}\\&=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}\qquad,\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}\\&=\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot b+\left|\vec{b}\right|^2\end{aligned}$$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $\boxed{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2}$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$

ដោយ $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$ នោះ $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$

$=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{a}-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{b}$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

$=\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot b+\left|\vec{b}\right|^2$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $\boxed{\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2}$ ។

15. **បង្ហាញថា ចំពោះវ៉ិចទ័រពីរ $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ មិនសូន្យ ហើយបើ $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ នោះ $\vec{a}\perp\vec{b}$**

គេមាន $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ លើកអង្គទាំងពីរជាការេ គេបាន $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2$

ដោយ $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$ និង $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$

គេបាន $\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$

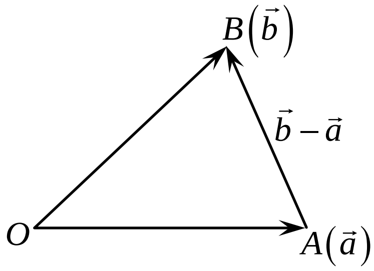
$4\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

ចំពោះ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ នោះគេបាន $\vec{a}\perp\vec{b}$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $\boxed{\text{បើ } \left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right| \text{ នោះ } \vec{a}\perp\vec{b}}$ ។

16. **គេឱ្យ $A(\vec{a})$ និង $B(\vec{b})$ បង្ហាញថា $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$**



ក្នុងត្រីកោណ OAB មាន $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$

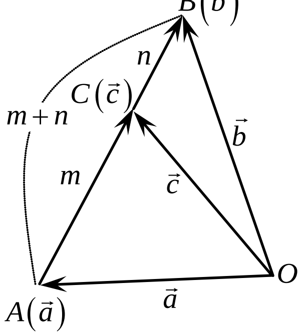
ទាញបាន $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

ដោយ $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ ព្រោះ $A(\vec{a})$ និង $B(\vec{b})$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $\boxed{\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}}$ ។

17. ក. **បង្ហាញថា $\vec{c}=\dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$ (វ៉ិចទ័រទីតាំងចែកក្នុង)**



គេមាន $\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$ និង $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

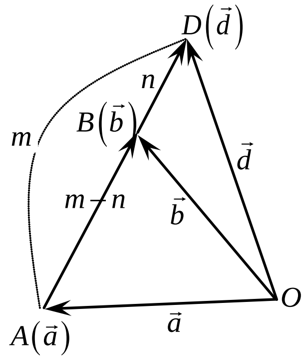
ផលធៀប $m:n$ មានន័យថា $\dfrac{AC}{m}=\dfrac{AB}{m+n}$ នោះ: $\overrightarrow{AC}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$

គេបាន $\vec{c}-\vec{a}=\dfrac{m}{m+n}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$

នាំឱ្យ $\vec{c}=\dfrac{m}{m+n}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+\vec{a}=\dfrac{m\vec{b}-m\vec{a}+m\vec{a}+n\vec{a}}{m+n}=\dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $\boxed{\vec{c}=\dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\vec{d}=\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$ (វិចទ័រទីតាំងចែកក្រៅ)



យើងមាន $\overrightarrow{AD}=\vec{d}-\vec{a}$ និង $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

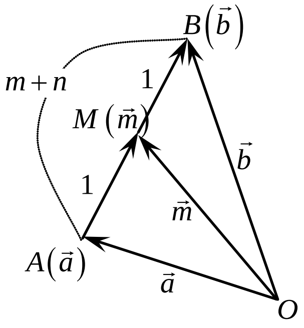
តាមផលធៀប $m:n$ មានន័យថា $\dfrac{\overrightarrow{AD}}{m}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{m-n}$ នោះ $\overrightarrow{AD}=\dfrac{m}{m-n}\overrightarrow{AB}$

យើងបាន $\vec{d}-\vec{a}=\dfrac{m}{m-n}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$

នាំឱ្យ $\vec{d}=\dfrac{m}{m-n}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+\vec{a}=\dfrac{m\vec{b}-m\vec{a}+m\vec{a}-n\vec{a}}{m-n}=\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $\boxed{\vec{d}=\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}}$ ។

គ. បង្ហាញថា វិចទ័រទីតាំងនៃចំណុចកណ្ដាលរបស់អង្កត់ AB គឺ $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$



តាង $M(\vec{m})$ ជាវិចទ័រទីតាំងនៃចំណុចកណ្ដាលអង្កត់ AB

បើ $M(\vec{m})$ ជាចំណុចចែកក្នុងនៃអង្កត់ AB បានផលធៀប $m:n$

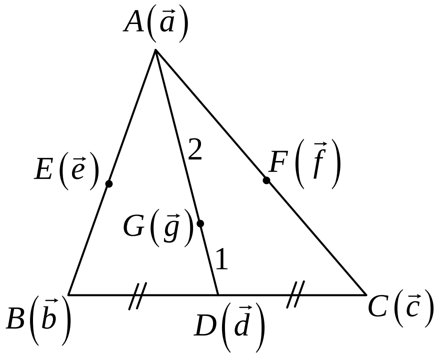
គេបាន $\vec{m}=\dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$

ដោយ M ជាចំណុចកណ្ដាលអង្កត់ AB នោះគេបាន $m:n=1:1$

នាំឱ្យ $\vec{m}=\dfrac{1\cdot\vec{b}+1\cdot\vec{a}}{1+1}=\dfrac{\vec{b}+\vec{a}}{2}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

ដូចនេះ វិចទ័រទីតាំងនៃចំណុចកណ្ដាលអង្កត់ AB គឺ $\boxed{\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}}$ ។

១៦. បង្ហាញថា មេដ្យានទាំងបីនៃត្រីកោណមួយប្រសព្វគ្នាបានមួយចំណុច ដោយប្រើវិចទ័រទីតាំង



គេយក $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ជាវិចទ័រទីតាំងរៀងគ្នានៃកំពូល A , B , C

ជ្រើសរើស D ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[BC]$ និងមានវិចទ័រទីតាំង $\vec{d}$

តាមលក្ខណៈវិចទ័រទីតាំងនៃចំណុចកណ្ដាល $\vec{d}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

យក $G(\vec{g})$ ជាចំណុចចែកក្នុងនៃមេដ្យាន AD ខាងក្នុងតាម

ផលធៀប $m:n$ ដោយយក $m=2\ ,n=1$

នោះគេបាន $\vec{g}=\dfrac{m\vec{d}+n\vec{a}}{m+n}=\dfrac{2\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)+1\cdot\vec{a}}{2+1}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

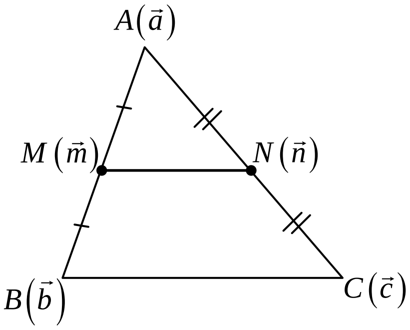
ដូចគ្នាដែរ បើគេយក $E(\vec{e})$, $F(\vec{f})$ ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃ $[AB]$, $[AC]$ និង $G'(\vec{g}')$, $G''(\vec{g}'')$ ជាចំណុចចែកក្នុងនៃ

មេដ្យាន CE និង BF រៀគ្នាតាមផលធៀប $m:n=2:1$ ដូចគ្នា គេនឹងបាន $\vec{g}'=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$, $\vec{g}''=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

ឃើញថា G , G' , G'' មានវិចទ័រទីតាំងតែមួយគឺ $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ មានន័យថា មេដ្យានទាំងបីប្រសព្វគ្នាត្រង់មួយចំណុច ។

ដូចនេះ **មេដ្យានទាំងបីប្រសព្វគ្នាបានមួយចំណុច ដែលគេហៅថា ទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ** ។

19. បង្ហាញថា អង្កត់ដែលភ្ជាប់ចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុងពីររបស់ត្រីកោណមួយ ស្របទៅនឹងជ្រុងទីបី ហើយស្មើពាក់កណ្ដាលនៃប្រវែងជ្រុងទីបីនេះ



គេយក $\vec a\,,\vec b\,,\vec c$ ជាវ៉ិចទ័រទីតាំងរៀងគ្នានៃកំពូល $A\,,B\,,C$

ជ្រើសរើស $M(\vec m)\,,N(\vec n)$ ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃ $[AB]\,,[AC]$

គេបាន $\vec m=\dfrac{\vec a+\vec b}{2}$ និង $\vec n=\dfrac{\vec a+\vec c}{2}$

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{MN}=\vec n-\vec m=\dfrac{\vec a+\vec c}{2}-\dfrac{\vec a+\vec b}{2}=\dfrac{\vec c-\vec b}{2}$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{MN}=\dfrac{\overrightarrow{BC}}{2}$ ព្រោះ $\overrightarrow{BC}=\vec c-\vec b$

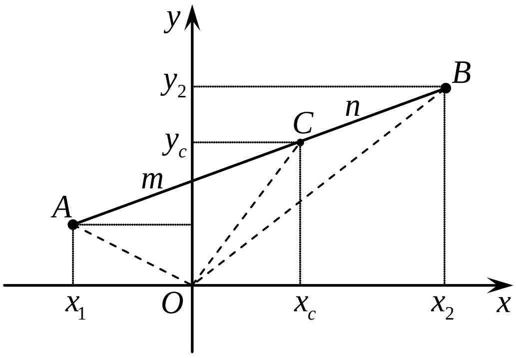
គេបាន $\overrightarrow{MN}//\overrightarrow{BC}$ ឬ $MN//BC$ និង $MN=\left|\overrightarrow{MN}\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{BC}}{2}\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{BC}\right|}{2}=\dfrac{BC}{2}$

ដូចនេះ

អង្កត់ដែលភ្ជាប់ចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុងពីររបស់ត្រីកោណមួយ ស្របទៅនឹងជ្រុងទីបី ហើយស្មើពាក់កណ្ដាលនៃប្រវែងជ្រុងទីបីនេះ គេហៅអង្កត់នេះថា ជាបាតមធ្យម

។

20. **បង្ហាញថាកូអរដោនេនៃចំណុច C ដែលចែកអង្កត់ AB ខាងក្នុង ដែលភ្ជាប់ពីចំណុច $A(x_1\,,y_1)$ និង $B(x_2\,,y_2)$ តាមផលធៀប $m:n$ ឱ្យដោយរូបមន្ត $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}\,,\ y=\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}$**



គេតាង $\overrightarrow{OA}=\vec a\,,\ \overrightarrow{OB}=\vec b\,,\overrightarrow{OC}=\vec c$

ដោយ $A(x_1\,,y_1)$ និង $B(x_2\,,y_2)$

នាំឱ្យ $\vec a=x_1\vec i+y_1\vec j$ និង $\vec b=x_2\vec i+y_2\vec j$

បើ C ជាចំណុចចែក $[AB]$ ខាងក្នុងតាមផលធៀប $m:n$

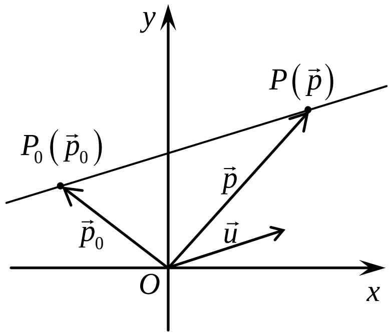
គេបាន
$$\vec c=\frac{m\vec b+n\vec a}{m+n}=\frac{m\left(x_2\vec i+y_2\vec j\right)+n\left(x_1\vec i+y_1\vec j\right)}{m+n}$$
$$=\frac{mx_2\vec i+my_2\vec j+nx_1\vec i+ny_1\vec j}{m+n}$$
$$=\frac{mx_2\vec i+nx_1\vec i}{m+n}+\frac{my_2\vec j+ny_1\vec j}{m+n}=\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)\vec i+\left(\frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)\vec j$$

ដូចនេះ

កូអរដោនេនៃចំណុច C គឺ $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}\,,\ y=\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}$ ត្រូវបានបង្ហាញ

។

21. **ក. បង្ហាញថា $\vec p=\vec p_0+t\vec u$ ជាសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រទម្រង់វ៉ិចទ័រ**



គេមាន បន្ទាត់កាត់តាម $P_0(\vec p_0)$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec u=(a\,,b)$

គេយក $P(\vec p)$ ជាចំណុចនៅលើបន្ទាត់ នោះ $\overrightarrow{P_0P}//\vec u$

គេបាន $\overrightarrow{P_0P}=t\vec u\ ,\ t\in\mathbb{R}$

ដោយ $\overrightarrow{P_0P}=\vec p-\vec p_0$ នាំឱ្យ $\vec p-\vec p_0=t\vec u$ ឬ $\vec p=\vec p_0+t\vec u$

ដូចនេះ

បង្ហាញបានថា $\vec p=\vec p_0+t\vec u\ ,\ t\in\mathbb{R}$ ជាសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រទម្រង់វ៉ិចទ័រ

។

ខ. បង្ហាញថា $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ ដែល t ជាចំនួនពិត ជាសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រទម្រង់គូអរដោនេ

គេយក $\vec{p} = (x\ ,\ y)$, $\vec{p}_0 = (x_0\ ,\ y_0)$, $\vec{u} = (a\ ,\ b)$, $t \in \mathbb{R}$

គេបាន $(x\ ,\ y) = (x_0\ ,\ y_0) + t(a\ ,\ b)$

$(x\ ,\ y) = (x_0\ ,\ y_0) + (ta\ ,\ tb)$

$(x\ ,\ y) = (x_0 + at\ ,\ y_0 + bt)$

នាំឱ្យ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$

ដូចនេះ: បង្ហាញបានថា $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ ជាសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

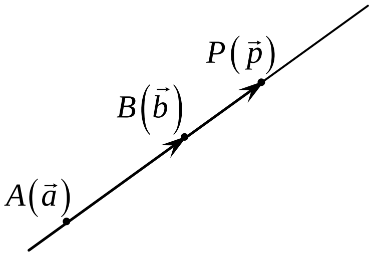
គ. បើ $a \neq 0$ និង $b \neq 0$ ទាញបង្ហាញថា គេបាន $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$ រួចទាញបន្តថា $y - y_0 = \dfrac{b}{a}(x - x_0)$

យើងមាន $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} x - x_o = at \\ y - y_0 = bt \end{cases}$ ទាញបាន $\begin{cases} \dfrac{x - x_o}{a} = t \\ \dfrac{y - y_0}{b} = t \end{cases}$ ឬ $\dfrac{x - x_o}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = t \quad (1)$

តាម (1) $\quad y - y_0 = b\left(\dfrac{x - x_0}{a}\right)$ ឬ $y - y_0 = \dfrac{b}{a}(x - x_0)$

ដូចនេះ: បង្ហាញបានថា $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$ ហើយ $y - y_0 = \dfrac{b}{a}(x - x_0)$ ។

22. បង្ហាញថា បន្ទាត់ដែលកាត់តាមពីរចំណុច $A(\vec{a})$ និង $B(\vec{b})$ មានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$



ជ្រើសរើស ចំណុច $P(\vec{p})$ នៅលើបន្ទាត់

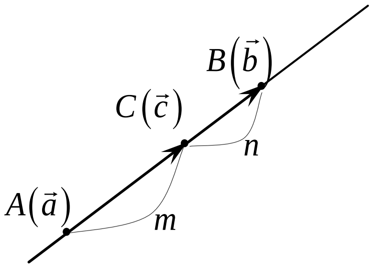
គេបាន $\overrightarrow{AP} // \overrightarrow{AB}$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$, $t \in \mathbb{R}$

ដោយ $\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}$ និង $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

គេបាន $\vec{p} - \vec{a} = t(\vec{b} - \vec{a})$ នាំឱ្យបាន $\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$

ដូចនេះ: សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

23. បង្ហាញថា $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$



ដោយ បន្ទាត់កាត់ $A(\vec{a})$ និង $B(\vec{b})$ និង $C(\vec{c}) \in AB$

គេបាន $\overrightarrow{AP} // \overrightarrow{AB}$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$, $t \in \mathbb{R}$

ឬ $\vec{c} - \vec{a} = t(\vec{b} - \vec{a})$ នោះ: $\vec{c} = \vec{a} + t\vec{b} - t\vec{a} = (1 - t)\vec{a} + t\vec{b} \quad (1)$

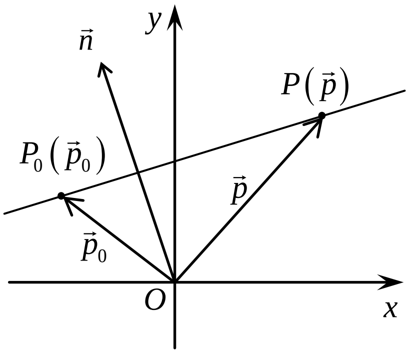
ដោយ $m + n = 1$ ហើយបើយក $t = n$ នោះ: $m = 1 - t$

គេបាន (1) ទៅជា $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$

ដូចនេះ: បង្ហាញបានថា $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ ។

24. **ក. បង្ហាញថា សមីការបន្ទាត់កាត់** $P_0(x_0\ ,\ y_0)$ **ហើយកែងទៅនឹងវិចទ័រ** $\vec{n}=(a\ ,\ b)$ **គឺ** $\begin{cases}\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{p}_0)=0\\ a(x-x_0)+b(y-y_0)=0\end{cases}$

ជ្រើសរើស ចំណុច $P(\vec{p})$ មានកូអរដោនេ $P(x\ ,\ y)$ នៅលើបន្ទាត់



គេបាន $\vec{n}\perp\overrightarrow{P_0P}$ នាំឱ្យ $\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$

ដោយ $\overrightarrow{P_0P}=\vec{p}-\vec{p}_0$ គេបាន $\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{p}_0)=0 \quad (1)$

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0\ ,\ y-y_0)$ និង $\vec{n}=(a\ ,\ b)$

គេបាន $\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{p}_0)=0 \Leftrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន $\begin{cases}\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{p}_0)=0\\ a(x-x_0)+b(y-y_0)=0\end{cases}$

ដូចនេះ $\begin{cases}\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{p}_0)=0\\ a(x-x_0)+b(y-y_0)=0\end{cases}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ខ. បង្ហាញថា បើតាង $c=-ax_0-by_0$ **គេអាចសរសេរ** $ax+by+c=0$

គេមាន $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ ពន្លាតកន្សោម

$$ax-ax_0+by-by_0=0$$

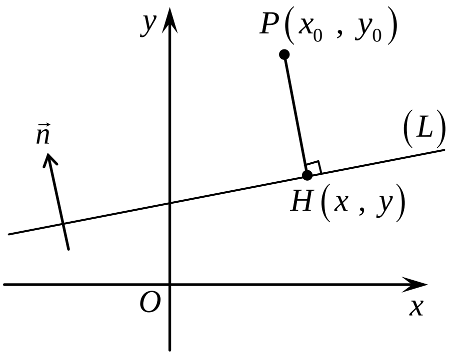
$$ax+by-ax_0-by_0=0 \quad , \quad c=-ax_0-by_0$$

$$ax+by+c=0$$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $ax+by+c=0$ ។

25. **បង្ហាញថា ចម្ងាយរវាងបន្ទាត់** $ax+by+c=0$ **និងចំណុច** $P(x_0\ ,\ y_0)$ **គឺស្មើ** $d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

គេតាង $H(x\ ,\ y)$ ជាចំណុចនៅលើបន្ទាត់ ដែល $\overrightarrow{PH}\perp(L)$



គេបាន $\overrightarrow{PH}=(x-x_0\ ,\ y-y_0)$

បើ $\vec{n}=(a\ ,\ b)$ ជាវិចទ័រណរម៉ាល់នៃ បន្ទាត់ (L) នោះ $\overrightarrow{PH}\,//\,\vec{n}$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{PH}\cdot\vec{n}=|\overrightarrow{PH}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos\theta$ ដែល θ ជាមុំបង្កើតដោយ $\overrightarrow{PH}$ និង $\vec{n}$

នោះ $\theta=180^\circ$ ឬ $\theta=0^\circ$ ធ្វើឱ្យ $\cos\theta=\pm1$

គេបាន $\overrightarrow{PH}\cdot\vec{n}=\pm|\overrightarrow{PH}|\cdot|\vec{n}|$ នោះ $|\overrightarrow{PH}\cdot\vec{n}|=|\overrightarrow{PH}|\cdot|\vec{n}|$

ដោយ $|\overrightarrow{PH}|=d$ នាំឱ្យ $|\overrightarrow{PH}\cdot\vec{n}|=d\cdot|\vec{n}|$ ទាញបាន $d=\dfrac{|\overrightarrow{PH}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} \quad (1)$

ហើយ $H(x\ ,\ y)$ នោះនៅលើបន្ទាត់ $L:\ ax+by+c=0 \Rightarrow -c=ax+by$

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{PH}\cdot\vec{n}=a(x-x_0)+b(y-y_0)=ax+by-ax_0-by_0=-ax_0-by_0-c$

គេបាន $|\overrightarrow{PH}\cdot\vec{n}|=|-ax_0-by_0-c|=|ax_0+by_0+c|$ និង $|\vec{n}|=\sqrt{a^2+b^2}$

នាំឱ្យ (1) អាចសរសេរបាន $d=\dfrac{|\overrightarrow{PH}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ដូចនេះ $d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

26. ក. បង្ហាញថា សមីការរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $C(x_0\ ,\ y_0)$ និងមានកាំ r គឺ $\begin{cases} |\vec{p}-\vec{c}| = r \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2 \end{cases}$

គេយក $P(\vec{p})$ ជាចំណុចនៅលើរង្វង់

គេបាន $CP = r$ ឬ $|\overrightarrow{CP}| = r$

តែ $\overrightarrow{CP} = \vec{p}-\vec{c}$ នាំឱ្យ $|\vec{p}-\vec{c}| = r \quad (1)$

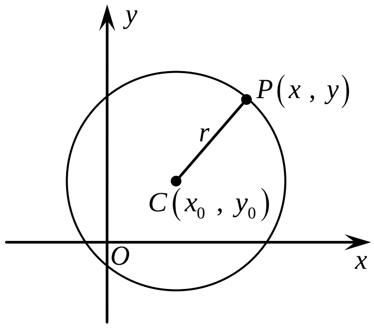
លើក (1) ជាការេ $|\vec{p}-\vec{c}|^2 = r^2$

ដោយ $\vec{p} = (x\ ,\ y)\ ,\ \vec{c} = (x_0\ ,\ y_0)$

គេបាន $\vec{p}-\vec{c} = (x-x_0\ ,\ y-y_0)$

$$|\vec{p}-\vec{c}| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

$$|\vec{p}-\vec{c}|^2 = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2$$



នាំឱ្យ $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$

ដូចនេះ $\begin{cases} |\vec{p}-\vec{c}| = r \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2 \end{cases}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ខ. បង្ហាញថា សមីការរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $O(0\ ,\ 0)$ និងកាំ r គឺ $x^2+y^2 = r^2$

គេមានសមីការរង្វង់ផ្ចិត $C(x_0\ ,\ y_0)$ គឺ $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$

គេយក ផ្ចិត $C(x_0\ ,\ y_0) = O(0\ ,\ 0)$ នោះ $x_0 = 0\ ,\ y_0 = 0$

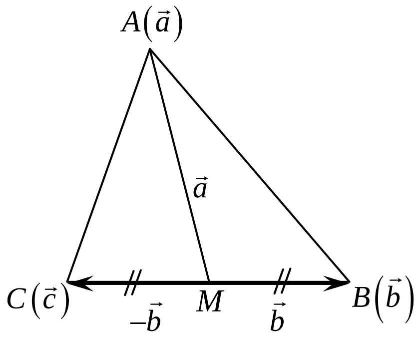
គេបាន $(x-0)^2+(y-0)^2 = r^2$ ឬ $x^2+y^2 = r^2$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា សមីការរង្វង់ផ្ចិត $O(0\ ,\ 0)$ គឺ $x^2+y^2 = r^2$ ។

27. បង្ហាញថា បើ M ជាចំណុចកណ្តាលជ្រុង AB នៃត្រីកោណ ABC នោះគេបាន $AB^2+AC^2 = 2\left(AM^2+BM^2\right)$

គេយក M ជាគល់នៃវិចទ័រ

គេតាង $\vec{a}\ ,\ \vec{b}$ ជាវិចទ័រទីតាំងនៃ $A\ ,\ B$ រៀងគ្នា នោះ C មានវិចទ័រទីតាំង $-\vec{b}$



នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB} = \vec{b}-\vec{a}\ ,\ \overrightarrow{CA} = \vec{a}+\vec{b}$

គេបាន $AB^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{b}-\vec{a}|^2 = (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$

$$AC^2 = |\overrightarrow{CA}|^2 = |\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

នាំឱ្យ $AB^2+AC^2 = \left[|\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2\right]+\left[|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\right]$

$$= 2\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\right)$$

$$= 2\left(AM^2+BM^2\right)$$

ដូចនេះ ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $AB^2+AC^2 = 2\left(AM^2+BM^2\right)$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន បំលែងរូបក្នុងប្លង់

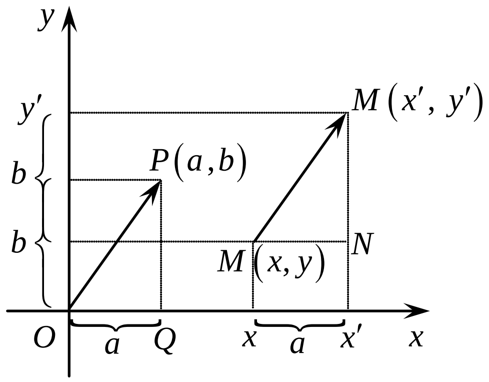
1. បើគេបំលែងកិលចំណុច $M(x\,,\,y)$ តាមវ៉ិចទ័រ $\vec{p}=(a\,,\,b)$ បានចំណុចថ្មី $M'(x'\,,\,y')$ ។
   បង្ហាញថា កូអរដោនេចំណុចថ្មីនោះគឺ $M'(x+a\,,\,y+b)$ ។
2. បង្ហាញថា ចំណុច $M'(x\,,-y)$ ជាចំណុចឆ្លុះនៃចំណុច $M(x\,,\,y)$ ធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'x)$ ។
3. បង្ហាញថា ចំណុច $N'(-x\,,\,y)$ ជាចំណុចឆ្លុះនៃចំណុច $N(x\,,\,y)$ ធៀបនឹងអ័ក្សអរដោនេ $(y'y)$ ។
4. ក. បង្ហាញថា បំលែងឆ្លុះ $(a\,,\,b)\to(a\,,\,2k-b)$ បើធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=k$ ។
   ខ. បង្ហាញថា បំលែងឆ្លុះ $(a\,,\,b)\to(2h-a\,,\,b)$ បើធៀបនឹងបន្ទាត់ $x=h$ ។
   គ. បង្ហាញថា បំលែងឆ្លុះ $(a\,,\,b)\to(b\,,\,a)$ បើធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ។
   ឃ. បង្ហាញថា បំលែងឆ្លុះ $(a\,,\,b)\to(-b\,,-a)$ បើធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=-x$ ។
5. ក. បង្ហាញថា បំលែងវិលផ្ចិត O មុំ $\theta=90^\circ$ គឺ $P(x\,,\,y)\to P'(-y\,,\,x)$ ។
   ខ. បង្ហាញថា បំលែងវិលផ្ចិត O មុំ $\theta=180^\circ$ គឺ $P(x\,,\,y)\to P'(-x\,,-y)$ ។
   គ. បង្ហាញថា បំលែងវិលផ្ចិត O មុំ $\theta=270^\circ$ ឬមុំ $\theta=-90^\circ$ គឺ $P(x\,,\,y)\to P'(y\,,-x)$ ។
6. បង្ហាញថា រូបភាពនៃចំណុច A តាមបំលែងចាំងផ្ចិត P ផលធៀប c គឺចំណុច A' ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{PA'}=c\overrightarrow{PA}$ ។
7. បង្ហាញថា បំលែងចាំងចំណុច $(x\,,\,y)$ ផ្ចិត $O(0\,,\,0)$ ផលធៀប $c\neq0$ គឺ $(x\,,\,y)\xrightarrow{h}(cx\,,\,cy)$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន បំលែងរូបក្នុងប្លង់

1. **បង្ហាញថា បើគេបំលែងកិលចំណុច** $M(x\,,\,y)$ **តាមវ៉ិចទ័រ** $\vec{p}=(a\,,\,b)$ **បានចំណុចថ្មី** $M'(x'\,,\,y')$ **ដែល** $M'(x+a\,,\,y+b)$

គេមាន តាមរូបគេបានចំណុច $M'(x'\,,\,y')$ ជារូបភាពនៃ

ចំណុច $M(x\,,\,y)$ តាមបំលែងកិលនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{p}$



តាមវ៉ិចទ័រ $\vec{p}$ គេកំណត់ដោយ $M(x\,,\,y)\xrightarrow{t_{\vec{p}}}M(x'\,,\,y')$

ដែល $\overrightarrow{MM'}=\vec{p}$

ដោយ ត្រីកោណកែង $\Delta OQP\cong\Delta MM'N$ (ករណី អ.ម)

នាំឱ្យបាន $M'(x'\,,\,y')=M'(x+a\,,\,y+b)$ ជារូបភាពនៃ

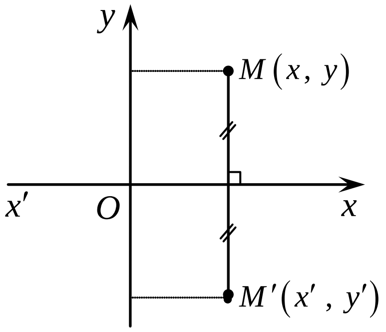
$M(x\,,\,y)$ តាមបំលែងកិលនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{p}=(a\,,\,b)$

ដូចនេះ: | បំលែងកិលចំណុច $M(x\,,\,y)$ តាមវ៉ិចទ័រ $\vec{p}=(a\,,\,b)$ បានចំណុចថ្មីគឺ $M'(x+a\,,\,y+b)$ | ។

2. **បង្ហាញថា ចំណុច** $M'(x\,,-y)$ **ជាចំណុចឆ្លុះនៃចំណុច** $M(x\,,\,y)$ **ធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស** $(x'x)$

គេតាង $M(x\,,\,y)$ និង $M'(x'\,,\,y')$

បើចំណុច $M(x\,,\,y)$ និង $M'(x'\,,\,y')$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្ស $x'x$



គេបាន $x'=x$ និង $y'=-y$

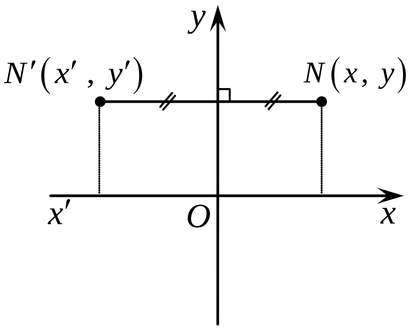
នាំឱ្យ $M(x\,,\,y)\xrightarrow{S_x}M'(x\,,-y)$

ដូចនេះ: | ចំណុច $M'(x\,,-y)$ ជាចំណុចឆ្លុះនៃចំណុច $M(x\,,\,y)$ ធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(x'x)$ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

3. **បង្ហាញថា ចំណុច** $N'(-x\,,\,y)$ **ជាចំណុចឆ្លុះនៃចំណុច** $N(x\,,\,y)$ **ធៀបនឹងអ័ក្សអរដោនេ** $(y'y)$

គេតាង $N(x\,,\,y)$ និង $N'(x'\,,\,y')$

បើចំណុច $N(x\,,\,y)$ និង $N'(x'\,,\,y')$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្ស $y'y$



គេបាន $x'=-x$ និង $y'=y$

នាំឱ្យ $M(x\,,\,y)\xrightarrow{S_y}M'(-x\,,\,y)$

ដូចនេះ: | ចំណុច $N'(-x\,,\,y)$ ជាចំណុចឆ្លុះនៃចំណុច $N(x\,,\,y)$ ធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស $(y'y)$ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

4. **ក. បង្ហាញថា បំលែងឆ្លុះ $(a\,,b)\to(a\,,2k-b)$ បើធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=k$**

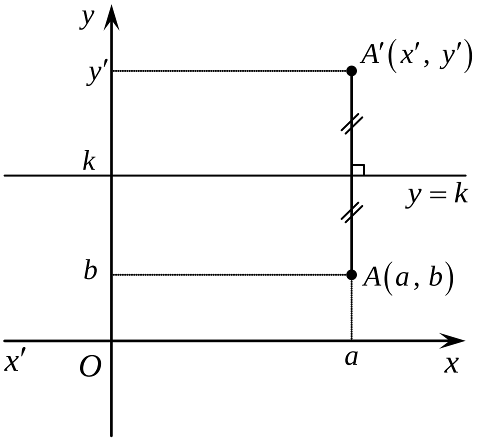
គេតាង $A(a\,,b)$ និង $A'(x'\,,y')$

បើចំណុច $A(a\,,b)$ និង $A'(x'\,,y')$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=k$

គេបាន $x'=a$ និង $y'=2k-b$

នាំឱ្យ $A(a\,,b)\to A'(a\,,2k-b)$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=k$

ដូចនេះ: បំលែងឆ្លុះពីចំណុចដែលមានកូអរដោនេ $(a\,,b)\to(a\,,2k-b)$ បើធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=k$ ។



ខ. បង្ហាញថា បំលែងឆ្លុះ $(a\,,b)\to(2h-a\,,b)$ បើធៀបនឹងបន្ទាត់ $x=h$

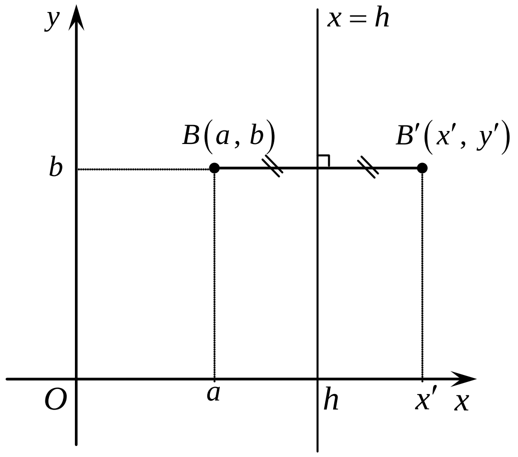
គេតាង $B(a\,,b)$ និង $B'(x'\,,y')$

បើចំណុច $B(a\,,b)$ និង $B'(x'\,,y')$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $x=h$

គេបាន $x'=2h-a$ និង $y'=b$

នាំឱ្យ $B(a\,,b)\to B'(2h-a\,,b)$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $x=h$

ដូចនេះ: បំលែងឆ្លុះពីចំណុចដែលមានកូអរដោនេ $(a\,,b)\to(2h-a\,,b)$ បើធៀបនឹងបន្ទាត់ $x=h$ ។



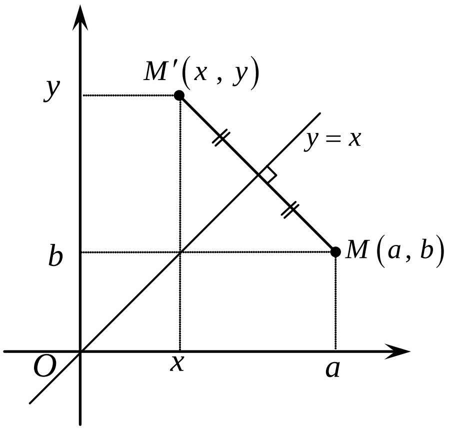
គ. បង្ហាញថា បំលែងឆ្លុះ $(a\,,b)\to(b\,,a)$ បើធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$

គេតាង $M(a\,,b)$ និង $M'(x\,,y)$

បើចំណុច $M(a\,,b)$ និង $M'(x\,,y)$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$

គេបាន $x=b$ និង $y=a$

ដូចនេះ: បំលែងឆ្លុះពីចំណុចដែលមានកូអរដោនេ $(a\,,b)\to(b\,,a)$ បើធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$ ។



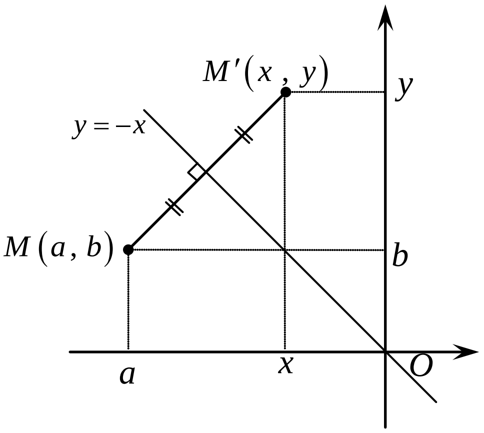
ឃ. បង្ហាញថា បំលែងឆ្លុះ $(a\,,b)\to(-b\,,-a)$ បើធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=-x$

គេតាង $M(a\,,b)$ និង $M'(x\,,y)$

បើចំណុច $M(a\,,b)$ និង $M'(x,\,y)$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=-x$

គេបាន $x=-b$ និង $y'=-a$

ដូចនេះ: បំលែងឆ្លុះពីចំណុចដែលមានកូអរដោនេ $(a\,,b)\to(-b\,,-a)$ បើធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=-x$ ។

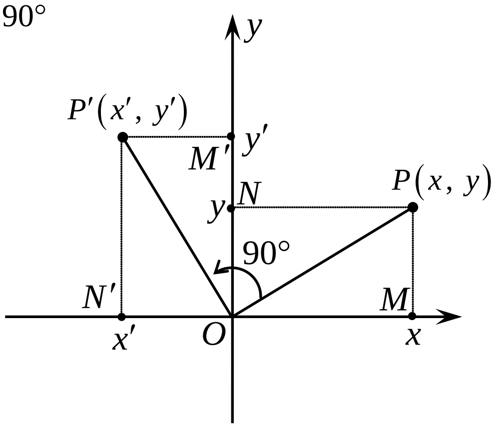


5\. **ក. បង្ហាញថា បំលែងវិលផ្ចិត** O មុំ $\theta=90^\circ$ គឺ $P(x\,,\,y)\to P'(-y\,,\,x)$

គេតាង $P'(x'\,,\,y')$ ជារូបភាពនៃ $P(x\,,\,y)$ តាមបំលែងវិល ផ្ចិត O មុំ $\theta=90^\circ$

នោះគេបាន $OP'=OP$, $(\overrightarrow{OP}\,,\overrightarrow{OP'})=90^\circ$

ដៅចំណុច M និង N ជាចំណោលកែងនៃចំណុច P មកលើអ័ក្ស $\overrightarrow{Ox}$ និង $\overrightarrow{Oy}$ បើ P ផ្លាស់ទីមក P' តាមមុំ 90° នោះ M និង N ក៏ផ្លាស់ទីមក M' និង N' តាមមុំ 90° ដែរ



តាមរូប គេបាន $x'=-y$ និង $y'=x$

នាំឱ្យ កូអរដោនេ $P'(x',y')=P'(-y\,,\,x)$

ដូចនេះ

បំលែងវិលផ្ចិត O មុំ $\theta=90^\circ$ គឺ $P(x\,,\,y)\to P'(-y\,,\,x)$

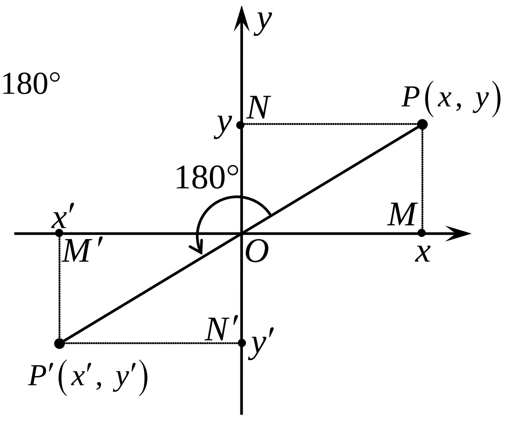
។

ខ. បង្ហាញថា បំលែងវិលផ្ចិត O មុំ $\theta=180^\circ$ គឺ $P(x\,,\,y)\to P'(-x\,,\,-y)$

គេតាង $P'(x'\,,\,y')$ ជារូបភាពនៃ $P(x\,,\,y)$ តាមបំលែងវិល ផ្ចិត O មុំ $\theta=180^\circ$

នោះគេបាន $OP'=OP$, $(\overrightarrow{OP}\,,\overrightarrow{OP'})=180^\circ$

ដៅចំណុច M និង N ជាចំណោលកែងនៃចំណុច P មកលើអ័ក្ស $\overrightarrow{Ox}$ និង $\overrightarrow{Oy}$ បើ P ផ្លាស់ទីមក P' តាមមុំ 180° នោះ M និង N ក៏ផ្លាស់ទីមក M' និង N' តាមមុំ 180° ដែរ



តាមរូប គេបាន $x'=-x$ និង $y'=-y$

នាំឱ្យ កូអរដោនេ $P'(x',y')=P'(-x\,,\,-y)$

ដូចនេះ

បំលែងវិលផ្ចិត O មុំ $\theta=180^\circ$ គឺ $P(x\,,\,y)\to P'(-x\,,\,-y)$

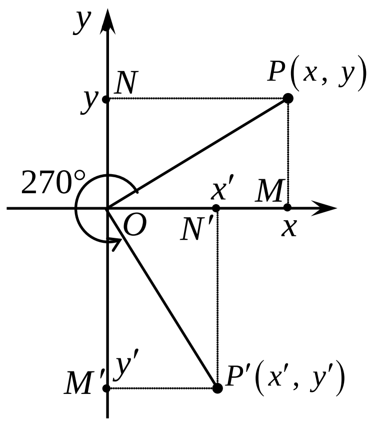
។

គ. បង្ហាញថា បំលែងវិលផ្ចិត O មុំ $\theta=270^\circ$ ឬមុំ $\theta=-90^\circ$ គឺ $P(x\,,\,y)\to P'(y\,,\,-x)$

គេតាង $P'(x'\,,\,y')$ ជារូបភាពនៃ $P(x\,,\,y)$ តាមបំលែងវិល ផ្ចិត O មុំ $\theta=270^\circ$

នោះគេបាន $OP'=OP$, $(\overrightarrow{OP}\,,\overrightarrow{OP'})=270^\circ$

ដៅចំណុច M និង N ជាចំណោលកែងនៃចំណុច P មកលើអ័ក្ស $\overrightarrow{Ox}$ និង $\overrightarrow{Oy}$ បើ P ផ្លាស់ទីមក P' តាមមុំ 270° នោះ M និង N ក៏ផ្លាស់ទីមក M' និង N' តាមមុំ 270° ដែរ



តាមរូប គេបាន $x'=y$ និង $y'=-x$

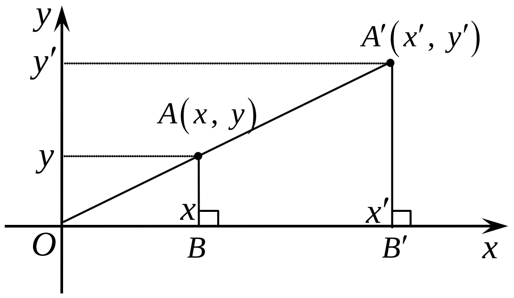
នាំឱ្យ កូអរដោនេ $P'(x',y')=P'(y\,,\,-x)$

ដូចនេះ

បំលែងវិលផ្ចិត O មុំ $\theta=180^\circ$ គឺ $P(x\,,\,y)\to P'(y\,,\,-x)$

។

6. **បង្ហាញថា រូបភាពនៃចំណុច A តាមបំលែងចាំងផ្ចិត $O(0\,,0)$ ផលធៀប c គឺចំណុច $A'(cx\,,cy)$**



គេតាង $A'(x'\,,y')$ ជារូបភាពនៃ $A(x\,,y)$ តាមបំលែងចាំងផលធៀប c

តាមចំណុច A និង A' ទម្លាក់ចំណោលកែងលើអ័ក្ស $\overrightarrow{Ox}$ ត្រង់ B និង B' រៀងគ្នា

នាំឱ្យ $\Delta OAB \sim \Delta OA'B'$ (តាមករណី ម.ម)

គេបាន ផលធៀប $\dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{A'B'}{AB}=c$

ទាញបាន $OB'=cOB$ និង $A'B'=cAB$

ដោយ $OB'=x'$, $OB=x$ និង $A'B'=y'$, $AB=y$

គេបាន $x'=cx$ និង $y'=cy$

នាំឱ្យ ចំណុច $A'(x'\,,y')=A'(cx\,,cy)$

ដូចនេះ រូបភាពនៃចំណុច A តាមបំលែងចាំងផ្ចិត $O(0\,,0)$ ផលធៀប c គឺចំណុច $A'(cx\,,cy)$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ធរណីមាត្រក្នុងលំហ

1. បង្ហាញថា បើបន្ទាត់មួយ និងប្លង់មួយមានចំណុចរួមពីរផ្សេងគ្នា នោះបន្ទាត់គឺត្រូវតែស្ថិតនៅក្នុងប្លង់នោះ ។
2. បង្ហាញថា តាមចំណុចមួយឋិតនៅក្រៅបន្ទាត់មួយ គេអាចគូសបន្ទាត់បានតែមួយគត់ ដែលស្របទៅនឹងបន្ទាត់នោះ ។
3. ក. បង្ហាញថា គ្រប់បន្ទាត់ដែលនៅក្រៅប្លង់មួយ ហើយស្របនឹងបន្ទាត់មួយនៃប្លង់ ជាបន្ទាត់ស្របនឹងប្លង់នោះ ។

   ខ. បង្ហាញថា បើបន្ទាត់មួយស្របនឹងប្លង់មួយ នោះគ្រប់ប្លង់ដែលកាត់តាមបន្ទាត់នេះ ជួបប្លង់ទី 1 តាមបន្ទាត់មួយស្របនឹងបន្ទាត់ទី 1 ។

   គ. បង្ហាញថា បើបន្ទាត់មួយស្របនឹងប្លង់ពីរប្រសព្វគ្នា នោះវាស្របទៅនឹងបន្ទាត់ប្រសព្វ រវាងប្លង់ទាំងពីរនោះ ។
4. ក. បង្ហាញថា តាមចំណុចមួយនៅក្រៅប្លង់ P មួយគេអាចគូសបានប្លង់ Q តែមួយ គត់ ដែលស្របទៅនឹងប្លង់នោះ ។

   ខ. បង្ហាញថា បើប្លង់ពីរស្របគ្នា នោះគ្រប់ប្លង់ដែលស្របនឹងប្លង់មួយ ត្រូវស្របនឹងប្លង់ មួយទៀត ។

   គ. បង្ហាញថា ប្លង់ពីរស្របគ្នា ហើយកាត់ដោយប្លង់ទីបី នោះបន្ទាត់ប្រសព្វ ជាបន្ទាត់ ស្របគ្នា ។

   ឃ. បង្ហាញថា បើប្លង់ពីរស្របគ្នា នោះគ្រប់បន្ទាត់កាត់ប្លង់ទី 1 ត្រូវកាត់ប្លង់ទី 2 ។

   ង. បង្ហាញថា ប្លង់ច្រើនស្របគ្នា កំណត់នៅលើខ្នាត់ពីរ បានអង្កត់ត្រូវគ្នាសមាមាត្រគ្នា។
5. ក. បង្ហាញថា បើបន្ទាត់មួយ អរតូកូណាល់នឹងបន្ទាត់ពីរប្រសព្វគ្នានៅក្នុងប្លង់ នោះ បន្ទាត់មួយនោះ ត្រូវកែងនឹងប្លង់ ។

   ខ. បង្ហាញថា $\left.\begin{matrix} a // b \\ a \perp P \end{matrix}\right\} \Rightarrow b \perp P$ ។

   គ. បង្ហាញថា $\left.\begin{matrix} a \perp P \\ b \perp P \end{matrix}\right\} \Rightarrow a // b$ ។

   ឃ. បង្ហាញថា $\left.\begin{matrix} a \perp P \\ P // Q \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \perp Q$ ។
6. ក. បង្ហាញថា បើបន្ទាត់ AB កែងនឹងប្លង់ P ត្រង់ B ហើយ BO កែងនឹងបន្ទាត់ a នៃប្លង់ P ត្រង់ O នោះបន្ទាត់ AO កែងនឹងបន្ទាត់ a ។

   ខ. បង្ហាញថា បើបន្ទាត់ AB កែងនឹងប្លង់ P ត្រង់ B ហើយ AO កែងនឹងបន្ទាត់ a នៃប្លង់ P ត្រង់ O នោះបន្ទាត់ BO កែងនឹងបន្ទាត់ a ។
7. បង្ហាញថា $\left.\begin{matrix} d \perp P \\ d // Q \end{matrix}\right\} \Rightarrow P \perp Q$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ធរណីមាត្រក្នុងលំហ

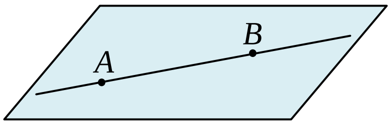
1. **បង្ហាញថា បើបន្ទាត់មួយ និងប្លង់មួយមានចំណុចរួមពីរផ្សេងគ្នា នោះបន្ទាត់គឺត្រូវតែស្ថិតនៅក្នុងប្លង់នោះ**

គេនឹងបង្ហាញថា បើបន្ទាត់ និងប្លង់មានចំណុចរួមពីរ នោះបន្ទាត់ត្រូវស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ តាមវិធីធ្វើពិសោធន៍ជាក់ស្តែង

គេដៅចំណុចពីរ A និង B នៅក្នុងប្លង់ក្រដាស ឬក្តារខៀន

គេយកបន្ទាត់ត្រង់មួយដាក់ឱ្យកាត់តាមពីរចំណុច A និង B នោះ

គេសង្កេតឃើញថា បន្ទាត់បិតនៅជាប់នឹងផ្ទៃនៃប្លង់ក្រដាស់ ឬក្តារខៀន



គេបាន $\begin{cases} A\in(P) \\ B\in(P) \end{cases}$ នោះ $(AB)\subset P$

គេថា បន្ទាត់ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ក្រដាស់ ឬក្តារខៀន

ដូចនេះ | បើបន្ទាត់មួយ និងប្លង់មួយមានចំណុចរួមពីរផ្សេងគ្នា នោះបន្ទាត់គឺត្រូវតែស្ថិតនៅក្នុងប្លង់នោះ | ។

2. **បង្ហាញថា តាមចំណុចមួយបិតនៅក្រៅបន្ទាត់មួយ គេអាចគូសបន្ទាត់បានតែមួយគត់ ដែលស្របទៅនឹងបន្ទាត់នោះ**

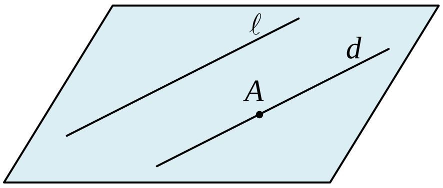
គេបកស្រាយតាមរយៈការធ្វើពិសោធន៍ជាក់ស្តែង ៖

គេមាន បន្ទាត់ ℓ និងចំណុច A នៅក្នុងប្លង់ P មួយ

គេគូស បន្ទាត់ d កាត់តាម A ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ ℓ

ឃើញថា នៅក្នុងប្លង់ P គេគូសបានបន្ទាត់ d តែមួយគត់

ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ d



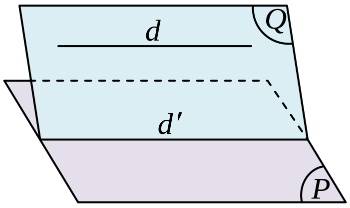
ដូចនេះ | តាមចំណុចមួយបិតនៅក្រៅបន្ទាត់មួយ គេអាចគូសបន្ទាត់បានតែមួយគត់ ដែលស្របទៅនឹងបន្ទាត់នោះ | ។

3. **ក. បង្ហាញថា គ្រប់បន្ទាត់ដែលនៅក្រៅប្លង់មួយ ហើយស្របនឹងបន្ទាត់មួយនៃប្លង់ ជាបន្ទាត់ស្របនឹងប្លង់នោះ**

គេចង់ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left.\begin{matrix} d\not\subset P \\ d\parallel d' \\ d'\subset P \end{matrix}\right\}$ នោះ $d\parallel P$

គេដឹងថា បន្ទាត់ពីរស្របគ្នា $d\parallel d'$ កំណត់បានប្លង់មួយ តាងដោយ

Q ដែល $P\cap Q=d'$



ឧបមាថា $d\cap P=\{A\}$ មានន័យថា $A\in P$, $A\in Q$

នោះគេបាន $A\in d'$ ព្រោះ $P\cap Q=d'$

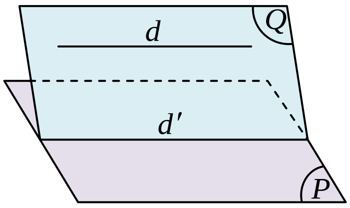
នាំឱ្យ $d\cap d'=\{A\}$ ករណីនេះផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែលថា $d\parallel d'$

គេបាន $d\cap P=\varnothing$ មានន័យថា បន្ទាត់ d មិនកាត់ប្លង់ P ទេ ពោលគឺ $d\parallel P$

ដូចនេះ | គ្រប់បន្ទាត់ដែលនៅក្រៅប្លង់មួយ ហើយស្របនឹងបន្ទាត់មួយនៃប្លង់ ជាបន្ទាត់ស្របនឹងប្លង់នោះ | ។

ខ. បង្ហាញថា បើបន្ទាត់មួយស្របនឹងប្លង់មួយ នោះគ្រប់ប្លង់ដែលកាត់តាមបន្ទាត់នេះ ជួបប្លង់ទី 1 តាមបន្ទាត់មួយស្របនឹងបន្ទាត់ទី 1

គេចង់ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left.\begin{array}{l} d \parallel P \\ d \subset Q \\ P \cap Q = d' \end{array}\right\}$ នោះ $d \parallel d'$



ឧបមាថា $d \cap d' = \{A\}$ នោះ $A \in d$, $A \in d'$ និង $A \in P$ ដែរ

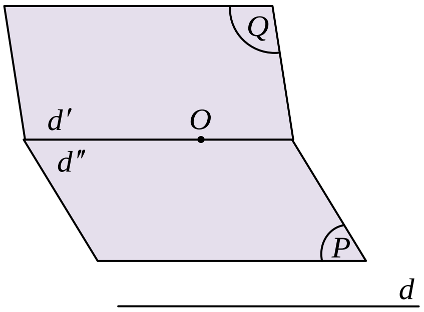
ដោយ $A \in d$ និង $A \in P$ មានន័យថា d ជួបនឹង P ជាករណី

ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ដែលថា $d \parallel P$ នាំឱ្យ $d \parallel d'$

ដូចនេះ: បើបន្ទាត់មួយស្របនឹងប្លង់មួយ នោះគ្រប់ប្លង់ដែលកាត់តាមបន្ទាត់នេះ ជួបប្លង់ទី 1 តាមបន្ទាត់មួយស្របនឹងបន្ទាត់ទី1

គ. បង្ហាញថា បើបន្ទាត់មួយស្របនឹងប្លង់ពីរប្រសព្វគ្នា នោះវាស្របទៅនឹងបន្ទាត់ប្រសព្វ រវាងប្លង់ទាំងពីរនោះ

គេចង់ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left.\begin{array}{l} d \parallel P \\ d \parallel Q \\ P \cap Q = d' \end{array}\right\}$ នោះ $d \parallel d'$



គេមាន ប្លង់ P និង Q ស្របនឹង d និង $P \cap Q = d'$

គេយក $O \in d'$ តាម O គូសបន្ទាត់ $d'' \parallel d$

គេបាន $O \in P$ នាំឱ្យ $d'' \in P$

$O \in Q$ នាំឱ្យ $d'' \in Q$

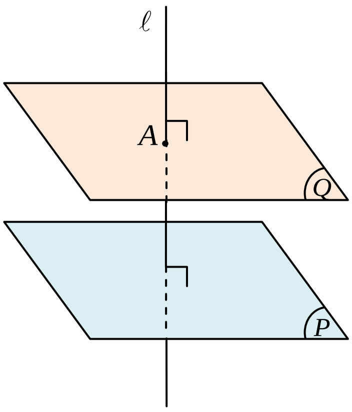
នាំឱ្យ $P \cap Q = d''$ មានន័យថា d'' ត្រួតលើ d'

ដោយ $d'' \parallel d$ នាំឱ្យ $d' \parallel d$ ដែរ

ដូចនេះ: បើបន្ទាត់មួយស្របនឹងប្លង់ពីរប្រសព្វគ្នា នោះវាស្របទៅនឹងបន្ទាត់ប្រសព្វ រវាងប្លង់ទាំងពីរនោះ ។

4. ក. បង្ហាញថា តាមចំណុចមួយនៅក្រៅប្លង់ P មួយគេអាចគូសបានប្លង់ Q តែមួយ គត់ ដែលស្របទៅនឹងប្លង់នោះ

តាមនិយមន័យ ប្លង់ពីរស្របគ្នា កាលណាវាគ្មានចំណុចប្រសព្វ ។



គេមាន ប្លង់ P និងចំណុច A មួយនៅក្រៅប្លង់ P

គេគូស បន្ទាត់ ℓ មួយកាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងប្លង់ P

គេគូស ប្លង់ Q មួយទៀតដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ ℓ

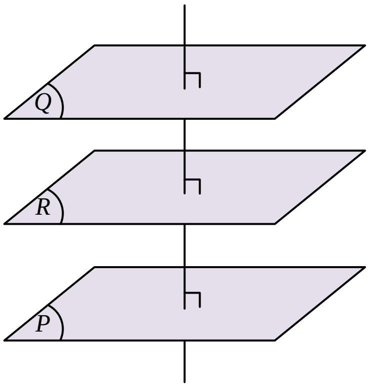
ឃើញថា គេគូសបានប្លង់ Q តែមួយគត់ ដែលកាត់តាមចំណុច A

ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ ℓ

ដោយ $\left.\begin{array}{l} P \perp \ell \\ Q \perp \ell \end{array}\right\}$ នោះ $P \parallel Q$

ដូចនេះ: តាមចំណុចមួយនៅក្រៅប្លង់ P មួយគេអាចគូសបានប្លង់ Q តែមួយ គត់ ដែលស្របទៅនឹងប្លង់នោះ ។

ខ. បង្ហាញថា បើប្លង់ពីរស្របគ្នា នោះគ្រប់ប្លង់ដែលស្របនឹងប្លង់មួយ ត្រូវស្របនឹងប្លង់ មួយទៀត



គេចង់ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left.\begin{matrix} P \parallel Q \\ P \parallel R \end{matrix}\right\}$ នោះ $Q \parallel R$

គេមាន P និង Q ជាប្លង់ស្របគ្នា

គេគូស បន្ទាត់ ℓ កែងនឹង P នោះ ℓ ក៏កែងនឹង Q ដែរ

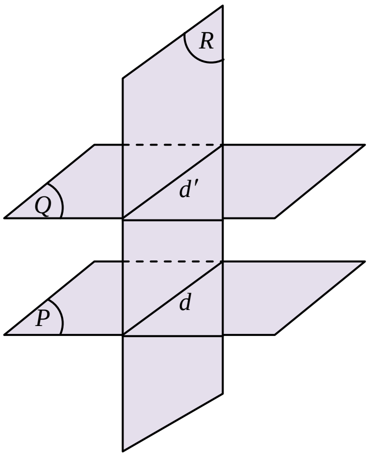
បើមាន ប្លង់ R មួយទៀតស្របនឹងប្លង់ P

ដោយ $P \parallel R$ និង $P \perp \ell$ នោះ $R \perp \ell$

គេបាន $\left.\begin{matrix} Q \perp \ell \\ R \perp \ell \end{matrix}\right\}$ នោះ $Q \parallel R$

ដូចនេះ | បើប្លង់ពីរស្របគ្នា នោះគ្រប់ប្លង់ដែលស្របនឹងប្លង់មួយ ត្រូវស្របនឹងប្លង់ មួយទៀត | ។

គ. បង្ហាញថា ប្លង់ពីរស្របគ្នា ហើយកាត់ដោយប្លង់ទីបី នោះបន្ទាត់ប្រសព្វ ជាបន្ទាត់ ស្របគ្នា



គេមាន ប្លង់ P និង Q ស្របគ្នា

បើមាន ប្លង់ R កាត់ P បានបន្ទាត់ d និងកាត់ Q បាន d'

គេនឹងបង្ហាញថា $d \parallel d'$

ឧបមាថា d ជួបនឹង d' ត្រង់ A

គេបាន $\left.\begin{matrix} A \in d \\ d \subset P \end{matrix}\right\}$ នោះ $A \in P$

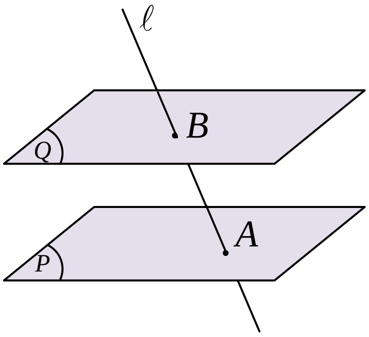
ម្យ៉ាងទៀត $\left.\begin{matrix} A \in d' \\ d' \subset Q \end{matrix}\right\}$ នោះ $A \in Q$

ឃើញថា A ជាចំណុចរួមនៃ P និង A ជាករណីផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ដែលថា $P \parallel Q$

នេះបញ្ជាក់ថា d និង d' នៅក្នុងប្លង់ R តែមួយ និងគ្មានចំណុចរួម នាំឱ្យ $d \parallel d'$

ដូចនេះ | ប្លង់ពីរស្របគ្នា ហើយកាត់ដោយប្លង់ទីបី នោះបន្ទាត់ប្រសព្វ ជាបន្ទាត់ ស្របគ្នា | ។

ឃ. បង្ហាញថា បើប្លង់ពីរស្របគ្នា នោះគ្រប់បន្ទាត់កាត់ប្លង់ទី 1 ត្រូវកាត់ប្លង់ទី 2



គេមាន ប្លង់ P និង Q ស្របគ្នា

គេតាង ℓ ជាបន្ទាត់ដែលកាត់ប្លង់ P ត្រង់ A មានន័យថា

ℓ មិនស្របនឹងប្លង់ P

គេនឹងបង្ហាញថា ℓ ក៏កាត់ប្លង់ Q ត្រង់ចំណុច B ណាមួយដែរ

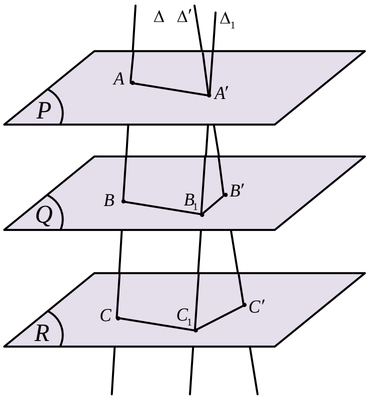
ឧបមាថា ℓ មិនកាត់ប្លង់ Q នាំឱ្យ $\ell \parallel Q$

ដោយ $\ell \parallel Q$ និង $P \parallel Q$ នាំឱ្យ $P \parallel \ell$ ជាករណីផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម

ដែលថា $P \cap \ell = \{A\}$ មានន័យថា ℓ ក៏កាត់ប្លង់ Q ដែរ

ដូចនេះ | បើប្លង់ពីរស្របគ្នា នោះគ្រប់បន្ទាត់កាត់ប្លង់ទី 1 ត្រូវកាត់ប្លង់ទី 2 | ។

ង. បង្ហាញថា ប្លង់ច្រើនស្របគ្នា កំណត់នៅលើខ្នាត់ពីរ បានអង្កត់ត្រូវគ្នាសមាមាត្រគ្នា



គេមាន ប្លង់ស្របគ្នាបីគឺ P , Q និង R ហើយកាត់ដោយខ្នាត់ពីរ Δ និង Δ' បានចំណុច A, B, C និង A', B', C' រៀងគ្នា ដូចរូបខាងស្តាំ ៖

ឧបមាថា បន្ទាត់ Δ_1 ស្របនឹង Δ កាត់ P , Q , R ត្រង់ A', B_1 , C_1 រៀងគ្នា

គេបាន $AB = A'B_1$, $BC = B_1C_1$ និង $AC = A'C_1$

បន្ទាត់ Δ_1 កាត់ Δ' ត្រង់ចំណុច A' ហើយកំណត់បានប្លង់មួយ ប្លង់នេះកាត់ប្លង់ Q និង R តាមបន្ទាត់ B_1B' និង C_1C' រៀងគ្នា ដែល $B_1B' \parallel C_1C'$

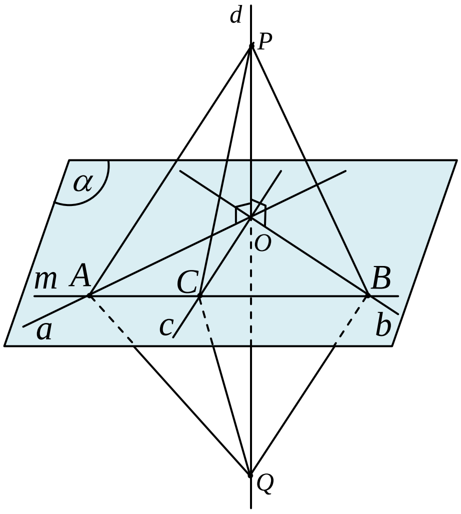
តាមទ្រឹស្តីបទតាលែស គេបានអង្កត់សមាមាត្រគ្នាគឺ $\dfrac{A'B'}{A'B_1} = \dfrac{B'C'}{B_1C_1} = \dfrac{A'C'}{A'C_1}$

ដូចនេះ: | ប្លង់ច្រើនស្របគ្នា កំណត់នៅលើខ្នាត់ពីរ បានអង្កត់ត្រូវគ្នាសមាមាត្រគ្នា | ។

5. **ក. បង្ហាញថា បើបន្ទាត់មួយ អរតូកូណាល់នឹងបន្ទាត់ពីរប្រសព្វគ្នានៅក្នុងប្លង់ នោះ បន្ទាត់មួយនោះ ត្រូវកែងនឹងប្លង់**

គេនឹងស្រាយថា $\left.\begin{array}{l} a \subset \alpha, b \subset \alpha \\ a \cap b = \{O\} \\ a \perp d, b \perp d \end{array}\right\}$ នោះ $d \perp \alpha$

ដើម្បីបង្ហាញថា $d \perp \alpha$ គេនឹងបង្ហាញថា $d \perp c$ ដែល $c \subset \alpha$, c ជាបន្ទាត់



គេមាន $a \perp d$, $b \perp d$ និងសន្មត់ថា $a \cap b = \{O\}$

ជ្រើសរើស P និង Q នៅលើបន្ទាត់ d ដែល $PO = OQ$

គេគូស បន្ទាត់ m ក្នុងប្លង់ α មិនកាត់តាម O ដែល m កាត់បន្ទាត់ a, b, c រៀងគ្នាត្រង់ A, B, C

គេមាន $\Delta AOP \cong \Delta AOQ$ (ករណី ជ.ម.ជ ព្រោះមាន AO រួម , $OP = OQ$, $\angle AOP = \angle AOQ = 90°$)

វិបាក $PA = AQ$

ហើយ $\Delta BOP \cong \Delta BOQ$ (ករណី ជ.ម.ជ ព្រោះមាន BO រួម , $OP = OQ$, $\angle BOP = \angle BOQ = 90°$)

វិបាក $BA = BQ$

ដោយ $PA = AQ$, $BA = BQ$ និង $AB = AB$ ជាជ្រុងរួម

នោះ $\Delta ABP \cong \Delta ABQ$ (ករណី ជ.ជ.ជ) វិបាក $\angle PAC = \angle QAC$

នាំឱ្យ ΔPAC និង ΔQAC មាន $PA = AQ$, AC ជ្រុងរួម និង $\angle PAC = \angle QAC$

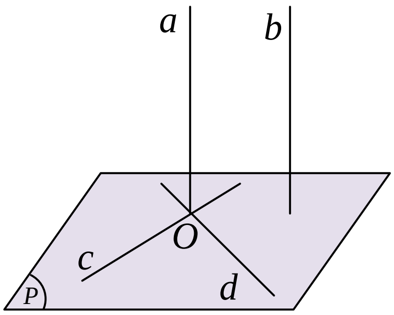
គេបាន $\Delta PAC \cong \Delta QAC$ (ករណី ជ.ម.ជ) វិបាក $PC = CQ$

ឃើញថា PCQ ជាត្រីកោណសមបាត និងមាន O កណ្តាល PQ នាំឱ្យ OC ជាកម្ពស់នៃ ΔPCQ

មានន័យថា $CO \perp PQ$ ពោលគឺ $d \perp c$ ដូចអ្វីដែលចង់បង្ហាញ

ដូចនេះ: | បើបន្ទាត់មួយ អរតូកូណាល់នឹងបន្ទាត់ពីរប្រសព្វគ្នានៅក្នុងប្លង់ នោះ បន្ទាត់មួយនោះ ត្រូវកែងនឹងប្លង់ | ។

ខ. បង្ហាញថា $\left.\begin{matrix} a//b \\ a\perp P\end{matrix}\right\}\Rightarrow b\perp P$



គេតាង c និង d ជាពីរបន្ទាត់នៅក្នុងប្លង់ P ប្រសព្វគ្នាត្រង់ O

គេមាន $a\perp P$ នោះ $\begin{cases} a\perp c \\ a\perp d\end{cases}$

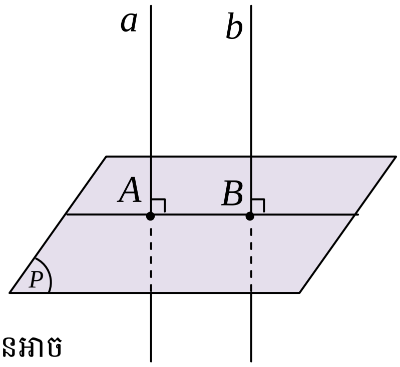
$a//b$ នោះគេបាន b អរតូកូណាល់នឹង c និង d

ដោយ a អរតូកូណាល់ទៅនឹងគ្រប់បន្ទាត់ក្នុងប្លង់ P និង $a//b$

នាំឱ្យ b ក៏អរតូកូណាល់ទៅនឹងគ្រប់បន្ទាត់ក្នុងប្លង់ P ដែល មានន័យថា $b\perp P$

ដូចនេះ: $\left.\begin{matrix} a//b \\ a\perp P\end{matrix}\right\}\Rightarrow b\perp P$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

គ. បង្ហាញថា $\left.\begin{matrix} a\perp P \\ b\perp P\end{matrix}\right\}\Rightarrow a//b$



ឧបមាថា បន្ទាត់ b មិនស្របនឹង a

នាំឱ្យ គេអាចគូសបាន b' ដែល $b'\parallel a$ ហើយ b' កាត់តាម B

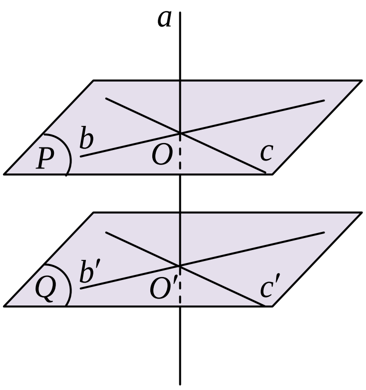
ដោយ $\left.\begin{matrix} a\perp P \\ b'\parallel a\end{matrix}\right\}\Rightarrow b'\perp P$ (បានទ្រឹស្តីបទ ក.)

បានន័យថា តាម B មានបន្ទាត់ b និង b' ដែលកែងនឹងប្លង់ P តែមួយជាករណីមិនអាច

នាំឱ្យ បន្ទាត់ b មិនស្របនឹង a មិនពិត មានន័យថា $a//b$

ដូចនេះ: $\left.\begin{matrix} a\perp P \\ b\perp P\end{matrix}\right\}\Rightarrow a//b$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ឃ. បង្ហាញថា $\left.\begin{matrix} a\perp P \\ P//Q\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\perp Q$



គេមាន $a\perp P$, $P//Q$

ដោយ $a\perp P$ នោះ a អរតូកូណាល់គ្រប់បន្ទាត់ក្នុងប្លង់ P

ជ្រើសរើស បន្ទាត់ពីរ b និង c ប្រសព្វគ្នាត្រង់ O ក្នុងប្លង់ P

នោះ $a\perp b$ និង $a\perp c$ ត្រង់ចំណុច O

ម្យ៉ាងទៀត $P\parallel Q$ នាំឱ្យមានបន្ទាត់ $b'\parallel b$, $c'\parallel c$ ដែល $b'\subset Q$, $c'\subset Q$ និង $b'\cap c'=\{O'\}$

គេបាន $a\perp b'$ និង $a\perp c'$ ត្រង់ចំណុច O'

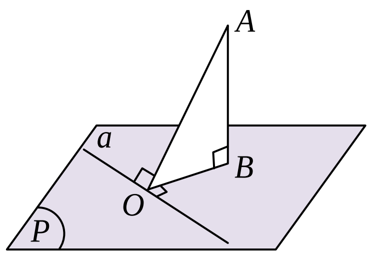
តាមទ្រឹស្តីបទ 1 នៃបន្ទាត់កែងនឹងប្លង់ គេបាន $\left.\begin{matrix} a\perp b' , a\perp c' \\ b'\cap c'=\{O'\}\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\perp Q$

ដូចនេះ: $\left.\begin{matrix} a\perp P \\ P//Q\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\perp Q$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

6. **ក. បង្ហាញថា បន្ទាត់ AO កែងនឹងបន្ទាត់ a**

គេមាន បន្ទាត់ AB កែងនឹងប្លង់ P ត្រង់ B

ហើយ BO កែងនឹងបន្ទាត់ a នៃប្លង់ P ត្រង់ O



គេបាន $\left.\begin{matrix} AB \perp P \\ a \subset P \end{matrix}\right\}$ នោះគេបាន $AB \perp a$

$\left.\begin{matrix} AB \perp a \\ BO \perp a \end{matrix}\right\}$ នោះ $a \perp AOB$

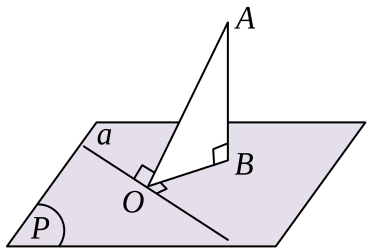
$\left.\begin{matrix} a \perp AOB \\ AO \subset AOB \end{matrix}\right\}$ នោះគេបាន $AO \perp a$

ដូចនេះ: | បន្ទាត់ AO កែងនឹងបន្ទាត់ a ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

ខ. បង្ហាញថា បន្ទាត់ BO កែងនឹងបន្ទាត់ a

គេមាន បន្ទាត់ AB កែងនឹងប្លង់ P ត្រង់ B

ហើយ AO កែងនឹងបន្ទាត់ a នៃប្លង់ P ត្រង់ O



គេបាន $\left.\begin{matrix} AB \perp P \\ a \subset P \end{matrix}\right\}$ នោះគេបាន $AB \perp a$

$\left.\begin{matrix} AB \perp a \\ AO \perp a \end{matrix}\right\}$ នោះ $a \perp AOB$

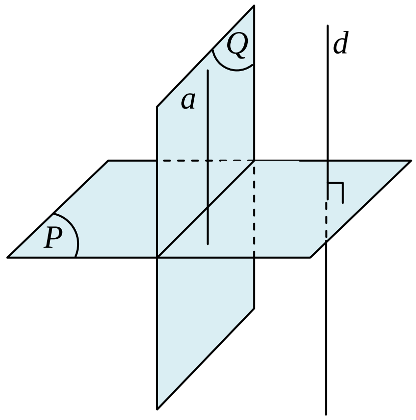
$\left.\begin{matrix} a \perp AOB \\ BO \subset AOB \end{matrix}\right\}$ នោះគេបាន $BO \perp a$

ដូចនេះ: | បន្ទាត់ BO កែងនឹងបន្ទាត់ a ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

7. **បង្ហាញថា** $\left.\begin{matrix} d \perp P \\ d // Q \end{matrix}\right\} \Rightarrow P \perp Q$

គេមាន $d \parallel Q$ យ៉ាងហោចណាស់ក៏មានបន្ទាត់ a មួយដែល

$a \subset Q$ និង $a \parallel d$



ដោយ $\left.\begin{matrix} d \perp P \\ a \parallel d \end{matrix}\right\}$ នោះ $a \perp P$

តាមនិយមន័យប្លង់ពីរកែងគ្នា ៖ គេថាប្លង់ P កែងនឹងប្លង់ Q កាលណាប្លង់ P

មានបន្ទាត់មួយកែងនឹងប្លង់ Q (ឬប្លង់ Q មានបន្ទាត់មួយកែងនឹងប្លង់ P)

ដោយ ប្លង់ Q មានបន្ទាត់ a កែងនឹងប្លង់ P នាំឱ្យ $Q \perp P$

ដូចនេះ: | $\left.\begin{matrix} d \perp P \\ d // Q \end{matrix}\right\} \Rightarrow P \perp Q$ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ស្វ៊ីត និងស៊េរី

1. បង្ហាញថា បើ d ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត (U_n) នោះគេបាន $d = U_{n+1} - U_n$ ។
2. ក. បង្ហាញថា តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយកំណត់ដោយ $U_n = U_1 + (n-1)\times d$ ដែល U_1 ជាតួទីមួយ និង d ជាផលសងរួម។
   ខ. បង្ហាញថា បើ (U_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត មានតួទីមួយ U_0 និង d ជាផលសងរួម គេបាន $U_n = U_0 + nd$ ។
3. ស្រាយបញ្ជាក់ ផលបូកតួនៅស្មើចម្ងាយពីតួចុង ដែល U_1 , U_2 , U_3 , ... , U_{n-2} , U_{n-1} , U_n មាន $U_1 + U_n = U_2 + U_{n-1} = U_3 + U_{n-2} = ... = U_p + U_{n-p+1}$ ។
4. បង្ហាញថា បើ a , b និង c ជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ $b = \dfrac{a+c}{2}$ (គេហៅ b ថា មធ្យមនព្វន្តនៃ a និង c) ។
5. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រកំណត់ដោយ $S_n = \dfrac{n}{2}(U_1 + U_n) = \dfrac{n}{2}\left[2U_1 + (n-1)d\right]$ ។
6. បង្ហាញថា បើ q ជាផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (U_n) នោះគេបាន $q = \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ ។
7. បង្ហាញថា រូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រកំណត់ដោយ : $U_n = U_1 \times q^{n-1}$ ។
8. បង្ហាញថា ផលគុណតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង $U_p \times U_{n-p+1} = U_1 \times U_n$ ។
9. បង្ហាញថា បើ a , b , c ជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ នោះគេបាន $ac = b^2$ (គេហៅ b ថា មធ្យមធរណីមាត្រនៃ a និង c) ។
10. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រកំណត់ដោយ $S_n = \dfrac{U_1(q^n - 1)}{q-1}$ ។
11. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ផលបូកអនន្តតួនៃស្វ៊ីត (U_n) ដែល $|q| < 1$ កំណត់ដោយ $S_\infty = \dfrac{U_1}{1-q}$ ។
12. បង្ហាញថា $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ។
13. បង្ហាញថា $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ។
14. បង្ហាញថា $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ ។
15. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈនៃផលបូកខាងក្រោម ៖

   ក. $\sum_{k=1}^{n} c = nc$

   ខ. $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

   គ. $\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

   ឃ. $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$
16. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះ ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n) ដែល $n \geq 2$ គេបាន $S_n - S_{n-1} = a_n$ ។

ការស្រាយបញ្ហាក់លើមេរៀន ស្វ៊ីត និងស៊េរី

1. **បង្ហាញថា បើ d ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $d=U_{n+1}-U_n$**

តាមនិយមន័យស្វ៊ីតនព្វន្ត ៖ តួនីមួយៗ ស្មើតួមុនបន្ទាប់ បូកនឹងចំនួនថេរមួយ

គេបាន $U_{n+1}=U_n+d$ (ដែល d ជាចំនួនថេរ ហៅថាផលសងរួម)

នាំឱ្យ $d=U_{n+1}-U_n$

ដូចនេះ $d=U_{n+1}-U_n$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

2. **ក. បង្ហាញថា តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយកំណត់ដោយ $U_n=U_1+(n-1)\times d$**

គេមាន d ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត និង U_1 ជាតួទីមួយ

គេបាន $U_2=U_1+d \qquad =U_1+(2-1)d$

$U_3=U_2+d=(U_1+d)+d=U_1+2d \quad =U_1+(3-1)d$

$U_4=U_3+d=(U_1+2d)+d=U_1+3d=U_1+(4-1)d$

$U_5=U_4+d=(U_1+3d)+d=U_1+4d=U_1+(5-1)d$

....

....

....

តាមលំនាំ $U_n=U_1+(n-1)\times d$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $U_n=U_1+(n-1)\times d$ ។

ខ. បង្ហាញថា ស្វ៊ីតនព្វន្តមានតួទី n គឺ $U_n=U_0+nd$ បើ U_0 ជាតួទីមួយ

គេមាន d ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត និង U_0 ជាតួទីមួយ

គេបាន $U_1=U_0+d \qquad =U_1+1d$

$U_2=U_1+d=(U_0+d)+d \quad =U_0+2d$

$U_3=U_2+d=(U_0+2d)+d=U_0+3d$

$U_4=U_3+d=(U_0+3d)+d=U_0+4d$

....

....

....

តាមលំនាំ $U_n=U_0+nd$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា $U_n=U_0+nd$ ។

3. **ស្រាយបញ្ជាក់ ផលបូកស្មើចម្ងាយពីតួចុង** $U_1+U_n=U_2+U_{n-1}=U_3+U_{n-2}=...=U_p+U_{n-p+1}$

តាមរូបមន្ត តួទី n នៃស៊ីតនព្វន្ត $U_n=U_1+(n-1)d$

គេបាន
$$U_1+U_n=U_1+U_1+(n-1)d \qquad =2U_1+(n-1)d$$
$$U_2+U_{n-1}=U_1+d+U_1+(n-2)d \qquad =2U_1+(n-1)d$$
$$U_3+U_{n-2}=U_1+2d+U_1+(n-3)d \qquad =2U_1+(n-1)d$$
....
$$U_p+U_{n-p+1}=U_1+(p-1)d+U_1+[(n-p+1)-1]d$$
$$=2U_1+pd-d+nd-pd$$
$$=2U_1+(n-1)d$$

ឃើញថា ផលបូក $U_1+U_n=U_2+U_{n-1}=U_3+U_{n-2}=...=U_p+U_{n-p+1}=2U_1+(n-1)d$ ដូចគ្នា

ដូចនេះ ផលបូកស្មើចម្ងាយពីតួចុង $U_1+U_n=U_2+U_{n-1}=U_3+U_{n-2}=...=U_p+U_{n-p+1}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

4. **បង្ហាញថា បើ a , b និង c ជាបីតួតគ្នានៃស៊ីតនព្វន្ត នោះ** $b=\dfrac{a+c}{2}$

➢**របៀបទី១** តាមផលបូកស្មើចម្ងាយពីតួចុង បើមានបីតួតគ្នា a , b , c

គេបាន $a+c=b+b$ ឬ $2b=a+c$ នាំឱ្យ $b=\dfrac{a+c}{2}$

➢**របៀបទី២** តាង a ជាតួទី១ នាំឱ្យ $b=a+d$, $c=a+2d$

គេបាន $\dfrac{a+c}{2}=\dfrac{a+a+2d}{2}=\dfrac{2a+2d}{2}=a+d=b$

ដូចនេះ $b=\dfrac{a+c}{2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

5. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនព្វន្តគឺ** $S_n=\dfrac{n}{2}(U_1+U_n)=\dfrac{n}{2}[2U_1+(n-1)d]$

គេមាន
$$+\begin{cases}S_n=U_1+U_2+U_3+...+U_{n-2}+U_{n-1}+U_n\\ S_n=U_n+U_{n-1}+U_{n-2}+...+U_3+U_2+U_1\end{cases}$$
$$2S_n=(U_1+U_n)+(U_2+U_{n-1})+(U_3+U_{n-2})+...+(U_3+U_{n-2})+(U_2+U_{n-1})+(U_1+U_n)$$

តាមផលបូកស្មើចម្ងាយពីតួចុង គេបាន $U_1+U_n=U_2+U_{n-1}=U_3+U_{n-2}=...$

គេបាន $2S_n=(U_1+U_n)+(U_1+U_n)+(U_1+U_n)+...+(U_1+U_n)+(U_1+U_n)+(U_1+U_n)$ មាន n តួនៃ (U_1+U_n)

$$2S_n=n(U_1+U_n)$$
$$S_n=\frac{n}{2}(U_1+U_n) \quad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀត $U_n=U_1+(n-1)d$

នោះ (1) ទៅជា $S_n=\dfrac{n}{2}[U_1+U_1+(n-1)d]=\dfrac{n}{2}[2U_1+(n-1)d]$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $S_n=\dfrac{n}{2}(U_1+U_n)=\dfrac{n}{2}[2U_1+(n-1)d]$

ដូចនេះ $S_n=\dfrac{n}{2}(U_1+U_n)=\dfrac{n}{2}[2U_1+(n-1)d]$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

6. **បង្ហាញថា បើ q ជាផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ នោះគេបាន $q=\frac{U_{n+1}}{U_n}$**

តាមនិយមន័យស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖ តួនីមួយៗ ស្មើតួមុនបន្ទាប់ គុណនឹងចំនួនថេរមួយ

គេបាន $U_{n+1}=U_n\times q$ (ដែល q ជាចំនួនថេរ ហៅថាផលធៀបរួម)

នាំឱ្យ $q=\frac{U_{n+1}}{U_n}$

ដូចនេះ: $q=\frac{U_{n+1}}{U_n}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

7. **បង្ហាញថា រូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រកំណត់ដោយ : $U_n=U_1\times q^{n-1}$**

គេមាន q ជាផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ និង U_1 ជាតួទីមួយ

គេបាន
$$U_2=U_1\times q \qquad =U_1\times q^{2-1}$$
$$U_3=U_2\times q=(U_1\times q)\times q=U_1\times q^2 \qquad =U_1\times q^{3-1}$$
$$U_4=U_3\times q=(U_1\times q^2)\times q=U_1\times q^3 \qquad =U_1\times q^{4-1}$$
$$U_5=U_4\times q=(U_1\times q^3)\times q=U_1\times q^4 \qquad =U_1\times q^{5-1}$$

....

តាមលំនាំ $U_n=U_1\times q^{n-1}$

ដូចនេះ: បង្ហាញបានថា $U_n=U_1\times q^{n-1}$ ។

8. **បង្ហាញថា ផលគុណតួស្មើចម្ងាយពីតួចុង $U_1\times U_n=U_2\times U_{n-1}=U_3\times U_{n-2}=\ldots=U_p\times U_{n-p+1}$**

តាមរូបមន្ត តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $U_n=U_1\times q^{n-1}$

គេបាន
$$U_1\times U_n=U_1\times U_1\times q^{n-1} \qquad =U_1^2\times q^{n-1}$$
$$U_2\times U_{n-1}=U_1\times q\times U_1\times q^{n-2} \qquad =U_1^2\times q^{n-1}$$
$$U_3\times U_{n-2}=U_1\times q^2\times U_1\times q^{n-3} \qquad =U_1^2\times q^{n-1}$$

....

$$U_p\times U_{n-p+1}=U_1\times q^{p-1}\times U_1\times q^{(n-p+1)-1}$$
$$=U_1^2\times q^{p-1}\times q^{n-p}$$
$$=U_1^2\times q^{p-1+n-p}=U_1^2\times q^{n-1}$$

ឃើញថា ផលគុណ $U_1\times U_n=U_2\times U_{n-1}=U_3\times U_{n-2}=\ldots=U_p\times U_{n-p+1}=U_1^2\times q^{n-1}$ ដូចគ្នា

ដូចនេះ: $U_1\times U_n=U_2\times U_{n-1}=U_3\times U_{n-2}=\ldots=U_p\times U_{n-p+1}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

9. **បង្ហាញថា បើ a , b , c ជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ នោះគេបាន $ac=b^2$**

➤**របៀបទី១** តាមផលគុណស្មើចម្ងាយពីតួចុង បើមានបីតួតគ្នា a , b , c គេបាន $a\times c=b\times b$ ឬ $b^2=ac$

➤**របៀបទី២** បើមានបីតួតគ្នា a , b , c គេបាន $q=\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$ នាំឱ្យបាន $b^2=ac$

ដូចនេះ: $ac=b^2$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

10. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រកំណត់ដោយ $S_n=\frac{U_1(q^n-1)}{q-1}$

គេមាន $S_n=U_1+U_2+U_3+\ldots+U_{n-2}+U_{n-1}+U_n$

$S_n=U_1+U_1q+U_1q^2+\ldots+U_1q^{n-3}+U_1q^{n-2}+U_1q^{n-1}\quad(1)$

នាំឱ្យ $qS_n=U_1q+U_1q^2+U_1q^3+\ldots+U_1q^{n-2}+U_1q^{n-1}+U_1q^n\quad(2)$ (បានដោយយក (1) គុណនឹង q)

គេយក $(2)-(1)$

គេបាន
$$-\begin{cases}qS_n= & U_1q+U_1q^2+U_1q^3+\ldots+U_1q^{n-3}+U_1q^{n-2}+U_1q^{n-1}+U_1q^n\\ S_n=U_1 & +U_1q+U_1q^2+U_1q^3+\ldots+U_1q^{n-3}+U_1q^{n-2}+U_1q^{n-1}\end{cases}$$
$$(q-1)S_n=U_1q^n-U_1$$

នាំឱ្យ $$S_n=\frac{U_1(q^n-1)}{q-1}$$

ដូចនេះ ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រគឺ $S_n=\frac{U_1(q^n-1)}{q-1}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

11. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ផលបូកអនន្តតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $S_\infty=\frac{U_1}{1-q}$

គេមាន $S_n=\frac{U_1(q^n-1)}{q-1}$ ចំពោះ $|q|\neq1$ អាចសរសេរជា $S_n=\frac{U_1q^n}{q-1}-\frac{U_1}{q-1}$

បើ $|q|<1$ នោះ q^n កាន់តែតូចទៅៗកាលណាចំនួនតួ n កាន់តែធំទៅៗមានន័យថា $q^n\to0$ ពេល $n\to+\infty$

គេបាន $S_n=S_\infty=0-\frac{U_1}{q-1}=\frac{U_1}{1-q}$ (ព្រោះពេល $n\to+\infty$ នោះ $q^n\to0$ នាំឱ្យ $\frac{U_1q^n}{q-1}\to0$)

ដូចនេះ ផលបូកអនន្តតួនៃស្វ៊ីត (U_n) ដែល $|q|<1$ កំណត់ដោយ $S_\infty=\frac{U_1}{q-1}$ ។

12. បង្ហាញថា $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

➤របៀបទី១ តាង $S_n=1+2+3+\ldots+n\quad(1)$

ឬ $S_n=n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1\quad(2)$

ដោយយក $(1)+(2)$ គេបាន

$$+\begin{cases}S_n= & 1 + 2 + 3 +\ldots+(n-2)+(n-1)+n\\ S_n= & n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1\end{cases}$$
$$2S_n=\underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)+(n+1)}_{(n+1)\text{ មាន } n \text{ តួ}}$$

$$2S_n=n(n+1)$$
$$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ដូចនេះ $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➤**របៀបទី២** ចំពោះស្វីត $1, 2, 3, \dots, n$ ជាស្វីតនព្វន្ត ដែលមាន $U_1 = 1$, $U_n = n$ និង $d = U_2 - U_1 = 2 - 1 = 1$

តាមរូបមន្ត $S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n) = \frac{n}{2}(1+n) = \frac{n(n+1)}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់}}$ ។

➤**របៀបទី៣** តាមវិចារកំណើន ៖ តាង $S_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

បើ $n=1$ នោះ $1 = \frac{1(1+1)}{2} \quad \Leftrightarrow 1 = 1$ ពិត

បើ $n=2$ នោះ $1+2 = \frac{2(2+1)}{2} \quad \Leftrightarrow 3 = 3$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k$ នោះ $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n = k+1$ នោះគេបាន $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

គេមាន $S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់}}$ ។

13. **បង្ហាញថា** $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

➤**របៀបទី១** គេមាន $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ បើគេយក $k = 1, 2, 3, \dots, n$ រួចបូកអង្គនិងអង្គដោយសម្រួលគ្នា គេបាន៖

$$+\begin{cases} 2^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1 \\ 3^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1 \\ 4^3 = 3^3 + 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (n+1)^3 = n^3 + 3\cdot n^2 + 3\cdot 3 + 1 \end{cases}$$

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3(1+2+3+\dots+n) + n$$

ដោយ $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ និង $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (ស្រាយបញ្ជាក់រួចខាងលើ)

នាំឱ្យ $(n+1)^3 = 1 + 3S_n + 3\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n$

នោះ $3S_n = (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - n - 1 = \frac{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)}{2}$

$$= \frac{(n+1)\left[2(n^2+2n+1) - 3n - 2\right]}{2} = \frac{(n+1)(2n^2+n)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

គេបាន $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់}}$ ។

➤**របៀបទី២** ស្រាយតាមវិចារកំណើន គេមាន $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

បើ $n = 1$ គេបាន $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} \Leftrightarrow 1 = 1$ ពិត

បើ $n = 2$ គេបាន $1^2 + 2^2 = \frac{2(2+1)(4+1)}{6} \Leftrightarrow 5 = 5$ ពិត

ឧបមាថា វាពិតរហូតដល់ $n = k$ គេបាន $S_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

គេនឹងស្រាយថាវាពិតរហូតដល់ $n = k+1$ គេបាន $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

ដោយ
$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\ &= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 4k + 3k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)[2k(k+2) + 3(k+2)]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

14. **បង្ហាញថា** $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

➤**របៀបទី១** តាមវិចារកំណើន

បើ $n = 1$ គេបាន $1^3 = \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4} \Leftrightarrow 1 = 1$ ពិត

បើ $n = 2$ គេបាន $1^3 + 2^3 = \frac{2^2 \cdot (2+1)^2}{4} \Leftrightarrow 9 = 9$ ពិត

ឧបមាថា វាពិតរហូតដល់ $n = k$ គេបាន $S_k = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$

គេនឹងស្រាយថាវាពិតរហូតដល់ $n = k+1$ គេបាន $S_{k+1} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

ដោយ $S_{k+1}=S_k+(k+1)^3$

$$=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$$

$$=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2\left[k^2+4(k+1)\right]}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2\left[k^2+4k+4\right]}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

ដូចនេះ: $\boxed{S_n=1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➢របៀបទី២ គេមាន $(k+1)^4=k^4+4k^3+6k^2+4k+1$

បើគេយក $k=1\,,2\,,3\,,...\,,n$ រួចបូកអង្គនិងអង្គដោយសម្រួលគ្នា គេបាន៖

$$+\begin{cases}2^4=1^4+4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1\\3^4=2^4+4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1\\4^4=3^4+4\cdot3^3+6\cdot3^2+4\cdot3+1\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\(n+1)^4=n^4+4\cdot n^3+6\cdot n^2+4\cdot n+1\end{cases}$$

$$(n+1)^4=1^4+4\left(1^3+2^3+3^3+...+n^3\right)+6\left(1^2+2^2+3^2+...+n^2\right)+4(1+2+3+...+n)+n$$

ដោយ $S_n=1^3+2^3+3^3+...+n^3$, $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ និង $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

គេបាន $(n+1)^4=1^4+4S_n+6\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$

$$4S_n=(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-n-1$$

$$=(n+1)\left[(n+1)^3-\left(2n^2+n\right)-2n-1\right]$$

$$=(n+1)\left[(n+1)^3-2n^2-3n-1\right]$$

$$=(n+1)\left[(n+1)^3-\left(2n^2+3n+1\right)\right]$$

$$=(n+1)\left[(n+1)^3-(n+1)(2x+1)\right]$$

$$=(n+1)^2\left[(n+1)^2-(2x+1)\right]$$

$$=(n+1)^2\left[n^2+2n+1-(2x+1)\right]$$

$$=n^2(n+1)^2$$

នាំឱ្យ $S_n=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

ដូចនេះ: $\boxed{S_n=1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

15. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈនៃផលបូកខាងក្រោម ៖

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sum_{k=1}^{n} c = nc$

គេមាន $\sum_{k=1}^{n} c = c + c + \ldots + c$ (ដោយ $\underbrace{c + c + c + \ldots + c}_{n \text{ តួ}} = nc$)

គេបាន $\sum_{k=1}^{n} c = c + c + \ldots + c = nc$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\sum_{k=1}^{n} c = nc}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

គេមាន $\sum_{k=1}^{n} ca_k = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n$

$= c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

គេមាន $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n)$

$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_3) \pm (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$

គេមាន $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \ldots + (a_n + b_n)^2$

$= (a_1^2 + 2a_1 b_1 + b_1^2) + (a_2^2 + 2a_2 b_2 + b_2^2) + (a_3^2 + 2a_3 b_3 + b_3^2) + \ldots + (a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2)$

$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2) + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots + a_n b_n) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2)$

$= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

16. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះ $n\geq 2$ គេបាន $S_n - S_{n-1} = a_n$

គេមាន $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad (1)$ និង $S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} \quad (2)$

គេយក $(1)-(2)$ គេបាន ៖

$$-\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} \end{cases}$$

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

ដូចនេះ: ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $S_n - S_{n-1} = a_n$ ពិតចំពោះ $n\geq 2$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

1. បង្ហាញលក្ខណៈនៃស្វ័យគុណខាងក្រោម ៖

ក. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ខ. $\left(a^m\right)^n = a^{m\times n}$ គ. $(ab)^n = a^n \times b^n$ ឃ. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

ង. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$ ច. $a^0 = 1$, $a \neq 0$ ឆ. $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$, $a \neq 0$ ជ. $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

ឈ. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $b \neq 0$ ញ. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ដ. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n\cdot k]{a}$ ឋ. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[k\cdot n]{a^{k\cdot m}}$ ។

2. បង្ហាញថាគេប្រើរូបមន្ត $P_t = P_0\left(1+\dfrac{i}{n}\right)^{nt}$ សម្រាប់គណនាប្រាក់សរុបរយៈពេល t ឆ្នាំ ដែល P_0 ជាប្រាក់ដើម , i ជាអត្រាការប្រាក់ក្នុងមួយឆ្នាំ , t ជាចំនួនឆ្នាំ , P_t ជាប្រាក់សរុបរយៈពេល t ឆ្នាំ , ទូទាត់ចំនួន n ដងក្នុងមួយឆ្នាំ ។

3. បង្ហាញថា ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = a^x$ កាត់តាមចំណុចដែលមានកូអរដោនេ $(0\,,1)$ ជានិច្ច ។

4. ចូរបង្ហាញថា បើ $f(x) = a^x$ នោះ $f(x)\,f(y) = f(x+y)$ ។

5. គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{2^{x+1}+\sqrt{2}}{2^x+\sqrt{2}}$ ។ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ m និង n ដែល $m+n=1$ ចូរបង្ហាញថា $f(m)+f(n)=3$ ។

6. គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ។ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(a+b) = \dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)\,f(b)}$ ។

7. បើ $(x_1\,, y_1)$ និង $(x_2\,, y_2)$ ជាពីរចំណុចនៅលើខ្សែកោង $f(x) = a^x$ នោះចំណុចទាំងពីរ $(x_1+x_2\ ,\ y_1y_2)$ និង $\left(x_1-x_2\ ,\ \dfrac{y_1}{y_2}\right)$ ក៏ជាពីរចំណុចនៅលើខ្សែកោង $f(x) = a^x$ ដែរ ។

8. បើចំណុច (x_1, y_1) នៅលើខ្សែកោង $f(x) = a^x$ នោះចំណុចទាំងពីរ $\left(2x_1\ ,\ y_1^2\right)$ និង $\left(-x_1\ ,\ \dfrac{1}{y_1}\right)$ ក៏នៅលើខ្សែកោង $f(x) = a^x$ ដែរ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

1. បង្ហាញលក្ខណៈនៃស្វ័យគុណខាងក្រោម ៖

ក. បង្ហាញលក្ខណៈនៃស្វ័យគុណ $a^m \times a^n = a^{m+n}$

តាមនិយមន័យ $\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{n\text{ កត្តា}} = a^n$

គេបាន $a^m \times a^n = \underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{m\text{ កត្តា}}\times\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{n\text{ កត្តា}} = \underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a\times a\times a}_{(m+n)\text{ កត្តា}} = a^{m+n}$

ដូចនេះ: លក្ខណៈ: $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ខ. បង្ហាញលក្ខណៈនៃស្វ័យគុណ $\left(a^m\right)^n = a^{m\times n}$

ពិនិត្យ $\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m \times a^m \times a^m \times\ldots\times a^m}_{n\text{ កត្តា}} = a^{\overbrace{m+m+m+\ldots+m}^{n\text{ កត្តា}}} = a^{m\times n}$ (ពង្រីកឱ្យធំស្រួលមើលស្វ័យគុណ)

ដូចនេះ: លក្ខណៈ: $\left(a^m\right)^n = a^{m\times n}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

គ. បង្ហាញលក្ខណៈនៃស្វ័យគុណ $(ab)^n = a^n \times b^n$

ពិនិត្យ $a^n \times b^n = \underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{n\text{ កត្តា}}\times\underbrace{b\times b\times b\times\ldots\times b}_{n\text{ កត្តា}} = \underbrace{(ab)\times(ab)\times(ab)\times\ldots\times(ab)}_{n\text{ កត្តា}} = (ab)^n$

ដូចនេះ: លក្ខណៈ: $(ab)^n = a^n \times b^n$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ឃ. បង្ហាញលក្ខណៈនៃស្វ័យគុណ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

ពិនិត្យ $\frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}^{n\text{ កត្តា}}}{\underbrace{b\times b\times b\times\ldots\times b}_{n\text{ កត្តា}}} = \underbrace{\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\ldots\times\frac{a}{b}}_{n\text{ កត្តា}} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

ដូចនេះ: លក្ខណៈ: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ង. បង្ហាញលក្ខណៈនៃស្វ័យគុណ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$

$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}^{m\text{ កត្តា}}}{\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{n\text{ កត្តា}}} = \underbrace{\frac{a}{a}\times\frac{a}{a}\times\frac{a}{a}\times\ldots\times\frac{a}{a}}_{n\text{ កត្តា}}\times\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{(m-n)\text{ កត្តា}} = \underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{(m-n)\text{ កត្តា}} = a^{m-n}$

ដូចនេះ: លក្ខណៈ: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ច. បង្ហាញលក្ខណៈនៃស្វ័យគុណ $a^0=1\,,\,a\neq 0$

គេមាន $\dfrac{a^n}{a^n}=\dfrac{\overbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}^{n\text{ កត្តា}}}{\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{n\text{ កត្តា}}}=\underbrace{\dfrac{a}{a}\times\dfrac{a}{a}\times\dfrac{a}{a}\times\ldots\times\dfrac{a}{a}}_{n\text{ កត្តា}}=\underbrace{1\times1\times1\times\ldots\times1}_{n\text{ កត្តា}}=1\quad(1)$

ម្យ៉ាងទៀត $\dfrac{a^n}{a^n}=a^{n-n}=a^0\quad(2)$

តាមរយៈ ទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន $a^0=1\,,\,a\neq0$

ដូចនេះ | លក្ខណៈ $a^0=1\,,\,a\neq0$ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

ឆ. បង្ហាញលក្ខណៈនៃស្វ័យគុណ $\dfrac{1}{a^n}=a^{-n}\,,\,a\neq0$

គេមាន $\dfrac{1}{a^n}=\dfrac{a^0}{a^n}=a^{0-n}=a^{-n}\,,\,a\neq0$

ដូចនេះ | លក្ខណៈ $\dfrac{1}{a^n}=a^{-n}\,,\,a\neq0$ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

ជ. បង្ហាញលក្ខណៈនៃស្វ័យគុណ $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ដែល $a>0\,,\,b>0$ និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n\geq2$

គេដឹងថា $\sqrt[n]{a^n}=a$ (សូមកុំច្រឡំថា $\sqrt[n]{a^n}=|a|$ ព្រោះក្នុងខណៈនេះយើងសិក្សាតែ $a>0\,,\,b>0$)

គេតាង $x=\sqrt[n]{a}$ នោះ $x^n=a$

$y=\sqrt[n]{b}$ នោះ $y^n=b$

គេបាន $x^ny^n=ab$ ឬ $(xy)^n=ab$ ឬ $xy=\sqrt[n]{ab}$ ឬ $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

ដូចនេះ | លក្ខណៈ $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

ឈ. បង្ហាញលក្ខណៈនៃស្វ័យគុណ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ ដែល $a>0\,,\,b>0$ និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n\geq2$

គេតាង $x=\sqrt[n]{a}$ នោះ $x^n=a$

$y=\sqrt[n]{b}$ នោះ $y^n=b$

គេបាន $\dfrac{x^n}{y^n}=\dfrac{a}{b}$ ឬ $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n=\dfrac{a}{b}$ ឬ $\dfrac{x}{y}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ ឬ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

ដូចនេះ | លក្ខណៈ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}\,,\,b\neq0$ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

ញ. បង្ហាញលក្ខណៈនៃស្វ័យគុណ $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

គេតាង $x=\sqrt[n]{a^m}\Rightarrow x^n=a^m$ ឬ $\left(x^n\right)^{\frac{1}{n}}=\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}\Rightarrow x^{n\times\frac{1}{n}}=a^{m\times\frac{1}{n}}$ ឬ $x=a^{\frac{m}{n}}$ នាំឱ្យ $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

ដូចនេះ | លក្ខណៈ $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

ជ. បង្ហាញលក្ខណៈនៃស្វ័យគុណ $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[n\cdot k]{a}$

គេតាង $x=\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} \Rightarrow x^n=\sqrt[k]{a}$ ឬ $\left(x^n\right)^k=a$ ឬ $x^{nk}=a$ ឬ $x=\sqrt[nk]{a}$ នាំឱ្យ $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[n\cdot k]{a}$

ដូចនេះ: | លក្ខណៈ: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[n\cdot k]{a}$ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

ឋ. បង្ហាញលក្ខណៈនៃស្វ័យគុណ $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[k\cdot n]{a^{k\cdot m}}$

គេតាង $x=\sqrt[n]{a^m} \Rightarrow x^n=a^m$ ឬ $\left(x^n\right)^k=\left(a^m\right)^k \Rightarrow x^{kn}=a^{km}$ ឬ $x=\sqrt[kn]{a^{km}}$ នាំឱ្យ $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[k\cdot n]{a^{k\cdot m}}$

ដូចនេះ: | លក្ខណៈ: $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[k\cdot n]{a^{k\cdot m}}$ ត្រូវបានបង្ហាញ | ។

2. **បង្ហាញថា គេប្រើរូបមន្ត** $P_t=P_0\left(1+\dfrac{i}{n}\right)^{nt}$ **សម្រាប់គណនាប្រាក់សរុបរយៈពេល** t **ឆ្នាំ**

គេមាន P_0 ជាប្រាក់ដើម , i ជាអត្រាការប្រាក់ ក្នុងមួយឆ្នាំ ,

t ជាចំនួនឆ្នាំ , P_t ជាប្រាក់សរុបរយៈពេល t ឆ្នាំ , ទូទាត់ចំនួន n ដងក្នុងមួយឆ្នាំ

គេបាន ចំនួនការប្រាក់នៅឆ្នាំទី១គឺ $P_0 i$

នាំឱ្យ ចំនួនប្រាក់សរុបនៅឆ្នាំទី១ : $P_1=P_0+P_0 i=P_0\left(1+i\right)$

ចំនួនប្រាក់សរុបនៅឆ្នាំទី២ : $P_2=P_0\left(1+i\right)+P_0\left(1+i\right)i=P_0\left(1+i\right)\left(1+i\right)=P_0\left(1+i\right)^2$

ចំនួនប្រាក់សរុបនៅឆ្នាំទី៣ : $P_3=P_0\left(1+i\right)^2+P_0\left(1+i\right)^2 i=P_0\left(1+i\right)^2\left(1+i\right)=P_0\left(1+i\right)^3$

ចំនួនប្រាក់សរុបនៅឆ្នាំទី៤ : $P_4=P_0\left(1+i\right)^3+P_0\left(1+i\right)^3 i=P_0\left(1+i\right)^3\left(1+i\right)=P_0\left(1+i\right)^4$

.... : ....

ចំនួនប្រាក់សរុបនៅឆ្នាំទី t : $P_t=P_0\left(1+i\right)^{t-1}+P_0\left(1+i\right)^{t-1} i=P_0\left(1+i\right)^{t-1}\left(1+i\right)=P_0\left(1+i\right)^t$

គេបាន
- ➤ សម្រាប់ការទូទាត់ក្នុងមួយឆ្នាំ 1 ដង $P_t=P_0\left(1+i\right)^t$
- ➤ សម្រាប់ការទូទាត់ក្នុងមួយឆ្នាំ 2 ដង ឬមួយឆមាសទូទាត់ម្តង គេប្រើរូបមន្ត $P_t=P_0\left(1+\dfrac{i}{2}\right)^{2t}$ ព្រោះ មួយឆ្នាំទូទាត់ការប្រាក់ 2 ដង នាំឱ្យ t ឆ្នាំ ទូទាត់ $2t$ ហើយមួយឆ្នាំទទួលអត្រាការប្រាក់ i នាំឱ្យមួយឆមាសទទួលអត្រាការប្រាក់ $i/2$ ។
- ➤ សម្រាប់ការទូទាត់ក្នុងមួយឆ្នាំ 4 ដង ឬមួយត្រីមាសទូទាត់ម្តង គេប្រើរូបមន្ត $P_t=P_0\left(1+\dfrac{i}{4}\right)^{4t}$ ព្រោះ មួយឆ្នាំទូទាត់ការប្រាក់ 4 ដង នាំឱ្យ t ឆ្នាំ ទូទាត់ $4t$ ហើយមួយឆ្នាំទទួលអត្រាការប្រាក់ i នាំឱ្យមួយត្រីមាសទទួលអត្រាការប្រាក់ $i/4$ ។
- ➤ សម្រាប់ការទូទាត់ក្នុងមួយឆ្នាំ n ដង គេប្រើរូបមន្ត $P_t=P_0\left(1+\dfrac{i}{n}\right)^{nt}$ ព្រោះ មួយឆ្នាំទូទាត់ការប្រាក់ n ដង នាំឱ្យ t ឆ្នាំ ទូទាត់ nt ហើយមួយឆ្នាំទទួលអត្រាការប្រាក់ i នោះការទូទាត់ n ដងក្នុងមួយឆ្នាំទទួលអត្រាការប្រាក់ i/n ។

ដូចនេះ: | គេប្រើរូបមន្ត $P_t=P_0\left(1+\dfrac{i}{n}\right)^{nt}$ សម្រាប់គណនាប្រាក់សរុបរយៈពេល t ឆ្នាំ ក្នុងករណីទូទាត់ n ដងក្នុងមួយឆ្នាំ | ។

3. **បង្ហាញថា ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=a^x$ កាត់តាមចំណុចដែលមានកូអរដោនេ $(0,1)$ ជានិច្ច**

គេមាន $y=a^x$ ជាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលដែល $a>0$ និង $a\neq 1$

ចំពោះ $x=0$ នោះគេបាន $y=a^0=1$, $a>0$ និង $a\neq 1$

ម្យ៉ាងទៀត $y=1$ នោះគេបាន $a^x=1$ ឬ $a^x=a^0$ នាំឱ្យ $x=0$

ដូចនេះ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=a^x$ កាត់តាមចំណុច $(0,1)$ ។

4. **បង្ហាញថា បើ $f(x)=a^x$ នោះ $f(x)f(y)=f(x+y)$**

គេមាន $f(x)=a^x$

$f(y)=a^y$

$f(x+y)=a^{x+y}$

នាំឱ្យ $f(x)f(y)=a^x\times a^y=a^{x+y}=f(x+y)$

ដូចនេះ $f(x)=a^x$ នោះ $f(x)f(y)=f(x+y)$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

5. **បង្ហាញថា** $f(m)+f(n)=3$

គេមាន $f(x)=\dfrac{2^{x+1}+\sqrt{2}}{2^x+\sqrt{2}}=\dfrac{2\cdot 2^x+\sqrt{2}}{2^x+\sqrt{2}}$ និង $m+n=1$

នាំឱ្យ $f(m)=\dfrac{2\cdot 2^m+\sqrt{2}}{2^m+\sqrt{2}}$

$f(n)=\dfrac{2\cdot 2^n+\sqrt{2}}{2^n+\sqrt{2}}$

គេបាន
$$\begin{aligned}
f(m)+f(n)&=\frac{2\cdot 2^m+\sqrt{2}}{2^m+\sqrt{2}}+\frac{2\cdot 2^n+\sqrt{2}}{2^n+\sqrt{2}}\\
&=\frac{\left(2\cdot 2^m+\sqrt{2}\right)\left(2^n+\sqrt{2}\right)+\left(2\cdot 2^n+\sqrt{2}\right)\left(2^m+\sqrt{2}\right)}{\left(2^m+\sqrt{2}\right)\left(2^n+\sqrt{2}\right)}\\
&=\frac{2\cdot 2^{m+n}+2\sqrt{2}\cdot 2^m+\sqrt{2}\cdot 2^n+2+2\cdot 2^{m+n}+2\sqrt{2}\cdot 2^n+\sqrt{2}\cdot 2^m+2}{2^{m+n}+\sqrt{2}\cdot 2^m+\sqrt{2}\cdot 2^n+2}\\
&=\frac{4\cdot 2^{m+n}+3\sqrt{2}\cdot 2^m+3\sqrt{2}\cdot 2^n+4}{2^{m+n}+\sqrt{2}\cdot 2^m+\sqrt{2}\cdot 2^n+2}\quad ,\ m+n=1\\
&=\frac{12+3\sqrt{2}\cdot 2^m+3\sqrt{2}\cdot 2^n}{4+\sqrt{2}\cdot 2^m+\sqrt{2}\cdot 2^n}\\
&=\frac{3\left(4+\sqrt{2}\cdot 2^m+\sqrt{2}\cdot 2^n\right)}{4+\sqrt{2}\cdot 2^m+\sqrt{2}\cdot 2^n}\\
&=3
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $f(m)+f(n)=3$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

6. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$

គេមាន $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^x-\dfrac{1}{e^x}}{e^x+\dfrac{1}{e^x}}=\dfrac{\dfrac{e^{2x}-1}{e^x}}{\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

នាំឱ្យ $f(a)=\dfrac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}$, $f(b)=\dfrac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1}$, $f(a+b)=\dfrac{e^{2(a+b)}-1}{e^{2(a+b)}+1}$

ដោយ $f(a)+f(b)=\dfrac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}+\dfrac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1}=\dfrac{\left(e^{2a}-1\right)\left(e^{2b}+1\right)+\left(e^{2b}-1\right)\left(e^{2a}+1\right)}{\left(e^{2a}+1\right)\left(e^{2b}+1\right)}$

$$=\frac{e^{2a+2b}+e^{2a}-e^{2b}-1+e^{2a+2b}+e^{2b}-e^{2a}-1}{e^{2a+2b}+e^{2a}+e^{2b}+1}$$

$$=\frac{2e^{2a+2b}-2}{e^{2a+2b}+e^{2a}+e^{2b}+1} \quad (1)$$

ហើយ $f(a)\times f(b)=\dfrac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}\times\dfrac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1}=\dfrac{\left(e^{2a}-1\right)\left(e^{2b}-1\right)}{\left(e^{2a}+1\right)\left(e^{2b}+1\right)}=\dfrac{e^{2a+2b}-e^{2a}-e^{2b}+1}{e^{2a+2b}+e^{2a}+e^{2b}+1}$

នាំឱ្យ $1+f(a)f(b)=1+\dfrac{e^{2a+2b}-e^{2a}-e^{2b}+1}{e^{2a+2b}+e^{2a}+e^{2b}+1}$

$$=\frac{e^{2a+2b}+e^{2a}+e^{2b}+1+e^{2a+2b}-e^{2a}-e^{2b}+1}{e^{2a+2b}+e^{2a}+e^{2b}+1}$$

$$=\frac{2e^{2a+2b}+2}{e^{2a+2b}+e^{2a}+e^{2b}+1} \quad (2)$$

គេធ្វើផលធៀប រវាង (1) និង (2) គេបាន ៖

$$\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}=\frac{\dfrac{2e^{2a+2b}-2}{e^{2a+2b}+e^{2a}+e^{2b}+1}}{\dfrac{2e^{2a+2b}+2}{e^{2a+2b}+e^{2a}+e^{2b}+1}}=\frac{2e^{2a+2b}-2}{2e^{2a+2b}+2}=\frac{e^{2a+2b}-1}{e^{2a+2b}+1}=\frac{e^{2(a+b)}-1}{e^{2(a+b)}+1}=f(a+b)$$

ដូចនេះ

$f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ ត្រូវបានបង្ហាញ

។

7. បង្ហាញថា ចំណុចទាំងពីរ $(x_1+x_2\ ,\ y_1y_2)$ និង $\left(x_1-x_2\ ,\ \dfrac{y_1}{y_2}\right)$ ក៏ជាពីរចំណុចនៅលើខ្សែកោង $f(x)=a^x$ ដែរ

គេមាន $(x_1\ ,\ y_1)$ និង $(x_2\ ,\ y_2)$ ជាពីរចំណុចនៅលើខ្សែកោង $f(x)=a^x$

នាំឱ្យ $f(x_1)=a^{x_1}=y_1$ និង $f(x_2)=a^{x_2}=y_2$

គេបាន $f(x_1+x_2)=a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2}=y_1y_2$ នេះបញ្ជាក់ថា ចំណុច $(x_1+x_2\ ,\ y_1y_2)$ នៅលើខ្សែកោងតាង $f(x)=a^x$

$f(x_1-x_2)=a^{x_1-x_2}=\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}=\dfrac{y_1}{y_2}$ នេះបញ្ជាក់ថា ចំណុច $\left(x_1-x_2\ ,\ \dfrac{y_1}{y_2}\right)$ នៅលើខ្សែកោងតាង $f(x)=a^x$

ដូចនេះ

ពីរចំណុច $(x_1+x_2\ ,\ y_1y_2)$ និង $\left(x_1-x_2\ ,\ \dfrac{y_1}{y_2}\right)$ នៅលើខ្សែកោងតាង $f(x)=a^x$

។

8. បង្ហាញថា ចំណុចទាំងពីរ $\left(2x_1\ ,\ y_1^2\right)$ និង $\left(-x_1\ ,\ \dfrac{1}{y_1}\right)$ ក៏នៅលើខ្សែកោង $f(x)=a^x$ ដែរ

គេមាន (x_1, y_1) ជាចំណុចនៅលើខ្សែកោង $f(x)=a^x$

នាំឱ្យ $f(x_1)=a^{x_1}=y_1$ និង $f(x_2)=a^{x_2}=y_2$

គេបាន $f(2x_1)=a^{2x_1}=\left(a^{x_1}\right)^2=y_1^2$ នេះបញ្ជាក់ថា ចំណុច $\left(2x_1\ ,\ y_1^2\right)$ នៅលើខ្សែកោងតាង $f(x)=a^x$

$f(-x_1)=a^{-x_1}=\dfrac{1}{a^{x_1}}=\dfrac{1}{y_1}$ នេះបញ្ជាក់ថា ចំណុច $\left(-x_1\ ,\ \dfrac{1}{y_1}\right)$ នៅលើខ្សែកោងតាង $f(x)=a^x$

ដូចនេះ ពីរចំណុច $\left(2x_1\ ,\ y_1^2\right)$ និង $\left(-x_1\ ,\ \dfrac{1}{y_1}\right)$ នៅលើខ្សែកោងតាង $f(x)=a^x$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន លោការីត

1. បង្ហាញថា ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាក្រាបឆ្លុះគ្នានឹងក្រាបអនុគមន៍ច្រាសរបស់វា $y = f^{-1}(x)$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ។
2. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈលោការីតខាងក្រោម ៖

   ក. $\log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y$ ខ. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ គ. $\log_a x^n = n\log_a x$

   ឃ. $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$ ង. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ ច. $\log_a 1 = 0$

   ឆ. $\log_a a^x = x$ ជ. $a^{\log_a x} = x$, $x > 0$ ឈ. $\log_a a = 1$
3. ស្រាយបញ្ជាក់ថាក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \log_a x$ កាត់តាមចំណុចដែលមានកូអរដោនេ $(1, 0)$ ជានិច្ច ។
4. បង្ហាញថា គេបាន $\log_{xy} M = \frac{ab}{a+b}$ បើ $\log_x M = a$ និង $\log_y M = b$ ។
5. គេឱ្យ $f(x) = \lg\frac{1+x}{1-x}$ ។ បង្ហាញថា $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$ ។
6. បង្ហាញថា បើ $f(x) = \log_a x$ នោះ $f(xy) = f(x) + f(y)$ ។
7. បង្ហាញថា បើ (x_1, y_1) និង (x_2, y_2) ជាពីរចំណុចនៅលើខ្សែកោង $y = \log_a x$ នោះចំណុច $\left(\frac{x_1}{x_2}, y_1 - y_2\right)$ ក៏ស្ថិតនៅលើខ្សែកោង $y = \log_a x$ ដែរ។
8. បង្ហាញថា បើ (x_1, y_1) ជាចំណុចនៅលើខ្សែកោង $y = \log_a x$ នោះចំណុច $(x_1^2, 2y_1)$ និងចំណុច $\left(\frac{1}{x_1}, -y_1\right)$ ក៏ជាចំណុចស្ថិតនៅលើខ្សែកោង $y = \log_a x$ ដែរ ។
9. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$ ដែល $0 < a \neq 1$, $x > 0$, $n > 0$

   ខ. បើ $0 < a \neq 1$, $0 < x \neq 1$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \frac{1}{\log_{a^3} x} + \ldots + \frac{1}{\log_{a^n} x} = \frac{n(n+1)}{2\log_a x}$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន លោការីត

1. **បង្ហាញថា ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាក្រាបឆ្លុះគ្នានឹងក្រាបអនុគមន៍ច្រាសរបស់វា $y=f^{-1}(x)$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$**

គេមាន លក្ខណៈឆ្លុះធៀបនឹងបន្ទាត់ពុះទី១ $y=x$ ៖

បើពីរចំណុច $P(x\,,\,y)$ និង $P'(x'\,,\,y')$ ជាចំណុចឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$ លុះត្រាតែ $x=y'$ និង $y=x'$ ។

តាមនិយមន័យអនុគមន៍ច្រាស : បើ f^{-1} ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ f នោះគេបាន $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

គេតាង $P(a\,,\,b)$ ជាចំណុចនៅលើក្រាបនៃអនុគមន៍ f

បើ f^{-1} ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃ f នោះគេបាន $f^{-1}(b)=a$ នេះបញ្ជាក់ថា ចំណុច $P'(b\,,\,a)$ នៅលើក្រាបនៃ f^{-1}

គេសង្កេត ឃើញថា $P(a\,,\,b)$ ជាចំណុចនៃ f និង $P'(b\,,\,a)$ ជាចំណុចនៃ f^{-1}

តាមនិយមន័យអនុគមន៍ច្រាស គេបាន $P'(b\,,\,a)$ ជាចំណុចឆ្លុះនៃ $P(a\,,\,b)$ ធៀបនឹងបន្ទាត់ពុះទី១ $y=x$

ដោយ ក្រាបនៃអនុគមន៍ f និង f^{-1} មានគូៗចំណុច $P(a\,,\,b)$ និង $P'(b\,,\,a)$ ឆ្លុះគ្នា

នាំឱ្យ ក្រាបនៃអនុគមន៍ f និង f^{-1} ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ពុះទី១ $y=x$

ដូចនេះ: ក្រាបនៃអនុគមន៍ f និង f^{-1} ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ពុះទី១ $y=x$ ។

2. **ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈលោការីតខាងក្រោម ៖**

ក. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈ: $\log_a(x\times y)=\log_a x+\log_a y$

គេតាង $m=\log_a x$ នោះ $x=a^m$

$n=\log_a y$ នោះ $y=a^n$

គេបាន $x\times y=a^m\times a^n$ ឬ $x\times y=a^{m+n}$ នាំឱ្យ $\log_a(x\times y)=m+n$ ឬ $\log_a(x\times y)=\log_a x+\log_a y$

ដូចនេះ: លក្ខណៈលោការីត $\log_a(x\times y)=\log_a x+\log_a y$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈ: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$

គេតាង $m=\log_a x$ នោះ $x=a^m$

$n=\log_a y$ នោះ $y=a^n$

គេបាន $\frac{x}{y}=\frac{a^m}{a^n}$ ឬ $\frac{x}{y}=a^{m-n}$ នាំឱ្យ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=m-n$ ឬ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$

ដូចនេះ: លក្ខណៈលោការីត $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈ: $\log_a x^n=n\log_a x$

ពិនិត្យ $\log_a x^n=\log_a\underbrace{(x\times x\times x\times\ldots\times x)}_{n\text{ កត្តា}}=\underbrace{\log_a x+\log_a x+\log_a x+\ldots+\log_a x}_{n\text{ តួ}}=n\log_a x$

ដូចនេះ: លក្ខណៈលោការីត $\log_a x^n=n\log_a x$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈ $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$

គេតាង $m = \log_a x$ នោះ $x = a^m$

$n = \log_x a$ នោះ $a = x^n$

គេបាន $x = a^m$ ឬ $x = \left(x^n\right)^m$ ឬ $x = x^{mn}$ ទាញបាន $mn = 1$

ចំពោះ $mn = 1$ ឬ $(\log_a x)(\log_x a) = 1$ ទាញបាន $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$

ដូចនេះ | លក្ខណៈលោការីត $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ង. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈ $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

គេតាង $y = \log_a x$ នាំឱ្យ $x = a^y$

គេបាន $\log_b x = \log_b a^y$ ឬ $\log_b x = y\log_b a$

ទាញបាន $\dfrac{\log_b x}{\log_b a} = y$ ឬ $\dfrac{\log_b x}{\log_b a} = \log_a x$

ដូចនេះ | លក្ខណៈលោការីត $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ច. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈ $\log_a 1 = 0$

តាមអនុគមន៍ច្រាស $a^x = k \Leftrightarrow x = \log_a k$

ដោយ $a^0 = 1 \Leftrightarrow 0 = \log_a 1$

ដូចនេះ | លក្ខណៈលោការីត $\log_a 1 = 0$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ឆ. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈ $\log_a a^x = x$

គេមាន $\log_a a^x = x\log_a a$ ឬ $\log_a a^x = x$

ដូចនេះ | លក្ខណៈលោការីត $\log_a a^x = x$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ជ. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈ $a^{\log_a x} = x\ ,\ x > 0$

តាមអនុគមន៍ច្រាស $a^x = k \Leftrightarrow x = \log_a k$

គេបាន $a^{\log_a x} = x \Leftrightarrow \log_a x = \log_a x$

ដោយ $\log_a x = \log_a x$ ពិត នាំឱ្យ $a^{\log_a x} = x$ ក៏ពិតដែរ

ដូចនេះ | លក្ខណៈលោការីត $\log_a a^x = x$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ឈ. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈ $\log_a a = 1$

ដោយ $a^1 = a$ សមមូល $\log_a a = 1$

ដូចនេះ | លក្ខណៈលោការីត $\log_a a = 1$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

3. ស្រាយបញ្ជាក់ថាក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\log_a x$ កាត់តាមចំណុចដែលមានកូអរដោនេ $(1,0)$ ជានិច្ច

គេមាន $y=\log_a x$

ចំពោះ $x=1$ គេបាន $y=\log_a 1=0$

ចំពោះ $y=0 \Rightarrow \log_a x=0$ នោះ $x=a^0=1$

តាមករណីទាំងពីរខាងលើបញ្ជាក់ថា ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\log_a x$ កាត់តាមចំណុច $(1,0)$ ជានិច្ច

ដូចនេះ: ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\log_a x$ កាត់តាមចំណុច $(1,0)$ ជានិច្ច ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

4. បង្ហាញថា $\log_{xy} M=\dfrac{ab}{a+b}$

គេមាន $\log_x M=a$ និង $\log_y M=b$

ដោយ
$$\log_{xy} M=\frac{1}{\log_M xy}=\frac{1}{\log_M x+\log_M y}=\frac{1}{\dfrac{1}{\log_x M}+\dfrac{1}{\log_y M}}=\frac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\frac{1}{\dfrac{b+a}{ab}}=\frac{ab}{a+b}$$

ដូចនេះ: $\log_{xy} M=\dfrac{ab}{a+b}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

5. បង្ហាញថា $f(x)+f(y)=f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$

គេមាន $f(x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$ នោះ $f(y)=\lg\dfrac{1+y}{1-y}$,

គេបាន
$$f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)=\lg\frac{1+\dfrac{x+y}{1+xy}}{1-\dfrac{x+y}{1+xy}}=\lg\frac{\dfrac{1+xy+x+y}{1+xy}}{\dfrac{1+xy-x-y}{1+xy}}=\lg\frac{1+xy+x+y}{1+xy-x-y}=\lg\frac{(1+x)+y(1+x)}{(1-x)-y(1-x)}$$
$$=\lg\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}=\lg\left(\frac{1+x}{1-x}\times\frac{1+y}{1-y}\right)=\lg\frac{1+x}{1-x}+\lg\frac{1+y}{1-y}=f(x)+f(y)$$

ដូចនេះ: $f(x)+f(y)=f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

6. បង្ហាញថា $f(xy)=f(x)+f(y)$

គេមាន $f(x)=\log_a x$ នោះ $f(y)=\log_a y$

គេបាន
$$f(xy)=\log_a xy$$
$$=\log_a x+\log_a y$$
$$=f(x)+f(y)$$

ដូចនេះ: $f(xy)=f(x)+f(y)$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

7. បង្ហាញថា ចំណុច $\left(\frac{x_1}{x_2}, y_1 - y_2\right)$ ស្ថិតនៅលើខ្សែកោង $y = \log_a x$

គេមាន (x_1, y_1) និង (x_2, y_2) ជាពីរចំណុចនៅលើខ្សែកោង $y = \log_a x$

នាំឱ្យ $y_1 = \log_a x_1$ និង $y_2 = \log_a x_2$

គេបាន $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2 = y_1 - y_2$ នេះបញ្ជាក់ថា ចំណុច $\left(\frac{x_1}{x_2}, y_1 - y_2\right)$ ស្ថិតនៅលើខ្សែកោង $y = \log_a x$

ដូចនេះ: ចំណុច $\left(\frac{x_1}{x_2}, y_1 - y_2\right)$ ស្ថិតនៅលើខ្សែកោង $y = \log_a x$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

8. បង្ហាញថា ចំណុច $(x_1^2, 2y_1)$ និង $\left(\frac{1}{x_1}, -y_1\right)$ ជាចំណុចស្ថិតនៅលើខ្សែកោង $y = \log_a x$

គេមាន (x_1, y_1) ជាចំណុចនៅលើខ្សែកោង $y = \log_a x$

នាំឱ្យ $y_1 = \log_a x_1$

ដោយ $\log_a x_1^2 = 2\log_a x_1 = 2y_1$ នេះបញ្ជាក់ថា ចំណុច $(x_1^2, 2y_1)$ ស្ថិតនៅលើខ្សែកោង $y = \log_a x$

ហើយ $\log_a \frac{1}{x_1} = \log_a 1 - \log_a x_1 = -y_1$ នេះបញ្ជាក់ថា ចំណុច $\left(\frac{1}{x_1}, -y_1\right)$ ស្ថិតនៅលើខ្សែកោង $y = \log_a x$

ដូចនេះ: ចំណុច $(x_1^2, 2y_1)$ និង $\left(\frac{1}{x_1}, -y_1\right)$ ស្ថិតនៅលើខ្សែកោង $y = \log_a x$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

9. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$ ដែល $0 < a \neq 1 , x > 0 , n > 0$

គេមាន $\log_{a^n} x = \frac{1}{\log_x a^n} = \frac{1}{n\log_x a} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{\log_x a} = \frac{1}{n}\log_a x$

ដូចនេះ: $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \frac{1}{\log_{a^3} x} + \ldots + \frac{1}{\log_{a^n} x} = \frac{n(n+1)}{2\log_a x}$ ដែល $0 < a \neq 1 , 0 < x \neq 1$

គេមាន

$$\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \frac{1}{\log_{a^3} x} + \ldots + \frac{1}{\log_{a^n} x}$$

$$= \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\frac{1}{2}\log_a x} + \frac{1}{\frac{1}{3}\log_a x} + \ldots + \frac{1}{\frac{1}{n}\log_{a^n} x}$$

$$= \frac{1}{\log_a x} + \frac{2}{\log_a x} + \frac{3}{\log_a x} + \ldots + \frac{n}{\log_{a^n} x}$$

$$= \frac{1}{\log_a x} \times (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1}{\log_a x} = \frac{n(n+1)}{2\log_a x}$$

ដូចនេះ: $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \frac{1}{\log_{a^3} x} + \ldots + \frac{1}{\log_{a^n} x} = \frac{n(n+1)}{2\log_a x}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ត្រីកោណមាត្រ

1. ស្រាយបញ្ជាក់ រូបមន្តមុំ θ និង $\theta+2k\pi$ នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រដែលមាន $k\in\mathbb{Z}$ ដូចខាងក្រោម ៖

$\sin(\theta+2k\pi)=\sin\theta$ $\quad\cos(\theta+2k\pi)=\cos\theta$

$\tan(\theta+k\pi)=\tan\theta$ $\quad\cot(\theta+k\pi)=\cot\theta$

2. ស្រាយបញ្ជាក់ រូបមន្តមុំផ្ទុយ θ និង $-\theta$ ដូចខាងក្រោម ៖

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\quad\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ $\quad\cot(-\theta)=-\cot\theta$

3. ស្រាយបញ្ជាក់ រូបមន្តមុំបំពេញ $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ និង θ ដូចខាងក្រោម ៖

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ $\quad\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$ $\quad\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$

4. ស្រាយបញ្ជាក់ រូបមន្តមុំដែលមានផលសងស្មើ $\frac{\pi}{2}$ ដូចខាងក្រោម ៖

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\quad\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cot(-\theta)=-\cot\theta$ $\quad\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$

5. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តមុំបន្ថែម $(\pi-\theta)$ និង θ ដូចខាងក្រោម ៖

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ $\quad\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$ $\quad\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$

6. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តមុំដែលមានផលសងស្មើ π ដូចខាងក្រោម ៖

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\quad\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$ $\quad\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$

7. ស្រាយបញ្ជាក់ខួបនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ដូចខាងក្រោម ៖

ក. អនុគមន៍ $\sin x$ និងអនុគមន៍ $\cos x$ មានខួប $p=2\pi$

ខ. អនុគមន៍ $\sin ax$ និងអនុគមន៍ $\cos ax$ មានខួប $T=\frac{2\pi}{|a|}$

គ. អនុគមន៍ $\tan x$ និងអនុគមន៍ $\cot x$ មានខួប $p=\pi$

ឃ.អនុគមន៍ $\tan ax$ និងអនុគមន៍ $\cot ax$ មានខួប $T=\frac{\pi}{|a|}$

8. ស្រាយបញ្ជាក់ភាពគូ-សេស នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រដូចខាងក្រោម ៖

ក. អនុគមន៍ $f(x)=\cos x$ ជាអនុគមន៍គូ ។

ខ. អនុគមន៍ $f(x)=\sin x$, $f(x)=\tan x$ និង $f(x)=\cot x$ ជាអនុគមន៍សេស ។

www.facebook.com/7khmer
fb : Entertainment And Knowledge

9. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ តាមពីររបៀបខុសគ្នា ។

ខ. បង្ហាញថា $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}$$

$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$$

10. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត ដូចខាងក្រោម ៖

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

11. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត ដូចខាងក្រោម បើគេតាង $\tan\frac{\alpha}{2}=t$ ៖

$$\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2}$$

12. ស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនងខាងក្រោម ៖

$$\cos 3\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\sin 3\alpha=3\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha=-4\sin^3\alpha+3\sin\alpha$$

$$\cos 4\alpha=\cos^4\alpha+\sin^4\alpha-6\cos^2\alpha\sin^2\alpha$$

$$\sin 4\alpha=4\cos^3\alpha\sin\alpha-4\cos\alpha\sin^3\alpha$$

www.facebook.com/7khmer
fb : Entertainment And Knowledge

13. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត បំលែងពីផលគុណទៅផលបូក ខាងក្រោម ៖

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\beta\cos\alpha=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$$

14. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត បំលែងពីផលបូក ទៅផលគុណ ខាងក្រោម ៖

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\tan p+\tan q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$$

$$\tan p-\tan q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$$

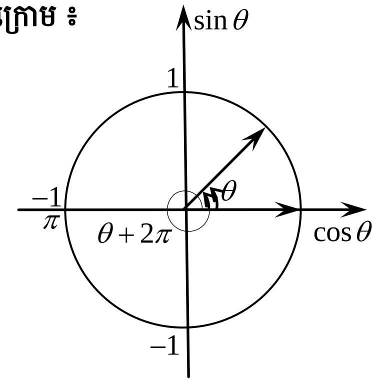
$$\cot p+\cot q=\frac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$$

$$\cot p-\cot q=-\frac{\sin(p-q)}{\sin p\sin q}$$

www.facebook.com/7khmer
fb : Entertainment And Knowledge

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ត្រីកោណមាត្រ

1. **ស្រាយបញ្ជាក់ រូបមន្តមុំ θ និង $\theta+2k\pi$ នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រដែលមាន $k\in\mathbb{Z}$ ដូចខាងក្រោម ៖**



ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin(\theta+2k\pi)=\sin\theta$ **និង** $\cos(\theta+2k\pi)=\cos\theta$

➤របៀបទី១ តាមវ៉ិចទ័រ

ដោយ មុំ θ និងមុំ $\theta+2k\pi$ ជាមុំដែលមានវ៉ិចទ័រគល់ និងវ៉ិចទ័រចុងដូចគ្នា

នាំឱ្យ $\sin(\theta+2k\pi)=\sin\theta$ និង $\cos(\theta+2k\pi)=\cos\theta$

ដូចនេះ $\boxed{\sin(\theta+2k\pi)=\sin\theta \text{ និង } \cos(\theta+2k\pi)=\cos\theta}$

➤របៀបទី២ តាមនិមយន័យខួបនៃអនុគមន៍

និមយន័យ f ជាអនុគមន៍មានដែនកំណត់ D ។ f ជាអនុគមន៍មានខួប p លុះត្រាតែ p ជាចំនួនវិជ្ជមានតូចបំផុតដែល

$\forall x\in D,\ f(x+p)=f(x)$ ។

ពីនិយមន័យទាញបាន $f(x)=f(x+p)=f((x+p)+p)=f(((x+p)+p)+p)=\ldots$

ឬ $f(x)=f(x-p)=f((x-p)-p)=f(((x-p)-p)-p)=\ldots$

ដោយ 2π ជាចំនួនវិជ្ជមានតូចបំផុតដែល $\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta$ និង $\cos(\theta+2\pi)=\cos\theta$

ម្យ៉ាងទៀត $\sin\theta=\sin(\theta+2\pi)=\sin((\theta+2\pi)+2\pi)=\sin(((\theta+2\pi)+2\pi)+2\pi)=\ldots$

$\cos\theta=\cos(\theta+2\pi)=\cos((\theta+2\pi)+2\pi)=\cos(((\theta+2\pi)+2\pi)+2\pi)=\ldots$

ឬ $\sin\theta=\sin(\theta-2\pi)=\sin((\theta-2\pi)-2\pi)=\sin(((\theta-2\pi)-2\pi)-2\pi)=\ldots$

$\cos\theta=\cos(\theta-2\pi)=\cos((\theta-2\pi)-2\pi)=\cos(((\theta-2\pi)-2\pi)-2\pi)=\ldots$

នាំឱ្យ $\sin(\theta+2k\pi)=\sin\theta$ និង $\cos(\theta+2k\pi)=\cos\theta$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ $\boxed{\sin(\theta+2k\pi)=\sin\theta \text{ និង } \cos(\theta+2k\pi)=\cos\theta}$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan(\theta+k\pi)=\tan\theta$ **និង** $\cot(\theta+k\pi)=\cot\theta$

តាមនិយមន័យខួបនៃអនុគមន៍ (មានបង្ហាញរួចខាងលើ)

បើ f មានខួប $p>0$ គេបាន $f(x)=f(x+p)=f((x+p)+p)=f(((x+p)+p)+p)=\ldots$

ឬ $f(x)=f(x-p)=f((x-p)-p)=f(((x-p)-p)-p)=\ldots$

ដោយ π ជាចំនួនវិជ្ជមានតូចបំផុតដែល $\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$ និង $\cot(\theta+\pi)=\cot\theta$

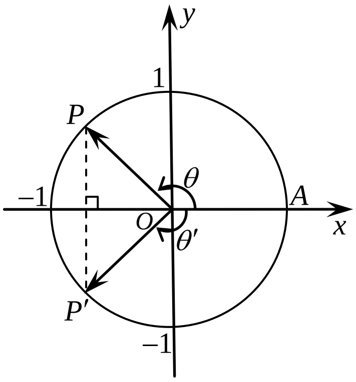
គេបាន $\tan\theta=\tan(\theta\pm\pi)=\tan((\theta\pm\pi)\pm\pi)=\tan(((\theta\pm\pi)\pm\pi)\pm\pi)=\ldots$

$\cot\theta=\cot(\theta\pm\pi)=\cot((\theta\pm\pi)\pm\pi)=\cot(((\theta\pm\pi)\pm\pi)\pm\pi)=\ldots$

នាំឱ្យ $\tan(\theta+k\pi)=\tan\theta$ និង $\cot(\theta+k\pi)=\cot\theta$

ដូចនេះ $\boxed{\tan(\theta+k\pi)=\tan\theta \text{ និង } \cot(\theta+k\pi)=\cot\theta}$ ។

2. **ស្រាយបញ្ជាក់ រូបមន្តមុំផ្ទុយ θ និង $-\theta$ ដូចខាងក្រោម ៖**



ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ **និង** $\cos(-\theta)=\cos\theta$

មុំពីរផ្ទុយគ្នា កាលណាផលបូករង្វាស់វាស្មើសូន្យតាម 2π

គេតាង $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}\right)=\theta$ និង $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP'}\right)=\theta'$

ហើយ $\theta+\theta'=0$ តាម 2π នោះ $\theta=-\theta'$ តាម 2π

គេបាន កូអរដោនេនៃចំណុច P និង P' គឺ

$P(\cos\theta\,,\sin\theta)$ និង $P'(\cos\theta'\,,\sin\theta')=P'\left(\cos(-\theta)\,,\sin(-\theta)\right)$

ដោយ P និង P' ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស (នោះចំណុចទាំងពីរមាន អាប់ស៊ីសដូចគ្នា និងអរដោនេផ្ទុយគ្នា)

គេបាន $\cos(-\theta)=\cos\theta$ និង $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

ដូចនេះ | រូបមន្ត $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ និង $\cos(-\theta)=\cos\theta$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan(-\theta)=-\tan\theta$ **និង** $\cot(-\theta)=-\cot\theta$

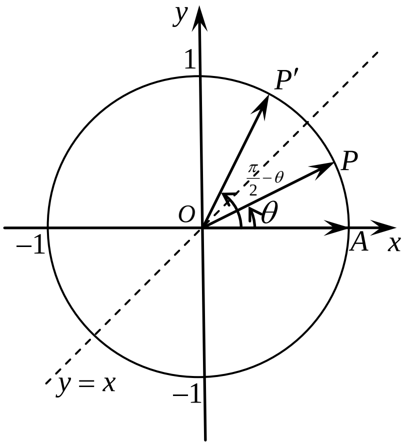
គេមាន $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ និង $\cos(-\theta)=\cos\theta$ (ស្រាយរួចខាងលើ)

ដោយ $$\tan(-\theta)=\frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$$

$$\cot(-\theta)=\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\cot\theta$$

ដូចនេះ | រូបមន្ត $\tan(-\theta)=-\tan\theta$ និង $\cot(-\theta)=-\cot\theta$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

3. **ស្រាយបញ្ជាក់ រូបមន្តមុំបំពេញ $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ និង θ ដូចខាងក្រោម ៖**



ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ **និង** $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ គេតាង $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}\right)=\theta$ និង $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP'}\right)=\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

គេបាន កូអរដោនេនៃចំណុច P និង P' គឺ

$P(\cos\theta\,,\sin\theta)$ និង $P'\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right),\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$

ដោយ ចំណុច P និង P' ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ពុះទី១ $y=x$

(នោះ អាប់ស៊ីសនៃ P ស្មើអរដោនេនៃ P' និង អរដោនេនៃ P ស្មើអាប់ស៊ីសនៃ P')

គេបាន $\cos\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ និង $\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

ដូចនេះ | រូបមន្ត $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ និង $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

✓**សម្គាល់ ប្រសិនបើអ្នកស្ទាក់ស្ទើរ លក្ខណៈឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស ឬធៀបនឹងបន្ទាត់ $y=x$ សូមមើលមេរៀនបំលែងរូបក្នុងប្លង់ ។**

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$ និង $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$

គេមាន $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ និង $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ (ស្រាយរួចខាងលើ)

គេបាន $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$

$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$ និង $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

4. ស្រាយបញ្ជាក់ រូបមន្តមុំដែលមានផលសងស្មើ $\frac{\pi}{2}$ ដូចខាងក្រោម ៖

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos(-\theta)=\cos\theta$ និង $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$

គេមាន រូបមន្ត $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ និង $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

រូបមន្ត $\cos(-\theta)=\cos\theta$ និង $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

គេបាន $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-(-\theta)\right)=\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(-\theta)\right)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos(-\theta)=\cos\theta$ និង $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$ ត្រូវបានស្រាយ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cot(-\theta)=-\cot\theta$ និង $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$

គេមាន រូបមន្ត $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$ និង $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$

រូបមន្ត $\tan(-\theta)=-\tan\theta$ និង $\cot(-\theta)=-\cot\theta$

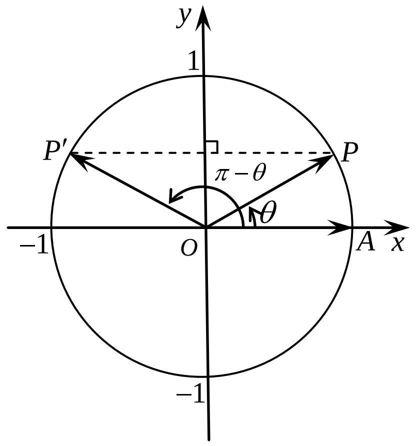
គេបាន $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-(-\theta)\right)=\cot(-\theta)=-\cot\theta$

$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cot\left(\frac{\pi}{2}-(-\theta)\right)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cot(-\theta)=-\cot\theta$ និង $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$ ត្រូវបានស្រាយ ។

5. **ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តមុំបន្ថែម $(\pi-\theta)$ និង θ ដូចខាងក្រោម ៖**

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ **និង** $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$



ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ គេតាង $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}\right)=\theta$ និង $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP'}\right)=(\pi-\theta)$

គេបាន កូអរដោនេនៃចំណុច P និង P' គឺ

$P(\cos\theta\,,\sin\theta)$ និង $P'\left(\cos(\pi-\theta)\,,\sin(\pi-\theta)\right)$

ដោយ ចំណុច P និង P' ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្សអរដោនេ

(នោះចំណុចទាំងពីរមាន អាប់ស៊ីសផ្ទុយគ្នា និងអរដោនេដូចគ្នា)

គេបាន $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ និង $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

ដូចនេះ | រូបមន្ត $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ និង $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ ត្រូវបានស្រាយ | ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$ **និង** $\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$

គេមាន រូបមន្ត $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ និង $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ (បានស្រាយរួចខាងលើ)

គេបាន $\tan(\pi-\theta)=\dfrac{\sin(\pi-\theta)}{\cos(\pi-\theta)}=\dfrac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$

$\cot(\pi-\theta)=\dfrac{\cos(\pi-\theta)}{\sin(\pi-\theta)}=\dfrac{-\cos\theta}{\sin\theta}=-\cot\theta$

ដូចនេះ | រូបមន្ត $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$ និង $\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$ ត្រូវបានស្រាយ | ។

6. **ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តមុំដែលមានផលសងស្មើ π ដូចខាងក្រោម ៖**

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ **និង** $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

➢របៀបទី១ តាមមុំ $(\pi-\theta)$

គេមាន រូបមន្ត $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ និង $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ (បានស្រាយបញ្ជាក់រួចខាងលើ)

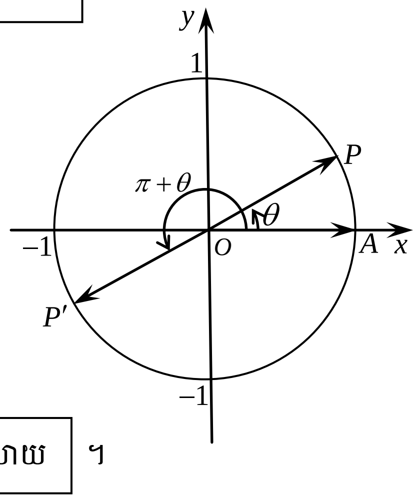
រូបមន្ត $\cos(-\theta)=\cos\theta$ និង $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

គេបាន $\sin(\pi+\theta)=\sin\left(\pi-(-\theta)\right)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(\pi+\theta)=\cos\left(\pi-(-\theta)\right)=-\cos(-\theta)=-\cos\theta$

ដូចនេះ | រូបមន្ត $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ និង $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ ត្រូវបានស្រាយ | ។

➢របៀបទី២ តាមលក្ខណៈឆ្លុះធៀបនឹងគល់តម្រុយ



ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ គេតាង $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}\right)=\theta$ និង $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP'}\right)=(\pi+\theta)$

គេបាន កូអរដោនេនៃចំណុច P និង P' គឺ

$P(\cos\theta\,,\sin\theta)$ និង $P'\left(\cos(\pi+\theta)\,,\sin(\pi+\theta)\right)$

ដោយ ចំណុច P និង P' ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់ O

គេបាន $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ និង $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

ដូចនេះ | រូបមន្ត $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ និង $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ ត្រូវបានស្រាយ | ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$ **និង** $\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$

គេមាន រូបមន្ត $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ និង $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ (បានស្រាយបញ្ជាក់រួចខាងលើ)

គេបាន $\tan(\pi+\theta)=\dfrac{\sin(\pi+\theta)}{\cos(\pi+\theta)}=\dfrac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta$

$$\cot(\pi+\theta)=\frac{\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi+\theta)}=\frac{-\cos\theta}{-\sin\theta}=\cot\theta$$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ និង $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

7. **ស្រាយបញ្ជាក់ខួបនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ដូចខាងក្រោម ៖**

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា អនុគមន៍ $\sin x$ **និងអនុគមន៍** $\cos x$ **មានខួប** $p=2\pi$

និមយន័យ f ជាអនុគមន៍មានដែនកំណត់ D ។ f ជាអនុគមន៍មានខួប p លុះត្រាតែ p ជាចំនួនវិជ្ជមានតូចបំផុតដែល $\forall x\in D,\ f(x+p)=f(x)$ ។

ដោយ 2π ជាចំនួនវិជ្ជមានតូចបំផុតដែល $\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta$ និង $\cos(\theta+2\pi)=\cos\theta$

ដូចនេះ: អនុគមន៍ $\sin x$ និងអនុគមន៍ $\cos x$ មានខួប $p=2\pi$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា អនុគមន៍ $\sin ax$ **មានខួប** $T=\dfrac{2\pi}{|a|}$

គេតាង $f(x)=\sin ax$

ដោយ $f\left(x+\dfrac{2\pi}{|a|}\right)=\sin a\left(x+\dfrac{2\pi}{|a|}\right)=\sin a\left(x\pm\dfrac{2\pi}{a}\right)=\sin(ax\pm2\pi)=\sin ax=f(x)$

នាំឱ្យ $T=\dfrac{2\pi}{|a|}$ ជាខួបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\sin ax$

ដូចនេះ: អនុគមន៍ $f(x)=\sin ax$ មានខួប $T=\dfrac{2\pi}{|a|}$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា អនុគមន៍ $\cos ax$ **មានខួប** $T=\dfrac{2\pi}{|a|}$

គេតាង $f(x)=\cos ax$

ដោយ $f\left(x+\dfrac{2\pi}{|a|}\right)=\cos a\left(x+\dfrac{2\pi}{|a|}\right)=\cos a\left(x\pm\dfrac{2\pi}{a}\right)=\cos(ax\pm2\pi)=\cos ax=f(x)$

នាំឱ្យ $T=\dfrac{2\pi}{|a|}$ ជាខួបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\cos ax$

ដូចនេះ: អនុគមន៍ $f(x)=\cos ax$ មានខួប $T=\dfrac{2\pi}{|a|}$ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា អនុគមន៍ $\tan x$ និងអនុគមន៍ $\cot x$ មានខួប $p=\pi$

និមយន័យ f ជាអនុគមន៍មានដែនកំណត់ D ។ f ជាអនុគមន៍មានខួប p លុះត្រាតែ p ជាចំនួនវិជ្ជមានតូចបំផុតដែល $\forall x\in D\,,\ f(x+p)=f(x)$ ។

ដោយ π ជាចំនួនវិជ្ជមានតូចបំផុតដែល $\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$ និង $\cot(\theta+\pi)=\cot\theta$

ដូចនេះ: | អនុគមន៍ $\tan x$ និងអនុគមន៍ $\cot x$ មានខួប $p=\pi$ | ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា អនុគមន៍ $\tan ax$ មានខួប $T=\dfrac{\pi}{|a|}$

គេតាង $f(x)=\tan ax$

ដោយ $f\left(x+\dfrac{\pi}{|a|}\right)=\tan a\left(x+\dfrac{\pi}{|a|}\right)=\tan a\left(x\pm\dfrac{\pi}{a}\right)=\tan(ax\pm\pi)=\tan ax=f(x)$

នាំឱ្យ $T=\dfrac{\pi}{|a|}$ ជាខួបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\tan ax$

ដូចនេះ: | អនុគមន៍ $f(x)=\tan ax$ មានខួប $T=\dfrac{\pi}{|a|}$ | ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា អនុគមន៍ $\cot ax$ មានខួប $T=\dfrac{\pi}{|a|}$

គេតាង $f(x)=\cot ax$

ដោយ $f\left(x+\dfrac{\pi}{|a|}\right)=\cot a\left(x+\dfrac{\pi}{|a|}\right)=\cot a\left(x\pm\dfrac{\pi}{a}\right)=\cot(ax\pm\pi)=\cot ax=f(x)$

នាំឱ្យ $T=\dfrac{\pi}{|a|}$ ជាខួបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\cot ax$

ដូចនេះ: | អនុគមន៍ $f(x)=\cot ax$ មានខួប $T=\dfrac{\pi}{|a|}$ | ។

៩. **ស្រាយបញ្ជាក់ភាពគូ-សេស នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រដូចខាងក្រោម ៖**

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា អនុគមន៍ $f(x)=\cos x$ ជាអនុគមន៍គូ

និយមន័យ បើ f ជាអនុគមន៍មានដែនកំណត់ D ។

- f ជាអនុគមន៍គូ លុះត្រាតែ $\forall x\in D\,,-x\in D\ ,\ f(-x)=f(x)$ ។
- f ជាអនុគមន៍សេស លុះត្រាតែ $\forall x\in D\,,-x\in D\ ,\ f(-x)=-f(x)$ ។

គេមាន $f(x)=\cos x$

នាំឱ្យ $\forall x\in D\,,-x\in D\ ,\ f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$

ដូចនេះ: | អនុគមន៍ $f(x)=\cos x$ ជាអនុគមន៍គូ | ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា អនុគមន៍ $f(x)=\sin x$, $f(x)=\tan x$ **និង** $f(x)=\cot x$ **ជាអនុគមន៍សេស**

និយមន័យ បើ f ជាអនុគមន៍មានដែនកំណត់ D ។

- f ជាអនុគមន៍គូ លុះត្រាតែ $\forall x\in D, -x\in D$, $f(-x)=f(x)$ ។
- f ជាអនុគមន៍សេស លុះត្រាតែ $\forall x\in D, -x\in D$, $f(-x)=-f(x)$ ។

គេមាន $f(x)=\sin x$, $f(x)=\tan x$ និង $f(x)=\cot x$ ដែលមានដែនកំណត់តាងដោយ D

$\forall x\in D, -x\in D$ គេបាន ៖

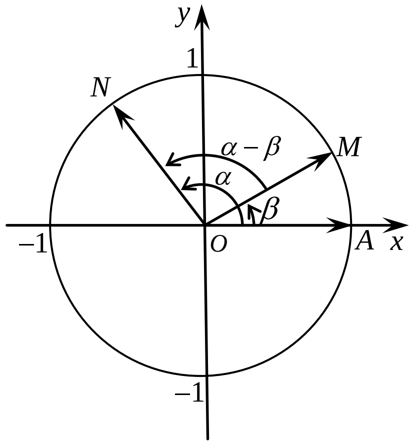
ចំពោះ $f(x)=\sin x \Rightarrow f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)$ នោះ $f(x)=\sin x$ ជាអនុគមន៍សេស

ចំពោះ $f(x)=\tan x \Rightarrow f(-x)=\tan(-x)=-\tan x=-f(x)$ នោះ $f(x)=\tan x$ ជាអនុគមន៍សេស

ចំពោះ $f(x)=\cot x \Rightarrow f(-x)=\cot(-x)=-\cot x=-f(x)$ នោះ $f(x)=\cot x$ ជាអនុគមន៍សេស

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f(x)=\sin x$, $f(x)=\tan x$ និង $f(x)=\cot x$ ជាអនុគមន៍សេស ។

9. **ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា** $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ **តាមពីររបៀបខុសគ្នា**



➤**របៀបទី១** តាមនិយមន័យផលគុណស្កាលែ

ពិនិត្យរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ ខាងស្តាំ

គេមាន $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})=\beta$ និង $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{ON})=\alpha$ នាំឱ្យ $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})=\alpha-\beta$

តាមនិយមន័យផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=OM\cdot ON\cdot\cos(\alpha-\beta)$

ដោយ $OM=ON=r=1$ (កាំរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ)

នាំឱ្យ $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\cos(\alpha-\beta)$ (1)

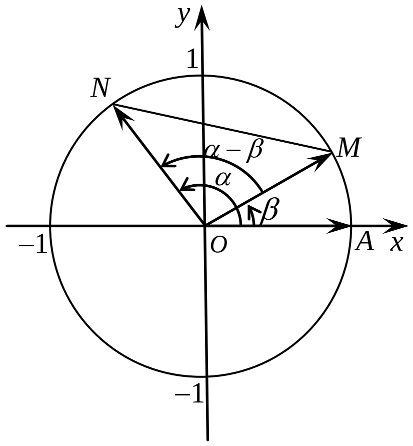
ម្យ៉ាងទៀត កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OM}=(\cos\beta , \sin\beta)$, $\overrightarrow{ON}=(\cos\alpha , \sin\alpha)$

តាមកន្សោមវិភាគផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ (2)

តាមរយៈ ទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

ដូចនេះ រូបមន្ត $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➤**របៀបទី២** តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស និងរូបមន្តចម្ងាយរវាងពីរចំណុច



ពិនិត្យរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ ខាងស្តាំ

គេមាន $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})=\beta$ និង $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{ON})=\alpha$ នាំឱ្យ $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON})=\alpha-\beta$

នាំឱ្យ កូអរដោនេ $\overrightarrow{OM}=(\cos\beta , \sin\beta)$, $\overrightarrow{ON}=(\cos\alpha , \sin\alpha)$

ក្នុងត្រីកោណ OMN តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស

គេបាន $MN^2=OM^2+ON^2-2OM\cdot ON\cdot\cos(\alpha-\beta)$

$MN^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)$

$=2-2\cos(\alpha-\beta)$ (1)

ព្រោះ $OM=ON=r=1$ កាំរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ

ម្យ៉ាងទៀត តាមរូបមន្តចម្ងាយរវាងពីរចំណុច $M(\cos\beta\ ,\ \sin\beta)$ និង $N=(\cos\alpha\ ,\ \sin\alpha)$

$$MN=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}$$

$$\begin{aligned} MN^2 &= (\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2\\ &=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta\\ &=2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta\\ &=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\qquad(2)\end{aligned}$$

តាមរយៈ ទំនាក់ទំនង (1) និង (2) ខាងលើ គេផ្ទឹមបាន ៖

$$2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$

$$-2\cos(\alpha-\beta)=-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ខ. បង្ហាញថា $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

គេមាន $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ (បានស្រាយបញ្ជាក់រួចខាងលើ)

បើគេជំនួស β ដោយ $-\beta$

គេបាន $\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$

នាំឱ្យ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

ព្រោះមុំផ្ទុយ $\cos(-\beta)=\cos\beta$, $\sin(-\beta)=-\sin\beta$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➢បង្ហាញថា $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

តាមលក្ខណៈមុំបំពេញ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ គេអាចសរសេរ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\sin(\alpha+\beta)\quad(1)$

តាមរូបមន្ត $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

នាំឱ្យ

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)&=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)\\ &=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\\ &=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ &=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha\qquad(2)\end{aligned}$$

តាមរយៈ ទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➢បង្ហាញថា $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

គេមាន $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ បើគេជំនួស β ដោយ $-\beta$

គេបាន $\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\sin(-\beta)\cos\alpha$

នាំឱ្យ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

ព្រោះមុំផ្ទុយ $\cos(-\beta)=\cos\beta$, $\sin(-\beta)=-\sin\beta$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➢បង្ហាញថា $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

ពិនិត្យ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$ (ចែកភាគយក និងភាគបែង នឹង $\cos\alpha\cos\beta$)

គេបាន $$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\dfrac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➢បង្ហាញថា $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

គេមាន $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ បើគេជំនួស β ដោយ $-\beta$

គេបាន $\tan(\alpha+(-\beta))=\dfrac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$ (ដោយ $\tan(-\beta)=-\tan\beta$)

នាំឱ្យ $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➢បង្ហាញថា $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot a\cot b-1}{\cot b+\cot a}$

ពិនិត្យ $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}$ (ចែកភាគយក និងភាគបែង នឹង $\sin\alpha\sin\beta$)

គេបាន $$\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}}=\dfrac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}+\dfrac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}}=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}$$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➢**បង្ហាញថា** $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$

គេមាន $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}$

បើគេជំនួស β ដោយ $-\beta$

គេបាន $\cot(\alpha+(-\beta))=\dfrac{\cot\alpha\cot(-\beta)-1}{\cot(-\beta)+\cot\alpha}$

នាំឱ្យ $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{-\cot\alpha\cot\beta-1}{-\cot\beta+\cot\alpha}=\dfrac{-(\cot\alpha\cot\beta+1)}{-(\cot\beta-\cot\alpha)}=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

10. ➢**ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត** $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

គេមាន $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ បើគេយក $\beta=\alpha$

គេបាន $\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha$

នាំឱ្យ $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➢**ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត** $\cos 2\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=(1-2\sin^2\alpha)=(2\cos^2\alpha-1)$

គេមាន $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

បើគេយក $\beta=\alpha$

គេបាន $\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$

នាំឱ្យ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left[\begin{array}{l}(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha\\ \cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1\end{array}\right.$ ព្រោះ: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\cos 2\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=(1-2\sin^2\alpha)=(2\cos^2\alpha-1)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➢**ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត** $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

គេមាន $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ បើគេយក $\beta=\alpha$

គេបាន $\tan(\alpha+\alpha)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$

នាំឱ្យ $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➤ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

គេមាន $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ បើជំនួស α ដោយ $\frac{\alpha}{2}$

គេបាន $\sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

នាំឱ្យ $\sin a = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➤ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

គេមាន $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ ឬ $\cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$

បើគេជំនួស α ដោយ $\frac{\alpha}{2}$ គេបាន $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos 2\cdot\frac{\alpha}{2} + 1}{2}$ ឬ $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha + 1}{2}$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➤ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

គេមាន $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ ឬ $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

បើគេជំនួស α ដោយ $\frac{\alpha}{2}$ គេបាន $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos 2\cdot\frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➤ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

គេមាន $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ និង $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ (បានស្រាយបញ្ជាក់រួចខាងលើ)

គេបាន $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

11. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត ដូចខាងក្រោម បើគេតាង $\tan\frac{\alpha}{2}=t$ ៖

➢ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

គេមាន $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ បើជំនួស α ដោយ $\frac{\alpha}{2}$

គេបាន $\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$ (ដោយ $\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=1$)

គេសរសេរ $\cos\alpha=\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ (ចែកទាំងភាគយក និងភាគបែងនឹង $\cos^2\frac{\alpha}{2}$)

គេបាន $\cos\alpha=\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ បើគេតាង $\tan\frac{\alpha}{2}=t$ នាំឱ្យ $\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➢ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$

គេមាន $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ (ដោយ $\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=1$)

គេសរសេរ $\sin\alpha=\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ (ចែកទាំងភាគយក និងភាគបែងនឹង $\cos^2\frac{\alpha}{2}$)

គេបាន $\sin\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ បើគេតាង $\tan\frac{\alpha}{2}=t$ នាំឱ្យ $\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➢ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2}$

គេមាន $\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$ និង $\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ គេបាន $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{2t}{1+t^2}\times\frac{1+t^2}{1-t^2}=\frac{2t}{1-t^2}$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2}$ ដែល $t=\tan\frac{\alpha}{2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

12. ស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនងខាងក្រោម ៖

➢ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

ពិនិត្យ $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha)$

$= \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha$

$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha$

$= (2\cos^2\alpha - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha$

$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha$

$= \cos^3\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha$

$= \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha$

ម្យ៉ាងទៀត $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha)$

$= \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha$

$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha$

$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$

$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha$

$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➢ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin a - \sin^3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$

ពិនិត្យ $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha)$

$= \sin 2\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos 2\alpha$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha(2\cos^2\alpha - 1)$

$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin\alpha$

$= 3\sin\alpha\cos^2\alpha + (\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin\alpha)$

$= 3\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha(\cos^2\alpha - 1)$

$= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$

ម្យ៉ាងទៀត $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha)$

$= \sin 2\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos 2\alpha$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)$

$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$

$= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$

$= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$

$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin a - \sin^3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➢ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cos 4\alpha = \cos^4\alpha + \sin^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha$

ពិនិត្យ $\cos 4\alpha = \cos(3\alpha + \alpha)$

$$= \cos 3\alpha\cos\alpha - \sin 3\alpha\sin\alpha$$
$$= \left(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\right)\cos\alpha - \left(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\right)\sin\alpha$$
$$= 4\cos^4\alpha - 3\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha + 4\sin^4\alpha$$
$$= \cos^4\alpha + \sin^4\alpha + \left(3\cos^4\alpha - 3\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha + 3\sin^4\alpha\right)$$
$$= \cos^4\alpha + \sin^4\alpha + 3\left(\cos^4\alpha - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \sin^4\alpha\right)$$
$$= \cos^4\alpha + \sin^4\alpha + 3\left[\cos^2\alpha\left(\cos^2\alpha - 1\right) - \sin^2\alpha\left(1 - \sin^2\alpha\right)\right]$$
$$= \cos^4\alpha + \sin^4\alpha + 3\left(-\cos^2\alpha\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2 x\right)$$
$$= \cos^4\alpha + \sin^4\alpha + 3\left(-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha\right)$$
$$= \cos^4\alpha + \sin^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha$$

ដូចនេះ

រូបមន្ត $\cos 4\alpha = \cos^4\alpha + \sin^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

➢ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin 4\alpha = 4\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin^3\alpha$

ពិនិត្យ $\sin 4\alpha = \sin(3\alpha + \alpha)$

$$= \sin(3\alpha + \alpha)$$
$$= \sin 3\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos 3\alpha$$
$$= \left(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\right)\cos\alpha + \sin\alpha\left(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\right)$$
$$= 3\sin\alpha\cos\alpha - 4\sin^3\alpha\cos\alpha + 4\sin\alpha\cos^3\alpha - 3\sin\alpha\cos\alpha$$
$$= 4\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\sin^3\alpha\cos\alpha$$

ដូចនេះ

រូបមន្ត $\sin 4\alpha = 4\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin^3\alpha$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

13. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត បំលែងពីផលគុណទៅផលបូក ខាងក្រោម ៖

➢ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$

គេមាន $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad (1)$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad (2)$

គេបូកអង្គ និងអង្គនៃ (1) និង (2) គេបាន៖

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

នាំឱ្យ $\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right] = \cos\alpha\cos\beta$

ដូចនេះ

រូបមន្ត $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

➤ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$

គេមាន $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad (1)$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad (2)$

គេដកអង្គ និងអង្គនៃ (1) និង (2) គេបាន៖

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$$

នាំឱ្យ $\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]=\sin\alpha\sin\beta$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➤ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$

គេមាន $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha \quad (1)$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha \quad (2)$

គេបូកអង្គ និងអង្គនៃ (1) និង (2) គេបាន៖

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

នាំឱ្យ $\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]=\sin\alpha\cos\beta$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➤ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin\beta\cos\alpha=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$

គេមាន $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha \quad (1)$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha \quad (2)$

គេដកអង្គ និងអង្គនៃ (1) និង (2) គេបាន៖

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta\cos\alpha$$

នាំឱ្យ $\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]=\sin\beta\cos\alpha$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\sin\beta\cos\alpha=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

14. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត បំលែងពីផលបូក ទៅផលគុណ ខាងក្រោម ៖

➢ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

គេមាន $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad (1)$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad (2)$

គេបូកអង្គ និងអង្គនៃ (1) និង (2) គេបាន៖ $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta \quad (*)$

បើគេតាង $\alpha+\beta=p$ និង $\alpha-\beta=q$

គេបាន $(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=p+q$ នាំឱ្យ $2\alpha=p+q$ ឬ $\alpha=\frac{p+q}{2}$

$(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)=p-q$ នាំឱ្យ $2\beta=p-q$ ឬ $\beta=\frac{p-q}{2}$

នាំឱ្យ $(*)$ ទៅជា $\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➢ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

គេមាន $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad (1)$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad (2)$

គេដកអង្គ និងអង្គនៃ (1) និង (2) គេបាន៖ $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta \quad (*)$

បើគេតាង $\alpha+\beta=p$ និង $\alpha-\beta=q$ នាំឱ្យ $\alpha=\frac{p+q}{2}$ និង $\beta=\frac{p-q}{2}$

គេបាន $(*)$ ទៅជា $\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➢ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

គេមាន $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha \quad (1)$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha \quad (2)$

គេបូកអង្គ និងអង្គនៃ (1) និង (2) គេបាន៖ $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta \quad (*)$

បើគេតាង $\alpha+\beta=p$ និង $\alpha-\beta=q$ នាំឱ្យ $\alpha=\frac{p+q}{2}$ និង $\beta=\frac{p-q}{2}$

គេបាន $(*)$ ទៅជា $\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➤ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

គេមាន $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha \quad (1)$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha \quad (2)$

គេដកអង្គ និងអង្គនៃ (1) និង (2) គេបាន៖ $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta\cos\alpha \quad (*)$

បើគេតាង $\alpha+\beta=p$ និង $\alpha-\beta=q$ នាំឱ្យ $\alpha=\frac{p+q}{2}$ និង $\beta=\frac{p-q}{2}$

គេបាន $(*)$ ទៅជា $\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➤ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan p+\tan q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$

គេមាន $\tan p+\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin q}{\cos q}$

$=\frac{\sin p\cos q+\sin q\cos p}{\cos p\cos q}$, $\sin(p+q)=\sin p\cos q+\sin q\cos p$

$=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\tan p+\tan q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➤ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan p-\tan q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$

គេមាន $\tan p-\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}-\frac{\sin q}{\cos q}$

$=\frac{\sin p\cos q-\sin q\cos p}{\cos p\cos q}$, $\sin(p-q)=\sin p\cos q-\sin q\cos p$

$=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\tan p-\tan q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➢ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cot p+\cot q=\dfrac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$

គេមាន $\cot p+\cot q=\dfrac{\cos p}{\sin p}+\dfrac{\cos q}{\sin q}$

$=\dfrac{\cos p\sin q+\cos q\sin p}{\sin p\sin q}$

$=\dfrac{\sin p\cos q+\sin q\cos p}{\sin p\sin q}$, $\sin(p+q)=\sin p\cos q+\sin q\cos p$

$=\dfrac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\cot p+\cot q=\dfrac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➢ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cot p-\cot q=-\dfrac{\sin(p-q)}{\sin p\sin q}$

របៀបទី១

គេមាន $\cot p-\cot q=\dfrac{\cos p}{\sin p}-\dfrac{\cos q}{\sin q}$

$=\dfrac{\cos p\sin q-\cos q\sin p}{\sin p\sin q}$

$=-\dfrac{\sin p\cos q-\sin q\cos p}{\sin p\sin q}$, $\sin(p-q)=\sin p\cos q-\sin q\cos p$

$=-\dfrac{\sin(p-q)}{\sin p\sin q}$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\cot p-\cot q=-\dfrac{\sin(p-q)}{\sin p\sin q}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

របៀបទី២

គេមាន $\cot p+\cot q=\dfrac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$ (បានស្រាយបញ្ជាក់រួចខាងលើ)

បើគេជំនួស q ដោយ $-q$

គេបាន $\cot p+\cot(-q)=\dfrac{\sin(p+(-q))}{\sin p\sin(-q)}$ ដោយ $\sin(-q)=-\sin q$

$\cot p-\cot q=-\dfrac{\sin(p-q)}{\sin p\sin q}$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\cot p-\cot q=-\dfrac{\sin(p-q)}{\sin p\sin q}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ម៉ាទ្រីស និងដេទែមីណង់

1. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈនៃម៉ាទ្រីសខាងក្រោម បើ A និង B ជាម៉ាទ្រីសមានលំដាប់ដូចគ្នា ហើយ k , h ជាចំនួនថេរ ៖

   ក. $A+B=B+A$ (លក្ខណៈត្រឡប់នៃវិធីបូក)

   ខ. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (លក្ខណៈផ្តុំនៃវិធីបូក)

   គ. $k(mA)=(km)A$ (វិធីគុណដោយស្កាលែមានលក្ខណៈផ្តុំ)

   ឃ. $k(A+B)=kA+kB$ (វិធីគុណនឹងស្កាលែមានលក្ខណៈបំបែក ចំពោះវិធីបូក) ។

2. បង្ហាញថាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ គឺ $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ដែល $ad-bc\neq 0$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ម៉ាទ្រីស និងដេទែមីណង់

1. បើ A និង B ជាម៉ាទ្រីសមានលំដាប់ដូចគ្នា ហើយ k , h ជាចំនួនថេរ ៖

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A+B=B+A$ **(លក្ខណៈត្រឡប់នៃវិធីបូក)**

គេតាង $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$

គេបាន
$$\begin{aligned}A+B&=\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]\\&=\left[b_{ij}+a_{ij}\right]\\&=\left[b_{ij}\right]+\left[a_{ij}\right]\\&=B+A\end{aligned}$$

ដូចនេះ: **លក្ខណៈនៃម៉ាទ្រីស $A+B=B+A$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់** ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(A+B)+C=A+(B+C)$ **(លក្ខណៈផ្តុំនៃវិធីបូក)**

គេតាង $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ និង $C=\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$

គេបាន
$$\begin{aligned}(A+B)+C&=\left(\left[a_{ij}\right]+\left[b_{ij}\right]\right)+\left[c_{ij}\right]\\&=\left[\left(a_{ij}+b_{ij}\right)+c_{ij}\right]\\&=\left[a_{ij}+\left(b_{ij}+c_{ij}\right)\right]\\&=\left[a_{ij}\right]+\left(\left[b_{ij}\right]+\left[c_{ij}\right]\right)\\&=A+(B+C)\end{aligned}$$

ដូចនេះ: **លក្ខណៈនៃម៉ាទ្រីស $(A+B)+C=A+(B+C)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់** ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $k(mA)=(km)A$ **(វិធីគុណដោយស្កាលែមានលក្ខណៈផ្តុំ)**

គេតាង $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$

គេបាន
$$\begin{aligned}k(mA)&=k\left[ma_{ij}\right]=\left[k\left(ma_{ij}\right)\right]\\&=\left[(km)a_{ij}\right]=(km)\left[a_{ij}\right]\\&=(km)A\end{aligned}$$

ដូចនេះ: **លក្ខណៈនៃម៉ាទ្រីស $k(mA)=(km)A$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់** ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $k(A+B)=kA+kB$ **(វិធីគុណនឹងស្កាលែមានលក្ខណៈបំបែក ចំពោះវិធីបូក)**

គេតាង $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$

គេបាន $k(A+B)=\left[k\left(a_{ij}+b_{ij}\right)\right]=\left[ka_{ij}+kb_{ij}\right]=\left[ka_{ij}\right]+\left[kb_{ij}\right]=kA+kB$

ដូចនេះ: **លក្ខណៈនៃម៉ាទ្រីស $k(A+B)=kA+kB$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់** ។

2. បង្ហាញថាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ គឺ $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ដែល $ad-bc\neq 0$

គេមាន $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ និង $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

គេតាង $M=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

គេបាន $AM=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -bc+ad \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}=(ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=(ad-bc)I$

$AM=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ad-bc & bd-bd \\ -ac+ac & -bc+ad \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}=(ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=(ad-bc)I$

ករណី $AM=(ad-bc)I$ នោះ $I=\frac{1}{ad-bc}AM$

តាមនិយមន័យ A^{-1} ជាម៉ាទ្រីសនៃ A នោះ $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

គេបាន $AA^{-1}=\frac{1}{ad-bc}AM \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}M$ ឬ $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

ករណី $MA=(ad-bc)I$ នោះ $I=\frac{1}{ad-bc}MA$

តាមនិយមន័យ A^{-1} ជាម៉ាទ្រីសនៃ A នោះ $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

គេបាន $A^{-1}A=\frac{1}{ad-bc}MA \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}M$ ឬ $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

តាមពីរករណីខាងលើ បញ្ជាក់ថាម៉ាទ្រីសច្រាសនៃម៉ាទ្រីស A គឺ $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

ដូចនេះ

ម៉ាទ្រីសច្រាសនៃម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ គឺ $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន បំលែងលីនេអ៊ែ

1. បង្ហាញរូបមន្តបំលែងឆ្លុះតាមករណីដូចខាងក្រោម ៖

ក. បំលែងលីនេអ៊ែរឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $x'x$ គឺ $S_{x'x}:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$។

ខ. បំលែងលីនេអ៊ែរឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $y'y$ គឺ $S_{y'y}:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$។

គ. បំលែងលីនេអ៊ែរឆ្លុះធៀបនឹងគល់ O គឺ $S_O:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$។

2. បង្ហាញរូបមន្តបំលែងចាំង ដូចខាងក្រោម ៖

បំលែងចាំង H ដែលមានផលធៀប k គឺៈ $H(0,k):\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k&0\\0&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ ។

3. បង្ហាញរូបមន្តបំលែងវិលដូចខាងក្រោម ៖

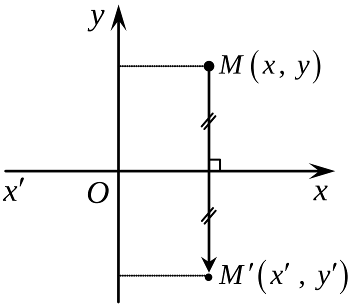
បំលែងវិលនៃមុំ α គឺៈ $\Re(0,\alpha):\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន បំលែងលីនេអ៊ែរ

1. **បង្ហាញរូបមន្តបំលែងឆ្លុះតាមករណីដូចខាងក្រោម ៖**

ក. បង្ហាញរូបមន្ត បំលែងលីនេអ៊ែរឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $x'x$ គឺ $S_{x'x}:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

គេតាង $M(x\,,\,y)$ និង $M'(x'\,,\,y')$



បើចំណុច $M(x\,,\,y)$ និង $M'(x'\,,\,y')$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្ស $x'x$

គេបាន $x'=x$ និង $y'=-y$

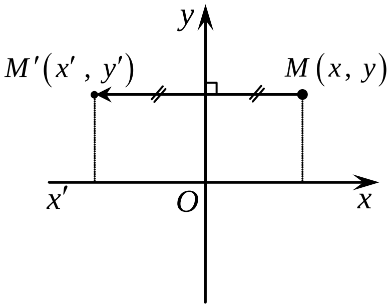
គេសរសេរ $M\overset{S_{x'x}}{\to}M'$: $\begin{cases}x'=x\\y'=-y\end{cases}$ អាចសរសេរ $\begin{cases}x'=1\cdot x+0\cdot y\\y'=0\cdot x-1\cdot y\end{cases}$

គេអាចសរសេរជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស $S_{x'x}:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

ដូចនេះ: រូបមន្ត បំលែងលីនេអ៊ែរឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $x'x$ គឺ $S_{x'x}:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ខ. បង្ហាញរូបមន្ត បំលែងលីនេអ៊ែរឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $y'y$ គឺ $S_{y'y}:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

គេតាង $M(x\,,\,y)$ និង $M'(x'\,,\,y')$



បើចំណុច $M(x\,,\,y)$ និង $M'(x'\,,\,y')$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្ស $y'y$

គេបាន $x'=-x$ និង $y'=y$

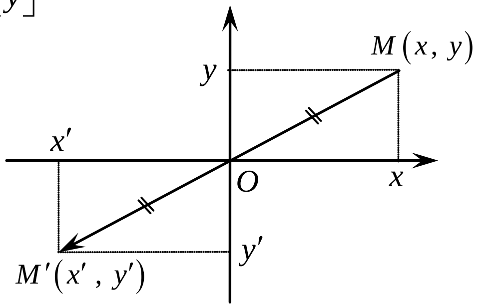
គេសរសេរ $M\overset{S_{y'y}}{\to}M'$: $\begin{cases}x'=-x\\y'=y\end{cases}$ អាចសរសេរ $\begin{cases}x'=-1\cdot x+0\cdot y\\y'=0\cdot x+1\cdot y\end{cases}$

គេអាចសរសេរជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស $S_{y'y}:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

ដូចនេះ: រូបមន្ត បំលែងលីនេអ៊ែរឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $y'y$ គឺ $S_{y'y}:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

គ. បង្ហាញរូបមន្ត បំលែងលីនេអ៊ែរឆ្លុះធៀបនឹងគល់ O គឺ $S_O:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

គេតាង $M(x\,,\,y)$ និង $M'(x'\,,\,y')$



បើចំណុច $M(x\,,\,y)$ និង $M'(x'\,,\,y')$ ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់ O

គេបាន $x'=-x$ និង $y'=-y$

គេសរសេរ $M\overset{S_O}{\to}M'$: $\begin{cases}x'=-x\\y'=-y\end{cases}$ អាចសរសេរ $\begin{cases}x'=-1\cdot x+0\cdot y\\y'=0\cdot x-1\cdot y\end{cases}$

គេអាចសរសេរជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស $S_O:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

ដូចនេះ: រូបមន្ត បំលែងលីនេអ៊ែរឆ្លុះធៀបនឹងអ័ក្ស $y'y$ គឺ $S_O:\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

2. **បង្ហាញរូបមន្ត បំលែងចាំង H ដែលមានផលធៀប k គឺ:** $H(0\,,k):\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k & 0\\0 & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

បើ $M'(x'\,,\,y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x\,,\,y)$ តាមបំលែងចាំង H ដែលមានផលធៀប k ដែល $k\neq 0$

នោះគេបានកូអរដោនេ $x'=kx$, $y'=ky$ អាចសរសេរជា $\begin{cases}x'=k\cdot x+0\cdot y\\y'=0\cdot x+k\cdot y\end{cases}$

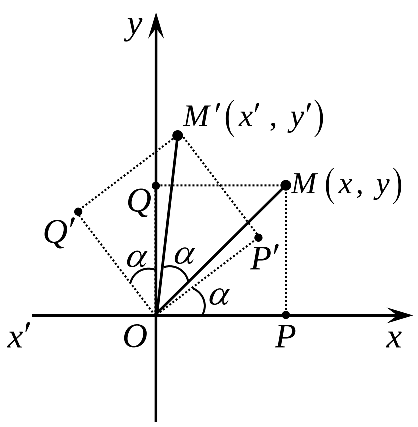
ដើម្បីងាយស្រួលសិក្សា គេសរសេរជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស $H(0\,,k):\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k & 0\\0 & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

ដូចនេះ: រូបមន្តបំលែងចាំង H ដែលមានផលធៀប k គឺ: $H(0\,,k):\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k & 0\\0 & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

3. **បង្ហាញរូបមន្ត បំលែងវិលបំលែងវិលនៃមុំ α គឺ:** $\Re(0,\alpha):\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

បើ $M'(x'\,,\,y')$ ជារូបភាពនៃ $M(x\,,\,y)$ តាមបំលែងវិល $\Re(0,\alpha)$ នោះគេបាន

$OM'=OM$, $\left(\overrightarrow{OM}\,,\overrightarrow{OM'}\right)=\alpha$



គេដៅចំណុច P និង Q ជាចំណោលកែងនៃចំណុច M មកលើអ័ក្ស $\overrightarrow{Ox}$ និង $\overrightarrow{Oy}$

បើ M ផ្លាស់ទីមក M តាមមុំ α នោះ P និង Q ក៏ផ្លាស់ទីមក P' និង Q' តាមមុំ α ដែរ

តាមរូប បើគេយកកូអរដោនេ $P'(x\cos\alpha\,,\,x\sin\alpha)$ និង $P'(-y\sin\alpha\,,\,y\cos\alpha)$

ចំពោះចតុកោណ $OP'M'Q'$ គេមាន $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{OQ'}$

ដោយ $\overrightarrow{OM'}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ និង

$\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{OQ'}=\left(x\cos\alpha\vec{i}+x\sin\alpha\vec{j}\right)+\left(-y\sin\alpha\vec{i}+y\cos\alpha\vec{j}\right)$

គេបាន $x'\vec{i}+y'\vec{j}=\left(x\cos\alpha\vec{i}+x\sin\alpha\vec{j}\right)+\left(-y\sin\alpha\vec{i}+y\cos\alpha\vec{j}\right)$

$=\left(x\cos\alpha-y\sin\alpha\right)\vec{i}+\left(x\sin\alpha+y\cos\alpha\right)\vec{j}$

ទាញបាន $\begin{cases}x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha\\y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x'=\cos\alpha\cdot x-\sin\alpha\cdot y\\y'=\sin\alpha\cdot x+\cos\alpha\cdot y\end{cases}$

គេអាចសរសេរជាទម្រង់ម៉ាទ្រីស នៃបំលែងវិលមុំ α ដែលមាន O ជាផ្ចិត គឺ $\Re(0,\alpha):\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

ដូចនេះ: រូបមន្តបំលែងវិលបំលែងវិលនៃមុំ α គឺ: $\Re(0,\alpha):\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ ត្រូវបានបង្ហាញ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ធរណីមាត្រក្នុងលំហ

1. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(x\,,\,y\,,\,z)$ ផ្គុំជាមួយអ័ក្ស ox , oy និង oz បានមុំរៀងគ្នា α , β និង γ នោះគេបាន $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ ។
2. បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ គេបាន $\vec{u}^2=|\vec{u}|^2$ ។
3. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AH$ ដែល H ជាចំណោលកែងនៃ C លើ $\overrightarrow{AB}$ ។
4. ស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

   ក. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ ខ. $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ ដែល $\vec{u}\neq\vec{0}\,,\vec{v}\neq\vec{0}$

   គ. $(m\vec{u})\cdot\vec{v}=m(\vec{u}\cdot\vec{v})$ ឃ. $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\le|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ (វិសមភាពកូស៊ី)

   ង. $|\vec{u}+\vec{v}|\le|\vec{u}|+|\vec{v}|$ (វិសមភាពត្រីកោណ) ។
5. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $\vec{u}=(x\,,\,y\,,\,z)$ និង $\vec{v}=(x'\,,\,y'\,,\,z')$ នោះគេបាន $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ ។
6. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ $\vec{u}=(x\,,\,y\,,\,z)$ ក្នុងគោលណរម៉ាល់ $(\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k})$ នោះគេបាន ៖

   $\vec{u}\cdot\vec{i}=x$, $\vec{u}\cdot\vec{j}=y$, $\vec{u}\cdot\vec{k}=z$ ។
7. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ប្រវែងនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(x\,,\,y\,,\,z)$ គឺ $|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ។
8. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $\vec{u}=(x\,,\,y\,,\,z)$ និង $\vec{v}=(x'\,,\,y'\,,\,z')$ ផ្គុំបានមុំ θ នោះគេបាន ៖

   $$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$ ។
9. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ ជាជ្រុងនៃត្រីកោណ ABC នោះវាមានផ្ទៃ $S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-(\vec{a}\vec{b})^2}$ ។
10. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

    ក. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ ខ. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

    គ. $\vec{u}\cdot(m\vec{v})=m(\vec{u}\cdot\vec{v})$ ឃ. $(m\vec{u})\cdot\vec{v}=m(\vec{u}\cdot\vec{v})$ ។
11. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច $P(x_1\,,\,y_1\,,\,z_1)$ និង $Q(x_2\,,\,y_2\,,\,z_2)$ កំណត់ដោយ

    $d(P\,,\,Q)=PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ ។
12. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត $C(a\,,\,b\,,\,c)$ និងកាំ r កំណត់ដោយ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ ។
13. ស្រាយបញ្ជាក់ថា វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្នុងនៃស្វ៊ែ ដែលមានផ្ចិតនៅត្រង់ $I(a\,,\,b\,,\,c)$ និងមានកាំ r គឺ :

    $\left\{(x\,,\,y\,,\,z)/(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2<r^2\right\}$ ។
14. ស្រាយបញ្ជាក់ថា វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្រៅនៃស្វ៊ែ ដែលមានផ្ចិតនៅត្រង់ $I(a\,,\,b\,,\,c)$ និងមានកាំ r គឺ :

    $\left\{(x\,,\,y\,,\,z)/(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2>r^2\right\}$ ។
15. ស្រាយបញ្ជាក់ថា វ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{c}$ នៃចំណុច C ចែកអង្កត់ $[AB]$ ខាងក្នុងតាមផលធៀប $m:n$ គឺ $\vec{c}=\dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$ ។
16. ស្រាយបញ្ជាក់ថា វ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{d}$ នៃចំណុច D ចែកអង្កត់ $[AB]$ ខាងក្រៅតាមផលធៀប $m:n$ គឺ $\vec{d}=\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$ ។

17. ស្រាយបញ្ជាក់ថា វ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ នៃចំណុច G ដែល G ជាទីប្រជុំទម្ងន់របស់ត្រីកោណ ABC មានកំពូល $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ និង $C(\vec{c})$ ។

18. គេឱ្យបួនចំណុច O , A , B , C នៅក្នុងលំហ ។ បង្ហាញថា បើ $[OB]\perp[CA]$ និង $[OC]\perp[AB]$ នោះគេបាន $[OA]\perp[BC]$ ។

19. គេឱ្យចតុមុខនិយ័ត $ABCD$ មួយក្នុងលំហ ដែល $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ ។ បង្ហាញថា $[AB]\perp[CD]$ ។

20. បង្ហាញថា បើបួនចំណុច A, B, C និង D នៅក្នុងលំហ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$ នោះ $[AD]\perp[BC]$ ។

21. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហ កាត់តាមចំណុច $P(x_0\ , y_0\ , z_0)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(a\ , b\ , c)$ មានសមីការ ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ រួចទាញបញ្ជាក់ថា $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ ដែលគេហៅថា សមីការឆ្លុះ ។

22. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមពីរចំណុច $P(x_0\ , y_0\ , z_0)$ និង ចំណុច $P_1(x_1\ , y_1\ , z_1)$ គឺ $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}$ ។

23. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច $P(x_0\ , y_0\ , z_0)$ និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(a\ , b\ , c)$ មានសមីការគឺ $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ ។

24. ក. បង្ហាញថា ប្លង់ (xoy) មានសមីការ $z=0$ ។

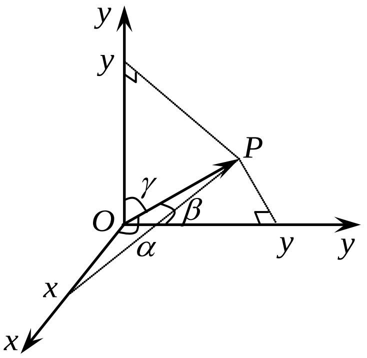
ខ. បង្ហាញថា ប្លង់ (xoz) មានសមីការ $y=0$ ។

គ. បង្ហាញថា ប្លង់ (yoz) មានសមីការ $x=0$ ។

25. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្ងាយពីចំណុច $P_0(x_0\ , y_0\ , z_0)$ ទៅប្លង់ α : $ax+by+cz+d=0$ គឺ $d(P_0\ , \alpha)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ធរណីមាត្រក្នុងលំហ

1. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា** $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$



គេមាន គេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(x\ ,\ y\ ,\ z)$ ផ្គុំជាមួយអ័ក្ស $ox\ ,\ oy$ និង oz បានមុំរៀងគ្នា $\alpha\ ,\ \beta$ និង γ

គេយក P ជាចំណុចមួយក្នុងលំហ ដែល $\vec{u}=\overrightarrow{OP}$

គេបាន $\left|\overrightarrow{OP}\right|^2=x^2+y^2+z^2$

ត្រីកោណកែង OxP មាន $\cos\alpha=\dfrac{x}{\left|\overrightarrow{OP}\right|}\ \Rightarrow\ x=\left|\overrightarrow{OP}\right|\cdot\cos\alpha$

ត្រីកោណកែង OyP មាន $\cos\beta=\dfrac{y}{\left|\overrightarrow{OP}\right|}\ \Rightarrow\ y=\left|\overrightarrow{OP}\right|\cdot\cos\beta$

ត្រីកោណកែង OzP មាន $\cos\gamma=\dfrac{z}{\left|\overrightarrow{OP}\right|}\ \Rightarrow\ z=\left|\overrightarrow{OP}\right|\cdot\cos\gamma$

នាំឱ្យ $\left|\overrightarrow{OP}\right|^2=\left(\left|\overrightarrow{OP}\right|\cdot\cos\alpha\right)^2+\left(\left|\overrightarrow{OP}\right|\cdot\cos\beta\right)^2+\left(\left|\overrightarrow{OP}\right|\cdot\cos\gamma\right)^2$

$\left|\overrightarrow{OP}\right|^2=\left|\overrightarrow{OP}\right|^2\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right)$ នោះ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

ដូចនេះ $\boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

2. **បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ គេបាន** $\vec{u}^2=\left|\vec{u}\right|^2$

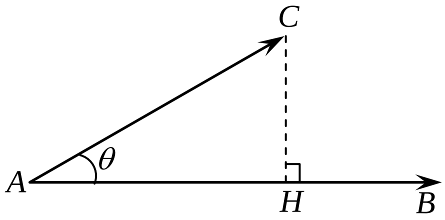
តាមនិយមន័យផលគុណស្កាលែ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\theta$ ដែល θ ជាមុំផ្គុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$

ដោយមុំផ្គុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{u}$ គឺ $\theta=0^\circ$ (វ៉ិចទ័រត្រួតស៊ីគ្នា)

គេបាន $\vec{u}\cdot\vec{u}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|\cdot\cos0^\circ$ នោះ $\vec{u}^2=\left|\vec{u}\right|^2$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{u}^2=\left|\vec{u}\right|^2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

3. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AH$ **ដែល** H **ជាចំណោលកែងនៃ** C **លើ** $\overrightarrow{AB}$



តាមនិយមន័យផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\theta$

ដោយ $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|$ និង $AC=\left|\overrightarrow{AC}\right|$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos\theta \quad (1)$

ក្នុងត្រីកោណកែង AHC មាន $\cos\theta=\dfrac{AH}{AC}$ នោះ $AH=AC\cdot\cos\theta$

គេបាន $(1):\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AH$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AH}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

4. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

គេតាង θ ជាមុំផ្ចិតរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$

នាំឱ្យ មុំផ្ចិតរវាង $\vec{v}$ និង $\vec{u}$ គឺ $-\theta$

តាមនិយមន័យផលគុណស្កាលែ $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\vec{v}\cdot\vec{u}=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(-\theta)=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$ (2) (ព្រោះ $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|=|\vec{v}|\cdot|\vec{u}|$ និង $\cos(-\theta)=\cos\theta$ មុំផ្ទុយ)

តាមរយៈ ទំនាក់ទំនង (1) និង (2) នាំឱ្យ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}\text{ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់}}$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ **ដែល** $\vec{u}\neq\vec{0}\,,\,\vec{v}\neq\vec{0}$

តាមនិយមន័យផលគុណស្កាលែ $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$ ដែល θ ជាមុំផ្ចិតរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$

ដោយ $\vec{u}\perp\vec{v}$ នោះ $\theta=90^\circ$

គេបាន $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos 90^\circ=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot 0=0$

ម្យ៉ាងទៀត $\vec{u}\neq\vec{0}\,,\,\vec{v}\neq\vec{0}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot 0=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos 90^\circ$ នោះ $\vec{u}\perp\vec{v}$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\text{ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់}}$ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(m\vec{u})\cdot\vec{v}=m(\vec{u}\cdot\vec{v})$ **ដែល** m **ជាចំនួនពិត**

បើ $\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រមួយ នោះ $m\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រថ្មីមួយទៀត ដែល $\vec{u}\,//\,(m\vec{u})$ និង $|m\vec{u}|=|m||\vec{u}|$

គេតាង θ ជាមុំផ្ចិតរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ នោះ $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$

គេបាន •បើ $m>0$ នោះ $(m\vec{u})$ ផ្ចិតនិង $\vec{v}$ បានមុំ θ

$$(m\vec{u})\cdot\vec{v}=|m\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta=|m|\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta=m(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

•បើ $m<0$ នោះ $(m\vec{u})$ ផ្ចិតនិង $\vec{v}$ បានមុំ $180^\circ-\theta$

$$(m\vec{u})\cdot\vec{v}=|m\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(180^\circ-\theta)=|m|\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot(-\cos\theta)$$
$$=-m\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot(-\cos\theta)=m\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta=m(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

•បើ $m=0$ នោះ $(m\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{0}\cdot\vec{v}=0=0\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta=m(\vec{u}\cdot\vec{v})$

ឃើញថា គ្រប់ចំនួនពិតនៃ m គេបាន $(m\vec{u})\cdot\vec{v}=m(\vec{u}\cdot\vec{v})$

ដូចនេះ $\boxed{(m\vec{u})\cdot\vec{v}=m(\vec{u}\cdot\vec{v})\text{ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់}}$ ។

ឃ.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leq|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ **(វិសមភាពកូស៊ី)**

តាមនិយមន័យផលគុណស្កាលែ $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$

គេបាន $|\vec{u}\cdot\vec{v}|=\big||\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta\big|=\big||\vec{u}|\big|\cdot\big||\vec{v}|\big|\cdot|\cos\theta|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot|\cos\theta|$ (1)

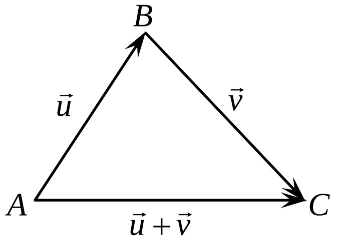
ដោយ $-1\leq\cos\theta\leq 1\Rightarrow|\cos\theta|\leq 1$ គុណអង្គទាំងពីរនឹង $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ គេបាន $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot|\cos\theta|\leq|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ (2)

តាមរយៈ ទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leq|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

ដូចនេះ $\boxed{|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leq|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\text{ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់}}$ ។

ង. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $|\vec{u}+\vec{v}| \le |\vec{u}|+|\vec{v}|$ (វិសមភាពត្រីកោណ)

តាមវិសមភាពក្នុងត្រីកោណ ABC



គេបាន $AC < AB + BC$ ឬ $|\vec{u}+\vec{v}| < |\vec{u}|+|\vec{v}|$ (1)

ព្រោះ $AC = |\vec{u}+\vec{v}|$, $AB = |\vec{u}|$, $BC = |\vec{v}|$

ម្យ៉ាងទៀត ជ្រុងត្រីកោណមិនអាចសូន្យ ប៉ុន្តែវ៉ិចទ័រអាចសូន្យ

បើ $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$ គេបាន $|\vec{u}+\vec{v}| = |\vec{u}|+|\vec{v}|$ (2)

តាមរយៈ ទំនាក់ទំនង (1) និង (2) នាំឱ្យ $|\vec{u}+\vec{v}| \le |\vec{u}|+|\vec{v}|$

ដូចនេះ $|\vec{u}+\vec{v}| \le |\vec{u}|+|\vec{v}|$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

5. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា** $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'$

គេមាន $\vec{u} = (x , y , z)$ និង $\vec{v} = (x' , y' , z')$

គេបាន $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ និង $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

នាំឱ្យ $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)\cdot\left(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}\right)$

$= xx'\vec{i}^{\,2} + xy'\vec{i}\cdot\vec{j} + xz'\vec{i}\cdot\vec{k} + x'y\vec{j}\cdot\vec{i} + yy'\vec{j}^{\,2} + yz'\vec{j}\cdot\vec{k} + x'z\vec{k}\cdot\vec{i} + y'z\vec{k}\cdot\vec{j} + zz'\vec{k}^{\,2}$

ដោយ $\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1$ និង $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = 0$, $\vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$, $\vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$

ព្រោះ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតា ហើយ $\vec{i}\perp\vec{j}$, $\vec{i}\perp\vec{k}$, $\vec{j}\perp\vec{k}$ (ដែល $\cos 90° = \cos(-90°) = 0$)

គេបាន $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'(1) + xy'(0) + xz'(0) + x'y(0) + yy'(1) + yz'(0) + x'z(0) + y'z(0) + zz'(1)$

$= xx'+yy'+zz'$

ដូចនេះ រូបមន្ត $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

6. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា** $\vec{u}\cdot\vec{i} = x$, $\vec{u}\cdot\vec{j} = y$, $\vec{u}\cdot\vec{k} = z$

គេមាន $\vec{u} = (x , y , z)$ និង $\vec{i} = (1 , 0 , 0)$, $\vec{j} = (0 , 1 , 0)$, $\vec{k} = (0 , 0 , 1)$

គេបាន $\vec{u}\cdot\vec{i} = (x)(1) + (y)(0) + (z)(0) = x$

$\vec{u}\cdot\vec{j} = (x)(0) + (y)(1) + (z)(0) = y$

$\vec{u}\cdot\vec{k} = (x)(0) + (y)(0) + (z)(1) = z$

ដូចនេះ $\vec{u}\cdot\vec{i} = x$, $\vec{u}\cdot\vec{j} = y$, $\vec{u}\cdot\vec{k} = z$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

7. **➤របៀបទី១ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា ប្រវែងនៃវ៉ិចទ័រ** $\vec{u} = (x , y , z)$ **គឺ** $|\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

គេមាន $\vec{u}^{\,2} = |\vec{u}|^2$ បានស្រាយរួចលំហាត់លេខ 2

ម្យ៉ាងទៀត $\vec{u}^{\,2} = xx + yy + zz = x^2 + y^2 + z^2$

គេបាន $|\vec{u}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ នាំឱ្យ $|\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ព្រោះ $|\vec{u}| \ge 0$

ដូចនេះ រូបមន្ត $|\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➢របៀបទី២ : ស្រាយបញ្ជាក់ថា ប្រវែងនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(x\ ,\ y\ ,\ z)$ គឺ $|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

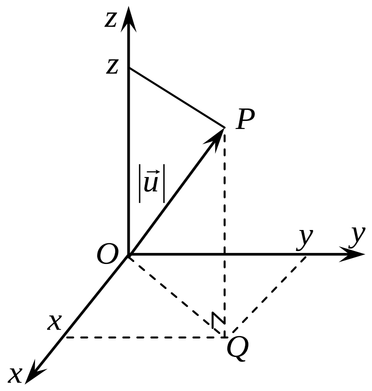
គេតាង $\vec{u}=\overrightarrow{OP}$ នាំឱ្យ $|\vec{u}|=|\overrightarrow{OP}|=OP$

ក្នុងត្រីកោណកែង OQP មាន $OP^2=OQ^2+PQ^2$

ដោយ $OQ^2=x^2+y^2$ និង $PQ^2=z^2$

គេបាន $OP^2=x^2+y^2+z^2$ ឬ $OP=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

នាំឱ្យ $|\vec{u}|=|\overrightarrow{OP}|=OP=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$



ដូចនេះ រូបមន្ត $|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

8. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$

គេមាន $\vec{u}=(x\ ,\ y\ ,\ z)$ និង $\vec{v}=(x'\ ,\ y'\ ,\ z')$ ផ្គុំបានមុំ θ

តាមនិយមន័យផលគុណស្កាលែ $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$ នាំឱ្យ $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$

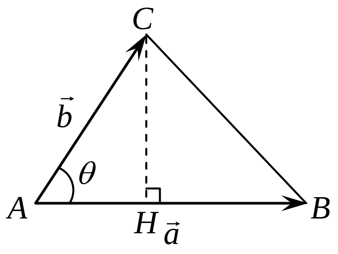
ដោយ $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ និង $|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $|\vec{v}|=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$

គេបាន $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$

ដូចនេះ រូបមន្ត $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

9. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ផ្ទៃត្រីកោណ $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-(\vec{a}\vec{b})^2}$

គេមាន $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ ជាជ្រុងនៃត្រីកោណ ABC



គេបាន $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\times$ បាត $\times$ កម្ពស់ ឬ $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\times AB\times CH$

ដោយ $AB=|\vec{a}|$ និង $CH=|\vec{b}|\cdot\sin\theta$

គេបាន $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\theta$

ម្យ៉ាងទៀត $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-(\vec{a}\vec{b})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-(|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta)^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot\cos^2\theta}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot\sin^2\theta}=\dfrac{1}{2}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\theta=S_{ABC}$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC គឺ $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-(\vec{a}\vec{b})^2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

10. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈនៃផលគុណស្កាលែក្នុងលំហដូចខាងក្រោម ៖

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

គេតាង $\vec{u}=(u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3)$, $\vec{v}=(v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3)$ និង $\vec{w}=(w_1\ ,\ w_2\ ,\ w_3)$

គេបាន $\vec{v}+\vec{w}=(v_1+w_1\ ,\ v_2+w_2\ ,\ v_3+w_3)$

នាំឱ្យ $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=u_1(v_1+w_1)+u_2(v_2+w_2)+u_3(v_3+w_3)$

$=u_1v_1+u_1w_1+u_2v_2+u_2w_2+u_3v_3+u_3w_3$

$=(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)+(u_1w_1+u_2w_2+u_3w_3)$

$=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

ដូចនេះ | លក្ខណៈ $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

គេតាង $\vec{u}=(u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3)$, $\vec{v}=(v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3)$ និង $\vec{w}=(w_1\ ,\ w_2\ ,\ w_3)$

គេបាន $\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1\ ,\ u_2+v_2\ ,\ u_3+v_3)$

នាំឱ្យ $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=(u_1+v_1)w_1+(u_2+v_2)w_2+(u_3+v_3)w_3$

$=u_1w_1+v_1w_1+u_2w_2+v_2w_2+u_3w_3+v_3w_3$

$=(u_1w_1+u_2w_2+u_3w_3)+(v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3)$

$=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

ដូចនេះ | លក្ខណៈ $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\vec{u}\cdot(m\vec{v})=m(\vec{u}\cdot\vec{v})$

គេតាង $\vec{u}=(u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3)$, $\vec{v}=(v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3)$ នោះ $m\vec{v}=(mv_1\ ,\ mv_2\ ,\ mv_3)$

គេបាន $\vec{u}\cdot(m\vec{v})=u_1mv_1+u_2mv_2+u_3mv_3$

$=m(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)$

$=m(\vec{u}\cdot\vec{v})$

ដូចនេះ | លក្ខណៈ $\vec{u}\cdot(m\vec{v})=m(\vec{u}\cdot\vec{v})$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(m\vec{u})\cdot\vec{v}=m(\vec{u}\cdot\vec{v})$

គេតាង $\vec{u}=(u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3)$, $\vec{v}=(v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3)$ នោះ $m\vec{u}=(mu_1\ ,\ mu_2\ ,\ mu_3)$

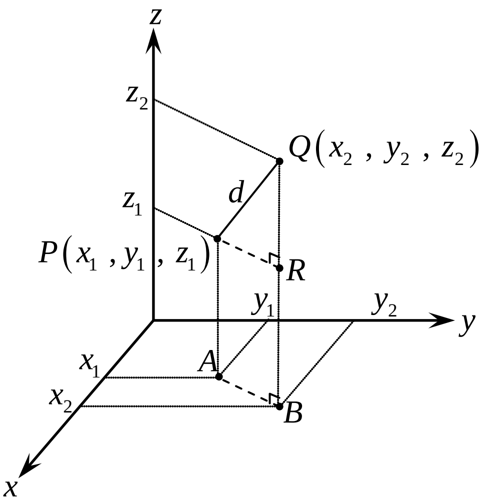
គេបាន $(m\vec{u})\cdot\vec{v}=mu_1v_1+mu_2v_2+mu_3v_3$

$=m(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)$

$=m(\vec{u}\cdot\vec{v})$

ដូចនេះ | លក្ខណៈ $(m\vec{u})\cdot\vec{v}=m(\vec{u}\cdot\vec{v})$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

11. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច** $d(P\,,\,Q)=PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$



គេមាន ពីរចំណុច $P(x_1\,,\,y_1\,,\,z_1)$ និង $Q(x_2\,,\,y_2\,,\,z_2)$

ក្នុងត្រីកោណកែង PQR តាមពីតាគ័រ $PQ^2=PR^2+QR^2$

ដែល $PR^2=AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

ហើយ $QR^2=(z_2-z_1)^2$

គេបាន $PQ^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$

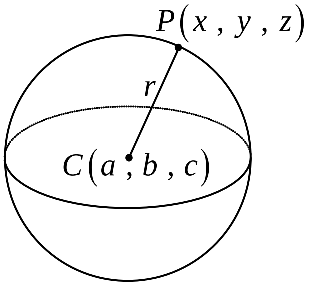
នាំឱ្យ $PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

គេតាង $d=PQ$ (ព្រោះ $d=$ distance $=$ ចម្ងាយ)

គេសរសេរ $d=PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

ដូចនេះ: | ចម្ងាយ $d(P\,,\,Q)=PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

12. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្វ៊ែកំណត់ដោយ** $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$



គេមាន ស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត $C(a\,,\,b\,,\,c)$ និងកាំ r

គេតាង $P(x\,,\,y\,,\,z)$ ជាចំណុចទូទៅនៅលើស្វ៊ែ

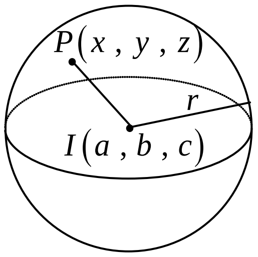
តាមនិយមន័យស្វ៊ែ គេបាន $CP^2=r^2$

តាមរូបមន្ត ចម្ងាយ $CP^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$

គេបាន $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

ដូចនេះ: | សមីការស្វ៊ែ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

13. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្នុងនៃស្វ៊ែ គឺ :** $\left\{(x\,,\,y\,,\,z)/(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2<r^2\right\}$



គេមាន ស្វ៊ែផ្ចិត $I(a\,,\,b\,,\,c)$ និងមានកាំ r

តាមនិយមន័យ វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្នុងនៃស្វ៊ែគឺ

ចំណុចដែលមានចម្ងាយពីផ្ចិតតូចជាងកាំ

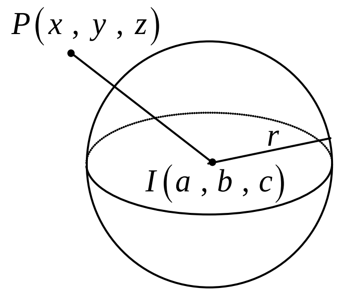
គេបាន $IP<r$ ឬ $IP^2<r^2$

តាមរូបមន្ត ចម្ងាយពីរចំណុច $IP^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$

នាំឱ្យ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2<r^2$

ដូចនេះ: | វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្នុងនៃស្វ៊ែគឺ : $\left\{(x\,,\,y\,,\,z)/(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2<r^2\right\}$ | ។

14. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្រៅនៃស្វ៊ែ គឺ :** $\left\{(x, y, z) / (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2>r^2\right\}$



គេមាន ស្វ៊ែផ្ចិត $I(a, b, c)$ និងមានកាំ r

តាមនិយមន័យ វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្រៅនៃស្វ៊ែគឺ ចំណុចដែលមានចម្ងាយពីផ្ចិតធំជាងកាំ

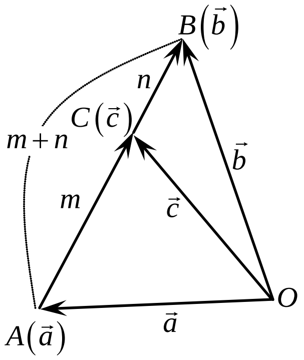
គេបាន $IP>r$ ឬ $IP^2>r^2$

តាមរូបមន្ត ចម្ងាយពីរចំណុច $IP^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$

នាំឱ្យ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2>r^2$

ដូចនេះ: **វិសមីការតំបន់ផ្នែកខាងក្រៅនៃស្វ៊ែគឺ : $\left\{(x, y, z) / (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2>r^2\right\}$** ។

15. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា** $\vec{c}=\dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$ **(វ៉ិចទ័រទីតាំងចែកក្នុង)**



គេមាន $\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$ និង $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

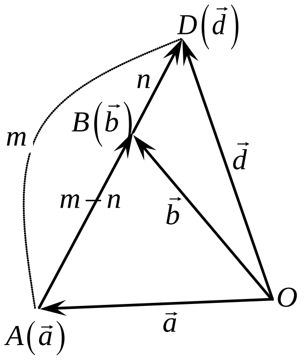
ផលធៀប $m:n$ មានន័យថា $\dfrac{AC}{m}=\dfrac{AB}{m+n}$ នោះ $\overrightarrow{AC}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$

គេបាន $\vec{c}-\vec{a}=\dfrac{m}{m+n}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$

នាំឱ្យ $\vec{c}=\dfrac{m}{m+n}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+\vec{a}=\dfrac{m\vec{b}-m\vec{a}+m\vec{a}+n\vec{a}}{m+n}=\dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$

ដូចនេះ: $\vec{c}=\dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

16. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា** $\vec{d}=\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$ **(វ៉ិចទ័រទីតាំងចែកក្រៅ)**



យើងមាន $\overrightarrow{AD}=\vec{d}-\vec{a}$ និង $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

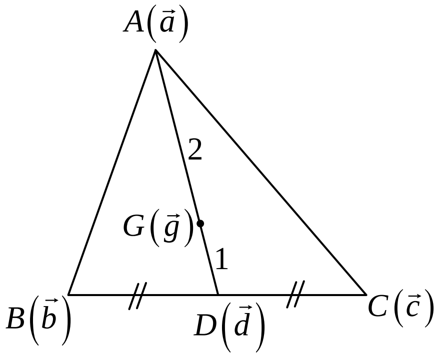
ផលធៀប $m:n$ មានន័យថា $\dfrac{AD}{m}=\dfrac{AB}{m-n}$ នោះ: $\overrightarrow{AD}=\dfrac{m}{m-n}\overrightarrow{AB}$

យើងបាន $\vec{d}-\vec{a}=\dfrac{m}{m-n}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$

នាំឱ្យ $\vec{d}=\dfrac{m}{m-n}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+\vec{a}=\dfrac{m\vec{b}-m\vec{a}+m\vec{a}-n\vec{a}}{m-n}=\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$

ដូចនេះ: $\vec{d}=\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

17. ស្រាយបញ្ជាក់ថា វ៉ិចទ័រទីតាំងនៃទីប្រជុំទម្ងន់ $\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$



គេមាន កំពូល $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ និង $C(\vec{c})$ និង $G(\vec{g})$ ជាទីប្រជុំទម្ងន់

គេយក $D(\vec{d})$ ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[BC]$

គេបាន $D(\vec{d})$ ចែកក្នុងនៃ $[BC]$ តាមផលធៀប $m:n=1:1$

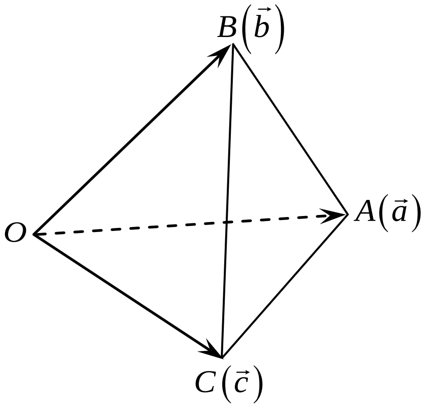
គេបាន $\vec{d}=\dfrac{m\vec{c}+n\vec{b}}{m+n}=\dfrac{1\cdot\vec{c}+1\cdot\vec{b}}{1+1}=\dfrac{\vec{c}+\vec{b}}{2}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

ម្យ៉ាងទៀត $G(\vec{g})$ ជាចំណុចចែកក្នុងនៃមេដ្យាន AD ខាងក្នុងតាម ផលធៀប $m:n$ ដោយយក $m=2\ ,n=1$

គេបាន $\vec{g}=\dfrac{m\vec{d}+n\vec{a}}{m+n}=\dfrac{2\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)+1\cdot\vec{a}}{2+1}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

ដូចនេះ: វ៉ិចទ័រទីតាំងនៃទីប្រជុំទម្ងន់គឺ $\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

18. បង្ហាញថា $[OA]\perp[BC]$



គេមាន បួនចំណុច O, A, B, C នៅក្នុងលំហ និងយក O ជាគល់ $[OB]\perp[CA]$ និង $[OC]\perp[AB]$

ដោយ $[OB]\perp[CA]$ នោះ $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$

នាំឱ្យ $\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0$ ឬ $\vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{c}\quad(1)$

ហើយ $[OC]\perp[AB]$ នោះ $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

នាំឱ្យ $\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$ ឬ $\vec{c}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{a}\quad(2)$

តាមរយៈ ទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន $\vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{a}$

នាំឱ្យ $\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{a}=0$ នោះ $\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

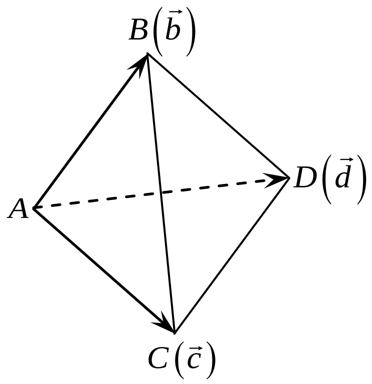
គេបាន $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$ ឬ $[OA]\perp[BC]$

ដូចនេះ: បង្ហាញបានថា $[OA]\perp[BC]$ ។

19. **បង្ហាញថា** $[AB]\perp[CD]$

គេមាន ចតុមុខនិយ័ត $ABCD$ និង $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$

គេយក A ជាគល់



តាមរូប គេបាន $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\vec{b}\cdot(\vec{d}-\vec{c})=\vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{c}$

តែ $\vec{b}\cdot\vec{d}=|\vec{b}|\cdot|\vec{d}|\cdot\cos 60^\circ$ និង $\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos 60^\circ$

នាំឱ្យ $\vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

ព្រោះ $ABCD$ ជាចតុមុខនិយ័ត ដែល $|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ នោះ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ ឬ $[AB]\perp[CD]$

ដូចនេះ **បង្ហាញបានថា $[AB]\perp[CD]$** ។

20. **បង្ហាញថា** $[AD]\perp[BC]$

គេមាន បួនចំណុច A, B, C និង D នៅក្នុងលំហ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$

គេតាង វ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ រៀងគ្នានៃចំណុច A , B , C , D

ចំពោះ $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$

គេបាន $(\vec{b}-\vec{a})^2+(\vec{d}-\vec{c})^2=(\vec{c}-\vec{a})^2+(\vec{d}-\vec{b})^2$

$$\vec{b}^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}^2+\vec{d}^2-2\vec{d}\cdot\vec{c}+\vec{c}^2=\vec{c}^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{a}^2+\vec{d}^2-2\vec{d}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$$

$$-2\vec{b}\cdot\vec{a}-2\vec{d}\cdot\vec{c}=-2\vec{c}\cdot\vec{a}-2\vec{d}\cdot\vec{b}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{d}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{d}\cdot\vec{b}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{d}\cdot\vec{c}-\vec{d}\cdot\vec{b}=0$$

$$-\vec{a}(\vec{c}-\vec{b})+\vec{d}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$$

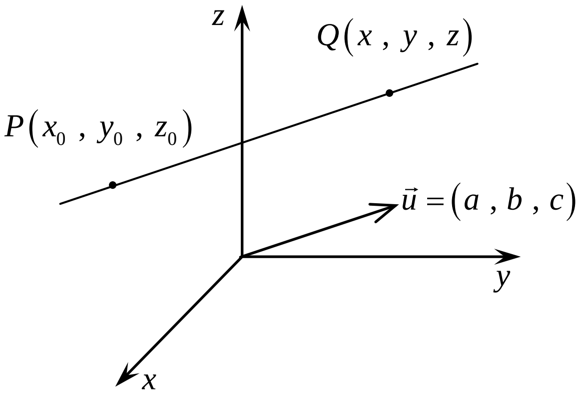
$$(\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{d}-\vec{a})=0$$

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$$

ដោយ $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ នាំឱ្យ $[BC]\perp[AD]$ ឬ $[AD]\perp[BC]$

ដូចនេះ **បង្ហាញបានថា $[AD]\perp[BC]$** ។

21. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហ មានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ** $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$



គេមាន បន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $P(x_0 \, , y_0 \, , z_0)$

បន្ទាត់មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (a \, , b \, , c)$

គេយក $Q(x \, , y \, , z)$ ជាចំណុចនៅលើបន្ទាត់

គេបាន $\overrightarrow{PQ} \parallel \vec{u}$ នោះ $\overrightarrow{PQ} = t\vec{u}$, t ជាចំនួនពិត

នាំឱ្យ $(x - x_0 \, , y - y_0 \, , z - z_0) = t(a, b \, , c)$

$(x - x_0 \, , y - y_0 \, , z - z_0) = (ta, tb \, , tc)$

ទាញបាន $\begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

ដូចនេះ

សមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហ មានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

រួចទាញបញ្ជាក់ថា $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ **ដែលគេហៅថា សមីការឆ្លុះ**

គេមាន $\begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a} = t \\ \dfrac{y - y_0}{b} = t \\ \dfrac{z - z_0}{c} = t \end{cases}$ ទាញបាន $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c} = t$ ដែល a, b, c មិនសូន្យព្រមគ្នា

ដូចនេះ

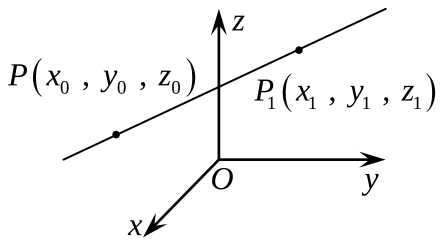
$\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ ដែលគេហៅថា សមីការឆ្លុះ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

✓**សម្គាល់** បើ $a = 0$ គេសរសេរ $x = x_0$, $\dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ ។ បើ $a = b = 0$ គេសរសេរ $x = x_0$, $y = y_0$, $\dfrac{z - z_0}{c} = t$ ។

22. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមពីរចំណុច** P **និង** P_1 **គឺ** $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}$

គេមាន $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ ជាសមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហ



ដោយ បន្ទាត់កាត់ចំណុច $P(x_0 \, , y_0 \, , z_0)$ និង ចំណុច $P_1(x_1 \, , y_1 \, , z_1)$

នាំឱ្យ បន្ទាត់មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = \overrightarrow{PP_1} = (x_1 - x_0 \, , y_1 - y_0 \, , z_1 - z_0)$

នោះ $a = x_1 - x_0$, $b = y_1 - y_0$, $c = z_1 - z_0$

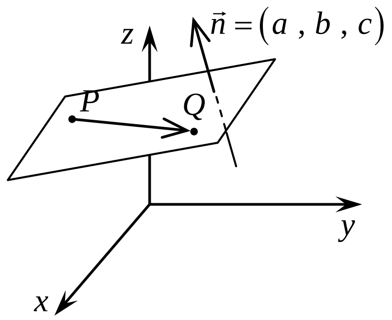
គេបាន $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}$ ជាសមីការបន្ទាត់កាត់ចំណុច P និង P_1

ដូចនេះ

សមីការបន្ទាត់ $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

23. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការប្លង់គឺ $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$



គេមាន ប្លង់កាត់តាមចំណុច $P(x_0 , y_0 , z_0)$

ប្លង់មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(a , b , c)$

ចំពោះ គ្រប់ចំណុច $Q(x , y , z)$ នៃប្លង់នោះ $\overrightarrow{PQ}\perp\vec{n}$

គេបាន $\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$ ដែល $\overrightarrow{PQ}=(x-x_0 , y-y_0 , z-z_0)$

នាំឱ្យ $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដូចនេះ ប្លង់មានសមីការស្តង់ដា $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

24. **ក. បង្ហាញថា ប្លង់ (xoy) មានសមីការ $z=0$**

សមីការប្លង់ មានរាង $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ ប្លង់ (xoy) កាត់តាមគល់ $O(0 , 0 , 0)$ នោះ $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0=0$

ប្លង់ (xoy) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{k}$ (កែងនឹងអ័ក្សកូត) នោះ $a=0 , b=0 , c=1$

គេបាន ប្លង់ (xoy) អាចសរសេរ $0(x-0)+0(y-0)+1(z-0)=0$ នាំឱ្យ $z=0$

ដូចនេះ ប្លង់ (xoy) មានសមីការ $z=0$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ. បង្ហាញថា ប្លង់ (xoz) មានសមីការ $y=0$

សមីការប្លង់ មានរាង $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ ប្លង់ (xoz) កាត់តាមគល់ $O(0 , 0 , 0)$ នោះ $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0=0$

ប្លង់ (xoz) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{j}$ (កែងនឹងអ័ក្សអរដោនេ) នោះ $a=0 , b=1 , c=0$

គេបាន ប្លង់ (xoz) អាចសរសេរ $0(x-0)+1(y-0)+0(z-0)=0$ នាំឱ្យ $y=0$

ដូចនេះ ប្លង់ (xoz) មានសមីការ $y=0$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

គ. បង្ហាញថា ប្លង់ (yoz) មានសមីការ $x=0$

សមីការប្លង់ មានរាង $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

ដោយ ប្លង់ (yoz) កាត់តាមគល់ $O(0 , 0 , 0)$ នោះ $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0=0$

ប្លង់ (yoz) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{i}$ (កែងនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស) នោះ $a=1 , b=0 , c=0$

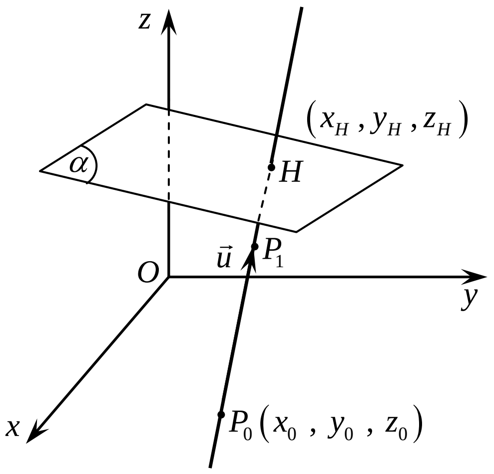
គេបាន ប្លង់ (yoz) អាចសរសេរ $1(x-0)+0(y-0)+0(z-0)=0$ នាំឱ្យ $x=0$

ដូចនេះ ប្លង់ (yoz) មានសមីការ $x=0$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

25. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ក្នុងលំហចម្ងាយពីចំណុចទៅប្លង់កំណត់ដោយ $d\left(P_0\ ,\ \alpha\right)=\dfrac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

គេមាន ចំណុច $P_0\left(x_0\ ,\ y_0\ ,\ z_0\right)$ និងប្លង់ $\alpha:\ ax+by+cz+d=0$

ដែលប្លង់ α មាន $\vec{u}=\left(a\ ,\ b\ ,\ c\right)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់



គេយក $H\left(x_H\ ,y_H\ ,z_H\right)$ ជាចំណុចក្នុងប្លង់ α ដែល $\overrightarrow{P_0H}$ កែងនឹង α

នាំឱ្យ ប្រវែង P_0H ជាចម្ងាយត្រូវរក

គេតាង $P_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$ ជាចំណុចដែល $\overrightarrow{P_0P_1}=\vec{u}$

គេបាន $\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0H}=\vec{u}\cdot\overrightarrow{P_0H}$

$$=a\left(x_H-x_0\right)+b\left(y_H-y_0\right)+c\left(z_H-z_0\right)$$
$$=ax_H-ax_0+by_H-by_0+cz_H-cz_0$$
$$=\left(ax_H+by_H+cz_H\right)-ax_0-by_0-cz_0$$

ដោយ $H\in\alpha$ នាំឱ្យ $ax_H+by_H+cz_H+d=0$

ឬ $ax_H+by_H+cz_H=-d$

$$\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0H}=-d-ax_0-by_0-cz_0$$

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0H}=\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{P_0H}\right|\cdot\cos\theta$ ដែល θ ជាមុំផ្គុំរវាង $\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|$ និង $\left|\overrightarrow{P_0H}\right|$

ទាញបាន $\left|\overrightarrow{P_0H}\right|=\dfrac{\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0H}}{\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|\cdot\cos\theta}$

ដោយ $\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\overrightarrow{P_0H}=-ax_0-by_0-cz_0-d$ និង $\overrightarrow{P_0P_1}=\vec{u}$

នាំឱ្យ $\left|\overrightarrow{P_0H}\right|=\dfrac{-ax_0-by_0-cz_0-d}{\left|\vec{u}\right|\cdot\cos\theta}$

ដោយ $\left|\overrightarrow{P_0H}\right|=P_0H$ ជាចម្ងាយ នោះ $\left|\overrightarrow{P_0H}\right|>0$ នាំឱ្យ $\dfrac{-ax_0-by_0-cz_0-d}{\left|\vec{u}\right|\cdot\cos\theta}$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន

គេបាន $P_0H=\left|\overrightarrow{P_0H}\right|=\left|\dfrac{-ax_0-by_0-cz_0-d}{\left|\vec{u}\right|\cdot\cos\theta}\right|=\dfrac{\left|-ax_0-by_0-cz_0-d\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\cos\theta\right|}=\dfrac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\left|\cos\theta\right|}$

តែ $\overrightarrow{P_0P_1}\parallel\overrightarrow{P_0H}$ នោះ $\theta=0^\circ$ ឬ $\theta=180^\circ$ នាំឱ្យ $\left|\cos\theta\right|=1$

នាំឱ្យ $P_0H=\left|\overrightarrow{P_0H}\right|=\dfrac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

គេតាង $d\left(P_0,\alpha\right)=P_0H$ (distance from P_0 to α) គេសរសេរបាន $d\left(P_0\ ,\ \alpha\right)=\dfrac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដូចនេះ ចម្ងាយពីចំណុចទៅប្លង់កំណត់ដោយ $d\left(P_0\ ,\ \alpha\right)=\dfrac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ចំនួនកុំផ្លិច

1. ស្រាយបញ្ជាក់ពីភាពខួបនៃ i^n ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

2. បើ Z និង W ជាចំនួនកុំផ្លិចមានកុំផ្លិចឆ្លាស់រៀងគ្នាគឺ $\bar{Z}$ និង $\bar{W}$ បង្ហាញថា គេបាន ៖

   ក. $\overline{Z+W} = \bar{Z} + \bar{W}$ ខ. $\overline{Z-W} = \bar{Z} - \bar{W}$ គ. $\overline{ZW} = \bar{Z} \times \bar{W}$ ឃ. $\overline{\left(\frac{Z}{W}\right)} = \frac{\bar{Z}}{\bar{W}}, W \neq 0$ ។

3. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $z + \bar{z}$ និង $z \cdot \bar{z}$ ជាចំនួនពិត ។

   ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $z \cdot \bar{z} = 0$ នាំឱ្យ $z = 0$ ។

4. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $z = a + bi$ នោះម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច z គឺ $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ។

5. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ z , z_1 , z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចគេបាន ៖

   ក. $|z| = |\bar{z}|$ ខ. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ គ. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ឃ. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ង. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ។

6. បើគេមាន $z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$ និង $z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$

   ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)\right]$ ។

   ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \times \left[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\right]$ ។

7. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើគេមាន $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ នោះគេបាន $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ ។

   ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ រូបមន្តដឺម័រ $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ ។

8. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left(\frac{1+\sin\varphi + i\cos\varphi}{1+\sin\varphi - i\cos\varphi}\right)^n = \cos\left[n\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right] + i\sin\left[n\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right]$ ។

9. ស្រាយបញ្ជាក់ រូបមន្តខាងក្រោម ៖

   ក. $\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \end{cases}$

   ខ. $\begin{cases} \cos 3a = \cos^3 a - 3\cos a \sin^2 a = 4\cos^3 a - 3\cos a \\ \sin 3a = 3\cos^2 a \sin a - \sin^3 a = -4\sin^3 a + 3\sin a \end{cases}$

   គ. $\begin{cases} \cos 4a = \cos^4 a + \sin^4 a - 6\cos^2 a \sin^2 a \\ \sin 4a = 4\cos^3 a \sin a - 4\cos a \sin^3 a \end{cases}$ ។

10. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើគេមាន z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមានរូបភាពរៀងគ្នា $A(z_1)$ និង $B(z_2)$ ហើយចំណុច $P(z)$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច z ដែល P ស្ថិតនៅលើ AB ហើយចែក AB តាមផលធៀប $m:n$ នោះគេបាន ៖ $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$ ដែល $\lambda = \frac{m}{n}$ ។

11. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $A(z)$, $B(z_1)$ និង $C(z_2)$ បង្កើតបានជាត្រីកោណ ABC នោះគេបាន $\frac{AC}{AB} = \left|\frac{z_2 - z}{z_1 - z}\right|$ ហើយ

    $\angle BAC = \arg\left(\frac{z_2 - z}{z_1 - z}\right)$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ចំនួនកុំផ្លិច

1. **ស្រាយបញ្ជាក់ពីភាពទូទៅនៃ i^n ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$**

គេមាន $i^1 = i$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $i^1 = i^{4\times0+1} = i$

$i^2 = -1$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $i^2 = i^{4\times0+2} = -1$

$i^3 = i^2 \times i = -i$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $i^3 = i^{4\times0+3} = -i$

$i^4 = (i^2)^2 = 1$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $i^4 = i^{4\times1+0} = 1$

$i^5 = i^4 \times i = i$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $i^5 = i^{4\times1+1} = i$

$i^6 = i^4 \times i^2 = -1$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $i^6 = i^{4\times1+2} = -1$

$i^7 = i^4 \times i^3 = -i$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $i^7 = i^{4\times1+3} = -i$

$i^8 = i^4 \times i^4 = 1$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $i^8 = i^{4\times2+0} = 1$

$i^9 = i^8 \times i = i$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $i^9 = i^{4\times2+1} = i$

....

....

តាមលំនាំ i^n អាចសរសេរជាទម្រង់ $i^n = i^{4k+A}$

សន្និដ្ឋាន

គ្រប់ n ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន គេអាចសរសេរបាន $i^n = i^{4k+A}$ ដែល k ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបមិនអវិជ្ជមាន និង $A = \{0, 1, 2, 3\}$ នោះគេបានតម្លៃនៃ i^n តាមតម្លៃ A ដូចខាងក្រោម ៖

-បើ $A = 0$ នាំឱ្យ $i^n = i^{4k+0} = 1$

-បើ $A = 1$ នាំឱ្យ $i^n = i^{4k+1} = i$

-បើ $A = 2$ នាំឱ្យ $i^n = i^{4k+2} = -1$

-បើ $A = 3$ នាំឱ្យ $i^n = i^{4k+3} = -i$ ។

2. **បើ Z និង W ជាចំនួនកុំផ្លិចមានកុំផ្លិចឆ្លាស់រៀងគ្នា $\overline{Z}$ និង $\overline{W}$ ៖**

គេតាង $Z = a + bi$, $W = c + di$ នោះ $\overline{Z} = a - bi$, $\overline{W} = c - di$

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overline{Z+W} = \overline{Z} + \overline{W}$

$Z + W = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$ នោះ $\overline{Z+W} = (a+c) - (b+d)i$

$\overline{Z} + \overline{W} = (a-bi) + (c-di) = (a+c) - (b+d)i$

ដូចនេះ $\overline{Z+W} = \overline{Z} + \overline{W}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overline{Z-W} = \overline{Z} - \overline{W}$

$Z - W = (a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$ នោះ $\overline{Z-W} = (a-c) - (b-d)i$

$\overline{Z} - \overline{W} = (a-bi) - (c-di) = (a-c) - (b-d)i$

ដូចនេះ $\overline{Z-W} = \overline{Z} - \overline{W}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overline{ZW}=\bar{Z}\times\bar{W}$

$Z\times W=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$ នោះ $\overline{Z\times W}=(ac-bd)-(ad+bc)i$

$\bar{Z}\times\bar{W}=(a-bi)(c-di)=ac-bd-adi-bci=(ac-bd)-(ad+bc)i$

ដូចនេះ $\overline{ZW}=\bar{Z}\times\bar{W}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overline{\left(\frac{Z}{W}\right)}=\frac{\bar{Z}}{\bar{W}}$, $W\neq 0$

$$\frac{Z}{W}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd-adi+bci}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$$\overline{\left(\frac{Z}{W}\right)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$$\frac{\bar{Z}}{\bar{W}}=\frac{a-bi}{c-di}=\frac{(a-bi)(c+di)}{(c-di)(c+di)}=\frac{ac+bd+adi-bci}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

ដូចនេះ $\overline{\left(\frac{Z}{W}\right)}=\frac{\bar{Z}}{\bar{W}}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

3. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $z+\bar{z}$ និង $z\cdot\bar{z}$ ជាចំនួនពិត

គេតាង $z=a+bi$ នោះ $\bar{z}=a-bi$ ដែល a , b ជាចំនួនពិត

គេបាន $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ ជាចំនួនពិត

ហើយ $z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$ ជាចំនួនពិត

ដូចនេះ ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $z+\bar{z}$ និង $z\cdot\bar{z}$ ជាចំនួនពិត ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $z\cdot\bar{z}=0$ នាំឱ្យ $z=0$

គេតាង $z=a+bi$ នោះ $\bar{z}=a-bi$ ដែល a , b ជាចំនួនពិត

ហើយ $z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$

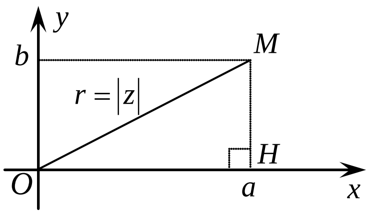
គេមាន $z\cdot\bar{z}=0$ នោះ $a^2+b^2=0$

ដោយ $a^2\geq 0$ និង $b^2\geq 0$ នោះ $a^2+b^2=0$ មានគូចម្លើយតែមួយគត់គឺ $a=0$ និង $b=0$

នាំឱ្យ $z=a+bi=0+0i=0$

ដូចនេះ ស្រាយបញ្ជាក់បានថា បើ $z\cdot\bar{z}=0$ នាំឱ្យ $z=0$ ។

4. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $z=a+bi$ នោះម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច z គឺ $|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}$



តាង $M(a\,,b)$ ជារូបភាពនៃចំនួនកុំផ្លិច $z=a+bi$ ដែល $OM=|z|=r$

ក្នុងត្រីកោណកែង OHM តាទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ $OM^2=OH^2+HM^2$

ដោយ $OH=a$, $HM=b$ នោះ $OM^2=a^2+b^2$ នាំឱ្យ $OM=\sqrt{a^2+b^2}$

ដូចនេះ ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច z គឺ $OM=|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

5. បើ z , z_1 , z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិច

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $|z|=|\overline{z}|$

គេតាង $z=a+bi$ នោះ $\overline{z}=a-bi$

គេបាន $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ (1)

ហើយ $|\overline{z}|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$ (2)

តាម (1) និង (2) បញ្ជាក់បានថា $|z|=|\overline{z}|$

ដូចនេះ $|z|=|\overline{z}|$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $|z|^2=z\cdot\overline{z}$

គេតាង $z=a+bi$ នោះ $\overline{z}=a-bi$ ហើយ $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

គេបាន $|z|^2=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=a^2+b^2$ (1)

ហើយ $z\times\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$ (2) ព្រោះ $i^2=-1$

តាម (1) និង (2) បញ្ជាក់បានថា $|z|^2=z\cdot\overline{z}$

ដូចនេះ $|z|^2=z\cdot\overline{z}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

គេតាង $z_1=a+bi$ និង $z_2=c+di$ នោះ $|z_1|=\sqrt{a^2+b^2}$, $|z_2|=\sqrt{c^2+d^2}$

គេបាន $z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

នាំឱ្យ
$$\begin{aligned}|z_1\cdot z_2|&=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}\\&=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}\\&=\sqrt{a^2c^2-2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2}\\&=\sqrt{a^2c^2+a^2d^2+b^2d^2+b^2c^2}\\&=\sqrt{a^2\left(c^2+d^2\right)+b^2\left(c^2+d^2\right)}\\&=\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)} \quad (1)\end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀត
$$\begin{aligned}|z_1|\cdot|z_2|&=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)\left(\sqrt{c^2+d^2}\right)\\&=\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)} \quad (2)\end{aligned}$$

តាម (1) និង (2) បញ្ជាក់បានថា $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

ដូចនេះ $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$

គេតាង $z_1 = a + bi$ និង $z_2 = c + di$

នាំឱ្យ $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2}$ និង $|z_2| = \sqrt{c^2 + d^2}$

គេបាន

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a+bi}{c+di} \\ &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \\ &= \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - (di)^2} \\ &= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \quad , \ i^2 = -1 \\ &= \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i\end{aligned}$$

នាំឱ្យ

$$\begin{aligned}\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \sqrt{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(ac+bd)^2 + (bc-ad)^2}{(c^2+d^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2}{(c^2+d^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 + b^2c^2}{(c^2+d^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(c^2+d^2)(a^2+b^2)}{(c^2+d^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}} \qquad (1)\end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}$ (2)

តាមរយៈទំនាក់ទំនង (1) និង (2) បញ្ជាក់បានថា $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

ដូចនេះ: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ង. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

➢របៀបទី១ តាមលក្ខណៈវិសមភាព

គេតាង $z_1=a+bi$ និង $z_2=c+di$ នោះ $|z_1|=\sqrt{a^2+b^2}$ និង $|z_2|=\sqrt{c^2+d^2}$

គេបាន $|z_1|+|z_2|=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$ ដែល $|z_1|+|z_2|>0$

ហើយ $z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

នាំឱ្យ $|z_1+z_2|=\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$ ដែល $|z_1+z_2|>0$

ឧបមាថា $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

គេបាន $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}\le\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$ (លើកអង្គទាំងពីរជាការេ)

$$(a+c)^2+(b+d)^2\le(a^2+b^2)+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}+(c^2+d^2)$$

$$a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2\le a^2+b^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}+c^2+d^2$$

$$2(ac+bd)\le2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

$$(ac+bd)^2\le(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

$$a^2c^2+2abcd+b^2d^2\le a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$$

$$2abcd\le a^2d^2+b^2c^2$$

$$0\le a^2d^2-2abcd+b^2c^2$$

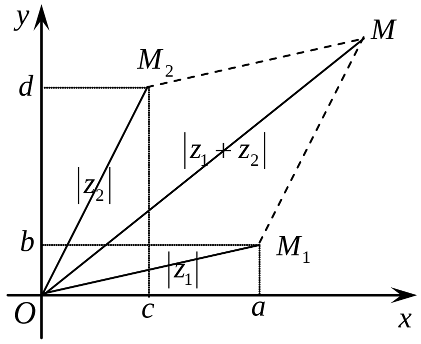
$0\le(ad-bc)^2$ ពិតគ្រប់ $a\,,b\,,c\,,d$ ជាចំនួនពិត

ដូចនេះ $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➢របៀបទី២ តាមវិសមភាពក្នុងត្រីកោណ

គេតាង M_1 , M_2 ជារូបភាពរៀងគ្នានៃចំនួនកុំផ្លិច z_1 , z_2

គេបាន M ជារូបភាពនៃ z_1+z_2



តាមវិសមភាពក្នុងត្រីកោណ OM_1M

គេបាន $OM<OM_1+M_1M$ ឬ $|z_1+z_2|<|z_1|+|z_2|$ (1)

ព្រោះ $OM=|z_1+z_2|$, $OM_1=|z_1|$, $M_1M=|z_2|$

ម្យ៉ាងទៀត បើ $z_1=z_2=0$ នោះ $|z_1|+|z_2|=|z_1+z_2|$ (2)

តាមរយៈ (1) និង (2) គេបាន $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

ដូចនេះ $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

6. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $z_1z_2=r_1r_2\left[\cos(\alpha_1+\alpha_2)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2)\right]$

គេមាន $z_1=r_1(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)$ និង $z_2=r_2(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)$

រំលឹករូបមន្ត $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

គេបាន $z_1 \times z_2 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) \times r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$

$= r_1 r_2(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$

$= r_1 r_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + i\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + i\cos\alpha_2\sin\alpha_1 + i^2\sin\alpha_1\sin\alpha_2)$

$= r_1 r_2[(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2) + i(\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + \cos\alpha_2\sin\alpha_1)]$

$= r_1 r_2[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$

ដូចនេះ $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \times [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_2)]$

គេមាន $z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$ និង $z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$

រំលឹករូបមន្ត $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

គេបាន $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)}{r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)}$

$= \frac{r_1}{r_2} \times \frac{(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 - i\sin\alpha_2)}{(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)(\cos\alpha_2 - i\sin\alpha_2)}$

$= \frac{r_1}{r_2} \times \frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - i\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + i\cos\alpha_2\sin\alpha_1 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2}{\cos^2\alpha_2 - i^2\sin^2\alpha_2}$

$= \frac{r_1}{r_2}\left[\frac{(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2) + i(\cos\alpha_2\sin\alpha_1 - \cos\alpha_1\sin\alpha_2)}{\cos^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_2}\right]$

$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_2)]$

ដូចនេះ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \times [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_2)]$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

7. **ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើគេមាន** $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ **នោះគេបាន** $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

គេមាន $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ប្រើរូបមន្ត $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$

គេបាន $z^2 = z \times z = rr[\cos(\alpha + \alpha) + i\sin(\alpha + \alpha)] \qquad = r^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)$

$z^3 = z^2 \times z = r^2 r[\cos(2\alpha + \alpha) + i\sin(2\alpha + \alpha)] \qquad = r^3(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha)$

$z^4 = z^3 \times z = r^3 r[\cos(3\alpha + \alpha) + i\sin(3\alpha + \alpha)] \qquad = r^4(\cos 4\alpha + i\sin 4\alpha)$

....

....

តាមលំនាំ គេអាចសរសេរបាន $z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$

ដូចនេះ $z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា រូបមន្តដឺម័រ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

➢របៀបទី១ តាមលក្ខណៈផលគុណ

គេតាង $z_1=\cos\theta_1+i\sin\theta_1$, $z_2=\cos\theta_2+i\sin\theta_2$, $z_3=\cos\theta_3+i\sin\theta_3$, ... , $z_n=\cos\theta_n+i\sin\theta_n$

តាមរូបមន្ត $z_1z_2=r_1r_2\left[\cos(\alpha_1+\alpha_2)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2)\right]$

គេបាន $z_1z_2z_3\times\ldots\times z_n=\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\ldots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\ldots+\theta_n)$

បើគេយក $z_1=z_2=z_3=\ldots=z_n=z$, $\theta_1=\theta_2=\theta_3=\ldots=\theta_n=\theta$

គេបាន $z\cdot z\cdot z\times\ldots\times z=\cos(\theta+\theta+\theta+\ldots+\theta)+i\sin(\theta+\theta+\theta+\ldots+\theta)$

ឬ $z^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$

ដូនេះ: | រូបមន្តដឺម័រ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➢របៀបទី២ តាមវិចារកំណើន

ចំពោះ: $n=1$ នោះ: $(\cos\theta+i\sin\theta)^1=\cos\theta+i\sin\theta$ ពិត

ចំពោះ: $n=2$ នោះ:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos2\theta+i\sin2\theta$$
$$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos2\theta+i\sin2\theta$$
$$\cos^2\theta+2i\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta=\cos2\theta+i\sin2\theta$$
$$\left(1-2\sin^2\theta\right)+2i\cos\theta\sin\theta=\cos2\theta+i\sin2\theta$$
$$\cos2\theta+i\sin2\theta=\cos2\theta+i\sin2\theta \text{ ពិត}$$

ឧបមាថាវាពិតរហូតដល់ $n=k$ នោះ: $(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$

គេនឹងស្រាយថាវានៅតែពិតរហូតដល់ $n=k+1$ នោះ: $(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta$

គេមាន
$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}&=(\cos\theta+i\sin\theta)^k\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=(\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=\cos(k\theta+\theta)+i\sin(k\theta+\theta)\\&=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta\end{aligned}$$

ដូចនេះ: | រូបមន្តដឺម័រ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

៦. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា** $\left(\dfrac{1+\sin\varphi+i\cos\varphi}{1+\sin\varphi-i\cos\varphi}\right)^n=\cos\left[n\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]+i\sin\left[n\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]$ ។

រំលឹករូបមន្ត ការេនៃត្រីធា $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

មុំបំពេញ $\sin\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\cos\theta=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

ដឺម័រ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

តាមរូបមន្តខាងលើ គេអាចស្រាយបញ្ជាក់សមភាពនេះបានដូចតទៅ ៖

គេមាន $\dfrac{1+\sin\varphi+i\cos\varphi}{1+\sin\varphi-i\cos\varphi}=\dfrac{(1+\sin\varphi+i\cos\varphi)^2}{(1+\sin\varphi-i\cos\varphi)(1+\sin\varphi+i\cos\varphi)}$ (គុណនឹងកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃភាគបែង)

$$=\frac{1^2+\sin^2\varphi+(i\cos\varphi)^2+2\sin\varphi+2i\cos\varphi+2\sin\varphi\cdot i\cos\varphi}{(1+\sin\varphi)^2-(i\cos\varphi)^2}$$

$$=\frac{1^2+\sin^2\varphi-\cos^2\varphi+2\sin\varphi+2i\cos\varphi+2\sin\varphi\cdot i\cos\varphi}{1^2+2\sin\varphi+\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}$$

$$=\frac{2\sin^2\varphi+2\sin\varphi+2i\cos\varphi+2\sin\varphi\cdot i\cos\varphi}{2+2\sin\varphi}$$

$$=\frac{\sin\varphi(2\sin\varphi+2)+i\cos\varphi(2+2\sin)}{2+2\sin\varphi}$$

$$=\frac{(2\sin\varphi+2)(\sin\varphi+i\cos\varphi)}{2+2\sin\varphi}$$

$$=\sin\varphi+i\cos\varphi$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$$

តាមដឺម័រ $\left(\dfrac{1+\sin\varphi+i\cos\varphi}{1+\sin\varphi-i\cos\varphi}\right)^n=\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]^n$

$=\cos\left[n\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]+i\sin\left[n\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]$ (ដូចបំណងដែលចង់ស្រាយបញ្ជាក់)

ដូចនេះ: ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\left(\dfrac{1+\sin\varphi+i\cos\varphi}{1+\sin\varphi-i\cos\varphi}\right)^n=\cos\left[n\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]+i\sin\left[n\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]$ ។

9. **ស្រាយបញ្ជាក់ រូបមន្តខាងក្រោម ៖**

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ រូបមន្ត $\begin{cases}\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\end{cases}$

គេយក $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ តាមដឺម័រនោះ: $z^n=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$

បើ $n=2$ នោះ: $z^2=r^2(\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha)$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $z^2=z\cdot z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\times r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

$$=r^2(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2$$

$$=r^2\left[\cos^2\alpha+2i\sin\alpha\cos\alpha+i^2\sin^2\alpha\right]$$

$$=r^2\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+i2\sin\alpha\cos\alpha\right)\qquad(2)$$

តាមរយ: ទំនាក់ទំនង (1) និង (2) : $r^2(\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha)=r^2\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+i2\sin\alpha\cos\alpha\right)$

ឬ $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+i2\sin\alpha\cos\alpha=\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$

តាមនិយមន័យចំនួនកុំផ្លិចស្មើគ្នា គេផ្ទឹមបាន $\begin{cases}\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\end{cases}$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\begin{cases}\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\end{cases}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ រូបមន្ត $\begin{cases}\cos 3a = \cos^3 a - 3\cos a\sin^2 a = 4\cos^3 a - 3\cos a \\ \sin 3a = 3\cos^2 a\sin a - \sin^3 a = -4\sin^3 a + 3\sin a\end{cases}$

គេយក $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ តាមដឺម័រនោះ $z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$

បើ $n=3$ នោះ $z^3 = r^3(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha)$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $z^3 = \left[r(\cos a + i\sin a)\right]^3$

$$= r^3(\cos a + i\sin a)^3$$

$$= r^3\left[\cos^3 a + 3\cos^2 a\cdot i\sin a + 3\cos a(i\sin a)^2 + (i\sin a)^3\right]$$

$$= r^3\left[\left(\cos^3 a - 3\cos a\sin^2 a\right) + i\left(3\cos^2 a\sin a - \sin^3 a\right)\right] \quad (2)$$

$$= r^3\left[\left(\cos^3 a - 3\cos a\left(1-\cos^2 a\right)\right) + i\left(3\left(1-\sin^2 a\right)\sin a - \sin^3 a\right)\right]$$

$$= r^3\left[\left(\cos^3 a - 3\cos a + 3\cos^3 a\right) + i\left(3\sin a - 3\sin^3 a - \sin^3 a\right)\right]$$

$$= r^3\left[\left(4\cos^3 a - 3\cos a\right) + i\left(-4\sin^3 a + 3\sin a\right)\right] \quad (3)$$

តាមរយៈ ទំនាក់ទំនង (1), (2) និង (3) ដោយសម្រួល r^3 គេបាន ៖

$$\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha = \left(\cos^3 a - 3\cos a\sin^2 a\right) + i\left(3\cos^2 a\sin a - \sin^3 a\right) = \left(4\cos^3 a - 3\cos a\right) + i\left(-4\sin^3 a + 3\sin a\right)$$

តាមនិយមន័យចំនួនកុំផ្លិចស្មើគ្នា គេផ្ទឹមបាន $\begin{cases}\cos 3a = \cos^3 a - 3\cos a\sin^2 a = 4\cos^3 a - 3\cos a \\ \sin 3a = 3\cos^2 a\sin a - \sin^3 a = -4\sin^3 a + 3\sin a\end{cases}$

ដូចនេះ រូបមន្ត $\begin{cases}\cos 3a = \cos^3 a - 3\cos a\sin^2 a = 4\cos^3 a - 3\cos a \\ \sin 3a = 3\cos^2 a\sin a - \sin^3 a = -4\sin^3 a + 3\sin a\end{cases}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ រូបមន្ត $\begin{cases}\cos 4a = \cos^4 a + \sin^4 a - 6\cos^2 a\sin^2 a \\ \sin 4a = 4\cos^3 a\sin a - 4\cos a\sin^3 a\end{cases}$

គេយក $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ តាមដឺម័រនោះ $z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$

បើ $n=4$ នោះ $z^4 = r^4(\cos 4\alpha + i\sin 4\alpha)$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $z^4 = \left[r(\cos a + i\sin a)\right]^4$

$$= r^4(\cos a + i\sin a)^4$$

$$= r^4\left[\cos^4 a + 4\cos^3 a(i\sin a) + 6\cos^2 a(i\sin a)^2 + 4\cos a(i\sin a)^3 + (i\sin a)^4\right]$$

$$= r^4\left[\left(\cos^4 a - 6\cos^2 a\sin^2 a + \sin^4 a\right) + i\left(4\cos^3 a\sin a - 4\cos a\sin^3 a\right)\right] \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) : $r^4(\cos 4a + i\sin 4a) = r^4\left[\left(\cos^4 a + \sin^4 a - 6\cos^2 a\sin^2 a\right) + i\left(4\cos^3 a\sin a - 4\cos a\sin^3 a\right)\right]$

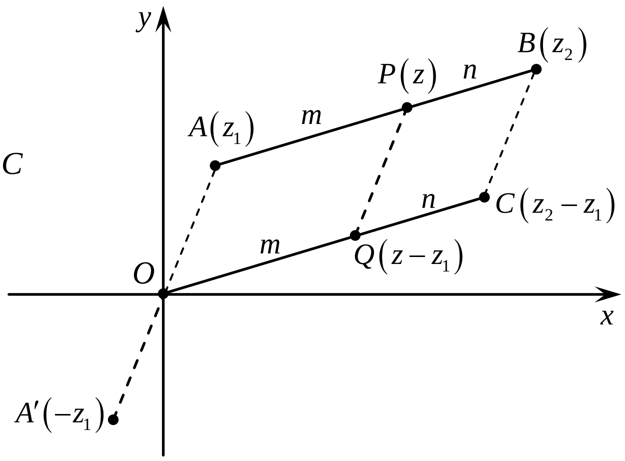
សម្រួលនឹង r^4 $\cos 4a + i\sin 4a = \left(\cos^4 a + \sin^4 a - 6\cos^2 a\sin^2 a\right) + i\left(4\cos^3 a\sin a - 4\cos a\sin^3 a\right)$

តាមនិយមន័យចំនួនកុំផ្លិចស្មើគ្នា គេផ្ទឹមបាន $\begin{cases}\cos 4a = \cos^4 a + \sin^4 a - 6\cos^2 a\sin^2 a \\ \sin 4a = 4\cos^3 a\sin a - 4\cos a\sin^3 a\end{cases}$

ដូចនេះ រូបមន្ត $\begin{cases}\cos 4a = \cos^4 a + \sin^4 a - 6\cos^2 a\sin^2 a \\ \sin 4a = 4\cos^3 a\sin a - 4\cos a\sin^3 a\end{cases}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

10. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ P នៅលើ $[AB]$ ហើយចែក $[AB]$ តាមផលធៀប $m:n$ នោះគេបាន ៖** $z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$

ដែល $\lambda=\dfrac{m}{n}$, $P(z)$, $A(z_1)$ **និង** $B(z_2)$



ភ្ជាប់ចំណុច O និង A

គូសអង្កត់ $OC//AB$ និង $AO//BC$ ដែល OC ប្រសព្វ BC ត្រង់ C

គូសអង្កត់ $PQ//AO$ ដែល Q ស្ថិតនៅលើអង្កត់ OC

តាង $A'(-z)$ ជារូបភាពនៃ $-z_1$

គេបាន $C(z_2-z_1)$ ជារូបភាពនៃ $z_2+(-z_1)$ ឬ z_2-z_1

$Q(z-z_1)$ ជារូបភាពនៃ $z+(-z_1)$ ឬ $z-z_1$

ពិនិត្យ $\dfrac{m}{m+n}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ នោះ $z-z_1=\dfrac{m}{m+n}(z_2-z_1)$

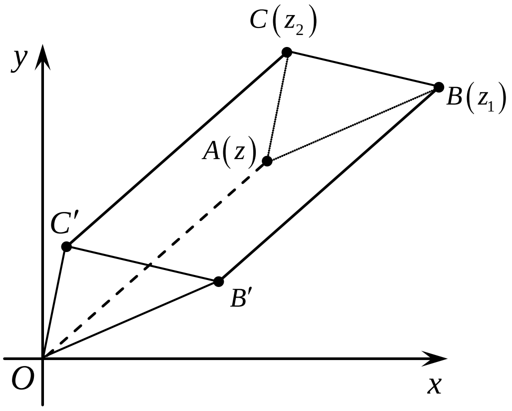
នាំឱ្យ $z=\dfrac{m}{m+n}(z_2-z_1)+z_1=\dfrac{mz_2-mz_1}{m+n}+\dfrac{mz_1+nz_1}{m+n}=\dfrac{mz_2+nz_1}{m+n}$ (ចែកភាគយក និងភាគបែង ដោយ n)

គេបាន $z=\dfrac{\frac{m}{n}z_2+z_1}{\frac{m}{n}+1}=\dfrac{z_1+\frac{m}{n}z_2}{1+\frac{m}{n}}=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ ព្រោះ $\lambda=\dfrac{m}{n}$

ដូចនេះ $z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ចំណាំ
- បើ $\lambda=1$ នោះចំណុច P ស្ថិតនៅកណ្ដាល AB
- បើ $\lambda>1$ នោះចំណុច P ស្ថិតនៅចន្លោះ AB
- បើ $\lambda<1$ នោះចំណុច P ស្ថិតនៅក្រៅ AB ឬ បន្លាយនៃ AB ។

11. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា** $\dfrac{AC}{AB}=\left|\dfrac{z_2-z}{z_1-z}\right|$ **ហើយ** $\angle BAC=\arg\left(\dfrac{z_2-z}{z_1-z}\right)$



គេមាន $A(z)$, $B(z_1)$ និង $C(z_2)$ បង្កើតបានជាត្រីកោណ ABC

គេសង់វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{AC}$ នោះ $\angle BAC=\angle B'AC'$

គេបាន $\Delta BAC\cong\Delta B'AC'$ (ជ.ម.ជ)

ហើយ $\overrightarrow{AB}$ ជារូបភាពនៃ z_1-z និង $\overrightarrow{AC}$ ជារូបភាពនៃ z_2-z

គេបាន $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{|z_2-z|}{|z_1-z|}=\left|\dfrac{z_2-z}{z_1-z}\right|$

ដោយ $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OB'})=\arg(z_1-z)$ និង $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OC'})=\arg(z_2-z)$

ហើយ $\angle BAC=\angle B'AC'=\arg(z_2-z)-\arg(z_1-z)=\arg\left(\dfrac{z_2-z}{z_1-z}\right)$

ដូចនេះ ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\dfrac{AC}{AB}=\left|\dfrac{z_2-z}{z_1-z}\right|$ ហើយ $\angle BAC=\arg\left(\dfrac{z_2-z}{z_1-z}\right)$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន លីមីត

1. ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ L'Hospital ៖ ចំពោះ $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ ឬ $\frac{\infty}{\infty}$ គេបាន $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ។

2. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តលីមីតត្រីកោណមាត្រខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$ គ. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$ ។

3. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តលីមីតអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ ខ. $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ គ. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

ឃ. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty\ ,\ n>0$ ង. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0\ ,\ n>0$ ច. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

ឆ. $\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=1$ ជ. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n$ ឈ. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ ,\ 0<a\neq 1$

ញ. $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ ដ. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

4. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តលីមីតអនុគមន៍លោការីតនេពែខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ ខ. $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ គ. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

ឃ. $\lim_{x\to 0^+}x\ln x=0$ ង. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$ ច. $\lim_{x\to 0^+}x^n\ln x=0$

ឆ. $\lim_{x\to+\infty}x^n\ln x=+\infty$ ជ. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^n}=-\infty$ ឈ. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\ ,x>-1$

5. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើអនុគមន៍ f ជាប់ ហើយកើនដាច់ខាត ឬចុះដាច់ខាតលើចន្លោះបិទ $[a\,,b]$ នោះចំពោះគ្រប់ចំនួន k នៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ សមីការ $f(x)=k$ មានចម្លើយតែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $[a\,,b]$ ។

6. ចំពោះស៊េរីអនន្ត $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក. បើស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ជាស៊េរីរួមនោះ $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$ ។

ខ. បើស្វ៊ីត (a_n) មិនរួមរក 0 នោះ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ជាស៊េរីរីក ។

7. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a\,,b]$ និង k ជាចំនួនមួយនៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ នោះមានចំនួន c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះបិទ $[a\,,b]$ ដែល $f(c)=k$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន លីមីត

1. ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ L'Hospital ៖ ចំពោះ $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ ឬ $\frac{\infty}{\infty}$ គេបាន $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

គេមាន $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} g(x)=0$ ឬ $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} g(x)=\pm\infty$

តាមលក្ខណៈសមាមាត្រ $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(c)}{g(c)}=\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}$

គេបាន $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}$ (ចែកភាគយក និងភាគបែងដោយ $x-c$)

$$=\lim_{x\to c}\frac{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\frac{g(x)-g(c)}{x-c}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}}$$

$$=\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ព្រោះតាមនិយមន័យដេរីវេ $f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$, $g'(c)=\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}$

ដូចនេះ: ទ្រឹស្តីបទ L'Hospital បើ $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ រាង $\frac{0}{0}$ ឬ $\frac{\infty}{\infty}$ នោះ $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

សម្គាល់ : ត្រឹមកម្រិតថ្នាក់ទី១២ មិនមានប្រើ L'Hospital នោះទេ ប៉ុន្តែអ្នករៀបរៀងចង់ឱ្យមានការស្រាយបញ្ជាក់ច្រើនរបៀប ហេតុនេះ ទើបមានការស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ L'Hospital ជាមុន ដើម្បីយកទ្រឹស្តីនេះ បកស្រាយរូបមន្តផ្សេងៗទៀត ។

2. **ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តលីមីតត្រីកោណមាត្រខាងក្រោម ៖**

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$

➤របៀបទី១ តាមទ្រឹស្តីបទ L'Hospital

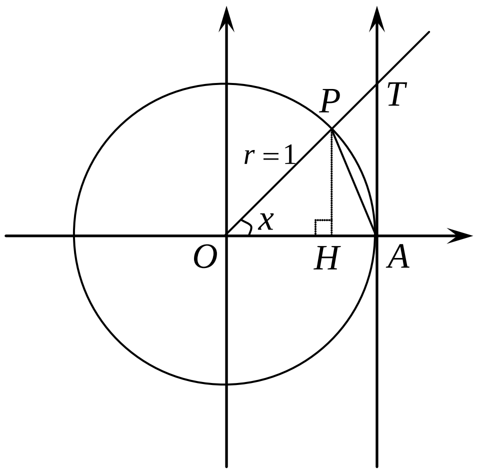
គេមាន $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ តាមទ្រឹស្តីបទ L'Hospital គេបាន $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\cos x=1$

ហើយ $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ តាមទ្រឹស្តីបទ L'Hospital គេបាន $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

>របៀបទី២ តាមផ្ទៃក្រឡាចម្រៀកថាស

គេមាន x ជារង្វាស់មុំគិតជារ៉ាដ្យង់ ដែល $-\frac{\pi}{2}<x<0$ ឬ $0<x<\frac{\pi}{2}$ គេបាន ៖



ផ្ទៃក្រឡា $\Delta OAT \geq$ ផ្ទៃក្រឡាចម្រៀកថាស $OAP \geq$ ក្រឡាផ្ទៃ ΔOAP

$$\frac{1}{2}\times OA\times AT \geq \pi r^2\times\frac{x}{2\pi}\geq\frac{1}{2}\times OA\times HP$$

តែ $r=OA=1$, $AT=\tan x$, $HP=\sin x$

គេបាន $\frac{1}{2}\times 1\times\tan x\geq\pi\times 1^2\times\frac{x}{2\pi}\geq\frac{1}{2}\times 1\times\sin x$

$$\tan x\geq x\geq\sin x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x}\geq x\geq\sin x \quad (1)$$

គេគុណវិសមភាព (1) នឹង $\frac{1}{\sin x}$ គេបានទិសដៅវិសមភាពប្រែប្រួល ឬមិនប្រែប្រួលដូចខាងក្រោម ៖

• បើ $-\frac{\pi}{2}<x<0$ នោះ $\frac{1}{\sin x}<0$ គេបាន (1) : $\frac{1}{\cos x}\leq\frac{x}{\sin x}\leq 1$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\leq\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\leq\lim\limits_{x\to0}1$ ឬ $1\leq\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\leq 1$ នោះ $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$

• បើ $0<x<\frac{\pi}{2}$ នោះ $\frac{1}{\sin x}>0$ គេបាន (1) : $\frac{1}{\cos x}\geq\frac{x}{\sin x}\geq 1$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\geq\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\geq\lim\limits_{x\to0}1$ ឬ $1\geq\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\geq 1$ នោះ $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$

ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\frac{x}{\sin x}}=\frac{1}{1}=1$

ដូចនេះ | រូបមន្ត $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$ និង $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$

>របៀបទី១ ប្រើរូបមន្ត $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ ឬអាចសរសេរ $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\times\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\sin\frac{x}{2}\right)=1\times0=0$

>របៀបទី២ ប្រើទ្រឹស្តីបទ L'Hospital

គេបាន $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1-\cos x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$

ដូចនេះ | រូបមន្ត $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$

➢របៀបទី១ ប្រើរូបមន្ត $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

គេបាន $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}\right)=1\times 1=1$

ហើយ $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\times\cos x\right)=1\times 1=1$

➢របៀបទី២ ប្រើទ្រឹស្តីបទ L'Hospital

គេបាន $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{1^2}=1$

ហើយ $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x'}{(\tan x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{1}{\frac{1}{1^2}}=\frac{1}{1}=1$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ និង $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

3. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តលីមីតអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលខាងក្រោម ៖

ក. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តលីមីត $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

គេប្រើតារាងតម្លៃលេខដើម្បីបង្ហាញតម្លៃនៃ e^x ពេល $x\to+\infty$ ដូចខាងក្រោម ៖

x	1	5	10	50	100	600	...	$+\infty$
e^x	2.7	148.4	2.2×10^4	5.2×10^{21}	2.7×10^{43}	3.8×10^{260}	...	$+\infty$

តាមតារាងនេះគេសង្កេតឃើញថា បើ x យកតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់ នោះ e^x ក៏មានតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់ដែរ ។ តាមហេតុផលនេះគេបាន $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ ។

ដូចនេះ: ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តលីមីត $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$

➢របៀបទី១ ប្រើតារាងតម្លៃលេខ

គេប្រើតារាងតម្លៃលេខដើម្បីបង្ហាញតម្លៃនៃ e^x ពេល $x\to-\infty$ ដូចខាងក្រោម ៖

x	-1	-5	-10	-60	-200	-700	...	$-\infty$
e^x	0.4	0.006	4.5×10^{-4}	8.8×10^{-27}	1.8×10^{-87}	9.9×10^{-305}	...	0

តាមតារាងនេះគេសង្កេតឃើញថា បើ x យកតម្លៃអវិជ្ជមានកាន់តែតូចទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់ នោះ e^x មានតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែតូចទៅៗស្ទើរតែសូន្យ ។ តាមហេតុផលនេះគេបាន $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ ។

ដូចនេះ: ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ ។

➢**របៀបទី២** ប្រើទំនាក់ទំនង $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

គេចង់គណនា $A = \lim_{x\to-\infty} e^x$

គេតាង $t = -x \Rightarrow x = -t$

បើ $x \to -\infty \Rightarrow t \to +\infty$

គេបាន $A = \lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{t\to+\infty} e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^t} = \frac{1}{\lim_{t\to+\infty} e^t} = 0$ ព្រោះបើ ភាគបែងធំមិនកំណត់ នោះ $\frac{1}{\lim_{t\to+\infty} e^t}$ ស្មើរតែសូន្យ ។

ដូចនេះ: **ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$** ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តលីមីត $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

➢**របៀបទី១** ប្រើតារាងតម្លៃលេខ

គេប្រើតារាងតម្លៃលេខដើម្បីបង្ហាញតម្លៃនៃ $\frac{e^x}{x}$ ពេល $x \to +\infty$ ដូចខាងក្រោម ៖

x	1	5	10	60	300	700	...	$+\infty$
$\frac{e^x}{x}$	2.7	29.7	2.2×10^{3}	1.9×10^{24}	6.5×10^{127}	1.4×10^{301}	...	$+\infty$

តាមតារាងនេះគេសង្កេតឃើញថា បើ x យកតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់ នោះ $\frac{e^x}{x}$ មានតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែធំទៅៗ គ្មានទីបញ្ចប់ដែរ ។ តាមហេតុផលនេះគេបាន $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ។

ដូចនេះ: **ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$** ។

➢**របៀបទី២** ប្រើទ្រឹស្តីបទ L'Hospital

គេមាន $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ (ព្រោះ: $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$)

ដូចនេះ: **ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$** ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តលីមីត $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, $n > 0$ (n ជាចំនួនកំណត់មួយ)

➢**របៀបទី១** ប្រើតារាងតម្លៃលេខ

គេប្រើតារាងតម្លៃលេខដើម្បីបង្ហាញតម្លៃនៃ $\frac{e^x}{x^n}$ ពេល $x \to +\infty$ ដោយសន្មត់យក $n = 10$ ដូចខាងក្រោម ៖

x	1	5	10	60	300	700	...	$+\infty$
$\frac{e^x}{x^{10}}$	2.7	1.5×10^{-5}	2.2×10^{-6}	1.9×10^{8}	3.3×10^{105}	3.6×10^{275}	...	$+\infty$

តាមតារាងនេះគេសង្កេតឃើញថា បើ x យកតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់ នោះ $\frac{e^x}{x^{10}}$ មានតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែធំទៅៗ គ្មានទីបញ្ចប់ដែរ ។ តាមហេតុផលនេះគេបាន $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ ។

ដូចនេះ: **ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$** ។

➤របៀបទី២ ប្រើទ្រឹស្តីបទ L'Hospital

គេធ្វើដេរីវេបន្តបន្ទាប់នៃ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}$ រហូតអស់រាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(x^n\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(nx^{n-1}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(n(n-1)x^{n-2}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(n(n-1)(n-2)x^{n-3}\right)'}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{n!}=+\infty$$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{n!}=+\infty$)

ដូចនេះ ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ ។

ង. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0\ ,\ n>0$

➤របៀបទី១ គេមាន $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x^n}}=0$ ព្រោះ បើភាគបែងកាន់តែធំទៅៗមិនកំណត់ វានឹងធ្វើឱ្យតម្លៃកន្សោមស្មើរស្មើសូន្យ ។

ដូចនេះ ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0\ ,\ n>0$ ។

➤របៀបទី២ ប្រើទ្រឹស្តីបទ L'Hospital

គេធ្វើដេរីវេបន្តបន្ទាប់នៃ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}$ រហូតអស់រាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^n\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(nx^{n-1}\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(n(n-1)x^{n-2}\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(n(n-1)(n-2)x^{n-3}\right)'}{\left(e^x\right)'}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

(ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0$)

ដូចនេះ ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0\ ,\ n>0$ ។

ច. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តលីមីត $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

➤របៀបទី១ ប្រើតារាងតម្លៃលេខ

គេប្រើតារាងតម្លៃលេខដើម្បីបង្ហាញតម្លៃនៃ $\frac{e^x-1}{x}$ ពេល $x\to0$ ដូចខាងក្រោម ៖

x	1	0.1	0.001	0.00001	0.000001	0.0000001	...	0
$\frac{e^x-1}{x}$	1.7	1.05	1.0005	1.000005	1.0000005	1.00000005	...	1

តាមតាងរាងនេះគេសង្កេតឃើញថា បើ x យកតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែតូចទៅៗស្មើរសូន្យ នោះ $\frac{e^x-1}{x}$ មានតម្លៃវិជ្ជមានស្មើរស្មើមួយ ។

ដូចនេះ ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ ។

➢របៀបទី២ ប្រើទ្រឹស្តីបទ L'Hospital

គេមាន $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{x'}=\lim_{x\to 0}e^x=e^0=1$

ដូចនេះ ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ ។

ឆ.ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តលីមីត $\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=1$

ដូចសម្រាយ ច. ខាងលើគ្រាន់តែប្តូរអថេរ x ទៅជា u ដូចនេះ គេបាន $\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=1$ ។

ជ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តលីមីត $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n$

➢របៀបទី១ ប្រើស្វ័យគុណនៃទ្វេធា

គេមាន $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[(1+x)-1\right]\left[(1+x)^{n-1}+(1+x)^{n-2}+(1+x)^{n-3}+\ldots+(1+x)+1\right]}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{n-1}+(1+x)^{n-2}+(1+x)^{n-3}+\ldots+(1+x)+1\right]$

$=\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n\text{ តួ}}=n$

ដូចនេះ ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n$ ។

➢របៀបទី២ ប្រើទ្រឹស្តីបទ L'Hospital

គេមាន $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[(1+x)^n-1\right]'}{x'}$

$=\lim_{x\to 0}\left[n(1+x)'(1+x)^n\right]$

$=\lim_{x\to 0}\left[n(1+x)^n\right]$

$=n\times 1^n=n$

ដូចនេះ ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n$ ។

ឈ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តលីមីត $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ **ដែល** $0<a\neq 1$

គេប្រើទ្រឹស្តីបទ L'Hospital

គេមាន $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)'}{x'}$

$=\lim_{x\to 0}a^x\ln a=a^0\times\ln a=\ln a$ ព្រោះ $(a^x)'=a^x\ln a$

ដូចនេះ ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ ។

ញ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តលីមីត $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

គេប្រើតារាងតម្លៃលេខដើម្បីបង្ហាញតម្លៃនៃ $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ពេល $x\to+\infty$ ដូចខាងក្រោម ៖

x	$\frac{1}{x}$	$1+\frac{1}{x}$	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
1	1	2	2.000 000 00
10	$0.1=10^{-1}$	$1.1=1+10^{-1}$	2.593 742 46
10^2	$0.01=10^{-2}$	$1.01=1+10^{-2}$	2.704 813 83
10^3	10^{-3}	$1.001=1+10^{-3}$	2.716 923 93
10^4	10^{-4}	$1.0001=1+10^{-4}$	2.718 145 93
10^5	10^{-5}	$1.00001=1+10^{-5}$	2.718 268 24
10^6	10^{-6}	$1.000001=1+10^{-6}$	2.718 280 47
10^7	10^{-7}	$1.0000001=1+10^{-7}$	2.718 281 69
10^8	10^{-8}	$1.00000001=1+10^{-8}$	2.718 281 81
10^9	10^{-9}	$1+10^{-9}$	2.718 281 83 $\approx e$
⋮	⋮	⋮	⋮

តាមតារាងនេះគេសង្កេតឃើញថា បើ x យកតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់ នោះ $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ មានតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែខិតទៅរកតម្លៃលីមីតមួយស្មើ $e=2.718281$ ។ តាមហេតុផលនេះគេបាន $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ ។

ដូចនេះ: ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ ។

ដ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តលីមីត $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

គេមាន $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

គេតាង $t=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{t}$

បើ $x\to0^+ \Rightarrow t\to+\infty$

គេបាន $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$ ព្រោះតាមសម្រាយ ញ. $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

ដូចនេះ: ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ។

4. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តលីមីតអនុគមន៍លោការីតនេពខាងក្រោម ៖

ក. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

គេប្រើតារាងតម្លៃលេខដើម្បីបង្ហាញតម្លៃនៃ $\ln x$ ពេល $x\to+\infty$ ដូចខាងក្រោម ៖

x	20	50	200	1000	10000	1000000	...	$+\infty$
$\ln x$	2.996	3.912	5.298	6.908	9.210	13.816	...	$+\infty$

តាមតារាងនេះគេសង្កេតឃើញថា បើ x យកតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់ នោះ $\ln x$ ក៏មានតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់ដែរ ។ តាមហេតុផលនេះគេបាន $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ ។

ដូចនេះ: ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ ។

ខ.ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

គេមាន $\lim_{x\to0^+}\ln x$

គេតាង $x=\frac{1}{t} \Rightarrow t=\frac{1}{x}$

បើ $x\to0^+ \Rightarrow t\to+\infty$

គេបាន $\lim_{x\to0^+}\ln x=\lim_{t\to+\infty}\ln\frac{1}{t}=\lim_{t\to+\infty}\ln t^{-1}=\lim_{t\to+\infty}(-\ln t)=-\lim_{t\to+\infty}(\ln t)=-(+\infty)=-\infty$

ដូចនេះ: ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

➢របៀបទី១ តាមតារាងតម្លៃលេខ

គេប្រើតារាងតម្លៃលេខដើម្បីបង្ហាញតម្លៃនៃ $\frac{\ln x}{x}$ ពេល $x\to+\infty$ ដូចខាងក្រោម ៖

x	20	50	200	1000	10000	1000000	...	$+\infty$
$\frac{\ln x}{x}$	0.1498	0.0782	0.0265	0.00691	0.00092	0.00001	...	0

តាមតារាងនេះគេសង្កេតឃើញថា បើ x យកតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់ នោះ $\frac{\ln x}{x}$ មានតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែតូចទៅៗស្ទើរតែសូន្យ ។ តាមហេតុផលនេះគេបាន $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ។

ដូចនេះ: ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ។

➢របៀបទី២ គេប្រើទ្រឹស្តីបទ L'Hospital

គេមាន $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ ព្រោះ បើ $x\to+\infty$ នោះ $\frac{1}{x}\to0$

ដូចនេះ: ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

គេមាន $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

គេតាង $x=\dfrac{1}{t} \Rightarrow t=\dfrac{1}{x}$

បើ $x\to 0^+ \Rightarrow t\to +\infty$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{t}\ln\dfrac{1}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{t}\ln t^{-1} = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\dfrac{\ln t}{t}\right) = -\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t} = -0 = 0$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

ដូចនេះ: ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ ។

ង. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$

➢របៀបទី១ តាមតារាងតម្លៃលេខ

គេប្រើតារាងតម្លៃលេខដើម្បីបង្ហាញតម្លៃនៃ $\dfrac{\ln x}{x^n}$ ពេល $x\to+\infty$ ដោយសន្មត់ថា $n=4$ ដូចខាងក្រោម ៖

x	2	3	5	8	15	20	...	$+\infty$
$\dfrac{\ln x}{x^4}$	0.04332	0.01356	0.00258	0.00051	0.00005	0.00002	...	0

តាមតាងរាងនេះគេសង្កេតឃើញថា បើ x យកតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែធំទៅៗគ្មានទីបញ្ចប់ នោះ $\dfrac{\ln x}{x^n}$ មានតម្លៃវិជ្ជមានកាន់តែតូចទៅៗ ស្ទើរតែសូន្យ ។ តាមហេតុផលនេះគេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$ ។

ដូចនេះ: ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$ ។

➢របៀបទី២ គេប្រើទ្រឹស្តីបទ L'Hospital

គេមាន $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x^n)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0$ ព្រោះ បើ $x\to+\infty$ នោះ $\dfrac{1}{nx^n}\to 0$

ដូចនេះ: ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$ ។

ច. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n\ln x = 0$

គេមាន $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n\ln x$

គេតាង $x=\dfrac{1}{t} \Rightarrow t=\dfrac{1}{x}$

បើ $x\to 0^+ \Rightarrow t\to +\infty$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n\ln x = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{t}\right)^n\ln\dfrac{1}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t^{-1}}{t^n} = -\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t^n} = -0 = 0$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$

ដូចនេះ: ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n\ln x = 0$ ។

ឆ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n \ln x = +\infty$

គេមាន $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n \ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} x^n \times \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = (+\infty)(+\infty) = +\infty$

ព្រោះ កាលណា $x \to +\infty$ នោះ $x^n \to +\infty$ និង $\ln x \to +\infty$

ដូចនេះ ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n \ln x = +\infty$ ។

ជ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x^n} = -\infty$

គេមាន $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x^n}$

គេតាង $x = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{x}$

បើ $x \to 0^+ \quad \Rightarrow \quad t \to +\infty$

គេបាន $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x^n} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{t}}{\left(\frac{1}{t}\right)^n} = \lim\limits_{t\to+\infty} t^n \ln t^{-1} = -\lim\limits_{t\to+\infty} t^n \ln t = -(+\infty) = -\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n \ln x = +\infty$

ដូចនេះ ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x^n} = -\infty$ ។

ឈ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \ , \ x > -1$

➤របៀបទី១ គេប្រើទំនាក់ទំនងរូបមន្តមានស្រាប់

គេមាន
$$\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]$$
$$= \lim_{x\to0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$
$$= \ln\left[\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$$
$$= \ln e$$
$$= 1$$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ បានស្រាយរួចហើយ

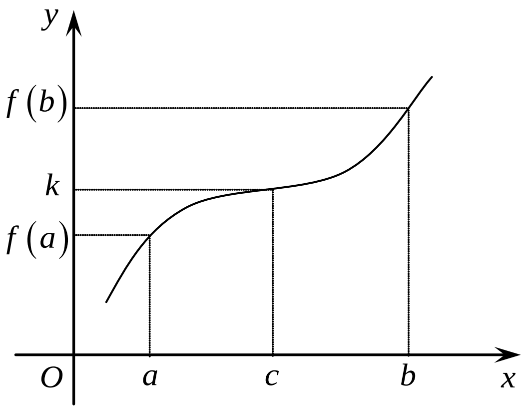
ដូចនេះ ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \ , \ x > -1$ ។

➤របៀបទី២ គេប្រើទ្រឹស្តីបទ L'Hospital

គេមាន $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{[\ln(1+x)]'}{x'} = \lim\limits_{x\to0} \frac{(1+x)'}{1+x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+0} = 1$

ដូចនេះ ស្រាយបញ្ជាក់បានថា $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \ , \ x > -1$ ។

5. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើអនុគមន៍ f ជាប់ ហើយកើនដាច់ខាត ឬចុះដាច់ខាតលើចន្លោះបិទ $[a\,,b]$ នោះចំពោះគ្រប់ចំនួន k នៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ សមីការ $f(x)=k$ មានចម្លើយតែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $[a\,,b]$**



អនុគមន៍ f ជាប់និងកើនដាច់ខាតលើចន្លោះបិទ $[a\,,b]$ ។
f កើនដាច់ខាត មានន័យថា បើ x និង x' នៅក្នុងចន្លោះ $[a\,,b]$ ដែល $x<x'$ នោះគេបាន $f(x)<f(x')$ ។

ឱ្យចំនួន k នៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$, $\left(f(a)<k<f(b)\right)$ និង f ជាអនុគមន៍ជាប់ តាមទ្រឹស្តីបទបញ្ជាក់ថា មានចំនួន c មួយនៅចន្លោះ a និង b ដែល $f(c)=k$ ។

ឧបមាថា មានចំនួនមួយទៀត c' ខុសពី c ផ្ទៀងផ្ទាត់គ្នា $f(c')=k$ នោះ $f(c)=f(c')$ ជាករណីផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែលថា f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត ។

ដូចនេះ មានចំនួន c មួយគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(c)=k$ គឺសមីការ $f(x)=k$ មានចម្លើយតែមួយគត់ ។

6. **ចំពោះស៊េរីអនន្ត $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$**

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ជាស៊េរីរួមនោះ $\lim_{n\to+\infty} a_n=0$

ឧបមាថា ស៊េរីអនន្ត $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ រួម

គេតាង $S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ និង S_n ជាផលបូក n តួនៃស៊េរីនេះ

គេបាន $S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n=S_{n-1}+a_n$

នាំឱ្យ $a_n=S_n-S_{n-1}$

$\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty}\left(S_n-S_{n-1}\right)=S-S=0$

ដូចនេះ | ស្រាយបញ្ជាក់បានថា បើស៊េរីអនន្ត $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ជាស៊េរីរួមនោះ $\lim_{n\to+\infty} a_n=0$ | ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើស៊្វីត (a_n) មិនរួមរក 0 នោះ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ជាស៊េរីរីក

តាមសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្មក្នុងសម្រាយ ក. គឺ បើ $\lim_{n\to+\infty} a_n\neq 0$ នោះស៊េរីអនន្ត $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ជាស៊េរីរីក
ដោយសំណើក្នុងសម្រាយ ក. ពិត នាំឱ្យសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្មរបស់វាក៏ពិតដែរ ។

ដូចនេះ | គេអាចសន្និដ្ឋានបានថា បើ a_n មិនរួមទៅរក 0 នោះស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ រីក | ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ដេរីវេ

1. ដោយប្រើនិយមន័យដេរីវេ រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=c$, c ថេរ នោះ $f'(x)=0$

ខ. $f(x)=cx$, c ថេរ នោះ $f'(x)=c$

គ. $f(x)=ax+b$, a , b ថេរ នោះ $f'(x)=a$

ឃ. $f(x)=x^2+2x$ នោះ $f'(x)=2x+2$

ង. $f(x)=x^3$ នោះ $f'(x)=3x^2$

ច. $f(x)=\sqrt{x}$ នោះ $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ឆ. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ នោះ $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

ជ. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ នោះ $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

ឈ. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ នោះ $f'(x)=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

ញ. $f(x)=x^n$ នោះ $f'(x)=nx^{n-1}$

ដ. $y=\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$ នោះ $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$

ឋ. $y=a^x$, $0<a\neq 1$ នោះ $y'=a^x\ln a$

2. បើ u និង v ជាអនុគមន៍នៃ x ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក. $y=au$, a ថេរ នោះ $y'=u'$

ខ. $y=u^n$ នោះ $y'=nu'u^{n-1}$

គ. $y=u+v-w$ នោះ $y'=u'+v'-w'$

ឃ. $y=uv$ នោះ $y'=u'v+v'u$

ង. $y=\dfrac{u}{v}$ នោះ $y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

ច. $y=\sqrt{u}$ នោះ $y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

ឆ. $y=\dfrac{1}{u}$ នោះ $y'=-\dfrac{u'}{u^2}$

3. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $y=f(u)$ និង $u=g(x)$ នោះគេបាន $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$ ឬ $\dfrac{d}{dx}f\left[u(x)\right]=f'(u)\times u'(x)$ ។

4. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $y=u^n$ និង u ជាអនុគមន៍នៃ x នោះ $\dfrac{dy}{dx}=nu^{n-1}\times\dfrac{du}{dx}=nu^{n-1}\times u'$ ។

5. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រខាងក្រោម ៖

ក. $y=\sin x$ នោះ $y'=\cos x$

ខ. $y=\cos x$ នោះ $y'=-\sin x$

គ. $y=\tan x$ នោះ $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

ឃ. $y=\cot x$ នោះ $y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$

ង. $y=\sin u$ នោះ $y'=u'\cos u$

ច. $y=\cos u$ នោះ $y'=-u'\sin u$

ឆ. $y=\tan u$ នោះ $y'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}=u'(1+\tan^2 u)$

ជ. $y=\cot u$ នោះ $y'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}=-u'(1+\cot^2 u)$

6. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលខាងក្រោម ៖

ក. $y=e^x$ នោះ $y'=e^x$

ខ. $y=e^u$ នោះ $y'=u'e^u$

គ. $y=a^x$ នោះ $y'=a^x\ln a$ ដែល $0<a\neq 1$

ឃ. $y=a^u$ នោះ $y'=u'a^u\ln a$

7. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍លោការីតខាងក្រោម ៖

ក. $y=\ln x$, $x>0$ នោះ $y'=\dfrac{1}{x}$

ខ. $y=\ln u$ នោះ $y'=\dfrac{u'}{u}$

គ. $y=\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$ នោះ $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$

ឃ. $y=\log_a u$ នោះ $y'=\dfrac{u'}{u\ln a}$

8. វិសមភាពកំណើនមានកំណត់ : គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់និងជាប់ហើយមានដេរីវេលើចន្លោះ I ។ បើមានពីរចំនួនពិត m និង M ដែលចំពោះគ្រប់ $x\in I$, $m\leq f'(x)\leq M$ នោះគ្រប់ចំនួនពិត $a\,,b\in I$ ដែល $a<b$ គេបាន
$m(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a)$ ។

9. គេឱ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើចន្លោះ $[a\,,b]$ ។ បើមានចំនួនពិត M ដែល $|f'(x)|\leq M$ ចំពោះ $x\in[a\,,b]$ នោះ គេបានវិសមភាព $|f(b)-f(a)|\leq M|b-a|$ ។

10. ទ្រឹស្តីបទរ៉ូល : បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a\,,b]$ មានដេរីវេលើចន្លោះ $(a\,,b)$ និង $f(a)=f(b)$ នោះមានចំនួន $c\in(a\,,b)$ យ៉ាងតិចមួយដែល $f'(c)=0$ ។

11. ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម : បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a\,,b]$ មានដេរីវេលើចន្លោះ $(a\,,b)$ នោះមាន $c\in(a\,,b)$ មួយយ៉ាងតិចដែល $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ដេរីវេ

1. **ដោយប្រើនិយមន័យដេរីវេ ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖**

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x)=c$, c **ថេរ នោះ** $f'(x)=0$

តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}0=0$$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត បើ $f(x)=c$, c ថេរ នោះ: $f'(x)=0$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x)=cx$, c **ថេរ នោះ** $f'(x)=c$

តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{c(x+h)-cx}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{cx+ch-cx}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{ch}{h}=\lim_{h\to 0}c=c$$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត បើ $f(x)=cx$, c ថេរ នោះ: $f'(x)=c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x)=ax+b$, a , b ថេរ នោះ: $f'(x)=a$

តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{ax+ah+b-ax-b}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{ah}{h}=\lim_{h\to 0}a=a$$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត បើ $f(x)=ax+b$, a , b ថេរ នោះ: $f'(x)=a$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x)=x^2+2x$ **នោះ** $f'(x)=2x+2$

តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+2(x+h)-(x^2+2x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2+2x+2h-x^2-2x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2+2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2x+h+2)=2x+2$$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត បើ $f(x)=x^2+2x$ នោះ $f'(x)=2x+2$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ង. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x)=x^3$ **នោះ** $f'(x)=3x^2$

តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=3x^2$$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត បើ $f(x)=x^3$ នោះ $f'(x)=3x^2$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ច. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x)=\sqrt{x}$ **នោះ** $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត បើ $f(x)=\sqrt{x}$ នោះ $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ឆ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x)=\sqrt[3]{x}$ នោះ $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)\cdot x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)\cdot x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)\cdot x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)\cdot x}+\sqrt[3]{x^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x\cdot x}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត បើ $f(x)=\sqrt[3]{x}$ នោះ $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ជ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x)=\dfrac{1}{x}$ នោះ $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}$$
$$=-\frac{1}{x^2}$$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត បើ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ នោះ $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ឈ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ នោះ $f'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x(x+h)}}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+h}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}{h\sqrt{x(x+h)}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h)}{h\sqrt{x(x+h)}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{\sqrt{x(x+h)}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}=-\frac{1}{\sqrt{x^2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

ដូចនេះ: រូបមន្ត បើ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ នោះ $f'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ញ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x)=x^n$ នោះ $f'(x)=nx^{n-1}$

តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)-x\right]\left[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}\cdot x+(x+h)^{n-3}\cdot x^2+\ldots+(x+h)\cdot x^{n-2}+x^{n-1}\right]}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\left[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}\cdot x+(x+h)^{n-3}\cdot x^2+\ldots+(x+h)\cdot x^{n-2}+x^{n-1}\right]}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}\cdot x+(x+h)^{n-3}\cdot x^2+\ldots+(x+h)\cdot x^{n-2}+x^{n-1}\right]$$
$$=x^{n-1}+x^{n-2}\cdot x+x^{n-3}\cdot x^2+\ldots+x\cdot x^{n-2}+x^{n-1}$$
$$=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+x^{n-1}+\ldots+x^{n-1}+x^{n-1}}_{n\text{ តួ}}$$
$$=nx^{n-1}$$

ដូចនេះ: រូបមន្ត បើ $f(x)=x^n$ នោះ $f'(x)=nx^{n-1}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ឌ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$ **នោះ** $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$

លក្ខខណ្ឌ $0<a\neq 1$, $x>0$

តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\ln(x+h)}{\ln a}-\dfrac{\ln x}{\ln a}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h\ln a}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{h\ln a}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{h}{x}\cdot x\ln a}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x\ln a}\right]\\
&= 1\times\frac{1}{x\ln a}=\frac{1}{x\ln a}
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត បើ $y=\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$ នោះ: $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ឋ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=a^x$, $0<a\neq 1$ **នោះ** $y'=a^x\ln a$

តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{a^x\left(a^h-1\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[a^x\cdot\frac{a^h-1}{h}\right]=a^x\ln a
\end{aligned}
$$

ព្រោះ: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}=\ln a$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត បើ $y=a^x$, $0<a\neq 1$ នោះ: $y'=a^x\ln a$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

2. បើ u និង v ជាអនុគមន៍នៃ x ៖

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=au$ នោះ $y'=au'$ ដែល a ជាចំនួនថេរ

គេយក $u=u(x)$ តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{au(x+h)-au(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[a\times\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right]$$
$$=au'(x)=au'$$

ដូចនេះ: រូបមន្ត បើ $y=au$ នោះ $y'=au'$ ដែល a ជាចំនួនថេរ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=u^n$ នោះ $y'=nu'u^{n-1}$

គេយក $u=u(x)$ តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[u(x+h)\right]^n-\left[u(x)\right]^n}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[u(x+h)-u(x)\right]\left[u^{n-1}(x+h)+u^{n-2}(x+h)\cdot u(x)+\ldots+u(x+h)\cdot u^{n-2}(x)+u^{n-1}(x)\right]}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[u(x+h)-u(x)\right]}{h}\times\lim_{h\to 0}\left[u^{n-1}(x+h)+u^{n-2}(x+h)\cdot u(x)+\ldots+u(x+h)\cdot u^{n-2}(x)+u^{n-1}(x)\right]$$
$$=u'(x)\times\left[u^{n-1}(x)+u^{n-2}(x)\cdot u(x)+\ldots+u(x)\cdot u^{n-2}(x)+u^{n-1}(x)\right]$$
$$=u'(x)\times\underbrace{\left[u^{n-1}(x)+u^{n-1}(x)+\ldots+u^{n-1}(x)+u^{n-1}(x)\right]}_{n\text{ តួ}}$$
$$=u'(x)\times nu^{n-1}(x)=nu'u^{n-1}$$

ដូចនេះ: រូបមន្ត បើ $y=u^n$ នោះ $y'=nu'u^{n-1}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=u+v-w$ នោះ $y'=u'+v'-w'$

គេយក $u=u(x)$, $v=v(x)$ និង $w=w(x)$ តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[u(x+h)+v(x+h)-w(x+h)\right]-\left[u(x)+v(x)-w(x)\right]}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)+v(x+h)-v(x)-w(x+h)+w(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{w(x+h)-w(x)}{h}$$
$$=u'(x)+v'(x)-w'(x)=u'+v'-w'$$

ដូចនេះ: រូបមន្ត បើ $y=u+v-w$ នោះ $y'=u'+v'-w'$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=uv$ នោះ $y'=u'v+v'u$

គេយក $u=u(x)$ និង $v=v(x)$ តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{u(x)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times v(x+h)\right]+\lim_{h\to 0}\left[\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\times u(x)\right]\\
&= u'(x)v(x)+v'(x)u(x)=u'v+v'u
\end{aligned}$$

ដូចនេះ

រូបមន្ត បើ $y=uv$ នោះ $y'=u'v+v'u$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

ង. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=\frac{u}{v}$ នោះ $y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

គេយក $u=u(x)$ និង $v=v(x)$ តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x)+u(x)v(x)-u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x)}{hv(x+h)v(x)}+\lim_{h\to 0}\frac{u(x)v(x)-u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times\frac{v(x)}{v(x+h)v(x)}\right]-\lim_{h\to 0}\left[\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\times\frac{u(x)}{v(x+h)v(x)}\right]\\
&= \left[u'(x)\times\frac{v(x)}{v^2(x)}\right]-\left[v'(x)\times\frac{u(x)}{v^2(x)}\right]\\
&= \frac{u'(x)v(x)}{v^2(x)}-\frac{v'(x)u(x)}{v^2(x)}\\
&= \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}=\frac{u'v-v'u}{v^2}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ

រូបមន្ត បើ $y=\frac{u}{v}$ នោះ $y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

ច. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=\sqrt{u}$ នោះ $y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

គេយក $u=u(x)$ តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{u(x+h)}-\sqrt{u(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\sqrt{u(x+h)}-\sqrt{u(x)}\right]\left[\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}\right]}{h\left[\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}\right]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h\left[\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}\right]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times\frac{1}{\sqrt{u(x+h)}+\sqrt{u(x)}}\right]$$

$$=u'(x)\times\frac{1}{\sqrt{u(x)}+\sqrt{u(x)}}=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

ដូចនេះ

រូបមន្ត បើ $y=\sqrt{u}$ នោះ $y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

ឆ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=\dfrac{1}{u}$ នោះ $y'=-\dfrac{u'}{u^2}$

គេយក $u=u(x)$ តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{u(x+h)}-\dfrac{1}{u(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x)-u(x+h)}{u(x)u(x+h)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x)-u(x+h)}{hu(x)u(x+h)}$$

$$=-\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\times\frac{1}{u(x)u(x+h)}\right]$$

$$=-u'(x)\times\frac{1}{u(x)u(x)}=-\frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

ដូចនេះ

រូបមន្ត បើ $y=\dfrac{1}{u}$ នោះ $y'=-\dfrac{u'}{u^2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

3. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$ ឬ $\frac{d}{dx}f\left[u(x)\right]=f'(u)\times u'(x)$

គេមាន $y=f(u)$ និង $u=g(x)$

គេតាង $F(x)=y=f(u)$ នោះ $F(x)=f\left[g(x)\right]$

ដើម្បីស្រាយថា $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$ គេត្រូវស្រាយឱ្យបានថា $F'(x)=f'\left[g(x)\right]\times g'(x)$

ព្រោះថា $F'(x)=\frac{dy}{dx}$, $f'\left[g(x)\right]=\frac{dy}{du}$, $g'(x)=\frac{du}{dx}$

ដោយប្រើនិយមន័យភាពមានដេរីវេត្រង់ $x=x_0$ គេបាន ៖

$$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f\left[g(x)\right]-f\left[g(x_0)\right]}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f\left[g(x)\right]-f\left[g(x_0)\right]}{g(x)-g(x_0)}\times\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]$$
$$=f'\left[g(x_0)\right]\times g'(x_0)$$

នាំឱ្យ $F'(x)=f'\left[g(x)\right]\times g'(x)$ មានន័យថាគេបាន $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$

ដោយ $F'(x)=\frac{d}{dx}f\left[u(x)\right]$, $f'\left[g(x)\right]=f'(u)$, $g'(x)=u'(x)$

នោះគេក៏អាចសរសេរ $F'(x)=f'\left[g(x)\right]\times g'(x)$ ទៅជា $\frac{d}{dx}f\left[u(x)\right]=f'(u)\times u'(x)$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$ ឬ $\frac{d}{dx}f\left[u(x)\right]=f'(u)\times u'(x)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

4. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{dy}{dx}=nu^{n-1}\times\frac{du}{dx}=nu^{n-1}\times u'$

គេមាន $y=u^n$ និង u ជាអនុគមន៍នៃ x

យើងមានទំនាក់ទំនង $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$ (បានស្រាយរួចខាងលើ)

$$=\frac{d}{du}\left(u^n\right)\times\frac{du}{dx}$$
$$=nu^{n-1}\times\frac{du}{dx}$$
$$=nu^{n-1}\times u'$$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\frac{dy}{dx}=nu^{n-1}\times\frac{du}{dx}=nu^{n-1}\times u'$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

5. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រខាងក្រោម ៖

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=\sin x$ **នោះ** $y'=\cos x$

➤របៀបទី១ : តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\sin h\cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}+\frac{\sin h\cos x}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\sin x\cdot\frac{\cos h-1}{h}+\frac{\sin h}{h}\cdot\cos x\right]\\
&= \sin x\cdot 0+1\cdot\cos x\\
&= \cos x
\end{aligned}$$

➤របៀបទី២ : តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]\\
&= 1\cdot\cos x=\cos x
\end{aligned}$$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត បើ $y=\sin x$ នោះ $y'=\cos x$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=\cos x$ **នោះ** $y'=-\sin x$

➤របៀបទី១ : តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)-\sin x\sin h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\cos x(\cos h-1)}{h}-\frac{\sin x\sin h}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\cos x\cdot\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\cdot\frac{\sin h}{h}\right]\\
&= \cos x\cdot 0-\sin x\cdot 1\\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

➤របៀបទី២ : តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h}\\
&= -\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\\
&= -\lim_{h\to 0}\left[\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\times\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right]\\
&= -\sin x\times 1=-\sin x
\end{aligned}$$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត បើ $y=\cos x$ នោះ $y'=-\sin x$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=\tan x$ នោះ $y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

យើងមាន $y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ តាមរូបមន្ត $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ គេបាន ៖

$$y'=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$
$$=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{(\cos x)^2}$$
$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$=1+\tan^2 x$$

ដូចនេះ: រូបមន្ត បើ $y=\tan x$ នោះ $y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=\cot x$ នោះ $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$

យើងមាន $y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ តាមរូបមន្ត $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ គេបាន ៖

$$y'=(\tan x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'$$
$$=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{(\sin x)^2}$$
$$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}$$
$$=-(1+\cot^2 x)$$

ដូចនេះ: រូបមន្ត បើ $y=\cot x$ នោះ $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ង. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=\sin u$ នោះ $y'=u'\cos u$

គេយក $u=u(x)$ តាមរូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្តាក់ $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$

គេបាន $\frac{dy}{du}=\frac{d}{du}\left[\sin u(x)\right]\times\frac{du}{dx}$

$$=\cos u(x)\times u'(x)$$
$$=u'(x)\cos u(x)$$
$$=u'\cos u$$

ដូចនេះ: រូបមន្ត បើ $y=\sin u$ នោះ $y'=u'\cos u$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ច. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=\cos u$ **នោះ** $y'=-u'\sin u$

គេយក $u=u(x)$ តាមរូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$

គេបាន $\dfrac{dy}{du}=\dfrac{d}{du}\left[\cos u(x)\right]\times\dfrac{du}{dx}$

$=-\sin u(x)\times u'(x)$

$=-u'(x)\sin u(x)$

$=-u'\sin u$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត បើ $y=\cos u$ នោះ $y'=-u'\sin u$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ឆ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=\tan u$ **នោះ** $y'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}=u'\left(1+\tan^2 u\right)$

គេយក $u=u(x)$ តាមរូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$

គេបាន $\dfrac{dy}{du}=\dfrac{d}{du}\left[\tan u(x)\right]\times\dfrac{du}{dx}$

$=\dfrac{1}{\cos^2 u(x)}\times u'(x)$

$=\dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$

$=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$

ម្យ៉ាងទៀត $\dfrac{dy}{du}=\dfrac{d}{du}\left[\tan u(x)\right]\times\dfrac{du}{dx}$

$=\left[1+\tan^2 u(x)\right]\times u'(x)$

$=u'(x)\left[1+\tan^2 u(x)\right]$

$=u'\left(1+\tan^2 u\right)$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត បើ $y=\tan u$ នោះ $y'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}=u'\left(1+\tan^2 u\right)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ជ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=\cot u$ **នោះ** $y'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}=-u'\left(1+\cot^2 u\right)$

គេយក $u=u(x)$ តាមរូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$

គេបាន $\dfrac{dy}{du}=\dfrac{d}{du}\left[\cot u(x)\right]\times\dfrac{du}{dx}$

$=-\dfrac{1}{\sin^2 u(x)}\times u'(x)$

$=-\dfrac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}$

$=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

ម្យ៉ាងទៀត $\dfrac{dy}{du}=\dfrac{d}{du}\left[\cot u(x)\right]\times\dfrac{du}{dx}$

$=-\left[1+\cot^2 u(x)\right]\times u'(x)$

$=-u'(x)\left[1+\cot^2 u(x)\right]$

$=-u'\left(1+\cot^2 u\right)$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត បើ $y=\cot u$ នោះ $y'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}=-u'\left(1+\cot^2 u\right)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

6. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលខាងក្រោម ៖

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=e^x$ **នោះ** $y'=e^x$

តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^x\left(e^h-1\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(e^x\cdot\frac{e^h-1}{h}\right) \\ &= e^x\cdot 1 = e^x \end{aligned}$$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត បើ $y=e^x$ នោះ $y'=e^x$ ។ |

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=e^u$ **នោះ** $y'=u'e^u$

គេយក $u=u(x)$ តាមរូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់ $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$

គេបាន

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{du}\left[e^{u(x)}\right]\times\frac{du}{dx} \\ &= e^{u(x)}\times u'(x) \\ &= u'(x)e^{u(x)} \\ &= u'e^u \end{aligned}$$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត បើ $y=e^u$ នោះ $y'=u'e^u$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=a^x$ **នោះ** $y'=a^x\ln a$ **ដែល** $0<a\neq 1$

តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{a^x\left(a^h-1\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[a^x\cdot\frac{a^h-1}{h}\right] = a^x\ln a \end{aligned}$$

(ព្រោះ $\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\ln a$ មើលការស្រាយបញ្ជាក់ក្នុងមេរៀនលីមីត)

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $y=a^x$, $0<a\neq 1$ នោះ $y'=a^x\ln a$ ត្រូវបានស្រាយ | ។ (លំហាត់នេះបានស្រាយរួចម្ដងហើយ)

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=a^u$ នោះ $y'=u'a^u\ln a$

គេយក $u=u(x)$ តាមរូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់ $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$

គេបាន $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{du}\left[a^{u(x)}\right]\times\frac{du}{dx}$

$=a^{u(x)}\ln a\times u'(x)$

$=u'(x)a^{u(x)}\ln a$

$=u'a^u\ln a$

ដូចនេះ | រូបមន្ត បើ $y=a^u$ នោះ $y'=u'a^u\ln a$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

7. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍លោការីតខាងក្រោម ៖

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=\ln x$, $x>0$ នោះ $y'=\frac{1}{x}$

តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}\cdot x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\times\frac{1}{x}\right]=1\times\frac{1}{x}=\times\frac{1}{x}$$

ដូចនេះ | រូបមន្ត បើ $y=\ln x$, $x>0$ នោះ $y'=\frac{1}{x}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=\ln u$ នោះ $y'=\frac{u'}{u}$

គេយក $u=u(x)$ តាមរូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់ $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$

គេបាន $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{du}\left[\ln u(x)\right]\times\frac{du}{dx}$

$=\frac{1}{u(x)}\times u'(x)$

$=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{u'}{u}$

ដូចនេះ | រូបមន្ត បើ $y=\ln u$ នោះ $y'=\frac{u'}{u}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$ **នោះ** $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$

លក្ខខណ្ឌ $0<a\neq 1$, $x>0$

តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន ៖

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\ln(x+h)}{\ln a}-\dfrac{\ln x}{\ln a}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h\ln a}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{h\ln a}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{h}{x}\cdot x\ln a}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x\ln a}\right]$$
$$=1\times\frac{1}{x\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត បើ $y=\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$ នោះ: $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។ (ស្រាយរួចម្តងហើយ)

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $y=\log_a u$ **នោះ** $y'=\dfrac{u'}{u\ln a}$

គេមាន $y=\log_a u=\dfrac{\ln u}{\ln a}$ ដែល $0<a\neq 0$, $u>0$

គេយក $u=u(x)$ តាមរូបមន្តដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្តាក់ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$

គេបាន $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{du}\left[\dfrac{\ln u(x)}{\ln a}\right]\times\dfrac{du}{dx}$ (មាន $\ln a$ ជាចំនួនថេរ)

$$=\frac{1}{\ln a}\times\frac{d}{du}\left[\ln u(x)\right]\times\frac{du}{dx}$$
$$=\frac{1}{\ln a}\times\frac{1}{u(x)}\times u'(x)$$
$$=\frac{u'(x)}{u(x)\ln a}=\frac{u'}{u\ln a}$$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត បើ $y=\log_a u$ នោះ: $y'=\dfrac{u'}{u\ln a}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

8. **ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពកំណើនមានកំណត់** $m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$

គេមាន $x\in I$, $m\le f'(x)\le M$ និង $a\,,b\in I$ ដែល $a<b$

គេបាន $f'(x)-m\ge 0$ និង $f'(x)-M\le 0$

តាងអនុគមន៍ $g(x)=f(x)-mx$ និង $h(x)=f(x)-Mx$ ដែល g និង f មានដេរីវេលើចន្លោះ I

$g'(x)=f'(x)-m$ និង $h'(x)=f'(x)-M$

នាំឱ្យ $g'(x)\ge 0$ គ្រប់ $x\in I$ មានន័យថា $g(x)$ ជាអនុគមន៍កើនលើ I និងលើ $[a\,,b]$ គេបាន ៖

$$g(b)-g(a)\ge 0$$
$$\left[f(b)-mb\right]-\left[f(a)-ma\right]\ge 0$$
$$f(b)-mb-f(a)+ma\ge 0$$
$$f(b)-f(a)\ge mb-ma$$
$$f(b)-f(a)\ge m(b-a)\quad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀត $h'(x)\ge 0$ គ្រប់ $x\in I$ មានន័យថា $h(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ I និងលើ $[a\,,b]$ គេបាន ៖

$$h(b)-h(a)\le 0$$
$$\left[f(b)-Mb\right]-\left[f(a)-Ma\right]\le 0$$
$$f(b)-Mb-f(a)+Ma\le 0$$
$$f(b)-f(a)\le Mb-Ma$$
$$f(b)-f(a)\le M(b-a)\quad (2)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន $m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$

ដូចនេះ វិសមភាពកំណើនមានកំណត់ $m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

9. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ** $|f'(x)|\le M$ **ចំពោះ** $x\in[a\,,b]$ **នោះ គេបាន វិសមភាព** $|f(b)-f(a)|\le M|b-a|$

គេមាន f មានដេរីវេលើចន្លោះ $[a\,,b]$ និង $|f'(x)|\le M$ ចំពោះគ្រប់ $x\in I$

នាំឱ្យ $-M\le f'(x)\le M$ ហើយ $M\ge 0$ ព្រោះ $|f'(x)|\ge 0$

តាមវិសមភាពកំណើនមានកំណត់ ៖

-ចំពោះ $a<b$ គេបាន

$$-M(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$$
$$|f(b)-f(a)|\le |M(b-a)|$$
$$|f(b)-f(a)|\le M|b-a|\quad (1)$$

-ចំពោះ $a>b$ គេបាន

$$-M(a-b)\le f(a)-f(b)\le M(a-b)$$
$$M(a-b)\ge f(b)-f(a)\ge -M(a-b)$$
$$-M(a-b)\le f(b)-f(a)\le M(a-b)$$
$$|f(b)-f(a)|\le |M(a-b)|$$
$$|f(b)-f(a)|\le M|a-b|\quad (2)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) នាំឱ្យគេបាន $|f(b)-f(a)|\le M|b-a|$ ព្រោះថា $|b-a|=|a-b|$

ដូចនេះ បើ $|f'(x)|\le M$ ចំពោះ $x\in[a\,,b]$ នោះ គេបាន វិសមភាព $|f(b)-f(a)|\le M|b-a|$ ។

10. **ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទរ៉ូល : បើ $f(a)=f(b)$ នោះមានចំនួន $c\in(a\,,b)$ យ៉ាងតិចមួយដែល $f'(c)=0$**

គេមាន f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a\,,b]$ មានដេរីវេលើចន្លោះ $(a\,,b)$ និង $f(a)=f(b)$

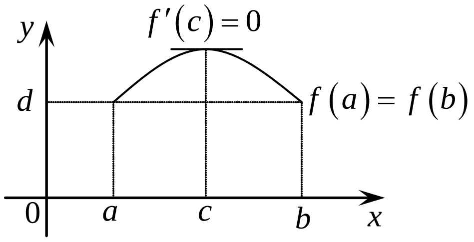
គេតាង $f(a)=f(b)=d$

គេមានបីករណីក្នុងការសិក្សាទីតាំងរវាង $f(x)$ និងបន្ទាត់ d ដើម្បីរកឱ្យឃើញថា មាន $c\in(a\,,b)$ មួយយ៉ាងតិចដែល $f'(c)=0$

• ករណីទី ១: បើ $f(x)=d$ នោះគ្រប់ $x\in[a\,,b]$ គេបាន ៖

f ជាអនុគមន៍ថេរលើចន្លោះ $[a\,,b]$

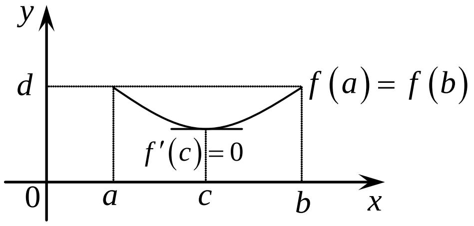
នាំឱ្យ $f'(x)=0$ មាន $x=c\in[a\,,b]$ ដែល $f'(c)=0$



• ករណីទី ២: បើ $f(x)>d$ នោះគ្រប់ $x\in[a\,,b]$ គេបាន ៖

f ជាអនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាមួយយ៉ាងតិចត្រង់ $x=c$

ដោយ f មានដេរីវេត្រង់ $x=c$ គេបាន $f'(c)=0$



• ករណីទី ៣: បើ $f(x)<d$ នោះគ្រប់ $x\in[a\,,b]$ គេបាន ៖

f ជាអនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាមួយយ៉ាងតិចត្រង់ $x=c$

ដោយ f មានដេរីវេត្រង់ $x=c$ គេបាន $f'(c)=0$

ឃើញថា គ្រប់ករណីខាងលើគេរកបាន $f'(c)=0$

ដូចនេះ | ទ្រឹស្តីបទរ៉ូល : បើ $f(a)=f(b)$ នោះមានចំនួន $c\in(a\,,b)$ យ៉ាងតិចមួយដែល $f'(c)=0$ ត្រូវបានស្រាយ | ។

11. **ស្រាយបញ្ជាក់ ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម : $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$**

គេមាន f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a\,,b]$ មានដេរីវេលើចន្លោះ $(a\,,b)$

បន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុច $(a\,,\,f(a))$ និង $(b\,,\,f(b))$ មានសមីការ $\dfrac{y-f(a)}{x-a}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

នាំឱ្យ $y=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$

គេតាង $g(x)=f(x)-y$

គេបាន $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$

$$g'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ចំពោះ $x=a$ នោះ $g(a)=f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)-f(a)=0$

ចំពោះ $x=b$ នោះ $g(b)=f(b)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)-f(a)=0$

ដោយ g ជាអនុគមន៍ពហុធាជាប់លើ $[a\,,b]$ និង $g(a)=g(b)=0$ តាមទ្រឹស្តីបទរ៉ូល មានចំនួន $c\in(a\,,b)$ មួយយ៉ាងតិច

ដែល $g'(c)=0$ នោះ $g'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$ ទាញបាន $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ។

ដូចនេះ | ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន សិក្សាអនុគមន៍

1. ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ : បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a\,,b]$ និងមានដេរីវេលើចន្លោះ $(a\,,b)$ ៖
   ក. បើ $f'(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(a\,,b)$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $[a\,,b]$ ។
   ខ. បើ $f'(x)<0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(a\,,b)$ នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ $[a\,,b]$ ។
   គ. បើ $f'(x)=0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(a\,,b)$ នោះ f ជាអនុគមន៍ថេរលើចន្លោះ $[a\,,b]$ ។
2. ស្រាយបញ្ជាក់តម្លៃបរមាធៀប : គេមានអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះ $[a\,,b]$ និងមាន $c\in(a\,,b)$ ដែល $f'(c)=0$ ។
   បើ f មានដេរីវេលើចន្លោះ $(a\,,b)$ លើកលែងតែត្រង់ c នោះ $f(c)$ ត្រូវបានគេកំណត់ដូចខាងក្រោម ៖
   ក. បើ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ ត្រង់ c នោះ $f(c)$ គឺជាតម្លៃអប្បបរមានៃ f ។
   ខ. បើ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ ត្រង់ c នោះ $f(c)$ គឺជាតម្លៃអតិបរមានៃ f ។
3. ស្រាយបញ្ជាក់ពីបរមា ដោយប្រើដេរីវេទី២ : បើ f ជាអនុគមន៍ដែល $f'(c)=0$ និងមានដេរីវេលើចន្លោះ I ដែលមាន c នោះគេថា៖
   ក. បើ $f''(c)>0$ នោះ $f(c)$ គឺជាតម្លៃអប្បរមា ។
   ខ. បើ $f''(c)<0$ នោះ $f(c)$ គឺជាតម្លៃអតិរមា ។
   គ. បើ $f''(c)=0$ និងសញ្ញានៅសងខាង $f''(c)$ ប្រែប្រួល នោះគេថាអនុគមន៍មានចំណុចរបត់ត្រង់ c ។
4. បង្ហាញថា បើ អនុគមន៍ f មានដេរីវេលើចន្លោះ $I=(a\,,b)$ នោះ f ជាប់លើចន្លោះ I ។
5. ស្រាយបញ្ជាក់ថា : បើ $I(a\,,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង C តាងអនុគមន៍ f លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(2a-x)+f(x)=2b$ ។
6. បង្ហាញថា ក្រាបនៃអនុគមន៍ដឺក្រេទី៣ មានចំណុចរបត់មួយ ដែលជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់វា ។
7. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ និង $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$ នោះបន្ទាត់ដែលមានសមីការ $y=ax+b$ គឺជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាង f ។
8. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ប៉ះក្រាបតាងអនុគមន៍ f ត្រង់ x_0 មានសមីការ $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន សិក្សាអនុគមន៍

1. **រំលឹក :** ចំពោះ x_1 និង x_2 ដែល $x_2 > x_1$ ហើយ f គ្មានបរមានៅចន្លោះ (x_1 , x_2) គេកំណត់ ៖

-បើ $f(x_2) > f(x_1)$ នោះ f ជាអនុគមន៍ **កើន** ។

-បើ $f(x_2) > f(x_1)$ នោះ f ជាអនុគមន៍ **ចុះ** ។

-បើ $f(x_2) = f(x_1)$ នោះ f ជាអនុគមន៍ **ថេរ** ។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ : បើ $f'(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (a , b)$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $[a , b]$

គេមាន $f'(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (a , b)$

គេតាង $x_1 < x_2$ ដែល $x_1 , x_2 \in (a , b)$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម : មាន c ដែល $x_1 < c < x_2$

គេបាន $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

ដោយ $f'(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (a , b)$ នោះ $f'(c) > 0$

នាំឱ្យ $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ (គុណអង្គទាំងពីរនឹង $x_2 - x_1 > 0$ មិនប្តូរទិសដៅ)

$f(x_2) - f(x_1) > 0$

$f(x_2) > f(x_1)$ នេះបញ្ជាក់ថា f ជាអនុគមន៍កើន

ដូចនេះ | បើ $f'(x) > 0$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើន | ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ : បើ $f'(x) < 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (a , b)$ នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ $[a , b]$

គេមាន $f'(x) < 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (a , b)$

គេតាង $x_1 < x_2$ ដែល $x_1 , x_2 \in (a , b)$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម : មាន c ដែល $x_1 < c < x_2$

គេបាន $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

ដោយ $f'(x) < 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in (a , b)$ នោះ $f'(c) < 0$

នាំឱ្យ $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ (គុណអង្គទាំងពីរនឹង $x_2 - x_1 > 0$ មិនប្តូរទិសដៅ)

$f(x_2) - f(x_1) < 0$

$f(x_2) < f(x_1)$ នេះបញ្ជាក់ថា f ជាអនុគមន៍ចុះ

ដូចនេះ | បើ $f'(x) < 0$ នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះ | ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ : បើ $f'(x)=0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(a\ ,\ b)$ នោះ f ជាអនុគមន៍ថេរលើចន្លោះ $[a\ ,\ b]$

គេមាន $f'(x)=0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(a\ ,\ b)$

គេតាង $x_1<x_2$ ដែល $x_1\ ,\ x_2\in(a\ ,\ b)$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម : មាន c ដែល $x_1<c<x_2$

គេបាន $f'(c)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

ដោយ $f'(x)=0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(a\ ,\ b)$ នោះ $f'(c)=0$

នាំឱ្យ $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0$ (គុណអង្គទាំងពីរនឹង $x_2-x_1>0$ មិនប្តូរទិសដៅ)

$f(x_2)-f(x_1)=0$

$f(x_2)=f(x_1)$ នេះបញ្ជាក់ថា f ជាអនុគមន៍ថេរ

ដូចនេះ **បើ $f'(x)=0$ នោះ f ជាអនុគមន៍ថេរ** ។

2. **ស្រាយបញ្ជាក់តម្លៃបរមាធៀប :**

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ ត្រង់ c នោះ $f(c)$ គឺជាតម្លៃអប្បបរមានៃ f

ដោយ ក្នុងចន្លោះ $(a\ ,\ b)$ មានដេរីវេទី១ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ ត្រង់ c នោះ ៖

គេបាន $f'(x)<0$ ចំពោះ $x\in(a\ ,\ c)$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ $(a\ ,\ c)$

$f'(x)>0$ ចំពោះ $x\in(c\ ,\ b)$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(c\ ,\ b)$

នាំឱ្យ ក្រាបនៃ f ចុះដល់ $f(c)$ រួចហើយកើនវិញ នោះ f មានអប្បបរមាត្រង់ $x=c$

ដូចនេះ **បើ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ ត្រង់ c នោះ $f(c)$ គឺជាតម្លៃអប្បបរមានៃ f** ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ ត្រង់ c នោះ $f(c)$ គឺជាតម្លៃអតិបរមានៃ f

ដោយ ក្នុងចន្លោះ $(a\ ,\ b)$ មានដេរីវេទី១ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ ត្រង់ c នោះ ៖

គេបាន $f'(x)>0$ ចំពោះ $x\in(a\ ,\ c)$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(a\ ,\ c)$

$f'(x)<0$ ចំពោះ $x\in(c\ ,\ b)$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ $(c\ ,\ b)$

នាំឱ្យ ក្រាបនៃ f កើនដល់ $f(c)$ រួចហើយចុះវិញ នោះ f មានអតិបរមាត្រង់ $x=c$

ដូចនេះ **បើ $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ ត្រង់ c នោះ $f(c)$ គឺជាតម្លៃអតិបរមានៃ f** ។

ចំណាំ **ចំពោះអនុគមន៍ f នៅត្រង់ $x=x_0$**

បើ $f'(x_0)=0$ និងប្តូរសញ្ញា មានន័យថា អនុគមន៍មានបរមា ត្រង់ចំណុច $(x_0\ ,\ f(x_0))$

បើ $f''(x_0)=0$ និងប្តូរសញ្ញា មានន័យថា អនុគមន៍មានចំណុចរបត់ ត្រង់ចំណុច $(x_0\ ,\ f(x_0))$

3. ស្រាយបញ្ជាក់ពីបរមា ដោយប្រើដេរីវេទី២ :

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $f'(c)=0$ និង $f''(c)>0$ នោះ $f(c)$ គឺជាតម្លៃអប្បបរមា លើចន្លោះ I

តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន $f''(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)-f'(c)}{x-c}$

ឬ $f''(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{x-c}$ ព្រោះ $f'(c)=0$

ដោយ $f''(c)>0$ នោះ $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{x-c}>0$

-បើ $x<c$ នោះ $x-c<0$ នាំឱ្យ $f'(x)<0$ មានន័យថា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះ

-បើ $x>c$ នោះ $x-c>0$ នាំឱ្យ $f'(x)>0$ មានន័យថា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍កើន

ឃើញថា ក្នុងចន្លោះ I ក្រាបនៃ f ចុះដល់ $f(c)$ រួចកើនវិញ មានន័យថា f មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x=c$

ដូចនេះ | បើ $f'(c)=0$ និង $f''(c)>0$ នោះ $f(c)$ គឺជាតម្លៃអប្បបរមាលើចន្លោះ I | ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $f'(c)=0$ និង $f''(c)<0$ នោះ $f(c)$ គឺជាតម្លៃអតិបរមា លើចន្លោះ I

តាមនិយមន័យដេរីវេ គេបាន $f''(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)-f'(c)}{x-c}$

ឬ $f''(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{x-c}$ ព្រោះ $f'(c)=0$

ដោយ $f''(c)<0$ នោះ $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{x-c}<0$

-បើ $x<c$ នោះ $x-c<0$ នាំឱ្យ $f'(x)>0$ មានន័យថា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍កើន

-បើ $x>c$ នោះ $x-c>0$ នាំឱ្យ $f'(x)<0$ មានន័យថា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះ

ឃើញថា ក្នុងចន្លោះ I ក្រាបនៃ f កើនដល់ $f(c)$ រួចចុះវិញ មានន័យថា f មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x=c$

ដូចនេះ | បើ $f'(c)=0$ និង $f''(c)<0$ នោះ $f(c)$ គឺជាតម្លៃអតិបរមាលើចន្លោះ I | ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $f''(c)=0$ និងសញ្ញានៅសងខាង $f''(c)$ ប្រែប្រួល នោះគេថាអនុគមន៍មានចំណុចរបត់ត្រង់ c

រំលឹក : អនុគមន៍មួយមានចំណុចរបត់ត្រង់ចំណុច $I(a,b)$ កាលណានៅត្រង់ចំណុច I នេះ អនុគមន៍ផ្លាស់ប្តូរភាពប៉ោង ឬផត ។

គេមាន f ជាអនុគមន៍ដែល $f'(c)=0$, $f''(c)=0$ និងសញ្ញានៅសងខាង $f''(c)$ ប្រែប្រួល

ដោយ $f''(c)=0$ នេះបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍គ្មានបរមាទេ ត្រង់ c

ហើយ សញ្ញានៅសងខាង $f''(c)$ ប្រែប្រួល មានន័យថា អនុគមន៍ផ្លាស់ប្តូរភាពប៉ោង ឬផត មានពីរករណីគឺ ៖

-បើត្រង់ c , $f''(c)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ នោះក្រាបនៃអនុគមន៍ប្តូរពីផត ទៅប៉ោង

-បើត្រង់ c , $f''(c)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ នោះក្រាបនៃអនុគមន៍ប្តូរពីប៉ោង ទៅផត

ឃើញថា f ផ្លាស់ប្តូរភាពប៉ោង ឬផត ត្រង់ c នាំឱ្យ f មានចំណុចរបត់នៅត្រង់ c

ដូចនេះ | អនុគមន៍ f មានចំណុចរបត់នៅត្រង់ c | ។

4. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ អនុគមន៍ f មានដេរីវេលើចន្លោះ $I=(a\ ,\ b)$ នោះ f ជាប់លើចន្លោះ I**

បើ f មានដេរីវេលើចន្លោះ $I=(a\ ,\ b)$ នោះ ចំពោះគ្រប់ $x_o \in I$

គេបាន $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=f'(x_0)\cdot 0=0$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)=0$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-f(x_0)=0$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

ដោយ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ ពិតចំពោះគ្រប់ $x_o\in I$ នោះបញ្ជាក់ថា f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ I

ដូចនេះ | បើ អនុគមន៍ f មានដេរីវេលើចន្លោះ $I=(a\ ,\ b)$ នោះ f ជាប់លើចន្លោះ I | ។

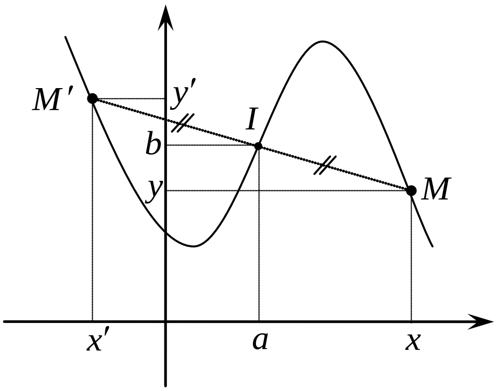
5. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា : បើ $I(a\ ,\ b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង C តាងអនុគមន៍ f លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(2a-x)+f(x)=2b$**

ក្នុងប្លង់ (P) ប្រកបដោយតម្រុយ អរតូណរម៉ាល់ $(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$

គេយក I មានកូអរដោនេ $(a\ ,\ b)$

តាមបំលែងឆ្លុះផ្ចិត $I(a\ ,\ b)$ ចំណុច $M(x\ ,\ y)$ មានរូបភាព $M'(x'\ ,\ y')$

យ I ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[MM']$



គេបាន $\begin{cases} a=\dfrac{x+x'}{2} \\ b=\dfrac{y+y'}{2}\end{cases}$ នោះ $\begin{cases} x'=2a-x \\ y'=2b-y\end{cases}$

ខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ មាន I ជាផ្ចិតឆ្លុះលុះត្រាតែ ៖

$M\in(C)$ សមមូល $x\in(D_f)$ និង $y=f(x)$

$M'\in(C)$ សមមូល $x'\in(D_f)$ ឬ $2a-x\in(D_f)$ និង $y'=2b-y$

គេបាន $f(x')=2b-f(x)$ អាចសរសេរ $f(x')+f(x)=2b$

ឬ $f(2a-x)+f(x)=2b$

ដូចនេះ | បើ $I(a\ ,\ b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង C តាងអនុគមន៍ f លុះត្រាតែ $f(2a-x)+f(x)=2b$ | ។

6. **បង្ហាញថា ក្រាបនៃអនុគមន៍ដឺក្រេទី៣ មានចំណុចរបត់មួយ ដែលជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់វា**

គេតាង $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a\neq 0$ ជាអនុគមន៍ដឺក្រេទី៣

នាំឱ្យ $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f''(x)=6ax+2b$

គេឱ្យ $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6ax+2b=0$ នាំឱ្យ $x=-\dfrac{b}{3a}$

$$f\left(-\frac{b}{3a}\right)=a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2+c\left(-\frac{b}{3a}\right)+d$$

$$=-\frac{b^3}{27a^2}+\frac{b^3}{9a^2}-\frac{bc}{3a}+d$$

$$=\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d$$

តារាងសញ្ញា $f''(x)$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{3a}$	$+\infty$
$f''(x)$	សញ្ញាផ្ទុយ a	0	សញ្ញាដូច a

ត្រង់ $x=-\dfrac{b}{3a}$, $f''(x)=0$ និងប្តូរសញ្ញា មានន័យថា ក្រាបនៃ f មានចំណុចរបត់ $I\left(-\dfrac{b}{3a}\,,\,\dfrac{2b^3}{27a^2}-\dfrac{bc}{3a}+d\right)$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត បើ $I(a,b)=I\left(-\dfrac{b}{3a}\,,\,\dfrac{2b^3}{27a^2}-\dfrac{bc}{3a}+d\right)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ f លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(2a-x)+f(x)=2b$

គេបាន $f(2a-x)=f\left(-\dfrac{2b}{3a}-x\right)$

$$=a\left(-\frac{2b}{3a}-x\right)^3+b\left(-\frac{2b}{3a}-x\right)^2+c\left(-\frac{2b}{3a}-x\right)+d$$

$$=a\left(-\frac{8b^3}{27a^3}-\frac{12b^2x}{9a^2}-\frac{6bx^2}{3a}-x^3\right)+b\left(\frac{4b^2}{9a^2}+\frac{4bx}{3a}+x^2\right)-\frac{2bc}{3a}-cx+d$$

$$=-\frac{8b^3}{27a^2}-\frac{4b^2x}{3a}-2bx^2-ax^3+\frac{4b^3}{9a^2}+\frac{4b^2x}{3a}+bx^2-\frac{2bc}{3a}-cx+d$$

$$=\frac{4b^3}{27a^2}-\frac{2bc}{3a}+2d-ax^3-bx^2-cx-d$$

$$=\frac{4b^3}{27a^2}-\frac{2bc}{3a}+2d-\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)$$

$$=2\left(\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d\right)-f(x)$$

$$=2b-f(x)$$

នាំឱ្យ $f(2a-x)+f(x)=2b$ នេះបញ្ជាក់ថា $I\left(-\dfrac{b}{3a}\,,\,\dfrac{2b^3}{27a^2}-\dfrac{bc}{3a}+d\right)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f (2)

តាម (1) និង (2) ក្រាបនៃអនុគមន៍ដឺក្រេទី៣ មានចំណុចរបត់មួយ ដែលជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់វា

ដូចនេះ **បង្ហាញបានថា ក្រាបនៃអនុគមន៍ដឺក្រេទី៣ មានចំណុចរបត់មួយ ដែលជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់វា** ។

7. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ និង $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$ នោះបន្ទាត់ $y=ax+b$ គឺជាអាស៊ីមតូត ទ្រេត**

តាមនិយមន័យ បន្ទាត់ $y=ax+b$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f កាលណា $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ ឬ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ ។

ពីនិយមន័យខាងលើ គេអាចសរសេរបាន $f(x)-(ax+b)=\varepsilon(x)$ ដែល $\lim\limits_{x\to-\infty}\varepsilon(x)=0$ ឬ $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$

គេបាន $$\frac{f(x)}{x}-\frac{(ax+b)}{x}=\frac{\varepsilon(x)}{x}$$

$$\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}=\frac{\varepsilon(x)}{x}$$

$$\frac{f(x)}{x}=a+\frac{b}{x}+\frac{\varepsilon(x)}{x}$$

នាំឱ្យ $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left[a+\frac{b}{x}+\frac{\varepsilon(x)}{x}\right]=a+0+0=a$$

ម្យ៉ាងទៀត $f(x)-ax=b+\varepsilon(x)$

នាំឱ្យ $$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[b+\varepsilon(x)\right]=b+0=b$$

ដូចនេះ

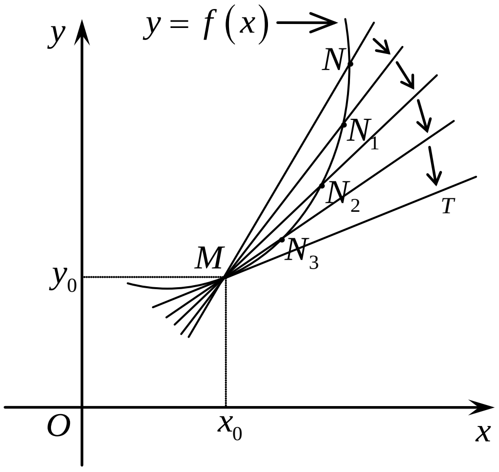
បើ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ និង $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$ នោះបន្ទាត់ $y=ax+b$ គឺជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាង f

។

8. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ប៉ះក្រាបតាងអនុគមន៍ f ត្រង់ x_0 មានសមីការ $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$**

គេមានចំណុច $M(x_0\,,\,f(x_0))$ និង $N(x\,,\,f(x))$ លើក្រាបតាងអនុគមន៍ f

ខ្នាត់ MN មានមេគុណប្រាប់ទិស $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$



បើ N ផ្លាស់ទីលើក្រាបខិតទៅរក M នោះខ្នាត់ MN ងាករកទីតាំងលីមីត MT ដែលហៅថា បន្ទាត់ប៉ះក្រាបនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $M(x_0, f(x_0))$ ។

ក្នុងករណី $x\to x_0$ នោះមេគុណប្រាប់ទិសនៃខ្នាត់ MN ក្លាយជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ MT គឺ $m=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ឬ $m=f'(x_0)$

ដោយ បន្ទាត់ប៉ះ MT មានមេគុណប្រាប់ទិស $f'(x_0)$ នោះគេបាន ៖

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f'(x_0)$$

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$$

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \quad \text{ព្រោះ } y_0=f(x_0)$$

ដូចនេះ

បន្ទាត់ប៉ះក្រាបតាងអនុគមន៍ f ត្រង់ x_0 មានសមីការ $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន អាំងតេក្រាល

1. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ នោះព្រីមីទីវទាំងអស់នៃ f មានទម្រង់ទូទៅ $F(x)+c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ ។

2. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ដែលមាន k , c ជាចំនួនថេរ ៖

ក. $\int kdx = kx + c$ ដែល $k \neq 0$

ខ. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ ដែល $k \neq 0$

គ. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ដែល $n \neq -1$

ឃ. $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + c$

ង. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + c$

ច. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

ឆ. $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$

ជ. $\int \frac{x}{ax+b}dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + c$

ឈ. $\int \frac{1}{(ax+b)^2}dx = -\frac{1}{a(ax+b)} + c$

ញ. $\int \frac{1}{x(ax+b)}dx = \frac{1}{b}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right| + c$

ដ. $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$

ឋ. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$, $n \neq -1$

ឌ. $\int \frac{1}{x}du = \ln|x| + c$ ដែល $x \neq 0$

ឍ. $\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2}{a}\left(\sqrt{ax+b}\right) + c$

ណ. $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$, $a \neq 0$

ត. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + c$

ថ. $\int kf'(x)dx = kf(x) + c$

ទ. $\int [f(x)]^n f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$

ធ. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$

ន. $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}dx = \frac{-1}{f(x)} + c$

ប. $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n}dx = \frac{-1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}} + c$

ផ. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

3. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ៖

ក. $\int \sin xdx = -\cos x + c$

ខ. $\int \cos xdx = \sin x + c$

គ. $\int \tan xdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + c$

ឃ. $\int \cot xdx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \ln|\sin x| + c$

ង. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int (1 + \tan^2 x)dx = \tan x + c$

ច. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int (1 + \cot^2 x)dx = -\cot x + c$

ឆ. $\int \sin axdx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$

ជ. $\int \cos axdx = \frac{1}{a}\sin ax + c$

ឈ. $\int \sin ax \cdot \cos axdx = \frac{1}{2a}\sin^2 ax + c$

ឈ. $\int \sin^n ax \cos axdx = \frac{1}{(n+1)a}\sin^{n+1} ax + c$

ដ. $\int \cos^n ax \sin axdx = \frac{-1}{(n+1)a}\cos^{n+1} ax + c$

ឋ. $\int \sin[f(x)]f'(x)dx = -\cos[f(x)] + c$

ឌ. $\int \cos\left[f(x)\right] f'(x)\,dx = \sin\left[f(x)\right] + c$

ឍ. $\int \dfrac{f'(x)}{\cos^2\left[f(x)\right]}dx = \int\left[1+\tan^2\left[f(x)\right]\right]f'(x)\,dx = \tan\left[f(x)\right]+c$

ណ. $\int \dfrac{f'(x)}{\sin^2\left[f(x)\right]}dx = \int\left[1+\cot^2\left[f(x)\right]\right]f'(x)\,dx = -\cot\left[f(x)\right]+c$

4. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ៖

ក. $\int e^x dx = e^x + c$ ខ. $\int e^{ax}dx = \dfrac{e^{ax}}{a} + c$ គ. $\int e^{ax+b}dx = \dfrac{1}{a}e^{ax+b} + c$

ឃ. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$ ង. $\int e^u du = e^u + c$ ច. $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$

5. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍លោការីត ៖

ក. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$ ខ. $\int \dfrac{\ln x}{x}dx = \dfrac{1}{2}\ln^2 x$ គ. $\int \dfrac{\ln^n x}{x}dx = \dfrac{\ln^{n+1} x}{n+1} + c$

ឃ. $\int \dfrac{1}{x\ln x}dx = \ln(\ln x) + c$

6. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ៖ $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$ ។

7. ស្រាយបញ្ជាក់នូវលក្ខណៈនៃអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងក្រោម ៖

ក. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

ខ. $\int_a^a f(x)dx = 0$

គ. បើ f ជាប់និងកំណត់លើចន្លោះ $[a\,,\,b]$ និង $a<b<c$ គេបាន $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ ។

ឃ. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)\,dx \quad ,k\in\mathbb{R}$

ង. បើមាន $\int_a^b f(x)dx$ និង $\int_a^b g(x)dx$ នោះគេបាន ៖

i) $\int_a^b\left[f(x)\pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)dx$

ii) $\int_a^b\left[\alpha f(x)\pm\beta g(x)\right]dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx \pm \beta\int_a^b g(x)dx$

ដែលមាន α និង β ជាចំនួនពិតថេរ ។

8. ស្រាយបញ្ជាក់ រូបមន្តអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយផ្នែក ៖ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a\,,\,b]$ និងមានដេរីវេលើចន្លោះ $(a\,,\,b)$ នោះគេបាន $\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$ ។

9. ស្រាយបញ្ជាក់ រូបមន្តអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយប្តូរអថេរ ៖ បើ $u=g(x)$ ជាប់និងមានដេរីវេលើចន្លោះ $[a\,,\,b]$ នោះអាំងតេក្រាល $\int_a^b f\left[g(x)\right]g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$ ។

10. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះអនុគមន៍ F កំណត់លើចន្លោះ $[a,b]$ ដោយ $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ជាប់នៅលើចន្លោះ $[a,b]$ និងមានដេរីវេត្រង់គ្រប់ចំណុចនៃចន្លោះ $[a,b]$ ហើយ $\dfrac{d}{dx}\left[F(x)\right] = \dfrac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$ ។

11. ស្រាយបញ្ជាក់ថា : ប្រវែងធ្នូនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f ដែលនៅចន្លោះបន្ទាត់ឈរ $x=a$ និង $x=b$ កំណត់ដោយ

$L=\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$ ។

12. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើអនុគមន៍ f មានអាំងតេក្រាលលើចន្លោះ $[a\,,\,b]$ នោះគេបាន $\int_a^b \left|f(x)\right|dx \ge \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$ ។

13. បង្ហាញថា អនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់មិនអវិជ្ជមានលើចន្លោះ $[a\,,\,b]$ ។ មាឌនៃសូលីតបរិវត្តដែលបង្កើតឡើងដោយរង្វិលជុំវិញអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ឈរ $x=a$ និង $x=b$ កំណត់ដោយ $V=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\pi\left[f(x_k)\right]^2\Delta x=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2 dx$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន អាំងតេក្រាល

1. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ នោះព្រីមីទីវទាំងអស់នៃ f មានទម្រង់ទូទៅ $F(x)+c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ**

គេមាន $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$

តាមនិយមន័យ គេបាន $F'(x)=f(x)$

ដោយ $\left[F(x)+c\right]'=F'(x)=f(x)$

ដូចនេះ ព្រីមីទីវទាំងអស់នៃ $f(x)$ មានទម្រង់ទូទៅ $F(x)+c$ ។

2. **ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ដែលមាន k , c ជាចំនួនថេរ ៖**

ក. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int kdx=kx+c$ ដែល $k\neq 0$

ដោយ $(kx+c)'=k$

តាមនិយមន័យ គេបាន $\int kdx=kx+c$

ដូចនេះ រូបមន្ត $\int kdx=kx+c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

សម្គាល់ : បើ $k=1$ គេបាន $\int dx=x+c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ ដែល $k\neq 0$

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx=F(x)+c$ សមមូល $\left[F(x)+c\right]'=f(x)$

ដោយ $\left[k\int f(x)dx\right]'=k\left[\int f(x)dx\right]'=k\left[F(x)+c\right]'=kf(x)$

នាំឱ្យ $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

(ដើម្បីងាយយល់អ្នកត្រូវគិតថា $A'=B$ នាំឱ្យគេបាន $\int B=A$)

ដូចនេះ រូបមន្ត $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$ ដែល $n\neq -1$

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx=F(x)+c$ សមមូល $\left[F(x)+c\right]'=f(x)$

ដោយ $\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c\right]'=(n+1)\cdot\dfrac{x^n}{n+1}=x^n$

នាំឱ្យ $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$ ដែល $n\neq -1$

ដូចនេះ រូបមន្ត $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$ ដែល $n\neq -1$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}+c$

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x)+c$ សមមូល $\left[F(x)+c\right]' = f(x)$

ដោយ $\left[-\frac{1}{x}+c\right]' = \left[-x^{-1}+c\right]' = -\left(x^{-1}\right)' = -(-1)x^{-1-1} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

នាំឱ្យ $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}+c$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}+c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ង. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}+c$

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x)+c$ សមមូល $\left[F(x)+c\right]' = f(x)$

ដោយ $\left(2\sqrt{x}+c\right)' = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

នាំឱ្យ $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}+c$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}+c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ច. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x)+c_1$ សមមូល $\left[F(x)+c_1\right]' = f(x)$

ឬ $\int g(x)dx = G(x)+c_2$ សមមូល $\left[G(x)+c_2\right]' = g(x)$

គេបាន $\left[F(x)\pm G(x)+c\right]' = F'(x)\pm G'(x) = f(x)\pm g(x)$, $c = c_1 \pm c_2$

នាំឱ្យ $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx = F(x)\pm G(x)+c$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = \left[F(x)+c_1\right]\pm\left[G(x)+c_1\right] = F(x)\pm G(x)+c$, $c = c_1 \pm c_2$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ឆ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+c$

➢របៀបទី១ តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x)+c_1$ សមមូល $\left[F(x)+c_1\right]' = f(x)$

ដោយ $\left[\frac{1}{a}\ln|ax+b|+c\right]' = \frac{1}{a}\left[\ln|ax+b|\right]' = \frac{1}{a}\times\frac{(ax+b)'}{ax+b} = \frac{1}{a}\times\frac{a}{ax+b} = \frac{1}{ax+b}$ ព្រោះ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

នាំឱ្យ $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+c$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

>របៀបទី២ គេមាន $\int \frac{1}{ax+b}dx$ តាង $u=ax+b \Rightarrow du=adx$

គេបាន $\int \frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\int \frac{1}{ax+b}\cdot adx=\frac{1}{a}\int \frac{1}{u}du$

$=\frac{1}{a}\int \frac{1}{u}du=\frac{1}{a}\ln|u|+c=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+c$ ព្រោះ $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

ដូចនេះ

រូបមន្ត $\int \frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

ជ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \frac{x}{ax+b}dx=\frac{x}{a}-\frac{b}{a^2}\ln|ax+b|+c$

>របៀបទី១ គេមាន $\int \frac{x}{ax+b}dx=\int \frac{\frac{1}{a}(ax+b)-\frac{b}{a}}{ax+b}dx$

$$=\int \frac{\frac{1}{a}(ax+b)}{ax+b}dx-\int \frac{\frac{b}{a}}{ax+b}dx$$

$$=\int \frac{1}{a}dx-\frac{b}{a}\int \frac{1}{ax+b}dx$$

$$=\frac{x}{a}+c_1-\frac{b}{a}\times\frac{1}{a}\ln|ax+b|+c_2$$

$$=\frac{x}{a}-\frac{b}{a^2}\ln|ax+b|+c \quad , \quad c=c_1+c_2$$

ដូចនេះ

រូបមន្ត $\int \frac{x}{ax+b}dx=\frac{x}{a}-\frac{b}{a^2}\ln|ax+b|+c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

>របៀបទី២ តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx=F(x)+c$ សមមូល $[F(x)+c]'=f(x)$

ដោយ $\left[\frac{x}{a}-\frac{b}{a^2}\ln|ax+b|+c\right]'=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}\cdot\frac{(ax+b)'}{ax+b}$

$$=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}\cdot\frac{a}{ax+b}$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{b}{a(ax+b)}$$

$$=\frac{(ax+b)-b}{a(ax+b)}$$

$$=\frac{ax}{a(ax+b)}$$

$$=\frac{x}{ax+b}$$

នាំឱ្យគេបាន $\int \frac{x}{ax+b}dx=\frac{x}{a}-\frac{b}{a^2}\ln|ax+b|+c$

ដូចនេះ

រូបមន្ត $\int \frac{x}{ax+b}dx=\frac{x}{a}-\frac{b}{a^2}\ln|ax+b|+c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

ឈ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \frac{1}{(ax+b)^2}dx = -\frac{1}{a(ax+b)}+c$

គេមាន $\int \frac{1}{(ax+b)^2}dx$ តាង $u = ax+b \Rightarrow du = adx$

គេបាន
$$\int \frac{1}{(ax+b)^2}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(ax+b)^2}\cdot adx$$
$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{u^2}du = \frac{1}{a}\times\left(-\frac{1}{u}\right)+c$$
$$= \frac{1}{a}\times\left(-\frac{1}{ax+b}\right)+c$$
$$= -\frac{1}{a(ax+b)}+c$$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\int \frac{1}{(ax+b)^2}dx = -\frac{1}{a(ax+b)}+c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ញ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \frac{1}{x(ax+b)}dx = \frac{1}{b}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right|+c$

គេមាន $\frac{1}{x(ax+b)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{ax+B}$ ដែល A និង B ជាចំនួនដែលត្រូវកំណត់

$$\frac{1}{x(ax+b)} = \frac{A(ax+b)+Bx}{x(ax+b)}$$
$$\frac{1}{x(ax+b)} = \frac{(Aa+B)x+Ab}{x(ax+b)}$$

គេផ្ទឹមបាន $\begin{cases} Aa+B=0 \\ Ab=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-\frac{a}{b} \\ A=\frac{1}{b} \end{cases}$ នោះ: $\frac{1}{x(ax+b)} = \frac{\frac{1}{b}}{x}+\frac{-\frac{a}{b}}{ax+B} = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{x}-\frac{a}{ax+B}\right)$

នាំឱ្យ
$$\int \frac{1}{x(ax+b)}dx = \int \frac{1}{b}\left(\frac{1}{x}-\frac{a}{ax+B}\right)dx$$
$$= \frac{1}{b}\left[\int \frac{1}{x}dx - a\int \frac{1}{ax+b}dx\right]$$
$$= \frac{1}{b}\left(\ln|x| - a\cdot\frac{1}{a}\ln|ax+b|+c_1\right)$$
$$= \frac{1}{b}\left(\ln|x|-\ln|ax+b|\right)+\frac{c_1}{b}$$
$$= \frac{1}{b}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right|+c \quad , \quad c=\frac{c_1}{b}$$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\int \frac{1}{x(ax+b)}dx = \frac{1}{b}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right|+c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ដ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int (ax+b)^n dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$

គេមាន $\int (ax+b)^n dx$ តាង $u = ax+b \Rightarrow du = adx \Rightarrow dx = \dfrac{1}{a}\cdot du$

គេបាន $\int (ax+b)^n dx = \int u^n \cdot \dfrac{1}{a} du = \dfrac{1}{a}\int u^n du = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$

ដូចនេះ

រូបមន្ត $\int (ax+b)^n dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

ឋ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c \text{ , } n \neq -1$

ដោយ $\int u^n du$ មានទម្រង់ដូច $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ នាំឱ្យ $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c \text{ , } n \neq -1$

ដូចនេះ

រូបមន្ត $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$ ដែល $n \neq -1$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

ឌ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ ដែល $x \neq 0$

គេមាន បើ $x > 0$ នោះគេបាន $(\ln x + c)' = \dfrac{1}{x}$ នាំឱ្យ $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln x + c$

បើ $x < 0$ នោះគេបាន $\left[\ln(-x) + c\right]' = \dfrac{(-x)'}{-x} = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$ នាំឱ្យ $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln(-x) + c$

តាមពីរករណីខាងលើ គេបាន $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ ដែល $x \neq 0$

ដូចនេះ

រូបមន្ត $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ ដែល $x \neq 0$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

ឍ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \dfrac{1}{\sqrt{ax+b}} dx = \dfrac{2}{a}\left(\sqrt{ax+b}\right) + c$

គេមាន $\int \dfrac{1}{\sqrt{ax+b}} dx$ តាង $u = ax+b \Rightarrow du = adx \Rightarrow dx = \dfrac{1}{a}\cdot du$

គេបាន $\int \dfrac{1}{\sqrt{ax+b}} dx = \int \dfrac{1}{\sqrt{u}}\cdot\dfrac{1}{a} du = \dfrac{1}{a}\int \dfrac{1}{\sqrt{u}} du = \dfrac{1}{a}\left(2\sqrt{u} + c_1\right) = \dfrac{2}{a}\sqrt{ax+b} + c \text{ , } c = \dfrac{c_1}{a}$

ដូចនេះ

រូបមន្ត $\int \dfrac{1}{\sqrt{ax+b}} dx = \dfrac{2}{a}\left(\sqrt{ax+b}\right) + c$ ដែល $x \neq 0$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

ណ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+c\ ,a\neq 0$

គេមាន $\frac{1}{a^2-x^2}=-\frac{1}{(x-a)(x+a)}=-\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}\right)$ ដែល A និង B ជាចំនួនដែលត្រូវកំណត់

គេបាន $\frac{1}{(x-a)(x-a)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-a}=\frac{A(x+a)+B(x-a)}{(x-a)(x+a)}=\frac{(A+B)x+Aa-Ba}{(x-a)(x+a)}$

គេផ្ទឹមបាន $\begin{cases}A+B=0\\ Aa-Ba=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\ A-B=\frac{1}{a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-A\\ 2A=\frac{1}{a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-\frac{1}{2a}\\ A=\frac{1}{2a}\end{cases}$

នាំឱ្យ $\frac{1}{a^2-x^2}=-\left(\frac{\frac{1}{2a}}{x-a}+\frac{-\frac{1}{2a}}{x+a}\right)=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x-a}\right)$

គេបាន $\int\frac{1}{a^2-x^2}dx=\int\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x-a}\right)dx=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x-a}\right)dx$

$=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{1}{x+a}dx-\int\frac{1}{x-a}dx\right]$

$=\frac{1}{2a}\left[\ln|x+a|+c_1-\ln|x-a|-c_2\right]$

$=\frac{1}{2a}\left[\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+c_3\right]\quad ,\quad c_3=c_1-c_2$

$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+c\quad ,\quad c=\frac{c_3}{2a}$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\int\frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+c\ ,\ a\neq 0$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ត.ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$

គេមាន $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$ តាង $x=a\tan u\ \Rightarrow\ dx=\frac{a}{\cos^2 u}du$

គេបាន $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{(a\tan u)^2+a^2}}\times\frac{a}{\cos^2 u}du$

$=\int\frac{1}{a\sqrt{\tan^2 u+1}}\times\frac{a}{\cos^2 u}du=\int\frac{1}{a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 u}}}\times\frac{a}{\cos^2 u}du$

$=\int\frac{1}{\cos u}du=\int\frac{\cos u}{\cos^2 u}du=\int\frac{1}{1-\sin^2 u}\cdot\cos u du$

តាង $t=\sin u\ \Rightarrow\ dt=\cos u du$

$=\int\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+c_1=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin u+1}{\sin u-1}\right|+c_1$ ព្រោះ $\int\frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+c$

ម្យ៉ាងទៀត $x = a\tan u \Rightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{\sin u}{\cos u}$ នាំឱ្យ $\cos u = \dfrac{a\sin u}{x}$

តែ $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ នាំឱ្យ $\sin^2 u + \left(\dfrac{a\sin u}{x}\right)^2 = 1$ ឬ $\sin^2 u\left(1 + \dfrac{a^2}{x^2}\right) = 1$ ឬ $\sin^2 u\left(\dfrac{x^2+a^2}{x^2}\right) = 1$

នាំឱ្យ $\sin^2 u = \dfrac{x^2}{x^2+a^2}$ ទាញបាន $\sin u = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+a^2}} \Leftrightarrow \sin u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

គេបាន $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin u+1}{\sin u-1}\right| + c_1 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}-1}\right| + c_1 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{x-\sqrt{x^2+a^2}}\right| + c_1$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^2}{\left(x-\sqrt{x^2+a^2}\right)\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^2}{x^2-\left(x^2+a^2\right)}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^2}{-a^2}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^2}{a^2}\right| + c$$ ព្រោះ $|-x| = |x|$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right)^2\right| + c_1 = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right| + c_1$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| - \ln|a| + c_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c \quad , \quad c = -\ln|a| + c_1$$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ថ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int kf'(x)dx = kf(x) + c$

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x) + c$ សមមូល $\left[F(x)+c\right]' = f(x)$

ដោយ $\left[kf(x)+c\right]' = kf'(x)$ នាំឱ្យ $\int kf'(x)dx = kf(x) + c$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\int kf'(x)dx = kf(x) + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ទ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\displaystyle\int [f(x)]^n f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x) + c$ សមមូល $\left[F(x)+c\right]' = f(x)$

ដោយ $\displaystyle\left(\frac{\left[f(x)\right]^{n+1}}{n+1} + c\right)' = \frac{1}{n+1}\cdot(n+1)\left[f(x)\right]'\left[f(x)\right]^{n+1-1} = f'(x)\left[f(x)\right]^n = \left[f(x)\right]^n f'(x)$

នាំឱ្យ $\displaystyle\int \left[f(x)\right]^n f'(x)dx = \frac{\left[f(x)\right]^{n+1}}{n+1}$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\displaystyle\int \left[f(x)\right]^n f'(x)dx = \frac{\left[f(x)\right]^{n+1}}{n+1}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ធ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x)+c$ សមមូល $[F(x)+c]' = f(x)$

-បើ $f(x)>0$ គេបាន $[\ln f(x)+c]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ នាំឱ្យ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln f(x)+c$

-បើ $f(x)<0$ គេបាន $(\ln[-f(x)]+c)' = \frac{[-f(x)]'}{-f(x)} = \frac{-f'(x)}{-f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$ នាំឱ្យ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln[-f(x)]+c$

តាមករណីទាំងពីរខាងលើ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+c$

ដូចនេះ រូបមន្ត $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ន. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}dx = \frac{-1}{f(x)} + c$

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x)+c$ សមមូល $[F(x)+c]' = f(x)$

ដោយ $\left[-\frac{1}{f(x)}+c\right]' = -\left[-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}\right] = \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$

នាំឱ្យ $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}dx = -\frac{1}{f(x)}+c$

ដូចនេះ រូបមន្ត $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}dx = -\frac{1}{f(x)}+c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ប. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n}dx = \frac{-1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}} + c$

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x)+c$ សមមូល $[F(x)+c]' = f(x)$

ដោយ $\left[-\frac{1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}}+c\right]' = -\frac{1}{n-1}\left([f(x)]^{-n+1}\right)' = -\frac{1}{n-1}\cdot(-n+1)f'(x)[f(x)]^{-n+1-1} = \frac{f'(x)}{[f(x)]^n}$

នាំឱ្យ $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n}dx = \frac{-1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}}+c$

ដូចនេះ រូបមន្ត $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n}dx = \frac{-1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}}+c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ផ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x) + c$ សមមូល $\left[F(x)+c\right]' = f(x)$

ដោយ $\left[2\sqrt{f(x)}+c\right]' = 2\cdot\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$

នាំឱ្យ $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

3. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ៖

ក. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \sin xdx = -\cos x + c$

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x) + c$ សមមូល $\left[F(x)+c\right]' = f(x)$

ដោយ $(-\cos x + c)' = -(\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$

នាំឱ្យ $\int \sin xdx = -\cos x + c$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\int \sin xdx = -\cos x + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \cos xdx = \sin x + c$

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x) + c$ សមមូល $\left[F(x)+c\right]' = f(x)$

ដោយ $(\sin x + c)' = (\sin x)' = \cos x$

នាំឱ្យ $\int \cos xdx = \sin x + c$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\int \cos xdx = \sin x + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \tan xdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + c$

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x) + c$ សមមូល $\left[F(x)+c\right]' = f(x)$

- បើ $\cos x > 0$ គេបាន $\left[-\ln\cos x + c\right]' = -\frac{(\cos x)'}{\cos x} = -\frac{-\sin x}{\cos x} = \tan x$ នាំឱ្យ $\int \tan xdx = -\ln\cos x + c$

- បើ $\cos x < 0$ គេបាន $\left[-\ln(-\cos x) + c\right]' = -\frac{(-\cos x)'}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ នាំឱ្យ $\int \tan xdx = -\ln(-\cos x) + c$

តាមពីរករណីខាងលើ គេសរសេរបាន $\int \tan xdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + c$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\int \tan xdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + c$

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x) + c$ សមមូល $\left[F(x)+c\right]' = f(x)$

- បើ $\sin x > 0$ គេបាន $\left[\ln \sin x + c\right]' = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$ នាំឱ្យ $\int \cot x dx = \ln \sin x + c$

- បើ $\sin x < 0$ គេបាន $\left[\ln(-\sin x) + c\right]' = \frac{(-\sin x)'}{-\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$ នាំឱ្យ $\int \cot x dx = \ln(-\sin x) + c$

តាមពីរករណីខាងលើ គេសរសេរបាន $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + c$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ង. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + c$

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x) + c$ សមមូល $\left[F(x)+c\right]' = f(x)$

ដោយ $(\tan x + c)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

នាំឱ្យ $\int (1 + \tan^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\int (1 + \tan^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ច. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + c$

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x) + c$ សមមូល $\left[F(x)+c\right]' = f(x)$

ដោយ $(-\cot x + c)' = -\left[-(1 + \cot^2 x)\right] = 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

នាំឱ្យ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + c$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ឆ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$

➢របៀបទី១ ប្រើអថេរជំនួយ

គេមាន $\int \sin ax dx$ តាង $t = ax \Rightarrow dt = adx$

គេបាន $\int \sin ax dx = \frac{1}{a} \int \sin ax \cdot adx = \frac{1}{a} \int \sin t dt = \frac{1}{a}(-\cos t) + c = -\frac{1}{a} \cos ax + c$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➤របៀបទី២ តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x)+c$ សមមូល $\left[F(x)+c\right]' = f(x)$

ដោយ $\left(-\frac{1}{a}\cos ax + c\right)' = -\frac{1}{a}(\cos ax)' = -\frac{1}{a}\cdot(ax)'(-\sin ax) = \sin ax$

នាំឱ្យ $\int \sin axdx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$

ដូចនេះ | រូបមន្ត $\int \sin axdx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ជ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \cos axdx = \frac{1}{a}\sin ax + c$

➤របៀបទី១ ប្រើអថេរជំនួយ

គេមាន $\int \cos axdx$ តាង $t = ax \Rightarrow dt = adx$

គេបាន $\int \cos axdx = \frac{1}{a}\int \cos ax\cdot adx = \frac{1}{a}\int \cos tdt = \frac{1}{a}(\sin t) + c = \frac{1}{a}\sin ax + c$

ដូចនេះ | រូបមន្ត $\int \cos axdx = \frac{1}{a}\sin ax + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➤របៀបទី២ តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x)+c$ សមមូល $\left[F(x)+c\right]' = f(x)$

ដោយ $\left(\frac{1}{a}\sin ax + c\right)' = \frac{1}{a}(\sin ax)' = \frac{1}{a}\cdot(ax)'(\cos ax) = \cos ax$

នាំឱ្យ $\int \cos axdx = \frac{1}{a}\sin ax + c$

ដូចនេះ | រូបមន្ត $\int \cos axdx = \frac{1}{a}\sin ax + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ឈ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \sin ax\cdot\cos axdx = \frac{1}{2a}\sin^2 ax + c$

គេមាន $\int \sin ax\cdot\cos axdx$ តាង $t = \sin ax \Rightarrow dt = a\cos axdx$

គេបាន $\int \sin ax\cdot\cos axdx = \frac{1}{a}\int \sin ax\cdot a\cos axdx$

$$= \frac{1}{a}\int tdt = \frac{1}{a}\times\frac{t^2}{2} + c$$

$$= \frac{1}{2a}t^2 + c$$

$$= \frac{1}{2a}\sin^2 ax + c$$

ដូចនេះ | រូបមន្ត $\int \cos axdx = \frac{1}{a}\sin ax + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ញ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \sin^n ax\cos ax dx = \frac{1}{(n+1)a}\sin^{n+1} ax + c$

គេមាន $\int \sin^n ax\cos ax dx$ តាង $t = \sin ax \Rightarrow dt = a\cos ax dx$

គេបាន $\int \sin^n ax\cos ax dx = \frac{1}{a}\int \sin^n ax \cdot a\cos ax dx$

$$= \frac{1}{a}\int t^n dt = \frac{1}{a}\times\frac{t^{n+1}}{n+1} + c$$

$$= \frac{1}{a(n+1)}t^{n+1} + c$$

$$= \frac{1}{a(n+1)}\sin^{n+1} ax + c$$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\int \sin^n ax\cos ax dx = \frac{1}{(n+1)a}\sin^{n+1} ax + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ដ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \cos^n ax\sin ax dx = \frac{-1}{(n+1)a}\cos^{n+1} ax + c$

គេមាន $\int \cos^n ax\sin ax dx$ តាង $t = \cos ax \Rightarrow dt = -a\sin ax dx$

គេបាន $\int \cos^n ax\sin ax dx = -\frac{1}{a}\int \cos^n ax(-a\sin ax)dx$

$$= -\frac{1}{a}\int t^n dt = -\frac{1}{a}\times\frac{t^{n+1}}{n+1} + c$$

$$= -\frac{1}{a(n+1)}\times t^{n+1} + c$$

$$= -\frac{1}{a(n+1)}\cos^{n+1} ax + c$$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\int \cos^n ax\sin ax dx = \frac{-1}{(n+1)a}\cos^{n+1} ax + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ឋ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \sin[f(x)]f'(x)dx = -\cos[f(x)] + c$

គេមាន $\int \sin[f(x)]f'(x)dx$ តាង $t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x)dx$

គេបាន $\int \sin[f(x)]f'(x)dx = \int \sin t dt = -\cos t + c = -\cos[f(x)] + c$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\int \sin[f(x)]f'(x)dx = -\cos[f(x)] + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ឌ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \cos[f(x)]f'(x)dx = \sin[f(x)] + c$

គេមាន $\int \cos[f(x)]f'(x)dx$ តាង $t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x)dx$

គេបាន $\int \cos[f(x)]f'(x)dx = \int \cos t dt = \sin t + c = \sin[f(x)] + c$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\int \cos[f(x)]f'(x)dx = \sin[f(x)] + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ឈ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}dx = \int[1+\tan^2[f(x)]]f'(x)dx = \tan[f(x)]+c$

គេមាន $\int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}dx$ និង $\int[1+\tan^2[f(x)]]f'(x)dx$

តាង $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$

គេបាន $\int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}dx = \int \frac{1}{\cos^2 u}du = \tan u + c = \tan[f(x)]+c$

ម្យ៉ាងទៀត $\int[1+\tan^2[f(x)]]f'(x)dx = \int[1+\tan^2 u]du = \tan u + c = \tan[f(x)]+c$

ដូចនេះ | រូបមន្ត $\int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}dx = \int[1+\tan^2[f(x)]]f'(x)dx = \tan[f(x)]+c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ញ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \frac{f'(x)}{\sin^2[f(x)]}dx = \int[1+\cot^2[f(x)]]f'(x)dx = -\cot[f(x)]+c$

គេមាន $\int \frac{f'(x)}{\sin^2[f(x)]}dx$ និង $\int[1+\cot^2[f(x)]]f'(x)dx$

តាង $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$

គេបាន $\int \frac{f'(x)}{\sin^2[f(x)]}dx = \int \frac{1}{\sin^2 u}du = -\cot u + c = -\cot[f(x)]+c$

ម្យ៉ាងទៀត $\int[1+\cot^2[f(x)]]f'(x)dx = \int[1+\cot^2 u]du = -\cot u + c = -\cot[f(x)]+c$

ដូចនេះ | រូបមន្ត $\int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}dx = \int[1+\tan^2[f(x)]]f'(x)dx = \tan[f(x)]+c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

4. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ៖

ក. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int e^x dx = e^x + c$

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x)+c$ សមមូល $[F(x)+c]' = f(x)$

ដោយ $[e^x + c]' = e^x$

នាំឱ្យ $\int e^x dx = e^x + c$

ដូចនេះ | រូបមន្ត $\int e^x dx = e^x + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}+c$

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x)+c$ សមមូល $[F(x)+c]' = f(x)$

ដោយ $\left[\frac{e^{ax}}{a}+c\right]' = \frac{1}{a}(e^{ax})' = \frac{1}{a}\cdot(ax)'\cdot e^{ax} = e^{ax}$ នាំឱ្យ $\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}+c$

ដូចនេះ | រូបមន្ត $\int e^x dx = e^x + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x)+c$ សមមូល $[F(x)+c]' = f(x)$

ដោយ $\left[\frac{1}{a}e^{ax+b}+c\right]' = \frac{1}{a}\cdot\left(e^{ax+b}\right)' = \frac{1}{a}\cdot(ax+b)'\cdot e^{ax+b} = e^{ax+b}$

នាំឱ្យ $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x)+c$ សមមូល $[F(x)+c]' = f(x)$

ដោយ $\left[\frac{a^x}{\ln a}+c\right]' = \frac{1}{\ln a}\cdot\left(a^x\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot a^x \ln a = a^x$

នាំឱ្យ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ង. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int e^u du = e^u + c$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ក្នុងលំហាត់ ក.

គេបាន $\int e^x dx = e^x + c$

នាំឱ្យបាន $\int e^u du = e^u + c$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\int e^u du = e^u + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ច.ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x)+c$ សមមូល $[F(x)+c]' = f(x)$

ដោយ $\left[e^{f(x)}+c\right]' = f'(x)e^{f(x)}$

នាំឱ្យ $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$

ដូចនេះ: រូបមន្ត $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

5. **ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ៖** $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx$

តាមរូបមន្ត $\left[f(x)g(x)\right]' = f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$

$f(x)g'(x)=\left[f(x)g(x)\right]'-f'(x)g(x)$ បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ

គេបាន $\int f(x)g'(x)dx=\int\left(\left[f(x)g(x)\right]'-f'(x)g(x)\right)dx$

$=\int\left[f(x)g(x)\right]'dx-\int f'(x)g(x)dx$

$=f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx$

ដូចនេះ: | រូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

✓**យល់ដឹង** ពេលខ្លះគេសរសេរ $\int fg' = fg-\int gf'$ ដែល $f=f(x)$ និង $g=g(x)$

ឬក៏គេអាចសរសេរ $\int udv = uv-\int vdu$ ដែល $u=u(x)$ និង $v=v(x)$

6. **ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍លោការីត ៖**

ក. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \ln x dx = x\ln x - x + c$ **ដែល** $x>0$

➤**របៀបទី១** តាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

គេមាន $\int \ln x dx$

គេតាង $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$

$dv=dx \Rightarrow v=x$

តាមរូបមន្ត អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក $\int udv=uv-\int vdu$

គេបាន $\int \ln x dx = x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx$

$=x\ln x-\int dx$

$=x\ln x-x+c$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\int \ln x dx = x\ln x - x + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➤**របៀបទី២** តាមនិយមន័យ

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx=F(x)+c$ សមមូល $\left[F(x)+c\right]'=f(x)$

ដោយ $\left[x\ln x-x+c\right]'=(x)'\ln x+(\ln x)'x-1=\ln x+\frac{1}{x}\cdot x-1=\ln x+1-1=\ln x$

នាំឱ្យ $\int \ln x dx = x\ln x - x + c$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\int \ln x dx = x\ln x - x + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}\ln^2 x$

➢របៀបទី១ តាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

គេមាន $\int \frac{\ln x}{x}dx$

គេតាង $u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx$

$dv = \frac{1}{x}dx \quad \Rightarrow \quad v = \ln x$

តាមរូបមន្ត អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក $\int udv = uv - \int vdu$

គេបាន $\int \frac{\ln x}{x}dx = \ln x \cdot \ln x - \int \frac{\ln x}{x}dx$

ឬ $2\int \frac{\ln x}{x}dx = \ln^2 x$

នាំឱ្យ $\int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}\ln^2 x$

ដូចនេះ រូបមន្ត $\int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}\ln^2 x$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➢របៀបទី២ តាមវិធីដោយប្រើអថេរជំនួយ

គេមាន $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x}dx$

គេតាង $u = \ln x \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx$

គេបាន $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x}dx = \int udu = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2}$ (យក $c = 0$)

ដូចនេះ រូបមន្ត $\int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}\ln^2 x$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➢របៀបទី២ តាមនិយមន័យ

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x) + c$ សមមូល $\left[F(x) + c\right]' = f(x)$

ដោយ $\left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]' = \frac{1}{2}\cdot 2(\ln x)' \cdot \ln x$

$= \frac{1}{x}\cdot \ln x = \frac{\ln x}{x}$

នាំឱ្យ $\int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}\ln^2 x$

ដូចនេះ រូបមន្ត $\int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}\ln^2 x$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \frac{\ln^n x}{x}dx = \frac{\ln^{n+1} x}{n+1} + c$

➢របៀបទី១ តាមវិធីដោយប្រើអថេរជំនួយ

គេមាន $\int \ln^n x \cdot \frac{1}{x}dx$

តាង $u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx$

គេបាន $\int \ln^n x \cdot \frac{1}{x}dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c = \frac{\ln^{n+1} x}{n+1} + c$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\int \frac{\ln^n x}{x}dx = \frac{\ln^{n+1} x}{n+1} + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➢របៀបទី២ តាមនិយមន័យ

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x) + c$ សមមូល $\left[F(x) + c\right]' = f(x)$

ដោយ $\left[\frac{\ln^{n+1} x}{n+1} + c\right]' = \frac{1}{n+1}\left(\ln^{n+1} x\right)' = \frac{1}{n+1}(n+1)(\ln x)' \ln^n x = \frac{1}{x} \cdot \ln^n x = \frac{\ln^n x}{x}$

នាំឱ្យ $\int \frac{\ln^n x}{x}dx = \frac{\ln^{n+1} x}{n+1} + c$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\int \frac{\ln^n x}{x}dx = \frac{\ln^{n+1} x}{n+1} + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

➢របៀបទី៣ តាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

គេមាន $\int \frac{\ln^n x}{x}dx$

តាង $u = \ln^n x \quad \Rightarrow \quad du = n \cdot (\ln x)' \cdot \ln^{n-1} x dx = \frac{n\ln^{n-1} x}{x}dx$

$dv = \frac{1}{x}dx \quad \Rightarrow \quad v = \ln x$

តាមរូបមន្ត អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក $\int u dv = uv - \int v du$

គេបាន $\int \frac{\ln^n x}{x}dx = \ln^n x \cdot \ln x - \int \ln x \cdot \frac{n\ln^{n-1} x}{x}dx$

$\int \frac{\ln^n x}{x}dx = \ln^n x \cdot \ln x - n\int \frac{\ln^n x}{x}dx$

$n\int \frac{\ln^n x}{x}dx + \int \frac{\ln^n x}{x}dx = \ln^{n+1} x$

$(n+1)\int \frac{\ln^n x}{x}dx = \ln^{n+1} x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\ln^n x}{x}dx = \frac{\ln^{n+1} x}{n+1}$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\int \frac{\ln^n x}{x}dx = \frac{\ln^{n+1} x}{n+1} + c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\int \frac{1}{x\ln x}dx = \ln(\ln x)+c$ **ដែល** $x>1$

➤របៀបទី១ តាមវិធីដោយប្រើអថេរជំនួយ

គេមាន $\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx$

គេតាង $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$

គេបាន $\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln u + c = \ln(\ln x)+c$

ដូចនេះ

រូបមន្ត $\int \frac{1}{x\ln x}dx = \ln(\ln x)+c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

➤របៀបទី២ តាមនិយមន័យ

តាមនិយមន័យ $\int f(x)dx = F(x)+c$ សមមូល $[F(x)+c]' = f(x)$

ដោយ $[\ln(\ln x)+c]' = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = (\ln x)'\times\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x}\times\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x}$

នាំឱ្យ $\int \frac{1}{x\ln x}dx = \ln(\ln x)+c$

ដូចនេះ

រូបមន្ត $\int \frac{1}{x\ln x}dx = \ln(\ln x)+c$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

7. **ស្រាយបញ្ជាក់នូវលក្ខណៈនៃអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងក្រោម ៖**

ក. ស្រាយបញ្ជាក់នូវលក្ខណៈ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

តាមនិយមន័យ $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ ដែល $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$

គេមាន $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = -[F(a)-F(b)] = -\int_b^a f(x)dx$

ដូចនេះ

លក្ខណៈ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់នូវលក្ខណៈ $\int_a^a f(x)dx = 0$

តាមនិយមន័យ $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ ដែល $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$

គេមាន $\int_a^a f(x)dx = F(a)-F(a) = 0$

ដូចនេះ

លក្ខណៈ $\int_a^a f(x)dx = 0$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

តើអ្នកដឹងទេថា «ក្នុងការបកស្រាយរូបមន្ត គេតែងតែប្រើនិយមន័យ ដើម្បីជាយោងក្នុងការបកស្រាយ» ?

គិតទាំងអស់គ្នា «ស្វ័យសត្យជាអ្វី? និយមន័យជាអ្វី? ជាទូទៅជាអ្វី? លក្ខណៈជាអ្វី? ទ្រឹស្តីបទជាអ្វី? រូបមន្តជាអ្វី? វិបាកជាអ្វី? ...»

គ. ស្រាយបញ្ជាក់នូវលក្ខណៈ $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$

គេមាន f ជាប់និងកំណត់លើចន្លោះ $[a\,,b]$ និង $a<b<c$

គេបាន
$$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=[F(b)-F(a)]-[F(c)-F(b)]$$
$$=F(b)-F(a)+F(c)-F(b)$$
$$=F(c)-F(a)$$
$$=\int_a^c f(x)dx$$

ដូចនេះ: | លក្ខណៈ: $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់នូវលក្ខណៈ: $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx\quad ,k\in\mathbb{R}$

គេមាន $\int_a^b kf(x)dx=kF(b)-kF(a)=k[F(b)-F(a)]=k\int_a^b f(x)$

ដូចនេះ: | លក្ខណៈ: $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ង. -ស្រាយបញ្ជាក់នូវលក្ខណៈ: $i)\ \int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

គេមាន
$$\int_a^b[f(x)+g(x)]dx=[F(b)+G(b)]-[F(a)+G(a)]$$
$$=F(b)+G(b)-F(a)-G(a)$$
$$=[F(b)-F(a)]+[G(b)-G(a)]$$
$$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

ម្យ៉ាងទៀត
$$\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=[F(b)-G(b)]-[F(a)-G(a)]$$
$$=F(b)-G(b)-F(a)+G(a)$$
$$=[F(b)-F(a)]-[G(b)-G(a)]$$
$$=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$

ដូចនេះ: | លក្ខណៈ: $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

-ស្រាយបញ្ជាក់នូវលក្ខណៈ: $ii)\ \int_a^b[\alpha f(x)\pm\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx\pm\beta\int_a^b g(x)dx$

គេមាន
$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=[\alpha F(b)+\beta G(b)]-[\alpha F(a)+\beta G(a)]$$
$$=\alpha F(b)-\alpha F(a)+\beta G(b)-\beta G(a)$$
$$=\alpha[F(b)-F(a)]+\beta[G(b)-G(a)]$$
$$=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

ម្យ៉ាងទៀត $\int_a^b[\alpha f(x)-\beta g(x)]dx=[\alpha F(b)-\beta G(b)]-[\alpha F(a)-\beta G(a)]$

$$=\alpha F(b)-\beta G(b)-\alpha F(a)+\beta G(a)$$
$$=\alpha F(b)-\alpha F(a)-\beta G(b)+\beta G(a)$$
$$=\alpha[F(b)-F(a)]-\beta[G(b)-G(a)]$$
$$=\alpha\int_a^b f(x)dx-\beta\int_a^b g(x)dx$$

ដូចនេះ: | លក្ខណ: $\int_a^b[\alpha f(x)\pm\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx\pm\beta\int_a^b g(x)dx$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

8. ស្រាយបញ្ជាក់ រូបមន្តអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយផ្នែក ៖ $\int_a^b f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b g(x)f'(x)dx$

គេមាន $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ (រូបមន្តដេរីវេ)

នាំឱ្យ $g'(x)f(x)=[f(x)g(x)]'-f'(x)g(x)$ (បំពាក់អាំងតេក្រាលកំណត់ពី a ទៅ b លើអង្គទាំងពីរ)

គេបាន $\int_a^b g'(x)f(x)dx=\int_a^b[f(x)g(x)]'dx-\int_a^b f'(x)g(x)dx$

ឬ $\int_a^b f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b g(x)f'(x)dx$

ដូចនេះ: | លក្ខណ: $\int_a^b f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b g(x)f'(x)dx$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

9. ស្រាយបញ្ជាក់ រូបមន្តអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយប្តូរអថេរ ៖ $\int_a^b f[g(x)]g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$

គេមាន $u=g(x)$ នោះ $du=g'(x)dx$

គេតាង $F(u)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(u)$ នោះ $F'(u)=f(u)$

គេបាន $\int_a^b f[g(x)]g'(x)dx=\int_a^b f(u)du$

$$=[F(u)]_a^b=[F(g(x))]_a^b$$
$$=F[g(b)]-F[g(a)]$$
$$=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

ដូចនេះ: | រូបមន្ត $\int_a^b f[g(x)]g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

10. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{d}{dx}[F(x)]=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right]=f(x)$

គេមាន $F(x)=\int_a^x f(t)dt$

គេតាង $F(t)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(t)$ នោះ $F'(t)=f(t)$

គេបាន $\frac{d}{dx}[F(x)]=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right]=\frac{d}{dx}[F(t)]_a^x=\frac{d}{dx}[F(x)-F(a)]=\frac{d}{dx}[F(x)]-0=F'(x)=f(x)$

ដូចនេះ: | $\frac{d}{dx}[F(x)]=\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right]=f(x)$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

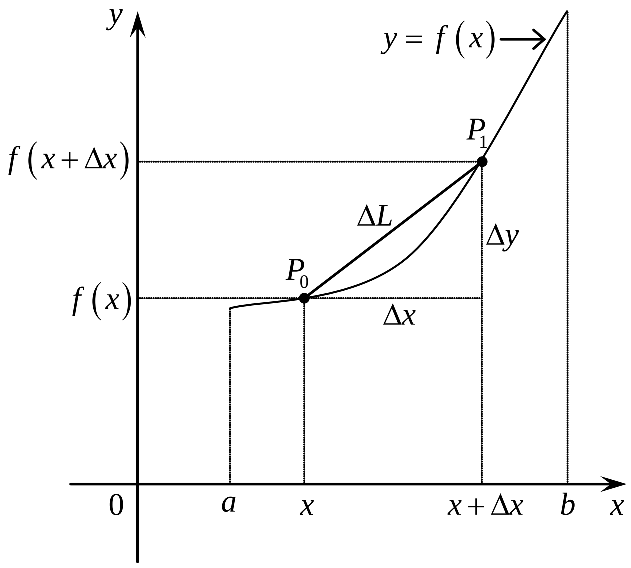
11. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា ប្រវែងធ្នូនៃក្រាបតាងអនុគមន៍** f **នៅចន្លោះបន្ទាត់ឈរ** $x=a$ **និង** $x=b$ **គឺ** $L=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$

គេមាន f ជាអនុគមន៍ជាប់ និងកំណត់ដោយ $y=f(x)$ និងមានក្រាប C

គេចែក $[a\,,b]$ ជា n ចំណែក

គេយក ចំណុច $P_0\left(x\,,\,f(x)\right)$ និង $P_1\left(x+\Delta x\,,\,f(x+\Delta x)\right)$

ដែល $a\le x<x+\Delta x\le b$



គេតាង $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ និងតាង $\Delta L=P_0P_1$

ចំពោះ: $\Delta L=P_0P_1$ គេបាន ៖ x

$$\Delta L=\sqrt{(x+\Delta x-x)^2+\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]^2}$$

$$=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$=\sqrt{(\Delta x)^2\left[1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]}$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x$$

គេបាន $dL=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx$

នាំឱ្យ ប្រវែងធ្នូ L នៃក្រាបតាង $y=f(x)$ នៅចន្លោះបន្ទាត់ឈរ $x=a$ និង $x=b$ គឺ

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx \quad ឬ \quad L=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\cdot dx$$

ដូចនេះ: | ប្រវែងធ្នូនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f នៅចន្លោះបន្ទាត់ឈរ $x=a$ និង $x=b$ គឺ $L=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$ | ។

12. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា** $\int_a^b\left|f(x)\right|dx\ge\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$

គេមាន f មានអាំងតេក្រាលលើចន្លោះ $[a\,,b]$

ដោយ $-\left|f(x)\right|\le f(x)\le\left|f(x)\right|$ (ធ្វើអាំងតេក្រាលកំណត់ពី a ទៅ b លើវិសមភាព)

គេបាន $\int_a^b-\left|f(x)\right|dx\le\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b\left|f(x)\right|dx$

$-\int_a^b\left|f(x)\right|dx\le\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b\left|f(x)\right|dx$ (តាមលក្ខណៈ: $-M\le x\le M \iff |x|\le M$)

នាំឱ្យ $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b\left|f(x)\right|dx$

ដូចនេះ: | ទំនាក់ទំនង $\int_a^b\left|f(x)\right|dx\ge\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

1. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី១ មេគុនថេរអង្គទី២ស្មើសូន្យ $y'+ay=0$ មានចម្លើយទូទៅ $y=Ae^{-ax}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ ។
2. បង្ហាញថា សមីការ $y'+ay=p(x)$, $p(x)\neq 0$ មានចម្លើយទូទៅ $y=y_c+y_p$ ដែល $y_c=ce^{-ax}$ និង $y_p=e^{-ax}\int e^{ax}p(x)dx$ ។
3. ស្រាយបញ្ជាក់ សមីការ $(E): y''+by'+cy=0$ ដែលសមីការសម្គាល់ $\lambda^2+by+c=0$ មានចម្លើយទូទៅគឺ ៖

   ក. $y=Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}$, A និង B ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន ក្នុងករណី $\Delta>0$ សមីការសម្គាល់មានឫស $\lambda_1=\alpha$, $\lambda_2=\beta$ ។

   ខ. $y=Axe^{\alpha x}+Be^{\alpha x}$, A និង B ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន ក្នុងករណី $\Delta=0$ សមីការសម្គាល់មានឫស $\lambda_1=\lambda_2=\alpha$ ។

   គ. $y=(C\cos\beta x+D\sin\beta x)e^{\alpha x}$, C និង D ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន ក្នុងករណី $\Delta<0$ សមីការសម្គាល់មានឫសជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា $\lambda_1=\alpha-i\beta$ និង $\lambda_2=\alpha+i\beta$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

1. **បង្ហាញថា សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'+ay=0$ មានចម្លើយទូទៅ $y=Ae^{-ax}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ**

គេមាន $y'+ay=0$

$$\frac{dy}{dx}=-ay \quad \text{ឬ} \quad dy=-aydx$$

$$\frac{dy}{y}=-adx \quad \text{(បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ)}$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int -adx$$

$$\ln|y|=-ax+c$$

$$|y|=e^{-ax+c}$$

$$y=\pm e^{c}\cdot e^{-ax}$$

$$y=Ae^{-ax} \quad , \; A=\pm e^{c}$$

ដូចនេះ | ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'+ay=0$ គឺ $y=Ae^{-ax}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

2. **បង្ហាញថា សមីការ $y'+ay=p(x)$, $p(x)\neq 0$ មានចម្លើយទូទៅ $y=y_c+y_p$**

គេមានសមីការ $y'+ay=0$ មានចម្លើយទូទៅ $y=Ae^{-ax}$

គេធ្វើបម្រែបម្រួលចំនួនថេរ A ទៅជា $A(x)$

គេបាន $y=A(x)e^{-ax}$

$$y'=A'(x)e^{-ax}+\left(e^{-ax}\right)'A(x)$$

$$=A'(x)e^{-ax}-aA(x)e^{-ax}$$

យកតម្លៃ $y=A(x)e^{-ax}$ និង $y'=A'(x)e^{-ax}-aA(x)e^{-ax}$ ជំនួសក្នុងសមីការ $y'+ay=p(x)$

គេបាន $A'(x)e^{-ax}-aA(x)e^{-ax}+aA(x)e^{-ax}=p(x)$

$$A'(x)e^{-ax}=p(x)$$

$$A'(x)=e^{ax}p(x)$$

$$\int A'(x)dx=\int e^{ax}p(x)dx+c$$

$$A(x)=\int e^{ax}p(x)dx+c$$

នាំឱ្យ $y=A(x)e^{-ax}$

$$=\left(\int e^{ax}p(x)dx+c\right)e^{-ax}$$

$$=e^{-ax}\int e^{ax}p(x)dx+ce^{-ax}$$

$=y_p+y_c$ ព្រោះគេឱ្យ $y_c=ce^{-ax}$ និង $y_p=e^{-ax}\int e^{ax}p(x)dx$

ដូចនេះ | សមីការ $y'+ay=p(x)$, $p(x)\neq 0$ មានចម្លើយទូទៅ $y=y_c+y_p$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

3. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $(E): y''+by'+cy=0$ មានចម្លើយទូទៅគឺ $y=Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}$ ក្នុងករណី $\Delta>0$

គេមាន $(E): y''+by'+cy=0$ មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2+by+c=0$ ដែលមានឫស $\lambda_1=\alpha$, $\lambda_2=\beta$

តាមវ្យែត ផលបូកឫស $\alpha+\beta=-b$ និងផលគុណឫស $\alpha\beta=c$

គេបាន $(E):\ y''-(\alpha+\beta)y'+(\alpha\beta)y=0$

$$y''-\alpha y'-\beta y'+\alpha\beta y=0$$

$$(y'-\alpha y)'-\beta(y'-\alpha y)=0$$

គេតាង $y'-\alpha y=Z$ នោះ $(y'-\alpha y)'=Z'$

គេបាន $Z'-\beta Z=0$ (ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១ អូម៉ូសែន)

$$\frac{dZ}{dx}=\beta Z \quad \text{ឬ} \quad \frac{dZ}{Z}=\beta dx$$ (បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ)

$$\int\frac{dZ}{Z}=\int\beta dx$$

$$\ln|Z|=\beta x+c$$

$$|Z|=e^{\beta x+c}$$

$$Z=\pm e^c\cdot e^{\beta x}=c_1e^{\beta x} \quad , \quad c_1=\pm e^c$$

នាំឱ្យ $y'-\alpha y=Z$ ទៅជា $y'-\alpha y=c_1e^{\beta x}$ (1) (ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១ មិនអូម៉ូសែន)

គេនឹងដោះស្រាយសមីការ $y'-\alpha y=0$ រួចហើយធ្វើបម្រែបម្រួលចំនួនថេរ

គេបាន $\frac{dy}{dx}=ay$ ឬ $dy=aydx$ ឬ $\frac{dy}{y}=adx$ (បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ)

$$\int\frac{dy}{y}=\int\alpha dx$$

$$\ln|y|=\alpha x+c$$

$$|y|=e^{\alpha x+c}$$

$$y=\pm e^c\cdot e^{\alpha x}=c_2e^{\alpha x} \quad , \quad c_2=\pm e^c$$

គេធ្វើបម្រែបម្រួលចំនួនថេរ c_2 ទៅជា $c_2(x)$

គេមាន $y=c_2(x)e^{\alpha x}$ (2) នោះ $y'=c_2'(x)e^{\alpha x}+(e^{\alpha x})'c_2(x)$

$$=c_2'(x)e^{\alpha x}+\alpha c_2(x)e^{\alpha x}$$

គេបាន $(1):\ c_2'(x)e^{\alpha x}+\alpha c_2(x)e^{\alpha x}-\alpha c_2(x)e^{\alpha x}=c_1e^{\beta x}$

$$c_2'(x)e^{\alpha x}=c_1e^{\beta x}$$

$$c_2'(x)=c_1e^{\beta x-\alpha x}$$ (បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ)

នាំឱ្យ $\int c_2'(x)dx=\int c_1e^{(\beta-\alpha)x}dx$ ឬ $c_2(x)=\frac{c_1}{\beta-\alpha}e^{(\beta-\alpha)x}+A$ ឬ $c_2(x)=Be^{(\beta-\alpha)x}+A$, $B=\frac{c_1}{\beta-\alpha}$

គេបាន $(2):\ y=\left[Be^{(\beta-\alpha)x}+A\right]e^{\alpha x}=Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}$ ដែល A និង B ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

ដូចនេះ **សមីការ $y''+by'+cy=0$ មានចម្លើយទូទៅគឺ $y=Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់** ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $(E): y''+by'+cy=0$ មានចម្លើយទូទៅគឺ $y=Axe^{\alpha x}+Be^{\alpha x}$ ក្នុងករណី $\Delta=0$

គេមាន $(E): y''+by'+cy=0$ មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2+by+c=0$ ដែលមានឫសឌុប $\lambda_1=\lambda_2=\alpha$

តាមវ្យែត ផលបូកឫស $\alpha+\alpha=-b$ និងផលគុណឫស $\alpha\alpha=c$

គេបាន $(E): \; y''-(\alpha+\alpha)y'+(\alpha\alpha)y=0$

$$y''-\alpha y'-\alpha y'+\alpha\alpha y=0$$

$$(y'-\alpha y)'-\alpha(y'-\alpha y)=0$$

គេតាង $y'-\alpha y=Z$ នោះ $(y'-\alpha y)'=Z'$

គេបាន $Z'-\alpha Z=0$ (ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១ អូម៉ូសែន)

$\frac{dZ}{dx}=\alpha Z$ ឬ $\frac{dZ}{Z}=\alpha dx$ (បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ)

$$\int\frac{dZ}{Z}=\int\alpha dx$$

$$\ln|Z|=\alpha x+c$$

$$|Z|=e^{\alpha x+c}$$

$$Z=\pm e^{c}\cdot e^{\alpha x}=Ae^{\alpha x} \quad , \quad A=\pm e^{c}$$

នាំឱ្យ $y'-\alpha y=Z$ ទៅជា $y'-\alpha y=Ae^{\alpha x}$ (1) (ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១ មិនអូម៉ូសែន)

គេនឹងដោះស្រាយសមីការ $y'-\alpha y=0$ រួចហើយធ្វើបម្រែបម្រួលចំនួនថេរ

គេបាន $\frac{dy}{dx}=ay$ ឬ $dy=aydx$ ឬ $\frac{dy}{y}=adx$ (បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ)

$$\int\frac{dy}{y}=\int\alpha dx$$

$$\ln|y|=\alpha x+c$$

$$|y|=e^{\alpha x+c}$$

$$y=\pm e^{c}\cdot e^{\alpha x}=c_1e^{\alpha x} \quad , \quad c_1=\pm e^{c}$$

គេធ្វើបម្រែបម្រួលចំនួនថេរ c_1 ទៅជា $c_1(x)$

គេមាន $y=c_1(x)e^{\alpha x}$ (2) នោះ $y'=c_1'(x)e^{\alpha x}+(e^{\alpha x})'c_1(x)$

$$=c_1'(x)e^{\alpha x}+\alpha c_1(x)e^{\alpha x}$$

គេបាន $(1): \; c_1'(x)e^{\alpha x}+\alpha c_1(x)e^{\alpha x}-\alpha c_1(x)e^{\alpha x}=Ae^{\alpha x}$

$$c_1'(x)e^{\alpha x}=Ae^{\alpha x}$$

$c_1'(x)=A$ (បំពាក់អាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ)

នាំឱ្យ $\int c_1'(x)dx=\int Adx$ ឬ $c_1(x)=Ax+B$ ដែល B ជាចំនួនថេរ

គេបាន $(2): \; y=(Ax+B)e^{\alpha x}=Axe^{\alpha x}+Be^{\alpha x}$ ដែល A និង B ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

ដូចនេះ: **សមីការ $y''+by'+cy=0$ មានចម្លើយទូទៅគឺ $y=Axe^{\alpha x}+Be^{\alpha x}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់** ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $(E): y''+by'+cy=0$ **មានចម្លើយទូទៅគឺ** $y=(C\cos\beta x+D\sin\beta x)e^{\alpha x}$

គេមាន $(E): y''+by'+cy=0$ មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2+by+c=0$

តាមវិធីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី២ សមីការសម្គាល់មានឫសពីរផ្សេងគ្នា λ_1 , λ_2 នោះគេបានចម្លើយទូទៅ

នៃសមីការ (E) គឺ : $y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}$ ដែល A និង B ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

គេជំនួស $\lambda_1=\alpha-i\beta$ និង $\lambda_2=\alpha+i\beta$

គេបាន $y=Ae^{(\alpha-i\beta)x}+Be^{(\alpha+i\beta)x}$

$=Ae^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x}+Be^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}$

$=\left(Ae^{-i\beta x}+Be^{i\beta x}\right)e^{\alpha x}$

តាមរូបមន្ត *Euler* : $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ នោះ $e^{i\beta x}=\cos\beta x+i\sin\beta x$

$e^{-ix}=\cos x-i\sin x$ នោះ $e^{-i\beta x}=\cos\beta x-i\sin\beta x$

នាំឱ្យ $y=\left[A(\cos\beta x-i\sin\beta x)+B(\cos\beta x+i\sin\beta x)\right]e^{\alpha x}$

$=\left[A\cos\beta x-iA\sin\beta x+B\cos\beta x+iB\sin\beta x\right]e^{\alpha x}$

$=\left[A\cos\beta x+B\cos\beta x+iB\sin\beta x-iA\sin\beta x\right]e^{\alpha x}$

$=\left[(A+B)\cos\beta x+i(B-A)\sin\beta x\right]e^{\alpha x}$

$=(C\cos\beta x+D\sin\beta x)e^{\alpha x}$

ដែលគេតាង $C=A+B$ និង $D=i(B-A)$ ឬ C និង D ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

ដូចនេះ | សមីការ $y''+by'+cy=0$ មានចម្លើយទូទៅគឺ $y=(C\cos\beta x+D\sin\beta x)e^{\alpha x}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ធរណីមាត្រក្នុងលំហ

1. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ ដូចខាងក្រោម ៖

បើ $\vec{u}$, $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ជាវ៉ិចទ័រនៅក្នុងលំហ និង c ជាចំនួនពិត នោះគេបាន ៖

ក. $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$

ខ. $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\times\vec{w})$

គ. $c(\vec{u}\times\vec{v})=(c\vec{u})\times\vec{v}=\vec{u}\times(c\vec{v})$

ឃ. $\vec{u}\times\vec{O}=\vec{O}\times\vec{u}=\vec{O}$

ង. $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{O}$

ច. $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

2. បើ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រមិនសូន្យ នៅក្នុងលំហ និង θ ជាមុំផ្គុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ នោះគេបាន ៖

ក. $\vec{u}\times\vec{v}$ អរតូកូណាល់ទៅនឹង $\vec{u}$ ផង និង អរតូកូណាល់ទៅនឹង $\vec{v}$ ផង ។

ខ. $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta$

គ. បើ $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ នោះ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែនឹងគ្នា ។

ឃ. $|\vec{u}\times\vec{v}|=$ ផ្ទៃក្រឡារបស់ប្រលេឡូក្រាម ដែលសង់លើវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

ង. $\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|=$ ផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ ដែលសង់លើវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

3. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើប្រលេឡូក្រាមសង់វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ហើយមុំ θ ជាមុំផ្គុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ នោះគេបាន ៖

ក. កម្ពស់នៃប្រលេឡូក្រាម ស្មើ $|\vec{v}|\cdot\sin\theta$ ។

ខ. ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម $S=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta=|\vec{u}\times\vec{v}|$ ។

4. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះវ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{i}$, $\vec{j}$ និង $\vec{k}$ គេបាន ៖

ក. $\vec{k}=\vec{i}\times\vec{j}$ ខ. $\vec{i}=\vec{j}\times\vec{k}$ គ. $\vec{j}=\vec{k}\times\vec{i}$ ។

5. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើគេមានបីវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$, $\vec{v}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$ និង $\vec{w}=w_1\vec{i}+w_2\vec{j}+w_3\vec{k}$ នោះគេបាន ៖

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$$ ។

6. ស្រាយបញ្ជាក់ថា មាឌ V របស់ប្រលេពីប៉ែតដែលសង់លើវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$, $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ គឺ ៖ $V=|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$ និង មាឌ W របស់តេត្រាអ៊ែតគឺ $W=\frac{1}{6}|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$ បានន័យថា យកមាឌរបស់ប្រលេពីប៉ែតចែកនឹង 6 ។

7. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហ កាត់តាមចំណុច $P(x_0 , y_0 , z_0)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(a , b , c)$ មានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ រួចទាញបញ្ជាក់ថា $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ ដែលគេហៅថា សមីការឆ្លុះ ។

8. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើប្លង់មួយកាត់តាមចំណុច $P(x_0\ ,\ y_0\ ,\ z_0)$ និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(a\ ,\ b\ ,\ c)$ នោះប្លង់នោះមានសមីការស្តង់ដា $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ ។

9. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការទូទៅនៃប្លង់គឺ $ax+by+cz+d=0$ បានពីពន្លាតសមីការស្តង់ដា $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ ដែល $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$ ។

10. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើមុំ θ ជាមុំផ្គុំរវាងប្លង់ពីរ α_1 និង α_2 ដែលមាន $\vec{n}_1$ និង $\vec{n}_2$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់រៀងគ្នា នោះគេបាន $\cos\theta=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$ ។

11. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើប្លង់ពីរមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់រៀងគ្នា $\vec{n}_1$ និង $\vec{n}_2$ នោះគេបាន ៖

ក. ប្លង់ទាំងពីរកែងគ្នា បើ $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$ ។

ខ. ប្លង់ទាំងពីរស្របគ្នា បើ $\vec{n}_1=k\vec{n}_2$ ដែល k ជាចំនួនថេរខុសពីសូន្យ ។

12. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើគេមានពីរចំណុច $P(x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1)$ និង $Q(x_2\ ,\ y_2\ ,\ z_2)$ ក្នុងលំហ នោះគេបានចម្ងាយពីរចំណុចនេះកំណត់ដោយ $d=PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ ។

13. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត $C(x_0\ ,\ y_0\ ,\ z_0)$ និងមានកាំ r កំណត់ដោយ $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ ។

14. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការទូទៅនៃស្វ៊ែ $x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+k=0$ ដែល $k=x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2$ ជាសមីការទូទៅបានពីពន្លាតសមីការស្តង់ដា $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ ។

15. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្ងាយពីចំណុច Q ទៅប្លង់ α ដែលចំណុច Q មិននៅក្នុងប្លង់ α កំណត់ដោយ $D=\dfrac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}|}{\vec{n}}$ ដែល P ជាចំណុចនៅក្នុងប្លង់ និង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ ។

16. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្ងាយពីចំណុច $Q(x_0\ ,\ y_0\ ,\ z_0)$ ទៅប្លង់ $\alpha :\ ax+by+cz+d=0$ កំណត់ដោយ $D=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ។

17. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្ងាយពីចំណុច Q ទៅបន្ទាត់ L ក្នុងលំហ កំណត់ដោយ $D=\dfrac{|\overrightarrow{PQ}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}$ ដែល $\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ L និង P ជាចំណុចមួយនៅលើបន្ទាត់ L ។

18. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្ងាយពីបន្ទាត់ L_1 ទៅបន្ទាត់ L_2 កំណត់ដោយ $d(L_1\ ,\ L_2)=\dfrac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\vec{u}_1\times\vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1\times\vec{u}_2|}$ ដែល $M_1\ ,\ M_2$ ជាចំណុចនៅលើបន្ទាត់ $L_1\ ,\ L_2$ រៀងគ្នា ហើយ $\vec{u}_1\ ,\ \vec{u}_2$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរៀងគ្នានៃបន្ទាត់ $L_1\ ,\ L_2$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន ធរណីមាត្រក្នុងលំហ

1. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ ដូចខាងក្រោម ៖

បើ $\vec{u}$, $\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ជាវ៉ិចទ័រនៅក្នុងលំហ និង c ជាចំនួនពិត នោះគេបាន ៖

ក. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈ $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$

គេតាង $\vec{u}=(u_1\,,u_2\,,u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1\,,v_2\,,v_3)$

គេបាន $$\vec{v}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ v_1 & v_2 & v_3\\ u_1 & u_2 & u_3\end{vmatrix}=(u_3v_2-u_2v_3)\vec{i}-(u_3v_1-u_1v_3)\vec{j}+(u_2v_1-u_1v_2)\vec{k}$$

ហើយ $$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$$

$$=-(u_3v_2-u_2v_3)\vec{i}+(u_3v_1-u_1v_3)\vec{j}-(u_2v_1-u_1v_2)\vec{k}$$

$$=-\left[(u_3v_2-u_2v_3)\vec{i}-(u_3v_1-u_1v_3)\vec{j}+(u_2v_1-u_1v_2)\vec{k}\right]$$

$$=-(\vec{v}\times\vec{u})$$

ដូចនេះ **លក្ខណៈ $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់** ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈ $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\times\vec{w})$

គេតាង $\vec{u}=(u_1\,,u_2\,,u_3)$, $\vec{v}=(v_1\,,v_2\,,v_3)$ និង $\vec{w}=(w_1\,,w_2\,,w_3)$

នាំឱ្យ $\vec{v}+\vec{w}=(v_1+w_1\,,v_2+w_2\,,v_3+w_3)$

គេបាន $$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$$

ហើយ $$\vec{u}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=(u_2w_3-u_3w_2)\vec{i}-(u_1w_3-u_3w_1)\vec{j}+(u_1w_2-u_2w_1)\vec{k}$$

គេបាន

$\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1+w_1 & v_2+w_2 & v_3+w_3\end{vmatrix}$$

$=\left[u_2(v_3+w_3)-u_3(v_2+w_2)\right]\vec{i}-\left[u_1(v_3+w_3)-u_3(v_1+w_1)\right]\vec{j}+\left[u_1(v_2+w_2)-u_2(v_1+w_1)\right]\vec{k}$

$=\left[u_2v_3+u_2w_3-u_3v_2-u_3w_2\right]\vec{i}-\left[u_1v_3+u_1w_3-u_3v_1-u_3w_1\right]\vec{j}+\left[u_1v_2+u_1w_2-u_2v_1-u_2w_1\right]\vec{k}$

$=\left[(u_2v_3-u_3v_2)+(u_2w_3-u_3w_2)\right]\vec{i}-\left[(u_1v_3-u_3v_1)+(u_1w_3-u_3w_1)\right]\vec{j}+\left[(u_1v_2-u_2v_1)+(u_1w_2-u_2w_1)\right]\vec{k}$

$=(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}+(u_2w_3-u_3w_2)\vec{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}-(u_1w_3-u_3w_1)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}+(u_1w_2-u_2w_1)\vec{k}$

$=\left[(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}\right]+\left[(u_2w_3-u_3w_2)\vec{i}-(u_1w_3-u_3w_1)\vec{j}+(u_1w_2-u_2w_1)\vec{k}\right]$

$=(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\times\vec{w})$

ដូចនេះ **លក្ខណៈ $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\times\vec{w})$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់** ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈ: $c(\vec{u}\times\vec{v})=(c\vec{u})\times\vec{v}=\vec{u}\times(c\vec{v})$

គេតាង $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

នាំឱ្យ $c\vec{u}=(cu_1,cu_2,cu_3)$ និង $c\vec{v}=(cv_1,cv_2,cv_3)$

គេបាន $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$

នោះ $c(\vec{u}\times\vec{v})=c\left[(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}\right]$

$=c(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-c(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}+c(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$

$=(cu_2v_3-cu_3v_2)\vec{i}-(cu_1v_3-cu_3v_1)\vec{j}+(cu_1v_2-cu_2v_1)\vec{k}\quad(1)$

ហើយ $(c\vec{u})\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ cu_1 & cu_2 & cu_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=(cu_2v_3-cu_3v_2)\vec{i}-(cu_1v_3-cu_3v_1)\vec{j}+(cu_1v_2-cu_2v_1)\vec{k}\quad(2)$

$\vec{u}\times(c\vec{v})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ cv_1 & cv_2 & cv_3\end{vmatrix}=(cu_2v_3-cu_3v_2)\vec{i}-(cu_1v_3-cu_3v_1)\vec{j}+(cu_1v_2-cu_2v_1)\vec{k}\quad(3)$

តាមរយៈ ទំនាក់ទំនង $(1),(2)$ និង (3) គេបាន $c(\vec{u}\times\vec{v})=(c\vec{u})\times\vec{v}=\vec{u}\times(c\vec{v})$

ដូចនេះ **លក្ខណៈ $c(\vec{u}\times\vec{v})=(c\vec{u})\times\vec{v}=\vec{u}\times(c\vec{v})$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់** ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈ $\vec{u}\times\vec{O}=\vec{O}\times\vec{u}=\vec{O}$

គេតាង $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ និង $\vec{O}=(0,0,0)$

គេបាន $$\vec{u}\times\vec{O}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\u_1&u_2&u_3\\0&0&0\end{vmatrix}=(u_2\cdot 0-u_3\cdot 0)\vec{i}-(u_1\cdot 0-u_3\cdot 0)\vec{j}+(u_1\cdot 0-u_2\cdot 0)\vec{k}=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}=\vec{O}\quad(1)$$

$$\vec{O}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&0\\u_1&u_2&u_3\end{vmatrix}=(0\cdot u_3-u_2\cdot 0)\vec{i}-(0\cdot u_3-u_1\cdot 0)\vec{j}+(0\cdot u_2-u_1\cdot 0)\vec{k}=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}=\vec{O}\quad(2)$$

តាមរយៈ ទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន $\vec{u}\times\vec{O}=\vec{O}\times\vec{u}=\vec{O}$

ដូចនេះ | លក្ខណៈ $\vec{u}\times\vec{O}=\vec{O}\times\vec{u}=\vec{O}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ង. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈ $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{O}$

គេតាង $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$

គេបាន $$\vec{u}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\u_1&u_2&u_3\\u_1&u_2&u_3\end{vmatrix}=(u_2u_3-u_2u_3)\vec{i}-(u_1u_3-u_1u_3)\vec{j}+(u_1u_2-u_1u_2)\vec{k}=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}=\vec{O}$$

ដូចនេះ | លក្ខណៈ $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{O}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ច. ស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

គេតាង $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ និង $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$

គេបាន $$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\v_1&v_2&v_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}=(v_2w_3-v_3w_2)\vec{i}-(v_1w_3-v_3w_1)\vec{j}+(v_1w_2-v_2w_1)\vec{k}$$

នាំឱ្យ $$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})&=u_1(v_2w_3-v_3w_2)-u_2(v_1w_3-v_3w_1)+u_3(v_1w_2-v_2w_1)\\&=u_1v_2w_3-u_1v_3w_2-u_2v_1w_3+u_2v_3w_1+u_3v_1w_2-u_3v_2w_1\\&=u_1v_2w_3+u_2v_3w_1+u_3v_1w_2-u_1v_3w_2-u_2v_1w_3-u_3v_2w_1\quad(1)\end{aligned}$$

ហើយ $$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}=(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$$

នាំឱ្យ $$\begin{aligned}(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}&=(u_2v_3-u_3v_2)w_1-(u_1v_3-u_3v_1)w_2+(u_1v_2-u_2v_1)w_3\\&=u_2v_3w_1-u_3v_2w_1-u_1v_3w_2+u_3v_1w_2+u_1v_2w_3-u_2v_1w_3\\&=u_1v_2w_3+u_2v_3w_1+u_3v_1w_2-u_1v_3w_2-u_2v_1w_3-u_3v_2w_1\quad(2)\end{aligned}$$

តាមរយៈ ទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

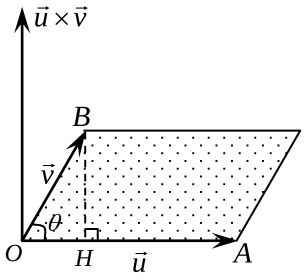
ដូចនេះ | លក្ខណៈ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

2. បើ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រមិនសូន្យ នៅក្នុងលំហ និង θ ជាមុំផ្គុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ នោះគេបាន ៖

ក. -ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\vec{u}\times\vec{v}$ អរត្តូកូណាល់ទៅនឹង $\vec{u}$

គេតាង $\vec{u}=(u_1\ ,u_2\ ,u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1\ ,v_2\ ,v_3)$

ដោយ $(\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{u} \Leftrightarrow (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}=0$



គេបាន $$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$$

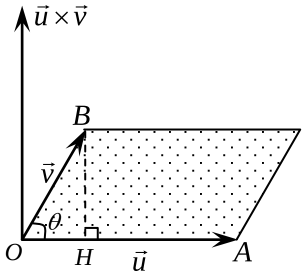
នាំឱ្យ $$\begin{aligned}(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}&=(u_2v_3-u_3v_2)u_1-(u_1v_3-u_3v_1)u_2+(u_1v_2-u_2v_1)u_3\\&=(u_2v_3-u_3v_2)u_1-(u_1v_3-u_3v_1)u_2+(u_1v_2-u_2v_1)u_3\\&=u_1u_2v_3-u_1u_3v_2-u_1u_2v_3+u_2u_3v_1+u_1u_3v_2-u_2u_3v_1\\&=0\end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\vec{u}\times\vec{v}$ អរត្តូកូណាល់ទៅនឹង $\vec{u}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\vec{u}\times\vec{v}$ អរត្តូកូណាល់ទៅនឹង $\vec{v}$

គេតាង $\vec{u}=(u_1\ ,u_2\ ,u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1\ ,v_2\ ,v_3)$

ដោយ $(\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{v} \Leftrightarrow (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v}=0$



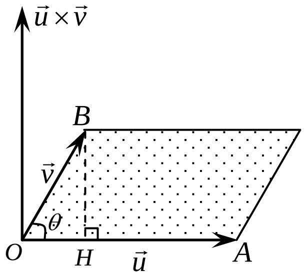
គេបាន $$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$$

នាំឱ្យ $$\begin{aligned}(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v}&=(u_2v_3-u_3v_2)v_1-(u_1v_3-u_3v_1)v_2+(u_1v_2-u_2v_1)v_3\\&=(u_2v_3-u_3v_2)v_1-(u_1v_3-u_3v_1)v_2+(u_1v_2-u_2v_1)v_3\\&=u_2v_1v_3-u_3v_1v_2-u_1v_2v_3+u_3v_1v_2+u_1v_2v_3-u_2v_1v_3\\&=0\end{aligned}$$

ដូចនេះ: $\vec{u}\times\vec{v}$ អរត្តូកូណាល់ទៅនឹង $\vec{v}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta$

គេតាង $\vec{u}=(u_1\ ,u_2\ ,u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1\ ,v_2\ ,v_3)$



គេបាន $$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$$

នាំឱ្យ $$\begin{aligned}|\vec{u}\times\vec{v}|&=\sqrt{(u_2v_3-u_3v_2)^2+\left[-(u_1v_3-u_3v_1)\right]^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2}\\&=\sqrt{(u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_1v_3-u_3v_1)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2}\end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀត $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ នោះ $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$ ព្រោះ $0<\theta<\pi$

នាំឱ្យ $\sin\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)^2}$ (ព្រោះ $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$ ដោយសារនិយមន័យ $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$)

$$=\sqrt{\frac{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2}}=\frac{1}{|\vec{u}||\vec{v}|}\sqrt{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}$$

គេបាន $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta=|\vec{u}||\vec{v}|\cdot\dfrac{1}{|\vec{u}||\vec{v}|}\sqrt{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}=\sqrt{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}$

ដោយ $|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$ នោះ $|\vec{u}|^2=u_1^2+u_2^2+u_3^2$

$|\vec{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$ នោះ $|\vec{v}|^2=v_1^2+v_2^2+v_3^2$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$

នាំឱ្យ

$$|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta$$
$$=\sqrt{\left(u_1^2+u_2^2+u_3^2\right)\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)-\left(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3\right)^2}$$
$$=\sqrt{u_1^2v_1^2+u_1^2v_2^2+u_1^2v_3^2+u_2^2v_1^2+u_2^2v_2^2+u_2^2v_3^2+u_3^2v_1^2+u_3^2v_2^2+u_3^2v_3^2-\left(u_1^2v_1^2+u_2^2v_2^2+u_3^2v_3^2+2u_1v_1u_2v_2+2u_1v_1u_3v_3+2u_2v_2u_3v_3\right)}$$
$$=\sqrt{u_1^2v_2^2+u_1^2v_3^2+u_2^2v_1^2+u_2^2v_3^2+u_3^2v_1^2+u_3^2v_2^2-2u_1v_1u_2v_2-2u_1v_1u_3v_3-2u_2v_2u_3v_3}$$
$$=\sqrt{\left(u_2^2v_3^2-2u_2v_2u_3v_3+u_3^2v_2^2\right)+\left(u_1^2v_3^2-2u_1v_1u_3v_3+u_3^2v_1^2\right)+\left(u_1^2v_2^2-2u_1v_1u_2v_2+u_2^2v_1^2\right)}$$
$$=\sqrt{\left(u_2v_3-u_3v_2\right)^2+\left(u_1v_3-u_3v_1\right)^2+\left(u_1v_2-u_2v_1\right)^2}$$
$$=|\vec{u}\times\vec{v}|$$

ដូចនេះ: $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ នោះ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែនឹងគ្នា

គេតាង $\vec{u}=(u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3)$ ដែល $\vec{u}\neq\vec{0}$, $\vec{v}\neq\vec{0}$

គេបាន $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}=(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}$

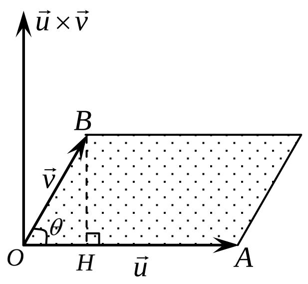
ដោយ $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ នោះ $(u_2v_3-u_3v_2)\vec{i}-(u_1v_3-u_3v_1)\vec{j}+(u_1v_2-u_2v_1)\vec{k}=0\vec{i}-0\vec{j}+0\vec{k}$

ទាញបាន $\begin{cases}u_2v_3-u_3v_2=0\\u_1v_3-u_3v_1=0\\u_1v_2-u_2v_1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_2v_3=u_3v_2\\u_1v_3=u_3v_1\\u_1v_2=u_2v_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{u_2}{v_2}=\dfrac{u_3}{v_3}\\\dfrac{u_1}{v_1}=\dfrac{u_3}{v_3}\\\dfrac{u_1}{v_1}=\dfrac{u_2}{v_2}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{u_1}{v_1}=\dfrac{u_2}{v_2}=\dfrac{u_3}{v_3}$

តាមរយៈ ទំនាក់ទំនង $\dfrac{u_1}{v_1}=\dfrac{u_2}{v_2}=\dfrac{u_3}{v_3}$ បញ្ជាក់ថា $\vec{u}\parallel\vec{v}$

ដូចនេះ: បើ $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ នោះ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែនឹងគ្នា ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $|\vec{u}\times\vec{v}|=$ ផ្ទៃក្រឡារបស់ប្រលេឡូក្រាម ដែលសង់លើវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$



គេមាន ផ្ទៃក្រឡារបស់ប្រលេឡូក្រាម $=OA\times BH$

ដោយ $OA=|\vec{u}|$ និង $OB=|\vec{v}|$

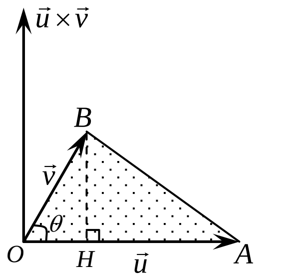
ក្នុងត្រីកោណកែង OHB មាន $BH=OB\cdot\sin\theta=|\vec{v}|\cdot\sin\theta$

នាំឱ្យ ផ្ទៃក្រឡារបស់ប្រលេឡូក្រាម $=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta=|\vec{u}\times\vec{v}|$

ព្រោះ $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta=|\vec{u}\times\vec{v}|$ (បានស្រាយរួចខាងលើ)

ដូចនេះ: $|\vec{u}\times\vec{v}|=$ ផ្ទៃក្រឡារបស់ប្រលេឡូក្រាម ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ង. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|=$ ផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ ដែលសង់លើវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$



គេមាន ផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ $=\frac{1}{2}\times OA\times BH$

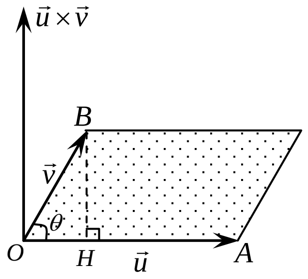
ដោយ $OA\times BH=$ ផ្ទៃក្រឡារបស់ប្រលេឡូក្រាម $=|\vec{u}\times\vec{v}|$

នាំឱ្យ ផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ $=\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$

ដូចនេះ: ផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ $=\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

3. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើប្រលេឡូក្រាមសង់វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ហើយមុំ θ ជាមុំផ្គុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ នោះគេបាន ៖**

ក. កម្ពស់នៃប្រលេឡូក្រាម ស្មើ $|\vec{v}|\cdot\sin\theta$



ក្នុងប្រលេឡូក្រាម មាន BH ជាកម្ពស់

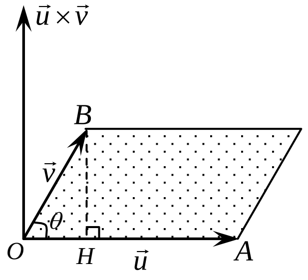
ក្នុងត្រីកោណកែង OHB មាន $\sin\theta=\frac{BH}{OB}$ នោះ $BH=OB\cdot\sin\theta$

ដោយ $OB=|\vec{v}|$

នាំឱ្យ កម្ពស់ប្រលេឡូក្រាម $BH=|\vec{v}|\cdot\sin\theta$

ដូចនេះ: កម្ពស់នៃប្រលេឡូក្រាម ស្មើ $|\vec{v}|\cdot\sin\theta$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ. ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម $S=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta=|\vec{u}\times\vec{v}|$



គេមាន ផ្ទៃក្រឡារបស់ប្រលេឡូក្រាម $S=OA\times BH$

ដោយ $OA=|\vec{u}|$ និង $BH=|\vec{v}|\cdot\sin\theta$

នាំឱ្យ ផ្ទៃក្រឡារបស់ប្រលេឡូក្រាម $S=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$

តែ $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$

នោះ ផ្ទៃក្រឡារបស់ប្រលេឡូក្រាម $S=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta=|\vec{u}\times\vec{v}|$

ដូចនេះ: ផ្ទៃក្រឡារបស់ប្រលេឡូក្រាម $S=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta=|\vec{u}\times\vec{v}|$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

4. ចំពោះវ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{i}$, $\vec{j}$ និង $\vec{k}$ គេបាន ៖

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\vec{k}=\vec{i}\times\vec{j}$

➢របៀបទី១

គេមាន $\vec{i}\times\vec{j}=|\vec{i}||\vec{j}|\sin\theta\cdot\vec{k}$

ដោយ $\vec{i}$, $\vec{j}$ និង $\vec{k}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតា ហើយកែងរៀងគ្នាទាំងបី

នាំឱ្យ $|\vec{i}|=1$, $|\vec{j}|=1$ និង $\theta=90°$

គេបាន $\vec{i}\times\vec{j}=1\cdot1\sin 90°\cdot\vec{k}=\vec{k}$

ដូចនេះ $\vec{k}=\vec{i}\times\vec{j}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➢របៀបទី២

គេមាន វ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$ និង $\vec{k}=(0,0,1)$

គេបាន $\vec{i}\times\vec{j}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=(0-0)\vec{i}-(0-0)\vec{j}+(1-0)\vec{k}=\vec{k}$

ដូចនេះ $\vec{k}=\vec{i}\times\vec{j}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\vec{i}=\vec{j}\times\vec{k}$

➢របៀបទី១

គេមាន $\vec{j}\times\vec{k}=|\vec{j}||\vec{k}|\sin\theta\cdot\vec{i}$

ដោយ $\vec{i}$, $\vec{j}$ និង $\vec{k}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតា ហើយកែងរៀងគ្នាទាំងបី

នាំឱ្យ $|\vec{j}|=1$, $|\vec{k}|=1$ និង $\theta=90°$

គេបាន $\vec{j}\times\vec{k}=1\cdot1\cdot\sin 90°\cdot\vec{i}=\vec{i}$

ដូចនេះ $\vec{i}=\vec{j}\times\vec{k}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➢របៀបទី២

គេមាន វ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$ និង $\vec{k}=(0,0,1)$

គេបាន $\vec{j}\times\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(1-0)\vec{i}-(0-0)\vec{j}+(0-0)\vec{k}=\vec{i}$

ដូចនេះ $\vec{i}=\vec{j}\times\vec{k}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\vec{j}=\vec{k}\times\vec{i}$

➤របៀបទី១

គេមាន $\vec{k}\times\vec{i}=|\vec{k}||\vec{i}|\sin\theta\cdot\vec{j}$

ដោយ $\vec{i}$, $\vec{j}$ និង $\vec{k}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតា ហើយកែងរៀងគ្នាទាំងបី

នាំឱ្យ $|\vec{k}|=1$, $|\vec{i}|=1$ និង $\theta=90°$

គេបាន $\vec{k}\times\vec{i}=1\cdot1\cdot\sin 90°\cdot\vec{j}=\vec{j}$

ដូចនេះ $\vec{j}=\vec{k}\times\vec{i}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

➤របៀបទី២

គេមាន វ៉ិចទ័រឯកតា $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$ និង $\vec{k}=(0,0,1)$

គេបាន $\vec{k}\times\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}=(0-0)\vec{i}-(0-1)\vec{j}+(0-0)\vec{k}=\vec{j}$

ដូចនេះ $\vec{j}=\vec{k}\times\vec{i}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

5. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា** $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}$

គេមាន $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$, $\vec{v}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$ និង $\vec{w}=w_1\vec{i}+w_2\vec{j}+w_3\vec{k}$

គេបាន $\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\v_1&v_2&v_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}=(v_2w_3-v_3w_2)\vec{i}-(v_1w_3-v_3w_1)\vec{j}+(v_1w_2-v_2w_1)\vec{k}$

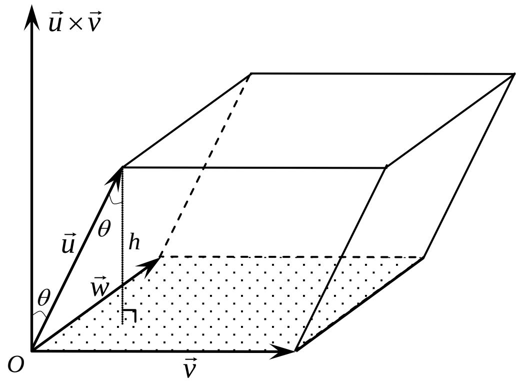
នាំឱ្យ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=u_1(v_2w_3-v_3w_2)-u_2(v_1w_3-v_3w_1)+u_3(v_1w_2-v_2w_1)\quad(1)$

ម្យ៉ាងទៀត $\begin{vmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}=u_1(v_2w_3-v_3w_2)-u_2(v_1w_3-v_3w_1)+u_3(v_1w_2-v_2w_1)\quad(2)$

តាមរយៈ ទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}$

ដូចនេះ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។ (គេហៅថា ផលគុណចម្រុះ)

6. ស្រាយបញ្ជាក់ថា មាឌប្រលេពីប៉ែត $V=\left|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\right|$



គេតាង θ ជាមុំផ្គុំរវាង $\vec{u}$ និង h (h ជាកម្ពស់ប្រលេពីប៉ែត)

គេមាន $V=$ ផ្ទៃបាត $\times$ កម្ពស់

$V=S\times h$

ដោយ ផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម $S=\left|\vec{v}\times\vec{w}\right|$

កម្ពស់ $h=\left|\vec{u}\right|\cdot\cos\theta$ ដែល $0^\circ<\theta<90^\circ$

គេបាន $V=\left|\vec{v}\times\vec{w}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|\cdot\cos\theta \quad (1)$

ម្យ៉ាងទៀត $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\times\vec{w}\right|\cdot\cos\theta \quad (2)$

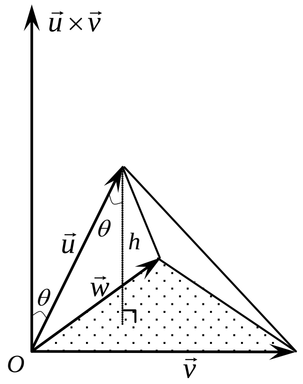
តាមរយៈ ទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន $V=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$

ក្នុងករណី $90^\circ<\theta<180^\circ$ នោះ $\cos\theta<0$ នាំឱ្យ $V=-\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$

សរុបមក $V=\left|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\right|$

ដូចនេះ: | មាឌប្រលេពីប៉ែត $V=\left|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\right|$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា មាឌតេត្រាអែត $W=\frac{1}{6}\left|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\right|$



គេមាន មាឌតេត្រាអ៊ែត $=\frac{1}{3}\times$ ផ្ទៃបាត $\times$ កម្ពស់

$W=\frac{1}{3}\times S\times h$

ដោយ ផ្ទៃបាតជាត្រីកោណ $S=\frac{1}{2}\left|\vec{v}\times\vec{w}\right|$

កម្ពស់ $h=\left|\vec{u}\right|\cdot\cos\theta$ ដែល $0^\circ<\theta<90^\circ$

គេបាន $W=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left|\vec{v}\times\vec{w}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|\cdot\cos\theta$

$=\frac{1}{6}\left|\vec{v}\times\vec{w}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|\cdot\cos\theta$

$=\frac{1}{6}\left[\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\right]$

ក្នុងករណី $90^\circ<\theta<180^\circ$ នោះ $\cos\theta<0$ នាំឱ្យ $W=\frac{1}{6}\left[-\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\right]$

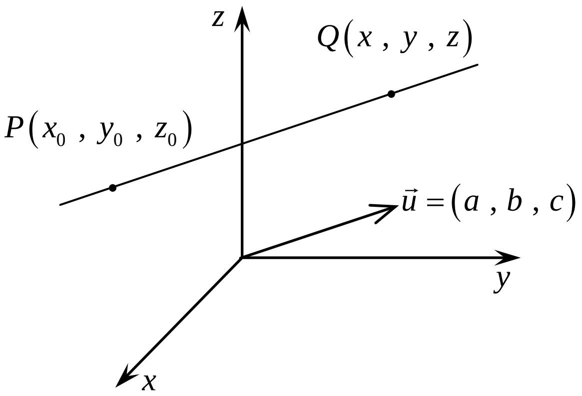
សរុបមក $W=\frac{1}{6}\left|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\right|$

ដូចនេះ: | មាឌប្រលេពីប៉ែត $W=\frac{1}{6}\left|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\right|$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ឃើញថា មាឌប្រលេពីប៉ែត $V=\left|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\right|$ រីឯមាឌតេត្រាអ៊ែត $W=\frac{1}{6}\left|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\right|$

សន្និដ្ឋាន មាឌតេត្រាអ៊ែត ស្មើមាឌប្រលេពីប៉ែតចែកនឹង 6 ។

7. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហ មានសមីការ ប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$



គេមាន បន្ទាត់កាត់តាមចំណុច $P(x_0 , y_0 , z_0)$

បន្ទាត់មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (a , b , c)$

គេយក $Q(x , y , z)$ ជាចំណុចនៅលើបន្ទាត់

គេបាន $\overrightarrow{PQ} \parallel \vec{u}$ នោះ $\overrightarrow{PQ} = t\vec{u}$, t ជាចំនួនពិត

នាំឱ្យ $(x - x_0 , y - y_0 , z - z_0) = t(a, b , c)$

$(x - x_0 , y - y_0 , z - z_0) = (ta, tb , tc)$

ទាញបាន $\begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

ដូចនេះ: សមីការបន្ទាត់ក្នុងលំហ មានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

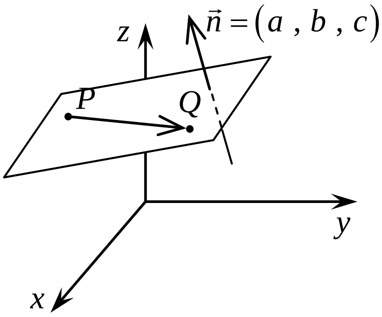
រួចទាញបញ្ជាក់ថា $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ ដែលគេហៅថា សមីការឆ្លុះ

គេមាន $\begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a} = t \\ \dfrac{y - y_0}{b} = t \\ \dfrac{z - z_0}{c} = t \end{cases}$

ទាញបាន $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c} = t$

ដូចនេះ: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ ដែលគេហៅថា សមីការឆ្លុះ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

8. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ប្លង់មានសមីការស្តង់ដា $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$



គេមាន ប្លង់កាត់តាមចំណុច $P(x_0 , y_0 , z_0)$

ប្លង់មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n} = (a , b , c)$

ចំពោះ: គ្រប់ចំណុច $Q(x , y , z)$ នៃប្លង់នោះ $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{n}$

គេបាន $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ ដែល $\overrightarrow{PQ} = (x - x_0 , y - y_0 , z - z_0)$

នាំឱ្យ $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

ដូចនេះ: ប្លង់មានសមីការស្តង់ដា $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

9. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការទូទៅនៃប្លង់គឺ** $ax+by+cz+d=0$

គេមាន $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$$ax-ax_0+by-by_0+cz-cz_0=0$$

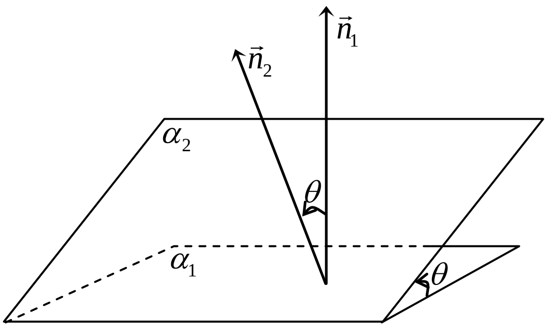
$$ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0$$

ដោយ $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$

នាំឱ្យ $ax+by+cz+d=0$

ដូចនេះ: ប្លង់ទូទៅនៃប្លង់មានរាង $ax+by+cz+d=0$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

10. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើមុំ θ ជាមុំផ្គុំរវាងប្លង់ពីរ នោះគេបាន** $\cos\theta=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$



គេមាន ប្លង់ពីរ α_1 និង α_2 មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់រៀងគ្នា $\vec{n}_1$ និង $\vec{n}_2$

ហើយ មុំផ្គុំរវាងប្លង់ α_1 និង α_2 ស្មើនឹងមុំផ្គុំរវាងវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}_1$ និង $\vec{n}_2$ (ព្រោះមុំទាំងពីរមានជ្រុងត្រូវគ្នាកែងរៀងគ្នា)

តាមនិយមន័យផលគុណស្កាលែនៃ $\vec{n}_1$ និង $\vec{n}_2$

គេបាន $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|\cdot\cos\theta$

ទាញបាន $\cos\theta=\dfrac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$

ម្យ៉ាងទៀត មុំផ្គុំរវាងប្លង់ពីរ មានពីរខុសគ្នា មានមួយស្រួច មួយទៀតទាល ដែលមុំទាំងពីរជាមុំបន្ថែមគ្នា បើគេតាងមុំស្រួចដោយ θ នោះ មុំទាលគឺ $\pi-\theta$ មានន័យថា បើស្គាល់មុំ θ គេក៏ស្គាល់មុំ $\pi-\theta$ ដែរ ។ ក្នុងការសិក្សា គេគិតតែមុំស្រួចប៉ុណ្ណោះ

នាំឱ្យ $\cos\theta>0$ គេសរសេរ $\cos\theta=\left|\dfrac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}\right|=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{\left||\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|\right|}=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{\left||\vec{n}_1|\right|\left||\vec{n}_2|\right|}=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$

ដូចនេះ: មុំផ្គុំរវាងប្លង់ពីរគឺ $\cos\theta=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

11. **បើប្លង់ពីរមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់រៀងគ្នា $\vec{n}_1$ និង $\vec{n}_2$ ៖**

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ប្លង់ទាំងពីរកែងគ្នា បើ $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$

គេមាន $\vec{n}_1$ និង $\vec{n}_2$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ពីរ ដែលផ្គុំបានមុំ θ

គេបាន $\cos\theta=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

បើប្លង់ទាំងពីរ កែងគ្នានោះ $\theta=90^\circ$

នាំឱ្យ $\cos 90^\circ=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} \Leftrightarrow \dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=0 \Leftrightarrow |\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|=0 \Rightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$ (ព្រោះ $|\vec{n}_1|\neq 0$, $|\vec{n}_2|\neq 0$)

ដូចនេះ: បើប្លង់ពីរកែងគ្នា នោះ $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ប្លង់ទាំងពីរស្របគ្នា បើ $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$

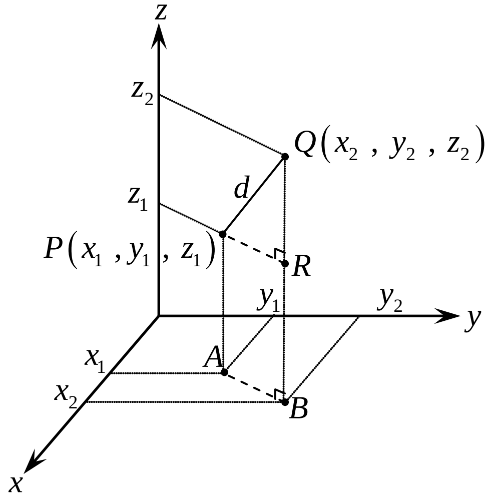
ដោយ $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$ នោះ $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$

នាំឱ្យ $\vec{n}_1$ កែងនឹងប្លង់ទី១ផង និង $\vec{n}_1$ កែងនឹងប្លង់ទី២ផង

មានន័យថា ប្លង់ពីរមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ដូចគ្នា នោះប្លង់ទាំងពីរជាប្លង់ស្របគ្នា

ដូចនេះ: | ប្លង់ពីរស្របគ្នា បើ $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

12. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្ងាយពីរចំណុច P និង Q កំណត់ដោយ $d = PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$



គេមាន ពីរចំណុច $P(x_1 , y_1 , z_1)$ និង $Q(x_2 , y_2 , z_2)$

ក្នុងត្រីកោណកែង PQR តាមពីតាគ័រ $PQ^2 = PR^2 + QR^2$

ដែល $PR^2 = AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

ហើយ $QR^2 = (z_2 - z_1)^2$

គេបាន $PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$

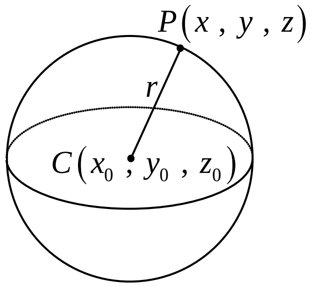
នាំឱ្យ $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

គេតាង $d = PQ$ (ព្រោះ $d = \text{distance} =$ ចម្ងាយ)

គេសរសេរ $d = PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

ដូចនេះ: | ចម្ងាយ $d = PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

13. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្វ៊ែកំណត់ដោយ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ ។



គេមាន ស្វ៊ែដែលមានផ្ចិត $C(x_0 , y_0 , z_0)$ និងកាំ r

គេតាង $P(x , y , z)$ ជាចំណុចទូទៅនៅលើស្វ៊ែ

តាមនិយមន័យស្វ៊ែ គេបាន $CP^2 = r^2$

តាមរូបមន្ត ចម្ងាយ $CP^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$

គេបាន $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$

ដូចនេះ: | សមីការស្វ៊ែ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

14. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការទូទៅនៃស្វ៊ែ $x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + k = 0$ ដែល $k = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2$

គេមាន $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$

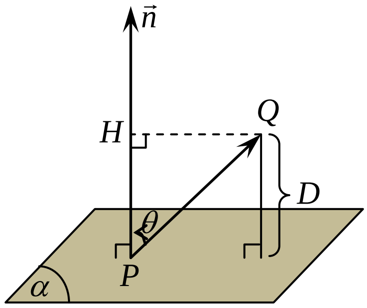
$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 + z^2 - 2z_0z + z_0^2 = r^2$

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2 = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + k = 0$ (ព្រោះ $k = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2$)

ដូចនេះ: | សមីការទូទៅនៃស្វ៊ែ $x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + k = 0$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

15. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្ងាយពីចំណុចទៅប្លង់កំណត់ដោយ $D=\dfrac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$



គេមាន ប្លង់ α មានចំណុច P និងចំណុច Q មិននៅក្នុងប្លង់ α

ហើយ $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់

គេតាង H ជាចំណោលកែងនៃ Q លើ $\vec{n}$

គេបាន $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}=|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\cos\theta$ (ជានិយមន័យផលគុណស្កាលែ)

ក្នុងត្រីកោណកែង PHQ មាន $\left|\overrightarrow{PH}\right|=\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\cos\theta$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}=|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{PH}\right|$ ឬ $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}=|\vec{n}|\cdot D$ (ព្រោះ $\left|\overrightarrow{PH}\right|=D$)

ទាញបាន $D=\dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}$ តែ D ជាចម្ងាយត្រូវតែមានតម្លៃវិជ្ជមាន នោះ $D=\dfrac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$

ដូចនេះ

ចម្ងាយពីចំណុចទៅប្លង់គឺ $D=\dfrac{\left\|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}\right\|}{\|\vec{n}\|}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

16. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្ងាយពីចំណុចទៅប្លង់កំណត់ដោយ $D=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

គេមាន ចំណុច $Q(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$ និងប្លង់ $\alpha:\ ax+by+cz+d=0$

តាមរយៈ ចម្ងាយពីចំណុចទៅប្លង់គឺ $D=\dfrac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$ (បានស្រាយរួចខាងលើ)

ដែលមាន $\vec{n}=(a\,,\,b\,,\,c)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ និង P ជាចំណុចនៅក្នុងប្លង់

គេយក $P(x\,,\,y\,,\,z)$ ជាចំណុចនៅក្នុងប្លង់

ចំពោះ $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}=a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)$

$=ax-ax_0+by-by_0+cz-cz_0$

$=ax+by+cz-ax_0-by_0-cz_0$

ដោយ $\alpha:\ ax+by+cz+d=0$ នាំឱ្យ $ax+by+cz=-d$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}=-d-ax_0-by_0-cz_0$

ហើយ $\vec{n}=(a\,,\,b\,,\,c)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ α នោះ $|\vec{n}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

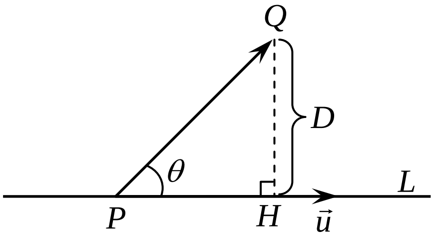
គេបាន $D=\dfrac{|-d-ax_0-by_0-cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ឬ $D=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ (ព្រោះថា $|-x|=|x|$, $\forall x$ ជាចំនួនពិត)

ដូចនេះ

ចម្ងាយពីចំណុចទៅប្លង់កំណត់ដោយ $D=\dfrac{\|ax_0+by_0+cz_0+d\|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

។

17. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្ងាយពីចំណុចទៅបន្ទាត់ក្នុងលំហកំណត់ដោយ** $D=\dfrac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\vec{u}\right|}{|\vec{u}|}$



គេមាន $\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស និង P ជាចំណុចមួយនៃបន្ទាត់ L

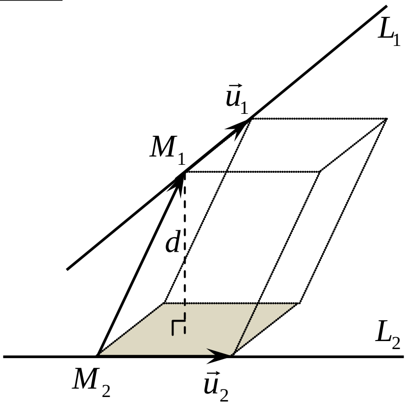
ក្នុងត្រីកោណកែង PHQ មាន $D=\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\sin\theta$

ដោយ $\left|\overrightarrow{PQ}\times\vec{u}\right|=|\vec{u}|\cdot\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\sin\theta$ (បានស្រាយរួចក្នុងលំហាត់លេខ 2)

ឬ $\left|\overrightarrow{PQ}\times\vec{u}\right|=|\vec{u}|\cdot D$ នាំឱ្យ $D=\dfrac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\vec{u}\right|}{|\vec{u}|}$

ដូចនេះ: | ចម្ងាយពីចំណុចទៅបន្ទាត់កំណត់ដោយ $D=\dfrac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\vec{u}\right|}{|\vec{u}|}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

18. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចម្ងាយពីបន្ទាត់ទៅបន្ទាត់កំណត់ដោយ** $d\left(L_1\,,\,L_2\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\left(\vec{u}_1\times\vec{u}_2\right)\right|}{\left|\vec{u}_1\times\vec{u}_2\right|}$



គេមាន $M_1\,,\,M_2$ ជាចំណុចនៅលើបន្ទាត់ $L_1\,,\,L_2$ រៀងគ្នា

ហើយ $\vec{u}_1\,,\,\vec{u}_2$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរៀងគ្នានៃបន្ទាត់ $L_1\,,\,L_2$

គ្រប់បន្ទាត់ $L_1\,,\,L_2$ ក្នុងលំហគេអាចសង់បាន ប្រលេពីប៉ែតបានដូចរូប:

ដោយ មាឌប្រលេពីប៉ែត $V=\left|\vec{u}_1\times\vec{u}_2\right|\cdot d$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត មាឌប្រលេពីប៉ែត $V=\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\left(\vec{u}_1\times\vec{u}_2\right)\right|$ (2)

តាមរយៈ (1) និង (2) គេបាន $\left|\vec{u}_1\times\vec{u}_2\right|\cdot d=\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\left(\vec{u}_1\times\vec{u}_2\right)\right|$

ទាញបាន $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\left(\vec{u}_1\times\vec{u}_2\right)\right|}{\left|\vec{u}_1\times\vec{u}_2\right|}$

ដូចនេះ: | ចម្ងាយរវាងពីរបន្ទាត់ក្នុងលំហកំណត់ដោយ $d\left(L_1\,,\,L_2\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\left(\vec{u}_1\times\vec{u}_2\right)\right|}{\left|\vec{u}_1\times\vec{u}_2\right|}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន កោនិច

ប៉ារ៉ាបូល

1. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលជាគល់តម្រុយ និងអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស គឺ $y^2 = 4px$ ហើយមានបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x = -p$ ។
2. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលជាគល់តម្រុយ និងអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអរដោនេ គឺ $x^2 = 4py$ ហើយមានបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $y = -p$ ។
3. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូល $V(h, k)$ និងអ័ក្សឆ្លុះស្របនឹងអ័ក្ស ៖

   ក. អរដោនេ គឺ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ ។

   ខ. អាប់ស៊ីស គឺ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ ។
4. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការទូទៅនៃប៉ារ៉ាបូលមានរាង ៖

   ក. $Ax^2 + Cx + Dy + E = 0$, $(A \neq 0)$ បើមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ ។

   ខ. $By^2 + Cx + Dy + E = 0$, $(B \neq 0)$ បើមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេក ។
5. ស្រាយបញ្ជាក់ថា លក្ខណៈអុបទិចនៃប៉ារ៉ាបូល ៖ បន្ទាត់ស្របនឹងអ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូល ដែលកាត់ប៉ារ៉ាបូលត្រង់ P និងបន្ទាត់ PF ផ្គុំជាមួយបន្ទាត់ប៉ះប៉ារ៉ាបូលត្រង់ P បានមុំស្មើគ្នា ។

អេលីប

6. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2 = b^2 + c^2$ នៃអេលីបដែលមាន a ជាចម្ងាយពីផ្ចិតទៅកំពូល , c ជាចម្ងាយពីផ្ចិតទៅកំណុំ , b ជាកន្លះអ័ក្សតូច។
7. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានផ្ចិតជាគល់តម្រុយគឺ ៖

   ក. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ បើមានអ័ក្សធំ ជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

   ខ. $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ បើមានអ័ក្សធំ ជាអ័ក្សអរដោនេ ។
8. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានផ្ចិត (h, k) ៖

   ក. $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ បើមានអ័ក្សធំ ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

   ខ. $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ បើមានអ័ក្សធំ ស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ ។
9. ស្រាយបញ្ជាក់ថា អេលីបមានសមីការទូទៅ $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ ដែល $A \cdot B > 0$ និង $A \neq B$ បានពីសម្រួលរាងពីសមីការស្តង់ដា ។

អ៊ីពែបូល

10. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិតជាគល់តម្រុយគឺ (គេកំណត់យក $b^2 = c^2 - a^2$) ៖

    ក. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ បើមានអ័ក្សទទឹង ជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស និងមានសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = \pm \frac{b}{a} x$ ។

    ខ. $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ បើមានអ័ក្សទទឹង ជាអ័ក្សអរដោនេ និងមានសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = \pm \frac{a}{b} x$ ។

11. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិត $(h\,,\,k)$ ៖

ក. $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ បើមានអ័ក្សទទឹង ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស និងមានសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=k\pm\frac{b}{a}(x-h)$ ។

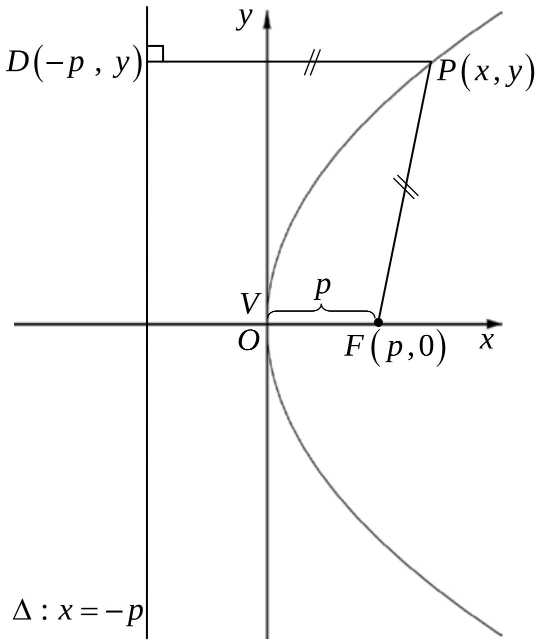
ខ. $\frac{(y-h)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ បើមានអ័ក្សទទឹង ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស និងមានសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=k\pm\frac{a}{b}(x-h)$ ។

12. ស្រាយបញ្ជាក់ថា អ៊ីពែបូលមានសមីការទូទៅ $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ ដែល $AB<0$ បានពីសម្រួលរាងសមីការស្តង់ដា ។

ការស្រាយបញ្ជាក់លើមេរៀន កោនិច

ប៉ារ៉ាបូល

1. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលជាគល់តម្រុយ និងអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស គឺ $y^2=4px$ ហើយមានបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x=-p$**



ឧបមាថា ប៉ារ៉ាបូលមានកំពូល V ជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ និង កំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស

បើពីកំពូល V ទៅកំណុំ F មានចម្ងាយ p ឯកតា នោះ $F(p,0)$

និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស Δ មានសមីការ $x=-p$

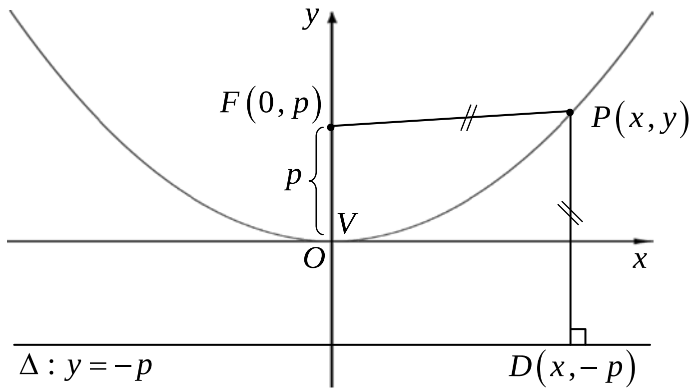
តាង $P(x,y)$ ជាចំណុចមួយស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល និង D ជាចំណុចមួយដែលមានកូអរដោនេ $(-p\,,y)$ តាមនិយមន័យប៉ារ៉ាបូលគេបាន ៖

$$PF=PD$$
$$\sqrt{(p-x)^2+(0-y)^2}=\sqrt{(x+p)^2+(y-y)^2}$$
$$(p-x)^2+(0-y)^2=(x+p)^2+(y-y)^2$$
$$p^2-2px+x^2+y^2=x^2+2px+p^2$$
$$y^2=4px$$

ដូចនេះ ប៉ារ៉ាបូលមានកំពូលជាគល់អ័ក្ស និងអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស មានសមីការស្តង់ដា $y^2=4px$ ។

2. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំពូលជាគល់តម្រុយ និងអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអរដោនេ គឺ $x^2=4py$ ហើយមានបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $y=-p$**

ឧបមាថា ប៉ារ៉ាបូលមានកំពូល V ជាគល់អ័ក្សកូអរដោនេ និងកំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ



បើពីកំពូល V ទៅកំណុំ F មានចម្ងាយ p ឯកតា នោះ: $F(0,p)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស Δ មានសមីការ $y=-p$

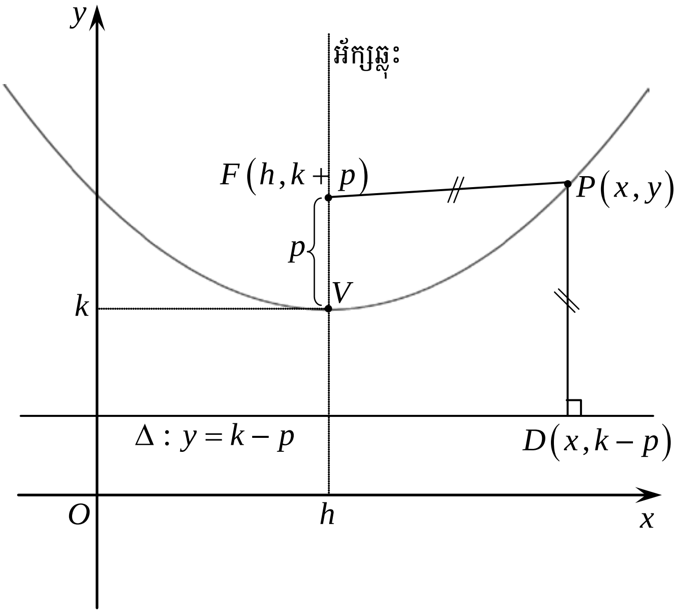
តាង $P(x,y)$ ជាចំណុចមួយស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល និង D ជាចំណុចមួយដែលមានកូអរដោនេ $(x\,,-p)$ តាមនិយមន័យប៉ារ៉ាបូលគេបាន ៖

$$PF=PD$$
$$\sqrt{(0-x)^2+(p-y)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(-p-y)^2}$$
$$(0-x)^2+(p-y)^2=(x-x)^2+(-p-y)^2$$
$$x^2+p^2-2py+y^2=p^2+2py+y^2$$
$$x^2=4py$$

ដូចនេះ ប៉ារ៉ាបូលមានកំពូលជាគល់អ័ក្ស និងអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស មានសមីការស្តង់ដា $x^2=4py$ ។

3. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្តង់ដាប៉ារ៉ាបូលមានកំពូល $V(h,k)$ និងអ័ក្សឆ្លុះស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេ គឺ $(x-h)^2=4p(y-k)$

គេមាន កំពូល $V(h,k)$ អ័ក្សឆ្លុះស្របអ័ក្ស $y'y$ និង p ជាចម្ងាយពីកំពូលទៅកំណុំ ឬពីកំពូលទៅបន្ទាត់ប្រាប់ទិស នាំឱ្យ កំណុំមានកូអរដោនេ $F(h,k+p)$



យក $P(x,y)$ ជាចំណុចនៅលើប៉ារ៉ាបូល និង D នៅលើបន្ទាត់ប្រាប់ទិស ដែលមានកូអរដោនេ $(x,k-p)$

តាមនិយមន័យប៉ារ៉ាបូលគេបាន៖ $PF=PD$ ឬ $PF^2=PD^2$

ដោយ

$$PF=\sqrt{(x-h)^2+[y-(k+p)]^2}$$

$$PF^2=(x-h)^2+y^2-2y(k+p)+(k+p)^2$$

$$=(x-h)^2+y^2-2yk-2yp+k^2+2kp+p^2$$

$$PD=\sqrt{(x-x)^2+[(k-p)-y]^2}$$

$$PD^2=(k-p)^2-2(k-p)y+y^2$$

$$=k^2-2kp+p^2-2yk+2yp+y^2$$

គេបាន $(x-h)^2+y^2-2yk-2yp+k^2+2kp+p^2=k^2-2kp+p^2-2yk+2yp+y^2$

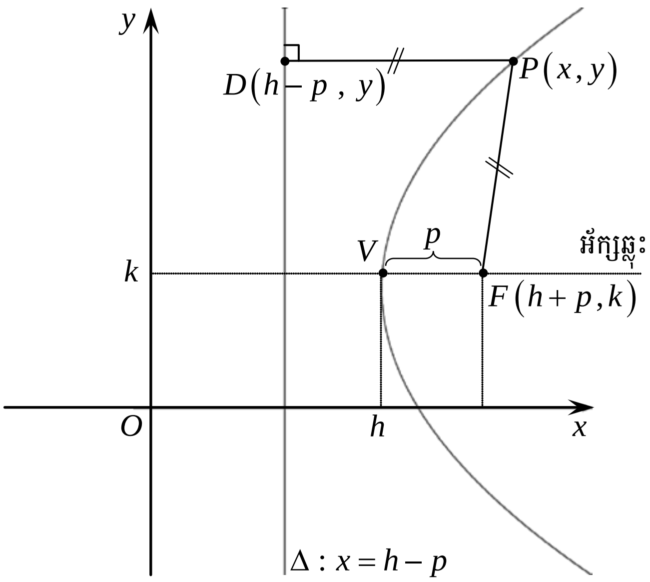
$$(x-h)^2=-4kp+4yp$$

$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

ដូចនេះ | សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល មានកំពូល $V(h,k)$ អ័ក្សឆ្លុះឈរ គឺ $(x-h)^2=4p(y-k)$ | ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្តង់ដាប៉ារ៉ាបូលមានកំពូល $V(h,k)$ និងអ័ក្សឆ្លុះស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសគឺ $(y-k)^2=4p(x-h)$

គេមាន កំពូល $V(h,k)$ អ័ក្សឆ្លុះស្របអ័ក្ស $x'x$ និង p ជាចម្ងាយពីកំពូលទៅកំណុំ ឬពីកំពូលទៅបន្ទាត់ប្រាប់ទិស នាំឱ្យ កំណុំមានកូអរដោនេ $F(h+p,k)$



យក $P(x,y)$ ជាចំណុចនៅលើប៉ារ៉ាបូល និង D នៅលើបន្ទាត់ប្រាប់ទិស ដែលមានកូអរដោនេ $(h-p,k)$

តាមនិយមន័យប៉ារ៉ាបូលគេបាន៖ $PF=PD$ ឬ $PF^2=PD^2$

ដោយ

$$FP=\sqrt{[x-(h+p)]^2+(y-k)^2}$$

$$FP^2=x^2-2x(h+p)+(h+p)^2+(y-k)^2$$

$$=x^2-2xh-2xp+h^2+2hp+p^2+(y-k)^2$$

$PD = \sqrt{\left[x-(h-p)\right]^2+(y-y)^2}$

$PD^2 = x^2-2x(h-p)+(h-p)^2$

$= x^2-2xh+2xp+h^2-2hp+p^2$

គេបាន $x^2-2xh-2xp+h^2+2hp+p^2+(y-k)^2 = x^2-2xh+2xp+h^2-2hp+p^2$

$$-2xp+2hp+(y-k)^2 = 2xp-2hp$$

$$(y-k)^2 = 4xp-4hp$$

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

ដូចនេះ | សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល មានកំពូល $V(h,k)$ អ័ក្សឆ្លុះដេក គឺ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ | ។

4. **ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការទូទៅនៃប៉ារ៉ាបូលមានរាង $Ax^2+Cx+Dy+E=0$, $(A\neq 0)$ បើមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ**

គេមានសមីការស្តង់ដាដែលមានអ័ក្សឆ្លុះឈរគឺ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

គេពន្លាតបាន ៖

$$x^2-2xh+h^2 = 4py-4pk$$

$$x^2-2xh+h^2-4py+4pk=0$$

$$x^2-2hx-4py+h^2+4pk=0$$

ដើម្បីឱ្យវាទូទៅ គេតាង B ជាមេគុណ x^2 , $C=-2h$, $D=-4p$ និង $E=h^2+4pk$

នាំឱ្យគេបានសមីការទូទៅនៃប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះឈរគឺ $Ax^2+Cx+Dy+E=0$, $(A\neq 0)$

ដូចនេះ | សមីការទូទៅនៃប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរមានរាង $Ax^2+Cx+Dy+E=0$, $(A\neq 0)$ | ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការទូទៅនៃប៉ារ៉ាបូលមានរាង $By^2+Cx+Dy+E=0$, $(B\neq 0)$ បើមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សដេក

គេមានសមីការស្តង់ដាដែលមានអ័ក្សឆ្លុះឈរគឺ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

គេបានពន្លាតបាន ៖

$$y^2-2ky+k^2 = 4px-4ph$$

$$y^2-2ky+k^2-4px+4ph =$$

$$y^2-4px-2ky+k^2+4ph=0$$

ដើម្បីឱ្យវាទូទៅ គេតាង B ជាមេគុណ y^2 , $C=-4p$, $D=-2k$ និង $E=k^2+4ph$

នាំឱ្យគេបានសមីការទូទៅនៃប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះឈរគឺ $Ax^2+Cx+Dy+E=0$, $(A\neq 0)$

ដូចនេះ | សមីការទូទៅនៃប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរមានរាង $By^2+Cx+Dy+E=0$, $(B\neq 0)$ | ។

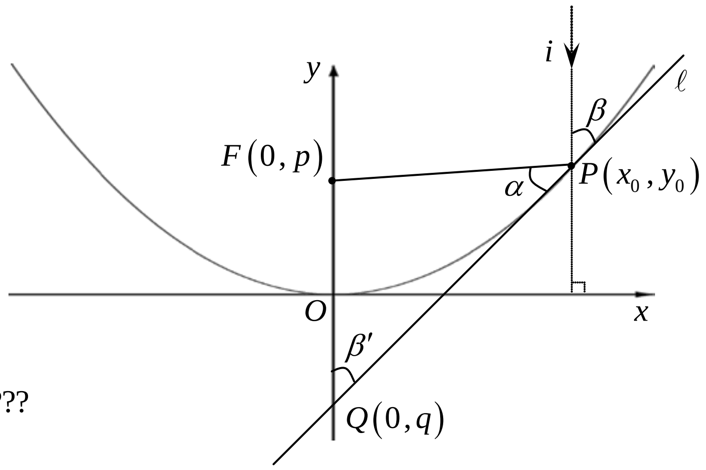
សម្គាល់ : ជាធម្មតាគេច្រើនឱ្យយើងបំលែងពីសមីការទូទៅនៃប៉ារ៉ាបូល ឱ្យទៅជាសមីការស្តង់ដា ។
សមីការស្តង់ដា ជាសមីការដែលគេងាយមើលធាតុពិសេសនៃប៉ារ៉ាបូល ដូចជា កំពូល កំណុំ អ័ក្សឆ្លុះ បន្ទាត់ប្រាប់ទិស ។
កញ្ចក់រាងប៉ារ៉ាបូល ក៏មានលក្ខណៈចាំងផ្លាតដូចកញ្ចក់ប្លង់ដែរ (សូមមើលសម្រាយបញ្ជាក់ខាងក្រោម) ។

5. ស្រាយបញ្ជាក់ លក្ខណៈអុបទិចនៃប៉ារ៉ាបូល ៖ បន្ទាត់ស្របនឹងអ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូល ដែលកាត់ប៉ារ៉ាបូលត្រង់ P និងបន្ទាត់ PF ផ្គុំជាមួយបន្ទាត់ប៉ះប៉ារ៉ាបូលត្រង់ P បានមុំស្មើគ្នា

ឧបមាថា គេមានប៉ារ៉ាបូល $x^2=4py$

គូសបន្ទាត់ (ℓ) ប៉ះប៉ារ៉ាបូលត្រង់ $P(x_0\ ,\ y_0)$ ហើយ

កាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $Q(0,q)$



តាង α ជាមុំផ្គុំរវាង FP និងបន្ទាត់ (ℓ)

β ជាមុំផ្គុំរវាង បន្ទាត់ (ℓ) និងបន្ទាត់ឈរស្របនឹងអ័ក្សឆ្លុះ

β' ជាមុំផ្គុំរវាងអ័ក្សអរដោនេ និងបន្ទាត់ (ℓ)

គេបាន $\beta=\beta'$ (ជាមុំត្រូវគ្នា)

គេនឹងស្រាយថា មុំចំណាំងប៉ះស្មើនឹងមុំចំណាំងផ្លាត គឺ $\beta=\alpha$???

គេមាន ប៉ារ៉ាបូល $x^2=4py$ នោះ $y=\dfrac{x^2}{4p}$ នាំឱ្យ $y'=\dfrac{2x}{4p}$ ឬ $y'=\dfrac{x}{2p}$ ហើយម្យ៉ាងទៀត $y_0=\dfrac{x_0^2}{4p}$

នាំឱ្យ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះប៉ារ៉ាបូលត្រង់ $P(x_0\ ,\ y_0)$ គឺ $y'(x_0)=\dfrac{x_0}{2p}$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$

ដោយ បន្ទាត់ប៉ះកាត់តាម $Q(0\ ,\ q)$ គេបាន ៖ $q=\dfrac{x_0}{2p}(0-x_0)+y_0$ ឬ $q=-\dfrac{x_0^2}{2p}+y_0=-\dfrac{x_0^2}{2p}+\dfrac{x_0^2}{4p}=-\dfrac{x_0^2}{4p}$

$$QF=\sqrt{(0-0)^2+(p-q)^2}=\sqrt{(p-q)^2}=p-q=p-\left(-\frac{x_0^2}{4p}\right)=p+\frac{x_0^2}{4p}$$

$$FP=\sqrt{(x_0-0)^2+(y_0-p)^2}=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{x_0^2}{4p}-p\right)^2}$$

$$=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{x_0^2}{4p}\right)^2-2\frac{x_0^2}{4p}\cdot p+p^2}=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{x_0^2}{4p}\right)^2-\frac{x_0^2}{2}+p^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{x_0^2}{4p}\right)^2+\frac{x_0^2}{2}+p^2}=\sqrt{\left(\frac{x_0^2}{4p}\right)^2+2\cdot\frac{x_0^2}{4p}\cdot p+p^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{x_0^2}{4p}+p\right)^2}=\frac{x_0^2}{4p}+p$$

ឃើញថា ក្នុងត្រីកោណ FPQ មាន $QF=FP=\dfrac{x_0^2}{4p}+p$ នាំឱ្យវាជាត្រីកោណសមបាត វិបាក មុំបាត $\alpha=\beta'$ ឬ $\alpha=\beta$

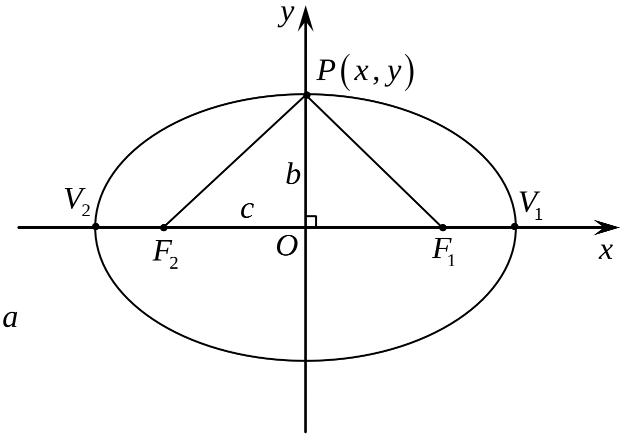
ដូចនេះ | មុំចាំងប៉ះក្នុងប៉ារ៉ាបូល ស្មើនឹងមុំចាំងផ្លាត ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

សន្និដ្ឋាន : គ្រប់កាំពន្លឺស្របនឹងអ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូល ដែលមកប៉ះនឹងប៉ារ៉ាបូល ចាំងផ្លាតទៅចំណុចតែមួយគឺកំណុំនៃប៉ារ៉ាបូល ។

អេលីប

6. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2 = b^2 + c^2$ នៃអេលីបដែលមាន a ជាចម្ងាយពីផ្ចិតទៅកំពូល , c ជាចម្ងាយពីផ្ចិតទៅកំណុំ , b កន្លះអ័ក្សតូច**

ឧបមាថា គេមានអេលីបដែលមាន ផ្ចិត $O(0,0)$ និង P នៅលើអេលីប



ក្នុងត្រីកោណកែង POF_1 តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ

គេបាន $(PF_2)^2 = (OP)^2 + (OF_2)^2$ ឬ $(PF_2)^2 = b^2 + c^2 \quad (1)$

ក្នុងត្រីកោណសមបាត PF_1F_2 មាន $PF_1 = PF_2$ (ព្រោះ P ជាចំណុចស្ថិតលើមេដ្យាទ័រនៃ $[F_1F_2]$)

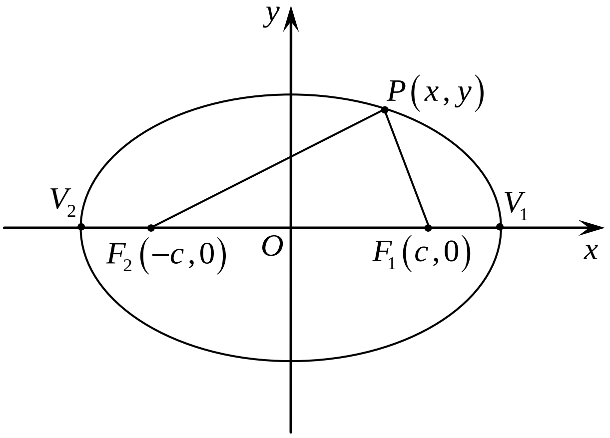
តាមនិយមន័យអេលីប $PF_1 + PF_2 = 2a$ ឬ $2PF_2 = 2a$ ឬ $PF_2 = a$

ជំនួស $PF_2 = a$ ក្នុង (1) គេបាន $a^2 = b^2 + c^2$

ដូចនេះ | ក្នុងអេលីប $a^2 = b^2 + c^2$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ | ។

7. **ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ជាសមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានផ្ចិតជាគល់តម្រុយ និងអ័ក្សធំ ជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស**

ឧបមាថា គេមានអេលីបផ្ចិត $O(0,0)$ ជាគល់តម្រុយ និងអ័ក្សធំ នៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។ យក $P(x,y)$ ជាចំណុចនៅលើអេលីប



តាមនិយមន័យអេលីប គេបាន ៖ $F_2P + PF_1 = 2a$

ដោយ $F_2P = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}$

$PF_1 = \sqrt{(c-x)^2 + (0-y)^2} = \sqrt{c^2 - 2xc + x^2 + y^2}$

គេបាន៖

$$\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} + \sqrt{c^2 - 2xc + x^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} = 2a - \sqrt{c^2 - 2xc + x^2 + y^2}$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{c^2 - 2xc + x^2 + y^2} + c^2 - 2xc + x^2 + y^2$$

$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{c^2 - 2xc + x^2 + y^2}$$

$$a\sqrt{c^2 - 2xc + x^2 + y^2} = a^2 - xc$$

$$a^2\left(c^2 - 2xc + x^2 + y^2\right) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2c^2 - 2a^2xc + a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2c^2 + a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

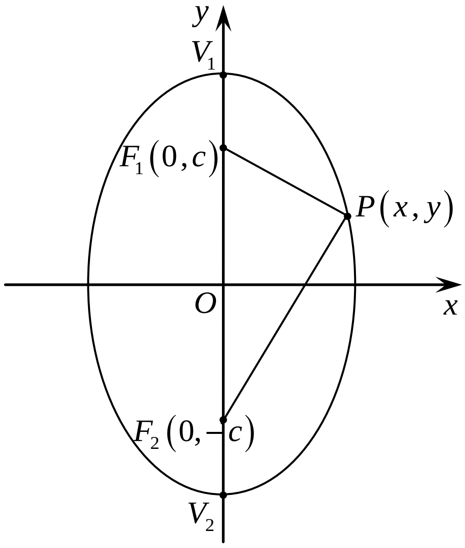
$$x^2\left(a^2 - c^2\right) + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right) \quad , \quad b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad (1)$$

ចែកអង្គទាំងពីរនៃ (1) នឹង a^2b^2 គេបាន $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ដូចនេះ | សមីការអេលីបមានផ្ចិតជាគល់តម្រុយ និងអ័ក្សធំនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីសគឺ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ | ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ ជាសមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានផ្ចិតជាគល់តម្រុយ និងអ័ក្សធំ ជាអ័ក្សអរដោនេ



ឧបមាថា គេមានអេលីបផ្ចិត $O(0,0)$ ជាគល់តម្រុយ និងអ័ក្សធំ នៅលើអ័ក្សអរដោនេ ។ យក $P(x,y)$ ជាចំណុចនៅលើអេលីប

តាមនិយមន័យអេលីប គេបាន ៖ $F_1P+PF_2=2a$

ដោយ $F_1P=\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}=\sqrt{x^2+y^2-2cy+c^2}$

$F_2P=\sqrt{(x-0)^2+(y+c)^2}=\sqrt{x^2+y^2+2cy+c^2}$

គេបាន៖

$$\sqrt{x^2+y^2+2cy+c^2}+\sqrt{x^2+y^2-2cy+c^2}=2a$$
$$\sqrt{x^2+y^2+2cy+c^2}=2a-\sqrt{x^2+y^2-2cy+c^2}$$
$$x^2+y^2+2cy+c^2=4a^2-4a\sqrt{x^2+y^2-2cy+c^2}+x^2+y^2-2cy+c^2$$
$$4a\sqrt{x^2+y^2-2cy+c^2}=4a^2-4cy$$
$$a\sqrt{x^2+y^2-2cy+c^2}=a^2-cy$$
$$a^2\left(x^2+y^2-2cy+c^2\right)=a^4-2a^2cy+c^2y^2$$
$$a^2x^2+a^2y^2+a^2c^2=a^4+c^2y^2$$
$$a^2x^2+a^2y^2-c^2y^2=a^4-a^2c^2$$
$$a^2x^2+\left(a^2-c^2\right)y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)\quad,\quad b^2=a^2-c^2$$
$$a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2\quad(1)$$

ចែកអង្គទាំងពីរនៃ (1) នឹង a^2b^2 គេបាន $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

ដូចនេះ: | សមីការអេលីបមានផ្ចិតជាគល់តម្រុយ និងអ័ក្សធំនៅលើអ័ក្សអរដោនេគឺ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ | ។

8. ➤ **របៀបទី ១** : តាមបំលែងកិល

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្តង់ដានៃអេលីប ផ្ចិត (h,k) និងអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសគឺ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

គេធ្វើបំលែងកិលអេលីប $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ពីផ្ចិត $O(0,0)$ ទៅជាផ្ចិត $I(h,k)$ ដោយ ៖

-រំកិល h ឯកតាស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស បើ $h>0$ រំកិលទៅខាងស្តាំ តែបើ $h<0$ រំកិលទៅខាងឆ្វេង ។

-រំកិល k ឯកតាស្របអ័ក្សអរដោនេ បើ $k>0$ រំកិលទៅខាងលើ តែបើ $k<0$ រំកិលទៅខាងក្រោម ។

ដូចនេះ: | សមីការស្តង់ដានៃអេលីប ផ្ចិត (h,k) និងអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសគឺ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ | ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្តង់ដានៃអេលីប ផ្ចិត $(h\,,\,k)$ និងអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេគឺ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

គេធ្វើបំលែងកិលអេលីប $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ ពីផ្ចិត $O(0\,,\,0)$ ទៅជាផ្ចិត $I(h\,,\,k)$ ដោយ ៖

-រំកិល h ឯកតាស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស បើ $h>0$ រំកិលទៅខាងស្តាំ តែបើ $h<0$ រំកិលទៅខាងឆ្វេង ។

-រំកិល k ឯកតាស្របអ័ក្សអរដោនេ បើ $k>0$ រំកិលទៅខាងលើ តែបើ $k<0$ រំកិលទៅខាងក្រោម ។

ដូចនេះ: សមីការស្តង់ដានៃអេលីប ផ្ចិត $(h\,,\,k)$ និងអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេគឺ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ ។

➢ **របៀបទី ២ :** តាមនិយមន័យអេលីប

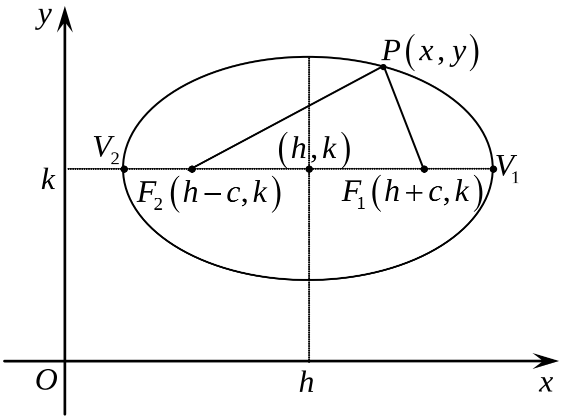
ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្តង់ដានៃអេលីប ផ្ចិត $(h\,,\,k)$ និងអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសគឺ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

គេមាន អេលីបផ្ចិត $(h\,,\,k)$ និងអ័ក្សធំស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស

នាំឱ្យ កំណុំ $F_1(h+c,k)$ និង $F_2(h-c,k)$

យក $P(x\,,\,y)$ ជាចំណុចនៅលើអេលីប

តាមនិយមន័យអេលីបគេបាន $F_1P+PF_2=2a$



$$F_1P=\sqrt{\left[x-(h+c)\right]^2+(y-k)^2}$$
$$=\sqrt{\left[(x-h)-c\right]^2+(y-k)^2}$$
$$=\sqrt{(x-h)^2-2(x-h)c+c^2+(y-k)^2}$$
$$=\sqrt{(x-h)^2-2xc+2hc+c^2+(y-k)^2}$$

$$F_2P=\sqrt{\left[x-(h-c)\right]^2+(y-k)^2}$$
$$=\sqrt{\left[(x-h)+c\right]^2+(y-k)^2}$$
$$=\sqrt{(x-h)^2+2(x-h)c+c^2+(y-k)^2}$$
$$=\sqrt{(x-h)^2+2xc-2hc+c^2+(y-k)^2}$$

គេបាន ៖

$$\sqrt{(x-h)^2-2xc+2hc+c^2+(y-k)^2}+\sqrt{(x-h)^2+2xc-2hc+c^2+(y-k)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-h)^2-2xc+2hc+c^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{(x-h)^2+2xc-2hc+c^2+(y-k)^2}$$

$$(x-h)^2-2xc+2hc+c^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{(x-h)^2+2xc-2hc+c^2+(y-k)^2}+(x-h)^2+2xc-2hc+c^2+(y-k)^2$$

$$-4xc+4hc=4a^2-4a\sqrt{(x-h)^2+2xc-2hc+c^2+(y-k)^2}$$

$$-xc+hc=a^2-a\sqrt{(x-h)^2+2xc-2hc+c^2+(y-k)^2}$$

$$a\sqrt{(x-h)^2+2xc-2hc+c^2+(y-k)^2}=a^2+xc-hc$$

$$a^2\left[(x-h)^2+2xc-2hc+c^2+(y-k)^2\right]=a^4+x^2c^2+h^2c^2+2a^2xc-2a^2hc-2xhc^2$$

$$a^2(x-h)^2+2a^2xc-2a^2hc+a^2c^2+a^2(y-k)^2=a^4+x^2c^2+h^2c^2+2a^2xc-2a^2hc-2xhc^2$$

$$a^2(x-h)^2+a^2c^2+a^2(y-k)^2=a^4+x^2c^2+h^2c^2-2xhc^2$$

$$a^2(x-h)^2+a^2c^2+a^2(y-k)^2=a^4+c^2(x-h)^2$$

$$a^2(x-h)^2-c^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^4-a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2(a^2-c^2)\qquad,\quad b^2=a^2-c^2$$

$$b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

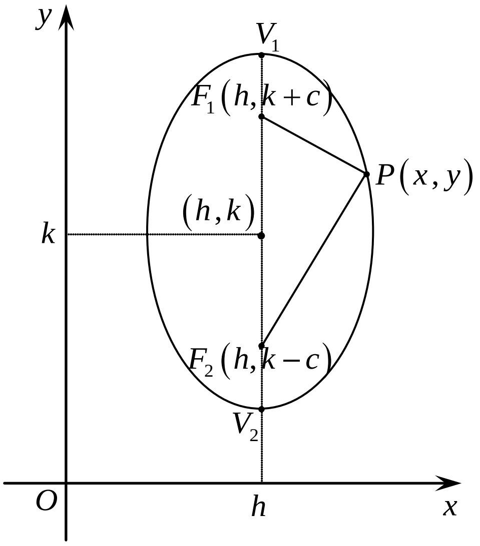
ដូចនេះ: | សមីការស្តង់ដានៃអេលីប ផ្ចិត $(h\,,\,k)$ និងអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសគឺ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ | ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្តង់ដានៃអេលីប ផ្ចិត $(h\,,\,k)$ និងអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេគឺ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

គេមាន អេលីបផ្ចិត $(h\,,\,k)$ និងអ័ក្សធំស្របអ័ក្សអរដោនេ នោះកំណុំ $F_1(h+c,k)$ និង $F_2(h-c,k)$ ។

យក $P(x\,,\,y)$ ជាចំណុចនៅលើអេលីប

តាមនិយមន័យអេលីបគេបាន $F_1P+PF_2=2a$



$$F_1P=\sqrt{(x-h)^2+\left[y-(k+c)\right]^2}$$
$$=\sqrt{(x-h)^2+\left[(y-k)-c\right]^2}$$
$$=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-2(y-k)c+c^2}$$
$$=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-2yc+2kc+c^2}$$

$$F_2P=\sqrt{(x-h)^2+\left[y-(k-c)\right]^2}$$
$$=\sqrt{(x-h)^2+\left[(y-k)+c\right]^2}$$
$$=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2+2(y-k)c+c^2}$$
$$=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2+2yc-2kc+c^2}$$

គេបាន ៖

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-2yc+2kc+c^2}+\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2+2yc-2kc+c^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-2yc+2kc+c^2}=2a-\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2+2yc-2kc+c^2}$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2-2yc+2kc+c^2=4a^2-4a\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2+2yc-2kc+c^2}+(x-h)^2+(y-k)^2+2yc-2kc+c^2$$

$$-4yc+4kc=4a^2-4a\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2+2yc-2kc+c^2}$$

$$a\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2+2yc-2kc+c^2}=a^2+yc-kc$$

$$a^2\left[(x-h)^2+(y-k)^2+2yc-2kc+c^2\right]=a^4+y^2c^2+k^2c^2+2a^2yc-2a^2kc-2ykc^2$$

$$a^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2+2a^2yc-2a^2kc+a^2c^2=a^4+y^2c^2+k^2c^2+2a^2yc-2a^2kc-2ykc^2$$

$$a^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2+a^2c^2=a^4+y^2c^2+k^2c^2-2ykc^2$$

$$a^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2+a^2c^2=a^4+c^2(y-k)^2$$

$$a^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2-c^2(y-k)^2=a^4-a^2c^2$$

$$a^2(x-h)^2+(a^2-c^2)(y-k)^2=a^2(a^2-c^2)\quad,\quad b^2=a^2-c^2$$

$$a^2(x-h)^2+b^2(y-k)^2=a^2b^2$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

ដូចនេះ: | សមីការស្តង់ដានៃអេលីប ផ្ចិត $(h\,,\,k)$ និងអ័ក្សធំស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេគឺ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ | ។

9. **ស្រាយបញ្ជាក់ថា អេលីបមានសមីការទូទៅ** $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ **ដែល** $A\cdot B>0$ **និង** $A\neq B$

-គេពន្លាត សមីការស្តង់ដា $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ គុណអង្គទាំងពីរនឹង a^2b^2 គេបាន

$$b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

$$b^2(x^2-2hx+h^2)+a^2(y^2-2ky+k^2)=a^2b^2$$

$$b^2x^2-2b^2hx+b^2h^2+a^2y^2-2a^2ky+a^2k^2=a^2b^2$$

$$b^2x^2+a^2y^2-2b^2hx-2a^2ky+b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2=0$$

-គេពន្លាត សមីការស្តង់ដា $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ គុណអង្គទាំងពីរនឹង a^2b^2 គេបាន

$$a^2(x-h)^2+b^2(y-k)^2=a^2b^2$$

$$a^2(x^2-2hx+h^2)+b^2(y^2-2ky+k^2)=a^2b^2$$

$$a^2x^2-2a^2hx+a^2h^2+b^2y^2-2b^2ky+b^2k^2=a^2b^2$$

$$a^2x^2+b^2y^2-2a^2hx-2b^2ky+a^2h^2+b^2k-a^2b^2=0$$

ក្រោយពីពន្លាតសមីការស្តង់ដាទាំងពីរមានរាង $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ ដែល $AB=a^2b^2>0$

ដូចនេះ: | សមីការទូទៅនៃអេលីបគឺ $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ ដែល $AB>0\ ,\ A\neq B$ | ។

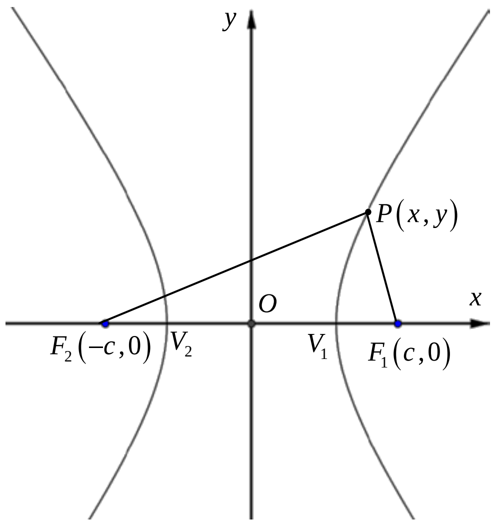
អ៊ីពែបូល

10. ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិតជាគល់តម្រុយ និងអ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សអាប់ស៊ីសគឺ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

គេមាន អ៊ីពែបូលមានផ្ចិតនៅគល់តម្រុយ និងអ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សអាប់ស៊ីស

គេយក $P(x\,,\,y)$ នៅលើប៉ារ៉ាបូល និងយក $b^2=c^2-a^2$

គេបាន កំណុំ $F_1(0\,,\,c)$ និង $F_2(0\,,\,-c)$



តាមនិយមន័យ អ៊ីពែបូល គេបាន $|F_1P-F_2P|=2a$

ឬ $F_1P-F_2P=\pm 2a$ ឬ $F_1P=\pm 2a+F_2P$

ដោយ $F_1P=\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}$

$F_2P=\sqrt{(x+c)^2+(y-c)^2}=\sqrt{x^2+2xc+c^2+y^2}$

គេបាន

$$\sqrt{x^2-2xc+c^2+y^2}=\pm 2a-\sqrt{x^2+2xc+c^2+y^2}$$

$$x^2-2xc+c^2+y^2=4a^2\mp 4a\sqrt{x^2+2xc+c^2+y^2}+x^2+2xc+c^2+y^2$$

$$-4xc=4a^2\mp 4a\sqrt{x^2+2xc+c^2+y^2}$$

$$\pm a\sqrt{x^2+2xc+c^2+y^2}=a^2+xc$$

$$a^2\left(x^2+2xc+c^2+y^2\right)=a^4+2a^2xc+x^2c^2$$

$$a^2x^2+2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4+2a^2xc+x^2c^2$$

$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+x^2c^2$$

$$a^2c^2-a^4=x^2c^2-a^2x^2-a^2y^2$$

$$a^2\left(c^2-a^2\right)=\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2 \quad , \quad b^2=c^2-a^2$$

$$a^2b^2=b^2x^2-a^2y^2$$

$$1=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \quad (1)$$

ទាញរក y ពីសមីការ (1) គេបាន $\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1 \Leftrightarrow y^2=b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right) \Rightarrow y=\pm\sqrt{b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}$ មានន័យលុះត្រាតែ

$\frac{x^2}{a^2}-1\geq 0 \Rightarrow x^2\geq a^2$ នាំឱ្យ $x\geq a$ ឬ $x\leq -a$ គេបាន $y=\pm\sqrt{b^2\cdot\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)} \Leftrightarrow y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$

បើ $x\to+\infty$ នោះកន្សោម $1-\frac{a^2}{x^2}\to 1$ ហើយ អរដោនេ y នៃចំណុច $P(x\,,\,y)$ នៅលើអ៊ីពែបូលខិតជិត $\frac{b}{a}x$ ឬ $-\frac{b}{a}x$ ។

ដូចនេះចំណុច $P(x\,,\,y)$ ខិតជិតបន្ទាត់ $y=\frac{b}{a}x$ កាលណា $y>0$ និងខិតជិតបន្ទាត់ $y=-\frac{b}{a}x$ កាលណា $y<0$ ។

ស្ថានភាពដូចគ្នា បើ $x\leq -a$ នោះ $x\to-\infty$ ។ បន្ទាត់មានសមីការ $y=\pm\frac{b}{a}x$ ជាអាស៊ីមតូតនៃអ៊ីពែបូល $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

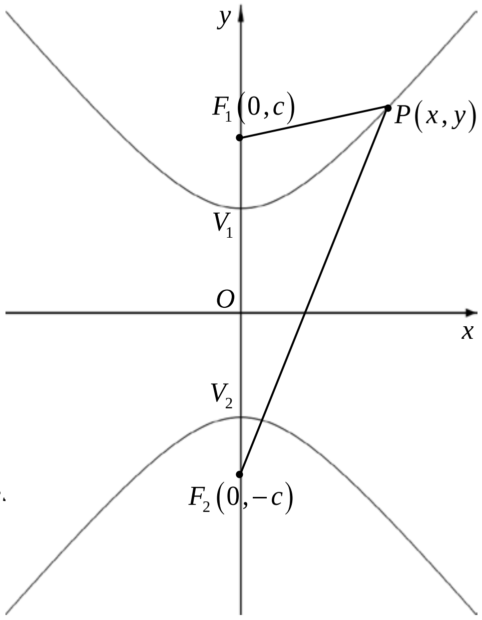
ដូចនេះ: សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិតជាគល់តម្រុយ និងអ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សអាប់ស៊ីសគឺ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិតជាគល់តម្រុយ និងអ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សអរដោនេគឺ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

គេមាន អ៊ីពែបូលមានផ្ចិតនៅគល់តម្រុយ និងអ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សអរដោនេ

គេយក $P(x\,,\,y)$ នៅលើប៉ារ៉ាបូល និងកំណត់យក $b^2=c^2-a^2$

គេបាន កំណុំ $F_1(0\,,\,c)$ និង $F_2(0\,,\,-c)$



តាមនិយមន័យ អ៊ីពែបូល គេបាន $|F_1P-F_2P|=2a$

ឬ $F_1P-F_2P=\pm 2a$ ឬ $F_1P=\pm 2a+F_2P$

ដោយ $F_1P=\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}=\sqrt{x^2+y^2-2yc+c^2}$

$F_2P=\sqrt{(x-0)^2+(y+c)^2}=\sqrt{x^2+y^2+2yc+c^2}$

គេបាន

$$\sqrt{x^2+y^2-2yc+c^2}=\pm 2a-\sqrt{x^2+y^2+2yc+c^2}$$

$$x^2+y^2-2yc+c^2=4a^2\mp 4a\sqrt{x^2+y^2+2yc+c^2}+x^2+y^2+2$$

$$-4yc=4a^2\mp 4a\sqrt{x^2+y^2+2yc+c^2}$$

$$\pm a\sqrt{x^2+y^2+2yc+c^2}=a^2+yc$$

$$a^2\left(x^2+y^2+2yc+c^2\right)=a^4+2a^2yc+y^2c^2$$

$$a^2x^2+a^2y^2+2a^2yc+a^2c^2=a^4+2a^2yc+y^2c^2$$

$$a^2x^2+a^2y^2+a^2c^2=a^4+y^2c^2$$

$$a^2c^2-a^4=y^2c^2-a^2y^2-a^2x^2$$

$$a^2\left(c^2-a^2\right)=\left(c^2-a^2\right)y^2-a^2x^2 \quad , \quad b^2=c^2-a^2$$

$$a^2b^2=b^2y^2-a^2x^2$$

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

ដូចនេះ

សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិតជាគល់តម្រុយ និងអ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សអរដោនេគឺ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

។

11. ➢**របៀបទី ១** : តាមបំលែងកិល

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលមានផ្ចិត $(h\,,\,k)$ និងអ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសគឺ $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

គេធ្វើបំលែងកិលអ៊ីពែបូល $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ពីផ្ចិត $O(0\,,\,0)$ ទៅជាផ្ចិត $I(h\,,\,k)$ ដោយ ៖

-រំកិល h ឯកតាស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស បើ $h>0$ រំកិលទៅខាងស្តាំ តែបើ $h<0$ រំកិលទៅខាងឆ្វេង ។

-រំកិល k ឯកតាស្របអ័ក្សអរដោនេ បើ $k>0$ រំកិលទៅខាងលើ តែបើ $k<0$ រំកិលទៅខាងក្រោម ។

ដូចនេះ

សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលមានផ្ចិត $(h\,,\,k)$ និងអ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសគឺ $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលមានផ្ចិត $(h\,,\,k)$ និងអ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេគឺ $\dfrac{(y-h)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$

គេធ្វើបំលែងកិលអ៊ីពែបូល $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ ពីផ្ចិត $O(0\,,\,0)$ ទៅជាផ្ចិត $I(h\,,\,k)$ ដោយ ៖

-រំកិល h ឯកតាស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស បើ $h>0$ រំកិលទៅខាងស្តាំ តែបើ $h<0$ រំកិលទៅខាងឆ្វេង ។

-រំកិល k ឯកតាស្របអ័ក្សអរដោនេ បើ $k>0$ រំកិលទៅខាងលើ តែបើ $k<0$ រំកិលទៅខាងក្រោម ។

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលមានផ្ចិត $(h\,,\,k)$ និងអ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេគឺ $\dfrac{(y-h)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$ ។

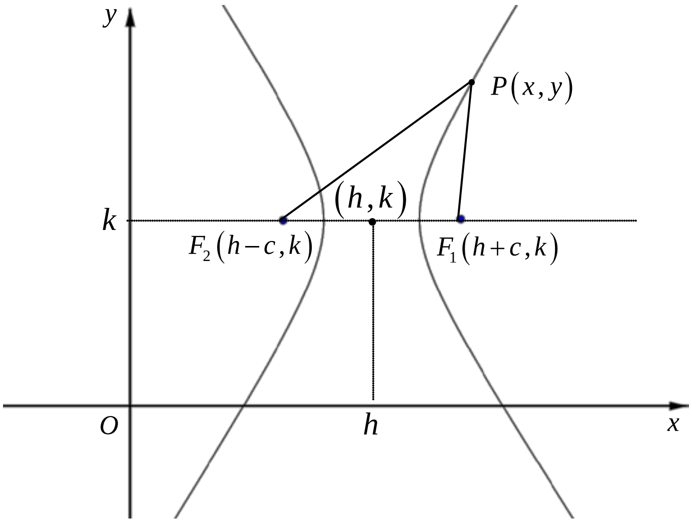
➢របៀបទី ២ : តាមនិយមន័យអ៊ីពែបូល

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលមានផ្ចិត $(h\,,\,k)$ និងអ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសគឺ $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

គេមាន អ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិត $(h\,,\,k)$ និងអ័ក្សទទឹងស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស

គេបាន កំណុំ $F_1(h+c\,,\,k)$ និង $F_2(h-c\,,\,k)$

យក $P(x\,,\,y)$ ជាចំណុចនៅលើអ៊ីពែបូល និងយក $b^2=c^2-a^2$



តាមនិយមន័យ អ៊ីពែបូល គេបាន $|F_1P-F_2P|=2a$

ឬ $F_1P-F_2P=\pm 2a$ ឬ $F_1P=\pm 2a+F_2P$

ដោយ

$$F_1P=\sqrt{\left[x-(h+c)\right]^2+(y-k)^2}$$
$$=\sqrt{\left[(x-h)-c\right]^2+(y-k)^2}$$
$$=\sqrt{(x-h)^2-2(x-h)c+c^2+(y-k)^2}$$
$$=\sqrt{(x-h)^2-2xc+2hc+c^2+(y-k)^2}$$

$$F_2P=\sqrt{\left[x-(h-c)\right]^2+(y-k)^2}$$
$$=\sqrt{\left[(x-h)+c\right]^2+(y-k)^2}$$
$$=\sqrt{(x-h)^2+2(x-h)c+c^2+(y-k)^2}$$
$$=\sqrt{(x-h)^2+2xc-2hc+c^2+(y-k)^2}$$

គេបាន ៖

$$\sqrt{(x-h)^2-2xc+2hc+c^2+(y-k)^2}=\pm 2a-\sqrt{(x-h)^2+2xc-2hc+c^2+(y-k)^2}$$

$$(x-h)^2-2xc+2hc+c^2+(y-k)^2=4a^2\mp 4a\sqrt{(x-h)^2+2xc-2hc+c^2+(y-k)^2}+(x-h)^2+2xc-2hc+c^2+(y-k)^2$$

$$-4xc+4hc=4a^2\mp 4a\sqrt{(x-h)^2+2xc-2hc+c^2+(y-k)^2}$$

$$a\sqrt{(x-h)^2+2xc-2hc+c^2+(y-k)^2}=a^2+xc-hc$$

$$a^2\left[(x-h)^2+2xc-2hc+c^2+(y-k)^2\right]=a^4+x^2c^2+h^2c^2+2a^2xc-2a^2hc-2xhc^2$$

$$a^2(x-h)^2+2a^2xc-2a^2hc+a^2c^2+a^2(y-k)^2=a^4+x^2c^2+h^2c^2+2a^2xc-2a^2hc-2xhc^2$$

$$a^2(x-h)^2+a^2c^2+a^2(y-k)^2=a^4+x^2c^2+h^2c^2-2xhc^2$$

$$a^2(x-h)^2+a^2c^2+a^2(y-k)^2=a^4+c^2(x-h)^2$$

$$a^2c^2-a^4=c^2(x-h)^2-a^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2$$

$$a^2(c^2-a^2)=(c^2-a^2)(x-h)^2-a^2(y-k)^2 \quad , \quad b^2=c^2-a^2$$

$$a^2b^2=b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2$$

$$1=\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}$$

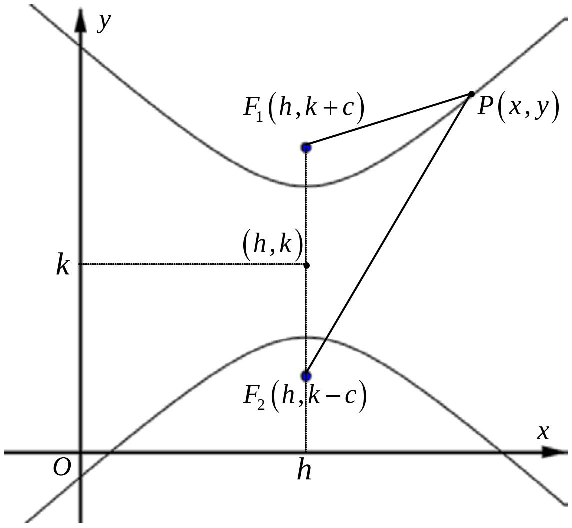
ដូចនេះ | សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលមានផ្ចិត $(h\ ,\ k)$ និងអ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសគឺ $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ | ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលមានផ្ចិត $(h\ ,\ k)$ និងអ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេគឺ $\dfrac{(y-h)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$

គេមាន អ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិត $(h\ ,\ k)$ និងអ័ក្សទទឹងស្របអ័ក្សអរដោនេ

គេបាន កំណុំ $F_1(h\ ,\ k+c)$ និង $F_2(h\ ,\ k-c)$

យក $P(x\ ,\ y)$ ជាចំណុចនៅលើអ៊ីពែបូល និងយក $b^2=c^2-a^2$



តាមនិយមន័យ អ៊ីពែបូល គេបាន $|F_1P-F_2P|=2a$

ឬ $F_1P-F_2P=\pm 2a$ ឬ $F_1P=\pm 2a+F_2P$

ដោយ

$$F_1P=\sqrt{(x-h)^2+[y-(k+c)]^2}$$
$$=\sqrt{(x-h)^2+[(y-k)-c]^2}$$
$$=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-2(y-k)c+c^2}$$
$$=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-2yc+2ck+c^2}$$

$$F_2P=\sqrt{(x-h)^2+[y-(k-c)]^2}$$
$$=\sqrt{(x-h)^2+[(y-k)+c]^2}$$
$$=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2+2(y-k)c+c^2}$$
$$=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2+2yc-2ck+c^2}$$

គេបាន ៖

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-2yc+2ck+c^2}=\pm 2a-\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2+2yc-2ck+c^2}$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2-2yc+2ck+c^2=4a^2\mp 4a\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2+2yc-2ck+c^2}+(x-h)^2+(y-k)^2+2yc-2ck+c^2$$

$$-4yc+4ck=4a^2\mp 4a\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2+2yc-2ck+c^2}$$

$$\pm a\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2+2yc-2ck+c^2}=a^2+yc-ck$$

$$a^2\left[(x-h)^2+(y-k)^2+2yc-2ck+c^2\right]=a^4+y^2c^2+c^2k^2+2a^2yc-2a^2ck-2ykc^2$$

$$a^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2+2a^2yc-2a^2ck+a^2c^2=a^4+y^2c^2+c^2k^2+2a^2yc-2a^2ck-2ykc^2$$

$$a^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2+a^2c^2=a^4+y^2c^2+c^2k^2-2ykc^2$$

$$a^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2+a^2c^2=a^4+c^2(y-k)^2$$

$$a^2c^2-a^4=+c^2(y-k)^2-a^2(y-k)^2-a^2(x-h)^2$$

$$a^2(c^2-a^2)=(c^2-a^2)(y-k)^2-a^2(x-h)^2 \quad , \quad b^2=c^2-a^2$$

$$a^2b^2=b^2(y-k)^2-a^2(x-h)^2$$

$$1=\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}$$

ដូចនេះ: | សមីការស្តង់ដានៃអ៊ីពែបូលមានផ្ចិត $(h\,,\,k)$ និងអ័ក្សទទឹងស្របនឹងអ័ក្សអរដោនេគឺ $\frac{(y-h)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ | ។

12. ស្រាយបញ្ជាក់ថា អ៊ីពែបូលមានសមីការទូទៅ $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ ដែល $AB<0$ បានពីសម្រួលរាងសមីការស្តង់ដា

គេពន្លាតសមីការស្តង់ដា $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ គេបាន ៖

$$b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

$$b^2(x^2-2xh+h^2)-a^2(y^2-2yk+k^2)=a^2b^2$$

$$b^2x^2-2b^2xh+b^2h^2-a^2y^2+2a^2yk-a^2k^2=a^2b^2$$

$$b^2x^2-a^2y^2-2b^2xh+2a^2yk+b^2h^2-a^2k^2-a^2b^2=0$$

គេពន្លាតសមីការស្តង់ដា $\frac{(y-h)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ គេបាន ៖

$$b^2(y-k)^2-a^2(x-h)^2=a^2b^2$$

$$b^2(y^2-2yk+k^2)-a^2(x^2-2xh+h^2)=a^2b^2$$

$$b^2y^2-2b^2yh+b^2k^2-a^2x^2+2a^2xh-a^2h^2=a^2b^2$$

$$-a^2x^2+b^2y^2+2a^2xh-2b^2yh+b^2k^2-a^2h^2-a^2b^2=0$$

ក្រោយពីពន្លាតសមីការស្តង់ដានីមួយៗ គេបានសមីការមានរាងទូទៅ $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ ដែលមាន

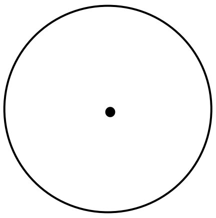
$A\cdot B=b^2(-a^2)=(-a^2)b^2<0$ ព្រោះ $a^2b^2>0$ និង $a\neq 0\,,\,b\neq 0$

ដូចនេះ: | អ៊ីពែបូលមានសមីការទូទៅ $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ ដែល $AB<0$ បានពីសម្រួលរាងសមីការស្តង់ដា | ។

រង្វង់

1. និយមន័យរង្វង់

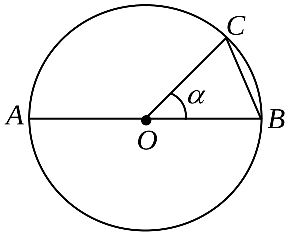
រង្វង់ ជាសំណុំចំណុចជាច្រើននៅក្នុងប្លង់មួយ ដែលស្ថិតនៅស្មើចម្ងាយពីចំណុចនឹងមួយ ដែលចំណុចនឹងនោះ ហៅថា ផ្ចិតរង្វង់ ។



2. លក្ខណៈនៃរង្វង់

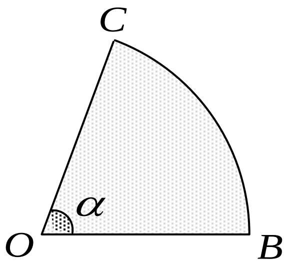
លក្ខណៈនៃរង្វង់រួមមានដូចខាងក្រោមៈ

- កាំរង្វង់ $OA = OB = OC$ (អង្កត់ភ្ជាប់ពីផ្ចិតទៅខ្សែរង្វង់)
- អង្កត់ធ្នូ BC (អង្កត់ដែលភ្ជាប់ពីចំណុច B ទៅចំណុច C)
- អង្កត់ផ្ចិត AB (អង្កត់ធ្នូវែងជាងគេ ឬអង្កត់ដែលគូសកាត់ផ្ចិតរង្វង់)
- ផ្ចិត O (ជាចំណុចផ្ចិតឆ្លុះនៃរង្វង់ ឬចំណុចកណ្តាលនៃរង្វង់)
- ធ្នូ BC (ជាប្រវែងខ្សែកោង BC ដែលខណ្ឌដោយអង្កត់ធ្នូ BC)
- មុំផ្ចិត α (មុំមានកំពូលនៅលើផ្ចិតរង្វង់)
- មុំក្នុងរង្វង់ ឬមុំជុំវិញផ្ចិតមានរង្វាស់ស្មើនឹង $360°$ ។
- រង្វង់គ្មានផ្ទៃទេ វាដូចជាកងដៃ តែថាសទើបមានផ្ទៃ ។
- រង្វង់មានផ្ចិតឆ្លុះមួយ គឺជាចំណុចផ្ចិតរបស់វា ។ គ្រប់អង្កត់ផ្ចិត ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃរង្វង់ ។



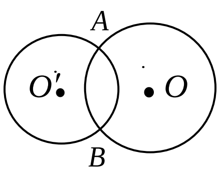
3. ទំនាក់ទំនងក្នុងរង្វង់

- កាំតាងដោយ R (ជាវិមាត្រនៃរង្វង់)
- អង្កត់ផ្ចិតតាងដោយ D ដែល $D = 2R$
- បរិមាត្ររង្វង់តាងដោយ P ដែល $P = 2\pi R$ ឬ $P = \pi D$
- ផ្ទៃថាសតាងដោយ S ដែល $S = \pi R^2$ ឬ $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$
- ប្រវែងធ្នូ BC មានរូបមន្តៈ $\overset{\frown}{BC} = 2\pi R \times \dfrac{\alpha^o}{360^o}$ ឬ $\overset{\frown}{BC} = P \times \dfrac{\alpha^o}{360^o}$
- ផ្ទៃចម្រៀកថាសមានរូបមន្ត $s = \pi R^2 \times \dfrac{\alpha^o}{360^o}$

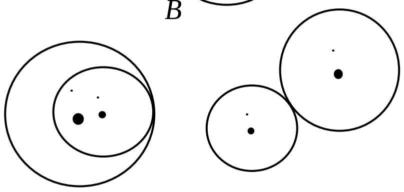


4. ទីតាំងនៃរង្វង់ពីរ

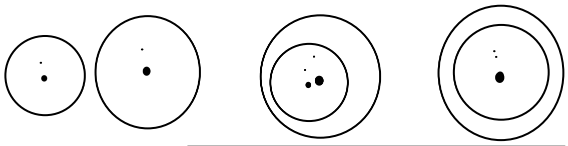
១. រង្វង់កាត់គ្នាៈ រង្វង់ពីរកាត់គ្នាគេបានចំណុចប្រសព្វពីរ។ ច្រាសមកវិញ កាលណារង្វង់ពីរមានចំណុចប្រសព្វពីរ មានន័យថារង្វង់ទាំងពីរកាត់គ្នា។



២-រង្វង់ប៉ះគ្នាៈ រង្វង់ពីរប៉ះគ្នា គេបានចំណុចរួមមួយ គឺចំណុចប៉ះ ។ រង្វង់ពីរប៉ះគ្នាមានពីរករណី គឺរង្វង់ប៉ះក្នុង និងរង្វង់ប៉ះក្រៅ។



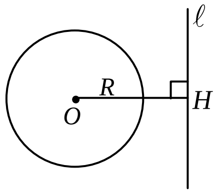
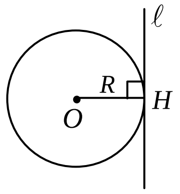
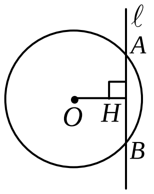
៣-រង្វង់គ្មានចំណុចប្រសព្វៈ រង្វង់គ្មានចំណុចប្រសព្វ មានន័យថា រង្វង់គ្មានចំណុចរួមគ្នានៃខ្សែរង្វង់។



www.facebook.com/7khmer
fb : Entertainment And Knowledge

5. ទីតាំងនៃបន្ទាត់ និងរង្វង់

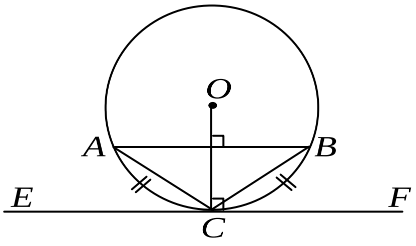
មានរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R មួយ និងបន្ទាត់ ℓ មួយ ។ យើងមានបីករណីដូចខាងក្រោម ៖

គ្មានចំណុចប្រសព្វ	មានចំណុចប្រសព្វ ១	មានចំណុចប្រសព្វ ២
		
➢ $OH > R$ បន្ទាត់ ℓ និងរង្វង់គ្មានចំណុចរួម ។ គេថា បន្ទាត់ ℓ នៅខាង ***ក្រៅរង្វង់*** ។	➢ $OH = R$ បន្ទាត់ ℓ និងរង្វង់មានចំណុចរួមមួយ ។ គេថា បន្ទាត់ ℓ ***ប៉ះរង្វង់*** ហើយកែងនឹងកាំរង្វង់ $[OH]$ ត្រង់ H ។	➢ $OH < R$ បន្ទាត់ ℓ និងរង្វង់មានចំណុចរួមពីរត្រង់ A និង B ។ គេថា បន្ទាត់ ℓ ***កាត់រង្វង់*** ។

6. លក្ខណៈនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងធ្នូ

> បើបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ស្របទៅនឹងអង្កត់ធ្នូមួយ
> នោះចំណុចប៉ះចែកធ្នូសន្ទឹងជាពីរផ្នែកប៉ុនគ្នា ។

☑ **សម្រាយបញ្ជាក់**



គេឱ្យបន្ទាត់ EF ប៉ះរង្វង់ O ត្រង់ចំណុច C ។ អង្កត់ធ្នូ AB ស្របនឹងបន្ទាត់ EF ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ : ដោយ EF ប៉ះរង្វង់ត្រង់ចំណុច C នោះ

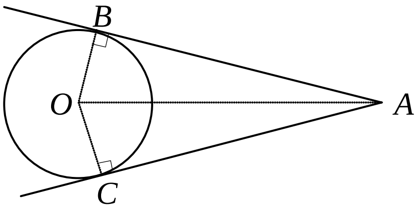
$OC \perp EF$ និង $AB \parallel EF$ នាំឱ្យ $OC \perp AB$

ដោយកាំរង្វង់ត្រូវកែងនឹងអង្កត់ធ្នូត្រង់ចំណុចកណ្ដាលជានិច្ច

នោះ OC ជាមេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ AB គេបាន $AC = BC$ ឬ $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$ ។

7. បន្ទាត់ប៉ះពីរដែលគូសចេញពីចំណុចរួមមួយ នៅក្រៅរង្វង់

> បើបន្ទាត់ពីរគូសចេញពីចំណុចរួម A មួយនៅក្រៅរង្វង់
> មានផ្ចិត O ហើយប៉ះរង្វង់នេះត្រង់ B និង C គេបាន ៖
> $AB = AC$, $\angle OAB = \angle OAC$, $\angle BOA = \angle COA$



☑ **សម្រាយបញ្ជាក់**

ដោយ AB , AC ជាបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ត្រង់ B , C រៀងគ្នា នោះ $OB \perp AB$ និង $OC \perp AC$

គេបាន OAB និង OAC ជាត្រីកោណកែងដែលមាន ៖

-ជ្រុង OA ជាអ៊ីប៉ូតេនុសរួមគ្នា

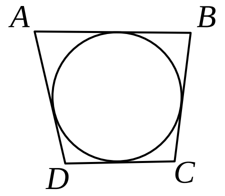
-ជ្រុង $OB = OC$ ជាកាំរង្វង់តែមួយ

នាំឱ្យ $OAB \cong OAC$ តាមលក្ខខណ្ឌទី២ អ.ជ

វិបាក $\cong \begin{array}{c|} OAB \\ OAC \end{array} \Rightarrow \boxed{AB = AC \ , \ \angle OAB = \angle OAC \ , \ \angle BOA = \angle COA}$

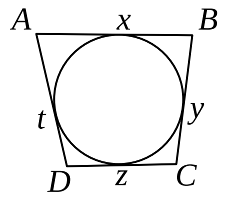
www.facebook.com/7khmer
fb : Entertainment And Knowledge

8. ចតុកោណចារឹកក្រៅរង្វង់



> ក្នុងចតុកោណចារឹកក្រៅរង្វង់មួយ
> មានផលបូករង្វាស់ជ្រុងឈមស្មើគ្នា
> $AB+CD=BC+AD$ ។

☑ **សម្រាយបញ្ជាក់**



តាង x , y , z , t ជាចំណុចដែលចតុកោណប៉ះរង្វង់

តាមលក្ខណៈបន្ទាត់ប៉ះគេបាន ៖

$Ax = At \quad , \quad Bx = By$

$Cy = Cz \quad , \quad Dz = Dt$

គេបាន $\quad AB+CD = Ax+Bx+Cz+Dz$

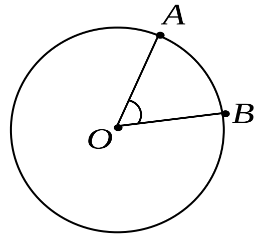
$$= At+By+Cy+Dt$$

$$=(At+Dt)+(By+Cy)$$

$$= AD+BC$$

ដូចនេះ $\boxed{AB+CD=BC+AD}$ ។

9. មុំផ្ចិត



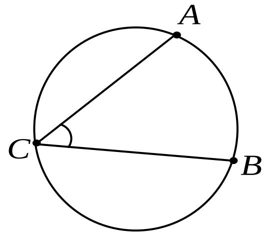
> មុំផ្ចិត ជាមុំដែលមានកំពូលនៅលើផ្ចិតរង្វង់ ។
> រង្វាស់មុំផ្ចិតស្មើនឹងរង្វាស់ធ្នូស្កាត់ ។ $\boxed{\angle O = \overset{\frown}{AB}}$

☑ **ស្រាយបញ្ជាក់** : មុំផ្ចិតមានរង្វាស់ស្មើនឹងធ្នូស្កាត់របស់វា

ដោយមុំផ្ចិតមានរង្វាស់ 360° និងធ្នូរង្វង់មានរង្វាស់ 360° ដែរ

ដូចនេះ មុំផ្ចិតត្រូវមានរង្វាស់ស្មើនឹងធ្នូស្កាត់នៃមុំផ្ចិតនោះដែរ ។

10. មុំចារឹក

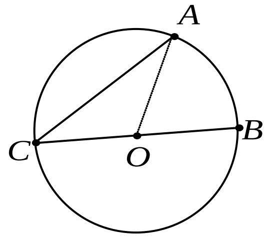


> មុំចារឹក ជាមុំដែលមានកំពូលនៅលើរង្វង់ ហើយជ្រុង
> ពីរទៀតកាត់រង្វង់ ។ រង្វាស់មុំចារឹកស្មើកន្លះធ្នូស្កាត់។
> $\boxed{\angle C = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}}$

☑ **ស្រាយបញ្ជាក់ថា** $\angle C = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

គេមានបីករណីដូចខាងក្រោម ដើម្បីបង្ហាញថាមុំចារឹកមានរង្វាស់ស្មើនឹងពាក់កណ្ដាលធ្នូស្កាត់របស់វា ៖

* **ករណីជ្រុងមុំកាត់ផ្ចិត**



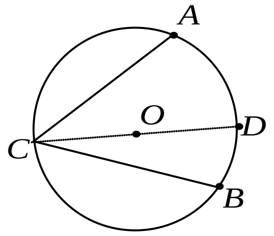
គូសភ្ជាប់ OA គេបាន AOC ជាត្រីកោណសមបាទ ដែល $\angle A = \angle C$

ហើយ $\angle C + \angle A = \angle AOB$ ឬ $2\angle C = \angle AOB$ ព្រោះ $\angle A = \angle C$

ដោយ $\angle AOB = \overset{\frown}{AB}$ នោះ $2\angle C = \overset{\frown}{AB}$ ទាញបាន $\angle C = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ ។

www.facebook.com/7khmer
fb : Entertainment And Knowledge

* **ករណីផ្ចិតរង្វង់នៅក្នុងមុំ**

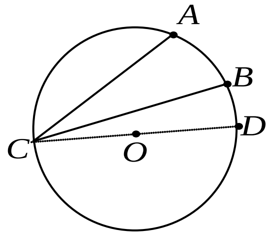


គូសអង្កត់ផ្ចិត CD គេបាន $\angle ACB = \angle ACD + \angle BCD$

តាមករណីទី១ ខាងលើ $\angle ACD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$ និង $\angle BCD = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$

នាំឱ្យ $\angle ACB = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ ឬ $\angle C = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ ។

* **ករណីផ្ចិតរង្វង់នៅក្រៅមុំ**

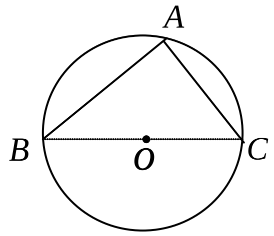


គូសអង្កត់ផ្ចិត CD គេបាន $\angle ACB = \angle ACD - \angle BCD$

តាមករណីទី១ ខាងលើ $\angle ACD = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$ និង $\angle BCD = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$

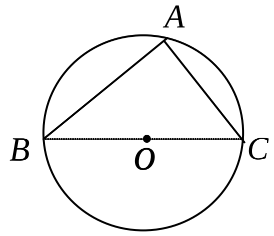
នាំឱ្យ $\angle ACB = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} - \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ ឬ $\angle C = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ ។

11. មុំចារឹកកន្លះរង្វង់



> មុំចារឹកកន្លះរង្វង់ ជាមុំដែលមានកំពូលនៅលើរង្វង់ ហើយជ្រុងទាំងពីរកាត់រង្វង់ ដែលចំណុចកាត់ទាំងពីរភ្ជាប់បានជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់ ។ មុំចារឹកកន្លះរង្វង់មានរង្វាស់ស្មើនឹង 90° ។

☑ **សម្រាយបញ្ជាក់**

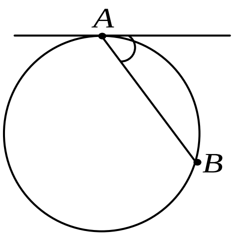


ស្រាយបញ្ជាក់ថា មុំចារឹកកន្លះរង្វង់មានរង្វាស់ស្មើ 90°

ដោយ BC ជាអង្កត់ផ្ចិត មុំផ្ចិត $\angle BOC = \overset{\frown}{BC} = 180^\circ$

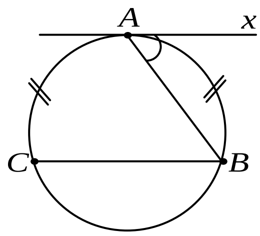
មុំ $\angle A$ ជាមុំចារឹកមានធ្នូស្កាត់ $\overset{\frown}{BC}$ នាំឱ្យ $\angle A = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ ។

12. មុំចារឹកពិសេស



> មុំចារឹកពិសេស គឺជាមុំដែលកើតដោយកន្លះបន្ទាត់ប៉ះ និងខ្នាត់គូសចេញពីចំណុចប៉ះ។ រង្វាស់មុំចារឹកពិសេសស្មើកន្លះធ្នូស្កាត់ ។
>
> $$\angle A = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

☑ **សម្រាយបញ្ជាក់**



ស្រាយបញ្ជាក់ថា រង្វាស់មុំចារឹកពិសេសស្មើកន្លះធ្នូស្កាត់

គូសអង្កត់ធ្នូ BC ឱ្យស្របនឹងបន្ទាត់ប៉ះ នោះគេបាន ៖

$\angle xAB = \angle ABC$ (មុំឆ្លាស់ក្នុង) និងធ្នូ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$

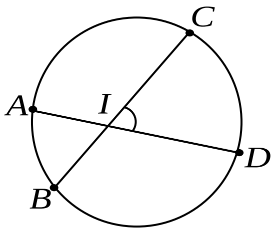
ដោយ $\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

នាំឱ្យ $\angle xAB = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ ឬ $\angle A = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ ។

13. មុំក្នុងរង្វង់

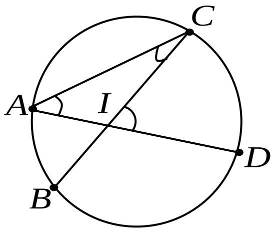
មុំក្នុងរង្វង់ គឺជាមុំដែលមានកំពូលនៅខាងក្នុងនៃរង្វង់ ហើយជ្រុង និងបន្លាយនៃជ្រុងកាត់រង្វង់ ។ មុំក្នុងរង្វង់មានរង្វាស់ស្មើកន្លះនៃផលបូកធ្នូស្កាត់មុំនោះ និងធ្នូដែលស្កាត់បន្លាយជ្រុងនៃមុំនោះ។

$$\angle I = \frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}}{2}$$



☑ **សម្រាយបញ្ជាក់**

ស្រាយបញ្ជាក់ថា មុំក្នុងរង្វង់មានរង្វាស់ស្មើកន្លះនៃផលបូកធ្នូស្កាត់មុំនោះ និងធ្នូដែលស្កាត់បន្លាយជ្រុងនៃមុំនោះ



គូសភ្ជាប់អង្កត់ធ្នូ AC នោះ ACI ជាត្រីកោណដែលមាន

$\angle CID = \angle ACB + \angle CAD$ (មុំក្រៅនៃត្រីកោណ)

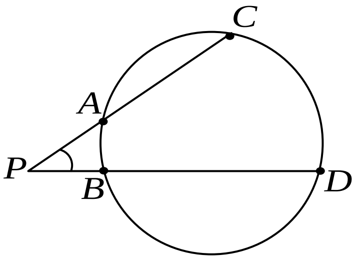
តែ $\angle ACB = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$, $\angle CAD = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$

នាំឱ្យ $\angle CID = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}}{2}$ ឬ $\angle I = \frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}}{2}$ ។

14. មុំក្រៅរង្វង់

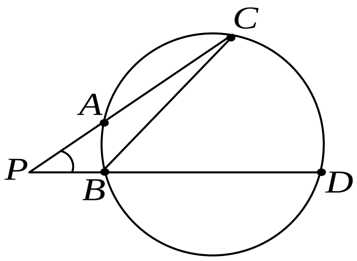
មុំក្រៅរង្វង់ ជាមុំដែលមានកំពូលនៅខាងក្រៅនៃរង្វង់ ហើយជ្រុងរបស់វាកាត់រង្វង់។ មុំក្រៅរង្វង់ មានរង្វាស់ស្មើកន្លះនៃផលដកធ្នូស្កាត់ទាំងពីរនៃមុំនោះ។

$$\angle P = \frac{\overset{\frown}{CD}-\overset{\frown}{AB}}{2}$$



☑ **សម្រាយបញ្ជាក់**

ស្រាយបញ្ជាក់ថា មុំក្រៅរង្វង់ មានរង្វាស់ស្មើកន្លះនៃផលដកធ្នូស្កាត់ ទាំងពីរនៃមុំនោះ



គូសភ្ជាប់អង្កត់ធ្នូ BC នោះ PBC ជាត្រីកោណមាន

$\angle CPB + \angle BCP = \angle CBD$ (មុំក្រៅត្រីកោណ)

នាំឱ្យ $\angle CPB = \angle CBD - \angle BCP$

តែ $\angle CBD = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$, $\angle BCP = \angle BCA = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

គេបាន $\angle CPB = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} - \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{CD}-\overset{\frown}{AB}}{2}$ ឬ $\angle P = \frac{\overset{\frown}{CD}-\overset{\frown}{AB}}{2}$

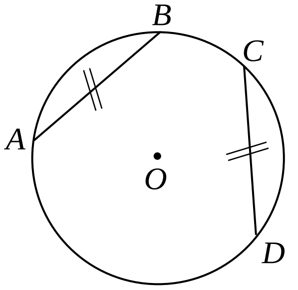
www.facebook.com/7khmer
fb : Entertainment And Knowledge

15. អង្កត់ធ្នូ និងធ្នូ

- ➢ អង្កត់ធ្នូ ជាអង្កត់ដែលគូសភ្ជាប់ពីរចំណុចនៅលើរង្វង់ ។ អង្កត់ធ្នូកំណត់បានធ្នូសន្ទឹង ។
- ➢ អង្កត់ធ្នូដែលវែងជាងគេត្រូវកាត់តាមផ្ចិតនៃរង្វង់ គេហៅថាអង្កត់ផ្ចិត ។
- ➢ អង្កត់ផ្ចិត គឺត្រូវកែងនឹងអង្កត់ធ្នូ ត្រង់ចំណុចកណ្តាល ។
- ➢ អង្កត់ធ្នូកាន់តែវែង គឺកាន់តែនៅជិតផ្ចិត ។
- ➢ អង្កត់ធ្នូកាន់តែវែង កំណត់បានធ្នូសន្ទឹងកាន់តែធំ ។
- ➢ ធ្នូ ជាកំណោងនៃរង្វង់ដែលកំណត់ដោយអង្កត់ធ្នូ ។
- ➢ ធ្នូពីរនៅចន្លោះអង្កត់ធ្នូស្របគ្នា ជាធ្នូប៉ុនគ្នា ។

16. ទំនាក់ទំនងរវាងអង្កត់ធ្នូ និងធ្នូ

ក្នុងរង្វង់តែមួយ ឬរង្វង់ពីរប៉ុនគ្នា បើអង្កត់ធ្នូប៉ុនគ្នា នោះធ្នូដែលកំណត់ដោយអង្កត់ធ្នូទាំងពីរក៏ប៉ុនគ្នាដែរ ។
$AB = CD$ នោះ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



☑ **សម្រាយបញ្ជាក់**

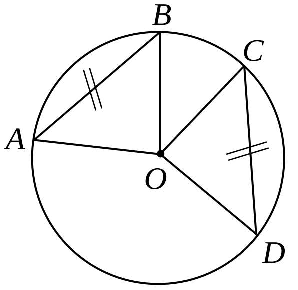
គេភ្ជាប់ OA , OB , OC និង OD គេបាន ៖

OAB និង OCD ជាត្រីកោណដែលមាន ៖

-ជ្រុង $OA = OC$ (កាំរង្វង់តែមួយ)

-ជ្រុង $OB = OD$ (កាំរង្វង់តែមួយ)

-ជ្រុង $AB = CD$ (សម្មតិកម្ម)



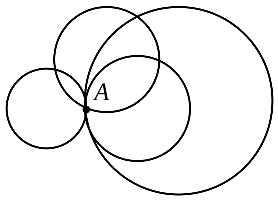
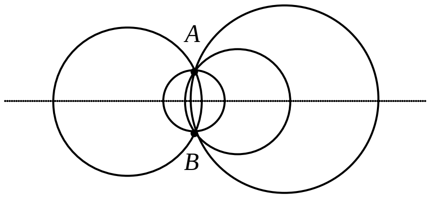
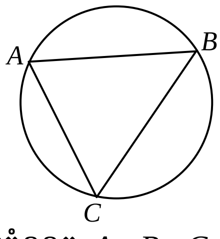
នាំឱ្យ $\Delta OAB \cong \Delta OCD$ តាមលក្ខខណ្ឌទី៣ ជ.ជ.ជ

វិបាក $\cong \left.\begin{matrix}\Delta OAB \\ \Delta OCD\end{matrix}\right| \Rightarrow \angle AOB = \angle COD$ (ជាមុំផ្ចិតដូចគ្នា)

តែ $\angle AOB = \overset{\frown}{AB}$, $\angle COD = \overset{\frown}{CD}$ (ធ្នូស្ទាត់ និងមុំផ្ចិតមានរង្វាស់ស្មើគ្នា)

នាំឱ្យ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ ។ ដូចនេះ បើធ្នូ $AB = CD$ នោះ $\boxed{\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}}$ ។

17. ការកំណត់រង្វង់

មួយចំណុច A	ពីរចំណុច A និង B	បីចំណុច A , B និង C
 ➢តាមចំណុច A មួយគេអាចគូសរង្វង់បានច្រើនរាប់មិនអស់ ។	 ➢តាមពីរចំណុច A និង B គេអាចគូសរង្វង់បានច្រើនរាប់មិនអស់ ដែលមានផ្ចិតឋិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។	 ➢តាមបីចំណុច A , B , C គេអាចគូសរង្វង់បានតែ មួយគត់ ។

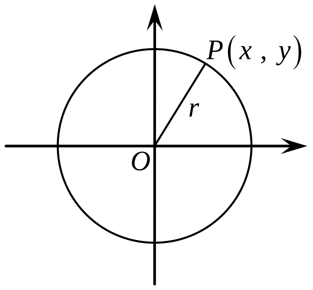
www.facebook.com/7khmer
fb : Entertainment And Knowledge

18. សមីការស្តង់ដានៃរង្វង់

➢ សមីការស្តង់ដានៃរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $O(0,0)$ និងកាំ r គឺ :

$\boxed{x^2+y^2=r^2}$ ។

☑ **សម្រាយបញ្ជាក់**



តាង $P(x,y)$ ជាចំណុចនៅលើរង្វង់ គេបាន $OP=r$ ឬ $OP^2=r^2$

ចម្ងាយពី O ទៅ P កំណត់ដោយ $OP=\sqrt{(x-x_O)^2+(y-y_O)^2}$

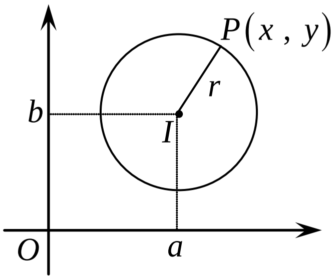
នាំឱ្យ $OP^2=x^2+y^2$ គេបាន $x^2+y^2=r^2$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដារង្វង់មានផ្ចិត $O(0,0)$ កាំ r គឺ $x^2+y^2=r^2$ ។

➢ សមីការស្តង់ដានៃរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $I(a,b)$ និងកាំ r គឺ :

$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$ ។

☑ **សម្រាយបញ្ជាក់**



តាង $P(x,y)$ ជាចំណុចនៅលើរង្វង់ គេបាន $IP=r$ ឬ $IP^2=r^2$

ចម្ងាយពី I ទៅ P កំណត់ដោយ $IP=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$

នាំឱ្យ $IP^2=(x-a)^2+(y-b)^2$ គេបាន $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដារង្វង់មានផ្ចិត $I(a,b)$ កាំ r គឺ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ។

19. សមីការទូទៅនៃរង្វង់

➢ សមីការទូទៅនៃរង្វង់គឺ $\boxed{x^2+y^2+Ax+By+C=0}$ ។

☑ **សម្រាយបញ្ជាក់**

គេមានសមីការស្តង់ដានៃរង្វង់គឺ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

គេបាន $$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2$$

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

បើតាង $A=-2a$, $B=-2b$, $C=a^2+b^2-r^2$

នាំឱ្យគេបាន $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

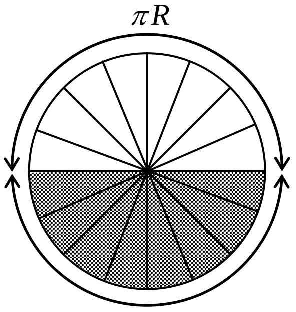
ដូចនេះ សមីការទូទៅនៃរង្វង់មានទម្រង់ $\boxed{x^2+y^2+Ax+By+C=0}$ ។

www.facebook.com/7khmer
fb : Entertainment And Knowledge

20. ការស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តក្រឡាផ្ទៃថាស

☑ **សម្រាយបញ្ជាក់ ១** : ការប្រើវិធីអព្ភន្តរញាណ (ប្រើប្រាស់រូបបង្ហាញ)

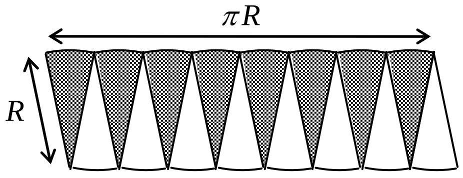
គូសរង្វង់កាំ R នៅលើក្រដាសកាតុង រួចកាត់ថាសឱ្យបានជាចម្រៀកស្មើៗគ្នា (កាន់តែច្រើនកាន់តែល្អ) ដូចបង្ហាញក្នុងរូបទី១



(រូបទី១)

យកចម្រៀកថាសដែលកាត់បាន រៀបជារាងចតុកោណកែង ដូចរូបទី២ ដែលមានបណ្តោយ πR និងទទឹង R ។

(កាត់កាន់តែច្រើនចម្រៀក កាន់តែមានរាងជាចតុកោណកែង)



(រូបទី២)

គេបាន ផ្ទៃថាស $S =$ ផ្ទៃចតុកោណកែង

$=$ បណ្តោយ $\times$ ទទឹង

$= \pi R \times R = \pi R^2$

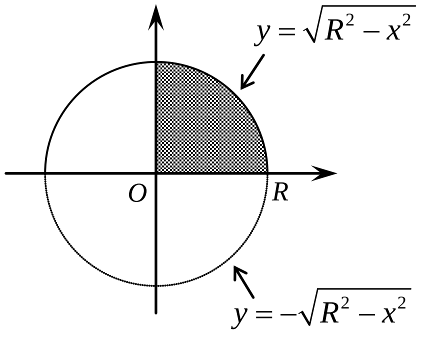
ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃថាសដែលមានកាំ R កំណត់ដោយ $\boxed{S = \pi R^2}$ ។

☑ **សម្រាយបញ្ជាក់ ២** : ការប្រើវិធីអាំងតេក្រាល

គេមាន សមីការរង្វង់ដែលមានផ្ចិតជាគល់តម្រុយមានរាង $x^2 + y^2 = R^2$

គេបាន $y^2 = R^2 - x^2$ ឬ $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ (គិតតែ $y > 0$)

គណនាក្រឡាផ្ទៃក្នុងកាដ្រង់ទី១ រួចគុណនឹង 4 គេនឹងបានផ្ទៃថាសទាំងមូល



$S = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$ (ជាក្រឡាផ្ទៃថាស)

តាង $x = R\sin t$ នាំឱ្យ $dx = R\cos t\,dt$

បើ $x = 0$ នោះ $t = 0$, បើ $x = R$ នោះ $t = \frac{\pi}{2}$

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}\cdot R\cos t\,dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2\left(1 - \sin^2 t\right)}\cdot R\cos t\,dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2\cos^2 t}\cdot R\cos t\,dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos^2 t\,dt$$

$$= 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt$$

$$= 2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \cos 2t\right)dt$$

$$= 2R^2\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2R^2\left(\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right] - \left[0 + \frac{1}{2}\sin 0\right]\right)$$

$$= \boxed{\pi R^2}$$

www.facebook.com/7khmer
fb : Entertainment And Knowledge

☑ **សម្រាយបញ្ជាក់ ៣** : ការប្រើវិធីលីមីត

គេមានពហុកោណនិយ័តមាន n ជ្រុងចារឹកក្នុងរង្វង់ ។ ផ្ទៃនៃពហុកោណនិយ័តនេះ
បានពី n ដងនៃផ្ទៃត្រីកោណ ដែលបានចាក់ពណ៌ដូចរូបខាងស្តាំ ។

-ផ្ទៃត្រីកោណមួយនៃពហុកោណនិយ័ត

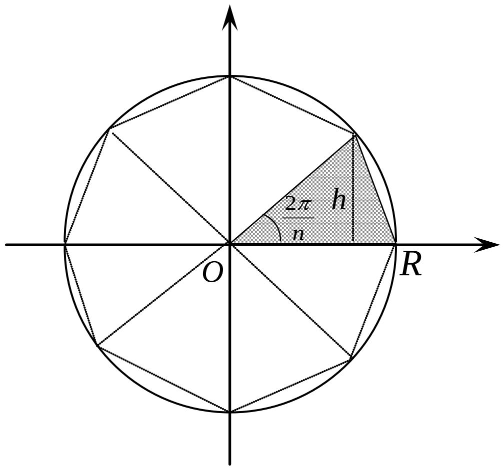
$$S_1=\frac{1}{2}Rh=\frac{1}{2}R\times R\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}$$

-ផ្ទៃនៃពហុកោណនិយ័តដែលមាន n ជ្រុង គឺ $S_2=nS_1$ ឬ $S_2=\frac{1}{2}R^2n\sin\frac{2\pi}{n}$

-នៅពេល $n\to+\infty$ នោះផ្ទៃនៃពហុកោណនិយ័តក្លាយទៅជាផ្ទៃក្រឡានៃរង្វង់មានកាំ R

គេបាន ផ្ទៃក្រឡារង្វង់ $S=\lim\limits_{n\to+\infty}S_2=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}R^2n\sin\frac{2\pi}{n}\right)$

$$=\frac{1}{2}R^2\lim_{n\to+\infty}\left(n\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$



តាង $t=\frac{1}{n}$ នោះ $n=\frac{1}{t}$

បើ $n\to+\infty$ នោះ $t\to0$

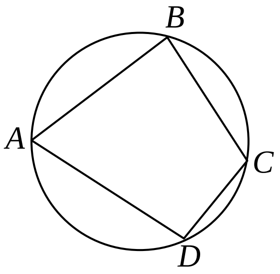
$$S=\frac{1}{2}R^2\cdot\lim_{t\to0}\left(\frac{1}{t}\sin2\pi t\right)$$

$$=\frac{1}{2}R^2\cdot\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin2\pi t}{t}\right)$$

$$=\frac{1}{2}R^2\cdot\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin2\pi t}{2\pi t}\times2\pi\right)$$

$$=\frac{1}{2}R^2(1\times2\pi)=\boxed{\pi R^2}$$

21. ចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់



> ចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ ផលបូករង្វាស់មុំឈមស្មើនឹង 180° ។
>
> $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180^\circ$

☑ **សម្រាយបញ្ជាក់** :

ដោយ $\angle A=\frac{\overset{\frown}{BCD}}{2}$, $\angle C=\frac{\overset{\frown}{BAD}}{2}$ និង $\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{BAD}=360^\circ$

នាំឱ្យ $\angle A+\angle C=\frac{\overset{\frown}{BCD}}{2}+\frac{\overset{\frown}{BAD}}{2}=\frac{\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{BAD}}{2}=\frac{360^\circ}{2}=180^\circ$

ដូចគ្នាដែរ $\angle B=\frac{\overset{\frown}{ADC}}{2}$, $\angle D=\frac{\overset{\frown}{ABC}}{2}$ និង $\overset{\frown}{ADC}+\overset{\frown}{ABC}=360^\circ$

នាំឱ្យ $\angle B+\angle D=\frac{\overset{\frown}{ADC}}{2}+\frac{\overset{\frown}{ABC}}{2}=\frac{\overset{\frown}{ADC}+\overset{\frown}{ABC}}{2}=\frac{360^\circ}{2}=180^\circ$

ដូចនេះ $\boxed{\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180^\circ}$ ។

www.facebook.com/7khmer
fb : Entertainment And Knowledge

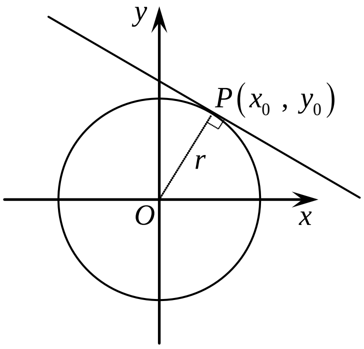
22. សមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់

> សមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ $x^2+y^2=r^2$ ត្រង់ចំណុច $P(x_0\ ,\ y_0)$
> មានរាង ៖ $\boxed{x_0x+y_0y=r^2}$ ។

☑ **សម្រាយបញ្ជាក់** :

គេមាន សមីការរង្វង់ $x^2+y^2=r^2$ (ធ្វើដេរីវេធៀបនឹង x លើអង្គទាំងពីរ)

$$2x+2y'y=0 \Rightarrow y'=-\frac{x}{y} \text{ ឬ } y'(x_0)=-\frac{x_0}{y_0}$$



សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$$=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)+y_0=\frac{-x_0x+x_0^2}{y_0}+y_0$$

$$=\frac{-x_0x+x_0^2+y_0^2}{y_0}$$

$$y_0y=-x_0x+x_0^2+y_0^2$$

$$x_0x+y_0y=x_0^2+y_0^2$$

ដោយ $P(x_0\ ,\ y_0)$ ជាចំណុចនៅលើរង្វង់ នោះវាផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_0^2+y_0^2=r^2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់អាចសរសេរ $\boxed{x_0x+y_0y=r^2}$ ។

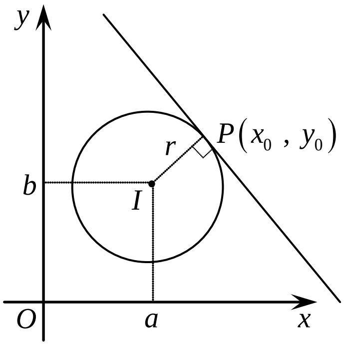
23. សមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់

> សមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ត្រង់ចំណុច
> $P(x_0\ ,\ y_0)$ មានរាង ៖ $\boxed{(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2}$ ។

☑ **សម្រាយបញ្ជាក់** :

គេមាន $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ (ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរធៀបនឹង x)

គេបាន $2(x-a)+2y'(y-b)=0$ ឬ $y'=-\dfrac{x-a}{y-b}$ ឬ $y'(x_0)=-\dfrac{x_0-a}{y_0-b}$



សមីការបន្ទាត់ប៉ះមានរាង $y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$$y=-\frac{x_0-a}{y_0-b}(x-x_0)+y_0$$

$$(y_0-b)(y-y_0)=-(x_0-a)(x-x_0)$$

$$(x_0-a)(x-a+a-x_0)+(y_0-b)(y-b+b-y_0)=0$$

$$(x_0-a)(x-a)-(x_0-a)^2+(y_0-b)(y-b)-(y_0-b)^2=0$$

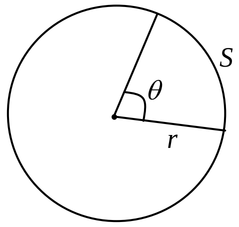
$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2$$

ដោយ $P(x_0\ ,\ y_0)$ ជាចំណុចនៅលើរង្វង់ នោះវាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់អាចសរសេរ $\boxed{(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2}$ ។

24. ប្រវែងធ្នូនៃរង្វង់

> រង្វង់មួយមានប្រវែងកាំ r និងមានមុំផ្ចិត θ គិតជារ៉ាដ្យង់ ស្កាត់ដោយធ្នូមានប្រវែង S នោះគេបាន $\boxed{S = r\theta}$ ។

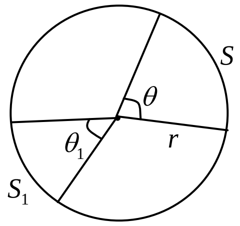


☑ **សម្រាយបញ្ជាក់**

យើងមានរង្វង់កាំ r និងមានមុំផ្ចិត θ និង θ_1 ដែលវាស់ជារ៉ាដ្យង់

ហើយមុំផ្ចិតទាំងពីរស្កាត់ដោយធ្នូ S និង S_1 រៀងគ្នា (ដូចរូប) ។

តាមលក្ខណៈធរណីមាត្រ យើងបាន $\dfrac{\theta}{\theta_1} = \dfrac{S}{S_1}$



ឧបមាថា $\theta_1 = 1$ រ៉ាដ្យង់ នោះ $S_1 = r$

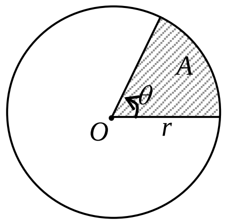
នាំឱ្យ $\dfrac{\theta}{1} = \dfrac{S}{r}$ ទាញបាន $S = r\theta$

ដូចនេះ ចំពោះរង្វង់មួយមានប្រវែងកាំ r និងមានមុំផ្ចិត θ គិតជារ៉ាដ្យង់

ស្កាត់ដោយធ្នូបានប្រវែង S ដែល $\boxed{S = r\theta}$ ។

25. ផ្ទៃចម្រៀកថាស

> ផ្ទៃក្រឡាចម្រៀកថាស A នៃរង្វង់ដែលមានកាំ r និងមាន មុំផ្ចិត θ គិតជារ៉ាដ្យង់ កំណត់ដោយ $\boxed{A = \frac{1}{2}r^2\theta}$ ។



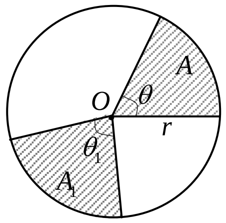
☑ **សម្រាយបញ្ជាក់**

យើងមានរង្វង់ផ្ចិត O និងកាំ r ហើយ θ ជាមុំផ្ចិតគិតជារ៉ាដ្យង់

យើងនឹងកំណត់ផ្ទៃចម្រៀកថាស A ដែលអាស្រ័យនឹងមុំផ្ចិត θ

ឧបមាថារង្វង់មានកាំប្រវែង r ហើយ θ_1 និង θ ជាមុំផ្ចិតពីរ

ដែលគិតជារ៉ាដ្យង់ និងកំណត់បានផ្ទៃចម្រៀកថាស A_1 និង A រៀងគ្នា



តាមលក្ខណៈ ធរណីមាត្រៈ $\dfrac{\theta}{\theta_1} = \dfrac{A}{A_1}$

យក $\theta_1 = 2\pi$ នោះ $A_1 = \pi r^2$

គេបាន $\dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{A}{\pi r^2}$ ទាញបាន $A = \dfrac{1}{2}r^2\theta$

ដូចនេះ ផ្ទៃចម្រៀកថាស A នៃរង្វង់កាំ r មានមុំផ្ចិត $\theta\,(rd)$

កំណត់ដោយ $\boxed{A = \frac{1}{2}r^2\theta}$ ។

www.facebook.com/7khmer
fb : Entertainment And Knowledge

លំហាត់អនុវត្ត

1. គេឱ្យបន្ទាត់ EF ប៉ះរង្វង់ O ត្រង់ចំណុច C ។ អង្កត់ធ្នូ AB ស្របនឹងបន្ទាត់ EF ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$ ។
2. គេឱ្យចំណុច A នៅក្រៅរង្វង់ O ។ បន្ទាត់ពីរ AB និង AC ប៉ះរង្វង់រៀងគ្នាត្រង់ B និង C ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

   ក. $AB = AC$ ។

   ខ. $[AO)$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle BAC$ និង $\angle BOC$ ។
3. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ក្នុងចតុកោណចារឹកក្រៅរង្វង់មួយ មានផលបូករង្វាស់ជ្រុងឈមស្មើគ្នា ។
4. គេឱ្យ $\angle ABC$ ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O ដែល $O \in [BC]$ ។ បង្ហាញថា $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ ។
5. ស្រាយបញ្ជាក់ ចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ ផលបូករង្វាស់មុំឈមស្មើនឹង $180°$ ។
6. ស្រាយបញ្ជាក់ថា មុំក្នុងរង្វង់មានរង្វាស់ស្មើនឹង កន្លះផលបូក រង្វាស់ធ្នូស្កាត់ដោយជ្រុងមុំ និងបន្លាយនៃជ្រុងនោះ ។
7. ស្រាយបញ្ជាក់ថា មុំក្រៅរង្វង់មានរង្វាស់ស្មើនឹង កន្លះផលដក រង្វាស់ធ្នូស្កាត់ស្កាត់ដោយជ្រុងនៃមុំនេះ ។
8. ក. បង្ហាញថា សមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ $x^2 + y^2 = r^2$ ត្រង់ចំណុច $P(x_0\ ,\ y_0)$ មានរាង ៖ $x_0x + y_0y = r^2$ ។

   ខ. បង្ហាញថា សមីការបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ត្រង់ចំណុច $P(x_0\ ,\ y_0)$ មានរាង ៖

   $(x_0 - a)(x-a) + (y_0 - b)(y-b) = r^2$ ។
9. បង្ហាញថា ថាសដែលមានកាំ R មានក្រឡាផ្ទៃកំណត់ដោយ $S = \pi R^2$ ។