MATHEMATICAL OLYMPIAD SERIES

១៣៧ លំហាត់

រួមមានទ្រឹស្តីចំនួន ចំនួនបន្សំ និង វិសមភាព

ទ្រឹស្តីចំនួន-វិសមភាព

$$4x^2 - 40[x] + 51 = 0$$

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{C_p^k}{C_q^k} = \frac{p}{q-p+1}$$

សម្រាប់

ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែ

និស្សិតដេប៉ាតឺម៉ង់គណិតវិទ្យា

ត្រៀមប្រឡងអាហារូបករណ៍

និង ការប្រឡងប្រជែងផ្សេងៗ

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ca}{1+c} \geq 3$$

រៀបរៀងដោយ ជា ពិសិដ្ឋ

អារម្ភកថា

ក្នុងការសិក្សាគណិតវិទ្យា ការសិក្សាទៅលើមេរៀននីមួយៗឲ្យបានយល់ច្បាស់ពិតជាមានសារៈសំខាន់ណាស់ ។ លើសពីនេះទៅទៀតការហ្វឹកហាត់នូវលំហាត់ក្នុងមេរៀនទាំងនោះក៏កាន់តែមានសារៈសំខាន់ថែមទៀត ព្រោះថាគន្លឹះមួយចំនួនមិនបានភ្ជាប់មកជាមួយមេរៀនទាំងនោះនោះទេ តែការធ្វើលំហាត់មួយចំនួនទៅវិញទេបានផ្តល់នូវគន្លឹះជាច្រើនសម្រាប់អ្នកសិក្សាស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យា ។

សៀវភៅ **ទ្រឹស្តីចំនួន និង វិសមភាព** នេះត្រូវបានរៀបរៀងដោយការប្រមូលផ្តុំនូវលំហាត់ជាច្រើនដូចជាលំហាត់ធ្លាប់ចេញប្រឡងនានា និង លំហាត់ក្នុងសៀវភៅមួយចំនួនជាដើម ។ សៀវភៅនេះមាន ១៣៧ លំហាត់ រួមមានលំហាត់ទ្រឹស្តីចំនួនចំនួន ៥២លំហាត់ លំហាត់ចំនួនបន្សំចំនួន ២៥ លំហាត់ និង លំហាត់វិសមភាពចំនួន៦០ លំហាត់ ដែលអាចជួយមិត្តអ្នកអានឲ្យយល់កាន់តែច្បាស់ទៅលើផ្នែកទាំងនេះ ។ គួរកត់សម្គាល់ផងដែរថា ទ្រឹស្តីចំនួន និង វិសមភាព គឺជាប្រភេទលំហាត់ដែលពេញនិយមក្នុងការប្រឡងសិស្សពូកែទូទៅទាំងថ្នាក់ជាតិ និង អន្តរជាតិ ហើយវាក៏ជាផ្នែកនៃគណិតវិទ្យាដែលពោរពេញទៅដោយទ្រឹស្តីដ៏សំបូរបែបផងដែរ ។ ពាក្យមួយប្រយោគដែលខ្ញុំបាទចង់ឲ្យប្អូនៗអ្នកសិក្សាទូទៅធ្វើការគិតពិចារណានោះ គឺ ការដើរបានចម្ងាយដ៏ឆ្ងាយមួយពេលខ្លះមិនមានសារៈសំខាន់នោះទេប្រសិនបើគ្មានការសង្កេតឲ្យបានម៉ត់ចត់លើផ្លូវដែលយើងធ្វើដំណើរនោះ ។ ត្រង់ចំណុចនេះខ្ញុំបាទចង់ឲ្យប្អូនៗអ្នកសិក្សាដឹងថាទោះបីជាប្អូនៗបានមើលលំហាត់ច្រើនប៉ុណ្ណាក៏ដោយ ការដែលមិនចេះទាញយកគន្លឹះ រឺ លក្ខណៈទូទៅរបស់លំហាត់ទាំងនោះយកមកប្រើវាជាការបំផ្លាញពេលវេលារបស់យើងជាទីបំផុត ។

ភ្នំពេញ ថ្ងៃទី ២២ ខែសីហា ឆ្នាំ ២០១៤

រៀបរៀងដោយ ជា ពិសិដ្ឋ

ប្រជានលំហាត់

លំហាត់ ១

(USAMO,1972)

បង្ហាញថា $\dfrac{\left[PPCM(a,b,c)\right]^2}{PPCM(a,b)PPCM(b,c)PPCM(c,a)}$

$=\dfrac{\left[PGCD(a,b,c)\right]^2}{PGCD(a,b)PGCD(b,c)PGCD(c,a)}$ ។

លំហាត់ ២

(IMO,2005)

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ ចំពោះ $n \geq 1$ ។

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលបឋមទៅនឹងគ្រប់តួទាំងអស់នៃស្វ៊ីត ។

លំហាត់ ៣

(IMO,1968)

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ x ដែលផលគុណនៃខ្ទង់លេខនីមួយៗរបស់វាក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោលដប់ស្មើនឹង $x^2 - 10x - 22$ ។

លំហាត់ ៤

(AIME 1986)

គេឲ្យចំនួនដែលមានលេខបីខ្ទង់ $\overline{abc}$ ។ កំណត់ $\overline{abc}$ បើគេដឹងថា

$\overline{acb} + \overline{bca} + \overline{bac} + \overline{cab} + \overline{cba} = 3194$ ។

លំហាត់ ៥

(AIME 2001)

ចំនួន N មួយត្រូវបានហៅថា ចំនួន7-10 Double បើលេខតាងឲ្យ N ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល 10 ស្មើនឹងពីរដងលេខតាងឲ្យ N ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល7 ។ ឧទាហរណ៍ 51ជា

ចំនួន 7-10 Double ព្រោះ $51=(102)_7$ ។ កំណត់ចំនួន 7-10 Double ធំបំផុត ។

លំហាត់ ៦

កំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a, b, c, d បើគេដឹងថា

$$\overline{\underbrace{aa\ldots aa}_{n}\underbrace{bb\ldots bb}_{n}\underbrace{cc\ldots cc}_{n}}+1=\left(\overline{\underbrace{dd\ldots dd}_{n}}+1\right)^3$$ ចំពោះគ្រប់ $n\in \mathrm{IN}$ ។

លំហាត់ ៧

ចំនួន Fermat ទី n កំណត់ដោយ $F_n=2^{2^n}+1$ ។

បង្ហាញថា គ្រប់តួទាំងអស់នៃចំនួននេះបឋមនឹងគ្នាពីរៗ ។

លំហាត់ ៨

ចំពោះគ្រប់ $n\in \mathrm{IN}$ គេហៅ $M_n=2^n-1$ ថាជាចំនួន Merssene ។

បង្ហាញថា បើ M_n ជាចំនួនបឋម នោះ n ក៏ជាចំនួនបឋមដែរ ។

លំហាត់ ៩

(IMO,1964)

ក/ កំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដើម្បីឲ្យ 2^n-1 ចែកដាច់នឹង 7 ។

ខ/ បង្ហាញថា 2^n+1 ចែកមិនដាច់នឹង 7 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

លំហាត់ ១០

(Romania,1998)

គេអោយ $A=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{1997\cdot 1998}$ និង

$$B=\frac{1}{1000\cdot 1998}+\frac{1}{1001\cdot 1997}+\ldots+\frac{1}{1998\cdot 1000}$$ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{A}{B}$ ជាចំនួនគត់ ។

លំហាត់ ១១

(JBMO,2004)

គេឲ្យ x , y ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា បើ $3x+4y$ និង $4x+3y$ ជាការេប្រាកដ នោះ x , y សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 7 ។

លំហាត់ ១២

(JBMO,1998)

n ចំនួន $x_1, x_2, \dots, x_n$ ត្រូវបានជ្រើសចេញពី $[2,4]$ ។ បើគេដឹងថា

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{17n}{6}$ និង $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 9n$ ។

បង្ហាញថា n ចែកដាច់នឹង 12 ។

លំហាត់ ១៣

(IMO,1959)

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n បង្ហាញថា $\frac{21n+4}{14n+3}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន ។

លំហាត់ ១៤

គេឲ្យ m , n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល m ជាចំនួនគត់សេស ។ បង្ហាញថា

$PGCD\left(2^n - 1, 2^m + 1\right) = 1$ ។

លំហាត់ ១៥

គេឲ្យ p ជាចំនួនបឋម និង a , b ជាចំនួនគត់ ។ បង្ហាញថា p ចែកដាច់ $ab^p - ba^p$ ។

លំហាត់ ១៦

(IMO,1988)

បើ a , b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $\frac{a^2+b^2}{1+ab}$ ជាចំនួនគត់ បង្ហាញថា $\frac{a^2+b^2}{1+ab}$ ជាការេប្រាកដ ។

លំហាត់ ១៧

គេឲ្យ p ជាចំនួនបឋម និង $p \geq 7$ ។ បង្ហាញថា p ចែកដាច់ $\underbrace{11...11}_{p-1}$ ។

លំហាត់ ១៨

(JBMO,1998)

កំណត់តួចែករួមធំបំផុតនៃ $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$

ចំពោះ $n = 0, 1, \ldots ,1999$ ។

លំហាត់ ១៩

(JBMO,1998)

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំនួន $\underbrace{11...11}_{1997}\underbrace{22...22}_{1998}5$ ជាការេប្រាកដ ។

លំហាត់ ២០

ចំពោះគ្រប់ m , $n \in \mathrm{Z}$ បង្ហាញថា $mn\left(m^{60} - n^{60}\right)$ ចែកដាច់នឹង 56786730 ។

លំហាត់ ២១

បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}$ គេបាន

i. $2^{2n+1} + 3^{2n+1} \equiv 0 \pmod{5}$

ii. $4^n - 1 - 3n \equiv 0 \pmod{9}$

iii. $3^{n+3} - 4^{4n+2} \equiv 0 \pmod{11}$

iv. $5^n - 4n - 1 \equiv 0 \pmod{16}$

v. $2^{6n+3}+3^{4n+2}\equiv 0(\bmod 17)$

vi. $2^{7n+1}+3^{2n+1}+5^{10n+1}+7^{6n+1}\equiv(\bmod 17)$

vii. $2^{2n+2}+24n+14\equiv 0(\bmod 18)$

viii. $2^{3n+4}+3^{3n+1}\equiv 0(\bmod 19)$

ix. $2^{2^{6n+2}}+3\equiv 0(\bmod 19)$

x. $2^{4^{n+1}}+5\equiv 0(\bmod 21)$

លំហាត់ ២២

i. $2^{n+2}\cdot 3^{n}+5n-4\equiv 0(\bmod 25)$

ii. $2^{5n+1}+3^{n+3}\equiv 0(\bmod 29)$

iii. $2^{4n+1}+3^{6n+9}\equiv 0(\bmod 31)$

iv. $8n^{2}+4n-3(5^{n}-1)\equiv 0(\bmod 32)$

v. $5^{2n+1}+11^{2n+1}+17^{2n+1}\equiv 0(\bmod 33)$

vi. $5\cdot 7^{2n+2}+2^{3n}\equiv 0(\bmod 41)$

vii. $9^{2n+1}+8^{n+2}\equiv 0(\bmod 73)$

viii. $10^{6n}+10^{3n}-2\equiv 0(\bmod 111)$

ix. $7^{2n+1}-48n-7\equiv 0(\bmod 288)$

x. $7^{2n}-2352n-1\equiv 0(\bmod 2304)$

លំហាត់ ២៣

បើ a និង b ជាពីរចំនួនបឋមនឹងគ្នា ។ បង្ហាញថា $a+b$ និង ab ក៏បឋមនឹងគ្នាដែរ ។

លំហាត់ ២៤

កំណត់គ្រប់គូគត់វិជ្ជមាន (a,b) ដើម្បីឲ្យ $a^{4}+4b^{4}$ ជាចំនួនបឋម ។

លំហាត់ ២៥

គេឲ្យ $PGCD(a,b)=1$ ។ បង្ហាញថា $PGCD(a+b,a^{2}-ab+b^{2})=1$ ឬ 3 ។

លំហាត់ ២៦

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_0 = 1$ និង $a_{n+1} = \dfrac{7a_n + \sqrt{45a_n^2 - 36}}{2}$

ចំពោះ $n = 0, 1, \ldots$ ។

បង្ហាញថា ក/ a_n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

ខ/ $a_n a_{n+1} - 1$ ជាការេប្រាកដ ចំពោះគ្រប់ n ។

លំហាត់ ២៧

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដើម្បីឲ្យ $n^4 - 4n^3 + 22n^2 - 36n + 18$ ជាការេប្រាកដ ។

លំហាត់ ២៨

កំណត់គ្រប់គូគត់វិជ្ជមាន (a,b) ដើម្បីឲ្យ $\dfrac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

លំហាត់ ២៩

(Korea,1998)

កំណត់ l , m , n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នាពីរៗ ដើម្បីឲ្យ

$(l + m + n)\left(\dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)$ ជាចំនួនគត់ ។

លំហាត់ ៣០

(JBMO,2008)

កំណត់គ្រប់ចំនួនបឋម p , q , r ដើម្បីឲ្យ $\dfrac{p}{q} - \dfrac{4}{r+1} = 1$ ។

លំហាត់ ៣១

បង្ហាញថា គ្រប់ការេប្រាកដទាំងអស់សុទ្ធតែមានរាង $4k$ រឺ $4k + 1$ ។

លំហាត់ ៣២

(JBMO,2007)

បង្ហាញថា បើ p ជាចំនួនបឋម នោះ $7p+3^p-4$ មិនមែនជាការេប្រាកដ ។

លំហាត់ ៣៣

(IMO,1984)

ចូរឲ្យឧទាហរណ៍ចំនួនគត់វិជ្ជមាន (a,b) មួយដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម

ក/ $ab(a+b)$ ចែកមិនដាច់នឹង 7

ខ/ $(a+b)^7-a^7-b^7$ ចែកដាច់នឹង 7^7 ។

លំហាត់ ៣៤

(JBMO,1997)

គេឲ្យ $n_1, n_2, \dots, n_{1998}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $n_1^2+n_2^2+\dots+n_{1997}^2=n_{1998}^2$ ។ បង្ហាញថា ក្នុងចំណោមចំនួនទាំងអស់មានយ៉ាងតិចពីរជាចំនួនគូ ។

លំហាត់ ៣៥

បង្ហាញថា ប្រភាគ $\dfrac{a^3+2a}{a^4+3a^2+1}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបានចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a ។

លំហាត់ ៣៦

គេតាង $[x]$ ជាចំនួនគត់ធំបំផុតតូចជាង រឺស្មើ x និង $\{x\}$ ជាផ្នែកទសភាគនៃ x ដែល $x=\{x\}+[x]$ ។ ឧទាហរណ៍ $[2.63]=2$, $\{2.63\}=0.63$ ។

ក/ បើ $x=\sqrt{2013^2+2014}$ ។ រកតម្លៃនៃ $[x]$ ។

ខ/ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=200 \\ \{x\}+y+[z]=190.1 \\ [x]+\{y\}+z=178.8 \end{cases}$ ។

គ/ ដោះស្រាយសមីការ $4x^2-40[x]+51=0$ ។

លំហាត់ ៣៧

បង្ហាញថា $[x][y]\le[xy]\le[x][y]+[x]+[y]$ចំពោះ x , $y\ge 0$ ។

លំហាត់ ៣៨

គេឲ្យ $n\in \mathrm{IN}$ និង $x\in \mathrm{IR}^*$ ។ បង្ហាញថា ចំនួនពហុគុណវិជ្ជមាននៃ n ដែលតូចជាង រឺ ស្មើនឹង x មានចំនួន $\left[\dfrac{x}{n}\right]$ ។

លំហាត់ ៣៩

គេអោយ α , $\beta\in \mathrm{IR}$, $a\in \mathrm{Z}$ និង $n\in \mathrm{IN}$ ។ បង្ហាញថា

ក/ $[\alpha+a]=[\alpha]+a$

ខ/ $\left[\dfrac{\alpha}{n}\right]=\left[\dfrac{[\alpha]}{n}\right]$

គ/ $[\alpha]+[\beta]\le[\alpha+\beta]\le[\alpha]+[\beta]+1$

ឃ/ $[\alpha]+[\beta]+[\alpha+\beta]\le[2\alpha]+[2\beta]$ ។

លំហាត់ ៤០

ក/ បង្ហាញថា $[x]+[-x]=\begin{cases} 0 \text{ បើ } x\in \mathrm{Z} \\ -1 \text{ បើ } x\in \mathrm{IR}-\mathrm{Z} \end{cases}$ ។

ខ/ បង្ហាញថា $\{x\}+\{-x\}=\begin{cases} 0 \text{ បើ } x\in \mathrm{Z} \\ 1 \text{ បើ } x\in \mathrm{IR}-\mathrm{Z} \end{cases}$ ។

លំហាត់ ៤១

បង្ហាញថា ក/ $0 \le [2x] - 2[x] \le 1$

ខ/ $-1 \le \{2x\} - 2\{x\} \le 0$ ។

លំហាត់ ៤២

បង្ហាញថា $\sum_{k=1}^{n}[\log_2 k] = (n+1)[\log_2 n] - 2^{[\log_2 n]+1} + 2$ ។

លំហាត់ ៤៣

គណនា $\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k}\right]$ ជាអនុគមន៍នៃ $N = [n]$ ។

លំហាត់ ៤៤

បង្ហាញថា $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right]$ ។

លំហាត់ ៤៥

បង្ហាញថា $\left[\sqrt[n]{x}\right] = \left[\sqrt[n]{[x]}\right]$ ចំពោះគ្រប់ $x \ge 0$ ។

លំហាត់ ៤៦

គេឲ្យ $m, n \in Z$ ។ គណនា $\left[\dfrac{m+n}{2}\right] + \left[\dfrac{m-n+1}{2}\right]$ ។

លំហាត់ ៤៧

បើ a, b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិបឋមរវាងគ្នា បង្ហាញថា

$$\sum_{k=1}^{a-1}\left[\frac{kb}{a}\right] = \sum_{k=1}^{b-1}\left[\frac{ka}{b}\right] = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$$ ។

លំហាត់ ៤៨

យក x ជាចំនួនពិត, n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ បង្ហាញថា

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$$ ។

(សមភាព Hermite)

អនុវត្តន៍

បង្ហាញថា

ក/ $\{x\}+\left\{x+\frac{1}{n}\right\}+\left\{x+\frac{2}{n}\right\}+\ldots+\left\{x+\frac{n-1}{n}\right\}=\{nx\}+\frac{n-1}{2}$

ខ/ $\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right]=[x]$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

(IMO 1968)

លំហាត់ ៤៩

គណនា $[A]$ បើគេដឹងថា៖ $A=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{10^6}}$ ។

លំហាត់ ៥០

គេអោយ r ជាចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$\left[r+\frac{19}{100}\right]+\left[r+\frac{20}{100}\right]+\left[r+\frac{21}{100}\right]+\ldots+\left[r+\frac{91}{100}\right]=546$ ។

គណនា $[100r]$ ។

(AIME,1991)

លំហាត់ ៥១

ដោះស្រាយក្នុង IR សមីការ $[x[x]]=1$ ។

លំហាត់ ៥២

តើសមីការ $[x]+[2x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$ មានរឹសដែរ រឺ ទេ ?

លំហាត់ ៥៣

គេអោយ $n\in \mathrm{IN}$ ដែល $n\geq 4$ ។ បង្ហាញថា $C_{C_n^2}^2=3C_{n+1}^4$ ។

លំហាត់ ៥៤

បង្ហាញថា ចំពោះ $\forall(n,p,q)\in \mathrm{IN}^3$ ដែល $p\geq n+q+1$គេបាន

$\sum_{k=0}^{n} C_{p-k}^{q} = C_{p+1}^{q+1} - C_{p-n}^{q+1}$ ។

លំហាត់ ៥៥

(ចិនដេលី, 2013)

បើ $4\leq k\leq n$ បង្ហាញថា $C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k$ ។

លំហាត់ ៥៦

បង្ហាញថា $C_{n+1}^{a+1} \geq 2C_n^a\sqrt{\dfrac{n-a}{a+1}}$ ។

លំហាត់ ៥៧

ចំពោះគ្រប់ $(p,q)\in \mathrm{IN}^2$ ដែល $1\leq p\leq q$ គណនា $\sum_{k=1}^{p}\dfrac{C_p^k}{C_q^k}$ ។

លំហាត់ ៥៨

(សមភាព Vandermonde)

គេអោយបីចំនួនគត់ k,m,n ដែល $0\leq m\leq k\leq n$ ។ បង្ហាញថា

$C_m^0C_n^k + C_m^1C_n^{k-1} + C_m^2C_n^{k-2} + \ldots + C_m^mC_n^{k-m} = C_{m+n}^k$ ។

លំហាត់ ៥៩

គេអោយ a,b,r ជាចំនួនគត់ដែល $0\leq r\leq a\leq b$ ។ បង្ហាញថា

$C_{2a}^aC_{2b}^b \geq \left(C_{a+b}^r\right)^2$ ។

លំហាត់ ៦០

បង្ហាញថា ចំពោះ $\forall (n, p) \in (\mathrm{IN}^*)^2$ គេបាន $\sum_{k=0}^{q-1}(p-2k)C_p^k = qC_p^q$ ។

លំហាត់ ៦១

គណនា $\sum_{k=0}^{n}(k+1)\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k}$ ចំពោះ $n \in \mathrm{IN}^*$ ។

លំហាត់ ៦២

គេតាង $P_n = \prod_{k=0}^{n} C_n^k$ ។ បង្ហាញថា $\forall n \in \mathrm{IN}^*$ គេបាន $\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{n^n}{n!}$ ។

លំហាត់ ៦៣

ចំពោះ $\forall (n, p) \in (\mathrm{IN}^*)^2$ ចូរគណនា $\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=0}^{p-1}(i+j)\right)$ ។

លំហាត់ ៦៤

ចំពោះ $\forall (n, p) \in (\mathrm{IN})^2$ ដែល $n \geq p$ ។

បង្ហាញថា $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k C_k^p = 1$ បើ $n = p$

$= 0$ បើ $n > p$

លំហាត់ ៦៥

ចំពោះ $\forall (n, p) \in (\mathrm{IN}^*)^2$ ដែល $n > p$ ។ ដោះស្រាយក្នុង IN នូវសមីការ

$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-x}^{p-x}$ ។

លំហាត់ ៦៦

(សមភាព Hockeystick)

បង្ហាញថា $\sum_{k=0}^{r} C_{n+k}^{k} = C_{n+r+1}^{r}$ ។

លំហាត់ ៦៧

(សមភាព Hexagon)

បង្ហាញថា $C_{n-1}^{k-1} C_{n}^{k+1} C_{n+1}^{k} = C_{n-1}^{k} C_{n}^{k-1} C_{n+1}^{k+1}$ ។

លំហាត់ ៦៨

គេអោយ p,q,r,b,c ជាប្រាំចំនួនមិនសូន្យ និង ខុសៗគ្នា ។ គណនា $x+y+z$

បើគេដឹងថា $\begin{cases} \dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{p-b}+\dfrac{z}{p-c}=1 \\ \dfrac{x}{q}+\dfrac{y}{q-b}+\dfrac{z}{q-c}=1 \\ \dfrac{x}{r}+\dfrac{y}{r-b}+\dfrac{z}{r-c}=1 \end{cases}$ (*)។

លំហាត់ ៦៩

បង្ហាញថា ចំពោះ $\forall(n,p,q)\in \mathrm{IN}^3$ គេបាន

$\sum_{k=0}^{n}(n-k)C_{p}^{n-k}C_{q}^{k} = \dfrac{np}{p+q}C_{p+q}^{n}$ ។

លំហាត់ ៧០

(កម្ពុជា,2009)

គេតាង $n! = n\times(n-1)\times\ldots\times 2\times 1$ ។ បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន

n គេបាន

$$1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+\ldots+\frac{(2009)(2010)\ldots(2009+n-1)}{n!}$$
$$=\frac{(2010)(2011)\ldots(2009+n)}{n!}$$ ។

លំហាត់ ៧១

(ភ្នំពេញ,2006)

ក្នុងទ្វេធា Newton $\left(x\sqrt[3]{x}+x^{-\frac{28}{15}}\right)^n$ ចូររកតួមិនអាស្រ័យនៃ x ដោយដឹងថា

$C_n^n+C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=79$ ។

លំហាត់ ៧២

ដោយមិនពន្លាត រកមេគុណធំបំផុតនៃពន្លាត $(3x+5)^{10}$ ។

លំហាត់ ៧៣

គណនាផលបូកមេគុណរបស់ពហុធាដែលជាពន្លាតនៃ

$$\left(1-3x+3x^2\right)^{743}\left(1+3x-3x^2\right)^{744}$$ ។

លំហាត់ ៧៤

គណនាមេគុណនៃ x^{50} នៃពហុធា

ក/ $(1+x)^{1000}+x(1+x)^{999}+x^2(1+x)^{998}+\ldots+x^{1000}$

ខ/ $(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3+\ldots+1000(1+x)^{1000}$ ។

លំហាត់ ៧៥

គណនាមេគុណនៃ x^2 នៃពន្លាត $\underbrace{\left(\ldots\left(\left((x-2)^2-2\right)^2-2\right)^2-\ldots-2\right)^2}_{n\ \text{ដង}}$ ។

លំហាត់ ៧៦

(AIME 1986)

ពហុធា $1-x+x^2-x^3+\ldots+x^{16}-x^{17}$ ត្រូវបានបំលែងក្រោមទម្រង់

$a_0+a_1y+a_2y^2+\ldots+a_{16}y^{16}+a_{17}y^{17}$ ក្នុងនោះ $y=x+1$

និង a_i ជាចំនួនថេរ, $i=\overline{1,n}$ ។ គណនា a_2 ។

លំហាត់ ៧៧

គណនា $S_n = nC_{n-1}^0+\frac{n}{2}C_{n-1}^1+\ldots+\frac{n}{n}C_{n-1}^{n-1}$ ។

លំហាត់ ៧៨

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $abc=1$ ។ បង្ហាញថា

$$a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\geq 6+2\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)$$ ។

លំហាត់ ៧៩

គេឲ្យ a , b , c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=3$ ។

កំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃ $a^2+b^2+c^2+\frac{4abc}{3}$ ។

លំហាត់ ៨០

គេឲ្យ α , β ជាមុំស្រួច ។ កំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ $\frac{\left(1-\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}\right)^2}{\cot\alpha+\cot\beta}$ ។

លំហាត់ ៨១

គេឲ្យ $0<x_1<x_2<\ldots<x_9<\ldots<x_{12}$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_9}{x_3+x_6+x_9}+\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{12}}{x_4+x_8+x_{12}}<7$$ ។

លំហាត់ ៨២

គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2$ ។

លំហាត់ ៨៣

គេឲ្យ $a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ ។

បង្ហាញថា $\forall n\in \mathrm{IN}$ គេបាន $\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{2a_2^2}+\ldots+\frac{1}{na_n^2}<2$ ។

លំហាត់ ៨៤

គេឲ្យ x , y , z ជាចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា $x^4 + y^4 + z^4 \ge 4xyz - 1$ ។

លំហាត់ ៨៥

ចំពោះគ្រប់ x ជាចំនួនពិត បង្ហាញថា $x^{2002} - x^{1999} + x^{1996} - x^{1995} + 1 > 0$ ។

លំហាត់ ៨៦

គេឲ្យ x , y ជាចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា $3(x+y+1)^2 + 1 \ge 3xy$ ។

លំហាត់ ៨៧

a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a + b + c \ge abc$ ។

បង្ហាញថា យ៉ាងហោចណាស់ពីរក្នុងចំណោមវិសមភាពទាំងបីខាងក្រោមពិត

$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{6}{c} \ge 6$, $\frac{2}{b} + \frac{3}{c} + \frac{6}{a} \ge 6$, $\frac{2}{c} + \frac{3}{a} + \frac{6}{b} \ge 6$ ។

លំហាត់ ៨៨

គេឲ្យ a , b , c , x , y , $z > 0$ ។

បង្ហាញថា $\frac{ax}{a+x} + \frac{by}{b+y} + \frac{cz}{c+z} \le \frac{(a+b+c)(x+y+z)}{a+b+c+x+y+z}$ ។

លំហាត់ ៨៩

ចំពោះ a , b , $c > 0$ បង្ហាញថា

$$\frac{2a}{a^2 + bc} + \frac{2b}{b^2 + ac} + \frac{2c}{c^2 + ab} \le \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$$ ។

លំហាត់ ៩០

គេឲ្យ a , b , c , x , y , $z > 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a + x = b + y = c + z = 1$ ។

បង្ហាញថា $(abc + xyz)\left(\frac{1}{ay} + \frac{1}{bz} + \frac{1}{cx}\right) \ge 3$ ។

លំហាត់ ៩១

គេឲ្យ $a_1 , a_2 , \dots , a_n$ ជា n ចំនួនពិតវិជ្ជមាន ហើយ $b_1 , b_2 , \dots , b_n$ ជាចម្លាស់មួយរបស់វា ។ បង្ហាញថា $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \ge \sum_{i=1}^{n} a_i$ ។

លំហាត់ ៩២

បើ $x > 0$ កំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃ $\frac{x^2+1}{x+1}$ ។

លំហាត់ ៩៣

គេឲ្យ $a , b , c > 0$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $abc = 1$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \ge \frac{3}{4}$$ ។

លំហាត់ ៩៤

គេឲ្យ $x , y \ge 0$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $y(y+1) \le (x+1)^2$ ។

បង្ហាញថា $y(y-1) \le x^2$ ។

លំហាត់ ៩៥

ចំពោះ $x , y > 0$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x^3 + y^3 \le x - y$ ។

បង្ហាញថា $x^2 + y^2 \le 1$ ។

លំហាត់ ៩៦

គេឲ្យ a , b , x , y ជាចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $ay - bx = 1$ ។

បង្ហាញថា $a^2 + b^2 + x^2 + y^2 + ax + by \ge \sqrt{3}$ ។

លំហាត់ ៩៧

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ ។

បង្ហាញថា $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \ge abcd$ ។

លំហាត់ ៩៨

គេឲ្យ x , y ជាពីរចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$4\left(x^9+y^9\right)\geq\left(x^2+y^2\right)\left(x^3+y^3\right)\left(x^4+y^4\right)$ ។

លំហាត់ ៩៩

គេឲ្យ x , y , $z>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $xyz=1$ និង $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq x+y+z$ ។

បង្ហាញថា $\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}\geq x^n+y^n+z^n$ ។

លំហាត់ ១០០

គេឲ្យ x , y , $z\neq 1$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $xyz=1$ ។ បង្ហាញថា

$\left(\frac{3-x}{1-x}\right)^2+\left(\frac{3-y}{1-y}\right)^2+\left(\frac{3-z}{1-z}\right)^2>7$ ។

លំហាត់ ១០១

គេឲ្យ x , y , $z\leq 1$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $x+y+z=1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\leq\frac{27}{10}$ ។

លំហាត់ ១០២

គេឲ្យ a , b , $c\geq 0$ ។

បង្ហាញថា $9(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$ ។

លំហាត់ ១០៣

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា

$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\geq 3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)$ ។

លំហាត់ ១០៤

គេឲ្យ a, b, c បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a^2+b^2+c^2=3$ ។

បង្ហាញថា $a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)\le 6$ ។

លំហាត់ ១០៥

ចំពោះ a, b, $c>0$ បង្ហាញថា $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$ ។

លំហាត់ ១០៦

គេឲ្យ a, b, $c>0$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a^2+b^2+c^2=3$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a}{b+2}+\frac{b}{c+2}+\frac{c}{a+2}\le 1$ ។

លំហាត់ ១០៧

គេឲ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្សេងគ្នា ។ បង្ហាញថា

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\ge\frac{4}{xy+yz+zx}$$ ។

លំហាត់ ១០៨

គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$3(a^2-a+1)(b^2-b+1)(c^2-c+1)\ge 1+abc+(abc)^2$$ ។

លំហាត់ ១០៩

គេឲ្យ a, b ជាចំនួនពិត និង a ខុសពីសូន្យ ។ បង្ហាញថា

$$a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a}\ge\sqrt{3}$$ ។

លំហាត់ ១១០

គេឲ្យ a, b, $c>0$ ។ បង្ហាញថា $\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b}\ge 3$ ។

លំហាត់ ១១១

គេឲ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $xy+yz+zx=5$ ។

បង្ហាញថា $3x^2+3y^2+z^2\geq 10$ ។

លំហាត់ ១១២

ចំពោះ a, b, $c>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $ab+bc+ca>a+b+c$ ។

បង្ហាញថា $a+b+c>3$ ។

លំហាត់ ១១៣

គេឲ្យ a, b ជាពីរចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $9a^2+8ab+7b^2\leq 6$ ។

បង្ហាញថា $7a+5b+12ab\leq 9$ ។

លំហាត់ ១១៤

គេឲ្យ x, y, $z>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $xyz\geq xy+yz+zx$ ។

បង្ហាញថា $xyz\geq 3(x+y+z)$ ។

លំហាត់ ១១៥

គេឲ្យ a, b, $c>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2+b^2+c^2=3$ ។

បង្ហាញថា $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq 3$ ។

លំហាត់ ១១៦

គេឲ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=\sqrt{abc}$ ។

បង្ហាញថា $ab+bc+ca\geq 9(a+b+c)$ ។

លំហាត់ ១១៧

គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc\geq 1$ ។

បង្ហាញថា $\left(a+\frac{1}{a+1}\right)\left(b+\frac{1}{b+1}\right)\left(c+\frac{1}{c+1}\right)\geq\frac{27}{8}$ ។

លំហាត់ ១១៨

គេឲ្យ a , b , c , $d>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2+b^2+c^2+d^2=4$ ។

បង្ហាញថា $a+b+c+d\geq ab+bc+cd+da$ ។

លំហាត់ ១១៩

គេឲ្យ a , b , $c\in(-3,3)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{3+a}+\frac{1}{3+b}+\frac{1}{3+c}$

$=\frac{1}{3-a}+\frac{1}{3-b}+\frac{1}{3-c}$ ។ បង្ហាញថា $\frac{1}{3+a}+\frac{1}{3+b}+\frac{1}{3+c}\geq 1$ ។

លំហាត់ ១២០

គេឲ្យ a , b , $c>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2+b^2+c^2=3$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{1}{a+bc+abc}+\frac{1}{b+ca+bca}+\frac{1}{c+ab+cab}\geq 1$$ ។

លំហាត់ ១២១

គេឲ្យ a , b , $c>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c=3$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a^2b^2+a^2+b^2}{ab+1}+\frac{b^2c^2+b^2+c^2}{bc+1}+\frac{c^2a^2+c^2+a^2}{ca+1}\geq\frac{9}{2}$$ ។

លំហាត់ ១២២

គេឲ្យ a , b , c , d ជាបួនចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$a^2+b^2+c^2+d^2=4$ ។ បង្ហាញថា $\frac{a^2+b^2+3}{a+b}+\frac{b^2+c^2+3}{b+c}$

$$+\frac{c^2+d^2+3}{c+d}+\frac{d^2+a^2+3}{d+a}\geq 10$$ ។

លំហាត់ ១២៣

គេឲ្យ a , b , c , d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{1}{ab(a+b)}+\frac{1}{bc(b+c)}+\frac{1}{ca(c+a)}\geq\frac{9}{2(a^3+b^3+c^3)}$$ ។

លំហាត់ ១២៤

គេឲ្យ $a\,,\,b\,,\,c>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}\geq 1$ ។

បង្ហាញថា $a+b+c\geq\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ ១២៥

គេឲ្យ $a\,,\,b\,,\,c$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $abc=1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$ ។

លំហាត់ ១២៦

គេឲ្យ $x\,,\,y\,,\,z$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $x+y+z=4$ ។

បង្ហាញថា $\frac{1}{2xy+yz+zx}+\frac{1}{xy+2yz+zx}+\frac{1}{xy+yz+2zx}\leq\frac{1}{xyz}$ ។

លំហាត់ ១២៧

យក $a\,,\,b\,,\,c>0$ ។ បង្ហាញថា $abc\geq(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ ។

លំហាត់ ១២៨

គេឲ្យ $a\,,\,b\,,\,c>0$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=3$ ។បង្ហាញថា

$$abc+\frac{12}{ab+bc+ca}\geq 5$$ ។

លំហាត់ ១២៩

គេឲ្យ $a\,,\,b\,,\,c$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc=1$ ។ បង្ហាញថា

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1$$ ។

លំហាត់ ១៣០

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $abc=1$ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{1}{1+a+b}+\dfrac{1}{1+b+c}+\dfrac{1}{1+c+a}\le\dfrac{1}{2+a}+\dfrac{1}{2+b}+\dfrac{1}{2+c}$ ។

លំហាត់ ១៣១

គេឲ្យ a , b , $c>0$ ។ បង្ហាញថា $(a+b)^2+(a+b+4c)^2\ge\dfrac{100abc}{a+b+c}$ ។

លំហាត់ ១៣២

គេឲ្យ a , b , $c>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc=1$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ca}{1+c}\ge 3$$ ។

លំហាត់ ១៣៣

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $ab+bc+ca=1$ ។

បង្ហាញថា $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{c}\right)^2+\left(c+\dfrac{1}{a}\right)^2\ge 16$ ។

លំហាត់ ១៣៤

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc\ge 1$ ។ បង្ហាញថា

$$a+b+c\ge\frac{1+a}{1+b}+\frac{1+b}{1+c}+\frac{1+c}{1+a}$$ ។

លំហាត់ ១៣៥

គេឲ្យ a , $b>0$ ។ បង្ហាញថា

$$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right)\ge\left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right)$$ ។

លំហាត់ ១៣៦

គេឲ្យ $a\,,\,b\,,\,c>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc=1$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le 1$$ ។

លំហាត់ ១៣៧

គេឲ្យ $x\,,\,y\,,\,z>0$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x+y+z=xyz$ ។

បង្ហាញថា $(x-1)(y-1)(z-1)\le 6\sqrt{3}-10$ ។

ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ ១

(USAMO,1972)

បង្ហាញថា $\dfrac{[PPCM(a,b,c)]^2}{PPCM(a,b)PPCM(b,c)PPCM(c,a)}$

$$=\frac{[PGCD(a,b,c)]^2}{PGCD(a,b)PGCD(b,c)PGCD(c,a)}$$ ។

សម្រាយ

យក $a=\prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k}$, $b=\prod_{k=1}^{n} p_k^{\beta_k}$, $c=\prod_{k=1}^{n} p_k^{\gamma_k}$ ដែល p_k ជាចំនួនបឋម

យើងមាន $PPCM(a,b)=\prod_{k=1}^{n} p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}$

$$PPCM(a,b,c)=\prod_{k=1}^{n} p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)}$$

$$PGCD(a,b)=\prod_{k=1}^{n} p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}$$

$$PGCD(a,b,c)=\prod_{k=1}^{n} p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)}$$

ហេតុនេះ $\dfrac{[PPCM(a,b,c)]^2}{PPCM(a,b)PPCM(b,c)PPCM(c,a)}$

$$=\frac{[PGCD(a,b,c)]^2}{PGCD(a,b)PGCD(b,c)PGCD(c,a)}$$

$$\Leftrightarrow 2\max(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)-\max(\alpha_k,\beta_k)-\max(\beta_k,\gamma_k)-\max(\gamma_k,\alpha_k)$$

$$=2\min(\alpha_k,\beta_k,\gamma_k)-\min(\alpha_k,\beta_k)-\min(\beta_k,\gamma_k)-\min(\gamma_k,\alpha_k)$$ (*)

ដោយ (*) ស៊ីមេទ្រីធៀបនឹង α_k , β_k , γ_k

WLOG[1] សន្មតថា $\alpha_k \geq \beta_k \geq \gamma_k$

យើងបាន (*) $\Leftrightarrow 2\alpha_k - \alpha_k - \alpha_k - \beta_k = 2\gamma_k - \beta_k - \gamma_k - \gamma_k$ ពិត

ហេតុនេះ សំណើខាងលើត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

លំហាត់ ២

(IMO,2005)

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$កំណត់ដោយ $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ចំពោះ $n \geq 1$។

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលបឋមទៅនឹងគ្រប់តួទាំងអស់នៃស្វ៊ីត ។

ចម្លើយ

យើងសង្កេតឃើញថា $p = 1$ជាចម្លើយនៃលំហាត់

ឧបមាថា p ជាចំនួនបឋម

បើ $p = 2$ រឺ $3 \Rightarrow p$ចែកដាច់ $a_2 = 2^2 + 3^2 + 6^2 - 1 = 48$

បើ $p \geq 5$ តាមទ្រឹស្តីបទ Fermat យើងបាន $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

$$3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$6^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

យើងបាន $3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} \equiv 6 \pmod{p}$

$$\Rightarrow 6\left(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1\right) \equiv 0 \pmod{p}$$

$\Rightarrow 6a_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$ ដោយ $PGCD(6, p) = 1$

$$\Rightarrow a_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$$

គេបាន គ្រប់ចំនួនបឋមទាំងអស់សុទ្ធតែមិនបឋមទៅនឹងតួនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$យ៉ាងហោច ណាស់មួយតួ

[1] Without loss of generality

$\Rightarrow$ គ្មានចំនួនណាដែលបឋមទៅនឹងគ្រប់តួទាំងអស់នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$

ព្រោះ គ្រប់ចំនួនគត់ខុសពី1ទាំងអស់សុទ្ធតែកើតឡើងពីផលគុណនៃចំនួនបឋម

ហេតុនេះ $p = 1$ជាចម្លើយ

លំហាត់ ៣

(IMO,1968)

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ xដែលផលគុណនៃខ្ទង់លេខនីមួយៗរបស់វាក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោលដប់ស្មើនឹង $x^2 - 10x - 22$ ។

ចម្លើយ

យក $x = \overline{a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0}$

$$= a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + a_{n-2}\cdot 10^{n-2} + ... + a_2\cdot 10^2 + a_1\cdot 10 + a_0$$

ដែល $1 \le a_{n-1} \le 9$, $0 \le a_i \le 9$ ចំពោះ $i = \overline{0, n-2}$

ដោយផលគុណនៃលេខគ្រប់ខ្ទង់ទាំងអស់របស់ xស្មើនឹង $x^2 - 10x - 22$

គេបាន $x^2 - 10x - 22 \ge 0 \Rightarrow x \ge 5 + \sqrt{47} \ge 12$ (1)

$$x^2 - 10x - 22 = a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}...a_2a_1a_0 \le 9^{n-1}a_{n-1}$$

$$< 10^{n-1}a_{n-1} \le x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x - 22 < x \Rightarrow x^2 - 11x - 22 < 0$$

យើងបាន $0 < x < \dfrac{11 + \sqrt{209}}{2} < \dfrac{11 + 15}{2} = 13$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន $12 \le x < 13$

ហេតុនេះ $x = 12$ ជាចម្លើយផ្ទៀងផ្ទាត់

លំហាត់ ៤

(AIME 1986)

គេឲ្យចំនួនដែលមានលេខបីខ្ទង់ $\overline{abc}$ ។ កំណត់ $\overline{abc}$ បើគេដឹងថា

$\overline{acb}+\overline{bca}+\overline{bac}+\overline{cab}+\overline{cba}=3194$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\overline{acb}+\overline{bca}+\overline{bac}+\overline{cab}+\overline{cba}=3194$

$$\Rightarrow 122a+212b+221c=3194$$

$$\Rightarrow 222(a+b+c)=3194+\overline{abc}$$

$$\Rightarrow \overline{abc}\equiv -3194(\mathrm{mod}\,222)\equiv 136(\mathrm{mod}\,222)$$

គេបាន $\overline{abc}\in\{136,358,580,802\}$

ម្យ៉ាងទៀត $a+b+c>\dfrac{3194}{222}>14$

ដូចនេះ $\overline{abc}=358$

លំហាត់ ៥

(AIME 2001)

ចំនួន N មួយត្រូវបានហៅថា ចំនួន7-10 Double បើលេខតាងឲ្យ N ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល 10 ស្មើនឹងពីរដងលេខតាងឲ្យ N ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល7 ។ ឧទាហរណ៍ 51ជាចំនួន 7-10 Double ព្រោះ $51=(102)_7$ ។ កំណត់ចំនួន 7-10 Double ធំបំផុត ។

ចម្លើយ

តាង $N=\left(\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}\right)_7$

យើងបាន $2\left(\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}\right)_7=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}$

$$2\cdot 7^n a_n + 2\cdot 7^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 2a_0 = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + a_0$$

$$a_0 + 4a_1 = \left(10^2 - 2\cdot 7^2\right)a_2 + \left(10^3 - 2\cdot 7^3\right)a_3 + \ldots$$
$$+\left(10^n - 2\cdot 7^n\right)a_n$$

ដោយ a_i , $i = \overline{0,n}$ ជាលេខក្នុងប្រព័ន្ធរាប់គោល 7 គេបាន $a_i \le 6$

មានន័យថា $a_0 + 4a_1 \le 30$

យើងបាន $n \le 2$

N ជាចំនួនធំបំផុត បើ $n = 2$, $a_2 = 6$

គេបាន $a_0 + 4a_1 = 12 \Rightarrow a_1 = \dfrac{12 - a_0}{4} = 3 - \dfrac{a_0}{4} \Rightarrow a_1 = 3$ និង $a_0 = 0$

ព្រោះ N ធំបំផុត

ដូចនេះ $N = 630$

លំហាត់ ៦

កំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ a , b , c , d បើគេដឹងថា

$$\overline{\underbrace{aa\ldots aa}_{n}\underbrace{bb\ldots bb}_{n}\underbrace{cc\ldots cc}_{n}} + 1 = \left(\overline{\underbrace{dd\ldots dd}_{n}} + 1\right)^3$$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\overline{\underbrace{aa\ldots aa}_{n}\underbrace{bb\ldots bb}_{n}\underbrace{cc\ldots cc}_{n}} + 1$

$$= \overline{\underbrace{aa\ldots aa}_{n}}\cdot 10^{2n} + \overline{\underbrace{bb\ldots bb}_{n}}\cdot 10^n + \overline{\underbrace{cc\ldots cc}_{n}} + 1$$

$$= \left(\frac{10^n - 1}{9}\right)a\cdot 10^{2n} + \left(\frac{10^n - 1}{9}\right)b\cdot 10^n + \left(\frac{10^n - 1}{9}\right)c + 1$$

យក $x=\dfrac{10^n-1}{9}\Rightarrow 10^n=9x+1\Rightarrow 10^{2n}=81x^2+18x+1$

គេបាន $\overline{\underbrace{aa\ldots aa}_{n}\underbrace{bb\ldots bb}_{n}\underbrace{cc\ldots cc}_{n}}=ax\left(81x^2+18x+1\right)+bx\left(9x+1\right)+xc+1$

$$=8ax^3+\left(18a+9b\right)x^2+\left(a+b+c\right)x+1$$

ម្យ៉ាងទៀត $\left(\overline{\underbrace{dd\ldots dd}_{n}}+1\right)^3=\left(xd+1\right)^3=d^3x^3+3d^2x^2+3dx+1$

ដោយ $\overline{\underbrace{aa\ldots aa}_{n}\underbrace{bb\ldots bb}_{n}\underbrace{cc\ldots cc}_{n}}+1=\left(\overline{\underbrace{dd\ldots dd}_{n}}+1\right)^3$

យើងបាន $\begin{cases} d^3=81a \\ 3d^2=18a+9b \\ 3d=a+b+c \end{cases}$

តាម $d^3=81a\Rightarrow 81\mid d^3$ គេបាន $d=9\Rightarrow a=b=c=9$ ព្រោះ $d=\overline{1,9}$

ដូចនេះ $a=b=c=d=9$

លំហាត់ ៧

ចំនួន Fermat ទី n កំណត់ដោយ $F_n = 2^{2^n} + 1$ ។

បង្ហាញថា គ្រប់តួទាំងអស់នៃចំនួននេះបឋមនឹងគ្នាពីរៗ ។

សម្រាយ

យើងមាន $F_m = 2^{2^m} + 1 \Rightarrow F_m - 2 = 2^{2^m} - 1$

$$= \left(2^{2^{m-1}} - 1\right)\left(2^{2^{m-1}} + 1\right)$$

$$= F_{m-1}\left(2^{2^{m-2}} - 1\right)\left(2^{2^{m-2}} + 1\right)$$

$$= F_{m-1}F_{m-2}\ldots F_0 \qquad (\ *\ )$$

យើងនឹងបង្ហាញថា $d = PGCD(F_m, F_n) = 1$ ចំពោះគ្រប់ $m \neq n$

WLOG សន្មតថា $m > n$

តាម (*) យើងបាន $F_m - 2 = F_{m-1}\ldots F_n \ldots F_0$

ដោយ d ចែកដាច់ $F_n \Rightarrow d$ ចែកដាច់ $F_m - 2$

តែ d ចែកដាច់ F_m យើងបាន d ចែកដាច់ 2

ម៉្យាងទៀត F_m, F_n ជាចំនួនសេស $\Rightarrow d$ ក៏ជាចំនួនសេសដែរ

យើងបាន $d = 1$

ដូចនេះ គ្រប់តួផ្សេងគ្នាទាំងអស់នៃចំនួន Fermat សុទ្ធតែបឋមនឹងគ្នាពីរៗ

លំហាត់ ៨

ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}$ គេហៅ $M_n = 2^n - 1$ ថាជាចំនួន Merssene ។

បង្ហាញថា បើ M_n ជាចំនួនបឋម នោះ n ក៏ជាចំនួនបឋមដែរ ។

សម្រាយ

យើងស្រាយសំណើខាងលើដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម

គឺ បើ n មិនមែនជាចំនួនបឋម យើងនឹងបង្ហាញថា M_n ក៏មិនមែនជាចំនួនបឋមដែរ

បើ n មិនមែនជាចំនួនបឋម គេបាន $n = ab$ ដែល $1 < a \le b < n$

យើងបាន $M_n = 2^{ab} - 1 = \left(2^a\right)^b - 1 = \left(2^a - 1\right)\left[2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \ldots + 1\right]$

ដោយ $2^a - 1,\ 2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \ldots + 1 > 1$ ព្រោះ $a > 1$

ដូចនេះ M_n មិនមែនជាចំនួនបឋម

លំហាត់ ៩

(IMO,1964)

ក/ កំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដើម្បីឲ្យ $2^n - 1$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

ខ/ បង្ហាញថា $2^n + 1$ ចែកមិនដាច់នឹង 7 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

ចម្លើយ

ក/ ចំពោះ n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ គេបានសំណល់ 0 , 1 រឺ 2 ពេលគេយក n ចែកនឹង 3

ហេតុនេះ $n = 3k$, $3k + 1$, $3k + 2$ ចំពោះ $k \ge 0$

បើ $n = 3k$ យើងបាន $2^n - 1 = 8^k - 1 \equiv 0 \pmod 7$

$\Rightarrow 2^n - 1$ ចែកដាច់នឹង 7

បើ $n = 3k + 1$ យើងបាន $2^n - 1 = 3 \cdot 8^k - 1 \equiv 2 \pmod 7$

$\Rightarrow 2^n - 1$ ចែកមិនដាច់នឹង 7

បើ $n = 3k + 2$ យើងបាន $2^n - 1 = 4 \cdot 8^k - 1 \equiv 3 \pmod 7$

$\Rightarrow 2^n - 1$ ចែកមិនដាច់នឹង 7

ដូចនេះ $n = 3k$ ចំពោះ $k \ge 0$

ខ/ ស្រាយដូចខាងលើ

លំហាត់ ១០

(Romania,1998)

គេអោយ $A=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{1997\cdot 1998}$ និង

$$B=\frac{1}{1000\cdot 1998}+\frac{1}{1001\cdot 1997}+\ldots+\frac{1}{1998\cdot 1000}$$ ។

បង្ហាញថា $\frac{A}{B}$ ជាចំនួនគត់ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

យើងបាន $A=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{1997\cdot 1998}$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1997}-\frac{1}{1998}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{1998}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1998}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{1998}-1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{999}$$

$$=\frac{1}{1000}+\frac{1}{1001}+\ldots+\frac{1}{1998}$$

$$\Rightarrow 2A=\left(\frac{1}{1000}+\frac{1}{1998}\right)+\left(\frac{1}{1001}+\frac{1}{1997}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1998}+\frac{1}{1000}\right)$$

$$=2998\left(\frac{1}{1000\cdot 1998}+\frac{1}{1001\cdot 1997}+\ldots+\frac{1}{1998\cdot 1000}\right)=B$$

ហេតុនេះ $\frac{A}{B}=\frac{2998}{2}=1449$ ជាចំនួនគត់

លំហាត់ ១១

(JBMO,2004)

គេឲ្យ x, y ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា បើ $3x+4y$ និង $4x+3y$ ជាការេប្រាកដ នោះ x, y សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 7 ។

សម្រាយ

ដោយ $3x+4y$ និង $4x+3y$ ជាការេប្រាកដ គេបាន

$3x+4y=a^2$, $4x+3y=b^2$ ដែល a, b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

យើងបាន $a^2+b^2=7(x+y)\equiv 0 \pmod 7$ (*)

ចំពោះ a, b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន គេបាន $a=7p+m$

$$b=7q+n$$

ដែល m, $n\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$

តាម (*) យើងបាន $a^2+b^2=(7p+m)^2+(7q+n)^2$

$$\equiv m^2+n^2\equiv 0 \pmod 7$$

ចំពោះ $m=n=0\Rightarrow m^2+n^2\equiv 0 \pmod 7$ ពិត

ករណីផ្សេងពីនេះ យើងបាន $m^2+n^2\not\equiv 0 \pmod 7$

ហេតុនេះ $a=7p$, $b=7q$

យើងបាន $3x+4y=49p^2$

$$4x+3y=49q^2$$

$\Rightarrow x=7(4q^2-3p^2)$, $y=7(4p^2-3q^2)$

ដូចនេះ x, y សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 7

លំហាត់ ១២

(JBMO,1998)

n ចំនួន $x_1, x_2, \dots, x_n$ ត្រូវបានជ្រើសចេញពី $[2,4]$ ។ បើគេដឹងថា

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \dfrac{17n}{6}$ និង $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 9n$ ។

បង្ហាញថា n ចែកដាច់នឹង 12 ។

សម្រាយ

យើងមាន $x_1, x_2, \dots, x_n \in [2,4]$

នោះ $(x_i - 2)(x_i - 4) \le 0,\ \forall i = \overline{1,n}$

$\Rightarrow x_i^2 - 6x_i + 8 \le 0$ សមភាពពេល $x_i = 2$ រឺ 4

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 6\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} 8 \le 0$ ដោយ $\sum_{i=1}^{n} x_i = \dfrac{17n}{6}$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 9n$

គេបាន $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 6\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} 8 = 9n - 6\left(\dfrac{17n}{6}\right) + 8n = 0$

ហេតុនេះ $x_i \in \{2,4\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = 2k,\ k \in \mathrm{IN}$

$$\Rightarrow \frac{17n}{6} = 2k \Rightarrow 17n = 12k \text{ តែ } PGCD(17,12) = 1$$

ដូចនេះ n ចែកដាច់នឹង 12

លំហាត់ ១៣

(IMO,1959)

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n បង្ហាញថា $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន ។

សម្រាយ

ដោយ $3(14n+3)-2(21n+4)=1$

គេបាន $14n+3$ និង $21n+4$ បឋមរវាងគ្នាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

ដូចនេះ $\frac{21n+4}{14n+3}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន

លំហាត់ ១៤

គេឲ្យ m , n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល m ជាចំនួនគត់សេស ។ បង្ហាញថា $PGCD(2^n-1,2^m+1)=1$ ។

សម្រាយ

យក $d=PGCD(2^m-1,2^n+1)$

យើងបាន $2^m-1=dt$, $2^n+1=dk$ ដែល $PGCD(t,k)=1$

$$\Rightarrow 2^m=dt+1 \Rightarrow 2^{mn}=dt'+1$$

និង $2^n+1=dk \Rightarrow 2^{mn}=(dk-1)^m=dk'-1$ ព្រោះ m ជាចំនួនសេស

(t', $k' \in$ IN)

យើងបាន $dt'+1=dk'-1 \Rightarrow d(k'-t')=2 \Rightarrow d$ ចែកដាច់ 2

ដោយ 2^m-1, 2^n+1 ជាចំនួនគត់សេស $\Rightarrow d$ ជាចំនួនគត់សេស

យើងបាន $d=1$

ហេតុនេះ $PGCD(2^n-1,2^m+1)=1$

លំហាត់ ១៥

គេឲ្យ p ជាចំនួនបឋម និង a , b ជាចំនួនគត់ ។ បង្ហាញថា p ចែកដាច់ ab^p-ba^p ។

សម្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទ Fermat យើងបាន $b^p \equiv b(\bmod p)$

$$a^p \equiv a(\bmod p)$$

ដូចនេះ $ab^p - ba^p \equiv ab - ba \equiv 0(\bmod p)$

លំហាត់ ១៦

(IMO,1988)

បើ a , b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $\frac{a^2+b^2}{1+ab}$ ជាចំនួនគត់ បង្ហាញថា $\frac{a^2+b^2}{1+ab}$ ជាការេប្រាកដ ។

សម្រាយ

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីការពិត

ឧបមាថា មានគូ (a,b) ដែល $\frac{a^2+b^2}{1+ab}=k$, k មិនមែនជាការេប្រាកដ

សន្មតថា $\max(a,b)$មានតម្លៃតូចបំផុត

ដោយ កន្សោម $\frac{a^2+b^2}{1+ab}$ មានលក្ខណៈស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មតថា $a \le b$

យើងបាន $\max(a,b)=b$

បើ $a=b$ យើងបាន $0<k=\frac{2a^2}{1+a^2}<2 \Rightarrow k=1$

យើងបាន $\frac{a^2+b^2}{1+ab}=1^2$ ជាការេប្រាកដ ផ្ទុយពីការឧបមា

បើ $a<b$ យើងបាន $a^2+b^2=k(1+ab)$

$$\Rightarrow b^2-kab+\left(a^2-k\right)=0$$

យក b_1 , b ជាឫសនៃសមីការ

តាមទ្រឹស្តីបទ Viéte យើងបាន $b_1 + b = ka$, $b_1 b = a - k^2$

ដោយ a , b , k ជាចំនួនគត់ គេបាន b_1 ជាចំនួនគត់

ករណី $b_1 > 0$ យើងបាន $0 < b_1 = \dfrac{a^2 - k}{b} < \dfrac{b^2 - k}{b} < b$

មានន័យថា $\max(a,b) = b$ មិនមែនជាចំនួនតូចបំផុតទេ

ករណី $b_1 \le 0$ យើងមាន $a^2 + b_1^2 = k(ab_1 + 1) \ge 0$

$$\Rightarrow ab_1 + 1 \ge 0 \Rightarrow b_1 \ge -\frac{1}{a} > -1$$

យើងបាន $b_1 = 0$

ហេតុនេះ $k = a^2$ ជាការេប្រាកដ ផ្ទុយពីការឧបមា

ដូចនេះ បើ $\dfrac{a^2 + b^2}{1 + ab}$ ជាចំនួនគត់ គេបាន $\dfrac{a^2 + b^2}{1 + ab}$ ជាការេប្រាកដ

លំហាត់ ១៧

គេឲ្យ p ជាចំនួនបឋម និង $p \ge 7$ ។ បង្ហាញថា p ចែកដាច់ $\underbrace{11...11}_{p-1}$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\underbrace{11...11}_{p-1} = \dfrac{10^{p-1} - 1}{9}$

ដោយ p ជាចំនួនបឋម និង $p \ge 7 \Rightarrow PGCD(p,10) = 1$

តាមទ្រឹស្តីបទ Fermat យើងបាន p ចែកដាច់ $10^{p-1} - 1$

ម៉្យាងទៀត $PGCD(p,9) = 1$ និង $\dfrac{10^{p-1} - 1}{9}$ ជាចំនួនគត់

ហេតុនេះ p ចែកដាច់ $\dfrac{10^{p-1}-1}{9}=\underbrace{11...11}_{p-1}$

លំហាត់ ១៨

(JBMO,1998)

កំណត់តួចែករួមធំបំផុតនៃ $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$

ចំពោះ $n = 0, 1, \dots, 1999$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$

បើ $n = 0 \Rightarrow A_0 = 2^0 + 3^2 + 5^2 = 37 = 5 \cdot 7$

ដោយ $A_n \equiv 2^{3n} + 3^{6n+2} \equiv 8^n + 9^{3n+1} \equiv 3^n + (-1)^{3n+1} (\operatorname{mod} 5)$

បើ $n = 1 \Rightarrow A_1 \equiv 4 (\operatorname{mod} 5) \Rightarrow 5$ ចែកមិនដាច់ A_1

ហេតុនេះ តួចែករួមធំបំផុតនៃ A_n ចំពោះ $n = 0, 1, \dots, 1999$

អាចស្មើនឹង 1 រឺ 7

ម៉្យាងទៀត $A_n = 8^n + 9 \cdot 9^{3n} + 25 \cdot 25^{3n}$

$$\equiv 1 + 2 \cdot 2^{3n} + 4 \cdot 4^{3n} \equiv 1 + 2 \cdot 8^n + 4 \cdot 64^n$$

$$\equiv 1 + 2 + 4 \equiv 7 \equiv 0 (\operatorname{mod} 7)$$

យើងបាន 7 ចែកដាច់ A_n ចំពោះ $n = 0, 1, \dots, 1999$

ដូចនេះ $PGCD(A_i)_{i=\overline{1,1999}} = 7$

លំហាត់ ១៩

(JBMO,1998)

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំនួន $\underbrace{11...11}_{1997}\underbrace{22...22}_{1998}5$ ជាការេប្រាកដ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\underbrace{11...11}_{1997}\underbrace{22...22}_{1998}5=\underbrace{11...11}_{1997}\cdot 10^{1999}+\underbrace{22...22}_{1998}\cdot 10+5$

$$=\frac{1}{9}\left(10^{1997}-1\right)\cdot 10^{1999}+\frac{2}{9}\left(10^{1998}-1\right)\cdot 10+5$$

$$=\frac{1}{9}\left(10^{3996}-10^{1999}+2\cdot 10^{1999}-20+45\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left(10^{3996}+10^{1999}+25\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left[\left(10^{1998}\right)^2+2\cdot 5\cdot 10^{1999}+5^2\right]=\left(\frac{10^{1998}+5}{3}\right)^2$$ ជាការេប្រាកដ

ព្រោះ $10^{1998}+5\equiv 1+5\equiv 0(\bmod 3)$ នោះ $\frac{10^{1998}+5}{3}$ ជាចំនួនគត់

លំហាត់ ២០

ចំពោះគ្រប់ m , $n\in Z$ បង្ហាញថា $mn\left(m^{60}-n^{60}\right)$ចែកដាច់នឹង 56786730 ។

សម្រាយ

យើងមាន $56786730=2\times 3\times 5\times 7\times 11\times 13\times 31\times 61$

$mn(m-n)$, $mn\left(m^2-n^2\right)$, $mn\left(m^4-n^4\right)$, $mn\left(m^6-n^6\right)$

, $mn\left(m^{10}-n^{10}\right)$, $mn\left(m^{12}-n^{12}\right)$, $mn\left(m^{30}-n^{30}\right)$ និង $mn\left(m^{60}-n^{60}\right)$

សុទ្ធតែចែកដាច់ $mn\left(m^{60}-n^{60}\right)$ (1)

ចំពោះ p ជាចំនួនបឋម តាមទ្រឹស្តីបទ Fermat យើងបាន

$m^p - m \equiv 0 \pmod p$ និង $n^p - n \equiv 0 \pmod p$

យើងបាន $n(m^p - m) - m(n^p - n) \equiv 0 \pmod p$

$\Rightarrow mn(m^{p-1} - n^{p-1}) \equiv 0 \pmod p$

យើងបាន p ចែកដាច់ $mn(m^{p-1} - n^{p-1})$

យើងបាន 2 , 3, 5, 7 , 11,13 ,31, 61 ចែកដាច់ $mn(m-n)$, $mn(m^2 - n^2)$, $mn(m^4 - n^4)$, $mn(m^6 - n^6)$, $mn(m^{10} - n^{10})$, $mn(m^{12} - n^{12})$, $mn(m^{30} - n^{30})$ និង $mn(m^{60} - n^{60})$ រៀងគ្នា (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន 2 ,3 ,5 ,7 ,11,13 ,31 ,61 (បឋមនឹងគ្នាពីរៗ) ចែកដាច់ $mn(m^{60} - n^{60})$

ហេតុនេះ 56786730 ចែកដាច់ $mn(m^{60} - n^{60})$

លំហាត់ ២១

បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathrm{IN}$ គេបាន

i. $2^{2n+1} + 3^{2n+1} \equiv 0 \pmod 5$

ii. $4^n - 1 - 3n \equiv 0 \pmod 9$

iii. $3^{n+3} - 4^{4n+2} \equiv 0 \pmod{11}$

iv. $5^n - 4n - 1 \equiv 0 \pmod{16}$

v. $2^{6n+3} + 3^{4n+2} \equiv 0 \pmod{17}$

vi. $2^{7n+1} + 3^{2n+1} + 5^{10n+1} + 7^{6n+1} \equiv \pmod{17}$

vii. $2^{2n+2} + 24n + 14 \equiv 0 \pmod{18}$

viii. $2^{3n+4} + 3^{3n+1} \equiv 0 \pmod{19}$

ix. $2^{2^{6n+2}}+3\equiv 0(\bmod 19)$

x. $2^{4^{n+1}}+5\equiv 0(\bmod 21)$

ចម្លើយ

i. $2^{2n+1}+3^{2n+1}=2\cdot 4^n+3\cdot 9^n\equiv 2\cdot 4^n+3\cdot 4^n$

$\equiv 5\cdot 4^n\equiv 0(\bmod 5)$

ii. **គន្លឹះ** $(a+b)^n\equiv nab^{n-1}+b^n\left(\bmod a^2\right)$

សម្រាយ

តាម ទ្វេធា Newton យើងបាន

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n-2}c_n^k a^{n-k}b^k+nab^{n-1}+b^n$$

ដោយ $\sum_{k=0}^{n-2}c_n^k a^{n-k}b^k\equiv 0\left(\bmod a^2\right)$

$\Rightarrow (a+b)^n\equiv nab^{n-1}+b^n\left(\bmod a^2\right)$

ហេតុនេះ $4^n-1-3n=(3+1)^n-1-3n$

$\equiv 3n+1-1-3n\equiv 0(\bmod 9)$

iii. $3^{n+3}-4^{4n+2}=27\cdot 3^n-16\cdot 256^n$

$\equiv 27\cdot 3^n-16\cdot 3^n\equiv 11\cdot 3^n\equiv 0(\bmod 11)$

iv. ស្រាយដូចលំហាត់ ii

v. $2^{6n+3}+3^{4n+2}=8\cdot 64^n+9\cdot 81^n$

$\equiv 8\cdot 13^n+9\cdot 13^n\equiv 17\cdot 13^n\equiv 0(\bmod 17)$

vi. $2^{7n+1}+3^{2n+1}+5^{10n+1}+7^{6n+1}$

$=2\cdot 128^n+3\cdot 9^n+5\cdot 625^{2n}+7\cdot 343^{2n}$

$\equiv 2\cdot 9^n+3\cdot 9^n+5\cdot 13^{2n}+7\cdot 3^{2n}$

$\equiv 5\cdot 9^n + 5\cdot 9^n + 7\cdot 9^n \equiv 17\cdot 9^n \equiv 0 \pmod{17}$

vii. យើងមាន $4^n - 1 - 3n \equiv 0 \pmod{9}$ (តាម ii)

$\Rightarrow 4\cdot 4^n - 4 - 12n \equiv 0 \pmod{18}$

$\Rightarrow 2^{2n+2} + 24n + 14 \equiv 0 \pmod{18}$

viii. $2^{3n+4} + 3^{3n+1} = 16\cdot 8^n + 3\cdot 27^n \equiv 16\cdot 8^n + 3\cdot 8^n$

$\equiv 19\cdot 8^n \equiv 0 \pmod{19}$

ix. យើងមាន $2^6 = 64 \equiv 7 \pmod{19} \Rightarrow 2^{18} \equiv 343 \pmod{19}$

$\equiv 1 \pmod{19}$

និង $2^{6n} = 64^n \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 2^{6n+2} \equiv 4 \pmod{18}$

គេបាន $2^{6n+2} = 18t + 4$

នោះ $2^{2^{6n+2}} + 3 = 2^{18t+4} + 3 \equiv 2^4 + 3 \equiv 0 \pmod{19}$

x. យើងមាន $2^{12} = (64)^2 \equiv 1 \pmod{21}$

ដោយ $4^n \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4^n = 3t + 1 \Rightarrow 4^{n+1} = 12t + 4$, $t \in Z$

យើងបាន $2^{4^{n+1}} + 5 = 2^{12t+4} + 5 = 16\cdot 2^{12t} + 5$

$\equiv -5 + 5 \equiv 0 \pmod{21}$

លំហាត់ ២២

i. $2^{n+2}\cdot 3^n + 5n - 4 \equiv 0 \pmod{25}$

ii. $2^{5n+1} + 3^{n+3} \equiv 0 \pmod{29}$

iii. $2^{4n+1} + 3^{6n+9} \equiv 0 \pmod{31}$

iv. $8n^2 + 4n - 3(5^n - 1) \equiv 0 \pmod{32}$

v. $5^{2n+1} + 11^{2n+1} + 17^{2n+1} \equiv 0 \pmod{33}$

vi. $5\cdot 7^{2n+2} + 2^{3n} \equiv 0 \pmod{41}$

vii. $9^{2n+1}+8^{n+2}\equiv 0 \pmod{73}$

viii. $10^{6n}+10^{3n}-2\equiv 0 \pmod{111}$

ix. $7^{2n+1}-48n-7\equiv 0 \pmod{288}$

x. $7^{2n}-2352n-1\equiv 0 \pmod{2304}$

ចម្លើយ

i. យើងមាន $2^{n+2}\cdot 3^{n}+5n-4$

$=4\cdot 6^{n}+5n-4=4(5+1)^{n}+5n-4$

$\equiv 4(5n+1)+5n-4\equiv 25n\equiv 0 \pmod{25}$

ii. $2^{5n+1}+3^{n+3}=2\cdot 32^{n}+27\cdot 3^{n}\equiv 2\cdot 3^{n}+27\cdot 3^{n}$

$\equiv 29\cdot 3^{n}\equiv 0 \pmod{29}$

iii. $2^{4n+1}+3^{6n+9}=2\cdot 16^{n}+27^{3}\cdot 27^{2n}$

$\equiv 2\cdot 16^{n}+(-4)^{3}(-4)^{2n}\equiv 2\cdot 16^{n}-64\cdot 16^{n}\equiv -62\cdot 16^{n}$

$\equiv 0 \pmod{31}$

iv. យើងមាន $5^{n}=(4+1)^{n}=\sum_{k=3}^{n}4^{n-k}C_n^k+4^2C_n^{n-2}+4C_n^{n-1}+C_n^n$

$\Rightarrow 5^{n}\equiv 8n(n-1)+4n+1\equiv 8n^2-8n+4n+1 \pmod{32}$

យើងបាន $8n^2+4n-3(5^n-1)$

$\equiv 8n^2+4n-3(8n^2-4n)\equiv -16n^2+16n$

$\equiv -16n(n-1) \pmod{32}$

ដោយ $n(n-1)$ ចែកដាច់នឹង 2 នោះ $\exists k\in \mathrm{Z}: n(n-1)=2k$

$\Rightarrow 8n^2+4n-3(5^n-1)\equiv -32k\equiv 0 \pmod{32}$

v. $5^{2n+1}+11^{2n+1}+17^{2n+1}=5\cdot 25^{n}+11\cdot 121^{n}+17\cdot 289^{n}$

$\equiv 5\cdot 25^{n}+11\cdot 22^{n}+17\cdot 25^{n}\equiv 22\cdot 25^{n}+11\cdot 22^{n}$

$\equiv 11\left(2\cdot 25^{n}+22^{n}\right)\pmod{33}$

ដោយ $2\cdot 25^{n}+22^{n}\equiv 2+1\equiv 0\pmod{3}$

គេបាន $2\cdot 25^{n}+22^{n}=3k\ ,\ k\in Z$

យើងបាន $5^{2n+1}+11^{2n+1}+17^{2n+1}\equiv 33k\equiv 0\pmod{33}$

vi. $5\cdot 7^{2n+2}+2^{3n}=5(49)49^{n}+8^{n}\equiv 5(8)8^{n}+8^{n}$

$\equiv 41\cdot 8^{n}\equiv 0\pmod{41}$

vii. $10^{6n}+10^{3n}-2\equiv 1+1-2\equiv 0\pmod{111}$

viii. យើងមាន $7^{2n+1}=7\cdot 49^{n}=7(48+1)^{n}$

$\equiv 7(48n+1)\equiv 336n+7\pmod{288}$

គេបាន $7^{2n+1}-48n-7\equiv 336n+7-48n-7$

$\equiv 288n\equiv 0\pmod{288}$

ix. $7^{2n}-2352n-1\equiv 48n+1-2352n-1$

$\equiv -2304n\equiv 0\pmod{2304}$

លំហាត់ ២៣

បើ a និង b ជាពីរចំនួនបឋមនឹងគ្នា ។ បង្ហាញថា $a+b$ និង ab ក៏បឋមនឹងគ្នាដែរ ។

សម្រាយ

ឧបមាថា d ជាតួចែករួមនៃ $a+b$ និង ab

យើងបាន d ចែកដាច់ $a+b$ និង ab

$$\Rightarrow d \text{ ចែកដាច់ } a(a+b)-ab=a^2$$

ស្រាយដូចគ្នា គេបាន d ចែកដាច់ b^2

យើងបាន d ជាតួចែករួមនៃ a^2 , $b^2 \Rightarrow d$ ចែកដាច់ $PGCD\left(a^2,b^2\right)$

តែ a និង b ជាពីរចំនួនបឋមនឹងគ្នា $\Rightarrow PGCD\left(a^2,b^2\right)=1$

យើងបាន $d=1$

ហេតុនេះ $a+b$ និង ab ជាពីរចំនួនបឋមនឹងគ្នា

លំហាត់ ២៤

កំណត់គ្រប់គូគត់វិជ្ជមាន (a,b)ដើម្បីឲ្យ a^4+4b^4 ជាចំនួនបឋម ។

ចម្លើយ

យើងមាន
$$\begin{aligned} a^4+4b^4 &= \left(a^2+2b^2\right)^2-2a^2b^2 \\ &= \left(a^2+2b^2-2ab\right)\left(a^2+2b^2+2ab\right) \\ &= \left[(a-b)^2+b^2\right]\left[(a+b)^2+b^2\right] \end{aligned}$$

ដោយ $(a+b)^2+b^2>1$

ហេតុនេះ a^4+4b^4 ជាចំនួនបឋម លុះត្រាតែ $(a-b)^2+b^2=1$

យើងបាន $a=b=1$

ហេតុនេះ $(a,b)=(1,1)$

លំហាត់ ២៥

គេឲ្យ $PGCD(a,b)=1$។ បង្ហាញថា $PGCD\left(a+b,a^2-ab+b^2\right)=1$ រឺ 3 ។

សម្រាយ

តាង $d=PGCD\left(a+b,a^2-ab+b^2\right)$

$\Rightarrow d$ ចែកដាច់ $(a+b)^2-a^2+ab-b^2=3ab$

យើងបាន d ចែកដាច់ $3b(a+b)-3ab=3b^2$

ស្រាយដូចគ្នា យើងបាន d ចែកដាច់ $3a^2$

យើងបាន d ជាតួចែករួមនៃ $3a^2$ និង $3b^2$

$\Rightarrow d$ ចែកដាច់ $PCGD\left(3a^2,3b^2\right)=3[PGCD(a,b)]^2=3$

ហេតុនេះ $d=1$ រឺ 3

លំហាត់ ២៦

គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$កំណត់ដោយ $a_0=1$ និង $a_{n+1}=\dfrac{7a_n+\sqrt{45a_n^2-36}}{2}$

ចំពោះ $n=0,1,\ldots$ ។

បង្ហាញថា ក/ a_n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

ខ/ $a_na_{n+1}-1$ ជាការេប្រាកដ ចំពោះគ្រប់ n ។

សម្រាយ

ក/

យើងមាន $a_0=1$ និង $a_{n+1}=\dfrac{7a_n+\sqrt{45a_n^2-36}}{2}$

$\Rightarrow a_n>0$ និង $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតកើនដាច់ខាតចំពោះគ្រប់ n

$\Rightarrow 2a_{n+1} - 7a_n = \sqrt{45a_n^2 - 36}$

$\Rightarrow 4a_{n+1}^2 - 28a_n a_{n+1} + 49a_n^2 = 45a_n^2 - 36$

$\Rightarrow a_{n+1}^2 - 7a_n a_{n+1} + a_n^2 + 9 = 0$

និង $a_n^2 - 7a_{n-1}a_n + a_{n-1}^2 + 9 = 0$

ដកអង្គ និង អង្គ យើងបាន $a_{n+1} = 7a_n - a_{n-1}$ (*)

ដោយ $a_0 = 1,\ a_1 = \dfrac{7a_0 + \sqrt{45a_0^2 - 36}}{2} = \dfrac{7+\sqrt{9}}{2} = 5$

តាម (*) យើងបាន a_n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានចំពោះគ្រប់ n

ខ/ យើងមាន $a_{n+1}^2 - 7a_n a_{n+1} + a_n^2 + 9 = 0$

យើងបាន $(a_{n+1} + a_n)^2 = 9(a_n a_{n+1} - 1) \Rightarrow a_n a_{n+1} - 1 = \left(\dfrac{a_{n+1} + a_n}{3}\right)^2$

ដោយ a_n , a_{n+1} ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន យើងបាន $\dfrac{a_{n+1} + a_n}{3}$ ជាចំនួនសនិទាន

តែ $\left(\dfrac{a_{n+1} + a_n}{3}\right)^2 = a_n a_{n+1} - 1$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

$\Rightarrow \dfrac{a_{n+1} + a_n}{3}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

ដូចនេះ $a_n a_{n+1} - 1$ ជាការេប្រាកដ

លំហាត់ ២៧

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដើម្បីឲ្យ $n^4 - 4n^3 + 22n^2 - 36n + 18$ ជាការេប្រាកដ ។

ចម្លើយ

បើ $n^4-4n^3+22n^2-36n+18$ ជាការេប្រាកដ

យើងបាន $n^4-4n^3+22n^2-36n+18=y^2$ ដែល $y\in\mathrm{IN}$

$$\Rightarrow (n^2-2n)^2+18(n^2-2n)+18=y^2$$

យក $n^2-2n=x$

យើងបាន $x^2+18x+18=y^2 \Rightarrow (x+9)^2-63=y^2$

$$\Rightarrow (x+9-y)(x+9+y)=63$$

យើងបាន $(x+9-y,x+9+y)=(1,63)$, $(3,21)$ រឺ $(7,9)$

ព្រោះ $0<x+9+y \Rightarrow 0<x+9-y<x+9+y$

យើងបាន $(x,y)=(23,31)$, $(3,9)$, $(-1,1)$

សមីការ $n^2-2n=x$ មានរឹសតែក្នុងករណី $x=3$ រឺ -1

ដោះស្រាយសមីការ យើងបាន $n=1$ រឺ 3

ដូចនេះ $n=1$ រឺ 3

លំហាត់ ២៨

កំណត់គ្រប់គូគត់វិជ្ជមាន (a,b) ដើម្បីឲ្យ $\dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ចម្លើយ

យក $\dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}=k$ ដែល $k\in\mathrm{IN}$

យើងបាន $a^2-2kb^2a+k(b^3-1)=0 \qquad (1)$

សមីការមាន $\Delta=4k^2b^4-4k(b^3-1)=(2kb^2-b)^2+4k-b^2$

ដើម្បីឲ្យសមីការមានរឹសជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន លុះត្រាតែ Δ ជាការេប្រាកដ

យើងបាន $\left(2kb^2-b\right)^2+4k-b^2=d^2$ ចំពោះ $d\in \mathrm{IN}^*$ (*)

បើ $4k-b^2=0$ យើងបាន (*) ពិត

យើងបាន $k=\frac{b^2}{4}$ ដោយ k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

យើងបាន $b=2l$ ដែល $l\in \mathrm{IN}$

$\Rightarrow a=2b^2k-\frac{b}{2}=8l^4-l$ រឺ $a=\frac{b}{2}=l$

ក្នុងករណីនេះ គេបាន $(a,b)=\left(8l^4-l,2l\right)$រឺ $(l,2l)$

បើ $4k-b^2>0$

យើងបាន $\left(2b^2k-b^2\right)^2+4k-b^2=d^2\geq\left(2b^2k-b+1\right)^2$

$$\Rightarrow 4k\left(b^2-1\right)+(b-1)^2\leq 0$$

យើងបាន $b=1$

តាម (1) យើងបាន $a^2-2ka=0\Rightarrow a=2k$

ក្នុងករណីនេះ យើងបាន $(a,b)=(2k,1)$

បើ $4k-b^2<0$

យើងបាន $\left(2b^2k-b\right)^2+4-b^2=d^2<\left(2b^2k-b-1\right)^2$

$$\Rightarrow b^2(4k-3)+2b(b-1)+(4k-1)<0$$ មិនពិត

ព្រោះ b , k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

លំហាត់ ២៩

(Korea,1998)

កំណត់ l , m , n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នាពីរៗ ដើម្បីឲ្យ

$(l+m+n)\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$ ជាចំនួនគត់ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $(l+m+n)\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=(l+m+n)\left(\frac{lm+mn+nl}{lmn}\right)$ (*)

ជាចំនួនគត់ លុះត្រាតែ lmn ចែកដាច់ $(l+m+n)(lm+mn+nl)$

$\Rightarrow l$ ចែកដាច់ $(l+m+n)(lm+mn+nl)$

ដោយ $(l+m+n)(lm+mn+nl)$

$$=l(lm+mn+nl)+l(m+n)^2+mn(m+n)$$

យើងបាន l ចែកដាច់ $mn(m+n)\Rightarrow l$ ចែកដាច់ $m+n$ (1)

ព្រោះ l , m , n បឋមនឹងគ្នាពីរៗ

ដោយ កន្សោម (*) ស៊ីមេទ្រី យើងសន្មតថា l ជាចំនួនធំជាងគេក្នុងចំណោម

l , m , n គឺ m , $n\le l\Rightarrow m+n\le 2l$ (2)

តាម (1),(2) យើងបាន $m+n=2l$ រឺ $m+n=l$

បើ $m+n=2l\Rightarrow m=n=l=1$ ព្រោះ l , m , n បឋមនឹងគ្នាពីរៗ

បើ $m+n=l\Rightarrow (l+m+n)\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$

$$=2(m+n)\left(\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=2+\frac{2(m+n)^2}{mn}$$

ជាចំនួនគត់ លុះត្រាតែ mn ចែកដាច់ $2(m+n)^2$

ដោយ m , n បឋមនឹងគ្នា $\Rightarrow$ យ៉ាងហោចណាស់មួយក្នុងចំណោម m , n សេស

សន្មតថា m ជាចំនួនគត់សេស

យើងបាន m ចែកដាច់ $(m+n)^2=m^2+2mn+n^2\Rightarrow m$ ចែកដាច់ n^2

យើងបាន $m=1$ ព្រោះ m , n បឋមនឹងគ្នា

និង n ចែកដាច់ $2 \Rightarrow n=1$ រឺ 2

បើ $m=n=1 \Rightarrow l=2$

បើ $m=1,\ n=2 \Rightarrow l=3$

ដូចនេះ $(l,m,n)=(1,1,1),\ (2,1,1),\ (3,2,1)$ រួមទាំងចម្លាស់ទាំងអស់នៃចម្លើយទាំងនេះ

លំហាត់ ៣០

(JBMO,2008)

កំណត់គ្រប់ចំនួនបឋម p , q , r ដើម្បីឲ្យ $\frac{p}{q}-\frac{4}{r+1}=1$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\frac{p}{q}-\frac{4}{r+1}=1 \Rightarrow p(r+1)-4q=q(r+1)$

$$\Rightarrow p(r+1)=q(r+5) \qquad (1)$$

ដោយ p , q ជាចំនួនបឋម យើងបាន $p=q$ រឺ p ចែកដាច់ $r+5$

បើ $p=q$ យើងបាន $r+1=r+5$ មិនពិត

បើ p ចែកដាច់ $r+5$ យើងបាន q ចែកដាច់ $r+1$

យក $d=PGCD(r+1,r+5)$

តាម (1) យើងបាន $p\frac{(r+1)}{d}=q\frac{(r+5)}{d}$

ដោយ $PGCD\left(\frac{(r+1)}{d},\frac{(r+5)}{d}\right)=1$

យើងបាន $\begin{cases} p = \dfrac{r+5}{d} \\ q = \dfrac{r+1}{d} \end{cases} \Rightarrow p - q = \dfrac{4}{d} \Rightarrow d \in \{1,2,4\}$

ចំពោះ $d = 1$ យើងបាន $p - q = 1 \Rightarrow p$, q ជាពីរចំនួនបឋមបន្តបន្ទាប់គ្នា

យើងបាន $p = 3$, $q = 2 \Rightarrow r = 7$

ចំពោះ $d = 2$ យើងបាន $p - q = 2 \Rightarrow p$, q ជាចំនួនបឋមសេសទាំងពីរ

ឧបមាថា គ្មានចំនួនណាមួយស្មើនឹង $3 \Rightarrow p$, q ត្រូវមានរាង $6m+1$, $6m+5$

យក $p = 6m+5$, $q = 6n+1$ យើងបាន $p - q = 6(m-n)+4$

$\Rightarrow 2 = 6(m-n)+4 \Rightarrow m - n = -\dfrac{1}{3}$ មិនពិត

យើងបាន ត្រូវមានមួយក្នុងចំណោម p, q ស្មើនឹង 3

ដោយ $p - q = 2 > 0 \Rightarrow p > q \Rightarrow q = 3$

យើងបាន $p = 5 \Rightarrow r = 5$

ចំពោះ $d = 1$ យើងបាន $p - q = 4 \Rightarrow p$, q ជាចំនួនបឋមសេសទាំងពីរ

យើងបាន $r = q - 1$ គូ $\Rightarrow r = 2 \Rightarrow q = 3$, $p = 7$

ដូចនេះ $(p,q,r) = (3,2,7)$, $(5,3,5)$ រឺ $(7,3,2)$

លំហាត់ ៣១

បង្ហាញថា គ្រប់ការេប្រាកដទាំងអស់សុទ្ធតែមានរាង $4k$ រឺ $4k+1$។

សម្រាយ

ចំពោះ $\forall n \in \mathrm{IN}$ យើងបាន $n = 2p$ រឺ $n = 2p - 1$

បើ $n = 2p \Rightarrow n^2 = 4p^2 = 4k$ ដែល $k = p^2$

បើ $n=2p-1 \Rightarrow n^2 = 4(p^2-2p)+1 = 4k+1$ ដែល $k = p^2-2p$

ហេតុនេះ គ្រប់ការេប្រាកដទាំងអស់សុទ្ធតែមានរាង $4k$ រឺ $4k+1$

សម្គាល់

តាមលំហាត់ ៣១ នេះយើងអាចសន្និដ្ឋានបានថា $x^2 \equiv 0$ រឺ $1 \pmod 4$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{Z}$ ។

លំហាត់ ៣២

(JBMO,2007)

បង្ហាញថា បើ p ជាចំនួនបឋម នោះ $7p+3^p-4$ មិនមែនជាការេប្រាកដ ។

សម្រាយ

ឧបមាថា $7p+3^p-4$ ជាការេប្រាកដ គឺ $7p+3^p-4 = x^2$ ដែល $x \in \mathbb{N}$

ដោយ p ជាចំនួនបឋម តាមទ្រឹស្តីបទ Fermat យើងបាន $3^p \equiv 3 \pmod p$

យើងបាន $x^2 = 7p+3^p-4 \equiv 3-4 \equiv -1 \pmod p$

យើងបាន x^2 និង p បឋមនឹងគ្នា

តាមទ្រឹស្តីបទ Fermat យើងបាន $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p \Rightarrow (x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$

$$\Rightarrow (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$$

លុះត្រាតែ $\frac{p-1}{2} = 2k \Rightarrow p = 4k+1$ ដែល $k \in \mathbb{N}$

ចំពោះ $p = 4k+1$ យើងបាន $x^2 = 7(4k+1)+3^{4k+1}-4$

$$= 28k+3^{4k+1}+3$$

ហេតុនេះ $x^2 \equiv -1+3 \equiv 2 \pmod 4$ មិនអាច

ព្រោះ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ គេបាន $n^2 \equiv 0$ រឺ $1 \pmod 4$

ហេតុនេះ $7p+3^p-4$ មិនមែនជាការប្រាកដ

លំហាត់ ៣៣

(IMO,1984)

ចូរឲ្យឧទាហរណ៍ចំនួនគត់វិជ្ជមាន (a,b) មួយដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម

ក/ $ab(a+b)$ ចែកមិនដាច់នឹង 7

ខ/ $(a+b)^7-a^7-b^7$ ចែកដាច់នឹង 7^7 ។

ចម្លើយ

យើងមាន $(a+b)^7-a^7-b^7$

$$=7\left[a^6b+ab^6+3\left(a^5b^2+a^2b^5\right)+5\left(a^4b^3+a^3b^4\right)\right]$$

$$=7ab\left[a^5+b^5+3ab\left(a^3+b^3\right)+5a^2b^2(a+b)\right]$$

$$=7ab(a+b)\left[a^4+b^4-a^3b-ab^3+a^2b^2+3ab\left(a^2-ab+b^2\right)+5ab\right]$$

$$=7ab(a+b)\left[a^4+b^4+2\left(a^3b+ab^3\right)+3a^2b^2\right]$$

$$=7ab(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)^2$$

យើងបាន លក្ខខណ្ឌដែលឲ្យសមមូលនឹងលក្ខខណ្ឌទាំងពីរខាងក្រោម

១/ $ab(a+b)$ ចែកមិនដាច់នឹង 7

២/ a^2+ab+b^2 ចែកដាច់នឹង 7^3

ដោយ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2>a^2+ab+b^2\geq 7^3\Rightarrow a+b\geq 19$

យើងបាន $a=1$, $b=18$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

ព្រោះ $1^2+1\cdot 18+18^2=343=7^3$ ចែកដាច់នឹង 7^3

លំហាត់ ៣៤

(JBMO,1997)

គេឲ្យ n_1, n_2, … , n_{1998} ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $n_1^2 + n_2^2 + ... + n_{1997}^2 = n_{1998}^2$ ។ បង្ហាញថា ក្នុងចំណោមចំនួនទាំងអស់មានយ៉ាងតិចពីរជាចំនួនគូ ។

សម្រាយ

- បើមានពីរក្នុងចំណោម n_1, n_2, … , n_{1997} ជាចំនួនគូ
  យើងបាន សំណើខាងលើពិត
- បើមានតែមួយក្នុងចំណោម n_1, n_2, … , n_{1997} ជាចំនួនគូ
  យើងបាន ផលបូក $n_1^2 + n_2^2 + ... + n_{1997}^2$ ជាចំនួនគូ
  ព្រោះ ផលបូកចំនួនសេសចំនួនគូដង ជាចំនួនគូ
  ដោយ $n_1^2 + n_2^2 + ... + n_{1997}^2 = n_{1998}^2$
  យើងបាន n_{1998}^2 ជាចំនួនគូ $\Rightarrow n_{1998}$ ជាចំនួនគូ
  ហេតុនេះ សំណើខាងលើពិត
- បើ n_1, n_2, … , n_{1997} សុទ្ធតែជាចំនួនសេស
  យើងបាន n_{1998} ក៏ជាចំនួនសេសដែរ
  ដោយ ការេនៃចំនួនសេសចែកនឹង 8 មានសំណល់ 1 ជានិច្ច
  ព្រោះ ចំនួនសេសទាំងអស់អាចមានរាង $8k+1$, $8k+3$, $8k+5$, $8k+7$
  យើងបាន $(8k+1)^2 \equiv 1 \pmod 8$

$$(8k+3)^2 \equiv 3^2 \equiv 1 \pmod 8$$

$$(8k+5)^2 \equiv 5^2 \equiv 1 \pmod 8$$

$$(8k+7)^2 \equiv 7^2 \equiv 1 \pmod 8$$

ហេតុនេះ $n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_{1997}^2 \equiv 1997 \equiv 5 \pmod 8$

តែ $n_{1998}^2 \equiv 1 \pmod 8$

យើងបាន $n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_{1997}^2 = n_{1998}^2$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ ក្នុងចំណោមចំនួនទាំងអស់មានយ៉ាងតិចពីរជាចំនួនគូ

លំហាត់ ៣៥

បង្ហាញថា ប្រភាគ $\dfrac{a^3 + 2a}{a^4 + 3a^2 + 1}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបានចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រឺឌ្ឍមាន a ។

សម្រាយ

ភាពសម្រួលបាន រឺ មិនបាននៃប្រភាគមួយដូចទៅនឹងចម្រាសរបស់វា

យើងមាន $\dfrac{a^4 + 3a^2 + 1}{a^3 + 2a} = a + \dfrac{a^2 + 1}{a^3 + 2a}$

យើងបាន $\dfrac{a^4 + 3a^2 + 1}{a^3 + 2a}$ សម្រួលបាន រឺ មិនបានអាស្រ័យលើ $\dfrac{a^2 + 1}{a^3 + 2a}$

ដោយ $\dfrac{a^3 + 2}{a^2 + 1} = a + \dfrac{a}{a^2 + 1}$

នាំឲ្យ $\dfrac{a^3 + 2}{a^2 + 1}$ សម្រួលបាន រឺ មិនបានអាស្រ័យលើ $\dfrac{a}{a^2 + 1}$

តែ $\dfrac{a^2 + 1}{a} = a + \dfrac{1}{a}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន

ដូចនេះ $\dfrac{a^3 + 2a}{a^4 + 3a^2 + 1}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន

លំហាត់ ៣៦

គេតាង $[x]$ ជាចំនួនគត់ធំបំផុតតូចជាង រឺស្មើ x និង $\{x\}$ ជាផ្នែកទសភាគនៃ x ដែល $x=\{x\}+[x]$ ។ ឧទាហរណ៍ $[2.63]=2$, $\{2.63\}=0.63$ ។

ក/ បើ $x=\sqrt{2013^2+2014}$ ។ រកតម្លៃនៃ $[x]$ ។

ខ/ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=200 \\ \{x\}+y+[z]=190.1 \\ [x]+\{y\}+z=178.8 \end{cases}$ ។

គ/ ដោះស្រាយសមីការ $4x^2-40[x]+51=0$ ។

ចម្លើយ

ក/ យើងមាន $x=\sqrt{2013^2+2014}>\sqrt{2013^2}=2013$

និង $x=\sqrt{2013^2+2013+1}<\sqrt{2013^2+2\cdot 2013+1}$

$$=\sqrt{(2013+1)^2}=2014$$

យើងបាន $2013<x<2014$

ហេតុនេះ $[x]=2013$

ខ/ យើងមាន $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=200 & (1) \\ \{x\}+y+[z]=190.1 & (2) \\ [x]+\{y\}+z=178.8 & (3) \end{cases}$

បូកអង្គ និង អង្គនៃសមីការទាំងបីយើងបាន

$$x+\{x\}+[x]+y+\{y\}+[y]+z+\{z\}+[z]=568.9$$

$$\Rightarrow 2(x+y+z)=568.9$$

$$\Rightarrow x+y+z=284.45$$

បូក (1) និង (2) យើងបាន $x+\{x\}+[y]+y+\{z\}+[z]=390.1$

$\Rightarrow [y]+\{x\}=390.1-(x+y+z)=390.1-284.45=105.65$

យើងបាន $[y]=105$, $\{z\}=0.65$

បូក (2) និង (3) យើងបាន $\{x\}+[x]+y+\{y\}+[z]+z=368.9$

$\Rightarrow [z]+\{y\}=368.9-(x+y+z)=368.8-284.45=84.45$

យើងបាន $[z]=84$, $\{y\}=0.45$

បូក (1) និង (3) យើងបាន $x+[x]+[y]+\{y\}+\{z\}+z=378.8$

$\Rightarrow [x]+\{z\}=378.8-(x+y+z)=378.8-284.45=94.35$

យើងបាន $[x]=94$, $\{z\}=0.35$

ហេតុនេះ $x=[x]+\{x\}=94+0.65=94.65$

$y=[y]+\{y\}=105+0.45=105.45$

$z=[z]+\{z\}=84+0.35=84.35$

គ/ សមីការ $4x^2-40[x]+51=0$ (1)

យើងមាន $4x^2-40[x]+51\geq 4x^2-40x+51=(2x-3)(2x-17)$

$\Rightarrow (2x-3)(2x-17)\leq 0$

យើងបាន $\frac{3}{2}\leq x\leq\frac{17}{2}\Rightarrow [x]=1,\ 2,\ \ldots,8$

តាម (1) $\Rightarrow x=\frac{\sqrt{40[x]-51}}{2}\Rightarrow [x]=\left[\frac{\sqrt{40[x]-51}}{2}\right]$ (2)

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $[x]=1,\ 2,\ \ldots,8$ ក្នុង (2)

យើងបាន $x\in\left\{\frac{\sqrt{29}}{2},\frac{\sqrt{189}}{2},\frac{\sqrt{229}}{2},\frac{\sqrt{269}}{2}\right\}$

លំហាត់ ៣៧

បង្ហាញថា $[x][y]\le[xy]\le[x][y]+[x]+[y]$ ចំពោះគ្រប់ $x\,,\ y\ge 0$ ។

សម្រាយ

ដោយ $x=[x]+\{x\}\,,\ y=[y]+\{y\}$

យើងបាន $[xy]=[([x]+\{x\})([y]+\{y\})]$

$$=[[x][y]+[x]\{y\}+\{x\}[y]+\{x\}\{y\}]$$

$$=[x][y]+[[x]\{y\}+\{x\}[y]+\{x\}\{y\}] \qquad (1)$$

ដោយ $x\,,\ y\ge 0\Rightarrow[x],\ \{x\},\ [y],\ \{y\}\ge 0$

$\Rightarrow[[x]\{y\}+\{x\}[y]+\{x\}\{y\}]\ge 0$

តាម (1) យើងបាន $[xy]\ge[x][y]$ $\qquad (i)$

ម៉្យាងទៀត $0\le\{x\},\ \{y\}<1$

គេបាន $[[x]\{y\}+\{x\}[y]+\{x\}\{y\}]\le[[x]+[y]+\{x\}\{y\}]$

$$=[x]+[y]+[\{x\}\{y\}]$$

$$=[x]+[y]$$

តាម (1) យើងបាន $[xy]\le[x][y]+[x]+[y]$ $\qquad (ii)$

តាម $(i),(ii)$ គេបាន $[x][y]\le[xy]\le[x][y]+[x]+[y]$

លំហាត់ ៣៨

គេឲ្យ $n\in\mathrm{IN}$ និង $x\in\mathrm{IR}^*$ ។ បង្ហាញថា ចំនួនពហុគុណវិជ្ជមាននៃ n ដែលតូចជាងរឺ ស្មើនឹង x មានចំនួន $\left[\dfrac{x}{n}\right]$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\left[\frac{x}{n}\right]\le\frac{x}{n}<\left[\frac{x}{n}\right]+1\Rightarrow n\left[\frac{x}{n}\right]\le x<n\left(\left[\frac{x}{n}\right]+1\right)$

គេបាន $n\left[\frac{x}{n}\right]$ ជាពហុគុណនៃ n ធំបំផុតតូចជាង រឺ ស្មើ x

ពោល គឺ ពហុគុណនៃ n តូចជាង រឺ ស្មើ x មាន n , $2n$, … , $\left[\frac{x}{n}\right]n$

សរុបទាំងអស់មានចំនួន $\left[\frac{x}{n}\right]$

លំហាត់ ៣៩

គេអោយ α , $\beta\in\mathrm{IR}$, $a\in\mathrm{Z}$ និង $n\in\mathrm{IN}$ ។ បង្ហាញថា

ក/ $[\alpha+a]=[\alpha]+a$

ខ/ $\left[\frac{\alpha}{n}\right]=\left[\frac{[\alpha]}{n}\right]$

គ/ $[\alpha]+[\beta]\le[\alpha+\beta]\le[\alpha]+[\beta]+1$

ឃ/ $[\alpha]+[\beta]+[\alpha+\beta]\le[2\alpha]+[2\beta]$ ។

សម្រាយ

ក/ តាមនិយមន័យ $[\alpha]\le\alpha<[\alpha]+1\Rightarrow[\alpha]+a\le\alpha+a<[\alpha]+a+1$

ដោយ $[\alpha]+a\in\mathrm{Z}$

យើងបាន $[\alpha+a]=[\alpha]+a$

ខ/ តាង $\theta=\left\{\frac{\alpha}{n}\right\}\Rightarrow 0\le\theta<1$

គេបាន $\frac{\alpha}{n}=\left[\frac{\alpha}{n}\right]+\theta\Rightarrow\alpha=n\left[\frac{\alpha}{n}\right]+n\theta\Rightarrow[\alpha]=n\left[\frac{\alpha}{n}\right]+[n\theta]$

$$\Rightarrow\frac{[\alpha]}{n}=\left[\frac{\alpha}{n}\right]+\frac{[n\theta]}{n}$$

ដោយ $0 \le \theta < 1 \Rightarrow 0 \le n\theta < n \Rightarrow 0 \le [n\theta] < n \Rightarrow 0 \le \frac{[n\theta]}{n} < 1$

យើងបាន $\left[\frac{[\alpha]}{n}\right] = \left[\frac{\alpha}{n}\right]$

គ/ ចំពោះ $\forall r \in \mathrm{IR} \Rightarrow r - 1 < [r] \le r$

គេបាន $[\alpha] + [\beta] \le \alpha + \beta \Rightarrow [\alpha] + [\beta] \le [\alpha + \beta]$ (1)

និង $\alpha + \beta - 2 < [\alpha] + [\beta] \Rightarrow \alpha + \beta < [\alpha] + [\beta] + 2$

$$\Rightarrow [\alpha + \beta] < [\alpha] + [\beta] + 2$$

$$\Rightarrow [\alpha + \beta] \le [\alpha] + [\beta] + 1 \qquad (2)$$

ព្រោះ $[\alpha + \beta], [\alpha], [\beta]$ ជាចំនួនគត់

តាម (1),(2) យើងបាន $[\alpha] + [\beta] \le [\alpha + \beta] \le [\alpha] + [\beta] + 1$

ឃ/ យើងមាន $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}, \beta = [\beta] + \{\beta\}$

$$\Rightarrow [2\alpha] + [2\beta] = [2([\alpha] + \{\alpha\})] + [2([\beta] + \{\beta\})]$$

$$= [2[\alpha] + 2\{\alpha\}] + [2[\beta] + 2\{\beta\}]$$

$$= 2[\alpha] + 2[\beta] + [2\{\alpha\}] + [2\{\beta\}]$$

និង $[\alpha] + [\beta] + [\alpha + \beta] = [\alpha] + [\beta] + [[\alpha] + \{\alpha\} + [\beta] + \{\beta\}]$

$$= 2[\alpha] + 2[\beta] + [\{\alpha\} + \{\beta\}]$$

គេបាន $[2\alpha] + [2\beta] - ([\alpha] + [\beta] + [\alpha + \beta])$

$$= [2\{\alpha\}] + [2\{\beta\}] - [\{\alpha\} + \{\beta\}] \qquad (1)$$

WLOG សន្មតថា $1 > \{\alpha\} \ge \{\beta\} \ge 0$

យើងបាន $[2\{\alpha\}] + [2\{\beta\}] \ge [2\{\alpha\}] \ge [\{\alpha\} + \{\beta\}]$

តាម (1) គេបាន $[2\alpha] + [2\beta] - ([\alpha] + [\beta] + [\alpha + \beta]) \ge 0$

ដូចនេះ $[\alpha] + [\beta] + [\alpha + \beta] \le [2\alpha] + [2\beta]$

លំហាត់ ៤០

ក/ បង្ហាញថា $[x]+[-x]=\begin{cases}0 \text{ បើ } x\in Z \\ \text{-1 បើ } x\in IR-Z\end{cases}$ ។

ខ/ បង្ហាញថា $\{x\}+\{-x\}=\begin{cases}0 \text{ បើ } x\in Z \\ 1 \text{ បើ } x\in IR-Z\end{cases}$ ។

សម្រាយ

ក/

បើ $x\in Z$ យើងបាន $[x]+[-x]=x-x=0$

បើ $x\in IR-Z$ គេបាន $[x]+[-x]=[[x]-x]$

ដោយ $x-1<[x]<x\Rightarrow -1<[x]-x<0\Rightarrow [[x]-x]=-1$

យើងបាន $[x]+[-x]=-1$

ខ/

បើ $x\in Z$ យើងបាន $\{x\}=\{-x\}=0\Rightarrow \{x\}+\{-x\}=0$

បើ $x\in IR-Z$ គេបាន $\{x\}+\{-x\}=x-[x]-x-[-x]$

$$=-([x]+[-x])=1$$

លំហាត់ ៤១

បង្ហាញថា ក/ $0\le[2x]-2[x]\le 1$

ខ/ $-1\le\{2x\}-2\{x\}\le 0$ ។

សម្រាយ

ក/ យើងមាន $[2x]-2[x]=[2x-2[x]]=[2(x-[x])]=[2\{x\}]$

ដោយ $0\le\{x\}<1\Rightarrow 0\le 2\{x\}<2$

គេបាន $0\le[2\{x\}]<2\Rightarrow 0\le[2\{x\}]\le 1$

ហេតុនេះ $0\le[2x]-2[x]\le 1$

ខ/ យើងមាន $\{2x\}-2\{x\}=2x-[2x]-2(x-[x])=-([2x]-2[x])$

ដោយ $0\le[2x]-2[x]\le 1$

ដូចនេះ $-1\le\{2x\}-2\{x\}\le 0$

លំហាត់ ៤២

បង្ហាញថា $\sum_{k=1}^{n}[\log_2 k]=(n+1)[\log_2 n]-2^{[\log_2 n]+1}+2$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\sum_{k=1}^{n}a_k=na_n-\sum_{k=1}^{n-1}k(a_{k+1}-a_k)$

យក $a_k=[\log_2 k]$ គេបាន

$$\sum_{k=1}^{n}[\log_2 k]=n[\log_2 n]-\sum_{k=1}^{n-1}k([\log_2(k+1)]-[\log_2 k]) \quad (1)$$

ដោយ $[\log_2(k+1)]-[\log_2 k]\ne 0\Rightarrow \log_2 k<l\le\log_2(k+1),\ l\in\mathrm{IN}$

$$\Rightarrow k<2^l\le k+1$$

$$\Rightarrow k=2^l-1$$

បើ $k\le n-1\Rightarrow 2^l-1\le n-1\Rightarrow l\le\log_2 n$

គេបាន $l=1,\ 2,\ \dots,[\log_2 n]$

តាម (1) យើងបាន $\sum_{k=1}^{n}[\log_2 k]=n[\log_2 n]-\sum_{l=1}^{[\log_2 n]}(2^l-1)$

$$=n[\log_2 n]+[\log_2 n]-\frac{2(2^{[\log_2 n]}-1)}{2-1}$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n}[\log_2 k]=(n+1)[\log_2 n]-2^{[\log_2 n]+1}+2$

លំហាត់ ៤៣

គណនា $\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k}\right]$ ជាអនុគមន៍នៃ $N=[n]$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\sum_{k=1}^{n} a_k = na_n - \sum_{k=1}^{n-1} k\left(a_{k+1}-a_k\right)$

យក $a_k=\left[\sqrt{k}\right]$គេបាន

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k}\right]=n\left[\sqrt{n}\right]-\sum_{k=1}^{n-1}k\left(\left[\sqrt{k+1}\right]-\left[\sqrt{k}\right]\right) \qquad (1)$$

ដោយ $\left[\sqrt{k+1}\right]-\left[\sqrt{k}\right]\neq 0 \Rightarrow \sqrt{k}<l\leq\sqrt{k+1}\,,\ l\in \mathrm{IN}$

$$\Rightarrow k<l^2\leq k+1$$

$$\Rightarrow k=l^2-1$$

បើ $k\leq n-1\Rightarrow l^2-1\leq n-1\Rightarrow l\leq\sqrt{n}$

គេបាន $l=1,\ 2\,,\ldots,\left[\sqrt{n}\right]$

តាម (1) យើងបាន $\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k}\right]=n\left[\sqrt{n}\right]-\sum_{l=1}^{\left[\sqrt{n}\right]}\left(l^2-1\right)$

$$=n\left[\sqrt{n}\right]+\left[\sqrt{n}\right]-\frac{\left[\sqrt{n}\right]\left(\left[\sqrt{n}\right]+1\right)\left(2\left[\sqrt{n}\right]+1\right)}{6}$$

$$=(n+1)N-\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k}\right]=(n+1)N-\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$

លំហាត់ ៤៤

បង្ហាញថា $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}$

$$\Leftrightarrow n+2\sqrt{n(n+1)}+n+1<4n+2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)}<2n+1$$

$$\Leftrightarrow 4n(n+1)<4n^2+4n+1$$

$\Leftrightarrow 0<1$ ពិត

គេបាន $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}$, $n\in \text{IN}$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]\le\left[\sqrt{4n+2}\right] \qquad (*)$$

បើ $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]<\left[\sqrt{4n+2}\right]\Rightarrow \sqrt{n}+\sqrt{n+1}<l\le\sqrt{4n+2}$, $l\in \text{IN}$

យើងមាន $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<l\le\sqrt{4n+2}$

$$\Leftrightarrow 2n+1+2\sqrt{n(n+1)}<l^2\le 4n+2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)}<l^2-2n-1\le 2n+1$$

$$\Leftrightarrow 4n(n+1)<\left(l^2-2n-1\right)^2\le 4n(n+1)+1$$

ដោយ $4n(n+1)$, $4n(n+1)+1$ ជាពីរចំនួនគត់តគ្នា

គេបាន $\left(l^2-2n-1\right)^2=4n(n+1)+1\Rightarrow l^2=4n+2$ មិនអាច ព្រោះ បើ p ជាការេប្រាកដនោះ p ត្រូវមានរាង $4k$ ឬ $4k+1$

ហេតុនេះ $(*)$ ពិត តែក្នុងករណី $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$

លំហាត់ ៤៥

បង្ហាញថា $\left[\sqrt[n]{x}\right]=\left[\sqrt[n]{[x]}\right]$ ចំពោះគ្រប់ $x \geq 0$ ។

សម្រាយ

តាង $m=\left[\sqrt[n]{[x]}\right]$ គេបាន $m \leq \sqrt[n]{[x]} < m+1$

$$\Leftrightarrow m^n \leq [x] < (m+1)^n \Rightarrow [x]+1 \leq (m+1)^n$$

ដោយ $[x] \leq x < [x]+1$

យើងបាន $m^n \leq [x] \leq x < [x]+1 \leq (m+1)^n \Rightarrow m \leq \sqrt[n]{x} < m+1$

ហេតុនេះ $\left[\sqrt[n]{x}\right]=m=\left[\sqrt[n]{[x]}\right]$

លំហាត់ ៤៦

គេឲ្យ $m, n \in \mathrm{Z}$ ។ គណនា $\left[\frac{m+n}{2}\right]+\left[\frac{m-n+1}{2}\right]$ ។

សម្រាយ

បើ $m+n$ គូ គេបាន $m+n=2k$

$$\Rightarrow \left[\frac{m+n}{2}\right]+\left[\frac{m-n+1}{2}\right]=\left[\frac{2k}{2}\right]+\left[\frac{m+m-2k+1}{2}\right]$$

$$=k+\left[m-k+\frac{1}{2}\right]=k+m-k=m$$

បើ $m+n$ សេស គេបាន $m+n=2k+1$

$$\Rightarrow \left[\frac{m+n}{2}\right]+\left[\frac{m-n+1}{2}\right]=\left[\frac{2k+1}{2}\right]+\left[\frac{m+m-2k-1+1}{2}\right]$$

$$=k+[m-k]=k+m-k=m$$

ដូចនេះ $\left[\frac{m+n}{2}\right]+\left[\frac{m-n+1}{2}\right]=m$

លំហាត់ ៤៧

បើ a , b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិបឋមរវាងគ្នា បង្ហាញថា

$$\sum_{k=1}^{a-1}\left[\frac{kb}{a}\right]=\sum_{k=1}^{b-1}\left[\frac{ka}{b}\right]=\frac{(a-1)(b-1)}{2}$$ ។

សម្រាយ

a និង b បឋមរវាងគ្នា គេបាន $\frac{ia}{b}$ មិនមែនជាចំនួនគត់, $i=\overline{1,b-1}$

យើងមាន $[n+\alpha]=n+[\alpha],\ n\in \mathrm{Z}$

យើងបាន $\left[\frac{ia}{b}\right]+\left[\frac{(b-i)a}{b}\right]=\left[\frac{ia}{b}\right]+\left[a+\frac{-ia}{b}\right]$

$$=a+\left[\frac{ia}{b}\right]+\left[\frac{-ia}{b}\right]=a-1$$

ហេតុនេះ $2\sum_{k=1}^{b-1}\left[\frac{ka}{b}\right]=\left(\left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{(b-1)a}{b}\right]\right)+\left(\left[\frac{2a}{b}\right]+\left[\frac{(b-2)a}{b}\right]\right)$

$$+\ldots+\left(\left[\frac{(b-1)a}{b}\right]+\left[\frac{a}{b}\right]\right)$$

$$=\underbrace{(a-1)+(a-1)+\ldots+(a-1)}_{b-1}=(a-1)(b-1)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{b-1}\left[\frac{ka}{b}\right]=\frac{(a-1)(b-1)}{2}$$

ស្រាយដូចគ្នា គេបាន $\sum_{k=1}^{a-1}\left[\frac{kb}{a}\right]=\frac{(a-1)(b-1)}{2}$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{a-1}\left[\frac{kb}{a}\right]=\sum_{k=1}^{b-1}\left[\frac{ka}{b}\right]=\frac{(a-1)(b-1)}{2}$

លំហាត់ ៤៨

យក x ជាចំនួនពិត, n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ បង្ហាញថា

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$$ ។

(សមភាព Hermite)

អនុវត្តន៍

បង្ហាញថា

ក/ $\{x\}+\left\{x+\frac{1}{n}\right\}+\left\{x+\frac{2}{n}\right\}+\ldots+\left\{x+\frac{n-1}{n}\right\}=\{nx\}+\frac{n-1}{2}$

ខ/ $\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right]=[x]$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

(IMO 1968)

សម្រាយ

ករណី $x\in Z$ យើងបាន $x<x+\frac{i}{n}<x+1$ ចំពោះ $i=\overline{1,n}$

$$\Rightarrow [x]=\left[x+\frac{1}{n}\right]=\left[x+\frac{2}{n}\right]=\ldots=\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=x$$

គេបាន $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]$

$$=\underbrace{x+x+\ldots+x}_{n}=nx=[nx]$$

ករណី $x\in IR-Z$

$\Rightarrow \exists i\in IN:1\le i\le n-1$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $\{x\}+\frac{i-1}{n}<1, \{x\}+\frac{i}{n}\ge 1$ (1)

គេបាន $n-i\le n\{x\}<n-i+1$ (2)

តាម (1) យើងបាន $[x]=\left[x+\frac{1}{n}\right]=\ldots=\left[x+\frac{i-1}{n}\right]$

ហើយ $\left[x+\frac{i}{n}\right]=\left[x+\frac{i+1}{n}\right]=\ldots=\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[x]+1$

នាំអោយ $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]$

$$=i[x]+(n-i)([x]+1)$$

$$=n[x]+n-i \qquad (3)$$

តាម (2) យើងបាន $n[x]+n-i\le n[x]+n\{x\}<n[x]+n-i+1$

$$\Rightarrow n[x]+n-i\le nx<n[x]+n-i+1$$

$$\Rightarrow [nx]=n[x]+n-i \qquad (4)$$

តាម (3),(4)យើងបាន $[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$

អនុវត្តន៍

ក/

ដោយ $\{r\}=r-[r]$ យើងបាន

$$\{x\}+\left\{x+\frac{1}{n}\right\}+\left\{x+\frac{2}{n}\right\}+\ldots+\left\{x+\frac{n-1}{n}\right\}$$

$$=(x-[x])+\left(x+\frac{1}{n}-\left[x+\frac{1}{n}\right]\right)+\ldots+\left(x+\frac{n-1}{n}-\left[x+\frac{n-1}{n}\right]\right)$$

$$=nx+\frac{1+2+\ldots+(n-1)}{n}-\sum_{i=0}^{n-1}\left[x+\frac{n-1}{n}\right]$$

$$=nx+\frac{n-1}{2}-[nx]$$ (សមភាព Hermite)

$$=\{nx\}+\frac{n-1}{2}$$

ដូចនេះ $\{x\}+\left\{x+\frac{1}{n}\right\}+\left\{x+\frac{2}{n}\right\}+...+\left\{x+\frac{n-1}{n}\right\}=\{nx\}+\frac{n-1}{2}$

ខ/

តាមសមភាព Hermite ចំពោះ $n=2$ គេបាន

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]\Rightarrow\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x]$$

យើងបាន៖ $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{x}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{x}{2^k}\right]-\left[\frac{x}{2^{k+1}}\right]$

$$=[x]-\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{2}\right]-\left[\frac{x}{2^2}\right]+...+\left[\frac{x}{2^n}\right]-\left[\frac{x}{2^{n+1}}\right]+...$$

$$=[x]$$

ព្រោះ បើ $\frac{x}{2^n}<1\Leftrightarrow x<2^n\Rightarrow\left[\frac{x}{2^n}\right]=0$

ដូចនេះ $\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right]=[x]$

លំហាត់ ៤៩

គណនា $[A]$ បើគេដឹងថា៖ $A=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{10^6}}$ ។

ចម្លើយ

របៀបទី 1

យើងមាន $\frac{1}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{10^6-1}\frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sum_{k=1}^{10^6-1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = 2\left(\sqrt{10^6-1+1}-\sqrt{1}\right) = 1998$$

គេបាន $A > 1998 + \frac{1}{\sqrt{10^6}}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sum_{k=2}^{10^6}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) = 2\left(\sqrt{10^6}-1\right) = 1998$$

គេបាន $A < 1999$ (2)

តាម (1) និង (2)យើងបាន $1998 + \frac{1}{\sqrt{10^6}} < A < 1999$

ដូចនេះ $[A] = 1998$

របៀបទី 2

សង្កេត $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} < 0$ ចំពោះ $x \in (0,+\infty)$

យើងបាន f ជាអនុគមន៍ចុះ

បើ $k \in \text{IN}$, ចំពោះ $x \in [k, k+1]$គេបាន៖ $\frac{1}{\sqrt{k+1}} \le \frac{1}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{k}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le \int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{10^6-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \int_1^{10^6} \frac{dx}{\sqrt{x}} < \sum_{k=1}^{10^6-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{10^6} \frac{1}{\sqrt{k}} < \int_1^{10^6} \frac{dx}{\sqrt{x}} < \sum_{k=1}^{10^6-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

ដោយ $\int_1^{10^6} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 1998$, $\sum_{k=2}^{10^6} \frac{1}{\sqrt{k}} = -1 + \sum_{k=1}^{10^6} \frac{1}{\sqrt{k}}$,

$$\sum_{k=1}^{10^6-1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{10^6} \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{10^3}$$

យើងបាន $-1 + \sum_{k=1}^{10^6} \frac{1}{\sqrt{k}} < 1998 < \sum_{k=1}^{10^6} \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{10^3}$

$$\Rightarrow 1998 + \frac{1}{10^3} < \sum_{k=1}^{10^6} \frac{1}{\sqrt{k}} < 1999$$

ដូចនេះ $[A] = 1998$

លំហាត់ ៥០

គេអោយ r ជាចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ

$$\left[r + \frac{19}{100}\right] + \left[r + \frac{20}{100}\right] + \left[r + \frac{21}{100}\right] + \ldots + \left[r + \frac{91}{100}\right] = 546$$ ។

គណនា $[100r]$ ។

(AIME,1991)

ចម្លើយ

ផលបូក $\left[r + \frac{19}{100}\right] + \left[r + \frac{20}{100}\right] + \left[r + \frac{21}{100}\right] + \ldots + \left[r + \frac{91}{100}\right] = 546$

មានចំនួន $91 - 19 + 1 = 73$ តួ ដែល តួនីមួយៗស្មើនឹង $[r]$ រឺ $[r] + 1$

ដោយ $73\cdot 7=511<546<8\cdot 73=584\Rightarrow [r]=7$

ម៉្យាងទៀត $546=73\cdot 7+35\Rightarrow 38$ តួដំបូងមានតម្លៃ 7 និង 35 តួចុងក្រោយមានតម្លៃ 8

យើងបាន $\left[r+\frac{56}{100}\right]=7$ និង $\left[r+\frac{57}{100}\right]=8$

$\Rightarrow r+\frac{56}{100}-1<7\le r+\frac{56}{100}$ និង $r+\frac{57}{100}-1<8\le r+\frac{57}{100}$

$\Rightarrow 7.43\le r<7.44\Rightarrow 743\le 100r<744$

ដូចនេះ $[100r]=743$

លំហាត់ ៥១

ដោះស្រាយក្នុង IR សមីការ $[x[x]]=1$។

ចម្លើយ

យើងមាន $[x[x]]=1\Leftrightarrow 1\le x[x]<2$

បើ $x\in(-\infty,-1)\Rightarrow [x]\le -2\Rightarrow x[x]>2$ មិនពិត

បើ $x=-1\Rightarrow [x]=-1\Rightarrow x[x]=1$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

គេបាន $x=-1$ ជាឫសនៃសមីការ

បើ $x\in(-1,0)\Rightarrow [x]=-1\Rightarrow x[x]<1$ មិនពិត

បើ $x\in[0,1)\Rightarrow [x]=0\Rightarrow x[x]=0<1$ មិនពិត

បើ $x\in[1,2)\Rightarrow [x]=1\Rightarrow 1\le x[x]<2$ ពិត

គេបាន $x\in[1,2)$ ជាឫសនៃសមីការ

បើ $x\ge 2\Rightarrow [x]\ge 2\Rightarrow x[x]\ge 4$ មិនពិត

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x\in\{-1\}\cup[1,2)$

លំហាត់ ៥២

តើសមីការ $[x]+[2x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$ មានរឹសដែរ រឺ ទេ ?

ចម្លើយ

របៀបទី ១

Lemma

ចំពោះ $x\in \text{IR}$, $k\in \text{IN}$ យើងបាន $k[x]\le [kx]<k[x]+k-1$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $k[x]=[k[x]]\le [kx]=[k([x]+\{x\})]=[k[x]+k\{x\}]$

$\le k[x]+k\{x\}<k[x]+k\le k[x]+k-1$

ហេតុនេះ $k[x]\le [kx]<k[x]+k-1$

ដោយ $[x]+[2x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$

យើងបាន $63[x]\le 12345<63[x]+57$ (*)

ដោយ $12345=63\times 195+57$

ហេតុនេះ (*) មិនពិត

ដូចនេះ សមីការគ្មានរឹស

របៀបទី ២

ដោយ $x-1<[x]\le x$

យើងបាន $x-1+2x-1+4x-1+8x-1+16x-1+32x-1$

$<[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]$

$\le x+2x+4x+8x+16x+32x$

$\Rightarrow 63x-6<12345\le 63x\Rightarrow 195\le x<196$

ចំពោះ $195\le x<196$

យើងបាន $[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]$

$$\leq 195 + 2\times 196 - 1 + 4\times 196 - 1 + 8\times 196 - 1 + 16\times 196 - 1$$
$$+ 32\times 196 - 1$$
$$= 195 - 5 + 196(2 + 4 + 8 + 16 + 32) = 12342$$

ដូចនេះ សមីការ $[x]+[2x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$ គ្មានរឹស

🕊🕊🕊🕊🕊

លំហាត់ ៥៣

គេអោយ $n \in \mathrm{IN}$ ដែល $n \geq 4$ ។ បង្ហាញថា $C_{C_n^2}^2 = 3C_{n+1}^4$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $C_{C_n^2}^2 = \dfrac{\left(C_n^2\right)!}{2!\left(C_n^2 - 2\right)!} = \dfrac{\left(\dfrac{n!}{2!(n-2)!}\right)!}{2!\left(\dfrac{n!}{2!(n-2)!} - 2\right)!}$

$$= \frac{\left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)!}{2\left(\dfrac{n(n-1)}{2} - 2\right)!} = \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{8} = \frac{3(n+1)!}{4!(n-3)!} = 3C_{n+1}^4$$

លំហាត់ ៥៤

បង្ហាញថា ចំពោះ $\forall(n, p, q) \in \mathrm{IN}^3$ ដែល $p \geq n + q + 1$ គេបាន

$\sum_{k=0}^{n} C_{p-k}^q = C_{p+1}^{q+1} - C_{p-n}^{q+1}$ ។

ចម្លើយ

តាមសមភាព Pascal យើងបាន $C_{n+1}^{r+1} = C_n^{r+1} + C_n^r \Rightarrow C_n^r = C_{n+1}^{r+1} - C_n^{r+1}$

គេបាន $C_p^q = C_{p+1}^{q+1} - C_p^{q+1}$

$C_{p-1}^q = C_p^{q+1} - C_{p-1}^{q+1}$

……………………………..

$$C^{q}_{p-n+1} = C^{q+1}_{p-n+2} - C^{q+1}_{p-n+1}$$

$$C^{q}_{p-n} = C^{q+1}_{p-n+1} - C^{q+1}_{q-n}$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $\sum_{k=0}^{n} C^{q}_{p-k} = C^{q+1}_{p+1} - C^{q+1}_{p-n}$

សម្គាល់

សមភាព Pascal កំណត់ដោយ $C^{r+1}_{n+1} = C^{r+1}_{n} + C^{r}_{n}$ ។

(សូមសាកល្បងស្រាយបញ្ជាក់ដោយខ្លួនឯង)

លំហាត់ ៥៩

(ចិនដេលី, 2013)

បើ $4 \le k \le n$ បង្ហាញថា $C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k$ ។

ចម្លើយ

របៀបទី ១

ស្រាយដូចលំហាត់ ៥៨

របៀបទី ២

តាមសមភាព Pascal យើងបាន $C^{p}_{n+1} = C^{p}_{n} + C^{p-1}_{n}$

យើងបាន $C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4}$

$$= \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) + 3\left(C_n^{k-1} + C_n^{k-2}\right) + 3\left(C_n^{k-2} + C_n^{k-3}\right) + C_n^{k-3} + C_n^{k-4}$$

$$= C_{n+1}^k + 3C_{n+1}^{k-1} + 3C_{n+1}^{k-2} + C_{n+1}^{k-3}$$

$$= \left(C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k-1}\right) + 2\left(C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2}\right) + \left(C_{n+1}^{k-2} + C_{n+1}^{k-3}\right)$$

$$= C_{n+2}^k + 2C_{n+2}^{k-1} + C_{n+2}^{k-2}$$

$$= \left(C_{n+2}^k + C_{n+2}^{k-1}\right) + \left(C_{n+2}^{k-1} + C_{n+2}^{k-2}\right) = C_{n+3}^k + C_{n+3}^{k-1} = C_{n+4}^k$$

លំហាត់ ៥៦

បង្ហាញថា $C_{n+1}^{a+1} \geq 2C_n^a\sqrt{\frac{n-a}{a+1}}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $C_{n+1}^{a+1} \geq 2C_n^a\sqrt{\frac{n-a}{a+1}} \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{(a+1)!(n-a)!} \geq \frac{2(n!)}{a!(n-a)!}\sqrt{\frac{n-a}{a+1}}$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{2} \geq \sqrt{(n-a)(a+1)} \text{ ពិត}$$

ព្រោះតាម AM-GM យើងបាន $\frac{n+1}{2} = \frac{(n-a)+(a+1)}{2} \geq \sqrt{(n-a)(a+1)}$

លំហាត់ ៥៧

ចំពោះគ្រប់ $(p,q)\in \mathrm{IN}^2$ ដែល $1\leq p\leq q$ គណនា $\sum_{k=1}^{p}\frac{C_p^k}{C_q^k}$ ។

ចម្លើយ

ពិនិត្យ

$$\frac{C_p^k}{C_q^k} = \frac{\frac{p!}{k!(p-k)!}}{\frac{q!}{k!(q-k)!}} = \frac{p!}{q!}\times\frac{(q-k)!}{(p-k)!} = \frac{p!(q-p)!}{q!}\times\frac{(q-k)!}{(p-k)!(q-p)!}$$

$= \frac{C_{q-k}^{p-k}}{C_q^p}$ យើងបាន $\sum_{k=1}^{p}\frac{C_p^k}{C_q^k} = \frac{1}{C_q^p}\sum_{k=1}^{p}C_{q-k}^{p-k}$

តាមសមភាព Pascal យើងបាន $C_{n+1}^r = C_n^r + C_n^{r-1} \Rightarrow C_n^r = C_{n+1}^r - C_n^{r-1}$

គេបាន $C_{q-1}^{p-1}=C_{q}^{p-1}-C_{q-1}^{p-2}$

$$C_{q-2}^{p-2}=C_{q-1}^{p-2}-C_{q-2}^{p-3}$$

………………………………

$$C_{q-p+2}^{2}=C_{q-p+3}^{2}-C_{q-p+2}^{1}$$

$$C_{q-p+1}^{1}=C_{q-p+2}^{1}-C_{q-p+1}^{0}$$

$$C_{q-p}^{0}=C_{q-p+1}^{0}$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $\sum_{k=1}^{p}C_{q-k}^{p-k}=C_{q}^{p-1}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{p}\frac{C_p^k}{C_q^k}=\frac{C_q^{p-1}}{C_q^p}=\frac{\frac{q!}{(p-1)!(q-p+1)!}}{\frac{q!}{p!(q-p)!}}=\frac{p}{q-p+1}$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{p}\frac{C_p^k}{C_q^k}=\frac{p}{q-p+1}$

លំហាត់ ៥៨

(សមភាព Vandermonde)

គេអោយបីចំនួនគត់ k,m,n ដែល $0\le m\le k\le n$ ។ បង្ហាញថា

$C_m^0C_n^k+C_m^1C_n^{k-1}+C_m^2C_n^{k-2}+\ldots+C_m^mC_n^{k-m}=C_{m+n}^k$ ។

ចម្លើយ

របៀបទី ១

យើងមាន $(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$

$$\Leftrightarrow \left(C_m^0 + xC_m^1 + \ldots + x^m C_m^m\right)\left(C_n^0 + xC_n^1 + \ldots + x^k C_n^k + \ldots + x^n C_n^n\right)$$
$$= \left(C_{m+n}^0 + xC_{m+n}^1 + \ldots + x^k C_{m+n}^k + \ldots + x^{m+n} C_{m+n}^{m+n}\right)$$

ប្រៀបធៀបមេគុណនៃ x^k យើងបាន

$$C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + C_m^2 C_n^{k-2} + \ldots + C_m^m C_n^{k-m} = C_{m+n}^k$$

របៀបទី ២

ឧបមាថានៅក្នុងថង់មួយមានឃ្លីចំនួន $m+n$ ដែលក្នុងនោះ ឃ្លីសមានចំនួន m និង ឃ្លីក្រហមមានចំនួន n, $m \le n$

ឧបមាថា គេយក k ឃ្លីចេញពីក្នុងថង់ $(m \le k \le n)$

គេបានចំនួនរបៀបនៃការជ្រើស គឺ C_{m+n}^k (1)

ម្យ៉ាងទៀត របៀបនៃការជ្រើសមានដូចខាងក្រោម

ស 0 និង ក្រហម k មានចំនួន $C_m^0 C_n^k$ របៀប

ស 1 និង ក្រហម $k-1$ មានចំនួន $C_m^1 C_n^{k-1}$ របៀប

………………………………………………………………

ស m និង ក្រហម $k-m$ មានចំនួន $C_m^m C_n^{k-m}$ របៀប

គេបាន ចំនួនរបៀបនៃការជ្រើសគឺ

$$C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + C_m^2 C_n^{k-2} + \ldots + C_m^m C_n^{k-m} \quad (2)$$

តាម (1),(2)

ដូចនេះ $C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + C_m^2 C_n^{k-2} + \ldots + C_m^m C_n^{k-m} = C_{m+n}^k$

សម្គាល់

បើ $m = n = k$ យើងបាន $C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + \ldots + C_n^n C_n^{n-n} = C_{2n}^n$

ដោយ $C_n^i = C_n^{n-i}$ ដូចនេះ $C_{2n}^n = \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2$ ។

លំហាត់ ៥៩

គេអោយ a,b,r ជាចំនួនគត់ដែល $0 \le r \le a \le b$ ។ បង្ហាញថា

$C_{2a}^{a} C_{2b}^{b} \ge \left(C_{a+b}^{r}\right)^2$ ។

ចម្លើយ

តាម វិសមភាព Cauchy-Schwarz និង សមភាព Vandermonde យើងបាន

$$\begin{aligned}\left(C_{a+b}^{r}\right)^2 &= \left(C_a^0 C_b^r + C_a^1 C_b^{r-1} + \ldots + C_a^r C_b^0\right)^2 \\ &\le \left[\left(C_a^0\right)^2 + \left(C_a^1\right)^2 + \ldots + \left(C_a^r\right)^2\right]\left[\left(C_b^0\right)^2 + \left(C_b^1\right)^2 + \ldots + \left(C_b^r\right)^2\right] \\ &\le \left[\left(C_a^0\right)^2 + \left(C_a^1\right)^2 + \ldots + \left(C_a^a\right)^2\right]\left[\left(C_b^0\right)^2 + \left(C_b^1\right)^2 + \ldots + \left(C_b^b\right)^2\right]\end{aligned}$$

តាមសម្គាល់នៃសមភាព Vandermonde យើងបាន

$$C_{2a}^{a} = \left(C_a^0\right)^2 + \left(C_a^1\right)^2 + \ldots + \left(C_a^a\right)^2$$

$$C_{2b}^{b} = \left(C_b^0\right)^2 + \left(C_b^1\right)^2 + \ldots + \left(C_b^b\right)^2$$

ដូចនេះ $C_{2a}^{a} C_{2b}^{b} \ge \left(C_{a+b}^{r}\right)^2$

លំហាត់ ៦០

បង្ហាញថា ចំពោះ $\forall (n,p) \in \left(\mathrm{IN}^*\right)^2$ គេបាន $\sum_{k=0}^{q-1} (p-2k) C_p^k = q C_p^q$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$(p-2k)C_p^k = \frac{[(p-k)-k]p!}{k!(p-k)!} = p!\left[\frac{1}{k!(p-k-1)!} - \frac{1}{(k-1)!(p-k)!}\right]$$

យក $k = 1,2,3,\ldots,q-1$ យើងបាន

$$[p-2(1)]C_p^1 = p!\left[\frac{1}{1!(p-2)!}-\frac{1}{0!(p-1)!}\right]$$

$$[p-2(2)]C_p^2 = p!\left[\frac{1}{2!(p-3)!}-\frac{1}{1!(p-2)!}\right]$$

………………………………………………………………

$$[p-2(q-2)]C_p^{q-2} = p!\left[\frac{1}{(q-2)!(p-q+1)!}-\frac{1}{(q-3)!(p-q+2)!}\right]$$

$$[p-2(q-1)]C_p^{q-1} = p!\left[\frac{1}{(q-1)!(p-q)!}-\frac{1}{(q-2)!(p-q+1)!}\right]$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $\sum_{k=1}^{q-1}(p-2k)C_p^k = p!\left[\frac{1}{(q-1)!(p-q)!}-\frac{1}{(p-1)!}\right]$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{q-1}(p-2k)C_p^k = p + p!\left[\frac{1}{(q-1)!(p-q)!}-\frac{1}{(p-1)!}\right]$$

$$= p + q\times\frac{p!}{q!(p-q)!} - p = qC_p^q$$

លំហាត់ ៦១

គណនា $\sum_{k=0}^{n}(k+1)\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k}$ ចំពោះ $n\in \mathrm{IN}^*$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $(k+1)\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = (k+1)\times\frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}}$

$$=(k+1)\times\frac{k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!}=n-k$$

គេបាន $\sum_{k=0}^{n}(k+1)\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k}=\sum_{k=0}^{n}(n-k)=n(n+1)-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$

ដូចនេះ $\sum_{k=0}^{n}(k+1)\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k}=\frac{n(n+1)}{2}$

លំហាត់ ៦២

គេតាង $P_n=\prod_{k=0}^{n}C_n^k$ ។ បង្ហាញថា $\forall n\in\mathrm{IN}^*$ គេបាន $\frac{P_n}{P_{n-1}}=\frac{n^n}{n!}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $P_n=\prod_{k=0}^{n}C_n^k$ គេបាន $P_{n-1}=\prod_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k$

យើងបាន $\frac{P_n}{P_{n-1}}=\frac{\prod_{k=0}^{n}C_n^k}{\prod_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k}=\frac{C_n^0\times C_n^1\times C_n^2\times\ldots\times C_n^{n-1}\times C_n^n}{C_{n-1}^0\times C_{n-1}^1\times C_{n-1}^2\times\ldots\times C_{n-1}^{n-1}}$

ពិនិត្យ $\frac{C_n^k}{C_{n-1}^k}=\frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}}=\frac{n}{n-k}$

គេបាន $\frac{P_n}{P_{n-1}}=\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{n}{n-2}\right)\ldots\left(\frac{n}{1}\right)=\frac{n^n}{n!}$

លំហាត់ ៦៣

ចំពោះ $\forall(n, p)\in\left(\mathrm{IN}^*\right)^2$ ចូរគណនា $\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=0}^{p-1}(i+j)\right)$ ។

ចម្លើយ

ពិនិត្យ $\prod_{j=0}^{p-1}(i+j)=i(i+1)(i+2)\ldots(i+p-1)=\dfrac{(i+p-1)!}{(i-1)!\,p!}\times p!$

$$=p!C_{i+p-1}^{i-1}$$

គេបាន $\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=0}^{p-1}(i+j)\right)=p!\sum_{i=1}^{n}C_{p+i-1}^{i-1}=p!\left(C_p^0+C_{p+1}^1+\ldots+C_{p+n-1}^{n-1}\right)$

ដោយ $C_{m+1}^r=C_m^r+C_m^{r-1}\Rightarrow C_m^r=C_{m+1}^r-C_m^{r-1}$ (សមភាព Pascal)

យើងបាន $C_{p+n-1}^{n-1}=C_{p+n}^{n-1}-C_{p+n-1}^{n-2}$

$$C_{p+n-2}^{n-2}=C_{p+n-1}^{n-2}-C_{p+n-2}^{n-3}$$

……………………………………..

$$C_{p+1}^1=C_{p+2}^1-C_{p+1}^0$$

$$C_p^0=C_{p+1}^0$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $C_p^0+C_{p+1}^1+\ldots+C_{p+n-1}^{n-1}=C_{p+n}^{n-1}$

ដូចនេះ $\prod_{j=0}^{p-1}(i+j)=p!C_{p+n}^{n-1}$

លំហាត់ ៦៤

ចំពោះ $\forall(n,p)\in(\mathrm{IN})^2$ ដែល $n\geq p$ ។

បង្ហាញថា $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kC_k^p=1$ បើ $n=p$

$=0$ បើ $n>p$

ចម្លើយ

យើងមាន $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kC_k^p=\sum_{k=p}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kC_k^p$ ព្រោះ $C_n^r=0$ បើ $r>n$

សង្កេត $C_n^kC_k^p=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{p!(k-p)!}=\frac{n!}{p!(n-p)!}\frac{(n-p)!}{(k-p)!(n-k!)}$

$=C_n^pC_{n-p}^{k-p}$

គេបាន $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kC_k^p=C_n^p\sum_{k=p}^{n}(-1)^{n-k}C_{n-p}^{k-p}$

បើ $n=p\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kC_k^p=C_n^n\sum_{k=n}^{n}(-1)^0C_0^{k-n}=1$

បើ $n>p$ គេបាន

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kC_k^p=C_n^p\left[(-1)^{n-p}C_{n-p}^0+(-1)^{n-p-1}C_{n-p}^1+\ldots+(-1)^0C_{n-p}^{n-p}\right]$$

$$=C_n^p(-1+1)^{n-p}=0$$

ដូចនេះ $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^kC_k^p=1$ បើ $n=p$

$=0$ បើ $n>p$

លំហាត់ ៦៥

ចំពោះ $\forall(n,p)\in\left(\mathrm{IN}^*\right)^2$ ដែល $n>p$ ។ ដោះស្រាយក្នុង IN នូវសមីការ

$C_n^p=C_{n-1}^p+C_{n-x}^{p-x}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $C_n^p=C_{n-1}^p+C_{n-x}^{p-x}\Rightarrow C_n^p-C_{n-1}^p=C_{n-x}^{p-x}$

តាមសមភាព Pascal គេមាន $C_n^p=C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}$

គេបាន $C_{n-1}^{p-1}=C_{n-x}^{p-x}$

បើ $x=0\Rightarrow C_{n-1}^{p-1}=C_n^p$ មិនអាច

បើ $x=1\Rightarrow C_{n-1}^{p-1}=C_{n-1}^{p-1}$ ពិត

គេថា $x=1$ ជាឫសនៃសមីការ

បើ $x>1$ យើងបាន $C_{n-x}^{p-x}=C_{n-x-1}^{p-x}+C_{n-x-1}^{p-x-1}+\ldots+C_{n-1}^{p-1}$

$$\Rightarrow C_{n-1}^{p-1}=C_{n-x-1}^{p-x}+C_{n-x-1}^{p-x-1}+\ldots+C_{n-1}^{p-1}$$

$$\Rightarrow C_{n-x-1}^{p-x}+C_{n-x-1}^{p-x-1}+\ldots+C_{n-1}^{p-1}=0 \text{ មិនអាច}$$

ព្រោះ $p<n\Rightarrow p\le n-1\Rightarrow p-x\le n-x-1$

មានន័យថា $C_{n-x-1}^{p-x}\ge 1$

ដូចនេះ $x=1$ ជាឫសតែមួយគត់របស់សមីការ

លំហាត់ ៦៦

(សមភាព Hockeystick)

បង្ហាញថា $\sum_{k=0}^{r}C_{n+k}^{k}=C_{n+r+1}^{r}$ ។

ចម្លើយ

$$\sum_{k=0}^{r} C_{n+k}^{k} = C_{n}^{0} + C_{n+1}^{1} + C_{n+2}^{2} + \ldots + C_{n+r-1}^{r-1} + C_{n+r}^{r}$$

តាមសមភាព Pascal យើងបាន $C_{n+1}^{p} = C_{n}^{p} + C_{n}^{p-1} \Rightarrow C_{n}^{p} = C_{n+1}^{p} - C_{n}^{p-1}$

គេបាន $C_{n+r}^{r} = C_{n+r+1}^{r} - C_{n+r}^{r-1}$

$$C_{n+r-1}^{r-1} = C_{n+r}^{r-1} - C_{n+r-1}^{r-2}$$

……………………………………

$$C_{n+1}^{1} = C_{n+2}^{1} - C_{n+1}^{0}$$

$$C_{n}^{0} = C_{n+1}^{0}$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $\sum_{k=0}^{r} C_{n+k}^{k} = C_{n+r+1}^{r}$

លំហាត់ ៦៧

(សមភាព Hexagon)

បង្ហាញថា $C_{n-1}^{k-1} C_{n}^{k+1} C_{n+1}^{k} = C_{n-1}^{k} C_{n}^{k-1} C_{n+1}^{k+1}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $C_{n-1}^{k-1} C_{n}^{k+1} C_{n+1}^{k} = \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$

$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$= C_{n-1}^{k} C_{n}^{k-1} C_{n+1}^{k+1}$$

លំហាត់ ៦៨

គេអោយ p,q,r,b,c ជាប្រាំចំនួនមិនសូន្យ និង ខុសៗគ្នា ។ គណនា $x+y+z$

បើគេដឹងថា $\begin{cases} \dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{p-b}+\dfrac{z}{p-c}=1 \\ \dfrac{x}{q}+\dfrac{y}{q-b}+\dfrac{z}{q-c}=1 \\ \dfrac{x}{r}+\dfrac{y}{r-b}+\dfrac{z}{r-c}=1 \end{cases}$ (*)។

ចម្លើយ

យក $p(t)=\dfrac{x}{t}+\dfrac{y}{t-b}+\dfrac{z}{t-c}-1$

តាម (*) យើងបាន p,q,r ជាឫសនៃ $p(t)$

យើងបានផលបូកឫស $\sum\ = p+q+r$ (1)

$$p(t)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{t}+\frac{y}{t-b}+\frac{z}{t-c}-1=0$$

$$\Leftrightarrow (t-b)(t-c)x+t(t-c)y+t(t-b)z-t(t-b)(t-c)=0$$

យើងបានផលបូកឫស $\sum\ = x+y+z+b+c$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន $x+y+z=p+q+r-b-c$

លំហាត់ ៦៩

បង្ហាញថា ចំពោះ $\forall(n,p,q)\in \mathrm{IN}^3$ គេបាន

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k)C_p^{n-k}C_q^k=\frac{np}{p+q}C_{p+q}^n$$ ។

ចម្លើយ

សង្កេត $rC_n^r = r\dfrac{n!}{r!(n-r)!} = n\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} = nC_{n-1}^{r-1}$

គេបាន $\sum_{k=0}^{n}(n-k)C_p^{n-k}C_q^k = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)C_p^{n-k}C_q^k = p\sum_{k=0}^{n-1}C_{p-1}^{n-k-1}C_q^k$

តាម សមភាព Vandermonde យើងបាន $\sum_{k=0}^{n-1}C_{p-1}^{n-k-1}C_q^k = C_{p+q-1}^{n-1}$

យើងបាន $\sum_{k=0}^{n}(n-k)C_p^{n-k}C_q^k = pC_{p+q-1}^{n-1} = \dfrac{pn}{p+q}C_{p+q}^n$

លំហាត់ ៧០

(កម្ពុជា,2009)

គេតាង $n! = n\times(n-1)\times\ldots\times 2\times 1$ ។ បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេបាន $1+\dfrac{2009}{1!}+\dfrac{(2009)(2010)}{2!}+\ldots+\dfrac{(2009)(2010)\ldots(2009+n-1)}{n!}$ $=\dfrac{(2010)(2011)\ldots(2009+n)}{n!}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន

$$1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+\ldots+\frac{(2009)(2010)\ldots(2009+n-1)}{n!}$$

$$= C_{2008}^{2008}+C_{2009}^{2008}+C_{2010}^{2008}+\ldots+C_{2008+n}^{2008}$$

តាមសមភាព Pascal យើងបាន $C_{n+1}^{r+1} = C_n^{r+1}+C_n^r \Rightarrow C_n^r = C_{n+1}^{r+1}-C_n^{r+1}$

យើងបាន $C_{2008+n}^{2008} = C_{2009+n}^{2009} - C_{2008+n}^{2009}$

$$C_{2008+n-1}^{2008} = C_{2008+n}^{2009} - C_{2008+n-1}^{2009}$$

……………………………………………

$$C_{2009}^{2008} = C_{2010}^{2009} - C_{2009}^{2009}$$

$$C_{2008}^{2008} = C_{2009}^{2009}$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $C_{2008}^{2008} + C_{2009}^{2008} + C_{2010}^{2008} + \ldots + C_{2008+n}^{2008} = C_{2009+n}^{2009}$

$$= \frac{(2009+n)!}{2009!n!} = \frac{(2010)(2011)\ldots(2009+n)}{n!}$$

ដូចនេះ $1 + \frac{2009}{1!} + \frac{(2009)(2010)}{2!} + \ldots + \frac{(2009)(2010)\ldots(2009+n-1)}{n!}$

$$= \frac{(2010)(2011)\ldots(2009+n)}{n!}$$

លំហាត់ ៧១

(ភ្នំពេញ,2006)

ក្នុងទ្វេធា Newton $\left(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}}\right)^n$ ចូររកតួមិនអាស្រ័យនៃ x ដោយដឹងថា

$C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79 \Leftrightarrow 1 + n + n(n+1) = 79$

$$\Rightarrow n^2 + n - 78 = 0$$

$$\Rightarrow n = 12 \text{ ព្រោះ } n \in \mathrm{IN}$$

គេបាន $\left(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}}\right)^n = \left(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}}\right)^{12} = \sum_{r=0}^{12} C_{12}^r \left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{12-r} \left(x^{-\frac{18}{15}}\right)^r$

$$=\sum_{r=0}^{12} C_{12}^{r}\left(x^{16-\frac{4}{3}r}\right)\left(x^{-\frac{18}{15}r}\right)=\sum_{r=0}^{12} C_{12}^{r}\left(x^{\frac{240-48r}{15}}\right)$$

បើ $\frac{240-48r}{15}=0 \Rightarrow r=5$ មានន័យថា តួទី 6 គឺជាតួដែលមិនអាស្រ័យ x

ហើយ តួនោះ គឺ $C_{12}^{5}=792$

លំហាត់ ៧២

ដោយមិនពន្លាត រកមេគុណធំបំផុតនៃពន្លាត $(3x+5)^{10}$ ។

ចម្លើយ

តួទី r នៃពន្លាតគឺ $C_{10}^{r}(3x)^{r}5^{10-r}$

យើងបាន ផលធៀបនៃលេខមេគុណតួទី r និង តួទី $r+1$ គឺ

$$\frac{C_{10}^{r+1}3^{r+1}5^{9-r}}{C_{10}^{r}3^{r}5^{10-r}}=\frac{3}{5}\frac{10-r}{1+r}$$

បើ $\frac{C_{10}^{r+1}3^{r+1}5^{9-r}}{C_{10}^{r}3^{r}5^{10-r}}>1 \Leftrightarrow \frac{3}{5}\frac{10-r}{1+r}>1 \Rightarrow r<\frac{25}{8}=3+\frac{1}{8}$

បើ $\frac{C_{10}^{r+1}3^{r+1}5^{9-r}}{C_{10}^{r}3^{r}5^{10-r}}>1 \Rightarrow r>3+\frac{1}{8}$

គេថា មេគុណតួដែលមានតម្លៃធំបំផុតគឺ មេគុណតួទី 4 កំណត់ដោយ $C_{10}^{4}3^{4}5^{6}$

លំហាត់ ៧៣

គណនាផលបូកមេគុណរបស់ពហុធាដែលជាពន្លាតនៃ

$$\left(1-3x+3x^{2}\right)^{743}\left(1+3x-3x^{2}\right)^{744}$$ ។

ចម្លើយ

$\left(1-3x+3x^2\right)^{743}\left(1+3x-3x^2\right)^{744}$ ជាពហុធាដឺក្រេទី $2\times 743+2\times 744$

$= 2974$

យក $\left(1-3x+3x^2\right)^{743}\left(1+3x-3x^2\right)^{744} = A_0 + A_1x + \ldots + A_{2974}x^{2974}$

បើ $x=1$ យើងបាន $A_0 + A_1 + \ldots + A_{2974} = 1$

លំហាត់ ៧៤

គណនាមេគុណនៃ x^{50} នៃពហុធា

ក/ $(1+x)^{1000} + x(1+x)^{999} + x^2(1+x)^{998} + \ldots + x^{1000}$

ខ/ $(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3+\ldots+1000(1+x)^{1000}$ ។

ចម្លើយ

ក/ $P(x) = (1+x)^{1000} + x(1+x)^{999} + x^2(1+x)^{998} + \ldots + x^{1000}$

ជាផលបូកស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន $q=\dfrac{x}{1+x}$ និង $u_1 = (1+x)^{1000}$

គេបាន $$P(x)=\frac{(1+x)^{1000}\left[\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{1001}-1\right]}{\dfrac{x}{1+x}-1}$$

$$=\frac{\dfrac{x^{1001}}{1+x}-(1+x)^{1000}}{\dfrac{x-1-x}{1+x}}=(1+x)^{1001}-x^{1001}$$

យើងបាន មេគុណនៃ x^{50} គឺ C_{1001}^{50}

ខ/ $Q(x)=(1+x)+2(1+x)^2+\ldots+1000(1+x)^{1000}$ (1)

គេបាន $(1+x)Q(x)=(1+x)^2+2(1+x)^3+\ldots+1000(1+x)^{1001}$ (2)

យក (1)-(2) យើងបាន

$$-xQ(x)=(1+x)+(1+x)^2+\ldots+(1+x)^{1000}-1000(1+x)^{1001}$$

$$=\frac{(1+x)\left[(1+x)^{1000}-1\right]}{1+x-1}-1000(1+x)^{1001}$$

$$\Rightarrow Q(x)=\frac{1000(1+x)^{1001}}{x}-\frac{(1+x)^{1001}-(1+x)}{x^2}$$

$$=1000\left(C_{1001}^{1}+xC_{1001}^{2}+x^2C_{1001}^{3}+\ldots+x^{999}C_{1001}^{1000}+x^{1000}C_{1001}^{1001}\right)$$

$$-\left(C_{1001}^{2}+xC_{1001}^{3}+x^2C_{1001}^{4}+\ldots+x^{998}C_{1001}^{1000}+x^{999}C_{1001}^{1001}\right)$$

គេបាន មេគុណនៃ x^{50} គឺ $1000C_{1001}^{51}-C_{1001}^{52}$

លំហាត់ ៧៥

គណនាមេគុណនៃ x^2 នៃពន្លាត $\underbrace{\left(\ldots\left(\left((x-2)^2-2\right)^2-2\right)^2-\ldots-2\right)^2}_{n \text{ ដង}}$ ។

ចម្លើយ

យក $P_n(x)=\underbrace{\left(\ldots\left(\left((x-2)^2-2\right)^2-2\right)^2-\ldots-2\right)^2}_{n \text{ ដង}}$

$=Q_n(x)x^3+B_nx^2+A_nx+C_n$, $Q_n(x)$ ជាពហុធានៃ x

បើ $x=0$ គេបាន $C_n=\underbrace{\left(\ldots\left(\left((0-2)^2-2\right)^2-2\right)^2-\ldots-2\right)^2}_{n \text{ ដង}}$

$$=\underbrace{\left(\ldots\left(\left(4-2\right)^2-2\right)^2-\ldots-2\right)^2}_{n-1 \text{ ដង}}=\ldots=\left(4-2\right)^2=4$$

$$\Rightarrow\underbrace{\left(\ldots\left(\left(\left(x-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-\ldots-2\right)^2}_{n \text{ ដង}}$$

$$=Q_n\left(x\right)x^3+B_nx^2+A_nx+4 \qquad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀត $\underbrace{\left(\ldots\left(\left(\left(x-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-\ldots-2\right)^2}_{n \text{ ដង}}$

$$=\left(\underbrace{\left(\ldots\left(\left(x-2\right)^2-2\right)^2-\ldots-2\right)^2}_{n-1 \text{ ដង}}-2\right)$$

$$=\left(Q_{n-1}\left(x\right)x^3+B_{n-1}x^2+A_{n-1}x+2\right)^2$$

$$=Q_{n-1}^2\left(x\right)x^6+2Q_{n-1}\left(x\right)B_{n-1}x^5+\left(2Q_{n-1}\left(x\right)+A_{n-1}B_{n-1}^2\right)x^4$$

$$+\left(4Q_{n-1}\left(x\right)+2B_{n-1}A_{n-1}\right)x^3+\left(4B_{n-1}+A_{n-1}^2\right)x^2+4A_{n-1}x+4 \quad (2)$$

តាម (1),(2) យើងបាន $A_n=4A_{n-1}$ និង $B_n=4B_{n-1}+A_{n-1}^2$

ដោយ $P_1\left(x\right)=\left(x-2\right)^2=x^2-4x+4\Rightarrow A_1=-4, B_1=1$

តាម $A_n=4A_{n-1}$ គេបាន $A_n=-4^n$

ហើយ $B_n=4B_{n-1}+A_{n-1}^2=A_{n-1}^2+4\left(A_{n-2}^2+4B_{n-2}\right)$

$$=A_{n-1}^2+4A_{n-2}^2+4^2\left(A_{n-3}^2+4B_{n-3}\right)$$

$$=A_{n-1}^2+4A_{n-2}^2+4^2A_{n-3}^2+4^3B_{n-3}=\ldots$$

$$=A_{n-1}^2+4A_{n-2}^2+4^2A_{n-3}^2+\ldots+4^{n-3}A_2^2+4^{n-2}A_1^2+4^{n-1}B_1$$

$$=4^{2n-2}+4^{2n-3}+4^{2n-4}+\ldots+4^{n+1}+4^{n-1}=\frac{4^{2n-1}-4^{n-1}}{3}$$

ដូចនេះ មេគុណនៃ x^2 គឺ $\frac{4^{2n-1}-4^{n-1}}{3}$

លំហាត់ ៧៦

(AIME 1986)

ពហុធា $1-x+x^2-x^3+...+x^{16}-x^{17}$ ត្រូវបានបំលែងក្រោមទម្រង់

$a_0+a_1y+a_2y^2+...+a_{16}y^{16}+a_{17}y^{17}$ ក្នុងនោះ $y=x+1$

និង a_i ជាចំនួនថេរ, $i=\overline{1,n}$ ។ គណនា a_2 ។

ចម្លើយ

របៀបទី ១

យើងមាន $1-x+x^2-x^3+...+x^{16}-x^{17}=\frac{1-x^{18}}{1+x}=\frac{1-(y-1)^{18}}{y}$

គេបាន a_2 ជាមេគុណនៃ y^2 កំណត់ដោយ $a_2=C_{18}^3=816$

របៀបទី ២

យើងមាន $1-x+x^2-x^3+...+x^{16}-x^{17}$

$$=1-(y-1)+(y-1)^2-(y-1)^3+...+(y-1)^{16}-(y-1)^{17}$$

គេបាន មេគុណនៃ y^2 គឺ $a_2=C_2^2+C_3^2+C_4^2+...+C_{17}^2=C_{18}^3=816$

(ប្រើសមភាព Pascal យើងបាន $C_{n+1}^{r+1}=C_n^{r+1}+C_n^r \Rightarrow C_n^r=C_{n+1}^{r+1}-C_n^{r+1}$)

លំហាត់ ៧៧

គណនា $S_n=nC_{n-1}^0+\frac{n}{2}C_{n-1}^1+...+\frac{n}{n}C_{n-1}^{n-1}$ ។

ចម្លើយ

តាមទ្វេធា Newton យើងបាន $(1+x)^{n-1}=C_{n-1}^{0}+xC_{n-1}^{1}+\ldots+x^{n-1}C_{n-1}^{n-1}$

យើងបាន $\int_0^1(1+x)^{n-1}dx=\int_0^1\left(C_{n-1}^{0}+xC_{n-1}^{1}+\ldots+x^{n-1}C_{n-1}^{n-1}\right)dx$

$$\Rightarrow\left[\frac{(1+x)^n}{n}\right]_0^1=\left[C_{n-1}^{0}x+\frac{x^2}{2}C_{n-1}^{1}+\ldots+\frac{x^n}{n}C_{n-1}^{n-1}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow C_{n-1}^{0}+\frac{1}{2}C_{n-1}^{1}+\ldots+\frac{1}{n}C_{n-1}^{n-1}=\frac{2^n-1}{n}$$

ដូចនេះ $S_n==\frac{2^n-1}{n}$

លំហាត់ ៧៨

គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $abc=1$។ បង្ហាញថា

$$a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\geq 6+2\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)$$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $a^2+b^2+c^2+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$$=(a+b+c)^2$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2(a+b+c)=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$$

$$=(ab+bc+ca)^2$$

និង $6+2\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)=\frac{2(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}$

$$=2(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

យើងបាន វិសមភាពឲ្យសមមូលនឹង

$(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)^2\geq 2(a+b+c)(ab+bc+ca)$ ពិត

តាមវិសមភាព AM-GM

លំហាត់ ៧៩

គេឲ្យ a , b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=3$។

កំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃ $a^2+b^2+c^2+\frac{4abc}{3}$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $\left[(a-1)(b-1)\right]\left[(b-1)(c-1)\right]\left[(c-1)(a-1)\right]$

$$=\left[(a-1)(b-1)(c-1)\right]^2 \geq 0$$

នោះ យ៉ាងហោចណាស់មួយក្នុងចំណោម $(a-1)(b-1)$, $(b-1)(c-1)$

, $(c-1)(a-1)$ ជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន

WLOG សន្មតថា $(a-1)(b-1)\geq 0 \Rightarrow ab \geq a+b-1 = 2-c$

$\Rightarrow abc \geq c(2-c)$ (1)

តាម (1) និង វិសមភាព Cauchy-Schwarz យើងបាន

$$a^2+b^2+c^2+\frac{4abc}{3} \geq a^2+b^2+c^2+\frac{4}{3}c(2-c)$$

$$\geq \frac{1}{2}(a+b)^2+c^2+\frac{4}{3}c(2-c)$$

$$=\frac{1}{2}(3-c)^2+c^2+\frac{4}{3}c(2-c)=\frac{1}{6}\left[(c-1)^2+26\right]$$

$$\geq \frac{13}{3}$$ សមភាពលុះត្រាតែ $a=b=c=1$

ហេតុនេះ តម្លៃអប្បបរមានៃ $a^2+b^2+c^2+\frac{4abc}{3}$ គឺ $\frac{13}{3}$

លំហាត់ ៨០

គេឲ្យ α , β ជាមុំស្រួច ។ កំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ $\dfrac{\left(1-\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}\right)^2}{\cot\alpha+\cot\beta}$ ។

ចម្លើយ

តាមវិសមភាព AM-GM យើងបាន

$$\frac{\left(1-\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}\right)^2}{\cot\alpha+\cot\beta}\le\frac{\left(1-\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}\right)^2}{2\sqrt{\cot\alpha\cot\beta}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}\left(1-\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}\left(2\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}\right)\left(1-\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}\right)\left(1-\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}\right)$$

$$\le\frac{1}{4}\left[\frac{2\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}+\left(1-\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}\right)+\left(1-\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}\right)}{3}\right]^3$$

$=\dfrac{2}{27}$ សមភាពលុះត្រាតែ $\alpha=\beta=\arctan\dfrac{1}{3}$

ដូចនេះ $\dfrac{\left(1-\sqrt{\tan\alpha\tan\beta}\right)^2}{\cot\alpha+\cot\beta}$ មានតម្លៃអតិបរមា $\dfrac{2}{27}$

លំហាត់ ៨១

គេឲ្យ $0<x_1<x_2<\ldots<x_9<\ldots<x_{12}$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_9}{x_3+x_6+x_9}+\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{12}}{x_4+x_8+x_{12}}<7 \text{ ។}$$

សម្រាយ

យើងមាន $0<x_1<x_2<\ldots<x_9<\ldots<x_{12}$

គេបាន $\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_9}{x_3+x_6+x_9}+\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_{12}}{x_4+x_8+x_{12}}$

$$<\frac{3x_3+3x_6+3x_9}{x_3+x_6+x_9}+\frac{4x_4+4x_8+4x_{12}}{x_4+x_8+x_{12}}$$

$$=3+4=7$$

ដូចនេះ $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_9}{x_3+x_6+x_9}+\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{12}}{x_4+x_8+x_{12}}<7$

លំហាត់ ៨២

គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2$ ។

សម្រាយ

ចំពោះ $k\geq 2$ យើងបាន $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$

យើងបាន $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$

$$=1+1-\frac{1}{n}<2$$

លំហាត់ ៨៣

គេឲ្យ $a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ ។

បង្ហាញថា $\forall n\in \mathrm{IN}$ គេបាន $\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{2a_2^2}+\ldots+\frac{1}{na_n^2}<2$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\Rightarrow a_{n+1}>a_n>0$

ចំពោះ $k\geq 2$ យើងបាន $\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}=\frac{a_k-a_{k-1}}{a_{k-1}a_k}=\frac{1}{ka_{k-1}a_k}>\frac{1}{ka_k^2}$

គេបាន $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{ka_k^2}<\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right)=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}<\frac{1}{a_1}=1$

ដូចនេះ $\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{2a_2^2}+...+\frac{1}{na_n^2}<2$

លំហាត់ ៨៤

គេឲ្យ x , y , z ជាចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា $x^4+y^4+z^4\geq 4xyz-1$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $x^4+y^4+z^4-4xyz+1$

$$=\left(x^4-2x^2+1\right)+\left(y^4-2y^2z^2+z^4\right)+\left(2y^2z^2-4xyz+2x^2\right)$$

$$=\left(x^2-1\right)^2+\left(y^2-z^2\right)^2+2(yz-x)^2\geq 0$$

គេបាន $x^4+y^4+z^4\geq 4xyz-1$ ពិត

លំហាត់ ៨៥

ចំពោះគ្រប់ x ជាចំនួនពិត បង្ហាញថា $x^{2002}-x^{1999}+x^{1996}-x^{1995}+1>0$ ។

សម្រាយ

បើ $x<0$ គេបាន $x^{2002}-x^{1999}+x^{1996}-x^{1995}+1>0$

បើ $x=0$ គេបាន $x^{2002}-x^{1999}+x^{1996}-x^{1995}+1=1>0$

បើ $0<x<1$ យើងបាន $x^{2002}-x^{1999}+x^{1996}-x^{1995}+1$

$$=x^{2002}+x^{1996}\left(1-x^3\right)+\left(1-x^{1995}\right)>0$$

ព្រោះ $0<x<1\Rightarrow 0<x^3,x^{1995}<1$

បើ $x=1$ យើងបាន $x^{2002}-x^{1999}+x^{1996}-x^{1995}+1=1>0$

បើ $x>1$ យើងបាន $x^{2002}-x^{1999}+x^{1996}-x^{1995}+1$

$$=x^{1999}\left(x^3-1\right)+x^{1995}(x-1)+1>0$$

ព្រោះ $x>1\Rightarrow x^3>1$

ដូចនេះ $x^{2002}-x^{1999}+x^{1996}-x^{1995}+1>0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in \mathrm{IR}$

លំហាត់ ៨៦

គេឲ្យ x , y ជាចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា $3(x+y+1)^2+1\geq 3xy$ ។

សម្រាយ

ចំពោះ a , b ជាពីរចំនួនពិត យើងបាន

$$a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\geq 0$$ សមភាពពេល $a=b=0$

យើងមាន $3(x+y+1)^2+1\geq 3xy$

$$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+3+6x+6y+6xy+1\geq 3xy$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+3xy+4+6x+6y\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(y+\frac{2}{3}\right)+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2\geq 0$$ ពិត

សមភាពពេល $x=y=-\dfrac{2}{3}$

លំហាត់ ៨៧

a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c\geq abc$ ។

បង្ហាញថា យ៉ាងហោចណាស់ពីរក្នុងចំណោមវិសមភាពទាំងបីខាងក្រោមពិត

$\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}+\dfrac{6}{c}\geq 6$, $\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}+\dfrac{6}{a}\geq 6$, $\dfrac{2}{c}+\dfrac{3}{a}+\dfrac{6}{b}\geq 6$ ។

សម្រាយ

តាង $\frac{1}{a}=x$, $\frac{1}{b}=y$, $\frac{1}{c}=z \Rightarrow x,y,z>0$

យើងបាន $a+b+c \ge abc \Leftrightarrow xy+yz+zx \ge 1$

ឧបមាថា $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{6}{c}<6$, $\frac{2}{c}+\frac{3}{a}+\frac{6}{b}<6$

គេបាន $2x+3y+6z<6$

$2z+3x+6y<6$

បូកអង្គ និង អង្គ $5x+9y+8z<12$

ដោយ $x \ge \frac{1-yz}{y+z}$ គេបាន $12>\frac{5-5yz}{y+z}+9y+8z$

$\Leftrightarrow 12(y+z)>5+9y^2+8z^2+12yz$

$\Leftrightarrow (2z-1)^2+(3y+2z-2)^2<0$ ផ្ទុយពីការពិត

ដូចនេះ យ៉ាងហោចណាស់ពីរនៃវិសមភាពដែលឲ្យពិត

លំហាត់ ៨៨

គេឲ្យ a , b , c , x , y , $z>0$ ។

បង្ហាញថា $\frac{ax}{a+x}+\frac{by}{b+y}+\frac{cz}{c+z} \le \frac{(a+b+c)(x+y+z)}{a+b+c+x+y+z}$ ។

សម្រាយ

Lemma ចំពោះ p , q , α , $\beta>0$ គេបាន $\frac{pq}{p+q} \le \frac{\alpha^2 p+\beta^2 q}{(\alpha+\beta)^2}$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\frac{pq}{p+q} \le \frac{\alpha^2 p+\beta^2 q}{(\alpha+\beta)^2}$

$$\Leftrightarrow pq(\alpha+\beta)^2 \le (p+q)(\alpha^2 p+\beta^2 q)$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 p^2 - 2\alpha\beta pq + \beta^2 q^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha p-\beta q)^2 \ge 0$$ ពិត

បើយក $\alpha = x+y+z$, $\beta = a+b+c$

យើងបាន $\dfrac{ax}{a+x} \le \dfrac{(x+y+z)^2 a + (a+b+c)^2 x}{(x+y+z+a+b+c)^2}$

$$\frac{by}{b+y} \le \frac{(x+y+z)^2 b + (a+b+c)^2 y}{(x+y+z+a+b+c)^2}$$

$$\frac{cz}{c+z} \le \frac{(x+y+z)^2 c + (a+b+c)^2 z}{(x+y+z+a+b+c)^2}$$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន

$$\frac{ax}{a+x}+\frac{by}{b+y}+\frac{cz}{c+z} \le \frac{(a+b+c)(x+y+z)}{a+b+c+x+y+z}$$

លំហាត់ ៨៩

ចំពោះ a , b , $c>0$ បង្ហាញថា

$$\frac{2a}{a^2+bc}+\frac{2b}{b^2+ac}+\frac{2c}{c^2+ab} \le \frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}$$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\dfrac{2a}{a^2+bc} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \Leftrightarrow b(a-c)^2 + c(a-b)^2 \ge 0$ ពិត

ហើយ $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2a}{bc}+\dfrac{b}{ac}+\dfrac{c}{ab}\right) \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 \ge 0$ ពិត

គេបាន $\dfrac{2a}{a^2+bc}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2a}{bc}+\dfrac{b}{ac}+\dfrac{c}{ab}\right)$ (1)

ដូចគ្នា $\dfrac{2b}{b^2+ca}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2b}{ac}+\dfrac{c}{ab}+\dfrac{a}{bc}\right)$ (2)

$\dfrac{2c}{c^2+ab}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2c}{ab}+\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ac}\right)$ (3)

បូក (1),(2),(3)យើងបាន $\dfrac{2a}{a^2+bc}+\dfrac{2b}{b^2+ac}+\dfrac{2c}{c^2+ab}\le\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ac}+\dfrac{c}{ab}$

សមភាពពេល $a=b=c$

លំហាត់ ៩០

គេឲ្យ a , b , c , x , y , $z>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+x=b+y=c+z=1$។

បង្ហាញថា $(abc+xyz)\left(\dfrac{1}{ay}+\dfrac{1}{bz}+\dfrac{1}{cx}\right)\ge 3$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $abc+xyz=abc+(1-a)(1-b)(1-c)$

$=(1-b)(1-c)+ac+ab-a$

គេបាន $\dfrac{abc+xyz}{a(1-b)}=\dfrac{1-c}{a}+\dfrac{c}{1-b}-1$

ដូចគ្នា $\dfrac{abc+xyz}{b(1-c)}=\dfrac{1-a}{b}+\dfrac{a}{1-c}-1$

$\dfrac{abc+xyz}{c(1-a)}=\dfrac{1-b}{c}+\dfrac{b}{1-a}-1$

បូកអង្គ និង អង្គ $(abc+xyz)\left(\dfrac{1}{ay}+\dfrac{1}{bz}+\dfrac{1}{cx}\right)$

$$= \frac{a}{1-c}+\frac{b}{1-a}+\frac{c}{1-b}+\frac{1-c}{a}+\frac{1-b}{c}+\frac{1-a}{b}-3$$

$\geq 6-3=3$ (តាមវិសមភាព AM-GM)

លំហាត់ ៩១

គេឲ្យ $a_1,\ a_2,\dots,a_n$ ជា n ចំនួនពិតវិជ្ជមាន ហើយ $b_1,\ b_2,\dots,\ b_n$ ជាចម្លាស់មួយរបស់វា ។ បង្ហាញថា $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}\geq\sum_{i=1}^{n}a_i$ ។

សម្រាយ

ចំពោះ $x,\ y>0$ យើងបាន $\frac{x^2}{y}\geq 2x-y$

គេបាន $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}\geq\sum_{i=1}^{n}(2a_i-b_i)=2\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}a_i$

ព្រោះ $b_1,\ b_2,\dots,\ b_n$ ជាចម្លាស់នៃ $a_1,\ a_2,\dots,a_n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i$

លំហាត់ ៩២

បើ $x>0$ កំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃ $\frac{x^2+1}{x+1}$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $A=\frac{x^2+1}{x+1}=\frac{x^2-1+2}{x+1}=x-1+\frac{2}{x+1}$

$$=x+1+\frac{2}{x+1}-2\geq 2\sqrt{2}-2$$

ដូចនេះ $A_{\min} = 2\sqrt{2} - 2$ ពេល $x = \sqrt{2} - 1$

លំហាត់ ៩៣

គេឲ្យ a , b , $c > 0$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $abc = 1$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}$$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow ab + ac + bc + a + b + c \geq 3(abc + 1)$$

$$\Leftrightarrow ab + ac + bc + a + b + c \geq 6$$ ពិត

ព្រោះ តាម AM-GM យើងបាន $ab + ac + bc + a + b + c \geq 6\sqrt[3]{(abc)^3} = 6$

លំហាត់ ៩៤

គេឲ្យ x , $y \geq 0$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $y(y+1) \leq (x+1)^2$ ។

បង្ហាញថា $y(y-1) \leq x^2$ ។

សម្រាយ

បើ $0 \leq y \leq 1$ គេបាន $y(y-1) \leq 0 \leq x^2$

បើ $y > 1$

ករណី $x + \frac{1}{2} \leq y$ គេបាន $y(y-1) = y(y+1) - 2y$

$$\leq (x+1)^2 - 2\left(x + \frac{1}{2}\right) = x^2$$

ករណី $x+\frac{1}{2}>y$ គេបាន $x>y-\frac{1}{2}>0$

$$\Rightarrow x^2>\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=y(y-1)+\frac{1}{4}>y(y-1)$$

ហេតុនេះ $y(y-1)\le x^2$

លំហាត់ ៩៥

ចំពោះ $x\,,\; y>0$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x^3+y^3\le x-y$ ។

បង្ហាញថា $x^2+y^2\le 1$ ។

សម្រាយ

ដោយ $x^3+y^3\le x-y$ គេបាន $0\le y\le x$

ហើយ $0\le x^3\le x^3+y^3\le x-y\le x\Rightarrow x\le 1$

យើងបាន $0\le y\le x\le 1\Rightarrow x(x+y)\le 2\Rightarrow xy(x+y)\le 2y$

ម្យ៉ាងទៀត $x^3+y^3\le x-y\Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2)\le x-y$

$$\Rightarrow x^2-xy+y^2\le\frac{x-y}{x+y}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2\le\frac{x-y}{x+y}+xy=\frac{x-y+xy(x+y)}{x+y}$$

$$\le\frac{x-y+2y}{x+y}=\frac{x+y}{x+y}=1$$

ដូចនេះ $x^2+y^2\le 1$

លំហាត់ ៩៦

គេឲ្យ a , b , x , y ជាចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $ay-bx=1$ ។

បង្ហាញថា $a^2+b^2+x^2+y^2+ax+by\ge\sqrt{3}$ ។

សម្រាយ

តាង $u=a^2+b^2$, $v=x^2+y^2$ និង $w=ax+by$

គេបាន $uv=\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$

$$=(ax+by)^2+(ay-bx)^2=w^2+1$$

យើងមាន $\left(t\sqrt{3}+1\right)^2\ge 0\Rightarrow 3t^2+1\ge -2t\sqrt{3}\Rightarrow 4t^2+4\ge\left(\sqrt{3}-t\right)^2$

ចំពោះ $\forall t\in\mathrm{IR}$

យើងបាន $(u+v)^2\ge 4uv=4\left(w^2+1\right)=4w^2+4\ge\left(\sqrt{3}-w\right)^2$

$$\Rightarrow u+v\ge\sqrt{3}-w$$

ដូចនេះ $a^2+b^2+x^2+y^2+ax+by\ge\sqrt{3}$

លំហាត់ ៩៧

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ ។

បង្ហាញថា $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)\ge abcd$ ។

សម្រាយ

តាម AM-GM យើងបាន $2cd\le c^2+d^2=1-a^2-b^2$

$$\Rightarrow 2(1-a)(1-b)-2cd\ge 2(1-a)(1-b)-1+a^2+b^2$$

$$=(1-a-b)^2\ge 0$$

$$\Rightarrow (1-a)(1-b)\ge cd$$

ស្រាយដូចគ្នា គេបាន $(1-c)(1-d)\ge ab$

ដូចនេះ $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \ge abcd$

លំហាត់ ៩៨

គេឲ្យ x , y ជាពីរចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$4(x^9 + y^9) \ge (x^2 + y^2)(x^3 + y^3)(x^4 + y^4)$ ។

សម្រាយ

សន្មតថា $x \ge y \ge 0$

ចំពោះ a , $b \in \text{IN}$ គេបាន $x^a \ge y^a$, $x^b \ge y^b$

ហេតុនេះ $(x^a - y^a)(x^b - y^b) \ge 0$

$$\Rightarrow x^{a+b} + y^{a+b} \ge x^a y^b + x^b y^a$$

$$\Rightarrow 2(x^{a+b} + y^{a+b}) \ge (x^a + y^a)(x^b + y^b)$$

យើងបាន $2(x^5 + y^5) \ge (x^2 + y^2)(x^3 + y^3)$ (1)

$2(x^9 + y^9) \ge (x^5 + y^5)(x^4 + y^4)$ (2)

គុណអង្គ និង អង្គយើងបាន $4(x^9 + y^9) \ge (x^2 + y^2)(x^3 + y^3)(x^4 + y^4)$

លំហាត់ ៩៩

គេឲ្យ x , y , $z > 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $xyz = 1$ និង $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \ge x + y + z$ ។

បង្ហាញថា $\frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^n} + \frac{1}{z^n} \ge x^n + y^n + z^n$ ។

សម្រាយ

តាង $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$, $z = \frac{c}{a}$

យើងបាន $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq x+y+z \Leftrightarrow \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$

$$\Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a\geq ab^2+bc^2+ca^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(b-c)(c-a)\leq 0$$

យក $A=a^n$, $B=b^n$, $C=c^n$

យើងបាន $(A-B)(B-C)(C-A)\leq 0$

$$\Rightarrow \frac{B}{A}+\frac{C}{B}+\frac{A}{C}\geq \frac{A}{B}+\frac{B}{C}+\frac{C}{A}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}\geq x^n+y^n+z^n$$

លំហាត់ ១០០

គេឲ្យ x , y , $z\neq 1$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $xyz=1$ ។ បង្ហាញថា

$\left(\frac{3-x}{1-x}\right)^2+\left(\frac{3-y}{1-y}\right)^2+\left(\frac{3-z}{1-z}\right)^2>7$ ។

ចម្លើយ

យើងមាន $A=\left(\frac{3-x}{1-x}\right)^2+\left(\frac{3-y}{1-y}\right)^2+\left(\frac{3-z}{1-z}\right)^2-7$

$$=\left(1+\frac{2}{1-x}\right)^2+\left(1+\frac{2}{1-y}\right)^2+\left(1+\frac{2}{1-z}\right)^2-7$$

តាង $\frac{1}{1-x}=a$, $\frac{1}{1-y}=b$, $\frac{1}{1-z}=c$

គេបាន $A=(1+2a)^2+(1+2b)^2+(1+2c)^2-7$

$$=4a^2+4b^2+4c^2+4a+4b+4c-4 \qquad (1)$$

ម៉្យាងទៀត $xyz = 1 \Rightarrow abc = (a-1)(b-1)(c-1)$

$$\Rightarrow a+b+c-1 = ab+bc+ca$$

តាម (1) យើងបាន $A = 4a^2 + 4b^2 + 4c + 4(ab+bc+ca)$

$$= 2\left[(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2\right] > 0$$

ដូចនេះ $\left(\frac{3-x}{1-x}\right)^2 + \left(\frac{3-y}{1-y}\right)^2 + \left(\frac{3-z}{1-z}\right)^2 > 7$

លំហាត់ ១០១

គេឲ្យ x, y, $z \le 1$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $x+y+z=1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \le \frac{27}{10}$ ។

សម្រាយ

$\forall t \le 1 \Rightarrow \frac{1}{1+t^2} \le \frac{27}{50}(2-t)$

ព្រោះ $\frac{1}{1+t^2} \le \frac{27}{50}(2-t) \Leftrightarrow (4-3t)(1-3t)^2 \ge 0$

យើងបាន $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \le \frac{27}{50}(2-x+2-y+2-z)$

$$= \frac{27}{50}(6-x-y-z) = \frac{27}{10}$$

លំហាត់ ១០២

គេឲ្យ a, b, $c \ge 0$ ។

បង្ហាញថា $9(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $9(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\geq 0$ ពិត

លំហាត់ ១០៣

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា

$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\geq 3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$

យក $x=a^2+bc-ab$, $y=b^2+ca-bc$, $z=c^2+ab-ca$

យើងបាន $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\geq 3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)$

លំហាត់ ១០៤

គេឲ្យ a , b , c បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a^2+b^2+c^2=3$ ។

បង្ហាញថា $a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)\leq 6$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)\leq 6$

$\Leftrightarrow a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)\leq \frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$

$\Leftrightarrow 2\left(a^4+b^4+c^4\right)+4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$

$\geq 3ab\left(a^2+b^2\right)+3bc\left(b^2+c^2\right)+3ca\left(c^2+a^2\right)$ (*)

ដោយ $a^4+b^4+4a^2b^2\geq 3ab\left(a^2+b^2\right)$ (1)

$\Leftrightarrow (a-b)^4+ab(a-b)^2\geq 0$ ពិត

ដូចគ្នាដែរ $b^4+c^4+4b^2c^2 \geq 3bc\left(b^2+c^2\right)$ (2)

$c^4+a^4+4c^2a^2 \geq 3ca\left(c^2+a^2\right)$ (3)

បូក (1),(2),(3) យើងបាន (*) ពិត

ដូចនេះ $a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b) \leq 6$

លំហាត់ ១០៥

ចំពោះ a , b , $c>0$ បង្ហាញថា $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$ ។

សម្រាយ

បង្ហាញថា $\sqrt{\frac{x}{y+z}} \geq \frac{2x}{x+y+z}$ ចំពោះ $\forall x,\ y,\ z>0$

យើងមាន $\sqrt{\frac{x}{y+z}} \geq \frac{2x}{x+y+z} \Leftrightarrow \frac{x}{y+z} \geq \left(\frac{2x}{x+y+z}\right)^2$

$\Leftrightarrow (x+y+z)^2 \geq 4x(y+z) \Leftrightarrow (y+z-x)^2 \geq 0$ ពិត

សមភាពពេល $x=y+z$

គេបាន $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2a+2b+2c}{a+b+c}=2$

សមភាពពេល $a=b+c$, $b=c+a$, $c=a+b \Rightarrow a=b=c=0$ មិនអាច

ដូចនេះ $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$

លំហាត់ ១០៦

គេឲ្យ a , b , $c>0$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a^2+b^2+c^2=3$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a}{b+2}+\frac{b}{c+2}+\frac{c}{a+2}\le 1$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\frac{a}{b+2}+\frac{b}{c+2}+\frac{c}{a+2}\le 1 \Leftrightarrow ab^2+bc^2+ca^2\le 2+abc$

សន្មតថា $a\ge b\ge c$

យើងបាន $a(b-a)(b-c)\le 0 \Leftrightarrow a^2b+abc\ge ab^2+ca^2$

$$\Rightarrow ab^2+bc^2+ca^2\le a^2b+abc+bc^2$$

បង្ហាញថា $a^2b+bc^2\le 2$

យើងមាន $a^2b+bc^2\le 2\Leftrightarrow b(3-b^2)\le 2\Leftrightarrow (b-1)^2(b+2)\ge 0$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{a}{b+2}+\frac{b}{c+2}+\frac{c}{a+2}\le 1$

លំហាត់ ១០៧

គេឲ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្សេងគ្នា ។ បង្ហាញថា

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\ge \frac{4}{xy+yz+zx}$$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{4}{ab}=\frac{(a^2+b^2-3ab)^2}{a^2b^2(a-b)^2}\ge 0$

ចំពោះ $\forall a,b>0$

$$\Rightarrow \frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge \frac{4}{ab} \quad (*)$$

ដោយមិនបាត់បង់នូវភាពទូទៅ សន្មតថា $z=\min\{x,y,z\}$

តាម (*) យើងបាន $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\geq\frac{4}{(x-z)(y-z)}$

បង្ហាញថា $\frac{4}{(x-z)(y-z)}\geq\frac{4}{xy+yz+zx}$

យើងមាន $\frac{4}{(x-z)(y-z)}\geq\frac{4}{xy+yz+zx}$

$\Leftrightarrow xy+yz+zx\geq(x-z)(y-z)$

$\Leftrightarrow 2z(y+x)\geq z^2$ ពិត ព្រោះ $z=\min\{x,y,z\}$

លំហាត់ ១០៨

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$3(a^2-a+1)(b^2-b+1)(c^2-c+1)\geq 1+abc+(abc)^2$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $2(a^2-a+1)(b^2-b+1)=1+a^2b^2+(a-b)^2+(1-a)^2(1-b)^2$

$\Rightarrow 2(a^2-a+1)(b^2-b+1)\geq 1+a^2b^2$

$\Rightarrow 3(a^2-a+1)(b^2-b+1)(c^2-c+1)\geq\frac{3}{2}(1+a^2b^2)(c^2-c+1)$

បង្ហាញថា $3(1+a^2b^2)(c^2-c+1)\geq 2\left[1+abc+(abc)^2\right]$

យើងមាន $3(1+a^2b^2)(c^2-c+1)\geq 2\left[1+abc+(abc)^2\right]$

$\Leftrightarrow(3+a^2b^2)c^2-(3+2ab+3a^2b^2)c+1+3a^2b^2\geq 0$ ពិត

ព្រោះ $3+a^2b^2>0$ និង $\Delta=-3(1-ab)^4\leq 0$

ដូចនេះ $3(a^2-a+1)(b^2-b+1)(c^2-c+1)\geq 1+abc+(abc)^2$

សមភាពពេល $a=b=c=1$

លំហាត់ ១០៩

គេឲ្យ a, b ជាចំនួនពិត និង a ខុសពីសូន្យ ។ បង្ហាញថា

$a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a}\geq\sqrt{3}$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a}=\left(b+\frac{1}{2a}\right)^2+a^2+\frac{3}{4a^2}$

$\Rightarrow a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a}\geq a^2+\frac{3}{4a^2}\geq\sqrt{3}$ តាមវិសមភាព AM-GM

ដូចនេះ $a^2+b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a}\geq\sqrt{3}$

លំហាត់ ១១០

គេឲ្យ a, b, $c>0$ ។ បង្ហាញថា $\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b}\geq 3$ ។

សម្រាយ

ចំពោះ $\forall x\in \mathrm{IR}$ គេបាន $x^2+1\geq 2x$

យើងបាន $\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b}\geq\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}$

ដោយ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$ (វិសមភាព Nesbitt)

គេបាន $\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b}\geq 3$

លំហាត់ ១១១

គេឲ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $xy+yz+zx=5$ ។

បង្ហាញថា $3x^2+3y^2+z^2\geq 10$ ។

សម្រាយ

តាម AM-GM យើងបាន $4x^2+z^2\geq 4xz$

$$4y^2+z^2\geq 4yz$$

$$2x^2+2y^2\geq 4xy$$

គេបាន $6x^2+6y^2+2z^2\geq 4(xy+yz+zx)=4(5)=20$

ដូចនេះ $3x^2+3y^2+z^2\geq 10$

លំហាត់ ១១២

ចំពោះ a, b, $c>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $ab+bc+ca>a+b+c$ ។

បង្ហាញថា $a+b+c>3$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$$\geq ab+bc+ca+2(ab+bc+ca)$$

$$=3(ab+bc+ca)$$

$$>3(a+b+c)$$

ដូចនេះ $a+b+c>3$

លំហាត់ ១១៣

គេឲ្យ a, b ជាពីរចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $9a^2+8ab+7b^2\leq 6$ ។

បង្ហាញថា $7a+5b+12ab \le 9$ ។

សម្រាយ

តាម AM-GM យើងបាន

$$7a+5b+12ab \le 7\left(a^2+\frac{1}{4}\right)+5\left(b^2+\frac{1}{4}\right)+12ab$$

$$=7a^2+5b^2+12ab+3$$

$$=9a^2+8ab+7b^2-2a^2+4ab-2b^2+3$$

$$=9a^2+8ab+7b^2-2(a-b)^2+3 \le 6+3=9$$

ដូចនេះ $7a+5b+12ab \le 9$

លំហាត់ ១១៤

គេឲ្យ $x,\ y,\ z>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $xyz \ge xy+yz+zx$ ។

បង្ហាញថា $xyz \ge 3(x+y+z)$ ។

សម្រាយ

តាង $\frac{1}{x}=a\ ,\ \frac{1}{y}=b\ ,\ \frac{1}{z}=c$

យើងបាន $xyz \ge xy+yz+zx \Leftrightarrow a+b+c \le 1 \quad (1)$

ដោយ $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca) \quad (2)$

តាម (1),(2) គេបាន $3(ab+bc+ca) \le 1 \Leftrightarrow xyz \ge 3(x+y+z)$

លំហាត់ ១១៥

គេឲ្យ $a,\ b,\ c>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2+b^2+c^2=3$ ។

បង្ហាញថា $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge 3$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge 3$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)^2\ge 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}+2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}\ge a^2+b^2+c^2$$ ពិត

ព្រោះ តាម AM-GM យើងបាន

$$\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}\ge 2b^2,\ \frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}\ge 2c^2,\ \frac{c^2a^2}{b^2}+\frac{a^2b^2}{c^2}\ge 2a^2$$

គេបាន $\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}\ge a^2+b^2+c^2$

លំហាត់ ១១៦

គេឲ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=\sqrt{abc}$ ។

បង្ហាញថា $ab+bc+ca\ge 9(a+b+c)$ ។

សម្រាយ

តាម AM-GM យើងបាន $\sqrt{abc}=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow abc\ge 3^6$

គេបាន $a+b+c=\sqrt{abc}\ge\sqrt{3^6}=3^3$

ហេតុនេះ $ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}$

$$\Rightarrow (ab+bc+ca)^3 \geq 3^3(abc)^2 = 3^3(a+b+c)^4$$
$$\geq 3^6(a+b+c)^3$$

ដូចនេះ $ab+bc+ca \geq 9(a+b+c)$

លំហាត់ ១១៧

គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc \geq 1$ ។

បង្ហាញថា $\left(a+\frac{1}{a+1}\right)\left(b+\frac{1}{b+1}\right)\left(c+\frac{1}{c+1}\right) \geq \frac{27}{8}$ ។

សម្រាយ

តាម AM-GM យើងបាន $\frac{a+1}{4}+\frac{1}{a+1} \geq 2\sqrt{\left(\frac{a+1}{4}\right)\left(\frac{1}{a+1}\right)} = 1$

ហើយ $\frac{3a}{4}+\frac{3}{4} \geq 2\sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{3}{2}\sqrt{a}$

បូកអង្គ និង អង្គ $a+\frac{1}{a+1} \geq \frac{3}{2}\sqrt{a}$

ស្រាយដូចគ្នា គេបាន $b+\frac{1}{b+1} \geq \frac{3}{2}\sqrt{b}$, $c+\frac{1}{c+1} \geq \frac{3}{2}\sqrt{c}$

$$\Rightarrow \left(a+\frac{1}{a+1}\right)\left(b+\frac{1}{b+1}\right)\left(c+\frac{1}{c+1}\right) \geq \frac{27}{8}\sqrt{abc} \geq \frac{27}{8}$$

លំហាត់ ១១៨

គេឲ្យ a, b, c, $d > 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2+b^2+c^2+d^2=4$ ។

បង្ហាញថា $a+b+c+d \geq ab+bc+cd+da$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $a+b+c+d \geq ab+bc+cd+da$

$$\Leftrightarrow a+b+c+d \geq (a+c)(b+d)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d} \geq 1$$ ពិត

ព្រោះ តាម AM-HM គេបាន $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d} \geq \frac{4}{a+b+c+d}$ (1)

តាម QM-AM គេបាន $\frac{a+b+c+d}{4} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}=1$

$$\Rightarrow \frac{4}{a+b+c+d} \geq 1 \quad (2)$$

តាម (1),(2) គេបាន $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d} \geq 1$

លំហាត់ ១១៩

គេឲ្យ a , b , $c \in (-3,3)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{3+a}+\frac{1}{3+b}+\frac{1}{3+c}$
$=\frac{1}{3-a}+\frac{1}{3-b}+\frac{1}{3-c}$ ។ បង្ហាញថា $\frac{1}{3+a}+\frac{1}{3+b}+\frac{1}{3+c} \geq 1$ ។

សម្រាយ

តាម AM-GM គេបាន

$$[(3+a)+(3+b)+(3+c)]\left(\frac{1}{3+a}+\frac{1}{3+b}+\frac{1}{3+c}\right) \geq 9 \quad (1)$$

ហើយ $[(3-a)+(3-b)+(3-c)]\left(\frac{1}{3-a}+\frac{1}{3-b}+\frac{1}{3-c}\right) \geq 9$

$$\Rightarrow [(3-a)+(3-b)+(3-c)]\left(\frac{1}{3+a}+\frac{1}{3+b}+\frac{1}{3+c}\right)\geq 9 \qquad (2)$$

ព្រោះ $\frac{1}{3+a}+\frac{1}{3+b}+\frac{1}{3+c}=\frac{1}{3-a}+\frac{1}{3-b}+\frac{1}{3-c}$

បូក (1),(2) គេបាន $18\left(\frac{1}{3+a}+\frac{1}{3+b}+\frac{1}{3+c}\right)\geq 18$

ដូចនេះ $\frac{1}{3+a}+\frac{1}{3+b}+\frac{1}{3+c}\geq 1$

លំហាត់ ១២០

គេឲ្យ a , b , $c>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2+b^2+c^2=3$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{1}{a+bc+abc}+\frac{1}{b+ca+bca}+\frac{1}{c+ab+cab}\geq 1 \text{ ។}$$

សម្រាយ

តាម AM-HM យើងបាន $\frac{1}{a+bc+abc}+\frac{1}{b+ca+bca}+\frac{1}{c+ab+cab}$

$$\geq \frac{9}{a+b+c+ab+bc+ca+3abc} \qquad (1)$$

ដោយ $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, $(a+b+c)^2\leq 3(a^2+b^2+c^2)$

តែ $a^2+b^2+c^2=3$

គេបាន $ab+bc+ca\leq 3$ និង $a+b+c\leq 3$ (2)

តាម AM-GM យើងបាន $a^2+b^2+c^2\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}\Rightarrow abc\leq 1$ (3)

តាម (1),(2),(3) គេបាន $\frac{1}{a+bc+abc}+\frac{1}{b+ca+bca}+\frac{1}{c+ab+cab}$

$$\geq \frac{9}{3+3+3} = 1$$

លំហាត់ ១២១

គេឲ្យ a , b , $c > 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c=3$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a^2b^2+a^2+b^2}{ab+1} + \frac{b^2c^2+b^2+c^2}{bc+1} + \frac{c^2a^2+c^2+a^2}{ca+1} \geq \frac{9}{2} \text{ ។}$$

សម្រាយ

យើងមាន $(a-1)^2(b-1)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow a^2b^2 - 2a^2b + a^2 - 2ab^2 + 4ab - 2a + b^2 - 2b + 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + a^2 + b^2 \geq 2a^2b + 2ab^2 + 2a + 2b - 4ab - 1$$

$$= 2a(ab+1) + 2b(ab+1) - 4(ab+1) + 3$$

$$= (ab+1)(2a+2b-4) + 3$$

យើងបាន $\frac{a^2b^2+a^2+b^2}{ab+1} \geq 2a + 2b - 4 + \frac{3}{ab+1}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នា $\frac{b^2c^2+b^2+c^2}{bc+1} \geq 2b + 2c - 4 + \frac{3}{bc+1}$ (2)

$\frac{c^2a^2+c^2+a^2}{ca+1} \geq 2c + 2a - 4 + \frac{3}{ca+1}$ (3)

បូក (1),(2),(3) យើងបាន

$$\frac{a^2b^2+a^2+b^2}{ab+1} + \frac{b^2c^2+b^2+c^2}{bc+1} + \frac{c^2a^2+c^2+a^2}{ca+1}$$

$$\geq 4(a+b+c) - 12 + \frac{3}{ab+1} + \frac{3}{bc+1} + \frac{3}{ca+1}$$

$= \frac{3}{ab+1} + \frac{3}{bc+1} + \frac{3}{ca+1}$ (4)

តាម AM-HM យើងបាន $\frac{1}{ab+1}+\frac{1}{bc+1}+\frac{1}{ca+1}\geq\frac{9}{3+ab+bc+ca}$ (5)

ដោយ $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)\Rightarrow ab+bc+ca\leq 3$ (6)

តាម (4),(5),(6) គេបាន

$$\frac{a^2b^2+a^2+b^2}{ab+1}+\frac{b^2c^2+b^2+c^2}{bc+1}+\frac{c^2a^2+c^2+a^2}{ca+1}$$

$$\geq\frac{27}{3+ab+bc+ca}\geq\frac{27}{3+3}=\frac{9}{2}$$

លំហាត់ ១២២

គេឲ្យ a , b , c , d ជាបួនចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a^2+b^2+c^2+d^2=4$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a^2+b^2+3}{a+b}+\frac{b^2+c^2+3}{b+c}+\frac{c^2+d^2+3}{c+d}+\frac{d^2+a^2+3}{d+a}\geq 10$$ ។

សម្រាយ

ចំពោះ x , $y\in \mathrm{IR}$ គេបាន $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\geq 0$

សមភាពពេល $x=y=0$

គេបាន $(a-1)^2+(a-1)(b-1)+(b-1)^2\geq 0$

$$\Rightarrow a^2+b^2+ab-3a-3b+3\geq 0$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+3\geq 3a+3b-ab$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2+3}{a+b}\geq 3-\frac{ab}{a+b}$$

ដោយ $\frac{a+b}{4}\ge\frac{ab}{a+b}$ គេបាន $\frac{a^2+b^2+3}{a+b}\ge 3-\frac{a+b}{4}$

ស្រាយដូចគ្នា គេបាន $\frac{b^2+c^2+3}{b+c}\ge 3-\frac{b+c}{4}$

$$\frac{c^2+d^2+3}{c+d}\ge 3-\frac{c+d}{4}$$

$$\frac{d^2+a^2+3}{d+a}\ge 3-\frac{d+a}{4}$$

បូកអង្គ និង អង្គគេបាន $\frac{a^2+b^2+3}{a+b}+\frac{b^2+c^2+3}{b+c}+\frac{c^2+d^2+3}{c+d}$

$$+\frac{d^2+a^2+3}{d+a}\ge 12-\frac{a+b+c+d}{2}\quad (*)$$

តាម QM-AM យើងបាន $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}\ge\frac{a+b+c+d}{4}$

$\Rightarrow a+b+c+d\le 4$ ព្រោះ $a^2+b^2+c^2+d^2=4$

តាម (*) គេបាន $\frac{a^2+b^2+3}{a+b}+\frac{b^2+c^2+3}{b+c}+\frac{c^2+d^2+3}{c+d}$

$$+\frac{d^2+a^2+3}{d+a}\ge 12-\frac{4}{2}=10$$

លំហាត់ ១២៣

គេឲ្យ a, b, c, d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា

$$\frac{1}{ab(a+b)}+\frac{1}{bc(b+c)}+\frac{1}{ca(c+a)}\ge\frac{9}{2(a^3+b^3+c^3)}$$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $(a+b)(a-b)^2\ge 0\Rightarrow a^3+b^3\ge ab(a+b)$

គេបាន $\frac{1}{ab(a+b)} \geq \frac{1}{a^3+b^3}$

ដូចគ្នាដែរ គេបាន $\frac{1}{bc(b+c)} \geq \frac{1}{b^3+c^3}$ និង $\frac{1}{ca(c+a)} \geq \frac{1}{c^3+a^3}$

បូកអង្គ និង អង្គយើងបាន $\frac{1}{ab(a+b)}+\frac{1}{bc(b+c)}+\frac{1}{ca(c+a)}$

$$\geq \frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{b^3+c^3}+\frac{1}{c^3+a^3}$$

តាម AM-HM យើងមាន $\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{b^3+c^3}+\frac{1}{c^3+a^3} \geq \frac{9}{2(a^3+b^3+c^3)}$

ដូចនេះ $\frac{1}{ab(a+b)}+\frac{1}{bc(b+c)}+\frac{1}{ca(c+a)} \geq \frac{9}{2(a^3+b^3+c^3)}$

លំហាត់ ១២៤

គេឲ្យ $a\,,\ b\,,\ c>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab} \geq 1$ ។

បង្ហាញថា $a+b+c \geq \sqrt{3}$ ។

សម្រាយ

តាម AM-GM យើងបាន $1 \leq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}$

$$\leq \frac{a(b+c)}{2}+\frac{b(c+a)}{2}+\frac{c(a+b)}{2}$$

$$= ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

ដូចនេះ $a+b+c \geq \sqrt{3}$

លំហាត់ ១២៥

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $abc=1$ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{b+c}{\sqrt{a}}+\dfrac{c+a}{\sqrt{b}}+\dfrac{a+b}{\sqrt{c}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$ ។

សម្រាយ

តាម AM-GM យើងបាន $\dfrac{b+c}{\sqrt{a}}+\dfrac{c+a}{\sqrt{b}}+\dfrac{a+b}{\sqrt{c}}$

$$\geq 2\sqrt{\frac{bc}{a}}+2\sqrt{\frac{ca}{b}}+2\sqrt{\frac{ab}{c}}$$

$$=\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)+\left(\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)+\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)$$

$$\geq 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3\sqrt[6]{abc}$$

ដោយ $abc=1$

ដូចនេះ $\dfrac{b+c}{\sqrt{a}}+\dfrac{c+a}{\sqrt{b}}+\dfrac{a+b}{\sqrt{c}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$

លំហាត់ ១២៦

គេឲ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $x+y+z=4$ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{1}{2xy+yz+zx}+\dfrac{1}{xy+2yz+zx}+\dfrac{1}{xy+yz+2zx}\leq\dfrac{1}{xyz}$ ។

សម្រាយ

តាម AM-HM គេបាន $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{4}{a+b}$ ចំពោះ $\forall a,b>0$

យើងបាន $\dfrac{1}{2xy+yz+zx}=\dfrac{1}{(xy+yz)+(xy+zx)}$

$$\le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{xy+zx}+\frac{1}{xy+yz}\right)$$

$$\le \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{zx}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}\right)\right]$$

$$=\frac{x+y+2z}{16xyz}$$

ដូចគ្នាដែរ $\dfrac{1}{xy+2yz+zx}\le\dfrac{2x+y+z}{16xyz}$

$$\frac{1}{xy+yz+2zx}\le\frac{x+2y+z}{16xyz}$$

បូកអង្គ និង អង្គ គេបាន $\dfrac{1}{2xy+yz+zx}+\dfrac{1}{xy+2yz+zx}+\dfrac{1}{xy+yz+2zx}$

$$\le\frac{4(x+y+z)}{16xyz}=\frac{1}{xyz}$$

លំហាត់ ១២៧

យក a , b , $c\in \mathrm{IR}^+$ ។ បង្ហាញថា $abc\ge(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ ។

សម្រាយ

តាង $a+b-c=x$, $b+c-a=y$ និង $c+a-b=z$

$\Rightarrow a=\dfrac{x+z}{2}$, $b=\dfrac{x+y}{2}$, $c=\dfrac{y+z}{2}$

គេបាន $abc\ge(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

$$\Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x)\ge 8xyz$$

បើ $x\le 0\Leftrightarrow c\ge a+b$ គេបាន y , $z>0$

$\Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x) \geq 0 \geq 8xyz$

បើ x , y , $z > 0$ តាម AM-GM

យើងបាន $(x+y)(y+z)(z+x) \geq \left(2\sqrt{xy}\right)\left(2\sqrt{yz}\right)\left(2\sqrt{zx}\right) = 8xyz$

លំហាត់ ១២៨

គេឲ្យ a , b , $c > 0$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b+c=3$ ។បង្ហាញថា

$abc + \dfrac{12}{ab+bc+ca} \geq 5$ ។

សម្រាយ

តាម លំហាត់ ១២៧ គេមាន $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

ដោយ $a+b+c=3$

គេបាន $abc \geq (3-2a)(3-2b)(3-2c)$

$$\Rightarrow abc \geq 27 - 18(a+b+c) + 12(ab+bc+ca) - 8abc$$

$$\Rightarrow abc \geq \frac{4(ab+bc+ca)}{3} - 3$$

$$\Rightarrow abc + \frac{12}{ab+bc+ca} \geq \frac{4(ab+bc+ca)}{3} + \frac{12}{ab+bc+ca} - 3$$

$\geq 8 - 3 = 5$ តាម AM-GM

ដូចនេះ $abc + \dfrac{12}{ab+bc+ca} \geq 5$

លំហាត់ ១២៩

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc=1$ ។ បង្ហាញថា

$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1$ ។

សម្រាយ

ដោយ $abc=1$ យើងយក $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$ និង $c=\frac{z}{x}$ (x , y , $z>0$)

យើងបាន $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z}-1+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}-1+\frac{y}{x}\right)\leq 1$$

$\Leftrightarrow (x+y-z)(z+x-y)(y+z-x)\leq xyz$ ពិត តាម លំហាត់ ១២៧

ដូចនេះ $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1$

លំហាត់ ១៣០

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបំពេញលក្ខខណ្ឌ $abc=1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\leq\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}$ ។

សម្រាយ

តាង $x=a+b+c$ និង $y=ab+bc+ca$

តាម AM-GM និង $abc=1$ គេបាន x , $y\geq 3$

យើងបាន $\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}$

$$\Leftrightarrow \frac{3+4x+y+x^2}{2x+y+x^2+xy}\leq\frac{12+4x+y}{9+4x+2y}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2y+xy^2+6xy-5x^2-y^2-24x-3y-27\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3x^2y-5x^2-12x\right)+\left(xy^2-y^2-3x-3y\right)$$
$$+\left(6xy-9x-27\right)\geq 0 \text{ ពិត ចំពោះ } \forall x\,,\ y\geq 3$$

លំហាត់ ១៣១

គេឲ្យ $a\,,\ b\,,\ c>0$ ។ បង្ហាញថា $(a+b)^2+(a+b+4c)^2\geq \dfrac{100abc}{a+b+c}$ ។

សម្រាយ

តាម AM-GM យើងបាន $(a+b)^2+(a+b+4c)^2$

$$=(a+b)^2+(a+2c+b+2c)^2$$
$$\geq 4ab+\left(2\sqrt{2ac}+2\sqrt{2bc}\right)^2$$
$$=4ab+8ac+8bc+16c\sqrt{ab}$$

គេបាន $\left[\dfrac{(a+b)^2+(a+b+4c)^2}{abc}\right](a+b+c)$

$$\geq\left(\frac{4ab+8ac+8bc+16c\sqrt{ab}}{abc}\right)(a+b+c)$$
$$=\left(\frac{4}{c}+\frac{8}{b}+\frac{8}{a}+\frac{16}{\sqrt{ab}}\right)(a+b+c)$$
$$=8\left(\frac{1}{2c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+c\right)$$
$$\geq 8\times 5\times\sqrt[5]{\frac{1}{2a^2b^2c}}\times 5\times\sqrt[5]{\frac{a^2b^2c}{16}}=100$$

ដូចនេះ $(a+b)^2+(a+b+4c)^2\geq \dfrac{100abc}{a+b+c}$

លំហាត់ ១៣២

គេឲ្យ a, b, $c>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc=1$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ca}{1+c}\geq 3$$ ។

សម្រាយ

ដោយ $abc=1$ គេបាន $\frac{1+ab}{1+a}=\frac{abc+ab}{1+a}=\frac{ab(c+1)}{a+1}$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{1+bc}{1+b}=\frac{bc(a+1)}{b+1}$ និង $\frac{1+ca}{1+c}=\frac{ca(b+1)}{c+1}$

តាម AM-GM យើងបាន $\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ca}{1+c}$

$$=\frac{ab(c+1)}{a+1}+\frac{bc(a+1)}{b+1}+\frac{ca(b+1)}{c+1}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{ab(c+1)}{a+1}\cdot\frac{bc(a+1)}{b+1}\cdot\frac{ca(b+1)}{c+1}}$$

$$=3\sqrt[3]{(abc)^2}=3$$

លំហាត់ ១៣៣

គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតបំពេញលក្ខខណ្ឌ $ab+bc+ca=1$ ។

បង្ហាញថា $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2\geq 16$ ។

សម្រាយ

របៀបទី ១

យើងមាន $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2$

$$=a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2}+b^2+\frac{ab+bc+ca}{b^2}+c^2+\frac{ab+bc+ca}{c^2}$$

$$+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

$$=\left(a^2+b^2+c^2\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)+3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

$$+\left(\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}\right)$$

$$\geq ab+bc+ca+3+9+3=1+3+9+3=16$$

របៀបទី ២

តាមវិសមភាព $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ យើងបាន

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2$$

$$\geq\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)+\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)+\left(c+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{b}\right)$$

$$=ab+bc+ca+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+3+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$$

តាម AM-GM និង AM-HM គេបាន $\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right)}=3$

ហើយ $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geq\frac{9}{ab+bc+ca}=9$

ដូចនេះ $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2 \geq 1+3+3+9=16$

របៀបទី ៣

តាម QM-AM គេបាន $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2$

$$\geq \frac{\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{3} \qquad (1)$$

ដោយ $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)=3 \Rightarrow a+b+c \geq \sqrt{3}$ (2)

និង $1=ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq \sqrt{3}$

គេបាន $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3\sqrt{3}$ (3)

តាម (1),(2),(3) គេបាន $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2 \geq 16$

លំហាត់ ១៣៤

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc \geq 1$ ។ បង្ហាញថា

$a+b+c \geq \frac{1+a}{1+b}+\frac{1+b}{1+c}+\frac{1+c}{1+a}$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $a+b+c-\frac{1+a}{1+b}-\frac{1+b}{1+c}-\frac{1+c}{1+a}$

$$=\left(1+a-\frac{1+a}{1+b}\right)+\left(1+b-\frac{1+b}{1+c}\right)+\left(1+c-\frac{1+c}{1+a}\right)-3$$

$$= \frac{(1+a)b}{1+b} + \frac{(1+b)c}{1+c} + \frac{(1+c)a}{1+a} - 3$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{(1+a)b}{1+b}\cdot\frac{(1+b)c}{1+c}\cdot\frac{(1+c)a}{1+a}} = 3\sqrt[3]{abc} - 3 \geq 0$$

តាម AM-GM និង $abc \geq 1$

ដូចនេះ $a+b+c \geq \frac{1+a}{1+b} + \frac{1+b}{1+c} + \frac{1+c}{1+a}$

លំហាត់ ១៣៥

គេឲ្យ $a, b > 0$ ។ បង្ហាញថា

$$\left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) \geq \left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right)$$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $x^2 + \frac{1}{4} \geq x$, $\forall x \in IR$

$$\Rightarrow \left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) \geq \left(a + b + \frac{1}{2}\right)\left(a + b + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(a + b + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{2a + 2b + 1}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2a + \frac{1}{2} + 2b + \frac{1}{2}}{2}\right)^2$$

$$\geq \left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right)$$

លំហាត់ ១៣៦

គេឲ្យ $a\,,\ b\,,\ c>0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc=1$ ។ បង្ហាញថា

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le 1$$ ។

សម្រាយ

ចំពោះ $\forall x\in \mathrm{IR}$ គេបាន $x^2+1\ge 2x$

យើងបាន $$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}=\frac{a}{a^2+1+1}+\frac{b}{b^2+1+1}+\frac{c}{c^2+1+1}$$

$$\le \frac{a}{2a+1}+\frac{b}{2b+1}+\frac{c}{2c+1}$$

$$=\frac{1}{2+\frac{1}{a}}+\frac{1}{2+\frac{1}{b}}+\frac{1}{2+\frac{1}{c}}=A$$

បង្ហាញថា $A\le 1$

យើងមាន $$A\le 1\Leftrightarrow \left(2+\frac{1}{b}\right)\left(2+\frac{1}{c}\right)+\left(2+\frac{1}{a}\right)\left(2+\frac{1}{c}\right)$$

$$+\left(2+\frac{1}{a}\right)\left(2+\frac{1}{b}\right)\le \left(2+\frac{1}{a}\right)\left(2+\frac{1}{b}\right)\left(2+\frac{1}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\le \frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{abc}$$

$$\Leftrightarrow 3\le \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$$ ពិត

ព្រោះ $$\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\ge 3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{abc}\right)^2}=3$$

ដូចនេះ $$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le 1$$

លំហាត់ ១៣៧

គេឲ្យ $x\,,\ y\,,\ z>0$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $x+y+z=xyz$ ។

បង្ហាញថា $(x-1)(y-1)(z-1)\le 6\sqrt{3}-10$ ។

សម្រាយ

យើងមាន $x<x+y+z$ ដោយ $x+y+z=xyz$

$\Rightarrow x<xyz$ គេបាន $yz>1$

ដូចគ្នាដែរ យើងបាន $xz>1,\ xy>1$

មានន័យថា យ៉ាងច្រើនមានមួយចំនួនដែលតូចជាង 1

បើ $x<1,\ y\ge 1,\ z\ge 1$ គេបាន $(x-1)(y-1)(z-1)\le 0$ ពិត

បើ $x\ge 1,\ y\ge 1,\ z\ge 1$

តាង $x-1=a\,,\ y-1=b\,,\ z-1=c$

គេបាន $x=a+1,\ y=b+1,\ z=c+1$

យើងបាន $a+1+b+1+c+1=(a+1)(b+1)(c+1)$

$$\Rightarrow abc+ab+bc+ca=2$$

តាង $x=\sqrt[3]{abc}$

តាម AM-GM យើងបាន $ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}=3x^2$

$$\Rightarrow abc+ab+bc+ca\ge 3x^2+x^3$$

$$\Rightarrow x^3+3x^2\le 2$$

$$\Rightarrow (x+1)(x^2+2x-2)\le 0$$

$$\Rightarrow x^2-2x+2\le 0$$

យើងបាន $x\le \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x^3\le 6\sqrt{3}-10$

ដូចនេះ $(x-1)(y-1)(z-1) \leq 6\sqrt{3}-10$