

លីម ដបូន និង សែន ពិសិដ្ឋ

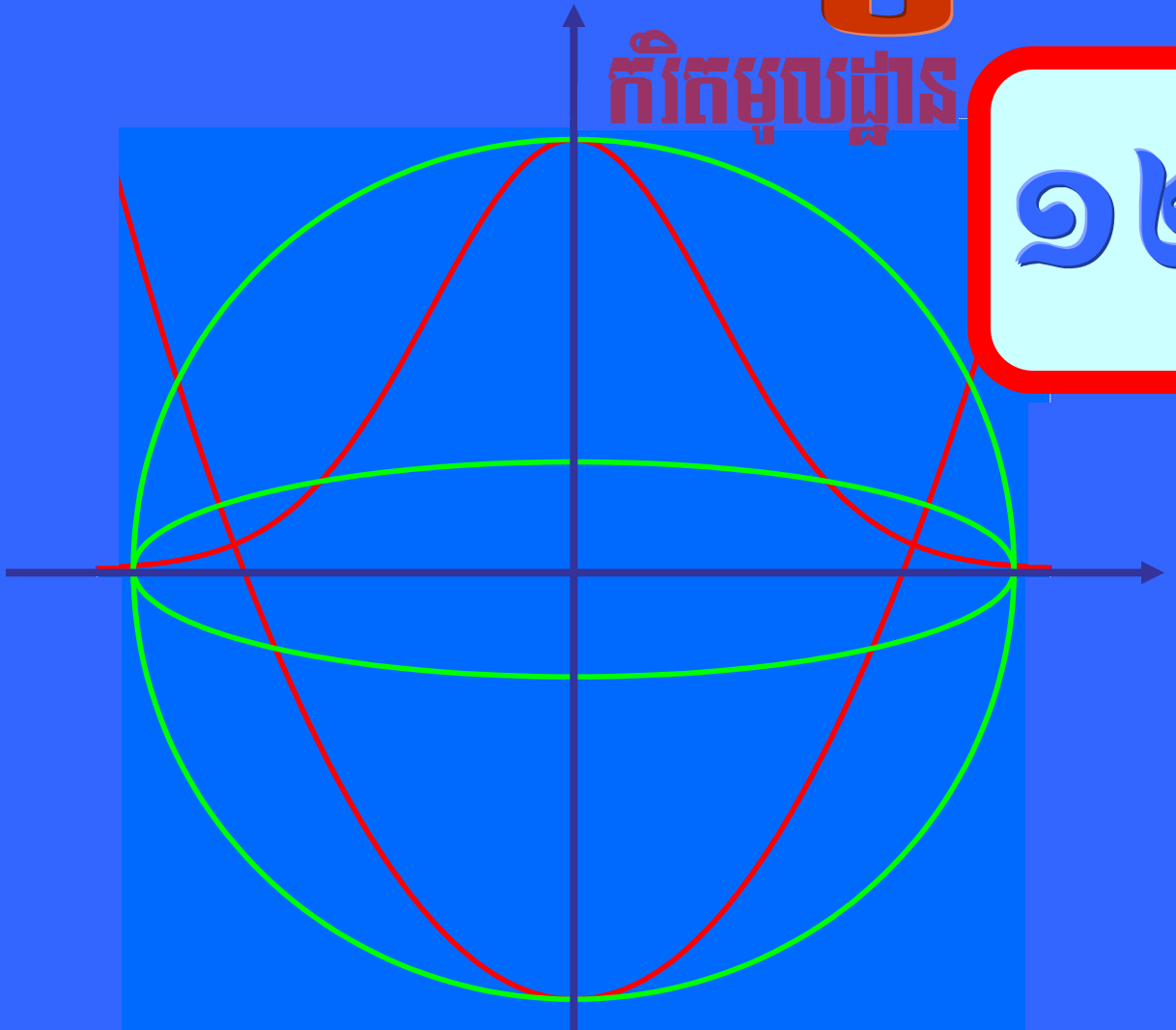
បរិញ្ញាបត្រផ្នែក គណិតវិទ្យា

កំណែបំប្លែង

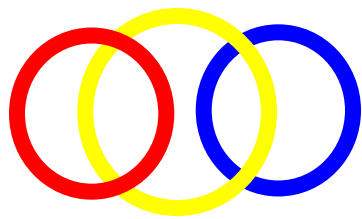
គណិតវិទ្យា

កំរិតមូលដ្ឋាន

១២



ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាថ្មី

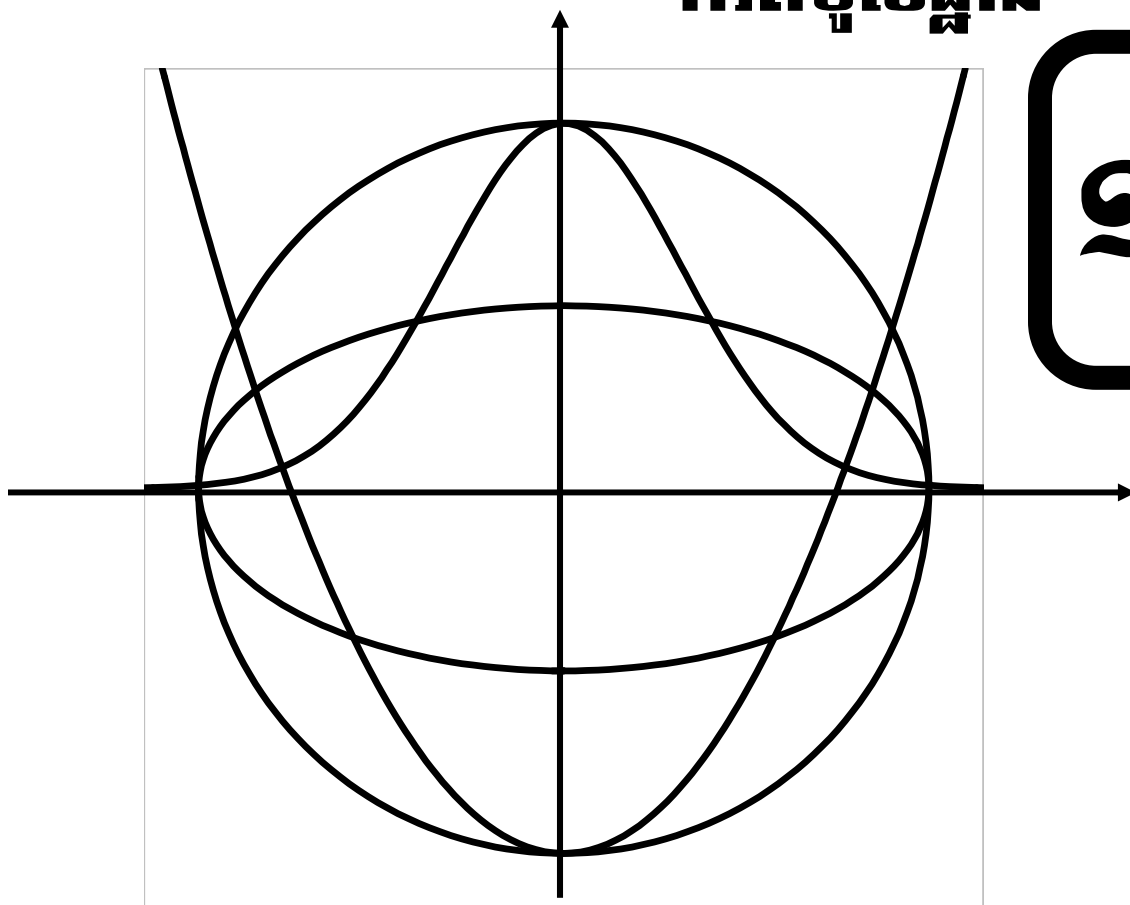


លីម ឆលុន និង សែន ពិសិដ្ឋ
មរិញ្ញាបត្រស្នេក គណិតវិទ្យា

កំណែលំអោត

គណិតវិទ្យា

កំរិតមូលដ្ឋាន



១២

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាថ្មី

គណៈកម្មាការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លោក លឹម ផល្គុន

លោក សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មាការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក លឹម អុន

លោក អ៊ឹង សំណាង

លោកស្រី ឌុយ វិណា

លោក ទិត្យ ម៉េង

លោក នន់ សុខណា

លោក ព្រឹម សុនិត្យ

គណៈកម្មាការត្រួតពិន្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិត្តសិរ

ការិយកុំព្យូទ័រ

រចនាទំព័រ និង ក្រប

លោក អ៊ឹង សំណាង

លោក ព្រំ ម៉ាឡា

កញ្ញា លី គុណ្យាកា

អារម្ភកថា

សួស្តីមិត្តអ្នកសិក្សា ជាទីមេត្រី !!

សៀវភៅ កំណែលំហាត់គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ កំរិតមូលដ្ឋានដែលយើងខ្ញុំបាន
រៀបរៀងនេះ រួមមានបួនជំពូកធំៗ ដែលបានដកស្រង់ចេញពីសៀវភៅគណិតវិទ្យា
ថ្នាក់ទី១២កំរិតមូលដ្ឋាន របស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ។
ក្នុងជំពូកនីមួយៗយើងខ្ញុំបានសង្ខេបមេរៀន និង ដកស្រង់លំហាត់ក្នុងមេរៀននៃជំពូក
នីមួយៗមកធ្វើដំណោះស្រាយយ៉ាងក្បោះក្បាយ ដែលអាចជាជំនួយស្ទាវតីដល់អ្នកសិក្សា
ក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ។

ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ ការបកស្រាយនូវរាល់លំហាត់ក្នុងសៀវភៅ
នេះវាមិនល្អហួសគេហួសឯង ទាំងស្រុងនោះទេ ។
កំហុសឆ្គងនានា ទាំងបច្ចេកទេស និង អក្ខរាវិរុទ្ធប្រាកដជាកើតមានដោយអចេតនា
ពុំខានឡើយ អាស្រ័យហេតុនេះ យើងខ្ញុំរង់ចាំជានិច្ចនូវមតិវិចារគន់បែបស្ថាបនាពីសំណាក់
អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ដើម្បីកែតម្រូវសៀវភៅនេះឱ្យកាន់តែមានសុក្រិតភាព
ថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់ យើងខ្ញុំអ្នករៀបរៀង សូមជូនពរដល់អ្នកសិក្សាទាំងអស់
ទទួលបានជោគជ័យក្នុងជីវិត និង មានសុខភាពល្អ ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី ២៥ ខែ មេសា ឆ្នាំ ២០១០

អ្នករៀបរៀង **លីម ឆន្ទ**

មាតិការប្រែ

ទំព័រ

ជំពូកទី១

មេរៀនទី១ លីមីតនៃអនុគមន៍	០១
មេរៀនទី២ ភាពជាប់នៃអនុគមន៍	៣៣

ជំពូកទី២

មេរៀនទី១ ដេរីវេនៃអនុគមន៍	៥៨
មេរៀនទី២ អនុវត្តន៍នៃអនុគមន៍	៨០

ជំពូកទី៣

មេរៀនទី១ អនុគមន៍ សនិទាន	១០៦
មេរៀនទី២ អនុគមន៍អ៊ុស្ស៊ីណង់ស្បែក	១៣៥
មេរៀនទី៣ អនុគមន៍លោការីត	១៥០

ជំពូកទី៤

មេរៀនទី១ ព្រីមីទីវ និង អាំងតេក្រាលមិនកំណត់	១៥៩
មេរៀនទី២ អាំងតេក្រាលកំណត់	១៨០
លំហាត់បន្ថែម	១៨៩

មេរៀនសង្ខេប

លីមីតនៃអនុគមន៍

១-លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំណុចកំណត់

✍ និយមន័យ :

អនុគមន៍ f មានលីមីតស្មើ L កាលណា x ខិតជិត a បើគ្រប់
 ចំនួន $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $\delta > 0$ ដែល $0 < |x - a| < \delta$ នាំឱ្យ
 $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។

គេសរសេរ : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ។

✍ និយមន័យ :

គេថាអនុគមន៍ f ខិតទៅ $+\infty$ ឬ $-\infty$ កាលណា x ខិតទៅជិត
 a បើចំពោះគ្រប់ចំនួន $M > 0$ មាន $\delta > 0$ ដែល
 $0 < |x - a| < \delta$ នាំឱ្យ $f(x) > M$ ឬ $f(x) < -M$ ។

គេសរសេរ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ឬ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ។

២. លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់អនន្ត

☞ គេថាអនុគមន៍ f មានលីមីតស្មើ L កាលណា x ទៅជិត $+\infty$

ឬ $-\infty$ បើចំពោះគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ គេអាចរក $N > 0$ ដែល $x > N$

ឬ $x < -N$ នាំឱ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។

គេសរសេរ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ឬ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ ។

☞ គេថាអនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ទៅជិត $+\infty$

បើចំពោះគ្រប់ចំនួន $M > 0$ គេមាន $N > 0$ ដែល $x > N$ នាំឱ្យ

$f(x) > M$ ។ គេសរសេរ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ។

☞ គេថាអនុគមន៍ f មានលីមីត $+\infty$ កាលណា x ទៅជិត $-\infty$

បើចំពោះគ្រប់ចំនួន $M > 0$ គេមាន $N > 0$ ដែល $x < -N$ នាំឱ្យ

$f(x) > M$ ។ គេសរសេរ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ។

៣. ប្រមាណវិធីលីមីត

បើ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$; $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ និង $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = N$

ដែល L ; M ; N ជាចំនួនពិតនោះគេបាន :

$$1/ \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

(a ជាចំនួនកំណត់ ឬអនន្ត) ។

$$2/ \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x) - h(x)] = L + M - N$$

$$3/ \lim_{x \rightarrow a} [k f(x)] = k \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]$$

$$4/ \lim_{x \rightarrow a} [f(x).g(x).h(x)] = L.M.N$$

$$5/ \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M} ; M \neq 0$$

$$6/ \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = L^n \text{ ដែល } n \text{ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិមិនសូន្យ ។}$$

៤-លីមីតនៃអនុគមន៍អសនិទាន

$$1/ \lim_{x \rightarrow a} \left(\sqrt[n]{x} \right) = \sqrt[n]{a} \quad \text{ចំពោះ } a \geq 0 \text{ និង } n \in \mathbb{N}$$

$$2/ \lim_{x \rightarrow a} \left(\sqrt[n]{x} \right) = \sqrt[n]{a} \quad \text{ចំពោះ } a < 0 \text{ និង } n \text{ ជាចំនួនគត់សេស}$$

$$3/ \lim_{x \rightarrow a} \left[\sqrt[n]{f(x)} \right] = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]} = \sqrt[n]{L}$$

បើ $L \geq 0$ និង n ជាចំនួនគត់គូ ឬ $L < 0$ និង n ជាចំនួនគត់សេស ។

៥-លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

បើ f និង g ជាអនុគមន៍ដែលមាន $\lim_{x \rightarrow a} [g(x)] = L$

និង $\lim_{x \rightarrow L} f(x) = f(L)$ នោះ $\lim_{x \rightarrow a} f[g(x)] = f(L)$ ។

៦-លីមីតតាមការប្រៀបធៀប

☞ បើគេមានអនុគមន៍ $f ; g$ និងចំនួនពិត A ដែល $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

និង $f(x) \geq g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \geq A$ នោះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ។

✍ បើគេមានអនុគមន៍ $f ; g$ និងចំនួនពិត A ដែល $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

និង $f(x) \leq g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \geq A$ នោះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ។

✍ បើគេមានអនុគមន៍ $f ; g ; h$ និងចំនួនពិត A ដែល

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lambda$ និង $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ចំពោះគ្រប់

$x \geq A$ នោះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda$ ។

✍ បើគេមានអនុគមន៍ $f ; g$ និងចំនួនពិត A ដែល $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lambda'$ និង $f(x) \leq g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \geq A$

នោះ $\lambda \leq \lambda'$ ។

៧. លីមីតរាងមិនកំនត់

✍ លីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$

វិធាន ដើម្បីគណនាលីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $\frac{0}{0}$ គេត្រូវបំបែកភាគ

យក និង ភាគបែងជាផលគុណកត្តា ហើយសម្រួលកត្តារួម រួចគណនា

លីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

✍ **លីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $\frac{\infty}{\infty}$**

វិធាន ដើម្បីគណនាលីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $\frac{\infty}{\infty}$ គេត្រូវដាក់តួដែលមានដឺក្រេធំជាងគេនៅភាគយក និង ភាគបែងជាផលគុណកត្តាហើយសម្រួលកត្តារួម រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

✍ **លីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $+\infty - \infty$**

វិធាន ដើម្បីគណនាលីមីតដែលមានរាងមិនកំនត់ $+\infty - \infty$ គេត្រូវដាក់តួដែលមានដឺក្រេធំជាងគេនៅភាគយក និង ភាគបែងជាផលគុណនៃកត្តា ហើយសម្រួលកត្តារួម រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

៨-លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

-បើ a ជាចំនួនពិតស្ថិតនៅក្នុងដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រដែល

$$\text{ឱ្យនោះគេបាន } \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

$$\text{និង } \lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a \quad ។$$

-វិធាន បើ x ជារង្វាស់មុំ ឬផ្ទុកគិតជាដឺក្រេនោះគេបាន

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{និង} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \quad ។$$

៩-លីមីតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

$$1/ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$2/ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$3/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$4/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (n > 0)$$

$$5/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad (n > 0)$$

១០-លីមីតនៃអនុគមន៍លោការីតនេព័រ

$$1/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$2/ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$3/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$4/ \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

$$5/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad (n > 0)$$

$$6/ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

== លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ ==

1-ស្រាយបញ្ជាក់ថា លីមីតខាងក្រោមនេះពិតដោយប្រើនិយមន័យ

ក. $\lim_{x \rightarrow 3} (5x - 2) = 13$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{(x-2)(x-3)} = 0$

គ. $\lim_{x \rightarrow x_0} (ax + b) = ax_0 + b$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\lim_{x \rightarrow 3} (5x - 2) = 13$

តាង $f(x) = 5x - 2$

គេមាន $f(x) - 13 = (5x - 2) - 13 = 5x - 15 = 5(x - 3)$

$|f(x) - 13| = 5|x - 3| < \varepsilon$ នាំឱ្យ $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{5}$

បើគេតាង $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ នោះគ្រប់ $\varepsilon > 0$ មាន $\delta = \frac{\varepsilon}{5} > 0$ ដែល

$|x - 3| < \delta$ នាំឱ្យ $|f(x) - 13| < \varepsilon$ ។

គេថា $f(x)$ មានលីមីតស្មើ 13 កាលណា x ខិតជិត 3 ។

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 3} (5x - 2) = 13$ ។

$$ខ. \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{(x-2)(x-3)} = 0$$

$$\text{តាង } f(x) = \sqrt{(x-2)(x-3)}$$

ដោយ $x \rightarrow 2^-$ នោះយើងសន្មតថា $0 < x < 2$ ។

$$\text{គេបាន } |x-2| = -(x-2) = 2-x > 0$$

$$\text{និង } |x-3| = -(x-3) = 3-x < 3 \quad \text{។}$$

$$\text{ចំពោះគ្រប់ } \varepsilon > 0 \text{ យក } \delta = \frac{\varepsilon^2}{3} \text{ ដែល } 0 < |x-2| < \delta$$

$$\text{នាំឱ្យ } |f(x)| = |\sqrt{(x-2)(x-3)}| = |\sqrt{(2-x)(3-x)}|$$

$$|f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{3} \times 3} = \varepsilon \quad \text{។}$$

ដូចនេះចំពោះគ្រប់ $\varepsilon > 0$ មាន $\delta > 0$ ដែល $0 < |x-2| < \delta$

$$\text{នាំឱ្យ } |\sqrt{(x-2)(x-3)}| < \varepsilon \quad \text{។}$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{(x-2)(x-3)} = 0 \quad \text{។}$$

$$គ. \lim_{x \rightarrow x_0} (ax + b) = ax_0 + b$$

$$\text{តាង } f(x) = ax + b$$

-ចំពោះ $a = 0$ នោះគ្រប់ x គេមាន $ax + b = b$

$$\text{ក្នុងករណីនេះ } \lim_{x \rightarrow x_0} (ax + b) = ax_0 + b = b \quad \text{។}$$

-សន្មតថា $a \neq 0$ ។

$$\text{គេមាន } f(x) - (ax_0 + b) = ax + b - ax_0 - b = a(x - x_0)$$

$$|f(x) - (ax_0 + b)| = |a| \cdot |x - x_0| < \varepsilon$$

$$\text{ឬ } |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|a|}, \quad a \neq 0 \quad \text{។}$$

$$\text{បើគេតាង } \delta = \frac{\varepsilon}{|a|} \quad \text{នោះគ្រប់ } \varepsilon > 0 \quad \text{មាន } \delta = \frac{\varepsilon}{|a|} > 0$$

$$\text{ដែល } |x - x_0| < \delta \quad \text{នាំឱ្យ } |f(x) - (ax_0 + b)| < \varepsilon$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow x_0} (ax + b) = ax_0 + b \quad \text{។}$$

2-បើ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ និង $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ ដែល M និង L ជា

ចំនួនថេរនោះ ចូរបង្ហាញថា

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow a} [k \cdot f(x)] = k \cdot L$$

$$\text{ខ. } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

ដំណោះស្រាយ

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow a} [k \cdot f(x)] = k \cdot L$$

-បើ $k = 0$ នោះ $kf(x) = kL = 0$ គ្រប់ x ។

-សន្មតថា $k \neq 0$

គេមាន $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ចំពោះគ្រប់ $\varepsilon > 0$ មាន $\delta > 0$

ដែល $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{|k|}$ ចំពោះគ្រប់ x ដែល $|x - a| < \delta$ ។

ដូចនេះគ្រប់ x ដែល $|x - a| < \delta$ នោះយើងបាន

$$|kf(x) - kL| = |k| |f(x) - L| < |k| \cdot \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon \quad \text{។}$$

ដោយគ្រប់ $\varepsilon > 0$ មាន $\delta > 0$ ដែល $|kf(x) - kL| < \varepsilon$ គ្រប់ x

នោះ $|x - a| < \delta$ ។

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow a} [kf(x)] = kL$ ។

$$2. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ និង $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ នោះចំពោះគ្រប់ $\varepsilon > 0$

មាន $\delta_1 > 0$ និង $\delta_2 > 0$ ដែល

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ចំពោះ } |x - a| < \delta_1$$

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ចំពោះ } |x - a| < \delta_2$$

គេមាន $|f(x) + g(x) - L - M| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)|$

$$\leq |f(x) - L| + |g(x) - M|$$

យក $\delta < \delta_1$ និង $\delta < \delta_2$ នោះគ្រប់ x ដែល $|x - a| < \delta$

គេបាន $|f(x) + g(x) - L - M| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ។

ដោយគ្រប់ $\varepsilon > 0$ មាន $\delta > 0$ ដែល $|x - a| < \delta$ នាំឱ្យ

$$|(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \varepsilon \quad \forall$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$ ។

3-គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{|x|}$

ឃ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 8x - 1} - \sqrt{x^2 - 3})$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$

$$\begin{aligned}
 & (\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - x + 1 - 1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(1+x-1+x)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2x(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \frac{1}{2}$ ។

$$\begin{aligned}
 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)} \\
 & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(1-\frac{1}{x})(2+\frac{3}{x})(\frac{2}{x}-1)}{x^3(1+\frac{1}{x^2})(2+\frac{1}{x})} \\
 & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-\frac{1}{x})(2+\frac{3}{x})(\frac{2}{x}-1)}{(1+\frac{1}{x^2})(2+\frac{1}{x})} = \frac{-2}{2} = -1
 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)} = -1$ ។

$$\begin{aligned}
 \text{គ. } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{|x|} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x+1)}{-x} \\
 &= -\lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = -1
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{|x|} = -1 \quad \text{។}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ឃ. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 8x - 1} - \sqrt{x^2 - 3}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 8x - 1 - x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 8x - 1} + \sqrt{x^2 - 3}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x + 2}{|x| \sqrt{1 + \frac{8}{x} - \frac{1}{x^2}} + |x| \sqrt{1 - \frac{3}{x^2}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(8 + \frac{2}{x})}{-x(\sqrt{1 + \frac{8}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x^2}})} \\
 &= -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{8}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x^2}}} = -\frac{8}{1+1} = -4
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 8x - 1} - \sqrt{x^2 - 3}) = -4 \quad \text{។}$$

4-កំណត់ចំនួនថេរ a ដើម្បីឱ្យលីមីតខាងក្រោមជាលីមីតនៃចំនួនថេរ ហើយ
កំណត់លីមីតនេះផង ។

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - a}{x-1}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} + a}{x}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+a} - 1}{x-2}$

ឃ. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + ax} - 1}{x^2 - 1}$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនថេរ a ដើម្បីឱ្យលីមីតខាងក្រោមជាលីមីតនៃចំនួនថេរ ហើយ
កំណត់លីមីតនេះផង

ក. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - a}{x-1}$

ដើម្បីឱ្យលីមីតនេះជាចំនួនថេរលុះត្រាតែ $x = 1$ ជាឫសសមីការ

$\sqrt{x+3} - a = 0$ គេបាន $\sqrt{1+3} - a = 0 \Rightarrow a = 2$ ។

ចំពោះ $a = 2$ គេបាន

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$ខ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} + a}{x}$$

ដើម្បីឱ្យលីមីតនេះជាចំនួនថេរលុះត្រាតែ $x = 0$ ជាប្រសព្វសមីការ

$$\sqrt{1+3x} - a = 0 \text{ គេបាន } \sqrt{1+3(0)} + a = 0 \Rightarrow a = -1 \quad \text{។}$$

ចំពោះ $a = -1$ គេបាន

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+3x-1}{x(\sqrt{1+3x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{1+3x}+1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$គ. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+a} - 1}{x-2}$$

ដើម្បីឱ្យលីមីតនេះជាចំនួនថេរលុះត្រាតែ $x = 2$ ជាប្រសព្វសមីការ

$$\sqrt{x+a} - 1 = 0 \text{ គេបាន } \sqrt{2+a} - 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \quad \text{។}$$

ចំពោះ $a = -1$ គេបាន

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1-1}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ឃ. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + ax} - 1}{x^2 - 1}$$

ដើម្បីឱ្យលីមីតនេះជាចំនួនថេរលុះត្រាតែ $x = -1$ ជាប្រសព្វសមីការ

$$\sqrt{x^2 + ax} - 1 = 0 \text{ គេបាន } \sqrt{1 - a} - 1 = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \text{។}$$

ចំពោះ $a = 0$ គេបាន

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2} - 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x| - 1}{(|x| - 1)(|x| + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{|x| + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

5-គណនាលីមីតខាងក្រោម

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x}{\sin^2 5x}$$

$$\text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\tan^3 x - \sin^3 x}$$

$$\text{គ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$$

$$\text{ឃ. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$$

$$\text{ង. } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \sin \frac{1}{x}$$

$$\text{ច. } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x}{\sin^2 5x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x}}{25 \cdot \left(\frac{\sin 5x}{x} \right)^2} = \frac{3 \cdot 1}{25 \cdot 1^2} = \frac{3}{25}$$

ដូច្នេះ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x}{\sin^2 5x} = \frac{3}{25}$ ។

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\tan^3 x - \sin^3 x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\tan^3 x - \cos^3 x \tan^3 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{(1 - \cos^3 x) \tan^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 + \cos x + \cos^2 x) \tan^3 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{(1 + \cos x + \cos^2 x) \tan^3 x}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \times \frac{x^3}{\tan^2 x} \times \frac{1}{x(1 + \cos x + \cos^2 x)} = \pm \infty$$

$$\begin{aligned}
 \text{គ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 1 - \cos x}{\sin^2 x (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2} (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8} \\
 \text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x} &= \frac{\sqrt{2}}{8} \quad \text{។}
 \end{aligned}$$

$$\text{ឃ. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$$

$$\text{តាង } t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - t$$

$$\text{កាលណា } x \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ នោះ } t \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{t^2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{t^2} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = \frac{1}{2} \quad \text{។}$$

$$\text{ង. } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \sin \frac{1}{x}$$

តាង $t = \frac{1}{x}$ កាលណា $x \rightarrow \pm\infty$ នោះ $t \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \sin \frac{1}{x} = 1 \quad \text{។}$$

$$\text{ច. } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right)$$

តាង $t = \frac{1}{x}$ កាលណា $x \rightarrow +\infty$ នោះ $t \rightarrow 0$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{t^2}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{។}$$

6-គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 + xe^x)$

ខ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)e^x$

គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)e^{-x}$

ឃ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x}{2e^x + 1}$

ង. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

ច. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \ln(x^2 + 1)$

ឆ. $\lim_{x \rightarrow -4} x \ln(4 - 3x - x^2)$

ជ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \{x[\ln(x+1) - \ln x]\}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 + xe^x)$

គេមាន $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + xe^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) + \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x) = +\infty$

(ព្រោះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$)

ហើយ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + xe^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) + \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = +\infty$

(ព្រោះ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$)

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 + xe^x) = +\infty$ ។

ខ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)e^x$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) = -\infty$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)e^x = -\infty$

គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)e^{-x}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} + 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ (ព្រោះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$)

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)e^{-x} = 0$ ។

ឃ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x}{2e^x + 1}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 - \frac{x}{e^x})}{e^x(2 + \frac{1}{e^x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - xe^{-x}}{2 + e^{-x}} = \frac{1}{2}$

(ព្រោះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$)

ង. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$= \lim_{x \rightarrow 0} [\ln x - \ln(x+1)]$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \ln x - \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+1) = -\infty$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -\infty$ ។

$$\text{ច. } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \ln(x^2 + 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x) \times \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln(x^2 + 1) = \pm\infty$$

$$\text{ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x) = \pm\infty \text{ និង } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$$

$$\text{ដូច្នេះ } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \ln(x^2 + 1) = \pm\infty \quad \text{។}$$

$$\text{ឆ. } \lim_{x \rightarrow -4} x \ln(4 - 3x - x^2)$$

$$\text{តាង } x = t - 4 \text{ កាលណា } x \rightarrow -4 \text{ នោះ } t \rightarrow 0$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} (t - 4) \ln[4 - 3(t - 4) - (t - 4)^2]$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} (t - 4) \ln(5t - t^2)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} (t - 4) [\ln t + \ln(5 - t)] = +\infty$$

$$(\text{ព្រោះ } \lim_{t \rightarrow 0} (t - 4) = -4 ; \lim_{t \rightarrow 0} [\ln t + \ln(5 - t)] = -\infty)$$

$$\text{ដូច្នេះ } \lim_{x \rightarrow -4} x \ln(4 - 3x - x^2) = +\infty \quad \text{។}$$

$$\text{ជ. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \{x[\ln(x + 1) - \ln x]\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \ln e = 1$$

$$(\text{ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e)$$

$$\text{ដូច្នេះ } \lim_{x \rightarrow +\infty} \{x[\ln(x + 1) - \ln x]\} = 1 \quad \text{។}$$

7-គណនាលីមីតខាងក្រោម

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

$$\text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$$

$$\text{គ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$$

$$\text{ឃ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x}{x^2}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម

$$\begin{aligned} \text{ក. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \tan x \cos x}{x^3} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2} \quad \text{។}$$

$$\begin{aligned} \text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{x} + \frac{\sin x}{x}}{\frac{1 - \cos x}{x} - \frac{\sin x}{x}} = \frac{0 + 1}{0 - 1} = -1 \end{aligned}$$

$$\left(\text{ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \right)$$

$$\begin{aligned} \text{គ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) + \cos x(1 - \sqrt{\cos 2x})}{x^2} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(1 - \sqrt{\cos 2x})}{x^2(1 + \sqrt{\cos 2x})} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x \sin^2 x}{x^2(1 + \sqrt{\cos 2x})} \\ = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{2 \cos x}{1 + \sqrt{\cos 2x}} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ដូច្នេះ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2} = \frac{3}{2} \quad \text{។}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{ឃ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) + \cos x(1 - \cos 2x)}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(1 - \cos 2x)}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x \sin^2 x}{x^2} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left[(\cos x) \times \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \\
 & \text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x}{x^2} = \frac{5}{2} \quad \text{។}
 \end{aligned}$$

8-គណនាលីមីតខាងក្រោម

$$\text{ក. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{4\sin^2 x - 1}$$

$$\text{ខ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos x}{\sin^2 x}$$

$$\text{គ. } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x(a-b)}{\sin ax - \sin bx} \quad (a \neq 0, b \neq 0, a \neq b)$$

$$\text{ឃ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1 + x \sin x - \cos x}}$$

$$\text{ង. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1} - 1)$$

$$\text{ច. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម

$$\begin{aligned} \text{ក. } & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{4\sin^2 x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(\sin x - 1)(2\sin x - 1)}{(2\sin x - 1)(2\sin x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - 1}{2\sin x + 1} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{1 + 1} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{4\sin^2 x - 1} = -\frac{1}{4}$ ។

ខ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos x}{\sin^2 x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} + \frac{1 - \cos x}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1^2} = \frac{3}{2}$$
 ព្រោះ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

និង $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{3}{2}$ ។

គ. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x(a-b)}{\sin ax - \sin bx}$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$)

គេមាន $\sin ax - \sin bx = 2 \sin \frac{(a-b)x}{2} \cos \frac{(a+b)x}{2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(a-b)}{2 \sin \frac{(a-b)x}{2} \cos \frac{(a+b)x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a-b)x}{2 \sin \frac{(a-b)x}{2}} \times \frac{1}{\cos \frac{(a+b)x}{2}} = 1$$

$$\begin{aligned}
 & \text{ឃ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x (\sqrt{1+x \sin x} + \cos x)}{1+x \sin x - \cos^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x (\sqrt{1+x \sin x} + \cos x)}{x \sin x + \sin^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\sqrt{1+x \sin x} + \cos x)}{x + \sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \frac{\sin x}{x}} \times \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x \sin x} + \cos x) = \frac{1}{2} \times 2 = 1
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x} = 1 \quad \text{។}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{ង. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1} - 1) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 1}} - 1 \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x - 1}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 1}} - 1 \right) \\
 &= \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1} - 1) = \frac{1}{2} \quad \text{។}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{ច. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}{x+2-2} \\
 &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+2} + \sqrt{2}) \\
 &= 3 \times 1 \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \\
 & \text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}} = 6\sqrt{2} \quad \text{។}
 \end{aligned}$$

៩-កំណត់អនុគមន៍ដឺក្រេទីពីរដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌលីមីតទាំងពីរខាងក្រោម

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = 1 \quad \text{(i)} \quad \text{និង} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = -1 \quad \text{(ii)}$$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់អនុគមន៍ដឺក្រេទីពីរ

$$\text{តាង } f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\text{គេមាន } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 1} = 1$$

$$\text{សមមូល } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2}{x^2} = 1 \Rightarrow a = 1$$

អនុគមន៍អាចសរសេរ $f(x) = x^2 + bx + c$ ។

$$\text{គេមាន } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = -1$$

$$\text{គេទាញ } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + bx + c) = 0$$

$$1 + b + c = 0 \Rightarrow c = -1 - b$$

អនុគមន៍អាចសរសេរ $f(x) = x^2 + bx - 1 - b$

$$f(x) = (x-1)(x+1) + b(x-1)$$

$$= (x-1)(x+1+b)$$

$$\text{ហើយ } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1+b)}{x^2 - 1} = -1$$

$$\text{ឬ } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1+b)}{(x-1)(x+1)} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1+b}{x+1} = -1$$

$$\frac{2+b}{2} = -1 \Rightarrow b = -4$$

ដូចនេះ $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ។

10-គេមានពហុកោណនិយ័ត្តចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលមាន n ជ្រុងនិងកាំស្មើ a ។

តាង S_n ជាផ្ទៃក្រឡានៃពហុកោណនេះ ។ គណនា S_n រួច $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា S_n រួច $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

-មុំផ្ចិតរបស់ពហុកោណ

$$\varphi_n = \frac{2\pi}{n}$$

-ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ OAB

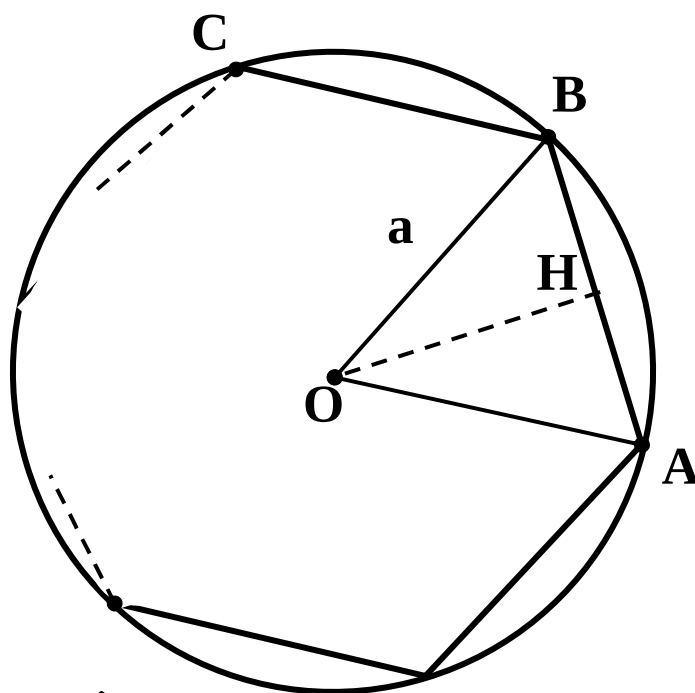
$$S_{OAB} = \frac{1}{2} a^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

-ក្រឡាផ្ទៃរបស់ពហុកោណនិយ័ត n ជ្រុង

$$S_n = n \times S_{OAB} = \frac{1}{2} a^2 n \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$\text{យើងបាន } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} a^2 n \sin \frac{2\pi}{n} = \pi a^2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi a^2$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \pi a^2 \quad \text{។}$$



មេរៀនទី២

ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

១. ភាពជាប់ត្រង់មួយចំនុច

✍ **និយមន័យ :**

អនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាប់ត្រង់ចំនុច $x = c$ កាលណា f បំពេញ
លក្ខខណ្ឌទាំងបីដូចខាងក្រោម

1- f កំណត់ចំពោះ $x = c$

2- f មានលីមីតកាលណា $x \rightarrow c$

3- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

២. លក្ខណៈនៃអនុគមន៍ជាប់

បើ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = c$ នោះគេបាន

១. $f(x) \pm g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = c$

២. $f(x).g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = c$

៣. $\frac{f(x)}{g(x)}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = c$ ដែល $g(c) \neq 0$ ។

៣. កាតព្វកិច្ចលើចន្លោះ

និយមន័យ :

- អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបើក (a, b) លុះត្រាតែ f ជាប់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x នៃចន្លោះបើនោះ ។
- អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a, b]$ លុះត្រាតែ f ជាប់លើចន្លោះបើក (a, b) និងមានលីមីត $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$; $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ (អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ a ខាងស្តាំ ជាប់ត្រង់ b ខាងឆ្វេង)

៤. កាតព្វកិច្ចនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

- បើអនុគមន៍ g ជាប់ត្រង់ $x = c$ និងអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $g(c)$ នោះអនុគមន៍បណ្តាក់ $(f \circ g)(x) = f [g(x)]$ ជាប់ត្រង់ c ។

៥. អនុវត្តន៍ អនុគមន៍បន្លាយតាមកាតព្វកិច្ច

បើ f ជាអនុគមន៍មិនកំណត់ត្រង់ $x = a$ និងមានលីមីត $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

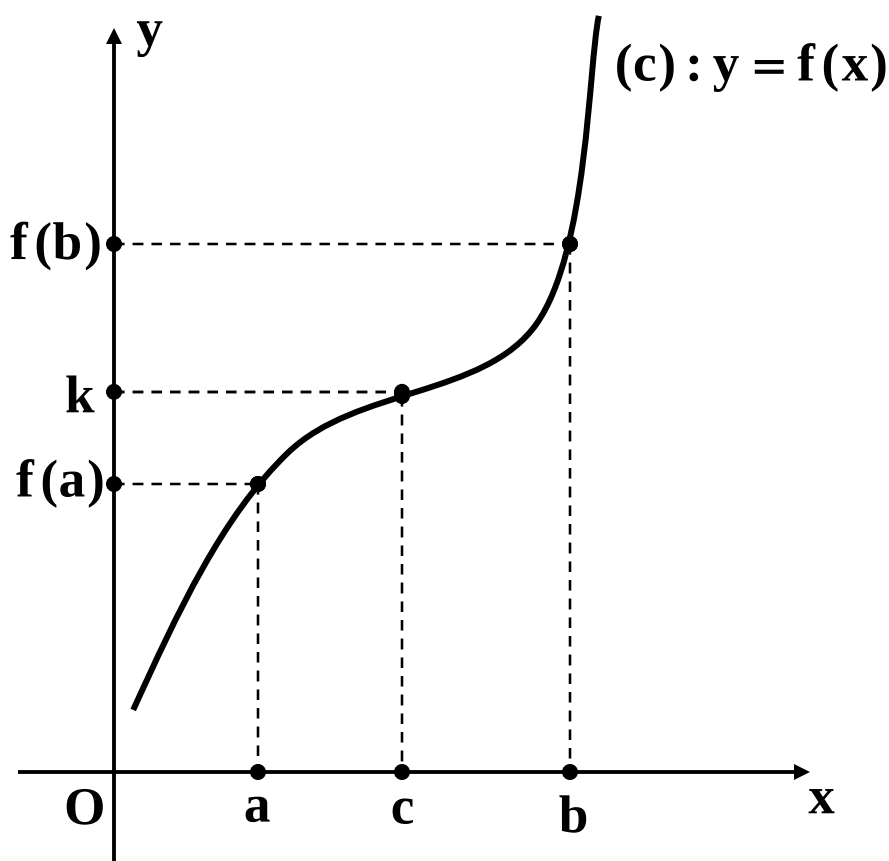
នោះអនុគមន៍បន្លាយនៃ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $x = a$ កំណត់ដោយ

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{បើ } x \neq a \\ L & \text{បើ } x = a \end{cases}$$

៦. ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល

ទ្រឹស្តីបទ :

បើអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a, b]$ និង k ជាចំនួនមួយនៅ
ចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ នោះមានចំនួនពិត c មួយយ៉ាងតិចក្នុង
ចន្លោះបិទ $[a, b]$ ដែល $f(c) = k$ ។



== លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ ==

1-បញ្ជាក់ថា តើអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់ត្រង់តម្លៃ x ដែលឱ្យឬទេ ?

ក. $f(x) = 5x^2 - 6x + 1$, $x = 2$

ខ. $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$, $x = 1$

គ. $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$, $x = 4$

ឃ. $f(x) = \frac{|x+2|}{x+2}$, $x = -2$

ង. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{បើ } x \leq 2 \\ 2 & \text{បើ } x > 2 \end{cases}$, $x = 2$

ច. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & \text{បើ } x < -1 \\ x^2-3 & \text{បើ } x \geq -1 \end{cases}$, $x = -1$

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍

ក. $f(x) = 5x^2 - 6x + 1$, $x = 2$

មាន $f(2) = 20 - 12 + 1 = 9$ កំនត់

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (5x^2 - 6x + 1) = 20 - 12 + 1 = 9$$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 9$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 2$ ។

$$\text{ខ. } f(x) = \frac{x+2}{x+1}, \quad x = 1$$

$$\text{មាន } f(1) = \frac{3}{2} \text{ កំណត់}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \frac{3}{2}$ នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 1$ ។

$$\text{គ. } f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}, \quad x = 4$$

$$\text{មាន } f(4) = \frac{\sqrt{4}-2}{4-4} = \frac{0}{0} \text{ មិនកំណត់}$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ $x = 4$ ។

$$\text{ឃ. } f(x) = \frac{|x+2|}{x+2}, \quad x = -2$$

$$\text{មាន } f(-2) = \frac{|-2+2|}{-2+2} = \frac{0}{0} \text{ មិនកំណត់}$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ $x = -2$ ។

$$\text{ង. } f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{បើ } x \leq 2 \\ 2 & \text{បើ } x > 2 \end{cases}, x = 2$$

$$\text{មាន } f(2) = 2 + 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1) = 3 \quad \text{និង} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2) = 2$$

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ នោះ $f(x)$ គ្មានលីមីត $x \rightarrow 2$ ។

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ $x = 2$ ។

$$\text{ច. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{បើ } x < -1 \\ x^2 - 3 & \text{បើ } x \geq -1 \end{cases}, x = -1$$

$$\text{មាន } f(-1) = 1 - 3 = -2 \quad \text{កំណត់}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x - 1) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - 3) = -2$$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -2$$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = -1$ ។

2-រកតម្លៃ x ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍ដាច់ ។

ក. $f(x) = \frac{3x-1}{2x-6}$

ខ. $f(x) = \frac{x}{x^2+4x-5}$

គ. $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2-x-2}$

ឃ. $f(x) = \frac{3x-2}{x^2-3x-18}$

ង. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+1 & \text{បើ } x \leq 2 \\ 3-x & \text{បើ } x > 2 \end{cases}$

ច. $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{បើ } x \leq -1 \\ 2 & \text{បើ } -1 < x < 1 \\ -x+3 & \text{បើ } x > 1 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃ x ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ខាងក្រោមជាអនុគមន៍ដាច់ ។

ក. $f(x) = \frac{3x-1}{2x-6}$

អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ដាច់លុះត្រាតែ $2x-6=0 \Rightarrow x=3$ ។

$$ខ. f(x) = \frac{x}{x^2 + 4x - 5}$$

អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ដាច់លុះត្រាតែ $x^2 + 4x - 5 = 0$

គេទាញយក $x_1 = 1$; $x_2 = -5$ ។

$$គ. f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x - 2}$$

អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ដាច់លុះត្រាតែ $x^2 - x - 2 = 0$

គេទាញយក $x_1 = -1$; $x_2 = 2$ ។

$$ឃ. f(x) = \frac{3x - 2}{x^2 - 3x - 18}$$

អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ដាច់លុះត្រាតែ $x^2 - 3x - 18 = 0$

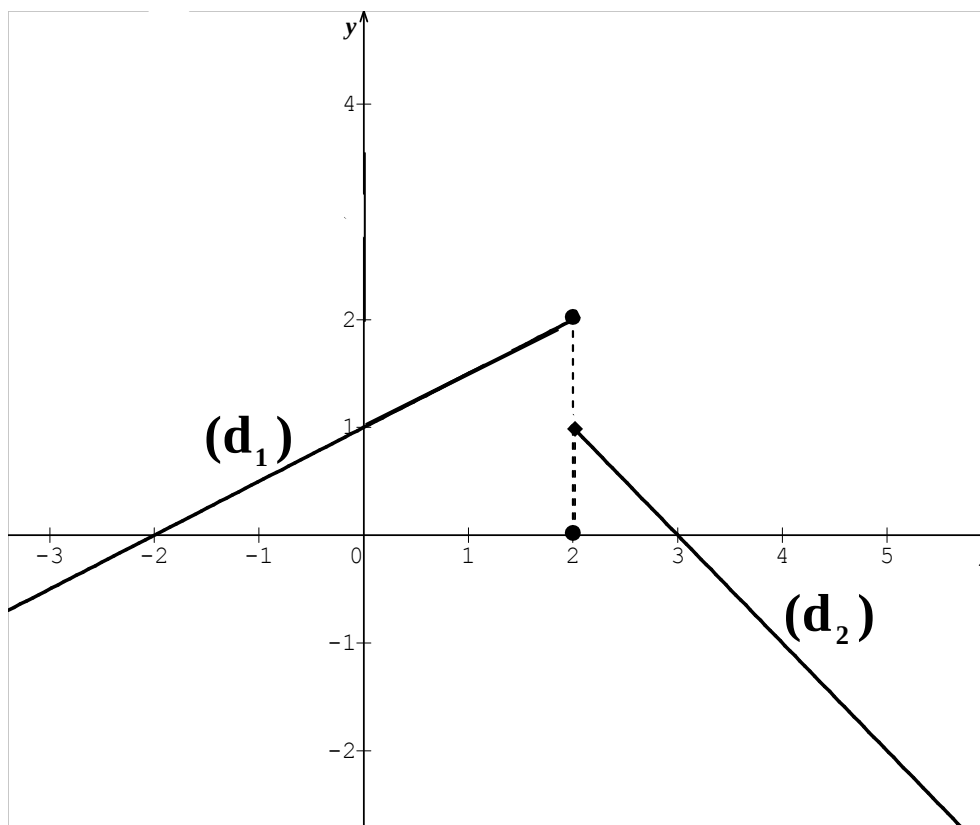
$$\Delta = 9 + 72 = 9^2$$

គេទាញយក $x_1 = \frac{3+9}{2} = 6$; $x_2 = \frac{3-9}{2} = -3$ ។

$$ង. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{បើ } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{បើ } x > 2 \end{cases}$$

តាង $(d_1) : y = \frac{1}{2}x + 1$, $x \leq 2$

និង $(d_2) : y = 3 - x$, $x > 2$



តាមក្រាហ្វិកយើងឃើញថាគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$, f ជាអនុគមន៍ដាច់ ។

$$\text{ច. } f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{បើ } x \leq -1 \\ 2 & \text{បើ } -1 < x < 1 \\ -x+3 & \text{បើ } x \geq 1 \end{cases}$$

ដោះស្រាយដូចលំហាត់ទី (ង)

គេបានគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ដាច់ ។

3-សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោមលើចន្លោះដែលឱ្យ ។

ក. $f(x) = \frac{x-3}{4+x}$ លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $[-4,1]$

ខ. $f(x) = x(1+\frac{1}{x})$ លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $[0,1]$

គ. $f(x) = \begin{cases} x(x-1) & \text{បើ } x \leq 3 \\ \frac{x^2-9}{x-3} & \text{បើ } x > 3 \end{cases}$

លើចន្លោះ $(0,3)$ និង $[0, 3]$

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍

ក. $f(x) = \frac{x-3}{4+x}$ លើចន្លោះ $(0,1)$ និង $[-4,1]$

-លើចន្លោះ $(0,1)$ យើងឃើញថាអនុគមន៍ f កំនត់បានជានិច្ច

ដូចនេះអនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $(0, 1)$ ។

-លើចន្លោះ $[-4, 1]$ អនុគមន៍ f មិនអាចកំនត់បានជានិច្ចទេ ព្រោះ

បើ $x = -4$ នោះ $f(-4) = \frac{-4-3}{4-4} = -\frac{7}{0}$ មិនកំនត់ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ $x = -4$ និងដាច់ក្នុងចន្លោះ $[-4, 1]$ ។

ខ. $f(x) = x(1 + \frac{1}{x})$ លើចន្លោះ $(0, 1)$ និង $[0, 1]$

-លើចន្លោះ $(0, 1)$ យើងឃើញថា $f(x) = x(1 + \frac{1}{x}) = x + 1$ កំណត់

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $(0, 1)$ ។

-លើចន្លោះ $[0, 1]$ យើងឃើញថា f ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ $x = 0$

ព្រោះអនុគមន៍ f មិនកំណត់ត្រង់ $x = 0$ ។

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ដាច់លើចន្លោះ $[0, 1]$ ។

$$\text{គ. } f(x) = \begin{cases} x(x-1) & \text{បើ } x \leq 3 \\ \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{បើ } x > 3 \end{cases}$$

លើចន្លោះ $(0, 3)$ និង $[0, 3]$

បើ $x = 3$ នោះ $f(3) = 3(3-1) = 6$ កំណត់

$$\text{មាន } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x(x-1) = 6$$

$$\text{និង } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + 3) = 6$$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6 = f(3)$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។ ហេតុនេះវាជាអនុគមន៍ជាប់

លើចន្លោះ $(0, 3)$ និង $[0, 3]$ ។

4-រកតម្លៃ A ដែលធ្វើឱ្យ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x

$$\text{ក. } f(x) = \begin{cases} Ax - 3 & \text{បើ } x < 2 \\ 3 - x + 2x^2 & \text{បើ } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{ខ. } f(x) = \begin{cases} 1 - 3x & \text{បើ } x < 4 \\ Ax^2 + 2x - 3 & \text{បើ } x \geq 4 \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃ A ដែលធ្វើឱ្យ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x

$$\text{ក. } f(x) = \begin{cases} Ax - 3 & \text{បើ } x < 2 \\ 3 - x + 2x^2 & \text{បើ } x \geq 2 \end{cases}$$

ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x លុះត្រាតែ

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 2^-} (Ax - 3) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3 - x + 2x^2)$$

$$2A - 3 = 3 - 2 + 8$$

$$2A - 3 = 9 \Rightarrow A = 6$$

ដូចនេះ $A = 6$ ។

$$2. f(x) = \begin{cases} 1 - 3x & \text{បើ } x < 4 \\ Ax^2 + 2x - 3 & \text{បើ } x \geq 4 \end{cases}$$

ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x លុះត្រាតែ

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 4^-} (1 - 3x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (Ax^2 + 2x - 3)$$

$$1 - 12 = 16A + 8 - 3$$

$$-11 = 16A + 5 \Rightarrow A = -1$$

ដូចនេះ $A = -1$ ។

5-រកតម្លៃ A និង B ដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍កំណត់ដោយ

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2 + 5x - 9 & \text{បើ } x < 1 \\ B & \text{បើ } x = 1 \\ (3-x)(A-2x) & \text{បើ } x > 1 \end{cases} \quad \text{ជាប់គ្រប់តម្លៃ } x \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃ A និង B

ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x លុះត្រាតែ

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\text{គេបាន } \lim_{x \rightarrow 1^-} (Ax^2 + 5x - 9) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3-x)(A-2x) = B$$

$$A + 5 - 9 = 2(A - 2) = B$$

$$A - 4 = 2A - 4 = B$$

$$\text{គេទាញ } A = 0, B = -4 \text{ ។}$$

6-ក្នុងបណ្តាអនុគមន៍ខាងក្រោម តើ f អាចមានបន្ទាយតាមភាពជាប់ត្រង់ a ឬទេ ?

ក. $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$, $a = 3$ ។

ខ. $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$, $a = 2$ ។

គ. $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$, $a = 1$ ។

ឃ. $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 3x - 4}$, $a = 4$

ដំណោះស្រាយ

រកអនុគមន៍បន្ទាយតាមភាពជាប់

ក. $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$, $a = 3$ ។

គេមាន $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6$

ដូចនេះគេអាចបន្ទាយ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $a = 3$ ។

បើ g ជាអនុគមន៍បន្ទាយតាមភាពជាប់នោះអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{បើ } x \neq 3 \\ 6 & \text{បើ } x = 3 \end{cases}$$

ខ. $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$, $a = 2$ ។

គេមាន $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 5) = 7$

ដូចនេះគេអាចបន្លាយ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $a = 2$ ។

បើ g ជាអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នោះអនុគមន៍ g កំនត់ដោយ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} & \text{បើ } x \neq 2 \\ 7 & \text{បើ } x = 2 \end{cases}$$

គ. $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$, $a = 1$ ។

គេមាន $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$

ដូចនេះគេអាចបន្លាយ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $a = 1$ ។

បើ g ជាអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នោះអនុគមន៍ g កំនត់ដោយ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{បើ } x \neq 1 \\ 3 & \text{បើ } x = 1 \end{cases}$$

$$\text{ឃ. } f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 3x - 4}, \quad a = 4$$

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 3x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)(x-4)}{(x+1)(x-4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+4}{x+1} = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

ដូចនេះគេអាចបន្លាយ f តាមភាពជាប់ត្រង់ $a = 4$ ។

បើ g ជាអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នោះអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 3x - 4} & \text{បើ } x \neq 4 \\ \frac{8}{5} & \text{បើ } x = 4 \end{cases}$$

7-ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល បង្ហាញថា អនុគមន៍ខាងក្រោមមានចំនួន c

ក្នុងចន្លោះដែលឱ្យ ។

ក. $f(x) = x^2 + x - 1$, $[0, 5]$, $f(c) = 11$ ។

ខ. $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $[0, 3]$, $f(c) = 0$ ។

គ. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$, $[0, 3]$, $f(c) = 4$ ។

ឃ. $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1}$, $[\frac{5}{2}, 4]$, $f(c) = 6$

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ

ក. $f(x) = x^2 + x - 1$, $[0, 5]$, $f(c) = 11$ ។

គេមាន $f(0) = -1$ និង $f(5) = 25 + 5 - 1 = 29$

ដោយ $f(0) = -1 < f(c) = 11 < f(5) = 29$

ដូចនេះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយ៉ាងហោចណាស់មាន c មួយនៃ $[0, 5]$

ដែល $f(c) = 11$ ។

ខ. $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $[0, 3]$, $f(c) = 0$ ។

គេមាន $f(0) = 8$ និង $f(3) = 9 - 18 + 8 = -1$

ដោយ $f(3) = -1 < f(c) = 0 < f(0) = 8$

ដូចនេះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយ៉ាងហោចណាស់មាន c មួយនៃ $[0, 3]$

ដែល $f(c) = 0$ ។

គ. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$, $[0, 3]$, $f(c) = 4$ ។

គេមាន $f(0) = -2$ និង $f(3) = 27 - 9 + 3 - 2 = 19$

ដោយ $f(0) = -2 < f(c) = 4 < f(3) = 19$

ដូចនេះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយ៉ាងហោចណាស់មាន c មួយនៃ $[0, 3]$

ដែល $f(c) = 4$ ។

ឃ. $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1}$, $[\frac{5}{2}, 4]$, $f(c) = 6$

គេមាន $f(\frac{5}{2}) = \frac{\frac{25}{4} + \frac{5}{2}}{\frac{5}{2} - 1} = \frac{\frac{35}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{35}{6}$ និង $f(4) = \frac{16 + 4}{4 - 1} = \frac{20}{3}$

ដោយ $f(\frac{5}{2}) = \frac{35}{6} < f(c) = 6 < f(4) = \frac{20}{3}$ ដូចនេះតាមទ្រឹស្តីបទ

តម្លៃកណ្តាលយ៉ាងហោចណាស់មាន c មួយនៃ $[\frac{5}{2}, 4]$ ដែល $f(c) = 6$ ។

៨-គេឱ្យអនុគមន៍ និង ចន្លោះបិទដូចខាងក្រោម ។ ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល
រកតម្លៃ c បើគេស្គាល់តម្លៃ k ។

ក. $f(x) = 2 + x - x^2$, $[0, 3]$, $k = 1$ ។

ខ. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $[-45, 3]$, $k = 3$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃ c

ក. $f(x) = 2 + x - x^2$, $[0, 3]$, $k = 1$ ។

ដោះស្រាយសមីការ $f(c) = k$ ដែល $c \in [0, 3]$

គេបាន $2 + c - c^2 = 1$ ឬ $c^2 - c - 1 = 0$, $\Delta = 1 + 4 = 5$

គេទាញបាន $c_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $c_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$

ដូចនេះ $c = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ។

ខ. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $[-45, 3]$, $k = 3$ ។

ចម្លើយ $c = -4$ (សិស្សដោះស្រាយខុសឯង) ។

១-ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $x \tan x = \cos x$ យ៉ាងហោចណាស់មាន

ឫសពិតមួយចន្លោះ $[0, \frac{\pi}{4}]$ ។

ខ.ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $(x^n - 1)\cos x + \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$

យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $(0, 1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $x \tan x = \cos x$ យ៉ាងហោចណាស់មាន

ឫសពិតមួយចន្លោះ $[0, \frac{\pi}{4}]$ ។

តាងអនុគមន៍ $f(x) = x \tan x - \cos x$

គេមាន $f(0) = -1$ និង $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$

ដោយ $f(0) \times f(\frac{\pi}{4}) < -(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}) < 0$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃ

កណ្តាលយ៉ាងហោចណាស់មានចំនួនពិត c មួយនៃ $[0, \frac{\pi}{4}]$

ដែល $f(c) = 0$ ។ ដូចនេះសមីការ $x \tan x = \cos x$ យ៉ាងហោចណាស់

មានឫសពិតមួយចន្លោះ $[0, \frac{\pi}{4}]$ ។

ខ.ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $(x^n - 1)\cos x + \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$

យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $(0, 1)$ ។

តាងអនុគមន៍ $f(x) = (x^n - 1)\cos x + \sqrt{2}\sin x - 1$

គេមាន $f(0) = -2$ និង $f(1) = \sqrt{2}\sin 1 - 1 > \sqrt{2}\sin \frac{\pi}{4} - 1 = 0$

ដោយ $f(0) \times f(1) < 0$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃ

កណ្តាលយ៉ាងហោចណាស់មានចំនួនពិត c មួយនៃ $[0, 1]$

ដែល $f(c) = 0$ ។

ដូចនេះសមីការ $(x^n - 1)\cos x + \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$

យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយចន្លោះ $[0, \frac{\pi}{4}]$ ។

== លំហាត់ជំពូកទី១ និង ដំណោះស្រាយ ==

1-គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 - x + 3})$

ខ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 - x + 3})$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x \sin x}{x - \sin^2 x}$

ឃ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 - x + 3})$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} |x| \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} \right) = +\infty$$

ព្រោះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} \right) = 2 - 1 = 1$ ។

$$\begin{aligned}
 & ខ. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 - x + 3}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 2 - x^2 + x - 3}{\sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 3}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2 - \frac{1}{x})}{|x| (\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}} = \frac{2}{1 + 1} = 1
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 - x + 3}) = 1$

$$\begin{aligned}
 & គ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x \sin x}{x - \sin^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x - \sin x)}{x(1 - \frac{\sin^2 x}{x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{1 - \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x} = \frac{0 - 0}{1 - 1 \times 0} = 0
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x \sin x}{x - \sin^2 x} = 0$ ។

$$\begin{aligned}
 & \text{ឃ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x - \sin x)\sqrt{1 + \cos x}}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x - \sin x)\sqrt{1 + \cos x}}{|\sin x|} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{|\sin x|} - \frac{\sin x}{|\sin x|} \right) \sqrt{1 + \cos x}
 \end{aligned}$$

-បើ $x \rightarrow 0^-$ នោះ $|\sin x| = -\sin x$

គេបាន

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2x}{-\sin x} + 1 \right) \sqrt{1 + \cos x} = -\sqrt{2} \quad -$$

បើ $x \rightarrow 0^+$ នោះ $|\sin x| = \sin x$

គេបាន

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x}{\sin x} - 1 \right) \sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2}$$

មេរៀនទី១

ដេរីវេនៃអនុគមន៍

១_ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រង់ X_0

☞ និយមន័យ :

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាលីមីត (បើមាន) នៃផលធៀប

កំនើន $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ កាលណា Δx ខិតទៅជិត 0 ។

គេកំនត់សរសេរ

$$y'_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

២_ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

បើ $y = f(u)$ និង $u = g(x)$ នោះគេបាន

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = y' \times u'$$

ឬ $\frac{d}{dx} f[u(x)] = f'(u) \times u'(x)$

៣. ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

$$1. y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$$

$$2. y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$$

$$3. y = \tan x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$4. y = \cot x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

$$5. y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$$

$$6. y = \cos u \Rightarrow y' = -\sin u$$

$$7. y = \tan u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$8. y = \cot u \Rightarrow y' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$$

៤. ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

បើអនុគមន៍ $y = f(x)$ មានដេរីវេបន្តបន្ទាប់ដល់លំដាប់ n

នោះ $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ ហៅថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$

$$\text{ហើយ } f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x) \quad \text{។}$$

== លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ ==

1-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $f(x) = (2x + 1)^4$

ខ. $f(x) = \sqrt{5x^6 - 12}$

គ. $f(x) = (x^5 - 4x^2 + 8)^8$

ឃ. $f(x) = (3x^4 - 7x^2 + 9)^5$

ង. $f(x) = \frac{1}{5x^2 - 6x + 2}$

ច. $f(x) = \frac{2}{(6x^2 + 5x + 1)^2}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $f(x) = (2x + 1)^4$

តាមរូបមន្ត $(u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$

យើងបាន $f'(x) = 4(2x + 1)'(2x + 1)^3$

$$= 8(2x + 1)^3$$

ដូចនេះ $f'(x) = 8(2x + 1)^3$

ខ. $f(x) = \sqrt{5x^6 - 12}$

តាមរូបមន្ត $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$\begin{aligned}\text{យើងបាន } f'(x) &= \frac{(5x^6 - 12)'}{2\sqrt{5x^6 - 12}} \\ &= \frac{30x^5}{2\sqrt{5x^6 - 12}} \\ &= \frac{15x^5}{\sqrt{5x^6 - 12}}\end{aligned}$$

$$\text{គ. } f(x) = (x^5 - 4x^2 + 8)^8$$

$$\begin{aligned}\text{យើងបាន } f'(x) &= 8(x^5 - 4x^2 + 8)'(x^5 - 4x^2 + 8)^7 \\ &= 8(5x^4 - 8x)(x^5 - 4x^2 + 8)^7 \\ &= 8x(5x^3 - 8)(x^5 - 4x^2 + 8)^7\end{aligned}$$

$$\text{ឃ. } f(x) = (3x^4 - 7x^2 + 9)^5$$

$$\begin{aligned}\text{យើងបាន } f'(x) &= 5(3x^4 - 7x^2 + 9)'(3x^4 - 7x^2 + 9)^4 \\ &= 5(12x^3 - 14x)(3x^4 - 7x^2 + 9)^4 \\ &= 10x(6x^2 - 7)(3x^4 - 7x^2 + 9)^4\end{aligned}$$

$$\text{ង. } f(x) = \frac{1}{5x^2 - 6x + 2}$$

$$\begin{aligned}\text{យើងបាន } f'(x) &= -\frac{(5x^2 - 6x + 2)'}{(5x^2 - 6x + 2)^2} \\ &= -\frac{10x - 6}{(5x^2 - 6x + 2)^2}\end{aligned}$$

$$\text{ច. } f(x) = \frac{2}{(6x^2 + 5x + 1)^2}$$

$$\text{គេអាចសរសេរ } f(x) = 2(6x^2 + 5x + 1)^{-2}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } f'(x) &= -4(6x^2 + 5x + 1)'(6x^2 + 5x + 1)^{-3} \\ &= \frac{-4(12x + 5)}{(6x^2 + 5x + 1)^3} \end{aligned}$$

2-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

$$\text{ក. } y = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$\text{ខ. } y = \frac{1}{\sqrt{5x^3 + 2}}$$

$$\text{គ. } y = \sqrt{\frac{3x + 1}{2x - 1}}$$

$$\text{ឃ. } y = \left(\frac{x + 2}{2 - x} \right)^3$$

$$\text{ង. } y = (x + 2)^3 (2x - 1)^5$$

$$\text{ច. } y = 2(3x + 1)^4 (5x - 3)^2$$

ដំណោះស្រាយ

$$\text{ក. } y = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$\text{គេអាចសរសេរ } y = (4x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{គេបាន } y' = -\frac{1}{2}(4x^2 + 1)'(4x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{4x}{\sqrt{(4x^2 + 1)^3}}$$

$$ខ. y = \frac{1}{\sqrt{5x^3 + 2}}$$

$$\text{តើអាចសរសេរ } y = (5x^3 + 2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{តើបាន } y' = -\frac{1}{2}(5x^3 + 2)'(5x^3 + 2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{15x^2}{2\sqrt{(5x^3 + 2)^3}}$$

$$គ. y = \sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}}$$

$$\text{តើបាន } y' = \left(\frac{3x+1}{2x-1}\right)' \cdot \frac{2}{\sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}}}$$

$$= \frac{3(2x-1) - 2(3x+1)}{(2x-1)^2} \cdot \frac{2\sqrt{2x-1}}{\sqrt{3x+1}}$$

$$= -\frac{10}{(2x-1)\sqrt{(2x-1)(3x+1)}}$$

$$ឃ. y = \left(\frac{x+2}{2-x}\right)^3$$

$$\text{តើបាន } y' = 3\left(\frac{x+2}{2-x}\right)' \left(\frac{x+2}{2-x}\right)^3$$

$$= \frac{3(2-x) + 3(x+2)}{(2-x)^2} \cdot \left(\frac{x+2}{2-x}\right)^3 = \frac{12(x+2)^3}{(2-x)^5}$$

ង. $y = (x + 2)^3 (2x - 1)^5$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } y' &= 3(x + 2)^2 (2x - 1)^5 + 10(2x - 1)^4 (x + 2)^3 \\ &= (x + 2)^2 (2x - 1)^4 (6x - 3 + 10x + 20) \\ &= (16x + 17)(x + 2)^2 (2x - 1)^4 \end{aligned}$$

ច. $y = 2(3x + 1)^4 (5x - 3)^2$

$$\begin{aligned} \text{យើងបាន } y' &= 24(3x + 1)^3 (5x - 3)^2 + 30(5x - 3)(3x + 1)^4 \\ &= 2(5x - 3)(3x + 1)^3 (60x - 36 + 45x + 15) \\ &= 2(5x - 3)(105x - 21)(3x + 1)^3 \end{aligned}$$

3-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ តាមវិធីពីរយ៉ាងគឺ តាមរូបមន្តដេរីវេនៃផលគុណ និងដេរីវេនៃស្វ័យគុណ រួចបង្ហាញថាវិធីទាំងពីរមានលទ្ធផលដូចគ្នា

ក. $f(x) = (3x + 5)^2$

ខ. $f(x) = (7 - 4x)^2$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f(x) = (3x + 5)^2$

គេអាចសរសេរ $f(x) = (3x + 5)(3x + 5)$

តាមរូបមន្ត $(uv)' = u'v + v'u$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } f'(x) &= (3x+5)'(3x+5) + (3x+5)'(3x+5) \\ &= 3(3x+5) + 3(3x+5) \\ &= 9x+15 + 9x+15 \\ &= 18x+30 = 6(3x+5) \end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀតដោយប្រើរូបមន្ត $(u^n)' = nu'.u^{n-1}$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } f'(x) &= 2(3x+5)'(3x+5) \\ &= 6(3x+5) \end{aligned}$$

ខ. $f(x) = (7-4x)^2$

គេអាចសរសេរ $f(x) = (7-4x)(7-4x)$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } f'(x) &= (7-4x)'(7-4x) + (7-4x)'(7-4x) \\ &= -4(7-4x) - 4(7-4x) \\ &= 8(7-4x) \end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀតដោយប្រើរូបមន្ត $(u^n)' = nu'.u^{n-1}$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } f'(x) &= 2(7-4x)'(7-4x) \\ &= -8(7-4x) \quad \text{។} \end{aligned}$$

4-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = \sin^2 x + \cos^2 x$

ខ. $y = 5x^3 - 2\sin x \cos x$

គ. $y = (2x - \sin x)^3$

ឃ. $y = \sin x - x^2 \cos x$

ង. $y = x^2 - \tan^2 x$

ច. $y = 3x \cot^2 x$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = \sin^2 x + \cos^2 x$

ដោយ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

គេបាន $y = 1 \Rightarrow y' = 0$

ខ. $y = 5x^3 - 2\sin x \cos x$

គេមាន $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

គេបាន $y = 5x^3 - \sin 2x$

$$y' = 15x - 2\cos 2x$$

គ. $y = (2x - \sin x)^3$

$$\begin{aligned} y' &= 3(2x - \sin x)'(2x - \sin x)^2 \\ &= 3(2 - \cos x)(2x - \sin x)^2 \end{aligned}$$

ឃ. $y = \sin x - x^2 \cos x$

$$\begin{aligned} y' &= (\sin x)' - (x^2)' \cos x - x^2 (\cos x)' \\ &= \cos x - 2x \cos x + x^2 \sin x \\ &= (1 - 2x) \cos x + x^2 \sin x \end{aligned}$$

ង. $y = x^2 - \tan^2 x$

$$\begin{aligned} y' &= 2x - 2(\tan x)' \tan x \\ &= 2x - 2(1 + \tan^2 x) \tan x \\ &= 2(x - \tan x - \tan^3 x) \end{aligned}$$

ច. $y = 3x \cot^2 x$

$$\begin{aligned} y' &= (3x)' \cot^2 x + 3x (\cot^2 x)' \\ &= 3 \cot^2 x - 6x(1 + \cot^2 x) \cot x \\ &= 3 \cot x (\cot x - 2x - 2x \cot^2 x) \end{aligned}$$

5-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = \sin^2 x^2$

ខ. $y = x^3 - \cos^2 5x$

គ. $y = \frac{\tan 2x}{1 - \cos x}$

ឃ. $y = x^3 - \sin(x^2 - 5x)$

ង. $y = \sin 3x + \cos(x^3 - 1)$ ច. $y = \tan(2x^3 - 5x)$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = \sin^2 x^2$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } y' &= 2(x^2)' \cos x^2 \sin x^2 \\ &= 4x \cos x^2 \sin x^2 \\ &= 2x \sin 2x^2 \end{aligned}$$

ខ. $y = x^3 - \cos^2 5x$

គេបាន $y' = 3x^2 + 10 \sin 5x \cos 5x$

$$\begin{aligned} &= 3x^2 + 5 \sin 10x \\ \text{គ. } y &= \frac{\tan 2x}{1 - \cos x} \\ y' &= \frac{2(1 + \tan^2 2x)(1 - \cos x) - \sin x \tan 2x}{(1 - \cos x)^2} \end{aligned}$$

ឃ. $y = x^3 - \sin(x^2 - 5x)$

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - (x^2 - 5x)' \cos(x^2 - 5x) \\ &= 3x^2 - (2x - 5) \cos(x^2 - 5x) \end{aligned}$$

ង. $y = \sin 3x + \cos(x^3 - 1)$

$$\begin{aligned} y' &= 3 \cos 3x - 3x^2 \sin(x^3 - 1) \\ &= 3(\cos 3x - x^2 \sin(x^3 - 1)) \end{aligned}$$

ច. $y = \tan(2x^3 - 5x)$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2x^3 - 5x)'}{\cos^2(2x^3 - 5x)} \\ &= \frac{6x^2 - 5}{\cos^2(2x^3 - 5x)} \end{aligned}$$

6-គណនាដេរីវេទី 2 នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = 3x^2 - \sin 2x$

ខ. $y = -3x^4 + 2x^2$

គ. $y = x + \frac{1}{x}$

ឃ. $y = \frac{x^2}{x+1}$

ង. $y = (x^2 + 4)^3$

ច. $y = (x^3 - 1)^4$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេទី 2 នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = 3x^2 - \sin 2x$

គេបាន $y' = 6x - 2\cos 2x$

$$y' = 3(3x - \cos 2x)$$

ហើយ $y'' = 3(3 + 2\sin 2x)$

ខ. $y = -3x^4 + 2x^2$

គេបាន $y' = 12x^3 + 4x$

ហើយ $y'' = 36x^2 + 4$

$$\text{គ. } y = x + \frac{1}{x}$$

$$\text{គេបាន } y' = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\text{ហើយ } y'' = \frac{2}{x^3}$$

$$\text{ឃ. } y = \frac{x^2}{x+1}$$

$$\text{គេអាចសរសេរ } y = \frac{(x^2 - 1) + 1}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

$$\text{គេបាន } y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\text{ហើយ } y'' = \frac{2}{(x+1)^3} \quad \text{។}$$

$$\text{ង. } y = (x^2 + 4)^3$$

$$\text{គេបាន } y' = 6x(x^2 + 4)^2$$

$$\begin{aligned} \text{ហើយ } y'' &= 6(x^2 + 4)^2 + 24x^2(x^2 + 4) \\ &= 6(x^2 + 4)(x^2 + 4 + 4x^2) \\ &= 6(x^2 + 4)(5x^2 + 4) \end{aligned}$$

$$\text{ច. } y = (x^3 - 1)^4$$

$$y'' = 12x(11x^3 - 2)(x^3 - 1)^2 \quad \text{។}$$

7-រក y' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

ក. $x = \tan y$

ខ. $x = \sin y$

គ. $xy + \sin y = 0$

ឃ. $x + \sin y = xy$

ង. $x + \tan(xy) = 0$

ច. $y^2 = \sin^4 2x + \cos^4 2x$

ដំណោះស្រាយ

រក y' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

ក. $x = \tan y$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរគេបាន

$$(x)' = (\tan y)'$$

$$1 = y' \frac{1}{\cos^2 y} \Rightarrow y' = \cos^2 y$$

ខ. $x = \sin y$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរគេបាន

$$(x)' = (\sin y)'$$

$$1 = y' \cos y \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y}$$

គ. $xy + \sin y = 0$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរគេបាន

$$(xy + \sin y)' = 0$$

$$y + xy' + y' \cos y = 0$$

$$y'(x + \cos y) = -y \Rightarrow y' = -\frac{y}{x + \cos y}$$

ឃ. $x + \sin y = xy$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរគេបាន

$$(x + \sin y)' = (xy)'$$

$$1 + y' \cos y = y + xy'$$

$$y'(\cos y - x) = y - 1 \Rightarrow y' = \frac{y - 1}{\cos y - x}$$

ង. $x + \tan(xy) = 0$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរគេបាន

$$(x + \tan(xy))' = 0$$

$$1 + \frac{(xy)'}{\cos^2(xy)} = 0$$

$$1 + \frac{y + xy'}{\cos^2(xy)} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y + \cos^2(xy)}{x}$$

ថ្មី. $y^2 = \sin^4 2x + \cos^4 2x$

គេមាន

$$\begin{aligned}\sin^4 2x + \cos^4 2x &= (\sin^2 2x + \cos^2 2x)^2 - 2\sin^2 2x \cos^2 2x \\ &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\end{aligned}$$

គេបាន $y^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរគេបាន

$$2yy' = -\sin 2x \cos 2x = -\frac{1}{2}\sin 4x$$

គេទាញ $y' = -\frac{\sin 4x}{4y}$ ។

៨-រក y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

ក. $2x^2 + y^2 = 4$

ខ. $2x^3 + y^3 = 8$

គ. $x^2 + xy + y^2 = -1$

ឃ. $x^3 + 2xy - y^2 = 3$

ង. $x^3 + y^3 = 3xy$

ច. $x^3y + xy^3 = 3x^2$

ដំណោះស្រាយ

រក y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

ក. $2x^2 + y^2 = 4$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរគេបាន

$$4x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x}{y}$$

ហើយ $y'' = -\frac{2y - 2xy'}{y^2}$

$$= -\frac{2y - 2x(-\frac{2x}{y})}{y^2} = -\frac{2y^2 + 4x^2}{y^3}$$

ដូចនេះ $y' = -\frac{2x}{y}$ និង $y'' = -\frac{4x^2 + 2y^2}{y^3}$

ខ. $2x^3 + y^3 = 8$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរគេបាន

$$6x^2 + 3y'y^2 = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x^2}{y^2}$$

$$\begin{aligned} \text{ហើយ } y'' &= -\frac{4xy^2 - 4x^2yy'}{y^4} \\ &= -\frac{4xy - 4x^2y'}{y^3} \\ &= -\frac{4xy - 4x^2(-\frac{2x^2}{y^2})}{y^3} \\ &= -\frac{4xy^3 + 8x^4}{y^5} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $y' = -\frac{2x^2}{y^2}$ និង $y'' = -\frac{4xy^3 + 8x^4}{y^5}$

គ. $x^2 + xy + y^2 = -1$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរគេបាន

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0$$

$$(x + 2y)y' = -(2x + y)$$

$$y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ហើយ } y'' &= -\frac{(2 + y')(x + 2y) - (1 + 2y')(2x + y)}{(x + 2y)^2} \\
 &= -\frac{2x + 4y + xy' + 2yy' - 2x - y - 4xy' - 2yy'}{(x + 2y)^2} \\
 &= -\frac{3y - 3xy'}{(x + 2y)^2} = -\frac{3y - 3x(-\frac{2x + y}{x + 2y})}{(x + 2y)^2} \\
 &= -\frac{3xy + 6y^2 + 6x^2 + 3xy}{(x + 2y)^3} \\
 &= -\frac{6(x^2 + xy + y^2)}{(x + 2y)^3}
 \end{aligned}$$

$$\text{ដោយ } x^2 + xy + y^2 = -1$$

$$\text{ដូចនេះ } y'' = \frac{6}{(x + 2y)^3} \quad \text{។}$$

១-គណនា

ក. $f^{(4)}(x)$ បើ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

ខ. $f^{(6)}(x)$ បើ $f(x) = \frac{1}{7}x^7 - \sin 2x$

គ. $f^{(8)}(x)$ បើ $f(x) = x^8 - 5x^2 + \cos x$

ឃ. $f^{(10)}(x)$ បើ $f(x) = \frac{120}{x^6}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $f^{(4)}(x)$

មាន $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

គេបាន $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f^{(3)}(x) = 6$$

$$f^{(4)}(x) = 0$$

ខ. $f^{(6)}(x)$

មាន $f(x) = \frac{1}{7}x^7 - \sin 2x$

គេបាន $f'(x) = x^6 - 2\cos 2x$

$$f''(x) = 6x^5 + 4\sin 2x$$

$$f^{(3)}(x) = 30x^4 + 8\cos 2x$$

$$f^{(4)}(x) = 120x^3 - 16\sin 2x$$

$$f^{(5)}(x) = 360x^2 - 32\cos 2x$$

$$f^{(6)}(x) = 720x + 64\sin 2x$$

គ. $f^{(8)}(x)$

មាន $f(x) = x^8 - 5x^2 + \cos x$

គេបាន $f'(x) = 8x^7 - 10x - \sin x$

$$f''(x) = 8.7x^6 - 10 - \cos x$$

$$f^{(3)}(x) = 8.7.6x^5 + \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = 8.7.6.5x^4 + \cos x$$

$$f^{(5)}(x) = 8.7.6.5.4x^3 - \sin x$$

$$f^{(6)}(x) = 8.7.6.5.4.3x^2 - \cos x$$

$$f^{(7)}(x) = 8.7.6.5.4.3.2x + \sin x$$

$$f^{(8)}(x) = 8! + \cos x$$

ឃ. $f^{(10)}(x)$

គេមាន $f(x) = \frac{120}{x^6}$

គេបាន $f(x) = \frac{15!}{x^{16}}$ (សិស្សដោះស្រាយខ្លួនឯង)

មេរៀនទី២

អនុវត្តន៍នៃដេរីវេ

១. ល្បឿននៃចលនា

✎ និយមន័យ :

ល្បឿននៃចលនាមួយនៅខណៈ t គឺ $V(t) = S'(t) = \frac{dS}{dt}$

ដែល $S(t)$ ជាចម្ងាយនៅខណៈ t ។

២. សំទុះនៃចលនា

សំទុះនៃចលនាមួយនៅខណៈ t គឺ $a(t) = \frac{dV(t)}{dt} = V'(t)$

ដែល $V(t)$ ជាល្បឿននៃចលនានៅខណៈ t ។

លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

1- ពីរ៉ាមីតចតុមុខនិយ័ត $SABCD$ មានផ្ទៃក្រលាខាង S_L ។

គណនាផលធៀបរង្វាស់កម្ពស់ SO និងជ្រុងមួយនៃបាតដើម្បីឱ្យមាន
ពីរ៉ាមីតចតុមុខនិយ័តមានតម្លៃអតិបរមា ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលធៀបរង្វាស់កម្ពស់ SO និងជ្រុងមួយនៃបាត

តាង $AB = x$, $x > 0$ ជាប្រវែង

ជ្រុងបាត ហើយយក I ជាចំនុចកណ្តាល

នៃ $[AB]$ នាំឱ្យ SI ជាអាប៉ូតែម ។

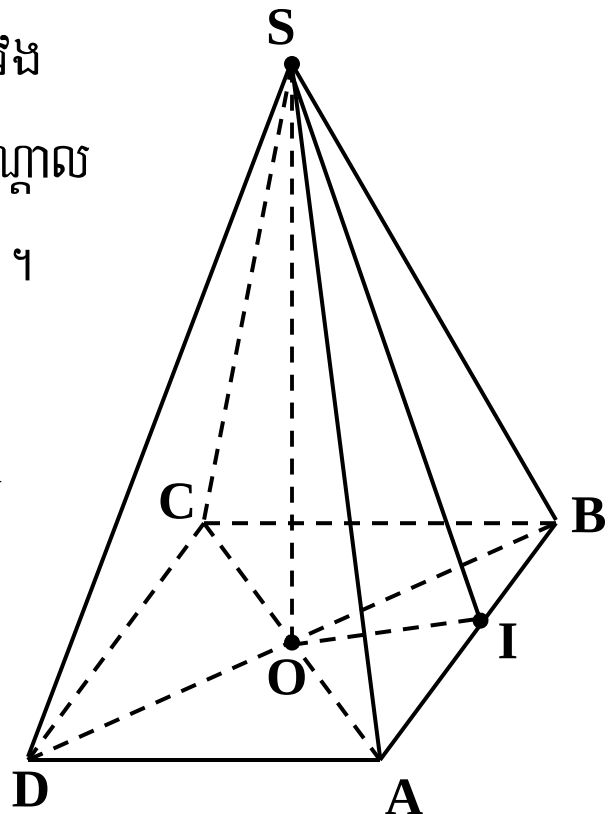
គេបានក្រឡាផ្ទៃខាងរបស់ពីរ៉ាមីត

$$S_L = \frac{1}{2}x \cdot SI \times 4 \Rightarrow SI = \frac{S_L}{2x}$$

ត្រីកោណ SOI កែងត្រង់ O

$$\text{គេបាន } SI^2 = SO^2 + OI^2$$

$$\text{ឬ } SO^2 = \left(\frac{S_L}{2x} \right)^2 - \left(\frac{x}{2} \right)^2$$



$$SO^2 = \frac{S_L^2 - x^4}{4x^2} \Rightarrow SO = \frac{\sqrt{S_L^2 - x^4}}{2x}$$

ដែល $S_L^2 - x^4 > 0$ ឬ $x < \sqrt{S_L}$ តែ $x > 0$

ហេតុនេះ $0 < x < \sqrt{S_L}$ ។

តាង V ជាមាឌរបស់ពីរាមីត $SABCD$

$$\text{គេបាន } V(x) = \frac{1}{3} S_{ABCD3} \times SO = \frac{1}{3} x^2 \frac{\sqrt{S_L^2 - x^4}}{2x}$$

$$V(x) = \frac{1}{6} x \sqrt{S_L^2 - x^4}$$

$$\text{យើងបាន } V'(x) = \frac{S_L^2 - 3x^4}{6\sqrt{S_L^2 - x^4}}$$

$$\text{បើ } V'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[4]{\frac{S_L^2}{3}}$$

x	0	$\sqrt[4]{\frac{S_L^2}{3}}$	$\sqrt{S_L}$
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$	↗ អតិបរមា ↘		

តាមតារាងខាងលើយើងឃើញថា $V(x)$ មានតម្លៃអតិបរមាលុះត្រា

$$\text{តែ } x = \sqrt[4]{\frac{S_L^2}{3}} \quad \text{។}$$

$$\text{ដោយ } SO = \frac{\sqrt{S_L^2 - x^4}}{2x} \Rightarrow \frac{SO}{x} = \frac{\sqrt{S_L^2 - x^4}}{2x^2}$$

$$\text{ឬ } \frac{SO}{x} = \frac{\sqrt{S_L^2 - \frac{S_L^2}{3}}}{2\sqrt{\frac{S_L^2}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{។}$$

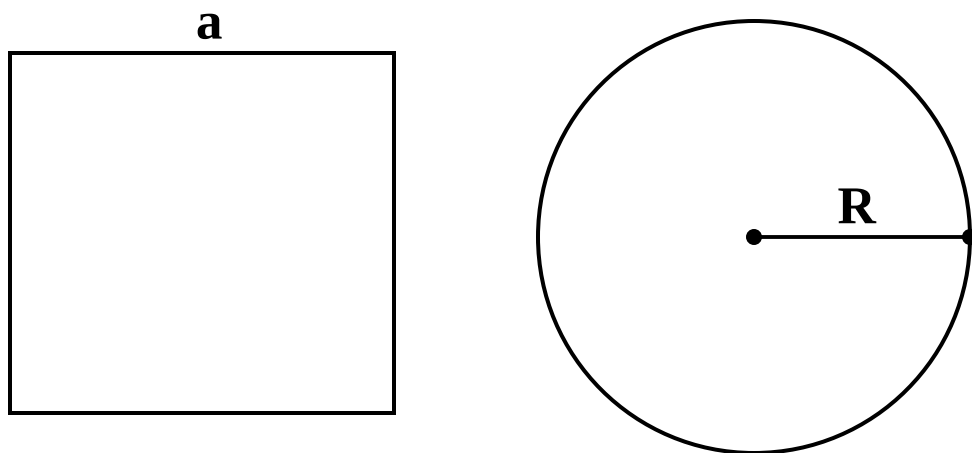
ដូចនេះផលធៀបរង្វាស់កម្ពស់ និងជ្រុងបាតនៃពីរ៉ាមីតគឺ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ។

2-ផលបូកបរិមាត្រការេមួយ និង រង្វង់មួយមានប្រវែង L ។

គណនាផលធៀបរវាងរង្វាស់កាំរង្វង់ និង ជ្រុងការេដើម្បីឱ្យផលបូកផ្ទៃក្រឡាការេនិងរង្វង់មានតម្លៃអប្បបរមា ?

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលធៀបរវាងរង្វាស់កាំរង្វង់ និង ជ្រុងការេ



តាង a ជារង្វាស់ជ្រុងនៃការេ និង R ជារង្វាស់កាំនៃរង្វង់

ដោយ ផលបូកបរិមាត្រការេមួយ និង រង្វង់មួយមានប្រវែង L នោះ

$$\text{គេបាន } 4a + 2\pi R = L \Rightarrow a = \frac{L - 2\pi R}{4} \quad (1)$$

តាង Σ ជាផលបូកផ្ទៃក្រឡាការេនិងរង្វង់ ។

$$\text{គេបាន } \Sigma = a^2 + \pi R^2 \quad (2)$$

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន

$$\begin{aligned}\Sigma(R) &= \left(\frac{L - 2\pi R}{4} \right)^2 + \pi R^2 \\ &= \frac{L^2 - 4\pi LR + 20\pi^2 R^2}{16}\end{aligned}$$

$$\text{គេបាន } \Sigma'(R) = \frac{-4\pi L + 40\pi^2 R}{16}$$

$$\text{បើ } \Sigma'(R) = 0 \text{ នោះ } -4\pi L + 40\pi^2 R = 0 \Rightarrow R = \frac{L}{10\pi}$$

$$\text{ម្យ៉ាងទៀតដោយ } \Sigma''(R) = \frac{40\pi}{16} = \frac{5\pi}{2} > 0 \text{ នាំឱ្យ } \Sigma(R) \text{ មាន}$$

$$\text{តម្លៃអប្បបរមាត្រង់ } R = \frac{L}{10\pi} \text{ ។}$$

$$\text{តាម (1) គេបាន } a = \frac{L - 2\pi \times \frac{L}{10\pi}}{4} = \frac{L}{5\pi}$$

$$\text{គេបាន } \frac{R}{a} = \frac{\frac{L}{10\pi}}{\frac{L}{5\pi}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \text{ ។}$$

ដូចនេះផលធៀបរវាង រង្វាស់កាំរង្វង់ និង ជ្រុងការេគឺ $\frac{1}{2}$ ។

3-ប្រអប់ត្រង់មួយមានគម្របលើ និង បាតក្រោមជាការហើយមានមាឌ 250cm^3 ។ សម្ភារៈសម្រាប់ធ្វើគម្របលើ និងបាតក្រោមតម្លៃ 2000 រៀលក្នុងមួយសង្ខ័យម៉ែត្រការេ ហើយសម្ភារៈសម្រាប់ធ្វើផ្ទៃខាងមានតម្លៃ 1000 រៀលក្នុងមួយសង្ខ័យម៉ែត្រការេ ។
កំណត់រង្វាស់ទ្រនុងនៃប្រអប់ដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំណាយលើសម្ភារៈមានតម្លៃអប្បបរមា រួចគណនាប្រាក់ចំណាយអប្បបរមានោះ ?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់រង្វាស់ទ្រនុងនៃប្រអប់ និង ប្រាក់ចំណាយអប្បបរមា

តាង x ជារង្វាស់បាត និង y ជារង្វាស់ខាង

មាឌរបស់ប្រអប់គឺ $V = x^2y = 250$

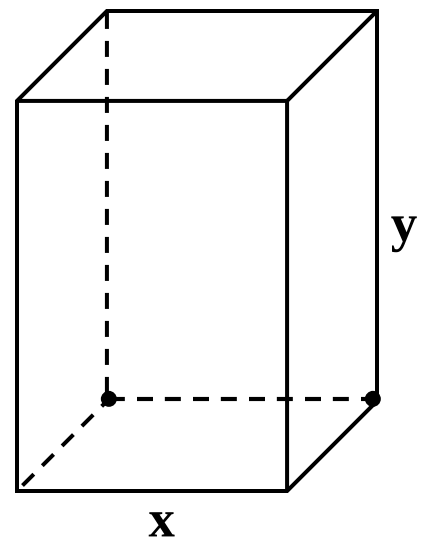
$$\text{គេទាញ } y = \frac{250}{x^2} \quad (1)$$

ប្រាក់ចំណាយសម្ភារៈធ្វើគម្រប និង បាត

របស់ប្រអប់គឺ $2x^2 \times 2000 = 4000x^2$

ប្រាក់ចំណាយសម្ភារៈធ្វើផ្ទៃខាងរបស់ប្រអប់គឺ

$$4y^2 \times 1000 = 4000y^2 \quad \text{។}$$



តាង T ជាអនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយសរុបលើសម្ភារៈសម្រាប់ធ្វើប្រអប់

$$\text{គេបាន } T = 4000x^2 + 4000y^2 = 4000(x^2 + y^2) \quad (2)$$

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន

$$T(x) = 4000\left(x^2 + \frac{62500}{x^4}\right)$$

$$\text{គេបាន } T'(x) = 4000\left(2x - \frac{250000}{x^5}\right)$$

$$\text{បើ } T'(x) = 0 \text{ នោះ } 2x - \frac{250000}{x^5} = 0$$

$$\text{គេទាញ } x = \sqrt[5]{125000} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{គេមាន } T''(x) = 4000\left(2 + \frac{1250000}{x^6}\right)$$

ចំពោះ $x = 5\sqrt{2} \Rightarrow T''(5\sqrt{2}) > 0$ នាំឱ្យ $T(x)$ មានតម្លៃបរិមា

$$\text{ត្រង់ } x = 5\sqrt{2} \text{ ហើយ } y = \frac{250}{x^2} = \frac{250}{50} = 5 \quad \text{។}$$

ដូចនេះទ្រនុងរបស់ប្រអប់គឺ 5cm ។

គណនាប្រាក់ចំណាយអប្បបរមា

ចំពោះ $x = 5\sqrt{2}$, $y = 5$ គេបាន

$$T = 4000(50 + 25) = 30,000 \text{ រៀល ជាប្រាក់ចំណាយអប្បបរមា}$$

- 4-ទូកមួយចាប់ផ្តើមចេញដំណើរពីចំនុចត្រួតពិនិត្យ ដែលរយៈពេល t នាទីក្រោយមកទូកនោះមានចម្ងាយពីចំនុចត្រួតពិនិត្យដែលតាងដោយអនុគមន៍ $S(t) = t^3 + 60t$ គិតជាម៉ែត្រ ។
- ក. រកល្បឿននៃទូកត្រង់ចំនុចចាប់ផ្តើម ?
- ខ. កំនត់ល្បឿននៃទូកខណៈ $t = 3mn$?

ដំណោះស្រាយ

ក. រកល្បឿននៃទូកត្រង់ចំនុចចាប់ផ្តើម

តាង $V(t)$ ជាអនុគមន៍ល្បឿននៃទូកនៅខណៈ t នោះគេបាន

$$V(t) = \frac{dS(t)}{dt} = S'(t) = 3t^2 + 60$$

$$\text{បើ } t = 0 \Rightarrow V(t = 0) = 60m / mn$$

ដូចនេះល្បឿននៃទូកត្រង់ចំនុចចាប់ផ្តើមគឺ $V = 60m / mn$ ។

ខ. កំនត់ល្បឿននៃទូកខណៈ $t = 3mn$

$$\text{បើ } t = 3mn \text{ នោះ } V(3) = 3(3)^2 + 60 = 87m / mn$$

ដូចនេះ ល្បឿននៃទូកខណៈ $t = 3mn$ គឺ $87m / mn$ ។

5-រថយន្តមួយចាប់ផ្តើមចេញដំណើរដោយល្បឿនដែលតាងដោយ

$$\text{អនុគមន៍ } V(t) = \frac{100t}{t+15} \text{ (m/s)}$$

កំនត់សំទុះនៃរថយន្តខណៈពេល

ក. $t = 5s$

គ. $t = 20s$

ខ. $t = 10s$

ដំណោះស្រាយ

ក. $t = 5s$

តាង $a(t)$ ជាអនុគមន៍សំទុះនៃរថយន្តនៅខណៈ t នោះគេបាន

$$a(t) = \frac{dV(t)}{dt} = V'(t) = \frac{1500}{(t+15)^2}$$

បើ $t = 5s \Rightarrow a(5) = \frac{1500}{400} = 3.75m/s^2$

ខ. បើ $t = 10s \Rightarrow a(10) = \frac{1500}{625} = 2.4m/s^2$

គ. បើ $t = 20s \Rightarrow a(20) = \frac{1500}{1225} = 1.22m/s^2$

6-រថយន្តមួយផ្ដើមចេញដំនើរដោយល្បឿនដែល t វិនាទីតាងដោយ

$$\text{អនុគមន៍ } V(t) = \frac{22t}{0.44t + 3.3} \text{ ម៉ែត្រក្នុងមួយវិនាទី ។}$$

កំណត់សំទុះរបស់រថយន្តនៅខណៈពេល :

ក- 5វិនាទី ខ-10វិនាទី គ- 20វិនាទី ឃ- 30វិនាទី ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់សំទុះរបស់រថយន្តនៅខណៈពេល

$$\text{មាន } V(t) = \frac{22t}{0.44t + 3.3} = \frac{2200t}{44t + 330} = \frac{200t}{4t + 10} = \frac{100t}{2t + 5}$$

$$\text{គេបាន } a(t) = V'(t) = \frac{500}{(2t + 5)^2}$$

$$\text{ក- } t = 5s \Rightarrow a(5) = \frac{500}{225} = 2.22m/s^2$$

$$\text{ខ- } t = 10s \Rightarrow a(10) = \frac{500}{625} = 0.80m/s^2$$

$$\text{គ- } t = 20s \Rightarrow a(20) = \frac{500}{2025} = 0.25m/s^2$$

$$\text{ឃ- } t = 30s \Rightarrow a(30) = \frac{500}{4225} = 0.12m/s^2$$

== លំហាត់ជំពូកទី២ និង ដំណោះស្រាយ ==

1-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $f(x) = (7x + 2)^2$

ខ. $g(x) = (x^2 - 8)^{-1}$

គ. $y = (4x^2 + 9x - 2)^3$

ឃ. $f(x) = \sqrt[3]{5x^3 - 4}$

ង. $g(x) = x(4 - 3x^2)^2$

ច. $y = \frac{\sqrt{5x - 2}}{x^3}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

ក. $f(x) = (7x + 2)^2$

$$f'(x) = 2(7x + 2)'(7x + 2) = 14(7x + 2)$$

ខ. $g(x) = (x^2 - 8)^{-1}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= -(x^2 - 8)'(x^2 - 8)^{-2} \\ &= -2x(x^2 - 8)^{-2} \end{aligned}$$

គ. $y = (4x^2 + 9x - 2)^3$

$$\begin{aligned} y' &= 3(4x^2 + 9x - 2)'(4x^2 + 9x - 2)^2 \\ &= 3(8x + 9)(4x^2 + 9x - 2)^2 \end{aligned}$$

$$\text{ឃ. } f(x) = \sqrt[3]{5x^3 - 4} = (5x^3 - 4)^{\frac{1}{3}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}(5x^3 - 4)'(5x^3 - 4)^{\frac{1}{3}-1} \\ &= 5x^2(5x^3 - 4)^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$\text{ង. } g(x) = x(4 - 3x^2)^2$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x)'(4 - 3x^2)^2 + x((4 - 3x^2)^2)' \\ &= (4 - 3x^2)^2 - 12x^2(4 - 3x^2) \\ &= (4 - 3x^2)(4 - 15x^2) \end{aligned}$$

$$\text{ច. } y = \frac{\sqrt{5x-2}}{x^3}$$

$$y' = \frac{(\sqrt{5x-2})'x^3 - (x^3)'\sqrt{5x-2}}{x^6}$$

$$= \frac{\frac{5x^3}{2\sqrt{5x-2}} - 3x^2\sqrt{5x-2}}{x^6}$$

$$= \frac{5x - 6(5x-2)}{x^4\sqrt{5x-2}}$$

$$= \frac{5x - 30x + 12}{x^4\sqrt{5x-2}}$$

$$= \frac{-25x + 12}{x^4\sqrt{5x-2}}$$

2-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = x^3 \sin 2x$

ខ. $y = 3x^3 - x \cos 3x$

គ. $y = -x \cos(4 - 3x^2)$

ឃ. $f(x) = \frac{\sin^2 3x}{x^2}$

ង. $f(x) = \frac{\tan 2x}{x^2 - 1}$

ច. $f(x) = \cos(\sin^2 3x)$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

ក. $y = x^3 \sin 2x$

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 \sin 2x + 2x^3 \cos 2x \\ &= x^2 (3 \sin 2x + 2x \cos x) \end{aligned}$$

ខ. $y = 3x^3 - x \cos 3x$

$$y' = 9x^2 - \cos 3x + 3x \sin 3x$$

គ. $y = -x \cos(4 - 3x^2)$

$$y' = -\cos(4 - 3x^2) - 6x^2 \sin(4 - 3x^2)$$

ឃ. $f(x) = \frac{\sin^2 3x}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{6x^2 \sin 3x \cos 3x - 2x \sin^2 3x}{x^4} = \frac{3x \sin 6x - 2 \sin 3x}{x^3}$$

$$\begin{aligned}\text{ង. } f(x) &= \frac{\tan 2x}{x^2 - 1} \\ f'(x) &= \frac{\frac{2(x^2 - 1)}{\cos^2 2x} - 2x \tan 2x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{2(x^2 - 1) - x \sin 4x}{(x^2 - 1)^2 \cos^2 2x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ឃ. } f(x) &= \cos(\sin^2 3x) \\ f'(x) &= -(\sin^2 3x)' \sin(\sin^2 3x) \\ &= -6 \sin 3x \cos 3x \sin(\sin^2 3x) \\ &= -3 \sin 6x \sin(\sin^2 3x)\end{aligned}$$

3-គណនាដេរីវេទី២នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 8$	ខ. $f(x) = x^4 + 6x^{\frac{3}{2}} - 9$
គ. $f(x) = (2x^2 + 7)^{\frac{2}{3}}$	ឃ. $f(x) = 5x + \frac{2}{x+1}$
ង. $f(x) = x^2 - \frac{14}{x-2}$	ច. $f(x) = \frac{7x+2}{x^3}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេទី២នៃអនុគមន៍

ក. $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 8$

គេបាន $f'(x) = 3x^2 - 8x - 1$

និង $f''(x) = 6x - 8 = 2(3x - 4)$

ខ. $f(x) = x^4 + 6x^{\frac{3}{2}} - 9$

គេបាន $f'(x) = 4x^3 + 9x^{\frac{1}{2}}$

និង $f''(x) = 12x^2 + \frac{9}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$$\text{គ. } f(x) = (2x^2 + 7)^{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } f'(x) &= \frac{2}{3}(2x^2 + 7)'(2x^2 + 7)^{-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{8x}{3}(2x^2 + 7)^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ហើយ } f''(x) &= \frac{8}{3}(2x^2 + 7)^{-\frac{1}{3}} - \frac{8x}{9}(2x^2 + 7)'(2x^2 + 7)^{-\frac{4}{3}} \\ &= \frac{8}{3}(2x^2 + 7)^{-\frac{1}{3}} - \frac{32x^2}{9}(2x^2 + 7)^{-\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

$$\text{ឃ. } f(x) = 5x + \frac{2}{x+1}$$

$$\text{គេបាន } f'(x) = 5 - \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\text{និង } f''(x) = \frac{4}{(x+1)^3}$$

$$\text{ង. } f(x) = x^2 - \frac{14}{x-2}$$

$$\text{គេបាន } f'(x) = 2x + \frac{14}{(x-2)^2}$$

$$\text{និង } f''(x) = 2 - \frac{28}{(x-2)^3}$$

$$\text{ច. } f(x) = \frac{7x+2}{x^3} = 7x^{-2} + 2x^{-3}$$

$$\text{គេបាន } f'(x) = -14x^{-3} - 6x^{-4} \text{ និង } f''(x) = 42x^{-4} + 24x^{-5} \quad \text{។}$$

4-រក y' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

ក. $x^3 + y^3 = 5$

ខ. $xy^2 = -1$

គ. $x - \sqrt{y} = 2$

ឃ. $2y + \sqrt{xy} = 5x^2$

ង. $x^2 + 4(y + 3)^2 = 9$

ច. $x^3y + xy^3 = 3x^3$

ដំណោះស្រាយ

រក y' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

ក. $x^3 + y^3 = 5$

គេបាន $(x^3 + y^3)' = (5)'$

$$3x^2 + 3y'y^2 = 0$$

គេទាញ $y' = -\frac{x^2}{y^2}$ ។

ខ. $xy^2 = -1$

គេបាន $(xy^2)' = (-1)'$

$$y^2 + 2xy'y = 0$$

គេទាញ $y' = -\frac{y^2}{2xy}$ ។

គ. $x - \sqrt{y} = 2$

គេបាន $(x - \sqrt{y})' = (2)'$

$$1 - \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 0$$

គេទាញ $y' = 2\sqrt{y}$ ។

ឃ. $2y + \sqrt{xy} = 5x^2$

គេបាន $(2y + \sqrt{xy})' = (5x^2)'$

$$2y' + \frac{(xy)'}{2\sqrt{xy}} = 10x$$

$$2y' + \frac{y + xy'}{2\sqrt{xy}} = 10x$$

គេទាញ $y' = \frac{20x\sqrt{xy} - y}{x + 4\sqrt{xy}}$ ។

ង. $x^2 + 4(y + 3)^2 = 9$

គេបាន $2x + 8y'(y + 3) = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{4(y + 3)}$ ។

ច. $x^3y + xy^3 = 3x^3$

គេបាន $3x^2y + x^3y' + y^3 + 3xy'y^2 = 9x^2$

គេទាញ $y' = \frac{9x^2 - 3x^2y - y^3}{x^3 + 3xy^2}$ ។

5-រក y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

ក. $x^2 + xy = 5$

ខ. $x^2y^2 - 2x = 3$

គ. $x^2 - y^2 = 16$

ឃ. $1 - xy = x - y$

ង. $y^2 = x^3$

ច. $y^2 = 4x$

ដំណោះស្រាយ

រក y' និង y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

ក. $x^2 + xy = 5$

គេបាន $2x + y + xy' = 0$

ហើយ $2 + y' + y' + xy'' = 0$

គេទាញ $y'' = -\frac{2(1 + y')}{x}$

ដោយ $2x + y + xy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x + y}{x}$

គេបាន $y'' = -\frac{2(1 - \frac{2x + y}{x})}{x} = \frac{2(x + y)}{x^2}$

ដូចនេះ $y'' = \frac{2(x + y)}{x^2}$ ។

ខ. $x^2y^2 - 2x = 3$

គេបាន $2xy^2 + 2x^2y'y - 2 = 0$

ឬ $xy^2 + x^2yy' - 1 = 0 \Rightarrow y' = \frac{1 - xy^2}{x^2y} = \frac{1}{x^2y} - \frac{y}{x}$

ហើយ $y'' = -\frac{2xy + x^2y'}{x^4y^2} - \frac{y'x - y}{x^2}$
 $= -\frac{2}{x^3y} - \frac{y'}{x^2y^2} - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2}$
 $= \frac{xy^2 - 2}{x^3y} - \frac{xy^2 + 1}{x^2y^2} y'$
 $= \frac{xy^2 - 2}{x^3y} - \frac{xy^2 + 1}{x^2y^2} \cdot \frac{1 - xy^2}{x^2y}$
 $= \frac{xy^2 - 2}{x^3y} - \frac{1 - x^2y^4}{x^4y^3}$
 $= \frac{x^2y^4 - 2xy^2 - 1 + x^2y^4}{x^4y^3} = \frac{2x^2y^4 - 2xy^2 - 1}{x^4y^3}$

ដូចនេះ $y'' = \frac{2x^2y^4 - 2xy^2 - 1}{x^4y^3}$ ។

គ. $x^2 - y^2 = 16$

គេបាន $2x - 2y'y = 0 \Rightarrow y' = \frac{x}{y}$

$$\text{ហើយ } y'' = \frac{y - xy'}{y^2} = \frac{y - \frac{x^2}{y}}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} \quad \text{។}$$

$$\text{ឃ. } 1 - xy = x - y$$

$$\text{គេបាន } -y - xy' = 1 - y' \Rightarrow y' = \frac{1 + y}{1 - x}$$

$$\text{ហើយ } y'' = \frac{y'(1 - x) + 1 + y}{(1 - x)^2} = \frac{(1 - x) \frac{1 + y}{1 - x} + 1 + y}{(1 - x)^2}$$

$$\text{ដូចនេះ } y'' = \frac{2(1 + y)}{(1 - x)^2} \quad \text{។}$$

$$\text{ង. } y^2 = x^3$$

$$\text{គេបាន } 2y'y = 3x^2 \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{2y}$$

$$\text{ហើយ } 2y''y + 2y'^2 = 6x \Rightarrow y'' = \frac{6x - 2y'^2}{2y}$$

$$\text{ឬ } y'' = \frac{6x - 2 \cdot \frac{9x^4}{4y^2}}{2y} = \frac{12xy^2 - 9x^4}{8y^3} \quad \text{។}$$

$$\text{ច. } y^2 = 4x \quad \text{នាំឱ្យ } 2yy' = 4 \Rightarrow y' = \frac{2}{y}$$

$$\text{ហើយ } y'' = -\frac{2y'}{y^2} = -\frac{4}{4xy} = -\frac{1}{xy} \quad \text{។}$$

6-ត្រីកោណសមបាត ABC មួយមានបរិមាត្រ $2p$ វិលជុំវិញកម្ពស់
ដែលគូសចេញពីកំពូល A កំនត់បានលូលីតមួយមានមាឌធំបំផុត ។
គណនារង្វាស់ជ្រុង និង កម្ពស់នៃត្រីកោណសមបាតនោះ ?

ដំណោះស្រាយ

គណនាជ្រុង និង កម្ពស់នៃត្រីកោណសមបាត

តាង $AB = AC = x$

និង $AH = h$ ដែល $x > 0 ; h > 0$

គេបាន $2p = x + x + BC$

ឬ $BC = 2(p - x)$ ។

ត្រីកោណសមបាត ABC វិលជុំវិញ

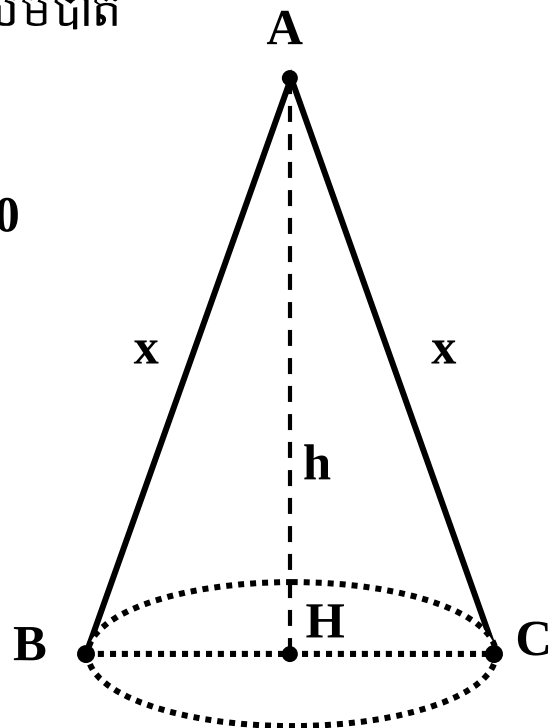
កម្ពស់ AH បង្កើតបានជាសូលីដ

បរិវត្តន៍មួយគឺជាកោណដែលមាន

កម្ពស់ AH ជនេត្រ $AB = AC$ និងថាសបាតជារង្វង់មានកាំ

$$BH = HC = \frac{BC}{2} = p - x \quad \text{។}$$

យក V ជាមាឌរបស់កោណ និង S ជាផ្ទៃក្រឡាថាសបាត ។



យើងបាន $V = \frac{1}{3}S \times h$

ដោយ $S = \pi (p - x)^2$

ក្នុងត្រីកោណកែង AHB គេមាន $AB^2 = AH^2 + HB^2$

គេទាញ $h^2 = x^2 - (p - x)^2 = 2px - p^2$

នាំឱ្យ $h = \sqrt{2px - p^2}$ ដែល $2px - p^2 > 0$ ឬ $x > \frac{p}{2}$ ។

គេបាន $V = \frac{\pi}{3} (p - x)^2 \sqrt{2px - p^2}$

យើងបាន $V' = \frac{\pi p}{3} \cdot \frac{5x^2 - 8px + 3p^2}{\sqrt{2px - p^2}}$

បើ $V' = 0 \Rightarrow x_1 = p$; $x_2 = \frac{3p}{5}$ ។

x	$\frac{p}{2}$	$\frac{3p}{5}$	p
$V'(x)$	+	$\emptyset$	-
$V(x)$	អតិបរមា		

តាមតារាងអថេរភាពខាងលើ ជាមួយនឹងលក្ខខណ្ឌកំណត់គេបាន

$$x = \frac{3p}{5} \text{ ជាតម្លៃដែលធ្វើឱ្យ } V \text{ មានតម្លៃអតិបរមា ។}$$

$$\text{ចំពោះ } x = \frac{3p}{5} \Rightarrow BC = 2(p - \frac{3p}{5}) = \frac{4p}{5}$$

$$\text{ហើយ } AH = h = \sqrt{2px - p^2} = \sqrt{\frac{6p^2}{5} - p^2} = \frac{p\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{ដូចនេះ } AB = AC = \frac{3p}{5}, \quad BC = \frac{4p}{5}, \quad AH = \frac{p\sqrt{5}}{5} \quad \text{។}$$

7-រថយន្តមួយចាប់ផ្តើមចេញដំណើរពីចំនុចត្រួតពិនិត្យមួយ ។ នៅខណៈ

t វិនាទីរថយន្តនោះឃ្លាតពីចំនុចត្រួតពិនិត្យដែលតាងដោយអនុគមន៍

ចម្ងាយចរ $S(t) = 4.4t^2$ គិតជាម៉ែត្រ ហើយ $0 \leq t \leq 10$ ។

ប្រើអនុគមន៍ខាងលើរួចបំពេញតារាងខាងក្រោម

t	0	2	4	6	8	10
$S(t)$						
$V(t)$						
$a(t)$						

ដំណោះស្រាយ

បំពេញតារាង

គេមាន $S(t) = 4.4t^2$ គិតជាម៉ែត្រ ហើយ $0 \leq t \leq 10$

គេបាន $V(t) = S'(t) = 8.8t$

និង $a(t) = S''(t) = 8.8$ ម៉ែត្រ ។

t	0	2	4	6	8	10
S(t)	0	17.6	70.4	158.4	281.6	440
V(t)	0	17.6	35.2	52.8	70.4	88
a(t)	8.8	8.8	8.8	8.8	8.8	8.8

មេរៀនទី១

អនុគមន៍សនិទាន

១. សិក្សាអនុគមន៍ $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$

ដែល $p \neq 0$, $a \neq 0$ និង $ax_0^2 + bx_0 + c \neq 0$ ចំពោះ $x_0 = -\frac{q}{p}$

♦ ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} - \{-\frac{q}{p}\}$

♦ ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $y' = \frac{apx^2 + 2aqx + bq - cp}{(px + q)^2}$

-បើ $y' = 0$ មានឫសពីរខុសគ្នានោះអនុគមន៍មានអតិបរមាធៀបមួយ
និង អប្បបរមាធៀបមួយ ។

-បើ $y' = 0$ មានឫសខុសគ្នានោះអនុគមន៍ក្លាយជាដឺក្រេទីមួយ

-បើ $y' = 0$ គ្មានឫសនោះអនុគមន៍គ្មានបរមាទេ

♦ អាស៊ីមតូត

-បន្ទាត់ $x = -\frac{q}{p}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

-អនុគមន៍អាចសរសេរ $y = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{px + q}$

ដែល $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\gamma}{px + q} = 0$ នោះបន្ទាត់ $y = \alpha x + \beta$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

- ♦ មានក្រាបជាអ៊ីពែបូលដែលមានផ្ចិតឆ្លុះជាចំនុចប្រសព្វរវាងអាស៊ីមតូតទាំងពីរ ។

២.សិក្សាអនុគមន៍ $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$

ដែល $p \neq 0$, a , b , c , p , q , $r \in \mathbb{R}$ ។

- ♦ មានអាស៊ីមតូតដេកមួយជានិច្ច
- ♦ ចំនួនអាស៊ីមតូតឈរគឺអាស្រ័យនឹងឫសសមីការ $px^2 + qx + r = 0$
 - បើ $\Delta = q^2 - 4pr < 0$ គ្មានអាស៊ីមតូតឈរទេ និងក្រាបមានមែកតែមួយ ។
 - បើ $\Delta = q^2 - 4pr = 0$ មានអាស៊ីមតូតឈរមួយ $x = -\frac{q}{2p}$ និងក្រាបមានមែកពីរ ។
 - បើ $\Delta = q^2 - 4pr > 0$ មានអាស៊ីមតូតឈរពីរគឺ $x = \frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2p}$ និង $x = \frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2p}$ ហើយក្រាបមានមែកបី ។

== លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ ==

1-រកអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

$$\text{ក. } y = \frac{x^2 + 4x + 1}{x + 2}$$

$$\text{ខ. } y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1}$$

$$\text{គ. } y = -x + 3 + \frac{3}{x - 1}$$

ដំណោះស្រាយ

រកអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

$$\text{ក. } y = \frac{x^2 + 4x + 1}{x + 2}$$

$$\text{គេបាន } y = \frac{(x^2 + 2x) + (2x + 4) - 3}{x + 2}$$

$$= \frac{x(x + 2) + 2(x + 2) - 3}{x + 2} = x + 2 - \frac{3}{x + 2}$$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2 - \frac{3}{x + 2}) = \pm\infty \quad \text{នាំឱ្យបន្ទាត់ } x = -2$$

$$\text{ជាអាស៊ីមតូតឈរ ហើយ } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x + 2} = 0 \quad \text{នាំឱ្យបន្ទាត់ } y = x + 2$$

ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

$$ខ. y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1}$$

$$\text{គេមាន } y = \frac{x^2 + 3x + 1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 1}{(x+1)(x-1)} = \pm\infty \text{ និង } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x + 1}{(x+1)(x-1)} = \pm\infty$$

ដូចនេះបន្ទាត់ $x = -1$, $x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

$$\text{ហើយ } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = 1 \text{ នាំឱ្យបន្ទាត់ } y = 1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេក}$$

$$គ. y = -x + 3 + \frac{3}{x-1}$$

$$\text{គេមាន } \lim_{x \rightarrow 1} \left(-x + 3 + \frac{3}{x-1} \right) = \pm\infty \text{ នាំឱ្យបន្ទាត់ } x = 1 \text{ ជាអាស៊ីម}$$

$$\text{តូតឈរ និង } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x-1} = 0 \text{ នាំឱ្យបន្ទាត់ } y = -x + 3$$

ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

2-សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

$$\text{ក. } y = \frac{x^2 - 2x + 6}{2x + 2}$$

$$\text{ខ. } y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\text{គ. } y = \frac{x^2 - 9}{4 - x^2}$$

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

$$\text{ក. } y = \frac{x^2 - 2x + 6}{2x + 2}$$

. ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\text{. សរសេរជា រាងកាណូនិច } y = \frac{x-3}{2} + \frac{9}{2x+2}$$

. ទិសដៅអថេរភាព

$$\text{-ដេរីវេ } y' = \frac{1}{2} - \frac{9}{2(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 9}{2(x+1)^2} = \frac{(x+4)(x-2)}{2(x+1)^2}$$

$$\text{បើ } y' = 0 \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 2$$

-បរម៉ានៃអនុគមន៍ y

ចំពោះ $x = -4$ អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀប $y = f(-4) = -5$

ចំពោះ $x = 2$ អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀប $y = f(2) = 1$ ។

-គណនាលីមីត

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x-3}{2} + \frac{9}{2x+2} \right) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x-3}{2} + \frac{9}{2x+2} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x-3}{2} + \frac{9}{2x+2} \right) = +\infty$$

-អាស៊ីមតូត

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x-3}{2} + \frac{9}{2x+2} \right) = \pm\infty$$

នោះបន្ទាត់ $x = -1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ហើយ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{2x+2} = 0$ នោះបន្ទាត់ $y = \frac{x-3}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	-4	$-\infty$	-1	$-\infty$	2	$-\infty$	$+\infty$
y'	+	○	-		-	○	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$ -5	$\searrow$ $-\infty$		$\nearrow$ $+\infty$	$\searrow$ 1	$\nearrow$ $+\infty$	

.សំណង់ក្រាប

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបជាមួយអ័ក្សកូអរដោនេ

បើ $x = 0$ នោះ $y = 3$ នាំឱ្យក្រាបកាត់អ័ក្ស (oy) ត្រង់ $(0, 3)$

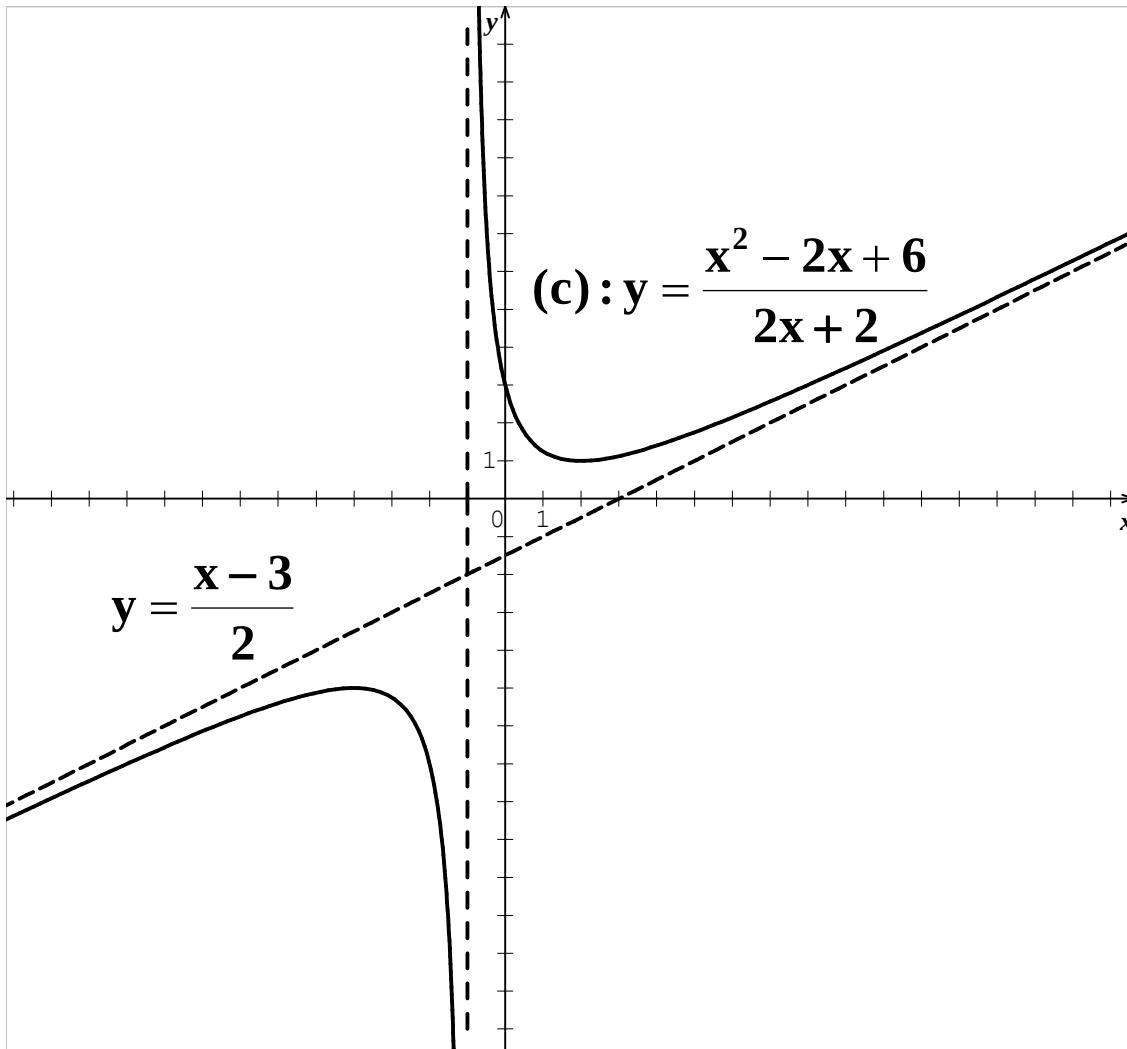
បើ $y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 6 = (x - 1)^2 + 5 = 0$ (គ្មានឫស)

នាំឱ្យក្រាបមិនកាត់អ័ក្ស (ox) ទេ ។

-ផ្ចិតឆ្លុះ

អាស៊ីមតូតឈរ $x = -1$ ប្រសព្វជាមួយអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = \frac{x-3}{2}$

ត្រង់ចំនុច $I(-1, -2)$ គឺជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាបតាង $y = \frac{x^2 - 2x + 6}{2x + 2}$



$$ខ. y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2}$$

.ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} - \{ 1 ; 2 \}$

$$. \text{ គេមាន } y = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-3}{x-2}$$

.ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $y' = \frac{1}{(x-2)^2} > 0$ នាំឱ្យ y ជាអនុគមន៍កើន ។

-គណនាលីមីត

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-3}{x-2} = 1 \quad \text{និង} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-2} = \pm\infty$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-3}{x-2} = 1$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

ហើយ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-2} = \pm\infty$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	+		+
y	1		1

.សំណង់ក្រាប

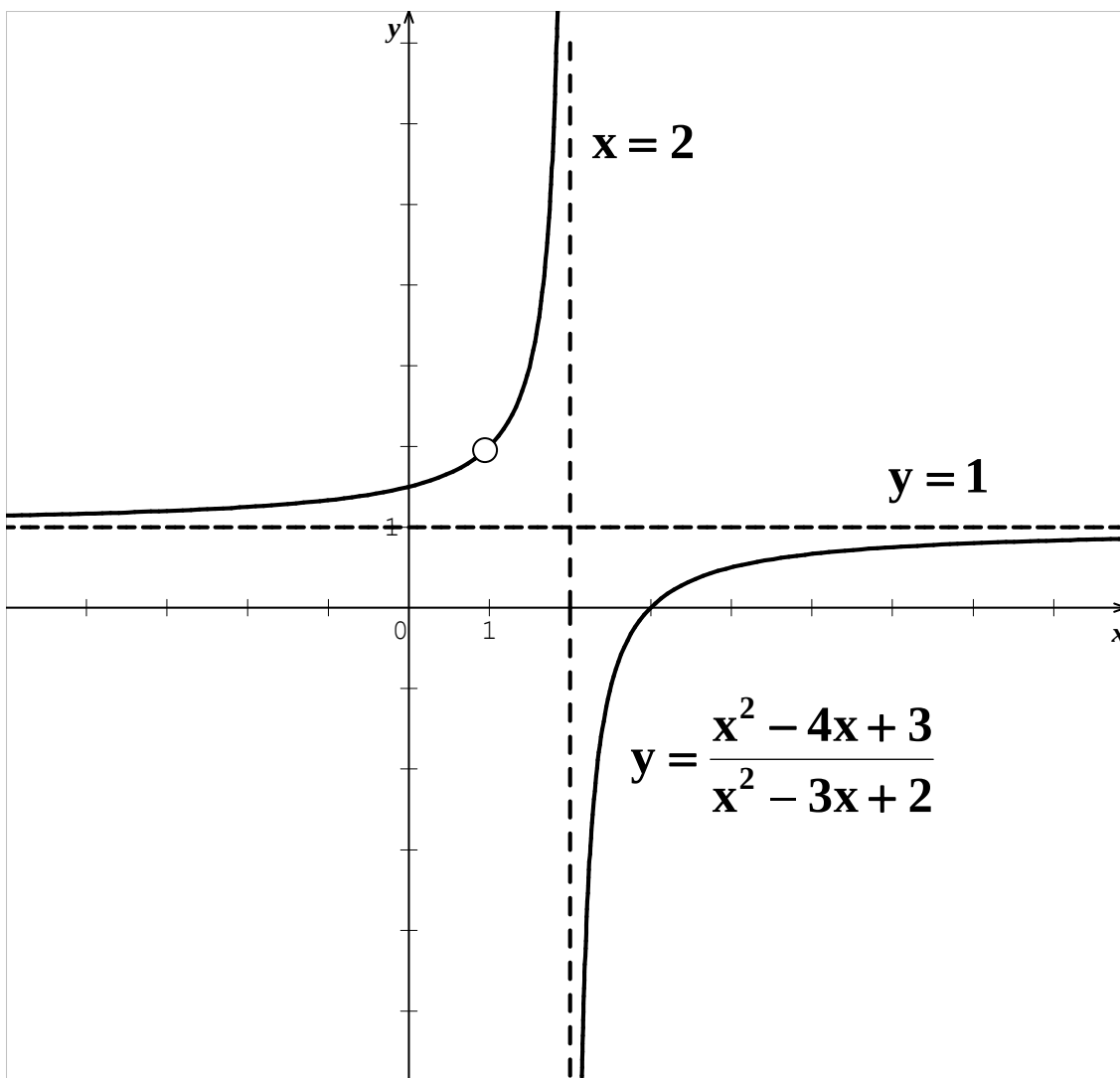
-បើ $x = 0$ នោះ $y = \frac{3}{2}$ នាំឱ្យក្រាបកាត់ (oy) ត្រង់ $(0, \frac{3}{2})$ ។

-បើ $y = 0 \Rightarrow x = 3$ នាំឱ្យក្រាបកាត់ (ox) ត្រង់ $(3 ; 0)$ ។

-ផ្ចិតឆ្លុះ

អាស៊ីមតូតឈរ $x = 2$ កាត់អាស៊ីមតូតដេក $y = 1$ ត្រង់ $I(2 , 1)$

ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ។



$$\text{គ. } y = \frac{x^2 - 9}{4 - x^2}$$

.ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} - \{ -2 ; 2 \}$

.ទិសដៅអថេរភាព

$$\text{-ដេរីវេ } y' = \frac{-10x}{(4 - x^2)^2}$$

$$\text{-បើ } y' = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{-បរមាណៃ } y = \frac{x^2 - 9}{4 - x^2}$$

$$\text{ចំពោះ } x = 0 \text{ អនុគមន៍មានអតិបរមា } y = -\frac{9}{4}$$

-គណនាលីមីត

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 9}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 9}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 9}{(2 - x)(2 + x)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 9}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 9}{(2 - x)(2 + x)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 9}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 9}{(2 - x)(2 + x)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 9}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 9}{(2 - x)(2 + x)} = +\infty$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 9}{4 - x^2} = \pm\infty$ និង $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{4 - x^2} = \pm\infty$

នាំឱ្យបន្ទាត់ $x = -2$ និង $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ហើយ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 9}{4 - x^2} = -1$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y = -1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	+	+	○ -	-	-
y	-1	$+\infty$	$-\frac{9}{4}$	$+\infty$	-1

.សំណង់ក្រាប $y = \frac{x^2 - 9}{4 - x^2}$

-កូអរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាងក្រាបជាមួយអ័ក្សកូអរដោនេ

បើ $x = 0$ នោះ $y = -\frac{9}{4}$ នាំឱ្យក្រាប(c) កាត់អ័ក្ស(oy) ត្រង់ចំនុច

មានកូអរដោនេ $(0 ; -\frac{9}{4})$ ។

3-ក. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \frac{x^2 - 4x + 8}{x - 2}$

ខ. សិក្សាទៅតាមតម្លៃ m អត្ថិភាព និង សញ្ញានៃឫសសមីការ

$x^2 - (m + 4)x + 2m + 8 = 0$ ដោយប្រើក្រាបតាង y ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

$$y = \frac{x^2 - 4x + 8}{x - 2}$$

. ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} - \{2\}$

. សរសេរជា រាងកាណូនិច $y = x - 2 + \frac{4}{x - 2}$

. ទិសដៅអថេរភាព

$$\text{-ដេរីវេ } y' = 1 - \frac{4}{(x - 2)^2} = \frac{x(x - 4)}{(x - 2)^2}$$

$$\text{បើ } y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$$

-បរម៉ានៃអនុគមន៍ y

ចំពោះ $x = 0$ អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀប $y = f(0) = -4$

ចំពោះ $x = 4$ អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀប $y = f(4) = 4$ ។

-គណនាលីមីត

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x - 2 + \frac{4}{x-2} \right) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(x - 2 + \frac{4}{x-2} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(x - 2 + \frac{4}{x-2} \right) = +\infty$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 2} \left(x - 2 + \frac{4}{x-2} \right) = \pm\infty$

នោះបន្ទាត់ $x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ហើយ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x-2} = 0$ នោះបន្ទាត់ $y = x - 2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
y'	+	○	-	-	○	+
y	$-\infty$	-4	$+\infty$	4	$+\infty$	

.សំណង់ក្រាប

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបជាមួយអ័ក្សអូរដោយ

បើ $x = 0$ នោះ $y = -4$ នាំឱ្យក្រាបកាត់អ័ក្ស (oy) ត្រង់ $(0, -4)$

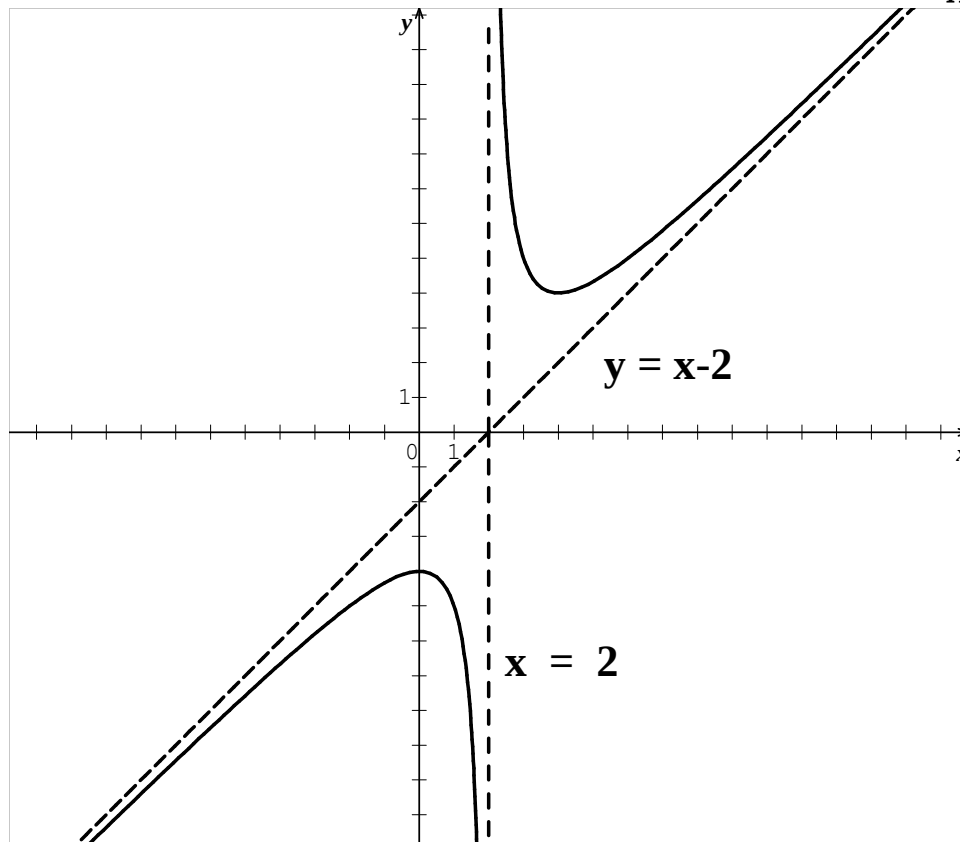
បើ $y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 + 4 = 0$ (គ្មានឫស)

នាំឱ្យក្រាបមិនកាត់អ័ក្ស (ox) ទេ ។

-ផ្ចិតឆ្លុះ

អាស៊ីមតូតឈរ $x = 2$ ប្រសព្វជាមួយអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x - 2$

ត្រង់ចំនុច $I(2, 0)$ គឺជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាបតាង $y = \frac{x^2 - 4x + 8}{x - 2}$ ។



$$4\text{-កំនត់តម្លៃ } a \text{ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ } y = \frac{x^2 - 2ax + 3a^2}{x - 2a}$$

កើនលើចន្លោះ $(1, +\infty)$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃ a

$$y = \frac{x^2 - 2ax + 3a^2}{x - 2a}$$

ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} - \{2a\}$

$$\text{គេមាន } y = f(x) = \frac{x(x - 2a) + 3a^2}{x - 2a} = x + \frac{3a^2}{x - 2a}$$

$$\text{គេបាន } y' = f'(x) = 1 - \frac{3a^2}{(x - 2a)^2} = \frac{(x - 2a)^2 - 3a^2}{(x - 2a)^2}$$

$$\text{ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ } y = \frac{x^2 - 2ax + 3a^2}{x - 2a} \text{ កើនលើចន្លោះ } (1, +\infty)$$

លុះត្រាតែ $f'(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ x លើចន្លោះ $(1, +\infty)$ ពោលគឺ

$$\text{គេត្រូវឱ្យ } (x - 2a)^2 - 3a^2 > 0, \forall x > 1 \text{ ។}$$

$$5\text{-គេឱ្យអនុគមន៍ } y = \frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x + 2}$$

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាអាស៊ីមតូតទ្រេតកាត់តាមចំនុចនឹងមួយចំពោះ

គ្រប់តម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ដែលត្រូវកំណត់ក្នុងអរដេនេ ។

ខ. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ $y = m$ ប៉ះនឹងក្រាប ។

គ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបចំពោះ $m = -1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថាអាស៊ីមតូតទ្រេតកាត់តាមចំនុចនឹងមួយ

$$\text{គេមាន } y = \frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x + 2}$$

$$\text{ដែនកំណត់ } D = \mathbb{R} - \{-2\}$$

អនុគមន៍អាចសរសេរ

$$y = \frac{(mx^2 + 2mx) + (mx + 2m) + 1}{x + 2}$$

$$= mx + m + \frac{1}{x + 2}$$

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + 2} = 0 \text{ នាំឱ្យ } y = mx + m \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត}$$

ហើយដោយ $y = m(x + 1)$ សមីការនេះផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់ $m \in \mathbb{R}$

លុះត្រាតែ $x + 1 = 0$ ឬ $x = -1$ និង $y = 0$ ។

ដូចនេះអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបកាត់តាមចំណុចនឹង $I(-1, 0)$ ចំពោះ

គ្រប់តម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m ។

ខ. រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ $y = m$ ប៉ះនឹងក្រាប

សមីការអាប់ស៊ីស

$$\frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x + 2} = m$$

$$mx^2 + 3mx + 2m + 1 = mx + 2m$$

$$mx^2 + 2mx + 1 = 0$$

$$\Delta' = m^2 - m = m(m - 1)$$

$$\text{ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ } y = m \text{ ប៉ះនឹងក្រាបលុះត្រាតែ } \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m(m - 1) = 0 \end{cases}$$

គេទាញបាន $m = 1$ ។

គ. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបចំពោះ $m = -1$

$$\text{ចំពោះ } m = -1 \text{ គេបាន } y = -x - 1 + \frac{1}{x + 2}$$

ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} - \{-2\}$ ។

. ទិសដៅអថេរភាព

$$\text{-ដេរីវេ } y' = -1 - \frac{1}{(x+2)^2} = -\frac{(x+2)^2 + 1}{(x+2)^2} < 0$$

នាំឱ្យអនុគមន៍ f ចុះជានិច្ចលើដែនកំណត់ នាំឱ្យវាគ្មានបរិមាណទេ ។

-គណនាលីមីត

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-x - 1 + \frac{1}{x+2} \right) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \left(-x - 1 + \frac{1}{x+2} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(-x - 1 + \frac{1}{x+2} \right) = +\infty$$

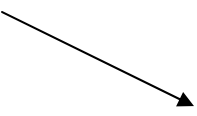
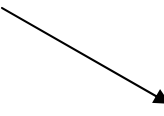
-អាស៊ីមតូត

$$\text{ដោយ } \lim_{x \rightarrow -2} \left(-x - 1 + \frac{1}{x+2} \right) = \pm\infty$$

នោះបន្ទាត់ $x = -2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ហើយ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+2} = 0$ នោះបន្ទាត់ $y = -x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'	-		-
y	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
			
	$-\infty$		$-\infty$

.សំណង់ក្រាប

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបជាមួយអ័ក្សកូអរដោនេ

បើ $x = 0$ នោះ $y = -\frac{1}{2}$ នាំឱ្យក្រាបកាត់អ័ក្ស (oy) ត្រង់ $(0, -\frac{1}{2})$

បើ $y = 0 \Rightarrow -x - 1 + \frac{1}{x+2} = 0$

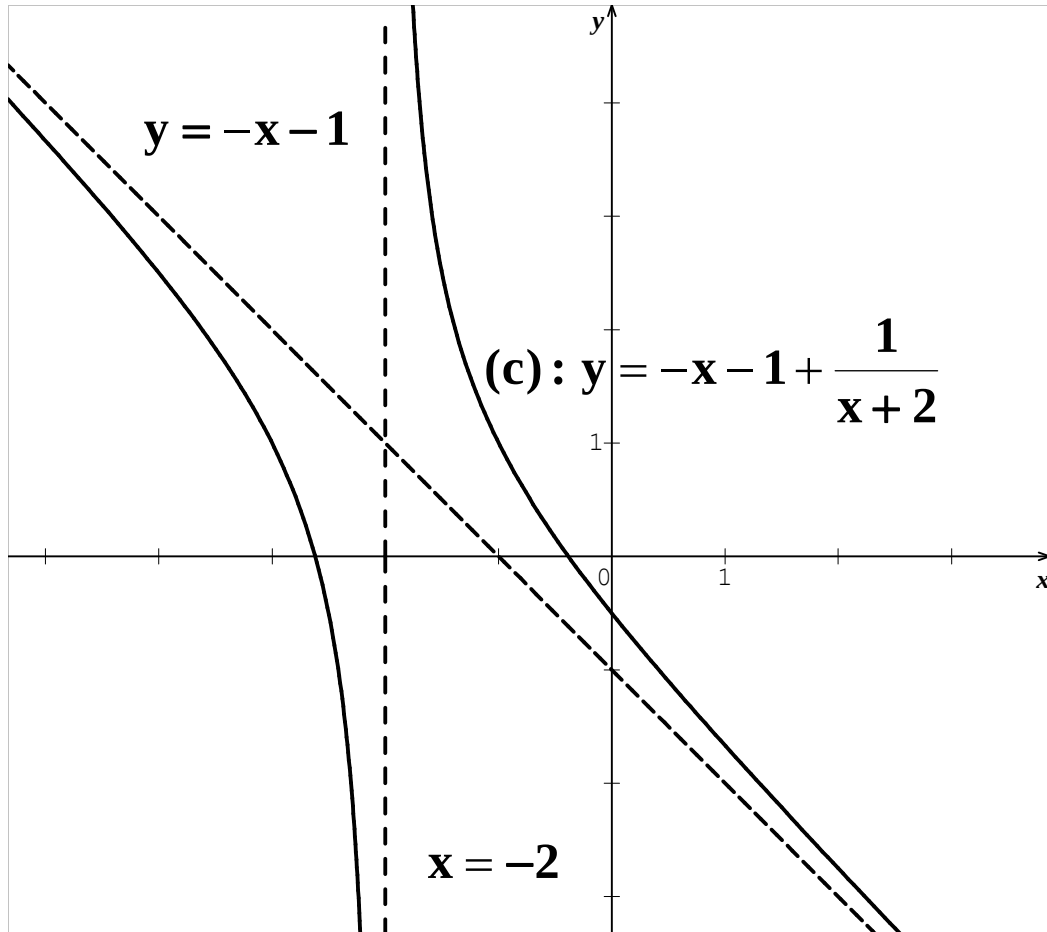
$$-x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\Delta = 9 + 4 = 5 \Rightarrow x_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$$

-ផ្ចិតឆ្លុះ

អាស៊ីមតូតឈរ $x = -2$ ប្រសព្វជាមួយអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = -x - 1$

ត្រង់ចំនុច $I(-2, 1)$ គឺជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាបតាង $y = -x - 1 + \frac{1}{x+2}$ ។



6-រកតម្លៃបរមាធ្យូបរបស់អនុគមន៍ $y = \frac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}$

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃបរមាធ្យូប

$$y = \frac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}$$

ដែនកំណត់ $D = IR$

អនុគមន៍អាចសរសេរ $y(3x^2 + 2x + 1) = 20x^2 + 10x + 3$

ឬ $3x^2y + 2xy + y - 20x^2 - 10x - 3 = 0$

$$(3y - 20)x^2 + 2(y - 5)x + y - 3 = 0 \quad (E)$$

$$\begin{aligned} \Delta' &= (y - 5)^2 - (y - 3)(3y - 20) \\ &= y^2 - 10y + 25 - 3y^2 + 20y + 9y - 60 \\ &= -2y^2 + 19y - 35 \end{aligned}$$

$$\text{បើ } \Delta' = 0 \Rightarrow -2y^2 + 19y - 35 = 0$$

$$\text{មានឫស } y_1 = 7 ; y_2 = \frac{5}{2} \quad \text{។}$$

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y = \frac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}$ មានតម្លៃបរមាធ្យោបលុះត្រា

តែសមីការ (E) មានឫស ពោលគឺគេត្រូវឱ្យ $\Delta' = -2y^2 + 19y - 35 \geq 0$

$$\text{គេទាញ } \frac{5}{2} \leq y \leq 7 \quad \text{។}$$

ដូចនេះតម្លៃអតិបរមាធ្យោបតី 7 និងតម្លៃអប្បបរមាធ្យោបតី $\frac{5}{2}$ ។

7- រកតម្លៃបរមាធ្យូបរបស់អនុគមន៍ $y = x^2 + 2x + 1 + \frac{a^2}{(x+1)^2}$

ដែល a ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រខុសពីសូន្យ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃបរមាធ្យូប

$$\text{គេមាន } y = x^2 + 2x + 1 + \frac{a^2}{(x+1)^2} = (x+1)^2 + \frac{a^2}{(x+1)^2}$$

តាមវិសមភាព មធ្យមនព្វន្ឋ-មធ្យមធរណីមាត្រគេបាន

$$y = (x+1)^2 + \frac{a^2}{(x+1)^2} \geq 2\sqrt{(x+1)^2 \times \frac{a^2}{(x+1)^2}} = 2|a|$$

ដូចនេះអនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធ្យូបស្មើនឹង $2|a|$ ។

8-សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = x + 1 + \frac{1}{x+1}$

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

$$y = x + 1 + \frac{1}{x+1}$$

. ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} - \{-1\}$

. ទិសដៅអថេរភាព

$$\text{-ដេរីវេ } y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$\text{បើ } y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2$$

-បរម៉ានៃអនុគមន៍ y

ចំពោះ $x = -2$ អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀប $y = f(-2) = -2$

ចំពោះ $x = 0$ អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀប $y = f(0) = 2$ ។

-គណនាលីមីត

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x + 1 + \frac{1}{x+1} \right) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(x + 1 + \frac{1}{x+1} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(x + 1 + \frac{1}{x+1} \right) = +\infty$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim_{x \rightarrow -1} \left(x + 1 + \frac{1}{x+1} \right) = \pm\infty$

នោះបន្ទាត់ $x = -1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

ហើយ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 0$ នោះបន្ទាត់ $y = x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
y'	+	○	-	-	○	+
y	$-\infty$	$\nearrow$ -2	$\searrow$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	$\searrow$ 2	$\nearrow$ $+\infty$

.សំណង់ក្រាប

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបជាមួយអ័ក្សកូអរដោនេ

បើ $x = 0$ នោះ $y = 2$ នាំឱ្យក្រាបកាត់អ័ក្ស (oy) ត្រង់ $(0, 2)$

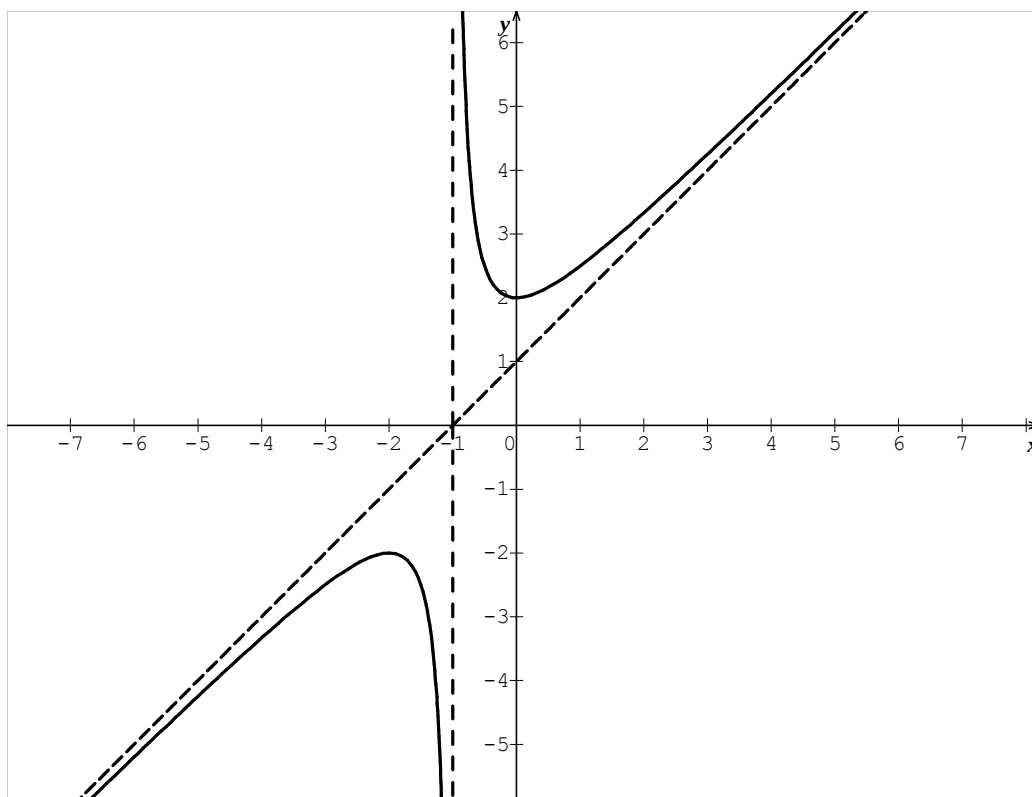
បើ $y = 0 \Rightarrow x + 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)^2 + 1}{x+1} = 0$ (គ្មានឫស)

នាំឱ្យក្រាបមិនកាត់អ័ក្ស (ox) ទេ ។

-ផ្ចិតឆ្លុះ

អាស៊ីមតូតឈរ $x = -1$ ប្រសព្វជាមួយអាស៊ីមតូតទ្រេត $y = x + 1$

ត្រង់ចំណុច $I(-1, 0)$ គឺជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាបតាង $y = x + 1 + \frac{1}{x+1}$ ។



9-គេឱ្យ C_m ជាក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = x + 1 + \frac{4}{(x+m)^2}$

ក.តើមានក្រាប C_m ចំនួនប៉ុន្មានដែលកាត់តាមចំនុច $A(1, 3)$

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ប៉ះក្រាប C_m ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីស

$$x = 2 - m \text{ ស្របនឹងអ័ក្ស } ox \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

ក.តើមានក្រាប C_m ចំនួនប៉ុន្មានដែលកាត់តាមចំនុច $A(1, 3)$

យកកូអរដោនេនៃចំនុច A ផ្ទៀងផ្ទាត់ក្នុងសមីការ C_m គេបាន

$$3 = 2 + \frac{4}{(m+1)^2} \Rightarrow (m+1)^2 = 4$$

គេទាញបាន $m_1 = -3$, $m_2 = 1$ ។

ដូចនេះមានក្រាប C_m ពីរដែលកាត់តាម $A(1, 3)$ មានសមីការរៀងគ្នា

$$y = x + 1 + \frac{4}{(x-3)^2} \text{ និង } y = x + 1 + \frac{4}{(x+1)^2}$$

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ប៉ះក្រាប C_m ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីស

$$x = 2 - m \text{ ស្របនឹងអ័ក្ស } ox$$

គេមាន $y = x + 1 + \frac{4}{(x+m)^2}$

ដែនកំនត់ $D = \mathbb{R} - \{-m\}$

ដេរីវេ $y' = 1 - \frac{8}{(x+m)^3}$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ C_m ត្រង់ $x = 2 - m$ គឺជាចំនួនដេរីវេ

ត្រង់ $x = 2 - m$ ដែលកំណត់ដោយ $a = f'(2 - m)$ ។

គេបាន $a = f(2 - m) = 1 - \frac{8}{(2 - m + m)^3} = 1 - 1 = 0$

លទ្ធផលនេះបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ប៉ះក្រាប C_m ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីស

$x = 2 - m$ ស្របនឹងអ័ក្ស ox ។

មេរៀនទី២

អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

- ◆ ចំនួន e ឬគោល e ដែលគេនិយមប្រើមានតម្លៃ $e = 2.718281$

$$\text{ដែល } e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad \text{។}$$

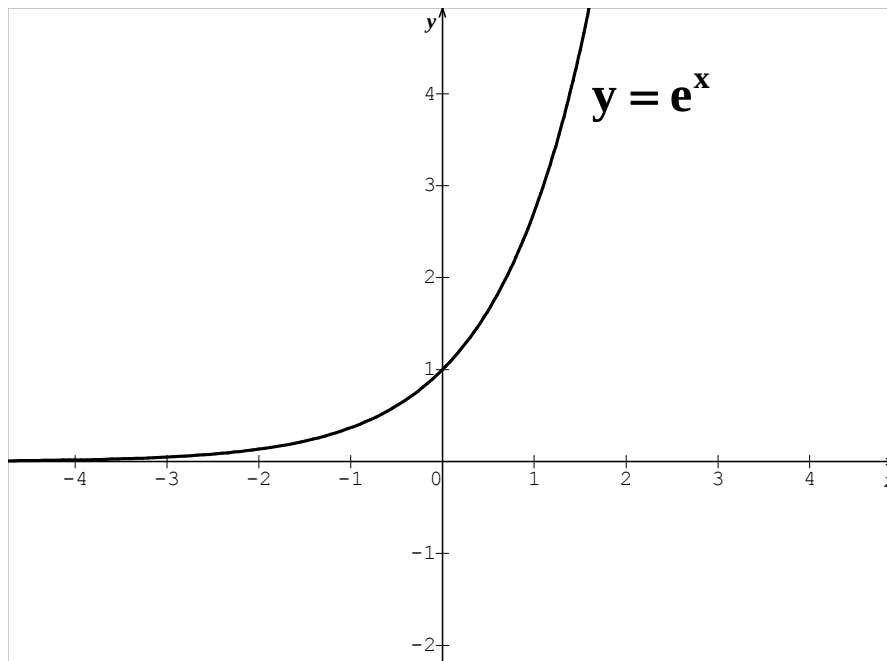
- ◆ អនុគមន៍ $f(x) = e^x$ ហៅថាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែលគោល e ។

- ◆ ដេរីវេ

$$\text{-បើ } y = e^x \text{ នោះ } y' = e^x$$

$$\text{-បើ } y = e^{u(x)} \text{ នោះ } y' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

- ◆ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = e^x$



លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

1-គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{5x}$

គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 6e^{2x}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x} = +\infty$

ខ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{5x} = 0$

គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 6e^{2x} = 6 \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$

2-គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{x+1}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{4x}$

គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n}{x}\right)^x$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{x+1} = e \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

ព្រោះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

ខ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{4x} = 0$ ព្រោះ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{4x} = 0$ ។

គ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{n}{x}\right)^{\frac{x}{n}} \right]^n = e^n$

ព្រោះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n}{x}\right)^{\frac{x}{n}} = e$ ។

3-គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{x-2}}{x^3}$

ខ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+2}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{x} \right)$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{x-2}}{x^3} = \frac{3}{e^2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$

ខ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x-1} \right)^{x+2}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{4}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{4}} \right]^{\frac{4(x+2)}{x-1}} = e^4$

ច្រោះ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{4}} = e$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4(x+2)}{x-1} = 4$ ។

$$\begin{aligned} \text{ក. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{xe^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \frac{2}{e^x} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{x} \right) = 2 \quad \text{។}$$

4-គណនាដេរីវេខាងក្រោម

$$\text{ក. } y = xe^{-x}$$

$$\text{ខ. } f(x) = x^2e^x$$

$$\text{គ. } g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេខាងក្រោម

$$\text{ក. } y = xe^{-x}$$

$$\text{គេបាន } y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$$

$$\text{ដូចនេះ } y' = (1 - x)e^{-x} \quad \text{។}$$

$$ខ. f(x) = x^2 e^x$$

$$\text{គេបាន } f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = x(2 + x)e^x$$

$$\text{ដូចនេះ } f'(x) = x(x + 2)e^x \quad \text{។}$$

$$គ. g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } g'(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \end{aligned}$$

5-គណនាដេរីវេខាងក្រោម

$$ក. y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$ខ. f(x) = \frac{e^x(1 + \cos x)}{1 - \cos x}$$

$$គ. g(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេខាងក្រោម

$$\text{ក. } y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{គេបាន } y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{ខ. } f(x) = \frac{e^x(1 + \cos x)}{1 - \cos x}$$

គេបាន

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(1 - \cos^2 x) - e^x \sin x(1 - \cos x) - \sin x e^x(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)^2} \\ &= \frac{e^x(\sin^2 x - \sin x + \sin x \cos x - \sin x + \sin x \cos x)}{(1 - \cos x)^2} \\ &= \frac{(\sin x + 2 \cos x - 2) \sin x e^x}{(1 - \cos x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{គ. } g(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$\text{គេបាន } g'(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' e^{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{2}{(x+1)^2} e^{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$\text{ដូចនេះ } g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} e^{\frac{x-1}{x+1}} \quad \text{។}$$

6-សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = x^2 e^{-x}$

ខ. $y = 5 + 2e^{-x}$

គ. $g(x) = e^x - x^2$

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = x^2 e^{-x}$

.ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R}$

.ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = x(2 - x)e^{-x}$

-បើ $y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0 ; x_2 = 2$

ចំពោះ $x = 0$ អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀប $y = f(0) = 0$

ចំពោះ $x = 2$ អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀប $y = \frac{4}{e^2}$

-គណនាលីមីត

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty \quad \text{និង} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$$

-អាស៊ីមតូត

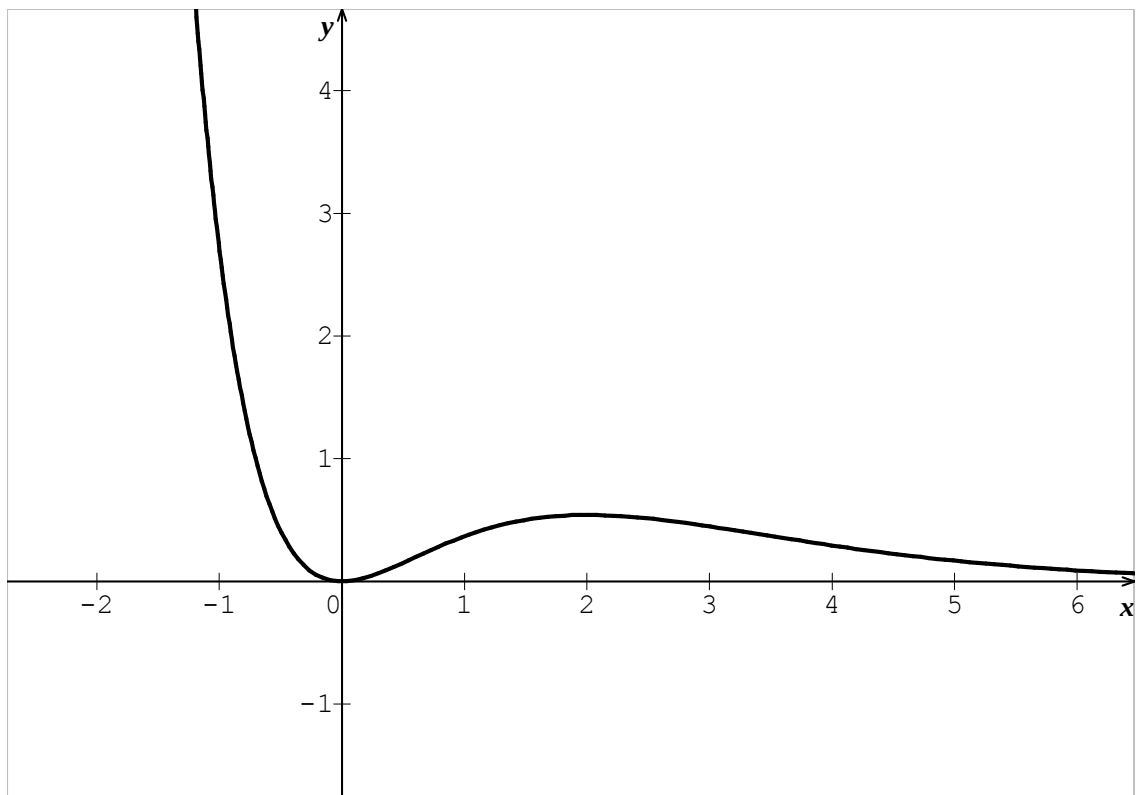
ដោយ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y = 0$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
y'	-	○	+	○	-
y	$+\infty$			$\frac{4}{e^2}$	

$0 \xleftarrow{\quad} \xrightarrow{\quad} \frac{4}{e^2} \xrightarrow{\quad} -\infty$

.សំណង់ក្រាប (C): $y = x^2 e^{-x}$



ខ. $y = 5 + 2e^{-x}$

.ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R}$

.ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $y' = -2e^{-x} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

នាំឱ្យអនុគមន៍ f ចុះជាទិស ។ នាំឱ្យអនុគមន៍គ្មានចំនុចបរិមាណឡើយ ។

-គណនាលីមីត

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (5 + 2e^{-x}) = +\infty \quad \text{និង} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (5 + 2e^{-x}) = 5$$

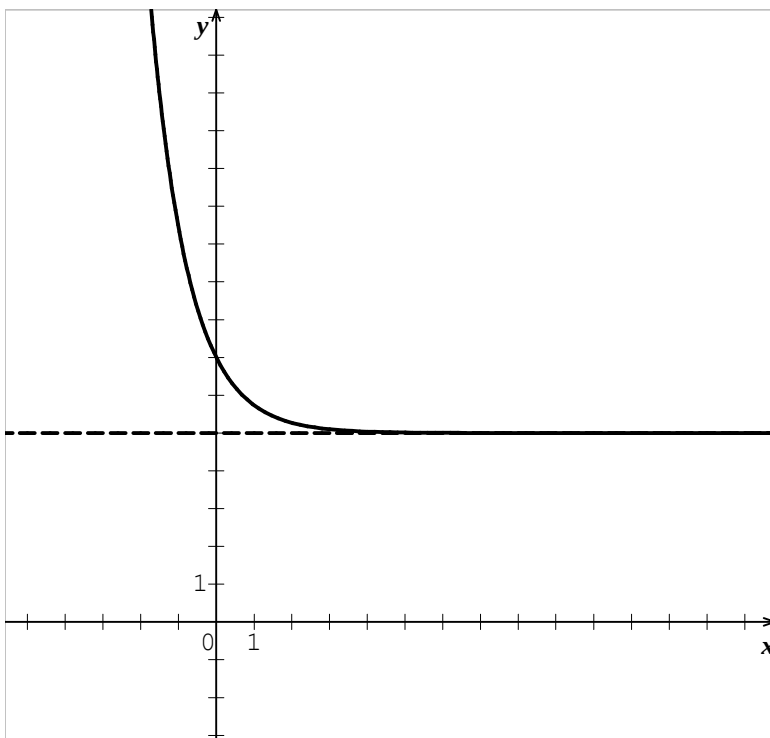
-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5 + 2e^{-x}) = 5$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y = 5$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

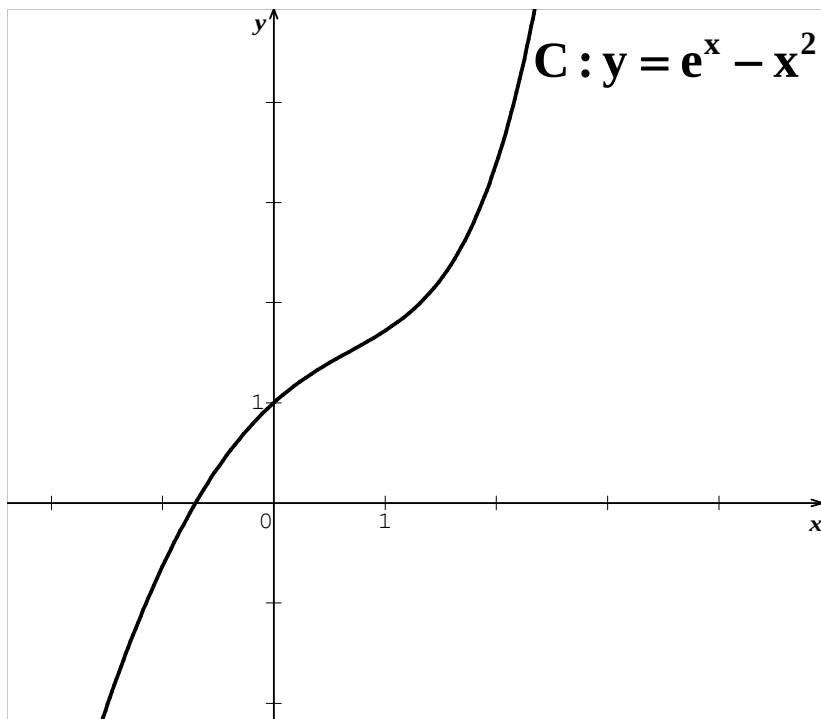
-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	$+\infty$
y'		—
y	$+\infty$	5

.សំណង់ក្រាប (C): $y = 5 + 2e^{-x}$



ឆ. $g(x) = e^x - x^2$



7-សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

$$\text{ក. } f(x) = \frac{1}{2 - e^{-x}}$$

$$\text{ខ. } g(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

$$\text{គ. } g(x) = \frac{x}{e^x}$$

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

$$\text{ក. } f(x) = \frac{1}{2 - e^{-x}}$$

.ដែនកំណត់ $D = \mathbb{R} - \{-\ln 2\}$

.ទិសដៅអថេរភាព

$$\text{-ដេរីវេ } y' = -\frac{e^{-x}}{(2 - e^{-x})^2} < 0$$

នាំឱ្យអនុគមន៍ f ចុះជានិច្ច ។ នាំឱ្យអនុគមន៍គ្មានចំនុចបរមាធ្យូបទេ ។

-គណនាលីមីត

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2 - e^{-x}} = 0 \quad \text{និង} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 - e^{-x}} = \frac{1}{2}$$

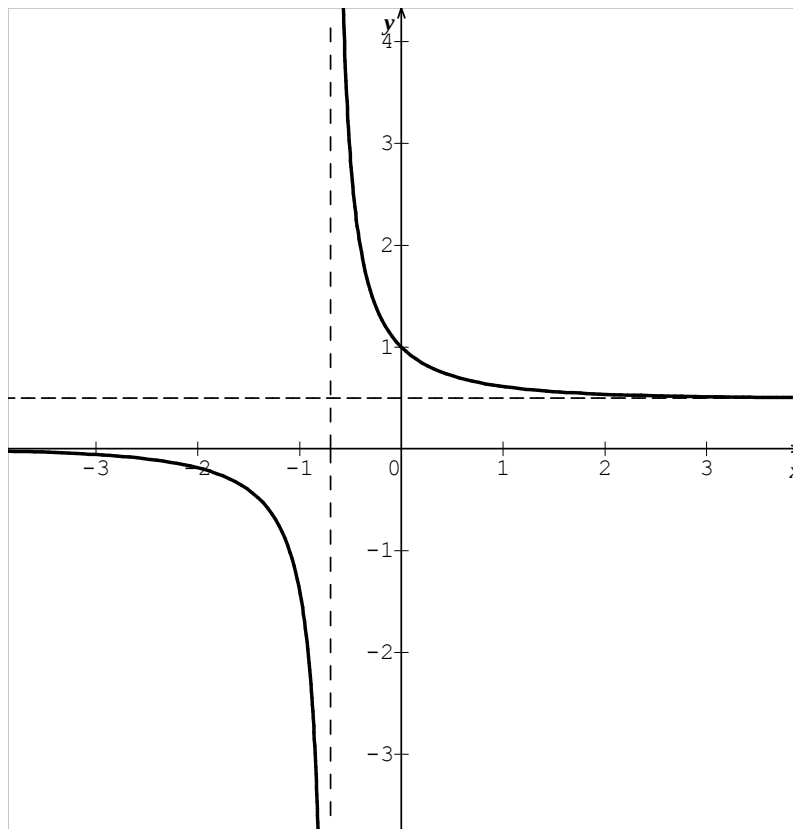
-អាស៊ីមតូត ដោយ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2 - e^{-x}} = 0$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 - e^{-x}} = \frac{1}{2}$

នាំឱ្យ $y = 0$ និង $y = \frac{1}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។

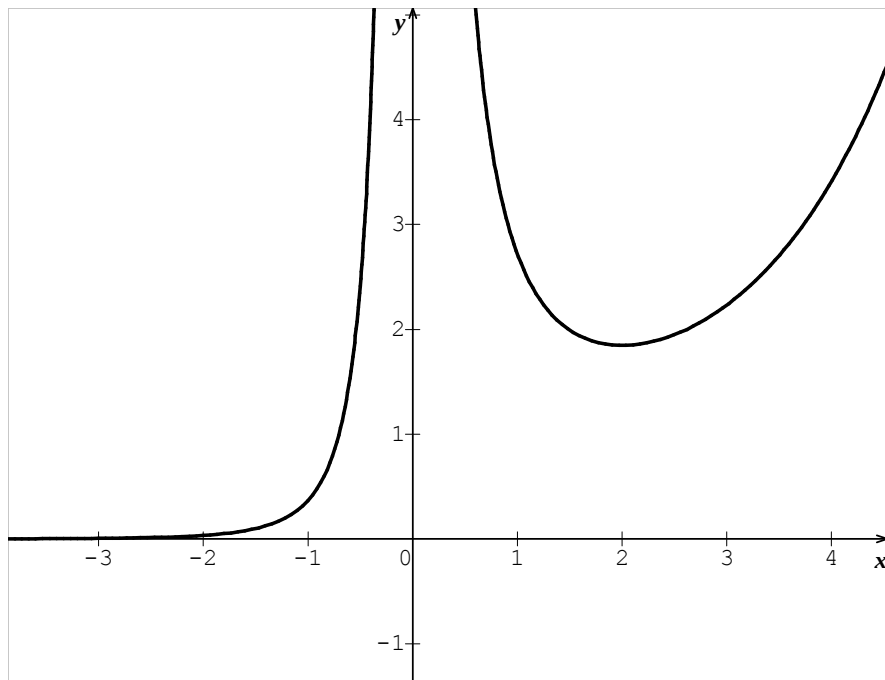
-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
y'	—		—
y	0	$+\infty$	$\frac{1}{2}$

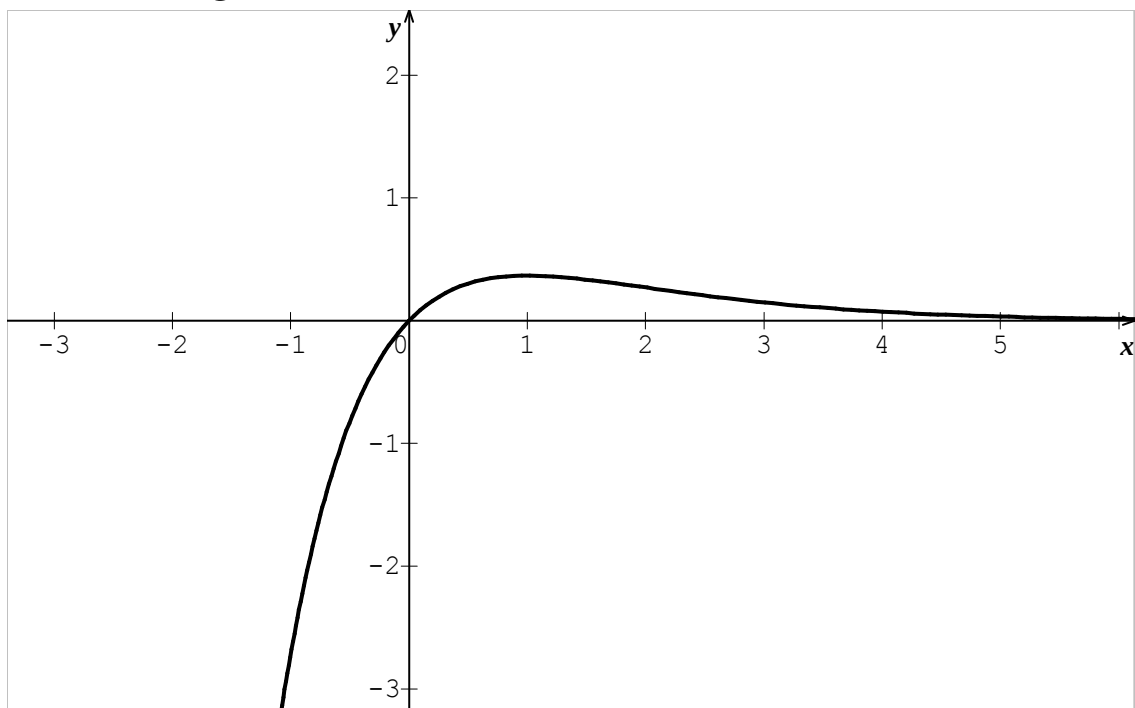
.សំណង់ក្រាប (C): $y = \frac{1}{2 - e^{-x}}$



ខ. $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$



គ. $g(x) = \frac{x}{e^x}$



8-ឧបមាថាគេយកប្រាក់ 5000 ដុល្លា ទៅធ្វើនៅធនាគារមួយដោយ
ទទួលបានអត្រាការប្រាក់សមាស 11% ក្នុងមួយឆ្នាំ ។
បើគេផ្ញើរយះពេល 10 ឆ្នាំ តើគេទទួលបានប្រាក់សរុបទាំងអស់ចំនួន
ប៉ុន្មានបើការទូទាត់ច្រើនដងក្នុងមួយឆ្នាំ ?

ដំណោះស្រាយ

គណនាប្រាក់សរុបដែលគេទទួលបាន
ដោយការទូទាត់មានច្រើនដងក្នុងមួយឆ្នាំនោះតាមរូបមន្ត

$A = pe^{r \cdot t}$ ដែល A : ជាប្រាក់សរុប

p : ជាប្រាក់ដើម

r : ជាអត្រាការប្រាក់សមាស

t : ជារយះពេលដាក់ប្រាក់សន្សំ

គេបាន $A = 5000 \times (2.718)^{(0.11)(10)} = 15\,019$ ដុល្លា ។

មេរៀនទី៣

អនុគមន៍លោការីត

♦ លោការីតនៃចំនួនវិជ្ជមាន k គឺជាទិសស្រួច x នៃ e ដែល $e^x = k$

គេកំនត់សរសេរ $x = \ln k$ ហើយ $x = \ln k \Leftrightarrow e^x = k$ ។

♦ អនុគមន៍ $f(x) = \ln x$ ហៅថាអនុគមន៍លោការីតនៃចំនួន $x > 0$ ។

♦ លីមីត

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0, \quad n > 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

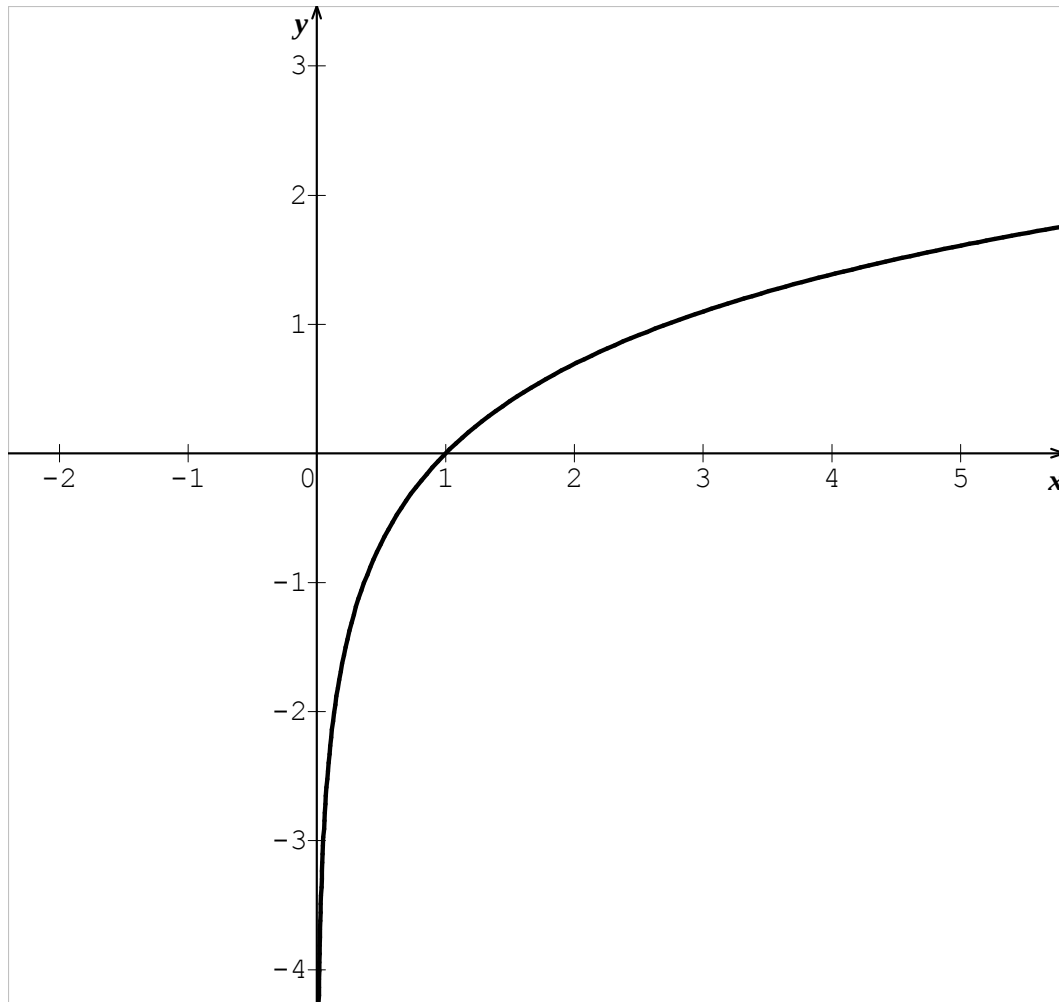
$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

♦ ដេរីវេ

$$\text{-បើ } y = \ln x \text{ នោះ } y' = \frac{1}{x}$$

$$\text{-បើ } y = \ln u(x) \text{ នោះ } y' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

♦ ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \ln x$



លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

1-គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម

ក. $e^{\ln 7}$

ខ. $\ln e^{x-2}$

គ. $\ln e^{7x}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃកន្សោមខាងក្រោម

ក. $e^{\ln 7} = 7$

ខ. $\ln e^{x-2} = x - 2$

គ. $\ln e^{7x} = 7x$

2-សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = 3 - \ln x$

ខ. $y = \ln(x - 3)$

គ. $y = \ln(2 + e^x)$

ដំណោះស្រាយ

សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = 3 - \ln x$

.ដែនកំណត់ $D = (0 ; +\infty)$

.ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $y' = -\frac{1}{x} < 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$

នាំឱ្យវាជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ចលើដែនកំណត់ និងគ្មានចំនុចបរមាធ្យូបទេ ។

-គណនាលីមីត

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - \ln x) = -\infty$ និង $\lim_{x \rightarrow 0^+} (3 - \ln x) = +\infty$

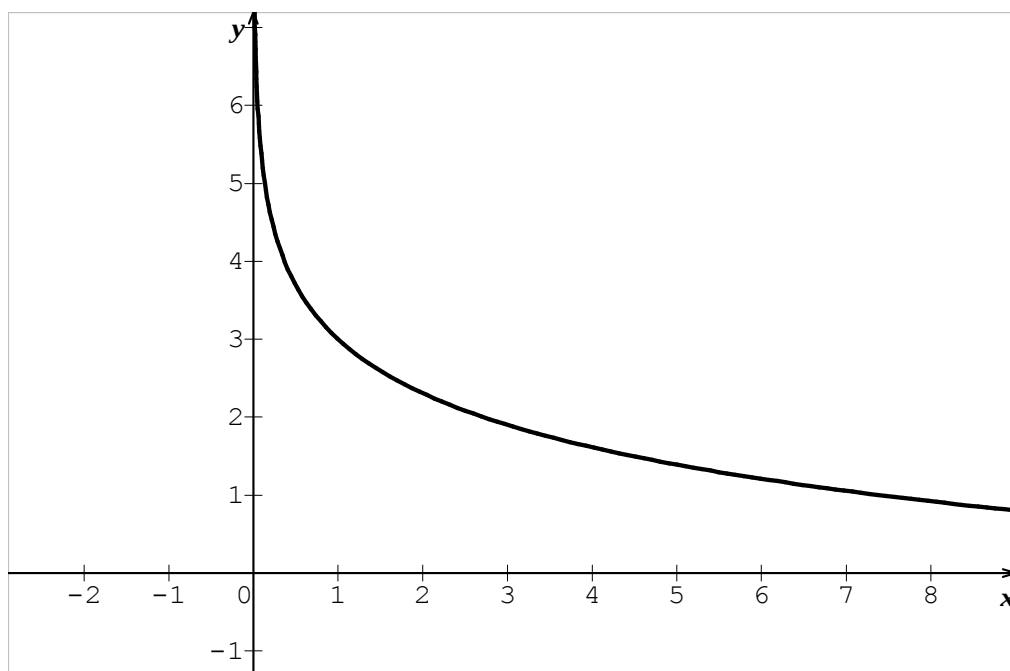
-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim_{x \rightarrow 0^+} (3 - \ln x) = +\infty$ នាំឱ្យអក្សរ (oy) ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

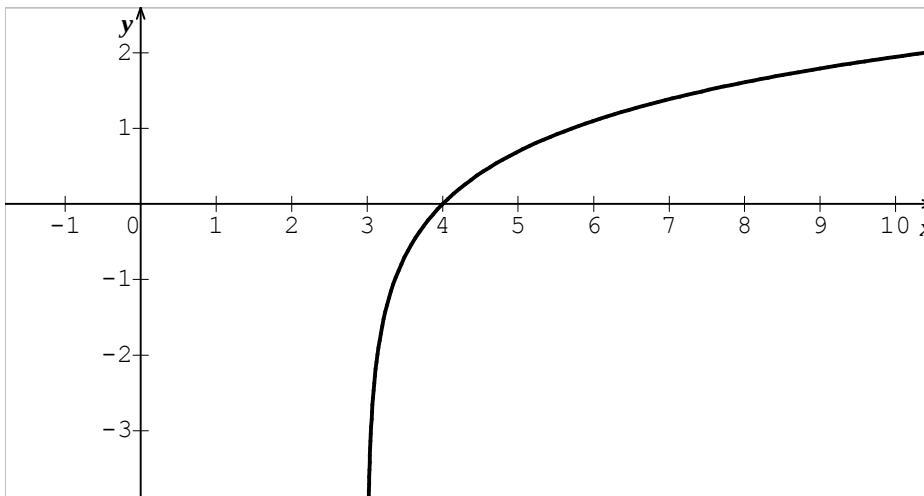
-តារាងអថេរភាព

x	0	$+\infty$
y'		-
y	$+\infty$	$-\infty$

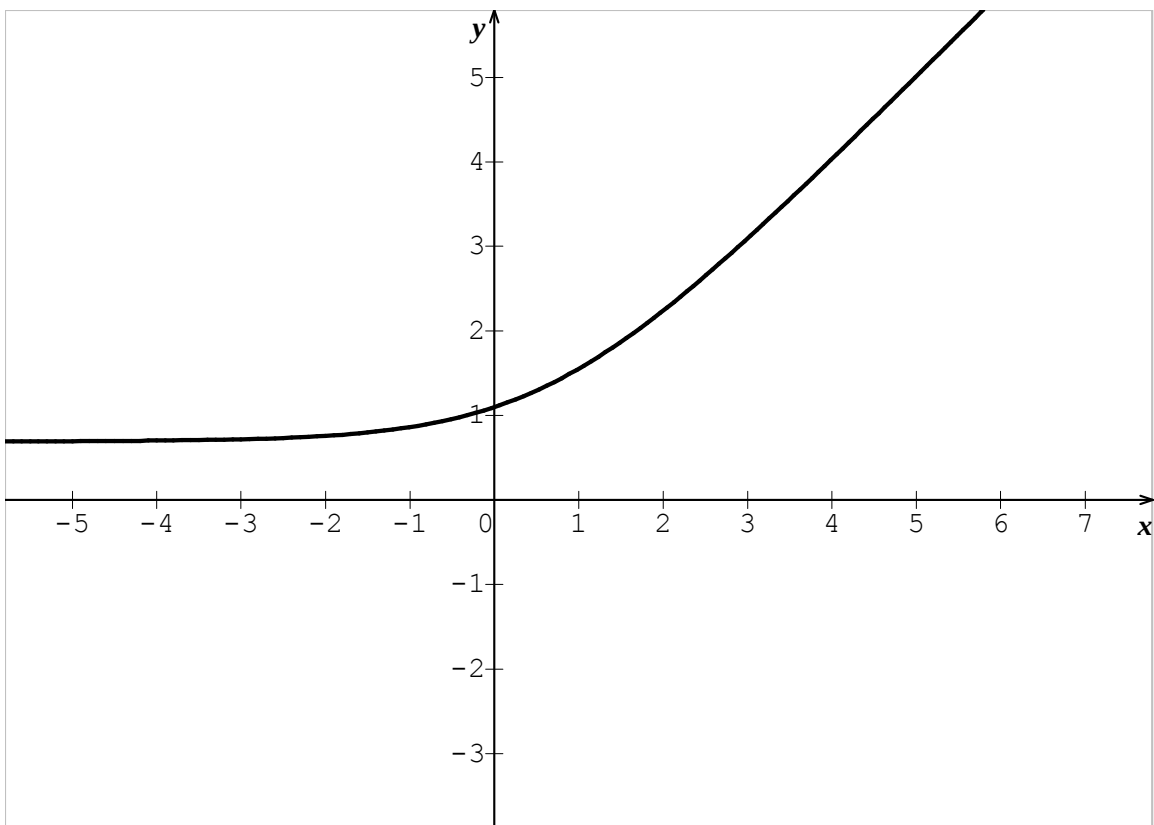
.សំណង់ក្រាប $y = 3 - \ln x$



ខ. $y = \ln(x - 3)$



ឃ. $y = \ln(2 + e^x)$



3-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-5} \ln x$

ខ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x^2}$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-5} \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^5} = 0$

ខ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} \right) = 0$

គ. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$

4-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = \sqrt{x} \cdot \ln x$

ខ. $y = x \sqrt[3]{\ln x}$

គ. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = \sqrt{x} \cdot \ln x$

គេបាន $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}$

ខ. $y = x \sqrt[3]{\ln x} = x (\ln x)^{\frac{1}{3}}$

គេបាន $y' = (\ln x)^{\frac{1}{3}} + (\ln x)^{-\frac{2}{3}}$

គ. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } y' &= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{(x + \sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ។

5-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = \ln \frac{e^x}{e^x + 1}$

ខ. $y = x \ln x - x$

គ. $y = x^2 \ln \frac{1}{x^2}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = \ln \frac{e^x}{e^x + 1} = \ln e^x - \ln(e^x + 1) = x - \ln(e^x + 1)$

គេបាន $y' = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}$

ខ. $y = x \ln x - x$

គេបាន $y' = \ln x - x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x - 2$

គ. $y = x^2 \ln \frac{1}{x^2} = -x^2 \ln x^2$

គេបាន $y' = -2x \ln x^2 - x^2 \cdot \frac{2x}{x^2} = -2x(2 \ln |x| + 1)$

មេរៀនទី១

ព្រីមីទីវ និង អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

♦ **និយមន័យ**

$F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ កាលណា $F'(x)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ក្នុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

♦ **ទ្រឹស្តីបទ**

បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ នោះព្រីមីទីវទាំងអស់នៃ $f(x)$ មានទម្រង់ទូទៅ $F(x) + C$ ដែល C ជាចំនួនពិតថេរ ។

♦ **និយមន័យអាំងតេក្រាលមិនកំណត់**

បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ នោះអាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃ $f(x)$ កំណត់ដោយ $\int f(x).dx = F(x) + C$ ដែល C ជាចំនួនពិតថេរ ។

♦ **លក្ខណៈអាំងតេក្រាលមិនកំណត់**

1. $\int k f(x).dx = k. \int f(x).dx$ ដែល k ជាចំនួនពិតថេរ ។
2. $\int [f(x) \pm g(x)].dx = \int f(x).dx \pm \int g(x).dx$

♦ រូបមន្តអាំងតេក្រាលមិនកំណត់

$$1. \int k \cdot dx = kx + C$$

$$2. \int x^n \cdot dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad n \neq -1$$

$$3. \int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln |x| + C$$

$$4. \int \frac{1}{x^2} \cdot dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$5. \int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$6. \int e^x \cdot dx = e^x + C$$

$$7. \int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$$

$$8. \int \cos x \cdot dx = \sin x + C$$

$$9. \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \tan x + C$$

$$10. \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx = -\cot x + C$$

$$11. \int k f'(x) \cdot dx = k \cdot f(x) + C$$

$$12. \int f^n(x) \cdot f'(x) \cdot dx = \frac{1}{n+1} f^{n+1}(x) + C$$

$$13. \int f'(x) \cdot e^{f(x)} \cdot dx = e^{f(x)} + C$$

$$14. \int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \ln |f(x)| + C$$

$$15. \int \frac{f'(x)}{f^n(x)} \cdot dx = -\frac{1}{(n-1)f^{n-1}(x)} + C$$

$$16. \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} \cdot dx = -\frac{1}{f(x)} + C$$

$$17. \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} \cdot dx = 2\sqrt{f(x)} + C$$

$$18. \int \sin[f(x)] \cdot f'(x) \cdot dx = -\cos[f(x)] + C$$

$$19. \int \cos[f(x)] \cdot f'(x) \cdot dx = \sin[f(x)] + C$$

$$20. \int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]} \cdot dx = \tan[f(x)] + C$$

$$21. \int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)} \cdot dx = -\cot[f(x)] + C$$

♦ រូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

$$\int f(x) \cdot g'(x) \cdot dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x) \cdot dx$$

លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

1-បង្ហាញថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ដែល

ក. $F(x) = -7x + 4$ និង $f(x) = -7$

ខ. $F(x) = 3x^3 - 7x$ និង $f(x) = 9x^2 - 7$

គ. $F(x) = 3e^{x^2-1} - 7$ និង $f(x) = 6xe^{x^2-1}$

ឃ. $F(x) = \ln(e^{3x} - x) + \sqrt{11}$ និង $f(x) = \frac{3e^{3x} - 1}{e^{3x} - x}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

ក. $F(x) = -7x + 4$ និង $f(x) = -7$

គេមាន $F'(x) = -7 = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $F(x) = -7x + 4$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x) = -7$ ។

ខ. $F(x) = 3x^3 - 7x$ និង $f(x) = 9x^2 - 7$

គេមាន $F'(x) = 9x^2 - 7 = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $F(x) = 3x^3 - 7x$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x) = 9x^2 - 7$ ។

គ. $F(x) = 3e^{x^2-1} - 7$ និង $f(x) = 6xe^{x^2-1}$

គេមាន $F'(x) = 6xe^{x^2-1} = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $F(x) = 3e^{x^2-1} - 7$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x) = 6xe^{x^2-1}$ ។

ឃ. $F(x) = \ln(e^{3x} - x) + \sqrt{11}$ និង $f(x) = \frac{3e^{3x} - 1}{e^{3x} - x}$

គេមាន $F'(x) = \frac{(e^{3x} - x)'}{e^{3x} - x} = \frac{3e^{3x} - 1}{e^{3x} - x} f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $F(x) = \ln(e^{3x} - x) + \sqrt{11}$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x) = \frac{3e^{3x} - 1}{e^{3x} - x}$

2-រកព្រីមីទីវ $F(x)$ នៃ $f(x)$ កំណត់និងជាប់លើចន្លោះ I ដោយ

ក. $f(x) = 5$, $I = \mathbb{R}$ ខ. $f(x) = -4x + 3$, $I = \mathbb{R}$

គ. $f(x) = -x^2 + 3x + 5$, $I = \mathbb{R}$

ឃ. $f(x) = \frac{2}{x}$; $I = (0, +\infty)$

ង. $f(x) = \frac{1}{3x+2}$, $I = (-\frac{2}{3}, +\infty)$

ច. $f(x) = \frac{x}{x^2+5}$ ឆ. $f(x) = e^{3x-2}$

ជ. $f(x) = xe^{x^2}$, $I = \mathbb{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកព្រឹត្តិប័ណ្ណ $F(x)$ នៃ $f(x)$

ក. $f(x) = 5$, $I = \mathbb{R}$

តាមនិយមន័យគេបាន $F'(x) = f(x) = 5$

គេទាញ $F(x) = \int 5dx = 5x + C$, $C \in \mathbb{R}$

ខ. $f(x) = -4x + 3$, $I = \mathbb{R}$

តាមនិយមន័យគេបាន $F'(x) = f(x) = -4x + 3$

គេទាញ $F(x) = \int (-4x + 3)dx = -2x^2 + 3x + C$, $C \in \mathbb{R}$

គ. $f(x) = -x^2 + 3x + 5$, $I = \mathbb{R}$

តាមនិយមន័យគេបាន $F'(x) = f(x) = -x^2 + 3x + 5$

គេទាញ

$$F(x) = \int (-x^2 + 3x + 5).dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 5x + C$$
 , $C \in \mathbb{R}$

ឃ. $f(x) = \frac{2}{x}$; $I = (0, +\infty)$

តាមនិយមន័យគេបាន $F'(x) = f(x) = \frac{2}{x}$

គេទាញ $F(x) = \int \frac{2}{x} dx = 2 \ln x + C$, $C \in \mathbb{R}$

ង. $f(x) = \frac{1}{3x+2}$, $I = (-\frac{2}{3}, +\infty)$

តាមនិយមន័យគេបាន $F'(x) = f(x) = \frac{1}{3x+2}$

គេទាញ $F(x) = \int \frac{1}{3x+2} dx = \frac{1}{3} \ln(3x+2) + C$, $C \in \mathbb{R}$

ច. $f(x) = \frac{x}{x^2+5}$

តាមនិយមន័យគេបាន $F'(x) = f(x) = \frac{x}{x^2+5}$

គេទាញ $F(x) = \int \frac{x}{x^2+5} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+5) + C$, $C \in \mathbb{R}$

ឆ. $f(x) = e^{3x-2}$

តាមនិយមន័យគេបាន $F'(x) = f(x) = e^{3x-2}$

គេទាញ $F(x) = \int e^{3x-2} dx = \frac{1}{3} e^{3x-2} + C$, $C \in \mathbb{R}$

ជ. $f(x) = xe^{x^2}$, $I = \mathbb{R}$

តាមនិយមន័យគេបាន $F'(x) = f(x) = xe^{x^2}$

គេទាញ $F(x) = \int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$ ។

3-រកព្រឹត្តិប័ណ្ណ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ f ដែលកំណត់ដោយ

$$ក.f(x) = \frac{3}{\cos^2 x} \quad \text{និង} \quad F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$ខ.f(x) = x^2 - x \quad \text{និង} \quad F(0) = 1$$

$$គ.f(x) = x^2 - e^x \quad \text{និង} \quad F(0) = 1$$

$$ឃ.f(x) = x^2 - xe^{x^2} \quad \text{និង} \quad F(0) = 1$$

ដំណោះស្រាយ

រកព្រឹត្តិប័ណ្ណ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ f ដែលកំណត់ដោយ

$$ក.f(x) = \frac{3}{\cos^2 x} \quad \text{និង} \quad F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$តេបាទ $F'(x) = f(x) = \frac{3}{\cos^2 x}$$$

$$តេទាញ $F(x) = \int \frac{3}{\cos^2 x} dx = 3 \tan x + C$$$

$$\text{បើ } x = \frac{\pi}{4} \text{ នោះ } F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \tan \frac{\pi}{4} + C = -1 \Rightarrow C = -4$$

$$\text{ដូចនេះ } F(x) = 3 \tan x - 4 \quad \text{។}$$

$$ខ.f(x) = x^2 - x \text{ និង } F(0) = 1$$

$$\text{គេបាន } F'(x) = f(x) = x^2 - x$$

$$\text{គេទាញ } F(x) = \int (x^2 - x)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\text{បើ } x = 0 \text{ នោះ } F(0) = C = 1$$

$$\text{ដូចនេះ } F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1 \quad \forall$$

$$គ.f(x) = x^2 - e^x \text{ និង } F(0) = 1$$

$$\text{គេបាន } F'(x) = f(x) = x^2 - e^x$$

$$\text{គេទាញ } F(x) = \int (x^2 - e^x)dx = \frac{1}{3}x^3 - e^x + C$$

$$\text{បើ } x = 0 \text{ នោះ } F(0) = -1 + C = 1 \Rightarrow C = 2$$

$$\text{ដូចនេះ } F(x) = \frac{1}{3}x^3 - e^x + 2 \quad \forall$$

$$ឃ.f(x) = x^2 - xe^{x^2} \text{ និង } F(0) = 1$$

$$\text{គេបាន } F'(x) = f(x) = x^2 - xe^{x^2}$$

$$\text{គេទាញ } F(x) = \int (x^2 - xe^{x^2})dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

$$\text{បើ } x = 0 \text{ នោះ } F(0) = -\frac{1}{2} + C = 1 \Rightarrow C = \frac{3}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ } F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{3}{2} \quad \forall$$

4-រកព្រឹមទី១ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ f ដែលកំណត់ដោយ

ក. $f(x) = \sin x$ និង $F(0) = 3$

ខ. $f(x) = x - e^x$ និង $F(1) = 1 - e$

គ. $f(x) = \frac{x}{(x^2 - 4)^3}$ និង $F(5) = 3$

ឃ. $f(x) = \sin x \cos^3 x$ និង $F(\frac{\pi}{4}) = 16$

ដំណោះស្រាយ

រកព្រឹមទី១ $F(x)$ នៃអនុគមន៍ f ដែលកំណត់ដោយ

ក. $f(x) = \sin x$ និង $F(0) = 3$

គេបាន $F'(x) = f(x) = \sin x$

គេទាញ $F(x) = \int \sin x dx = -\cos x + C$

បើ $x = 0$ នោះ $F(0) = -1 + C = 3 \Rightarrow C = 4$

ដូចនេះ $F(x) = -\cos x + 4$ ។

$$2.f(x) = x - e^x \text{ និង } F(1) = 1 - e$$

$$\text{គេបាន } F'(x) = f(x) = x - e^x$$

$$\text{គេទាញ } F(x) = \int (x - e^x) dx = \frac{1}{2}x^2 - e^x + C$$

$$\text{បើ } x = 1 \text{ នោះ } F(1) = \frac{1}{2} - e + C = 1 - e \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\text{ដូចនេះ } F(x) = \frac{1}{2}x^2 - e^x + \frac{1}{2} \quad \text{។}$$

$$3.f(x) = \frac{x}{(x^2 - 4)^3} \text{ និង } F(5) = 3$$

$$\text{គេបាន } F'(x) = f(x) = \frac{x}{(x^2 - 4)^3}$$

$$\text{គេទាញ } F(x) = \int \frac{x}{(x^2 - 4)^3} \cdot dx$$

$$\text{តាង } u = x^2 - 4 \Rightarrow du = 2x dx$$

$$\text{គេបាន } F(x) = \frac{1}{2} \int u^{-3} du = -\frac{1}{4}u^{-2} + C$$

$$\text{ឬ } F(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x^2 - 4)^2} + C$$

$$\text{បើ } x = 5 \text{ នោះ } F(5) = -\frac{1}{1764} + C = 3 \Rightarrow C = \frac{5293}{1764}$$

$$\text{ដូចនេះ } F(x) = -\frac{1}{4(x^2 - 4)^2} + \frac{5293}{1764} \quad \text{។}$$

$$\text{ឃ. } f(x) = \sin x \cos^3 x \text{ និង } F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 16$$

$$\text{តេបាន } F'(x) = f(x) = \sin x \cos^3 x$$

$$\text{តេទាញ } F(x) = \int \sin x \cos^3 x dx = -\frac{1}{4} \cos^4 x + C$$

$$\text{បើ } x = \frac{\pi}{4} \text{ នោះ } F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{16} + C = 16 \Rightarrow C = \frac{257}{16}$$

$$\text{ដូចនេះ } F(x) = -\frac{1}{4} \cos^4 x + \frac{257}{16} \quad \text{។}$$

5-គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\text{ក. } \int (2x^3 - 5x^2 + 3x + 1)dx$$

$$\text{ខ. } \int \left(5 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$\text{គ. } \int 2^4 \sqrt{x}.dx$$

$$\text{ឃ. } \int \left(\frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right)dx$$

$$\text{ង. } \int (x^2 - 1)\sqrt{x}.dx$$

$$\text{ច. } \int \left(2e^x + \frac{6}{x} - \ln 5\right)dx$$

$$\text{ឆ. } \int \frac{4x^4 - 3x^5 + 1}{x^4} dx$$

$$\text{ជ. } \int \frac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x}}.dx$$

$$\text{ឈ. } \int (3 \sin x + 5 \cos x)dx$$

$$\text{ញ. } \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{4}{\cos^2 x} - 5\right)dx$$

$$\text{ដ. } \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1}.dx$$

$$\text{ប. } \int (1 - e^x)^2 dx$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\begin{aligned} \text{ក.} \int (2x^3 - 5x^2 + 3x + 1)dx \\ &= 2 \int x^3 dx - 5 \int x^2 dx + 3 \int x dx + \int dx \\ &= \frac{1}{2} x^4 - \frac{5}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ខ.} \int (5 - \frac{1}{\sqrt{x}})dx \\ &= 5 \int dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= 5x - 2\sqrt{x} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{គ.} \int 2\sqrt[4]{x}.dx \\ &= 2 \int x^{\frac{1}{4}} dx = \frac{8}{5} x^{\frac{5}{4}} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ឃ.} \int (\frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^5})dx \\ &= 3 \int x^{-4} dx + \int x^{-5} dx = -x^{-3} - \frac{1}{4} x^{-4} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ង.} \int (x^2 - 1)\sqrt{x}.dx \\ &= \int x^{\frac{5}{2}} dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ថ.} \int (2e^x + \frac{6}{x} - \ln 5) dx \\
 &= 2 \int e^x + 6 \int \frac{dx}{x} - \ln 5 \int dx \\
 &= 2e^x + 6 \ln |x| - x \ln 5 + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ឆ.} \int \frac{4x^4 - 3x^5 + 1}{x^4} dx \\
 &= 4 \int dx - 3 \int x dx + \int x^{-4} dx \\
 &= 4x - \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^{-3} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ជ.} \int \frac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x}} dx \\
 &= 3 \int x^{\frac{3}{2}} dx - 2 \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{6}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ឈ.} \int (3 \sin x + 5 \cos x) dx \\
 &= 3 \int \sin x dx + 5 \int \cos x dx \\
 &= -3 \cos x + 5 \sin x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ញ.} \int (\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{4}{\cos^2 x} - 5) dx \\
 &= -\cot x + 4 \tan x - 5x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ដ.} \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} \cdot dx \\
 &= \int \frac{(e^x + 1)(e^{2x} - e^x + 1)}{e^x + 1} \cdot dx \\
 &= \int (e^{2x} - e^x + 1) dx \\
 &= \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ប.} \int (1 - e^x)^2 dx \\
 &= \int (1 - 2e^x + e^{2x}) \cdot dx \\
 &= \int dx - 2 \int e^x dx + \int e^{2x} dx \\
 &= x - 2e^x + \frac{1}{2} e^{2x} + C
 \end{aligned}$$

$$\text{ឡ.} \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} \cdot dx = 4 \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x} dx = -\frac{2}{\sin 2x} + C$$

$$\text{ឆ.} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = 4 \int \frac{dx}{\sin^2 2x} = -2 \cot 2x + C$$

6-គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម

$$\text{ក.} \int 3e^{3x} dx$$

$$\text{ខ.} \int 2xe^{x^2} dx$$

$$\text{គ.} \int 5e^{4-5x} dx$$

$$\text{ឃ.} \int (6x-7)e^{3x^2-7x} dx$$

$$\text{ង.} \int (3x^2-2x+1)e^{x^3-x^2+x} dx \quad \text{ច.} \int \cos x e^{\sin x} dx$$

$$\text{ឆ.} \int xe^{x^2} dx$$

$$\text{ជ.} \int 6x^2 e^{x^3} dx$$

$$\text{ឈ.} \int (x+1)e^{x^2+2x} dx$$

$$\text{ញ.} \int \frac{2}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}} dx$$

ដំណោះស្រាយ

$$\text{ក.} \int 3e^{3x} dx = \int e^{3x} \cdot (3x)' dx = e^{3x} + C$$

$$\text{ខ.} \int 2xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} \cdot (x^2)' dx = e^{x^2} + C$$

$$\text{គ.} \int 5e^{4-5x} dx = -\int e^{4-5x} (4-5x)' dx = -e^{4-5x} + C$$

$$\begin{aligned} \text{ឃ.} \int (6x-7)e^{3x^2-7x} dx &= \int e^{3x^2-7x} (3x^2-7x)' dx \\ &= e^{3x^2-7x} + C \end{aligned}$$

$$ង. \int (3x^2 - 2x + 1)e^{x^3 - x^2 + x} dx$$

$$= \int e^{x^3 - x^2 + x} (x^3 - x^2 + x)' dx$$

$$= e^{x^3 - x^2 + x} + C$$

$$ឆ. \int \cos x e^{\sin x} dx$$

$$= \int e^{\sin x} (\sin x)' dx = e^{\sin x} + C$$

$$ឈ. \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} (x^2)' dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$ជ. \int 6x^2 e^{x^3} dx = 2 \int e^{x^3} (x^3)' dx = 2e^{x^3} + C$$

$$ណ. \int (x+1)e^{x^2+2x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int e^{x^2+2x} (x^2+2x)' dx = \frac{1}{2} e^{x^2+2x} + C$$

$$ញ. \int \frac{2}{\sqrt{x} e^{\sqrt{x}}} dx = -4 \int (-\sqrt{x})' e^{-\sqrt{x}} dx$$

$$= -4e^{-\sqrt{x}} + C$$

7-គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\text{ក.} \int x e^{-x} dx$$

$$\text{ខ.} \int x e^{\frac{x}{2}} dx$$

$$\text{គ.} \int (1-x)e^x dx$$

$$\text{ឃ.} \int (3-2x)e^{-x} dx$$

$$\text{ង.} \int x \ln 2x \cdot dx$$

$$\text{ច.} \int x \ln x^2 dx$$

$$\text{ឆ.} \int x e^{-\frac{x}{5}} dx$$

$$\text{ជ.} \int x e^{0.1x} dx$$

$$\text{ណ.} \int x \sqrt{x-6} \cdot dx$$

$$\text{ញ.} \int x \sqrt{1-x} dx$$

$$\text{ដ.} \int x(x+1)^8 dx$$

$$\text{ប.} \int (x+1)(x+2)^6 dx$$

$$\text{ឡ.} \int \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$$

$$\text{ឈ.} \int \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$$

$$\text{ណ.} \int x^2 e^{-x} dx$$

$$\text{ត.} \int x^2 e^{3x} dx$$

$$\text{ថ.} \int x^3 e^x dx$$

$$\text{ទ.} \int x^3 e^{2x} dx$$

$$\text{ធ.} \int x^2 \ln x \cdot dx$$

$$\text{ន.} \int x(\ln x)^2 dx$$

$$\text{ប.} \int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$\text{ដ.} \int \frac{\ln x}{x^3} \cdot dx$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$\text{ក.} \int x e^{-x} dx$$

$$\text{តាង } f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

$$g'(x) = e^{-x} \Rightarrow g(x) = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

$$\text{តាមរូបមន្ត } \int f(x).g'(x)dx = f(x).g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

$$\text{គេបាន } \int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx$$

$$= -x e^{-x} - e^{-x} + C$$

$$= -(x+1)e^{-x} + C$$

$$\text{ខ.} \int x e^{\frac{x}{2}} dx = 2x e^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} + C$$

$$\text{គ.} \int (1-x)e^x dx = (2-x)e^x + C$$

$$\text{ឃ.} \int (3-2x)e^{-x} dx = (2x-1)e^{-x} + C$$

$$\text{ង.} \int x \ln 2x \cdot dx = \frac{1}{2} x^2 \ln 2x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\text{ច.} \int x \ln x^2 dx = \frac{x^2}{2} (\ln x^2 - 1) + C$$

$$\text{ឆ.} \int x e^{-\frac{x}{5}} dx = -5(x+5)e^{-\frac{x}{5}} + C$$

$$\text{ជ.} \int x e^{0.1x} dx = 10(x - 10)e^{0.1x} + C$$

$$\text{ឈ.} \int x \sqrt{x - 6} \cdot dx = \frac{2}{3} x(x - 6)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} (x - 6)^{\frac{5}{2}} + C$$

$$\text{ញ.} \int x \sqrt{1 - x} dx = -\frac{2}{3} x(1 - x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} (1 - x)^{\frac{5}{2}} + C$$

$$\text{ដ.} \int x(x + 1)^8 dx = \frac{1}{10} (x + 1)^{10} - \frac{1}{9} (x + 1)^9 + C$$

$$\text{ប.} \int (x + 1)(x + 2)^6 dx = \frac{(x + 2)^8}{8} - \frac{(x + 2)^7}{7} + C$$

$$\text{ឡ.} \int \frac{x}{\sqrt{x + 2}} dx = 2x\sqrt{x + 2} - \frac{4}{3} \sqrt{(x + 2)^3} + C$$

$$\text{ឆ.} \int \frac{x}{\sqrt{2x + 1}} dx = -\frac{1}{3} (2x + 1)^{\frac{3}{2}} + x(2x + 1)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\text{ណ.} \int x^2 e^{-x} dx = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C$$

$$\text{ត.} \int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3} (x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{2}{9}) e^{3x} + C$$

$$\text{ថ.} \int x^3 e^x dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$$

$$\text{ទ.} \int x^3 e^{2x} dx = \frac{1}{2} (x^3 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{2} x - \frac{3}{4}) e^{2x} + C$$

$$\text{ធ.} \int x^2 \ln x \cdot dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

$$\text{ស.} \int x(\ln x)^2 dx = \frac{x^2}{2} \left[(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2} \right] + C$$

$$\text{ប. } \int \frac{\ln x}{x^2} = -\frac{1 + \ln x}{x} + C$$

$$\text{ផ. } \int \frac{\ln x}{x^3} dx = -\frac{2 \ln x + 1}{4x^2} + C \quad \text{។}$$

មេរៀនទី២

រំលងគ្រោលកំណត់

♦ **រូបមន្តរំលងគ្រោលកំណត់**

រំលងគ្រោលកំណត់ពី a ទៅ b នៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ គឺជាកំណើន
នៃអនុគមន៍ប្រើមីទ័រ $F(x)$ ដែលត្រូវនឹងកំណើននៃ x ពី a ទៅ b ។

$$\text{គេកំណត់សរសេរ } \int_a^b f(x).dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{។}$$

♦ **លក្ខណៈ**

$$1. \int_a^b k.f(x).dx = k \int_a^b f(x).dx$$

$$2. \int_a^b f(x).dx = - \int_b^a f(x).dx$$

$$3. \int_a^a f(x).dx = 0$$

$$4. \int_a^b [f(x) + g(x) - h(x)].dx = \int_a^b f(x).dx + \int_a^b g(x).dx - \int_a^b h(x).dx$$

$$5. \int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx = \int_a^b f(x).dx \quad \text{ដែល } a \leq c \leq b \quad \text{។}$$

♦ **រូបមន្តរំលងគ្រោលដោយផ្នែក**

$$\int_a^b f(x).g'(x).dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b g(x).f'(x).dx \quad \text{។}$$

លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

1-គណនាតម្លៃនៃ

$$\text{ក. } \int_1^2 f(x).dx + \int_2^1 f(x).dx$$

$$\text{ខ. } \int_1^1 \frac{f(x)}{3}.dx$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ

$$\text{ក. } \int_1^2 f(x).dx + \int_2^1 f(x).dx$$

$$= \int_1^2 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx = 0$$

$$\text{ខ. } \int_1^1 \frac{f(x)}{3}.dx = \frac{1}{3} \int_1^1 f(x).dx = 0$$

2- គេមាន f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់ហើយ $\int_1^2 f(x)dx = -4$

$$\int_2^5 f(x)dx = 6 \quad \text{និង} \quad \int_1^5 g(x)dx = 8 \quad \text{។ គណនា}$$

$$\text{ក. } \int_1^5 f(x)dx \qquad \text{ខ. } \int_5^1 [-4f(x)].dx$$

$$\text{គ. } \int_1^5 [4f(x) - 2g(x)].dx$$

ដំណោះស្រាយ

គណនា

$$\text{ក. } \int_1^5 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx = -4 + 6 = 2$$

$$\text{ខ. } \int_5^1 [-4f(x)].dx = 4 \int_1^5 f(x)dx = 4 \times 2 = 8$$

$$\begin{aligned} \text{គ. } \int_1^5 [4f(x) - 2g(x)].dx \\ &= 4 \int_1^5 f(x)dx - 2 \int_1^5 g(x).dx \\ &= 8 - 2(8) = -8 \end{aligned}$$

$$3\text{-ចូរគណនាតម្លៃនៃ } k \text{ បើ } \int_1^k \frac{1}{\sqrt{2x-1}} dx = 2 \quad \text{។}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ k

$$\text{គេបាន } \int_1^k \frac{1}{\sqrt{2x-1}} dx = 2$$

$$\left[\sqrt{2x-1} \right]_1^k = 2$$

$$\sqrt{2k-1} - 1 = 2$$

$$\sqrt{2k-1} = 3 \Rightarrow k = 5$$

ដូចនេះ $K = 5$ ។

4-គណនា

$$\text{ក.} \int_1^1 (3x^2 + 1)dx$$

$$\text{ខ.} \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - 3 \right) .dx$$

$$\text{គ.} \int_4^9 \frac{2}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{ឃ.} \int_2^4 \sqrt{x-2} .dx$$

$$\text{ង.} \int_2^4 \sqrt[3]{x-2} .dx$$

$$\text{ច.} \int_{-4}^0 \frac{1}{\sqrt{4-x}} .dx$$

$$\text{ឆ.} \int_5^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} .dx$$

$$\text{ជ.} \int_1^3 5x(x^2 - 7)^3 dx$$

$$\text{ណ.} \int_0^2 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} .dx$$

$$\text{ញ.} \int_1^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 4x + 1}} .dx$$

$$\text{ដ.} \int_1^4 \left(\frac{3 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) .dx$$

$$\text{ប.} \int_0^1 (3x^2 - 2x)^2 .dx$$

$$\text{ឡ.} \int_0^4 \left[\frac{x+1}{(x^2 + 2x + 2)^3} \right] .dx$$

ដំណោះស្រាយ

$$\text{ក.} \int_1^1 (3x^2 + 1)dx = [x^3 + x]_1^1 = 0$$

$$\text{ខ.} \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - 3 \right) .dx = \left[-\frac{1}{x} - 3x \right]_1^2 = \left(-\frac{13}{2} \right) - (-4) = -\frac{5}{2}$$

$$\text{គ.} \int_4^9 \frac{2}{\sqrt{x}} dx = \left[4\sqrt{x} \right]_4^9 = 12 - 8 = 4$$

$$\text{ឃ.} \int_2^4 \sqrt{x-2} \cdot dx = \left[\frac{2}{3} (x-2)^{\frac{3}{2}} \right]_2^4 = \frac{2}{3} \sqrt{8} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{ង.} \int_2^4 \sqrt[3]{x-2} \cdot dx = \left[\frac{3}{4} (x-2)^{\frac{4}{3}} \right]_2^4 = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

$$\text{ច.} \int_{-4}^0 \frac{1}{\sqrt{4-x}} \cdot dx = \left[-2\sqrt{4-x} \right]_{-4}^0 = -4 + 4\sqrt{2}$$

$$\text{ឆ.} \int_5^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \cdot dx = \left[\frac{2}{3} \sqrt{3x+1} \right]_5^1 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{ជ.} \int_1^3 5x(x^2-7)^3 dx = \left[\frac{5}{8} (x^2-7)^4 \right]_1^3 = 10 - 810 = -800$$

$$\text{ឈ.} \int_0^2 3x^2 \sqrt{x^3+1} \cdot dx = \left[\frac{2}{3} (x^3+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = 18 - \frac{2}{3} = \frac{52}{3}$$

$$\text{ញ.} \int_1^2 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}} \cdot dx = \left[\sqrt{x^2+4x+1} \right]_1^2 = \sqrt{13} - \sqrt{6}$$

$$\text{ដ.} \int_1^4 \left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) \cdot dx = \left[6\sqrt{x} - x \right]_1^4 = 8 - 5 = 3$$

$$\text{ប.} \int_0^1 (3x^2 - 2x)^2 \cdot dx = \frac{2}{15}$$

$$\text{ឡ.} \int_0^4 \left[\frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3} \right] \cdot dx = \frac{21}{338}$$

5-គណនា

$$\text{ក.} \int_1^2 3e^{4x} \cdot dx$$

$$\text{ខ.} \int_0^1 4x^3 e^{2x^4} \cdot dx$$

$$\text{គ.} \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot dx$$

$$\text{ឃ.} \int_1^3 3e^{2x} (e^{-2x} + 1) \cdot dx$$

$$\text{ង.} \int_0^1 \frac{dx}{2 + 3x}$$

ដោះស្រាយ

$$\text{ក.} \int_1^2 3e^{4x} \cdot dx = \left[\frac{3}{4} e^{4x} \right]_1^2 = \frac{3}{4} (e^4 - 1)e^4$$

$$\text{ខ.} \int_0^1 4x^3 e^{2x^4} \cdot dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x^4} \right]_0^1 = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$$

$$\text{គ.} \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot dx = \left[2e^{\sqrt{x}} \right]_1^4 = 2(e^2 - e)$$

$$\text{ឃ.} \int_1^3 3e^{2x} (e^{-2x} + 1) \cdot dx = 6 - \frac{3}{2} e^6 + \frac{3}{2} e^2$$

$$\begin{aligned} \text{ង.} \int_0^1 \frac{dx}{2 + 3x} &= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{(2 + 3x)'}{2 + 3x} \cdot dx \\ &= \frac{1}{3} [\ln(2 + 3x)]_0^1 = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{2} \quad \text{។} \end{aligned}$$

6-គណនា

$$\text{ក.} \int_0^1 \frac{2x^2}{1+2x^3} \cdot dx$$

$$\text{ខ.} \int_1^{\ln 2} \frac{e^x}{4e^x - 2} \cdot dx$$

$$\text{គ.} \int_0^2 \frac{x}{1+x^2} \cdot dx$$

$$\text{ឃ.} \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} \cdot dx$$

$$\text{ង.} \int_0^1 x e^{2x^2} \cdot dx$$

$$\text{ច.} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot dx$$

$$\text{ឆ.} \int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{2x} \cdot dx$$

$$\text{ជ.} \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} \cdot dx$$

ដំណោះស្រាយ

$$\text{ក.} \int_0^1 \frac{2x^2}{1+2x^3} \cdot dx = \left[\frac{1}{3} \ln(1+2x^3) \right]_0^1 = \frac{1}{3} \ln 3$$

$$\text{ខ.} \int_1^{\ln 2} \frac{e^x}{4e^x - 2} \cdot dx = \left[\frac{1}{4} \ln(4e^x - 2) \right]_1^{\ln 2} = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{3}{2e-1} \right)$$

$$\text{គ.} \int_0^2 \frac{x}{1+x^2} \cdot dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_0^2 = \frac{1}{2} \ln 5$$

$$\text{ឃ.} \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} \cdot dx = \left[\frac{1}{3} (\ln x)^3 \right]_1^e = \frac{1}{3}$$

$$\text{ង.} \int_0^1 x e^{2x^2} \cdot dx = \left[\frac{1}{4} e^{2x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{4} (e^2 - 1) \quad \text{។}$$

$$\text{ច.} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot dx = [-\ln \cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\ln \frac{1}{2} = \ln 2$$

$$\text{ឆ.} \int_1^e \frac{(1 + \ln x)^2}{2x} \cdot dx = \left[\frac{1}{6} (1 + \ln x)^3 \right]_1^e = \frac{7}{6}$$

$$\text{ជ.} \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} \cdot dx = [\ln(\ln x)]_e^{e^2} = \ln 2$$

7-សហគ្រាសមួយទទួលបានប្រាក់ចំណូលបន្ថែមពីការលក់ផលិតផល
ប្រើប្រាស់ចំនួន t គ្រឿង ។

បើអត្រានៃចំណូលបន្ថែមកំណត់ដោយអនុគមន៍ $R'(x) = 180 + 0.2t$
(គិតជាពាន់រៀល) ក្នុងមួយគ្រឿង ។

រកបម្រែបម្រួលនៃប្រាក់ចំណូលក្នុងការលក់កើនឡើងពីចំនួន 30គ្រឿង
ទៅ 40 គ្រឿង ?

ដំណោះស្រាយ

រកបម្រែបម្រួលនៃប្រាក់ចំណូល

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \Delta R &= \int_{30}^{40} (180 + 0.2t) \cdot dt \\ &= [180t + 0.1t^2]_{30}^{40} = 1870 \quad (\text{គិតជាពាន់រៀល}) \end{aligned}$$

1-គណនាអាំងតេក្រាល

$$\begin{aligned} I &= \int (12x^5 + 5x^4 - 9x^2 + 4x + 7) \cdot dx \\ &= 12 \int x^5 \cdot dx + 5 \int x^4 dx - 9 \int x^2 \cdot dx + 4 \int x dx + 7 \int dx \\ &= 12 \left(\frac{1}{6} x^6 \right) + 5 \left(\frac{1}{5} x^5 \right) - 9 \left(\frac{1}{3} x^3 \right) + 4 \left(\frac{1}{2} x^2 \right) + 7x + c \\ &= 2x^6 + x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 7x + c \end{aligned}$$

ដូចនេះ $I = 2x^6 + x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 7x + c$

2-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{4x^7 - 5x^4 + 1}{x^2} \cdot dx$

$$\begin{aligned} &= \int \left(4x^5 - 5x^2 + \frac{1}{x^2} \right) \cdot dx \\ &= \int 4x^5 \cdot dx - \int 5x^2 \cdot dx + \int \frac{1}{x^2} \cdot dx \\ &= 4 \int x^5 \cdot dx - 5 \int x^2 \cdot dx + \int \frac{1}{x^2} \cdot dx \\ &= 4 \left(\frac{1}{6} x^6 \right) - 5 \left(\frac{1}{3} x^3 \right) + \left(-\frac{1}{x} \right) + c \\ &= \frac{2}{3} x^6 - \frac{5}{3} x^3 - \frac{1}{x} + c \end{aligned}$$

ដូចនេះ $I = \frac{2}{3}x^6 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{x} + c$

3_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{x^7 - 4x^5 + 1}{x} .dx$

$$= \int \left(x^6 - 4x^4 + \frac{1}{x} \right) .dx$$
$$= \int x^6 .dx - 4 \int x^4 .dx + \int \frac{1}{x} .dx$$
$$= \frac{1}{7}x^7 - \frac{4}{5}x^5 + \ln|x| + c$$

4_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} .dx$

$$= \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) .dx$$
$$= \int x^{\frac{1}{2}} .dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} .dx$$
$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x} + c$$

ដូចនេះ $I = \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} .dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + c$

5_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (\sin x + \cos x)^2 .dx$

$$= \int (\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x).dx$$

$$= \int (1 + \sin 2x).dx$$

$$= \int dx + \int \sin 2x.d x$$

$$= x - \frac{1}{2} \cos 2x + c$$

6-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{2 \cos^3 x + 1}{\cos^2 x}.dx$

$$= \int \left(2 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} \right).dx$$

$$= 2 \int \cos x.d x + \int \frac{1}{\cos^2 x}.dx$$

$$= 2 \sin x + \tan x + c$$

ដូចនេះ: $I = 2 \sin x + \tan x + c$

7-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \sin^2 x.d x$

$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right).dx$$

$$= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x.d x$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

$$\begin{aligned} 8_គណនាអាំងតេក្រាល \quad I &= \int \cos^2 x \cdot dx \\ &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) \cdot dx \\ &= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \cdot dx \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \cdot \sin 2x + c \end{aligned}$$

ដូចនេះ:

$$I = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$\begin{aligned} 9_គណនាអាំងតេក្រាល \quad I &= \int (\tan x + \cot x)^2 \cdot dx \\ &= \int (\tan^2 x + 2 \tan x \cot x + \cot^2 x) \cdot dx \\ &= \int (\tan^2 x + 2 + \cot^2 x) \cdot dx \\ &= \int [(1 + \tan^2 x) + (1 + \cot^2 x)] \cdot dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) \cdot dx \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} \\ &= \tan x - \cot x + c \end{aligned}$$

ដូចនេះ:

$$I = \tan x - \cot x + C$$

10_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \sin x \cdot \cos 2x \cdot dx$

$$= \frac{1}{2} \int [\sin(x + 2x) + \sin(x - 2x)] \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (\sin 3x - \sin x) \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \cos 3x + \cos x \right) + c$$

ដូចនេះ: $I = -\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x + C$

11_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \cos 2x \cos 4x .dx$

$$= \frac{1}{2} \int [\cos(2x + 4x) + \cos(2x - 4x)] .dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (\cos 6x + \cos 2x) .dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} \sin 6x + \frac{1}{2} \sin 2x \right] + c$$

$$= \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

ដូច្នេះ: $I = \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2xx + C$

$$\begin{aligned}
 12_គណនាអាំងតេក្រាល \quad I &= \int \frac{2}{3x+1}.dx \\
 &= 2 \int \frac{dx}{3x+1} \\
 &= \frac{2}{3} \int \frac{(3x+1)'}{3x+1}.dx \\
 &= \frac{2}{3} \ln | 3x+1 | + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13_គណនាអាំងតេក្រាល \quad I &= \int \frac{7}{\sqrt{2x-3}}.dx \\
 &= 7 \int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}} \\
 &= 7 \sqrt{2x-3} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14_គណនាអាំងតេក្រាល \quad I &= \int \frac{10}{(x-2)^2}.dx \\
 &= 10 \int \frac{dx}{(x-2)^2} = -\frac{10}{x-2} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15_គណនាអាំងតេក្រាល \quad I &= \int \frac{dx}{4x^2-9} \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2-\frac{9}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2(\frac{3}{2})} \cdot \ln \left| \frac{x-\frac{3}{2}}{x+\frac{3}{2}} \right| + C \\
 &= \frac{1}{12} \ln \left| \frac{2x-3}{2x+3} \right| + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16_គណនាអាំងតេក្រាល \quad I &= \int \frac{dx}{x^2 + 9} \\ &= \int \frac{dx}{x^2 + 3^2} \\ &= \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17_គណនាអាំងតេក្រាល \quad I &= \int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{2^2 - x^2}} \\ &= \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18_គណនាអាំងតេក្រាល \quad I &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19_គណនាអាំងតេក្រាល \quad I &= \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} \right| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20_គណនាអាំងតេក្រាល \quad I &= \int 2^x \cdot 3^{x+1} \cdot 5^{2x} \cdot dx \\ &= \int 2^x \cdot 3^x \cdot 3 \cdot 25^x \cdot dx \\ &= 3 \int (150)^x \cdot dx \\ &= \frac{3}{\ln(150)} \cdot (150)^x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 21_គណនាអាំងតេក្រាល \quad I &= \int (4e^{2x} + 1)^2 \cdot dx \\ &= \int (16e^{4x} + 8e^{2x} + 1) \cdot dx \\ &= 16 \int e^{4x} \cdot dx + 8 \int e^{2x} \cdot dx + \int dx \\ &= 4e^{4x} + 4e^{2x} + x + C \\ &= (2e^{2x} + 1)^2 + x - 1 + C \end{aligned}$$

$$22_គណនាអាំងតេក្រាល \quad I = \int \frac{(2x+3) \cdot dx}{x^2 + 3x - 4}$$

តាង $u = x^2 + 3x - 4$ នាំឱ្យ $du = (2x + 3) \cdot dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(2x+3) \cdot dx}{x^2 + 3x - 4} \\ &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln|u| + c \\ &= \ln|x^2 + 3x - 4| + c \end{aligned}$$

23-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{(2x-3).dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

តាង $u = x^2 - 3x + 2$ នាំអោយ $du = (2x-3).dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(2x-3).dx}{\sqrt{x^2-3x+2}} \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= 2\sqrt{u} + c \\ &= 2\sqrt{x^2-3x+2} + c \end{aligned}$$

24-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{e^x dx}{(e^x + 1)^2}$

តាង $u = e^x + 1$ នាំអោយ $du = e^x .dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c \\ &= -\frac{1}{e^x + 1} + c \end{aligned}$$

25-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \sin^4 x \cos x .dx$

តាង $u = \sin x$ នាំអោយ $du = \cos x .dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^4 x \cos x .dx \\ &= \int u^4 .du = \frac{1}{5}u^5 + c = \frac{1}{5}\sin^5 x + c \end{aligned}$$

26-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} .dx$

គេមាន
$$I = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} .dx$$
$$= \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} .dx$$
$$= \int \tan^4 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$$

តាង $u = \tan x$ នាំអោយ $du = \frac{dx}{\cos^2 x}$

$$I = \int u^5 .du$$
$$= \frac{1}{5} u^5 + c$$
$$= \frac{1}{5} \tan^5 x + c$$

27-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{4x^3 .dx}{(x^4 + 1)^5}$

តាង $u = x^4 + 1$ នាំអោយ $du = 4x^3 .dx$

$$I = \int \frac{4x^3 .dx}{(x^4 + 1)^5}$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{du}{u^5} \\ &= \int u^{-5} \cdot du = -\frac{1}{4} \cdot u^{-4} + c \\ &= -\frac{1}{4} (x^4 + 1)^{-4} + c \end{aligned}$$

28. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (e^x + 2)^4 \cdot e^x dx$

តាង $u = e^x + 2$ នាំឱ្យ $du = e^x \cdot dx$

$$\begin{aligned} I &= \int (e^x + 2)^4 \cdot e^x dx \\ &= \int u^4 \cdot du = \frac{1}{5} u^5 + c \\ &= \frac{1}{5} (e^x + 2)^5 + c \end{aligned}$$

29. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \cos^3 x \cdot dx$

$$\begin{aligned} \text{តើមាន } I &= \int \cos^3 x \cdot dx \\ &= \int \cos^2 x \cdot \cos x \cdot dx \\ &= \int (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \cdot dx \end{aligned}$$

តាង $u = \sin x$ នាំឱ្យ $du = \cos x \cdot dx$

$$= \int (1 - u^2).du$$

$$= u - \frac{1}{3}u^3 + c = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$$

30-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \sin^7 x \cos^3 x .dx$

គេមាន $I = \int \sin^7 x \cos^3 x .dx$

$$= \int \sin^7 x .\cos^2 x .\cos x .dx$$

$$= \int \sin^7 x .(1 - \sin^2 x) .\cos x dx$$

តាំង $u = \sin x$ នាំអោយ $du = \cos x .dx$

$$= \int u^7 (1 - u^2) .du$$

$$= \int (u^7 - u^9) .du = \frac{1}{8}u^8 - \frac{1}{10}u^{10} + c$$

$$= \frac{1}{8}\sin^8 x - \frac{1}{10}\sin^{10} x + c$$

31-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{\sin 2x .dx}{\sqrt{3 - \sin^4 x}}$

គេមាន $I = \int \frac{\sin 2x .dx}{\sqrt{3 - \sin^4 x}}$

$$= \int \frac{2 \sin x \cos x .dx}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sin^2 x)^2}}$$

$$\text{តាង } u = \sin^2 x \text{ នាំអោយ } du = 2 \sin x \cos x \cdot dx$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - u^2}}$$

$$= \arcsin\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + c = \arcsin\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$32\text{-គណនាអាំងតេក្រាល } I = \int \frac{x^3 - 2x}{(x-1)^4} \cdot dx$$

$$I = \int \frac{x^3 - 2x}{(x-1)^4} \cdot dx \text{ តាង } u = x - 1$$

$$\text{នាំអោយ } \begin{cases} x = u + 1 \\ dx = du \end{cases}$$

$$= \int \frac{(u+1)^3 - 2(u+1)}{u^4} \cdot du$$

$$= \int \frac{u^3 + 3u^2 + 3u + 1 - 2u - 2}{u^4} \cdot du$$

$$= \int \frac{u^3 + 3u^2 + u - 1}{u^4} \cdot du$$

$$= \int \left(\frac{1}{u} + 3 \cdot \frac{1}{u^2} + u^{-3} - u^{-4} \right) \cdot du$$

$$= \ln|u| - \frac{3}{u} - \frac{1}{2}u^{-2} + \frac{1}{3}u^{-3} + c$$

$$= \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{2}(x-1)^{-2} + \frac{1}{3}(x-1)^{-3} + c$$

33-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{(\cos x - \sin x).dx}{1 + \sin 2x}$

គេមាន
$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(\cos x - \sin x).dx}{1 + \sin 2x} \\ &= \int \frac{(\cos x - \sin x).dx}{\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x} \\ &= \int \frac{(\cos x - \sin x).dx}{(\sin x + \cos x)^2} \end{aligned}$$

តាំង $u = \sin x + \cos x$ នាំអោយ $du = (\cos x - \sin x).dx$

$$= \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{\sin x + \cos x} + c$$

34-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.dx$

តាំង $u = \sqrt{x}$ នាំអោយ $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}.dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.dx \\ &= \int \sin u.du = -\cos u + c \\ &= -\cos \sqrt{x} + c \end{aligned}$$

35-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \cos(\sin x). \cos x dx$

តាំង $u = \sin x$ នាំអោយ $du = \cos x.dx$

$$I = \int \cos(\sin x). \cos x dx$$

$$= \int \cos u \cdot du = \sin u + c$$

$$= \sin(\sin x) + c$$

36_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{5x^9 \cdot dx}{1+x^5}$

តាំង $u = 1+x^5$ នាំអោយ $du = 5x^4 \cdot dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{[(1+x^5)-1] \cdot 5x^4 \cdot dx}{1+x^5} \\ &= \int \frac{(u-1) \cdot du}{u} = \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) \cdot du = u - \ln|u| + c \\ &= (1+x^5) - \ln|1+x^5| + c \end{aligned}$$

37_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{4x^7 \cdot dx}{(1+x^4)^2}$

តាំង $u = 1+x^4$ នាំអោយ $du = 4x^3 \cdot dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^4 \cdot 4x^3 \cdot dx}{(1+x^4)^2} \\ &= \int \frac{[(1+x^4)-1] \cdot 4x^3 \cdot dx}{(1+x^4)^2} \\ &= \int \frac{(u-1) \cdot du}{u^2} = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\right) \cdot du = \ln|u| + \frac{1}{u} + c \\ &= \ln|1+x^4| + \frac{1}{1+x^4} + c \end{aligned}$$

38_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int e^{x^2+x}(2x+1).dx$

តាង $u = x^2 + x$ នាំអោយ $du = (2x+1).dx$

$$I = \int e^{x^2+x}(2x+1).dx$$

$$= \int e^u .du = e^u + c$$

$$= e^{x^2+x} + c$$

ដូចនេះ $I = e^{x^2+x} + C$ ។

39_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{(\cos x - \sin x).dx}{\sqrt{1 + \sin x + \cos x}}$

តាង $u = 1 + \sin x + \cos x$

នាំអោយ $du = (\cos x - \sin x).dx$

$$I = \int \frac{(\cos x - \sin x).dx}{\sqrt{1 + \sin x + \cos x}}$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c$$

$$= 2\sqrt{1 + \sin x + \cos x} + c$$

40_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{(x^2 - 1).dx}{(x^2 + 1)^2}$

ដោយចែកភាគយកនឹងភាគបែង នឹង x^2 គេបាន ៖

$$I = \int \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot dx}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2}$$

តាង $u = x + \frac{1}{x}$ នាំអោយ $du = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot dx$

$$= \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c$$

$$= -\frac{1}{x + \frac{1}{x}} + c = -\frac{x}{x^2 + 1} + c$$

41- គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{dx}{x^4 + 1}$

គេមាន $I = \int \frac{dx}{x^4 + 1}$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 1) - (x^2 - 1)}{x^4 + 1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} - \frac{1}{2} \int \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2}$$

តាង $u = x - \frac{1}{x}$ នាំឱ្យ $du = (1 + \frac{1}{x^2}).dx$

និង $v = x + \frac{1}{x}$ នាំឱ្យ $dv = (1 - \frac{1}{x^2}).dx$

គេបាន $I = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + 2} - \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v^2 - 2}$
 $= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\frac{u}{\sqrt{2}}) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{v - \sqrt{2}}{v + \sqrt{2}} \right| + C$

ដូចនេះ

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x}) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right| + C$$

 ។

42-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (2x + 1)\cos x.d x$

តាង $\begin{cases} u = 2x + 1 \\ dv = \cos x.d x \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du = 2.d x \\ v = \sin x \end{cases}$

$I = \int (2x + 1)\cos x.d x$
 $= (2x + 1)\sin x - \int 2\sin x.d x$
 $= (2x + 1)\sin x + 2\cos x + c$

43-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (6x - 1)\cos 3x.d x$

តាង $\begin{cases} u = 6x - 1 \\ dv = \cos 3x.d x \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du = 6.d x \\ v = \frac{1}{3}\sin 3x \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 I &= \int (6x - 1)\cos 3x \cdot dx \\
 &= \frac{1}{3}(6x - 1)\sin 3x - \int 2\sin 3x \cdot dx \\
 &= \frac{1}{3}(6x - 1)\sin 3x + \frac{2}{3}\cos 3x + c
 \end{aligned}$$

44-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (2x + 3)\sin 2x \cdot dx$

តាង $\begin{cases} u = 2x + 3 \\ dv = \sin 2x \cdot dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du = 2 \cdot dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{1}{2}(2x + 3)\cos 2x + \int \cos 2x \cdot dx \\
 &= -\frac{1}{2}(2x + 3)\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + c
 \end{aligned}$$

45-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int x^2 \sin x \cdot dx$

តាង $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \sin x \cdot dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du = 2x \cdot dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 I &= \int x^2 \sin x \cdot dx \\
 &= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \cdot dx
 \end{aligned}$$

តាង $\begin{cases} u = 2x \\ dv = \cos x \cdot dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du = 2 \cdot dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$= -x^2 \cos x + \left[2x \sin x - \int 2 \sin x . dx \right]$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$$

46_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (2x - 3)e^x . dx$

តាង $\begin{cases} u = 2x - 3 \\ dv = e^x . dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du = 2 . dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$I = \int (2x - 3)e^x . dx$$

$$= (2x - 3)e^x - \int 2e^x . dx$$

$$= (2x - 3)e^x - 2e^x + c$$

$$= (2x - 5).e^x + c$$

ដូច្នេះ $I = (2x - 5).e^x + C$ ។

47_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (4x + 1).e^{2x} . dx$

តាង $\begin{cases} u = 4x + 1 \\ dv = e^{2x} . dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du = 4 . dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$$I = \frac{1}{2}(4x + 1)e^{2x} - \int 2e^{2x} . dx$$

$$= \frac{1}{2}(4x + 1)e^{2x} - e^{2x} + c$$

$$= \frac{1}{2}(4x - 1).e^{2x} + c$$

48_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int x^2 e^x .dx$

តាង $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x .dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du = 2x.dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$I = \int x^2 e^x .dx$$

$$= x^2 e^x - \int 2x e^x .dx$$

តាង $\begin{cases} u = 2x \\ dv = e^x .dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du = 2.dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$= x^2 e^x - \left[2x e^x - \int 2e^x .dx \right]$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x - 2e^x + c$$

$$= (x^2 - 2x - 2)e^x + c$$

49_គណនាអាំងតេក្រាល

តាង $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^3 .dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du = \frac{1}{x} .dx \\ v = \frac{1}{4} x^4 \end{cases}$

$$I = \int x^3 \ln x .dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \int \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 \cdot dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + c$$

50_គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int x \cdot \tan^2 x \cdot dx$

តាង $\begin{cases} u = x \\ dv = \tan^2 x \cdot dx \end{cases}$

នាំឱ្យ $\begin{cases} du = dx \\ v = \int \tan^2 x \cdot dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \cdot dx = \tan x - x \end{cases}$

គេបាន $I = x(\tan x - x) - \int (\tan x - x) \cdot dx$

$$I = x \tan x - \frac{x^2}{2} + \ln |\cos x| + c \quad ។$$

51-គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2}$ ដែល $x \neq 0$ និង $x \neq -1$

ក-កំណត់ចំនួនពិត A, B, C ដើម្បីឱ្យ $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x).dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំណត់ចំនួនពិត A, B, C

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} \\ \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2(x+1)} &= \frac{Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2}{x^2(x+1)} \end{aligned}$$

$$2x^2 + 2x + 1 = (A + C)x^2 + (A + B)x + B$$

$$\text{គេទាញបាន } \begin{cases} A + C = 2 \\ A + B = 2 \\ B = 1 \end{cases} \quad \text{នាំឱ្យ } A = 1, B = 1, C = 1 \quad \text{។}$$

ដូចនេះ $A = 1, B = 1, C = 1$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x).dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $A = 1, B = 1, C = 1$ គេបាន :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

យើងបាន $I = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} \right) .dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x+1}$

ដូចនេះ $I = \ln |x| - \frac{1}{x} + \ln |x+1| + C$ ។

52-គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{x^3 + 1}$ ដែល $x \neq -1$ ។

ក-កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឱ្យ $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x).dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c

គេបាន $\frac{4x^2 - x + 1}{x^3 + 1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$
 $\frac{4x^2 - x + 1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a(x^2-x+1) + (x+1)(bx+c)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$$4x^2 - x + 1 = ax^2 - ax + a + bx^2 + cx + bx + c$$

$$4x^2 - x + 1 = (a+b)x^2 + (-a+b+c)x + (a+c)$$

គេទាញបាន $\begin{cases} a+b=4 \\ -a+b+c=-1 \\ a+c=1 \end{cases}$ នាំឱ្យ $a=2, b=2, c=-1$ ។

ដូចនេះ $a=2, b=2, c=-1$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x).dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $a = 2$, $b = 2$, $c = -1$ គេមាន :

$$f(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{x^3 + 1} = \frac{2}{x+1} + \frac{2x-1}{x^2 - x + 1}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } I &= \int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{2x-1}{x^2 - x + 1} \right).dx \\ &= \int \frac{2dx}{x+1} + \int \frac{(2x-1).dx}{x^2 - x + 1} \\ &= 2 \int \frac{(x+1)'}{(x+1)}.dx + \int \frac{(x^2 - x + 1)'}{x^2 - x + 1}.dx \\ &= 2 \ln |x+1| + \ln |x^2 - x + 1| + C \end{aligned}$$

53-គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{5x^2 - 14x + 13}{(x+1)(x-3)^2}$

ដែល $x \neq -1$ និង $x \neq 3$ ។

ក-កំណត់បីចំនួនពិត a , b , c ដើម្បីឱ្យចំពោះ $x \neq -1$ និង $x \neq 3$

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{(x-3)^2} \quad \text{។}$$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x).dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំណត់ចំនួនពិត a, b, c

$$\text{គេបាន } \frac{5x^2 - 14x + 13}{(x+1)(x-3)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{(x-3)^2}$$

$$\frac{5x^2 - 14x + 13}{(x+1)(x-3)^2} = \frac{a(x-3)^2 + b(x+1)(x-3) + c(x+1)}{(x+1)(x-3)^2}$$

$$5x^2 - 14x + 13 = ax^2 - 6ax + 9a + bx^2 - 2bx - 3b + cx + c$$

$$5x^2 - 14x + 13 = (a+b)x^2 + (-6a-2b+c)x + (9a-3b+c)$$

$$\text{គេទាញបាន } \begin{cases} a+b=5 \\ -6a-2b+c=-14 \\ 9a-3b+c=13 \end{cases} \quad \text{នាំឱ្យ } a=2, b=3, c=4$$

ដូចនេះ $a=2, b=3, c=4$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x).dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $a=2, b=3, c=4$ គេមាន :

$$f(x) = \frac{5x^2 - 14x + 13}{(x+1)(x-3)^2} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3} + \frac{4}{(x-3)^2}$$

$$\text{គេបាន } I = \int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3} + \frac{4}{(x-3)^2} \right).dx$$

$$= 2 \int \frac{dx}{x+1} + 3 \int \frac{dx}{x-3} + 4 \int \frac{dx}{(x-3)^2}$$

$$= 2 \ln |x+1| + 3 \ln |x-3| - \frac{4}{x-3} + c$$

54-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{1}{x(1+x^4)}$ ដែល x ជាចំនួនពិតខុសពីសូន្យ

ក-ចូរកំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឱ្យ $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{Bx^3 + C}{1+x^4}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x).dx$ ។

គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល $J = \int \frac{4x^3 \ln x . dx}{(1+x^4)^2}$

ដំណោះស្រាយ

ក-កំណត់បីចំនួនពិត A, B, C

គេបាន $\frac{1}{x(1+x^4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx^3 + C}{1+x^4}$

$$\frac{1}{x(1+x^4)} = \frac{A(1+x^4) + x(Bx^3 + C)}{x(1+x^4)}$$

$$1 = A + Ax^4 + Bx^4 + Cx$$

$$1 = (A+B)x^4 + Cx + A$$

$$\text{គេទាញ} \quad \begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ A = 1 \end{cases} \quad \text{នាំឱ្យ} \quad A = 1, B = -1, C = 0 \quad \text{។}$$

$$\text{ដូចនេះ} \quad \boxed{A = 1, B = -1, C = 0} \quad \text{។}$$

$$\text{ខ-គណនាអាំងតេក្រាល} \quad I = \int f(x).dx$$

$$\text{តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ} \quad A = 1, B = -1, C = 0$$

$$\text{គេមាន} \quad f(x) = \frac{1}{x(1+x^4)} = \frac{1}{x} - \frac{x^3}{1+x^4}$$

គេបាន

$$I = \int f(x).dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x^3}{1+x^4} \right).dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{4} \int \frac{4x^3 dx}{1+x^4}$$

$$\text{ដូចនេះ} \quad \boxed{I = \ln|x| - \frac{1}{4} \ln(1+x^4) + C} \quad \text{។}$$

$$\text{គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល} \quad J = \int \frac{4x^3 \ln x . dx}{(1+x^4)^2}$$

$$\text{តាង} \quad \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{4x^3 . dx}{(1+x^4)^2} \end{cases} \quad \text{នាំឱ្យ} \quad \begin{cases} du = \frac{1}{x} . dx \\ v = \int \frac{4x^3 . dx}{(1+x^4)^2} = -\frac{1}{1+x^4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } J &= -\frac{\ln x}{1+x^4} - \int \left(-\frac{1}{1+x^4}\right) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \\ &= -\frac{\ln x}{1+x^4} + \int \frac{dx}{x(1+x^4)} = -\frac{\ln x}{1+x^4} + I\end{aligned}$$

$$\text{ដោយ } I = \ln|x| - \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{J = -\frac{\ln x}{1+x^4} + \ln|x| - \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C} \quad \text{។}$$

55-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{1}{e^{2x} + 1}$ ដែល x ជាចំនួនពិត ។

ក-ចូរកំណត់បីចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឱ្យ $f(x) = A + \frac{B \cdot e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x) \cdot dx$ ។

គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល $J = \int \frac{2xe^{2x} \cdot dx}{(e^{2x} + 1)^2}$

ដំណោះស្រាយ

ក-កំណត់បីចំនួនពិត A, B

$$\begin{aligned}\text{គេបាន } \frac{1}{e^{2x} + 1} &= A + \frac{B \cdot e^{2x}}{e^{2x} + 1} \\ \frac{1}{e^{2x} + 1} &= \frac{A(e^{2x} + 1) + B \cdot e^{2x}}{e^{2x} + 1} = \frac{(A + B)e^{2x} + A}{e^{2x} + 1}\end{aligned}$$

$$\text{គេទាញ } \begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \quad \text{នាំឱ្យ } A = 1, B = -1 \quad \text{។}$$

ដូចនេះ $A = 1$, $B = -1$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x).dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $A = 1$, $B = -1$

គេមាន $f(x) = 1 - \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

គេបាន

$$I = \int \left(1 - \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}\right).dx = \int dx - \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2x}.dx}{e^{2x} + 1} = x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + C$$

ដូចនេះ $I = x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + C$ ។

គ-ទាញរកអាំងតេក្រាល $J = \int \frac{2xe^{2x}.dx}{(e^{2x} + 1)^2}$

$$\text{តាង } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{2e^{2x}.dx}{(e^{2x} + 1)^2} \end{cases} \text{ នាំឱ្យ } \begin{cases} du = dx \\ v = \int \frac{2e^{2x}.dx}{(e^{2x} + 1)^2} = -\frac{1}{e^{2x} + 1} \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } J = -\frac{x}{e^{2x} + 1} + \int \frac{dx}{e^{2x} + 1} = -\frac{x}{e^{2x} + 1} + I$$

$$\text{ដោយ } I = x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + C$$

ដូចនេះ $J = -\frac{x}{e^{2x} + 1} + x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + C$ ។

56-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 3}{(x+1)(x+2)^2}$ ។

ក-កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$

អាចសរសេរជាដាច់ខាត :

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \quad \text{។}$$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^1 f(x).dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំណត់បីចំនួនពិត A, B និង C

គេមាន $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 3}{(x+1)(x+2)^2}$

និង $f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$

គេបាន $\frac{2x^2 + 4x + 3}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$

$$\frac{2x^2 + 4x + 3}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{A.(x+2)^2 + B.(x+1)(x+2) + C.(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}$$

$$2x^2 + 4x + 3 = A.(x+2)^2 + B.(x+1)(x+2) + C.(x+1) \quad (1)$$

ចំពោះ $x = -1$ តាម (1) គេបាន $2 - 4 + 3 = A$ នាំឱ្យ $A = 1$

ចំពោះ $x = -2$ តាម (1) គេបាន $8 - 8 + 3 = -C$ នាំឱ្យ $C = -3$

ចំពោះ $x = 0$ តាម (1) គេបាន $3 = 4A + 2B + C$

នាំឱ្យ $B = \frac{3 - 4A - C}{2} = \frac{3 - 4 + 3}{2} = 1$ ។

ដូចនេះ $A = 1, B = 1, C = -3$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^1 f(x).dx$

ចំពោះ $A = 1, B = 1, C = -3$

គេបាន $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}$

គេបាន $I = \int_0^1 f(x).dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2} \right].dx$

$I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}.dx + \int_0^1 \frac{1}{x+2}.dx - 3 \int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2}.dx$

$I = \int_0^1 \frac{(x+1)'}{(x+1)}.dx + \int_0^1 \frac{(x+2)'}{(x+2)}.dx - 3 \int_0^1 \frac{(x+2)'}{(x+2)^2}.dx$

$I = [\ln|x+1|]_0^1 + [\ln|x+2|]_0^1 - 3 \left[-\frac{1}{x+2} \right]_0^1$

$$I = [\ln|x+1|]_0^1 + [\ln|x+2|]_0^1 - 3 \cdot \left[-\frac{1}{x+2} \right]_0^1$$

$$I = [\ln 2 - \ln 1] + [\ln 3 - \ln 2] + 3 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right]$$

$$I = \ln 2 - 0 + \ln 3 - \ln 2 + 1 - \frac{3}{2}$$

$$I = \ln 3 - \frac{1}{2} = \frac{-1 + 2 \ln 3}{2}$$

ដូចនេះ $I = \int_0^1 f(x).dx = \frac{-1 + 2 \ln 3}{2}$ ។

57-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។

ក-ចូរសរសេរ $f(x)$ ជា $f(x) = A + \frac{B \cdot e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

ដែល A និង B ជាពិរច្ឆន្នពិត ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^1 f(x).dx$ ដោយសរសេរលទ្ធផល

ជា $a + \ln b$ ដែល a និង b ជាពិរច្ឆន្នពិតត្រូវរក ។

ដំណោះស្រាយ

ក- សរសេរ $f(x)$ ជា $f(x) = A + \frac{B \cdot e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{(e^x + 1) - 2}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$$

$$= 1 - \frac{2e^{-x}}{e^{-x}(e^x + 1)} = 1 - \frac{2e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

ដូចនេះ $f(x) = 1 + \frac{-2e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ ហើយ $A = 1$ និង $B = -2$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^1 f(x).dx$

គេបាន $I = \int_0^1 \left(1 + \frac{-2e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right).dx$ ព្រោះ $f(x) = 1 + \frac{-2e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

$$= \int_0^1 \left[1 + 2 \cdot \frac{(1 + e^{-x})'}{(1 + e^{-x})} \right].dx = \left[x + 2 \ln(1 + e^{-x}) \right]_0^1$$

$$= \left[1 + 2 \ln(1 + e^{-1}) \right] - \left[0 + 2 \ln(1 + 1) \right]$$

$$= 1 + 2 \ln\left(\frac{e + 1}{e}\right) - 2 \ln 2$$

$$= 1 + 2 \ln(e + 1) - 2 \ln e - 2 \ln 2$$

$$= 1 + 2[\ln(e + 1) - \ln 2] - 2 = -1 + 2 \ln\left(\frac{e + 1}{2}\right)$$

ដូចនេះ $I = \int_0^1 f(x).dx = -1 + 2 \ln\left(\frac{e + 1}{2}\right)$

ហើយ $a = -1$ និង $b = \frac{e + 1}{2}$ ។

58-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = (x^2 + x - 7).e^x$ កំនត់លើ $\mathbb{R}$ ។

ក-កំនត់ចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍

$F(x) = (ax^2 + bx + c).e^x$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^3 f(x).dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់ចំនួនពិត a, b និង c

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ លុះត្រាតែ

$$\forall x \in \mathbb{R} : F'(x) = f(x)$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } F'(x) &= (ax^2 + bx + c)' \cdot e^x + (e^x)' \cdot (ax^2 + bx + c) \\ &= (2ax + b) \cdot e^x + e^x(ax^2 + bx + c) \\ &= [ax^2 + (2a + b)x + (b + c)] \cdot e^x \end{aligned}$$

$$\text{ដោយ } F'(x) = f(x)$$

$$\text{នាំឱ្យ } [ax^2 + (2a + b)x + (b + c)] \cdot e^x = (x^2 + x - 7) \cdot e^x$$

$$\text{គេទាញបាន } \begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 1 \\ b + c = -7 \end{cases} \text{ នាំឱ្យ } \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -6 \end{cases}$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{a = 1, b = -1, c = -6} \quad \text{។}$$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^3 f(x).dx$

ដោយ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ នោះគេបាន :

$$I = \int_0^3 f(x).dx = [F(x)]_0^3 = F(3) - F(0)$$

ចំពោះ $a = 1, b = -1, c = -6$ គេមាន $F(x) = (x^2 - x - 6).e^x$

គេបាន $F(3) = (9 - 3 - 6).e^3 = 0$ និង $F(0) = (0 - 0 - 6).e^0 = -6$

ដូចនេះ $I = 0 - (-6) = 6$ ។

59-ក.កំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x} \quad \text{ចំពោះគ្រប់ } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \quad \text{។}$$

$$\text{ខ.គណនាអាំងតេក្រាល } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} \quad \text{។}$$

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់ចំនួនពិត a និង b

$$\text{គេបាន } \frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x(1 + \sin x) + b \cos x(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x(a + a \sin x + b - b \sin x)}{1 - \sin^2 x}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x[(a + b) + (a - b)\sin x]}{\cos^2 x}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{(a + b) + (a - b)\sin x}{\cos x}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $a = b = \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$

តាមសំរាយខាងលើ ចំពោះ $a = \frac{1}{2}$ និង $b = \frac{1}{2}$ គេមាន :

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x} \quad \text{ចំពោះគ្រប់ } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \quad \text{។}$$

យើងបាន $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} \cdot dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\cos x}{2(1 - \sin x)} + \frac{\cos x}{2(1 + \sin x)} \right] \cdot dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - \sin x} \cdot dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} \cdot dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[- \frac{(1 - \sin x)'}{(1 - \sin x)} \cdot dx \right] + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \sin x)'}{(1 + \sin x)} \cdot dx \\
 &= -\frac{1}{2} [\ln|1 - \sin x|]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} [\ln|1 + \sin x|]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= -\frac{1}{2} \left[\ln \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \ln 1 \right] + \frac{1}{2} \left[\ln \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \ln 1 \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right)}{\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)} \right] = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{2 - 1} \right] = \ln(\sqrt{2} + 1)
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \ln(\sqrt{2} + 1)$$

60-គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 6}{(x-3)^2(x+1)}$

ដែល $x \neq -1$ និង $x \neq 3$ ។

ក-កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឱ្យ

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{(x-3)^2} \quad \text{។}$$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x).dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក- កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c

គេបាន
$$\frac{3x^2 - 7x + 6}{(x-3)^2(x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{(x-3)^2}$$

ឬ
$$3x^2 - 7x + 6 = a(x-3)^2 + b(x+1)(x-3) + c(x+1)$$

ចំពោះ $x = -1$ គេបាន $16 = 16a$ នាំឱ្យ $a = 1$

ចំពោះ $x = 3$ គេបាន $12 = 4c$ នាំឱ្យ $c = 3$

ចំពោះ $x = 0$ គេបាន $6 = 9a - 3b + c$

នាំឱ្យ
$$b = \frac{9a + c - 6}{3} = 2$$

ដូចនេះ
$$a = 1, b = 2, c = 3 \quad \text{។}$$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x).dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ គេមាន :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 6}{(x-3)^2(x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-3} + \frac{3}{(x-3)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } I &= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-3} + \frac{3}{(x-3)^2} \right).dx \\ &= \int \frac{dx}{x+1} + 2 \int \frac{dx}{x-3} + 3 \int \frac{dx}{(x-3)^2} \\ &= \ln|x+1| + 2\ln|x-3| - \frac{3}{x-3} + C \end{aligned}$$

61-គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{6x^2 - 22x + 18}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

ដែល $x \neq \{1, 2, 3\}$ ។

ក-កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឱ្យ

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3} \quad \text{។}$$

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x).dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក- កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c

$$\text{គេបាន } \frac{6x^2 - 22x + 18}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$$

$$\frac{6x^2 - 22x + 18}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-3) + c(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$6x^2 - 22x + 18 = a(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-3) + c(x-1)(x-2)$$

-ចំពោះ $x = 1$ គេបាន $2 = 2a$ នាំឱ្យ $a = 1$

-ចំពោះ $x = 2$ គេបាន $-2 = -b$ នាំឱ្យ $b = 2$

-ចំពោះ $x = 3$ គេបាន $6 = 2c$ នាំឱ្យ $c = 3$

ដូចនេះ $a = 1, b = 2, c = 3$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x).dx$

ចំពោះ $a = 1, b = 2, c = 3$

គេមាន $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3}$

$$\begin{aligned} \text{គេបាន } I &= \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} \right).dx \\ &= \int \frac{dx}{x-1} + 2 \int \frac{dx}{x-2} + 3 \int \frac{dx}{x-3} \\ &= \ln |x-1| + 2 \ln |x-2| + 3 \ln |x-3| + C \end{aligned}$$

ដូចនេះ $I = \int f(x).dx = \ln |x-1| + 2 \ln |x-2| + 3 \ln |x-3| + C$

62-គេមានអាំងតេក្រាល

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \cdot dx \quad \text{និង} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cdot dx$$

ក-ចូរគណនា $I + J$ និង $I - J$ ។

ខ-ទាញរកតម្លៃនៃ I និង J ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនា $I + J$ និង $I - J$

$$\begin{aligned} \text{យើងបាន } I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cdot dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + \sin^2 x) \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $I + J = \frac{\pi}{4}$ ។

$$\text{យើងបាន } I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \cdot dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cdot dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 0 = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $I - J = \frac{1}{2}$ ។

ខ-ទាញរកតម្លៃនៃ I និង J

គេមាន $\begin{cases} I + J = \frac{\pi}{4} \\ I - J = \frac{1}{2} \end{cases}$ នាំឱ្យ $I = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ និង $J = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$ ។

63- គេមានស្វីត (I_n) កំណត់ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

ដោយ $I_n = \frac{1}{n!} \cdot \int_0^1 (1-x)^n \cdot e^x \cdot dx$

ក-ចូរគណនាតួ I_1 ។

ខ-ចូរបញ្ជាក់ I_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ I_n រួចទាញថា $I_n = e - \sum_{p=0}^n \left(\frac{1}{p!} \right)$

គ-ចូររកលីមីត $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

រួចទាញថា $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e = 2.71828$

ក-ចូរគណនាតួ I_1

$$\text{គេមាន } I_1 = \frac{1}{1!} \int_0^1 (1-x)e^x \cdot dx = \int_0^1 (1-x) \cdot e^x \cdot dx$$

$$\text{តាង } \begin{cases} u = 1-x \\ dv = e^x dx \end{cases} \quad \text{នាំឱ្យ} \quad \begin{cases} du = -dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } I = \left[(1-x)e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x (-dx) = -1 + \left[e^x \right]_0^1 = e - 2$$

ដូចនេះ: $I = e - 2$ ។

ខ-បញ្ជាក់ I_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ I_n

$$\text{គេមាន } I_n = \frac{1}{n!} \cdot \int_0^1 (1-x)^n \cdot e^x \cdot dx$$

$$\text{នាំឱ្យ } I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_0^1 (1-x)^{n+1} \cdot e^x dx$$

$$\text{តាង } \begin{cases} u = (1-x)^{n+1} \\ dv = e^x dx \end{cases} \quad \text{នាំឱ្យ} \quad \begin{cases} du = -(n+1)(1-x)^n \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left[(1-x)^{n+1} e^x \right]_0^1 + \frac{n+1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-x)^n e^x \cdot dx$$

$$I_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x \cdot dx = \frac{1}{(n+1)!} + I_n$$

ដូចនេះ: $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$ ។

ទាញឱ្យបានថា $I_n = e - \sum_{p=0}^n \left(\frac{1}{p!} \right)$

គេមាន $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$

ចំពោះ $n = 1$: $I_2 = I_1 - \frac{1}{2!}$

ចំពោះ $n = 2$: $I_3 = I_2 - \frac{1}{3!}$

.....

ចំពោះ $n = n - 1$: $I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}$

ដោយធ្វើផលបូកទំនាក់ទំនងនេះអង្គ និង អង្គ គេបាន :

$I_n = I_1 - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \dots - \frac{1}{n!}$ ដោយ $I_1 = e - 2 = e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}$

ដូចនេះ $I_n = e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{n!} = e - \sum_{p=0}^n \left(\frac{1}{p!} \right)$ ។

គ-ចូររកលីមីត $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

ចំពោះ $x \in [0, 1]$ គេមាន $1 \leq e^x \leq e$ និង $(1-x)^n \geq 0$

គេបាន $(1-x)^n \leq e^x(1-x)^n \leq e(1-x)^n$

នាំឱ្យ $\frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n . dx \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^x . dx \leq \frac{e}{n!} \int_0^1 (1-x)^n . dx$

$$\text{ដោយ } \int_0^1 (1-x)^n \cdot dx = \left[-\frac{1}{n+1} (1-x)^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$\text{គេទាញបាន } \frac{1}{n!(n+1)} \leq I_n \leq \frac{e}{n!(n+1)} \quad \forall$$

$$\text{កាលណា } n \rightarrow +\infty \text{ នាំឱ្យ } \frac{1}{n!(n+1)} \rightarrow 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0} \quad \forall$$

$$\text{ទាញថា } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e = 2.71828$$

$$\text{គេមាន } I_n = e - \sum_{p=0}^n \left(\frac{1}{p!} \right) \text{ នាំឱ្យ } \sum_{p=0}^n \left(\frac{1}{p!} \right) = e - I_n$$

$$\text{គេបាន } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n \left(\frac{1}{p!} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e - I_n) = e \quad \text{ព្រោះ: } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e = 2.71828}$$

54- គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ត្រលើ $[-a, a]$ ។

$$\text{ក. ចូរបង្ហាញថា } \int_{-a}^a \frac{f(x) \cdot dx}{1+q^x} = \int_0^a f(x) \cdot dx, \quad q > 0, q \neq 1 \quad \forall$$

$$\text{ខ. អនុវត្តន៍: គណនា } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+3^x} \cdot dx$$

ក.បង្ហាញថា $\int_{-a}^a \frac{f(x).dx}{1+q^x} = \int_0^a f(x).dx$, $q > 0$, $q \neq 1$ ។

គេមាន $\int_{-a}^a \frac{f(x).dx}{1+q^x} = \int_{-a}^0 \frac{f(x).dx}{1+q^x} + \int_0^a \frac{f(x).dx}{1+q^x}$ (1)

តាង $x = -t$ នាំឱ្យ $dx = -dt$

និងចំពោះ $x \in [-a, 0]$ នាំឱ្យ $t \in [a, 0]$

គេបាន

$$\int_{-a}^0 \frac{f(x).dx}{1+q^x} = -\int_a^0 \frac{f(-t).dt}{1+q^{-t}} = \int_0^a \frac{q^t.f(-t)dt}{1+q^t} = \int_0^a \frac{q^x f(-x).dx}{1+q^x}$$

ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូនោះ $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in [-a, a]$

គេទាញបាន $\int_{-a}^0 \frac{f(x).dx}{1+q^x} = \int_0^a \frac{q^x.f(x)}{1+q^x}.dx$ (2)

យក (2) ទៅជួសក្នុង (1) គេបាន :

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{f(x).dx}{1+q^x} &= \int_0^a \frac{q^x.f(x).dx}{1+q^x} + \int_0^a \frac{f(x).dx}{1+q^x} \\ &= \int_0^a \frac{(q^x + 1)f(x).dx}{1+q^x} = \int_0^a f(x).dx \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $\int_{-a}^a \frac{f(x).dx}{1+q^x} = \int_0^a f(x).dx$, $q > 0$, $q \neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ : គណនា $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 3^x} .dx$

ដោយ $\cos x$ ជាអនុគមន៍គូនោះគេបាន :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x .dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1 \quad \text{។}$$

ដូចនេះ $I = 1$ ។

55-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0, 1]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x).dx$?

អនុវត្តន៍: ចូរគណនា $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x .dx}{1 + \cos^2 x}$ ។

បង្ហាញថា $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x).dx$

តាង $x = \pi - t$ នាំឱ្យ $dx = -dt$ និង ចំពោះ $x \in [0, \pi]$

នាំឱ្យ $t \in [\pi, 0]$

គេបាន $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = -\int_{\pi}^0 (\pi - t).f[\sin(\pi - t)].dt$

$$\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \int_0^{\pi} (\pi - t).f(\sin t).dt$$

$$= \pi \int_0^{\pi} f(\sin t).dt - \int_0^{\pi} t.f(\sin t).dt$$

$$\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x).dx - \int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx$$

$$\text{នាំឱ្យគេទាញបាន } \int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x).dx \quad \text{។}$$

$$\text{អនុវត្តន៍: គណនា } I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x . dx}{1 + \cos^2 x}$$

$$\text{គេមាន } I = \int_0^{\pi} \frac{x . \sin x . dx}{1 + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} x . \frac{\sin x . dx}{2 - \sin^2 x} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x . dx}{2 - \sin^2 x}$$

$$\text{តាង } z = \cos x \text{ នាំឱ្យ } dz = -\sin x . dx$$

$$\text{ហើយចំពោះ } x \in [0, \pi] \text{ នោះ } z \in [1, -1]$$

$$\text{គេបាន } I = \frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{-dz}{1 + z^2} = \frac{\pi}{2} [\arctan z]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{4} \quad \text{។}$$

$$\text{ដូចនេះ: } \boxed{I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x . dx}{1 + \cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4}} \quad \text{។}$$

$$56 - \text{ចូរបង្ហាញថា} \int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx$$

$$\text{អនុវត្តន៍ : ចូរគណនា } I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2(1 + \sqrt{3} \tan x).dx$$

$$\text{បង្ហាញថា} \int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx$$

$$\text{តាង } x = a + b - t \text{ នាំឱ្យ } dx = -dt$$

$$\text{និង ចំពោះ } x \in [a, b] \text{ នាំឱ្យ } t \in [b, a]$$

$$\text{គេបាន } \int_a^b f(x).dx = \int_b^a f(a+b-t)(-dt) = \int_a^b f(a+b-t).dt$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx} \quad \forall$$

$$\text{អនុវត្តន៍ : គណនា } I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2(1 + \sqrt{3} \tan x).dx$$

$$\text{យើងបាន } I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2 \left[1 + \sqrt{3} \tan \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \right].dx$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2 \left[1 + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3} - \tan x}{1 + \sqrt{3} \tan x} \right] \cdot dx \\
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2 \left(\frac{1 + \sqrt{3} \tan x + 3 - \sqrt{3} \tan x}{1 + \sqrt{3} \tan x} \right) \cdot dx \\
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2 \left(\frac{4}{1 + \sqrt{3} \tan x} \right) \cdot dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} [\log_2 4 - \log_2 (1 + \sqrt{3} \tan x)] \cdot dx \\
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2 4 \cdot dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2 (1 + \sqrt{3} \tan x) \cdot dx \\
 &= \frac{\pi}{3} \log_2 2^2 - I = \frac{2\pi}{3} - I
 \end{aligned}$$

នាំឱ្យគេទាញបាន $I = \frac{\pi}{3}$ ។

57-គេសន្មត់ថា f ជាអនុគមន៍មួយកំណត់លើ $\mathbf{IR}$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

ទំនាក់ទំនង៖ $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2 \cos 2x}$ ។

ចូរគណនា $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) \cdot dx$ ។

$$\text{គណនា } I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx$$

$$\text{យើងមាន } I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 f(x).dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx$$

$$\text{តាង } x = -t \text{ នាំឱ្យ } dx = -dt$$

$$\text{និង ចំពោះ } x \in \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right] \text{ នាំឱ្យ } t \in \left[\frac{\pi}{3}, 0\right]$$

$$\text{គេបាន } \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 f(x).dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 f(-t).(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(-t).dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(-x).dx$$

$$\text{គេទាញ } I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(-x).dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} [f(-x) + f(x)].dx$$

$$\text{ដោយ } f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x} = \sqrt{4\sin^2 x} = 2|\sin x|$$

$$\text{គេបាន } I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2|\sin x|.dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x.d x = 2[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} = 1$$

$$\text{ដូចនេះ } I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx = 1 \quad \text{។}$$