រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន
បរិញ្ញាប័ត្រផ្នែកគណិតវិទ្យា

ដេរីវេនៃអនុគមន៍

Derivative of function

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

រួមមាន ៖

មេរៀនសង្ខេប

លំហាត់គំរូ

លំហាត់អនុវត្តន៍

រក្សាសិទ្ធិ

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លឹម ផល្គុន និង អ៊ុំង សំណាង

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក យ៉ង់ ឆារី
លោក លឹម ឆុន
លោក សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិត្តសិរ

ការិយកុំព្យូទ័រ

លោក អ៊ុំង សំណាង និង លឹម ផល្គុន

អារម្ភកថា

សួស្តីមិត្តអ្នកសិក្សាជាទីស្រឡាញ់រាប់អាន !

សៀវភៅ **ដេរីវេនៃអនុគមន៍ថ្នាក់ទី១២**ដែលលោកអ្នកកំពុងតែកាន់អាននេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបចំឡើងសម្រាប់ទុកជាឯកសារសម្រាប់អ្នកសិក្សាដែលមាន បំណងចង់យល់ដឹងអំពីមេរៀននេះឲ្យកាន់តែច្បាស់លាស់។

នៅក្នុងសៀវភៅនេះ យើងខ្ញុំបានសង្ខេបមេរៀន អមជាមួយឧទាហរណ៍គំរូ ដែលអាចឲ្យអ្នកសិក្សាងាយយល់ និង ឆាប់ចងចាំ ហើយព្រមទាំងមានលំហាត់ អនុវត្តន៍សម្រាប់អ្នកសិក្សាហ្វឹកហាត់ដោះស្រាយដោយខ្លួនឯង។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅមួយក្បាលនេះ នឹងអាចចូលរួមផ្តល់នូវ គំនិត និង វិធីសាស្ត្រថ្មីៗក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់លើផ្នែកដេរីវេនៃអនុគមន៍ ចំពោះលោកអ្នកសិក្សាជាពុំខានឡើយ ។

ជាទីបញ្ចប់ខ្ញុំបាទសូមជូនពរចំពោះលោកអ្នក សូមមានសុខភាពល្អ មានប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និង ទទួលបានជោគជ័យក្នុងគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី០៥ កក្កដា ឆ្នាំ២០១២

អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាវជ្រាវ

លឹម ផល្គុន

Tel :017 768 246

Email: lim_phalkun@ymail.com

Website: www.mathtoday.wordpress.com

មាតិការឿង

ទំព័រ

ជំពូកទី១

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ 001

១-ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំណុចមួយ 001
២-ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់ 005
៣-ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ 006
៤-ដេរីវេនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល 011
៥-ដេរីវេនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ 013
៦-ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់ 016
៧-ដេរីវេនៃអនុគមន៍អាំព្លីស៊ីត 019

ជំពូកទី២

ការអនុវត្តន៍ដេរីវេនៃអនុគមន៍ 021

១-ការអនុវត្តន៍ក្នុងការគណនាតម្លៃបរមា 021

២-ល្បឿន និង សំទុះនៃចលនា 022
៣-ឌីផេរ៉ង់ស្យែល 024
៤-វិសមភាពកំណើនមានកំណត់ 025
៥-ទ្រឹស្តីបទរ៉ូល 030
៦-ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម 033
៧-អនុវត្តន៍ក្នុងសេដ្ឋកិច្ច 035

ជំពូកទី៣

អថេរភាព និង ក្រាបនៃអនុគមន៍ 037

១-សិក្សាអនុគមន៍សនិទាន 037
ក/សិក្សាអនុគមន៍ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$ 037
ខ/សិក្សាអនុគមន៍ $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ 056
២-សិក្សាអនុគមន៍អសនិទាន 081
ក/សិក្សាអនុគមន៍ $y=\sqrt{ax+b}$ 081
ខ/សិក្សាអនុគមន៍ $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ 086
៣-សិក្សាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល 096
៤-សិក្សាអនុគមន៍លោការីតនេពែ 107

ជំពូកទី៤

លំហាត់មានដំណោះស្រាយ 112

ជំពូកទី៥

លំហាត់អនុវត្តន៍ 164

ឯកសារយោង 195

ជំពូកទី១

ដេរីវេនៃអនុគមន៍

១-ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំណុចមួយ

ក/និយមន័យ ៖

ដេរីវេត្រង់ចំណុច x_0 នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ (បើមាន) ជាលីមីតនៃផលធៀបកំណើន $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ កាលណា Δx ខិតទៅជិត 0 ។

គេកំណត់សរសេរ ៖

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ឧទាហរណ៍ រកដេរីវេត្រង់ $x_0=2$ នៃអនុគមន៍ $y=x^3$

គេបាន $f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-8}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h-2)[(2+h)^2+2(2+h)+4]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(h^2+6h+12)=12$$

ខ/ភាពមានដេរីវេ ៖

អនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x = x_0$ លុះត្រាតែ ៖

-អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = x_0$

-ដេរីវេខាងឆ្វេង និង ដេរីវេខាងស្តាំស្មើគ្នាគឺ $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

ដែល $f'_-(x_0) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

និង $f'_+(x_0) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ ។

ឧទាហរណ៍ គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \begin{cases} x^2 + px + q & \text{បើ} \quad x \le 1 \\ 3x + 4 & \text{បើ} \quad x > 1 \end{cases}$

កំណត់ពីរចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឲ្យ f មានដេរីវេត្រង់ $x = 1$ ។

គេត្រូវឲ្យ f ជាប់ត្រង់ $x = 1$ គឺ $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

គេបាន $\lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + px + q) = \lim\limits_{x \to 1^+} (3x + 4)$

$$1 + p + q = 7 \text{ ឬ } q = 6 - p \quad (1)$$

និងគេត្រូវឲ្យ $f'_-(1) = f'_+(1)$ ។

គេមាន $f'_{-}(1)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2+p(1+h)+q-(1+p+q)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{1+2h+h^2+p+ph+q-1-p-q}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+(2+p)h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}(h+2+p)=2+p$$

ហើយ $f'_{+}(1)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{3(h+1)+4-(3+4)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{3h}{h}=3$$

ហេតុនេះ $2+p=3$ នោះ $p=1$

ហើយតាម(1) គេបាន $q=6-1=5$ ។

ដូចនេះ $p=1$, $q=5$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

១-គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=x^3-x^2+1$

ដោយប្រើនិយមន័យចូរគណនា $f'(0)$, $f'(-1)$ និង $f'(1)$ ។

២-គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+2 & \text{បើ } x\le 1 \\ bx^2+4x+1 & \text{បើ } x>1 \end{cases}$$

កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ $x=1$ ។

៣-គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=\begin{cases} a\sin x+b\cos x+1 & \text{បើ } x\le \frac{\pi}{2} \\ b\sin x-a\cos x+3 & \text{បើ } x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ $x=\frac{\pi}{2}$ ។

៤-គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\sin x-\cos x+1$ ។

ដោយប្រើនិយមន័យគណនា $f'(-\frac{\pi}{4})$ និង $f'(\frac{\pi}{4})$ ។

២-ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

បើ $y = f(u)$ និង $u = g(x)$ នោះគេបាន ៖

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ ឬ $\frac{d}{dx} f[u(x)] = f'(u) \times u'(x)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ ៖

តាង $F(x) = f[g(x)]$ ដោយប្រើភាពមានដេរីវេត្រង់ $x = x_0$

គេត្រូវបង្ហាញថា $F'(x_0) = f'[g(x_0)] \times g'(x_0)$ ។

តាមនិយមន័យគេបាន ៖

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f[g(x)] - f[g(x_0)]}{g(x) - g(x_0)} \times \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f[g(x) - g(x_0)]}{g(x) - g(x_0)} \times \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= f'[g(x_0)] \times g'(x_0)$$

ដូចនេះ $F'(x_0) = f'[g(x_0)] \times g'(x_0)$ ។

ឧទាហរណ៍ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$

តាង $u=\frac{x-1}{x+1}$ នោះ $y=u^3$

គេបាន $\frac{du}{dx}=\frac{(x-1)'(x+1)-(x+1)'(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$

ហើយ $\frac{dy}{du}=3u^2$ ។ តាមរូបមន្ត $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$

គេបាន $y'=\frac{dy}{dx}=3u^2.\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{6(x-1)^2}{(x+1)^4}$ ។

៣-ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ក/ដេរីវេនៃអនុគមន៍ស៊ីនុស និង កូស៊ីនុស

បើ $y=\sin x$ នោះ $y'=\cos x$

បើ $y=\cos x$ នោះ $y'=-\sin x$

បើ $y=\sin u$ នោះ $y'=u'\cos u$

បើ $y=\cos u$ នោះ $y'=-u'\sin u$

ដែល $u=u(x)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ ៖

តាង $f(x)=\sin x$

គេបាន $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\times\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})$$

$$=1\times\cos x=\cos x$$

ដូចនេះ $f(x)=\sin x$ នោះ $f'(x)=\cos x$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $y=\sin u=\sin u(x)$

គេបាន $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\cos u\times u'=u'\cos u$ ។

ដូចនេះ $y=\sin u$ នោះ $y'=u'\cos u$ ។

(ចំពោះដេរីវេអនុគមន៍កូស៊ីនូស គេស្រាយដូចខាងលើដែរ) ។

ខ/ដេរីវេនៃអនុគមន៍តង់សង់ និង កូតង់សង់

បើ $y=\tan x$ នោះ $y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

បើ $y=\cot x$ នោះ $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$

បើ $y=\tan u$ នោះ $y'=\frac{u'}{\cos^2 u}=u'(1+\tan^2 u)$

បើ $y=\cot u$ នោះ $y'=-\frac{u'}{\sin^2 u}=-u'(1+\cot^2 u)$

សម្រាយបញ្ជាក់ ៖

គេមាន $y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ នោះគេបាន ៖

$$y'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

ដូចនេះបើ $y=\tan x$ នោះ $y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ ។

គេមាន $y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ នោះគេបាន ៖

$$y'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$$

ឧទាហរណ៍ រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

គេបាន $y'=\dfrac{(\sin x)'(1+\cos x)-(1+\cos x)'\sin x}{(1+\cos x)^2}$

$$=\frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x+1}{(1+\cos x)^2}=\frac{1}{1+\cos x}$$

ដូចនេះ $y'=\dfrac{1}{1+\cos x}$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

ចូរគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

1/ $y = 3\cos x - \cos^3 x$

2/ $y = \sin^3 x \cos 3x$

3/ $y = \sin 4x \cos^4 x$

4/ $y = \dfrac{\sin x}{1 + \sin x}$

5/ $y = \dfrac{\cos x}{1 - \cos x}$

6/ $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

7/ $y = \dfrac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$

8/ $y = \dfrac{1}{2}\tan^2 x + \dfrac{1}{3}\tan^3 x$

9/ $y = x - \cot x$

10/ $y = \cot^4 x$

៤-ដេរីវេនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

បើ $y = e^x$ នោះ $y' = e^x$

បើ $y = a^x$ នោះ $y' = a^x \ln a \quad , \ a > 0 \ , a \neq 1$

បើ $y = e^u$ នោះ $y' = u'e^u$

បើ $y = a^u$ នោះ $y' = u'.a^u \ \ln a$

សម្រាយបញ្ជាក់ ៖

តាង $f(x) = e^x$ នោះតាមនិយមន័យគេបាន ៖

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} . e^x = e^x \quad \text{ព្រោះ} \quad \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$ ។

ដូចនេះ បើ $y = e^x$ នោះ $y' = e^x$ ។

ម្យ៉ាងទៀតយើងតាង $g(x) = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$

គេបាន $g'(x) = (x \ln a)' . e^{x \ln a} = \ln a . e^{x \ln a} = a^x \ln a$

ដូចនេះ បើ $y = a^x$ នោះ $y' = a^x \ln a \quad , \ a > 0 \ , a \neq 1$ ។

ឧទាហរណ៍១ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

គេបាន $y'=\dfrac{(e^x-e^{-x})'(e^x+e^{-x})-(e^x+e^{-x})'(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$

$$=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$$

ដូចនេះ $y'=\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$ ។

ឧទាហរណ៍២ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=e^{3\sin x-\sin^3 x}$

គេបាន $y'=(3\sin x-\sin^3 x)'e^{3\sin x-\sin^3 x}$

$$=(3\cos x-3\cos x\sin^2 x)e^{3\sin x-\sin^3 x}$$

$$=3\cos x(1-\sin^2 x)e^{3\sin x-\sin^3 x}$$

$$=3\cos^3 x\,e^{3\sin x-\sin^3 x}$$

៥-ដេរីវេនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ

បើ $y=\ln x$ នោះ $y'=\frac{1}{x}$

បើ $y=\ln(ax+b)$ នោះ $y'=\frac{a}{ax+b}$

បើ $y=\ln u$ នោះ $y'=\frac{u'}{u}$

សម្រាយបញ្ជាក់ ៖

តាង $f(x)=\ln x$ នោះ $f(x+h)=\ln(x+h)$

តាមនិយមន័យ $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\times\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$$

ដូចនេះបើ $f(x)=\ln x$ នោះ $f'(x)=\frac{1}{x}$ ។

ឧទាហរណ៍១ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$

គេបាន $y'=\dfrac{(1-\ln x)'(1+\ln x)-(1+\ln x)'(1-\ln x)}{(1-\ln x)^2}$

$$=\frac{-\frac{1}{x}(1+\ln x)-\frac{1}{x}(1-\ln x)}{(1+\ln x)^2}=-\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$$

ដូចនេះ $y'=-\dfrac{2}{x(1+\ln x)^2}$ ។

ឧទាហរណ៍២ គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

គេបាន $y'=\dfrac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$=\frac{1+\frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ដូចនេះ $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

1/ $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

2/ $y=(x^2-x+1)e^{-x}$

3/ $y=e^{-x^2}$

4/ $y=x^3e^{2x}$

5/ $y=(x^2-x)e^x$

6/ $y=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$

៣-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

1/ $y=\dfrac{x+\ln x}{x}$

2/ $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$

3/ $y=1-x+x\ln x$

4/ $y=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$

5/ $y=\ln(x^2-4x+3)$

6/ $y=\ln(x+\sqrt{x^2+4})$

៦-ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

ក/ដេរីវេទី2នៃអនុគមន៍

ដេរីវេទីពីរនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ កំណត់តាងដោយ $y''=f''(x)$

ឬកំណត់តាងដោយ $\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)$ ។

ឧទាហរណ៍១ គេឲ្យអនុគមន៍ $y=\ln x$ ។ គណនា $\frac{d^2y}{dx^2}$?

គេមាន $\frac{dy}{dx}=y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$

ហើយ $\frac{d^2y}{dx^2}=(y')'=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ ។

ឧទាហរណ៍២ គេឲ្យអនុគមន៍ $y=\sin x$ ។ គណនា $\frac{d^2y}{dx^2}$?

គេបាន $\frac{dy}{dx}=y'=(\sin x)'=\cos x$

ហើយ $\frac{d^2y}{dx^2}=(y')'=(\cos x)'=-\sin x$ ។

ខ/ដេរីវេលំដាប់ខ្ពស់

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = f(x)$ អាចមានដេរីវេខ្លួនឯងបន្តបន្ទាប់ទៀត ។

គេហៅដេរីវេបន្តបន្ទាប់ថា ដេរីវេទី1 , ដេរីវេទី2,……,ដេរីវេទីn

ដែលគេកំណត់តាងដោយ $y', y'', ..., y^{(n)}$ ។

ឧទាហរណ៍ គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = \sin x$?

គេបាន $y' = (\sin x)' = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$

$$y'' = (\sin(\frac{\pi}{2} + x))' = \cos(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(\pi + x)$$

$$y''' = (\sin(\pi + x))' = \cos(\pi + x) = \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$$

$$-------------------------$$

ឧបមាថា $y^{(n)} = \sin(\frac{n\pi}{2} + x)$ ពិត

យើងបាន $y^{(n+1)} = \left(y^{(n)}\right)' = \cos(\frac{n\pi}{2} + x) = \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{2} + x\right)$ ពិត

ដូចនេះ $y^{(n)} = \sin(\frac{n\pi}{2} + x)$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

១-គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = \cos x$

ចូរស្រាយថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍កំណត់ដោយ $y^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$

២-ចូរគណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

1/ $y = \ln x$

2/ $y = e^{2x}$

3/ $y = \frac{1}{x+1}$

4/ $y = \sin^2 x$

5/ $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$

6/ $y = \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}$

៣-គេឲ្យអនុគមន៍ $y = (x-\alpha)^m (x-\beta)^n$ ដែល $m, n \in IN, \alpha \neq \beta$

ក/ ចូរស្រាយថា $x - \alpha$ ចែកដាច់ $y^{(m-1)}$

ខ/ តាង $GCD(m,n) = d$ ។

តើ $(x-\alpha)(x-\beta)$ ចែកដាច់ $y^{(d-1)}$ ឬទេ ?

៤-គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^5$ ។

ចូរគណនា $f''(0)$ រួចទាញរកលេខមេគុណមុខតួ x^2 នៃអនុគមន៍ f ។

៧-ដេរីវេនៃអនុគមន៍អាំព្លីស៊ីត

ក/ និយមន័យ

អនុគមន៍អាំព្លីស៊ីត គឺជាអនុគមន៍ដែលបញ្ជាក់ពីទំនាក់ទំនងមួយ

បំពេញលក្ខខណ្ឌរួមគ្នា ។

ឧទាហរណ៍ $x^2+y^2=a^2$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $x^2+xy+y^2=3$,....

សុទ្ធតែជាអនុគមន៍អាំព្លីស៊ីត ។

ខ/ឧទាហរណ៍គំរូ

គណនា y' ដោយដឹងថា $ax^2+bxy+cy^2=d$ ។

គេបាន $(ax^2+bxy+cy^2)'=(d)'$

$$2ax+by+bxy'+2cyy'=0$$

$$(bx+2cy)y'=-(2ax+by)$$

គេទាញបាន $y'=-\frac{2ax+by}{bx+2cy}$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

១-គណនា $y'=\dfrac{dy}{dx}$ ជាអនុគមន៍ x និង y ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម

ក/ $x^2+y^2=r^2$

ខ/ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

គ/ $(y-k)^2=4p(x-h)$

ឃ/ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

ង/ $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

ច/ $x^3+y^3=3xy+1$

ឆ/ $\sin(xy)=\sin x+\sin y$

ជ/ $x^2-4xy+3y^2=5$

ឈ/ $x^y=y^x$

ញ/ $e^x+e^y=e^{xy}+2$

២-ចូរគណនា $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ជាអនុគមន៍ x, y, y' រួចជាអនុគមន៍នៃ x, y

ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម ៖

ក/ $x^2-xy+y^2=4$

ខ/ $x^3+y^3=6xy+1$

គ/ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=xy$

ឃ/ $x^2-3xy+y^2=9$

ច/ $xy+y^3=x^2+4$

ឆ/ $x^2-3xy^2+2y=0$

ជំពូកទី២

អនុវត្តន៍ដេរីវេនៃអនុគមន៍

១-អនុវត្តន៍ក្នុងការគណនាតម្លៃបរមា

សន្មតថា **f** ជាអនុគមន៍មានដេរីវេទីពីរលើចន្លោះមួយដែលមាន x_0 ។

☞ *អតិបរមាធៀប ៖*

អនុគមន៍ **f** មានអតិបរមាធៀបត្រង់ x_0 កាលណា $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$

☞ *អប្បបរមាធៀប ៖*

អនុគមន៍ **f** មានអតិបរមាធៀបត្រង់ x_0 កាលណា $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$

២-ល្បឿន និង សំទុះនៃចលនា

ក/ល្បឿននៃចលនា

ល្បឿននៃចលនាមួយនៅខណៈ t គឺ $V'(t) = \frac{dS}{dt} = S'(t)$

ដែល $S = S(t)$ ជាចម្ងាយចរនៅខណៈ t ។

ឧទាហរណ៍ ទូកមួយចាប់ផ្តើមចេញដំណើរពីចំណុចត្រួតពិនិត្យដែល

ខណៈ t នាទីក្រោយមកទូកនោះមានចម្ងាយពីចំណុចត្រួតពិនិត្យ

ដែលតាងដោយអនុគមន៍ $S(t) = t^3 + 60t$ (គិតជាម៉ែត្រ)

ក/រកល្បឿនទូកត្រង់ចំណុចចាប់ផ្តើម ។

ខ/កំណត់ល្បឿននៃទូកនៅខណៈ $t = 3$ នាទី ។

ដំណោះស្រាយ

ក/រកល្បឿនទូកត្រង់ចំណុចចាប់ផ្តើម ៖

គេបាន t គឺ $V'(t) = \frac{dS}{dt} = S'(t) = 3t^2 + 60$

បើ $t = 0$ នោះ $V'(0) = 3(0)^2 + 60 = 60m/mn$ ។

ខ/កំណត់ល្បឿននៃទូកនៅខណៈ $t = 3$ នាទី ៖

បើ $t = 3mn$ នោះ $V'(3) = 3(3)^2 + 60 = 27 + 60 = 87m/mn$ ។

ខ/សំទុះនៃចលនា

សំទុះនៃចលនាមួយនៅខណៈ t គឺ $a'(t) = \dfrac{dV}{dt} = V'(t)$

ដែល $V = V(t)$ ជាល្បឿននៃចលនានៅខណៈ t ។

ឧទាហរណ៍ រថយន្តមួយចាប់ផ្តើមចេញដំណើរដោយល្បឿនដែលតាង

ដោយអនុគមន៍ $V(t) = \dfrac{100t}{t+15}$ (m/s)

កំណត់សំទុះនៃរថយន្តនៅខណៈ $t = 10s$?

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $a(t) = \dfrac{dV}{dt} = V'(t)$ ដោយ $V(t) = \dfrac{100t}{t+15}$ (m/s)

នោះ $a(t) = \dfrac{100(t+15) - 100t}{(t+15)^2} = \dfrac{1500}{(t+15)^2}$

បើ $t = 10s$ នោះ $a(10) = \dfrac{1500}{(10+15)^2} = \dfrac{1500}{625} = 2.4\ m/s^2$ ។

៣-ឌីផេរ៉ង់ស្យែល

និយមន័យ ៖

បើអនុគមន៍ $y = f(x)$ មានដេរីវេនោះឌីផេរ៉ង់ស្យែលកំណត់ដោយ

$dy = f'(x).dx$ ។

កាលណាតម្លៃ Δx កាន់តែតូចនោះ dy អាចជាតម្លៃប្រហែលនៃ Δy

គេបាន $f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta y \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x).\Delta x$ ។

ឧទាហរណ៍ ចូរគណនាតម្លៃប្រហែលនៃ $\tan 46^o$?

តាងអនុគមន៍ $f(x) = \tan x$

យក $x = 45^o$ និង $\Delta x = 1^o$ នោះគេបាន ៖

$f(46^o) = f(45^o) + f'(45^o).\Delta x$

ដោយ $f'(x) = (\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ នោះ $f'(45^o) = 2$

គេបាន $f(46^o) = 1 + 2 \times \dfrac{3.14}{180} = 1.035$ ។

ដូចនេះ $\tan 46^o = 1.035$ ។

៤-វិសមភាពកំណើនមានកំណត់

ទ្រឹស្តីបទទី១

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់ និង ជាប់ ហើយមានដេរីវេលើចន្លោះ I ។

បើមានពីរចំនួនពិត m និង M ដែលគ្រប់ $x\in I$: $m\le f'(x)\le M$

នោះគ្រប់ចំនួនពិត $a,b\in I$ ដែល $a<b$ គេបាន ៖

$m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាងអនុគមន៍ g ដែល $g(x)=f(x)-mx$ មានដេរីវេលើ I

គេបាន $g'(x)=f'(x)-m\ge 0$ គ្រប់ $x\in I$ ព្រោះ $f'(x)\ge m$ ។

នោះ g ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ I ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a,b\in I$ ដែល $a<b$ គេបាន $g(a)\le g(b)$

ឬ $f(a)-ma\le f(b)-mb$ នោះ $f(b)-f(a)\ge m(b-a)$ (i)

តាងអនុគមន៍ h ដែល $h(x)=f(x)-Mx$ មានដេរីវេលើ I

គេបាន $h'(x)=f'(x)-M\le 0$ គ្រប់ $x\in I$ ព្រោះ $f'(x)\le M$ ។

នោះ h ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ I ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a,b\in I$ ដែល $a<b$ គេបាន $h(a)\geq h(b)$

ឬ $f(a)-Ma\geq f(b)-Mb$ នោះ $f(b)-f(a)\leq M(b-a)$ (ii)

តាមទំនាក់ទំនង (i) & (ii) គេបាន ៖

$m(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a)$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$f(x)=\sqrt{(2k+1)x+k^2-(2k+1)n}$ ដែល $k>0$, $n>0$ ។

ក/កំណត់តម្លៃអមនៃ $f'(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[n,n+1]$ ។

ខ/ បញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $x\in[n,n+1]$ គេបាន ៖

$$\frac{2k+1}{2(k+1)}(x-n)+k\leq f(x)\leq\frac{2k+1}{2k}(x-n)+k$$

ដំណោះស្រាយ

ក/កំណត់តម្លៃអមនៃ $f'(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[n,n+1]$

គេមាន $f'(x)=\dfrac{2k+1}{2\sqrt{(2k+1)x+k^2-(2k+1)n}}=\dfrac{2k+1}{2f(x)}$

ដោយ $f(n)=\sqrt{(2k+1)n+k^2-(2k+1)n}=k$

ហើយ $f(n+1)=\sqrt{(2k+1)(n+1)+k^2-(2k+1)n}=k+1$

នោះគ្រប់ $x\in[n,n+1]$ គេបាន $\frac{2k+1}{2(k+1)}\le f'(x)\le\frac{2k+1}{2k}$ ។

ខ/ បញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $x\in[n,n+1]$ គេបាន ៖

$$\frac{2k+1}{2(k+1)}(x-n)+k\le f(x)\le\frac{2k+1}{2k}(x-n)+k$$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះគ្រប់$x\in[n,n+1]$ គេមាន ៖

$\frac{2k+1}{2(k+1)}\le f'(x)\le\frac{2k+1}{2k}$ ។ តាមវិសមភាពកំណើនមានកំណត់

ចំពោះ $x\ge n$ គេបាន ៖

$\frac{2k+1}{2(k+1)}(x-n)\le f(x)-f(n)\le\frac{2k+1}{2k}(x-n)$ ដោយ $f(n)=k$

ដូចនេះ $\frac{2k+1}{2(k+1)}(x-n)+k\le f(x)\le\frac{2k+1}{2k}(x-n)+k$ ។

ទ្រឹស្តីបទទី២

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ មានដេរីវេលើចន្លោះ $[a,b]$។

បើមានពីរចំនួនពិត M ដែលគ្រប់ $x\in[a,b]:\ |f'(x)|\leq M$

នោះគេបាន $|f(b)-f(a)|\leq\ M.|b-a|$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

គេមានគ្រប់ $x\in[a,b]:\ |f'(x)|\leq M$

នោះគេទាញ $-M\leq f'(x)\leq M$

តាមវិសមភាពកំណើនមានកំណត់គេបាន ៖

ចំពោះ $a<b$ គេបាន $-M(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq M(b-a)\quad(1)$

ចំពោះ $a>b$ គេបាន $-M(a-b)\leq f(a)-f(b)\leq M(a-b)\quad(2)$

តាម(1)និង(2)គេបាន $|f(b)-f(a)|\leq\ M.|b-a|$ ។

ដូចនេះទ្រឹស្តីបទត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\sin x$ ។

ចំពោះគ្រប់ $\alpha,\beta\in IR$ បង្ហាញថា $|\sin\alpha-\sin\beta|\le|\alpha-\beta|$?

គេមាន $f(x)=\sin x$ នោះ $f'(x)=\cos x$

ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ គេមាន $-1\le\cos x\le 1$ នោះ $|f(x)|\le 1$

ដូចនេះគ្រប់ $\alpha,\beta\in IR$ គេបាន $|\sin\alpha-\sin\beta|\le|\alpha-\beta|$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

១-គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\sqrt{5x-1}$

ក/កំណត់តម្លៃអមនៃ $f'(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,2]$ ។

ខ/ បញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ $x\in[1,2]$ គេបាន ៖

$$\frac{5x}{6}+\frac{7}{6}\le f(x)\le\frac{5x}{4}+\frac{3}{4}$$ ។

២-គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\cos x$ ។

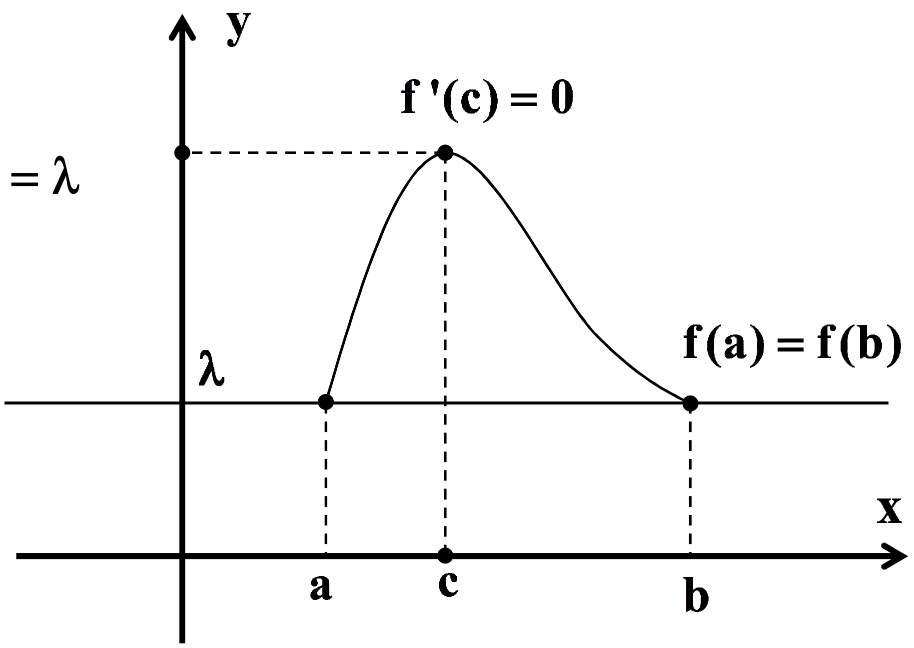
ចំពោះគ្រប់ $\alpha,\beta\in IR$ បង្ហាញថា $|\cos\alpha-\cos\beta|\le|\alpha-\beta|$?

៥-ទ្រឹស្តីបទរ៉ូល

បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ មានដេរីវេលើចន្លោះ(a,b) និង $f(a)=f(b)$នោះមានចំនួន $c\in(a,b)$ យ៉ាងតិចដែល $f'(c)=0$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ ៖

គេតាង $f(a)=f(b)=\lambda$



-ករណីទី១ បើ $f(x)=\lambda$ គ្រប់ $x\in[a,b]$ នោះ f ជាអនុគមន៍ថេរលើចន្លោះ $[a,b]$ និង $f'(x)=0$ គ្រប់ $x\in(a,b)$ ។

-ករណីទី២ បើ $f(x)>\lambda$ គ្រប់ $x\in[a,b]$ នោះ f មានតម្លៃអតិបរមាយ៉ាងតិចមួយត្រង់ $x=c$ ដោយ f មានដេរីវេត្រង់ $x=c$ នោះ $f'(c)=0$

-ករណីទី៣ បើ $f(x)<\lambda$ គ្រប់ $x\in[a,b]$នោះ f មានតម្លៃអប្បបរមាយ៉ាងតិចមួយត្រង់ $x=c$ដោយ f មានដេរីវេត្រង់ $x=c$ នោះ $f'(c)=0$

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$$

ដែល $a,b,c\in IR$ ។

ក/គណនា $f(a)$ និង $f(b)$ រួចទាញថាសមីការ $f'(x)$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះចំនួន a និង b ។

ខ/ទាញបញ្ជាក់វិសមភាព $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក/គណនា $f(a)$ និង $f(b)$ ៖

គេបាន $f(a)=a^3-(a+b+c)a^2+(ab+bc+ca)a-abc=0$

$$f(b)=b^3-(a+b+c)b^2+(ab+bc+ca)b-abc=0$$

ដូចនេះ $f(a)=f(b)=0$ ។

ទាញថាសមីការ $f'(x)=0$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ(a,b) ៖

ដោយ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[a,b]$ និង មានដេរីវេលើ (a,b)

ហើយ $f(a)=f(b)=0$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទរ៉ូលមាន $\alpha\in(a,b)$

ដែល $f'(\alpha)=0$ នោះមានន័យថាសមីការ $f'(x)=0$ មានឬសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ (a,b) ។

ខ/ទាញបញ្ជាក់វិសមភាព $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

គេមាន $f'(x)=3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)$

ដោយ $f'(x)=0$ ជាសមីការមានឬសនោះ $\Delta' \geq 0$

តែ $\Delta'=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$

ដូចនេះ $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

១-គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=x^4-2x^3+2x+4$

ក/គណនា $f(-1)$ និង $f(1)$ ។

ខ/បង្ហាញថាមាន $c\in(-1,1)$ ដែល $f'(c)=0$ ។

២-គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=x^2-10x+9$

ក/រកឬស α និង β របស់សមីការ $f(x)=0$

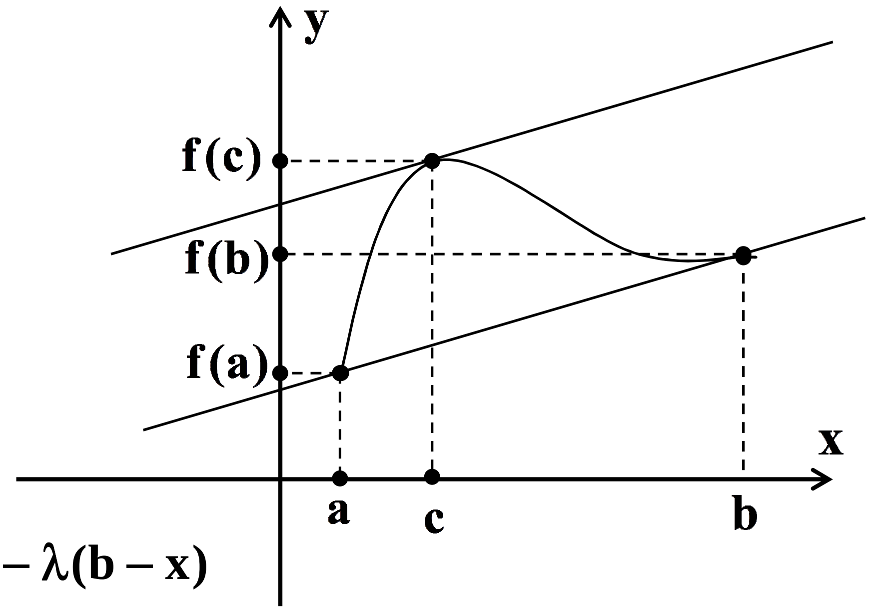
ខ/បង្ហាញថាមាន $c\in(\alpha,\beta)$ ដែល $f'(c)=0$ រួចកំណត់ c ។

៦-ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (ឬទ្រឹស្តីបទ Lagrange)

បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ មានដេរីវេលើចន្លោះ (a,b)

នោះមានចំនួន $c\in(a,b)$ យ៉ាងតិចមួយដែល $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ ៖



យក $g(x)=f(b)-f(x)-\lambda(b-x)$

ដែល $\lambda=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ។

នោះ g ជាអនុគមន៍ជាប់ក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ និង មានដេរីវេក្នុង(a,b)

ហើយដោយ $g(a)=g(b)=0$នោះតាមទ្រឹស្តីបទរ៉ូលមាន $c\in(a,b)$

មួយយ៉ាងតិចដែល $g'(c)=0$ ។ ដោយ $g'(c)=-f'(c)+\lambda$

នោះ $f'(c)=\lambda$ ។ ដូចនេះ $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ។

ឧទាហរណ៍ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន α និង β ដែល $\alpha<\beta$

ចូរស្រាយថា $\frac{\beta-\alpha}{\beta}<\ln(\frac{\beta}{\alpha})<\frac{\beta-\alpha}{\alpha}$ ។

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\ln x$ ដែល $x\in[\alpha,\beta]$ និង $0<\alpha<\beta$

គេបាន f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[\alpha,\beta]$ និង មានដេរីវេលើ $(\alpha\,,\beta)$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យមមាន $c\in(\alpha,\beta)$ ដែល ៖

$$f'(c)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}\quad(1)$$

គេមាន $f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$ នោះ $f'(c)=\frac{1}{c}$

តែ $c\in(\alpha,\beta)$ នោះ $\alpha<c<\beta$ ឬ $\frac{1}{\beta}<\frac{1}{c}<\frac{1}{\alpha}$

គេបាន $\frac{1}{\beta}<f'(c)<\frac{1}{\alpha}\quad(2)$

តាម (1) និង (2) គេទាញ $\frac{1}{\beta}<\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}<\frac{1}{\alpha}$

ដូចនេះ $\frac{\beta-\alpha}{\beta}<\ln(\frac{\beta}{\alpha})<\frac{\beta-\alpha}{\alpha}$ ។

៧-អនុវត្តន៍ដេរីវេក្នុងសេដ្ឋកិច្ច

យើងតាង $C = C(x)$ ជាអនុគមន៍ចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារៈ ចំនួន x គ្រឿង , $R = R(x)$ ជាអនុគមន៍ចំណូលសរុបពីការលក់សម្ភារៈ ចំនួន x គ្រឿងនិង$P = P(x) = R(x) - C(x)$ ជាអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញ ពីការលក់សម្ភារៈចំនួន x គ្រឿង ។

គេបាន $C'(x)$ ហៅថាអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណាយបន្ថែម

$R'(x)$ ហៅថាអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណូលបន្ថែម

$P'(x)$ ហៅថាអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណេញបន្ថែម ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យអនុគមន៍ប្រាក់ចំណូលសរុបពីការលក់សម្ភារៈ x គ្រឿងនិងអនុគមន៍ប្រាក់ចំណាយសរុបលើការផលិតសម្ភារៈ x កំណត់ រៀងគ្នាដោយ $R(x) = 300x$ និង $C(x) = 1000 - 72x^2 + x^3$ ។

ក/កំណត់អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញសរុប ។

ខ/កំណត់បរិមាណសម្ភារៈដែលត្រូវលក់ដើម្បីឲ្យគេទទួលបានប្រាក់ ចំណេញអតិបរមា រួចកំណត់រកប្រាក់ចំណេញអតិបរមានោះ ។

ដំណោះស្រាយ

ក/កំណត់អនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញសរុប

តាង $P(x)$ ជាអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណេញសរុបពីការលក់សម្ភារះ

គេបាន $P(x) = R(x) - C(x) = 300x - 1000 + 72x^2 - x^3$

ដូចនេះ $P(x) = -x^3 + 72x^2 + 300x - 1000$ ។

ខ/កំណត់បរិមាណសម្ភារះដែលត្រូវលក់ដើម្បីឲ្យគេទទួលបានប្រាក់

ចំណេញអតិបរមា រួចកំណត់រកប្រាក់ចំណេញអតិបរមានោះ ៖

គេមាន $P'(x) = -3x^2 + 144x + 300 = -3(x-50)(x+2)$

បើ $P'(x) = 0$ នោះ $x_1 = 50$, $x_2 = -2$(មិនយក)

គេមាន $P''(x) = -6x + 144$ នោះ $P''(50) = -300 + 144 < 0$

នោះមានន័យថា $P(x)$ មានអតិបរមាត្រង់ $x = 50$ ។

ដូចនេះដើម្បីបានប្រាក់ចំណេញអតិបរមាគេត្រូវលក់សម្ភារះ 50 ឯកតា

ហើយប្រាក់ចំណេញអតិបរមានោះគឺ ៖

$P_{max} = P(50) = 69,000$ ឯកតារូបិយវត្ថុ ,

ជំពូកទី៣

សិក្សាអថេរភាព និង ក្រាបនៃអនុគមន៍

១-សិក្សាអនុគមន៍សនិទាន

ក/ សិក្សាអនុគមន៍ $y=\frac{ax^2+bx+c}{px+q}$

ដែល $a\neq 0$, $p\neq 0$ និង $ax_0^2+bx_0+c\neq 0$ គ្រប់ $x_0=-\frac{q}{p}$

☞ ដែនកំណត់ ៖ $D=IR-\{-\frac{q}{p}\}$

☞ ដេរីវេ $f'(x)=\frac{apx^2+2aqx+bq-cp}{(px+q)^2}$

-បើ $f'(x)=0$ គ្មានឫសនោះអនុគមន៍គ្មានបរមាទេ ។

-បើ $f'(x)=0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នានោះអនុគមន៍មានអតិបរមាមួយ និងអប្បបរមាមួយ ។

☞ អាស៊ីមតូត ៖

-បន្ទាត់ $x = -\frac{p}{q}$ ជាអាស៊ីតមតូតឈរ ។

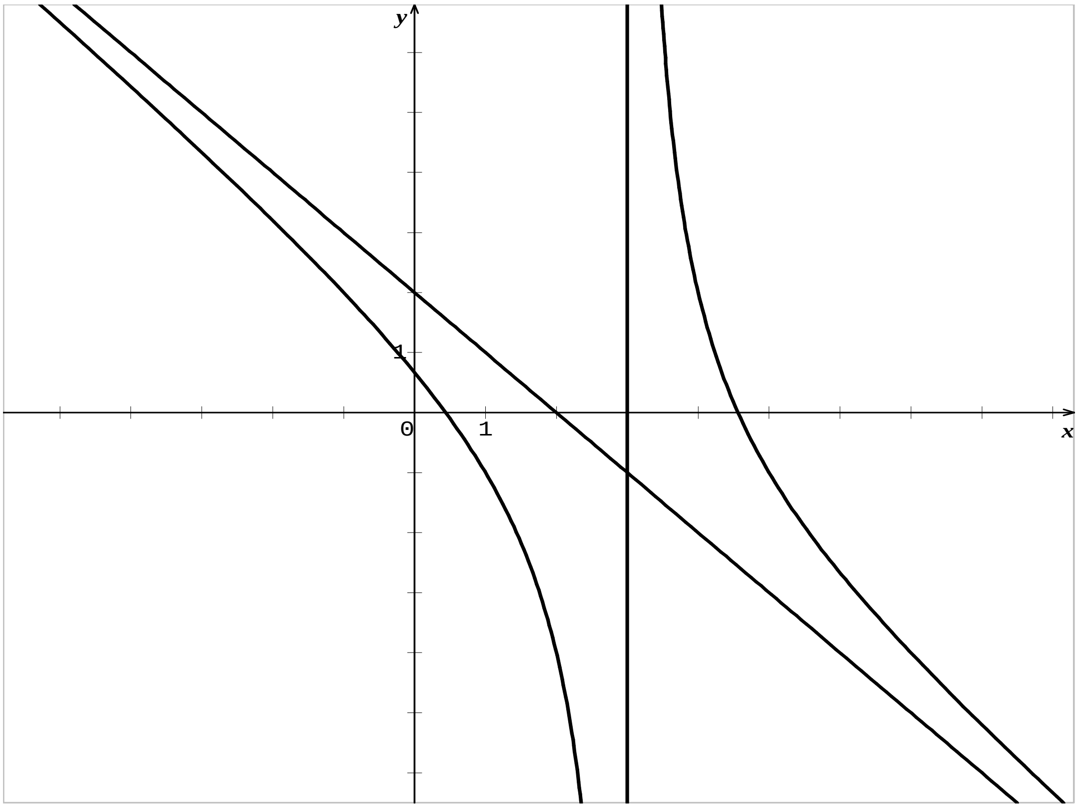
-បើអនុគមន៍អាចសរសេរ $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{px + q}$ នោះបន្ទាត់

មានសមីការ $y = \alpha x + \beta$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

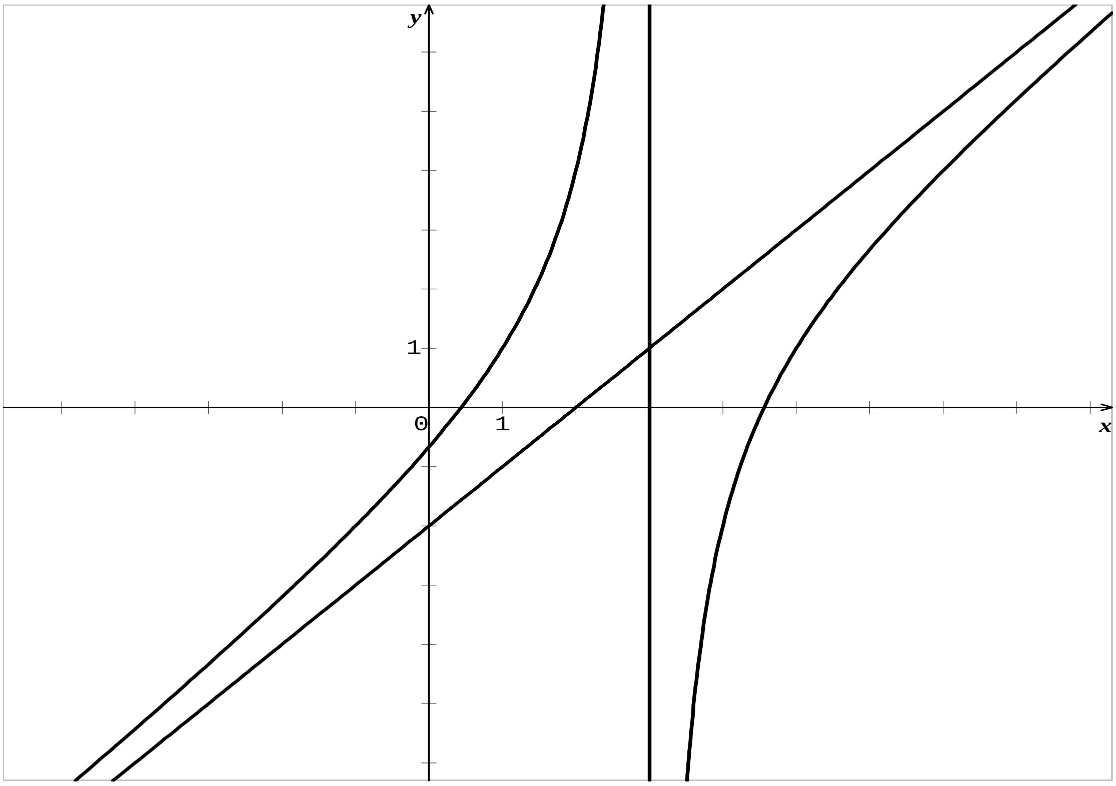
-ចំណុចប្រសព្វរវាងអាស៊ីមតូតទាំងពីរជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ។

-ក្រាបមានរាងទូទៅដូចរូបខាងក្រោម ៖

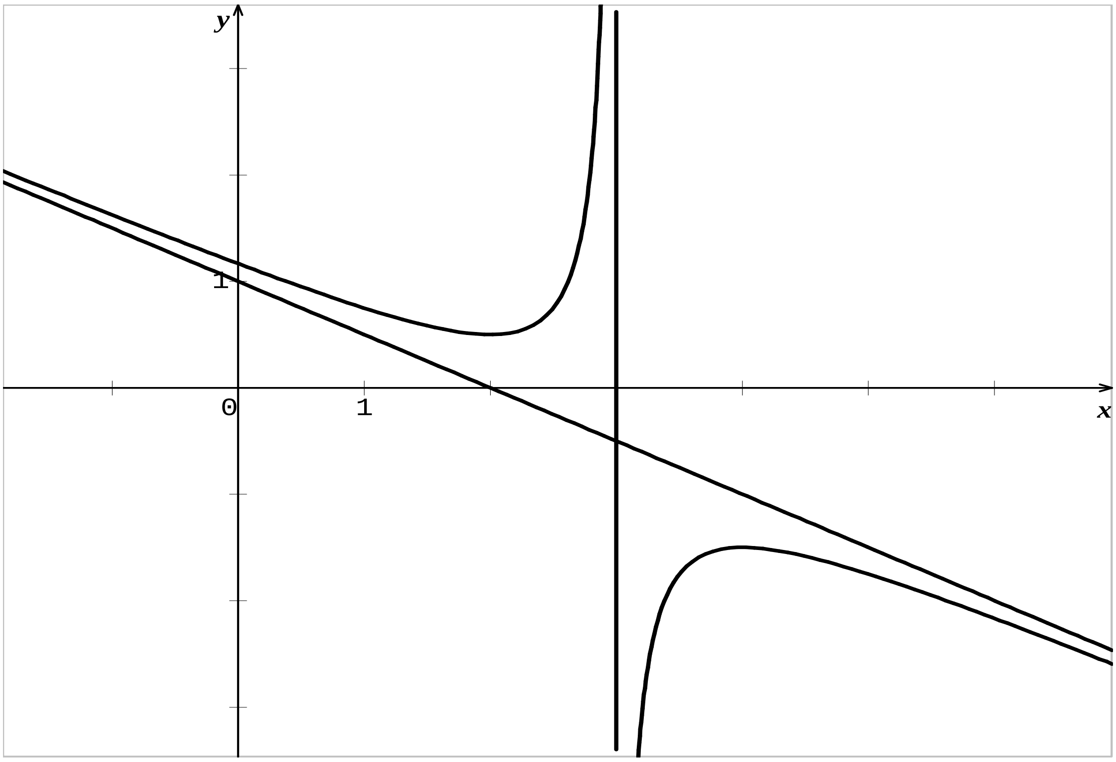
1/ករណី $ap < 0$ និង $f'(x) = 0$ គ្មានឫស



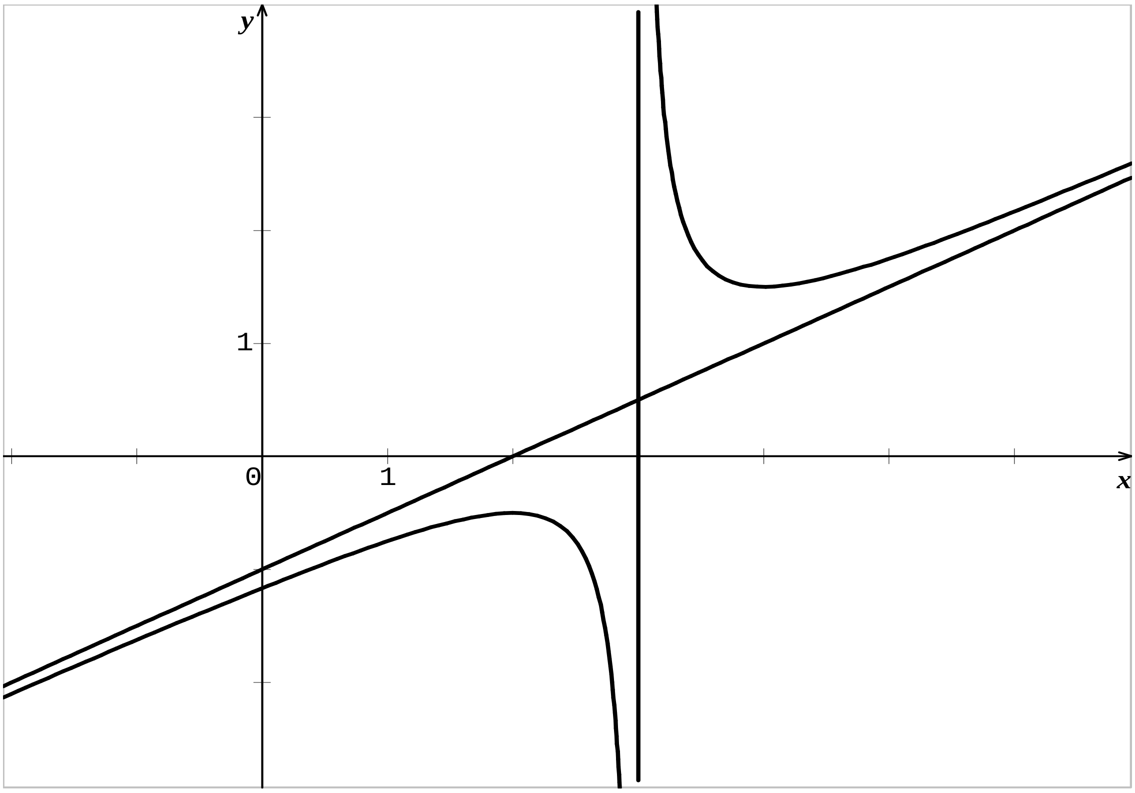
2/ករណី $ap > 0$ និង $f'(x) = 0$ គ្មានឫស



3/ករណី $ap < 0$ និង $f'(x) = 0$ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា



4/ករណី $ap>0$ និង $f'(x)=0$ មានឬសពីរផ្សេងគ្នា



ឧទាហរណ៍១ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{x^2-x-6}{x-1}$

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប (c) តាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយ$(o,\vec{i},\vec{j})$

•ដែនកំណត់ $D=IR-\{1\}$

•សរសេរជារាងកាណូនិក

$$f(x)=\frac{x^2-x-6}{x-1}=\frac{x(x-1)-6}{x-1}=x-\frac{6}{x-1}$$

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $f'(x)=(x-\frac{6}{x-1})'=1+\frac{6}{(x-1)^2}>0$ គ្រប់ $x\in D$

នោះ f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែនកំណត់របស់វា ។

-គណនាលីមីត

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-\frac{6}{x-1})=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-\frac{6}{x-1})=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(x-\frac{6}{x-1})=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}(x-\frac{6}{x-1})=-\infty$$

-អាសុីមតូត

ដោយ $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}(x-\frac{6}{x-1})=\infty$ នោះបន្ទាត់សមីការ $x=1$

ជាអាសុីមតូតឈរនៃក្រាប ។

ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=x-\frac{6}{x-1}$ ហើយ $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6}{x-1}=0$

ដូចនេះបន្ទាត់មានសមីការ $y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

•សំណង់ក្រាប

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស $(x'ox)$:

$y = 0$ សមមូល $\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 1} = 0$ ឬ $x^2 - x - 6 = 0$

$\Delta = 1 + 24 = 25$ មានឬស $x_1 = \dfrac{1-5}{2} = -2$, $x_2 = \dfrac{1+5}{2} = 3$ ។

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស $(y'oy)$:

$x = 0$ នោះ $y = \dfrac{-6}{-1} = 6$ ។

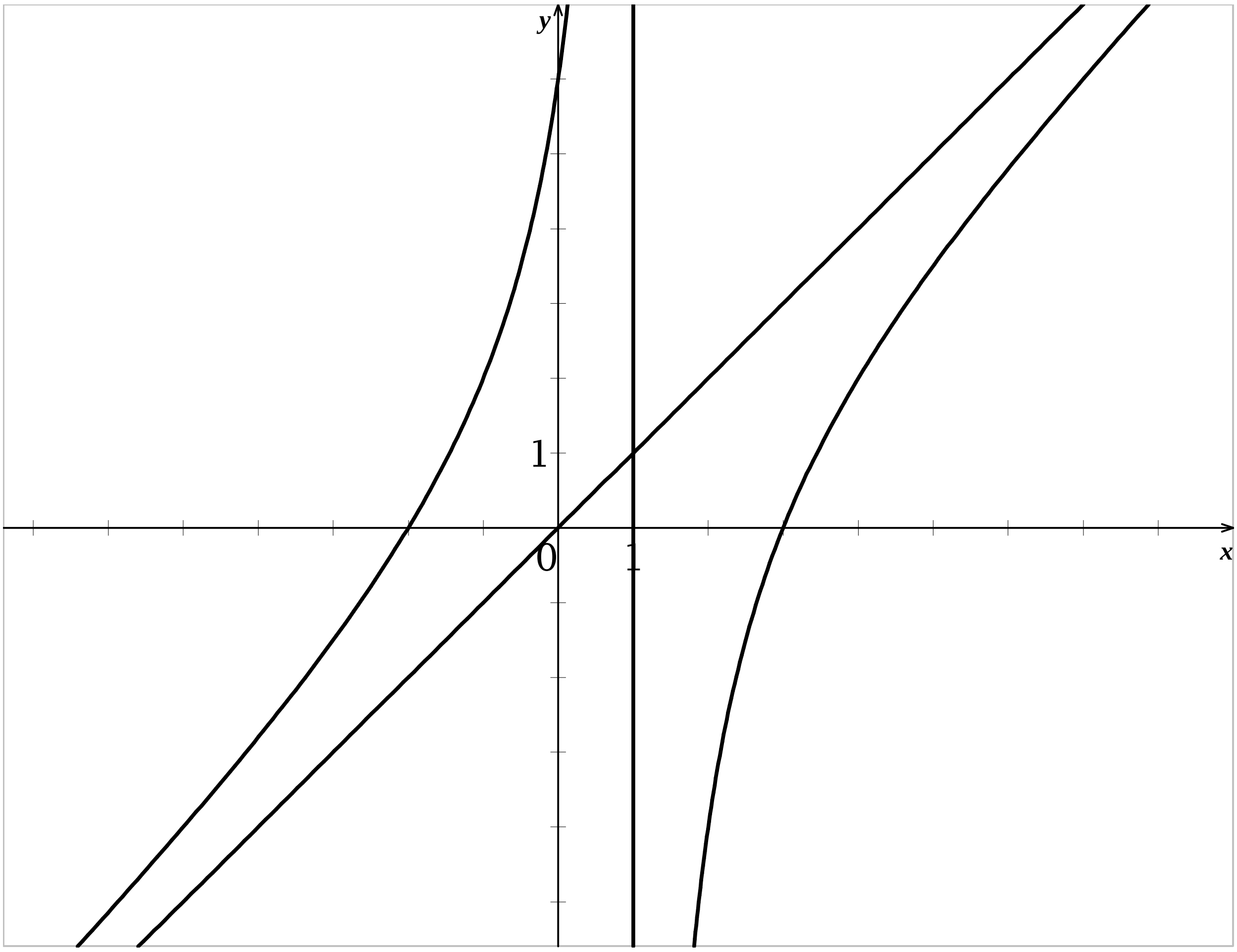
-ផ្ចិតឆ្លុះ

អាស៊ីមតូតឈរ $x=1$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=x$ កាត់គ្នាត្រង់ $I(1,1)$

ដោយ $f(2a-x)+f(x)=f(2-x)+f(x)$

$$=2-x-\frac{6}{1-x}+x-\frac{6}{x-1}=2=2b$$

ដូចនេះ $I(1,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ។



ឧទាហរណ៍២ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{2-x}$

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប (c) តាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយ$(o,\vec{i},\vec{j})$

•ដែនកំណត់ $D=IR-\{2\}$

•សរសេរជារាងកាណូនិក

$$f(x)=\frac{x^2-5x+4}{2-x}=-x+3-\frac{2}{2-x}$$

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $f'(x)=(-x+3-\dfrac{2}{2-x})'=-1-\dfrac{2}{(2-x)^2}<0\ \forall x\in D$

នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ចលើដែនកំណត់របស់វា ។

-គណនាលីមីត

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-x+3-\frac{2}{2-x})=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-x+3-\frac{2}{2-x})=+\infty$$

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}(-x+3-\frac{2}{2-x})=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(-x+3-\frac{2}{2-x}\right) = +\infty$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\left(-x+3-\frac{2}{2-x}\right) = \infty$ នោះបន្ទាត់សមីការ

$x = 2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

ម្យ៉ាងទៀត $f(x) = -x+3-\frac{2}{2-x}$ ហើយ $\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2-x} = 0$

ដូចនេះបន្ទាត់មានសមីការ $y = -x+3$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$-\infty$

•សំណង់ក្រាប

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស័ $(x'ox)$:

$y=0$ សមមូល $\dfrac{x^2-5x+4}{2-x}=0$ ឬ $x^2-5x+4=0$

$a+b+c=0$ មានឬស $x_1=1$, $x_2=4$ ។

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស័ $(y'oy)$:

$x=0$ នោះ $y=\dfrac{4}{2}=2$ ។

-ផ្ចិតឆ្លុះ

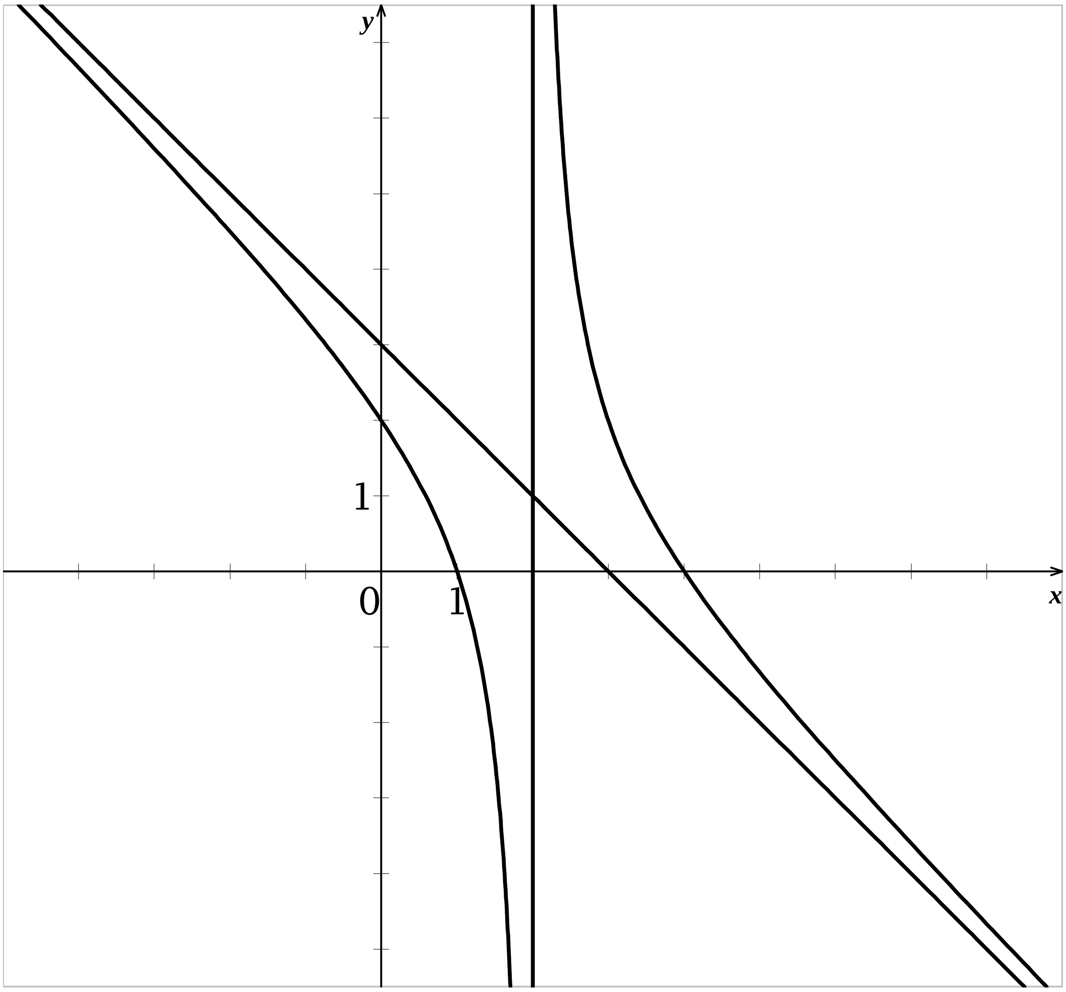
អាស៊ីមតូតឈរ $x=2$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=-x+3$ កាត់គ្នាត្រង់

ចំណុច $I(2,1)$

ដោយ $f(2a-x)+f(x)=f(4-x)+f(x)$

$$=x-1-\frac{2}{x-2}-x+3-\frac{2}{2-x}=2=2b$$

ដូចនេះ $I(2,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ។



ឧទាហរណ៍៣ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប (c) តាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយ$(o,\vec{i},\vec{j})$

•ដែនកំណត់ $D=IR-\{-1\}$

•សរសេរជារាងកាណូនិក

$$f(x)=\frac{x^2+3x+3}{x+1}=x+2+\frac{1}{x+1}$$

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $f'(x)=(x+2+\frac{1}{x+1})'=1-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0$ គេបាន $x(x+2)=0$ នោះ $x_1=0$, $x_2=-2$ ។

-បរមានៃ f

ចំពោះ $x=-2$ អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀប $f(-2)=-1$ ។

ចំពោះ $x=0$ អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀប $f(0)=3$ ។

-គណនាលីមីត

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+2+\frac{1}{x+1})=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+2+\frac{1}{x+1})=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}(x+2+\frac{1}{x+1})=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}(x+2+\frac{1}{x+1})=+\infty$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}(x+2+\frac{1}{x+1}) = \infty$ នោះបន្ទាត់សមីការ

$x=-1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=x+2+\frac{1}{x+1}$ ហើយ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0$

ដូចនេះបន្ទាត់មានសមីការ $y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

•សំណង់ក្រាប

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស័ $(x'ox)$:

$y=0$ សមមូល $\frac{x^2+3x+3}{x+1}=0$ ឬ $x^2+3x+3=0$

$\Delta=9-12<0$ សមីការគ្មានឫស ។

នោះក្រាបណៃអនុគមន៍មិនកាត់អក្សអាប់ស៊ីសទេ ។

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស $(y'oy)$:

$x=0$ នោះ $y=\frac{3}{1}=3$ ។

-ផ្ចិតឆ្លុះ

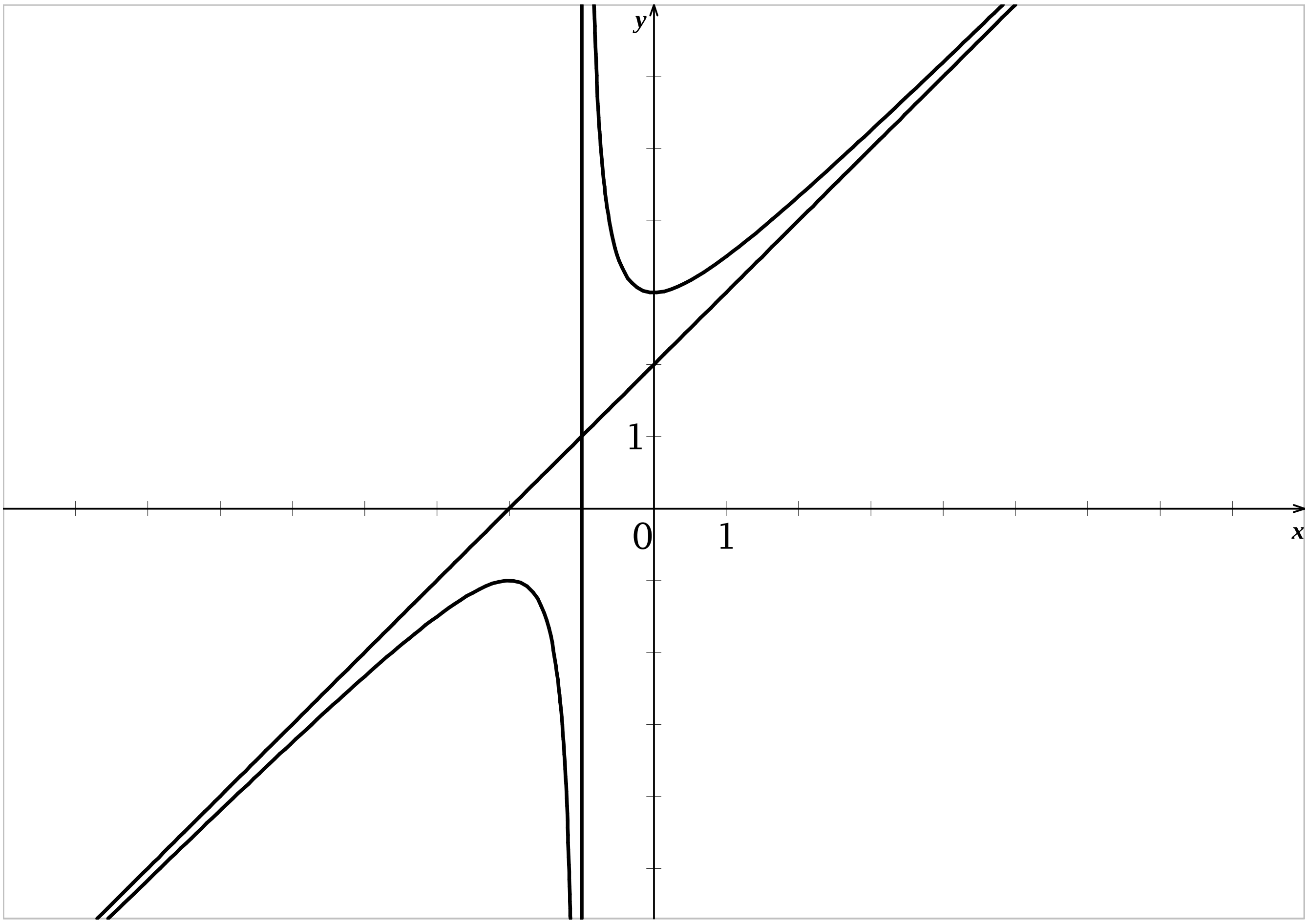
អាស៊ីមតូតឈរ $x=-1$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=x+2$ កាត់គ្នាត្រង់

ចំណុច $I(-1,1)$ ។

ដោយ $f(2a-x)+f(x)=f(-2-x)+f(x)$

$$=-x+\frac{1}{-1-x}+x+2+\frac{1}{x+1}$$
$$=2=2b$$

ដូចនេះ $I(-1,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ។



ឧទាហរណ៍៤ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{-x^2+5x-4}{2x}$

សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប (c) តាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយ$(o,\vec{i},\vec{j})$

•ដែនកំណត់ $D=IR^*$

•សរសេរជារាងកាណូនិក

$$f(x)=\frac{-x^2+5x-4}{2x}=-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}-\frac{2}{x}$$

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ

$$f'(x)=\left(-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}-\frac{2}{x}\right)'=-\frac{1}{2}+\frac{2}{x^2}=\frac{-x^2+4}{x^2}=\frac{(-x+2)(x+2)}{x^2}$$

$f'(x)=0$ គេបាន $x_1=2$, $x_2=-2$ ។

-បរមានៃ f

ចំពោះ $x=2$ អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀប $f(2)=\frac{1}{2}$ ។

ចំពោះ $x=-2$ អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀប $f(-2)=\frac{9}{2}$ ។

-គណនាលីមីត

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}-\frac{2}{x}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}-\frac{2}{x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}-\frac{2}{x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}-\frac{2}{x}\right) = -\infty$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to}\left(-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}-\frac{2}{x}\right) = \infty$ នោះបន្ទាត់សមីការ

$x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

ម្យ៉ាងទៀត $f(x) = -\frac{x}{2}+\frac{5}{2}-\frac{2}{x}$ ហើយ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{2}{x}\right) = 0$

ដូចនេះបន្ទាត់មានសមីការ $y = -\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	‖	$+$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{9}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$

•សំណង់ក្រាប

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស $(x'ox)$:

$y=0$ សមមូល $\frac{-x^2+5x-4}{2x}=0$ ឬ $-x^2+5x-4=0$

$a+b+c=0$ សមីការមានឫស $x_1=1$, $x_2=4$ ។

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស $(y'oy)$:

$x=0$ នោះ $y=\frac{3}{1}=3$ ។

-ផ្ចិតឆ្លុះ

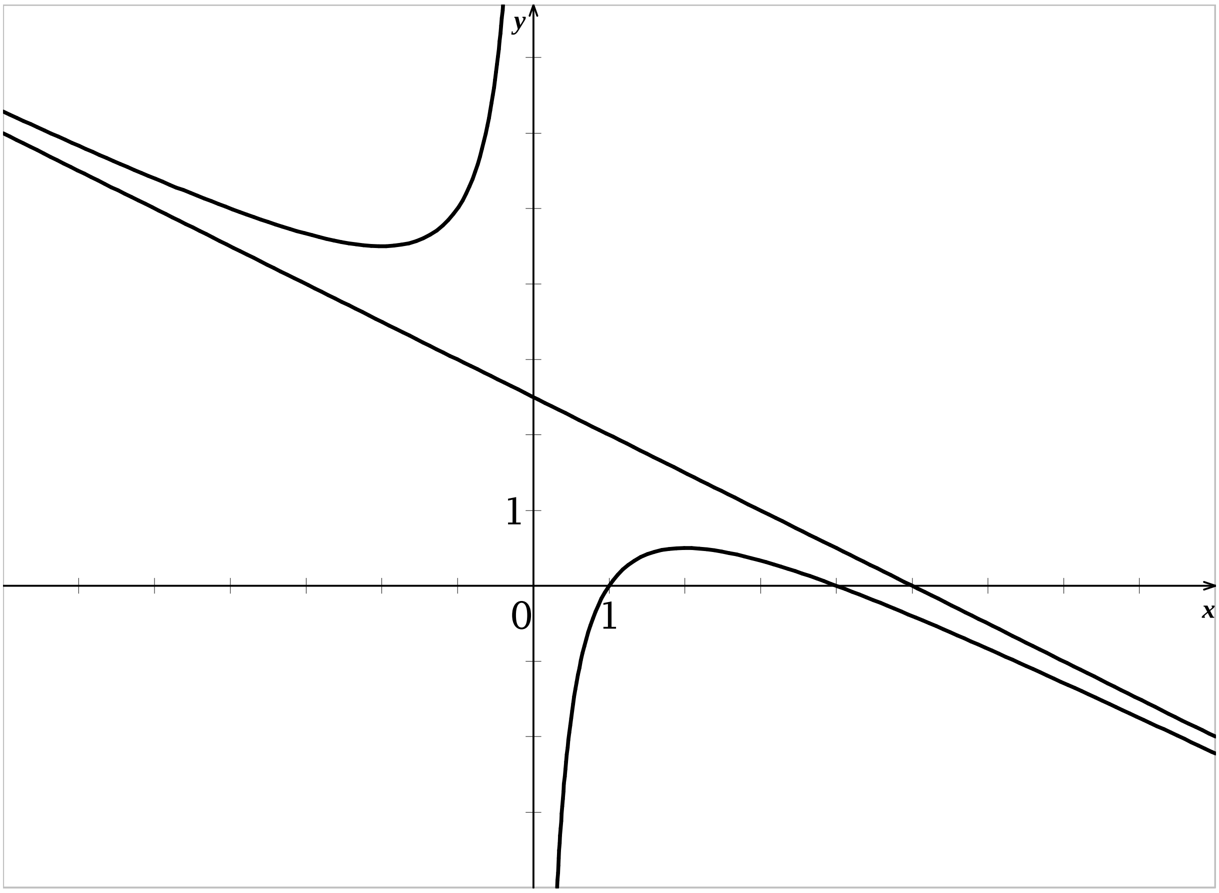
អាស៊ីមតូតឈរ $x=0$ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$ កាត់គ្នាត្រង់

ចំណុច $I(0,\frac{5}{2})$ ។

ដោយ $f(2a-x)+f(x)=f(-x)+f(x)$

$$=\frac{x}{2}+\frac{5}{2}+\frac{2}{x}-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}-\frac{2}{x}$$
$$=5=2b$$

ដូចនេះ $I(0,\frac{5}{2})$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប ។



លំហាត់អនុវត្តន៍

សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

១/ $y=\frac{x^2-5x+7}{x-2}$

២/ $y=\frac{x^2-x+1}{2x}$

៣/ $y=\frac{x^2+2x-3}{x+1}$

៤/ $y=x+2+\frac{4}{x}$

៥/ $y=x-2+\frac{1}{x-1}$

៦/ $y=-x+3+\frac{4}{x+1}$

ខ/សិក្សាអនុគមន៍ $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$

ដែល $a \neq 0$ និង $p \neq 0$ ។

☞ ដែនកំណត់ ៖ $D = \{x / px^2+qx+r \neq 0\}$

☞ ដេរីវេ $f'(x) = \dfrac{(aq-bp)x^2+2(ar-cp)x+(br-cq)}{(px^2+qx+r)^2}$

-បើ $f'(x)=0$ គ្មានឬសនោះអនុគមន៍គ្មានបរមាទេ ។

-បើ $f'(x)=0$ មានឬសពីរផ្សេងគ្នានោះអនុគមន៍មានអតិបរមាមួយ

និងអប្បបរមាមួយ ។

-បើ $f'(x)=0$ មានឬសតែមួយនោះអនុគមន៍មានបរមាតែមួយគត់ ។

☞ អាស៊ីមតូត ៖

-បន្ទាត់ $y = \dfrac{a}{p}$ ជាអាស៊ីតមតូតដេកជានិច្ច។

-ចំនួនអាស៊ីមតូតឈរអាស្រ័យនឹងឬសរបស់សមីការភាគបែង

$px^2+qx+r=0$ ដែលមាន $\Delta = q^2-4pr$ ។

✓ បើ $\Delta = q^2 - 4pr < 0$ គ្មានអាស៊ីមតូតឈរ និង ក្រាបមានតែមួយ

✓ បើ $\Delta = q^2 - 4pr = 0$ មានអាស៊ីមតូតឈរ $x = -\frac{q}{2p}$ និង ក្រាប

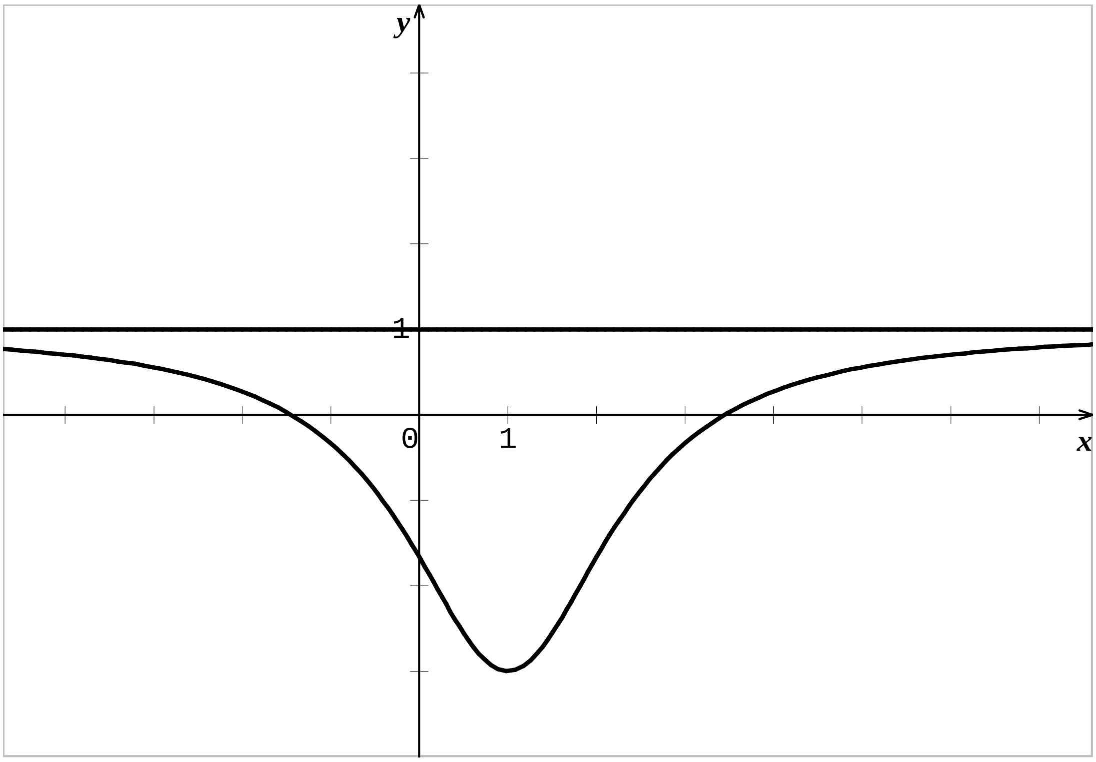
មានពីរមែកដាច់ពីគ្នា ។

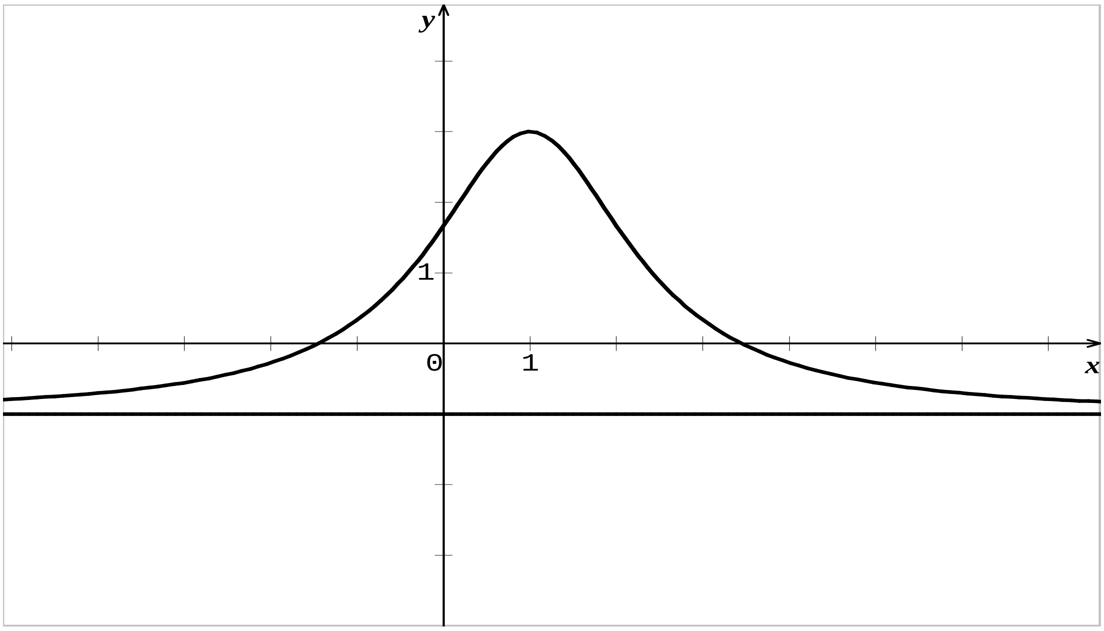
✓ បើ $\Delta = q^2 - 4pr > 0$ មានអាស៊ីមតូតឈរពីរ $x = \frac{-q \pm \sqrt{\Delta}}{2p}$

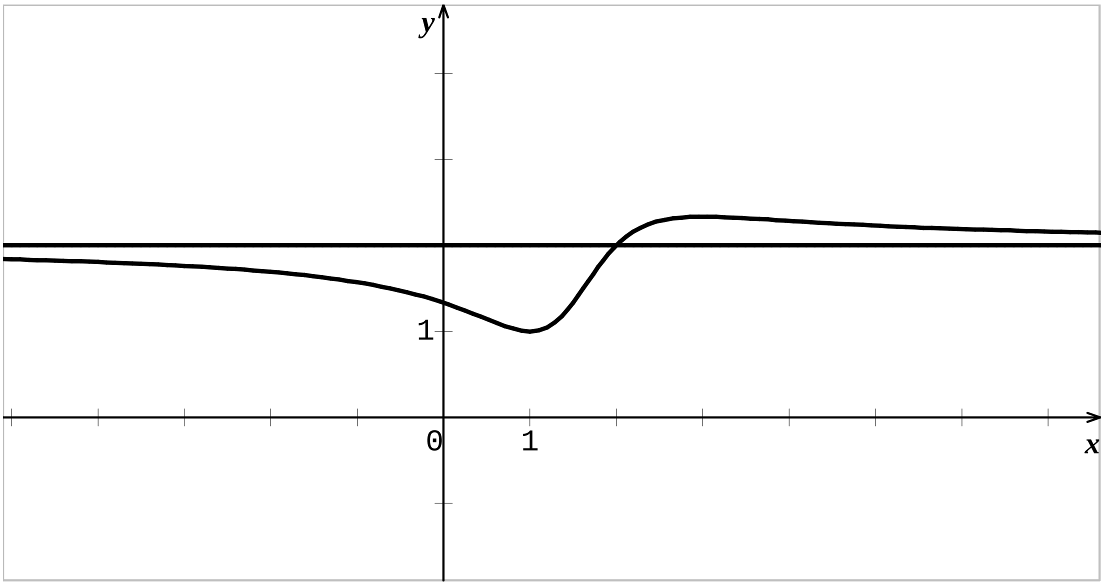
និង ក្រាបមានបីមែកដាច់ពីគ្នា។

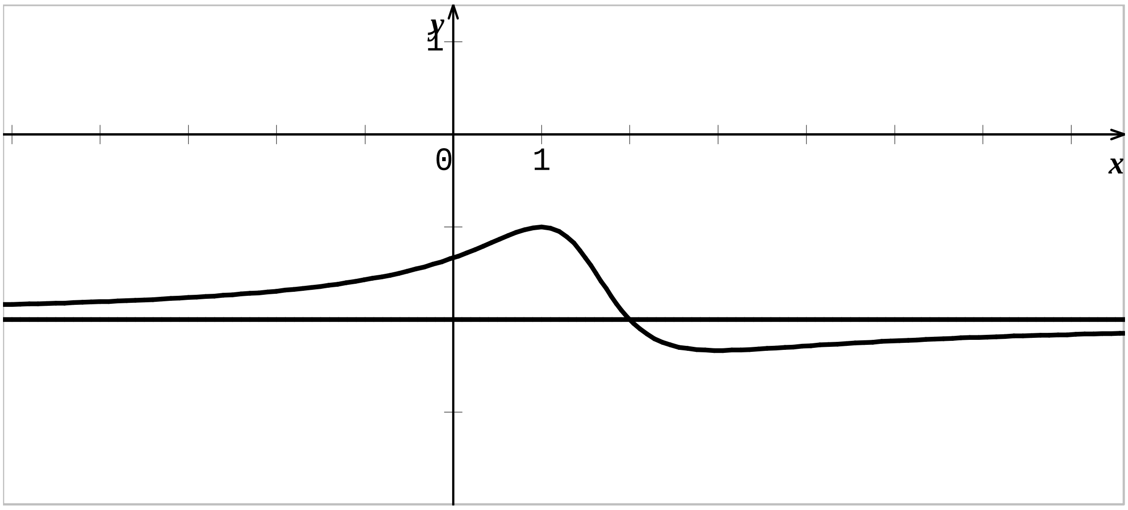
-ក្រាបមានរាងទូទៅដូចរូបខាងក្រោម ៖

1/ករណី $\Delta = q^2 - 4pr < 0$

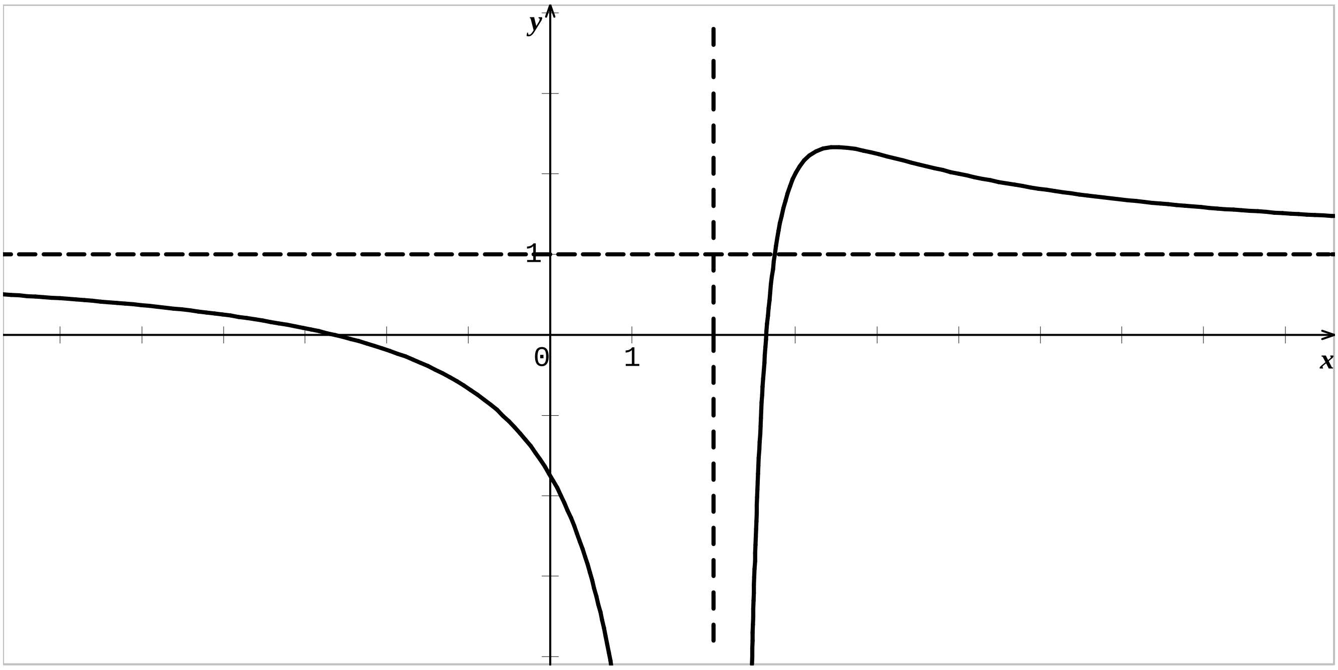


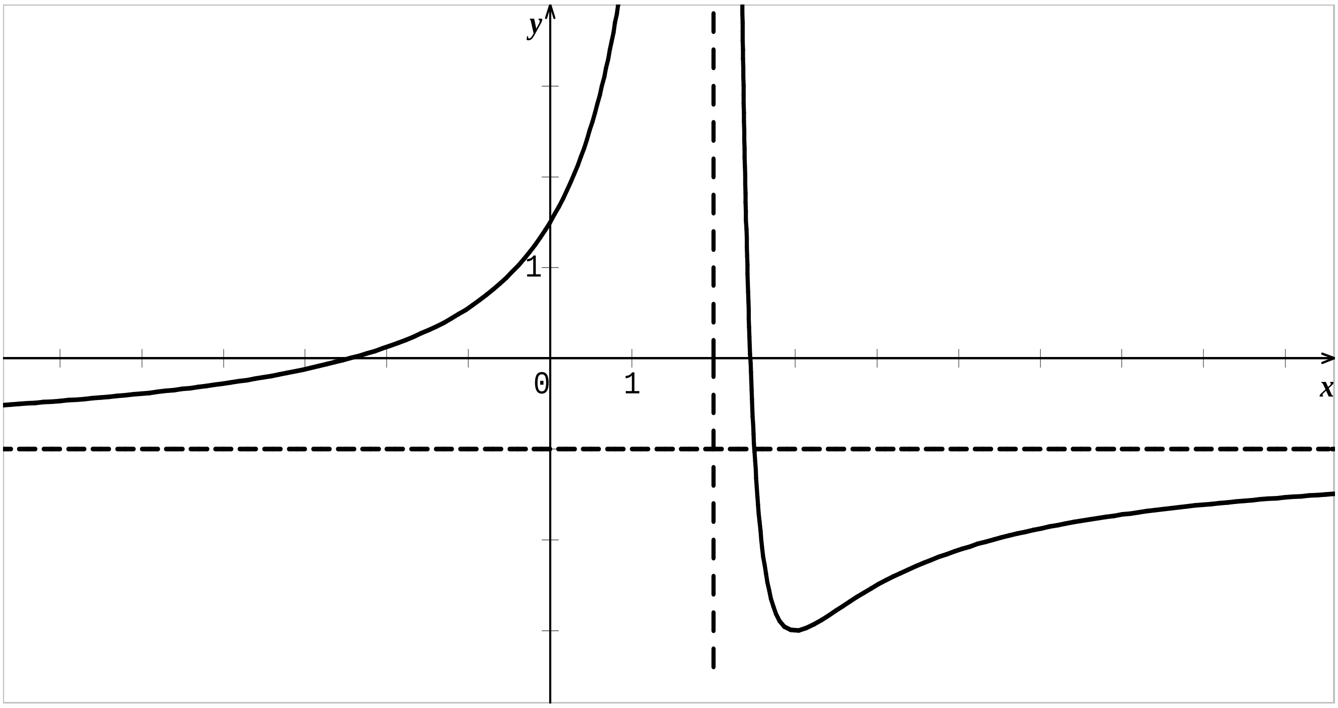

y
1
0
1
x

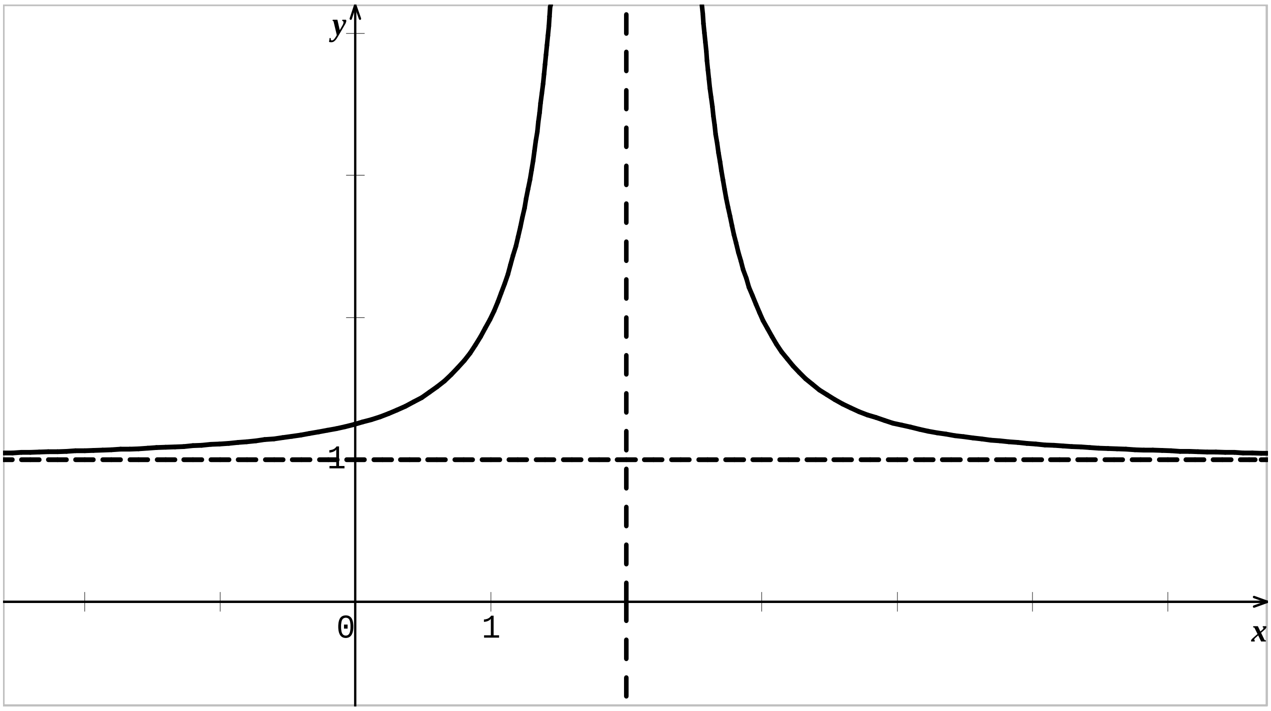

y
1
0
1
x

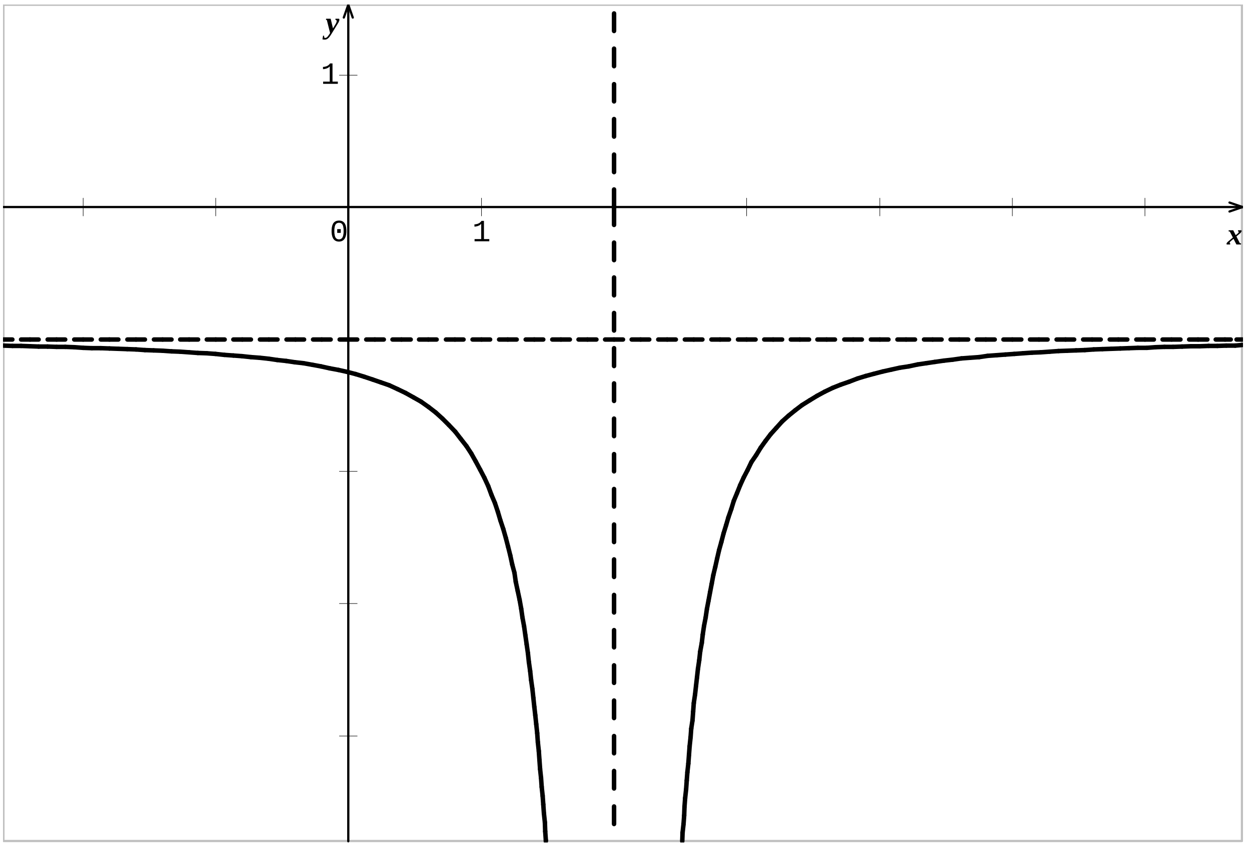

y
1
0
1
x

2/ករណី $\Delta = q^2 - 4pr = 0$

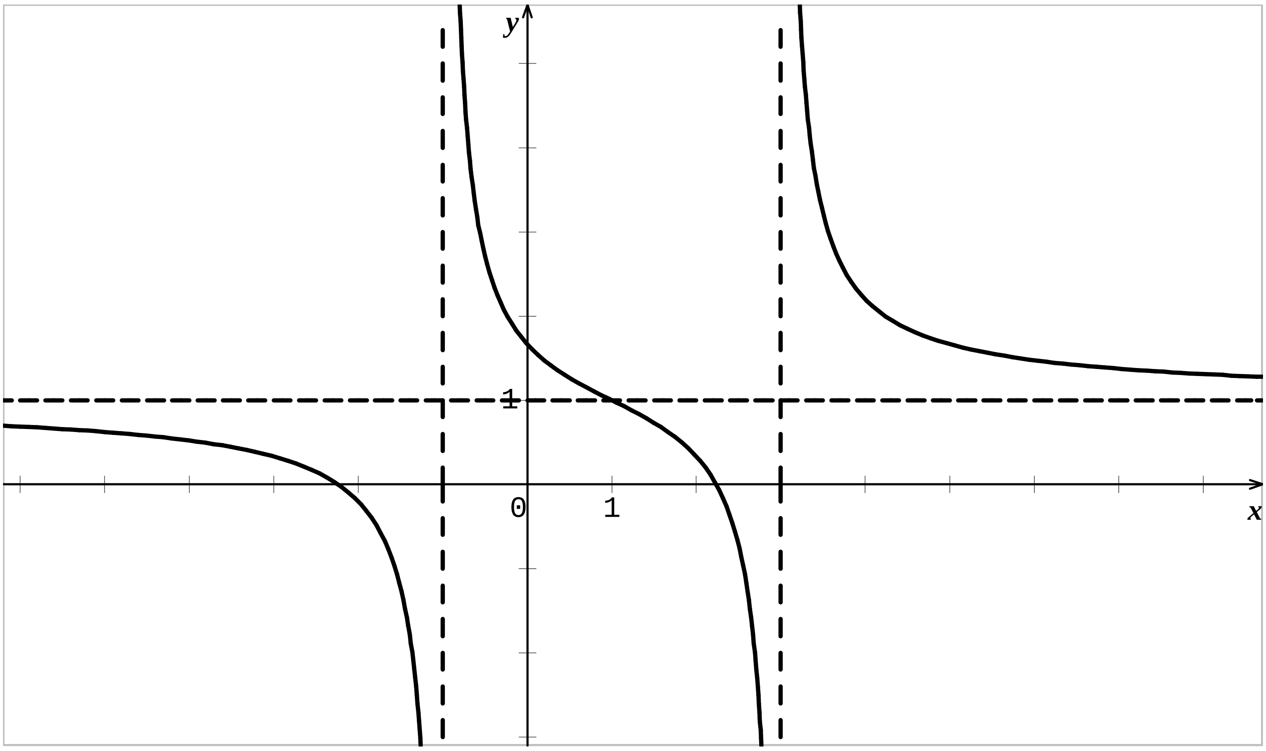


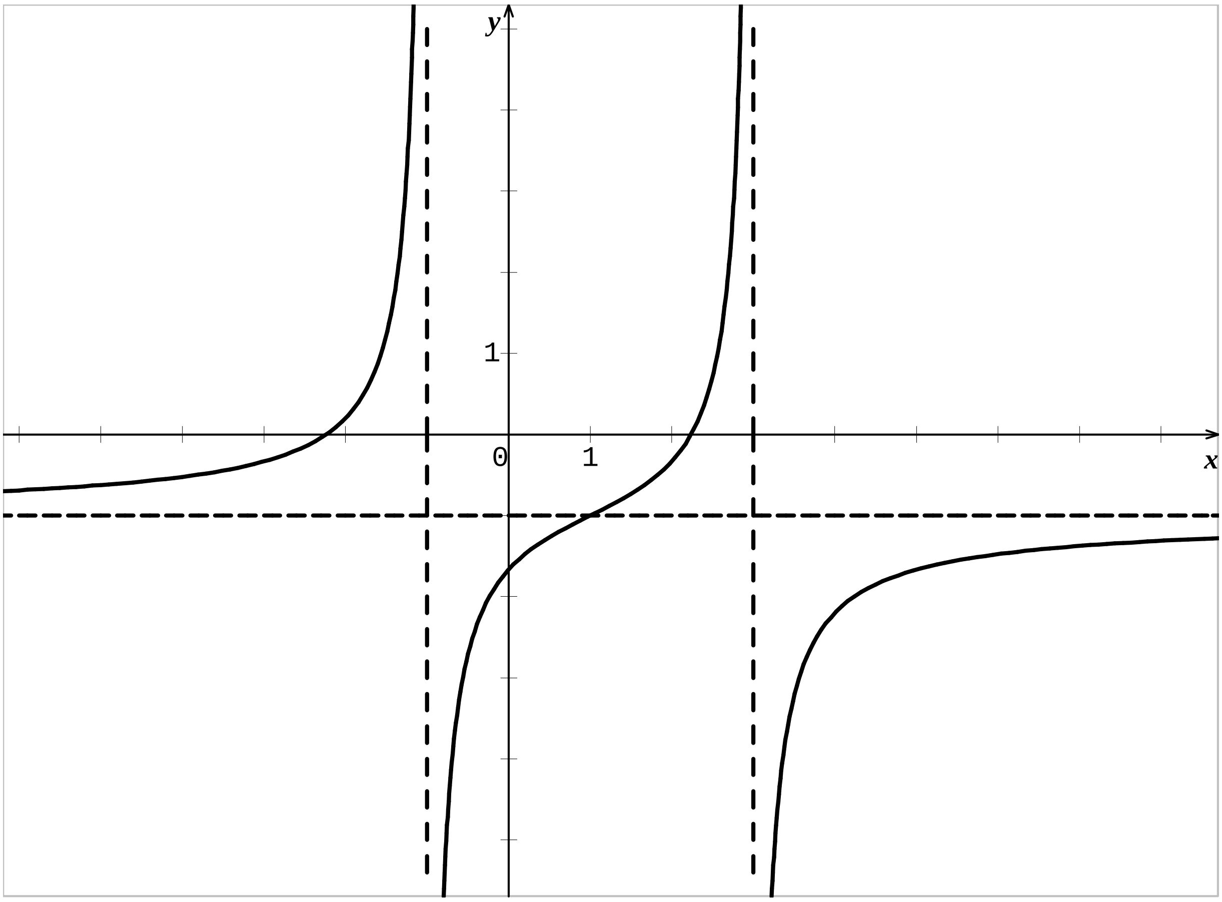


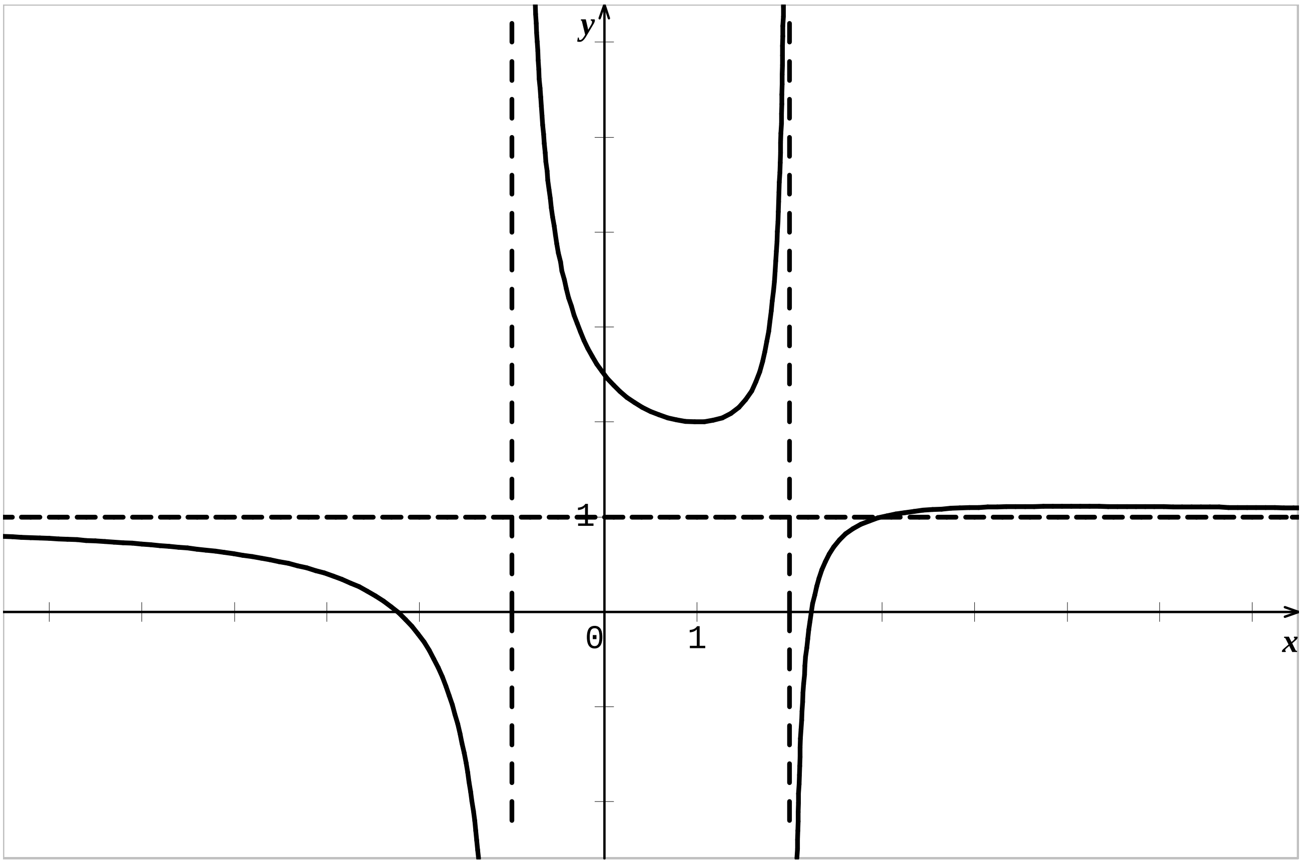

y
1
0
1
x

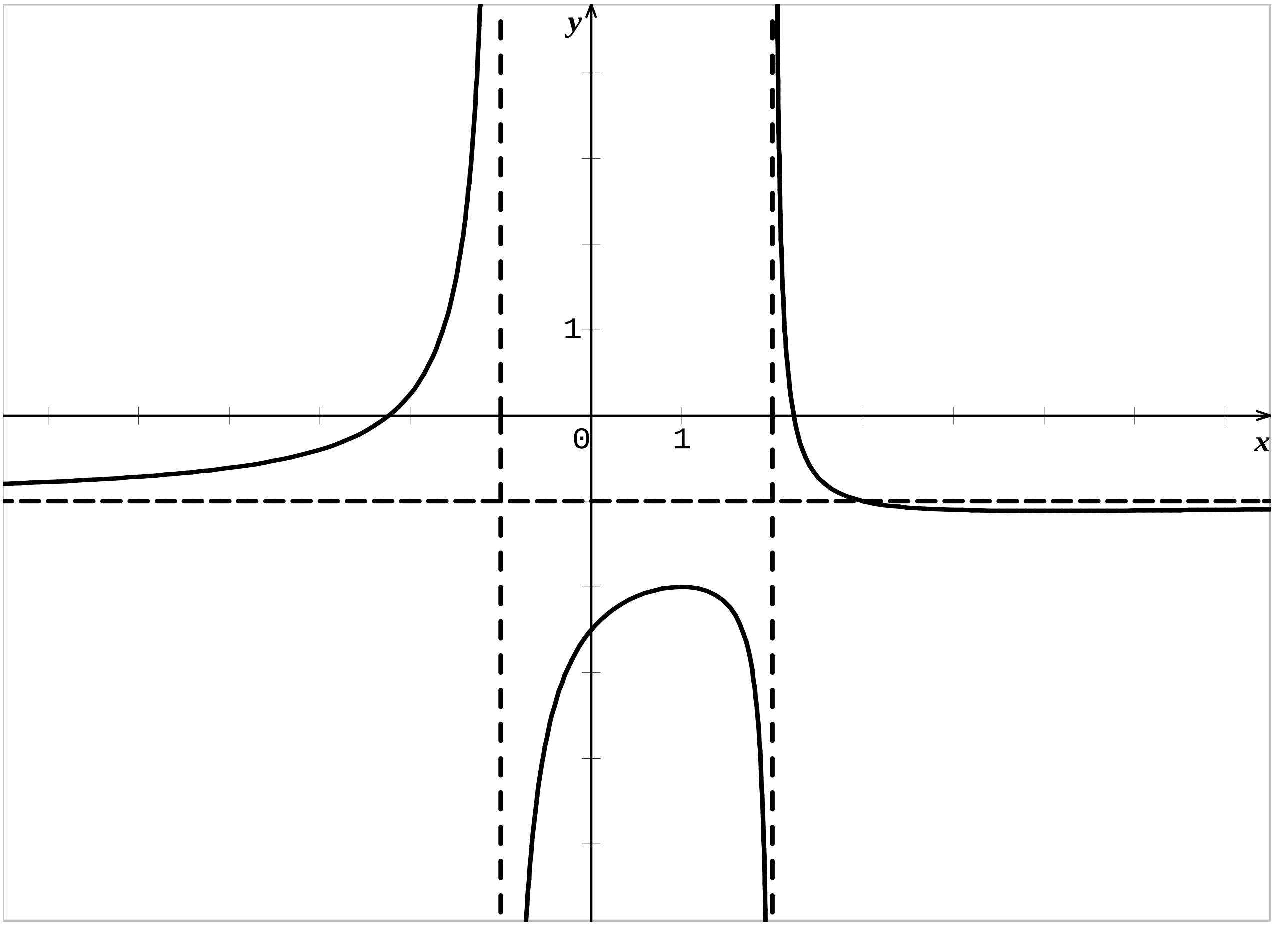

y
1
0
1
x

3/ករណី $\Delta = q^2 - 4pr > 0$






y
1
0
1
x


y
1
0
1
x

ឧទាហរណ៍១ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-2x+2}$

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាងf ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់$(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

•ដែនកំណត់

គេមាន $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0\ \ \forall x\in IR$

ដូចនេះ $D=IR$ ។

•សរសេរជារាងកាណូនិក

$$f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x^2-2x+2}=1-\frac{5}{x^2-2x+2}$$

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $f'(x)=(1-\dfrac{5}{x^2-2x+2})'=\dfrac{5(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$

$f'(x)=0$ គេបាន $\dfrac{5(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}=0$ នោះ $x=1$

ចំពោះ $x=1$ នាំឲ្យ $f(1)=1-5=-4$ ។

អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀបស្មើនឹង -4 ត្រង់ $x=1$ ។

-គណនាលីមីត ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{5}{x^2-2x+2}\right)=1$$

-អាស៊ីមតូត ដោយ $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$ នោះបន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

នៃក្រាប ។

-តារាងអថេរភាព

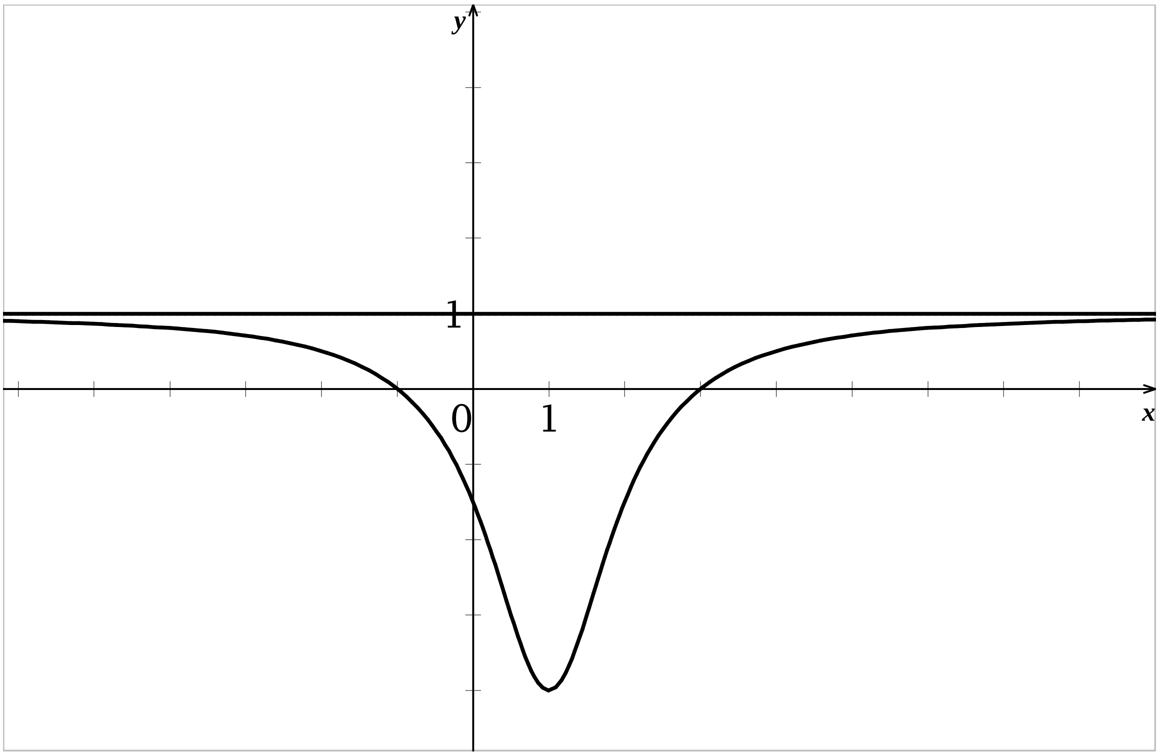
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	1

•សំណង់ក្រាប ៖

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអក្ស័អាប់ស៊ីស $y=0$ នោះ $x^2-2x-3=0$

គេទាញឫស $x_1=-1$, $x_2=3$ ។

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអក្ស័អរដោនេ $x=0$ នោះ $y=-\frac{3}{2}$



ឧទាហរណ៍២ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+6x}{2(x^2-2x+2)}$

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាង f ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

•ដែនកំណត់

គេមាន $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0 \quad \forall x\in IR$

ដូចនេះ $D=IR$ ។

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{(2x+6)(x^2-2x+2)-(2x-2)(x^2+6x)}{2(x^2-2x+2)^2}$

$f'(x)=\dfrac{-8x^2+4x+12}{2(x^2-2x+2)^2}$ ។

បើ $f'(x)=0$ គេបាន $\dfrac{-8x^2+4x+12}{2(x^2-2x+2)^2}=0$

នោះ $-8x^2+4x+12=0$ នាំឲ្យ $x_1=-1\ ,\ x_2=\dfrac{3}{2}$

ចំពោះ $x=-1$ នាំឲ្យ $f(-1)=\dfrac{-5}{10}=-\dfrac{1}{2}$ ។

ចំពោះ $x=\dfrac{3}{2}$ នាំឲ្យ $f(\dfrac{3}{2})=\dfrac{9}{2}$

អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀបស្មើនឹង $-\dfrac{1}{2}$ ត្រង់ $x=-1$

និង មានអតិបរមាធៀបស្មើនឹង $\dfrac{9}{2}$ ត្រង់ $x=\dfrac{3}{2}$ ។

-គណនាលីមីត ៖

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+6x}{2(x^2-2x+2)}=\frac{1}{2}$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{2}$ នោះបន្ទាត់ $y=\frac{1}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។

-តារាងអថេរភាព

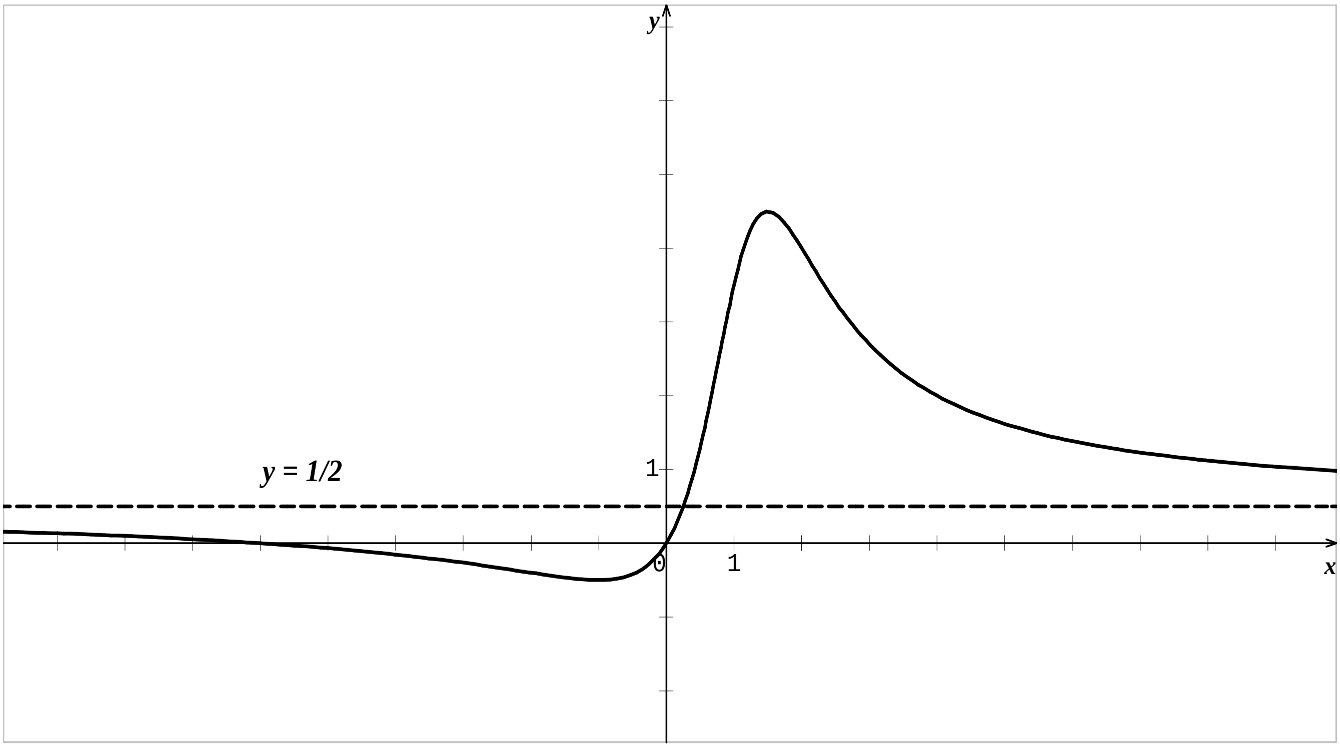
x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

•សំណង់ក្រាប ៖

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស $y=0$ នោះ $x^2-2x-3=0$

គេទាញឫស $x_1=-1$, $x_2=3$ ។

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្សអរដោនេ $x=0$ នោះ $y=-\frac{3}{2}$



ឧទាហរណ៍៣ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាង f ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

•ដែនកំណត់

គេមាន $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

ដូចនេះ $D = IR - \{\ 1\ ,\ 3\ \}$ ។

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $f'(x)=\frac{(2x+6)(x^2-2x+2)-(2x-2)(x^2+6x)}{2(x^2-2x+2)^2}$

$$f'(x)=\frac{3x-6}{(x^2-4x+3)^2}=\frac{3(x-2)}{(x^2-4x+3)^2}$$ ។

បើ $f'(x)=0$ គេបាន $\frac{3(x-2)}{(x^2-4x+3)^2}=0$ នាំឲ្យ $x=2$ ។

ចំពោះ $x=2$ នាំឲ្យ $f(2)=4$ ។

អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀបស្មើនឹង 4 ត្រង់ $x=2$ ។

-គណនាលីមីត ៖

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-4x}{(x-1)(x-3)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-4x}{(x-1)(x-3)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to3^-} f(x)=\lim_{x\to3^-}\frac{x^2-4x}{(x-1)(x-3)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to3^+} f(x)=\lim_{x\to3^+}\frac{x^2-4x}{(x-1)(x-3)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4x}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$ និង $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=1$ និង $x=3$

ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។ ហើយ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ នោះបន្ទាត់ $y=1$

ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។

-តារាងអថេរភាព

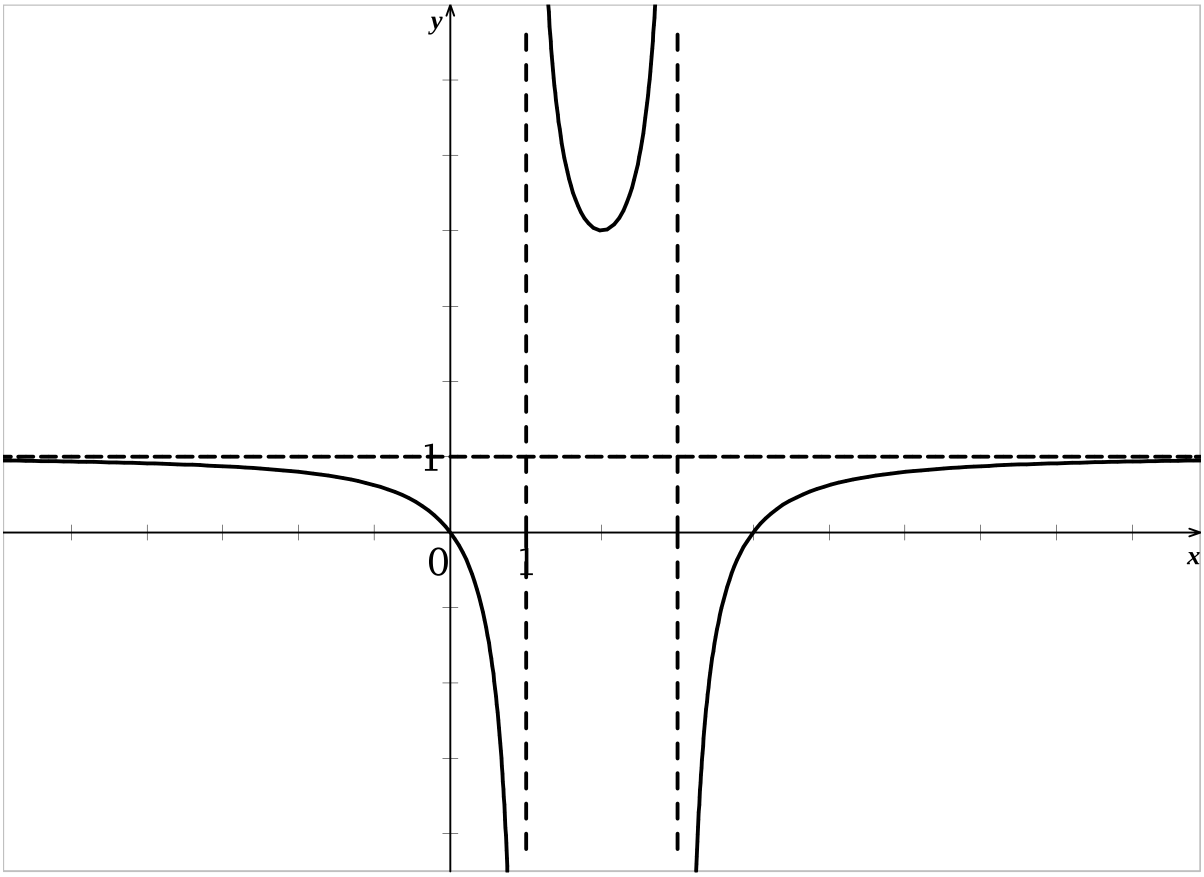
x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

•សំណង់ក្រាប ៖

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស $y=0$ នោះ $x^2-4x=0$

គេទាញឬស $x_1=0$, $x_2=4$ ។

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអ័ក្សអរដោនេ $x=0$ នោះ $y=0$



ឧទាហរណ៍៤ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{2x^2+6x-4}{x^2+2x-3}$

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាងf ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់$(o,\vec{i},\vec{j})$។

•ដែនកំណត់

គេមាន $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$

ដូចនេះ $D=IR-\{-3,1\}$ ។

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{(4x+6)(x^2+2x-3)-(2x+2)(2x^2+6x-4)}{(x^2+2x-3)^2}$

$$f'(x)=\frac{-2x^2-4x-10}{(x^2+2x-3)^2}=-\frac{2[(x+1)^2+4]}{(x^2+2x-3)^2}$$ ។

ដោយ $(x+1)^2+4>0$ នោះ $f'(x)<0\ \forall x\in D$

នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះលើដែនកំណត់ ។

-គណនាលីមីត ៖

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{2x^2+6x-4}{(x-1)(x+3)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{2x^2+6x-4}{(x-1)(x+3)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-3^-}f(x)=\lim_{x\to3^-}\frac{2x^2+6x-4}{(x-1)(x+3)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-3^+}f(x)=\lim_{x\to-3^+}\frac{2x^2+6x-4}{(x-1)(x+3)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+6x-4}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim_{x\to 1} f(x)=\infty$ និង $\lim_{x\to -3} f(x)=\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=1$ និង $x=-3$

ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។ ហើយ $\lim_{x\to\infty} f(x)=2$ នោះបន្ទាត់ $y=2$

ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។

-តារាងអថេរភាព

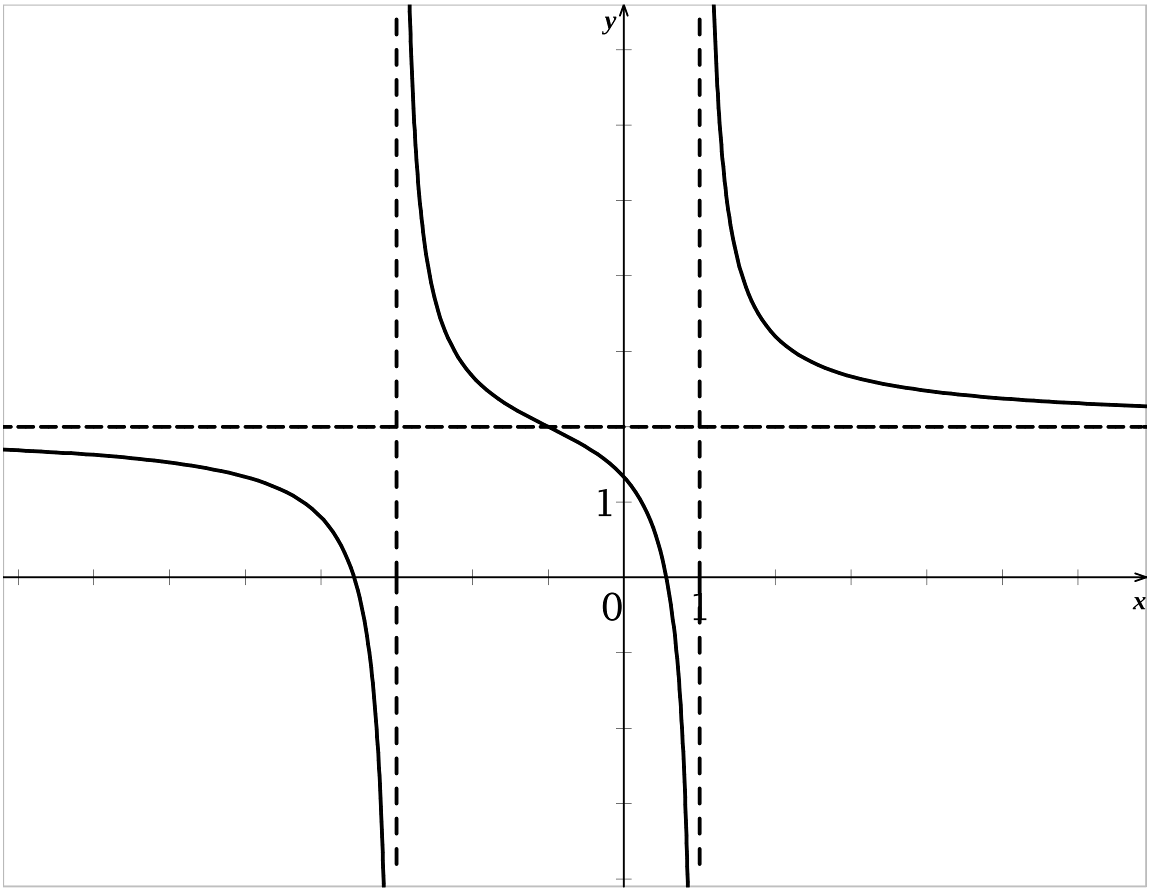
x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	||	$-$	
$f(x)$	2 ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	2

•សំណង់ក្រាប ៖

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអក្ស័អាប់ស៊ី $y=0$ នោះ $2x^2+6x-4=0$

គេទាញឫស $x_1=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$, $x_2=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ ។

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអក្ស័អរដោនេ $x=0$ នោះ $y=\frac{4}{3}$



ឧទាហរណ៍៥ គេឲ្យអនុគមន៍ **f** កំណត់ដោយ $\mathbf{f(x)=\dfrac{2x^2-x-7}{x^2-x-2}}$

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាង**f** ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់$\mathbf{(o,\vec{i},\vec{j})}$។

•ដែនកំណត់

គេមាន $\mathbf{x^2-x-2=(x+1)(x-2)}$

ដូចនេះ $\mathbf{D=IR-\{\,-1\,,\,2\,\}}$ ។

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{(4x-1)(x^2-x-2)-(2x-1)(2x^2-x-7)}{(x^2+2x-3)^2}$

$f'(x)=\dfrac{-x^2+6x-5}{(x^2-x-2)^2}$ ។

បើ $f'(x)=0$ គេបាន $\dfrac{-x^2+6x-5}{(x^2-x-2)^2}=0$

នោះ $-x^2+6x-5=0$ នាំឲ្យ $x_1=1$, $x_2=5$

ចំពោះ $x=1$ នាំឲ្យ $f(1)=3$ ហើយ $x=3$ នាំឲ្យ $f(3)=\dfrac{2}{3}$

អនុគមន៍មានអប្បបរមាធៀបស្មើនឹង 3 ត្រង់ $x=1$

និង មានអតិបរមាធៀបស្មើនឹង $\dfrac{2}{3}$ ត្រង់ $x=3$ ។

-គណនាលីមីត ៖

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{2x^2-x-7}{(x+1)(x-2)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{2x^2-x-7}{(x+1)(x-2)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x^2 - x - 7}{(x+1)(x-2)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2 - x - 7}{(x+1)(x-2)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to \pm} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{2x^2 - x - 7}{(x+1)(x-2)} = 2$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim_{x\to -1} f(x) = \infty$ និង $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$ នោះបន្ទាត់ $x = -1$ និង $x = 2$

ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។ ហើយ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$ នោះបន្ទាត់ $y = 2$

ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។

-តារាងអថេរភាព

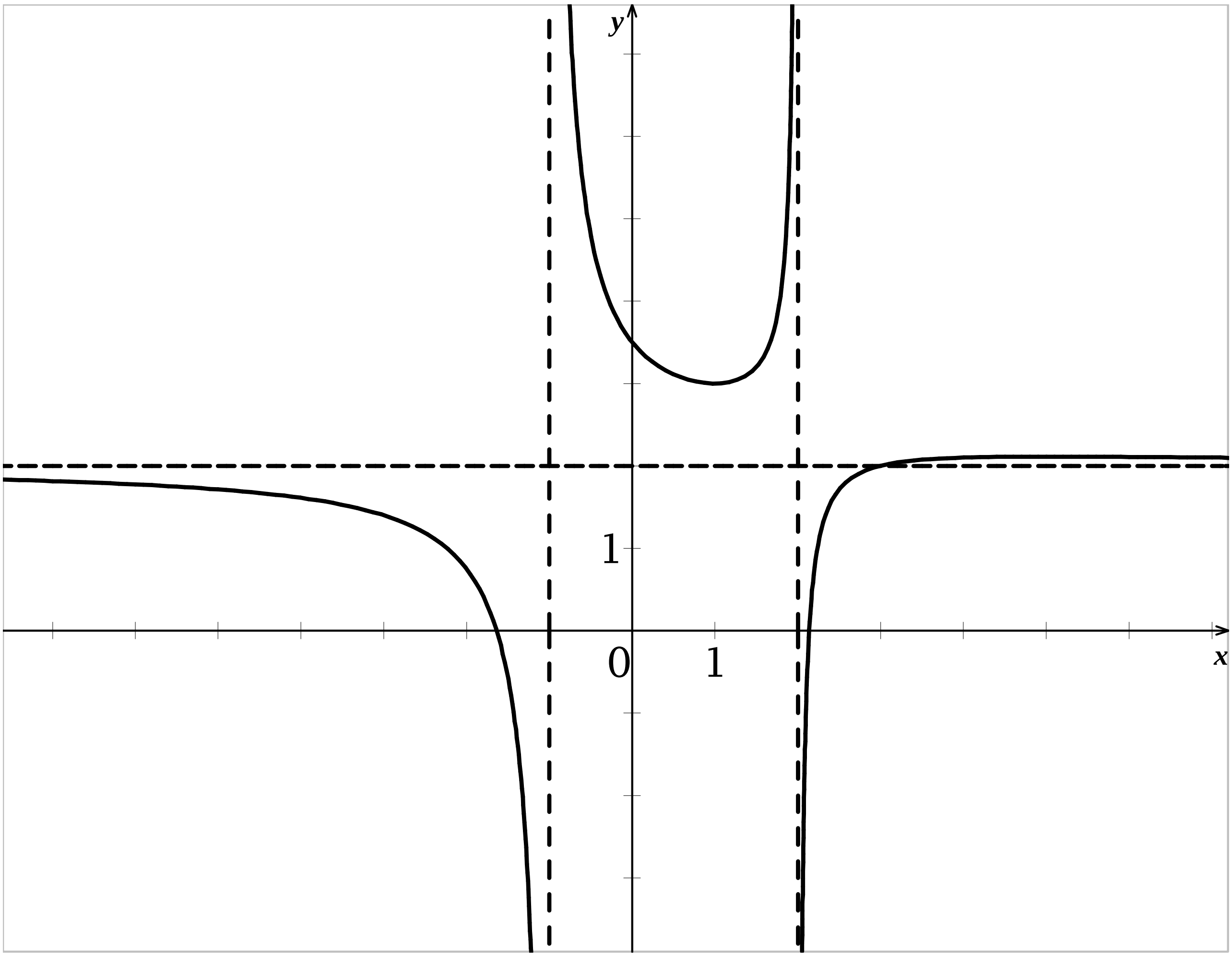
x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$		$+$	‖	$+$		$-$	
$f(x)$	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{2}{3}$	↘	2

•សំណង់ក្រាប ៖

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអក្ស័អាប់ស៊ី $\mathbf{y=0}$ នោះ $\mathbf{2x^2-x-7=0}$

គេទាញឫស $\mathbf{x_1=\frac{1-\sqrt{57}}{4}}$, $\mathbf{x_2=\frac{1+\sqrt{57}}{4}}$ ។

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអក្ស័អរដោនេ $\mathbf{x=0}$ នោះ $\mathbf{y=\frac{7}{2}}$ ។



ឧទាហរណ៍៦ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+2x-7}{x^2-2x+1}$

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាងf ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់$(o,\vec{i},\vec{j})$។

•ដែនកំណត់

គេមាន $x^2-2x+1=(x-1)^2$

ដូចនេះ $D=IR-\{\ 1\ \ \}$ ។

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{(2x+2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2+2x-7)}{(x-1)^4}$

$$f'(x)=\frac{-4x+12}{(x-1)^3}$$ ។

បើ $f'(x)=0$ គេបាន $\dfrac{-4x+12}{(x-1)^3}=0$ នោះ $x=3$ ។

ចំពោះ $x=3$ នាំឲ្យ $f(3)=2$ ។

អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀបស្មើនឹង 2ត្រង់ $x=3$ ។

-គណនាលីមីត ៖

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+2x-7}{(x-1)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+2x-7}{(x-1)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2+2x-7}{(x-1)^2} = 1$$

-អាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

ហើយ $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 1$ នោះបន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប ។

-តារាងអថេរភាព

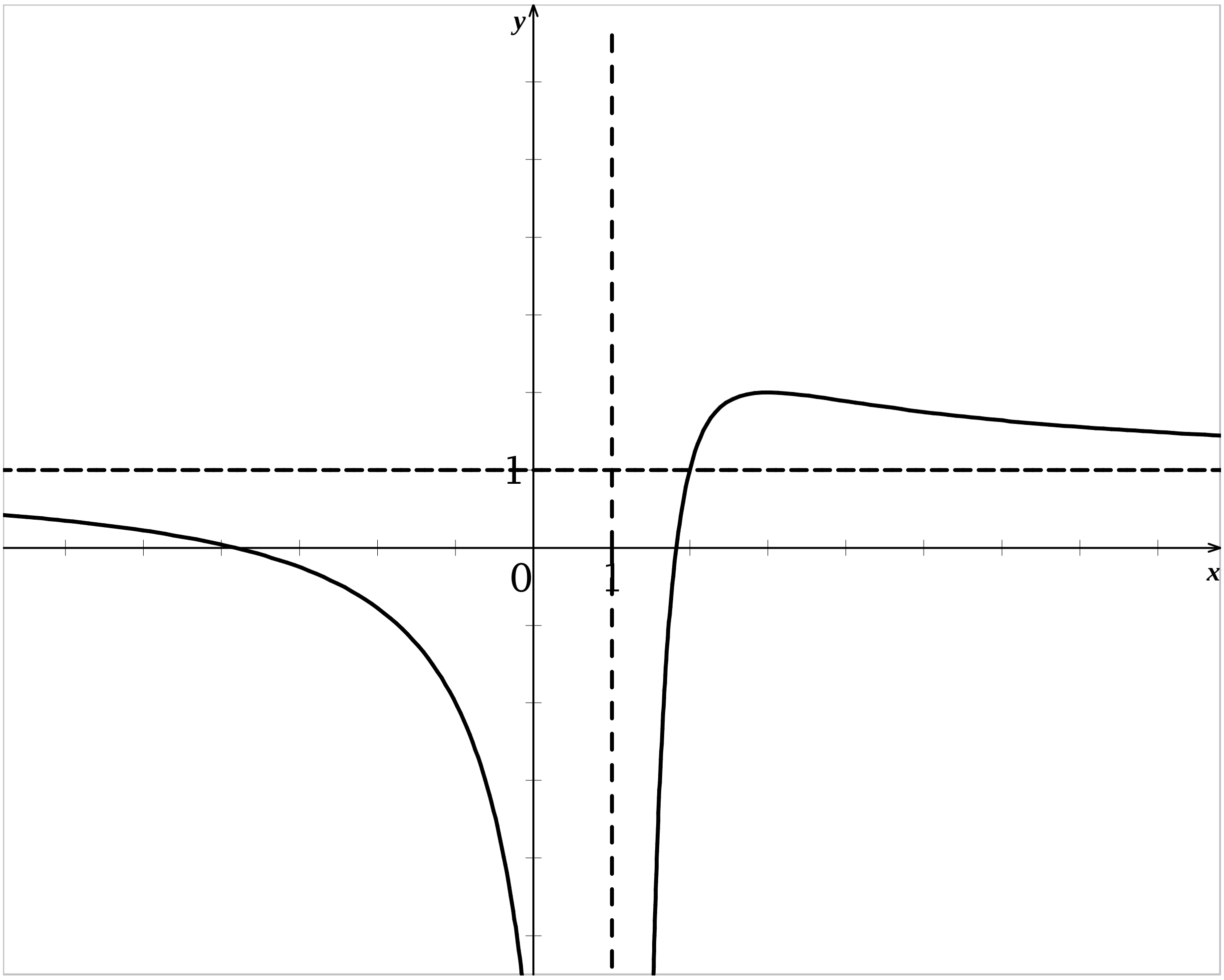
x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1 ↘ $-\infty$		‖	$-\infty$ ↗	2	↘	1

•សំណង់ក្រាប ៖

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអក្ស័អាប់ស៊ី $\mathbf{y=0}$ នោះ $\mathbf{x^2+2x-7=0}$

គេទាញឬស $\mathbf{x_1=-1-2\sqrt{2}}$, $\mathbf{x_2=-1+2\sqrt{2}}$ ។

-ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនឹងអក្ស័អរដោនេ $\mathbf{x=0}$ នោះ $\mathbf{y=-7}$ ។



៣-សិក្សាអនុគមន៍អសនិទាន

ក/សិក្សាអនុគមន៍ $y=\sqrt{ax+b}$, $a\neq 0$

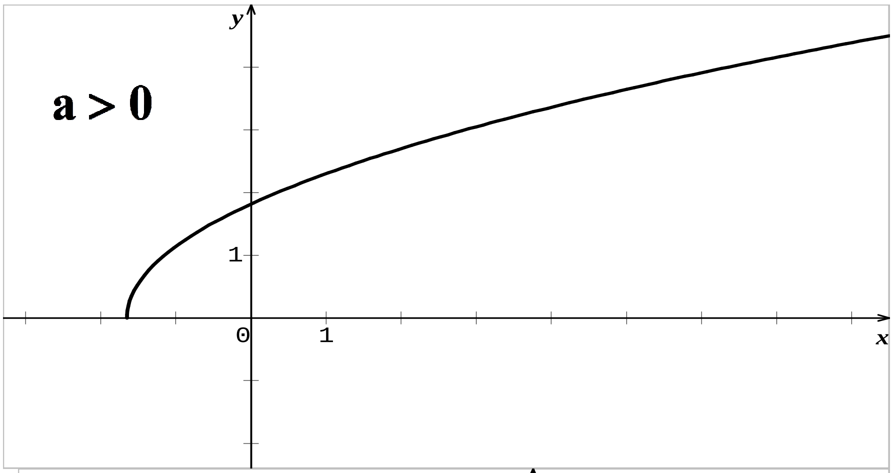
☞ ដែនកំណត់ ៖ $D=\{x\,/\,ax+b\geq 0\}$

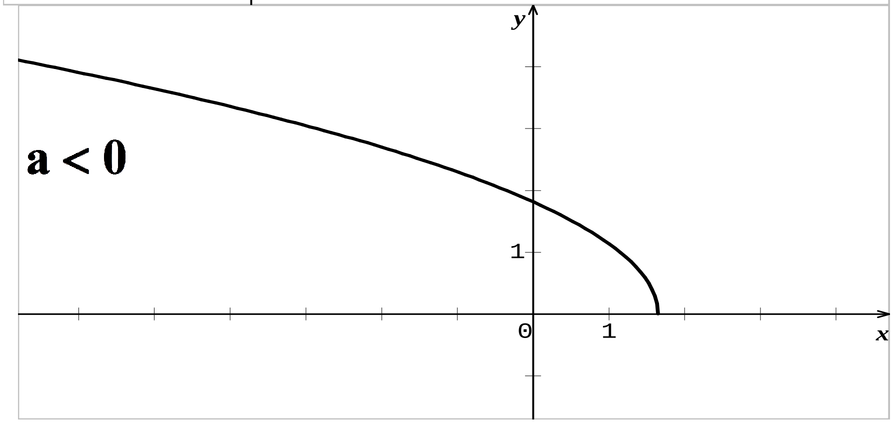
☞ ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

-បើ $a>0$ នោះ $f'(x)>0$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត។

-បើ $a<0$ នោះ $f'(x)<0$ នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាត។

☞ ក្រាបមានរូបដូចខាងក្រោម ៖





ឧទាហរណ៍១ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\sqrt{2x+6}$

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាងf ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់$(o,\vec{i},\vec{j})$។

•ដែនកំណត់ $D=[-3\ ,+\infty)$ ។

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{(2x+6)'}{2\sqrt{2x+6}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+6}}>0\ \forall x\in D$

គេបាន f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែនកំណត់របស់វា ។

-រកលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+6}=+\infty$

-តារាងអថេរភាព

x	-3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

•សំណង់ក្រាប

-កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស័ (ox) គឺ $y = 0$

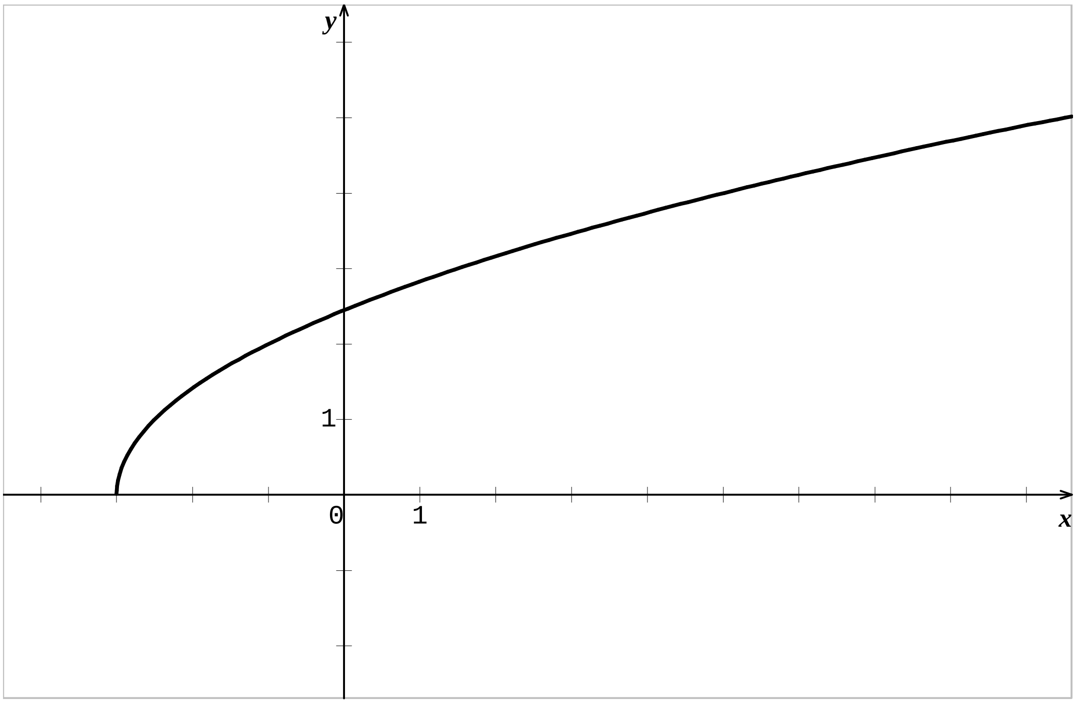
គេបាន $\sqrt{2x+6} = 0$ នោះ $x = -3$ ។

-កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស័ (oy) គឺ $x = 0$

គេបាន $y = \sqrt{6}$ ។

ដូចនេះក្រាបកាត់អក្ស័អាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច $(-3, 0)$ និងអក្ស័អរដោនេ

ត្រង់ចំណុច $(0, \sqrt{6})$ ។



ឧទាហរណ៍២ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\sqrt{-2x+4}$

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាងf ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់$(o,\vec{i},\vec{j})$។

•ដែនកំណត់ $D=(-\infty\ ,\ 2]$ ។

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{(-2x+4)'}{2\sqrt{-2x+4}}=-\dfrac{1}{\sqrt{-2x+4}}<0\ \forall x\in D$

គេបាន f ជាអនុគមន៍ចុះជានិច្ចលើដែនកំណត់របស់វា ។

-រកលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-2x+4}=+\infty$

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	2
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

•សំណង់ក្រាប

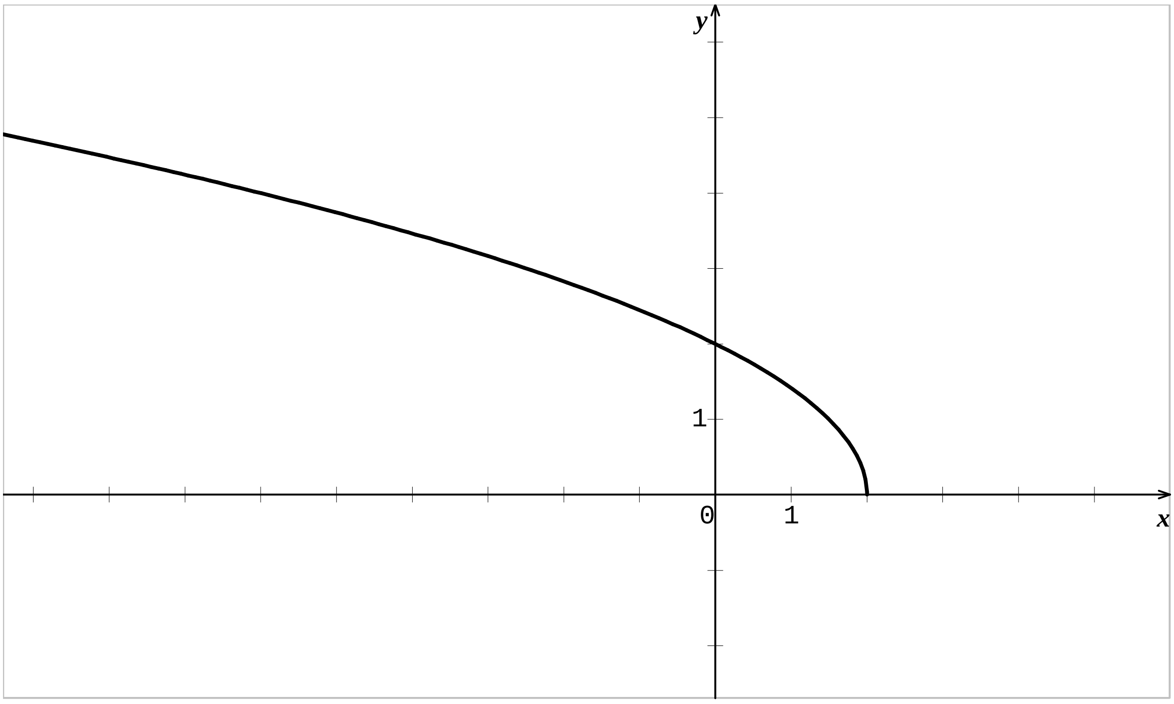
-កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស័ (ox) គឺ $y=0$

គេបាន $\sqrt{-2x+4}=0$ នោះ $x=2$ ។

-កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស័ (oy) គឺ $x=0$

គេបាន $y=2$ ។

ដូចនេះក្រាបកាត់អក្ស័អាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច $(2,0)$ និងអក្ស័អរដោនេត្រង់ចំណុច $(0,2)$ ។



ខ/សិក្សាអនុគមន៍ $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$

ដែល $a\neq 0$ និង $\Delta=b^2-4ac$ ។

☞ ដែនកំណត់ ៖ $D=\{x / ax^2+bx+c\geq 0\}$

☞ ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$

☞ អាស៊ីមតូត ៖

-បើ $a<0$ នោះក្រាបគ្មានអាស៊ីមតូតទេ

-បើ $a>0$ នោះក្រាបមានអាស៊ីមតូតពីរ ។

$$f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,|x+\frac{b}{2a}|+\varepsilon(x)$$

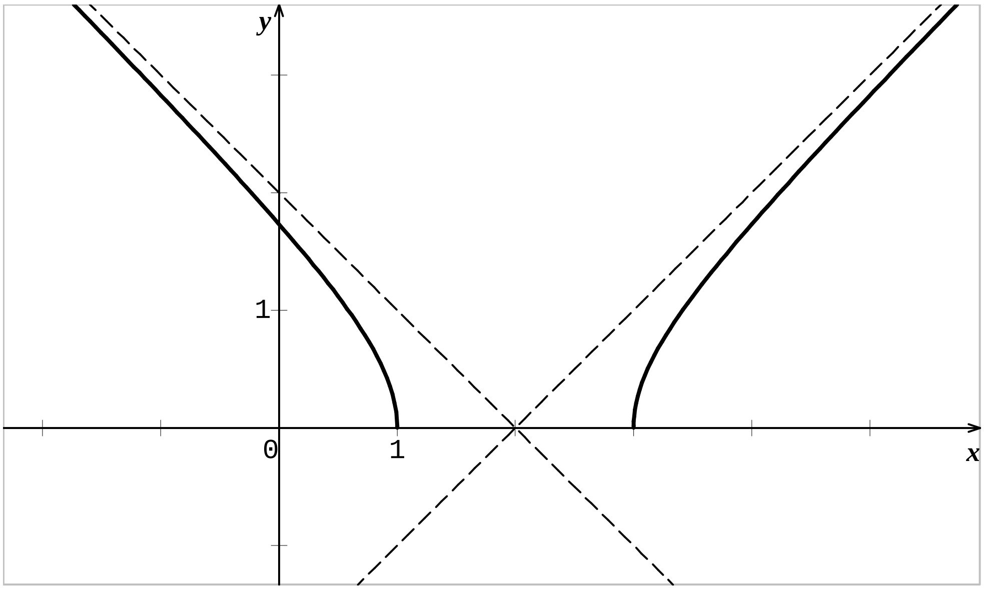
ដែល $\lim\limits_{x\to\infty}\varepsilon(x)=0$

កាលណា $x\to-\infty$ នោះក្រាបមានអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=\sqrt{a}(x+\dfrac{b}{2a})$

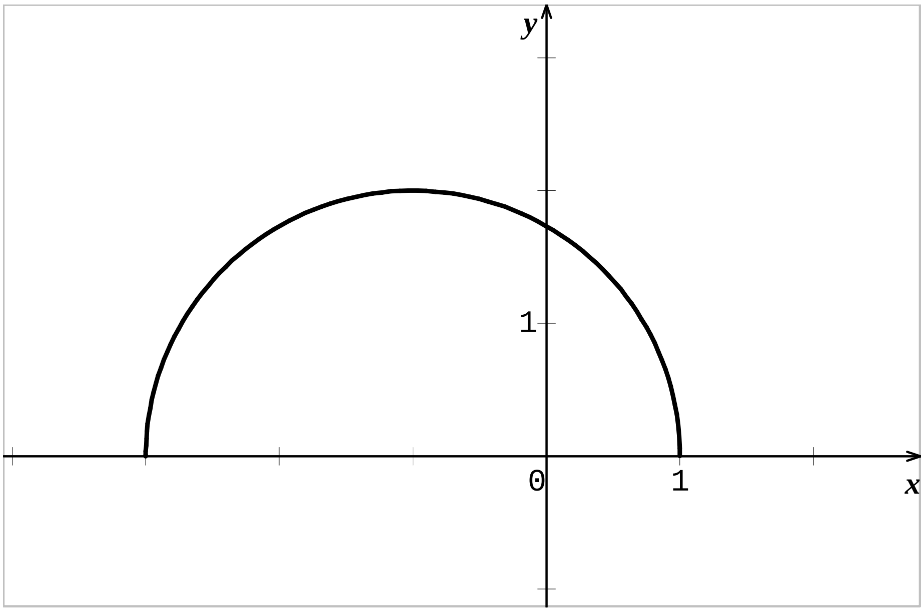
កាលណា $x\to-\infty$ នោះក្រាបមានអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=-\sqrt{a}(x+\dfrac{b}{2a})$

☞ ក្រាបមានរូបដូចខាងក្រោម ៖

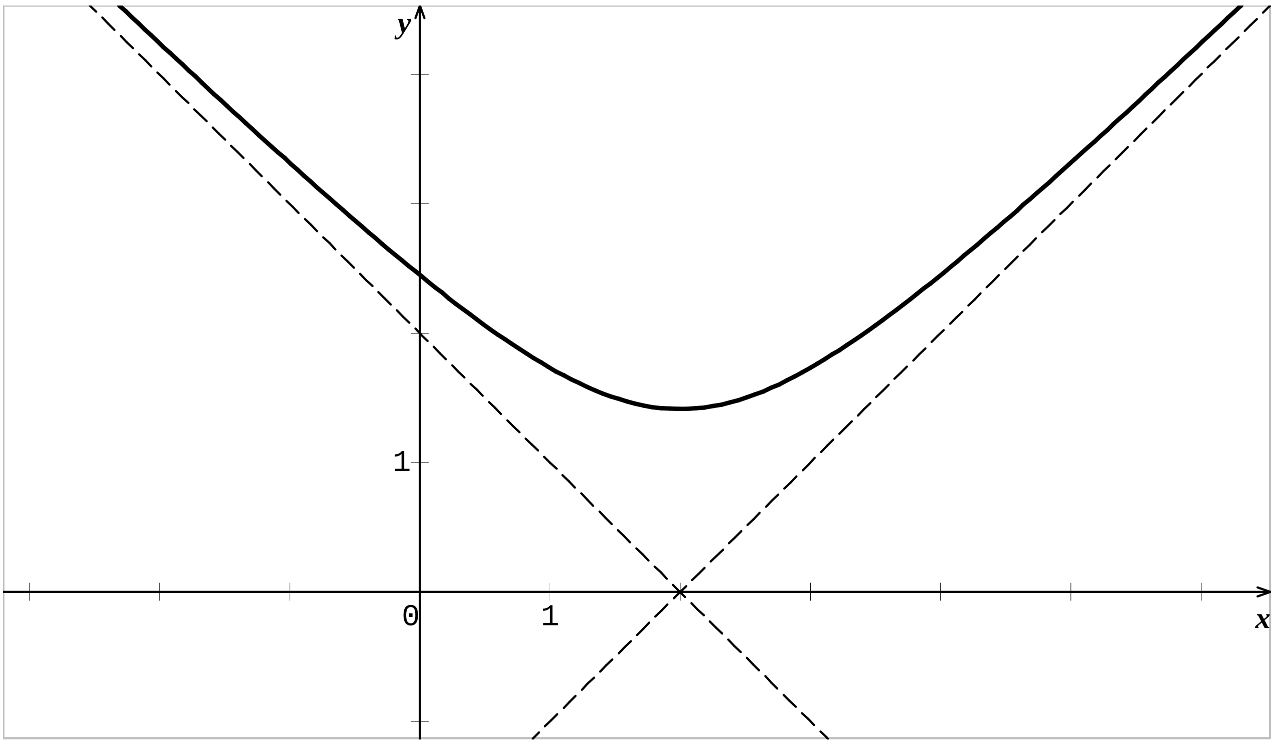
-ករណីទី១ $a > 0$, $\Delta > 0$



-ករណីទី២ $a < 0$, $\Delta > 0$



-ករណីទី៣ $a > 0$, $\Delta < 0$



ឧទាហរណ៍១ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 13}$

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាងf ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់$(o, \vec{i}, \vec{j})$។

•ដែនកំណត់ $D = IR$ ។

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $f'(x) = \frac{(x^2 - 4x + 13)'}{2\sqrt{x^2 - 4x + 13}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}}$

$f'(x) = 0$ នាំឲ្យ $x = 2$ ។

ចំពោះ $x=2$ នាំឲ្យ $f(2)=\sqrt{4-8+13}=3$ ។

អនុគមន៍ f មានអប្បបរមាស្មើ 3 ត្រង់ $x=2$ ។

-រកលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-4x+13}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-4x+13}=+\infty$$

-សមីការអាស៊ីមតូត

គេមាន $f(x)=\sqrt{x^2-4x+13}=\sqrt{(x-2)^2+9}=|x-2|+\varepsilon(x)$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}\varepsilon(x)=0$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$ នោះបន្ទាត់ $y=-(x-2)$

និង $y=x-2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

•សំណង់ក្រាប

-កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស័ (ox) គឺ $y=0$

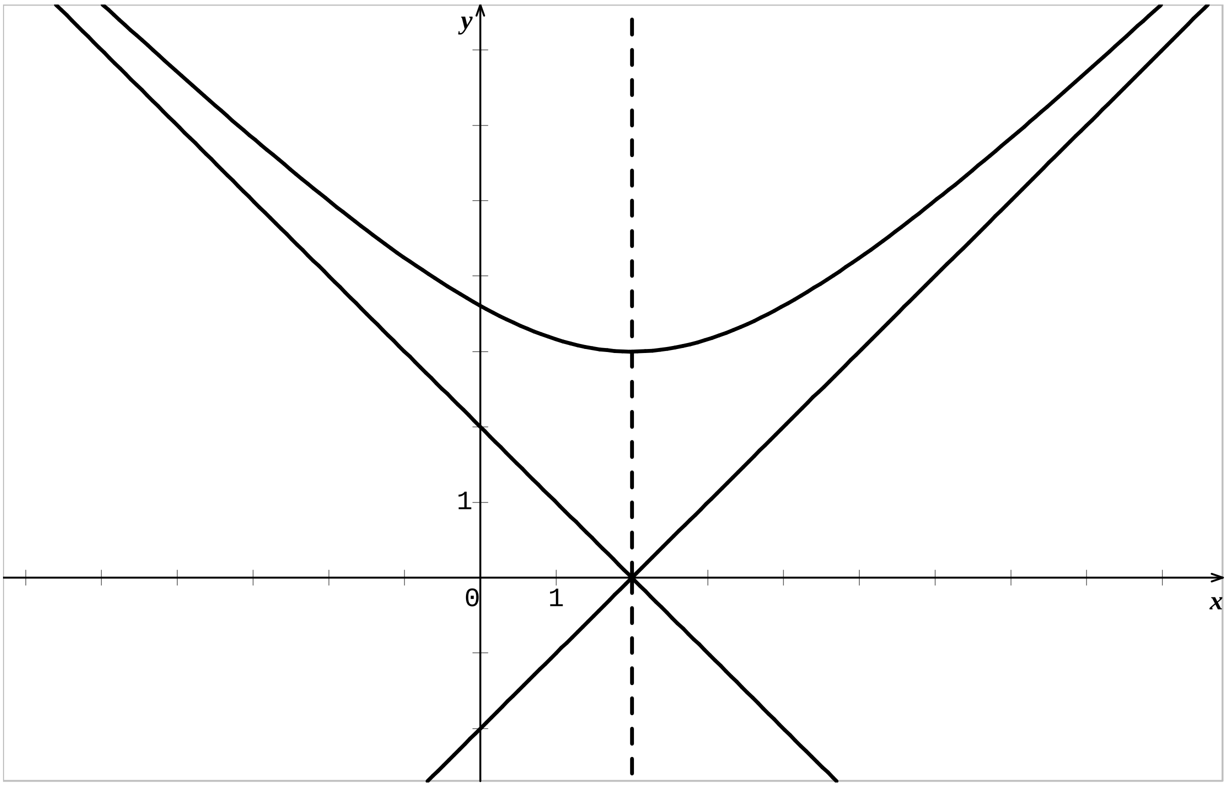
គេបាន $\sqrt{x^2-4x+13}=0$ នោះ $x^2-4x+13=0$

$\Delta'=4-13=-9<0$ នោះសមីការគ្មានឫស ។

- ចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបនិងអក្ស័ (oy) គឺ $x=0$ នោះ $y=\sqrt{13}$

-អក្ស័ឆ្លុះ បន្ទាត់ $x=2$ ព្រោះ $f(2a-x)=f(x)$

ឬ $f(4-x)=\sqrt{(4-x)^2-4(4-x)+13}=\sqrt{x^2-4x+13}=f(x)$



ឧទាហរណ៍២ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\sqrt{x^2-6x+5}$

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាងf ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់$(o,\vec{i},\vec{j})$។

•ដែនកំណត់ $D=(-\infty,1]\cup[5,+\infty)$ ។

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{(x^2-6x+5)'}{2\sqrt{x^2-6x+5}}=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}$

គ្រប់$x\in(-\infty,1]$ គេបាន $f'(x)\le 0$ និ $x\in(5,+\infty]$ គេបាន$f'(x)>0$

ដូចនេះអនុគមន៍ f ចុះលើចន្លោះ$x\in(-\infty,1]$និងកើនលើ$x\in(5,+\infty]$

-រកលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-6x+5}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-6x+5}=+\infty$$

-សមីការអាស៊ីមតូត

គេមាន $f(x)=\sqrt{x^2-6x+5}=\sqrt{(x-3)^2-4}=|x-3|+\varepsilon(x)$

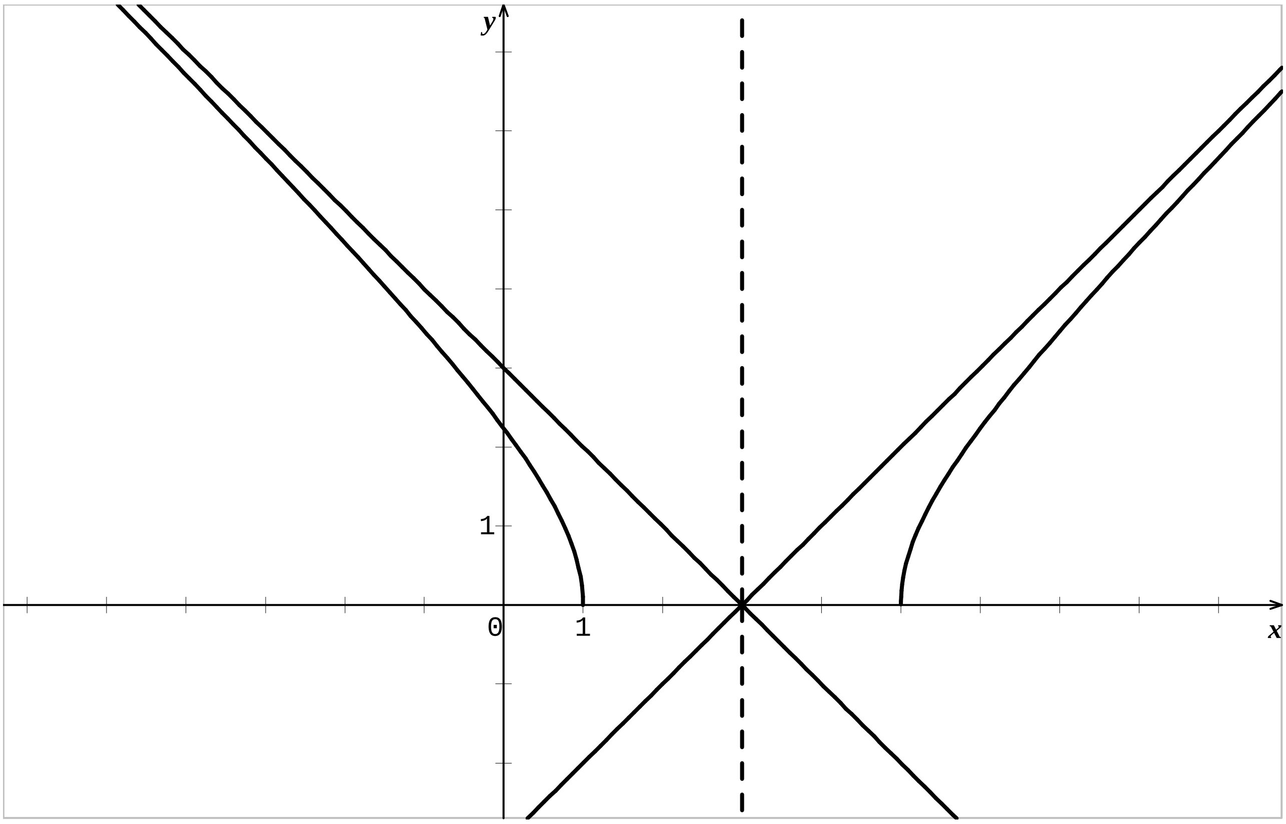
ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}\varepsilon(x)=0$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$ នោះបន្ទាត់ $y=-(x-3)$

និង $y=x-3$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប ។

-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$

•សំណង់ក្រាប



ឧទាហរណ៍៣ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\sqrt{-x^2-2x+8}$

សិក្សាអថេរភាពនិងសង់ក្រាបតាងf ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់$(o, \vec{i}, \vec{j})$។

•ដែនកំណត់ $D=[-4\ ,\ 2]$ ។

•ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{(-x^2-2x+8)'}{2\sqrt{-x^2-2x+8}}=\dfrac{-x-1}{\sqrt{-x^2-2x+8}}$

$f'(x)=0$ គេបាន $\dfrac{-x-1}{\sqrt{-x^2-2x+8}}=0$ នាំឲ្យ $x=-1$ ។

អនុគមន៍មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=-1$ គឺ $f(-1)=3$

-តារាងអថេរភាព

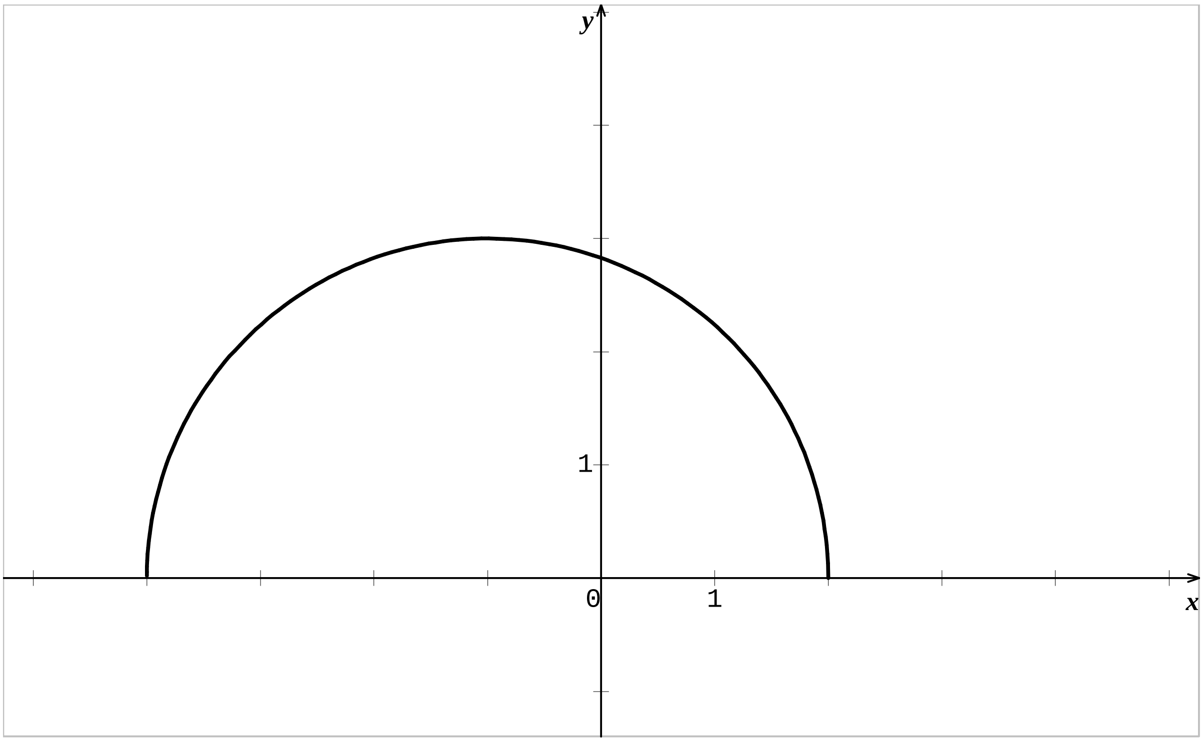
x	-4		-1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	3	↘	0

•សំណង់ក្រាប

គេមាន $y = \sqrt{-x^2 - 2x + 8} = \sqrt{9 - (x+1)^2}$

សមមូល $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 9 \\ y \geq 0 \end{cases}$

ដូចនេះក្រាបគឺជាកន្លះរង្វង់ដែលមានផ្ចិត $I(-1,0)$ និងកាំ $R = 3$ ។



លំហាត់អនុវត្តន៍

១-ចូរសិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

ក/ $\mathbf{y=\sqrt{x}}$

ខ/ $\mathbf{y=\sqrt{2x+4}}$

គ/ $\mathbf{y=\sqrt{4-x}}$

ឃ/ $\mathbf{y=\sqrt{-\frac{x}{2}+1}}$

ង/ $\mathbf{y=\sqrt{x^2+4}}$

ច/ $\mathbf{y=\sqrt{x^2-4x}}$

ឆ/ $\mathbf{y=\sqrt{x^2-2x+10}}$

ជ/ $\mathbf{y=\sqrt{x^2-4x+3}}$

ឈ/ $\mathbf{y=\sqrt{x^2-4x-5}}$

ញ/ $\mathbf{y=\sqrt{3+2x-x^2}}$

២-គេឲ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ កំណត់ដោយ $\mathbf{f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}}$

ក/កំណត់លេខមេគុណ $\mathbf{a,b,c}$ ដើម្បីឲ្យក្រាប $\mathbf{(c)}$ តាង $\mathbf{f}$ មាន អប្បបរមាស្មើ $\mathbf{3}$ ត្រង់ $\mathbf{x=2}$ និងកាត់តាមចំណុច $\mathbf{A(0,\sqrt{13})}$ ។

ខ/ចំពោះតម្លៃ $\mathbf{a,b,c}$ ដែលបានរកឃើញខាងលើចូរសិក្សាអថេរភាព និងគូសក្រាប $\mathbf{(c)}$ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\mathbf{(o,\vec{i},\vec{j})}$ ។

៣-អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

រំលឹករូបមន្តលីមីត ៖

1/ $\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$

2/ $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

3/ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^{n}} = +\infty\ , n > 0$

4/ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n}}{e^{x}} = 0\ ,\ n > 0$

រំលឹករូបមន្តដេរីវេ ៖

1/ បើ $y = e^{x}$ នោះ $y' = e^{x}$

2/ បើ $y = e^{u(x)}$ នោះ $y' = u'(x)e^{u(x)}$

ឧទាហរណ៍១

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = (x+2)e^{-x}$

ក-ចូរសិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ក្រាប (c) តាងអនុគមន៍នេះ ។

ខ-ចូរគណនាក្រឡាផ្ទៃ $S(\lambda)$ ខណ្ឌដោយក្រាប (c) និងអក្ស័អាប់ស៊ីស

ក្នុងចន្លោះ $[-2\ ,\lambda]$ រួចទាញរកលីមីត $\lim_{\lambda\to+\infty} S(\lambda)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ក្រាប (c)

គេមាន $f(x)=(x+2)e^{-x}$ មានដែនកំនត់ $D=IR$

.ទិសដៅអថេរភាព

$f'(x)=(x+2)'e^{-x}+(e^{-x})'(x+2)$

$f'(x)=e^{-x}-e^{-x}(x+2)=(-x-1)e^{-x}$

បើ $f'(x)=0$ សមមូល $(-x-1)e^{-x}=0$ នាំឱ្យ $x=-1$ ។

ចំពោះ $x=-1$ អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមា $f(-1)=e$ ។

លីមីត និង អាសុីមតូត៖

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+2)e^{-x}=-\infty$$

(ព្រោះ $\lim_{x\to-\infty}(x+2)=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+2)e^{-x}=0$$ (ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$)

នាំឱ្យបន្ទាត់ $y=0$ ជាអាសុីមតូតដេកនៃក្រាប (c) ។

តារាងអថេរភាព

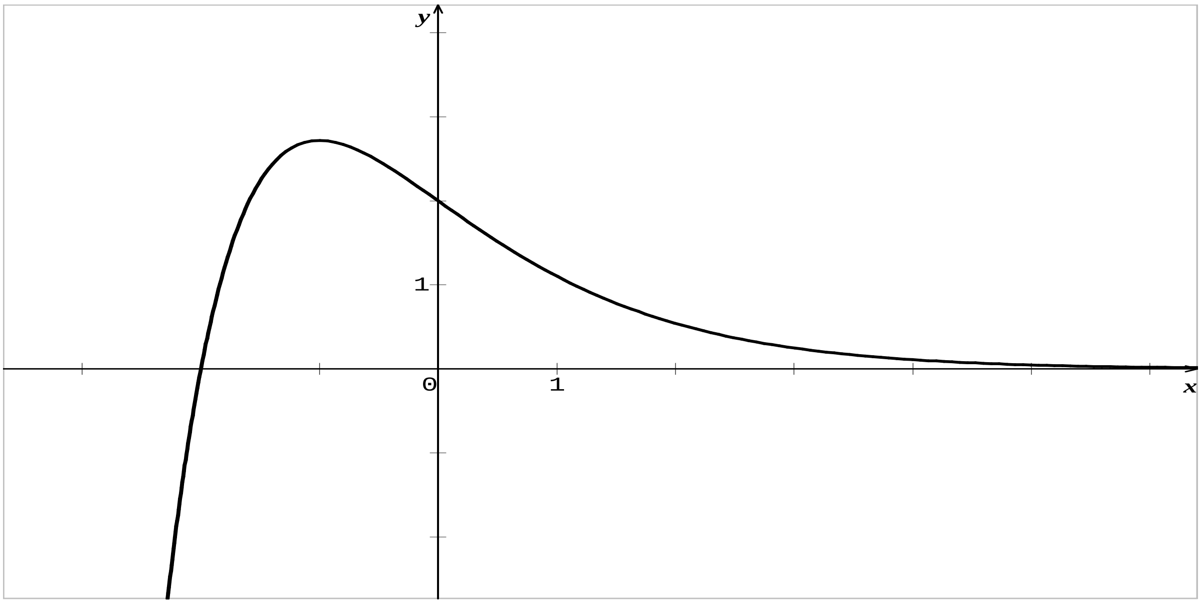
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

សង់ក្រាប $(c): y=(x+2)e^{-x}$

.ចំនុចប្រសព្វរវាងក្រាបជាមួយអ័ក្សកូអរដោនេ៖

បើ $y=0$ សមមូល $(x+2)e^{-x}=0$ នាំឱ្យ $x=-2$

ចំពោះ $x=0$ នាំឱ្យ $y=f(0)=2$ ។



ខ-គណនាក្រឡាផ្ទៃ $S(\lambda)$

យើងបាន $S(\lambda)=\int_{-2}^{\lambda}(x+2)e^{-x}.dx$

តាង $\begin{cases}u=x+2\\ dv=e^{-x}.dx\end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases}du=dx\\ v=-e^{-x}\end{cases}$

គេបាន $S(\lambda)=[-(x+2)\,e^{-x}]_{-2}^{\lambda}+\int_{-2}^{\lambda}e^{-x}.dx$

$$=-(\lambda+2)e^{-\lambda}+\left[-e^{-x}\right]_{-2}^{\lambda}$$

$$=-(\lambda+2)e^{-\lambda}-e^{-\lambda}+e^{2}$$

$$=-(\lambda+3)e^{-\lambda}+e^{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{S(\lambda)=e^{2}-(\lambda+3)e^{-\lambda}}$ ។

ហើយ $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}S(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[e^{2}-(\lambda+3)e^{-\lambda}\right]=e^{2}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to+\infty}S(\lambda)=e^{2}}$

ឧទាហរណ៍២

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=1+(x-1)e^{x}$

ក-គណនាលីមីត $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ រួចបញ្ជាក់សមីការ

អាស៊ីមតូតនៃក្រាប (c) តាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ។

ខ-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

គ-រកសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) ត្រង់ចំនុច $x=1$ ។

សង់ក្រាប (c) និងបន្ទាត់ (T) ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ តែមួយ

ឃ-រកក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយ (c) និងអក្សអាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ $[0,1]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាលីមីត $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

យើងបាន $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[1+(x-1)e^{x}\right]=1$

ព្រោះ $\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{x}=0$ ។

និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[1+(x-1)e^{x}\right]=+\infty$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^{x}=+\infty$ ។

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប

ខ-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$

យើងមាន $f(x)=1+(x-1)e^{x}$ កំនត់លើ $D=IR$

យើងបាន $f'(x)=(x-1)'e^{x}+(e^{x})'(x-1)=xe^{x}$ ។

បើ $f'(x)=xe^{x}=0$ នោះ $x=0$ ។

ចំពោះ $x=0$ អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បរមា $f(0)=0$ ។

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	0

គ-រកសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c)

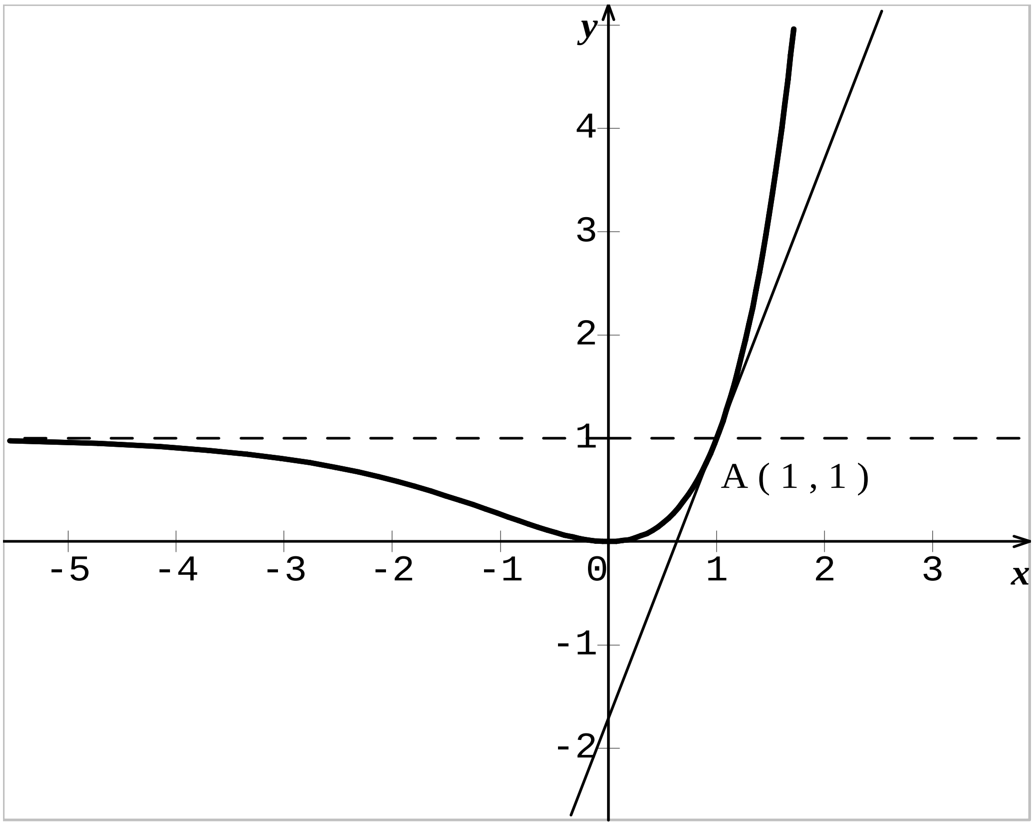
បើ $x=1$ គេបាន $y=f(1)=1$ នាំឱ្យ $A(1,1)$ ជាចំនុចប៉ះ ។

តាមរូបមន្ត $(T):\ y-y_A=f'(x_A)(x-x_A)$

ដោយ $f'(x_A=1)=e$

គេបាន $(T):y-1=e(x-1)$

ដូចនេះ $\boxed{(T):y=ex-e+1}$ ។ សង់ក្រាប (c) និងបន្ទាត់ (T) ៖



ឃ-គណនាក្រឡាផ្ទៃ

យើងបាន $S=\int_0^1\left[1+(x-1)e^x\right].dx=\int_0^1 dx+\int_0^1 (x-1)e^x.dx=1+\int_0^1 (x-1)e^x.dx$

តាង $\begin{cases} u=x-1 \\ dv=e^x dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du=dx \\ v=e^x \end{cases}$

$$S=1+\left[(x-1)e^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x.dx=2-\left[e^x\right]_0^1$$

$$=3-e=3-2.718=0.282$$

ដូចនេះ $\boxed{S=0.282}$ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា) ។

ឧទាហរណ៍៣

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

ក-ចូរសិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$ និង សង់ក្រាប (c)

តាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ មួយ ។

ខ-ដោយប្រើក្រាប (c) ចូរសិក្សាអត្ថិភាព និង សញ្ញានៃឬសរបស់

សមីការ $e^x-kx=0$ ដែល k ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ក្រាប (c)

គេមាន $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ ដែនកំនត់ $D=IR-\{0\}$

.ទិសដៅអថេរភាព

$$f'(x)=\frac{(e^x)'x-(x)'e^x}{x^2}=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

បើ $f'(x)=0$ សមមូល $(x-1)e^x=0$ នាំឱ្យ $x=1$ ។

ចំពោះ $x=1$ អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមា $f(1)=e=2.7182$ ។

លីមីត និង អាស៊ីមតូត៖

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$ និង $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$

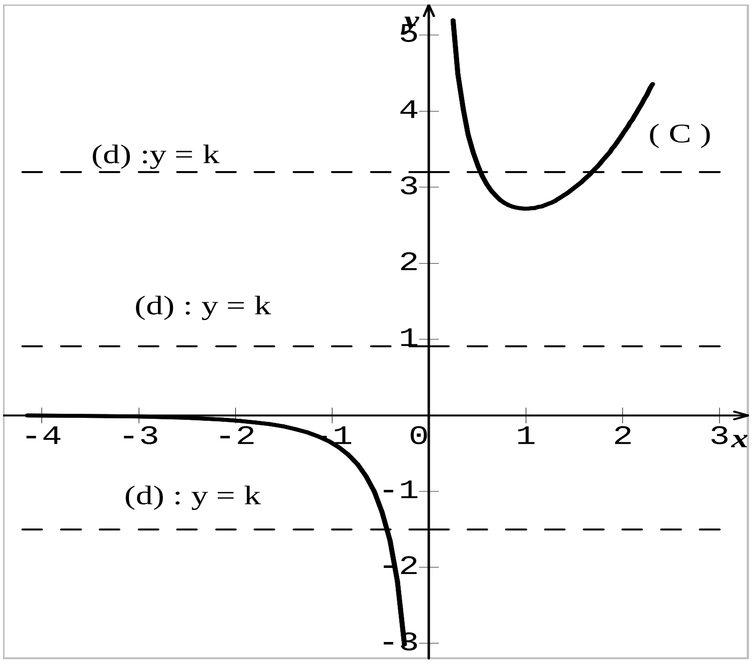
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$ និង $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ។

នាំឱ្យបន្ទាត់ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (c) ។

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	0 ↘ $-\infty$		‖	$+\infty$ ↘	e	↗	$+\infty$

សង់ក្រាប (c) ៖



ខ-សិក្សាអត្ថិភាព និង សញ្ញានៃឫសនៃ $e^{x} - kx = 0$

សមីការអាចសរសេរ $\frac{e^{x}}{x} = k$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសចំនុចរួមរវាង(c)

និង $(d): y = k$ ។

តាមក្រាហ្វិកយើងអាចសន្និដ្ឋានដូចតទៅ៖

-ចំពោះ $k \in (-\infty \ , 0)$ សមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ $x < 0$ ។

-ចំពោះ $k \in [0 , e)$ សមីការគ្មានឫស ។

-ចំពោះ $k = e$ សមីការមានឫសឌុបមួយគឺ $x_1 = x_2 = 1 > 0$ ។

-ចំពោះ $k \in (e \ , +\infty)$ សមីការមានឫសពីរផ្សេងគ្នា $0 < x_1 < x_2$ ។

៤-អនុគមន៍លោការីតនេពែ

រំលឹករូបមន្តលីមីត ៖

1/ $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

2/ $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

3/ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = +\infty \ , n > 0$

4/ $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0 \ , \ n > 0$

រំលឹករូបមន្តដេរីវេ ៖

1/ បើ $y = \ln x$ នោះ $y' = \frac{1}{x}$

2/ បើ $y = \ln u(x)$ នោះ $y' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

ឧទាហរណ៍១

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំនត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x) = 1 + x\ln x$

ក-ចូរគណនាលីមីត $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ។

ខ-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់ $f'(x)$ ។

គូសតារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

គ-កំនត់សមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) តាង f ត្រង់ចំនុច

មានអាប់ស៊ីស $x=1$ ។ចូរសង់ ក្រាប (c) និងបន្ទាត់ (T) ក្នុងតំរុយអរតូនរ

ម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ តែមួយ ។

ឃ-គណនាក្រឡាផ្ទៃ $S(\alpha)$ ខណ្ឌដោយ (c) និងអក្សអាប់ស៊ីសក្នុង

ចន្លោះ $[\alpha, 1]$, $\alpha > 0$ រួចទាញរកលីមីត $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} S(\alpha)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាលីមីត $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

យើងបាន $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (1 + x\ln x) = 1$ ព្រោះ $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x = 0$

និង $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\ln x = +\infty$ ។

ខ-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់ $f'(x)$

យើងបាន $f'(x) = (x)'\ln x + (\ln x)'x = \ln x + 1$

-បើ $\ln x + 1 > 0$ នាំឱ្យ $x > \frac{1}{e}$ នោះ $f'(x) > 0$

-បើ $\ln x + 1 = 0$ នាំឱ្យ $x = \frac{1}{e}$ នោះ $f'(x) = 0$ ។

-បើ $\ln x+1<0$ នាំឱ្យ $x<\frac{1}{e}$ នោះ $f'(x)<0$ ។

គូសតារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ៖

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	1	↘	$1-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

គ-កំនត់សមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) តាង f ត្រង់ចំនុចមាន

អាប់ស៊ីស $x=1$ ៖

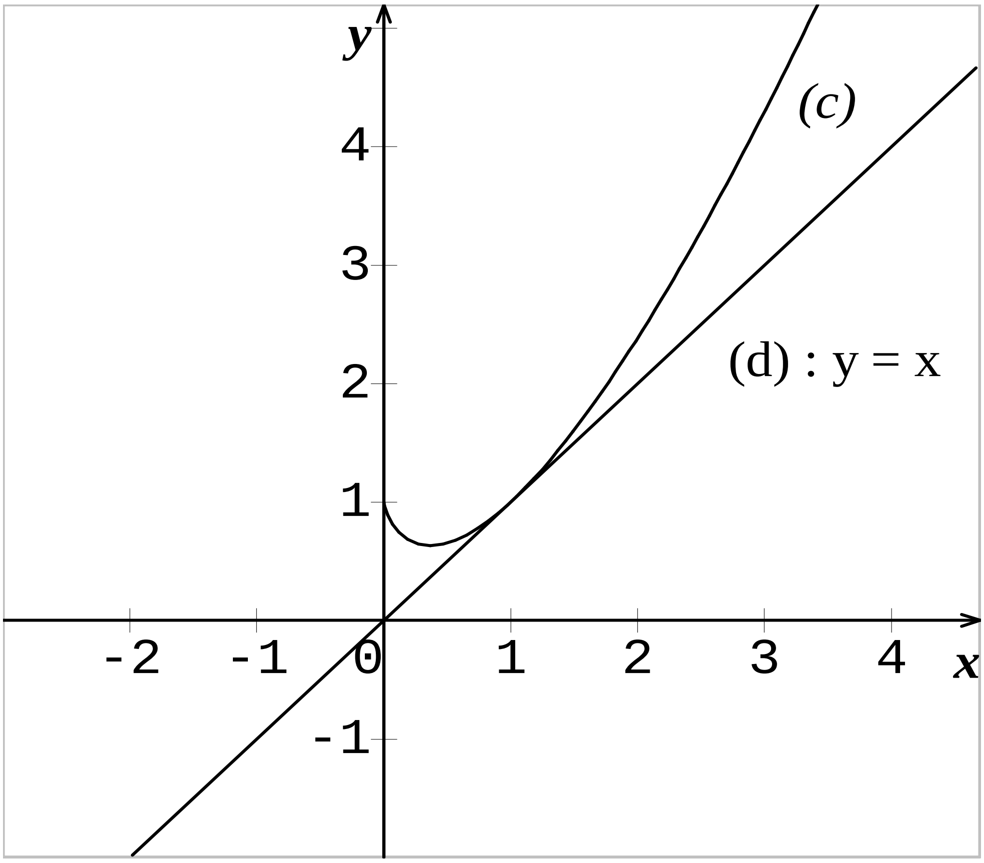
ចំពោះ $x=1$ នោះ $y=f(1)=1+0=1$ នាំឱ្យ $A(1,1)$ ជាចំនុចប៉ះ ។

តាមរូបមន្ត $(T): y-y_A=f'(x_A)(x-x_A)$

ដោយ $f'(x_A=1)=1+\ln 1=1$ គេបាន $(T): y-1=x-1$

នាំឱ្យ $(T): y=x$ ។

សង់ ក្រាប (c) និងបន្ទាត់ (T) ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ៖



ឃ-គណនាក្រឡាផ្ទៃ $S(\alpha)$ ខណ្ឌដោយ (c) និងអក្ស័រអាប់ស៊ីសក្នុង

ចន្លោះ $[\alpha, 1]$, $\alpha > 0$

យើងបាន $S(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} (1 + x\ln x).dx = \int_{\alpha}^{1} dx + \int_{\alpha}^{1} x\ln x.dx = (1 - \alpha) + \int_{\alpha}^{1} x\ln x.dx$

តាង $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

គេបាន $S(\alpha)=1-\alpha+\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_{\alpha}^{1}-\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{1}xdx=1-\alpha-\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha-\frac{1}{4}\left[x^2\right]_{\alpha}^{1}$

$$=1-\alpha-\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\alpha^2=\frac{3}{4}-\alpha+\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha$$

ដូចនេះ $S(\alpha)=\frac{3}{4}-\alpha+\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha$ និង $\lim_{\alpha\to0^+}S(\alpha)=\frac{3}{4}$ ។

ជំពូកទី៤

លំហាត់ជ្រើសរើសមានដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

គេឱ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើ $(-2\,,+\infty)$ ដែល $f(x)=\sqrt{x+2}$

ក. រកតម្លៃអមនៃ $f'(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,2]$

ខ. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x\in[-1\,,2]$ គេបាន ៖

$\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\le\sqrt{x+2}\le\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកតម្លៃអមនៃ $f'(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,2]$

គេមាន $f(x)=\sqrt{x+2}$

គេបាន $f'(x)=\frac{(x+2)'}{2\sqrt{x+2}}=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

ដោយ $-1\le x\le 2$ នោះ $1\le x+2\le 4$ ឬ $1\le\sqrt{x+2}\le 2$

គេទាញ $\frac{1}{4}\le\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\le\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\frac{1}{4}\le f'(x)\le\frac{1}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,2]$ ។

ខ. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,2]$ គេបាន ៈ

$$\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\le\sqrt{x+2}\le\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\frac{1}{4}\le f'(x)\le\frac{1}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[-1,2]$

តាមទ្រឹស្តីបទវិសមភាពកំណើនមានកំណត់អនុវត្តន៍ចំពោះអនុគមន៍ f ក្នុងចន្លោះ $[-1,2]$ គេបាន៖

ចំពោះ $x\ge-1$ នោះ $\frac{1}{4}(x+1)\le f(x)-f(-1)\le\frac{1}{2}(x+1)$

ឬ $\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\le\sqrt{x+2}-1\le\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\le\sqrt{x+2}\le\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី២

គេឱ្យអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើ IR ដែល $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

ក. រកតម្លៃអមនៃ $f'(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[\frac{3}{4},\frac{4}{3}]$ ។

ខ. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x\in[\frac{3}{4},\frac{4}{3}]$ គេបាន ៈ

$$\frac{3x}{5}-\frac{9}{20}+\ln 2\le \ln(x+\sqrt{1+x^2})\le \frac{4x}{5}-\frac{3}{5}+\ln 2$$

ដំណោះស្រាយ

ក. រកតម្លៃអមនៃ $f'(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[\frac{3}{4},\frac{4}{3}]$

គេបាន $f'(x)=\frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ចំពោះគ្រប់ $x\in[\frac{3}{4},\frac{4}{3}]$ គេបាន $\frac{25}{16}\le 1+x^2\le\frac{25}{9}$

ឬ $\frac{5}{4} \le \sqrt{1+x^2} \le \frac{5}{3}$ នាំឱ្យ $\frac{3}{5} \le \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \le \frac{4}{5}$

ដូចនេះ $\frac{3}{5} \le f'(x) \le \frac{4}{5}$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [\frac{3}{4}, \frac{4}{3}]$ ។

ខ. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x \in [\frac{3}{4}, \frac{4}{3}]$ គេបាន ៈ

$$\frac{3x}{5} - \frac{9}{20} + \ln 2 \le \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \le \frac{4x}{5} - \frac{3}{5} + \ln 2$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\frac{3}{5} \le f'(x) \le \frac{4}{5}$ ចំពោះគ្រប់ $x \in [\frac{3}{4}, \frac{4}{3}]$

តាមទ្រឹស្តីបទវិសមភាពកំណើនមានកំណត់គេបាន៖

ចំពោះ $x \ge \frac{3}{4}$: $\frac{3}{5}(x - \frac{3}{4}) \le f(x) - f(\frac{3}{4}) \le \frac{4}{5}(x - \frac{3}{4})$

ឬ $\frac{3x}{5} - \frac{9}{20} \le \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \ln 2 \le \frac{4x}{5} - \frac{3}{5}$

ដូចនេះ $\frac{3x}{5} - \frac{9}{20} + \ln 2 \le \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \le \frac{4x}{5} - \frac{3}{5} + \ln 2$ ។

លំហាត់ទី៣

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{3x+1}$ កំនត់លើ $[-\frac{1}{3};+\infty)$

ក. ចំពោះគ្រប់ $1\le x\le 5$ ចូរបង្ហាញថា $\frac{3}{8}\le f'(x)\le\frac{3}{4}$ ។

ខ. ដោយប្រើវិសមភាពកំណើនមានកំនត់អនុវត្តន៍ទៅនឹងអនុគមន៍ f

ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ ចូរបង្ហាញថា $\frac{3}{8}x+\frac{13}{8}\le\sqrt{3x+1}\le\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$

ដំណោះស្រាយ

ក. ចំពោះគ្រប់ $1\le x\le 5$ បង្ហាញថា $\frac{3}{8}\le f'(x)\le\frac{3}{4}$

គេមាន $f(x)=\sqrt{3x+1}$ នាំឱ្យ $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ គេមាន $1\le x\le 5$ ឬ $4\le 3x+1\le 16$

$$\frac{1}{4}\le\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\le\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{8}\le\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}\le\frac{3}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{3}{8}\le f'(x)\le\frac{3}{4}}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\frac{3}{8}x+\frac{13}{8} \le \sqrt{3x+1} \le \frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$

ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ គេមាន $\frac{3}{8}\le f'(x)\le\frac{3}{4}$

តាមទ្រឹស្តីបទវិសមភាពកំណើនមានកំនត់

ចំពោះ $x\ge 1$ គេមាន $\frac{3}{8}(x-1)\le f(x)-f(1)\le\frac{3}{4}(x-1)$

ដោយ $f(x)=\sqrt{3x+1}$

គេបាន $\frac{3}{8}x-\frac{3}{8}\le\sqrt{3x+1}-2\le\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$

នាំឱ្យ $\frac{3}{8}x+\frac{13}{8} \le \sqrt{3x+1} \le \frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $f(x)=(x+\sqrt{1+x^2})^n$

ដែល $x\in IR$ និង $n\in IN$ ។

ក-ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា ៖

$\sqrt{1+x^2}.f'(x)=n.f(x)$ ។

ខ-ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង ៖

$(1+x^2).f''(x)+x.f'(x)=n^2.f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាដេរីវេ $f'(x)$

គេមាន $f(x)=(x+\sqrt{1+x^2})^n$

តាមរូបមន្ត $(u^n)'=nu'.u^{n-1}$

គេបាន $f'(x)=n.(x+\sqrt{1+x^2})'.(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}$

$$f'(x)=n.\left(1+\frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}\right).(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}$$

$$=n.\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right).(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}$$

$$=n.\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}.(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}$$

$$=\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})^{n}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}.(x+\sqrt{1+x^2})^{n}}$ ។

បង្ហាញថា $\sqrt{1+x^2}.f'(x)=n.f(x)$

គេមាន $f'(x)=\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}.(x+\sqrt{1+x^2})^{n}$

ដោយ $f(x)=(x+\sqrt{1+x^2})^{n}$

គេបាន $f'(x)=\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}.f(x)$ នាំឱ្យ $\sqrt{1+x^2}.f'(x)=n.f(x)$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{1+x^2}.f'(x)=n.f(x)}$ ។

ខ-ស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង៖

$$(1+x^2).f''(x)+x.f'(x)=n^2.f(x)$$

គេមាន $\sqrt{1+x^2}.f'(x)=n.f(x)$ នាំឱ្យ $f'(x)=n.\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

គេបាន $f''(x)=n.\dfrac{f'(x)\sqrt{1+x^2}-(\sqrt{1+x^2})'f(x)}{(\sqrt{1+x^2})^2}$

$$f''(x)=n\dfrac{f'(x).\sqrt{1+x^2}-\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}.f(x)}{1+x^2}$$

$$f''(x)=n.\dfrac{\sqrt{1+x^2}.f'(x)-x.\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \quad (1)$$

គេមាន $\sqrt{1+x^2}.f'(x)=n.f(x) \quad (2)$

និង $\dfrac{1}{n}.f'(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}} \quad (3)$

យក (2) និង (3) ជួសក្នុងទំនាក់ទំនង (1) គេបាន៖

ដូចនេះ $\boxed{(1+x^2).f''(x)+x.f'(x)=n^2.f(x)}$ ។

លំហាត់ទី៥

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ៖

$$f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x+k.\sin^2 x.\cos^2 x$$

ក-ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ ។

ខ-ចូរកំនត់ចំនួនពិត k ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ថេរជានិច្ចគ្រប់ $x\in IR$

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាដេរីវេ $f'(x)$

$$f'(x)=6.(\sin x)'\sin^5 x+6.(\cos x)'\cos^5 x+k(\sin^2 x)'\cos^2 x+k(\cos^2 x)'\sin^2 x$$

$$=6\cos x\sin^5 x-6\sin x\cos^5 x+2k\sin x\cos^3 x-2k\cos x\sin^3 x$$

$$=6\cos x\sin x(\sin^4 x-\cos^4 x)+2k\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)$$

$$=3\sin 2x(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)+k\sin 2x.\cos 2x$$

$$=-3\sin 2x\cos 2x+k.\sin 2x\cos 2x$$

$$=(-3+k).\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{2}(k-3)\sin 4x$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\frac{1}{2}(k-3).\sin 4x}$ ។

ខ-កំនត់ចំនួនពិត k

ដើម្បីឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ថេរជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ លុះត្រាតែ

$f'(x) = 0$ គ្រប់ $x \in IR$ ។

ដោយ $f'(x) = \frac{1}{2}(k-3).\sin 4x$

គេទាញ $k - 3 = 0$ នាំឱ្យ $k = 3$ ។

លំហាត់ទី៦

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់ និងមានដេរីវេលើ IR ។

គេដឹងថា $\begin{cases} f(1) = f'(1) = 3 \\ \dfrac{1}{2x-1}f''(x) - \dfrac{2}{(2x-1)^2}f'(x) = 4x+1 \end{cases}$

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ៖

គេមាន $\dfrac{1}{2x-1}f''(x) - \dfrac{2}{(2x-1)^2}f'(x) = 4x+1 \quad (1)$

តាង $g(x) = f'(x).\dfrac{1}{2x-1}$ គេបាន $g'(x) = \dfrac{1}{2x-1}f''(x) - \dfrac{1}{(2x-1)^2}f'(x)$

ទំនាក់ទំនង (1) ក្លាយទៅជា $g'(x) = 4x+1$ នោះ $g(x) = 2x^2 + x + C$

បើ $x = 1$ នោះ $g(1) = 3 + C$ តែ $g(1) = f'(1).\dfrac{1}{2(1)-1} = f'(1) = 3$

គេបាន $3 + C = 3$ នាំឲ្យ $C = 0$ ដូចនេះ $g(x) = 2x^2 + x$

ដោយ $g(x) = f'(x).\dfrac{1}{2x-1}$ គេទាញ $\dfrac{f'(x)}{2x-1} = 2x^2 + x$

$f'(x) = 4x^3 - x$ នាំឲ្យ $f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2 + k$

បើ $x = 1$ នោះ $f(1) = \frac{1}{2} + k = 3$ នាំឲ្យ $k = \frac{5}{2}$ ។

ដូចនេះ $f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់ និង មានដេរីវេលើ IR ដោយ ៖

$$\begin{cases} f'(x).f^2(x) = x(x-2) \\ f(0) = 2 \end{cases}$$ ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ ។

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ៖

គេមាន $f'(x).\,f^2(x) = x(x-2) \quad (1)$

តាង $g(x) = f^3(x)$ គេបាន $g'(x) = 3f'(x).f^2(x)$

ឬ $\frac{1}{3}g'(x) = f'(x).f^2(x)$

ទំនាក់ទំនង (1) ទៅជា $\frac{1}{3}g'(x) = x(x-2)$

$$g'(x) = 3x^2 - 6x$$
$$g(x) = x^3 - 3x^2 + k$$

បើ $x = 0$ នោះ $g(0) = k$

ដោយ $g(0)=f^3(0)=(2)^3=8$

គេបាន $g(x)=x^3-3x^2+8$ តែ $g(x)=f^3(x)$

គេទាញ $f^3(x)=x^3-3x^2+8$ នាំឲ្យ $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2+8}$

ដូចនេះ $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2+8}$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-3x+1}{3x^2-3x+1}$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$f\left(\frac{1+a+b}{2}\right) \geq f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$f\left(\frac{1+a+b}{2}\right) \geq f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-3x+1}{3x^2-3x+1}$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x-3)(3x^2-3x+1)-(6x-3)(x^3+3x^2-3x+1)}{(3x^2-3x+1)^2}$$

$$=\frac{3x^4-6x^3+3x^2}{(3x^2-3x+1)^2}=\frac{3x^2(x-1)^2}{(3x^2-3x+1)^2}\geq 0\ ,\ \forall x\in IR$$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនលើ IR ។

ម៉្យាងទៀតយើងសន្មតថា $\dfrac{1+a+b}{2}\geq\dfrac{1+a+b+ab}{2+a+b}$

គេបាន $\dfrac{2}{1+a+b} \le \dfrac{2+a+b}{1+a+b+ab}$

$$\frac{2}{1+a+b} \le \frac{(1+a)+(1+b)}{(1+a)(1+b)}$$

$$\frac{2}{1+a+b} \le \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}$$

ដោយ $\dfrac{1}{1+a+b} \le \dfrac{1}{1+a}$ និង $\dfrac{1}{1+a+b} \le \dfrac{1}{1+b}$

គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ។

គេទាញ $\dfrac{2}{1+a+b} \le \dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b}$

នាំឲ្យការសន្មត $\dfrac{1+a+b}{2} \ge \dfrac{1+a+b+ab}{2+a+b}$ ពិត។

ដូចនេះតាមលក្ខណៈអនុគមន៍កើនគេទាញ

$$f\left(\frac{1+a+b}{2}\right) \ge f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឱ្យ a និង b ជាពីរចំនួនពិតដែល $0 \le a < b < \frac{\pi}{2}$

ចូរស្រាយថា $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$

តាងអនុគមន៍ $f(x) = \tan x$ ដែល $x \in [0, \frac{\pi}{2})$

គេបាន $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ ។

ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ និងមានដេរីវេលើចន្លោះ $x \in [0, \frac{\pi}{2})$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម នោះមាន $c \in (a, b)$ ដែល៖

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\tan b - \tan a}{b - a} \quad (1)$$

ហើយចំពោះ $x \in [a, b]$ ដែល $0 \le a < b < \frac{\pi}{2}$

គេមាន $\cos b \le \cos x \le \cos a$

នោះគេទាញ $\frac{1}{\cos^2 a} < f'(x) < \frac{1}{\cos^2 b}$

យក $x = c$ គេបាន $\frac{1}{\cos^2 a} < f'(c) < \frac{1}{\cos^2 b}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញ

$\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$ ។

លំហាត់ទី១១

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $0<a<b$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$$\frac{b-a}{b}\le \ln b-\ln a\le \frac{b-a}{a}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{b-a}{b}\le \ln b-\ln a\le \frac{b-a}{a}$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\ln x$ ដែល $x\in(0,+\infty)$

គេបាន $f'(x)=\frac{1}{x}$ ។

ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ និងមានដេរីវេលើចន្លោះ $x\in(0\,,+\infty\,)$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម នោះមាន $c\in(a,b)$ ដែល៖

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}\ (1)$$

ហើយចំពោះ $x\in[a,b\,]$ ដែល $0<a<b$

គេមាន $a\le x\le b$ នោះគេទាញ $\frac{1}{b}\le f'(x)\le\frac{1}{a}$

យក $x=c$ គេបាន $\frac{1}{b}<f'(c)<\frac{1}{a}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញ $\frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a}$

ដូចនេះ $\frac{b-a}{b}<\ln b-\ln a<\frac{b-a}{a}$ ។

លំហាត់ទី១២

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $0 \le a < b \le \frac{\pi}{2}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$(b-a)\cos b \le \sin b - \sin a \le (b-a)\cos a$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(b-a)\cos b \le \sin b - \sin a \le (b-a)\cos a$

តាងអនុគមន៍ $f(x) = \sin x$ ដែល $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

គេបាន $f'(x) = \cos x$ ។

ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ និងមានដេរីវេលើចន្លោះ $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម នោះមាន $c \in (a, b)$ ដែល៖

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\sin b - \sin a}{b - a} \quad (1)$$

ហើយចំពោះ $x \in [a, b]$ ដែល $0 \le a < b \le \frac{\pi}{2}$

គេមាន $\cos b < \cos x < \cos a$

នោះគេទាញ $\cos b < f'(x) < \cos a$

យក $x = c$ គេបាន $\cos b < f'(c) < \cos a \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេទាញ $\cos b < \dfrac{\sin b - \sin a}{b - a} < \cos a$

ដូចនេះ $(b-a)\cos b < \sin b - \sin a < (b-a)\cos a$ ។

លំហាត់ទី១៣

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $0 \le a < b$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

$na^{n-1}(b-a) \le b^n - a^n \le nb^{n-1}(b-a)$ ដែល $n \in IN$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $na^{n-1}(b-a) \le b^n - a^n \le nb^{n-1}(b-a)$

តាងអនុគមន៍ $f(x) = x^n$ ដែល $x \in [0, +\infty)$

គេបាន $f'(x) = nx^{n-1}$ ។

ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ និងមានដេរីវេលើចន្លោះ $x \in [0, +\infty)$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម នោះមាន $c \in (a, b)$ ដែល៖

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^n - a^n}{b - a} \quad (1)$$

ហើយចំពោះ $x \in [a, b]$ ដែល $0 \le a < b$

គេមាន $a^{n-1} < x^{n-1} < b^{n-1}$ នោះគេទាញ $na^{n-1} < f'(x) < nb^{n-1}$

យក $x = c$ គេបាន $na^{n-1} < f'(c) < nb^{n-1}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញ $na^{n-1} < \frac{b^n - a^n}{b - a} < nb^{n-1}$

ដូចនេះ $na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$ ។

លំហាត់ទី១៤

គណនា y' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y បើគេដឹងថា៖

$x^y = y^x$ គ្រប់ $x > 0, y > 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា y' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

គេមាន $x^y = y^x$ នាំឱ្យ $y\ln x = x\ln y$

ធ្វើដេរីវេលើសមីការនេះ $y'\ln x + y.\frac{1}{x} = \ln y + x.\frac{y'}{y}$

ឬ $(\ln x - \frac{x}{y})y' = \ln y - \frac{y}{x}$

ដូចនេះ $y' = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}}$ ។

លំហាត់ទី១៥

ចូរគណនា y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y បើគេដឹងថា៖

$x^3+y^3+4=3xy$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា y'' ជាអនុគមន៍នៃ x និង y

គេមាន $x^3+y^3+2=3xy$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការនេះគេបាន៖

$$3x^2+3y'y^2=3y+3xy'$$

$$x^2+y'y^2=y+xy'$$

$$y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}$$

ហើយ $y''=\dfrac{(y'-2x)(y^2-x)-(2yy'-1)(y-x^2)}{(y^2-x)^2}$

$$=\frac{(x^2-2xy^2+y)-(y^2-2x^2y+x)y'}{(y^2-x)^2}$$

ជំនួស $y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}$ រួចបង្រួមគេទទួលបាន៖

$y''=\frac{2xy(3xy-x^3-y^3-1)}{(y^2-x)^3}$ ដោយ $x^3+y^3+2=3xy$

ដូចនេះ $y''=\frac{2xy}{(y^2-x)^3}$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ ដែល $x\neq 1$

ក. គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $f(x)$ តាងដោយ $f^{(n)}(x)$ ។

ខ.ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ $f(x)$ អាចសរសេរជារាង៖

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(x)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+...+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+R_n(x)$$

ដែល $R_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ គ្រប់ $x\neq 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ៖

គេមាន $f(x)=\dfrac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}$

គេបាន $f'(x)=-(1-x)'(1-x)^{-2}=(1-x)^{-2}=1!(1-x)^{-2}$

$$f''(x)=2(1-x)^{-3}=2!(1-x)^{-3}$$

$$f^{(3)}(x)=6(1-x)^{-4}=3!(1-x)^{-4}$$

ឧបមាថា $f^{(n)}(x)=n!(1-x)^{-n-1}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា $f^{(n+1)}(x)=(n+1)!(1-x)^{-n-2}$ ពិត

គេមាន

$f^{(n+1)}(x)=[f^{(n)}(x)]'=[n!(1-x)^{-n-1}]'=(n+1)!(1-x)^{-n-2}$ ពិត

ដូចនេះ $f^{(n)}(x)=n!(1-x)^{-n-1}=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ ។

ខ.ស្រាយថាអនុគមន៍ $f(x)$ អាចសរសេរជារាង៖

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(x)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+...+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+R_n(x)$$

គេមាន $f^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ នោះ $f^{(n)}(0)=n!$ និង $f(0)=1$

ហើយ $R_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ នោះគេបាន៖

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(x)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+...+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+R_n(x)$$

$$=1+x+x^2+....+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$$=\frac{(1-x)(1+x+x^2+....+x^n)+x^{n+1}}{1-x}$$

$$=\frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}}{1-x}=\frac{1}{1-x}$$ ពិត

លំហាត់ទី១៧

គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{x^3 - 8x^2 + 13x - 2}{x^2 - 2x + 1}$

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (c) តាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ មានឯកតា 1cm នៅលើអក្ស័ ។

ខ. ដោយប្រើក្រាប (c) ចូរសិក្សាតាមតម្លៃ m នូវអត្ថិភាពនៃឬសរបស់សមីការ $x^3 - (m+8)x^2 + (2m+13)x - (m+2) = 0$

($m \in IR$ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ)

ដំណោះស្រាយ

-ដែនកំនត់ $D = IR - \{1\}$

-ទិសដៅអថេរភាព

.សរសេរជារាងកាណូនិច

$$f(x) = \frac{(x^3 - 2x^2 + x) - (6x^2 - 12x + 6) + 4}{x^2 - 2x + 1}$$

$$f(x) = x - 6 + \frac{4}{(x-1)^2}$$

.ដេរីវេ $f'(x)=1-\frac{8}{(x-1)^3}=\frac{(x-1)^3-8}{(x-1)^3}$

.ចំនុចបរមា

បើ $f'(x)=0$ គេបាន $(x-1)^3-8=0$ ឬ $x=3$

អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=3$ គឺ

$$f(3)=3-6+\frac{4}{(3-1)^2}=-2$$

.គណនាលីមីត

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left[x-6+\frac{4}{(x-1)^2}\right]=+\infty$$

និង $$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1+}\left[x-6+\frac{4}{(x-1)^2}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x-6+\frac{4}{(x-1)^2}\right]=\pm\infty$$

.អាស៊ីមតូត

ដោយគេមាន $\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$ នាំឲ្យបន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

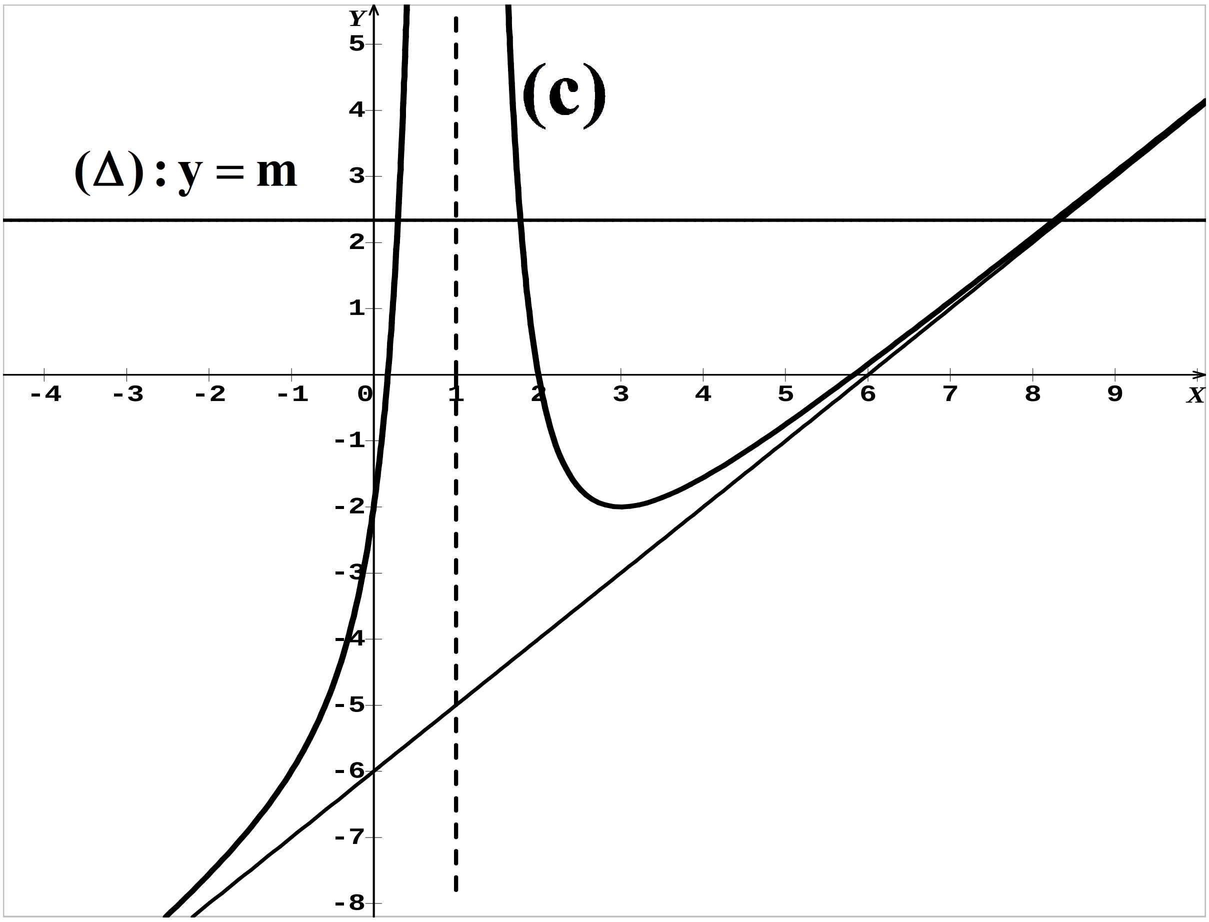
ម៉្យាងទៀតគេមាន $f(x)=x-6+\dfrac{4}{(x-1)^2}$ ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{(x-1)^2}=0$

ដូចនេះបន្ទាត់ $y=x-6$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (c) ។

.តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

-សង់ក្រាប $(c): y=\dfrac{x^3-8x^2+13x-2}{x^2-2x+1}$



ខ. ដោយប្រើក្រាប (c) សិក្សាតាមតម្លៃ m នូវអត្ថិភាពនៃឬស សមីការ៖

$$x^3-(m+8)x^2+(2m+13)x-(m+2)=0$$

សមីការនេះអាចសរសេរដូចខាងក្រោម៖

$$x^3-mx^2-8x^2+2mx+13x-m-2=0$$

$$x^3-8x^2+13x-2=m(x^2-2x+1)$$

$$\frac{x^3-8x^2+13x-2}{x^2-2x+1}=m$$

ជាសមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង ខ្សែកោង(c) និងបន្ទាត់ $(\Delta): y = m$ ។

តាមក្រាហ្វិកយើងអាចសន្និដ្ឋានលទ្ធផលដូចខាងក្រោម៖

-ចំពោះ $m \in (-\infty , -2)$ សមីការមានឫសតែមួយគត់ ។

-ចំពោះ $m = -2$ សមីការមានឫសឌុប $x_1 = x_2 = 3$ និងឫសទោល $x_3 = 0$ ។

-ចំពោះ $m \in (-2 , +\infty)$ សមីការមានឫសបីផ្សេងគ្នា ។

លំហាត់ទី១៨

គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 9x - 4}{x^2 - 4x + 4}$

ក. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ក្រាប (c) តាងអនុគមន៍ f ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ មានឯកតា 1cm នៅលើអក្ស ។

ខ. ដោយប្រើក្រាប (c) ចូរសិក្សាតាមតម្លៃ m នូវអត្ថិភាពនៃឫសរបស់សមីការ $x^3 - (m+6)x^2 + (4m+9)x - 4(m+1) = 0$

($m \in IR$ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ)

ដំណោះស្រាយ

-ដែនកំនត់ $D = IR - \{ 2 \}$

-ទិសដៅអថេរភាព

.សរសេរជារាងកាណូនិច

$$f(x) = \frac{(x^3 - 4x^2 + 4x) - (2x^2 - 8x + 8) - 3x + 4}{x^2 - 4x + 4}$$

$$f(x) = x - 2 - \frac{3x - 4}{(x-2)^2}$$

.ដេរីវេ $f'(x)=1-\dfrac{3(x-2)^2-2(x-2)(3x-4)}{(x-2)^4}$

$$f'(x)=1-\frac{3x-6-6x+8}{(x-2)^3}$$

$$=\frac{x^3-6x^2+12x-8+3x-2}{(x-2)^3}$$

$$=\frac{x^3-6x^2+15x-10}{(x-2)^3}$$

$$=\frac{(x-1)(x^2-5x+10)}{(x-2)^3}$$

.ចំនុចបរមា

បើ $f'(x)=0$ គេបាន $(x-1)(x^2-5x+10)=0$

ដោយត្រីធា $x^2-5x+10=0\ ,\Delta=25-40<0$ (គ្មានឫស)

ដូចនេះគេបាន $x=1$ ។

អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x=1$ គឺ $f(1)=1-2-\dfrac{3-4}{(1-2)^2}=0$

.គណនាលីមីត

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left[x-2-\frac{3x-4}{(x-2)^2}\right]=-\infty$$

និង $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}\left[x-2-\frac{3x-4}{(x-2)^2}\right]=-\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x-2-\frac{3x-4}{(x-2)^2}\right]=\pm\infty$$

.អាស៊ីមតូត

ដោយគេមាន $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$ នាំឲ្យបន្ទាត់ $x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ ។

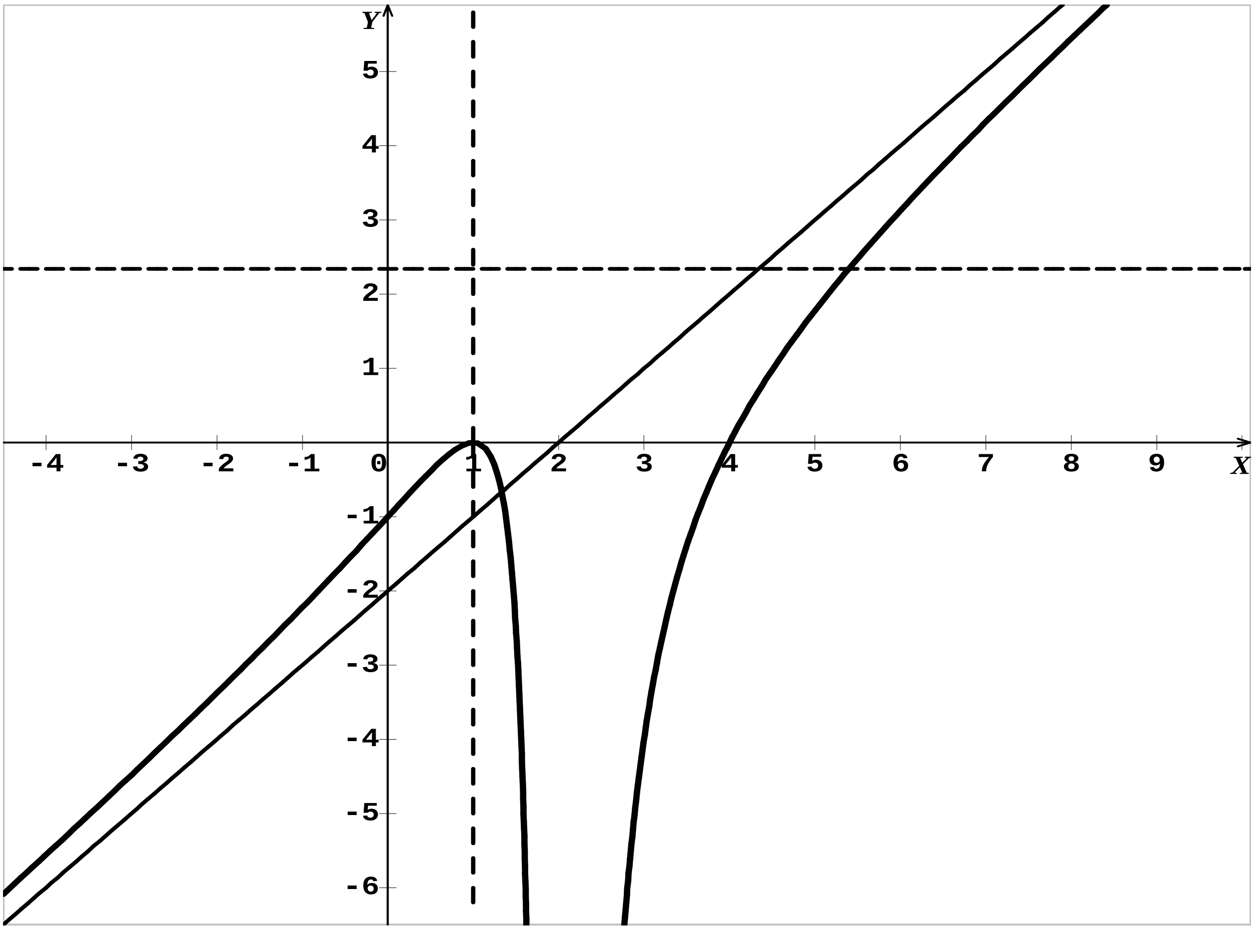
ម៉្យាងទៀតគេមាន $f(x)=x-2-\frac{3x-4}{(x-2)^2}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3x-4}{(x-2)^2}=0$ ដូចនេះបន្ទាត់ $y=x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត នៃខ្សែកោង (c) ។

.តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$			0		||		
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘ $-\infty$	||	$-\infty$ ↗	$+\infty$

-សង់ក្រាប $(c): y = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 9x - 4}{x^2 - 4x + 4}$



ខ. ដោយប្រើក្រាប (c) សិក្សាតាមតម្លៃ m នូវអត្ថិភាពនៃឬសរបស់

សមីការ $x^3 - (m+6)x^2 + (4m+9)x - 4(m+1) = 0$

សមីការនេះអាចសរសេរ $\dfrac{x^3 - 6x^2 + 9x - 4}{x^2 - 4x + 4} = m$

ជាសមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង ខ្សែកោង(c) និងបន្ទាត់ $(\Delta): y = m$ ។

តាមក្រាហ្វិកយើងអាចសន្និដ្ឋានលទ្ធផលដូចខាងក្រោមៈ

-ចំពោះ $m \in (-\infty, 0)$ សមីការមានឫសបីផ្សេងគ្នា ។

-ចំពោះ $m = 0$ សមីការមានឫសឌុប $x_1 = x_2 = 1$ និងឫសទោល $x_3 = 4$ ។

-ចំពោះ $m \in (0, +\infty)$ សមីការមានឫសតែមួយគត់។

លំហាត់ទី១៩

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=(1-x).e^{x}-1$ កំនត់លើ IR ។

ក. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

ទាញបញ្ជាក់សញ្ញានៃអនុគន៍ $f(x)$ ។

ខ. គេឱ្យ g ជាអនុគមន៍ កំនត់លើ IR ដោយ $g(x)=(2-x).e^{x}+2-x$

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ។

គ. គណនាដេរីវេ $g'(x)$ រួចបញ្ជាក់សញ្ញារបស់ $g'(x)$ ។

គូសតារាងអថេរភាពនៃ $g(x)$ ។

ឃ. ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ $(d): y=2-x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប

(C) តាងអនុគមន៍g កាលណា $x\to-\infty$ ។

សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ (d) ។

ង.សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹង (C) ហើយស្របនឹងបន្ទាត់(d) ។

ច. កំនត់កូអរដោនេចំនុចរបត់ I របស់ខ្សែកោង (C) ។

ឆ. សង់ក្រាប(C) បន្ទាត់(T) និង(d) ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ $(0,\vec{i},\vec{j})$

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ f

គេមាន $f'(x)=(1-x)'.e^x+\left(e^x\right)'.(1-x)$

$$=-e^x+e^x(1-x)$$

$$=-e^x+e^x-x.e^x$$

$$=-x.e^x$$

បើ $f'(x)=-x.e^x=0$ នាំអោយ $x=0$ ។

ចំពោះ $x=0$ គេបាន $f(0)=(1-0).e^0-1=0$ ។

គណនាលីមីត:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[(1-x).e^x-1\right]=-1$$

និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(1-x).e^x-1\right]=-\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	0	↘	$-\infty$

ទាញបញ្ហាក់សញ្ញានៃអនុគមន៍ $f(x)$ ៈ

តាមតារាងខាងលើគេទាញបាន $\forall x \in IR : f(x) \le 0$ ។

ខ/គណនាលីមីត $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ៖

គេបាន $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[(2-x).e^x + (2-x)\right] = +\infty$

ព្រោះ $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty}(2-x) = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty}\left(e^x\right) = 0 \end{cases}$

គេបាន $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[(2-x).e^x + (2-x)\right] = -\infty$

ព្រោះ $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty}(2-x) = -\infty \\ \lim_{x\to+\infty}\left(e^x\right) = +\infty \end{cases}$

គ. គណនាដេរីវេ $g'(x)$ រួចបញ្ហាក់សញ្ញារបស់ $g'(x)$ ៈ

គេមាន $g(x) = (2-x).e^x + 2 - x = (2-x)\left(e^x + 1\right)$

គេបាន $g'(x) = (2-x)'\left(e^x+1\right) + \left(e^x+1\right)'(2-x)$

$$= -\left(e^x + 1\right) + e^x.(2 - x)$$

$$= -e^x - 1 + 2e^x - x.e^x = e^x - x.e^x - 1$$

$$= (1 - x).e^x - 1$$

ដូចនេះ $g'(x) = (1 - x).e^x - 1$

ម៉្យាងទៀតដោយ $g'(x) = (1 - x).e^x - 1 = f(x)$

ហើយគេមាន $\forall x \in IR : f(x) \le 0$

ដូចនេះ $\forall x \in IR : g'(x) \le 0$ ។

គូសតារាងអថេរភាពនៃ $g(x)$ ៖

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	4	↘	$-\infty$

ចំពោះ $x = 0$ នាំអោយ $g(0) = 4$

ឃ. ស្រាយ ថាបន្ទាត់ $(d): y = 2 - x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

គេមាន $\begin{cases} (C): g(x) = (2-x).e^x + 2 - x \\ (d): y = 2 - x \end{cases}$

គេបាន $g(x) - y = (2-x).e^x$

ដោយគេមាន $\lim_{x\to-\infty}\left[g(x) - y\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[(2-x).e^x\right] = 0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(d): y = 2 - x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ (d) ៈ

គេមាន $g(x) - y = (2-x).e^x$ មានសញ្ញាដូច $2 - x$

ព្រោះ $\forall x \in IR : e^x > 0$ ។

-ចំពោះ $x \in]-\infty, 2[$ ខ្សែកោង (C) នៅពីលើបន្ទាត់ (d) ។

-ចំពោះ $x = 2$ ខ្សែកោង (C) ប្រសព្វបន្ទាត់ (d) ត្រង់ចំនុច $A(2,0)$ ។

-ចំពោះ $x \in]2, +\infty[$ ខ្សែកោង (C) នៅពីក្រោមបន្ទាត់ (d) ។

ង. រកសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ហើយស្របនឹង (d) ៖

តាង $M_0(x_0, y_0)$ ជាចំនុចប៉ះរវាងបន្ទាត់ (T) ជាមួយ (C)

តាមរូបមន្ត $(T): y - y_0 = y'_0 .(x - x_0)$

ដោយ $(T)//(d): y = 2 - x$ នាំឱ្យ $y'_0 = -1$

តែ $y'_0 = g'(x_0) = (1 - x_0)e^{x0} - 1$

គេទាញបាន $(1 - x_0)e^{x0} - 1 = -1$ នាំឱ្យ $x_0 = 1$

ហើយ $y_0 = g(x_0) = e + 1$ ។

គេបាន $(T): y - (e + 1) = -1.(x - 1)$

ដូចនេះ $(T): y = -x + e + 2$ ។

ច. កំនត់កូអរដោនេចំនុចរបត់ I របស់ខ្សែកោង (C) ៖

គេមាន $g'(x) = (1 - x).e^x - 1 = f(x)$

គេបាន $g''(x) = f'(x) = -x.e^x$ មានឫស $x = 0$ ។

ចំពោះ $x = 0$ គេបាន $g(0) = 4$ ។

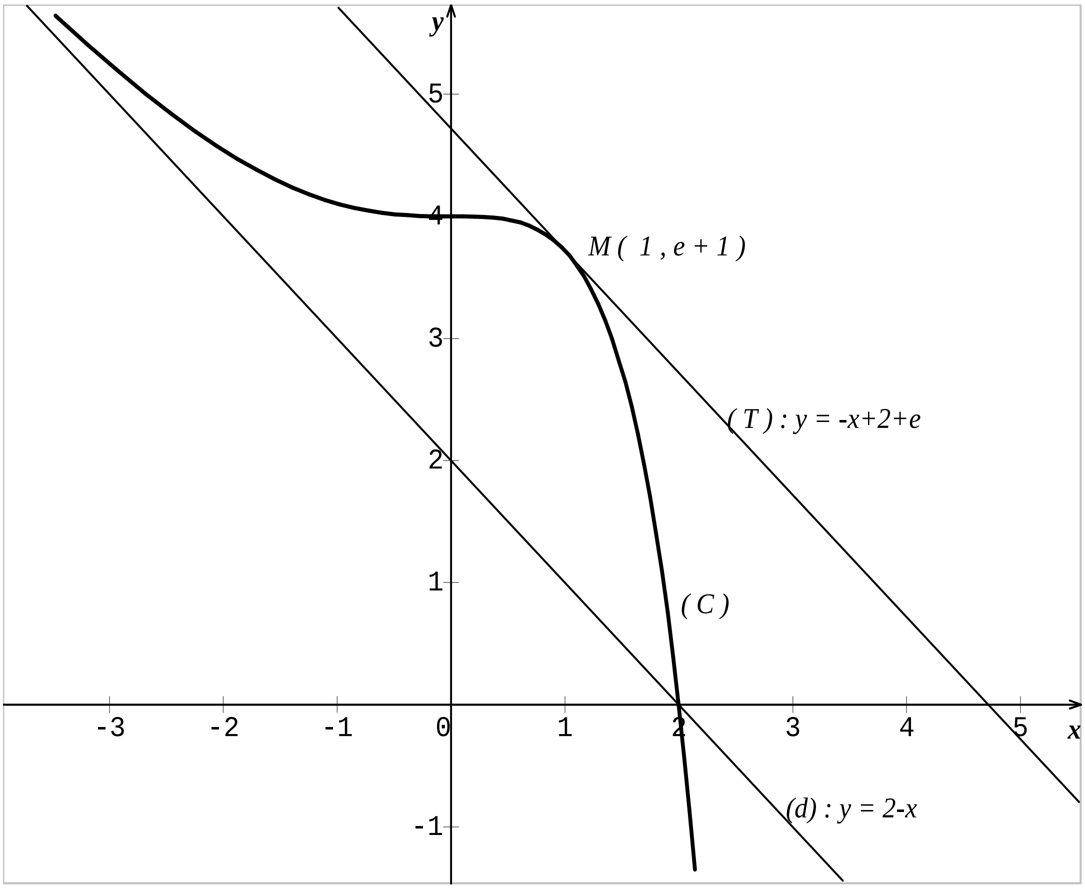
តារាងសិក្សាសញ្ញានៃ $g''(x) = -x.e^{x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$			
$g(x)$			

ដោយត្រង់ចំនុច $x = 0$ កន្សោម $g''(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

នាំឱ្យ $I(0,4)$ ជាចំនុចរបត់នៃក្រាប ។

ឆ. សង់ក្រាប (C) បន្ទាត់ (T) និង (d) ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់៖



លំហាត់ទី២០

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=(x-1)(e^{2x}+1)$ ដែល $x\in IR$ ។

ក-ចូរគណនាលីមីត $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ។

ខ-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ $f'(x)$ ។

(មិនបាច់រកលីមីតនៃ $f'(x)$ ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$) ។

គ-កំនត់សញ្ញារបស់ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ឃ-ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ $(d): y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប

(c) នៃ $y=f(x)$ ។កាលណា $x\to-\infty$ ។

បញ្ជាក់ទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង (c) និងបន្ទាត់ (d)

ង-កំនត់សមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) ហើយស្របជាមួយនឹងបន្ទាត់ (d) ។

ច-ចូរគូសក្រាប (c) និងបន្ទាត់ $(d),(T)$ ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់

$(o,\vec{i},\vec{j})$ តែមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

យើងមាន $f(x)=(x-1)(e^{2x}+1)$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x-1)(e^{2x}+1)\right]=-\infty$

ព្រោះ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x}+1)=1\end{cases}$

និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x-1)(e^{2x}+1)\right]=+\infty$

ព្រោះ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2x}+1)=+\infty\end{cases}$

ខ-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$

យើងមាន $f(x)=(x-1)(e^{2x}+1)$ កំនត់លើ $D=IR$

យើងបាន $f'(x)=(x-1)'(e^{2x}+1)+(e^{2x}+1)'(x-1)$

$$=e^{2x}+1+2e^{2x}(x-1)$$

$$=1+(2x-1)e^{2x}$$

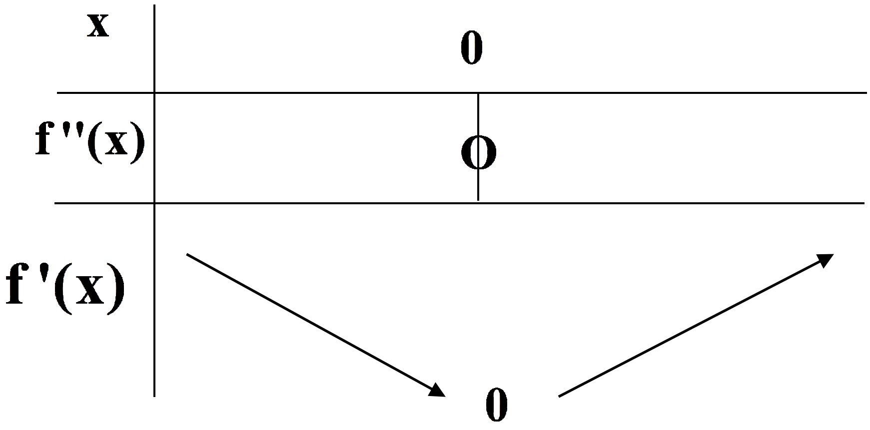
និង $f''(x)=(2x-1)'e^{2x}+(e^{2x})'(2x-1)=4xe^{2x}$

ដូចនេះ $f'(x)=1+(2x-1)e^{2x}$, $f''(x)=4xe^{2x}$ ។

គូសតារាងអថេរភាពនៃ $f'(x)$

យើងមាន $f''(x)=4xe^{x}$ មានឫស $x=0$

ចំពោះ $x=0$ នោះ $f'(0)=1-1=0$ ។



គ-កំនត់សញ្ញារបស់ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$

តាមតារាងអថេរភាពខាងលើយើងទាញបាន $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in IR$

ដូចនេះ $f'(x)$ មានសញ្ញាវិជ្ជមាន ។

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↗	$+\infty$

ឃ-ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ $(d): y = x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប

យើងមាន $f(x) = (x-1)(e^{2x}+1) = x - 1 + (x-1)e^{2x}$

ដោយគេមាន $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)e^{2x} = 0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(d): y = x - 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប(c) ។

-បញ្ជាក់ទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង (c) និងបន្ទាត់ (d) ៈ

គេមាន $f(x) - y = (x-1)\,e^{2x}$ មានសញ្ញាដូច $x-1$

ព្រោះ $e^{2x} > 0 , \forall x \in IR$ ។

-បើ $x - 1 > 0$ ឬ $x > 1$ នោះខ្សែកោង (c) នៅលើបន្ទាត់ (d) ។

-បើ $x-1<0$ ឬ $x<1$ នោះខ្សែកោង (c) នៅក្រោមបន្ទាត់ (d) ។

-បើ $x-1=0$ ឬ $x=1$ នោះខ្សែកោងកាត់បន្ទាត់ត្រង់ចំនុចមួយ

$A(1,0)$ ។

ង-កំនត់សមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) ៖

តាង $M_0(x_0,y_0)$ ជាចំនុចប៉ះរវាងបន្ទាត់ (T) និងក្រាប (c)

តាមរូបមន្តសមីការបន្ទាត់ប៉ះសរសេរ $(T): y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

ដោយ $(T)//(d): y=x-1$ នាំឱ្យ $f'(x_0)=1$

តែ $f'(x_0)=1+(2x_0-1)e^{2x_0}$

គេបាន $1+(2x_0-1)e^{2x_0}=1$ នាំឱ្យ $x_0=\frac{1}{2}$

ហើយ $y_0=f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2}-1)(e+1)=-\frac{1}{2}(e+1)$

គេបាន $(T):\ y+\frac{1}{2}(e+1)=1(x-\frac{1}{2})$ នាំឱ្យ $y=x-1-\frac{e}{2}$ ។

ដូចនេះ $(T):\ y=x-1-\frac{e}{2}$ ។

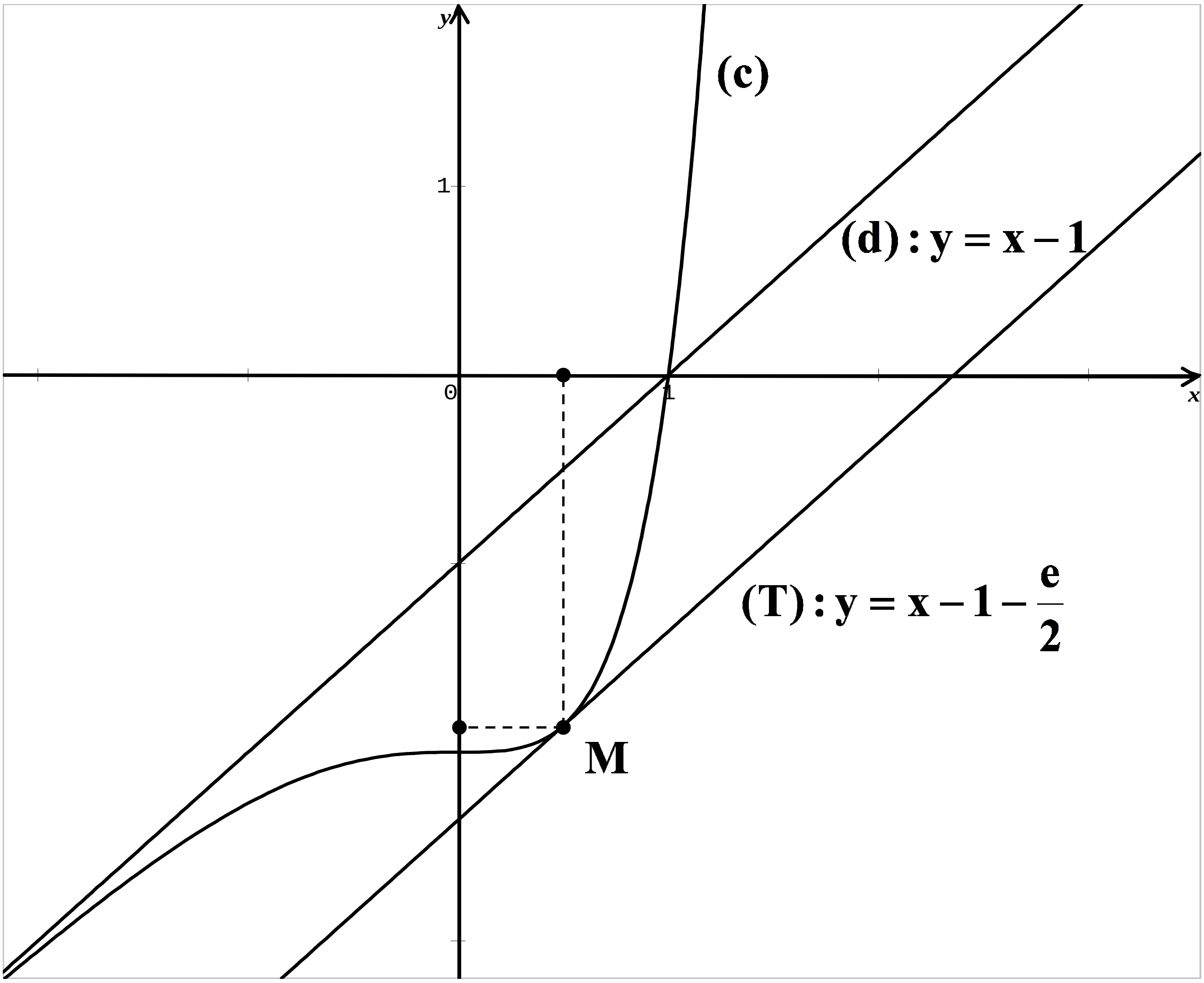
ច-គូសក្រាប (c) និងបន្ទាត់ (d),(T) ៖

-កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាង(c) ជាមួយអក្ស័អាប់ស៊ីស ៖

គឺ $y=(x-1)(e^{2x}+1)=0$ នោះ $x=1$ ។

-កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាង(c) ជាមួយអក្ស័អរដោណេ ៖

គឺ $x=0$ នោះ $x=1$ ។



ជំពូកទី៥

លំហាត់អនុវត្តន៍

១-ចូរគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

1/ $y = 3\cos x - \cos^3 x$

2/ $y = \sin^3 x \cos 3x$

3/ $y = \sin 4x \cos^4 x$

4/ $y = \dfrac{\sin x}{1 + \sin x}$

5/ $y = \dfrac{\cos x}{1 - \cos x}$

6/ $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

7/ $y = \dfrac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$

8/ $y = \dfrac{1}{2}\tan^2 x + \dfrac{1}{3}\tan^3 x$

9/ $y = x - \cot x$

10/ $y = \cot^4 x$

២-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

1/ $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

2/ $y = (x^2 - x + 1)e^{-x}$

3/ $y = e^{-x^2}$

4/ $y = x^3 e^{2x}$

5/ $y = (x^2 - x)e^x$

6/ $y = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$

៣-គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

1/ $y=\frac{x+\ln x}{x}$ 2/ $y=\frac{\ln x}{x^2}$

3/ $y=1-x+x\ln x$ 4/ $y=\ln\frac{x-1}{x+1}$

5/ $y=\ln(x^2-4x+3)$ 6/ $y=\ln(x+\sqrt{x^2+4})$

៤-គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយចារិកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O ដែលមានកាំ 6 cm ។

គេដឹងថា $\angle BOC=120^0$ ។

ចូរកំនត់ជ្រុងរបស់ត្រីកោណនេះដើម្បីឲ្យវាមានក្រឡាផ្ទៃអតិបរមា

រួចកំនត់រកក្រឡាផ្ទៃអតិបរមានោះ

៥-គេមានត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង ៖

AB = 3 cm , AC = 4 cm , BC = 5 cm ។

M និង N ជាចំនុចស្ថិតនៅលើជ្រុងរៀងគ្នា [AB] និង [AC]

ដែល MN = 3 cm កំនត់រកក្រឡាផ្ទៃរបស់ចតុកោណ BMNC

បើផលបូកអង្កត់ទ្រូងទាំងពីររបស់វាមានតម្លៃអតិបរមា ។

៦-គេឲ្យចតុកោណព្នាយ **ABCD** មួយកែងត្រង់ **A** និង **D** ហើយគេយក **M** ជាចំនុចមួយនៃ**[AD]** ។គេដឹងថា $AB = 8$ cm , $AD = 10$ cm និង $CD = 12$ cm ។

ចូរកំនត់រកទីតាំងនៃចំនុច **M** ដើម្បីឲ្យត្រីកោណ **MBC** មានបរិមាត្រតូចបំផុត ។

៧-គេឲ្យកន្លះរង្វង់មួយមានវិជ្ឈមាត្រ $AB = 8$cm ហើយ **P** ជាចំនុចមួយនៃកន្លះរង្វង់នេះ ។

គេតាង $PA = x$, $PB = y$ ដែល $0 < x < 8$ cm , $0 < y < 8$ cm ។

កំនត់ x និង y ដើម្បីឲ្យក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ **PAB** មានតម្លៃអតិបរមា

៨-ត្រីកោណ **ABC** មួយកែងត្រង់ **A** ដែល $AB = 5$ cm និង $AC = 12$ cm យក**M** ជាចំនុចមួយនៃជ្រុង **[AC]** ដែល $AM = x$ ។

តាម **M** គេសង់ចតុកោណកែង **MNPA** ចារិកក្នុងត្រីកោណនេះ

កំនត់ x ដើម្បីឲ្យចតុកោណ**MNPA** មានក្រឡាផ្ទៃអតិបរមារួចកំនត់រកក្រឡាផ្ទៃអតិបរមានោះ ។

៩-គេឲ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង

AB = 51 cm , AC = 52 cm , BC = 53 cm ។

M ជាចំនុចមួយនៃជ្រុង **[AB]** ។

តាម **M** គេគូសបន្ទាត់ **(MN)** ស្របនឹងជ្រុង **[BC]** ហើយកាត់ជ្រុង

[AC] ត្រង់ **N** ។ **K** និង **L** ជាជើងនៃចំណោលកែងចំនុច **M**

និង **N** រៀងគ្នាលើជ្រុង **[BC]** ។យក **AM = x** ដែល $0 < x < 51$ **cm**

កំនត់តម្លៃ **x** ដើម្បីឲ្យចតុកោណ **KMNL** មានក្រឡាផ្ទៃអតិបរមា ។

១០-ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(0,\vec{i},\vec{j})$ គេសង់បន្ទាត់ **(L)** កាត់តាម

ចំនុច $A(3,4)$ ។បន្ទាត់ **(L)** កាត់អក្ស័ **(ox)** ត្រង់ **P**

និង កាត់អក្ស័ **(oy)** ត្រង់ **Q** ។ គេសន្មតថា $P(a,0)$

និង $Q(0,b)$ ដែល $a > 0 , b > 0$ ។

កំនត់ **a** និង **b** ដើម្បីឲ្យត្រីកោណ **OPQ** មានក្រឡាផ្ទៃអប្បបរមា

១១-ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(0,\vec{i},\vec{j})$ គេមានចំនុច $P(x,y)$ មួយ

ដែល $x>0, y>0$ ។K និង L ជាចំណោលកែងនៃចំនុច P

លើអក្ស័រៀងគ្នា (ox) និង (oy) ។

ក.កំនត់សំណុំចំនុច P ដើម្បីឲ្យបរិមាត្រត្រីកោណ KPL

ស្មើនឹង 12cm ។

ខ.សន្មត់ថាបរិមាត្រត្រីកោណ KPL ស្មើនឹង 12cm ។

កំនត់ទីតាំងចំនុ P ដើម្បីឲ្យត្រីកោណKPL មានក្រឡាផ្ទៃអតិបរមា ។

១២-គេចង់ធ្វើអាងទឹកមួយគ្មានគំរបរាងចតុកោណកែងដែលមានបាត

ខាងក្នុងជាការេ ហើយផ្ទៃខាងសរុបផ្នែកខាងក្នុងអាងស្មើនឹង $108\ m^2$

កំនត់រកវិមាត្ររបស់អាងទឹកនេះដើម្បីឲ្យវាអាចដាក់ទឹកបានច្រើនបំផុត ។

១៣-បង្គោលពីរមួយមានកំពស់4 m និងមួយទៀតមានកំពស់9m ដាក់

បញ្ឈរឃ្លាតពីគ្នា 10m ដើម្បីឲ្យបង្គោលទាំងពីរនៅនឹងគេបានចងខ្សែ

លួសពីរខ្សែភ្ជាប់ទៅនឹងស្នឹងមួយទៅកំពូលបង្គោលនីមួយៗ ។

តើគេត្រូវបោះស្នឹងនៅត្រង់ណាដើម្បីឲ្យប្រើខ្សែលួសអស់តិចបំផុត ។

១៤-កោណមួយមានកំពស់ $15\ cm$ កាំថាសបាត $6\ cm$ ។

គេសង់ស៊ីឡាំងមួយចារិកក្នុងកោណនេះ ។

កំនត់កពស់និងកាំថាសបាត ស៊ីឡាំងដើម្បីឲ្យវាមានមាឌអតិបរមា

១៥-គេឲ្យស្វ៊ែមួយមានកាំ $6\ cm$ ។ គេសង់ស៊ីឡាំងមួយចារិកក្នុងស្វ៊ែនេះ

កំនត់កពស់និងកាំថាសបាតនៃស៊ីឡាំងដើម្បីឲ្យវាមានមាឌអតិបរមា

១៦-គេកាត់ចំរៀកថាសមួយមានមុំផ្ចិត θ ចេញពីរង្វង់មួយមានកាំ

$r = 12\ dm$ ហើយចំរៀកថាសដែលនៅសល់ពីកាត់ គេបានយក

ទៅធ្វើជាកោនមួយ ។

គណនារង្វាស់មុំ θ ដើម្បីឲ្យកោនមានមាឌអតិបរមា ។

១៧-មនុស្សពីរនាក់ស្ថិតនៅចម្ងាយពីគ្នា $100\ km$ រត់សំដៅរកចំនុច O

លើផ្លូវពីរកែងគ្នា ។មនុស្សទីមួយរត់ចេញពីរចំនុច A ដោយល្បឿន

$10\ km/h$ ហើយមនុស្សទីពីររត់ចេញពីចំនុច B ដោយល្បឿន

$12\ km/h$ ។ គេដឹងថា $OA = 60\ km$, $OB = 80\ km$ ។

ចូរគណនាចម្ងាយអប្បបរមានៃមនុស្សទាំងពីរនាក់ ។

១៨-ត្រីកោណ **ABC** មួយមានបរិមាត្រ $15\ cm$ និងមុំ $A = 120^0$ ។

តាង x , y , z ជារង្វាស់ជ្រុងរបស់ត្រីកោណនេះ ។

ចូរកំនត់ x , y , z ដើម្បីឲ្យត្រីកោណ **ABC** ។

មានក្រឡាផ្ទៃអតិបរមា ។

១៩-ប្រលេពីប៉ែតកែងមួយមានវិមាត្រតាងដោយ **a , b , c**

ហើយមានមាឌ $27\ cm^3$ ។

បើគេបន្ថែម **1cm** ទៅលើទ្រនុង **a** ហើយ **1cm** លើទ្រនុង **b**

និង **1 cm** លើទ្រនុង **c** នោះគេបានប្រលេពីប៉ែតកែងមួយទៀត

មានមាឌ **V** ។ កំនត់ **a , b , c** កាលណា **V** មានតម្លៃអប្បបរមា

២០-គេឲ្យពីរចំនួនពិត x និង y ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $x^2 - xy + y^2 = 12$

ចូររកតម្លៃអតិបរមា និង អប្បបរមានៃ $P(x;y) = (x^2 - 2)(y^2 - 2)$

២១-បុរសម្នាក់នៅលើទូកចំងាយ **2 km** ពីចំនុចជិតបំផុត

នៅលើឆ្នេរសមុត្រ ។គាត់បានធ្វើដំណើរឆ្ពោះទៅរកចំនុច **Q**

មួយនៅខាងក្រោមឆ្នេរមានចម្ងាយ **3 km** និង **1 km** ពីមាត់សមុទ្រ

បើគាត់អុំទូកក្នុងល្បឿន $2\ km/h$ និងដើរក្នុងល្បឿន $4km/h$

ចូររកទីតាំងនៅលើឆ្នេរដែលគាត់ត្រូវធ្វើដំណើរឆ្ពោះទៅដល់ចំនុច Q

ដោយប្រើពេលអស់តិចបំផុត ។

២២-ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(0,\vec{i},\vec{j})$ គេឲ្យអេលីប (E)

មានសមីការ $x^2+4y^2=1$ ដែលនៅលើនោះគេមានចំនុច $M_0(x_0, y_0)$

ដែល $x_0>0$, $y_{.0}>0$ ។

គេគូសបន្ទាត់ (L) មួយប៉ះទៅនឹងអេលីបនេះ ។

K និង L ជាចំនុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) ជាមួយអក្ស័រៀងគ្នា

(ox) និង (oy) ។កំនត់ទីតាំងនៃចំនុច M_0 ដើម្បីឲ្យត្រីកោណ OKL

មានក្រឡាផ្ទៃអតិបរមា។

២៣-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x}$ មានខ្សែកោងតំនាង(c)

ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់$(O,\vec{i},\vec{j})$ និង (Δ) ជាបន្ទាត់មានសមីការ

$y=mx-2m+3$ ដែល $m\in IR$ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ក.បើ $m=1$ ចូររកគណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (Δ) ជាមួយខ្សែកោង (c) ។

ខ.បើ $m\neq 1$ ចូរបង្ហាញថាបន្ទាត់ (Δ) កាត់ខ្សែកោង(c) ជានិច្ចត្រង់ពីរ

ចំនុច P និង Q ។

គ.បង្ហាញថាបន្ទាត់ (AP) និង (AQ) កែងនឹងគ្នាជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ m ។

២៤-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2-3x+4}{x-1}$

មានខ្សែកោងតំនាង(c) ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$

ក.ចូររកសមីការបន្ទាត់(T) ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោង(c) ត្រង់ចំនុច A

មានអាប់ស៊ីស $x=2$ ។

ខ.តើបន្ទាត់ (Δ) មានមេគុណប្រាប់ទិស m ត្រូវគូសចេញពីចំនុចណា

ដើម្បីឲ្យកាត់ខ្សែកោង (c) បានពីរចំនុច K និង L ដែលបន្ទាត់ភ្ជាប់ពី

ចំនុច K និង L ទៅចំនុច A កែងនឹងគ្នាជានិច្ចចំពោះគ្រប់តម្លៃ m ។

២៥-គេឲ្យខ្សែកោង (c) មានសមីការ $y = f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{5}{2}$

តើបន្ទាត់ (Δ) មានមេគុណប្រាប់ទិស m ត្រូវគូសចេញពីចំនុចណា

ដើម្បីឲ្យកាត់ខ្សែកោង (c) បានពីរចំនុច K និង L ដែលបន្ទាត់ប៉ះ

(c) ត្រង់ K និង L កែងនឹងគ្នាជានិច្ចចំពោះគ្រប់តម្លៃ m ។

២៦-គេឲ្យខ្សែកោង(c) មានសមីការ $y = \frac{x^2 - (m+1)x + 2m - 1}{x - 2}$

ដែល $m \in IR$ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

បង្ហាញថាខ្សែកោង (c) មានកំពូលពីរជានិច្ចដែលមានចម្ងាយពីគ្នាថេរ

ចំពោះគ្រប់ m ។

២៧-គេឲ្យខ្សែកោង (c_m) តាងអនុគមន៍

$$f(x) = \frac{x^2 - 2(m+1)x + 5m - 1}{x - m}$$

ក.រកលក្ខខណ្ឌសម្រាប់ m ដើម្បីឲ្យខ្សែកោង (c_m) មានអាស៊ីមតូតពីរ

ដែលត្រូវកំនត់ ។

ខ.តាង I ជាចំនុចប្រសព្វរវាងអាស៊ីមតូតទាំងពីរ ។

រកសំណុំចំនុច I កាលណា m ប្រែប្រួល។

គ.បង្ហាញថាមានខ្សែកោងពីរនៃគ្រួសារខ្សែកោង (c_m) ដែលប៉ះនឹង

អក្ស័អាប់ស៊ីស ។

២៨-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(b)=\sum_{k=1}^{n}\left[\ (y_k-ax_k-b\ )^2\ \right]$ ។

ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ $f(b)$ មានតម្លៃអប្បបរមាលុះត្រាតែគេមាន

ទំនាក់ទំនង $\bar{y}=a\bar{x}+b$ ដែល $\bar{x}=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(x_k)}{n}$ និង $\bar{y}=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(y_k)}{n}$ ។

២៩-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\sin x+2\cos x+3}{3\cos x+2}$ ។

ចូររកតម្លៃអតិបរមា និង អប្បរមានៃអនុគមន៍នេះ ។

៣០-គេឲ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{x^2+(m+1)x+2m-1}{x+2}$

ចូរកំនត់តម្លៃរបស់ m ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍នេះមានតម្លៃអតិបរមាស្មើ α

និង មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ β ដែល $\alpha^2+\beta^2=10$ ។

៣២-គេឲ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{x^2-mx+3}{x-2}$

ចូរកំនត់តម្លៃរបស់ m ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍នេះមានតម្លៃអតិបរមាស្មើ α និង មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ β ដែល $|\alpha-\beta|=4$ ។

៣៣-គេមានអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+4}{x^2+1}$

កំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានចំនុចបរមាតែមួយគត់ និង មានបន្ទាត់ $y=2$ ជាអាស៊ីតូតឈរ ។

៣៤-គេឲ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2-3x+3}$

ដោយមិនប្រើដេរីវេចូរកំនត់រកតម្លៃអតិបរមានិងអប្បបរមានៃអនុគមន៍

៣៥-គេឲ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+1}$

ចូររកលក្ខខ័ណ្ឌនៃ a និង b ដើម្បីឲ្យខ្សែកោង (c) តាងអនុគមន៍ $f(x)$ កាត់អក្សអាប់ស៊ីសបានពីរចំនុចដែលបន្ទាត់ប៉ះវាត្រង់ពីរចំនុចនោះកែងនឹងគ្នា ។

៣៦-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3+2}{x^2+1}$

កំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យខ្សែកោង (c) តាងអនុគមន៍ $f(x)$

កាត់អក្ស័អាប់ស៊ីសបានបីចំនុចផ្សេងគ្នាដែលមានអាប់ស៊ីសវិជ្ជមាន ។

៣៧-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$

ចូរកំនត់បួនចំនួនពិត a , b , c , d ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍នេះមានតម្លៃ

អប្បបរមា $f(3)=3$ និងមានបន្ទាត់ $y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

៣៨-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+2}{x^2+2x+4}$ កំនត់ a ,b , c ដើម្បីឲ្យ $f(x)$

ជាអនុគមន៍ថេរ ។

៣៩-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x}$ មានខ្សែកោង (c) និងបន្ទាត់

$(d):\ y=mx+2\sqrt{3}$ ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ។

ក-កំនត់វ៉ង់របស m ដើម្បីឲ្យ (d) កាត់ (c) បានពីរចំនុច A និង B ។

ខ-កំនត់តម្លៃm ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ប៉ះ(c) ត្រង់ចំនុច A និង B កែងនឹងគ្នា ។

៤០-គេឲ្យខ្សែកោង $(c): y = x^2 - 2x + 3$ និងចំនុច $A(6, 1)$ ។

ចូររកចំនុចទាំងអស់នៅលើខ្សែកោង (c) ដែលមានចំងាយខ្លីបំផុតទៅ

ចំនុច A ។

៤១-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{x^2}$ មានខ្សែកោង (c) ។

ចូរសរសេរសមីការរង្វង់ផ្ចិត O ដែលប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង (c) ខាងលើ

៤២-គេឲ្យខ្សែកោង $(c): y = x^2$ និងបន្ទាត់ $(d): 4x - y - 21 = 0$

កំនត់រកកូអរដោនេនៃចំនុចទាំងអស់នៅលើខ្សែកោង(c) ដែលមាន

ចំងាយខ្លីបំផុតទៅបន្ទាត់ (d) ។

៤៣-គេឲ្យខ្សែកោង $(c): y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$ និងបន្ទាត់ $(d): y = ax + b$

កំនត់ a និង b ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ (d) កាត់ខ្សែកោង (c) បានពីរចំនុច A

និង B ឆ្លុះគ្នាធៀបទៅនឹងបន្ទាត់ពុះទីមួយនៃអក្ស័កូអរដោនេ ។

៤៤-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x}$ មានខ្សែកោង (c) ។

A និង B ជាចំនុចពីរនៅលើ (c) មានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា $\frac{1}{2}$ និង 2

រកចំនុចទាំងអស់នៅលើខ្សែកោង (c) ដែលបន្ទាត់ប៉ះវាត្រង់ចំនុចទាំង

នោះស្របនឹងបន្ទាត់(AB) ។

៤៥-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ មានខ្សែកោង (c) ហើយ A និង B

ជាចំនុចពីរមានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា a និង b ដែល $0<a<b$ ស្ថិតនៅ

លើខ្សែកាងនេះ។ ចូរស្រាយថាមានចំនួនពិត c ជានិច្ចស្ថិតនៅចន្លោះ

ចំនួន a និង b ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $f(b)-f(a)=f'(c)\,(b-a)$ ។

៤៦-គេឲ្យខ្សែកោង $y=x^2+2x+2$ ហើយ A និង B ជាចំនុចពីរមាន

អាប់ស៊ីសរៀងគ្នា a និង b ស្ថិតនៅលើខ្សែកាងនេះ។

ចូរបំណកស្រាយតាមបែបធរណីមាត្រថា ៖

$f(b)-f(a)=(b-a).f'(\frac{a+b}{2})$ ។

៤៧-ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{af(x)-x\,f(a)}{x-a}=af'(a)-f(a)$ ។

៤៨-ចូរស្រាយថា $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(x+h)-f^2(x-h)}{h}=4f'(x)f(x)$ ។

៤៩-ចូរស្រាយថា $f''(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{(\Delta x)^2}$ ។

៥០-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=e^{ax}+e^{bx}$ ដែល $a,b\in IR$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឲ្យ $f''(x)+f'(x)=2f(x)$ ចំពោះគ្រប់ x

៥១-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=e^{2x}+e^{3x}$ ។

បង្ហាញថា $f''(x)-5f'(x)+6f(x)=0$ ចំពោះគ្រប់ x ។

៥២-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=(\sin 2x+\cos 2x)e^{x}$ ។

បង្ហាញថា $f''(x)-2f'(x)+5f(x)=0$ ចំពោះគ្រប់ x ។

៥៣-ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $y=f(x)$ បើគេដឹងថា ៖

$f'(0)=f(0)=1$ និង $\dfrac{1}{2x-1}f''(x)-\dfrac{2}{(2x-1)^2}f'(x)=6x^2-4x$

៥៤-ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $y=f(x)$ បើគេដឹងថា ៖

$f(0)=2$ និង $f'(x)f^2(x)=x^2-4x+1$

៥៥-ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $y=f(x)$ បើគេដឹងថា ៖

$f(1)=4$ និង $2x\,f(x)+(x^2+1)\,f'(x)=4x^3+3x^2+2x+1$

៥៦-ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $y=f(x)$ បើគេដឹងថា ៖

$f(1)=2$ និង $xf'(x)+2f(x)=4x^2+9x$

៥៧-គេឲ្យអនុគមន៍ f កំនត់ជាប់ និង មានដេរីវេលើ IR

ដែលចំពោះគ្រប់ $x,y\in IR$ គេមាន $f(x+y)=f(x)f(y)$

និង $f'(0)=4$ ។ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

៥៨-ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើ IR បើគេដឹងថា

$\forall x\in IR, y\in IR$ គេមាន $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{f(x)f(y)}$ ។

៥៩-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^3-6x^2+12x$ កំនត់លើ IR

ក-ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ f^{-1} ជាអនុគមន៍ច្រាស់នៃអនុគមន៍ f

ខ-ចូរគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ និង $f^{-1}(x)$ ។

៦០-គេមានអនុគមន៍ f កំនត់និងមានដេរូវេលើ IR ដែលចំពោះ

គ្រប់ $x\in IR$ គេមានទំនាក់ទំនង $f'(x)=2xf(x)$ ហើយ $f(0)=1$ ។

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

៦១-គេឲ្យអនុគមន៍ f និង g មានដេរីវេលើ IR ដែលចំពោះគ្រប់

$x\in IR$ គេមានទំនាក់ទំនង $f'(x)\,f^2(x)=g'(x)g^2(x)$ ។

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង f និង g ។

៦២-គេឲ្យអនុគមន៍ f កំនត់លើ IR ដោយ $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$

ក-បង្ហាញថា f មានដេរីវេលើ IR និង $2\sqrt{1+x^2}.f'(x)=f(x)$

ខ-ទាញបញ្ជាក់ថាដេរីវេ f'' ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$4(1+x^2)f''(x)+4xf'(x)=f(x)$ ។

៦៣-គេឲ្យអនុគមន៍ $f:x\to\sqrt{x+2}$ កំនត់លើ $[-2,+\infty)$ ។

ដោយអនុវត្តន៍វិសមភាពកំនើនមានកំនត់ទៅនឹងអនុគមន៍ f

លើចន្លោះ $[-1\,,\,2\,]$ ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\le\sqrt{x+2}\le\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ ។

៦៤-គេឲ្យអនុគមន៍ f កំនត់លើ $[\,0\,,2]$ ដោយ $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$

ក/សិក្សាទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

ខ/បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x\in[0\,,2]:\dfrac{1}{7}\le\dfrac{1}{x^2+x+1}\le 1$ ។

គ/គេឲ្យ g និង h ជាពីរអនុគមន៍កំនត់លើ $[0\,,2]$ ដោយ ៖

$g(x)=f(x)-\left(-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}\right)$ និង $h(x)=f(x)-\left(-\dfrac{3}{7}x+1\right)$ ។

ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ g និង h ។

ឃ/ទាញបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ ៖

$$x\in[0,2]:-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\le f(x)\le-\frac{3}{7}x+1$$

៦៥-បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ដែល $0\le a<b<\dfrac{\pi}{2}$

គេបាន $\dfrac{b-a}{\cos^2 a}\le\tan b-\tan a\le\dfrac{b-a}{\cos^2 b}$

រួចទាញរកតម្លៃអមនៃ $\tan(0,6)$ ។

៦៦-បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ដែល $0 < a \le b$ គេបាន

$\frac{b-a}{b} \le \ln(\frac{b}{a}) \le \frac{b-a}{a}$ រួចទាញរកតម្លៃអមនៃ $\ln(11)$ ។

(គេឲ្យ $\ln 10 = 2.30$)

៦៧-ក/ចូរស្រាយថា $\forall n \in IN$: $\frac{1}{n+1} \le \ln(n+1) - \ln(n) \le \frac{1}{n}$ ។

ខ/គេតាង $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\dots\dots\dots + \frac{1}{n}$ ។

ចូររកកន្សោមអមនៃ U_n រួចទាញថា $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ ។

៦៨-ក/ចំពោះគ្រប់ $k \in IN$ ចូរស្រាយថា៖

$$\frac{1}{2\sqrt{1+k}} \le \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \le \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

ខ/រកកន្សោមអមនៃ $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}})$

រួចទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$ ។

៦៩-ក/បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ដែល $0 \le a < b \le \frac{\pi}{2}$

គេបាន $(b-a)\cos b \le \sin b - \sin a \le (b-a)\cos a$ ។

ខ/រកកន្សោមអមនៃ ៖

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{2\pi}{2n+1} + ... + \cos\frac{n\pi}{2n+1}\right)$$

រួចទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$ ។

៧០-គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2(x-3)}$ មានក្រាបតំនាង (c) ។

ក. ចូររក $\lim_{x\to 3^-} f(x)$, $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to\infty} f(x)$ រួចទាញបញ្ជាក់

សមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (c) ។

ខ. ចូររកបីចំនួនពិត a ,b និង c ដើម្បីឱ្យ $f(x) = ax + b + \frac{c}{2(x-3)}$

ចំពោះគ្រប់ $x \ne 3$ ។

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប $(c): y = f(x)$ ។

គ. ចូររកដេរីវេ $y' = f'(x)$ ។ ចូរគូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

ឃ. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនុច $\Omega(3\ ,\frac{5}{2})$ ជាផ្ចិតបម្លែងឆ្លុះនៃក្រាប(c)

ង. ក្រាប (c) តំនាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ កាត់អក្ស័អាប់ស៊ីស (x'0x)

ត្រង់ពីរចំនុច A និង B ។

ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់(T_1) និង(T_2) ដែលប៉ះនឹងខ្សែកោង(c)

ត្រង់ចំនុច A និង B ។

ច. ចូរគណនាតម្លៃ $f(-2)$,$f(4)$ និង $f(6)$ ។

ចូរគូសក្រាប (c) ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(0,\vec{i},\vec{j})$ ។

៧១-គេមានអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{4x-4}{x^2-2x-3}$ មានក្រាបតំនាង (c) ។

ក. ចូររកលីមីត $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

និង $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ រួចទាញបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (c) ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ $y=f(x)$ ។

គ. ខ្សែកោង (c) កាត់អក្ស័អាប់ស៊ីស (x'0x) ត្រង់ចំនុច I ។

ចូរបង្ហាញថា I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (c) ។

ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង (c) ត្រង់ចំនុចរបត់ I ។

ឃ. ចូរសង់ក្រាប (c) តំនាងអនុគមន៍ $y = f(x)$ និង បន្ទាត់ (T) ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ ។

ង. ដោយប្រើខ្សែកោង (c) ចូរពិភាក្សាតាមតម្លៃ m នូវអត្ថិភាពនៃឫសរបស់សមីការ

$(E)\ :\ mx^2 - 2(m+2)x - 3m + 4 = 0$ ។ (m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ) ។

៧២-គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x^2 + 4x + 3}$ មានក្រាបតំនាង (c) ។

ក. ចូររកលីមីត $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ និង $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ រួចទាញបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (c) ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ $y = f(x)$ ។

គ. ចូរបង្ហាញថាបន្ទាត់សមីការ $x = -2$ ជាអក្ស័ឆ្លុះនៃក្រាប(c) ។

ឃ. សង់ក្រាប (c) តំនាង $y = f(x)$ ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់$(0, \vec{i}, \vec{j})$

៧៣-គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{x^2 + 4x - 4}{x^2}$ ។

ក. គណនាលីមីត $\lim_{x \to 0} f(x)$ និង $\lim_{x \to \infty} f(x)$ រួចទាញបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (c) តំនាង f ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. ចូរបង្ហាញថាខ្សែកោង (c) មានចំនុចរបត់ I មួយដែលគេនឹងបញ្ជាក់កូអរដោនេ ។

ឃ.ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង (c) ត្រង់ចំនុចរបត់ I ។

ង. ចូរសង់ក្រាប (c) តំនាងអនុគមន៍ $y = f(x)$ និង បន្ទាត់ (T) ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(0, \vec{i}, \vec{j})$ ។

៧៤-គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x + 3}$ មានក្រាបតំនាង (c) ។

ក. ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍ f(x) កំនត់ជានិច្ចលើ IR ។

គណនា $\lim_{x \to \infty} f(x)$ រួចបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (c)

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. សង់ក្រាប (c) តាងអនុគមន៍ f ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(0,\vec{i},\vec{j})$

ឃ.ដោយប្រើខ្សែកោង (c) ចូរពិភាក្សាតាមតម្លៃ m នូវអត្ថិភាពនៃ

ឫសរបស់សមីការ $(E)\ :\ (m-2)x^2-(3m-5)x+3m-4=0$ ។

(m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ) ។

៧៥-គេឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{2(x-2)^2}{x^2-4x+3}$ មានក្រាបតំនាង (c) ។

ក. ចូររកលីមីត $\lim\limits_{x\to1}f(x)$,$\lim\limits_{x\to3}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ រួចទាញបញ្ជាក់

សមីការអាសុីមតូតនៃក្រាប (c) ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

គ. ចូរបង្ហាញថាបន្ទាត់មានសមីការ $x=2$ ជាអក្ស័ឆ្លុះនៃក្រាប (c)

ឃ. ចូរសង់ក្រាប (c) តំនាងf តំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(0,\vec{i},\vec{j})$ ។

៧៦-គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 9x - 4}{x^2 - 6x + 9}$

មានក្រាបតំនាង (c) ។

ក. ចូររកលីមីត $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ និង $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ រួចបញ្ជាក់សមីការ

អាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (c) ។

ខ. ស្រាយថាបន្ទាត់ពុះទី១ នៃអក្ស័កូអរដោនេជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ

ក្រាប (c) ។

គ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

ឃ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំនុច A(4 ,0) ជាចំនុចស្ថិតនៅលើក្រាប (c)

រួចរកសមីការនៃបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (c) ត្រង់ A ។

ង. សង់ក្រាប (c) តំនាងអនុគមន៍ f ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(0, \vec{i}, \vec{j})$

៧៧- គេមានអនុគមន៍ $y = f(x) = -x - 1 + \frac{4}{(x-2)^2}$

មានក្រាបតំនាង (c) ។

ក. ចូររកលីមីត $\lim_{x \to 3} f(x)$ និង $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ រួចបញ្ជាក់សមីការ

អាសុីមតូតឈរនៃក្រាប (c) ។

ខ. កំនត់រកសមីការអាសុីមតូតទ្រេតមួយរបស់ក្រាប (c) ។

គ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

ឃ. សង់ក្រាប (c) តំនាងអនុគមន៍ f ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(0, \vec{i}, \vec{j})$

៧៨-គេអោយអនុគមន៍ $y = f(x) = (1-x).e^x - 1$ កំនត់លើ IR ។

ក-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

ទាញបញ្ជាក់សញ្ញានៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ខ-តាង g ជាអនុគមន៍កំនត់លើ IR ដោយ $g(x) = (2-x).e^x + 2 - x$ ។

ចូរគណនាលីមីត $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ និង $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ ។

គ-គណនាដេរីវេ $g'(x)$ រួចកំនត់សញ្ញានៃ $g'(x)$ ។

គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $g(x)$ ។

ឃ-បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d): y = 2 - x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

តាង f កាលណា $x \to -\infty$ ។

ចូរបញ្ជាក់ទីតាំងធៀបរវាងបន្ទាត់ (d) ជាមួយខ្សែកោង (C) ។

ង-រកសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹង (C) ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ (d) ។

ច-កំនត់កូអរដោនេចំនុចរបត់ I របស់ខ្សែកោង (C) ។

ឆ-ចូរសង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (T) ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

៧៩-គេអោយអនុគមន៍ $y = f(x) = (1-x).e^{2x}$ កំនត់លើ IR ។

ក-ចូរគណនាលីមីត $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ រួចបញ្ជាក់សមីការ

អាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C) តាង $f(x)$ ។

ខ- គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

គ- កំនត់កូអរដោនេចំនុចរបត់ I របស់ខ្សែកោង (C) ។

ឃ-ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំនុច I ។

ង- ចូរសង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (T) ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$

៨០-គេអោយអនុគមន៍ $y = f(x) = (1-x)\left(e^{2x}+1\right)$ កំនត់លើ IR ។

ក-គណនាលីមីត $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ។

ខ-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ $f'(x)$ ។

គ-កំនត់សញ្ញានៃ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

ឃ-បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d): y = 1-x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C)

តាង $y = f(x)$ កាលណា $x \to -\infty$ ។

ចូរបញ្ជាក់ទីតាំងធៀបរវាងបន្ទាត់ (d) ជាមួយខ្សែកោង (C) ។

ង-រកសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង(C) ហើយស្របនឹងបន្ទាត់(d) ។

ច-កំនត់កូអរដោនេចំនុចរបត់ I របស់ខ្សែកោង (C) ។

ឆ-ចូរសង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (T) ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

៨១-គេអោយអនុគមន៍ $y = f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right).e^{x}$ កំនត់លើ IR ។

ក-ចូរគណនាលីមីត $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ រួចបញ្ជាក់សមីការ

អាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C) តាង $f(x)$ ។

ខ- គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

គ- កំនត់កូអរដោនេចំនុចរបត់ I របស់ខ្សែកោង (C) ។

ឃ-សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង(C) ត្រង់ចំនុច I ។

ង- ចូរសង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (T) ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$

៨២-គេអោយអនុគមន៍ $y=f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$ កំនត់លើ $(0,+\infty)$ ។

ក-គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ រួចបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប(C) តាង $f(x)$ ។

ខ- គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

គ-រកសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹង(C) ត្រង់ចំនុច A មានអាប់ស៊ីស $x=1$ ។

ឃ-រកសង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (T) ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

៨៣-គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=-x+1+x.\ln x$ កំនត់លើ $(0,+\infty)$ ។

ក-គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។

ខ- គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

គ-រកសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹង(C) ត្រង់ចំនុច A មានអាប់ស៊ីស $x=1$

ឃ-ចូរសង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (T) ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

៨៤-គេអោយអនុគមន៍ f កំនត់លើ IR ដោយ $f(x)=\frac{2x+2}{e^{2x}}$ ។

ក/គណនាលីមីត $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ រួចបញ្ជាក់សមីការ

អាស៊ីមតូតនៃក្រាប ។

ខ/គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ/គណនាដេរីវេ $f''(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញានៃ $f''(x)$ ។

កំនត់កូអរដោនេចំនុចរបត់ I នៃខ្សែកោង (C) ។

ឃ/សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំនុច I ។

ង/ចូរសង់ក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (T) ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$

ឥឥឥ✳ឈឈឈ

ឯកសារយោង

១-សៀវភៅគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ (កំរិតមូលដ្ឋាន) របស់

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា (បោះពុម្ពឆ្នាំ២០១១)

២-សៀវភៅគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២ (កំរិតខ្ពស់) របស់

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា (បោះពុម្ពឆ្នាំ២០១១)

៣-Calculus single variable