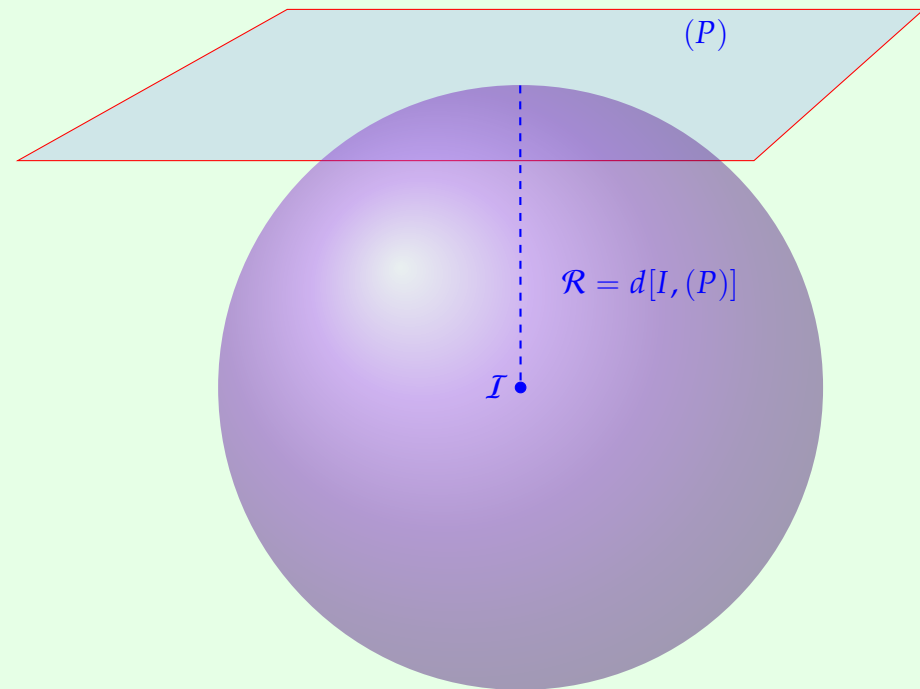


ផលគុណគ្រឹះក្នុងលំហ



២០២១

ចៀនថ្ងៃនេះដើម្បីជូនដំណឹងសម្រាប់អ្នកសរុបសរុប !!!

Contents

១	កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ	១
២	ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច	១
៣	កូអរដោនេចំណុចកណ្តាល	១
៤	ផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ ២	១
៥	វ៉ិចទ័រ ២ស្របគ្នា	២
៦	វ៉ិចទ័រ ២កែងគ្នា	២
៧	ផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ ២	២
៨	សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង សមីការបន្ទាត់ឆ្លុះ	២
៩	សមីការប្លង់	២
១០	ត្រីកោណកែង	៣
១១	ត្រីកោណកែងសមបាត	៣
១២	ត្រីកោណកែងសមិម្ស	៣
១៣	ប្រលេឡូក្រាម	៤
១៤	ចតុកោណកែង	៤
១៥	ចតុកោណញ្ជាយ	៥
១៦	ចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់និងប្លង់	៥
១៧	សមីការបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ពីរ	៥
១៨	សមីការប្លង់កំណត់ដោយបន្ទាត់មួយ និង ចំណុចមិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់នោះ	៦
១៩	សមីការប្លង់ប្រសព្វជាមួយ និង បន្ទាត់ ២	៧
២០	សមីការប្លង់កំណត់ដោយបន្ទាត់ស្របពីរ	៧
២១	សមីការប្លង់កាត់តាមបីចំណុច	៨
២២	ចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ និង ស្វ៊ែរ	៨
២៣	ចំណុចប៉ះរវាងបន្ទាត់ និង ស្វ៊ែរ	៩
២៤	ចំណុចប៉ះរវាងប្លង់ និង ស្វ៊ែរ	៩
២៥	ចំណុចប៉ះរវាងស្វ៊ែរ ២	៩
២៦	សមីការប្លង់ និង ស្វ៊ែរ	១០
២៧	រកសមីការបន្ទាត់ដោយស្គាល់ជ្រុង និង កាំ	១០
២៨	រកសមីការស្វ៊ែរដោយស្គាល់ជ្រុង និង កាត់តាមចំណុចមួយ	១០
២៩	រកសមីការស្វ៊ែរដោយស្គាល់ចុងទាំងពីរនៃអង្កត់ជ្រុង ឬ មជ្ឈមាត្រ	១១
៣០	រកសមីការស្វ៊ែរដោយស្គាល់ជ្រុង និង ប៉ះជាមួយប្លង់មួយ	១១
៣១	រកសមីការស្វ៊ែរដែលស្គាល់ជ្រុង និង ប៉ះនៅនិងបន្ទាត់ មួយ	១១
៣២	លំហាត់នៅក្នុងសៀវភៅថ្នាក់ទី ១២ កម្រិតខ្ពស់	១២
៣៣	លំហាត់ធ្លាប់ប្រឡងចេញ	១៤

ផែនទីបង្រៀនគ្រឹះក្នុងវិស័យ

១ កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ

ជាទូទៅ កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រពីរនៃ $\vec{A}(x_A, y_A, z_A), \vec{B}(x_B, y_B, z_B)$ កំណត់ដោយ៖

$$\vec{AB} = (x_A - x_B, y_A - y_B, z_A - z_B)$$

២ ប្រាយរវាងពីរចំណុច

ជាទូទៅ ប្រាយរវាងពីរចំណុចនៃ $\vec{A}(x_A, y_A, z_A), \vec{B}(x_B, y_B, z_B)$ កំណត់ដោយ៖

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

៣ កូអរដោនេចំណុចកណ្តាល

ជាទូទៅ កូអរដោនេនៃចំណុចកណ្តាលនៃ $\vec{A}(x_A, y_A, z_A), \vec{B}(x_B, y_B, z_B)$ កំណត់ដោយ៖

$$M_{AB} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

៤ ផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ

ជាទូទៅ ផលគុណស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រពីរនៃ $\vec{u}(x, y, z), \vec{v}(x', y', z')$ កំណត់ដោយ៖

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

រៀបរៀង និង បង្រៀនដោយ លោក ពេជ្រធីតា ធីតា កម្រងវិទ្យាស្ថានប្រចាំឆ្នាំ ២០២២

៥ វ៉ិចទ័រស្របគ្នា

ជាទូទៅ វ៉ិចទ័រស្របគ្នានៃ $\vec{A}(x_A, y_A, z_A), \vec{B}(x_B, y_B, z_B)$ កំណត់ដោយ៖

$$\vec{A} \parallel \vec{B} = \frac{x_A}{x_B} = \frac{y_A}{y_B} = \frac{z_A}{z_B}$$

៦ វ៉ិចទ័រកែងគ្នា

ជាទូទៅ វ៉ិចទ័រស្របគ្នានៃ $\vec{A}(x_A, y_A, z_A), \vec{B}(x_B, y_B, z_B)$ កំណត់ដោយ៖

$$\vec{A} \perp \vec{B} \iff x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B = 0$$

៧ ផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ ២

ជាទូទៅ ផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}(x, y, z), \vec{v}(x', y', z')$ កំណត់ដោយ៖

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (yz' - y'z) \vec{i} - (xz' - x'z) \vec{j} + (xy' - x'y) \vec{k} \end{aligned}$$

៨ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង សមីការបន្ទាត់

ជាទូទៅ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង សមីការបន្ទាត់ ដែលកាត់តាមចំណុច $A(x_A, y_A, z_A)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{n}(a, b, c)$ កំណត់ដោយ៖

$$(L) : \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (D) : \frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}$$

៩ សមីការប្លង់

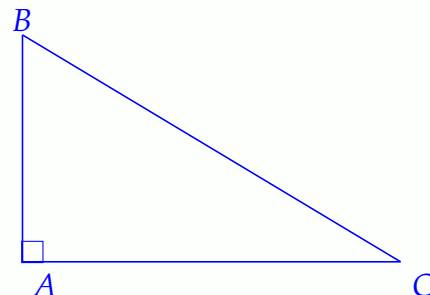
ជាទូទៅ សមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច $A(x_A, y_A, z_A)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{n}(a, b, c)$ កំណត់ដោយ៖

$$P : a(x - x_A) + (y - y_A)b + (z - z_A)c + d = 0$$

១០ ត្រីកោណកែង

ជាទូទៅ គេមានត្រីកោណ $\triangle ABC$ មួយដែលគេស្គាល់កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងបីរបស់វា គឺ $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C)$ ។ ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថា $\triangle ABC$ ជាត្រីកោណកែងក្នុងកំពូល A គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម៖

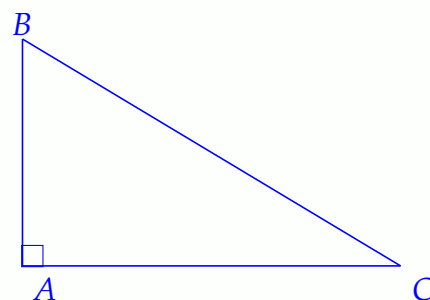
- 💧 កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$
- 💧 គណនាផលគុណស្កាលែរ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- 💧 បើ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ នោះគេនាំឲ្យបាន $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$
- 💧 គេបាន $\triangle ABC$ ជាត្រីកោណកែងក្នុងកំពូល A



១១ ត្រីកោណកែងសមបាត

ជាទូទៅ គេមានត្រីកោណ $\triangle ABC$ មួយដែលគេស្គាល់កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងបីរបស់វា គឺ $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C)$ ។ ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថា $\triangle ABC$ ជាត្រីកោណកែងសមបាតក្នុងកំពូល A គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម៖

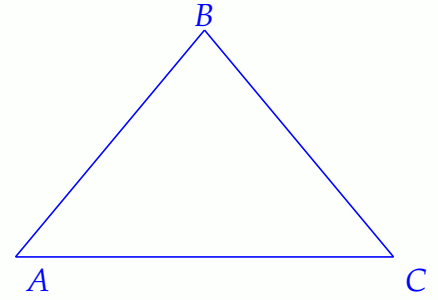
- 💧 កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$
- 💧 គណនាប្រវែងវ៉ិចទ័រ $|\overrightarrow{AB}|, |\overrightarrow{AC}|$
- 💧 គណនាផលគុណស្កាលែរ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- 💧 បើ $\begin{cases} |\overrightarrow{AB}|, |\overrightarrow{AC}| \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$ នោះគេនាំឲ្យបាន $\begin{cases} AB = AC \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$
- 💧 គេបាន $\triangle ABC$ ជាត្រីកោណកែងសមបាតក្នុងកំពូល A



១២ ត្រីកោណកែងសម័ង្ស

ជាទូទៅ គេមានត្រីកោណ $\triangle ABC$ មួយដែលគេស្គាល់កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងបីរបស់វា គឺ $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C)$ ។ ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថា $\triangle ABC$ ជាត្រីកោណកែងសម័ង្សក្នុងកំពូល A គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម៖

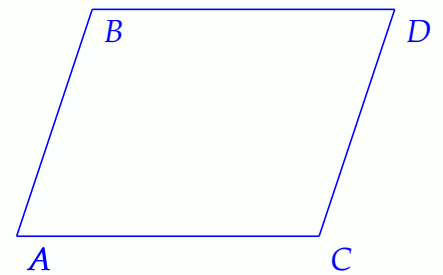
- កុំអោយមាននិមិត្តរូប $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$
- គណនាប្រវែងនិមិត្តរូប $|\overrightarrow{AB}|, |\overrightarrow{AC}|, |\overrightarrow{AB}|$
- បើ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$
- គេបាន $\triangle ABC$ ជាត្រីកោណកែងសម័ង្ស



១៣ ប្រលេឡូក្រាម

ជាទូទៅ គេមានចតុកោណ $ABCD$ មួយដែលគេស្គាល់កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងបួនរបស់វា គឺ $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C), D(x_D, y_D, z_D)$ ។ ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថា $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម៖

- កុំអោយមាននិមិត្តរូប $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$
- បើ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$
- សន្និដ្ឋាន $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម



១៤ ចតុកោណកែង

ជាទូទៅ គេមានចតុកោណ $ABCD$ មួយដែលគេស្គាល់កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងបួនរបស់វា គឺ $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C), D(x_D, y_D, z_D)$ ។ ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថា $ABCD$ ជាចតុកោណកែង គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម៖

- កុំអោយមាននិមិត្តរូប $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$
- គណនា ប្រវែងនិមិត្តរូប $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម
- គណនា $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ នោះ $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$
- គេបាន $ABCD$ ជាចតុកោណកែង



ជំនួយ: គេមានបតុកោណ $ABCD$ មួយដែលគេស្គាល់កូអរដោនេនៃកំពូលទាំងបួនរបស់វា គឺ $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C), D(x_D, y_D, z_D)$ ។ ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថា $ABCD$ ជាបតុកោណឆ្មោយ បាត់បង់ AB និង បាត់បង់ CD គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម៖

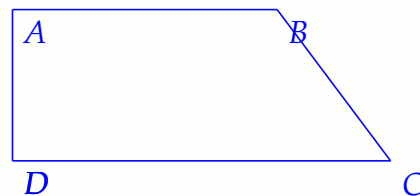
❖ កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$

AB និង បាត់បង់ CD ។

❖ បើ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ ជាវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែរនិងគ្នា

❖ គណនា $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ នោះ $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

❖ គេបាន $ABCD$ ជា $ABCD$ ជាបតុកោណឆ្មោយបាត់បង់



១៦ បំណុលប្រសព្វរវាងបន្ទាត់និងប្លង់

ជំនួយ: គេមានបន្ទាត់ (L) មានសមីការបន្ទាត់ $(L) : \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ និងប្លង់ (P) ដែលមានសមីការ $(P) : \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ បើបន្ទាត់ (L) ប្រសព្វជាមួយប្លង់ (P) ត្រង់ចំណុច A មួយ។ ដើម្បីកំណត់កូអរដោនេចំណុច A គេត្រូវ៖

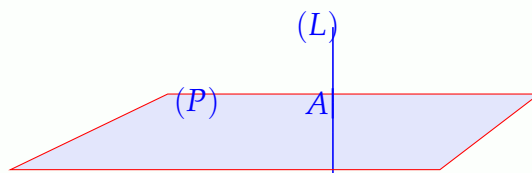
❖ តាង $A(x_A, y_A, z_A)$

❖ ដោយ $A \in (L) \Rightarrow \frac{x_A - x_0}{a} = \frac{y_A - y_0}{b} = \frac{z_A - z_0}{c} = t$

❖ គេបានប្រព័ន្ធគ្រប់ $\begin{cases} x_A = x_0 + at \\ y_A = y_0 + bt \\ z_A = z_0 + ct \end{cases} \quad (1)$

❖ ដោយ $A \in (P) \Rightarrow \alpha x_A + \beta y_A + \gamma z_A + \delta = 0 \quad (2)$

❖ យកសមីការ (1) ជួសជុលក្នុងសមីការ (2)
រួចដោះស្រាយសមីការក្នុង t រួចជួសជុលក្នុងសមីការ (1) គេ
បាន $A(x_A, y_A, z_A)$ ។



១៧ សមីការបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ពីរ

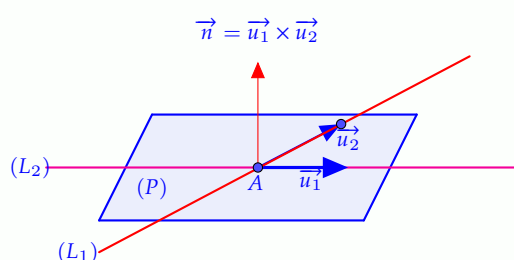
រៀបរៀង និង បង្រៀនដោយ ពេទ្យ ពេទ្យព្រះសុភ័ក្ត្រ កម្រងវិទ្យាសាស្ត្រសិក្សាស្រាវជ្រាវ
១៩ សមីការប្លង់ប្រសព្វជាមួយ និង បន្ទាត់ ២

ជំនួយការ គេមានបន្ទាត់ពី $(L_1), (L_2)$ ដែលមានសមីការរៀងគ្នា $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ និង $\frac{x-x_2}{a} = \frac{y-y_2}{b} = \frac{z-z_2}{c}$ ឧបមាជាបន្ទាត់នាំពីរប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច $A(x_A, y_A, z_A)$ ។ ដើម្បីកំណត់សមីការប្លង់ (P) ។ គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

♦ វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ស្រប (L_1) និង (L_2) គឺ $\vec{u}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ និង $\vec{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$

♦ តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) គេបាន $\vec{n} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$ ។ ឧបមាថា $\vec{n} = (a, b, c)$

♦ ដោយ $N \in (P)$ គេកំណត់សមីការប្លង់ (P) តាមរូបមន្ត $a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$



២០ សមីការប្លង់កំណត់ដោយបន្ទាត់ស្របពីរ

ជំនួយការ គេមានបន្ទាត់ពី $(L_1), (L_2)$ ដែលមានសមីការរៀងគ្នា $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ និង $\frac{x-x_2}{a} = \frac{y-y_2}{b} = \frac{z-z_2}{c}$ ឧបមាជាបន្ទាត់នាំពីរប្រសព្វគ្នា ។ ដើម្បីកំណត់សមីការប្លង់ (P) កំណត់ដោយបន្ទាត់ស្រប (L_1) និង (L_2) ។ គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

♦ វ៉ិចទ័រនៃបន្ទាត់ស្រប (L_1) និង (L_2) គឺ $\vec{u} = (a, b, c)$

♦ យក $M \in (L_1)$ និង $N \in (L_2)$ ដែល $M(x_1, y_1, z_1)$ និង $N(x_2, y_2, z_2)$

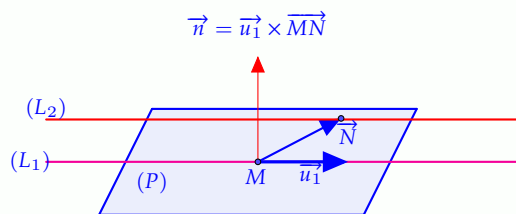
♦ គេបាន $\vec{MN} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

♦ តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) គេបាន $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{MN} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{bmatrix}$ ។ ឧបមា

ថា $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$

- ♦ ដោយ $M \in (P)$ គេកំណត់សមីការប្លង់ (P) តាមរូបមន្ត

$$\alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1) + \gamma(z - z_1) = 0$$



២១ សមីការប្លង់កាត់តាមបីចំណុច

ជាទូទៅ

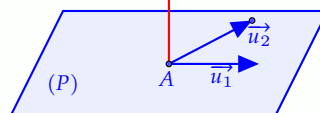
នៅក្នុង តម្រុយ អរ តូ ណ ម៉ាល់ មាន និសាដៅ វិជ្ជា មាន

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានបីចំណុច $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B), C(x_C, y_C, z_C)$ $\vec{n} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$

។ ដើម្បីកំណត់សមីការប្លង់ (P) គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម៖

- ♦ កំណត់វ៉ិចទ័រណាត់ម៉ាល់ $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (a, b, c)$
- ♦ ជ្រើសរើសចំណុចកាត់ A ឬ B ឬ C
- ♦ គេកំណត់សមីការប្លង់ (P) តាមរូបមន្ត

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$



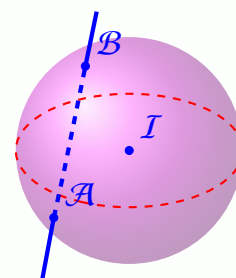
២២ បំណុលប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ និង ស្វ៊ែរ

ជាទូទៅ ជាទូទៅ គេមានស្វ៊ែរ $(s) : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ និង បន្ទាត់ $(L) : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ ដើម្បី ចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) និង ស្វ៊ែរ (s) គេត្រូវ៖

- ♦ តាង $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t$
 ឬ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ ។

កុំអារម្មណ៍ចំណុចប្រសព្វនោះ ។

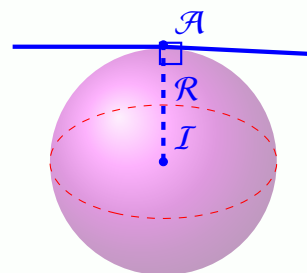
- ♦ យកសមីការ (១) ទៅ ជំនួសក្នុងសមីការស្វ៊ែរ (s) រួច
 ដោះស្រាយរក t បន្ទាប់មកក៏យក t ដែលបានរកឃើញ
 នោះទៅជំនួសក្នុងសមីការ (១) នោះគេ នឹង រកឃើញ



២៣ ចំណុចប៉ះរវាងបន្ទាត់ និង ស្វ៊ែរ

ជំនួយការ គេមានស្វ៊ែរ $(s) : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ និង បន្ទាត់ $(L) : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ ដើម្បីរកចំណុចប៉ះរវាងបន្ទាត់ (L) និង ស្វ៊ែរ (s) គេត្រូវ÷

- ❖ ស្វ៊ែរ (s) មានផ្ចិត $I(a, b, c)$ និងកាំ R ។
- ❖ បន្ទាត់ (L) ប៉ះនិងស្វ៊ែរ (s) លុះត្រាតែ $d[I, (L)] = R$ ។
- ❖ ដើម្បីគណនាកូអរដោនេចំណុចប៉ះគឺគេរកដូចកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វនៃ ។



២៤ ចំណុចប៉ះរវាងប្លង់ និង ស្វ៊ែរ

ជំនួយការ គេមានស្វ៊ែរ $(s) : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ និង ប្លង់ $(P) : \alpha x + \beta y + \gamma z + \partial = 0$

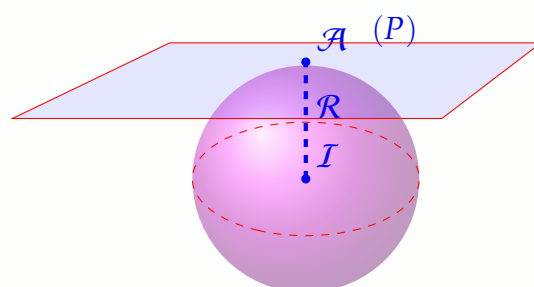
- ❖ ស្វ៊ែរ (s) មានផ្ចិត $I(a, b, c)$ និងកាំ R ។
- ❖ បន្ទាត់ (L) ប៉ះនិងស្វ៊ែរ (s) លុះត្រាតែ $d[I, (L)] = R$ ។

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = a + \alpha t \\ y_A = b + \beta t \\ z_A = c + \gamma t \end{cases} \quad (1)$$

ដើម្បី គណនា កូអរដោនេ ចំណុច ប៉ះ គឺ គេ រក ដូច កូអរដោនេ ចំណុចប្រសព្វនៃ ។

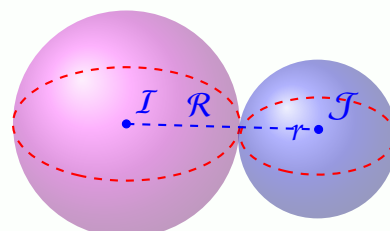
- ❖ តាង $A(x_A, y_A, z_A)$ ។
 - ❖ គេបាន $\vec{IA} \parallel \vec{n} \Rightarrow \vec{IA} = t \cdot \vec{n}$ ។
 - ❖ គេមាន $\vec{IA} = (x_A - a, y_A - b, z_A - c)$ និង $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$
- $$\vec{IA} = t \cdot \vec{n} \Rightarrow \begin{cases} x_A - a = \alpha t \\ y_A - b = \beta t \\ z_A - c = \gamma t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- ❖ ដោយ $A \in (P) \Rightarrow \alpha x + \beta y + \gamma z + \partial = 0$ (២) ។
- ❖ យក (១) ជំនួសក្នុង (២) រួចដោះស្រាយរក t បន្ទាប់មកយកតម្លៃ t ដែលបានរកឃើញទៅជំនួសក្នុង (១) ។



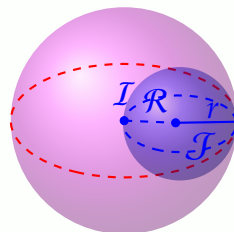
២៥ ចំណុចប៉ះរវាងស្វ៊ែរ ២

ជំនួយការ ស្វ៊ែរពីប៉ះគ្នាខាងក្រៅចំណុចមួយ គេមានស្វ៊ែរ ២ (s_1) និង (s_2) មានផ្ចិត I និង J រៀងគ្នាហើយកាំ R និង r ។ ស្វ៊ែរ (s_1) និង (s_2) ប៉ះគ្នាខាងក្រៅចំណុចមួយ លុះត្រាតែ $D(IJ) = R + r$ ។



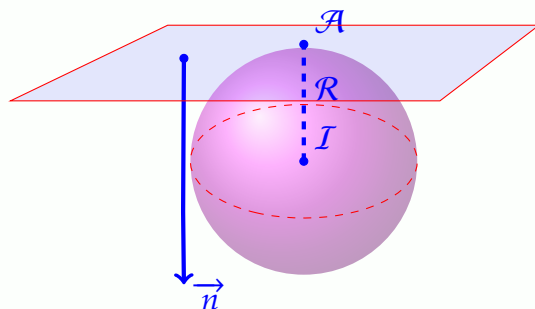
ជំនួយ: ផ្ទៃក្នុងនៃស្វ៊ីតប៉ារ៉ាប៉ូលូតូម

គេមានស្វ៊ីត ២ (s_1) និង (s_2) មានផ្ចិត I និង J រៀងគ្នាហើយកាំ R និង r ។ ស្វ៊ីត (s_1) និង (s_2) ប៉ះគ្នាខាងក្នុងចំណុចមួយលុះត្រាតែ $D(IJ) = R - r$ ដែល $R > r$



២៦ សមីការប្លង់ និង ស្វ៊ីត

ជំនួយ: គេមានស្វ៊ីត $(s) : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ និងចំណុច $A \in (s)$ ដែល $A(x_A, y_A, z_A)$ កំណត់សមីការប្លង់ (P) ប៉ះស្វ៊ីត (s) ត្រង់ A ។ ដោយស្វ៊ីត (s) ប៉ះប្លង់ (P) ត្រង់ចំណុច A នោះវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ពីផ្ចិត I នៅប៉ះ និងចំណុច A ជារ៉ិចទ័រណរម៉ាល់របស់ប្លង់ (P) គឺ $\vec{n}_p = \vec{IA} = (x_A - a, y_A - b, z_A - c)$ ដោយ $A \in (P)$ នោះគេសរសេរបានសមីការប្លង់:



$$(P) : (x_A - a)(x - x_A) + (y_A - b)(y - y_A) + (z_A - c)(z - z_A) = 0$$

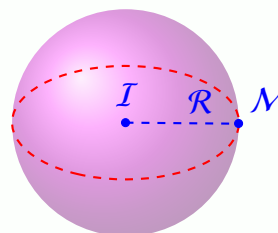
២៧ អេសមីការបង្វាស់ដោយស្ថានភាពផ្ចិត និង កាំ

ជំនួយ: នៅក្នុង កម្រុយ អរតូណរម៉ាល់ មួយ $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ស្វ៊ីតដែលមានផ្ចិត $I(a, b, c)$ និង កាំ R ។ ដើម្បីសរសេរសមីការស្វ៊ីត (S) ដែលមានផ្ចិត $I(a, b, c)$ និងមានរង្វាស់កាំ R គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម៖

• តាង $M(x, y, z) \in (S)$

• គេបាន $|\vec{IM}| = R$ ដោយ $\vec{IM} = (x - a, y - b, z - c)$

ដូចនេះ $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ ជាសមីការ



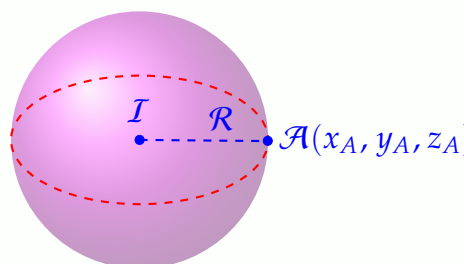
២៨ អេសមីការស្វ៊ីតដោយស្ថានភាពផ្ចិត និង កាត់តាមចំណុចមួយ

ជំនួយ: នៅក្នុង កម្រុយ អរតូណរម៉ាល់ មួយ គេឱ្យ ចំណុច $I(a, b, c), A(x_A, y_A, z_A)$ ដើម្បីកសាងសមីការស្វ៊ីតដែលមានផ្ចិត I ដែលកាត់តាមចំណុច A គេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម៖

• តាង R កាំរបស់ស្វ៊ីត (S) គេបាន $R = |\vec{IA}|$

ដោយ $|\vec{IA}| = \sqrt{(x_A - a)^2 + (y_A - b)^2 + (z_A - c)^2}$

• ប្រើប្រទេស $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R^2$



លំហាត់នៅក្នុងសៀវភៅថ្នាក់ទី ១២ កម្រិតខ្ពស់

១. រកផលគុណនៃវ៉ិចទ័រកត្តា រួចគូសរូបតាង

ក. $\vec{j} \times \vec{i}$

ខ. $\vec{i} \times \vec{j}$

គ. $\vec{j} \times \vec{k}$

ឃ. $\vec{k} \times \vec{j}$

ង. $\vec{i} \times \vec{k}$

ច. $\vec{k} \times \vec{i}$

២. រក $\vec{u} \times \vec{v}$ អាកូណម៉ាលនៅ និង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ផលក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោមនេះ ÷

១. $\vec{u} = (2 - 3, 1), \vec{v} = (1, -2, 1)$

៤. $\vec{u} = (-10, 0, 6), \vec{v} = (7, 0, 0)$

២. $\vec{u} = (1, -1, 2), \vec{v} = (0, 1, 0)$

៥. $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

៣. $\vec{u} = (12, -3, 0), \vec{v} = (-2, 5, 0)$

៦. $\vec{u} = \vec{j} + 6\vec{k}, \vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

៣. រក $\vec{u} \times \vec{v}$ និង រកវ៉ិចទ័រកត្តា ដែលអ្នកកូណាល់នៅ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ផងក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោមនេះ ÷

ក. $\vec{u} = (4, -3.5, 7), \vec{v} = (-1, 8, 4)$

គ. $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}, \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{3}{4}\vec{j} + \frac{1}{10}\vec{k}$

ខ. $\vec{u} = (-8, -6, 4), \vec{v} = (10, -12, -2)$

ឃ. $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{k}, \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} + 6\vec{j}$

៤. រកផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាមដែលមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាជ្រុងក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម ÷

ក. $\vec{u} = \vec{j}, \vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$

គ. $\vec{u} = (3, 2, -1), \vec{v} = (1, 2, 3)$

ខ. $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$

ឃ. $\vec{u} = (2, -1, 0), \vec{v} = (-1, 2, 0)$

៥. ជ្រៀងផ្ទាំងចំណុចខាងក្រោម ជាកំពូលរបស់ប្រលេឡូក្រាមរួចរកផ្ទៃក្រឡា ÷

ក. $(1, 1, 1), (1, 2, 3), (6, 5, 2), (7, 7, 5)$

ខ. $(2, -1, 1), (5, 1, 4), (0, 1, 1), (3, 3, 5)$

៦. រកផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណដែលមានកំពូលខាងក្រោម ÷

ក. $(0, 0, 0), (1, 2, 3), (-3, 0, 0)$

គ. $(1, 3, 5), (3, 3, 0), (-2, 0, 5)$

ខ. $(2, -3, 4), (0, 1, 2), (-1, 2, 0)$

ឃ. $(1, 2, 0), (-2, 1, 0), (0, 0, 0)$

៧. រក $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម ÷

ក. $\vec{u} = \vec{i}, \vec{v} = \vec{j}, \vec{w} = \vec{k}$

ខ. $\vec{u} = (1, 1, 1), \vec{v} = (2, 1, 0), \vec{w} = (0, 0, 1)$

គ. $\vec{u} = (2, 0, 1), \vec{v} = (0, 3, 0), \vec{w} = (0, 0, 1)$

ឃ. $\vec{u} = (2, 0, 0), \vec{v} = (1, 1, 1), \vec{w} = (0, 2, 2)$

៨. ដោយប្រើផលគុណចម្រុះនៃវ៉ិចទ័រក្នុងលំហ ចូរគណនាមាឌប្រលេពីប៉ែតដែលមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ជាជ្រុងដប់ដូចខាងក្រោម ÷

ក. $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}, \vec{v} = \vec{j} + \vec{k}, \vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$

ខ. $\vec{u} = (1, 3, 1), \vec{v} = (0, 5, 5), \vec{w} = (4, 0, 4)$

៩. រកមាត្រប្រលោមប៉ារ៉ាម៉ែត្រដែលមានកំពូលដូចខាងក្រោម៖

ក. $(0, 0, 0), (3, 0, 0), (0, 5, 1), (3, 5, 1), (2, 0, 5), (5, 0, 5), (2, 5, 6), (5, 5, 6)$

ខ. $(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 2), (0, 1, 1), (2, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 1), (2, 2, 3)$

១០. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច ហើយស្របទៅ និង ឆ្លងកាត់ប្រព័ន្ធដូចខាងក្រោម៖

ក. $A(0, 0, 0), \vec{u} = (1, 2, 3)$

ឃ. $D(-2, 0, 3), \vec{u} = (6\vec{i} + 3\vec{j})$

ខ. $B(0, 0, 0), \vec{u} = (-2, \frac{5}{2}, 1)$

ង. $P(1, 0, 1), x = 3 + 3t, y = 5 - 2t, z = -7 + t$

គ. $C(-2, 0, 3), \vec{u} = (2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k})$

ច. $Q(-3, 5, 4), \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = z-3$

១១. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុចខាងក្រោម ៖

ក. $A(5, -3, 2), B(-\frac{2}{3}, \frac{2}{2}, 1)$

ខ. $P(1, 0, 1), Q(1, 3, -2)$

១២. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់

ក. កាត់តាមចំណុច $A(2, 3, 4)$ ហើយស្របទៅ និង ប្លង់ xoz និង ប្លង់ $yozy$ ។

ខ. កាត់តាមចំណុច $(2, 3, 4)$ ហើយកែងទៅ និង ប្លង់ $3x + 2y - z = 6$ ។

១៣. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L ដូចខាងក្រោម៖

ក. បន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច ហើយស្របទៅ និង ឆ្លងកាត់ $\vec{u} = 4\vec{i} - \vec{k}$

a. $(2, 3, 0)$

b. $(-6, 3, 2)$

c. $(2, 1, 0)$

d. $(6, 3, -2)$

ខ. បន្ទាត់ L កាត់តាមចំណុច ហើយស្របទៅ និង ឆ្លងកាត់ $\vec{u} = (2, 2, 1)$

a. $(4, 1, -2)$

b. $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{11}{4})$

c. $(2, 3, 2)$

គ. បន្ទាត់ L ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ពីរដូចខាងក្រោម៖

$\alpha_1 : x - 3y + 4z = 1 - 0$ និង $\alpha_2 : 2x - y + z + 1 = 0$ ។

$\alpha_1 : 3x + 2y - z = 7$ និង $\alpha_2 : 5x + y - z = 4$ ។

១៤. រកសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច និង មានឆ្លងកាត់ប្រព័ន្ធដូចខាងក្រោម៖

ក. $A(2, 1, 2), \vec{n} = \vec{i}$

ខ. $B(1, 0, -3), \vec{n} = \vec{k}$

គ. $C(3, 2, 2), \vec{n} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

ឃ. $D(0, 0, 0), \vec{n} = -3\vec{i} + 2\vec{k}$

ង. $E(0, 0, 6), x = 1 - t, y = 2 + t, z = 4 - 2t$

ច. $F(3, 2, 2), \frac{x-1}{4} = y+2 = \frac{z+3}{-3}$

លំហាត់ផ្ដាច់ប្រឡងចេញ

១. នៅក្នុងប្រអូលីដ្រូម $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាននិងមានឯកតាលើអ័ក្សស្មើនិង $1cm$ ។
(ឆ្នាំ២០០៣)

ក. ចូរកំណត់ចំណុច $A(2, 0, 2); B(1, 2, 0); C(0, 2, 3)$ ។

ខ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ដែលកាត់តាម A ហើយស្របនឹង $\vec{BC}$ ។

គ. គណនា $|\vec{AB}|$ និង $|\vec{AC}|$ ។ ចូរប្រាប់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។

ឃ. គណនា $\vec{AB} \times \vec{AC}$ ។ ទាញបង្ហាញថាចំណុច $A; B; C$ មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។ រកសមីការបន្ទាត់ ABC ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

ង. រកមាឌនៃតេត្រាអែត $OABC$ ។ ទាញរកចម្ងាយពី O ទៅប្លង់ (ABC) ។

២. នៅក្នុងប្រអូលីដ្រូម $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាននិងមានឯកតាលើអ័ក្សស្មើនិង 1 ។
(ឆ្នាំ២០០៤)

ក. ចូរកំណត់សមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A និងកែងនឹងបន្ទាត់ AK ។

ខ. គេអោយចំណុច $B(5, 0, 0), C(0, 5, 0), D(0, 0, -5)$ ។ ជ្រើសរើសថា B, C, D ជាចំណុចរបស់ប្លង់ (P) ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ $\triangle ABC$ ។

ឃ. គណនាប្រវែង AK រួចទាញរកមាឌតេត្រាអែត $BKCD$ ។

៣. នៅក្នុងប្រអូលីដ្រូម $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាននិងមានឯកតាលើអ័ក្សស្មើនិង 1 ។

បន្ទាត់ (D) មានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ ។ (ឆ្នាំ២០០៥)

ក. បង្ហាញថាប្លង់ $(P) : x - y - z + 4 = 0$ កាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (D) ។

ខ. ប្លង់ (P) កាត់តាមអ័ក្ស $\vec{Ox}$ ត្រង់ M កាត់អ័ក្ស $\vec{Oy}$ ត្រង់ N និងកាត់តាម $\vec{Oz}$ ត្រង់ P ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច M, N, P រួចសង់ចំណុច A, M, N, P នៅក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។

គ. បង្ហាញថាត្រីកោណ $\triangle MNP$ ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

ឃ. គណនា $\vec{MP} \times \vec{MN}$ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ $\triangle MNP$ ។

៤. នៅក្នុងប្រអូលីដ្រូម $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាននិងមានឯកតាលើអ័ក្សស្មើនិង 1 ។
រកសមីការប្លង់ (P) ។ (ឆ្នាំ២០០៦)

ក. រកកូអរដោនេនៃចំណុច B ។ រកសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹង $\vec{AB}$ ។

រៀបរៀង និង បង្រៀនដោយ លោក ពេជ្រធីតា ឧត្តម ត្រីវិសាលក្រសួងអប់រំ យុវជន និង កីឡា

ខ. គេអោយចំណុច $C(2, 1, 0), D(1, 3, 1)$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{CD}$ គណនា $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$ រួចបង្ហាញថា $ABCD$ ជាចតុកោណកែង ។

គ. គណនា $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{CD}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណកែង $ABCD$ ។

ឃ. រកមាឌចតុមុខ $OABCD$ រួចនាំមកបង្ហាញពីគល់ O នៅក្នុង ABC ។

៥. នៅក្នុងប្រដាប់ដោយកម្រុយអាក្រូណូម៉ាសមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេអោយចំណុច $S(0, 0, 3)$ និង $\vec{u} = (1, 1, 1)$ ។ (បាត់ខ្ទង់ ៦ សីហា ២០០៧)

ក. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ D ដែលកាត់តាមចំណុច S ហើយយកនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ។

ខ. $M(x, y, z)$ ជាចំណុចមួយនៅក្នុងកម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។ គណនាផលគុណស្កាលែ $\vec{u} \cdot \overrightarrow{SM}$ ។

គ. រកសមីការមួយដែលនាត់នឹង $x; y; z$ ដើម្បីអោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{SM}$ អាក្រូណូម៉ាសនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ ។

ឃ. គេអោយចំណុច $A(3, 0, 0), B(0, 3, 0)$ បង្ហាញថា $\triangle SAB$ ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

ង. គណនា $\overrightarrow{SA} \times \overrightarrow{SB}$ ។ នាំមកផ្ទៃក្រឡា $\triangle SAB$ ។

ច. រកសមីការស្វ៊ែរដែលមានផ្ចិត O ហើយយកកាត់តាមចំណុច S, A, B ។

៦. នៅក្នុងប្រដាប់ដោយកម្រុយអាក្រូណូម៉ាសមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេអោយចំណុច $A(-1, 1, 0), B(2, 0, 1), C(1, 2, 2), D(0, 1, -2)$ និង $M(x, y, z)$ ។ (បាត់ខ្ទង់ ៤ សីហា ២០០៨)

ក. រកទំនាក់ទំនងរវាង $x; y; z$ ដើម្បីអោយ $\overrightarrow{AM}$ កែងនឹង $\overrightarrow{BM}$ ។ តើសំណុំចំណុច M ជាអ្វី ?

ខ. គណនា $\vec{n} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}$ ។ រកចំនួនពិត m ដើម្បីអោយផ្ទៃក្រឡា S នៃត្រីកោណ $\triangle BCD$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $S = \sqrt[3]{e^m}$ ។

គ. រកសមីការប្លង់ (BCD) ។ រកកូអរដោនេ N រវាងប្លង់ (BCD) និងបន្ទាត់ $(L) : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ ។

ឃ. គណនាចម្ងាយពីចំណុច A នៅក្នុងប្លង់ (BCD) រួចនាំមកបង្ហាញនៃគេតាមរូបមន្ត $ABCD$ ។

៧. នៅក្នុងប្រដាប់ដោយកម្រុយអាក្រូណូម៉ាសមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេអោយចំណុច $A(2, 2, 0), B(0, 2, 2), C(2, 2, 2)$ ។ (បាត់ខ្ទង់ ២៧ សីហា ២០០៩)

ក. រកសមីការស្វ៊ែរដែលមានផ្ចិត $[AB]$ ។ រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វទាំងពីររវាងស្វ៊ែរ និង បន្ទាត់ (d) ដែល

$$\text{មានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ខ. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{n} = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}$ ។ គណនាផ្ទៃក្រឡា $\triangle ABC$ ។ រកសមីការប្លង់ (ABC) ។

គ. ប្លង់ (ABC) ជួប ox ត្រង់ M និង ជួប oz ត្រង់ N ។ រកកូអរដោនេ M និង N បង្ហាញថា $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ និង $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ នាំមកបញ្ជាក់ថា $ABNM$ ជាត្រីកោណកែង ។

ឃ. រកចម្ងាយពីចំណុច $D(0, 2, 0)$ នៅក្នុងប្លង់ (ABC) រួចនាំមកបង្ហាញនៃគេតាមរូបមន្ត $DBCA$ ។

៨. ក្នុងកម្រុយអាក្រូណូម៉ាសមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(-1, 2, 1), B(1, -6, 1), C(2, 2, 2)$ ។ (បាត់ខ្ទង់ ២៦ កក្កដា ២០១០)

ក. គណនា $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ។ កំណត់សមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A, B , និង C ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ ។ កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃ (d) កាត់តាមចំណុច $j(-2, 0, 0)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}(3, 0, 1)$ ។

ខ. រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត I និងកាំ r នៃស្វ៊ែរ (S) ដែលមានសមីការ $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 2 = 0$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាង (S) និងបន្ទាត់ (d) ។

រៀបរៀង និង បង្រៀនដោយ លោក ពេជ្រធីតា ឧត្តម ត្រីវិសាលកម្មសិក្សាស្រាវជ្រាវ

៩. ក្នុងកម្រុយអាក្រូណាម៉ាល់មាននិស្សេទីម្នា $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(1, 24), B(2, -1, 3), C(-2, 3, -2)$ ។ (ធាតុខុម ២៥ គុណ ២០១១)

- ក. រកសមីការស្ទង់ដារនៃស្វ៊ែរ S ដែលមានផ្ចិត A និងកាំ $r = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$ ។ សមីការនៃប្លង់ (P) ដែលមានទីចំណាំណាម៉ាល់ $\overrightarrow{AC}$ ហើយកាត់តាមចំណុច C ហើយមានទីចំណាំប្រាប់និស $\overrightarrow{AB}$ ។
- ខ. រកចម្ងាយ D_{BA} ពីចំណុច B នៅ A ។ រកចម្ងាយ D_{Bd} ពីចំណុច B នៅបន្ទាត់ d ។ រកចម្ងាយ D_{DP} ពីចំណុច $D(3, -3, -3)$ នៅប្លង់ (P) ។
- គ. រកផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម និង ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាមនៃស្វ៊ែរ $\overrightarrow{BA}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ។

១០. គេមានចំណុច $M(-1, 0, 1), N(0, 1, 2), P(1, 2, -1)$ ស្ថិតនៅក្នុងកម្រុយអាក្រូណាម៉ាល់មាននិស្សេទីម្នា $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មួយ ។ គេអោយប្លង់ α មួយដែលមានសមីការ $(\alpha) : x - 2y + z - 4 = 0$ ។ (ធាតុខុម ៦ សីហា ២០១២)

- ក. រកកូអរដោនេនៃ $\vec{n} = \overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MP}$ រួចទាញរកសមីការប្លង់ β ដែលកាត់តាមចំណុច M, N, P ។
- ខ. រកសមីការស្វ៊ែរ S មួយដែលមានផ្ចិត M ហើយកាត់តាមចំណុច N ។ តើប្លង់ α ជួបនិងស្វ៊ែរ S ដែរឬទេ ?

១១. នៅក្នុងកម្រុយអាក្រូណាម៉ាល់មាននិស្សេទីម្នា $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(1, 0, 1), B(0, 2, 2)$ និង $C(2, 1, 0)$ ។ (ធាតុខុម ៥ សីហា ២០១៣)

- ក. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ចំណុច A ។
- ខ. គណនា $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចរកសមីការប្លង់ ABC ។
- គ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ d ដែលកាត់តាម $D(1, -1, 3)$ ហើយកែងនឹងប្លង់ ABC ត្រង់កំពូល M ។ រកកូអរដោនេចំណុច M ។

១២. ក្នុងកម្រុយអាក្រូណាម៉ាល់មាននិស្សេទីម្នា $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(2, 2, 1), B(4, -2, 0), C(3, 1, 1)$ $D(1, 5, 2)$ ។ បង្ហាញថា $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម រួចរកផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាមនេះ ។ (ធាតុខុម ១៣ តុលា ២០១៤ លើកទី ២)

- ក. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ ដែលកាត់តាមចំណុច $A(2, 2, 1)$ និង $B(4, -2, 0)$ ។
- ខ. រកសមីការប្លង់ ដែលកាត់តាមចំណុច $A(2, 2, 1), B(4, -2, 0), C(3, 1, 1)$ ។

១៣. គេមានទីចំណាំ $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ ។ (ធាតុខុម ២៤ សីហា ២០១៥)

- ក. រកទីចំណាំ $\vec{u} + \vec{v}$
- ខ. រកទីចំណាំ $\vec{u} \times \vec{v}$
- គ. រកទីចំណាំ $\vec{u} + \vec{v}$

១៤. នៅក្នុងប្រដាប់ដោយកម្រុយអាក្រូណាម៉ាល់ $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $M(2, 3, 4), N(2, 5, 6), P(4, 6, 7)$ និង $Q(3, 4, 5)$ ។ (ធាតុខុម ២២ សីហា ២០១៦)

- ក. រកទីចំណាំ $\overrightarrow{MN}$ និង $\overrightarrow{QP}$ ។
- ខ. បង្ហាញថា $MNPQ$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

១៥. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយកម្រុយ $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(-2, 1, 0), B(0, 1, 1), C(1, 2, 2)$ និង $D(0, 3, -4)$ ។ (ធាតុខុម ២១ សីហា ២០១៧)

- ក. រកទីចំណាំ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CD}$ ។
- ខ. គណនាប្រវែង AB, AC, AD, BD, CD ។ បង្ហាញថាត្រីកោណ ABD និង ACD កែងត្រង់ A ។

១៦. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយកម្រុយអាក្រូណាម៉ាល់ $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1, 2, 3), B(3, 0, 1), C(-1, 0, 1), D(2, 1, 2)$ ។ (ធាតុខុម ២០ សីហា ២០១៨)

រៀបរៀង និង បង្រៀនដោយ ពេទ្យពេទ្យពេទ្យ គម្រោងបណ្តុះបណ្តាលគ្រូបង្រៀនសិក្សាស្រាវជ្រាវ

ក. គណនា $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ ។

ខ. បង្ហាញថាចំណុច A, B និង C មិននៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

គ. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\vec{n}(0, 1, -1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៅនិងប្លង់ (ABC) ។

១៧. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយកម្រុយអាក្រូណូម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1, -1, 4), B(7, -1, -2), C(1, 5, -2)$ ។ (ឆ្នាំ២០១៩ សីហា ២០១៩)

ក. គណនាកូអរដោនេរបស់វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ ។

ខ. ស្រាយបំភ្លឺថាចំណុច A, B, C កំណត់បានប្លង់មួយ ។

គ. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\vec{n}(1, 1, -1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៅនិងប្លង់ (ABC) ។

ឃ. នាញបង្ហាញថាសមីការរបស់ប្លង់ (ABC) ។

ង. បង្ហាញថាត្រីកោណ (ABC) ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

១៨. នៅក្នុងកម្រុយអាក្រូណូម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1, 1, 1), B(2, 3, 4), C(6, 5, 2), D(7, 7, 2)$ ។ (ត្រូវបង្ហាញ ១៤ វិធីសាស្ត្រ ២០០២)

ក. បង្ហាញថា $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាមនោះ ។

១៩. គេមាន ៣ ចំណុច $A(-1, 1, 2), B(0, 2, 4), C(-1, 3, 1)$ ។ (ត្រូវបង្ហាញ ១៤ វិធីសាស្ត្រ ២០០៣)

ក. គណនាផលគុណ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$ រួចបង្ហាញថាចំណុច A, B, C រត់មិនត្រង់គ្នា ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

២០. នៅក្នុងកម្រុយអាក្រូណូម៉ាល់នៃលំហគេអោយប្លង់ (P) និងស្វ៊ីវ៉ែ (S) រៀងគ្នា $(P) : x + 2y + 2z + 5 = 0$ និង $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z = 0$ ។ (ត្រូវបង្ហាញ ១៣ វិធីសាស្ត្រ ២០០៤)

ក. រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត I និងកាំ R នៃសមីការស្វ៊ីវ៉ែ ។

ខ. បង្ហាញថាប្លង់ (P) កាត់តាមស្វ៊ីវ៉ែ (S) ចូរសមីការបណ្តាប្លង់ស្របនឹងប្លង់ (P) មែរ៉េនិងស្វ៊ីវ៉ែ ។

២១. នៅក្នុងកម្រុយអាក្រូណូម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(4, -2, 0), B(1, 2, 2), C(2, -1, 0), D(2, -2, -1)$ ។ (ត្រូវបង្ហាញ ១៤ វិធីសាស្ត្រ ២០០៥)

ក. កំណត់សមីការប្លង់មេត្រូវនៃបន្ទាត់ d ដែលកាត់តាមចំណុច A ដែលមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{CD}$ ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច B ហើយកែងទៅនិងបន្ទាត់ (d) ។

គ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (d) និងប្លង់ (P) ។

២២. ក្នុងប្រដាប់កម្រុយអាក្រូណូម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេអោយចំណុច $A(3, 2, 0), B(0, -1, 3)$ ។ (ត្រូវបង្ហាញ ១៦ វិធីសាស្ត្រ ២០០៦)

ក. រកសមីការប្លង់ Q ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនិងបន្ទាត់ (AB) ។

ខ. គេអោយចំណុច $R(5, 0, 0), S(0, 5, 0), T(0, 0, -5)$ ។ ជ្រៀងផ្ទាត់ថាចំណុច R, S, T ស្ថិតនៅលើប្លង់ (Q) ។

គ. គណនាប្រវែង AB និងផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ RST ។

២៣. ក្នុងប្រដាប់កម្រុយអាក្រូណូម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេអោយបន្ទាត់ ២ ដែលមានសមីការ

$$(D_1) : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3} \text{ និង}$$

$$(D_2) : \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{។ (ត្រូវបង្ហាញ ១៦ វិធីសាស្ត្រ ២០០៧)}$$

រៀបរៀង និង បង្រៀនដោយ ពេទ្យពេទ្យពេទ្យ គម្រោងបណ្តុះបណ្តាលគ្រូបង្រៀនវិស្វកម្ម

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ (D_1) និងបន្ទាត់ (D_2) អាក្នកណាស់គ្នា ។

ខ. តើបន្ទាត់ (D_1) និងបន្ទាត់ (D_1) កាត់គ្នាដែរឬទេ ?

គ. ប្លង់ (P) មួយមានសមីការ $2x + 3y + z - 12 = 0$ រកចម្ងាយពីគល់តម្រុយ O ទៅប្លង់ (P) ។

២៤. ក្នុងកម្រុយអាក្នកណាស់មាននិស្សេទ្យិក្ខាមាន ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) គេអោយប្លង់ (P) មួយដែលកាត់តាមចំណុច $A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 3)$ ។ (គ្រូបង្រៀន ១៣ ទិដ្ឋភាព ២០០៩)

ក. គណនាចម្ងាយ $|OI|$ ពីគល់ O មកប្លង់ (P) ។

ខ. រៀងផ្ទាំងនំនាក់នំនង $\frac{1}{|OI|^2} = \frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2} + \frac{1}{|OC|^2}$ ។

២៥. ក្នុងកម្រុយអាក្នកណាស់មាននិស្សេទ្យិក្ខាមាន ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) នៃលំហគេអោយចំណុច $A(1, 1, 1), B(2, 2, 0)$ ។ (គ្រូបង្រៀន ១២ ទិដ្ឋភាព ២០១០)

ក. សរសេរសមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច A និងមានវ៉ិចទ័រណាម៉ាល់ $\vec{OA}$ ។

ខ. បន្ទាត់ (D) កាត់តាមចំណុច B ហើយស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{OA}$ ។ រកកូអរដោនេនៃ H ជាចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងបន្ទាត់ (D) រួចរកចម្ងាយពីចំណុច A ទៅវ៉ិចទ័រណាម៉ាល់ $\vec{OA}$ ។

២៦. នៅក្នុងកម្រុយអាក្នកណាស់មាននិស្សេទ្យិក្ខាមាន ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) គេមានចំណុច $A(1, 1, 0), B(0, 0, 2), C(1, -2, 3), D(1, -2, 0)$ ។ រកសមីការស្វ័រ ដែលកាត់តាមចំណុច A, B, C, D ។ (គ្រូបង្រៀន ១៨ ទិដ្ឋភាព ២០១១)

២៧. នៅក្នុងកម្រុយអាក្នកណាស់មាននិស្សេទ្យិក្ខាមាន ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) គេអោយចំណុច $A(2, 0, 1), B(0, 1, -3), C(1, 2, 0)$ ។ (គ្រូបង្រៀន ២៣ ទិដ្ឋភាព ២០១២)

ក. គណនា $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡា ABC ។

២៨. នៅក្នុងកម្រុយអាក្នកណាស់មាននិស្សេទ្យិក្ខាមាន ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) គេអោយបីចំណុច $A(1, 0, -2), B(2, 1, -1), C(1, -2, 2)$ ។ (គ្រូបង្រៀន ៧ ឆ្នាំ ២០១៤)

ក. គណនាប្រវែងជ្រុង AB និង BC នៃត្រីកោណ ABC ។

ខ. M និង N ជាចំណុចកណ្តាលរវាងជ្រុងនៃជ្រុង AB និង BC ។ ចូររកកូអរដោនេនៃចំណុច M និង N ។

២៩. នៅក្នុងកម្រុយអាក្នកណាស់មាននិស្សេទ្យិក្ខាមាន ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) គេអោយបីចំណុច $A(1, 2, 1), B(2, 0, 3), C(-1, 2, 0)$ ។ (គ្រូបង្រៀន ១៥ ទិដ្ឋភាព ២០១៥)

ក. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{AB} \times \vec{AC}$ រួចបង្ហាញថា A, B, C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ $\triangle ABC$ ។

៣០. នៅក្នុងកម្រុយអាក្នកណាស់មាននិស្សេទ្យិក្ខាមាន ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) គេអោយ ៤ ចំណុច $I(3, -1, 5), M(4, 2, -1), N(1, -2, 3), A(1, 1, 5)$ ។ (គ្រូបង្រៀន ២២ ទិដ្ឋភាព ២០១៦)

ក. ចូរសរសេរសមីការនៅទៅនៃប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច I, M, N ។

ខ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IMN និង សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) កាត់តាមចំណុច A និងកាត់តាមប្លង់ (P) ។

៣១. នៅក្នុងកម្រុយអាក្នកណាស់មាននិស្សេទ្យិក្ខាមាន ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) គេអោយ ៣ ចំណុច $A(3, -1, 2), B(0, -4, 2), C(-3, 2, 1)$ ។ (គ្រូបង្រៀន ២៥ ទិដ្ឋភាព ២០១៧)

ក. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{AC}$ និងគណនាបរិមាត្រនៃត្រីកោណ $\triangle ABC$ ។

រៀបរៀង និង បង្រៀនដោយ ពេទ្យពេទ្យពេទ្យ គម្រោងបណ្តុះបណ្តាលគ្រូបង្រៀនវិស្វកម្ម

ខ. កំណត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ $\triangle ABC$ និង គណនាផ្ទៃក្រឡាបស់វា ។

៣២. នៅក្នុងកម្រុយអាក្រូណូម៉ាល់មានទិសដៅជ្រុងមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេអោយ ៤ ចំណុច $M(-4, 2, 0), N(0, 2, 2), P(2, 4, 4), Q(0, 6, -8)$ ។ (ត្រូវបាន ៣០ ទិន្នន័យ ២០១៨)

ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NQ}, \overrightarrow{PQ}$ ។

ខ. គណនាប្រវែង MN, MP, MQ, NQ, PQ បង្ហាញថាត្រីកោណ $\triangle MNQ$ និង $\triangle MPQ$ កែងគ្នា ។

៣៣. នៅក្នុងកម្រុយអាក្រូណូម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេអោយចំណុច $A(2, 2, 2), B(2, 0, 1), C(4, 1, -1)$ ។ (ត្រូវបាន ១១ ទិន្នន័យ ២០០២)

ក. បង្ហាញថាត្រីកោណ $\triangle ABC$ ជាត្រីកោណកែងក្នុង B ។

ខ. រកសមីការប្លង់កាត់តាមបីចំណុចនេះ ។

៣៤. នៅក្នុងកម្រុយអាក្រូណូម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេអោយប្លង់ (α) និង (β) មានសមីការរៀងគ្នា $(\alpha) : 3x - 2y + 2z - 5 = 0$ និង $(\beta) : 4x + 5y - z + 1 = 0$ ។ (ត្រូវបាន ១៥ ទិន្នន័យ ២០០៣)

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាប្លង់ (α) អាក្រូណូម៉ាល់ប្លង់ (β) ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់កាត់តាមប្លង់ (α) និង (β) ។

៣៥. ក្នុងកម្រុយអាក្រូណូម៉ាល់គេមាន $A(1, 4, 2), B(2, 1, 3), C(-2, 2, -2)$ ។ គណនាក្រឡាផ្ទៃនៃ $\triangle ABC$ រួចបង្ហាញថា $\triangle ABC$ ជាត្រីកោណកែង ។ (ត្រូវបាន ១៧ ទិន្នន័យ ២០០៤)

៣៦. សរសេរសមីការនៃប្លង់ (E) ដែលកាត់តាមចំណុច $M(1, 2, -3)$ ដែលស្របជាមួយប្លង់ $(Q) : 2x - 4y - z + 4 = 0$ រួចគណនាចម្ងាយប្លង់ (P) នៅប្លង់ (Q) ។ (ត្រូវបាន ៣ ទិន្នន័យ ២០០៥)

៣៧. នៅក្នុងកម្រុយអាក្រូណូម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេអោយ $A(1, 1, 0), B(0, 2, 2), C(1, -2, 3), D(1, -2, 0)$ ។ រកសមីការស្វ៊ីបកាត់តាមទាំង ៤ ចំណុចខាងលើ ។ (ត្រូវបាន ១៣ ទិន្នន័យ ២០០៦)

៣៨. នៅក្នុងកម្រុយអាក្រូណូម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេអោយប្លង់ (P) និង ស្វ៊ីប (S) ដែលមានសមីការ $(P) : x + 2y + 2z + 5 = 0, (S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 4y + 4z = 0$ ។ (ត្រូវបាន ១៦ ទិន្នន័យ ២០០៧)

ក. កំណត់កូអរដោនេផ្ចិត និងកាំនៃស្វ៊ីប (S) ។

ខ. បង្ហាញថាប្លង់ (P) កាត់ស្វ៊ីប (S) ។

គ. រកសមីការប្លង់ស្របនឹងប្លង់ (P) ប៉ះនឹងស្វ៊ីប (S) ។

៣៩. នៅក្នុងកម្រុយអាក្រូណូម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេអោយ ៤ ចំណុច គឺ $A(-2, 0, 1), B(0, 10, 3), C(2, 0, -1), D(5, 3, -1)$ ។ (ត្រូវបាន ១៦ ទិន្នន័យ ២០០៨)

ក. សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាមចំណុច A, B, C ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ដែលកាត់តាមចំណុច D ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) ។

គ. សរសេរសមីការស្វ៊ីបកាត់តាមចំណុច D ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) ។

៤០. នៅក្នុងកម្រុយអាក្រូណូម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេអោយ ៣ ចំណុច $A(1, 4, 3), B(2, 11, 4), C(-3, -3, 4)$ ។ (ត្រូវបាន ១៥ ទិន្នន័យ ២០០៩)

ក. បង្ហាញថា ៣ ចំណុច A, B, C មិនស្ថិតនៅលើប្លង់តែមួយ ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាម ៣ ចំណុចខាងលើ ។

គ. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ AB ។

រៀបរៀង និង បង្រៀនដោយ ពេទ្យពេទ្យពេទ្យ គម្រោងបណ្តុះបណ្តាលគ្រូបង្រៀនវិស្វកម្ម

៤១. នៅក្នុងកម្រុយអាក្រូណាម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេអោយ ៣ ចំណុច $A(6, 4, -2), B(6, 2, 0), C(4, 2, -2)$ ។ (គ្រូអនុ. ១៥ គុណ ២០១០)

- ក. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។
- ខ. គេអោយចំណុច $S(3, y, z)$ ។ គណនាតម្លៃ y, z ដើម្បីអោយ $SABC$ ជាពីរមីតនីយ៍កែងដែលមានកំពូល S ។

៤២. នៅក្នុងកម្រុយអាក្រូណាម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេអោយបន្ទាត់ l មួយដែលកំណត់ដោយ $(l) :$

$$\begin{cases} x = t \\ y = -3 + 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

និង ប្លង់ (P) កាត់តាមបន្ទាត់ l និង កាត់តាមចំណុច $A(1, 2, 1)$ ។ រកគូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងអ័ក្ស $z'Oz$ ។ (គ្រូអនុ. ១៥ គុណ ២០១១)

៤៣. នៅក្នុងកម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេអោយស្វ៊ីរ៉េ $(S) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 16$ ។ (គ្រូអនុ. ១៥ គុណ ២០១២)

- ក. រកគូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងស្វ៊ីរ៉េ (S) ជាមួយ $\vec{Ox}, \vec{Oy}, \vec{Oz}$ ។
- ខ. តាង A_1, A_2 ជាចំណុចប្រសព្វរវាងស្វ៊ីរ៉េរវាង (S) និង $\vec{Ox}$ ។ រកសមីការប្លង់ដែលប៉ះស្វ៊ីរ៉េ (S) ត្រង់ចំណុច A_1 និង A_2 ។

៤៤. គេអោយពីរមីត $SABCD$ មានបាត $ABCD$ ជាចតុកោណកែងដែលមានបណ្តោយ $AB = a$ និង $AD = b$ ទ្រនុង $(SA) \perp$ ប្លង់ $(ABCD)$ និងប្រវែង $SA = 2a$ ។ M ជាចំណុចមួយនៅទ្រនុង (SA) ដែល $AM = x$ ដោយ $0 \leq x \leq 2a$ ។ ប្លង់ (MBC) កាត់ទ្រនុង (SD) នៃពីរមីត $SABCD$ ត្រង់ N ។ (គ្រូអនុ. ១៥ គុណ ២០១៣)

- ក. កំណត់រាងរបស់ចតុកោណ $BCNM$ ។
- ខ. កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីអោយចតុកោណ $BCNM$ មានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត និង តូចបំផុត ។

៤៥. នៅក្នុងកម្រុយអាក្រូណាម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមានគេអោយ ៤ ចំណុច $A(2, 1, 3), B(3, 6, 1), C(2, 0, 2), D(1, -5, 4)$ ។ (គ្រូអនុ. ១៥ គុណ ២០១៤)

- ក. ប្រាប់ប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡា S_{ABCD} ។
- ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (D) កាត់តាមចំណុច A ហើយស្របនឹង $\vec{BC}$ ។
- គ. សរសេរសមីការនៃប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច A, B និង D ។

៤៦. គេមានចំណុច $A(2, 1, 3)$ និង ប្លង់ $(P) : 2x + y - 3z - 28 = 0$ ។ (គ្រូអនុ. ១៥ គុណ ២០១៦)

- ក. រកចំណុច H និង A' ដោយ H ជាចំណោលកែងនៃ A មកលើប្លង់ (P) និង H ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AA']$ ។
- ខ. គណនាចម្ងាយពីចំណុច A នៅប្លង់ (P) និងសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) កាត់តាមចំណុច $M(3, 2, 5)$ ហើយកែងនឹងប្លង់ (P) ។
- គ. សរសេរសមីការនៃប្លង់ (H) កាត់តាមចំណុច $I(3, -1, 5)$ ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (AM) ។

៤៧. នៅក្នុងកម្រុយអាក្រូណាម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានបន្ទាត់ d កាត់តាមចំណុច $I(1, -3, 3)$ ហើយស្របទៅនឹងវ៉ិចទ័រ $\vec{v} = (-1, 2, 1)$ និងមានប្លង់ (P) មួយដែលមានសមីការ $(P) : 2x + y - 2z + 9 = 0$ ។ (គ្រូអនុ. ១៥ គុណ ២០១៧)

- ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ d និងរកគូអរដោនេនៃចំណុច D នៅលើបន្ទាត់ d ដោយដឹងថាចម្ងាយពីចំណុច D នៅប្លង់ស្មើ និង ២ ។
- ខ. រកគូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ d និងប្លង់ (P) ។

៤៨. នៅក្នុងត្រីកោណ ABC កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំនៃ $\angle B$ និង $\angle C$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ I ។ តាម I គេគូសបន្ទាត់មួយស្របនឹងបន្ទាត់ AB ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ AB ត្រង់ D និង BC ត្រង់ E ស្រាយបញ្ជាក់ថា $DE = AB + BE$ ។ (ត្រូវគុណ ២០១៩)

៤៩. នៅក្នុងកម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $D(2, 4, 6), E(6, 4, 2), F(-2, -4, 4)$ ។

- ក. រករង្វាស់នៃ $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}, \overrightarrow{EF}$ ។
- ខ. បង្ហាញថា D, E, F មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។
- គ. រកសមីការប្លង់កាត់តាមចំណុច D, E, F ។



ផ្នែកលំហាត់

១. គណនាផលគុណស្កាលែរនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ខាងក្រោម៖

ក. $\vec{u} = (-2, 0, 3)$ និង $\vec{v} = (3, 1, -2)$

គ. $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ និង $\vec{v} = -2\vec{j} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$

ខ. $\vec{u} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ និង $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$

ឃ. $\vec{u} = \vec{j} + \vec{k}$ និង $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

២. គេមាន ៤ ចំណុច $A(1, 2, -2), B(2, 3, -2), C(0, 3, -2), D(1, 2, -2 + \sqrt{2})$ ស្ថិតក្នុងតម្រុយ អាក្សណរម៉ាល់មានទិសនៅវិជ្ជមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។

ក. ដេតេកត្រីកោណ ABC ។ បង្ហាញថា $AB = AC = AD$ ហើយបន្ទាត់ AB, AC, AD កែងរវាងគ្នាពីរៗ។

ខ. បង្ហាញថា AD ជាកម្ពស់ចំពោះមុខ ABC នៃតេត្រាអែត $ABCD$ ហើយទាញរកមាឌ នៃតេត្រាអែត $ABCD$ ។

គ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{N} = \vec{BC} \times \vec{BD}$ និង ផ្ទៃក្រឡានៃ BCD ។ រកសមីការប្លង់ នៃត្រីកោណ BCD ។

ឃ. រកសមីការប្លង់ម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាម A ហើយកែងនឹងប្លង់ BCD ត្រង់ ចំណុច H ។ រកគូអរដោនេនៃ H ។

៣. នៅក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអាក្សណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(3, 2, 0)$ និង $K(0, -1, 3)$ ។

ក. ចូរសរសេរសមីការប្លង់ P ដែលកាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ AK ។

ខ. គេឱ្យចំណុច $B(5, 0, 0), C(0, 5, 0), D(0, 0, -5)$ ។ ជ្រើសរើសថា B, C, D ជាចំណុចរបស់ប្លង់ P ។

គ. គណនាប្រវែង AK រួចទាញរកមាឌតេត្រាអែត $KBCD$ ។

៤. នៅក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអាក្សណរម៉ាល់មានទិសនៅវិជ្ជមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(0, 2, 2)$ និង បន្ទាត់ D ដែល

$$\text{មានសមីការប្លង់ម៉ែត្រ} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ក. បង្ហាញថាប្លង់ $P : x - y - z + 4 = 0$ កាត់តាម A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ D ។

ខ. ប្លង់ P កាត់អ័ក្ស Ox ត្រង់ M, Oy ត្រង់ N, Oz ត្រង់ P ។ រកគូអរដោនេនៃចំណុច M, N, P រួចសង់ចំណុច A, M, N, P នៅក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។

គ. បង្ហាញថាត្រីកោណ MNP ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

ឃ. គណនា $\vec{MP} \times \vec{MN}$ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ MNP ។

៥. ក្នុងតម្រុយអាក្សណរម៉ាល់មានទិសនៅវិជ្ជមាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មួយគេឱ្យចំណុច $A(1, 0, 1), B(-1, 1, 2), C(-1, 1, 0), D(2, -1, -2)$ ។

ក. កំណត់គូអរដោនេនៃ $\vec{BA} \times \vec{BC}$ ។ ចូរគណនាផ្ទៃក្រឡានៃ $\triangle ABC$ ។

ខ. កំណត់សមីការប្លង់ ABC ។ បង្ហាញថា $D \notin ABC$ ។

គ. គណនា $(\vec{BA} \times \vec{BC}) \cdot \vec{BD}$ ។ ទាញរកមាឌតេត្រាអែត $ABCD$ ។

៦. ក្នុងកម្រុយអាក្រូណាម៉ាល់មាននិសាមីឌីអាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(1, 1, 0), B(0, 2, 2), C(1, -2, 3)$ ។

- ក. គណនាផលគុណ $(\vec{AB} \times \vec{AC})$ ។ រួចទាញបញ្ជាក់ថា A, B, C រត់មិនក្រុងជួរគ្នា (ឬមិនបិទ នៅលើបន្ទាត់តែមួយ)។
- ខ. សរសេរសមីការប្លង់ P ដែលកាត់តាមចំណុច A, B, C ។
- គ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាមចំណុច $D(1, -2, 0)$ ហើយកែងនឹង ប្លង់ P រួចរកកូអរដោនេនៃចំណុច M ប្រសព្វរវាងប្លង់ P និងបន្ទាត់ (L) ។
- ឃ. រកសមីការស្វ៊ែរដែលកាត់តាមបួនចំណុច A, B, C, D ។

៧. ក្នុងកម្រុយអាក្រូណាម៉ាល់និសាមីឌីអាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(3, 1, 4), B(-1, 2, 5), C(5, -2, 3)$ ។

- ក. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ D ដែលកាត់តាមចំណុច C និងទ្រូង $\vec{AB}$ ។
- ខ. រកសមីការប្លង់ P ដែលកាត់តាមទ្រូងនៃម៉ាល់ $\vec{AC}$ ហើយកាត់តាមចំណុច B ។ រកសមីការស្វ៊ែរ S ដែលមានអង្កត់ធ្នឹម $[AB]$ ។
- គ. គណនា $\vec{AB} \times \vec{AC}$ ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។ M ជាចំណុចប្រសព្វរវាង បន្ទាត់ D និង ប្លង់ P ។ គណនា កូអរដោនេនៃចំណុច M ។

៨. ក្នុងកម្រុយអាក្រូណាម៉ាល់មាននិសាមីឌីអាន $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មួយ គេមានចំណុច $A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 3)$ ។

- ក. សង់ចតុមុខ $OABC$ ។
- ខ. កំណត់កូអរដោនេនៃទ្រូង $\vec{N} = (\vec{AB} \times \vec{AC})$ ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ។
- គ. បង្ហាញថាប្លង់ ABC មានសមីការ $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ ។
- ឃ. គណនា $(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC}$ ។ ទាញរកមាឌនៃចតុមុខ $OABC$ ។

៩. ក្នុងកម្រុយអាក្រូណាម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មួយគេមានចំណុច $A(4, -2, 0), B(1, 2, 2), C(2, -1, 0), D(2, -2, -1)$ ។

- ក. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃប្លង់ d ដែលកាត់តាម A ហើយមានទ្រូងនៃប្រឡង់និស $\vec{CD}$ ។
- ខ. កំណត់សមីការប្លង់ P ដែលកាត់តាម B ហើយកែងបន្ទាត់ CD ។
- គ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាង d និង P ។

១០. ក. នៅក្នុងកម្រុយអាក្រូណាម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែលមាននិសាមីឌីអាន (ឯកតាលើអ័ក្សស្មើ $1cm$) ចូរដាក់ចំណុច $A(2, 0, 2), B(1, 0, 0)$ ។

- ខ. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ D ដែលកាត់តាម A ហើយស្របនឹង $\vec{BC}$ ។
- គ. គណនា $|\vec{AB}|$ និង $|\vec{AC}|$ ។ ប្រាប់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។
- ឃ. គណនា $(\vec{AB} \times \vec{AC})$ ។ ទាញថា A, B, C មិនបិទក្នុងប្លង់តែមួយ ។ រកសមីការប្លង់ ABC ។ គណនាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC ។
- ង. រកមាឌតេត្រាអ៊ែត $OABC$ ។ ទាញរកចម្ងាយពីគល់ O នៅប្លង់ ABC ។

១១. គេឱ្យចំណុច $A(1, 1, 1), B(2, 3, 4), C(6, 5, 2)$ ស្ថិតក្នុងកម្រុយអាក្រូណាម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។

- ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាម $D(7, 7, 5)$ ហើយ មានទ្រូងនៃប្រឡង់និស $\vec{u} = (\vec{AB} \times \vec{AC})$ ។
- ខ. សរសេរសមីការប្លង់ ABC ។ ទាញថា A, B, C មិនរត់ក្រុងគ្នា ។ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា ចំណុច D ស្ថិតក្នុងប្លង់ ABC ។
- គ. បង្ហាញថា $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ។
- ឃ. សង់ប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ក្នុងកម្រុយអាក្រូណាម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។
- ង. គណនាមាឌពីរ៉ាមីត $OABCD$ រួចទាញរកចម្ងាយពីចំណុច O នៅប្លង់ ABC ។

ឆ. សរសេរសមីការស្វ័យលំដាប់ទី២ AD ។

១២. គេឱ្យចំណុច $A(-1, -2, -3), B(-2, 0, 1), C(-4, -1, -1)$ នៅក្នុងតម្រុយអក្ខរណ៍ម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។

ក. សង់ចំណុច A, B, C ។

ខ. គណនា $(\vec{AB} \times \vec{AC})$ រួចសរសេរសមីការប្លង់ ABC ។

គ. ជ្រៀងផ្ទាំងថា $D(2, 0, 1)$ នៅក្នុងប្លង់ ABC ។

ឆ. រកសមីការប្លង់ Q ដែលស្របនឹងប្លង់ ABC ហើយកាត់តាម $E(0, 1, 1)$ ។

ជ. រកចម្ងាយពីចំណុច D នៅក្នុងប្លង់ Q ។

ឆ. គេឱ្យ $d : \frac{x-1}{m} = \frac{y+2}{2m-1} = \frac{z+3}{2}$ ។ កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យ

A. បន្ទាត់ d កាត់ប្លង់ ABC ។

B. បន្ទាត់ d ស្របប្លង់ ABC ។

C. បន្ទាត់ d កែងប្លង់ ABC ។

១៣. ក្នុងតម្រុយអក្ខរណ៍ម៉ាល់មានទិសដៅដូចគ្នា $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(0, 5, 3), B(7, 0, 1), C(2, 2, -2)$ ។

ក. គណនា $(\vec{AB} \times \vec{AC})$ រួចបញ្ជាក់ថា A, B, C មិននៅត្រង់ត្រង់គ្នា ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ដែលមានទិសដៅដូចគ្នា $(\vec{AB} \times \vec{AC})$ ។

គ. គណនា CA និង CB រួចបញ្ជាក់ប្រភេទនៃត្រីកោណ $\triangle ABC$ ។

ឆ. គេឱ្យចំណុច $B'(x, 0, 1)$ ។ គណនា x ដែលនាំឱ្យ $\triangle AB'C$ កែងត្រង់ C ។

ជ. គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $\triangle ABC$ ។

១៤. ក្នុងតម្រុយអក្ខរណ៍ម៉ាល់មានទិសដៅដូចគ្នា $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។ គេមានចំណុច $A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(2, 2, 4)$ ។

ក. ចូរដេញចំណុច A, B, C ។

ខ. គណនាប្រវែង $|\vec{AB}|, |\vec{AC}|, |\vec{BC}|$ រួចបញ្ជាក់ប្រភេទត្រីកោណ $\triangle ABC$ ។

គ. E, F, G ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃ BC, AC, AB ។

ឆ. រកកូអរដោនេនៃទីចំណុច $\vec{AE}, \vec{BF}, \vec{CG}$ ។ (មិនបាច់ដេញចំណុច E, F, G នៃ)

ជ. រកសមីការប្លង់ម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ AE, BF, CG ។

ឆ. រកកូអរដោនេនៃទីចំណុច $\vec{n} = \vec{CA} \times \vec{CB}$ ។ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC ។ នាញាកប្រវែង CG ។

ឆ. គណនា $(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC}$ ។ នាញាកមាឌនៃតេត្រាអែត $OABC$ ។

១៥. ក្នុងតម្រុយអក្ខរណ៍ម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មានទិសដៅដូចគ្នា ។

ក. សង់ចំណុច $A(0, 4, 3), B(1, 0, 2), C(3, 2, 0)$ ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ D ដែលកាត់តាម B និងមានទិសដៅដូចគ្នា $\vec{BC}$ ។ រួចបញ្ជាក់សមីការប្លង់នៃ D ។

គ. សរសេរសមីការប្លង់ P ដែលកាត់តាម A ហើយកែងនឹងទីចំណុច $\vec{BC}$ ។

ឆ. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាង D និង P ។

ជ. គណនា $\vec{BC} \times \vec{BA}$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។

ឆ. គណនាមាឌតេត្រាអែត $OABC$ ។ គណនាចម្ងាយពីចំណុច O នៅក្នុងប្លង់ ABC ។

១៦. ក្នុងតម្រុយអក្ខរណ៍ម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ដែលមានទិសដៅដូចគ្នា ។ គេមានចំណុច $A(1, 0, -2), B(2, 1, 2), C(3, -1, 1), D(2, -3, 0)$ ។

ក. ស្រាយបង្ហាញថា A, B, C មិននៅត្រង់ត្រង់គ្នា ។

- ខ. រកសមីការប្លង់ ABC ឬចំណុចបង្ហាញថា $D \notin (ABC)$ ។
- គ. គណនាមាឌរបស់ចតុមុខ $DABC$ ។
- ឃ. រកសមីការស្វ៊ែរ S ដែលចារឹកក្រៅចតុមុខ $DABC$ ។
- ង. សរសេរសមីការប្លង់ដែលប៉ះនឹងស្វ៊ែរ S ត្រង់ចំណុច A និង D ។
- ច. គណនាកូស៊ីនុសនៃមុំស្រួច ដែលផ្គុំដោយប្លង់ប៉ះស្វ៊ែរទាំងពីរនេះ ។

១៧. គេឱ្យបីចំណុច $A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 2)$ នៅក្នុងតម្រុយអាក្សណរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។

- ក. ដេតេរមីនង់ A, B, C ។
- ខ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាប្លង់មានសមីការ $x + y + z = 2$ កាត់តាមចំណុច A, B, C ។
- គ. យក $H(x, y, z)$ ជាចំណុចមួយនៅក្នុងប្លង់ ABC ។ កំណត់ x, y, z ដើម្បីឱ្យ $\overrightarrow{OH}$ អាក្សណរម៉ាល់នឹងប្លង់ ABC ។
- ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{AH}$ និង $\overrightarrow{BC}$ អាក្សណរម៉ាល់គ្នាហើយ $\overrightarrow{CH}$ និង $\overrightarrow{AB}$ អាក្សណរម៉ាល់គ្នា ។ ទាញថា H ជាអក្ខរសង់នៃត្រីកោណ ABC ។
- ង. គណនាចម្ងាយ OH ។

១៨. ក្នុងតម្រុយអាក្សណរម៉ាល់មានទិសដៅដូចគ្នា $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មួយ គេមានចំណុច $A(1, -2, 0), B(1, 0, 4), C(0, 3, 3)$ ។

- ក. ចូរដេតេរមីនង់ A, B, C ។
- ខ. រកសមីការប្លង់ P ជាប្លង់មេដ្យាននៃ AB ។
- គ. រកសមីការប្លង់ម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ D កាត់តាមចំណុច C ហើយកែងនឹងប្លង់ P ។
- ឃ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M រវាង D និង P ។
- ង. រកសមីការស្វ៊ែរ S ដែលមានអង្កត់ធ្នឹក AB ។

១៩. ក្នុងតម្រុយអាក្សណរម៉ាល់មានទិសដៅដូចគ្នា $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មួយ គេឱ្យចំណុច $A(2, 3, 0), B(0, -3, 2), C(-2, 3, 4)$ ។

- ក. ចូរសង់ត្រីកោណ ABC ។
- ខ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច $\overrightarrow{BA}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ។ បង្ហាញថា $\triangle ABC$ ជាត្រីកោណសមបាត។
- គ. រកសមីការស្វ៊ែរ S ដែលមានអង្កត់ធ្នឹក AB ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច ប្រសព្វនៃប្លង់រាងស្វ៊ែរ S និងបន្ទាត់ $L : x = 1 + t, y = 3t, z = 1 + t, t \in \mathbb{R}$ ។
- ឃ. រកកូអរដោនេនៃចំណុច D ដើម្បីឱ្យ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។ គណនាត្រីកោណមាត្រប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ។

២០. ក្នុងតម្រុយអាក្សណរម៉ាល់មានទិសដៅដូចគ្នា $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មួយគេឱ្យប្លង់ P កាត់តាមចំណុច $A(3, 2, 4)$ ហើយស្របនឹងប្លង់ Q ដែលមានសមីការ $2x + 3y - 2z - 6 = 0$ ។

- ក. បញ្ជាក់កូអរដោនេនៃចំណុចនិរន្តរ៍ n_1 នៃប្លង់ Q ។ រកសមីការប្លង់ P ។
- ខ. បង្ហាញថាប្លង់ Q កែងនឹងប្លង់ R ដែលមានសមីការ $2x - 6y - 7z + 22 = 0$ ។
- គ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំណុច $B(2, 2, 2)$ ជាចំណុចរួមនៃប្លង់ Q និងប្លង់ R ។
- ឃ. គណនា $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ ដែល $\vec{n}_2$ ជាវ៉ិចទ័រនិរន្តរ៍នៃប្លង់ R ។
- ង. ទាញរកសមីការប្លង់ម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ D ដែលជាប្រសព្វរវាងប្លង់ Q និងប្លង់ R ។

២១. ក្នុងតម្រុយអាក្សណរម៉ាល់មានទិសដៅដូចគ្នា $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មួយ គេមាន ចំណុច $A(2, 0, 3), B(0, 2, 1), C(1, 2, 3)$ ។

- ក. រកសមីការស្វ៊ែរ S មានអង្កត់ធ្នឹក AB ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ ទាំងពីរ រវាងស្វ៊ែរ S និងបន្ទាត់ d ដែលមានសមីការ $x = 1 + t, y = 1 + t, z = 2 + t$ ដែល t ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ។
- ខ. រកសមីការប្លង់ ABC ឬចំណុចកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ ABC និងបន្ទាត់ d ។
- គ. គណនា $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{OA}$ ឬទាញរកមាឌត្រីកោណ $OABC$ ។

២១. គណនាចម្ងាយពី O ទៅប្លង់ ABC រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃ $\triangle ABC$ ។

២២. ចំណុច $A(1, 2, 1), B(3, 1, 2), C(3, 3, 4)$ ស្ថិតក្នុងតម្រុយអាក្សាណូម៉ាល់មាននិសមភាពនិសមភាព $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ មួយ ។

ក. បង្ហាញថា $\triangle ABC$ ជាត្រីកោណកែង។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃ $\triangle ABC$ ។

ខ. រកសមីការប្លង់ P កាត់តាមចំណុច A និង B ហើយកែងទៅនឹងប្លង់ $Q : x + y + z + 1 = 0$ ។

គ. រកសមីការប្លង់កែងនៃប្លង់ប្រសព្វរវាងប្លង់ P និង Q ដោយយក $z = 1 + t$ ដែល t ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ។

២៣. គេឱ្យប្លង់ $R : 4x - 2y - 6z + 1 = 0$ ។ បង្ហាញថាប្លង់ P ស្របនឹងប្លង់ R ។ រកចម្ងាយ ពីប្លង់ P ទៅប្លង់ R ។

ង. រកសំណុំចំណុច $M(x, y, z)$ ដែល $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 1$ ។

២៣. គេឱ្យប្រលេពីប៉ែតកែង $ABCDEFGH$ ដែលមាន $\overrightarrow{DA} = \vec{i}, \overrightarrow{DC} = 2\vec{j}$ និង $\overrightarrow{DH} = 2\vec{k}$ ជាតម្រុយអាក្សាណូម៉ាល់មាននិសមភាព $(D, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ។

ក. ចូរគូសរូបប្រលេពីប៉ែតកែង $ABCDEFGH$ ។ បញ្ជាក់គូអរដោនេចំណុច A, B, C, D, E, F, G, H ។

ខ. គណនាផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AH}$ រួចទាញរកសមីការប្លង់ ACH ។

គ. d_1 ជាចម្ងាយពីចំណុច F ទៅប្លង់ ACH និង d_2 ជាចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ ACH បង្ហាញថា $d_1 = 2d_2$ ។

២៤. ប្រៀបធៀបមាឌ V_1 នៃចតុមុខ $FACH$ និងមាឌ V_2 នៃចតុមុខ $DACH$ ។

ង. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃក្រីកោណ $\triangle ACH$ រួចគណនាមាឌ V_2 ។ ទាញរកមាឌ V_1 ។

២៤. ក្នុងតម្រុយអាក្សាណូម៉ាល់ មាននិសមភាព $\overrightarrow{DA} = \vec{i}, \overrightarrow{DC} = 2\vec{j}$ គេឱ្យ $A(1, 1, 1), (2, 3, 4), C(6, 5, 2)$ ។

ក. កំណត់គូអរដោនេចំណុច D ដើម្បីឱ្យ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម និង កំណត់ផ្ទៃប្រលេឡូក្រាមនេះ។

ខ. កំណត់សមីការប្លង់ ABC និងសមីការប្លង់កែងប្លង់ L កាត់តាម C កែងនឹងប្លង់ $ABCD$ ។

២៥. ក្នុងតម្រុយអាក្សាណូម៉ាល់មាននិសមភាព $\overrightarrow{DA} = \vec{i}, \overrightarrow{DC} = 2\vec{j}$ គេឱ្យចំណុច A, B, C, D, E ដែល $A(1, -1, 3), B(0, 3, 1), C(6, -7, -1), D(2, 1, 3), E(4, -6, 2)$

ក. កំណត់សមីការប្លង់ ABD និងសមីការប្លង់កែងប្លង់ EC ។ បង្ហាញថា EC អាក្សាណូម៉ាល់ និង ប្លង់ ABD ។

ខ. កំណត់គូអរដោនេចំណុច F ដែលជាចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ EC នឹងប្លង់ ABD ។

២៦. ក្នុងតម្រុយអាក្សាណូម៉ាល់មាននិសមភាព $\overrightarrow{DA} = \vec{i}, \overrightarrow{DC} = 2\vec{j}$ គេឱ្យចំណុច $A(2, 0, -1), B(3, -2, 0), C(2, 1, -4)$ ។

ក. កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) និង ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ $\triangle ABC$ ។

ខ. កំណត់គូអរដោនេនៃចំណុច D ដើម្បីឱ្យ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។ គណនាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាមនេះ។

គ. កំណត់សមីការប្លង់កែងប្លង់ L កាត់តាមចំណុច O ហើយអាក្សាណូម៉ាល់នឹងប្លង់ ABC ។ ទាញរកគូអរដោនេចំណុច H ជាដើមនៃចំណោលកែងចំណុច O លើប្លង់ ABC ។

២៧. ក្នុងតម្រុយអាក្សាណូម៉ាល់មាននិសមភាព $\overrightarrow{DA} = \vec{i}, \overrightarrow{DC} = 2\vec{j}$ គេឱ្យចំណុច $A(1, 2, 3), B(3, 0, 3)$ ។ គេកាត់ I កណ្តាល $[AB]$ និង ស្វ៊ែរ (S) ។

ក. កំណត់សមីការនៃស្វ៊ែរ (S) ។

ខ. កំណត់សមីការប្លង់ P ប៉ះស្វ៊ែរ (S) ត្រង់ A ។

២៨. ក្នុងតម្រុយអាក្សាណូម៉ាល់មាននិសមភាព $\overrightarrow{DA} = \vec{i}, \overrightarrow{DC} = 2\vec{j}$ គេមានប្លង់ពីរ $P : x + y - z = 4, P' : 2x - 4y + z = 3$ ។

ក. ដោយយក $z = t$ ចូរកំណត់សមីការប្លង់ d ដែលជាប្រសព្វរវាង P, P' ។

ខ. កំណត់សមីការប្លង់ R កាត់តាមចំណុច $A(2, -1, 0)$ ហើយកែងនឹងប្លង់ d ។