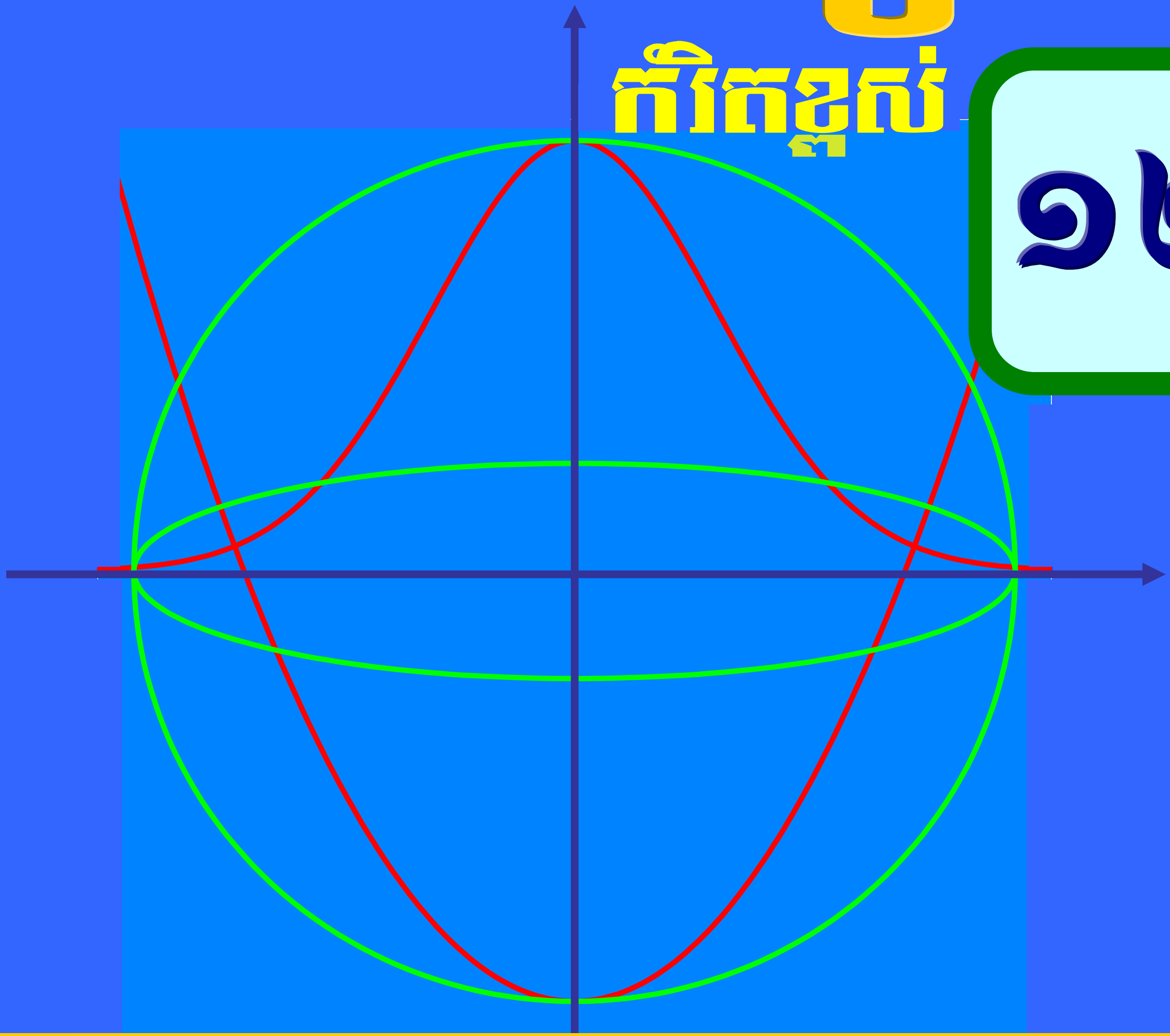
លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ
បរិញ្ញាបត្រផ្នែក គណិតវិទ្យា

កំណែលំហាត់

គណិតវិទ្យា

កំរិតខ្ពស់

១២



ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាថ្មី

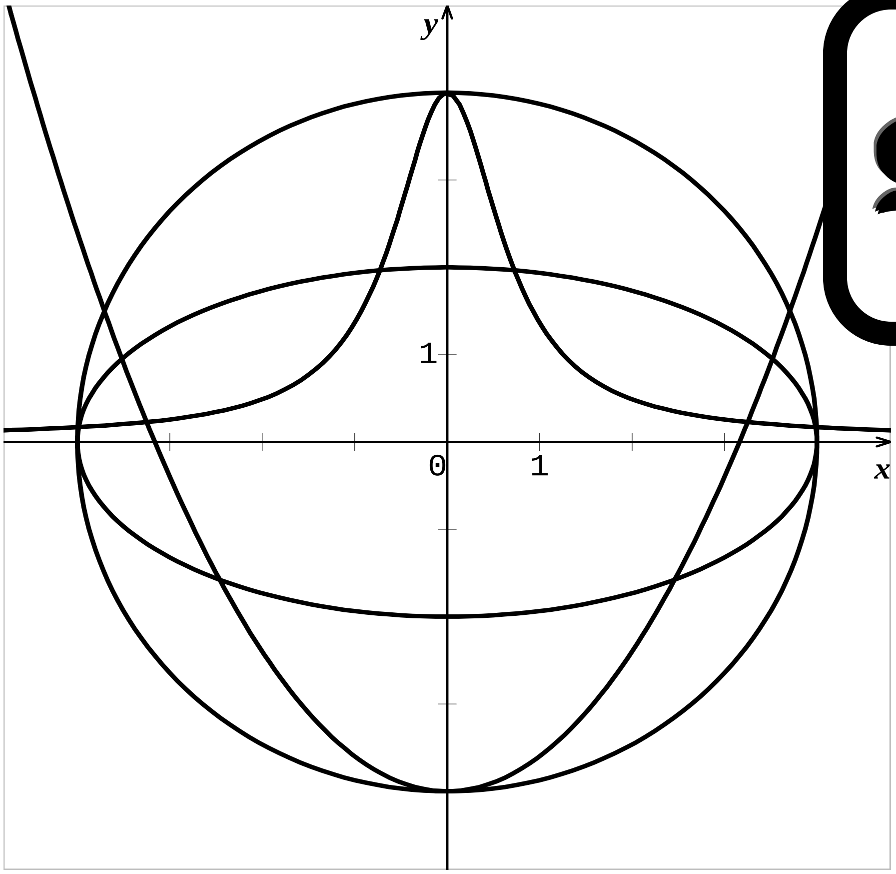
លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ
បរិញ្ញាបត្រផ្នែក គណិតវិទ្យា

កំណែលំហាត់

គណិតវិទ្យា

កំរិតខ្ពស់

១២



ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាថ្មី

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លោក លឹម ផល្គុន

លោក សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក លឹម ឆុន	លោក អ៊ឹង សំណាង
លោកស្រី ទុយ រីណា	លោក ទិត្យ ម៉េង
លោក នន់ សុខណា	លោក ព្រឹម សុនិត្យ

គណៈកម្មការត្រួតពិន្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិគ្គសិរ

ការិយកុំព្យូទ័រ	រចនាទំព័រ និង ក្រប
លោក អ៊ឹង សំណាង	លោក ព្រំ ម៉ាឡា
កញ្ញា លី គុណ្ណាកា	

អារម្ភកថា

សួស្តីមិត្តអ្នកសិក្សា ជាទីមេត្រី !!

សៀវភៅ កំណែលំហាត់គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី12 កំរិតខ្ពស់ដែលយើងខ្ញុំបាន រៀបរៀងនេះ រួមមានប្រាំជំពូកធំៗ ដែលបានដកស្រង់ចេញពីសៀវភៅគណិតវិទ្យា ថ្នាក់ទី១២កំរិតខ្ពស់ របស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ។

ក្នុងជំពូកនីមួយៗយើងខ្ញុំបានសង្ខេបមេរៀន និង ដកស្រង់លំហាត់ក្នុងមេរៀននៃជំពូក នីមួយៗមកធ្វើដំណោះស្រាយយ៉ាងក្បោះក្បាយ ដែលអាចជាជំនួយស្មារតីដល់អ្នកសិក្សា ក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ។

ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ ការបកស្រាយនូវរាល់លំហាត់ក្នុងសៀវភៅ នេះវាមិនល្អហួសគេហួសឯង ទាំងស្រុងនោះទេ ។

កំហុសឆ្គងនានា ទាំងបច្ចេកទេស និង អក្ខរាវិរុទ្ធប្រាកដជាកើតមានដោយអចេតនា ពុំខានឡើយ អាស្រ័យហេតុនេះ យើងខ្ញុំរង់ចាំជានិច្ចនូវមតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីសំណាក់ អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ដើម្បីកែតម្រូវសៀវភៅនេះឱ្យកាន់តែមានសុក្រិត្យភាព ថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់ យើងខ្ញុំអ្នករៀបរៀង សូមជូនពរដល់អ្នកសិក្សាទាំងអស់ ទទួលបានជោគជ័យក្នុងជីវិត និង មានសុខភាពល្អ ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី ៨ ខែ ឧសភា ឆ្នាំ ២០១០

អ្នករៀបរៀង **លឹម ផល្គុន**

មាតិការឿង

ទំព័រ

ជំពូកទី១

លីមីតនៃស្ទីត 01

ជំពូកទី២

អនុវត្តន៍ដេរីវេនៃអនុគមន៍ ២៧

ជំពូកទី៣

មេរៀនទី១ អនុគមន៍ អសនិទាន ៥៣

មេរៀនទី២ អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រចម្រុះ ៦៥

ជំពូកទី៤

មេរៀនទី១ អាំងតេក្រាលកំណត់ ៨៣

មេរៀនទី២ មាឌសូលីដ និង ប្រវែងធ្នូ ៩៦

ជំពូកទី៥

មេរៀនទី១ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១ ១១៥

មេរៀនទី២ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី២ ១៣៦

ជំពូកទី១

មេរៀនសង្ខេប លីមីតនៃស្វ៊ីត

◆ ប្រមាណវិធីលើលីមីត

គេមានស្វ៊ីត (a_n) និង (b_n) ដែលមាន $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = M$

និង $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = N$ គេបាន

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty} ka_n = k.M$

ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = M + N$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = M - N$

គ. $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n b_n) = M.N$

បើ $N \neq 0$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{M}{N}$

◆ លីមីតស្វ៊ីតធរណីមាត្រអនន្ត

ក.បើ $r > 1$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = +\infty$ ហើយ r^n ជាស្វ៊ីតរីកទៅរក $+\infty$

ខ.បើ $r = 1$ នោះ (r^n) ជាស្វ៊ីតថេរហើយ $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 1$ ។

គ.បើ $r = 0$ នោះ (r^n) ជាស្វ៊ីតថេរហើយ $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$ ។

ឃ.បើ $r \leq -1$ នោះស្វ៊ី (r^n) ជាស្វ៊ីតឆ្លាស់ ហើយកាលណា $n \to +\infty$

គេមិនអាចកំណត់លីមីតនៃ (r^n) បានទេ ។

◆ ស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តដែលរួម :

ស៊ីត (r^n) សមមូល $-1 \le r \le 1$

◆ ស៊េរីរួម និង ស៊េរីរីក :

ក-បើស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ ជាស៊េរីរួមនោះ $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

ខ-បើស៊ីត (a_n) មិនរួមរក 0 ទេនោះ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ ជាស៊េរីរីក ។

◆ ភាពរួមនិងរីកនៃស៊េរីធរណីមាត្រអនន្ត :

គ្រប់ស៊េរីធរណីមាត្រអនន្ត $a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} + ...$

ដែល $a \ne 0$ ជាស៊េរីរួម ឬ រីកទៅតាមករណីដូចខាងក្រោម :

ក-បើ $|r| < 1$ នោះស៊េរីរួមទៅរក $\frac{a}{1-r}$ ។

ខ-បើ $|r| \ge 1$ នោះស៊េរីរីក ។

លំហាត់

1.តើស្វ៊ីត (U_n) ដែលមានតួទូទៅដូចខាងក្រោម ជាស្វ៊ីតរួម ឬ រីក ?

ក. $U_n = 3n^2 + 5n + 1$

ខ. $U_n = \dfrac{n^2 + n}{2n^2 + 5}$

គ. $U_n = \dfrac{\sin 2n}{5^n}$

ឃ. $U_n = \dfrac{2n}{n+3} + \dfrac{3n^3}{n^2 + 5}$

ង. $U_n = \dfrac{n \sin n}{n^2 + 1}$

ច. $U_n = 2 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{4}{\sqrt{n}}$

2.គណនាលីមីតនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 + 3n - 1}{8n^2 - n + 1}$

ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^3 + n^2 - n}{n^2 + n - 1}$

គ. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^3 + (-1)^n}{n + (-1)^n}$

ឃ. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 + \sin n}{5n^2 + \cos \pi n}$

ង. $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 - \cos^2 \pi n)$

ច. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[-5n^3 + (-1)^n n^3\right]$

3. គណនាលីមីតនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n-3} - \sqrt{n}\right)$

គ. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n\sqrt{n^2 + 1} - 1\right)$

ឃ. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n!}{(n+1)! - n!} - \dfrac{2}{n} + 3\right)$ ។

4.គេមានស្វ៊ីតដែលកំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ មានតួទូទៅដូចខាងក្រោម៖

$$U_n = \frac{n^3}{2^n} \text{ , } V_n = \frac{2^n}{n!} \text{ ដែល } n! = n(n-1)\times\ldots\times 1$$

ក.គណនា $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$ និង $\lim_{n\to+\infty} \frac{V_{n+1}}{V_n}$

ខ.គណនា $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n + n^3}{n!+n^3}$

5.គណនាលីមីតនៃស្វ៊ីត (a_n) ដែលគេស្គាល់តួដូចខាងក្រោម៖

ក.$a_1 = 2 \quad , \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3$

ខ.$a_1 = 3 \quad , \quad a_{n+1} = 2a_n - 5$

គ.$a_1 = 1 \quad , \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{4}{3}$ ។

6.ពិនិត្យស៊េរីខាងក្រោមនេះ តើជាស៊េរីរីក រឺ រួម?

ក.$\sum_{n=0}^{\infty} 3.\left(\frac{3}{2}\right)^n$

ខ.$\sum_{n=0}^{\infty} 1000(1.055)^n$

គ.$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$

ឃ.$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n-1}}$

ង.$2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \frac{81}{128}\ldots$

ច.$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}\right)$

7.រកផលបូកនៃស៊េរីខាងក្រោម៖

ក.$1+0.1+0.01+0.001+...$

ខ.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}$

គ.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

ឃ.$\sum_{n=0}^{\infty}2\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^n$

ង.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5(-1)^n}{4^n}$

ច.$\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+...$

8.គណនា

ក. $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

ខ. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n}{\sqrt{n^4+2}}+...+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$

12.គណនា

$$\lim_{n\to+\infty}\left[(q-1)+q^2(q^2-q)+...+q^{2(n-1)}(q^n-q^{n-1})\right]$$

ដែល $q=2^{\frac{1}{2}}$ ។

9. គេឱ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n=\frac{1}{2+q^n}$ ដែល $q\neq-1$ ។

សិក្សាលីមីតនៃស្វ៊ីត (a_n) កាលណា $n\to+\infty$ ។

10.ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ គេមាន

$$S_n=\frac{2}{1\times3}+\frac{2}{3\times5}+...+\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{p=0}^{n}\frac{2}{(2p+1)(2p+3)}$$

ក.គណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n ដោយប្រើ $\frac{2}{(2p+1)(2p+3)}$ ជាទម្រង់ $\frac{a}{(2p+1)}+\frac{b}{(2p+3)}$ ។

ខ.គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

11.គេមានស៊េរីអនន្តមួយ

$r^2+\frac{r^2}{r^2+1}+\frac{r^2}{(r^2+1)^2}+...+\frac{r^2}{(r^2+1)^{n-1}}+...$ បង្ហាញថាស៊េរីអនន្ត នោះរួមចំពោះគ្រប់តម្លៃ r ។

12.កំណត់ស៊េរីខាងក្រោម តើស៊េរីមួយណារួម មួយណារីក? បើជាស៊េរីរួម

ចូររកផលបូក ។

ក.$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^n$ ខ.$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)^n$

គ.$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+5}$ ឃ.$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5(-1)^n}{4^n}$ ។

17.គេមាន ΔABC មួយមានក្រលាផ្ទៃស្មើនឹង 6 ឯកតា។

សង់$\Delta A'B'C'$ ដោយ A', B' និង C' ជាចំនុចកណ្តាលនៃជ្រុង ។

ចូរកំណត់ផលបូក $S = S_1 + S_2 + S_3 + ...$ ។

ដំណោះស្រាយ

1. តើស្វ៊ីត (U_n) ដែលមានតួទូទៅដូចខាងក្រោម ជាស្វ៊ីតរួម ឬ រីក ?

ក. $U_n = 3n^2 + 5n + 1$

ខ. $U_n = \dfrac{n^2 + n}{2n^2 + 5}$

គ. $U_n = \dfrac{\sin 2n}{5^n}$

ឃ. $U_n = \dfrac{2n}{n+3} + \dfrac{3n^3}{n^2+5}$

ង. $U_n = \dfrac{n \sin n}{n^2 + 1}$

ច. $U_n = 2 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{4}{\sqrt{n}}$

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពរួម ឬ រីកនៃស្វ៊ីត

ក. $U_n = 3n^2 + 5n + 1$

គេមាន $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(3n^2 + 5n + 1)$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[n^2\left(3 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}(3n^2) = +\infty$$

ដូចនេះ (U_n) ជាស្វ៊ីតរីកខិតទៅរក $+\infty$ ។

ខ. $U_n = \dfrac{n^2 + n}{2n^2 + 5}$

គេមាន $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 + n}{2n^2 + 5} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2n^2} = \dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ (U_n) ជាស្វ៊ីតរួមខិតទៅរក $\frac{1}{2}$ ។

គ.$U_n = \frac{\sin 2n}{5^n}$

គេមាន $-1 \le \sin 2n \le 1$ នាំឱ្យ $-\frac{1}{5^n} \le U_n \le \frac{1}{5^n}$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5^n} = 0$ នោះ $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$ ។

ដូចនេះ (U_n) ជាស្វ៊ីតរួមខិតទៅរក 0 ។

ឃ.$U_n = \frac{2n}{n+3} + \frac{3n^3}{n^2+5}$

គេមាន $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{n+3} + \frac{3n^3}{n^2+5}\right)$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{n} + \frac{3n^3}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}(2+3n) = +\infty$$

ដូចនេះ (U_n) ជាស្វ៊ីតរីកខិតទៅរក $+\infty$ ។

ង.$U_n = \frac{n\sin n}{n^2+1}$

គេមាន $-1 \le \sin n \le 1$ នាំឱ្យ $-\frac{n}{n^2+1} \le u_n \le \frac{n}{n^2+1}$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$ នោះ $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$ ។

ដូចនេះ (U_n) ជាស្វ៊ីតរួមខិតទៅរក 0 ។

ច. $U_n = 2 - \frac{3}{n} + \frac{4}{\sqrt{n}}$

គេមាន $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{4}{\sqrt{n}}\right)$

$= 2$ (ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{n}} = 0$)

ដូចនេះ (U_n) ជាស្វ៊ីតរួមខិតទៅរក 2 ។

2.គណនាលីមីតនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+3n-1}{8n^2-n+1}$

ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5n^3+n^2-n}{n^2+n-1}$

គ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5n^3+(-1)^n}{n+(-1)^n}$

ឃ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+\sin n}{5n^2+\cos\pi n}$

ង. $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2-\cos^2\pi n)$

ច. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-5n^3+(-1)^n n^3\right]$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+3n-1}{8n^2-n+1}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{8n^2} = \frac{1}{8}$

ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5n^3+n^2-n}{n^2+n-1}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5n^3}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} 5n = +\infty$

គ. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^3+(-1)^n}{n+(-1)^n}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^3}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 5n^2 = +\infty$

ឃ. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+\sin n}{5n^2+\cos \pi n}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\dfrac{\sin n}{n^2}}{5+\dfrac{\cos \pi n}{n^2}}$

ដោយ $-1 \le \sin n \le 1$ នោះ $-\dfrac{1}{n^2} \le \dfrac{\sin n}{n^2} \le \dfrac{1}{n^2}$

ហើយ $\dfrac{1}{n^2} \to 0$ កាលណា $n \to +\infty$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n^2} = 0$

ដូចគ្នាដែរ $-1 \le \cos(\pi n) \le 1$ នោះ $-\dfrac{1}{n^2} \le \dfrac{\cos(\pi n)}{n^2} \le \dfrac{1}{n^2}$

ហើយ $\dfrac{1}{n^2} \to 0$ កាលណា $n \to +\infty$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(\pi n)}{n^2} = 0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+\sin n}{5n^2+\cos \pi n} = \dfrac{1}{5}$ ។

ង. $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 - \cos^2 \pi n)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left[n^2 (1 - \dfrac{\cos^2 \pi n}{n^2}) \right] = +\infty$

ព្រោះ $0 \le \dfrac{\cos^2 \pi n}{n^2} \le \dfrac{1}{n^2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos^2 \pi n}{n^2} = 0$ ។

3. គណនាលីមីតនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n-3}-\sqrt{n}\right)$

គ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\sqrt{n^2+1}-1\right)$

ឃ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}-\dfrac{2}{n}+3\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតនៃស្វ៊ីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n-3}-\sqrt{n}\right)$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}(n-3-n)}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n}}$$

$$=-3\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n}}$$

$$=-3\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}$$

$$=-3\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}=-\frac{3}{2}$$

គ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\sqrt{n^2+1}-1\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty}\left[n(\sqrt{n^2+1}-\frac{1}{n})\right]$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n^2+1} = +\infty$

ឃ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n!}{(n+1)!-n!}-\frac{2}{n}+3\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{n!}{n!(n+1)-n!}-\frac{2}{n}+3\right]$

$= \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+3\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}+3\right) = 3$

4.គេមានស៊ីតដែលកំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ មានតួទូទៅដូចខាងក្រោម៖

$U_n = \frac{n^3}{2^n}$, $V_n = \frac{2^n}{n!}$ ដែល $n! = n(n-1)\times\ldots\times 1$

ក.គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{V_{n+1}}{V_n}$

ខ.គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n+n^3}{n!+n^3}$

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{V_{n+1}}{V_n}$

គេមាន $U_n = \frac{n^3}{2^n}$, $V_n = \frac{2^n}{n!}$ ដែល $n! = n(n-1)\times\ldots\times 1$

គេបាន $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}=\dfrac{\dfrac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\dfrac{n^3}{2^n}}=\dfrac{(n+1)^3}{2n^3}=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{n})^3$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{U_{n+1}}{U_n}=\dfrac{1}{2}$ ។

ហើយ $\dfrac{V_{n+1}}{V_n}=\dfrac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}}=\dfrac{2}{n+1}$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{V_{n+1}}{V_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n+1}=0$

ខ.គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n+n^3}{n!+n^3}$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n+n^3}{n!+n^3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n(1+\dfrac{n^3}{2^n})}{n!(1+\dfrac{n^3}{n!})}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n!}=+\infty$$

5.គណនាលីមីតនៃស្វ៊ីត (a_n) ដែលគេស្គាល់តួដូចខាងក្រោមៈ

ក.$a_1 = 2 \quad , \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3$

ខ.$a_1 = 3 \quad , \quad a_{n+1} = 2a_n - 5$

គ.$a_1 = 1 \quad , \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{4}{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតនៃស្វ៊ីត (a_n)

ក.$a_1 = 2 \quad , \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3$

គណនាតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3$

សមីការសម្គាល់នៃស្វ៊ីតគឺ $r = \frac{1}{2}r + 3 \Rightarrow r = 6$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $b_n = a_n - 6$

គេបាន $b_{n+1} = a_{n+1} - 6 = \left(\frac{1}{2}a_n + 3\right) - 6 = \frac{1}{2}(a_n - 6)$

គេទាញ $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$ នោះ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន $q = \frac{1}{2}$

និងតួ $b_1 = a_1 - 6 = 2 - 6 = -4$

គេបាន $b_n = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ នាំឱ្យ $a_n = 6 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ដូចនេះ $\lim_{n \to +\infty} a_n = 6$ ។

ខ.$a_1 = 3 \quad , \quad a_{n+1} = 2a_n - 5$

ដោះស្រាយដូចខាងលើគេបាន $a_n = 5 - 2^n$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ ។

គ.$a_1 = 1 \quad , \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{4}{3}$ ។

ដោះស្រាយដូចខាងលេគេបាន $a_n = 2 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$

6.ពិនិត្យស៊េរីខាងក្រោមនេះ តើជាស៊េរីរីក រឺ រួម?

ក.$\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3.\left(\frac{3}{2}\right)^n$ ខ.$\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1000(1.055)^n$

គ.$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$ ឃ.$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n-1}}$

ង.$2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \frac{81}{128} ...$ ច.$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}\right)$

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពរួម ឬ រីកនៃស៊េរី

ក.$\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3.\left(\frac{3}{2}\right)^n$

ផលបូកដោយផ្នែករបស់ស៊េរីគឺ

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 3\left(\frac{3}{2}\right)^k = 3\times\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}} = -3\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right]$$

គេមាន $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -3\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right] = +\infty$

ដូចនេះ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3.\left(\frac{3}{2}\right)^n$ ជាស៊េរីរីក ។

ខ. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1000(1.055)^n$ ជាស៊េរីរីកព្រោះ $r = 1.055 > 1$ ។

គ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$ ជាស៊េរីរួម ។

ឃ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n-1}}$

គេមាន $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n+1}{2^{n-1}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2 \neq 0$

ដូចនេះ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n-1}}$ ជាស៊េរីរីក ។

ង. $2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\frac{81}{128}\ldots$

ផលបូកដោយផ្នែក $S_n = 2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\ldots+2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

$$= 2\times\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}} = 8\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 8\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n = 8\right]$ នោះវាជាស៊េរីរួម ។

ច. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)$

មានផលបូកដោយផ្នែក

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}\right)=\sqrt{2n+1}-1$$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2n+1}-1\right)=+\infty$

ដូចនេះ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)$ ជាស៊េរីរីក ។

7.រកផលបូកនៃស៊េរីខាងក្រោម៖

ក. $1+0.1+0.01+0.001+...$ ខ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}$

គ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ ឃ. $\sum_{n=0}^{\infty}2\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^n$

ង. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5(-1)^n}{4^n}$ ច. $\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+...$

ដំណោះស្រាយ

រកផលបូកនៃស៊េរី ៖

ក. $1+0.1+0.01+0.001+...$

យើងឃើញថា 1 , 0.1 , 0.01 , ... ជាស៊េរីធរណីមាត្រអនន្តដែល

$a=1$ និង $r=0.1$ ។

ដូចនេះ $1+0.1+0.01+0.001+...=\frac{1}{1-0.1}=\frac{10}{9}$ ។

ខ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}$

គេមាន $\frac{2}{4k^2-1}=\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k+1)(2k-1)}=\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}$

គេបាន

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{4k^2-1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$$

កាលណា $n\to+\infty$ នោះ $\frac{2n}{2n+1}\to 1$

ដូចនេះ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}=1$

គ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}$

ឃ. $\sum_{n=0}^{\infty}2\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^n=\frac{2}{1-\cos\frac{\pi}{3}}=4$

ង. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5(-1)^n}{4^n}=5\times\frac{1}{1+\frac{1}{4}}=4$

ច. $\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+...=\frac{2}{3}.\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=2$

៤.គណនា

ក. $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

ពិនិត្យ $1-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{k-1}{k}\times\frac{k+1}{k}$

គេបាន $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right)\times\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)$

$$=\frac{1}{n}.\frac{n+1}{2}=\frac{n+1}{2n}$$

ដូចនេះ . $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$

ខ. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n}{\sqrt{n^4+2}}+...+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$

ចំពោះគ្រប់ $k=1\ ,\ 2\ ,\ ...,n$ គេមាន

$n^4+1\le n^4+k\le n^4+n$

$\sqrt{n^4+1}\le\sqrt{n^4+k}\le\sqrt{n^4+n}$

$\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^4+k}}\le\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$

គេទាញ $\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^4+k}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^4+k}}\le\frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}=1$

គេទាញ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^4+k}}=1$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n}{\sqrt{n^4+2}}+...+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)=1$

៩.គណនា

$$\lim_{n\to+\infty}\left[(q-1)+q^2\left(q^2-q\right)+...+q^{2(n-1)}\left(q^n-q^{n-1}\right)\right]$$

ដែល $q=2^{\frac{1}{2}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$\lim_{n\to+\infty}\left[(q-1)+q^2\left(q^2-q\right)+...+q^{2(n-1)}\left(q^n-q^{n-1}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}q^{2(k-1)}(q^k-q^{k-1})$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}q^{3k-3}(q-1)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-q^{3n}}{1-q^3}(q-1)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-2^{\frac{3n}{2}}}{1-2^{\frac{3}{2}}}(2^{\frac{1}{2}}-1)=+\infty$$

ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}2^{\frac{3n}{2}}=+\infty$ ។

10. គេឱ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n = \frac{1}{2+q^n}$ ដែល $q \neq -1$ ។

សិក្សាលីមីតនៃស្វ៊ីត (a_n) កាលណា $n \to +\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាលីមីតនៃស្វ៊ីត

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2+q^n}$

-បើ $q > 1$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2+q^n} = 0$

-បើ $q = 1$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2+q^n} = \frac{13}{}$

-បើ $-1 < q < 1$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2+q^n} = \frac{1}{2}$

-បើ $q < -1$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2+q^n} = \frac{1}{2}$

11.ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ គេមាន

$$S_n = \frac{2}{1\times 3} + \frac{2}{3\times 5} + \dots + \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{p=0}^{n} \frac{2}{(2p+1)(2p+3)}$$

ក.គណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n ដោយប្រើ $\frac{2}{(2p+1)(2p+3)}$

ជាទម្រង់ $\frac{a}{(2p+1)} + \frac{b}{(2p+3)}$ ។

ខ.គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n

$$\frac{2}{(2p+1)(2p+3)}=\frac{a}{(2p+1)}+\frac{b}{(2p+3)}$$ ។

ឬ $2=a(2p+3)+b(2p+1)$

ឬ $2=(2a+2b)p+3a+b$

គេទាញ $\begin{cases}2a+2b=0\\3a+b=2\end{cases}$ នាំឱ្យ $a=1$, $b=-1$

គេបាន $\dfrac{2}{(2p+1)(2p+3)}=\dfrac{1}{2p+1}-\dfrac{1}{2p+3}$

ហើយ $S_n=\sum_{p=0}^{n}\dfrac{2}{(2p+1)(2p+3)}$

$$=\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{2p+1}-\frac{1}{2p+3}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2n+3}=\frac{2(n+1)}{2n+3}$$

ដូចនេះ $S_n=\dfrac{2(n+1)}{2n+3}$ ។

ខ.គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

គេមាន $S_n=1-\dfrac{1}{2n+3}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\dfrac{1}{2n+3})=1$ ។

12.គេមានស៊េរីអនន្តមួយ $r^2+\frac{r^2}{r^2+1}+\frac{r^2}{(r^2+1)^2}+...+\frac{r^2}{(r^2+1)^{n-1}}+...$

បង្ហាញថាស៊េរីអនន្តនោះរួមចំពោះគ្រប់តម្លៃ r ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាស៊េរីអនន្តរួមចំពោះគ្រប់តម្លៃr

គេមាន $r^2+\frac{r^2}{r^2+1}+\frac{r^2}{(r^2+1)^2}+...+\frac{r^2}{(r^2+1)^{n-1}}+...$

ផលបូលដោយផ្នែករបស់ស៊េរីនេះគឺ $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{r^2}{(r^2+1)^{k-1}}$

ឬ $S_n=r^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(r^2+1)^{k-1}}$

$$=r^2\times\frac{1-\frac{1}{(r^2+1)^n}}{1-\frac{1}{r^2+1}}=(r^2+1)\left[1-\frac{1}{(r^2+1)^n}\right]$$

កាលណា $n\to+\infty$ នោះ $\frac{1}{(r^2+1)^n}\to 0$ ចំពោះគ្រប់ r ។

គេបាន $\lim_{n\to+\infty}S_n=r^2+1$ នាំឱ្យស៊េរីខាងលើជាស៊េរីបង្រួម ។

13.កំណត់ស៊េរីខាងក្រោម តើស៊េរីមួយណារួម មួយណារីក? បើជាស៊េរីរួម ចូររកផលបូក ។

ក. $\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^n$　　　　ខ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)^n$

គ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+5}$ ឃ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5(-1)^n}{4^n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពរីក រួមរបស់ស៊េរី

ក. $\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^n$ ជាស៊េរីរួមខិតទៅរក $\frac{2\cos\frac{\pi}{3}}{1-\cos\frac{\pi}{3}}=2$

ព្រោះវាជាស៊េរីធរណីមាត្រអនន្តមាន $|r|=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}<1$ ។

ខ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)^n$

ដោយ $a_n=\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)^n=1^n=1$ ហើយ $\lim_{n\to+\infty}a_n=1\neq 0$

ដូចនេះ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)^n$ ជាស៊េរីពង្រីក ។

គ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+5}$ ដោយ $a_n=\frac{n}{2n+5}$ មានលីមីត

$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+5}=\frac{1}{2}$ នាំឱ្យ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+5}$ ជាស៊េរីពង្រីក ។

ឃ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5(-1)^n}{4^n}$ ជាស៊េរីរួមខិតទៅរក $\frac{-5}{1+\frac{1}{4}}=-4$

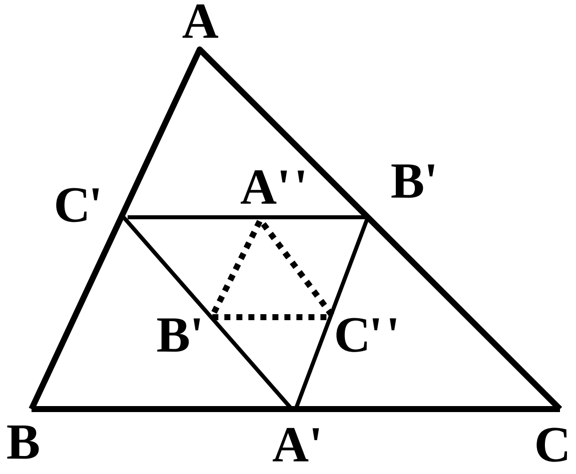
ព្រោះវាជាស៊េរីធរណីមាត្រអនន្តមាន $|r|=\left|-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}<1$ ។

14.គេមាន ΔABC មួយមានក្រលាផ្ទៃស្មើនឹង 6 ឯកតា។

សង់$\Delta A'B'C'$ ដោយ A', B' និង C' ជាចំនុចកណ្តាលនៃជ្រុង ΔABC ។ ចូរកំណត់ផលបូក $S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ផលបូក $S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots$



តាង a , b , c ជាជ្រុង ΔABC

ដែលមានផ្ទៃក្រឡា $S_1 = 6$

និងកន្លះបរិមាត្រ $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

តាង S_2 ជាក្រឡាផ្ទៃ$\Delta A'B'C'$

S_3 ជាក្រឡាផ្ទៃ $\Delta A''B''C''$

ដោយ A' , B' , C' ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ BC, CA, AB នោះ

$B'C' = \frac{a}{2}$; $A'C' = \frac{b}{2}$, $A'B' = \frac{c}{2}$ និង $p' = \frac{p}{2}$

គេបាន $S_2 = \sqrt{\frac{p}{2}(\frac{p}{2}-\frac{a}{2})(\frac{p}{2}-\frac{b}{2})(\frac{p}{2}-\frac{c}{2})} = \frac{1}{4}S_1$

ដូចគ្នាដែរគេទាញ $S_3 = \frac{1}{4^2}S_1$; $S_4 = \frac{1}{4^3}S_1$, ...

គេបាន $S = S_1 + S_2 + ... = \frac{S_1}{1-q} = \frac{6}{1-\frac{1}{4}} = 8$ ។

ជំពូកទី២

មេរៀនសង្ខេប ដេរីវេនៃអនុគមន៍

◆ គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់និងជាប់ហើយមានដេរីវេលើ I ។ បើមានពីរចំនួនពិត m និង M ដែលចំពោះគ្រប់ $x \in I : m \le f'(x) \le M$ នោះគ្រប់ចំនួនពិត $a , b \in I$ ដែល $a < b$ គេបាន $m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$ ។

◆ គេឱ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើចន្លោះ $[a , b]$ ។ បើមានចំនួន M ដែលគ្រប់ $x \in [a,b] : |f'(x)| \le M$ នោះគេបាន :

$|f(b) - f(a)| \le M|b-a|$ ។

◆ បើf ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a , b]$ មានដេរីវេលើចន្លោះ(a , b) និង $f(a) = f(b)$ នោះមានចំនួន

$c \in (a,b)$ មួយយ៉ាងតិចដែល$f'(c) = 0$

◆ បើf ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a , b]$ មានដេរីវេលើចន្លោះ(a , b) នោះមានចំនួន $c \in (a,b)$ មួយយ៉ាងតិចដែល$f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ ។

លំហាត់

1.រក dy , Δy , $dy - \Delta y$ និង $\frac{dy}{\Delta y}$ នៃអនុមន៍ខាងក្រោម

ក. $y = x^2 - 3x + 4$ ចំពោះ $x = 3$, $\Delta x = 0.2$

ខ. $y = \sqrt{12 - 5x}$ ចំពោះ $x = 2$, $\Delta x = 0.07$ ។

2.ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដេម្បីរកតម្លៃប្រហែលនៃចំនួនខាងក្រោមៈ

ក. $\sqrt{37}$ ខ. $\sqrt{65}$

គ. $\sqrt[3]{26}$ ឃ. $\sqrt[3]{126}$

ង. $\sqrt{50.4}$ ច. $\sqrt{79.5}$

ឆ. $\sqrt[3]{62.3}$ ជ. $\sqrt[3]{218.6}$

3. ក្រុមហ៊ុនផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយបានទទួលប្រាក់ចំនូលសរុបពីការលក់ សម្ភារៈ x គ្រឿងដែលឱ្យតាមអនុគមន៍

$R(x) = 20x - \frac{x^2}{30}$ គិតជាម៉ឺនរៀលដែល $0 \le x \le 600$ ។

ដោយប្រើឌីផេរ៉ង់ប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃកំណើនប្រាក់ចំណូល បើ សម្ភារៈលក់ប្រែប្រួលពី 150 គ្រឿង ទៅ 160 គ្រឿង ។

4. រោងចក្រផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយបានចំណាយប្រាក់សរុបក្នុងការ

ផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿងដែលឱ្យតាមអនុគមន៍

$C(x) = 930 + 15x + 0.2x^2$ ពាន់រៀល ។

ដោយប្រើឌីផេរ៉ង់ប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃកំណើនប្រាក់ចំណាយបើសម្ភារៈ ដែលបានផលិតកើនពី 60 គ្រឿង ទៅ 62 គ្រឿង ។

5.សហគ្រាសផលិតសម្ភារៈអេឡិចត្រូនិចមួយ បានចំណាយប្រាក់សរុបក្នុង មួយខែសម្រាប់ផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿងដែលឱ្យតាមអនុគមន៍

$C(x) = 0.1x^2 + 4x + 200$ គិតជាពាន់រៀល ។ ហើយសហគ្រាសបាន ទទួលប្រាក់ចំណូលមកវិញឱ្យតាមអនុគមន៍

$R(x) = 54x - 0.3x^2$ គិតជាពាន់រៀល ។

ក.សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញ $P(x)$

ខ.ដោយប្រើឌីផេរ៉ង់ប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃកំណើនប្រាក់ចំណេញ បើបរិមាណសម្ភារៈដែលបានលក់កើនពី 40 គ្រឿង ទៅ 44 គ្រឿង ។

6.តាមការអង្កេតរបស់អ្នកស្ថិតិបានឱ្យដឹងថា ចំនួនប្រជាពលរដ្ឋនៅក្នុងទីក្រុង មួយរយះពេល t ឆ្នាំទៅមុខទៀត មានការកើនឡើងដែលឱ្យតាមអនុគមន៍

$P(t) = 10(40 + 2t)^2 - 160t$ （នាក់） ។

ដោយប្រើឌីផេរ៉ង់ស្សៀលដើម្បីប៉ាន់ស្មានកំណើនប្រជាពលរដ្ឋក្នុងទីក្រុងនោះ

បើ t ប្រែប្រួលពី 6 ទៅ 6.25 ឆ្នាំ ។

7.បាល់មួយមានរាងជាស្វ៊ែ ។ ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលដើម្បីគណនាតម្លៃប្រហែលនៃកំណើនមាឌបាល់ បើពេលត្រូវកំដៅថ្ងៃបាល់រីកមាឌដែលកាំរបស់វាប្រែប្រួលពី $2m$ ទៅ $2.15m$ ។

8.គេឱ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើ $(-2,\infty)$ ដែល $f(x)=\sqrt{x+2}$ ។

ក.រកតំលៃអមនៃ $f(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,2]$ ។

ខ.បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,2]$

គេបាន $\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}\le\sqrt{x+2}\le\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ ។

9.គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ ដែល $f(x)=\tan x$ ។

បង្ហាញចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ដែល $0\le a\le b\le\dfrac{\pi}{2}$

គេបាន $\dfrac{b-a}{\cos^2 a}\le\tan b-\tan a\le\dfrac{b-a}{\cos^2 b}$ ។

10.គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើចន្លោះ I ។ ប្រើទ្រឹស្តីបទរ៉ូល (បើអាច) រកគ្រប់តម្លៃ c ក្នុងចន្លោះ I ដែល $f'(c)=0$:

ក.$f(x)=x^3-4x$, $c\in(-2,2)$

ខ.$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$, $c\in(1,3)$

គ.$f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x+2}$, $c\in(-1,3)$

ឃ.$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$, $c\in(-1,1)$

ង.$f(x)=\sin 2x$, $c\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$

ច.$f(x)=\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{\pi x}{6}$, $c\in(-1,0)$ ។

11.គេឱ្យអនុគមន៍f កំណត់លើចន្លោះ I ។ ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម រកគ្រប់តម្លៃ $c\in(a,b)$ ដែល $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$:

ក.$f(x)=x^2$, $c\in(-2,1)$

ខ.$f(x)=x(x^2-x-2)$, $c\in(-1,1)$

គ.$f(x)=x^3$, $c\in(0,1)$

ឃ.$f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $c\in\left(-\dfrac{1}{2},2\right)$

12.សហគ្រាសផលិតសម្ភារៈអេឡិចត្រូនិចមួយបានចំនាយប្រាក់សរុបក្នុងមួយថ្ងៃសំរាប់ផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿងដែលឱ្យអនុគមន៍ $C(x)=2400+28x+0.02x^2$ គិតជាពាន់រៀល ។

ក.កំនត់ប្រាក់ចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ 10 គ្រឿង 20 គ្រឿង និង 30 គ្រឿង ។

ខ.ប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំណាយក្នុងការផលិតសម្ភារៈគ្រឿងទី 11 គ្រឿងទី 21 និង គ្រឿងទី 31 ។

13.រោងពុម្ពបោះពុម្ពទស្សនាវដ្ដីមួយបានចំណាយសរុបក្នុងមួយខែសម្រាប់បោះពុម្ពទស្សនាវដ្ដី x ច្បាប់ ដែលឱ្យតាមអនុគមន៍ $C(x)=0.0001x^2+x+465$ គិតជាពាន់រៀល ហើយរោងពុម្ពបានលក់ចេញវិញ ទស្សនាវដ្ដី 1 ច្បាប់ថ្លៃ $P=D(x)=4-0.0002x$ ពាន់រៀល ។

ក.សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំនូលសរុប $R(x)$ ។

ខ. សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំនេញសរុប $P(x)$ ។

គ.គណនាប្រាក់ចំនេញសរុបបើក្នុង មួយខែរោងពុម្ពលក់អស់ 3000 ច្បាប់ 3500 ច្បាប់ និង 4000 ច្បាប់ ។

ឃ..ប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំនេញដែលបានពីការលក់ទស្សនាវដ្ដីច្បាប់ទី 3001 ច្បាប់ទី 3501 និងច្បាប់ទី 4001 ។

14. សហគ្រាសផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយបានចំនាយប្រាក់សរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿង ឱ្យតាមអនុគមន៍ $C(x)=480+26x+-0.1x^2$ ពាន់រៀល ។

ក.កំណត់អនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយមធ្យម $\overline{C}(x)$ ។

ខ.គណនាប្រាក់ចំណាយមធ្យមបន្ថែម

កាលណា $x = 30$, $x = 50$, $x = 70$ ។

15. សហគ្រាសផលិតសម្ភារៈអេឡិចត្រូនិចមួយបានចំនាយប្រាក់សរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿង ដែលឱ្យអនុគមន៍ $C(x) = 1080 + 42x + 0.3x^2$ ពាន់រៀល ។ កំណត់បរិមាណសម្ភារៈដែលសហគ្រាសត្រូវផលិតដើម្បីឱ្យប្រាក់ចំណាយមធ្យមមានកំរិតអប្បបរមា បើ $0 \le x \le 90$ ។

16.ក្រុមហ៊ុនផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយបានចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿងឱ្យយាមអនុគមន៍ $C(x) = x^2 + 20x + 1050$ ពាន់រៀល ហើយក្រុមហ៊ុនបានលក់ចេញវិញទទួលបានប្រាក់ចំណូលសរុបឱ្យតាមអនុគមន៍ $R(x) = 140x - 0.5x^2$ ពាន់រៀល ។ កំណត់កំរិតបរិមាណសម្ភារៈដែលក្រុមហ៊ុនត្រូវផលិតនិងលក់ដើម្បីឱ្យក្រុមហ៊ុនទទួលបានប្រាក់ចំនេញអតិបរិមា បើ $0 \le x \le 70$ ។

ដំណោះស្រាយ

1.រក $dy\,,\Delta y\,,dy-\Delta y$ និង $\frac{dy}{\Delta y}$ នៃអនុមន៍ខាងក្រោម

ក.$y = x^2 - 3x + 4$ ចំពោះ $x = 3$, $\Delta x = 0.2$

ខ.$y = \sqrt{12-5x}$ ចំពោះ $x = 2$, $\Delta x = 0.07$ ។

ដំណោះស្រាយ

រក $dy\,,\Delta y\,,dy-\Delta y$ និង $\frac{dy}{\Delta y}$ នៃអនុមន៍ខាងក្រោម

ក.$y = x^2 - 3x + 4$ ចំពោះ $x = 3$, $\Delta x = 0.2$

គេបាន $dy = y'.dx = (2x-3).dx$

ដោយ $x = 3$, $\Delta x = 0.2 \approx dx$

គេបាន $dy = (2\times 2 - 3)(0.2) = 0.2$ ។

ហើយ $$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x)\\ &= f(3+0.2) - f(3)\\ &= f(3.2) - f(3)\\ &= \left[(3.2)^2 - 3(3.2) + 4\right] - \left[(3)^2 - 3(3) + 4\right]\\ &= (5.2)(0.2) - 3(0.2) = (2.2)(0.2) = 0.044\end{aligned}$$

ហើយ $dy - \Delta y = 0.2 - 0.044 = 0.156$ និង $\frac{dy}{\Delta y} = \frac{0.2}{0.044} = 4.54$ ។

ខ. $y=\sqrt{12-5x}$ ចំពោះ $x=2$, $\Delta x=0.07$ ។

គេបាន $dy=y'.dx=-\dfrac{5}{2\sqrt{12-5x}}.dx$

$$=-\frac{5}{2\sqrt{12-10}}(0.07)$$

$$=-\frac{0.35}{2\sqrt{2}}=-0.123$$

ហើយ $\Delta y=f(2+0.07)-f(2)$

$$=\sqrt{12-5(2.07)}-\sqrt{12-5(2)}$$

$$=\sqrt{1.65}-\sqrt{2}=1.284-1.414=-0.13$$

ហើយ $dy-\Delta y=-0.123+0.13=0.007$ និង $\dfrac{dy}{\Delta y}=0.946$ ។

2.ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដើម្បីរកតម្លៃប្រហែលនៃចំនួនខាងក្រោម៖

ក. $\sqrt{37}$ ខ. $\sqrt{65}$

គ. $\sqrt[3]{26}$ ឃ. $\sqrt[3]{126}$

ង. $\sqrt{50.4}$ ច. $\sqrt{79.5}$

ឆ. $\sqrt[3]{62.3}$ ជ. $\sqrt[3]{218.6}$

ដំណោះស្រាយ

ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដើម្បីរកតម្លៃប្រហែលនៃចំនួនខាងក្រោម៖

ក. $\sqrt{37}$

គេមាន $f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x).dx$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

យក $x=36\ ;\ \Delta x=1=dx$

គេបាន $\sqrt{37}=\sqrt{36}+\frac{1}{2\sqrt{36}}\times 1=6+\frac{1}{12}=6.08$ ។

ខ.$\sqrt{65}$

គេមាន $f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x).dx$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

យក $x=64\ ;\ \Delta x=1=dx$

គេបាន $\sqrt{65}=\sqrt{64}+\frac{1}{2\sqrt{64}}\times 1=8+\frac{1}{16}=8.06$ ។

គ.$\sqrt[3]{26}$

គេមាន $f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x).dx$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

យក $x=27\ ;\ \Delta x=-1=dx$

គេបាន $\sqrt[3]{26}=\sqrt[3]{27}-\frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}=3-\frac{1}{27}=2.96$ ។

ឃ. $\sqrt[3]{126}$

គេមាន $f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x).dx$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

យក $x=125\ ;\ \Delta x=1=dx$

គេបាន $\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{125}+\frac{1}{3\sqrt[3]{125^2}}=5+\frac{1}{75}=5.013$ ។

ង. $\sqrt{50.4}=7.099$

ច. $\sqrt{79.5}=8.916$

ឆ. $\sqrt[3]{62.3}=3.964$

ជ. $\sqrt[3]{218.6}=6.023$

3. ក្រុមហ៊ុនផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយបានទទួលប្រាក់ចំនូលសរុបពីការលក់ សម្ភារៈ x គ្រឿងដែលឱ្យតាមអនុគមន៍

$R(x) = 20x - \frac{x^2}{30}$ គិតជាម៉ឺនរៀលដែល $0 \le x \le 600$ ។

ដោយប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃកំណើនប្រាក់ចំណូល បើ សម្ភារៈលក់ប្រែប្រួលពី 150 គ្រឿង ទៅ 160 គ្រឿង ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃកំណើនប្រាក់ចំណូល

តាង $y = R(x) = 20x - \frac{x^2}{30}$

បើ សម្ភារៈលក់ប្រែប្រួលពី 150 គ្រឿង ទៅ 160 គ្រឿងនោះ $\Delta x = 10$

គេបាន $dR(x) = R'(x).dx$ តែ $R'(x) = 20 - \frac{x}{15}$

នោះ $dR(x) = (20 - \frac{150}{15}).10 = 100$ (គិតជាម៉ឺនរៀល) ។

4. រោងចក្រផលិតសម្ភារៈប្រើប្រាស់មួយបានចំណាយប្រាក់សរុបក្នុងការ ផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿងដែលឱ្យតាមអនុគមន៍

$C(x) = 930 + 15x + 0.2x^2$ ពាន់រៀល ។

ដោយប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃកំណើនប្រាក់ចំណាយបើសម្ភារៈដែលបានផលិតកើនពី 60 គ្រឿង ទៅ 62 គ្រឿង ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃកំណើនប្រាក់ចំណាយបើសម្ភារៈដែលបានផលិតកើនពី 60 គ្រឿង ទៅ 62 គ្រឿងនោះ

$\Delta x = 2$ ។

ដោយ $C(x) = 930 + 15x + 0.2x^2$ នោះ $C'(x) = 15 + 0.4x$

គេបាន $dC(x) = C'(x).dx = (15 + 0.4 \times 60)(2) = 78$ (ពាន់រៀល)

5.សហគ្រាសផលិតសម្ភារៈអេឡិចត្រូនិចមួយ បានចំណាយប្រាក់សរុបក្នុងមួយខែសម្រាប់ផលិតសម្ភារៈ x គ្រឿងដែលឱ្យតាមអនុគមន៍ $C(x) = 0.1x^2 + 4x + 200$ គិតជាពាន់រៀល ។ ហើយសហគ្រាសបានទទួលប្រាក់ចំណូលមកវិញឱ្យតាមអនុគមន៍ $R(x) = 54x - 0.3x^2$ គិតជាពាន់រៀល ។

ក.សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញ $P(x)$

ខ.ដោយប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃកំណើនប្រាក់ចំណេញបើបរិមាណសម្ភារៈដែលបានលក់កើនពី 40 គ្រឿង ទៅ 44 គ្រឿង ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញ $P(x)$

គេបាន $P(x) = R(x) - C(x)$

$P(x) = 54x - 0.3x^2 - 0.1x^2 - 4x - 200$

ដូចនេះ $P(x) = -0.4x^2 + 50x - 200$ ។

ខ.ដោយប្រើឌីផេរ៉ង់ប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃកំណើនប្រាក់ចំណេញ

បើបរិមាណសម្ភារៈដែលបានលក់កើនពី 40 គ្រឿង ទៅ 44 គ្រឿង

នោះ $\Delta x = 44 - 40 = 4$ គ្រឿង ។

គេបាន $dP(x) = P'(x).dx$

ដោយ $P'(x) = -0.8x + 50$

គេបាន $dP(x) = (-0.8 \times 40 + 50)(4) = 72$ (គិតជាពាន់រៀល)

6.តាមការអង្កេតរបស់អ្នកស្ថិតិបានឱ្យដឹងថា ចំនួនប្រជាពលរដ្ឋនៅក្នុងទីក្រុង

មួយរយៈពេល t ឆ្នាំទៅមុខទៀត មានការកើនឡើងដែលឱ្យតាមអនុគមន៍

$P(t) = 10(40 + 2t)^2 - 160t$ (នាក់) ។

ដោយប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលដើម្បីប៉ាន់ស្មានកំណើនប្រជាពលរដ្ឋក្នុងទីក្រុងនោះ

បើ t ប្រែប្រួលពី 6 ទៅ 6.25 ឆ្នាំ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលដើម្បីប៉ាន់ស្មានកំណើនប្រជាពលរដ្ឋក្នុងទីក្រុងនោះ

បើ t ប្រែប្រួលពី 6 ទៅ 6.25 ឆ្នាំនោះ $\Delta t = 6.25 - 6 = 0.25$ ឆ្នាំ

គេមាន $P(t) = 10(40+2t)^2 - 160t$

គេបាន $P'(t) = 40(40+2t) - 160$

ហើយ $dP(t) = P'(t).dt$

$$= \left[40(40+2\times 6) - 160\right](0.25) = 480 \text{ (នាក់)}$$

7.បាឡុងមួយមានរាងជាស្វ៊ែ ។ ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលដើម្បីគណនាតម្លៃប្រហែលនៃកំណើនមាឌបាឡុង បើពេលត្រូវកំដៅថ្ងៃបាឡុងរីកមាឌដែលកាំរបស់វាប្រែប្រួលពី 2m ទៅ 2.15m ។

ដំណោះស្រាយ

ប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលដើម្បីគណនាតម្លៃប្រហែលនៃកំណើនមាឌបាឡុង

តាង $V(r)$ ជាមាឌរបស់បាឡុង ហើយ r ជាកាំរបស់បាឡុង

គេមាន $V(r) = \frac{4\pi}{3}r^3 \Rightarrow V'(r) = 4\pi r^2$

ដោយ r ប្រែប្រួលពី 2m ទៅ 2.15m នោះ $\Delta r = 0.15\text{m}$

ហើយ $dV(r) = V'(r).dr$

$$= (4\times 3.14\times 2^2)(0.15) = 7.536m^3$$

8.គេឱ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើ $(-2,\infty)$ ដែល $f(x)=\sqrt{x+2}$ ។

ក.រកតំលៃអមនៃ $f'(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,2]$ ។

ខ.បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,2]$

គេបាន $\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\le\sqrt{x+2}\le\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.រកតំលៃអមនៃ $f(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,2]$

$$f(x)=\sqrt{x+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

គេមាន $-1\le x\le 2\Rightarrow 1\le x+2\le 4$ ឬ $1\le\sqrt{x+2}\le 2$

គេទាញ $\frac{1}{4}\le\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\le\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\frac{1}{4}\le f'(x)\le\frac{1}{2}$ ។

ខ.បង្ហាញថា $\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\le\sqrt{x+2}\le\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,2]$

តាមវិសមភាពកំណើនមានកំណត់ចំពោះអនុគមន៍ f ក្នុង $x\in[-1,2]$

គេបាន $\frac{1}{4}(x+1)\le f(x)-f(-1)\le\frac{1}{2}(x+1)$ តែ $f(-1)=1$

$$\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\le\sqrt{x+2}-1\le\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\le\sqrt{x+2}\le\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ ។

9.គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ ដែល $f(x)=\tan x$ ។

បង្ហាញចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ដែល $0\le a\le b<\frac{\pi}{2}$

គេបាន $\frac{b-a}{\cos^2 a}\le\tan b-\tan a\le\frac{b-a}{\cos^2 b}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ដែល $0\le a\le b\le\frac{\pi}{2}$

គេបាន $\frac{b-a}{\cos^2 a}\le\tan b-\tan a\le\frac{b-a}{\cos^2 b}$

គេមាន $f(x)=\tan x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$

ចំពោះ $0\le a\le b<\frac{\pi}{2}$ បើ $a\le x\le b$ នោះ $\cos b\le\cos x\le\cos a$

ឬ $\frac{1}{\cos^2 a}\le f'(x)\le\frac{1}{\cos^2 b}$

ដោយអនុវត្តន៍វិសមភាពកំណើនមានកំណត់ទៅនឹងអនុគមន៍ f

ចំពោះ $x\in[a\ ,\ b\ ]$ គេបាន

$$\frac{1}{\cos^2 a}(b-a)\le f(b)-f(a)\le\frac{1}{\cos^2 b}(b-a)$$

ដូចនេះ $\frac{b-a}{\cos^2 a}\le\tan b-\tan a\le\frac{b-a}{\cos^2 b}$ ។

10.គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើចន្លោះ I ។ ប្រើទ្រឹស្តីបទរ៉ូល (បើអាច)

រកគ្រប់តម្លៃ c ក្នុងចន្លោះ I ដែល $f'(c)=0$:

ក. $f(x)=x^3-4x \quad , \quad c\in(-2,2)$

ខ. $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3) \quad , \quad c\in(1,3)$

គ. $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x+2} \quad , \quad c\in(-1,3)$

ឃ. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x} \quad , \quad c\in(-1,1)$

ង. $f(x)=\sin 2x \quad , \quad c\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$

ច. $f(x)=\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{\pi x}{6} \quad , \quad c\in(-1,0)$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកគ្រប់តម្លៃ c ក្នុងចន្លោះ I ដែល $f'(c)=0$:

ក. $f(x)=x^3-4x \quad , \quad c\in(-2,2)$

គេមាន $f(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធាជាប់គ្រប់ $x\in(-2\ ,\ 2)$ ហើយ

$f(-2)=f(2)=0$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទរ៉ូលមានចំនួន $c\in(-2\ ,\ 2\ )$

ដែល $f'(c)=0$ ។ គេមាន $f'(c)=3c^2-4$

បើ $f'(c)=0 \Rightarrow 3c^2-4=0 \Rightarrow c_1=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $c_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

ខ.$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$, $c\in(1,3)$

គេមាន $f(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធាជាប់គ្រប់ $x\in(1\ ,\ 3)$ ហើយ

$f(1)=f(3)=0$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទរ៉ូលមានចំនួន $c\in(1\ ,\ 3\ )$

ដែល $f'(c)=0$ ។

គេមាន $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)=x^3-6x^2+11x-6$

គេបាន $f'(x)=3x^2-12x+11$

បើ $f'(c)=0 \Rightarrow 3c^2-12c+11=0$

$\Delta'=36-33=3>0 \Rightarrow c_1=\frac{6-\sqrt{3}}{3}$, $c_2=\frac{6+\sqrt{3}}{3}$ ។

គ.$f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x+2}$, $c\in(-1,3)$

គេមាន $f(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធាជាប់គ្រប់ $x\in(-1\ ,\ 3)$ ហើយ

$f(-1)=f(3)=0$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទរ៉ូលមានចំនួន $c\in(1\ ,\ 3\ )$

ដែល $f'(c)=0$ ។

គេមាន $f'(x)=\frac{(2x-2)(x+2)-(x^2-2x-3)}{(x+2)^2}$

$$=\frac{2x^2+4x-2x-4-x^2+2x+3}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}$$

បើ $f'(c)=\frac{c^2+4c-1}{(c+2)^2}=0$ នាំឱ្យ $c^2+4c-1=0$

$\Delta'=4+1=5>0 \Rightarrow c_1=2+\sqrt{5}$, $c_2=2-\sqrt{5}$

ដូចនេះ $c_1=2+\sqrt{5}$, $c_2=2-\sqrt{5}$ ។

11.គេឱ្យអនុគមន៍f កំណត់លើចន្លោះ I ។ ប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម រកគ្រប់តម្លៃ $c\in(a,b)$ ដែល $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$:

ក.$f(x)=x^2$, $c\in(-2,1)$

ខ.$f(x)=x(x^2-x-2)$, $c\in(-1,1)$

គ.$f(x)=x^3$, $c\in(0,1)$

ឃ.$f(x)=\frac{x}{x+1}$, $c\in\left(-\frac{1}{2},2\right)$

ដំណោះស្រាយ

រកគ្រប់តម្លៃ $c\in(a,b)$ ដែល $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$:

ក.$f(x)=x^2$, $c\in(-2,1)$

គេមាន $f'(x)=2x$

គេបាន $f'(c)=2c=\dfrac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\dfrac{1-4}{1+2}=-1$

គេទាញ $c=-\dfrac{1}{2}$ ។

ខ.$f(x)=x(x^2-x-2)$, $c\in(-1,1)$

គេមាន $f(x)=x^3-x^2-2x \Rightarrow f'(x)=3x^2-2x-2$

គេបាន $f'(c)=3c^2-2c-2=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{-2-0}{2}=-1$

គេទាញ $3c^2-2c-1=0 \Rightarrow c_1=-\dfrac{1}{3}$, $c_2=1$

ដោយ $c\in(-1,1)$ ដូចនេះ $c=-\dfrac{1}{3}$ ។

គ.$f(x)=x^3$, $c\in(0,1)$

គេមាន $f'(x)=3x^2$

គេបាន $f'(c)=3c^2=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1 \Rightarrow c=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

ដោយ $c\in(0,1)$ ដូចនេះ $c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ។

ឃ.$f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $c\in\left(-\dfrac{1}{2},2\right)$

គេមាន $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

គេបាន $f'(c)=\frac{1}{(c+1)^2}=\frac{f(2)-f(-\frac{1}{2})}{2-(-\frac{1}{2})}=\frac{\frac{2}{3}+1}{\frac{5}{2}}=\frac{2}{3}$

គេទាញ $c_1=-1+\sqrt{\frac{3}{2}}$, $c_2=-1-\sqrt{\frac{3}{2}}$ ។

12.សហគ្រាសផលិតសម្ភារះអេឡិចត្រូនិចមួយបានចំនាយប្រាក់សរុបក្នុង មួយថ្ងៃសំរាប់ផលិតសម្ភារះ x គ្រឿងដែលឱ្យអនុគមន៏ $C(x)=2400+28x+0.02x^2$ គិតជាពាន់រៀល ។

ក.កំនត់ប្រាក់ចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារះ 10 គ្រឿង 20 គ្រឿង និង 30 គ្រឿង ។

ខ.ប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំណាយក្នុងការផលិតសម្ភារះគ្រឿង ទី 11 គ្រឿងទី 21 និង គ្រឿងទី 31 ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំនត់ប្រាក់ចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារះ 10 គ្រឿង 20 គ្រឿង និង 30 គ្រឿង

គេមាន $C(x)=2400+28x+0.02x^2$ (គិតជាពាន់រៀល)

-ប្រាក់ចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារះ 10 គ្រឿងគឺ

$C(10)=2400+280+2=2682$ ពាន់រៀល ។

-ប្រាក់ចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ 20 គ្រឿងគឺ

$C(20) = 2400 + 560 + 8 = 2968$ ពាន់រៀល ។

-ប្រាក់ចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ 30 គ្រឿងគឺ

$C(10) = 2400 + 540 + 18 = 2958$ ពាន់រៀល ។

ខ.ប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំណាយក្នុងការផលិតសម្ភារៈគ្រឿងទី 11 គ្រឿងទី 21 និង គ្រឿងទី 31

គេមាន $C(x) = 2400 + 28x + 0.02x^2$ (គិតជាពាន់រៀល)

គេបាន $C'(x) = 28 + 0.04x$

-តម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំណាយក្នុងការផលិតសម្ភារៈគ្រឿងទី 11 គឺ

$C'(11) = 28 + 0.04 \times 11 = 28.44$ ពាន់រៀល ។

-តម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំណាយក្នុងការផលិតសម្ភារៈគ្រឿងទី 21 គឺ

$C'(21) = 28 + 0.04 \times 21 = 28.84$ ពាន់រៀល ។

-តម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំណាយក្នុងការផលិតសម្ភារៈគ្រឿងទី 31 គឺ

$C'(31) = 28 + 0.04 \times 31 = 29.24$ ពាន់រៀល ។

13.រោងពុម្ពបោះពុម្ពទស្សនាវដ្ដីមួយបានចំណាយសរុបក្នុងមួយខែសម្រាប់បោះពុម្ពទស្សនាវដ្ដី x ច្បាប់ ដែលឱ្យតាមអនុគមន៍

$C(x) = 0.0001x^2 + x + 465$ គិតជាពាន់រៀល ហើយរោងពុម្ពបានលក់

ចេញវិញ ទស្សនាវដ្តី 1 ច្បាប់ថ្លៃ $P = D(x) = 4 - 0.0002x$ ពាន់រៀល ។

ក.សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំនូលសរុប $R(x)$ ។

ខ. សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំនេញសរុប $P(x)$ ។

គ.គណនាប្រាក់ចំនេញសរុបបើក្នុង មួយខែរោងពុម្ពលក់អស់ 3000 ច្បាប់ 3500 ច្បាប់ និង 4000 ច្បាប់ ។

ឃ..ប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំនេញដែលបានពីការលក់ ទស្សនាវដ្តីច្បាប់ទី 3001 ច្បាប់ទី 3501 និងច្បាប់ទី 4001 ។

ដំណោះស្រាយ

ក.សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំនូលសរុប $R(x)$

គេបាន $R(x) = P \times x = (4 - 0.0002x)x = 4x - 0.0002x^2$

ខ. សរសេរអនុគមន៍ប្រាក់ចំនេញសរុប $P(x)$

គេបាន $P(x) = R(x) - C(x)$

$$= 4x - 0.0002x^2 - 0.0001x^2 - x - 465$$

$$= -0.0003x^2 + 3x - 465$$

គ.គណនាប្រាក់ចំនេញសរុបបើក្នុង មួយខែរោងពុម្ពលក់អស់ 3000 ច្បាប់ 3500 ច្បាប់ និង 4000 ច្បាប់

-បើ $x = 3000$ ច្បាប់

នោះ $P(3000) = -0.0003(3000)^2 + 3(3000) - 465$

$= 5835$ ពាន់រៀល ។

-បើ $x = 3500$ ច្បាប់

នោះ $P(3500) = -0.0003(3500)^2 + 3(3500) - 465$

$= 6360$ ពាន់រៀល ។

-បើ $x = 4000$ ច្បាប់

នោះ $P(4000) = -0.0003(4000)^2 + 3(4000) - 465$

$= 6735$ ពាន់រៀល ។

ឃ.ប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំនេញដែលបានពីការលក់ ទស្សនាវដ្ដីច្បាប់ទី 3001 ច្បាប់ទី 3501 និងច្បាប់ទី 4001 ។

គេមាន $P(x) = -0.0003x^2 + 3x - 465$

គេបាន $P'(x) = -0.0006x + 3$

-តម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំនេញបានពីការលក់ ទស្សនាវដ្ដីច្បាប់ទី 3001

គឺ $P'(3000) = -0.0006(3000) + 3 = 1.2$ ពាន់រៀល ។

-តម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំនេញបានពីការលក់ ទស្សនាវដ្ដីច្បាប់ទី 3501

គឺ $P'(3500) = -0.0006(3500) + 3 = 0.9$ ពាន់រៀល ។

-តម្លៃប្រហែលនៃប្រាក់ចំនេញបានពីការលក់ ទស្សនាវដ្តីច្បាប់ទី 4001

គឺ $P'(4000) = -0.0006(4000) + 3 = 0.6$ ពាន់រៀល ។

ជំពូកទី៣ មេរៀនទី១

អនុគមន៍អសនិទាន

.អនុគមន៍ $y=\sqrt{ax+b}$ ដែល $a\neq 0$

ដែនកំណត់ : អនុគមន៍មានន័យកាលណា $ax+b\geq 0$

-បើ $a>0$ នោះ $x\geq -\frac{b}{a}$ ហើយ $D=[-\frac{b}{a},+\infty)$

-បើ $a<0$ នោះ $x\leq -\frac{b}{a}$ ហើយ $D=(-\infty\ ,-\frac{b}{a}]$

ដេរីវេ $y'=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

-បើ $a<0$ នោះ $y'<0$ នាំឱ្យអនុគមន៍ចុះជានិច្ចលើដែនកំណត់ ។

-បើ $a>0$ នោះ $y'>0$ នាំឱ្យអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែនកំណត់ ។

.អនុគមន៍ $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ មាន $\Delta=b^2-4ac$

◆ដែនកំណត់ : អនុគមន៍មានន័យកាលណា $ax^2+bx+c\geq 0$

_ករណី $a>0$

ក្រាបនៃ $y=ax^2+bx+c$ មានអាស៊ីមតូតទ្រេតពីរគឺ

ក-បើ $x\to+\infty$ នោះ $y=\sqrt{a}(x+\frac{b}{2a})$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

ក-បើ $x \to -\infty$ នោះ $y = -\sqrt{a}(x + \frac{b}{2a})$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

_ករណី $a < 0$

ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ គ្មានអាស៊ីមតូតទេ ។

◆ដេរីវេ $y' = \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ មានសញ្ញាដូច $2ax + b$

-បើ $a < 0$ អនុគមន៍មានអតិបរមាមួយត្រង់ $x = -\frac{b}{2a}$ ។

-បើ $a > 0$ អនុគមន៍មានអប្បបរមាមួយត្រង់ $x = -\frac{b}{2a}$ ។

លំហាត់

1.រកអាស៊ីមតូតទ្រេតរបស់អនុគមន៍ $y = 2x + 3 - \sqrt{4x^2 + x + 1}$ ។

2.រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមៈ

ក.$y = (2x - 3)\sqrt{x^2 - 3x + 4}$

ខ.$y = \sqrt{x^2 + 6x + 5} + \frac{x^2}{2} + 3$ ។

3.សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមៈ

ក.$y = 3x - 2 + \sqrt{x - 1}$ ខ.$y = x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

4.ក.សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ $y = \sqrt{9 - x^2}$ ។

ខ.រកចំនុចនឹង ដែលបន្ទាត់ $d_m : mx - y + 3 - 4m = 0$

កាត់តាមចំពោះគ្រប់តំលៃ m ។

គ.ប្រើក្រាប (C) ពិភាក្សាតាមតម្លៃ m អត្ថិភាពនៃឫសរបស់សមីការ

$\sqrt{9 - x^2} - mx + 4m - 3 = 0$ ។

5.គេឱ្យអនុគមន៍ $y = mx + m^2 + \sqrt{x^2 + 1}$ ។

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា អាស៊ីមតូតទ្រេតខាងស្តាំរបស់ក្រាបខាងលើ ប៉ះនឹង ប៉ារ៉ាបូលនឹងមួយ ។

ខ.បើ $m = 1$ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប C របស់អនុគមន៍ខាងលើ ។

6. គេឱ្យអនុគមន៍ $y = \sqrt{2x(4-x)}$ ។

ក.សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប C របស់អនុគមន៍ ។

ខ.ប្រើក្រាប C ពិភាក្សាតាមតម្លៃ m អត្ថិភាពនៃឬសរបស់សមីការ $\sqrt{2x(4x-x)} = mx + 2\sqrt{2} - 5m$ ។

7.ក.កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យសមីការ $x + \sqrt{2x^2+1} = m$ មានឬស ។

ខ.កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យវិសមីការ $x + \sqrt{2x^2+1} < m$ មានឬស ។

8. គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = x + \sqrt{4x^2+2x+1}$ ។

ក.សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ ។

ខ.ប្រើក្រាបរកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យវិសមីការ $\sqrt{4x^2+2x+1} \le m - x$ មានឬស ។

9.គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{12-3x^2}$ ។

ក.សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប C នៃអនុគមន៍ ។

ខ.ស្រាយបញ្ជាក់ $-2 \le x\sqrt{12-3x^2} \le 4$ ។

គ.ដោះស្រាយសមីការ $\sqrt{12-3x^2}=4-x$ រួចផ្ទៀងផ្ទាត់លទ្ធផលនៃសមីការដោយក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងលើ ។

10. គេឱ្យអនុគមន៍ $y=x+\sqrt{2x^2+1}$ មានក្រាប C ។

ក.រកអាស៊ីមតូតទ្រេតរបស់ក្រាប C ។

ខ.តាមក្រាបរកតម្លៃ m

ដើម្បីឱ្យសមីការ $x+\sqrt{2x^2+1}=m$ មានឫស ។

11.គូបមួយ ABCDEFGH មានរង្វាស់ជ្រុង a ។ I ជាចំនុចកណ្តាលនៃ [AB] ហើយ J ជាចំនុចកណ្តាលនៃ [EH] ។ ចំនុច M មួយរត់នៅលើជ្រុងនៃគូប ។ រកចំងាយខ្លីបំផុតដែល M រត់ពី I ទៅ J ។

ដំណោះស្រាយ

1.រកអាស៊ីមតូតទ្រេតរបស់អនុគមន៍ $y = 2x + 3 - \sqrt{4x^2 + x + 1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកអាស៊ីមតូតទ្រេត

គេមាន $y = 2x + 3 - \sqrt{4x^2 + x + 1}$

គេបាន $y = 2x + 3 - \sqrt{4}\,|x + \frac{1}{8}| + \varepsilon(x)$ ដែល $\lim_{x \to \pm\infty} \varepsilon(x) = 0$

-បើ $x \to +\infty$

នោះ $y = 2x + 3 - 2(x + \frac{1}{8}) = \frac{11}{4}$ ជាអាស៊ីមតូតដេករបស់ក្រាប ។

-បើ $x \to -\infty$

នោះ $y = 2x + 3 + 2(x + \frac{1}{8}) = 4x + \frac{13}{4}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

2.រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក.$y = (2x - 3)\sqrt{x^2 - 3x + 4}$

ខ.$y = \sqrt{x^2 + 6x + 5} + \frac{x^2}{2} + 3$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y = (2x-3)\sqrt{x^2-3x+4}$

គេបាន $y' = (2x-3)'\sqrt{x^2-3x+4} + (\sqrt{x^2-3x+4})'(2x-3)$

$$= 2\sqrt{x^2-3x+4} + \frac{(2x-3)^2}{2\sqrt{x^2-3x+4}}$$

$$= \frac{4x^2-12x+16+4x^2-12x+9}{2\sqrt{x^2-3x+4}}$$

$$= \frac{8x^2-24x+25}{2\sqrt{x^2-3x+4}}$$

ខ. $y = \sqrt{x^2+6x+5} + \frac{x^2}{2} + 3$

គេបាន $y' = \frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x+5}} + x$

$$= \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+5}} + x$$

$$= \frac{x+3+x\sqrt{x^2+6x+5}}{\sqrt{x^2+6x+5}}$$

ដូចនេះ $y' = \frac{x+3+x\sqrt{x^2+6x+5}}{\sqrt{x^2+6x+5}}$ ។

3.សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក.$y = 3x - 2 + \sqrt{x - 1}$ ខ.$y = x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក.$y = 3x - 2 + \sqrt{x - 1}$

ដែនកំណត់ $D = [1, +\infty)$

ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $y' = 3 + \dfrac{1}{2\sqrt{x - 1}}$

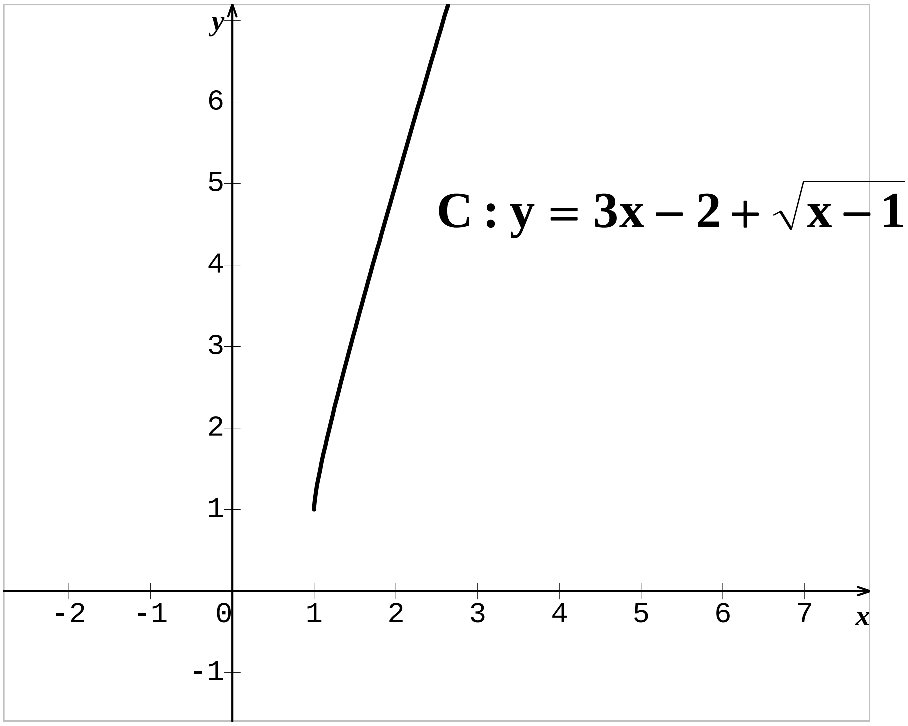
-ចំពោះគ្រប់ $x > 1$ គេបាន $y' > 0$ នាំឱ្យ y ជាអនុគមន៍កើន ។

គណនាលីមីត ៖ $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x - 2 + \sqrt{x - 1}) = +\infty$ ។

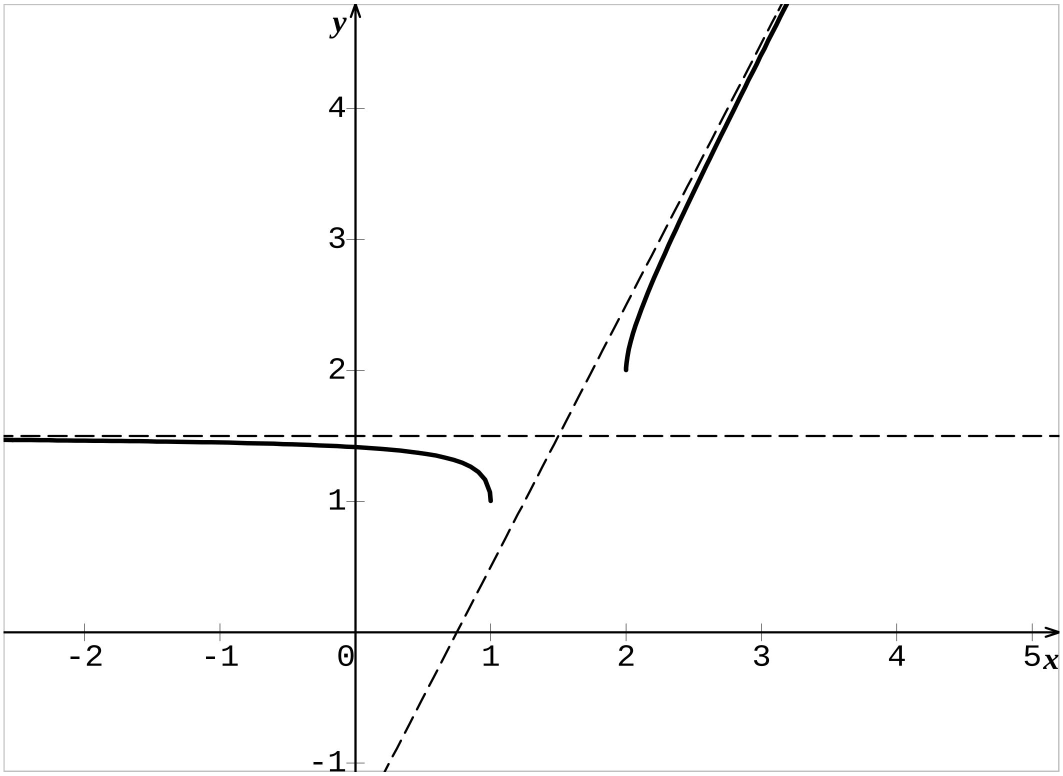
តារាងអថេរភាព

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
y'	$+$
y	0 $\nearrow$ $+\infty$

សំណង់ក្រាប



ខ. $y = x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$



4.ក.សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ $y = \sqrt{9 - x^2}$ ។

ខ.រកចំនុចនឹង ដែលបន្ទាត់ $d_m : mx - y + 3 - 4m = 0$

កាត់តាមចំពោះគ្រប់តំលៃ m ។

គ.ប្រើក្រាប (C) ពិភាក្សាតាមតម្លៃ m អត្ថិភាពនៃឫសរបស់សមីការ

$\sqrt{9 - x^2} - mx + 4m - 3 = 0$

ដំណោះស្រាយ

ក.សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប (C) នៃអនុគមន៍ $y = \sqrt{9 - x^2}$

ដែនកំណត់ $D = [-3\ ,\ 3\ ]$

ទិសដៅអថេរភាព

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{9 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

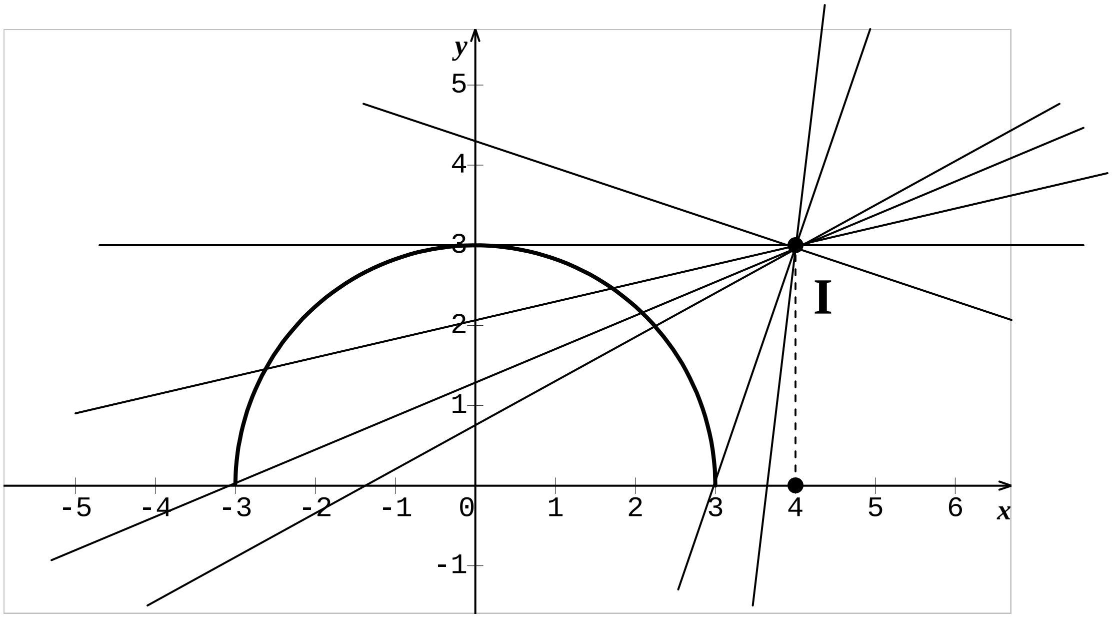
បើ $y' = 0 \Rightarrow x = 0$

អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = 0$ គឺ $y = (0) = 3$

តារាងអថេរភាព

x	-3		0		3
y'		+	0	—	
y	0	↗	3	↘	0

សំណង់ក្រាប



ខ.រកចំនុចនឹង ដែលបន្ទាត់ $d_m : mx - y + 3 - 4m = 0$

កាត់តាមចំពោះគ្រប់តំលៃ m

គេអាចសរសេរ $y - 3 = m(x - 4)$

សមីការនេះផ្ទៀងផ្ទាត់ជានិច្ចគ្រប់ m សមមូល $x = 4$, $y = 3$

ដូចនេះ $I(4 ; 3)$ ជាចំនុចនឹង ។

គ.ប្រើក្រាប (C) ពិភាក្សាតាមតម្លៃ m អត្ថិភាពនៃឬសរបស់សមីការ

$\sqrt{9 - x^2} - mx + 4m - 3 = 0$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វ

រវាង $(C) : y = \sqrt{9 - x^2}$ នឹង $d_m : y = mx - 4m + 3$

តាមក្រាហ្វិកគេបាន :

-ចំពោះ $m = 0$ សមីការមានឬសឌុប $x_1 = x_2 = 0$ ។

-ចំពោះ $m = \frac{3}{7}$ សមីការមានឬសតែមួយគត់គឺ $x = -3$ ។

-ចំពោះ $m = 3$ សមីការមានឬសតែមួយគត់គឺ $x = 3$ ។

-ចំពោះ $m \in (\frac{3}{7}, 3)$ សមីការមានឬសតែមួយគត់គឺ $-3 < x < 3$

-ចំពោះ $m > 3$ ឬ $m < 0$ សមីការគ្មានឬស ។

5.គេឱ្យអនុគមន៍ $y = mx + m^2 + \sqrt{x^2 + 1}$ ។

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា អាស៊ីមតូតទ្រេតខាងស្ដាំរបស់ក្រាបខាងលើ ប៉ះនឹងប៉ារ៉ាបូលនឹងមួយ ។

គេមាន $y = mx + m^2 + \sqrt{x^2 + 1}$

$$y = mx + m^2 + |x| + \varepsilon(x) \text{ ដែល } \lim_{x \to \pm\infty} \varepsilon(x) = 0$$

គេទាញ $y = mx + m^2 + x = (m+1)x + m^2$ ជាអាស៊ីមតូតខាងស្ដាំរបស់ក្រាបតាង $y = mx + m^2 + \sqrt{x^2 + 1}$ ។

យក $P : y = ax^2 + bx + c$ ជាប៉ារ៉ាបូលនឹងត្រូវរក

សមីការអាប់ស៊ីស $ax^2 + bx + c = (m+1)x + m^2$

ឬ $ax^2 + (b - m - 1)x + c - m^2 = 0$ (E)

សមីការ (E) មានឬសឌុបគ្រប់ m លុះត្រាតែ $\Delta = 0 \ \forall m \in IR$

$\Delta = (b - m - 1)^2 - 4a(c - m^2)$

$\Delta = b^2 - 2b(m+1) + (m+1)^2 - 4ac + 4am^2$

$= b^2 - 2mb - 2b + m^2 + 2m + 1 - 4ac + 4am^2$

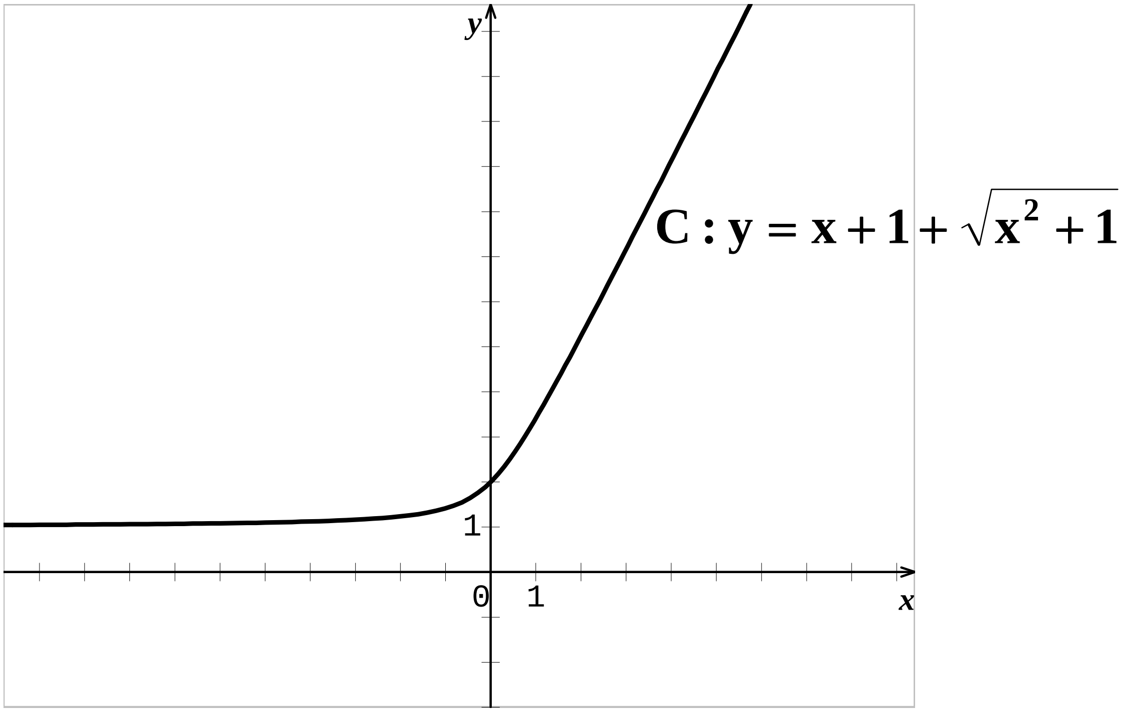
$= (1 + 4a)m^2 + (2 - 2b)m + (b - 1)^2 - 4ac$

បើ $\Delta = 0 \ \forall m \in IR$ សមមូល $\begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$

គេបាន $P : y = -\frac{x^2}{4} + x$ ។

ខ.បើ $m = 1$ សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាប C របស់អនុគមន៍ខាងលើ

ចំពោះ $m = 1$ គេបាន $y = x + 1 + \sqrt{x^2 + 1}$



ជំពូកទី៣

អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រច្រាស

.ចំណុចសំខាន់ៗសម្រាប់សិក្សាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

-ដែនកំណត់

-ខួបនៃអនុគមន៍

-ភាពគូសេសនៃអនុគមន៍

-ទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍

.ខួបនៃអនុគមន៍

-ខួបនៃអនុគមន៍ $y = \sin(ax)$ គឺ $\frac{2\pi}{|a|}$

-ខួបនៃអនុគមន៍ $y = \cos(ax)$ គឺ $\frac{2\pi}{|a|}$

.ភាពគូសេសនៃអនុគមន៍

-អនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេសលើ I កាលណា $\forall x \in I$, $-x \in I$ ហើយ $f(-x) = -f(x)$ ។

-អនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូលើ I កាលណា $\forall x \in I$, $-x \in I$ ហើយ $f(-x) = f(x)$ ។

លំហាត់

1.សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \cos^2 .\sin 2x$ ។

2. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមៈ

ក.$y = 2\sin x - 3\cos x$ ខ.$y = 5\sin x + \cos x$ ។

3.សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមៈ

ក.$y = \cos 2x - \cos 3x$ ខ.$y = 2x\cos 2x - \sin x$ ។

4.សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

ក.$y = 2\sin x - \sin 2x$ ខ.$y = \cos^2 x + x\sin x$ ។

5. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

ក.$y = \dfrac{1 - \sin x}{\cos x}$ ខ.$y = \dfrac{\cos x - 1}{\sin x}$ ។

6. រកបរិមានៃអនុគមន៍ $y = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$ លើចន្លោះ $[0, 2]$ ។

7.ប្រើក្រាបនៃ $y = \sin 2x - 3\sin x$ ដោះស្រាយសមីការ

$\sin 2x - 3\sin x = 0$ បើ $-2\pi \le x \le 2\pi$ ។

8. គេឱ្យអនុគមន៍ $y = a\sin 2x + \sin x$ ។

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបចំពោះ $a = 1$ ។

9.គេឱ្យអនុគមន៍ $y = \dfrac{a\sin x - \cos x - 1}{a\cos x}$ ។

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបចំពោះ $a = 1$ ។

លំហាត់ជំពូក ៣

1. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក.$y = \sqrt{3x - 5}$ ខ.$y = \sqrt{7 - 4x}$ ។

2. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក.$y = 2 + \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ ខ.$y = 2 + \sqrt{8 - 2x^2}$ ។

3. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក.$y = 2x - 1 - \sqrt{3x - 5}$ ខ.$y = x + 1 - \sqrt{4 - x^2}$ ។

4. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក.$y = f(x) = \sin x + 2\sin\dfrac{x}{2}$ ខ.$y = f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{2\cos x + 1}$ ។

5. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

$y = f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

6.គេឱ្យអនុគមន៍ $y = -2x + m\sqrt{x^2 + 1}$

ក.សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបចំពោះ $m = 4$ ។

ខ.រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍គ្មានតម្លៃបរមា ។

ដំណោះស្រាយ

1.សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\cos^2 x.\sin 2x$ ។

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប

$y=\cos^2 x.\sin 2x$

.ដែនកំណត់ $D=IR$

.ខួប : គេមាន $y=\cos^2 x\sin 2x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\sin 2x$

អនុគមន៍មានខួប $p=\pi$

ព្រោះ $f(x+\pi)=\frac{1}{2}[1+\cos(2\pi+2x)]\sin(2\pi+2x)$

$$=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\sin 2x=f(x)$$

.ភាពគូសេស :

$f(x)$ ជាអនុគមន៍សេសព្រោះ $f(-x)=\cos^2(-x)\sin(-x)$

$$=-\cos^2 x\sin x$$

$$=-f(x)$$

ដូចនេះគេសិក្សាតែក្នុងចន្លោះ $[0,\frac{\pi}{2}]$

.ទិសដៅអថេរភាព

ដេរីវេ $f'(x)=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)'\sin 2x+\frac{1}{2}(\sin 2x)'(1+\cos 2x)$

$$=-\sin^2 2x+\cos 2x(1+\cos 2x)$$

$$=-1+\cos^2 2x+\cos 2x+\cos^2 2x$$

$$=2\cos^2 2x+\cos 2x-1$$

$$=(2\cos 2x-1)(\cos 2x+1)$$

ដោយគ្រប់ $x\in IR:-1\le \cos 2x\le 1$ នោះ $\cos 2x+1\ge 0$

នាំឱ្យ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $2\cos 2x-1$

-បើ $2\cos 2x-1=0\Rightarrow \cos 2x=\frac{1}{2}$ ឬ $2x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$

-បើ $2\cos 2x-1>0\Rightarrow \cos 2x>\frac{1}{2}$ ឬ $0<x<\frac{\pi}{6}$

-បើ $2\cos 2x-1<0\Rightarrow \cos 2x<\frac{1}{2}$ ឬ $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$

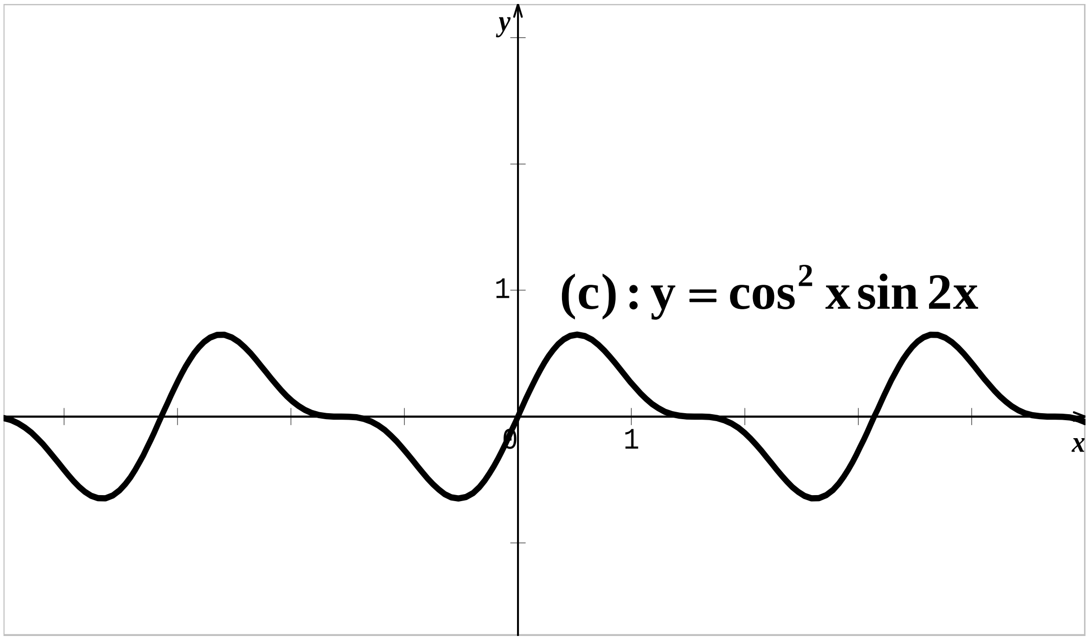
តារាងអថេរភាព

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	|	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\frac{\pi}{6})$	$\searrow$	0

ក្នុងចន្លោះ $(0,\frac{\pi}{2})$ អនុគមន៍មានអតិបរមា $f(\frac{\pi}{6})=\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ។

ចំពោះ $x=\frac{\pi}{2}$ គេបាន $f'(\frac{\pi}{2})=0$ និង $f(\frac{\pi}{2})=0$ ។

ដូចនេះត្រង់ $x=\frac{\pi}{2}$ ក្រាប (c) មានអក្ស័ (ox) ជាបន្ទាត់ប៉ះ ។



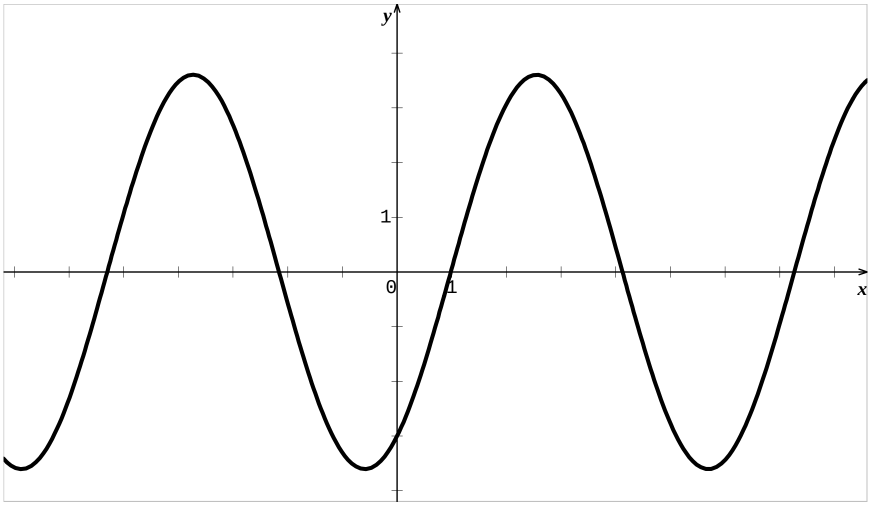
2. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម:

ក. $y = 2\sin x - 3\cos x$ ខ. $y = 5\sin x + \cos x$ ។

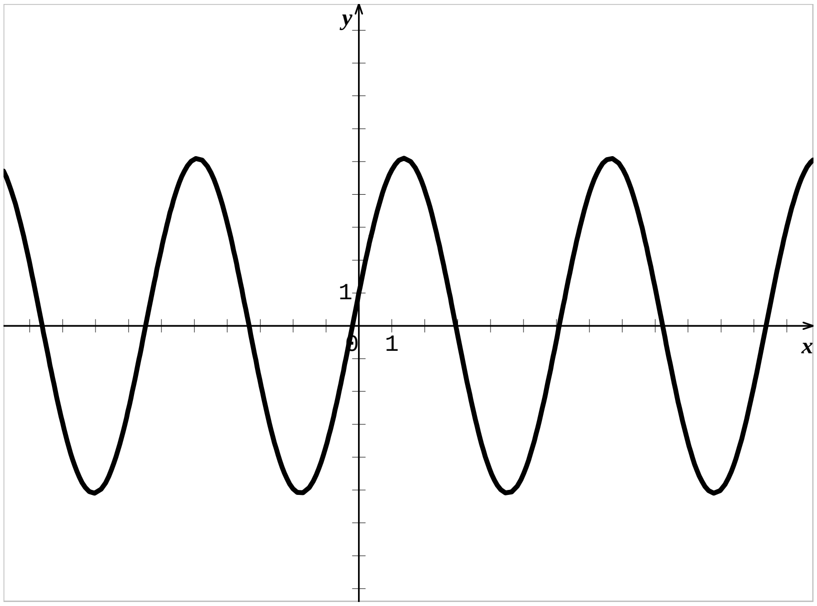
ដំណោះស្រាយ

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប

ក. $y = 2\sin x - 3\cos x$



ខ. $y = 5\sin x + \cos x$

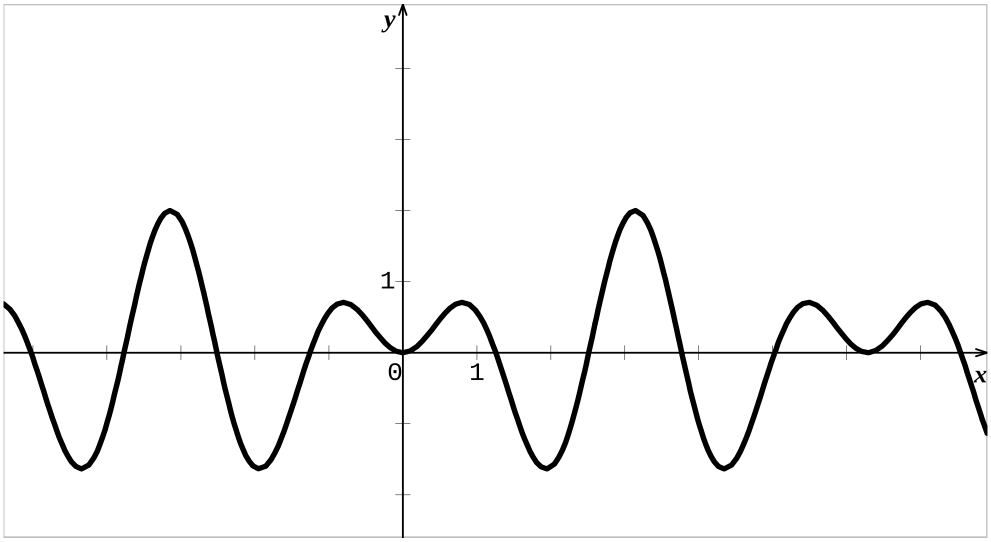


3.សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមៈ

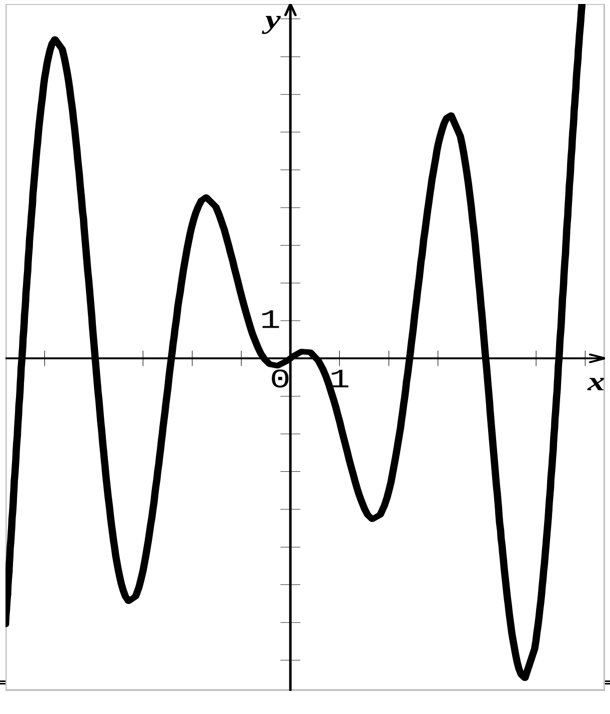
ក.$y = \cos 2x - \cos 3x$ ខ.$y = 2x\cos 2x - \sin x$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.$y = \cos 2x - \cos 3x$



ខ.$y = 2x\cos 2x - \sin x$

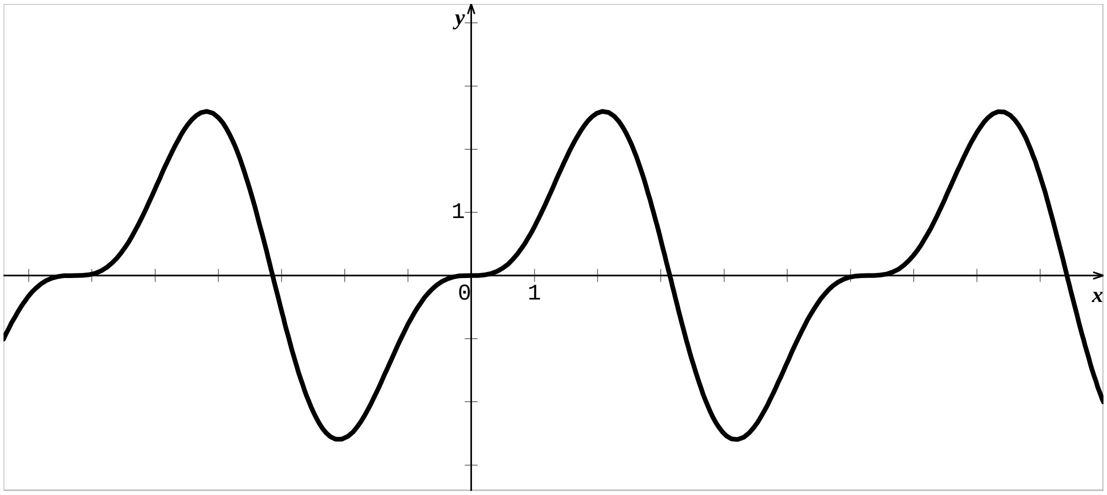


4.សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

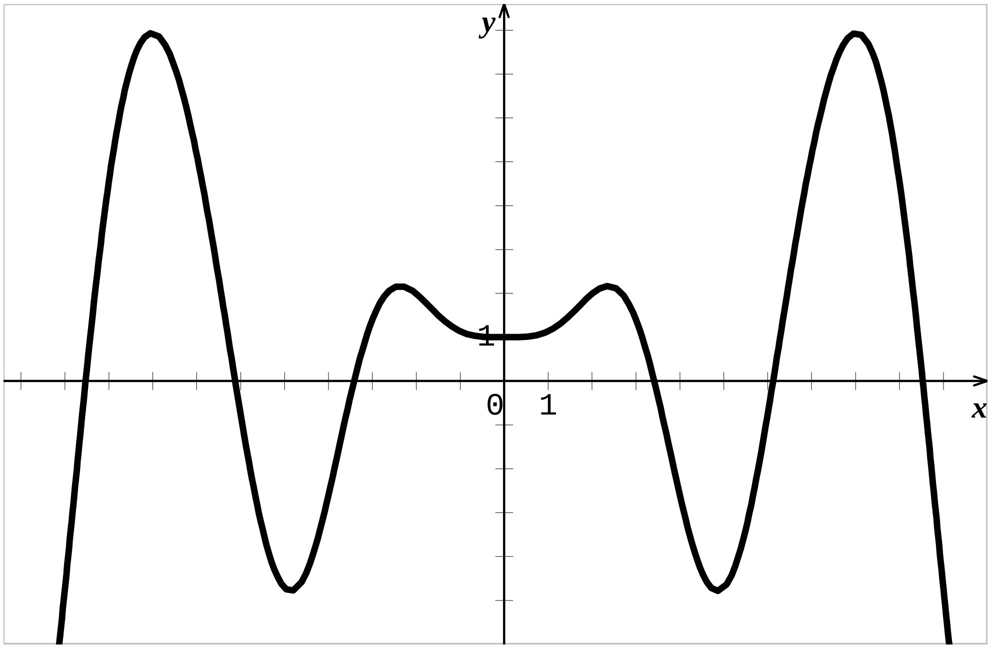
ក.$y = 2\sin x - \sin 2x$ ខ.$y = \cos^2 x + x\sin x$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.$y = 2\sin x - \sin 2x$



ខ.$y = \cos^2 x + x\sin x$

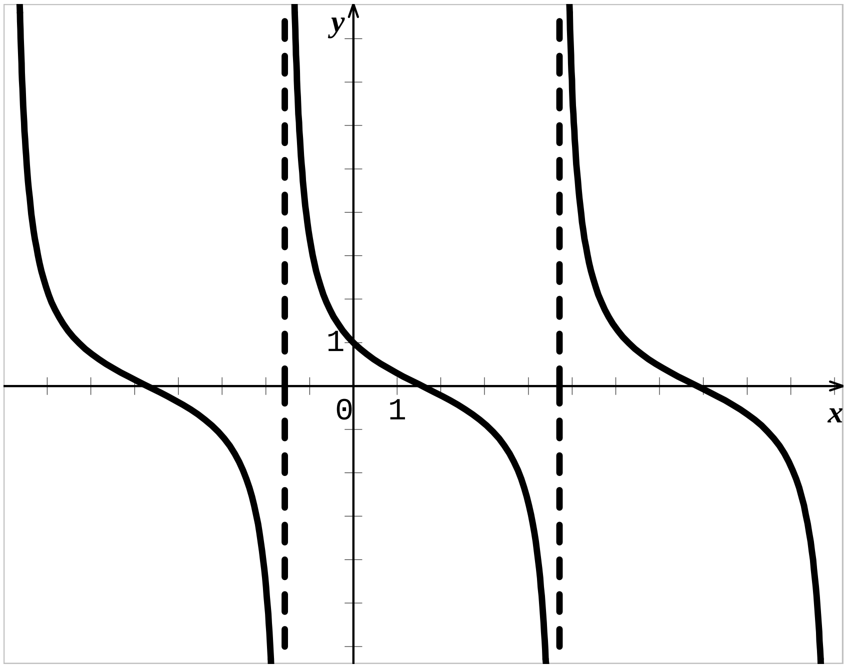


5. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

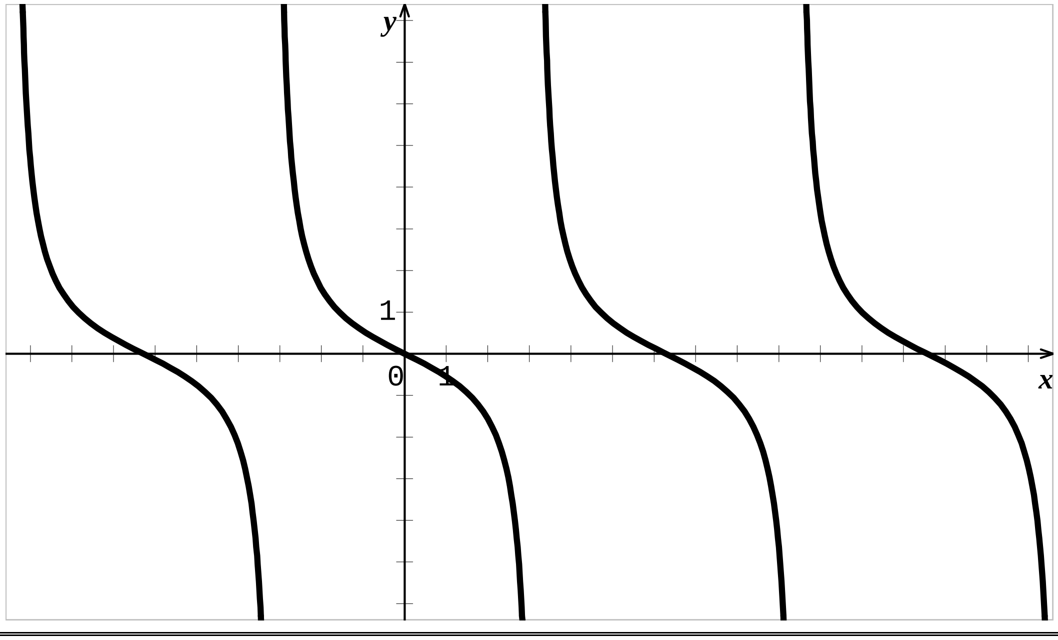
ក. $y=\frac{1-\sin x}{\cos x}$ ខ. $y=\frac{\cos x-1}{\sin x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $y=\frac{1-\sin x}{\cos x}$



ខ. $y=\frac{\cos x-1}{\sin x}$



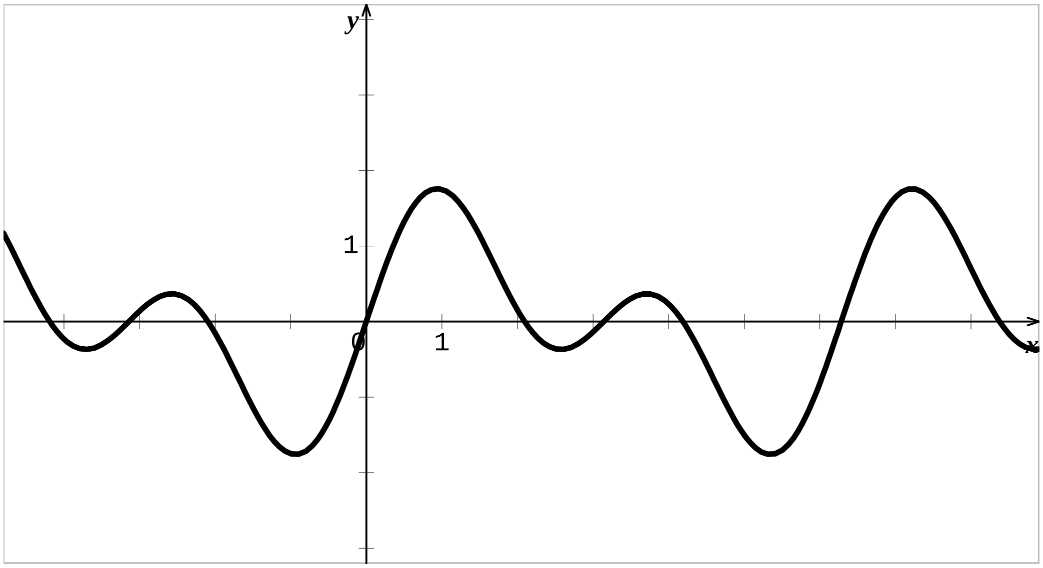
6. គេឱ្យអនុគមន៍ $y = a\sin 2x + \sin x$ ។

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបចំពោះ $a = 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

សង់ក្រាបចំពោះ $a = 1$

គេបាន $y = \sin 2x + \sin x$



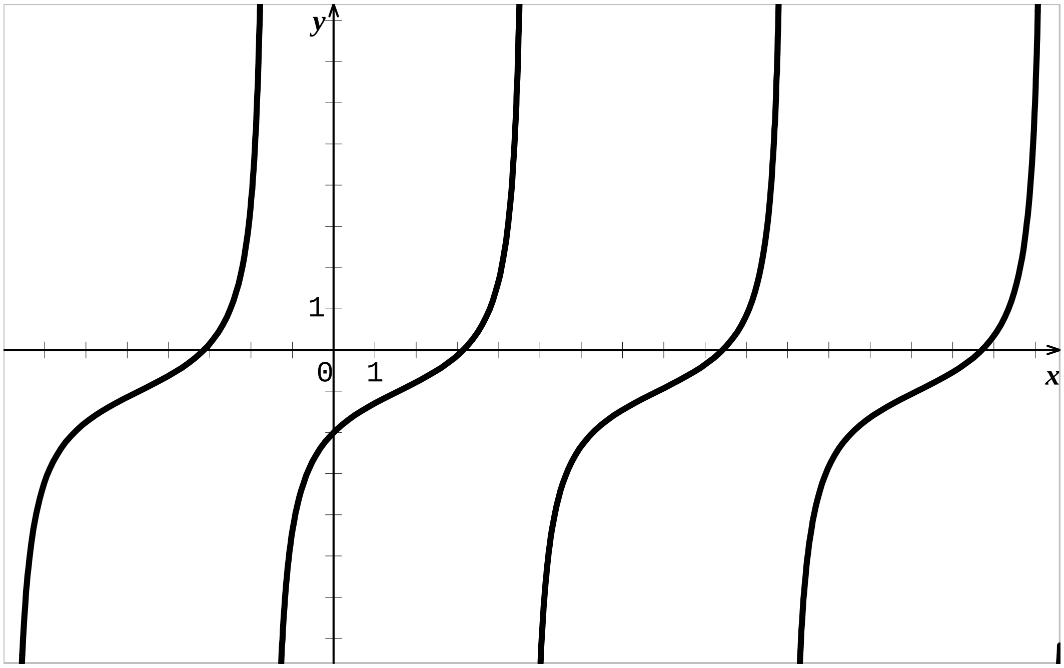
7.គេឱ្យអនុគមន៍ $y = \dfrac{a\sin x - \cos x - 1}{a\cos x}$ ។

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបចំពោះ $a = 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

សង់ក្រាបចំពោះ $a = 1$

គេបាន $y = \dfrac{\sin x - \cos x - 1}{\cos x} = -1 + \dfrac{\sin x - 1}{\cos x}$


y
1
0
1
x

លំហាត់ជំពូក៣ និងដំណោះស្រាយ

1. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y = \sqrt{3x-5}$ ខ. $y = \sqrt{7-4x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

ក. $y = \sqrt{3x-5}$

.ដែនកំណត់ $D = [\frac{5}{3}, +\infty)$

.ទិសដៅអថេរភាព

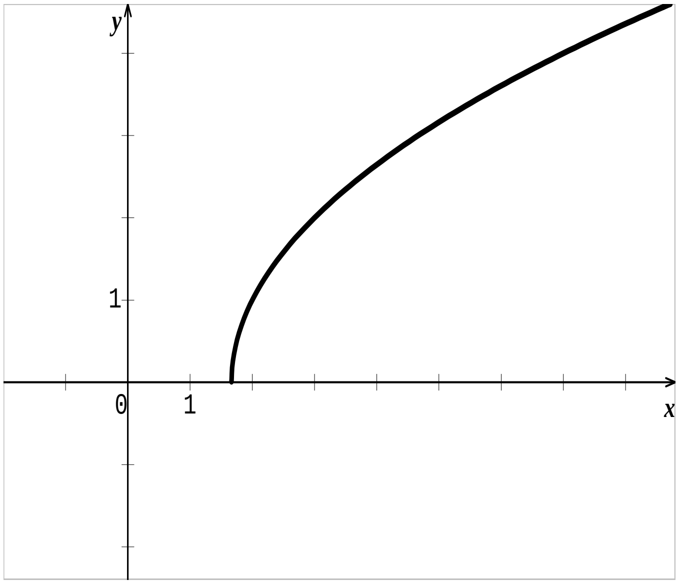
ដេរីវេ $y' = \frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$

ចំពោះ $x > \frac{5}{3}$ គេបាន $y' > 0$ នាំឱ្យវាជាអនុគមន៍កើនលើ $(\frac{5}{3}, +\infty)$

លីមីត $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x-5} = +\infty$

តារាងអថេរភាព

x	$\frac{5}{3}$		$+\infty$
y'	‖	+	
y	0	↗	$+\infty$



ខ.$y=\sqrt{7-4x}$

.ដែនកំណត់ $D=(-\infty,\frac{7}{4}]$

.ទិសដៅអថេរភាព

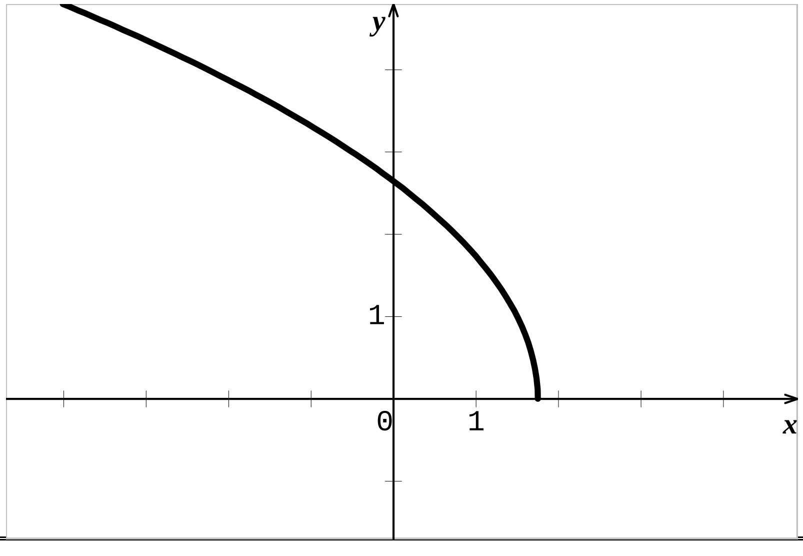
ដេរីវេ $y'=\frac{-2}{\sqrt{7-4x}}$

ចំពោះ $x<\frac{7}{4}$ គេបាន $y'<0$ នាំឱ្យវាជាអនុគមន៍ចុះលើ $(-\infty,\frac{7}{4})$

លីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{7-4x}=+\infty$

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	$\frac{7}{4}$
y'	−	‖
y	$+\infty$ ↘	0



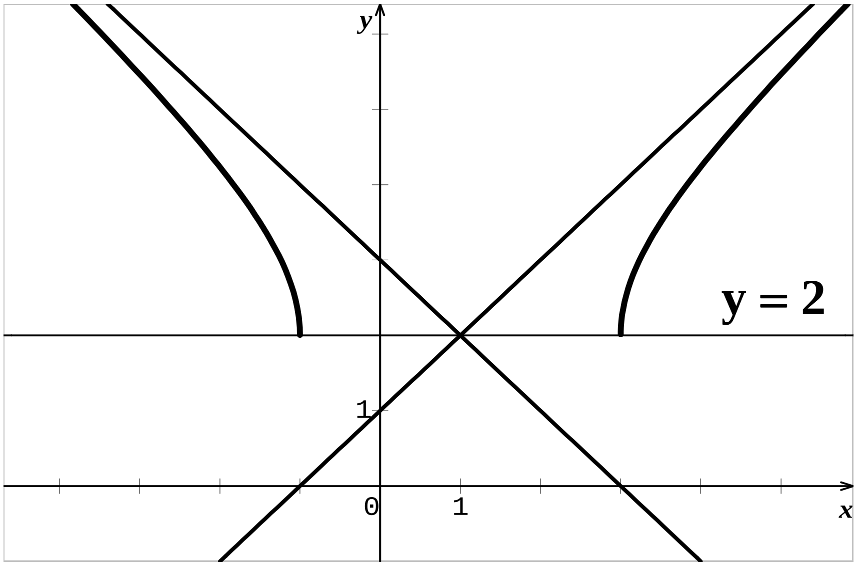
2. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោមៈ

ក. $y = 2 + \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ ខ. $y = 2 + \sqrt{8 - 2x^2}$ ។

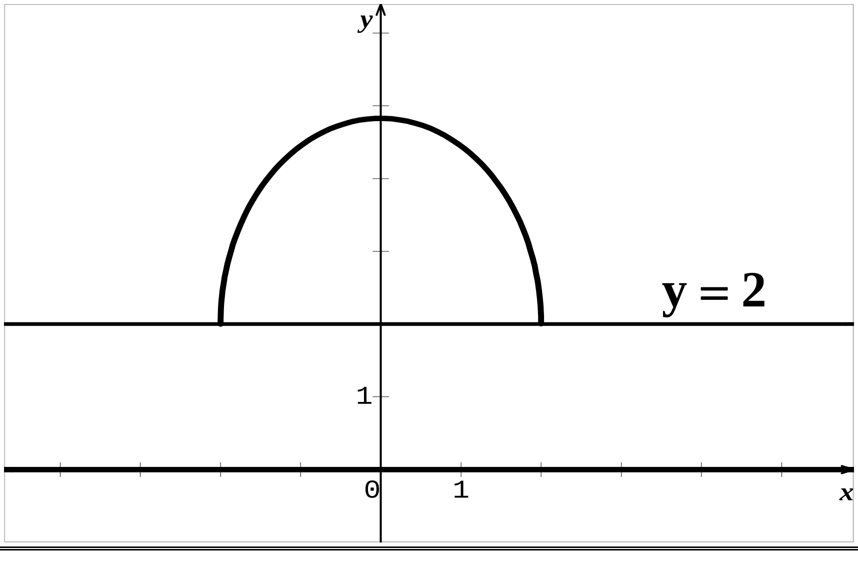
ដំណោះស្រាយ

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

ក. $y = 2 + \sqrt{x^2 - 2x - 3}$



ខ. $y = 2 + \sqrt{8 - 2x^2}$



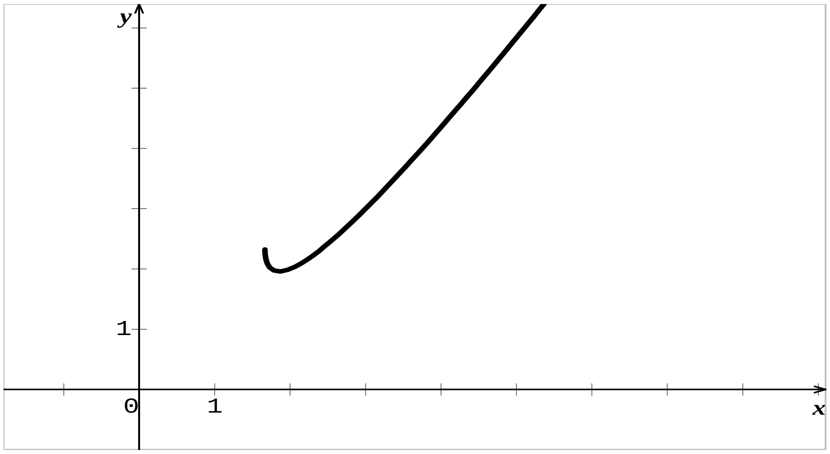
3. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y = 2x - 1 - \sqrt{3x-5}$ ខ. $y = x + 1 - \sqrt{4 - x^2}$ ។

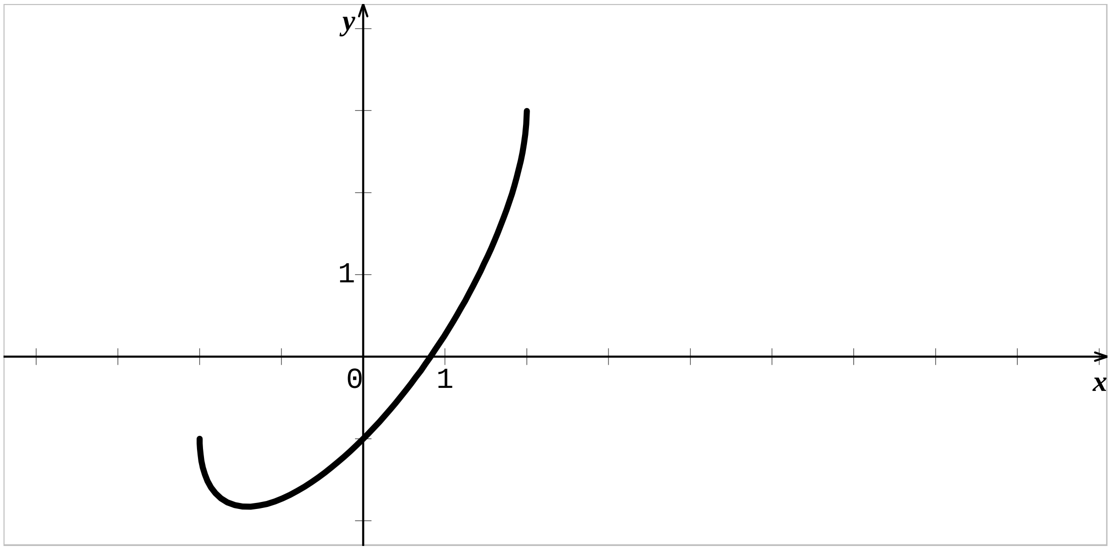
ដំណោះស្រាយ

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

ក. $y = 2x - 1 - \sqrt{3x-5}$



ខ. $y = x + 1 - \sqrt{4 - x^2}$



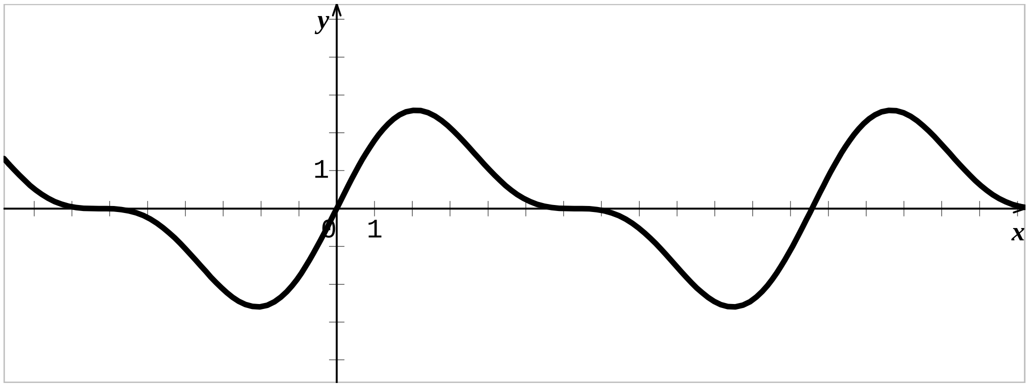
4. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

ក. $y = f(x) = \sin x + 2\sin\frac{x}{2}$ ខ. $y = f(x) = \frac{\cos x - 1}{2\cos x + 1}$ ។

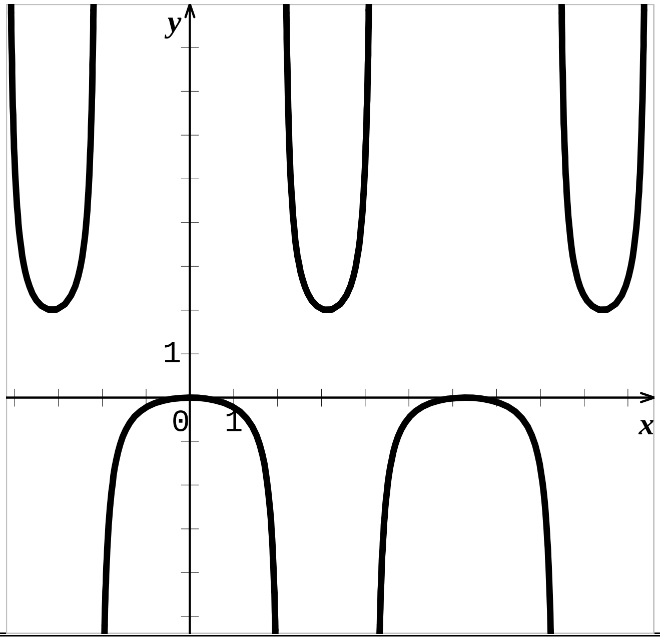
ដំណោះស្រាយ

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

ក. $y = f(x) = \sin x + 2\sin\frac{x}{2}$



ខ. $y = f(x) = \frac{\cos x - 1}{2\cos x + 1}$



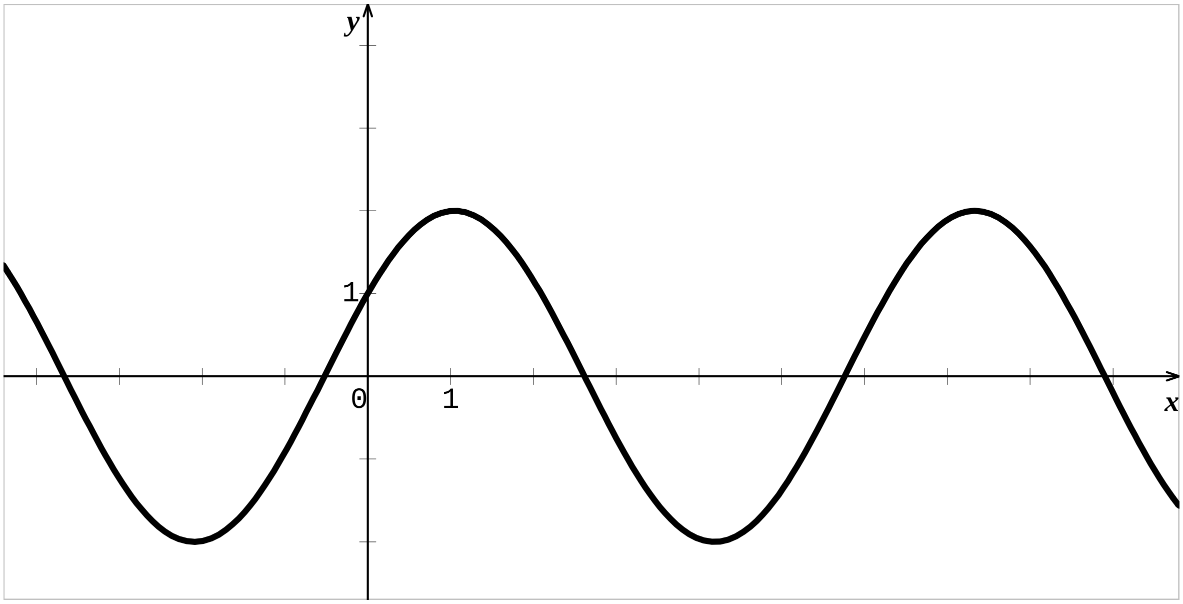
5. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

$$y = f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$$

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍

$$y = f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$$



ជំពូកទី៤ មេរៀនទី១

អាំងតេក្រាលកំណត់

.និយមន័យ

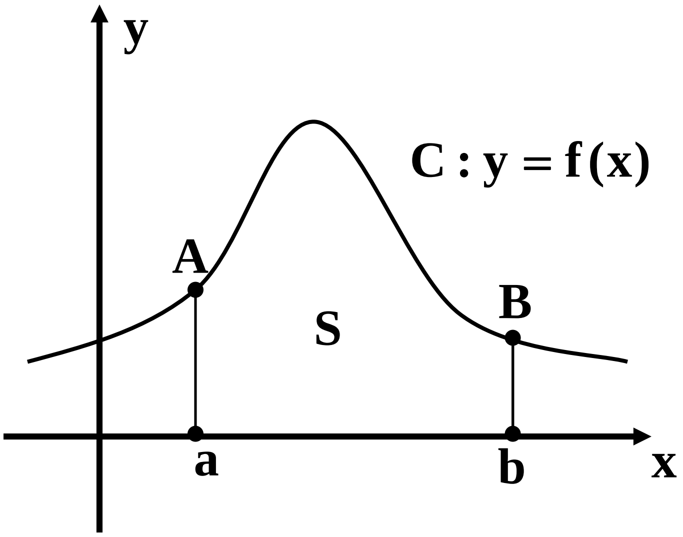
f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ។

អាំងតេក្រាលកំណត់ពី a ទៅ b នៃ $y=f(x)$ កំណត់ដោយ

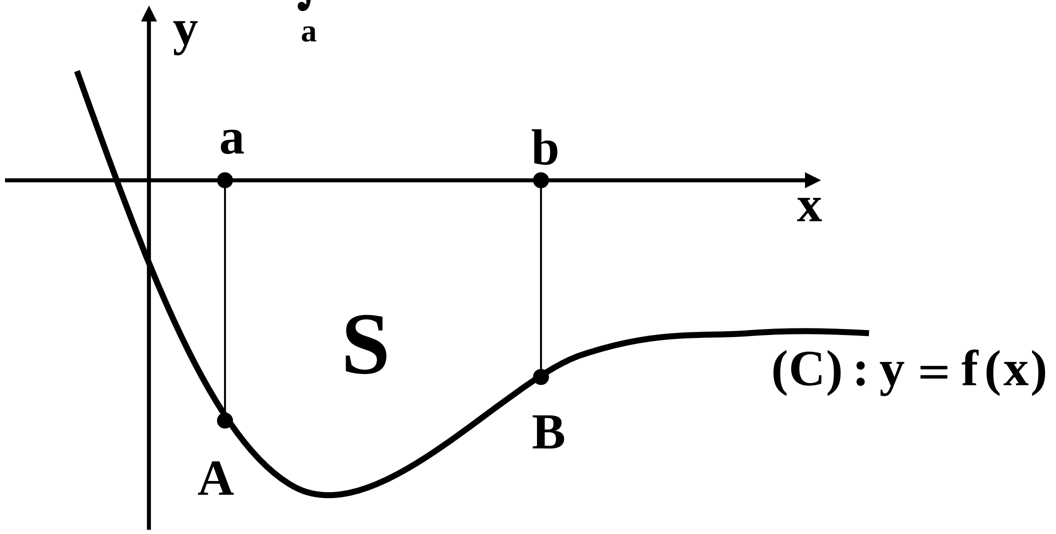
$$\int_a^b f(x).dx = F(b)-F(a)$$ ដែល $F'(x)=f(x)$ ។

.ផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃកប្លង់

-បើអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង អក្ស័អាប់ស៊ីស បន្ទាត់ឈរ $x=a$, $x=b$ កំណត់ដោយ $S=\int_a^b f(x).dx$ បើ $f(x)\ge 0$

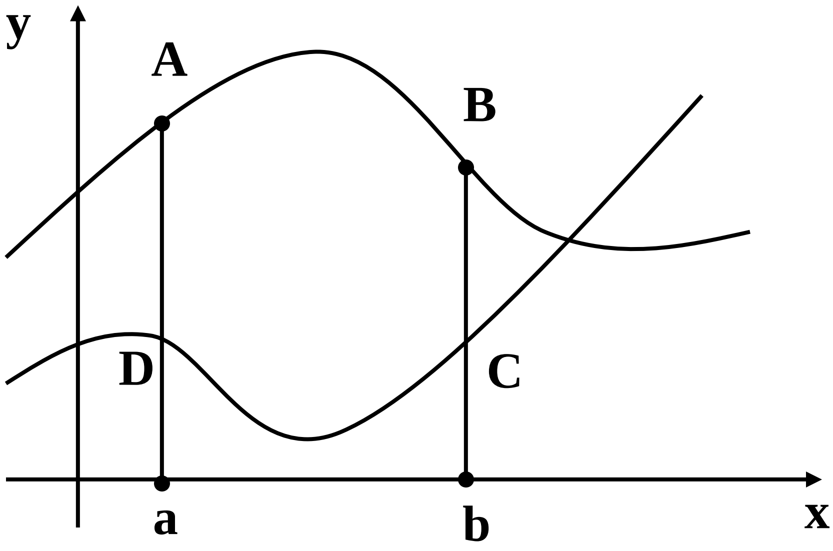


-បើអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង អក្ស័រអាប់ស៊ីស បន្ទាត់ឈរ $x=a$, $x=b$ កំណត់ដោយ $S=-\int_a^b f(x).dx$ បើ $f(x)\le 0$ ។



-បើ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b]$ នោះគេបានផ្ទៃក្រឡានៅចន្លោះខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ទាំងពីរកំណត់ដោយ $S=\int_a^b [f(x)-g(x)].dx$

ដែល $f(x)\ge g(x)$ គ្រប់ $x\in[a,b]$ ។



លំហាត់

1.ដោយប្រើនិយមន័យគណនាអាំតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក.$\int_0^2 3x\,dx$ ខ.$\int_2^4 4x\,dx$

គ.$\int_0^2 x^2\,dx$ ឃ.$\int_0^2 \left(x^2 - 5x\right)dx$

ង.$\int_1^2 x^2\,dx$ ។

2.គណនាតម្លៃប្រហែលនៃផ្ទៃក្រលាដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាង $y = f(x)$ និងអក្ស $x'ox$ លើចន្លោះ $[a,b]$ ដែល៖

ក.$f(x) = 9 - x^2$ ដែល $[a,b] = [-3,2]$, $n = 5$

ខ.$f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ ដែល $[a,b] = [-1,3]$, $n = 4$

3.គណនាក្រលាផ្ទៃខណ្ឌដោយក្រាបនិងអក្សអាប់ស៊ីសលើចន្លោះដែលឲ្យ៖

ក.$f(x) = x^2$ ដែល $x \in [1,3]$

ខ.$f(x) = x^2 + 2x - 3$ ដែល $x \in [1,3]$

គ.$f(x) = 2 - x^3$ ដែល $x \in [-3,-2]$

ឃ.$f(x) = \dfrac{3}{2x+1}$ ដែល $x \in [0,2]$ ។

4.គណនាក្រលាផ្ទៃខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ទាំងពីរៈ

ក.$f(x)=x^2+2$ និង $g(x)=x$, $x\in[2,5]$

ខ.$f(x)=x^2$ និង $g(x)=x^3$, $x\in[0,1]$

គ.$f(x)=\sqrt{2x+1}$ និង $g(x)=3x+2$, $x\in[0,2]$

ឃ.$f(x)=e^{x-1}$ និង $g(x)=x$, $x\in[1,4]$

5. គណនាក្រលាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍

$x=y^2$ និង $y=x-2$ ។

6. គណនាក្រលាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍

$y=f(x)$ និង $y=g(x)=\sqrt{2-x}$ និង $x'ox$ ។

7. គណនាក្រលាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍

$y=f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ និង $y=g(x)=e^{0.7x}$ និង $x\in[0,4]$ ។

ដំណោះស្រាយ

1.ដោយប្រើនិយមន័យគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក.$\int_0^2 3x dx$ ខ.$\int_2^4 4x dx$

គ.$\int_0^2 x^2 dx$ ឃ.$\int_0^2 (x^2 - 5x) dx$

ង.$\int_1^2 x^2 dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.$\int_0^2 3x dx = \left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^2 = 6 - 0 = 6$

ខ.$\int_2^4 4x dx = \left[2x^2\right]_2^4 = 32 - 8 = 24$

គ.$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}$

ឃ.$\int_0^2 (x^2 - 5x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2\right]_0^2 = (\frac{8}{3} - \frac{20}{2}) = -\frac{22}{3}$

ង.$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ ។

2.គណនាក្រលាផ្ទៃខណ្ឌដោយក្រាបនិងអក្ស័រអាប់ស៊ីសលើចន្លោះដែលឱ្យៈ

ក.$f(x)=x^2$ ដែល $x\in[1,3]$

ខ.$f(x)=x^2+2x-3$ ដែល $x\in[1,3]$

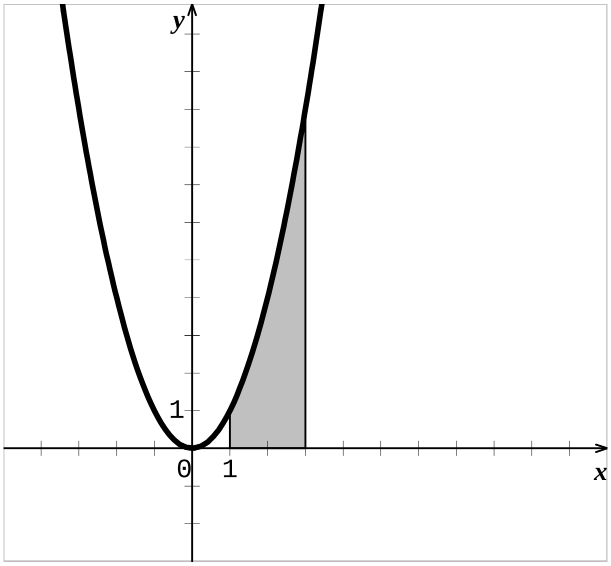
គ.$f(x)=2-x^3$ ដែល $x\in[-3,-2]$

ឃ.$f(x)=\dfrac{3}{2x+1}$ ដែល $x\in[0,2]$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាក្រលាផ្ទៃ

ក.$f(x)=x^2$ ដែល $x\in[1,3]$



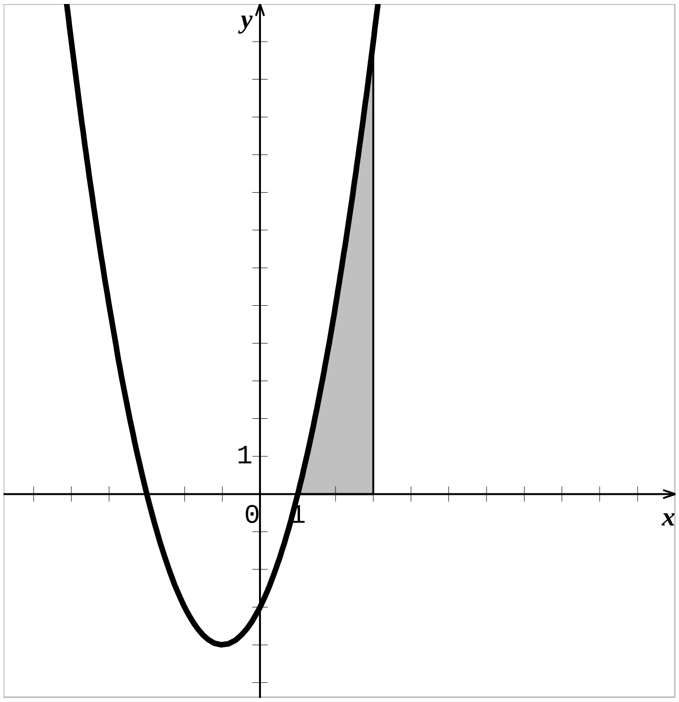
គេបាន $S=\int_1^3 x^2dx$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3$$

$$=\frac{27}{3}-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$$

ដូចនេះ $S=\dfrac{26}{3}$ (ឯកតាផ្ទៃ)

ខ. $f(x) = x^2 + 2x - 3$ ដែល $x \in [1, 3]$



យើងបាន

$$S = \int_1^3 (x^2 + 2x - 3).dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right]_1^3$$

$$= 9 - (-\frac{5}{3}) = \frac{32}{3}$$

ដូចនេះ $S = \frac{32}{3}$ ឯកតាផ្ទៃ

គ. $f(x) = 2 - x^3$ ដែល $x \in [-3, -2]$

គេបាន $S = \int_{-3}^{-2} (2 - x^3).dx$

$$= \left[2x - \frac{x^4}{4}\right]_{-3}^{-2}$$

$$= (-4 - 4) - (-6 - \frac{81}{4})$$

$$= -2 + \frac{81}{4} = \frac{73}{4}$$

ឃ. $f(x)=\dfrac{3}{2x+1}$ ដែល $x\in[0,2]$ ។

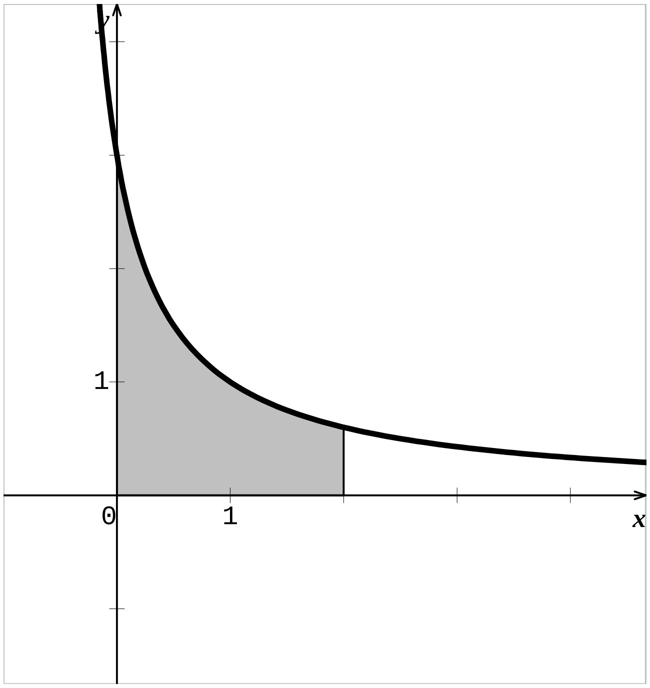
គេបាន

$$S=\int_0^2\frac{3dx}{2x+1}$$

$$=3\left[\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]_0^2$$

$$=\frac{3}{2}\ln 5$$

ដូចនេះ $S=\dfrac{3}{2}\ln 5$ ឯកតាផ្ទៃ



3.គណនាក្រលាផ្ទៃខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ទាំងពីរ:

ក. $f(x)=x^2+2$ និង $g(x)=x$, $x\in[2,5]$

ខ. $f(x)=x^2$ និង $g(x)=x^3$, $x\in[0,1]$

គ. $f(x)=\sqrt{2x+1}$ និង $g(x)=3x+2$, $x\in[0,2]$

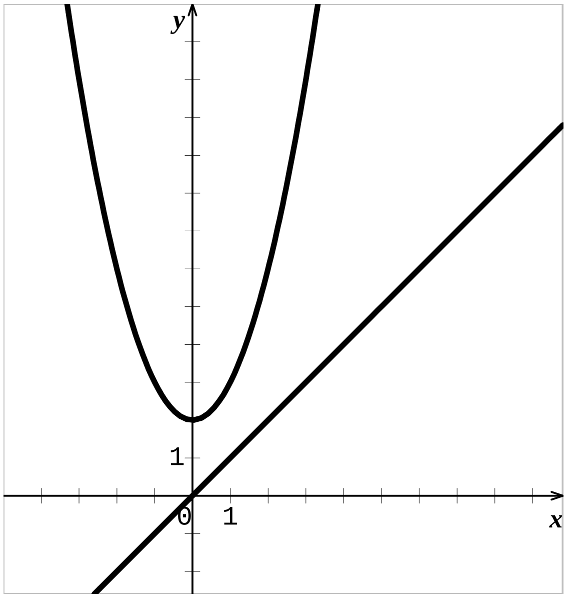
ឃ. $f(x)=e^{x-1}$ និង $g(x)=x$, $x\in[1,4]$

ដំណោះស្រាយ

គណនាក្រលាផ្ទៃ

ក. $f(x) = x^2 + 2$ និង $g(x) = x$, $x \in [2,5]$

យើងបាន



$$S = \int_2^5 (x^2 + 2 - x).dx$$

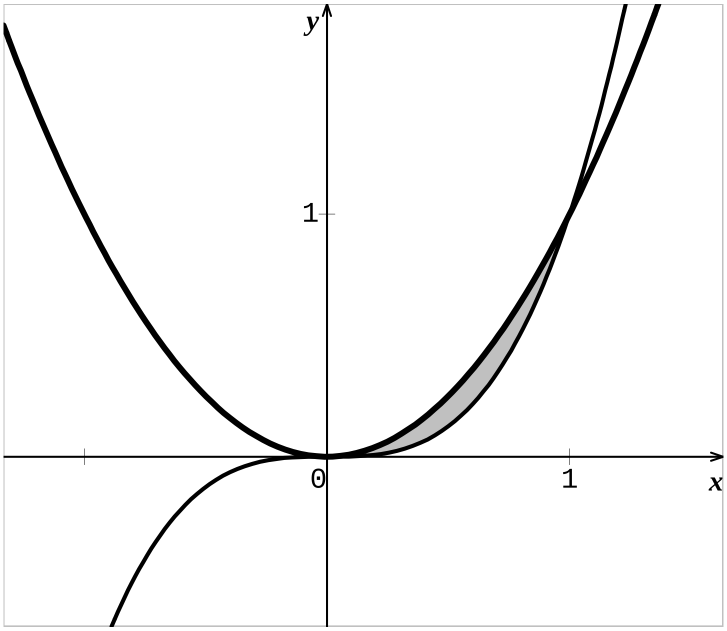
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{2}x^2\right]_2^5$$

$$= \frac{235}{6} - \frac{14}{3} = \frac{69}{2}$$

ដូចនេះ $S = 34.5$ ឯកតាផ្ទៃ

ខ. $f(x) = x^2$ និង $g(x) = x^3$, $x \in [0,1]$

គេបាន



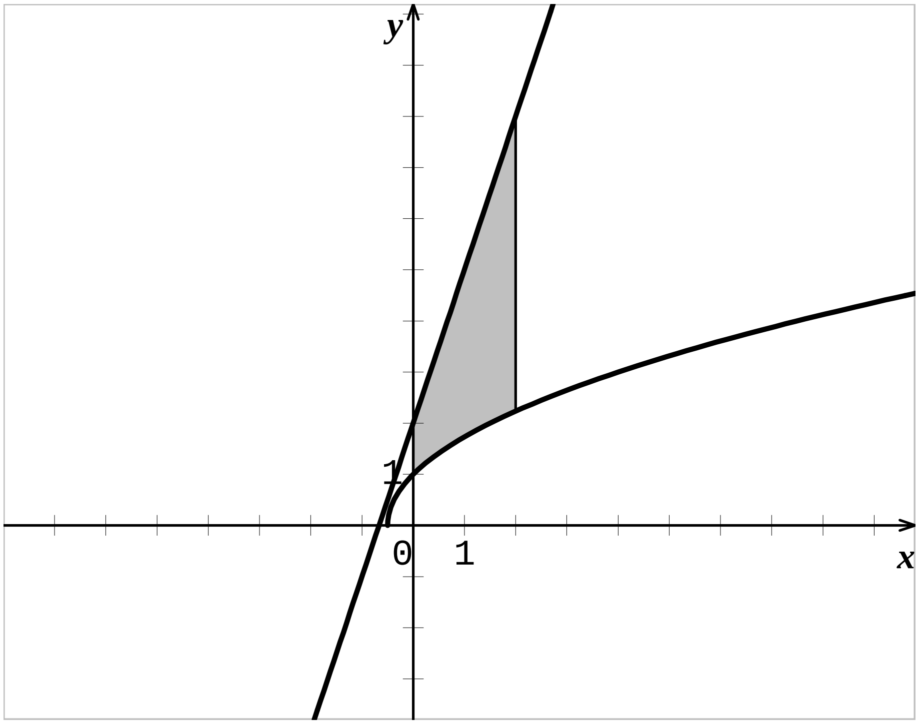
$$S = \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right).dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

ដូចនេះ $S = \frac{1}{12}$ ឯកតាផ្ទៃ

គ. $f(x) = \sqrt{2x+1}$ និង $g(x) = 3x + 2$, $x \in [0, 2]$



យើងបាន $S = \int_0^2 \left(3x + 2 - \sqrt{2x+1}\right).dx$

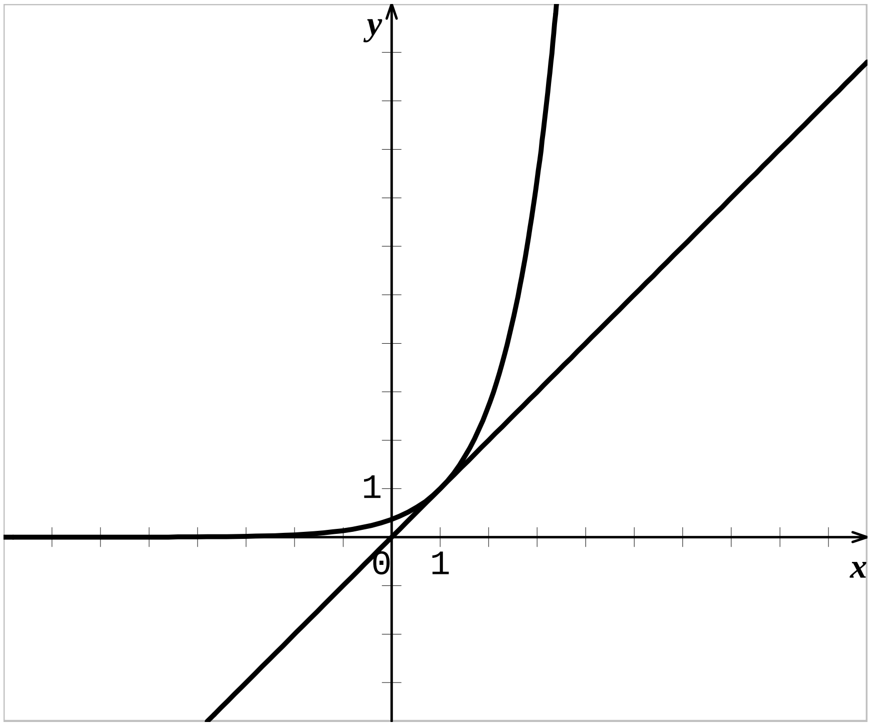
$$= \left[\frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$

$$= (10 - \frac{\sqrt{125}}{3}) - (0 - \frac{1}{3})$$

$$= \frac{31 - 5\sqrt{5}}{3}$$

ដូចនេះ $S = \dfrac{31 - 5\sqrt{5}}{3}$ ។

ឃ. $f(x) = e^{x-1}$ និង $g(x) = x$, $x \in [1,4]$



គេបាន

$$S = \int_1^4 (e^{x-1} - x).dx$$

$$= \left[e^{x-1} - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^4$$

$$= (e^3 - 8) - (1 - \frac{1}{2})$$

$$= e^3 - \frac{17}{2}$$

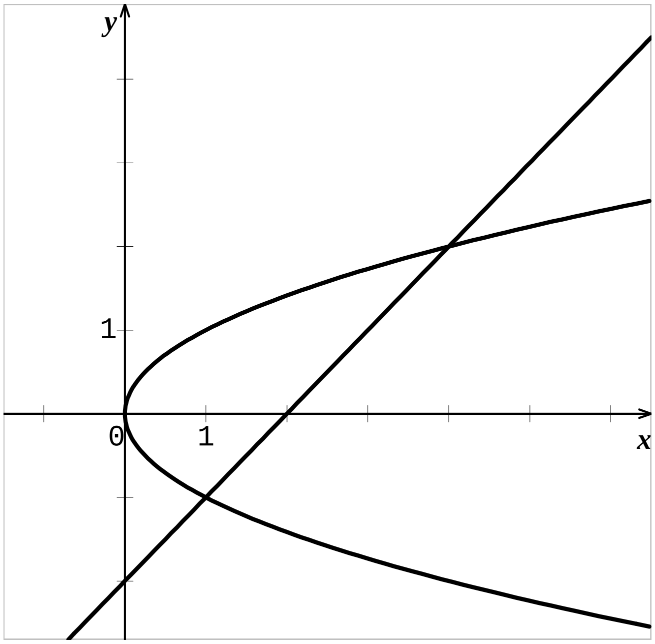
ដូចនេះ $S = \frac{2e^3 - 17}{2}$ ។

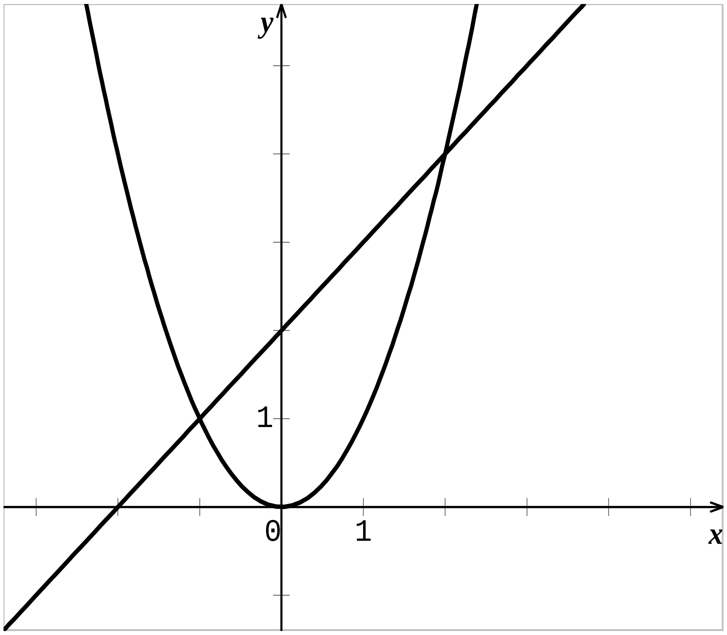
4. គណនាក្រលាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍

$x = y^2$ និង $y = x - 2$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាក្រលាផ្ទៃ





គេមាន $y = x - 2$ នាំឱ្យ $x = y + 2$

គេបាន $S = \int_{-1}^{2} (y + 2 - y^2).dy$

$$= \left[\frac{1}{2} y^2 + 2y - \frac{1}{3} y^3 \right]_{-1}^{2}$$

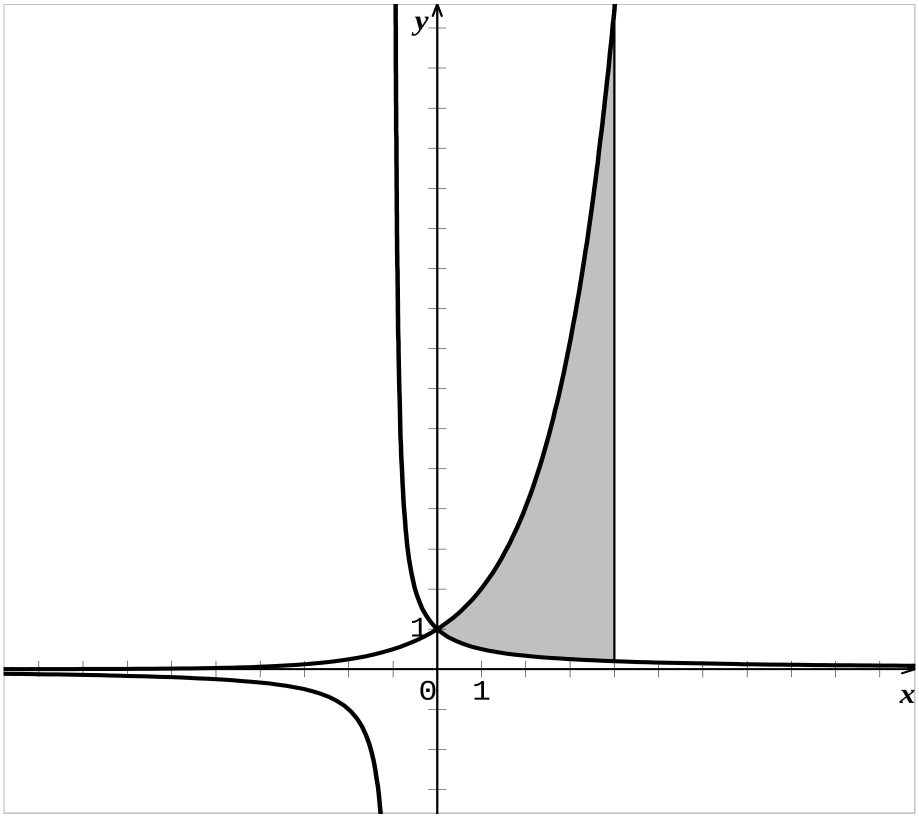
$$= (6 - \frac{8}{3}) - (\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}) = \frac{20 - 3 + 12 - 2}{6} = \frac{9}{2}$$

5. គណនាក្រលាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍

$$y=f(x)=\frac{1}{x+1} \text{ និង } y=g(x)=e^{0.7x} \text{ និង } x\in[0,4] \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាក្រលាផ្ទៃ



$$S=\int_0^4 (e^{0.7x}-\frac{1}{x+1}).dx$$

$$=\left[\frac{1}{0.7}e^{0.7x}-\ln(x+1)\right]_0^4=20.45$$

ដូចនេះ $S=20.45$ ឯកតាផ្ទៃ ។

ជំពូកទី៤ មេរៀនទី២

មាឌសូលីតនិងប្រវែងធ្នូ

◆ បើអនុគមន៍ f វិជ្ជមានហើយជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះមាឌនៃសូលីដបរិវត្តន៍បានពីរង្វិលជុំវិញអក្ស័អាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ អក្ស័អាប់ស៊ីស បន្ទាត់ឈរ $x=a$ និង $x=b$ កំណត់ដោយ $V=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\pi f^2(x_k).\Delta x\right]=\pi\int_a^b f^2(x).dx$ ។

◆ មាឌនៃសូលីដបរិវត្តកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអក្ស័ (ox) នៃផ្ទៃខណ្ឌដោយក្រាប $y=f(x)$ និង $y=g(x)$ លើចន្លោះ $[a,b]$ ដែល $f(x)\geq g(x)$ កំណត់ដោយ $V=\pi\int_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right].dx$ ។

◆ អនុគមន៍ F ដែលកំណត់លើចន្លោះ $[a,b]$ ដោយ $F(x)=\int_a^x f(t).dt$ ហៅថាអនុគមន៍កំណត់តាមអាំងតេក្រាលកំណត់ ។

◆ តម្លៃមធ្យមនៃ f កំណត់ជាប់លើ $[a,b]$ គឺ $y_m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x).dx$

◆ ប្រវែងធ្នូនៃក្រាបតាង f លើ $[a,b]$ គឺ $L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}.dx$

លំហាត់

1.ក.គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអក្ស $x'ox$ នៃផ្ទៃក្រលាដែលខណ្ឌដោយក្រាប តាងអនុគមន៍ $y = 2x + 1$ អក្ស $x'ox$ បន្ទាត់ឈរ $x = 1$ និង $x = 3$ ។

ខ.គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអក្ស $x'ox$ នៃផ្ទៃក្រលាដែលខណ្ឌដោយក្រាប តាងអនុគមន៍ $y = x^2 + 1$ អក្ស $x'ox$ បន្ទាត់ឈរ $x = 0$ និង $x = 3$ ។

គ.គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអក្ស $x'ox$ នៃផ្ទៃក្រលាដែលខណ្ឌដោយក្រាប តាងអនុគមន៍ $y = \sqrt{x} - 3$ អក្ស $x'ox$ បន្ទាត់ឈរ $x = 4$ ទៅ $x = 9$ ។

2.ក.គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអក្ស $x'ox$ នៃផ្ទៃក្រលាដែលខណ្ឌដោយក្រាប តាងអនុគមន៍ $f(x) = x^2$ និង $g(x) = 4x - x^2$ ។

ខ.គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអក្ស $x'ox$ នៃផ្ទៃក្រលាដែលខណ្ឌដោយក្រាប តាងអនុគមន៍ $f(x) = x^2 - 2x + 3$ និង $g(x) = 9 - x$ ។

3.ចំពោះអនុគមន៍ $F(x)=\int_1^x \sin \pi t\,dt$ ។ គណនា

ក.$F(-1)$ ខ.$F'(0)$

គ.$F'\left(\frac{1}{2}\right)$ ឃ.$F''(x)$ ។

4.ផ្ទៃក្រលា A ខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $g(t)=4-\frac{4}{t^2}$ និង អក្ស័អាប់ស៊ីសលើចន្លោះ$[1,x]$ កំណត់ដោយ $A(x)=\int_1^x\left(4-\frac{4}{t^2}\right)dt$ ។

ក.គណនា A ជាអនុគមន៍នៃ x ។ តើក្រាបអនុគមន៍ A មានសមីការ អាស៊ីមតូតដេក រឺ ទេ?

ខ.រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ g ។

5. គណនា $F'(x)$ បើ

ក.$F(x)=\int_x^{x+2}(4t+1)dt$ ខ.$F(x)=\int_{-x}^{x} t^3 dt$

គ.$F(x)=\int_0^{\sin x}\sqrt{t}\,dt$ ឃ.$F(x)=\int_2^{x^2}\frac{1}{t^2}dt$

ង.$F(x)=\int_0^{x^3}\sin t\,dt$ ច.$F(x)=\int_{\sin x}^{0}\frac{1}{2+t}dt$ ។

6.ក.បង្ហាញថាបើ $f(t)$ ជាអនុគមន៍សេស នោះ $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ គ្រប់ $x\in IR$ ជាអនុគមន៍សេសដែររឺទេ?

7.គេបោះដុំស្ករសូកូឡាបានទទួលវិក័យប័ត្រចំនួន 1200 រៀងរាល់ 30 ថ្ងៃម្តង ។ ស្ករសូកូឡាត្រូវបានលក់បន្តឱ្យអ្នកលក់រាយដោយអត្រាថេរនិង x ជាថ្ងៃបន្ទាប់ពីទទួលវិក័យប័ត្រមកដល់ ហើយបញ្ជីទូទាត់កំណត់ដោយ $I(x) = 1200 - 40x$ ។

គណនាមធ្យមប្រចាំថ្ងៃនៃការទូទាត់ ។

គណនាមធ្យមប្រចាំថ្ងៃនៃលក់ស្ករសូកូឡា បើស្ករសូកូឡាមួយគ្រប់ថ្ងៃ 300 រៀល ។

8.ក.គណនាប្រវែងធ្នូនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ ពី $x = 1$ ទៅ $x = 3$ ។

ខ.ឧបមាថា $f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$ ។ បន្ទាត់ជួបអក្សអរដោនេត្រង់ B ហើយប៉ះនិងក្រាបតាង f ត្រង់ចំនុច $A(a, f(a))$ ដែល $a > 0$ ។ ប្រៀបធៀបប្រវែងនៃអង្គត់ AB និងប្រវែងធ្នូរនៃក្រាបតាង f នៅបន្លោះបន្ទាត់ឈរ $x = 0$ និង $x = a$ ។

9.រកផ្ទៃក្រលា S នៃស្វ៊ែរដែលមានកាំ r ។

លំហាត់ជំពូក៤

1.គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

ក. $\int_{2}^{2}(4-x^2)(2+x)^n\,dx$

ខ. $\int_{6}^{8}\frac{x}{x^2-6x+8}dx$

គ. $\int_{0}^{1}\frac{x^2}{x^2-x-2}dx$

ឃ. $\int_{1}^{3}\frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$

ង. $\int_{0}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx$

ច. $\int_{0}^{1}\frac{x}{1+3x^2}dx$

ឆ. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{3+\cos^2 x}dx$

ជ. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos^2 x\,dx$ ។

2.គណនា

ក. $\int_{0}^{\pi}e^{-at}\cos^2\frac{t}{2}dt \quad (a\neq 0)$

ខ. $\int_{1}^{e}\frac{\sin(\pi\ln x)}{x}dx$

គ. $\int_{0}^{\sqrt{\ln 6}}\frac{x}{e^{-x^2}+e^{x^2}+2}dx$

ឃ. $\int_{0}^{1}\left(4-x^2-\sqrt{1-x^2}\right)dx$

ង. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

ច. $\int_{0}^{a}\sqrt{2ax-x^2}\,dx$

ឆ. $\int_{0}^{a}(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}dx$

ជ. $\int_{0}^{1}\frac{2x}{x^2-x+1}dx$

3.គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $x'ox$ នៃផ្ទៃក្រលាខណ្ឌដោយក្រាភិចតាងអនុគមន៍ $f(x)=x+6$ និង $g(x)=x^2$ លើចន្លោះ $x\in[-2,3]$ ។

4. គណនាមាឌសូលីតបិវត្តកំណត់បានពីរង្វិលនៃផ្ទៃក្រលាខណ្ឌដោយក្រាភិច តាងអនុគមន៍ $y=\sqrt{3-x}$ និង អក្ស $x'ox$, $(-1\le x\le 2)$ ជុំវិញអក្ស $x'ox$ ។

5. គណនាមាឌសូលីតបិវត្តកំណត់បានពីរង្វិលចំនួន 360^0 ជុំវិញអក្ស អាប់ស៊ីសនៃផ្ទៃក្រលាខណ្ឌដោយក្រាភិចតាងអនុគមន៍ $y=1-x^2$ និង អក្ស $x'ox$, $x\in[-1,1]$ ។

6. គណនាមាឌសូលីតបិវត្តកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអក្ស $x'ox$ នៃផ្ទៃក្រលាខណ្ឌដោយក្រាភិចតាងអនុគមន៍ $f(x)=2x^2$ និង $g(x)=4x-x^2$ ។

7. គណនាមាឌសូលីតបិវត្តកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអក្ស $x'ox$ នៃផ្ទៃក្រលាខណ្ឌដោយក្រាភិចតាងអនុគមន៍ $f(x)=2-x^2$ និង $g(x)=x$ លើចន្លោះ $x\in[0,1]$ ។

8. គណនាមាឌសូលីតបិវត្តកំណត់បានពីរង្វិល ចំនួន 180^0 ជុំវិញអក្ស $x'ox$ នៃផ្ទៃក្រលាខណ្ឌដោយក្រាភិចតាងអនុគមន៍ $f(x)=8-x^2$ និង $g(x)=x^2$ ។

9.គណនាផ្ទៃក្រលាដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=\sin\frac{\pi}{2}x$ និង $y=x^4$ ។

10. គណនាផ្ទៃក្រលាដែលខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=\sin^3 x$ និង $y=\cos^3 x$ នៅចន្លោះ $x=\frac{\pi}{4}$ និង $x=\frac{5\pi}{4}$ ។

11. គណនាផ្ទៃក្រលាដែលខណ្ឌដោយក្រាប C_1 និង C_2 អនុគមន៍ $y=\sin x \quad , \ (0\le x\le \pi)$ និង $y=\sin 3x \quad , \quad (0\le x\le \pi)$

12.ពិនិត្យក្រាប $y=\sin 2x$ និង $y=\cos x$ ដែល $0\le x\le \pi$ ។

ក.រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វនៃក្រាបទាំងពីរ ។

ខ.រកផ្ទៃក្រលា S ដែលខណ្ឌដោយក្រាបទាំងពីរ ។

13.C ជាក្រាបតាង $f(x)=\ln(x+1)$ និង L ជាបន្ទាត់ប៉ះនឹង C ដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើនឹង $\frac{1}{2}$ ។

ក.រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ L ។

ខ.គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $x'ox$ នៃផ្ទៃក្រលាខណ្ឌដោយក្រាប C , L និង អ័ក្សអរដោនេ ។

14.តាង C ជាក្រាប $y=e^{2x-1}$ និង L ជាបន្ទាត់ប៉ះនឹង C ត្រង់ចំនុច $P(1,e)$ ។

ក. រកសមីការបន្ទាត់ L ។

ខ.រកផ្ទៃក្រលា S ដែលខណ្ឌដោយក្រាបC បន្ទាត់ L និងអ័ក្សអរដោនេ ។

15. តាង C ជាក្រាប $y = xe^x$, L_1 , L_2 ជាបន្ទាត់ប៉ះ C ដែលគូស ចេញពីចំនុច $\left(\frac{1}{2},0\right)$ ។

ក.រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ L_1 ,L_2 ។

ខ.រកផ្ទៃក្រលា S ដែលខណ្ឌដោយក្រាប C និង បន្ទាត់ប៉ះដែលមានក្នុង សំនួរទី 1។

ដំណោះស្រាយ

1.ក.គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអក្សរ $x'ox$ នៃផ្ទៃក្រលាដែលខណ្ឌដោយក្រាប តាងអនុគមន៍ $y = 2x + 1$ អក្ស $x'ox$ បន្ទាត់ឈរ $x = 1$ និង $x = 3$ ។

ខ.គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអក្សរ $x'ox$ នៃផ្ទៃក្រលាដែលខណ្ឌដោយក្រាប តាងអនុគមន៍ $y = x^2 + 1$ អក្ស $x'ox$ បន្ទាត់ឈរ $x = 0$ និង $x = 3$ ។

គ.គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអក្សរ $x'ox$ នៃផ្ទៃក្រលាដែលខណ្ឌដោយក្រាប តាងអនុគមន៍ $y = \sqrt{x} - 3$ អក្ស $x'ox$ បន្ទាត់ឈរ $x = 4$ ទៅ $x = 9$ ។

ដំណោះស្រាយ

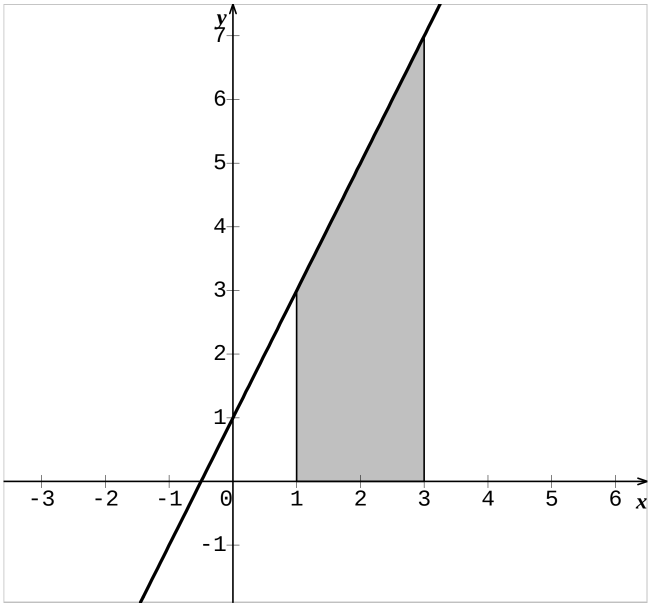
ក.គណនាមាឌសូលីត

$$V = \pi\int_1^3 (2x+1)^2.dx$$

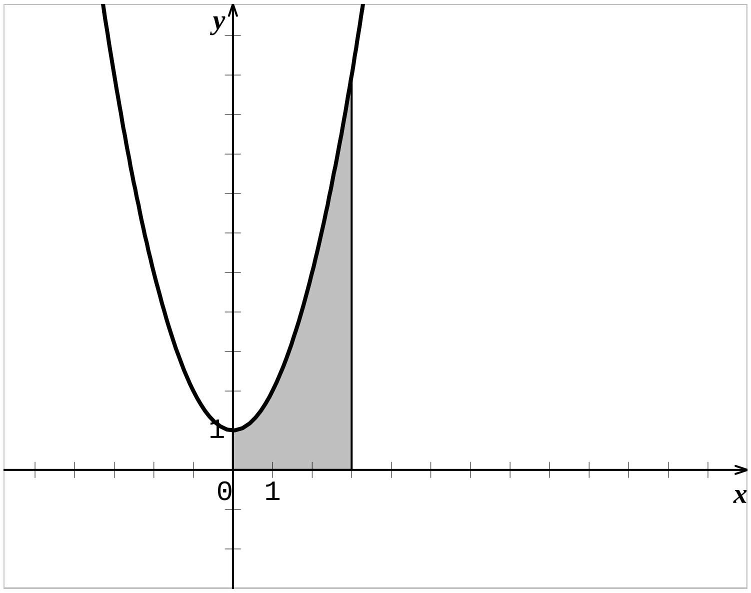
$$= \frac{\pi}{6}\left[(2x+1)^3\right]_1^3$$

$$= \frac{\pi}{6}(343 - 27) = \frac{158\pi}{3}$$

(ឯកតាមាឌ) ។



ខ.គណនាមាឌសូលីតបរិវត្ត



$$V = \pi \int_0^3 (x^2+1)^2 dx$$

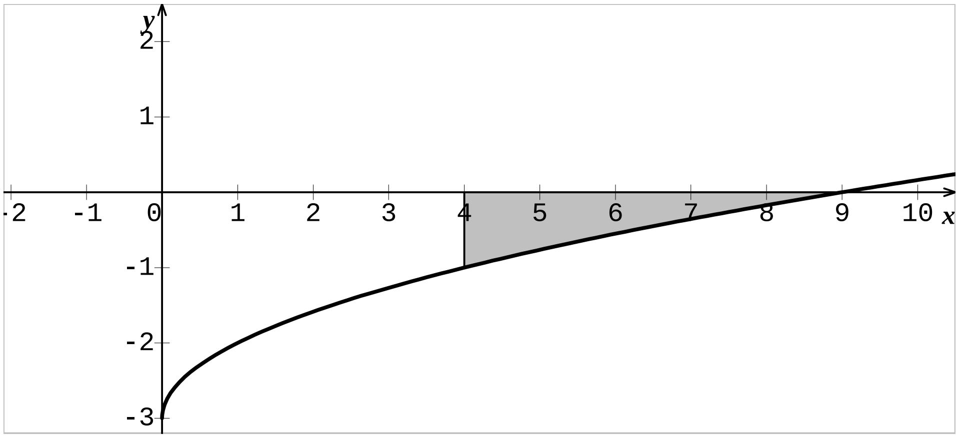
$$= \pi \int_0^3 (x^4+2x^2+1) dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + x \right]_0^3$$

$$= \frac{165\pi}{4}$$

ដូចនេះ $V = \frac{165\pi}{4}$ (ឯកតាមាឌ) ។

គ.គណនាមាឌសូលីតបរិវត្ត



យើងបាន $V = \pi \int_4^9 (\sqrt{x}-3)^2 dx = \pi \int_4^9 (x - 6\sqrt{x} + 9) dx$

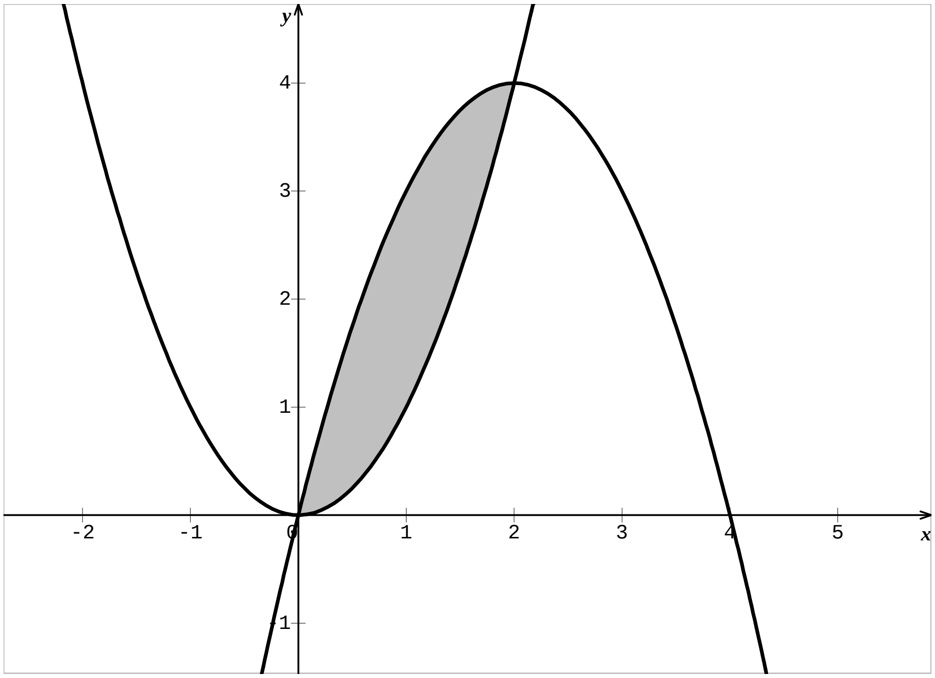
$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - 4x^{\frac{3}{2}} + 9x \right]_4^9 = \frac{3\pi}{2}$$ (ឯកតាមាឌ) ។

2.ក.គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអ័ក្ស$x'ox$ នៃផ្ទៃក្រលាដែលខណ្ឌដោយក្រាប តាងអនុគមន៍ $f(x)=x^2$ និង $g(x)=4x-x^2$ ។

ខ.គណនាមាឌសូលីតបរិវត្តកំណត់បានពីរង្វិលជុំវិញអ័ក្ស$x'ox$ នៃផ្ទៃក្រលាដែលខណ្ឌដោយក្រាប តាងអនុគមន៍ $f(x)=x^2-2x+3$ និង $g(x)=9-x$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនាមាឌសូលីតបរិវត្ត



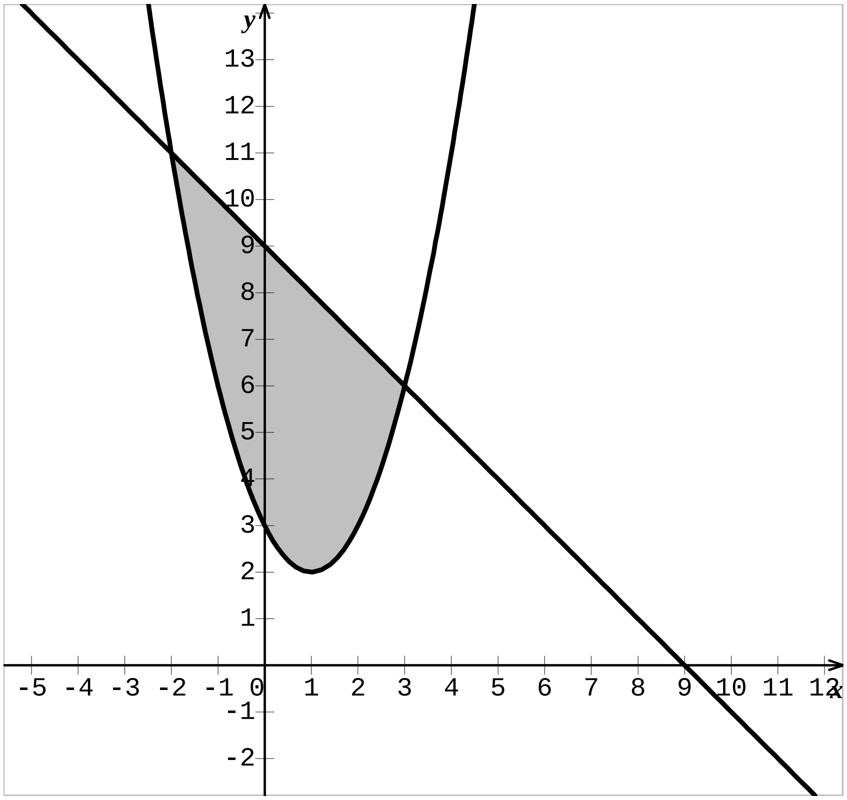
យើងបាន $V=\pi\int_0^2\left[(4x-x^2)^2-(x^2)^2\right].dx$

$$V = \pi \int_0^2 (16x^2 - 8x^3)dx$$

$$V = \pi \left[\frac{16}{3}x^3 - 2x^4\right]_0^2 = \frac{32\pi}{3}$$

ដូចនេះ $V = \frac{32\pi}{3}$ （ឯកតាមាឌ） ។

ខ.គណនាមាឌសូលីតបរិវត្ត



គេបាន $V = \pi \int_{-2}^{3} \left[(9-x)^2 - (x^2 - 2x + 3)^2\right]dx$

បន្ទាប់ពីគណនាគេបាន $V = 250\pi$ （ឯកតាមាឌ） ។

3.ចំពោះអនុគមន៍ $F(x)=\int_1^x \sin \pi t dt$ ។ គណនា

ក.$F(-1)$ ខ.$F'(0)$

គ.$F'\left(\frac{1}{2}\right)$ ឃ.$F''(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $F(x)=\int_1^x \sin \pi t dt$

$$=\left[-\frac{1}{\pi}\cos \pi t\right]_1^x$$

$$=-\frac{1}{\pi}\cos \pi x-\frac{1}{\pi}$$

ក.$F(-1)$

គេបាន $F(-1)=-\frac{1}{\pi}(-1)-\frac{1}{\pi}=0$ ។

ខ.$F'(0)$

គេមាន $F'(x)=\sin \pi x$

គេបាន $F'(0)=0$

គ.$F'\left(\frac{1}{2}\right)$

គេបាន $F'(\frac{1}{2})=\sin\frac{\pi}{2}=1$ ។

ឃ.$F''(x)=\pi \cos \pi x$ ។

4.ផ្ទៃក្រលា A ខណ្ឌដោយក្រាបតាងអនុគមន៍ $g(t)=4-\frac{4}{t^2}$ និង អក្សអាប់ស៊ីសលើចន្លោះ$[1,x]$ កំណត់ដោយ

$A(x)=\int_1^x\left(4-\frac{4}{t^2}\right)dt$ ។

គណនា A ជាអនុគមន៍នៃ x ។ តើក្រាបអនុគមន៍ A មានសមីការ អាស៊ីមតូតដេក រឺ ទេ?

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា A ជាអនុគមន៍នៃ x

$$A(x)=\int_1^x\left(4-\frac{4}{t^2}\right).dt$$

$$=\left[4t+\frac{4}{t}\right]_1^x=4x+\frac{4}{x}-8$$

ដូចនេះ $A(x)=4x-8+\frac{4}{x}$ ។

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}A(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(4x-8+\frac{4}{x})=+\infty$ ។

នាំឱ្យក្រាបអនុគមន៍ A គ្មានសមីការអាស៊ីមតូតដេកទេ ។

5. គណនា $F'(x)$ បើ

ក. $F(x)=\int_{x}^{x+2}(4t+1)dt$ ខ. $F(x)=\int_{-x}^{x}t^3dt$

គ. $F(x)=\int_{0}^{\sin x}\sqrt{t}\,dt$ ឃ. $F(x)=\int_{2}^{x^2}\frac{1}{t^2}dt$

ង. $F(x)=\int_{0}^{x^3}\sin t\,dt$ ច. $F(x)=\int_{\sin x}^{0}\frac{1}{2+t}dt$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $F'(x)$ បើ

ក. $F(x)=\int_{x}^{x+2}(4t+1)dt$

គេបាន $F(x)=\left[2t^2+t\right]_{x}^{x+2}$

$$=\left[2(x+2)^2+x+2\right]-(2x^2+x)$$

$$=2x^2+8x+8+x+2-2x^2-x$$

$$=8x+10$$

ដូចនេះ $F'(x)=8$ ។

ខ. $F(x)=\int_{-x}^{x}t^3dt$

គេបាន $F(x)=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_{-x}^{x}=0$

ដូចនេះ $F'(x)=0$ ។

គ.$F(x)=\int_0^{\sin x}\sqrt{t}\,dt$

គេបាន $F(x)=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sin x}=\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}}x$

ដូចនេះ $F'(x)=\cos x\sqrt{\sin x}$

ឃ.$F(x)=\int_2^{x^2}\frac{1}{t^2}dt$

គេបាន $F(x)=\left[-\frac{1}{t}\right]_2^{x^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $F'(x)=\frac{2}{x^3}$ ។

ង.$F(x)=\int_0^{x^3}\sin t\,dt$

គេបាន $F(x)=\left[-\cos t\right]_0^{x^3}=-\cos x^3+1$

ដូចនេះ $F'(x)=3x^2\sin x^3$

ច.$F(x)=\int_{\sin x}^{0}\frac{1}{2+t}dt$ ។

គេបាន $F(x)=\left[\ln|2+t|\right]_{\sin x}^{0}=\ln 2-\ln|2+\sin x|$

ដូចនេះ $F'(x)=-\frac{(2+\sin x)'}{2+\sin x}=-\frac{\cos x}{2+\sin x}$ ។

6.ក.បង្ហាញថាបើ $f(t)$ ជាអនុគមន៍សេស នោះ $F(x)=\int_a^x f(t)dt$

គ្រប់ $x\in IR$ ជាអនុគមន៍សេសដែរឬទេ?

ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពគូសេសនៃអនុគមន៍ $F(x)$

មាន $F(x)=\int_a^x f(t)dt$

គេបាន $F(-x)=\int_a^{-x} f(t).dt$

តាង $u=-t \Rightarrow du=-dt$

ចំពោះ $t=a$ នោះ $u=-a$ ហើយ $t=-x$ នោះ $u=x$

គេបាន $F(-x)=\int_{-a}^{x} f(-u)(-du)=\int_{x}^{-a} f(-u)du$

ឬ $F(-x)=\int_{x}^{-a} f(-t)dt=\int_{x}^{-a} f(t)dt$ ព្រោះ$f(t)$ ជាអនុគមន៍សេស

ឬ $F(-x)=-\int_{-a}^{x} f(t)dt$

-បើ $a=0$ នោះ $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ និង $F(-x)=-\int_0^x f(t)dt$

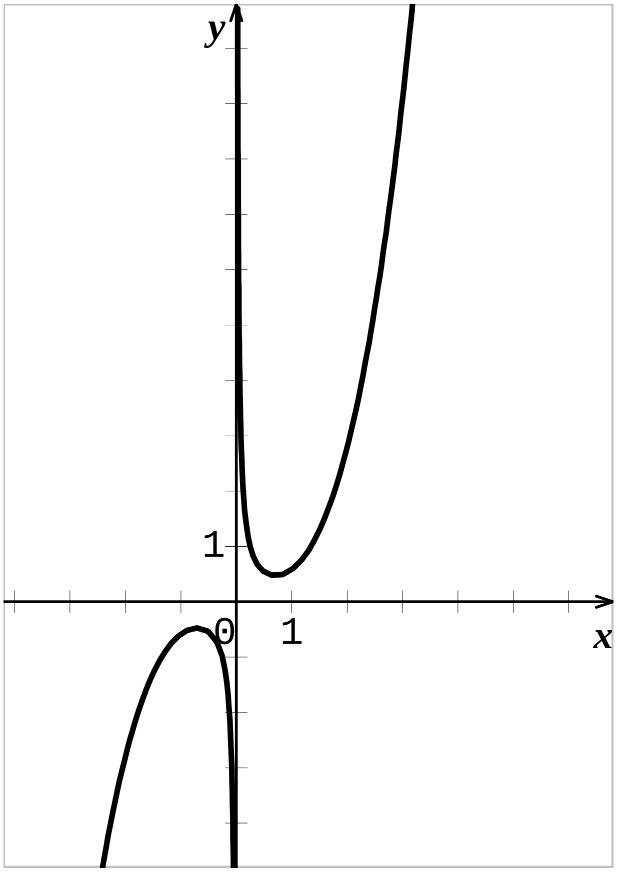
គេបាន $F(-x)=-F(x)$ នោះ $F(x)$ ជាអនុគមន៍សេស ។

-បើ $a\neq 0$ នោះ $F(x)$ មិនមែនជាអនុគមន៍សេសទេ ។

7.ក.គណនាប្រវែងធ្នូនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ ពី $x = 1$ ទៅ $x = 3$ ។

ខ.ឧបមាថា $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ។ បន្ទាត់ជួបអក្ស័អរដោនេត្រង់ B ហើយប៉ះនិងក្រាបតាង f ត្រង់ចំនុច $A(a, f(a))$ ដែល $a > 0$ ។ ប្រៀបធៀបប្រវែងនៃអង្កត់ AB និងប្រវែងធ្នូរនៃក្រាបតាង f នៅបន្លោះបន្ទាត់ឈរ $x = 0$ និង $x = a$ ។

ដំណោះស្រាយ



ក.គណនាប្រវែងធ្នូ

តាមរូបមន្ត $L = \int_1^3 \sqrt{1 + y'^2}.dx$

ដោយ $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$

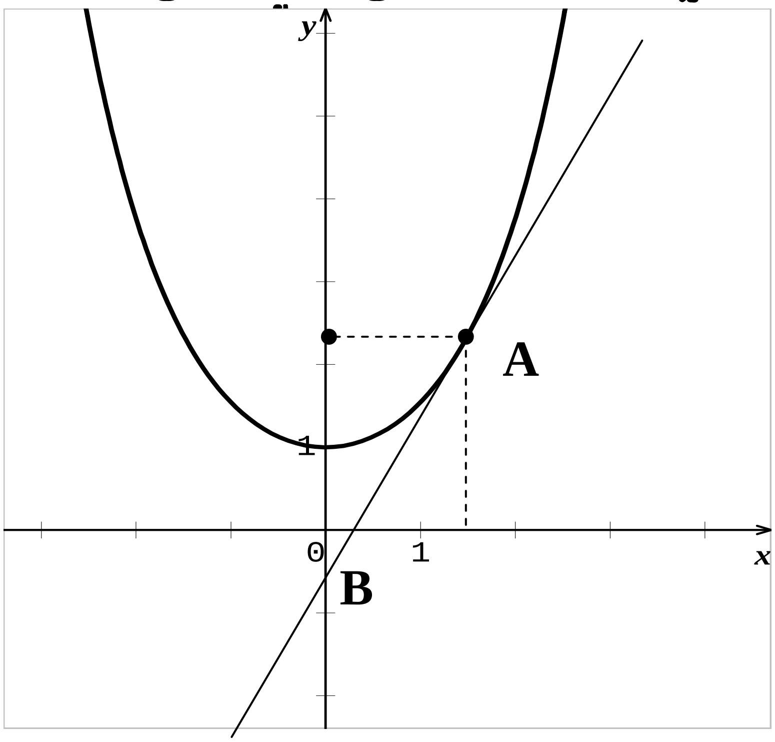
គេបាន $y' = x^2 - \frac{1}{4x^2}$

$$L = \int_1^3 \sqrt{1 + (x^2 - \frac{1}{4x^2})^2}.dx$$

$$= \int_1^3 (x^2 + \frac{1}{4x^2})^2.dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4x}\right]_1^3 = \frac{53}{6}$$

ខ.AB និងប្រវែងធ្នូរនៃក្រាបតាង f នៅចន្លោះបន្ទាត់ $x = 0$ និង $x = a$



សមីការបន្ទាត់ T ប៉ះក្រាបតាង $f(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$ គឺ

$T : y - f(a) = f'(a)(x - a)$ ដែល $f'(a) = \frac{1}{2}(e^{a} - e^{-a})$

បើ $x = 0 \Rightarrow y = -af'(a) + f(a)$ នោះ $B(0\ ,\ -af'(a) + f(a))$

គេបាន $AB = \sqrt{a^2 + a^2 f'^2(a)} = a\sqrt{1 + f'^2(a)}$

$$= a\sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{a} - e^{-a})^2} = \frac{a}{2}(e^{a} + e^{-a})$$

ហើយ $L = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{x} - e^{-x})^2}.dx = \frac{1}{2}\int_0^a (e^{x} + e^{-x}).dx$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{x} - e^{-x}\right]_0^a = \frac{1}{2}(e^{a} - e^{-a})$$ ។

ជំពូកទី៥ មេរៀនទី១

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី 1 មានរាងទូទៅ

- $\frac{dy}{dx} = f(x)$ មានចម្លើយទូទៅ $y = \int f(x).dx + c$
- $g(y).\frac{dy}{dx} = f(x)$ មានចម្លើយទូទៅ $G(y) = F(x) + C$

  ដែល $G(y) = \int g(y).dy$ ។
- $y'+ay = 0$ ឬ $\frac{dy}{dx} + ay = 0$ មានចម្លើយទូទៅ $y = A.e^{-ax}$

  ដែល A ជាចំនួនថេរ ។
- $y'+ay = p(x)$ មានចម្លើយទូទៅ $y = y_e + y_p$ ដែល y_e ជាចម្លើយនៃសមីការ $y'+ay = 0$ និង y_p ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការ $y'+ay = p(x)$ ។

លំហាត់

1.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលៈ

ក.$y' = 2x^2 - x + 1$

ខ.$y' = e^{-2x}$

គ.$y' = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

ឃ.$y' = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ កំណត់លើ $(-1, 1)$

ង.$xy' = 1$ កំណត់លើ $(0, +\infty)$ ។

2. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខណ្ឌដែលឱ្យៈ

ក.$\dfrac{y'}{y} = \cos x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$

ខ.$y' = e^{2x}$, $y(0) = 5$

គ.$(3x^2 - 2)y' = 6$, $y(1) = 4$

ឃ.$\dfrac{y'}{\tan x} = 1$, $y(0) = 0$

3.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី1

ក.$\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

ខ.$3\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

គ.$2y' - 3y = 0$

ឃ.$y' + y\sqrt{2} = 0$ ។

4. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី១តាមលក្ខខណ្ឌដែលឱ្យ:

ក. $-y'+2y=0$, $y(3)=-2$ ខ. $2y'+y=0$, $y(\ln 4)=\frac{1}{5}$

គ. $7y'+4y=0$, $y(7)=e^{-4}$ ឃ. $2y'-5y=0$, $y(1)=-3$

5. ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍និមួយៗចខាងក្រោមនេះជាចំលើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៅខាងស្តាំ:

ក. $y=x+e^{x}$, $y'-y=1-x$

ខ. $y=e^{3x}-x-1$, $y'-3y=3x+2$

គ. $y=\sin x+\cos x$, $y'+y=2\cos x$

ឃ. $y=x+\ln x$, $xy'-y=1-\ln x$ ។

6. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y'+2y=x^2$ ។

ក. កំណត់ពហុធា g មានដឺក្រេទី2 ដែលជាចំលើយពិសេសនៃ (E) ។

ខ. តាង h ជាអនុគមន៍ដែល $h(x)=f(x)-g(x)$ ។ បើ h ដែលជាចំលើយពិសេសនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'+2y=0$ នោះបង្ហាញថា f ជាចំលើយទូរទៅនៃ (E) ។

7. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'-2y=\frac{-2}{1+e^{-2x}}$ ។

ក.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'-2y=0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $y(0)=1$ ។

ខ.តាង f ជាអនុគមន៍មានដេរីវេ IR ដែល $f(x)=e^{2x}g(x)$ ។ គណនា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ $g(x)$ និង $g'(x)$ ។

គ.បង្ហាញថាបើ f ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $g'(x)=\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

ឃ.ទាញរកកន្សោម $g(x)$ រួច $f(x)$ ដែល f ជាចម្លើយនៃ (E) ។

8.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក. $\frac{dy}{dx}-y=e^{3x}$

ខ. $\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{e^{2x}+1}$

គ. $y'+y=1$

ឃ. $y'+y=\sin x$

9.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខណ្ឌដើម

ក. $y'-y=1$, $y(0)=1$

ខ. $y'+2y=1$, $y(0)=0$

10.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក. $\frac{dy}{dx}=\sin 5x$

ខ. $dx+e^{3x}dy=0$

គ. $e^{x}\frac{dy}{dx}=2x$

ឃ. $(x+1)\frac{dy}{dx}=x+6$

លំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

1.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលៈ

ក.$y' = 2x^2 - x + 1$ ខ.$y' = e^{-2x}$

គ.$y' = \dfrac{2x}{x^2+1}$

ឃ.$y' = \dfrac{x}{x^2-1}$ កំណត់លើ $(-1,1)$

ង.$xy' = 1$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលៈ

ក.$y' = 2x^2 - x + 1$

គេបាន $y = \int (2x^2 - x + 1).dx$

ដូចនេះ $y = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x + c$

ខ.$y' = e^{-2x}$

គេបាន $y = \int e^{-2x}dx$

ដូចនេះ $y = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} + c$

គ. $y'=\frac{2x}{x^2+1}$

គេបាន $y=\int \frac{2x}{x^2+1}.dx$

ដូចនេះ $=\ln(x^2+1)+C$

ឃ. $y'=\frac{x}{x^2-1}$ កំណត់លើ $(-1,1)$

គេបាន $y=\int \frac{x}{x^2-1}dx$

$$=\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right).dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$$

ដូចនេះ $y=\frac{1}{2}\ln\left|(x+1)(x-1)\right|+C$

ង. $xy'=1$ កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ។

គេបាន $y'=\frac{1}{x}\Rightarrow y=\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C$

ដូចនេះ $y=\ln|x|+C$ ។

2. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខណ្ឌដែលឱ្យ៖

ក. $\frac{y'}{y} = \cos x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$ ខ. $y' = e^{2x}$, $y(0) = 5$

គ. $(3x^2 - 2)y' = 6x$, $y(1) = 4$ ឃ. $\frac{y'}{\tan x} = 1$, $y(0) = 0$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក. $\frac{y'}{y} = \cos x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$

គេបាន $\int \frac{y'}{y} dx = \int \cos x dx$

$$\ln y = \sin x + c \Rightarrow y = e^{\sin x + c}$$

ចំពោះ $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y(\frac{\pi}{2}) = e^{1+c} = e \Rightarrow c = 0$

ដូចនេះ $y = e^{\sin x}$ ។

ខ. $y' = e^{2x}$, $y(0) = 5$

គេបាន $y = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c$

ចំពោះ $x = 0$ គេបាន $y(0) = \frac{1}{2} + c = 5 \Rightarrow c = \frac{9}{2}$

ដូចនេះ $y = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{9}{2}$

គ.$(3x^2-2)y'=6x \quad , \quad y(1)=4$

គេបាន $y=\int \dfrac{6xdx}{3x^2-2}=\ln|3x^2-2|+C$

បើ $x=1 \Rightarrow y(1)=C=4$

ដូចនេះ $y=\ln|3x^2-2|+4$

ឃ.$\dfrac{y'}{\tan x}=1 \ , \ y(0)=0$

គេបាន $y=\int \tan x dx=-\ln|\cos x|+C$

បើ $x=0 \Rightarrow y=C=0$

ដូចនេះ $y=-\ln|\cos x|$ ។

3.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី1

ក.$\dfrac{dy}{dx}+2y=0$ ខ.$3\dfrac{dy}{dx}+y=0$

គ.$2y'-3y=0$ ឃ.$y'+y\sqrt{2}=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក.$\dfrac{dy}{dx}+2y=0$ ដោយ $a=2$ នោះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ

គឺ $y=A.e^{-2x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ ។

ខ.$3\frac{dy}{dx}+y=0$ ឬ $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{3}y=0$

ដោយ $a=\frac{1}{3}$ នោះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការគឺ $y=A.e^{-\frac{1}{3}x}$

ដែល A ជាចំនួនថេរ ។

គ.$2y'-3y=0$ ឬ $y'-\frac{3}{2}y=0$

ដោយ $a=-\frac{3}{2}$ នោះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការគឺ $y=A.e^{\frac{3}{2}x}$

ដែល A ជាចំនួនថេរ ។

ឃ.$y'+y\sqrt{2}=0$

ដោយ $a=\sqrt{2}$ នោះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការគឺ $y=A.e^{\sqrt{2}x}$

ដែល A ជាចំនួនថេរ ។

4. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី១តាមលក្ខខណ្ឌ ដែលឱ្យ:

ក.$-y'+2y=0$, $y(3)=-2$ ខ.$2y'+y=0$, $y(\ln 4)=\frac{1}{5}$

គ.$7y'+4y=0$, $y(7)=e^{-4}$ ឃ.$2y'-5y=0$, $y(1)=-3$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក. $-y'+2y=0$, $y(3)=-2$

សមីការអាចសរសេរ $y'-2y=0$

ដោយ $a=2$ នោះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការគឺ $y=Ae^{2x}$

បើ $x=3 \Rightarrow y(3)=Ae^{6}=-2 \Rightarrow A=-2e^{-6}$

ដូចនេះ $y=-2e^{2x-6}$ ។

ខ. $2y'+y=0$, $y(\ln 4)=\frac{1}{5}$

សមីការអាចសរសេរ $y'+\frac{1}{2}y=0$

ដោយ $a=\frac{1}{2}$ នោះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការគឺ $y=Ae^{-\frac{1}{2}x}$

បើ $x=\ln 4 \Rightarrow y(\ln 4)=Ae^{-\frac{1}{2}\ln 4}=\frac{1}{5} \Rightarrow A=\frac{2}{5}$

ដូចនេះ $y=\frac{2}{5}e^{-\frac{1}{2}x}$ ។

គ. $7y'+4y=0$, $y(7)=e^{-4}$ ។សមីការអាចសរសេរ $y'+\frac{4}{7}y=0$

ដោយ $a=\frac{4}{7}$ នោះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការគឺ $y=Ae^{-\frac{4}{7}x}$

បើ $x=7 \Rightarrow y(7)=Ae^{-4}=e^{-4} \Rightarrow A=1$

ដូចនេះ $y=e^{-\frac{4}{7}x}$ ។

ឃ.$2y'-5y=0\ ,\ y(1)=-3$

សមីការអាចសរសេរ $y'-\frac{5}{2}y=0$

ដោយ $a=\frac{5}{2}$ នោះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការគឺ $y=Ae^{\frac{5}{2}x}$

បើ $x=1\Rightarrow y(1)=Ae^{\frac{5}{2}}=-3\Rightarrow A=-3e^{-\frac{5}{2}}$

ដូចនេះ $y=-3e^{\frac{5}{2}(x-1)}$ ។

5.ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍និមួយៗចខាងក្រោមនេះជាចំលើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៅខាងស្តាំៈ

ក.$y=x+e^{x}\ ,\ y'-y=1-x$

ខ.$y=e^{3x}-x-1\ ,\ y'-3y=3x+2$

គ.$y=\sin x+\cos x\ ,\ y'+y=2\cos x$

ឃ.$y=x+\ln x\ ,\ xy'-y=1-\ln x$ ។

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ

ក.$y=x+e^{x}\ ,\ y'-y=1-x$

មាន $y=x+e^{x}\Rightarrow y'=1+e^{x}$

គេបាន $y'-y=(1+e^{x})-(x+e^{x})=1-x$ ពិត

ដូចនេះ $y = x + e^x$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $y' - y = 1 - x$ ។

ខ. $y = e^{3x} - x - 1$, $y' - 3y = 3x + 2$

គេមាន $y' = 3e^{3x} - 1$

គេបាន $y' - 3y = 3e^{3x} - 1 - 3e^{3x} + 3x + 3 = 3x + 2$ ពិត

ដូចនេះ $y = e^{3x} - x - 1$ ជាចម្លើយសមីការ $y' - 3y = 3x + 2$ ។

គ. $y = \sin x + \cos x$, $y' + y = 2\cos x$

គេមាន $y' = \cos x - \sin x$

គេបាន $y' + y = \cos x - \sin x + \cos x + \sin x = 2\cos x$ ពិត

ដូចនេះ $y = \sin x + \cos x$ ជាចម្លើយសមីការ $y' + y = 2\cos x$ ។

ឃ. $y = x + \ln x$, $xy' - y = 1 - \ln x$

គេមាន $y' = 1 + \dfrac{1}{x} \Rightarrow xy' = x + 1$

គេបាន $xy' - y = x + 1 - x - \ln x = 1 - \ln x$ ពិត

ដូចនេះ $y = x + \ln x$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ $xy' - y = 1 - \ln x$

6.គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'+2y = x^2$ ។

ក.កំណត់ពហុធា g មានដឺក្រេទី2 ដែលជាចំលើយពិសេសនៃ (E) ។

ខ.តាង h ជាអនុគមន៍ដែល $h(x)=f(x)-g(x)$ ។ បើ h ដែលជាចំលើយពិសេសនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'+2y = 0$ នោះបង្ហាញថា f ជាចំលើយទូរទៅនៃ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

ក.កំណត់ពហុធា g មានដឺក្រេទី2 ដែលជាចំលើយពិសេសនៃ (E)

តាង $g(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E)

គេបាន $g'(x) + 2g(x) = x^2 \quad (1)$

តែ $g'(x) = 2ax + b$ នោះទំនាក់ទំនង (1) អាចសរសេរ

$2ax + b + 2(ax^2 + bx + c) = x^2$

$2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c = x^2$

គេទាញ $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$

ដូចនេះ $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ ។

ខ. បង្ហាញថា f ជាចំលើយទូរទៅនៃ (E) ។

មាន h ជាអនុគមន៍ដែល $h(x)=f(x)-g(x)$

បើ h ជាចំលើយពិសេសនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'+2y = 0$

គេបាន $h'(x)+2h(x)=0$ ដោយ $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

នោះ $f'(x)-g'(x)+2f(x)-2g(x)=0$

$$[\ f'(x)+2f(x)\ ]-[\ g'(x)+2g(x)\ ]=0 \quad (2)$$

យក (1) ជួសក្នុង (2) គេបាន

$f'(x)+2f(x)-x^2=0 \Rightarrow f'(x)+2f(x)=x^2$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់នេះមានន័យថា បើ h ជាចំលើយពិសេសនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'+2y=0$ នោះ f ជាចំលើយទូរទៅនៃ (E) ។

7. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E):\ y'-2y=\dfrac{-2}{1+e^{-2x}}$ ។

ក.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'-2y=0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $y(0)=1$ ។

ខ.តាង f ជាអនុគមន៍មានដេរីវេ IR ដែល $f(x)=e^{2x}g(x)$ ។

គណនា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ $g(x)$ និង $g'(x)$ ។

គ.បង្ហាញថាបើ f ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $g'(x)=\dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

ឃ.ទាញរកកន្សោម $g(x)$ រួច $f(x)$ ដែល f ជាចម្លើយនៃ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'-2y=0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $y(0)=1$ ៖

គេមាន $y'-2y=0 \Rightarrow y=A.e^{2x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ

បើ $x=0 \Rightarrow y(0)=A=1$ ។

ដូចនេះ $y=e^{2x}$ ។

ខ.គណនា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ $g(x)$ និង $g'(x)$

គេមាន $f(x)=e^{2x}g(x)$

គេបាន $f'(x)=2e^{2x}g(x)+e^{2x}g'(x)$

ដូចនេះ $f'(x)=[2g(x)+g'(x)]e^{2x}$ ។

គ.បង្ហាញថាបើ f ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $g'(x)=\dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

បើ f ជាចម្លើយនៃ $(E): y'-2y=\dfrac{-2}{1+e^{-2x}}$ នោះគេបាន

$f'(x)-2f(x)=\dfrac{-2}{1+e^{-2x}}$ ដោយ $f(x)=e^{2x}g(x)$

និង $f'(x)=[2g(x)+g'(x)]e^{2x}$ នោះគេបាន

$$[2g(x)+g'(x)]e^{2x}-2e^{2x}g(x)=\frac{-2}{1+e^{-2x}}$$

គេទាញ $g'(x)=\dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតបើ $g'(x)=\dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

ហើយដោយ $f'(x)=[2g(x)+g'(x)]e^{2x}$ គេបាន

$$f'(x)=[2g(x)+\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}]e^{2x}$$

$f'(x)=2g(x)e^{2x}-\dfrac{2}{1+e^{-2x}}$ ដោយ $f(x)=g(x).e^{2x}$

$$f'(x)=2f(x)-\frac{2}{1+e^{-2x}}\Rightarrow f'(x)-2f(x)=\frac{-2}{1+e^{-2x}}$$

ដូចនេះ បើ f ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $g'(x)=\dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ ។

ឃ.ទាញរកកន្សោម $g(x)$ រួច $f(x)$ ដែល f ជាចម្លើយនៃ (E)

គេមាន $g'(x)=\dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

គេបាន $g(x)=\displaystyle\int\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}.dx=\int\frac{(1+e^{-2x})'}{1+e^{-2x}}.dx$

ដូចនេះ $g(x)=\ln|1+e^{-2x}|+C$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $f(x)=g(x).e^{2x}$

ដូចនេះ $f(x)=e^{2x}.\ln(1+e^{-2x})+C.e^{2x}$ ដែល $C\in IR$ ។

៩.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក. $\frac{dy}{dx} - y = e^{3x}$ ខ. $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{e^{2x}+1}$

គ. $y' + y = 1$ ឃ. $y' + y = \sin x$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក. $\frac{dy}{dx} - y = e^{3x}$

តាង $y_p = ke^{3x}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ $\frac{dy}{dx} - y = e^{3x}$ និង y_e ជាចម្លើយនៃសមីការ $\frac{dy}{dx} - y = 0$ នោះ $y = y_e + y_p$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $\frac{dy}{dx} - y = e^{3x}$ ។

គេបាន $\frac{dy}{dx} - y = 0$ នាំឱ្យ $y_e = A.e^{x}$ ដែល $A \in IR$

ដោយ $y_p = ke^{3x}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ $\frac{dy}{dx} - y = e^{3x}$ នោះគេបាន

$\frac{dy_p}{dx} - y_p = e^{3x}$ តែ $\frac{dy_p}{dx} = 3ke^{3x}$

គេបាន $3ke^{3x} - ke^{3x} = e^{3x} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$ ។ គេបាន $y_p = \frac{1}{2}e^{3x}$ ។

ដូចនេះ $y = A.e^{x} + \frac{1}{2}e^{3x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរ ។

ខ. $\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{e^{2x}+1}$

ឬ $y'+y=\frac{1}{e^{2x}+1}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង e^{x} គេបាន

$$y'e^{x}+e^{x}y=\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}$$

$$(ye^{x})'=\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}\Rightarrow ye^{x}=\int\frac{e^{x}dx}{e^{2x}+1}$$

តាង $t=e^{x}\Rightarrow dt=e^{x}dx$

គេបាន $ye^{x}=\int\frac{dt}{t^{2}+1}=\arctan(t)+C$

ឬ $ye^{x}=\arctan(e^{x})+C$

ដូចនេះ $y=e^{-x}\arctan(e^{x})+C.e^{-x}$ ។

គ. $y'+y=1$ ឬ $y'+y-1=0$

តាង $z=y-1$ នោះ $z'=y'$

សមីការអាចសរសេរ $z'+z=0\Rightarrow z=A.e^{-x}$

ដោយ $z=y-1\Rightarrow y=z+1=A.e^{-x}+1$ ដែល $A\in IR$ ។

ឃ. $y'+y=\sin x$

ចម្លើយ $y=A.e^{-x}+\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)$ ដែល $A\in IR$ ។

៩.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខណ្ឌដើម

ក.$y'-y=1\ ,\ y(0)=1$ ខ.$y'+2y=1\ ,\ y(0)=0$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខណ្ឌដើម

ក.$y'-y=1\ ,\ y(0)=1$

គេមាន $y'-y=1$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង e^{-x} គេបាន

$$y'e^{-x}-e^{-x}y=e^{-x}$$

$$(ye^{-x})'=e^{-x}$$

$$\Rightarrow ye^{-x}=\int e^{-x}dx$$

$$\Rightarrow ye^{-x}=-e^{-x}+k$$

$$\Rightarrow \quad y=-1+ke^{-x}$$

បើ $x=0$ នោះ $y(0)=-1+k=1\Rightarrow k=2$

ដូចនេះ $y=-1+2e^{-x}$ ។

ខ.$y'+2y=1\ ,\ y(0)=0$

ដោះស្រាយដូចខាងលើដែរគេបានចម្លើយរបស់សមីការគឺ

$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2x}$ ។

10.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក.$\frac{dy}{dx} = \sin 5x$ ខ.$dx + e^{3x}dy = 0$

គ.$e^{x}\frac{dy}{dx} = 2x$ ឃ.$(x+1)\frac{dy}{dx} = x+6$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក.$\frac{dy}{dx} = \sin 5x$

គេទាញ $y = \int \sin 5x.dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$

ខ.$dx + e^{3x}dy = 0$

គេទាញ $y = \int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$

គ.$e^{x}\frac{dy}{dx} = 2x$

គេទាញ $y = \int 2xe^{-x}dx$

តាង $f(x) = 2x \Rightarrow f'(x) = 2$

ហើយ $g'(x) = e^{-x} \Rightarrow g(x) = \int e^{-x}.dx = -e^{-x}$

តាមរូបមន្ត $\int f(x).g'(x).dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x).dx$

គេបាន $y = -2xe^{-x} + \int 2e^{-x}dx = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$

ដូចនេះ $y = -2(x+1)e^{-x} + C$ ។

ឃ.$(x+1)\dfrac{dy}{dx} = x+6$

គេបាន $y = \int \dfrac{x+6}{x+1}.dx$

$$y = \int (1+\frac{5}{x+1})dx$$

$$y = x + 5\ln|x+1| + C$$

ជំពូកទី៥ មេរៀនទី២

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី២

1_សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់២

និយមន័យ

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី២ អូម៉ូសែន និងមានមេគុណជាចំនួនថេរជាសមីការដែលអាចសរសេរជារាងទូទៅ $ay''+by'+cy=0$ ដែល $a\neq 0$, $a,b,c\in IR$ ។

២_ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់២អូម៉ូសែន និងមានមេគុណជាចំនួនថេរ

ក.សមីការសម្គាល់

សមីការសម្គាល់នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី២ អូម៉ូសែន និងមានមេគុណជាចំនួនថេរ $ay''+by'+cy=0$ ជាសមីការដឺក្រេទីពីរ $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ ដែល $a\neq 0$, $a,b,c\in IR$ ។

ខ.វិធីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់២

ឧបមាថាគេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់2ដូចខាងក្រោម៖

$(E): \quad y''+by'+cy=0$ ដែល $b\ ,\ c\in IR$ ។

◆សមីការ (E) មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2+b\lambda+c=0$ (1)

◆គណនា $\Delta=b^2-4c$

-ករណី $\Delta>0$ សមីការ (1) មានឫសពីរជាចំនួនពិតផ្សេងគ្នាគឺ $\lambda_1=\alpha$

$\lambda_2=\beta$ នោះសមីការ (E) មានចម្លើយទូទៅជាអនុគមន៍រាង

$y=A.e^{\alpha x}+B.e^{\beta x}$ ដែល A , B ជាចំនួនថេរមួយណាក៏បាន ។

-ករណី $\Delta=0$ សមីការ (1) មានឫសឌុបគឺ $\lambda_1=\lambda_2=\alpha$

នោះសមីការ (E) មានចម្លើយទូទៅជាអនុគមន៍រាង

$y=Ax.e^{\alpha x}+B.e^{\alpha x}$ ដែល A , B ជាចំនួនថេរមួយណាក៏បាន ។

-ករណី $\Delta<0$ សមីការ (1) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ

$\lambda_1=\alpha+i.\beta$ និង $\lambda_2=\alpha-i.\beta$ ($\alpha\ ,\ \beta\in IR$)

នោះសមីការ (E) មានចម្លើយទូទៅជាអនុគមន៍រាង

$y=(A\cos\beta x+B\sin\beta x)e^{\alpha x}$

ដែល A , B ជាចំនួនថេរមួយណាក៏បាន ។

៣_ដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់២មិនអូម៉ូសែននិងមានមេគុណជាចំនួនថេរ

ឧបមាថាគេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី2មិនអូម៉ូសែន

$y''+by'+cy = P(x)$ ដែល $P(x) \neq 0$ ។

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការនេះគេត្រូវ :

◆ស្វែងរកចម្លើយពិសេសមិនអូម៉ូសែន តាងដោយ y_P របស់សមីការ $y''+by'+cy = P(x)$ ដែល y_P មានទម្រង់ដូច $P(x)$ ។

◆រកចម្លើយទូទៅតាងដោយ y_c នៃសមីការលីនេអ៊ែលំដាប់ទី2អូម៉ូសែន $y''+by'+cy = 0$ ។

◆គេបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី2 មិនអូម៉ូសែនជាផលបូករវាង y_P និង y_c គឺ $y = y_P + y_C$ ។

លំហាត់

1.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលឱ្យ

ក.$f(x) = (2x+1)e^{-x}$, $y''+2y'+y = 0$

ខ.$f(x) = e^{-x}\sin x$, $y''+2y'+2y = 0$

គ.$f(x) = Ae^{x} + Bxe^{x}$, $y''-2y'+y = 0$

ដែល A និង B ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន ។

2. ដោះស្រាយសមីការ

ក.$2y''-3y'+y = 0$

ខ.$-4y''+7y'+2y = 0$

គ.$y''-2y' = 0$

ឃ.$y''-3y'+3y = 0$

ង.$2y''+3y'-2y = 0$

ច.$y''-3y'+y = 0$

3.ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ IR ។ រកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទីពីរ អូម៉ូសែនដែលមានអនុគមន៍ f ជាចម្លើយ

ក.$f(x) = (x+1)e^{-2x}$

ខ.$f(x) = 2e^{-x} + 3e^{3x}$

គ.$f(x) = (2\cos 3x - 3\sin 3x)e^{x}$

4. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខណ្ឌដែលឱ្យៈ

ក. $y''-y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-2$

ខ. $y''-2y'+3y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$

គ. $y''+y=0$, $y(\frac{\pi}{2})=3$, $y'(\frac{\pi}{2})=2$

ឃ. $y''-3y'+2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$ ។

5.គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''-4y'+2y=4$

ក.រកអនុគមន៍ថេរ k ដែលជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)

ខ.ដោះស្រាយសមីការ $y''-4y'+2y=4$

គ.រកចំលើយពិសេសនៃ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដើម

$y(0)=2\sqrt{2}$, $y'(0)=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

1.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលឱ្យ

ក.$f(x) = (2x+1)e^{-x}$, $y''+2y'+y=0$

ខ.$f(x) = e^{-x}\sin x$, $y''+2y'+2y=0$

គ.$f(x) = Ae^{x} + Bxe^{x}$, $y''-2y'+y=0$

ដែល A និង B ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន ។

ដំណោះស្រាយ

ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក.$f(x) = (2x+1)e^{-x}$, $y''+2y'+y=0$

អនុគមន៍ $f(x) = (2x+1)e^{-x}$ ជាចម្លើយសមីការ $y''+2y'+y=0$

លុះត្រាតែ $f(x), f'(x), f''(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការពោលគឺ

$f''(x)+2f'(x)+f(x)=0$ ចំពោះគ្រប់ x ។

គេមាន $f'(x) = 2e^{-x} - (2x+1)e^{-x} = (-2x+1)e^{-x}$

និង $f''(x) = -2e^{-x} - (-2x+1)e^{-x} = (2x-3)e^{-x}$

គេបាន

$$f''(x)+2f'(x)+f(x) = (2x-3-4x+2+2x+1)e^{-x} = 0$$

ដូចនេះអនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលឱ្យ ។

ខ. $f(x)=e^{-x}\sin x \quad , \; y''+2y'+2y=0$

គេមាន $f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$

ឬ $f'(x)=-f(x)+e^{-x}\cos x \quad (1)$

ហើយ $f''(x)=-f'(x)-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$

ឬ $f''(x)=-f'(x)-e^{-x}\cos x-f(x) \quad (2)$

បូកសមីការ (1) និង (2) គេទទួលបាន

$f''(x)+f'(x)=-f'(x)-2f(x)$

ឬ $f''(x)+2f'(x)+2f(x)=0$ ។

ដូចនេះ $f(x)=e^{-x}\sin x$ ជាចម្លើយរបស់ $y''+2y'+2y=0$ ។

គ. $f(x)=Ae^{x}+Bxe^{x} \quad , \; y''-2y'+y=0$

ដែល A និង B ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន ។

គេមាន $f'(x)=Ae^{x}+Be^{x}+Bxe^{x}$

និង $f''(x)=Ae^{x}+2Be^{x}+Bxe^{x}$

គេបាន $f''(x)-2f'(x)+f(x)=0$ ពិត

ដូចនេះ $f(x)=Ae^{x}+Bxe^{x}$ ជាចម្លើយរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$y''-2y'+y=0$ ដែល A និង B ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន ។

2. ដោះស្រាយសមីការ

ក. $2y''-3y'+y=0$ ខ. $-4y''+7y'+2y=0$

គ. $y''-2y'=0$ ឃ. $y''-3y'+3y=0$

ង. $2y''+3y'-2y=0$ ច. $y''-3y'+y=0$

ដំណោះស្រាយ

ក. $2y''-3y'+y=0$

មានសមីការសម្គាល់ $2\lambda^2-3\lambda+1=0$

ដោយ $a+b+c=0 \Rightarrow \lambda_1=1\ ;\ \lambda_2=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនេះគឺជាអនុគមន៍

$y=Ae^{x}+Be^{\frac{1}{2}x}$ ដែល A , B ជាចំនួនថេរ ។

ខ. $-4y''+7y'+2y=0$

មានសមីការសម្គាល់ $-4\lambda^2+7\lambda+2=0$

ដោយ $\Delta=49+32=9^2 \Rightarrow \lambda_1=2\ ;\ \lambda_2=\frac{c}{a}=-\frac{1}{4}$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនេះគឺជាអនុគមន៍

$y=Ae^{2x}+Be^{-\frac{1}{4}x}$ ដែល A , B ជាចំនួនថេរ ។

គ.$y''-2y'=0$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2-2\lambda=0$

គេទាញឬស $\lambda_1=0\ ;\ \lambda_2=2$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនេះគឺជាអនុគមន៍

$y=A+Be^{2x}$ ដែល A , B ជាចំនួនថេរ ។

ឃ.$y''-3y'+3y=0$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2-3\lambda+3=0$

ដោយ $\Delta=9-12=-3\Rightarrow\lambda_{1,2}=\frac{3}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

គេទាញ $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនេះគឺជាអនុគមន៍

$y=(C\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+D\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)e^{\frac{3x}{2}}$ ដែល C , D ជាចំនួនថេរ

ង.$2y''+3y'-2y=0$

ចម្លើយ $y=Ae^{-2x}+Be^{\frac{1}{2}x}$ ដែល A , B ជាចំនួនថេរ ។

ច.$y''-3y'+y=0$

ចម្លើយ $y=Ae^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}x}+Be^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x}$ ដែល A , B ជាចំនួនថេរ ។

3.ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ IR ។ រកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទីពីរ អូម៉ូសែនដែលមានអនុគមន៍ f ជាចម្លើយ

ក.$f(x)=(x+1)e^{-2x}$ ខ.$f(x)=2e^{-x}+3e^{3x}$

គ.$f(x)=(2\cos 3x-3\sin 3x)e^{x}$

ដំណោះស្រាយ

រកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទីពី

ក.$f(x)=(x+1)e^{-2x}$

គេមាន $f'(x)=e^{-2x}-2(x+1)e^{-2x}=(-2x-1)e^{-2x}$

ហើយ $f''(x)=-2e^{-2x}-2(-2x-1)e^{-2x}$

ឬ $f''(x)=4xe^{-2x}$ ។

គេមាន $f''(x)+4f'(x)+4f(x)=(4x-8x-4+4x+4)e^{-2x}=0$

ដូចនេះ $y''+4y'+4y=0$ ជាសមីការដែលត្រូវរក ។

ខ.$f(x)=2e^{-x}+3e^{3x}$

ចម្លើយ $y''-2y'-3y=0$

គ.$f(x)=(2\cos 3x-3\sin 3x)e^{x}$

ចម្លើយ $y''-2y'+10y=0$ ។

4. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខណ្ឌដែលឱ្យ៖

ក. $y''-y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-2$

ខ. $y''-2y'+3y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$

គ. $y''+y=0$, $y(\frac{\pi}{2})=3$, $y'(\frac{\pi}{2})=2$

ឃ. $y''-3y'+2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខណ្ឌដែលឱ្យ៖

ក. $y''-y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-2$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2-1=0$

គេទាញឫស $\lambda_1=1$; $\lambda_2=-1$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនេះគឺជាអនុគមន៍

$y=Ae^x+Be^{-x}$ ហើយ $y'=Ae^x-Be^{-x}$

ដោយ $y(0)=1$ និង $y'(0)=-2$

គេបាន $\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=-2 \end{cases}$ នាំឱ្យ $A=-\frac{1}{2}$, $B=-\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $y=-\frac{1}{2}e^x-\frac{3}{2}e^{-x}$ ។

ខ.$y''-2y'+3y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$

ចម្លើយ $y=(\cos\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}x)e^{x}$

គ.$y''+y=0$, $y(\frac{\pi}{2})=3$, $y'(\frac{\pi}{2})=2$

ចម្លើយ $y=-2\cos x+3\sin x$

ឃ.$y''-3y'+2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$

ចម្លើយ $y=-e^{x}+2e^{2x}$

5.គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''-4y'+2y=4$

ក.រកអនុគមន៍ថេរ k ដែលជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)

ខ.ដោះស្រាយសមីការ $y''-4y'+2y=4$

គ.រកចំលើយពិសេសនៃ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដើម

$y(0)=2\sqrt{2}$, $y'(0)=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.រកអនុគមន៍ថេរ k ដែលជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)

បើអនុគមន៍ $y=k$ ជាចម្លើយ ពិសេសនៃ (E) នោះគេបាន

$(k)''-4(k)'+2k=4$

$$2k=4\Rightarrow k=2$$

ដូចនេះ $y_p=2$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។

ខ.ដោះស្រាយសមីការ $y''-4y'+2y=4$

តាង y_c ជាចម្លើយនៃ $y''-4y'+2y=0$

គេបាន $y=y_c+y_p$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ$y''-4y'+2y=4$ ។

សមីការ $y''-4y'+2y=0$ មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2-4\lambda+2=0$

$\Delta'=4-2=2\Rightarrow\lambda_1=2+\sqrt{2}\ ,\ \lambda_2=2-\sqrt{2}$

គេទាញ $y=Ae^{(2+\sqrt{2})x}+Be^{(2-\sqrt{2})x}$ ។

គ.រកចំលើយពិសេសនៃ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដើម

គេមាន $y=Ae^{(2+\sqrt{2})x}+Be^{(2-\sqrt{2})x}$

គេបាន $y'=(2+\sqrt{2})Ae^{(2+\sqrt{2})x}+(2-\sqrt{2})Be^{(2-\sqrt{2})x}$

ដោយ $y(0)=2\sqrt{2}$, $y'(0)=0$ នោះគេបាន

$$\begin{cases}A+B=2\sqrt{2}\\(2+\sqrt{2})A+(2-\sqrt{2})B=0\end{cases}\Rightarrow A=-2+\sqrt{2}\ ,B=2+\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $y=(-2+\sqrt{2})e^{(2+\sqrt{2})x}+(2+\sqrt{2})e^{(2-\sqrt{2})x}$

លំហាត់ទី១

១.ដោះស្រាយសមីការ $g''(x)-5g'(x)+6g(x)=0 \quad (E)$

២. កំនត់ចំលើយ $g(x)$ មួយនៃសមីការ (E) ដែល $g(0)=0$

និង $g'(0)=1$ ។

(ប្រធានប្រឡងឆមាសទី២ឆ្នាំ២០០៤)

ដំណោះស្រាយ

១. ដោះស្រាយសមីការ $g''(x)-5g'(x)+6g(x)=0 \quad (E)$

មានសមីការសំគាល់ $r^2-5r+6=0$

ដោយ $\Delta=25-24=1$ នាំឱ្យមានឫស

$$r_1=\frac{5-1}{2}=2 \quad ,r_2=\frac{5+1}{2}=3$$

តាមរូបមន្ត $g(x)=A.e^{r_1x}+B.e^{r_2x} \quad ,A,B\in IR$

ដូចនេះចំលើយសមីការ $g(x)=A.e^{2x}+B.e^{3x} \quad ,A,B\in IR$

២. កំនត់ចំលើយ $g(x)$ មួយនៃសមីការ (E)

គេមាន $g(x)=A.e^{2x}+B.e^{3x}$

នាំឱ្យ $g'(x)=2A.e^{2x}+3B.e^{3x}$

តាមបំរាប់គេមាន $\begin{cases} g(0)=0 \\ g'(0)=1 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+3B=1 \end{cases}$

នាំឱ្យ $\begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$

ដូចនេះ $g(x)=-e^{2x}+e^{3x}$ ។

លំហាត់ទី២

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-3y'+2y=0$

ដោយដឹងថា $y(0)=1$, $y'(0)=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលៈ

$$(E): y''-3y'+2y=0$$

មានសមីការសំគាល់ $r^2 - 3r + 2 = 0$

ដោយ $a + b + c = 0$ នាំឱ្យ $r_1 = 1 \; , r_2 = \frac{c}{a} = 2$

តាមរូបមន្ត $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ គេបាន

$y = A.e^x + B.e^{2x}$ និង $y' = A.e^x + 2B.e^{2x} \; , A, B \in IR$

ដោយតាមបំរាប់គេមាន $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} A + B = 1 \\ A + 2B = 0 \end{cases}$

នាំឱ្យ $\begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$

ដូចនេះ $y = 2e^x - e^{2x}$ ជាចំលើយសមីការ ។

លំហាត់ទី៣

គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$(E): y'' - 4y' + 4y = 4x^2 - 24x + 34$

ក-កំនត់ចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឱ្យ $y_P(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចំលើយដោយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ-បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y = y_P(x) + y_c(x)$ ជាចំលើយទូទៅរបស់ (E) នោះអនុគមន៍ $y_c(x)$ជាចំលើយរបស់សមីការអូម៉ូសែន $(E'): y''-4y'+4y = 0$ ។

គ-ដោះស្រាយសមីការ (E')រួចរកចំលើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំនត់ចំនួនពិត a, b និង c

$$(E): y''-4y'+4y = 4x^2 - 24x + 34$$

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y_P(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចំលើយដោយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E)លុះត្រតែអនុគមន៍ $y_p(x), y'_p(x)$ និង $y''_p(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ។

គេបាន $(E): y''_p(x) - 4y'_P(x) + 4y_p(x) = 4x^2 - 24x + 34$

ដោយ $\begin{cases} y_P(x) = ax^2 + bx + c \\ y'_p(x) = 2ax + b \\ y''_p(x) = 2a \end{cases}$

គេបាន

$$(2a)-4(2ax+b)+4(ax^2+bx+c)=4x^2-24x+34$$

នាំឱ្យ

$$4ax^2+(4b-8a)x+(2a-4b+4c)=4x^2-24x+34$$

គេទាញបាន $\begin{cases}4a=4\\4b-8a=-24\\2a-4b+4c=34\end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases}a=1\\b=-4\\c=4\end{cases}$

ដូចនេះ $a=1\ \ ,b=-4\ \ ,c=-4$

និង $y_P(x)=x^2-4x+4=(x-2)^2$ ។

ខ-ការបង្ហាញ

អនុគមន៍ $y=y_P(x)+y_c(x)$ ជាចំលើយរបស់ (E)

លុះត្រាអនុគមន៍ y, y', y'' ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ(E) ។

ដោយគេមាន $y'=y'_p(x)+y'_c(x)$

និង $y''=y''_p(x)+y''_c(x)$ នោះគេបាន :

$$\left[y''_p + y''_c\right] - 4\left[y'_p + y'_c\right] + 4\left[y_p + y_c\right] = 4x^2 - 24x + 34$$

$$\left[y''_p - 4y'_p + 4y_p\right] + \left[y''_c - 4y'_c + 4y_c\right] = 4x^2 - 24x + 34 \quad (1)$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន

$$y''_p(x) - 4y'_P(x) + 4y_p(x) = 4x^2 - 24x + 34 \quad (2)$$

(ព្រោះ $y_p(x)$ ជាចំលើយរបស់សមីការ (E)) ។

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញបាន :

$$4x^2 - 24x + 34 + \left[y''c - 4y'_c + 4y_c\right] = 4x^2 - 24x + 34$$

នាំឱ្យគេទាញបាន $y''_c(x) - 4y'_c(x) + 4y_c(x) = 0$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $y_h(x)$ ជាចំលើយរបស់

សមីការ $(E'): y'' - 4y' + 4y = 0$ ។

គ-ដោះស្រាយសមីការ $(E'): y'' - 4y' + 4y = 0$

សមីការសំគាល់ $r^2 - 4r + 4 = 0$, $\Delta' = 4 - 4 = 0$

នាំឱ្យសមីការមានឫសឌុប $r_1 = r_2 = r_0 = 2$

ដូចនេះចំលើយសមីការ (E') ជាអនុគមន៍

$y_c(x) = (Ax + B).e^{2x} \quad , A, B \in IR$ ។

ទាញរកចំលើយទូទៅរបស់សមីការ (E):

តាមសំរាយខាងលើចំលើយសមីការ (E) គឺជាអនុគមន៍ទំរង់

$y = y_p(x) + y_c(x)$

ដោយគេមាន $y_p(x) = (x-2)^2$ និង $y_c(x) = (Ax + B).e^{2x}$

ដូចនេះ $y = (x-2)^2 + (Ax + B).e^{2x} \quad , A, B \in IR$

ជាចំលើយរបស់សមីការ (E) ។

លំហាត់ទី៤

គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'-4y=-4x^2+10x-6$

ក-កំនត់ចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឱ្យ $y_P(x)=ax^2+bx+c$

ជាចំលើយដោយពិសេសមួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ-បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y=y_P(x)+y_h(x)$ ជាចំលើយទូទៅរបស់

(E) នោះអនុគមន៍ $y_h(x)$ ជាចំលើយរបស់សមីការអូម៉ូសែន

$(E'): y'-4y=0$ ។

គ-ដោះស្រាយសមីការ (E') រួចរកចំលើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

ក- កំនត់ចំនួនពិត a,b និង c

$$(E): y'-4y=-4x^2+10x-6$$

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y_P(x)=ax^2+bx+c$ ជាចំលើយពិសេស

មួយរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែអនុគមន៍

$y_p(x), y'_p(x)$ និង $y''_p(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ។

គេបាន $(E): y'_P(x) - 4y_p(x) = -4x^2 + 10x - 6$

ដោយ $\begin{cases} y_P(x) = ax^2 + bx + c \\ y'_p(x) = 2ax + b \end{cases}$

គេបាន $(2ax + b) - 4(ax^2 + bx + c) = -4x^2 + 10x - 6$

នាំឱ្យ $-4ax^2 - (4b - 2a)x + (b - 4c) = -4x^2 + 10x - 6$

គេទាញបាន $\begin{cases} -4a = -4 \\ 4b - 2a = -10 \\ b - 4c = -6 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$

ដូចនេះ $a = 1 \ , b = -2 \ , c = 1$

និង $y_P(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ ។

ខ-ការបង្ហាញ

អនុគមន៍ $y = y_P(x) + y_h(x)$ ជាចំលើយរបស់ (E)

លុះត្រាអនុគមន៍ y, y' ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ(E) ។

ដោយគេមាន $y' = y'_p(x) + y'_h(x)$ នោះគេបាន ៖

$$\left[y'_p(x)+y'_h(x)\right]-4\left[y_p(x)+y_h(x)\right]=-4x^2+10x-6$$

$$\left[y'_p(x)-4y_p(x)\right]+\left[y'_h(x)-4y_h(x)\right]=-4x^2+10x-6 \quad (1)$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន

$$y'_P(x)-4y_p(x)=-4x^2+10x-6 \quad (2)$$

(ព្រោះ $y_p(x)$ ជាចំលើយរបស់សមីការ (E)) ។

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញបាន :

$$-4x^2+10x-6+\left[y'_h(x)-4y_h(x)\right]=-4x^2+10x-6$$

នាំឱ្យគេទាញបាន $y'_h(x)-4y_h(x)=0$ ។

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $y_h(x)$ ជាចំលើយរបស់

សមីការ $(E'): y'-4y=0$ ។

គ-ដោះស្រាយសមីការ $(E'): y'-4y=0$

ដោយ $a=4$ ដូចនេះចំលើយសមីការ (E') ជាអនុគមន៍

$$y_h(x)=k.e^{4x} \quad ,k\in IR$$ ។

ទាញរកចំលើយទូទៅរបស់សមីការ (E):

តាមសំរាយខាងលើចំលើយសមីការ (E) គឺជាអនុគមន៍ទំរង់

$$y = y_p(x) + y_h(x)$$

ដោយគេមាន $y_p(x) = (x-1)^2$ និង $y_h(x) = k.e^{4x}$

ដូចនេះ $y = (x-1)^2 + k.e^{4x} \quad , k \in IR$ ។