គណិតវិទ្យាថ្ងៃនេះ

MathToday

សៀវភៅគណិតវិទ្យាកម្រិតវិទ្យាល័យ

ធរណីមាត្រវិភាគក្នុងលំហ

* សង្ខេបមេរៀននិងគន្លឹះដោះស្រាយសំខាន់ៗ
* លំហាត់ជ្រើសរើសអមដោយដំណោះស្រាយក្បោះក្បាយ
* លំហាត់ជ្រើសរើសសម្រាប់កិច្ចការផ្ទះ

សម្រាប់ថ្នាក់ទី១២ ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រពិត

អ្នករៀបរៀង លឹម ផល្គុន

2020

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាគោលរបស់ក្រសួងអប់រំយុវជននិងកីឡា

ជំពូកទី០១

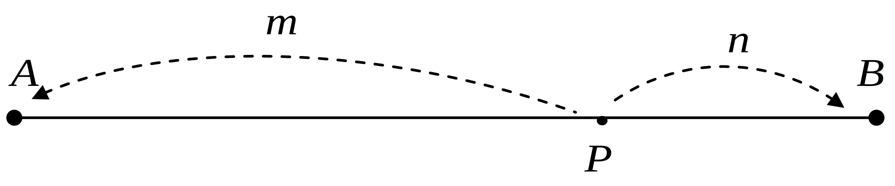
សង្ខេបមេរៀននិងរូបមន្តសំខាន់ៗ

១-កូអរដោនេនៃចំណុចកណ្តាលអង្កត់មួយក្នុងលំហ

$$I(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2})$$

កូអរដោនេចំណុច I កណ្តាលអង្កត់ $[AB]$: $I\ (\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2})$

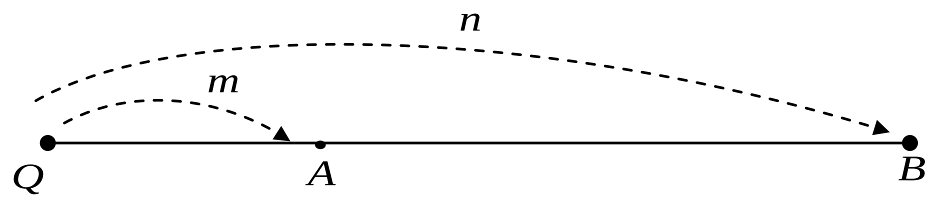
២-កូអរដោនេចំណុចចែកក្នុងអង្កត់មួយក្នុងលំហ



កូអរដោនេចំណុច P ចែកក្នុងអង្កត់ $[AB]$ តាមផលធៀប $\frac{PA}{PB}=\frac{m}{n}$

$P\ (\frac{mx_B+nx_A}{m+n}, \frac{my_B+ny_A}{m+n}, \frac{mz_B+nz_A}{m+n})$ ។

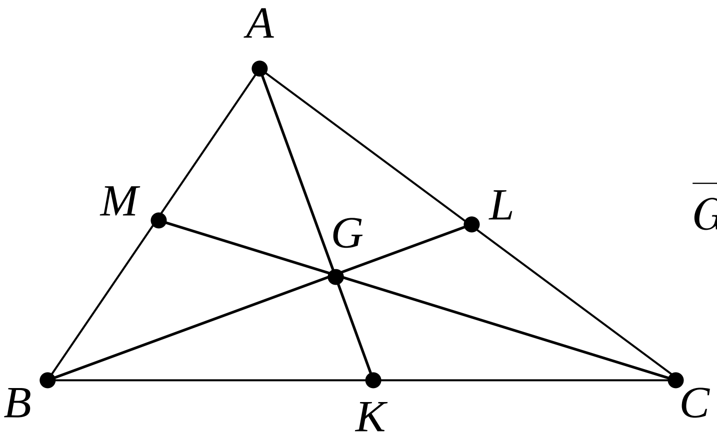
៣-កូអរដោនេចំណុចចែកក្រៅអង្កត់មួយក្នុងលំហ



កូអរដោនេចំណុច Q ចែកក្រៅអង្កត់ $[AB]$ តាមផលធៀប $\frac{QA}{QB}=\frac{m}{n}$

$Q\ (\frac{mx_B-nx_A}{m-n},\frac{my_B-ny_A}{m-n},\frac{mz_B-nz_A}{m-n})$ ។

៤-កូអរដោនេទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណមួយ

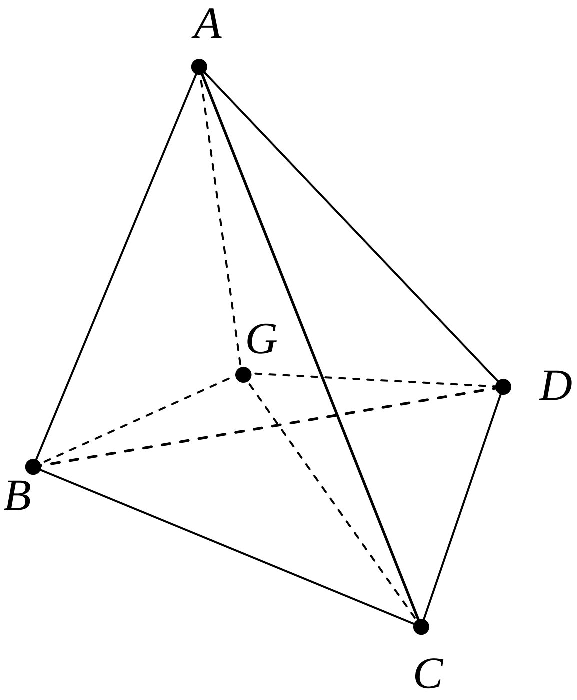


$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$

កូអរដោនេទីប្រជុំទម្ងន់ G នៃត្រីកោណ ABC :

$G\ (\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\frac{z_A+z_B+z_c}{3})$

៥-កូអរដោនេទីប្រជុំទម្ងន់នៃតេត្រាអ៊ែតមួយ

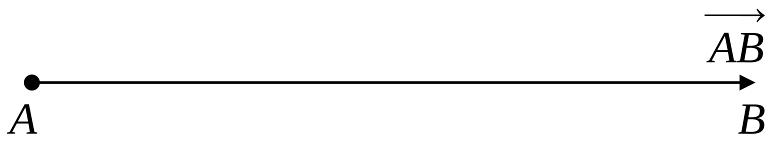


$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{O}$

កូអរដោនេទីប្រជុំទម្ងន់G នៃតេត្រាអ៊ែត $ABCD$:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4},\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4},\frac{z_A+z_B+z_c+z_D}{4}\right)$$

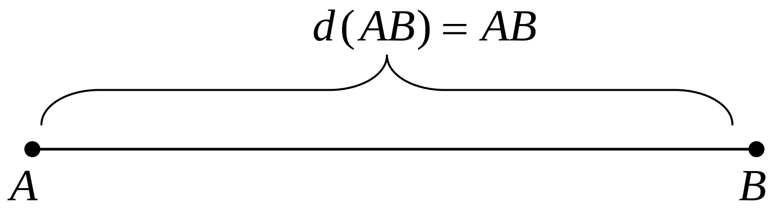
៦-កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រភ្ជាប់ដោយពីរចំណុច



កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ ដែលភ្ជាប់ដោយពីរចំណុច A និង B

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$$ ។

៧-ចម្ងាយរវាងពីរចំណុចក្នុងលំហ



ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច A និង B នៅក្នុងលំហកំណត់ដោយ ៖

$$d(AB)=AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$ ។

៨-ប្រមាណវិធីវ៉ិចទ័រតាមកូអរដោនេនៅក្នុងលំហ

ឧបមាថាគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

ក) $\vec{u} = \vec{O} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases}$

ខ) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases}$

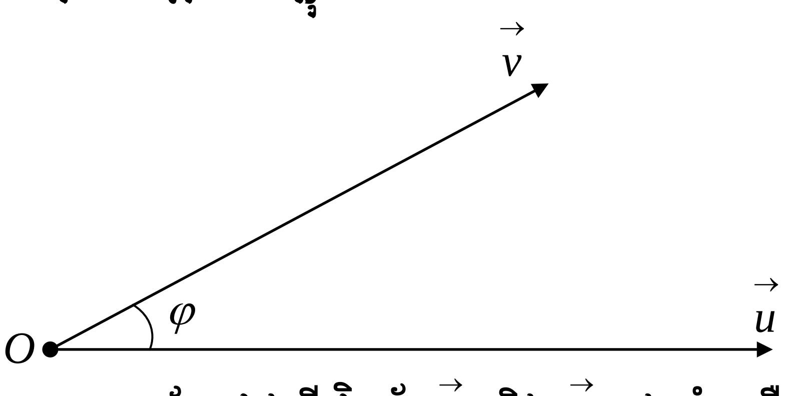
គ) $\vec{u} = \lambda \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \lambda v_1 \\ u_2 = \lambda v_2 \\ u_3 = \lambda v_3 \end{cases}$ ដែល $\lambda \in \mathbb{R}$ ។

ឃ) $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1 , u_2 + v_2 , u_3 + v_3)$

ង) $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1 , u_2 - v_2 , u_3 - v_3)$

ច) $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = (\lambda u_1 + \mu v_1 , \lambda u_2 + \mu v_2 , \lambda u_3 + \mu v_3)$ ដែល $\lambda , \mu \in \mathbb{R}$ ។

៩-ផលគុណស្កាលែក្នុងលំហ



ផលគុណស្កាលែរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ក្នុងលំហគឺជាចំនួនពិតកំណត់

សរសេរដោយ $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\varphi$ ដែល φ ជាមុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ។

១០-លក្ខណៈផលគុណស្កាលែក្នុងលំហ

ក) $\vec{u}\cdot\vec{o}=\vec{o}\cdot\vec{u}=0$

ខ) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

គ) $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^{\,2}=|\vec{u}|^2$

ឃ) $\lambda\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\lambda\vec{v}=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$

ង) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

ច) $\vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{w}$

ឆ) $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$

ជ) $|\vec{u}-\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$

១១-កន្សោមវិភាគផលគុណស្កាលែក្នុងលំហ

ឧបមាថាគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

ស្ថិតនៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។

ផលគុណស្កាលែរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ កំណត់ដោយ ៖

$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$ ។

១២-ណម ឬ ប្រវែងវ៉ិចទ័រមួយ

បើ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ នោះ $|\vec{u}|=\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}$ ។

១៣-កូស៊ីនូសនៃមុំផ្គុំដោយពីរវ៉ិចទ័រ

ឧបមាថាគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

ស្ថិតនៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។

បើ φ ជាមុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ នោះគេបាន ៖

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$ ។

១៤-វ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់ និង វ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែរ

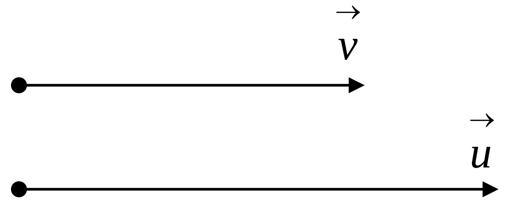
ក)វ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់

✍ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់គ្នាលុះត្រាតែ $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ ។

✍ ឧបមាថាគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ និង $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

គេបាន $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$ ។

ខ) វ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែគ្នា



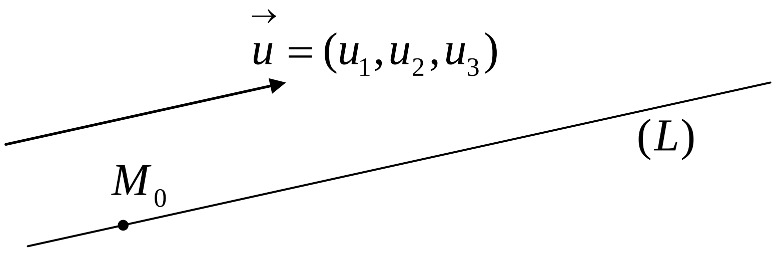
✍ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ កូលីនេអ៊ែគ្នាលុះត្រាតែមានចំនួនពិត λ ដែល $\vec{u} = \lambda\,\vec{v}$ ។

✍ ឧបមាថាគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ និង $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ។

គេបាន $\vec{u}//\vec{v} \Leftrightarrow \frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}=\frac{u_3}{v_3}$ ។

១៥-សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង សមីការឆ្លុះ

ក)សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ



បន្ទាត់(L) មានមេគុណប្រាប់ទិស $\vec{u}=(\alpha,\beta,\gamma)$ ហើយកាត់តាមចំណុច

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ មានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រកំណត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} x = x_0+\alpha t \\ y = y_0+\beta t \\ z = z_0+\gamma t \quad , t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

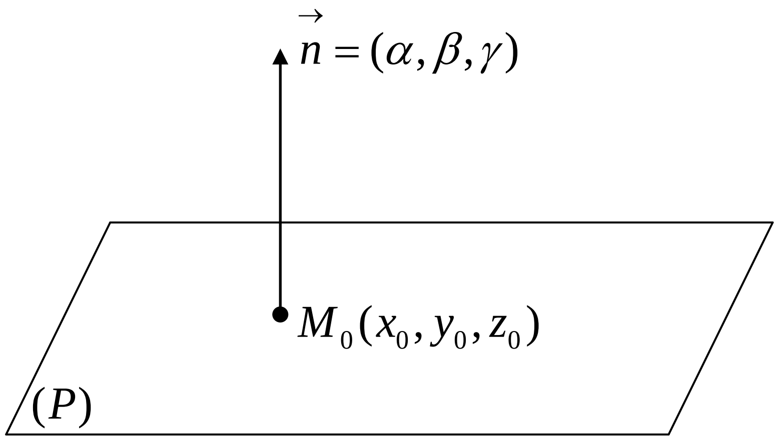
ខ)សមីការឆ្លុះ

បន្ទាត់(L) មានមេគុណប្រាប់ទិស $\vec{u}=(\alpha,\beta,\gamma)$ ហើយកាត់តាមចំណុច

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ មានសមីការឆ្លុះកំណត់ដោយ ៖

$$(L):\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}$$ ។

១៦-សមីការប្លង់

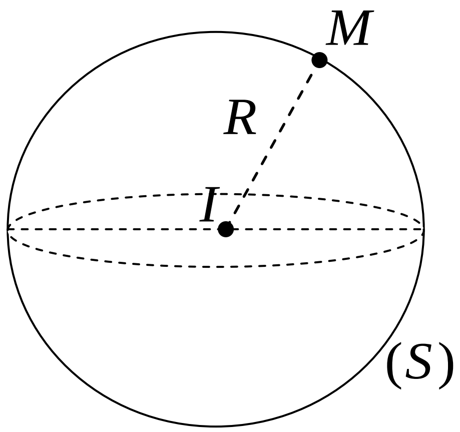


ប្លង់ (p) ដែលកាត់តាមចំណុច $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

$\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$ កំណត់ដោយ ៖

$(p):\ \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0$ ។

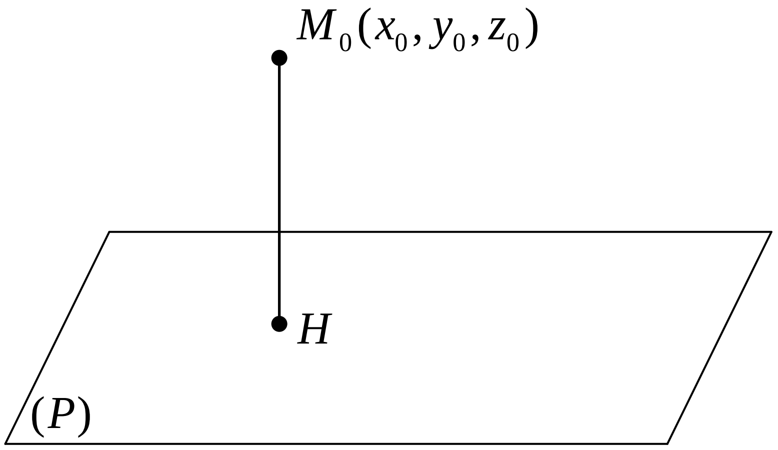
១៧-សមីការស្វ៊ែ



ស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $I(a, b, c)$ កាំ R មានសមីការស្តង់ដា ៖

$(S):\ (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ ។

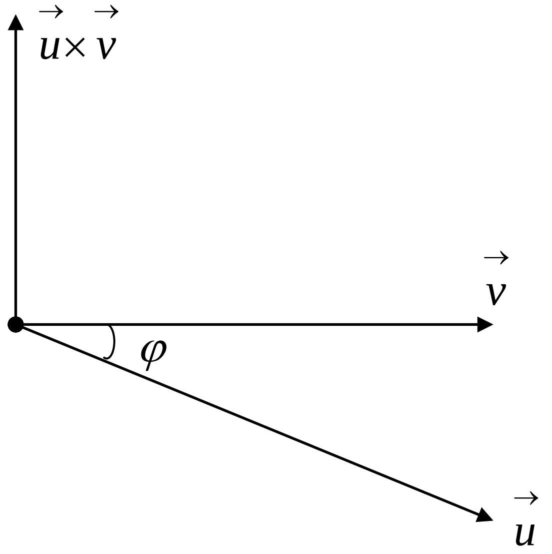
១៨-ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅប្លង់



ចម្ងាយពីចំណុច $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ទៅប្លង់ $(p): ax+by+cz+d=0$

កំណត់ដោយ $d(M_0,(p))=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ។

១៩-ផលគុណវុចទ័រ



និយមន័យ

ផលគុណរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$

ក្នុងលំហកំណត់ដោយ ៖

$\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\varphi.\vec{k}$ ។

២០-កន្សោមផលគុណវុចទ័រក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន

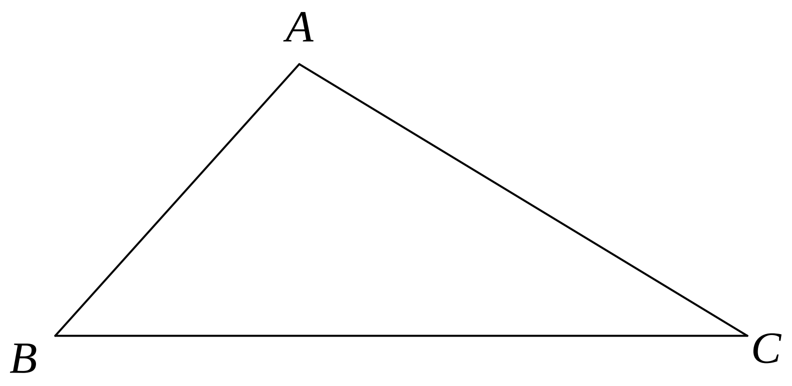
ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ ។ ផលគុណរវាងពីរវ៉ិចទ័រ

$\vec{u}$ និង $\vec{v}$ កំណត់ដោយ ៖

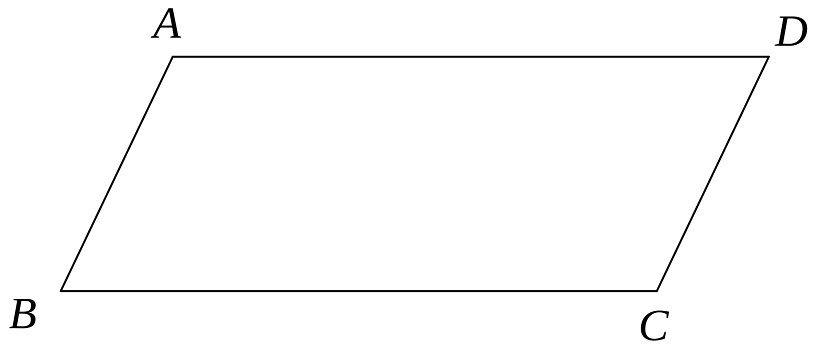
$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

២១-ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ



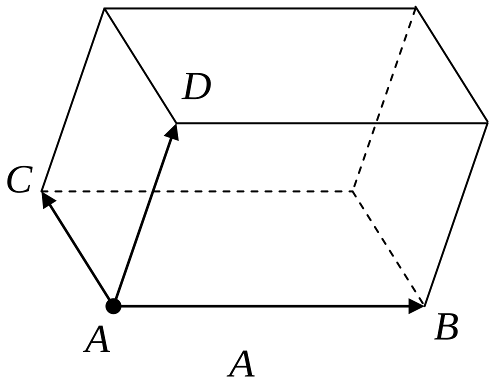
ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC កំណត់ដោយ $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

២២-ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម



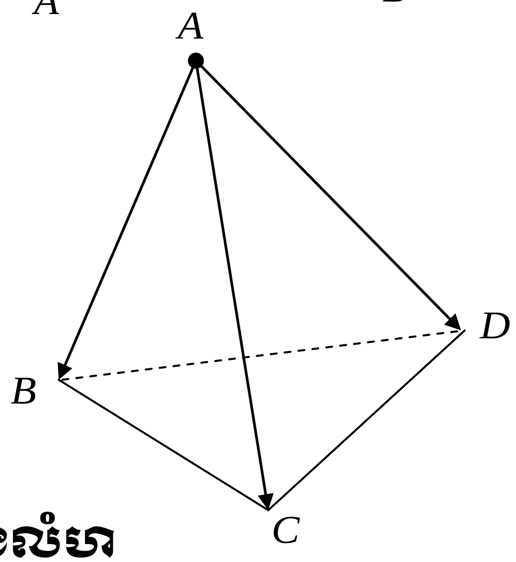
ផ្ទៃក្រឡានៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ កំណត់ដោយ $S_{ABCD}=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

២៣-មាឌប្រលេពីប៉ែត



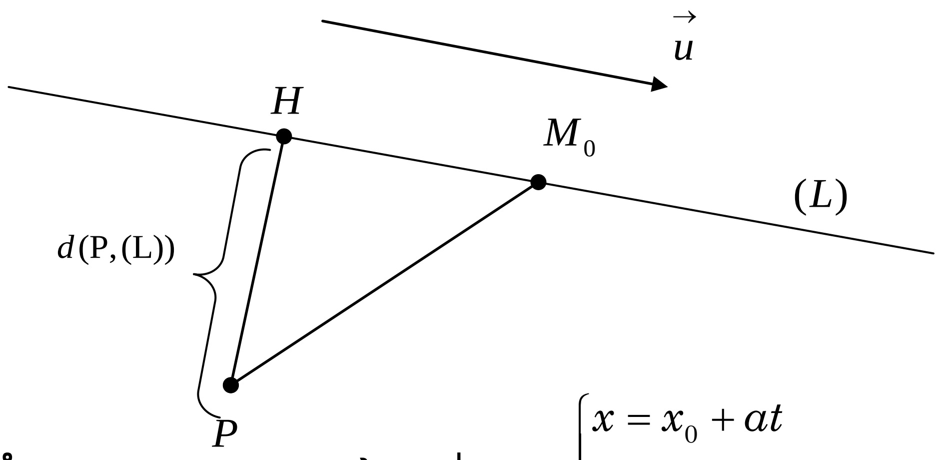
មាឌនៃប្រលេពីប៉ែត $V = \left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AD}\right|$

២៤-មាឌតេត្រាអ៊ែត



$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AD}\right|$$

២៥-ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅបន្ទាត់មួយក្នុងលំហ



ចម្ងាយពីចំណុច $P(\alpha,\beta,\gamma)$ ទៅបន្ទាត់ $(L): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \ , t \in \mathbb{R} \end{cases}$

កំណត់ដោយ $d(P,(L)) = \dfrac{\left|\overrightarrow{M_0P} \times \vec{u}\right|}{|\vec{u}|}$ ដែល $\vec{u} = (a,b,c), \mathrm{M}_0(x_0,y_0,z_0)$ ។

ជំពូកទី០២

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស

លំហាត់ទី០១

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(1,-2,1)$, $B(-1,0,2)$, $C(3,4,4)$ និង $D(5,2,5)$ ។

១.គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}$ និង $\overrightarrow{DB}$ ។

២.គណនារង្វាស់ទ្រនុងទាំងអស់របស់តេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ។

៣.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$ និង $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$ ។

៤.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0$ ។

៥.រកកូអរដោនេនៃចំណុច G ដែល $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{O}$ ។

លំហាត់ទី០២

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច ៖

$A(1,4,-5)$, $B(-1,6,-4)$, $C(3,-2,4)$ និង $D(5,-4,3)$ ។

១.គណនា $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{BC}$ រួចទាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

២.គណនារង្វាស់ជ្រុងនិងអង្កត់ទ្រូងរបស់ប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ។

៣.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$ ។

៤.I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ$[AD]$ ហើយ $K\in[BC]$ ដែល $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I និង K រួចគណនារង្វាស់ IK ។

៥.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$ និង $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KD}$ ។

លំហាត់ទី០៣

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(2,-3,1)$, $B(3,5,5)$, $C(6,-7,8)$ និង $D(10,-2,-3)$ ។

១.គណនា $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $|\overrightarrow{AB}|$ និង $|\overrightarrow{AC}|$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។

២.គណនា $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថា $\overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{BC}$ ។

៣.ស្រាយថា BCD ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

៤.រកកូអរដោនេនៃចំណុច E ដោយដឹងថា $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ ។

៥.ចូរស្រាយថា $(AE)\perp(BCD)$ ។

លំហាត់ទី០៤

ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យត្រីកោណ ABC

មានកំពូល $A(-2,3,-4)$, $B(4,9,-1)$ និង $C(2,-5,4)$ ។

១.គណនា AB,AC និង BC រួចបង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។

២.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $(AB),(AC)$ និង (BC) ។

៣.រកកូអរដោនេនៃចំណុច I ដោយដឹងថា $BC.\overrightarrow{IA}+AC.\overrightarrow{IB}+AB.\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{O}$ ។

៤.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $BC.IA^2+AC.IB^2+AB.IC^2=BC.AC.AB$ ។

៥.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $(IA),(IB),(IC)$ ។

លំហាត់ទី០៥

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យពីរចំណុច ៖

$A(2,-3,1)$ និង $B(6,9,7)$ ។

១.គណនាកូអរដោនេ I កណ្ដាលអង្កត់ $[AB]$ រួចគណនាប្រវែង AB ។

២.សរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែ (S) មានអង្កត់ផ្ចិត AB ។

៣.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AB) និងសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃ $[AB]$ ។

៤.គេឲ្យចំណុច $C(1,1,-2)$ ។ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $C\in(S)$ រួចសរសេរសមីការនៃ
ប្លង់ (P) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច C ។

៥.D ជាចំណុចមួយដែល $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច D រួច
ទាញរកប្រភេទនៃចតុកោណ $CADB$ ។

លំហាត់ទី០៦

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យចំណុច A មាន
កូអរដោនេ $(3,1,1)$ និងប្លង់ (P) មានសមីការ $2x-y-2z+6=0$ ។

១.គណនាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅប្លង់ (P) ។

២.H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច A លើប្លង់ (P) ។គណនាកូអរដោនេនៃ
ចំណុច H រួចសរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត H ហើយកាត់តាម A ។

៣.B ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x_b=0$ ហើយ $B\in(P)$ និង $B\in(S)$ ។
ចូរគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច B ។

៤.C ជាចំណុចមានអរដោនេ $y_c = 0$ ហើយ $C \in (P)$ និង $C \in (S)$ ។

ចូរគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច C ។

៥.គេឲ្យចំណុច $D(3,4,4)$ ។ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $D \in (P)$ និង $D \in (S)$ ។

ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច D

ដោយដឹងថា $(L) \subset (P)$ ។

លំហាត់ទី០៧

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ គេឲ្យបន្ទាត់ (L) មាន

សមីការឆ្លុះ $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = z-2$ និងចំណុច $A(2,-1,3)$ ។

H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច A ទៅលើបន្ទាត់ (L) ។

១.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចគណនាប្រវែង AH ។

២.សរសេរសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត H ហើយកាត់តាមចំណុច A ។

៣.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច B និង C ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) និងស្វ៊ែ (S) ។

៤.P ជាចំណុចមួយផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃ P ។

៥.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $P \in (S)$ រួចរកប្រភេទនៃចតុកោណ $PBAC$ ។

លំហាត់ទី០៨

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ គេឲ្យស្វ៊ែ (S) មាន

សមីការ $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$ និងចំណុច $P(-1,5,7)$ ។

១.គណនាកូអរដោនេនៃផ្ចិត I និងកាំ r របស់ស្វ៊ែ (S) រួចគណនា IP ។

២.បន្ទាត់(IP)ប្រសព្វស្វ៊ែ(S) ត្រង់ចំណុចA និង B ដែលA នៅចន្លោះចំណុច I និងP ។ គណនា PA និង PB ។

៣.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច A និង B ។

៤.រកសំណុំនៃចំណុចM ស្ថិតនៅលើស្វ៊ែ(S)ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់$PM^2 = PA.PB$ ។

<u>លំហាត់ទី០៩</u>

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(0;-3;-4)$; $B(2,1,8)$; $C(2;4;5)$ និង $D(4;-2,-3)$ ។ M និង N ជាពីរចំណុចស្ថិតនៅលើបន្ទាត់រៀងគ្នា (AB) និង (CD) ។

កំណត់កូអរដោនេនៃចំនុច M និង N ដើម្បីឲ្យអង្កត់MNមានប្រវែងខ្លីបំផុត រួចកំណត់ប្រវែងខ្លីបំផុតនោះ ។

<u>លំហាត់ទី១០</u>

ក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានបីចំណុច $A(-1,2,3)$, $B(0,-1,1)$ និង $C(2,3,5)$ ។

១.ចូរកំណត់សមីការប្លង់ (P)កាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overline{BC}$ និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L) កាត់តាមពីរចំណុចB និង C ។

២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ H រវាងបន្ទាត់ (L) ជាមួយប្លង់ (P) ។

៣.រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC រួចគណនាផ្ទៃក្រលានៃ ΔABC ។

លំហាត់ទី១១

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបន្ទាត់(L)មាន

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ$(L):\begin{cases}x=2+t\\y=6+4t\\z=2-t\quad ,t\in\mathbb{R}\end{cases}$ និងប្លង់$(P):2x+2y+z-9=0$។

១.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វAរវាងបន្ទាត់(L)និងប្លង់(P)។

២.M ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស$x=3$និងស្ថិតនៅលើ(L)ហើយ HជាចំណោលកែងនៃចំណុចMទៅលើប្លង់(P)។គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចMនិងH។

៣.គេសង់ប្លង់(Q)កែងនឹងបន្ទាត់(L)ត្រង់Mហើយគេតាង(d) ជាបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់(P)និង(Q)។សរសេរសមីការប្លង់(Q)និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់(d)។

៤.គេគូសបន្ទាត់(AH)ប្រសព្វប្លង់(Q)ត្រង់K។ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(AH) រួចគណនាកូអរដោនេនៃចំណុចK ។

៥.គណនាMAនិងMK រួចទាញបញ្ជាក់ប្រភេទនៃត្រីកោណAMK ។

លំហាត់ទី១២

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបន្ទាត់(L)មាន

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ$(L):\begin{cases}x=1+t\\y=5-4t\\z=4-t\quad ,t\in\mathbb{R}\end{cases}$ និងប្លង់$(P):x+2y+2z-10=0$។

១.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វAរវាងបន្ទាត់(L)និងប្លង់(P)។

២.គេសង់ប្លង់(Q)កែងនឹងបន្ទាត់(L)ត្រង់Aនិងសង់បន្ទាត់(d)កែងនឹងប្លង់(P)

ត្រង់ចំណុច A ដែរ។ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (Q) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (d) ។

៣. M ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x=0$ និងស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (d) ហើយ H និង K ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច M ទៅលើបន្ទាត់ (d) និងប្លង់ (Q) រៀងគ្នា។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M,H និង K ។

៤.ចូរស្រាយថាបួនចំណុច M,H,A,K ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

៥.ចូរស្រាយថាចតុកោណ $MHAK$ ជាការេ។

<u>លំហាត់ទី១៣</u>

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបន្ទាត់ (L) មាន

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $(L):\begin{cases} x=1+t \\ y=4-t \\ z=9-4t \quad ,t\in\mathbb{R} \end{cases}$ និងប្លង់ $(P): 2x+y-2z-6=0$ ។

១.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) ។

២.គេឲ្យ $B(5,6,5)$ ។ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B\in(P)$ ។

៣.ពីចំណុច B គេគូសបន្ទាត់ (BH) កែងនឹងបន្ទាត់ (L) ដោយ $H\in(L)$ ។
គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BH) ។

៤.គេយក I ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[AB]$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I រួចទាញបង្ហាញថា $\overrightarrow{IH}$ ជាវ៉ិចទ័រនរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) ។

៥. K ជាចំណុចឆ្លុះគ្នានៃចំណុច H ធៀបនឹងប្លង់ (P) ។គណនាកូអរដោនេនៃ K រួចស្រាយបញ្ជាក់ថាចតុកោណ $AHBK$ ជាការេ។

លំហាត់ទី១៤

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(1,2,3),B(3,6,-1),C(4,3,3)$ និង $D(2,1,1)$ ។

១.ចូរសរសេរសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ (S) មានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$ ។

២.បង្ហាញថា $C\in(S)$ និង $D\in(S)$ ។សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (CD) ។

៣.សរសេរសមីការប្លង់ (P) និងប្លង់ (Q) ដែលកាត់តាមចំណុចរៀងគ្នា C និង D

ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ ។

៤.ចូរបង្ហាញថាបួនចំណុច A,B,C,D មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ។

៥.គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ។

លំហាត់ទី១៥

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(3,-4,-2),B(1,0,-5),C(5,-2,-5)$ និង $D(4,-2,0)$ ។

១.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំណុច A,B,C មិនស្ថិត

នៅលើបន្ទាត់តែមួយ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

២.គណនា $\overrightarrow{AD}$ រួចផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។ គណនារង្វាស់ AD

រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ។

៣.គណនា $\overrightarrow{OB}$ និង $\overrightarrow{DC}$ រួចទាញថា $OBCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

៤.សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) គូសចេញពី

គល់ O ហើយកែងនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ H ។

៥.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចបង្ហាញថា $AHBC$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

លំហាត់ទី១៦

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបីចំណុច

$A(2,-3,4),B(3,1,3),C(-1,0,4)$ និងប្លង់ $(P): x-2y+2z-7=0$ ។

១.គណនា AB,AC និង BC រួចបង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

២.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B\in(P)$ និង $C\in(P)$ ។សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (BC) ។

៣. H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃ A លើប្លង់ (P) ។គណនាកូអរដោនេនៃ H ។

៤.គេតាង $\vec{u}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$, $\vec{v}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$ និង $\vec{w}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HA}$ ។

ចូរស្រាយថា $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ ជាគោលអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន។

៥.ចូរសរសេរសមីការប្លង់ $(HAB),(HAC)$ និង (HBC) ។

លំហាត់ទី១៧

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច

$S(3,4,4)$, $A(2,6,2),B(-1,3,5)$ និង $C(3,1,1)$ ។

១.គណនា AB,AC , SB និង SC រួចទាញរកប្រភេទត្រីកោណ ABC & SBC ។

២.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}$ ។

៣.ស្រាយបញ្ជាក់ថាប្លង់ (P) កាត់តាម S ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{SA}$ មានសមីការ

$x-2y+2z-3=0$ ។

៤.តាង I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[BC]$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I ។

សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រ (Q) នៃអង្កត់ $[BC]$ ។

៥.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $A\in(Q)$ និង $S\in(Q)$ ។ គណនារង្វាស់មុំ $\angle SIA$ ។

លំហាត់ទី១៨

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(2,3,-1),B(-1,0,-1),C(5,3,5)$ និង $D(8,6,5)$ ។

១.គណនា $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{BC}$ រួចទាញបញ្ជាក់ប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ ។

២.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BC) និង (CD) ។

៣. H ជាចំណោលកែងនៃ A លើ BC ហើយ K ជាចំណោលកែងនៃ H លើ CD ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និង K ។

៤.គណនា AH និង BC រួចគណនាផ្ទៃក្រឡាចតុកោណ $ABCD$ ។

៥.ចូរស្រាយថា KCH ជាត្រីកោណកែងសមបាត។

៦.រកកូអរដោនេនៃចំណុច L ដោយដឹងថា $HKCL$ ជាការេ។

តើចំណុច B,L,D រត់ត្រង់គ្នាឬទេ ?

លំហាត់ទី១៩

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបីចំណុច

$A(-4,1,-2),\ B(-1,7,4)$ និង $C(4,-7,2)$ ។

១.គណនា AB,AC និង BC រួចទាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង។

២.កំណត់សមីការប្លង់(ABC) ។

៣.រកកូអរដោនេនៃចំណុចI ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $BC.\overrightarrow{IA}+AC.\overrightarrow{IB}+AB.\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{O}$

៤.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់$(IA),(IB),(IC)$ ។

៥.គេឲ្យចំណុច $M(x,y,z)$នៃលំហ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$BC.MA^2+AC.MB^2+AB.MC^2=(BC+AC+AB)MI^2+BC.AC.AB$

លំហាត់ទី២០

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបីចំណុច

$A(1,-1,-3)$, $B(2,-3,-1)$ និង $C(4,1,3)$ ។

១.គណនា AB,AC និង BC ។

២.រកកូអរដោនេនៃចំណុច D ដោយដឹងថា$ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

៣.រកកូអរដោនេចំណុចIកណ្តាលអង្កត់$[BC]$រួចសរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រ
នៃអង្កត់$[BC]$ ។

៤.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (ID) ។

៥.សរសេរសមីការស្វ៊ែ(S) មានផ្ចិតI និងកាំ $r=AB$ ។

លំហាត់ទី២១

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យពីរចំណុច

$A(1,1,0)$ និង $B(3,-3,4)$ ។

១.សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រ(P) នៃអង្កត់$[AB]$ ។

២.សរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែ(S)មានអង្កត់ផ្ចិត AB ។

៣.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $O\in(S)$ (O ជាគល់នៃតម្រុយអរតូនរម៉ាល់)។

សរសេរសមីការប្លង់(Q) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ(S) ត្រង់O ។

៤.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់(P)និង(Q) ។

លំហាត់ទី២២

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបីចំណុច

$A(1,1,1)$, $B(2,-3,4)$ និង $C(3,-4,-2)$ ។

១.រកកូអរដោនេនៃចំណុចG ដោយដឹងថា $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$ ។

២.សរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែ(S)មានផ្ចិតOនិងកាំOG ។

៣.សរសេរសមីការប្លង់(P) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ(S) ត្រង់G ។

៤.សរសេរសមីការប្លង់(Q) កាត់តាមG ហើយកែងនឹង $\vec{n}=(9,3,1)$ ។

៥.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថាបីចំណុចA,B,C ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (P) ។

៦.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង(Q) ។

លំហាត់ទី២៣

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(1,-2,-4)$, $B(-1,-4,-3)$,$C(3,4,5)$ និង $D(7,-7,-2)$ ។

១.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថា $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$ ។

២.គណនាជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណABC ។

៣.ស្រាយថាប្លង់(ABC) មានសមីការ $6x-5y+2z-8=0$ ។

៤.យកI ជាចំណុចកណ្តាលនៃ$[BC]$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I រួច

សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(ID) ។

៤.សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រ(Q) នៃអង្កត់$[BC]$ ។

៥.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង(Q) ។

លំហាត់ទី២៤

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យពីរចំណុច

$A(-4,1,3)$និង $B(2,3,-1)$ និងប្លង់$(P): x+2y-2z-1=0$ ។

១.ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(AB) ។

២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចM ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់(AB)និងប្លង់(P)រួច

បង្ហាញថា M ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់$[AB]$ ។

៣.H ជាចំណោលកែងនៃចំណុចB លើប្លង់(P) ។ សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

នៃបន្ទាត់(BH) រួចគណនាកូអរដោនេនៃចំណុចH ។

៤.K ជាចំណោលកែងនៃA លើបន្ទាត់(BH) ។ បង្ហាញថាMH ជាបាតមធ្យម

នៃត្រីកោណABK រួចទាញរកកូអរដោនេនៃចំណុចK ។

៥.L ជាចំណោលកែងនៃAលើប្លង់(P)។បង្ហាញថា$ALHK$ជាចតុកោណកែង

រួចទាញរកកូអរដោនេនៃចំណុច L ។

លំហាត់ទី២៥

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ ៖

$$(L_1): \frac{x+1}{-1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-5}{2} \quad \text{និង} \quad (L_2): \begin{cases} x=2+t \\ y=3 \\ z=-1-t \quad ,t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

១.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) ។

២.A និង B ជាពីរចំណុចស្ថិតនីលើបន្ទាត់(L_2) ហើយមានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា $x_a=-1$ និង $x_b=5$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច A និង B ។

៣.H និង K ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច A និង Bទៅលើបន្ទាត់(L_1) រៀងគ្នា ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចH និង K ។

៤.គណនា $\overrightarrow{AK}$ និង $\overrightarrow{HB}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃចតុកោណ $AHBK$ ។

៥.គណនា AH និង HK រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ $AHBK$ ។

លំហាត់ទី២៦

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច៖

$A(1,1,1),B(2,3,3),C(6,-1,5)$ និង $D\left(6,-4,\frac{7}{2}\right)$ ។

១.គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CD}$ ។

២.បង្ហាញថា $\overrightarrow{AD}//\overrightarrow{BC}$ និង$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ រួចរកប្រភេទនៃចតុកោណ$ABCD$។

៣.គណនា $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណACD ។

៤.H ជាជើងនៃចំណោលកែងចំណុច C លើ $[AD]$ ។គណនាកូអរដោនេនៃ H ។

៥.គណនា AB , BC និង AD រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ $ABCD$ ។

លំហាត់ទី២៧

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(4,1,4),B(3,5,5),C(3,-1,2)$ និង $D\left(\frac{5}{2},1,\frac{5}{2}\right)$ ។

១.គណនា $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃចតុកោណ $ABCD$ ។

២.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AD) និង (BC) ។

៣.M ជាចំណុចស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (AD) ដោយដឹងថាចំណុច M មានអាប់ស៊ីស

$x_m = 1$ ។ ចូរគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M ។

៤.គណនា $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ MBC ។

៥.គណនា MB និង MC រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ MBC ។

លំហាត់ទី២៨

ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យស្វ៊ែ (S) សមីការ

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ និងបន្ទាត់ (L): $\begin{cases} x=-4+3t \\ y=-7+4t \\ z=2+t \quad , t\in\mathbb{R} \end{cases}$

១.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A និង B រវាងបន្ទាត់ (L) និងស្វ៊ែ (S) ។

(គេដឹងថាចំណុច A មានអាប់ស៊ីសអវិជ្ជមាន)។

២.សរសេរសមីការប្លង់(P) និង (Q) ប៉ះទៅនឹងស្វ៊ែ(S)រៀងគ្នាត្រង់ A និង B ។

៣.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(d) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់(P) និង (Q) ។

៤.សរសេរសមីការប្លង់(π) កាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់(d) ។

៥.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B\in(\pi)$ រួចសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(Δ) ដែលកែងនឹងប្លង់(π) ត្រង់ B ។

<u>លំហាត់ទី២៩</u>

ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យស្វ៊ែ(S)សមីការ

$(x+5)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=36$ និងបន្ទាត់(L): $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=3+t \\ z=-3+2t \quad , t\in\mathbb{R} \end{cases}$

១.គណនាកូអរដោនេនៃផ្ចិត I និងកាំ r របស់ស្វ៊ែ(S) ។

២.យក H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច I លើបន្ទាត់(L) ។
គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និងរង្វាស់ IH រួចទាញថាបន្ទាត់(L) ប៉ះទៅនឹងស្វ៊ែ(S) ត្រង់ចំណុច H ។

៣.A និង B ជាចំណុចពីរស្ថិតនៅលើបន្ទាត់(L) ហើយមានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា $x_a=-5$ និង $x_b=5$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច A និង B ។

៤.គណនា AB , IA និង IB រួចទាញបញ្ជាក់ប្រភេទនៃត្រីកោណ IAB ។

៥.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IAB ។

៦.សរសេរសមីការប្លង់(IAB)និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(IA),(IB),(IH)

លំហាត់ទី៣០

គេឲ្យប្លង់ពីរ $(\alpha): x+2y+2z-11=0$, $(\beta): 2x-2y+z-1=0$

និងបន្ទាត់ $(\Delta): x=3+t\ ,y=6-4t\ ,\ z=7-t$ ដែល $t\in\mathbb{R}$

១.គណនាកូអរដោណេចំណុចប្រសព្វ A និង B រវាងបន្ទាត់ (Δ) ជាមួយប្លង់ (α) និង (β) រៀងគ្នា ។

២.យក C ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x=1$ ហើយស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (α) និង (β) ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច C រួចរក្រេបភេទនៃ ΔABC ។

៣.កំណត់សមីការស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិតនៅលើបន្ទាត់ (Δ) ហើយប៉ះរួមទៅនឹងប្លង់ (α) និង (β) ។

លំហាត់ទី៣១

ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

គេឲ្យប្លង់ $(p):\ x-2y+2z-6=0$ និងបន្ទាត់ $(L): \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+3}{-2}$ ។

១.ចូរបង្ហាញថា $(L)\perp(p)$ រួចគណនាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (L) ជាមួយប្លង់ (p) ។

២.តាង A,B,C ជាចំណុចប្រសព្វរវាង (p) ជាមួយអ័ក្ស $(ox),(oy),(oz)$ រៀងគ្នា។ ចូរគណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

៣.គណនាកូអរដោនេចំណុច D ដោយដឹងថា $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

លំហាត់ទី៣២

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ

$\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$ និង $\vec{v}=2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ ។

១.គណនា $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$ និង $|\vec{n}|$ ។

២.កំណត់សមីការប្លង់ (p) កាត់តាមចំណុច $A(-1,2,-3)$ ហើយកែងនឹង $\vec{n}$ ។

៣.កំណត់សមីការស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត O ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (p) ។

លំហាត់ទី៣៣

ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(1,2,3);B(2,3,-6);\ C(-2,1,-2)$ និង $D(0,4,0)$ ។

១.ចូរគណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}$ រួចទាញថាបីចំណុច B,C,D មិនរត់ត្រង់គ្នា ។

គណនាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ BCD រួចកំណត់សមីការប្លង់ (BCD) ។

២.គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ រួចទាញរកចម្ងាយពី A ទៅប្លង់ (BCD) ។

៣.H ជាចំណោលកែងនៃ A លើប្លង់បាត (BCD) ។

កំណត់សមីការបន្ទាត់ (AH) រួចរកកូអរដោនេ H ។

លំហាត់ទី៣៤

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយគេឲ្យមាន

ចំណុច $A(0,2,1),B(2,1,-1),C(-4,5,3)$ និង $D(4,6,3)$ ។

១.ចូរស្រាយថា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC ។

២.កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

៣.គណនា $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}$ រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ។

៤.ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) ។

លំហាត់ទី៣៥

ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យចំណុច

$A(0,0,2)$,$B(2,0,1)$,$C(2,2,3)$ និង $D(0,2,4)$ ។

១.បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

២.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$

៣.សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L) កែងទៅនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ D ។

៤.កំណត់កូអរដោនេនៃចំនុច E បើគេដឹងថា $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)$ ។

៥.គណនាមាឌរបស់ពីរ៉ាមីតដែលមានកំពស់ $[AE]$ និងបាតជាចតុកោណ $ABCD$ ។

លំហាត់ទី៣៦

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានបួនចំណុច៖

$A(4,0,0)$ $B(0,-2,0)$, $C(0,0,2)$ និង $D(4,2,2)$ ។

១.បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

២.ចូរកំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BC) និងសមីការនៃប្លង់កាត់តាមបី
ចំណុច A,B និង C ។

៣.យក H ជាចំណោលកែងនៃ A លើបន្ទាត់ (BC) ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច
H រួចគណនា AH និងផ្ទៃក្រលាប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ។

៤.គេមានចំណុច $S(1,6,-6)$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ (SA) កែងនឹងប្លង់ $(ABCD)$
រួចគណនាមាឌនៃពីរ៉ាមីត $SABCD$ ។

លំហាត់ទី៣៧

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យប្លង់
$(P): x+2y+2z-4=0$ ។ តាង A,B និង C ជាចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P)
ជាមួយអក្ស័ (ox) , (oy) និង (oz) រៀងគ្នា ។

១.ចូរគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច A,B និង C រួចសង់ចំណុចនេះ។

២.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចរកផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC ។

៣.គណនាផលគុណស្កាលែ $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}$ ។ទាញរកមាឌចតុមុខ $OABC$

៤.សរសេរសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ (S) ចារឹកក្រៅចតុមុខ $OABC$ រួចបញ្ជាក់
កូអរដោនេផ្ចិត និងកាំរបស់ស្វ៊ែ (S) ផង។

លំហាត់ទី៣៨

ក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច
$A(1,2,3)$ និងប្លង់ $(\alpha): x+2y-2z-8=0$ ។

១.កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) គូសចេញពីចំណុច A ហើយកែង

នឹងប្លង់ (β) ត្រង់ចំណុច H ។

២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និងចំណុច A' ឆ្លុះគ្នានឹង A ធៀបនឹង (α) ។

៣.កំណត់សមីការប្លង់ (β) កាត់តាមចំណុច A' ហើយស្របនឹងប្លង់ (α) ។

លំហាត់ទី៣៩

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យពីរចំណុច $A(1,-2,2)$ និង $B(2,2,1)$ ។

១.គណនា $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$, $|\overrightarrow{OA}|$ និង $|\overrightarrow{OB}|$ រួចរកប្រភេទនៃត្រីកោណ OAB និងគណនាផ្ទៃក្រឡា ΔABC ។

២.ចូររកកូអរដោនេនៃចំណុច C ជាកំពូលនៃការេ $OACB$ ។

៣.គណនាផលគុណវិចទ័រ $\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡា ΔCAB

៤.ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (AB) ។

៥.គេឲ្យចំណុច $S(-1,5,1)$ ។គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $SABC$ ។

លំហាត់ទី៤០

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមានចំណុច

$A(1,1,-1),B(4,-1,-3),C(-2,5,2)$ និង $D(3,2,7)$ ។

១.គណនាផលគុណវិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំណុច A,B,C មិនរត់ត្រង់គ្នា។

២.គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

៣.សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) គូសចេញពី D

ហើយកែងនិងប្លង់ (ABC)។

៤.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (ABC)។

៥.កំណត់មាឌតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ រួចទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC)។

លំហាត់ទី៤១

ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
គេឲ្យប្លង់ $(P): x+2y-2z+1=0$ និងចំណុច $A(2,4,1)$ និង $B(-2,8,3)$។
(Q) ជាប្លង់កាត់តាមពីរចំណុច A និង B ហើយកែងនិងប្លង់ (P)។ (L) ជាបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងប្លង់ (Q) ។

១.ចូររកសមីការប្លង់ (Q) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L)។

២.H ជាជើងនៃចំណោលកែងចំណុច A លើបន្ទាត់ (L) ហើយ A' ជាចំណុចឆ្លុះគ្នានៃ A ធៀបនិងបន្ទាត់ (L)។គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និង A' ។

៣.រកកូអរដោនេនៃចំណុច M ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (L) ដោយដឹងថាផលបូក $AM+BM$ មានតម្លៃអប្បបរមា ។

លំហាត់ទី៤២

គេឲ្យប្លង់ $(p): x+2y-2z+1=0$ និងចំណុចពីរ $A(2,4,1)$ និង $B(6,0,-1)$

ចូររកកូអរដោនេនៃចំណុច M ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (p) ដោយដឹងថា $MA+MB$

មានតម្លៃអប្បរមា ។

លំហាត់ទី៤៣

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច $A(2,4,-5),B(6,-4,3),C(-1,1,7)$ និង $D(-4,7,1)$ ។

១.គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ និង $\overrightarrow{AD}$ រួចគណនា រង្វាស់នៃជ្រុងនៃចតុកោណ $ABCD$ ។

២.ចូរបង្ហាញថា $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$ រួចទាញរកប្រភេទ នៃចតុកោណ $ABCD$ និងគណនាផ្ទៃក្រឡារបស់វា។

៣.តាង E ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (AD) និង (BC) ។ គណនា EC និង ED ។

៤.គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC និង ACD ។

៥.រកសមីការនៃប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AD) និង (BC) ។

លំហាត់ទី៤៤

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបន្ទាត់និងស្វ៊ែមានសមីការ

$(L):\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-3}{2}$ និង $(S):\ (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$

ចូរបង្ហាញថាបន្ទាត់ (L) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច A មួយរួចគណនាកូអរដោនេ នៃចំណុចប៉ះ A ខាងលើ ។

លំហាត់ទី៤៥

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ 1 ។លំហមានទិសដៅតាម តម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ គេតាង I,J,K ជាបីចំណុចផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BK}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CJ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CG}$ ។

១.កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច I,J,K ។

២.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{KJ}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ IJK ។

៣.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{KI}\times\overrightarrow{KJ}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IJK ។

៤.L ជាចំណុចមួយនៃ$[GH]$ដែលផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{LI}.\overrightarrow{LJ}$ អប្បបរមា។

ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច L ។

៥.ចូរស្រាយថាបួនចំណុច I,J,K,L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

<u>លំហាត់ទី៤៦</u>

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ$1cm$ ។ K,L និង M ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃ $[EF],[CD]$និង$[DH]$។

១)គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{ML}$ រួចទាញរកឈ្មោះនៃ ΔKLM

២)P ជាចំណុចមួយនៃ $[EH]$ ហើយគេតាង $\angle KPL=\varphi$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ទីតាំងនៃ P ប្រែប្រួលក្នុង$[EH]$គេមាន$\varphi\le\frac{\pi}{2}$ ។

តើពេលណាទើបគេបាន $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ។

<u>លំហាត់ទី៤៧</u>

គេឲ្យគូប$ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ1 ។លំហមានទិសដៅតាមតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ យក I,J,K និងL ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នា នៃ $[EF],[BC],[DH]$ និង$[BF]$ ។

១.ចូរស្រាយបំភ្លឺថា IJK ជាត្រីកោណសមង្ស។

២.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{IJ}\times\overrightarrow{IK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃΔIJK។

៣.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់(IJ)និង(KL)អរតូកូណាល់គ្នា។

៤.គណនារង្វាស់មុំ $\angle ILJ$ ។

៥.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{IL}.\overrightarrow{IK}$ និង $\overrightarrow{JL}.\overrightarrow{JK}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ILK និងត្រីកោណ JLK ។

៦.គណនា $(\overrightarrow{IJ}\times\overrightarrow{IK}).\overrightarrow{IL}$ រួចទាញថាចំណុច I,J,K,L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

<u>លំហាត់ទី៤៨</u>

គូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ1 ។លំហមានទិសដៅតាមតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ គេតាង I,J,K ជាបីចំណុចផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$,$\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$ ។

១.កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច I,J,K ។

២.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{KJ}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ IJK

៣.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{KI}\times\overrightarrow{KJ}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IJK

៤.L ជាចំណុចមួយនៃ$[GH]$ដែលផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{LI}.\overrightarrow{LJ}$ អប្បបរមា។
ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច L ។

៥.ចូរស្រាយថាបួនចំណុច I,J,K,L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

<u>លំហាត់ទី៤៩</u>

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មានទ្រនុងស្មើនឹង $1cm$ ។I ជាចំណុចកណ្តាលនៃទ្រនុង $[EH]$, K ជាផ្ចិតការេ $CDHG$ ហើយ M និង N ជាចំណុចពីរ

នៃទ្រនុង $[BC]$ និង $[BF]$ រៀងគ្នាដោយដឹងថា $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MK}$ និង $\overrightarrow{NI}\cdot\overrightarrow{NK}$ មានតម្លៃអប្បបរមា ។ តើបួនចំណុច I, K, M, N ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយឬទេ ?បើសិនជាវាមិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយទេចូរគណនាមាឌតេត្រាអ៊ែតដែលមានកំពូល I, K, M, N ។

លំហាត់ទី៥០

គេឲ្យគូប $ABCD$ មួយមានទ្រនុងស្មើ $1cm$ ។ I ជាចំណុចកណ្តាល $[EF]$ $J\in[BC]$ ដែល $IJ\perp IH$ ហើយ $K\in[CD]$ ដែល $\overrightarrow{CK}=\frac{3}{8}\overrightarrow{CD}$ ។

១.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបួនចំណុច H, I, J, K ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ។

២.រកទីតាំងនៃចំណុច $P\in[DH]$ ដោយដឹងថា $\overrightarrow{PI}.\overrightarrow{PJ}$ មានតម្លៃតូចបំផុត។

លំហាត់ទី៥១

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ $1cm$ ។ I ជាចំណុចកណ្តាលនៃទ្រនុង $[BF]$ ហើយ $K\in[BC]$ និង $J\in[DH]$ ដោយដឹងថា ៖

$$\overrightarrow{BK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \text{ និង } \overrightarrow{DJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DH} \text{ ។}$$

១.ចូររកប្រភេទនៃត្រីកោណ IJK ។

២.P និង Q ជាពីរចំណុចស្ថិតលើ $[IJ]$ ដោយដឹងថា $\overrightarrow{PF}.\overrightarrow{PH}$ និង $\overrightarrow{QE}.\overrightarrow{QG}$ មានតម្លៃអប្បបរមា ។ ចូរស្រាយថា $P\equiv Q$ ។

លំហាត់ទី៥២

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ $1cm$ ។ M ជាចំណុចកណ្តាលនៃទ្រនុង $[BF]$ ។ $P\in[CD]$ ដែល $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$ និង $Q\in[DH]$ ដែល $\overrightarrow{DQ}=\frac{3}{8}\overrightarrow{DH}$ ។

១.ចូរស្រាយថា MPE និង MPQ សុទ្ធតែជាត្រីកោណកែង ។

២.ចូរស្រាយថាបួនចំណុច M,P,Q,E ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ ។

៣.កំណត់ប្រភេទនៃចតុកោណ $MPQE$ ។

៤.តាង S ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (MP) និង (EQ) ហើយយក $\angle ESM = \varphi$ ។

ចូរគណនាតម្លៃ $\tan\varphi$ ។

លំហាត់ទី៥៣

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ $1cm$ ។ M,N,P និង Q

ជាបួនចំណុចផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MF}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$

និង $\overrightarrow{EQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ ។

១.ចូរស្រាយថាបួនចំណុច M,N,P និង Q មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ ។

២.រកប្រភេទនៃត្រីកោណ MNP និង MQP ។

៣.គេតាង I ជាចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (MPQ) និងបន្ទាត់ (BC) ហើយ J

ជាចំណុចប្រសព្វរវាង (MNP) និងបន្ទាត់ (EH) ។

រកប្រភេទនៃត្រីកោណ MIP និង ត្រីកោណ MJP ។

លំហាត់ទី៥៤

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុង $1cm$ ។ K ជាផ្ចិតការេ $AEFB$

ហើយ L ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[BC]$ ។

១.ចូររកប្រភេទនៃត្រីកោណ HKL ។

២. $M\in[HD]$ ដែល $\overrightarrow{MK}.\overrightarrow{ML}$ មានតម្លៃអប្បបរមាហើយ $P\in[BF]$ ដែល $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{DM}$ ។ ចូរស្រាយថាបួនចំណុច P,K,M,L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

លំហាត់ទី៥៥

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ1 ។លំហមានទិសដៅតាមតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ គេតាង I,J,K ជាបីចំណុចផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$,$\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$ ។

១.កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច I,J,K ។

២.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{KJ}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ IJK ។

៣.គណនាផលគុណវិចទ័រ $\overrightarrow{KI}\times\overrightarrow{KJ}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IJK ។

៤.L ជាចំណុចមួយនៃ$[GH]$ដែលផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{LI}.\overrightarrow{LJ}$ អប្បបរមា។

ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច L ។

៥.ចូរស្រាយថាបួនចំណុច I,J,K,L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

លំហាត់ទី៥៦

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ1។លំហមានទិសដៅតាមតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ គេយក I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ$[AB]$ ហើយ J ជាចំណុចផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{EJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{EH}$ ។

១.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IJ}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ CIJ ។

២. K ជាចំណុចមួយនៃ $[DH]$ ដែលផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{KJ}$ អប្បបរមា។

ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច K ។

៣.ចូរស្រាយថាបួនចំណុច C,I,J,K បង្កើតបានជាតេត្រាអ៊ែតមួយរួចគណនាមាឌនៃតេត្រាអ៊ែតនេះ ។

លំហាត់ទី៥៧

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ 1 ។ក្នុងលំហមានទិសដៅតាមតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ គេយក I ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[BC]$ និង K ជាផ្ចិតការេ $AEFB$ ។

១.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{KI}\cdot\overrightarrow{KH}$ រួចទាញថា IKH ជាត្រីកោណកែង។

២.ស្រាយថា $\overrightarrow{KI}\times\overrightarrow{KH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AF}$ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃ ΔIKH ។

៣.គណនាមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $AKIH$ រួចទាញរកចម្ងាយពី A ទៅប្លង់ (IKH) ។

លំហាត់ទី៥៨

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ 1 ។ លំហមានទិសដៅតាមតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ យក I,J,K និង L ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នា នៃ $[EF],[BC],[DH]$ និង $[BF]$ ។

១.ចូរស្រាយបំភ្លឺថា IJK ជាត្រីកោណសមង្ស័។

២.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{IJ}\times\overrightarrow{IK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔIJK ។

៣.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់(IJ)និង(KL)អរតូកូណាល់គ្នា។

៤.គណនារង្វាស់មុំ $\angle ILJ$ ។

៥.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{IL}.\overrightarrow{IK}$ និង $\overrightarrow{JL}.\overrightarrow{JK}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃ
ត្រីកោណ ILK និងត្រីកោណ JLK ។

៦.គណនា$(\overrightarrow{IJ}\times\overrightarrow{IK}).\overrightarrow{IL}$ រួចទាញថា I,J,K,L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

<u>លំហាត់ទី៥៩</u>

គេអោយគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ1។លំហមានទិសដៅតាម
តម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ គេយក I ជាចំណុច
កណ្តាលនៃអង្កត់ $[EF]$ និង K ជាផ្ចិតការេ $ADHE$ ។

១. ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{IG}\times\overrightarrow{IA}$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ IGA ។

២. គណនាមាឌតេត្រាអែត $ABIG$ រួចទាញរកចម្ងាយពី B ទៅប្លង់(AIG) ។

<u>លំហាត់ទី៦០</u>

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច ៖
$A(-3,3,7),B(3,6,1),C(1,2,-3)$ និង $D(-5,-1,3)$ ។

១.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $ABCD$ ជាចតុកោណកែង។

២.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DC}$ រួចសរសេរសមីការប្លង់(DAC) ។

៣.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(Δ) និង(Δ') ដែលកែងនឹងប្លង់(DAC)

រៀងគ្នាត្រង់ C និង D ។

៤.ចំណុច $M\in(\Delta)$ មានអាប់ស៊ីស $x_m=9$ និងចំណុច $N\in(\Delta')$ មានអាប់ស៊ីស $x_n=-7$ ។ចូរគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M និង N រួចសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (MN) ។

៥.រកកូអរដោនេនៃចំណុច P ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (MN) និងប្លង់ (DAC) ។

៦.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ (BM) អរតូកូណាល់នឹងប្លង់ (BAN) ហើយបន្ទាត់ (AN) អរតូកូណាល់នឹងប្លង់ (ABM) ។ទាញឲ្យបានថាមុខខាងទាំងអស់នៃតេត្រាអ៊ែត $ABMN$ សុទ្ធតែជាត្រីកោណកែង។

៧.យក I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[MN]$ ។ចូរស្រាយថា I ជាផ្ចិតនៃស្វ៊ែ (S) ចារឹកក្រៅតេត្រាអ៊ែត $ABMN$ រួចសរសេរសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ (S) ។

www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី០៣

ផ្នែកដំណោះស្រាយលំហាត់ជ្រើសរើស

លំហាត់ទី០១

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(1,-2,1)$, $B(-1,0,2)$, $C(3,4,4)$ និង $D(5,2,5)$ ។

១.គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}$ និង $\overrightarrow{DB}$ ។

២.គណនារង្វាស់ទ្រនុងទាំងអស់របស់តេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ។

៣.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$ និង $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$ ។

៤.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0$ ។

៥.រកកូអរដោនេនៃចំណុច G ដែល $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{O}$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}$ និង $\overrightarrow{DB}$ ៖

គេមាន $A(1,-2,1)$, $B(-1,0,2)$, $C(3,4,4)$ និង $D(5,2,5)$

យើងបាន $\overrightarrow{AB}=(-2,2,1)$, $\overrightarrow{AC}=(2,6,3)$, $\overrightarrow{AD}=(4,4,4)$, $\overrightarrow{BC}=(4,4,2)$

$\overrightarrow{CD}=(2,-2,1)$ និង $\overrightarrow{DB}=(-6,-2,-3)$ ។

២.គណនារង្វាស់ទ្រនុងទាំងអស់របស់តេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ៖

យើងបាន $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$

$AC=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4+36+9}=\sqrt{49}=7$

$AD=|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{16+16+16}=4\sqrt{3}$

$BC=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{16+16+4}=\sqrt{36}=6$

$CD=|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$

$DB=|\overrightarrow{DB}|=\sqrt{36+4+9}=\sqrt{49}=7$

ដូចនេះ $AB=3, AC=7, AD=4\sqrt{3}, BC=6, CD=3, DB=7$ (ឯកតាប្រវែង)។

៣.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$ និង $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$ ៖

យើងមាន $\overrightarrow{AB}=(-2,2,1)$, $\overrightarrow{AC}=(2,6,3)$, $\overrightarrow{AD}=(4,4,4)$, $\overrightarrow{BC}=(4,4,2)$

$\overrightarrow{CD}=(2,-2,1)$ និង $\overrightarrow{DB}=(-6,-2,-3)$

យើងបាន $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=(-2)(2)+(2)(-2)+(1)(1)=-7$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=(2)(-6)+(6)(-2)+(3)(-3)=-33$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=(4)(4)+(4)(4)+(4)(2)=40$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=-7, \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=-33$ និង $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=40$ ។

៤.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0$ ៖

គេមាន $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=-7, \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=-33$ និង $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=40$

យើងបាន $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=-7-33+40=0$ ពិត

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0$ ។

៥.រកកូអរដោនេនៃចំណុច G ដែល $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{O}$ ៖

តាង $G(x_G,y_G,z_G)$ ដោយគេមាន $A(1,-2,1)$, $B(-1,0,2)$,$C(3,4,4)$

និង $D(5,2,5)$ នោះគេបាន៖

$$\begin{cases}\overrightarrow{GA}=(1-x_G,-2-y_G,1-z_G)\\ \overrightarrow{GB}=(-1-x_G,-y_G,2-z_G)\\ \overrightarrow{GC}=(3-x_G,4-y_G,4-z_G)\\ \overrightarrow{GD}=(5-x_G,2-y_G,5-z_G)\end{cases}$$

ធ្វើផលបូកវ៉ិចទ័រទាំងបួនខាងលើនេះគេបាន ៖

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=(8-4x_G,4-4y_G,12-4z_G)$$

ដោយ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{O}$ សមមូល $\begin{cases}8-4x_G=0\\ 4-4y_G=0\\ 12-4z_G=0\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x_G=2\\ y_G=1\\ z_G=3\end{cases}$

ដូចនេះ $G(2,1,3)$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី០២

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច ៖

$A(1,4,-5)$, $B(-1,6,-4)$,$C(3,-2,4)$ និង $D(5,-4,3)$ ។

១.គណនា $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{BC}$ រួចទាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

២.គណនារង្វាស់ជ្រុងនិងអង្កត់ទ្រូងរបស់ប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ។

៣.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$ ។

៤.I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ$[AD]$ ហើយ $K\in[BC]$ ដែល $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ។

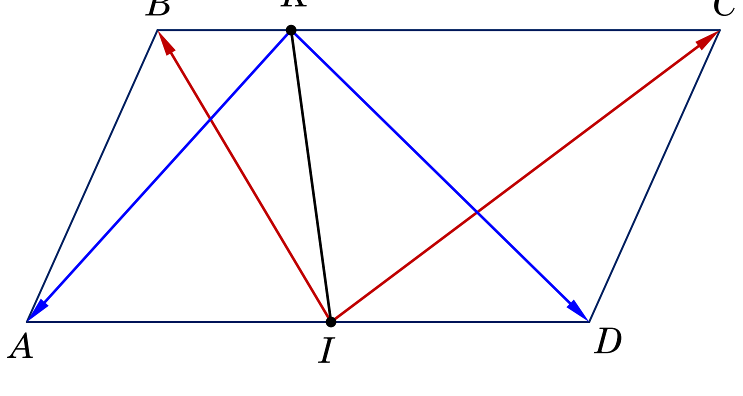
គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I និង K រួចគណនារង្វាស់ IK ។

៥.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$ និង $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KD}$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{BC}$ រួចទាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ៖

$A(1,4,-5)$, $B(-1,6,-4)$,$C(3,-2,4)$ និង $D(5,-4,3)$



យើងបាន $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=(5,-4,3)-(1,4,-5)=(4,-8,8)$

ហើយ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(3,-2,4)-(-1,6,-4)=(4,-8,8)$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AD}=(4,-8,8)$ និង $\overrightarrow{BC}=(4,-8,8)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ ដូចនេះចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

២.គណនារង្វាស់ជ្រុងនិងអង្កត់ទ្រូងរបស់ប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ៖

យើងមាន $A(1,4,-5)$, $B(-1,6,-4)$,$C(3,-2,4)$ និង $D(5,-4,3)$

យើងបាន $AB=\sqrt{(-1-1)^2+(6-4)^2+(-4+5)^2}=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$

$$AD=\sqrt{(5-1)^2+(-4-4)^2+(3+5)^2}=\sqrt{16+64+64}=\sqrt{144}=12$$

$$AC=\sqrt{(3-1)^2+(-2-4)^2+(4+5)^2}=\sqrt{4+36+81}=\sqrt{121}=11$$

$$BD=\sqrt{(5+1)^2+(-4-6)^2+(3+4)^2}=\sqrt{36+100+49}=\sqrt{185}$$

ដូចនេះ $AB=DC=3$, $AD=BC=12$, $AC=11$, $BD=\sqrt{185}$ ។

៣.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$ ៖

យើងមាន $\overrightarrow{AC}=(2,-6,9)$, $\overrightarrow{DB}=(-6,10,-7)$

យើងបាន $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=(2)(-6)+(-6)(10)+(9)(-7)=-12-60-63=-135$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=-135$ ។

៨.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I និង K រួចគណនារង្វាស់ IK

គេមាន $A(1,4,-5)$, $B(-1,6,-4)$,$C(3,-2,4)$ និង $D(5,-4,3)$

ដោយ I ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[AD]$ នោះ $I\left(\frac{1+5}{2},\frac{4-4}{2},\frac{-5+3}{2}\right)$

ដូចនេះ $I(3,0,-1)$ ។

តាង $K(x_k,y_k,z_k)$ នោះ $\overrightarrow{BK}=(x_k+1,y_k-6,z_k+4)$ និង $\overrightarrow{BC}=(4,-8,8)$

ដោយ $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ សមមូល $\begin{cases}x_k+1=1\\ y_k-6=-2\\ z_k+4=2\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x_k=0\\ y_k=4\\ z_k=-2\end{cases}$

ដូចនេះ $K(0,4,-2)$ ។

ហើយ $IK=\sqrt{(0-3)^2+(4-0)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{26}$ (ឯកតាប្រវែង)។

៩.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$ និង $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KD}$ ៖

យើងមាន $A(1,4,-5)$, $B(-1,6,-4)$,$C(3,-2,4)$ និង $D(5,-4,3)$

ហើយ $I(3,0,-1)$ និង $K(0,4,-2)$ នោះគេបាន ៖

$\overrightarrow{IB}=(-4,6,-3)$, $\overrightarrow{IC}=(0,-2,5)$, $\overrightarrow{KA}=(1,0,-3)$, $\overrightarrow{KD}=(5,-8,5)$

យើងបាន $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}=0-12-15=-27$ និង $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KD}=5+0-15=-10$

ដូចនេះ $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}=-27$ និង $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KD}=-10$ ។

លំហាត់ទី០៣

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(2,-3,1)$, $B(3,5,5)$, $C(6,-7,8)$ និង $D(10,-2,-3)$ ។

១.គណនា $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $|\overrightarrow{AB}|$ និង $|\overrightarrow{AC}|$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។

២.គណនា $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថា $\overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{BC}$ ។

៣.ស្រាយថា BCD ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

៤.រកកូអរដោនេនៃចំណុច E ដោយដឹងថា $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ ។

៥.ចូរស្រាយថា $(AE)\perp(BCD)$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $|\overrightarrow{AB}|$ និង $|\overrightarrow{AC}|$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ៖

គេមាន $A(2,-3,1)$, $B(3,5,5)$, $C(6,-7,8)$ និង $D(10,-2,-3)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(1,8,4)$ និង $\overrightarrow{AC}=(4,-4,7)$

យើងបាន $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(1)(4)+(8)(-4)+(4)(7)=4-32+28=0$ ។

ហើយ $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1+64+16}=\sqrt{81}=9$ និង $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{16+16+49}=9$ ។

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$, $|\overrightarrow{AB}|=9$, $|\overrightarrow{AC}|=9$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ និង $AB=AC=9$ នោះ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល A ។

២.គណនា $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថា $\overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{BC}$ ៖

គេមាន $A(2,-3,1)$, $B(3,5,5)$, $C(6,-7,8)$ និង $D(10,-2,-3)$

នោះ $\overrightarrow{DA}=(-8,-1,4)$, $\overrightarrow{AB}=(1,8,4)$ និង $\overrightarrow{AC}=(4,-4,7)$

យើងបាន $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AB}=-8-8+16=0$ និង $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AC}=4-32+28=0$

ដូចនេះ $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AB}=0$ និង $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AC}=0$ ។

ដោយ $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{AC}$

គេទាញ $\overrightarrow{DA}\perp(ABC)$ ដោយ $\overrightarrow{BC}\subset(ABC)$ នោះគេទាញ $\overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{BC}$ ។

៣.ស្រាយថា BCD ជាត្រីកោណសម័ង្ស

គេមាន $BC=\sqrt{(6-3)^2+(-7-5)^2+(8-5)^2}=\sqrt{9+144+9}=9\sqrt{2}$

$BD=\sqrt{(10-3)^2+(-2-5)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{49+49+64}=9\sqrt{2}$

$CD=\sqrt{(10-6)^2+(-2+7)^2+(-3-8)^2}=\sqrt{16+25+121}=9\sqrt{2}$

ដោយ $BC=BD=CD=9\sqrt{2}$ នោះ BCD ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

៤.រកកូអរដោនេនៃចំណុច E ដោយដឹងថា $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ ៖

តាង $E(x_E,y_E,z_E)$ ដោយ $A(2,-3,1)$, $B(3,5,5)$, $C(6,-7,8)$ និង
$D(10,-2,-3)$ នោះ $\overrightarrow{AE}=(x_E-2,y_E+3,z_E-1)$, $\overrightarrow{AB}=(1,8,4)$

$\overrightarrow{AC}=(4,-4,7)$, $\overrightarrow{AD}=(8,1,-4)$ ។

គេបាន $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=(13,5,7)$ ដោយ $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

គេទាញបាន $\begin{cases} x_E-2=13 \\ y_E+3=5 \\ z_E-1=7 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} x_E=15 \\ y_E=2 \\ z_E=8 \end{cases}$

ដូចនេះ $E(15,2,8)$ ។

៨.ស្រាយថា $(AE)\perp(BCD)$ ៖

មាន $E(15,2,8)$, $A(2,-3,1)$, $B(3,5,5)$, $C(6,-7,8)$ និង $D(10,-2,-3)$

នោះ $\overrightarrow{AE}=(13,5,7)$, $\overrightarrow{BC}=(3,-12,3)$, $\overrightarrow{BD}=(7,-7,-8)$

គេមាន $\overrightarrow{AE}\,.\,\overrightarrow{BC}=39-60+21=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{BC}$

ហើយ $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BD}=91-35-56=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{BD}$

ដោយ $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{BD}$ នោះ $\overrightarrow{AE}\perp(BCD)$ ។

ដូចនេះ $(AE)\perp(BCD)$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី០៤

ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យត្រីកោណ ABC មានកំពូល $A(-2,3,-4)$, $B(4,9,-1)$ និង $C(2,-5,4)$ ។

១.គណនា AB,AC និង BC រួចបង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។

២.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AB),(AC) និង (BC) ។

៣.រកកូអរដោនេនៃចំណុច I ដោយដឹងថា $BC.\overrightarrow{IA}+AC.\overrightarrow{IB}+AB.\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{O}$ ។

៤.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $BC.IA^2+AC.IB^2+AB.IC^2=BC.AC.AB$ ។

៥.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (IA),(IB),(IC) ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា AB,AC និង BC រួចបង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ៖

$A(-2,3,-4)$, $B(4,9,-1)$ និង $C(2,-5,4)$

យើងបាន $AB=\sqrt{(4+2)^2+(9-3)^2+(-1+4)^2}=\sqrt{36+36+9}=9$

$AC=\sqrt{(2+2)^2+(-5-3)^2+(4+4)^2}=\sqrt{16+64+64}=12$

$BC=\sqrt{(2-4)^2+(-5-9)^2+(4+1)^2}=\sqrt{4+196+25}=15$

ដូចនេះ $AB=9$, $AC=12$, $BC=15$ (ឯកតាប្រវែង)។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $AB^2+AC^2=81+144=225=BC^2$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A (តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ)។

២.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់$(AB),(AC)$ និង (BC) ៖

គេមាន $A(-2,3,-4)$, $B(4,9,-1)$ និង $C(2,-5,4)$
បន្ទាត់$(AB),(AC)$ និង (BC)មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរៀងគ្នា៖

$\overrightarrow{AB}=(6,6,3)$, $\overrightarrow{AC}=(4,-8,8)$ និង $\overrightarrow{BC}=(-2,-14,5)$

ដូចនេះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់$(AB),(AC)$ និង (BC)អាចសរសេរ៖

$$(AB):\begin{cases}x=-2+6t\\ y=3+6t\\ z=-4+3t\ ,\ t\in\mathbb{R}\end{cases}\ ,\ (AC):\begin{cases}x=-2+4u\\ y=3-8u\\ z=-4+8u\ ,\ u\in\mathbb{R}\end{cases}$$

និង $(BC):\begin{cases}x=4-2v\\ y=9-14v\\ z=-1+5v\ ,\ v\in\mathbb{R}\end{cases}$ ។

៣.រកកូអរដោនេនៃចំណុច I ដោយដឹងថា $BC.\overrightarrow{IA}+AC.\overrightarrow{IB}+AB.\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{O}$

តាង $I(x_I,y_I,z_I)$ ដោយ $A(-2,3,-4)$, $B(4,9,-1)$ និង $C(2,-5,4)$

នោះ $\begin{cases}\overrightarrow{IA}=(-2-x_I,3-y_I,-4-z_I)\\ \overrightarrow{IB}=(4-x_I,9-y_I,-1-z_I)\\ \overrightarrow{IC}=(2-x_I,-5-y_I,4-z_I)\end{cases}$ ដោយ $\begin{cases}AB=9\\ AC=12\\ BC=15\end{cases}$

នោះ $\begin{cases}BC.\overrightarrow{IA}=(-30-15x_I,45-15y_I,-60-15z_I)\\ AC.\overrightarrow{IB}=(48-12x_I,108-12y_I,-12-12z_I)\\ AB.\overrightarrow{IC}=(18-9x_I,-45-9y_I,36-9z_I)\end{cases}$

គេបាន $BC.\overrightarrow{IA}+AC.\overrightarrow{IB}+AB.\overrightarrow{IC}=(36-36x_I,108-36y_I,-36-36z_I)$

ដោយ $BC.\overrightarrow{IA}+AC.\overrightarrow{IB}+AB.\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{O}$ សមមូល $\begin{cases}36-36x_I=0\\108-36y_I=0\\-36-36z_I=0\end{cases}$

គេទាញបាន $\begin{cases}x_I=1\\y_I=3\\z_I=-1\end{cases}$ ។

ដូចនេះ $I(1,3,-1)$ ។

៤.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $BC.IA^2+AC.IB^2+AB.IC^2=BC.AC.AB$

គេមាន $I(1,3,-1)$, $A(-2,3,-4)$, $B(4,9,-1)$ និង $C(2,-5,4)$

គេបាន $IA=\sqrt{(-2-1)^2+(3-3)^2+(-4+1)^2}=3\sqrt{2}$

$IB=\sqrt{(4-1)^2+(9-3)^2+(-1+1)^2}=3\sqrt{5}$

$IC=\sqrt{(2-1)^2+(-5-3)^2+(4+1)^2}=3\sqrt{10}$

ដោយ $AB=9, AC=12$, $BC=15$ នោះគេបាន ៖

$BC.IA^2+AC.IB^2+AB.IC^2=(15)(3\sqrt{2})^2+(12)(3\sqrt{5})^2+(9)(3\sqrt{10})^2=1620$

ហើយ $BC.AC.AB=(9)(12)(15)=1620$

ដូចនេះ $BC.IA^2+AC.IB^2+AB.IC^2=BC.AC.AB$ ពិត។

៨.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $(IA),(IB),(IC)$ ៖

គេមាន $I(1,3,-1)$, $A(-2,3,-4)$, $B(4,9,-1)$ និង $C(2,-5,4)$

បន្ទាត់ $(IA),(IB),(IC)$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរៀងគ្នា ៖

$\overrightarrow{IA}=(-3,0,-3)$, $\overrightarrow{IB}=(3,6,0)$ និង $\overrightarrow{IC}=(1,-8,5)$

ដូចនេះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $(IA),(IB),(IC)$ អាចសរសេររៀងគ្នា ៖

$$(IA):\begin{cases}x=1-3t\\ y=3\\ z=-1-3t \quad , t\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$(IB):\begin{cases}x=1+3u\\ y=3+6u\\ z=-1 \qquad , u\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$(IC):\begin{cases}x=1+v\\ y=3-8v\\ z=-1+5v \quad , v\in\mathbb{R}\end{cases}$$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី០៥

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យពីរចំណុច ៖

$A(2,-3,1)$ និង $B(6,9,7)$ ។

១.គណនាកូអរដោនេ I កណ្ដាលអង្កត់$[AB]$រួចគណនាប្រវែង AB ។

២.សរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែ(S) មានអង្កត់ផ្ចិតAB ។

៣.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(AB)និងសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃ$[AB]$ ។

៤.គេឲ្យចំណុច $C(1,1,-2)$ ។ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $C\in(S)$ រួចសរសេរសមីការនៃ

ប្លង់(P) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ(S) ត្រង់ចំណុច C ។

៥.D ជាចំណុចមួយដែល$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចD រួច

ទាញរកប្រភេទនៃចតុកោណ $CADB$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាកូអរដោនេ I កណ្ដាលអង្កត់$[AB]$រួចគណនាប្រវែង AB ៖

គេមាន $A(2,-3,1)$ និង $B(6,9,7)$

ដោយI ជាចំណុចកណ្ដាលអង្កត់ $[AB]$ នោះ $I\left(\frac{2+6}{2},\frac{-3+9}{2},\frac{1+7}{2}\right)$

ដូចនេះ $I(4,3,4)$ ។

ហើយ $AB=\sqrt{(6-2)^2+(9+3)^2+(7-1)^2}=\sqrt{16+144+36}=14$

ដូចនេះ $AB=14$ (ឯកតាប្រវែង)។

២.សរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែ (S) មានអង្កត់ផ្ចិត AB ៖

ផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែ (S) មានអង្កត់ផ្ចិត AB គឺ $I(4,3,4)$ និងមានកាំ $r=\frac{AB}{2}=\frac{14}{2}=7$

សមីការស្វ៊ែ (S) អាចសរសេរ ៖

$$(S):(x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2=r^2$$

$$(x-4)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=7^2$$

$$x^2-8x+16+y^2-6y+9+z^2-8z+16=49$$

$$x^2+y^2+z^2-8x-6y-8z-8=0$$

ដូចនេះ $(S):x^2+y^2+z^2-8x-6y-8z-8=0$ ។

៣.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AB) និងសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃ $[AB]$ ៖

គេមាន $A(2,-3,1)$ និង $B(6,9,7)$

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (AB) គឺ $\overrightarrow{AB}=(4,12,6)$ ។

ដូចនេះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AB) អាចសរសេរ៖

$$(AB):\begin{cases}x=2+4t\\y=-3+12t\\z=1+6t\quad ,t\in\mathbb{R}\end{cases}$$

តាង (π) ជាប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[AB]$ ។

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (π) គឺ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}=(4,12,6)$ ហើយ $I(4,3,4)\in(\pi)$

សមីការប្លង់ (π) អាចសរសេរ ៖

$$(\pi): a(x-x_I)+b(y-y_I)+c(z-z_I)=0$$

$$4(x-4)+12(y-3)+6(z-4)=0$$

$$4x-16+12y-36+6z-24=0$$

$$4x+12y+6z-76=0$$

$$2x+6y+3z-38=0$$

ដូចនេះ $(\pi): 2x+6y+3z-38=0$ ។

៨. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $C\in(S)$ ៖

គេមាន $C(1,1,-2)$ និង $(S): x^2+y^2+z^2-8x-6y-8z-8=0$

យកកូអរដោនេនៃចំណុច C ជំនួសក្នុងសមីការស្វ៊ែ (S) គេបាន ៖

$1+1+4-8-6+16-8=0$ ឬ $0=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់។

ដូចនេះ $C\in(S)$ ។

សរសេរសមីការនៃប្លង់ (P) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច C ៖

គេមាន $I(4,3,4)$ និង $C(1,1,-2)$ នោះ $\overrightarrow{IC}=(-3,-2,-6)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

នៃប្លង់ (P) ដែលប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច C ។

សមីការនៃប្លង់ (P) អាចសរសេរ ៖

$$(P): a(x-x_c)+b(y-y_c)+c(z-z_c)=0$$

$$-3(x-1)-2(y-1)-6(z+2)=0$$

$$-3x+3-2y+2-6z-12=0$$

$$-3x-2y-6z-7=0$$

$$3x+2y+6z+7=0$$

ដូចនេះ $(P): 3x+2y+6z+7=0$ ។

៥.រកកូអរដោនេនៃចំណុច D រួចទាញរកប្រភេទនៃចតុកោណ $CADB$ ៖

គេមាន $A(2,-3,1)$, $B(6,9,7)$ និង $C(1,1,-2)$

នោះ $\overrightarrow{CA}=(1,-4,3)$, $\overrightarrow{CB}=(5,8,9)$ និង $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=(6,4,12)$

តាង $D(x_d,y_d,z_d)$ នោះ $\overrightarrow{CD}=(x_d-1,y_d-1,z_d+2)$

ដោយ $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$ សមមូល $\begin{cases} x_d-1=6 \\ y_d-1=4 \\ z_d+2=12 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x_d=7 \\ y_d=5 \\ z_d=10 \end{cases}$

ដូចនេះ $D(7,5,10)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{AC}=(-1,4,-3)$, $\overrightarrow{AD}=(5,8,9)$, $\overrightarrow{DB}=(-1,4,-3)$

ដោយ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=-5+32-27=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$

ដូចនេះចតុកោណ $CADB$ ជាចតុកោណកែង ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី០៦

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យចំណុច A មានកូអរដោនេ $(3,1,1)$ និងប្លង់ (P) មានសមីការ $2x-y-2z+6=0$ ។

១.គណនាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅប្លង់ (P) ។

២.H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច A លើប្លង់ (P) ។គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចសរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត H ហើយកាត់តាម A ។

៣.B ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x_b=0$ ហើយ $B\in(P)$ និង $B\in(S)$ ។ ចូរគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច B ។

៤.C ជាចំណុចមានអរដោនេ $y_c=0$ ហើយ $C\in(P)$ និង $C\in(S)$ ។ ចូរគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច C ។

៥.គេឲ្យចំណុច $D(3,4,4)$ ។ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $D\in(P)$ និង $D\in(S)$ ។ ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច D ដោយដឹងថា $(L)\subset(P)$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅប្លង់ (P)

គេមាន $A(3,1,1)$ និង $(P):\ 2x-y-2z+6=0$

យើងបាន $d\left(A,(P)\right)=\dfrac{|2x_a-y_a-2z_a+6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\dfrac{|2(3)-(1)-2(1)+6|}{3}=3$

ដូចនេះ $d\left(A,(P)\right)=3$ (ឯកតាប្រវែង)។

២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H ៖

តាង $H(x_h,y_h,z_h)$ ។ ដោយ H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច A លើ (P)

នោះ $H\in(P)$ សមមូល $2x_h-y_h-2z_h+6=0\quad(1)$

ប្លង់ (P) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(2,-1,-2)$ ហើយ $\overrightarrow{AH}=(x_h-3,y_h-1,z_h-1)$

ដោយ $\overrightarrow{AH}\perp(P)$ និង $\vec{n}\perp(P)$ នោះ $\overrightarrow{AH}//\vec{n}$ នាំឲ្យ $\overrightarrow{AH}=\lambda\,\vec{n}\ ,\lambda\in\mathbb{R}$

គេទាញ $\begin{cases}x_h-3=2\lambda\\y_h-1=-\lambda\\z_h-1=-2\lambda\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x_h=3+2\lambda\\y_h=1-\lambda\\z_h=1-2\lambda\end{cases}\quad(2)$

យកសមីការ (2) ជំនួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$2(3+2\lambda)-(1-\lambda)-2(1-2\lambda)+6=0$$
$$6+4\lambda-1+\lambda-2+4\lambda+6=0$$
$$9\lambda+9=0$$
$$\lambda=-1$$

យក $\lambda=-1$ ជួសក្នុង (2) គេបាន $\begin{cases}x_h=3-2=1\\y_h=1+1=2\\z_h=1+2=3\end{cases}$

ដូចនេះ $H(1\,,2\,,3)$ ។

សរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត H ហើយកាត់តាម A ៖

សមីការស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $H(1,2,3)$ អាចសរសេរ ៖

$(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=r^2$

ដោយ (S) កាត់តាមចំណុច $A(3,1,1)$ នោះកូអរដោនេនៃ A ផ្ទៀងផ្ទាត់ (S)

គេបាន $(3-1)^2+(1-2)^2+(1-3)^2=r^2$ ឬ $r^2=9$ ឬ $r=3$

គេបាន $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$

ដោយពន្លាតសមីការនេះរួចបង្រួមគេបាន ៖

$(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$ ។

៣.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច B

ដោយ B ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x_b=0$ នោះ $B(0,y_b,z_b)$ ហើយ $B\in(P)$ និង $B\in(S)$ នោះគេបាន $\begin{cases}-y_b-2z_b+6=0\\ {y_b}^2+{z_b}^2-4y_b-6z_b+5=0\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}y_b=-2z_b+6 & (b_1)\\ {y_b}^2+{z_b}^2-4y_b-6z_b+5=0 & (b_2)\end{cases}$

យកសមីការ (b_1) ជួសក្នុង (b_2) គេបាន ៖

$(-2z_b+6)^2+{z_b}^2-4(-2z_b+6)-6z_b+5=0$

$4{z_b}^2-24z_b+36+{z_b}^2+8z_b-24-6z_b+5=0$

$5{z_b}^2 - 22z_b + 17 = 0$ ដោយ $a+b+c=0$ នោះ $z_b' = 1$, $z_b'' = \frac{17}{5}$

ចំពោះ $z_b' = 1$ នោះ $y_b = -2+6 = 4$ ។

ដូចនេះ $B_1(0,4,1)$ ។

ចំពោះ $z_b'' = \frac{17}{5}$ នោះ $y_b = -\frac{34}{5} + 6 = -\frac{4}{5}$ ។

ដូចនេះ $B_2\left(0,-\frac{4}{5},\frac{17}{5}\right)$ ។

៤.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច C ៖

ដោយ C ជាចំណុចមានអរដោនេ $y_c = 0$ នោះ $C(x_c,0,z_c)$ ហើយ $C \in (P)$ និង $C \in (S)$ នោះគេបាន $\begin{cases} 2x_c - 2z_c + 6 = 0 \\ {x_c}^2 + {z_c}^2 - 2x_c - 6z_c + 5 = 0 \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} x_c = z_c - 3 & (c_1) \\ {x_c}^2 + {z_c}^2 - 2x_c - 6z_c + 5 = 0 & (c_2) \end{cases}$

យកសមីការ (c_1) ជួសក្នុង (c_2) គេបាន ៖

$$(z_c - 3)^2 + {z_c}^2 - 2(z_c - 3) - 6z_c + 5 = 0$$

$$\begin{aligned} {z_c}^2 - 6z_c + 9 + {z_c}^2 - 2z_c + 6 - 6z_c + 5 &= 0 \\ 2{z_c}^2 - 14z_c + 20 &= 0 \\ 2(z_c - 2)(z_c - 5) &= 0 \end{aligned}$$

គេទាញឫស $z_c' = 2$, $z_c'' = 5$ ។

ចំពោះ $z_c' = 2$ នោះ $x_c = 2-3 = -1$ ។

ដូចនេះ $C_1(-1,0,2)$ ។

ចំពោះ $z_c'' = 5$ នោះ $x_c = 5-3 = 2$ ។

ដូចនេះ $C_2(2,0,5)$ ។

៥.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $D \in (P)$ និង $D \in (S)$ ៖

គេមាន $D(3,4,4)$ ហើយ $(P): 2x - y - 2z + 6 = 0$

និង $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$ ។

យកកូអរដោនេនៃចំណុច C ជំនួសក្នុង (P) គេបាន ៖

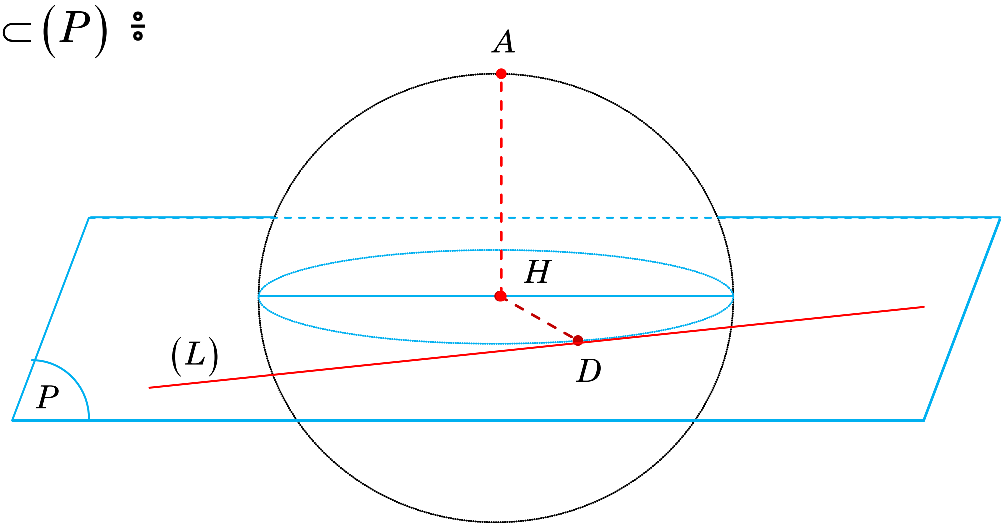
$6 - 4 - 8 + 6 = 0$ ឬ $0 = 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នោះ $D \in (P)$ ។

យកកូអរដោនេនៃចំណុច C ជំនួសក្នុង (S) គេបាន ៖

$9 + 16 + 16 - 6 - 16 - 24 + 5 = 0$ ឬ $0 = 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នោះ $D \in (S)$ ។

ដូចនេះ $D \in (P)$ និង $D \in (S)$ ។

សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច D ដោយដឹងថា $(L) \subset (P)$ ៖



គេមាន $(L) \subset (P)$ និង $\overrightarrow{AH} \perp (P)$ នោះ $\overrightarrow{AH} \perp (L)$ ហើយ (L) ប៉ះនឹង (S) ត្រង់ D នោះ $\overrightarrow{HD} \perp (L)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AH}\perp(L)$ និង $\overrightarrow{HD}\perp(L)$ នោះ $(L)\perp(HAD)$ ហេតុនេះវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

នៃប្លង់ (HAD) ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) ។

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (HAD) គឺ $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{HA}\times\overrightarrow{HD}$ ដោយ $H(1,2,3),A(3,1,1)$

និង $D(3,4,4)$ នោះ $\overrightarrow{HA}=(2,-1,-2)$ & $\overrightarrow{HD}=(2,2,1)$

គេបាន $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{HA}\times\overrightarrow{HD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=3\vec{i}-6\vec{j}+6\vec{k}$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L) ឲ្យតាមរូបមន្ត $(L):\begin{cases}x=x_d+at\\ y=y_d+bt\\ z=z_d+ct\end{cases}\ ,t\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $(L):\begin{cases}x=3+3t\\ y=4-6t\\ z=4+6t\end{cases}$ ដែល $t\in\mathbb{R}$ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី០៧

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបន្ទាត់(L)មាន

សមីការឆ្លុះ: $\frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{2}=z-2$ និងចំណុច $A(2,-1,3)$ ។

H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុចA ទៅលើបន្ទាត់(L) ។

១.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចH រួចគណនាប្រវែងAH ។

២.សរសេរសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ(S) មានផ្ចិតH ហើយកាត់តាមចំណុចA ។

៣.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចBនិងCជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់(L)និងស្វ៊ែ(S)។

៤.P ជាចំណុចមួយផ្ទៀងផ្ទាត់$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃP ។

៥.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា$P\in(S)$ រួចរកប្រភេទនៃចតុកោណ$PBAC$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចH រួចគណនាប្រវែងAH ៖

គេមាន $(L):\frac{x-3}{2}=\frac{y-3}{2}=z-2$ និងចំណុច $A(2,-1,3)$

តាង$H(x_h,y_h,z_h)$ ។ ដោយ H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុចA ទៅលើ

បន្ទាត់(L) នោះ $H\in(L)$ សមមូល $\frac{x_h-3}{2}=\frac{y_h-3}{2}=z_h-2$

សមមូល $x_h=2z_h-1$, $y_h=2z_h-1$ ។

គេបាន $H(2z_h-1\,,2z_h-1\,,z_h)$ ។

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់(L) គឺ $\vec{u}=(2,2,1)$ ។ ដោយ$\overrightarrow{AH}\perp(L)$ នោះគេបាន

$\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0$ ដោយ $\overrightarrow{AH}=(2z_h-3\,,2z_h\,,z_h-3)$

គេបាន $\overrightarrow{AH}\,.\,\vec{u}=2(2z_h-3)+2(2z_h)+(z_h-3)=0$

សមមូល $4z_h-6+4z_h+z_h-3=0$

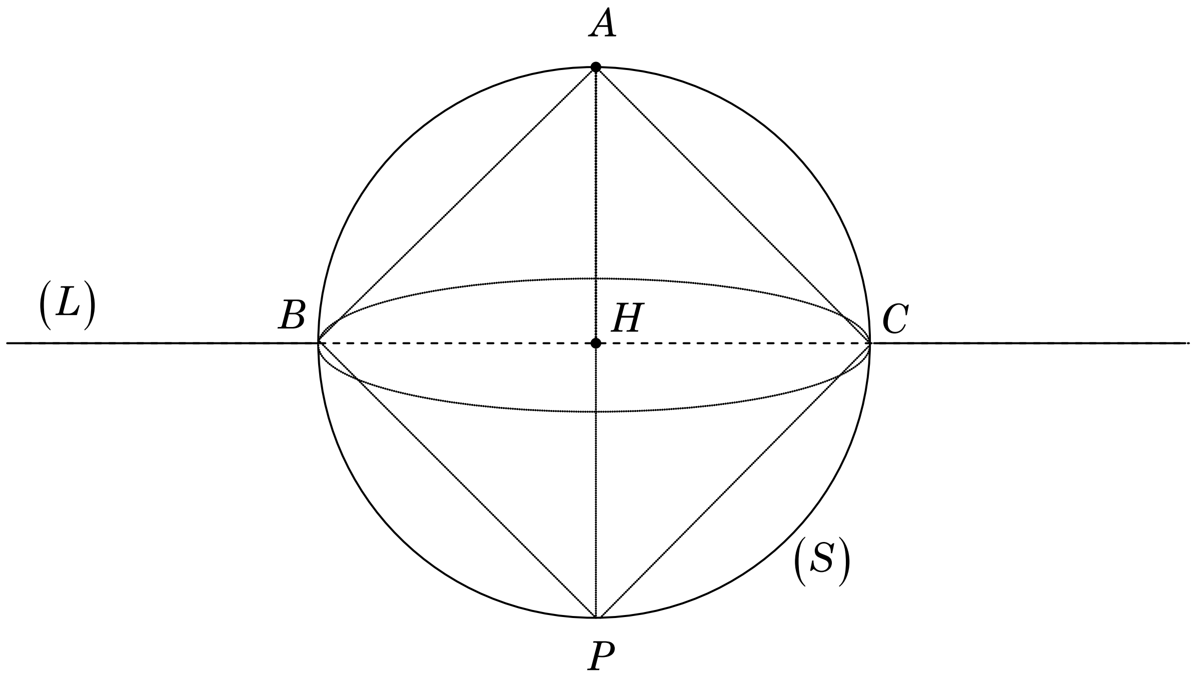
$$9z_h-9=0$$

$$z_h=1$$

ហើយ $x_h=2(1)-1=1$ និង $y_h=2(1)-1=1$ ។

ដូចនេះ $H(1,1,1)$ ។

២.សរសេរសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ(S) មានផ្ចិតH ហើយកាត់តាមចំណុចA ៖



កាំរបស់ស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត H កាត់តាម A គឺ ៖

$$R = HA = \sqrt{(2-1)^2+(-1-1)^2+(3-1)^2} = 3$$

ដូចនេះសមីការស្វ៊ែ (S) សរសេរ $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$ ។

៣.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច B និង C ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) និងស្វ៊ែ (S) ៖

គេមាន $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$

និង $(L):\ \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-3}{2}=z-2$

តាង $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-3}{2}=z-2=t$ នោះ $\begin{cases} x=3+2t \\ y=3+2t \\ z=2+t \end{cases}\ (1)$

យក (1) ជួសក្នុង (S) គេបាន ៖

$$(3+2t-1)^2+(3+2t-1)^2+(2+t-1)^2=9$$

$$(2t+2)^2+(2t+2)^2+(t+1)^2=9$$

$$4t^2+8t+4+4t^2+8t+4+t^2+2t+1=9$$

$$9t^2+18t=0$$

$$9t(t+2)=0$$

គេទាញឫស $t_1=0$, $t_2=-2$ ។

ចំពោះ $t_1=0$ តាម (1) គេបាន $x=3, y=3, z=2$ ។

ចំពោះ $t_2=-2$ តាម (1) គេបាន $x=-1, y=-1, z=0$ ។

ដូចនេះ $B(3,3,2)$ និង $C(-1,-1,0)$ ។

៤.គណនាកូអរដោនេនៃ P ៖

គេមាន $A(2,-1,3)$, $B(3,3,2)$ និង $C(-1,-1,0)$ ។

តាង $P(x_p,y_p,z_p)$ នោះ $\overrightarrow{AP}=(x_p-2\,,\,y_p+1,z_p-3)$

ហើយ $\overrightarrow{AB}=(1,4,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(-3,0,-3)$ នោះ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(-2,4,-4)$

ដោយ $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ សមមូល $\begin{cases} x_p-2=-2 \\ y_p+1=4 \\ z_p-3=-4 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x_p=0 \\ y_p=3 \\ z_p=-1 \end{cases}$

ដូចនេះ $P(0,3,-1)$ ។

៥.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $P\in(S)$ រួចរកប្រភេទនៃចតុកោណ $PBAC$ ៖

គេមាន $P(0,3,-1)$ និង $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$

យកកូអរដោនេនៃចំណុច P ជួសក្នុងសមីការ (S) គេបាន ៖

$(0-1)^2+(3-1)^2+(-1-1)^2=9$ ឬ $9=9$ ផ្ទៀងផ្ទាត់។

ដូចនេះ $P\in(S)$ ។

គេមាន $P(0,3,-1)$, $A(2,-1,3)$, $B(3,3,2)$ និង $C(-1,-1,0)$ ។

នោះ $\overrightarrow{AP}=(2,-4,4)$ និង $\overrightarrow{BC}=(-4,-4,-2)$

គេបាន $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BC}=-8+16-8=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$

ហើយ $|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{4+16+16}=6$, $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{16+16+4}=6$ នោះ $AP=BC$

ចតុកោណ $PBAC$ មានអង្កត់ទ្រូង $AP=BC=6$ និង $AP\perp BC$ ជាការេ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី០៨

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យស្វ៊ែ (S) មានសមីការ $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ និងចំណុច $P(-1,5,7)$ ។

១.គណនាកូអរដោនេនៃផ្ចិត I និងកាំ r របស់ស្វ៊ែ (S) រួចគណនា IP ។

២.បន្ទាត់ (IP) ប្រសព្វស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច A និង B ដែល A នៅចន្លោះចំណុច I និង P ។ គណនា PA និង PB ។

៣.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច A និង B ។

៤.រកសំណុំនៃចំណុច M ស្ថិតនៅលើស្វ៊ែ (S) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $PM^2=PA.PB$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាកូអរដោនេនៃផ្ចិត I និងកាំ r របស់ស្វ៊ែ (S) រួចគណនា IP

សមីការ $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ អាចសរសេរជាទម្រង់ស្តង់ដា

$(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$ ។

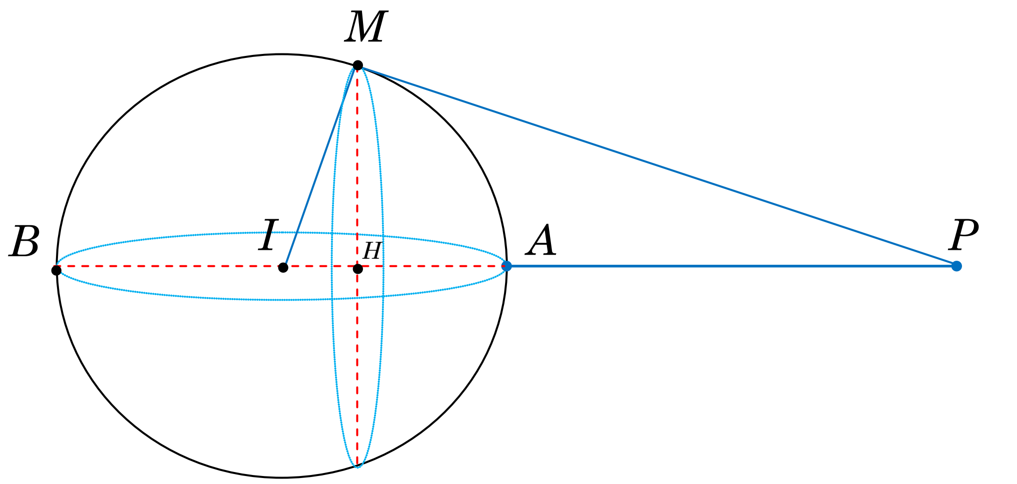
ដូចនេះកូអរដោនេនៃផ្ចិតនិងកាំនៃស្វ៊ែគឺ $I(2,-1,1)$ និង $r=3$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $P(-1,5,7)$ នោះ $\overrightarrow{IP}=(-3,6,6)$ ។

គេបាន $IP=|\overrightarrow{IP}|=\sqrt{9+36+36}=\sqrt{81}=9$ ។

ដូចនេះ $IP=9$ (ឯកតាប្រវែង)។

២.គណនា PA និង PB ៖



បន្ទាត់(IP)ប្រសព្វស្វ៊ែ(S) ត្រង់ចំណុច A និង B ដែល A នៅចន្លោះចំណុច I និង P នោះគេបាន $PA = IP - IA = IP - r = 9 - 3 = 6$ (ឯកតាប្រវែង)។

ហើយ $PB = IP + IB = IP + r = 9 + 3 = 12$ (ឯកតាប្រវែង)។

ដូចនេះ $PA = 6$, $PB = 12$ (ឯកតាប្រវែង)។

៣.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច A និង B ៖

យើងមាន $IA = 3$, $IP = 9$ នោះ $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IP}$ ដោយ $\overrightarrow{IP} = (-3,6,6)$

និង $\overrightarrow{IA} = (x_a - 2, y_a + 1, z_a - 1)$ នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases} x_a - 2 = -1 \\ y_a + 1 = 2 \\ z_a - 1 = 2 \end{cases} \quad \text{សមមូល} \quad \begin{cases} x_a = 1 \\ y_a = 1 \\ z_a = 3 \end{cases}$$

ដូចនេះ $A(1,1,3)$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $AB = 2r = 6$ និង $AP = 6$ នោះ A ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ

អង្កត់ $[BP]$ ។ គេបាន $\begin{cases} x_a = \dfrac{x_b + x_p}{2} \\ y_a = \dfrac{y_b + y_p}{2} \\ z_a = \dfrac{z_b + z_p}{2} \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} x_b = 2x_a - x_p \\ y_b = 2y_a - y_p \\ z_b = 2z_a - z_p \end{cases}$

ដោយ $A(1,1,3)$ និង $P(-1,5,7)$ នោះ $\begin{cases} x_b = 2+1 = 3 \\ y_b = 2-5 = -3 \\ z_b = 6-7 = -1 \end{cases}$

ដូចនេះ $B(3,-3,-1)$ ។

៤.រកសំណុំនៃចំណុច M ស្ថិតនៅលើស្វ៊ែ (S) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $PM^2 = PA.PB$ ៖

តាង (C) ជារង្វង់បានមកពីប្រសព្វរវាងប្លង់ (MAB) ជាមួយស្វ៊ែ (S) ។

តាមទ្រឹស្ដីបទស្វ័យគុណចំណុច P ធៀបទៅនឹងរង្វង់ (C) ដែល $PM^2 = PA.PB$

នោះគេបាន PM ជាបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ (C) ត្រង់ M ។

ដោយ $[AB]$ ជាអង្កត់ផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែ (S) នោះប្លង់ (MAB) ជាប្លង់វិជ្ឈមាត្រនៃ (S)

នោះគេទាញបានផ្ចិត I របស់ស្វ៊ែ (S) គឺជាផ្ចិតនៃរង្វង់ (C) ។

គេទាញបាន $PM \perp IM$ ហើយដោយ $M \in (S)$ នោះសំណុំចំណុច M គឺជា

រង្វង់ (C') ដែលជាប្រសព្វរវាងស្វ៊ែ (S) និងប្លង់ដែលកាត់តាម M ហើយកែងនឹង

$[AB]$ ត្រង់ចំណុច H ដែល H ជាផ្ចិតនិង MH ជាកាំរបស់រង្វង់ (C') ។

យើងអាចគណនារង្វាស់ MH និងកូអរដោនេចំណុច H ដូចខាងក្រោម៖

គេមាន $PM^2 = PA.PB = 6\times12 = 72$ នោះ $PM = 6\sqrt{2}$ និង $IM = r = 3$

ក្នុងត្រីកោណកែង PMI មាន MH ជាកម្ពស់គេមានទំនាក់ទំនង ៖

$\dfrac{1}{MH^2} = \dfrac{1}{IM^2} + \dfrac{1}{PM^2} = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{72} = \dfrac{1}{8}$ នោះគេទាញបាន $MH = 2\sqrt{2}$ ។

ក្នុងត្រីកោណកែង IMH គេមាន $IM^2 = IH^2 + MH^2$ (ពីតាគ័រ)

គេទាញ $IH = \sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{9-8} = 1$ ។

ដោយ $IA = 3$ នោះ $\overrightarrow{IH} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ ដោយ $I(2,-1,1), A(1,1,3)$

គេបាន $\overrightarrow{IA} = (-1,2,2)$ និង $\overrightarrow{IH} = (x_h - 2, y_h + 1, z_h - 1)$

$$\overrightarrow{IH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA} \text{ សមមូល } \begin{cases} x_h - 2 = -\dfrac{1}{3} \\ y_h + 1 = \dfrac{2}{3} \\ z_h - 1 = \dfrac{2}{3} \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} x_h = \dfrac{5}{3} \\ y_h = -\dfrac{1}{3} \\ z_h = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

ដូចនេះ $H\left(\dfrac{5}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$ ជាកូអរដោនេផ្ចិតនៃរង្វង់ (C') ។

លំហាត់ទី០៩

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(0;-3;-4)$; $B(2,1,8)$; $C(2;4;5)$ និង $D(4;-2,-3)$ ។ M និង N ជាពីរចំណុចស្ថិតនៅលើបន្ទាត់រៀងគ្នា (AB) និង (CD) ។

កំណត់កូអរដោនេនៃចំនុច M និង N ដើម្បីឲ្យអង្កត់ MN មានប្រវែងខ្លីបំផុត រួចកំណត់ប្រវែងខ្លីបំផុតនោះ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់កូអរដោនេនៃចំនុច M និង N

តាង $M(x_1;y_1;z_1)$ និង $N(x_2;y_1;z_2)$

គេមាន $\overrightarrow{AB}(2;4;12)$; $\overrightarrow{CD}(2;-6;-8)$

$\overrightarrow{AM}(x_1;y_1+3;z_1+4)$ និង $\overrightarrow{CN}(x_2-2;y_2-4;z_2-5)$

ដោយ $M\in(AB)\Rightarrow\overrightarrow{AM}\,//\,\overrightarrow{AB}$

គេទាញ $\dfrac{x_1}{2}=\dfrac{y_1+3}{4}=\dfrac{z_1+4}{12}=p\Rightarrow\begin{cases}x_1=2p\\y_1=4p-3\\z_1=12p-4\end{cases}\quad(i)$

ដូចគ្នាដែរ $N\in(CD)\Rightarrow\overrightarrow{CN}\,//\,\overrightarrow{CD}$

គេទាញ $\dfrac{x_2-2}{2}=\dfrac{y_2-4}{-6}=\dfrac{z_2-5}{-8}=q\Rightarrow\begin{cases}x_2=2q+2\\y_2=-6q+4\\z_2=-8q+5\end{cases}\quad(ii)$

កំប៉ុសង់ស្កាលែនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{MN}$ គឺ ៖

$\overrightarrow{MN}=(2q-2p+2\ ;-6q-4p+7\ ;-8q-12p+9)$

ដើម្បីឲ្យអង្គត់ MN មានប្រវែងខ្លីបំផុត រួចកំនត់ប្រវែងខ្លីបំផុតលុះត្រាតែ ៖

$\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{CD}$ សមមូល $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB}=0$ និង $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD}=0$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB}=-22p-58q+80=0\Rightarrow 11p+59q-40=0(1)$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD}=62p+48q-55=0\ \ (2)$

តាមសមីការ (1) និង (2) គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases}11p+59q-40=0\\62p+48q-55=0\end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេទទួលបានចម្លើយ $p=q=\dfrac{1}{2}$ ។

យកតម្លៃ $p=\dfrac{1}{2}$ និង $q=\dfrac{1}{2}$ ជំនួសក្នុង (i) និង (ii)

គេបាន $M(1\ ;-1\ ;2\ )$ និង $N(3\ ;1\ ;1\ )$ ។

កំណត់ប្រវែងខ្លីបំផុតរបស់ អង្កត់ MN ៖

គេមាន $\overrightarrow{MN}=(2\ ;2\ ;-1)$ នោះគេបាន $|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$

ដូចនេះប្រវែងខ្លីបំផុតរបស់អង្កត់ MN គឺ $MN=3$ (ឯកតាប្រវែង)។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១០

ក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានបីចំណុច $A(-1,2,3)$, $B(0,-1,1)$ និង $C(2,3,5)$ ។

១.ចូរកំណត់សមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overline{BC}$ និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L) កាត់តាមពីរចំណុច B និង C ។

២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ H រវាងបន្ទាត់ (L) ជាមួយប្លង់ (P) ។

៣.រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC រួចគណនាផ្ទៃក្រលានៃ ΔABC ។

ដំណោះស្រាយ

១.កំណត់សមីការប្លង់ (P) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L)

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) គឺ $\vec{n}=\overrightarrow{BC}=(2,4,4)$ ។

សមីការប្លង់ (P) កាត់តាមចំណុច A អាចសរសេរតាមរូបមន្ត

$$(P): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

$$(P): 2(x+1)+4(y-2)+4(z-3)=0$$
$$(P): 2x+4y+4z-18=0$$
$$(P): x+2y+2z-9=0$$

ដូចនេះ $(P): x+2y+2z-9=0$ ។

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) គឺ $\vec{u}=\overrightarrow{BC}=(2,4,4)$

សមីការបន្ទាត់ (L) កាត់តាមពីរចំណុច B និង C អាចសរសេរ៖

តាមរូបមន្ត $(L):\begin{cases} x = x_B + at \\ y = y_B + bt \\ z = z_B + ct \quad , t \in \mathbb{R} \end{cases}$

ដូចនេះ $(L):\begin{cases} x = 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 1 + 4t \quad , t \in \mathbb{R} \end{cases}$

២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ H ៖

យកសមីការ (L) ជំនួសក្នុង (P) គេបាន ៖

$18t - 9 = 0$ នាំឲ្យ $t = \frac{1}{2}$ ។

យកតម្លៃ $t = \frac{1}{2}$ ជួសក្នុងសមីការ(L)គេបាន $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 2 = 1 \\ z = 1 + 2 = 3 \end{cases}$

ដូចនេះ $H(1,1,3)$ ។

៣.រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC រួចគណនាផ្ទៃក្រលានៃ ΔABC

គេមាន $\overrightarrow{AB} = (1,-3,-2)$; $\overrightarrow{BC} = (2,4,4)$; $\overrightarrow{CA} = (-3,-1,-2)$

ដោយ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$; $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

នោះគេទាញ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{14}$ ។

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល A ។ ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{AH} = (2,-1,0)$

គេបាន $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = (2)(2) + (-1)(4) + (0)(4) = 0$ សមមូល $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$

នោះ AH ជាកម្ពស់នៃ ΔABC ។ គេបាន $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC$

តែ $AH = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$,$BC = \sqrt{4+16+16} = 6$

ដូចនេះ $S_{ABC} = 3\sqrt{5}$ (ឯកតាផ្ទៃ)។

លំហាត់ទី១១

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបន្ទាត់ (L) មាន

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $(L):\begin{cases}x=2+t\\y=6+4t\\z=2-t\quad ,t\in\mathbb{R}\end{cases}$ និងប្លង់ $(P):2x+2y+z-9=0$ ។

១.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) ។

២. M ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x=3$ និងស្ថិតនៅលើ (L) ហើយ H ជាចំណោលកែងនៃចំណុច M ទៅលើប្លង់ (P) ។គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M និង H ។

៣.គេសង់ប្លង់ (Q) កែងនឹងបន្ទាត់ (L) ត្រង់ M ហើយគេតាង (d) ជាបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង (Q) ។សរសេរសមីការប្លង់ (Q) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (d) ។

៤.គេគូសបន្ទាត់ (AH) ប្រសព្វប្លង់ (Q) ត្រង់ K ។ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AH) រួចគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច K ។

៥.គណនា MA និង MK រួចទាញបញ្ជាក់ប្រភេទនៃត្រីកោណ AMK ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P)

តាង $A(x_a,y_a,z_a)$ ។ ដោយ $A\in(L)$ និង $A\in(P)$ គេបាន៖

$$\begin{cases}x_a=2+t\\y_a=6+4t\quad(1)\\z_a=2-t\end{cases}\quad \text{និង}\quad 2x_a+2y_a+z_a-9=0\quad(2)$$

យកសមីការ (1) ជួសក្នុងសមីការ (2) គេបាន៖

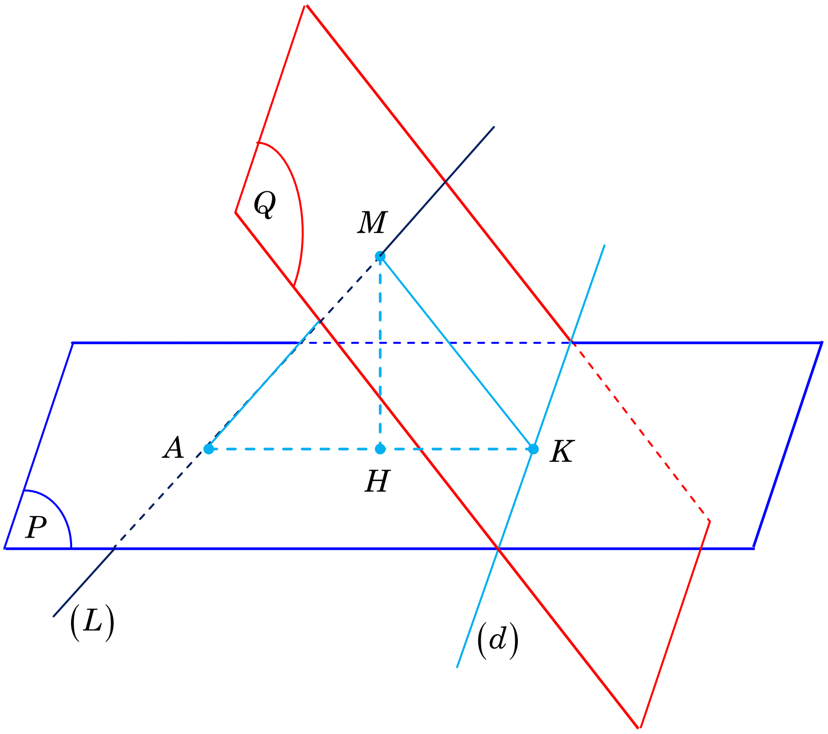
$2(2+t)+2(6+4t)+(2-t)-9=0$

$4+2t+12+8t+2-t-9=0$

$9t+9=0$

គេទាញបាន $t=-1$ យកជំនួសក្នុងសមីការ(1) គេបាន $\begin{cases} x_a = 2-1=1 \\ y_a = 6-4=2 \\ z_a = 2+1=3 \end{cases}$

ដូចនេះ $A(1,2,3)$ ។



២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M និង H

ដោយ $M \in (L)$ ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x=3$នោះគេបាន$\begin{cases} x_m = 2+t=3 \\ y_m = 6+4t \\ z_m = 2-t \end{cases}$

គេទាញបាន $t=1$ ហើយ $y_m = 6+4=10$, $z_m = 2-1=1$ ។

ដូចនេះ $M(3,10,1)$ ។

ម្យ៉ាងទៀត H ជាចំណោលកែងនៃចំណុច M ទៅលើប្លង់ (P) នោះ $H\in(P)$

គេបាន $2x_h+2y_h+z_h-9=0\quad(3)$

ប្លង់ $(P):2x+2y+z-9=0$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n_p}=(2,2,1)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{MH}\perp(P)$ និង $\vec{n_p}\perp(P)$ នោះ $\overrightarrow{MH}//\vec{n_p}$ គេទាញ $\overrightarrow{MH}=\lambda\vec{n_p}$

ដោយ $\overrightarrow{MH}=(x_h-3,y_h-10,z_h-1)$ និង $\vec{n_p}=(2,2,1)$

គេបាន $\begin{cases}x_h-3=2\lambda\\ y_h-10=2\lambda\\ z_h-1=\lambda\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x_h=3+2\lambda\\ y_h=10+2\lambda\\ z_h=1+\lambda\end{cases}\quad(4)$

យក (4) ជួសក្នុង (3) គេបាន $2(3+2\lambda)+2(10+2\lambda)+(1+\lambda)-9=0$

$$6+4\lambda+20+4\lambda+1+\lambda-9=0$$

$$9\lambda+18=0$$

$$\lambda=-2$$

យក $\lambda=-2$ ជួសក្នុង (4) គេបាន $\begin{cases}x_h=3-4=-1\\ y_h=10-4=6\\ z_h=1-2=-1\end{cases}$ ។

ដូចនេះ $H(-1,6,-1)$ ។

៣.សរសេរសមីការប្លង់ (Q) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (d)

ដោយប្លង់ (Q) កែងនឹងបន្ទាត់ (L) ត្រង់ M នោះវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) គឺជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់របស់ប្លង់ (Q) គឺ $\overrightarrow{n_Q}=\overrightarrow{u_L}=(1,4,-1)$ និង $M(3,10,1)\in(Q)$

សមីការនៃប្លង់ (Q) អាចសរសេរតាមរូបមន្ត ៖

$(Q):a(x-x_m)+b(y-y_m)+c(z-z_m)=0$

$1(x-3)+4(y-10)-(z-1)=0$

$x-3+4y-40-z+1=0$

$x+4y-z-42=0$

ដូចនេះ $(Q): x+4y-z-42=0$ ។

ហើយដោយ (d) ជាបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់(P)និង(Q)នោះវាជាសំណុំចម្លើយ

នៃប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} 2x+2y+z-9=0 \\ x+4y-z-42=0 \end{cases}$

យក $y=t$ $,t\in\mathbb{R}$ នោះគេបាន $\begin{cases} 2x+2t+z-9=0 & (i) \\ x+4t-z-42=0 & (ii) \end{cases}$

បូកសមីការ $(i)\&(ii)$ គេបាន $3x+6t-51=0$ នោះ $x=17-2t$

តាម(i) គេបាន $2(17-2t)+2t+z-9=0$ នោះ $z=-25+2t$

ដូចនេះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់គឺ(d): $\begin{cases} x=17-2t \\ y=t \\ z=-25+2t \quad , \quad t\in\mathbb{R} \end{cases}$

៨.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(AH) រួចគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច K ។

បន្ទាត់(AH)មានវិុចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{AH}=(-2,4,-4)$ឬ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}=(-1,2,-2)$

តាមរូបមន្ត (AH): $\begin{cases} x=x_a+at \\ y=y_a+bt \\ z=z_a+ct \quad ,t\in\mathbb{R} \end{cases}$

ដូចនេះ (AH): $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+2t \\ z=3-2t \quad , \ t\in\mathbb{R} \end{cases}$

ម្យ៉ាងទៀតដោយបន្ទាត់(AH) ប្រសព្វប្លង់(Q)ត្រង់ K នោះគេបាន ៖

$\begin{cases} x_k = 1 - t \\ y_k = 2 + 2t \\ z_k = 3 - 2t \end{cases}$ (5) និង $x_k + 4y_k - z_k - 42 = 0$ (6)

យកសមីការ(5) ជំនួសក្នុង(6) គេបាន $(1-t)+4(2+2t)-(3-2t)-42=0$

ឬ $1-t+8+8t-3+2t-42=0$

ឬ $9t-36=0$ នោះគេទាញបាន $t=4$ យកជួសក្នុង(5)នោះ$\begin{cases} x_k = 1-4 = -3 \\ y_k = 2+8 = 10 \\ z_k = 3-8 = -5 \end{cases}$

ដូចនេះ $K(-3\ ,10\ ,-5)$ ។

ឌ.គណនា MA និង MK រួចទាញបញ្ជាក់ប្រភេទនៃត្រីកោណ AMK ៖

គេមាន $A(1,2,3)$, $M(3,10,1)$ និង $K(-3\ ,10\ ,-5)$ ។

គេបាន $\overrightarrow{MA} = (2,8,-2)$ & $\overrightarrow{MK} = (-6\ ,0\ ,-6)$

នោះ $MA = |\overrightarrow{MA}| = \sqrt{4+64+4} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

ហើយ $MK = |\overrightarrow{MK}| = \sqrt{36+0+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

ដូចនេះ $MA = MK = 6\sqrt{2}$ (ឯកតាប្រវែង)។

គេមាន $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MK} = -12+0+12 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MK}$ និង $MA = MK = 6\sqrt{2}$

ដូចនេះ AMK ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល M ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១២

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបន្ទាត់ (L) មាន

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $(L):\begin{cases}x=1+t\\y=5-4t\\z=4-t\quad,t\in\mathbb{R}\end{cases}$ និងប្លង់ $(P):x+2y+2z-10=0$ ។

១.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) ។

២.គេសង់ប្លង់ (Q) កែងនឹងបន្ទាត់ (L) ត្រង់ A និងសង់បន្ទាត់ (d) កែងនឹងប្លង់ (P) ត្រង់ចំណុច A ដែរ។ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (Q) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (d) ។

៣. M ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x=0$ និងស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (d) ហើយ H និង K ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច M ទៅលើបន្ទាត់ (d) និងប្លង់ (Q) រៀងគ្នា។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M,H និង K ។

៤.ចូរស្រាយថាបួនចំណុច M,H,A,K ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

៥.ចូរស្រាយថាចតុកោណ $MHAK$ ជាការេ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P)

តាង $A(x_a,y_a,z_a)$ ។ ដោយ $A\in(L)$ និង $A\in(P)$ គេបាន៖

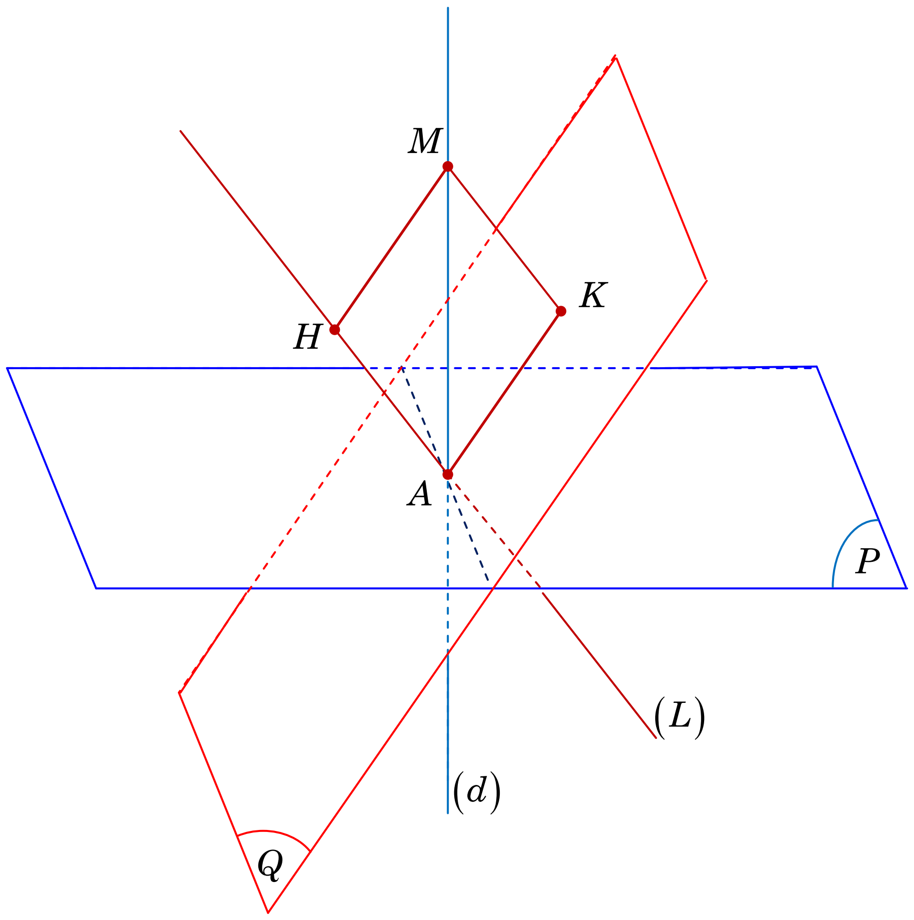
$$\begin{cases}x_a=1+t\\y_a=5-4t\\z_a=4-t\end{cases}\quad(1)\text{ និង }x_a+2y_a+2z_a-10=0\quad(2)\text{ ។}$$

យកសមីការ (1) ជួសក្នុង (2) គេបាន៖

$$(1+t)+2(5-4t)+2(4-t)-10=0$$
$$1+t+10-8t+8-2t-10=0$$
$$-9t+9=0$$
$$t=1$$

យក $t=1$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $\begin{cases} x_a=1+1=2 \\ y_a=5-4=1 \\ z_a=4-1=3 \end{cases}$

ដូចនេះ $A(2,1,3)$ ។



២.សរសេរសមីការប្លង់ (Q) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (d)

ដោយប្លង់ (Q) កែងនឹងបន្ទាត់ (L) ត្រង់ A នោះវិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) គឺជា

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់(Q) គឺ $\overrightarrow{n_Q}=\overrightarrow{u_L}=(1,-4,-1)$ ។

សមីការនៃប្លង់(Q) អាចសរសេរតាមរូបមន្ត ៖

$(Q): a(x-x_a)+b(y-y_a)+c(z-z_a)=0$ ដោយ $A(2,1,3)$

$$1(x-2)-4(y-1)-1(z-3)=0$$
$$x-2-4y+4-z+3=0$$
$$x-4y-z+5=0$$

ដូចនេះ $(Q): x-4y-z+5=0$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយបន្ទាត់(d)កែងនឹងប្លង់(P)ត្រង់ចំណុចAដែរនោះវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់(P)គឺជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់(d)គឺ $\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{n_p}=(1,2,2)$ ។

សមីការបន្ទាត់(d) អាចសរសេរតាមរូបមន្ត $(d):\begin{cases} x=x_a+at \\ y=y_a+bt \\ z=z_a+ct \quad ,t\in\mathbb{R} \end{cases}$

ដោយ $A(2,1,3)$ ដូចនេះ $(d):\begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t \\ z=3+2t \quad ,t\in\mathbb{R} \end{cases}$ ។

៣.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M, H និង K

ដោយM ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស$x=0$និងស្ថិតនៅលើបន្ទាត់(d)នោះគេបាន៖

$\begin{cases} x_m=2+t=0 \\ y_m=1+2t \\ z_m=3+2t \end{cases}$ គេទាញបាន $t=-2$ និង $y_m=1-4=-3, z_m=3-4=-1$ ។

ដូចនេះ $M(0,-3,-1)$ ។

តាង $H(x_h,y_h,z_h)$ ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុចM ទៅលើបន្ទាត់(d)

គេបាន $H\in(L)$ សមមូល $\begin{cases}x_h=1+t\\ y_h=5-4t \quad (3)\\ z_h=4-t\end{cases}$ និង

គេមាន $\overrightarrow{MH}=(1+t\ ,8-4t\ ,5-t)$ ហើយដោយ $\overrightarrow{MH}\perp(L)$ និង $\overrightarrow{u_L}//(L)$

គេបាន $\overrightarrow{MH}\perp\overrightarrow{u_L}\Leftrightarrow\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_L}=0$ ដោយ $\overrightarrow{u_L}=(1,-4,-1)$

នោះ $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_L}=(1+t)-4(8-4t)-(5-t)=0$

$$1+t-32+16t-5+t=0$$

$$18t-36=0$$

$$t=2$$

យកតម្លៃ $t=2$ ជួសក្នុង (3) គេបាន $\begin{cases}x_h=1+2=3\\ y_h=5-8=-3\\ z_h=4-2=2\end{cases}$

ដូចនេះ $H(3,-3,2)$ ។

តាង $K(x_k,y_k,z_k)$ ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច M ទៅលើប្លង់ (Q)

គេមាន $K\in(Q)$ សមមូល $x_k-4y_k-z_k+5=0\ (4)$

គេមាន $\overrightarrow{MK}\perp(Q)$ និង $\overrightarrow{n_Q}\perp(Q)$ នោះគេទាញ $\overrightarrow{MK}//\overrightarrow{n_Q}$

សមមូល $\overrightarrow{MK}=\lambda\overrightarrow{n_Q}$ ដោយ $\overrightarrow{MK}=(x_k\ ,y_k+3\ ,\ z_k+1)$ និង $\overrightarrow{n_Q}=(1,-4,-1)$

គេបាន $\begin{cases}x_k=\lambda\\ y_k+3=-4\lambda\\ z_k+1=-\lambda\end{cases}$ សមមូល $\begin{cases}x_k=\lambda\\ y_k=-3-4\lambda \quad (5)\\ z_k=-1-\lambda\end{cases}$

យក (5) ជួសកក្នុង (4) គេបាន $\lambda-4(-3-4\lambda)-(-1-\lambda)+5=0$

$$\lambda+12+16\lambda+1+\lambda+5=0$$

គេទាញបាន $\lambda = -\frac{18}{18} = -1$ យកជួសក្នុង(5)គេបាន$\begin{cases} x_k = -1 \\ y_k = -3+4 = 1 \\ z_k = -1+1 = 0 \end{cases}$

ដូចនេះ $K(-1,1,0)$ ។

៨.ស្រាយថាបួនចំណុច M,H,A,K ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ៖

គេមាន$M(0,-3,-1),H(3,-3,2),A(2,1,3)$ និង $K(-1,1,0)$ ។

គេបាន $\overrightarrow{MH}=(3,0,3),\overrightarrow{MA}=(2,4,4),\overrightarrow{MK}=(-1,4,1)$

នោះ $\left(\overrightarrow{MH}\times\overrightarrow{MA}\right)\cdot\overrightarrow{MK} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3(4-16)-0(2+4)+3(8+4)$

$= -36+0+36 = 0$

គេទាញបាន $\overrightarrow{MH},\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MK}$ ជាវ៉ិចទ័រកូប្លានែ(ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ)។

ដូចនេះបួនចំណុច M,H,A,K ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

៩.ស្រាយថាចតុកោណ $MHAK$ ជាការេ៖

គេមាន $\overrightarrow{MH}=(3,0,3)$ & $\overrightarrow{MK}=(-1,4,1)$

គេបាន $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MK} = -3+0+3 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}\perp\overrightarrow{MK}$

ហើយ $|\overrightarrow{MH}| = \sqrt{9+0+9} = 3\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{MK}| = \sqrt{1+16+1} = 3\sqrt{2}$

នោះគេទាញ $MH = MK = 3\sqrt{2}$ ។ម្យ៉ាងទៀត$MK\perp AK$ និង $MH\perp AH$

ព្រោះ$H \& K$ ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃM លើបន្ទាត់(L)និងប្លង់(Q) ។

ដូចនេះចតុកោណ$MHAK$ ជាការេ។

លំហាត់ទី១៣

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបន្ទាត់ (L) មាន

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $(L):\begin{cases}x=1+t\\ y=4-t\\ z=9-4t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$ និងប្លង់ $(P):2x+y-2z-6=0$ ។

១.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) ។

២.គេឲ្យ $B(5,6,5)$ ។ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B\in(P)$ ។

៣.ពីចំណុច B គេគូសបន្ទាត់ (BH) កែងនឹងបន្ទាត់ (L) ដោយ $H\in(L)$ ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BH) ។

៤.គេយក I ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[AB]$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I រួចទាញបង្ហាញថា $\overrightarrow{IH}$ ជាវ៉ិចទ័រនរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) ។

៥.K ជាចំណុចឆ្លុះគ្នានៃចំណុច H ធៀបនឹងប្លង់ (P) ។គណនាកូអរដោនេនៃ K រួចស្រាយបញ្ជាក់ថាចតុកោណ $AHBK$ ជាការេ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P)

តាង $A(x_a,y_a,z_a)$ ។ ដោយ $A\in(L)$ និង $A\in(P)$ គេបាន៖

$\begin{cases}x_a=1+t\\ y_a=4-t\\ z_a=9-4t\end{cases}$ (1) និង $2x_a+y_a-2z_a-6=0$ (2)។

យកសមីការ (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន $2(1+t)+(4-t)-2(9-4t)-6=0$

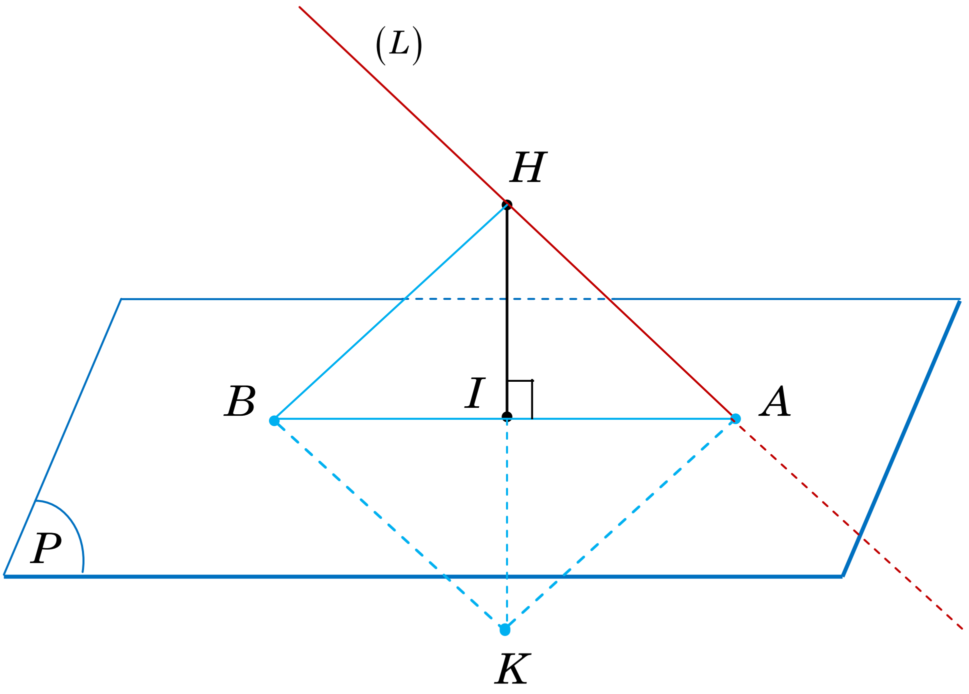
ឬ $2+2t+4-t-18+8t-6=0$

$$9t-18=0$$

$$t=2$$

យក $t=2$ ជួសក្នុង (1) គេបាន $\begin{cases} x_a=1+2=3 \\ y_a=4-2=2 \\ z_a=9-8=1 \end{cases}$

ដូចនេះ $A(3,2,1)$ ។



២. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B\in(P)$ ៖

គេមាន $B(5,6,5)$ និង $(P): 2x+y-2z-6=0$ ។

យកកូអរដោនេនៃចំណុច B ទៅជំនួសក្នុងសមីការនៃប្លង់ (P) គេបាន៖

$2(5)+6-2(5)-6=0$ ឬ $0=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់។

ដូចនេះ $B\in(P)$ ។

៣.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BH)

តាង $H(x_h, y_h, z_h)$ ដោយ $H \in (L)$ នោះ $\begin{cases} x_h = 1+t \\ y_h = 4-t \\ z_h = 9-4t \end{cases}$ (3)

គេមាន $\overrightarrow{BH} = (t-4, -t-2, -4t+4)$ ។

បន្ទាត់ (BH) កែងនឹងបន្ទាត់ (L) ហើយ $\overrightarrow{u_L} = (1, -1, -4)$ ស្របនឹងបន្ទាត់ (L)

គេទាញបាន $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{u_L} \Leftrightarrow \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{u_L} = 0$

សមមូល $(t-4)-(-t-2)-4(-4t+4)=0$

សមមូល $t-4+t+2+16t-16=0$

សមូល $18t-18=0$ នោះ $t=1$ យកជួសក្នុង (1) គេបាន $\begin{cases} x_h = 1+1=2 \\ y_h = 4-1=3 \\ z_h = 9-4=5 \end{cases}$

ដូចនេះ $H(2,3,5)$ ។

៤.គណនាកូអរដោនេនៃ I រួចទាញបង្ហាញថា $\overrightarrow{IH}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P)

គេមាន $A(3,2,1)$ និង $B(5,6,5)$

ដោយ I ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[AB]$ នោះ $I\left(\dfrac{3+5}{2}, \dfrac{2+6}{2}, \dfrac{1+5}{2}\right)$

ដូចនេះ $I(4,4,3)$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $H(2,3,5)$ និង $I(4,4,3)$ នោះ $\overrightarrow{IH} = (2,1,-2)$

ដោយ $(P): 2x+y-2z-6=0$ នោះ $\overrightarrow{n_p} = (2,1,-2) = \overrightarrow{IH}$ ។

ដូចនេះ $\overrightarrow{IH}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) ។

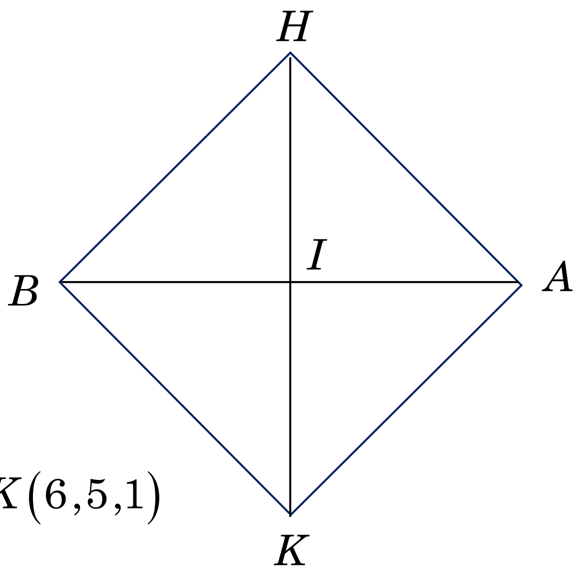
៨.គណនាកូអរដោនេនៃ K ៖

K ជាចំណុចឆ្លុះគ្នានៃចំណុច H ធៀបនឹងប្លង់ (P) ហើយ $\overrightarrow{IH}\perp(P)$ នោះគេទាញបាន I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[HK]$ ។

ហេតុនេះ $\begin{cases} x_k = 2x_I - x_h \\ y_k = 2y_I - y_h \\ z_k = 2z_I - z_h \end{cases}$ ដោយ $H(2,3,5)$ និង $I(4,4,3)$

គេបាន $\begin{cases} x_k = 8-2=6 \\ y_k = 8-3=5 \\ z_k = 6-5=1 \end{cases}$ ។ ដូចនេះ $K(6,5,1)$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថាចតុកោណ $AHBK$ ជាការេ៖



$A(3,2,1)$, $H(2,3,5)$, $B(5,6,5)$ និង $K(6,5,1)$

$\overrightarrow{AB}=(2,4,4)$ និង $\overrightarrow{HK}=(4,2,-4)$

គេបាន $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4+16+16}=6$, $|\overrightarrow{HK}|=\sqrt{16+4+16}=6$ នោះ $AB=HK$

ហើយ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HK}=8+8-16=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{HK}$ ។

ចតុកោណ $AHBK$ មានអង្កត់ទ្រូង AB & HK ស្មើគ្នានិងកែងគ្នាវាជាការេ។

ដូចនេះចតុកោណ $AHBK$ ជាការេ។

លំហាត់ទី១៤

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(1,2,3),B(3,6,-1),C(4,3,3)$ និង $D(2,1,1)$ ។

១.ចូរសរសេរសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ(S) មានអង្កត់ផ្ចិត$[AB]$ ។

២.បង្ហាញថា$C\in(S)$និង$D\in(S)$។សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(CD)។

៣.សរសេរសមីការប្លង់(P)និងប្លង់(Q)ដែលកាត់តាមចំណុចរៀងគ្នាCនិងD

ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ$\overrightarrow{AB}$ ។

៤.ចូរបង្ហាញថាបួនចំណុចA,B,C,D មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ។

៥.គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត$ABCD$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.សរសេរសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ(S) មានអង្កត់ផ្ចិត$[AB]$

គេមាន $A(1,2,3),B(3,6,-1),C(4,3,3)$ និង $D(2,1,1)$

តាងI ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែ(S) នោះវាជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[AB]$ ។

តាមរូបមន្តកូអរដោនេនៃចំណុចកណ្តាល $I\left(\frac{x_a+x_b}{2},\frac{y_a+y_b}{2},\frac{z_a+z_b}{2}\right)$

គេបាន $I(2,4,1)$ហើយ $R=\frac{AB}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{(3-1)^2+(6-2)^2+(-1-3)^2}=3$។

សមីការស្វ៊ែអាចសរសេរតាមរូបមន្ត $(S):(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2=R^2$

ដូចនេះ $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=9$ ។

២.បង្ហាញថា $C\in(S)$ និង $D\in(S)$៖

គេមាន $C(4,3,3)$ និង $D(2,1,1)$ និង $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=9$

ចំពោះ $C(4,3,3)$ នោះ $(4-2)^2+(3-4)^2+(3-1)^2=9$

$4+1+4=9$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $C\in(S)$។

ចំពោះ $D(0,1,1)$ នោះ $(2-2)^2+(1-4)^2+(1-1)^2=9$

$0+9+0=9$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $D\in(S)$

សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (CD)៖

បន្ទាត់ (CD) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{CD}=(-2,-2,-2)$ និងកាត់តាម $C(4,3,3)$

តាមរូបមន្ត $(CD):\begin{cases}x=x_c+at\\y=y_c+bt\\z=z_c+ct\quad,t\in\mathbb{R}\end{cases}$

ដូចនេះ $(CD):\begin{cases}x=4-2t\\y=3-2t\\z=3-2t\quad,t\in\mathbb{R}\end{cases}$

៣.សរសេរសមីការប្លង់ (P) និងប្លង់ (Q)៖

គេមាន $A(1,2,3)$ និង $B(3,6,-1)$ នោះ $\overrightarrow{AB}=(2,4,-4)$

សរសេរសមីការប្លង់ (P) និងប្លង់ (Q) ដែលកាត់តាមចំណុចរៀងគ្នា C និង D ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ អាចសរសេរ៖

$(P): 2(x-4)+4(y-3)-4(z-3)=0$

$$2x-8+4y-12-4z+12=0$$
$$2x+4y-4z-8=0$$
$$x+2y-2z-4=0$$

ដូចនេះ $(P): x+2y-2z-4=0$ ។

ហើយ $(Q): 2(x-2)+4(y-1)-4(z-1)=0$

$$2x-4+4y-4-4z+4=0$$
$$2x+4y-4z-4=0$$
$$x+2y-2z-2=0$$

ដូចនេះ $(Q): x+2y-2z-2=0$ ។

៤.បង្ហាញថាបួនចំណុច A,B,C,D មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ៖

គេមាន $A(1,2,3), B(3,6,-1), C(4,3,3)$ និង $D(2,1,1)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(2,4,-4)$, $\overrightarrow{AC}=(3,1,0)$, $\overrightarrow{AD}=(1,-1,-2)$

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}2 & 4 & -4\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -2\end{vmatrix}=2(-2-0)-4(-6-0)-4(-3-1)$$

$$=-4+24+12=32$$

ដោយ $\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}\neq 0$ នោះវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ មិនកូប្លានែ។

ដូចនេះ A,B,C,D មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ។

៥.គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ៖

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}\right|=\frac{32}{6}=\frac{16}{3}$$ (ឯកតាមាឌ) ។

លំហាត់ទី១៥

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច $A(3,-4,-2),B(1,0,-5),C(5,-2,-5)$ និង $D(4,-2,0)$ ។

១.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំណុច A,B,C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

២.គណនា $\overrightarrow{AD}$ រួចផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។ គណនារង្វាស់ AD រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ។

៣.គណនា $\overrightarrow{OB}$ និង $\overrightarrow{DC}$ រួចទាញថា $OBCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

៤.សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) គូសចេញពីគល់ O ហើយកែងនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ H ។

៥.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចបង្ហាញថា $AHBC$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ

គេមាន $A(3,-4,-2),B(1,0,-5),C(5,-2,-5)$ និង $D(4,-2,0)$

នោះ $\overrightarrow{AB}=(-2,4,-3)$, $\overrightarrow{AC}=(2,2,-3)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 4 & -3\\ 2 & 2 & -3\end{vmatrix}=-6\vec{i}-12\vec{j}-12\vec{k}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-6,-12,-12)$ ។

ទាញថាបីចំណុចមិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ៖

គេមាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\neq\vec{O}$ នោះវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\ \&\ \overrightarrow{AC}$ មិនកូលីនេអ៊ែគ្នា។

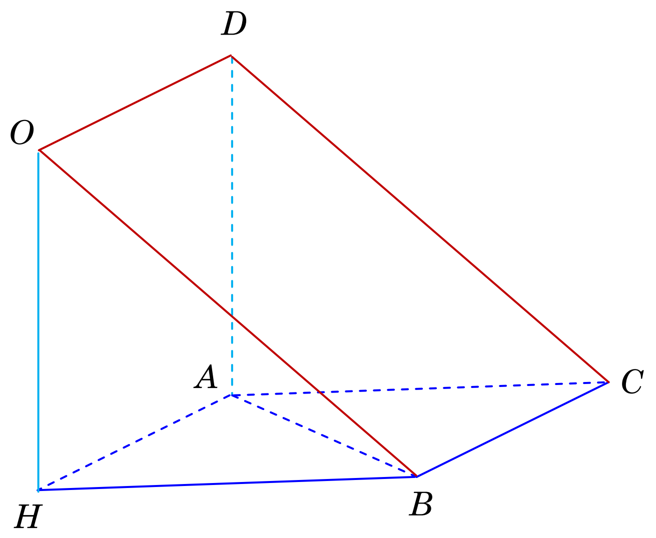
ដូច្នេះបីចំណុច A,B,C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ៖

តាមរូបមន្ត $S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-6,-12,-12)$

នោះ $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-6)^2+(-12)^2+(-12)^2}=\sqrt{36+144+144}=\sqrt{324}=18$

ដូចនេះ $S_{ABC}=\frac{1}{2}\times18=9$ (ឯកតាផ្ទៃ)។



២.គណនា $\overrightarrow{AD}$ រួចផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ៖

យើងមាន $A(3,-4,-2)$ និង $D(4,-2,0)$ នោះ $\overrightarrow{AD}=(1,2,2)$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-6,-12,-12)$ នោះ $-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,2,2)$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។

គណនារង្វាស់ AD រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ៖

យើងមាន $\overrightarrow{AD}=(1,2,2)$ នោះយើងបាន $AD=|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{1+4+4}=3$

ដូចនេះ $AD=3$ (ឯកតាប្រវែង)។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ នោះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-6\,\overrightarrow{AD}$

តាមរូបមន្តមាឌ $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\left|\left(-6\,\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AD}\right|=|\overrightarrow{AD}|^2=AD^2$

ដូចនេះ $V_{ABCD}=3^2=9$ (ឯកតាមាឌ)។

៣.គណនា $\overrightarrow{OB}$ និង $\overrightarrow{DC}$ រួចទាញថា $OBCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម៖

គេមាន $O(0,0,0),B(1,0,-5),C(5,-2,-5)$ និង $D(4,-2,0)$

យើងបាន $\overrightarrow{OB}=(1,0,-5)$ និង $\overrightarrow{DC}=(1,0,-5)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}OB=DC\\OB//DC\end{cases}$

ដូចនេះចតុកោណ $OBCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

៤.សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) ៖

ប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-6,-12\ ,-12)$ ហើយកាត់តាមចំណុច $A(3,-4,-2)$ អាចសរសេរ ៖

$$(ABC):a(x-x_a)+b(y-y_a)+c(z-z_a)=0$$
$$-6(x-3)-12(y+4)-12(z+2)=0$$
$$-6x+18-12y-48-12z-24=0$$
$$-6x-12y-12z-54=0$$
$$x+2y+2z+9=0$$

ដូចនេះ $(ABC):x+2y+2z+9=0$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោះបន្ទាត់(d) គូសចេញពីគល់O ហើយកែងនឹងប្លង់(ABC) នោះ

គេបាន $\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{n}=(1,2,2)$ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនិង$O(0,0,0)$ជាចំណុចកាត់តាម

តាមរូបមន្ត $(d):\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \quad ,t\in\mathbb{R} \end{cases}$ ។ ដូចនេះ $(d):\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=2t \quad ,t\in\mathbb{R} \end{cases}$

៥.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H ៖

ចំណុច H គឺជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់$(d):\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=2t \quad ,t\in\mathbb{R} \end{cases}$ និងប្លង់(ABC)

ដែលមានសមីការ $(ABC): x+2y+2z+9=0$ ។

យកសមីការ(d) ជំនួសក្នុង(ABC)គេបាន $t+4t+4t+9=0$ ឬ $t=-1$ ។

យក $t=-1$ ជំនួសក្នុងសមីការ(d) គេបាន $x=-1, y=-2, z=-2$ ។

ដូចនេះ $H(-1,-2,-2)$ ។

បង្ហាញថាចតុកោណ $AHBC$ ជាប្រលេឡូក្រាម៖

គេមាន $A(3,-4,-2), B(1,0,-5), C(5,-2,-5)$ និង $H(-1,-2,-2)$

គេបាន $\overrightarrow{CA}=(-2,-2,3)$ និង $\overrightarrow{BH}=(-2,-2,3)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BH}$ នាំឲ្យ $CA=BH$ និង $CA//BH$ ។

ដូចនេះចតុកោណ $AHBC$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១៦

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបីចំណុច $A(2,-3,4),B(3,1,3),C(-1,0,4)$ និងប្លង់ $(P): x-2y+2z-7=0$ ។

១.គណនា AB,AC និង BC រួចបង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

២.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B\in(P)$ និង $C\in(P)$ ។សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (BC) ។

៣. H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃ A លើប្លង់ (P) ។គណនាកូអរដោនេនៃ H ។

៤.គេតាង $\vec{u}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$, $\vec{v}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$ និង $\vec{w}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HA}$ ។

   ចូរស្រាយថា $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ ជាគោលអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន។

៥.ចូរសរសេរសមីការប្លង់ $(HAB),(HAC)$ និង (HBC) ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា AB,AC និង BC រួចបង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស៖

គេមាន $A(2,-3,4),B(3,1,3),C(-1,0,4)$

យើងបាន $AB=\sqrt{(3-2)^2+(1+3)^2+(3-4)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ ។

$$AC=\sqrt{(-1-2)^2+(0+3)^2+(4-4)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$BC=\sqrt{(-1-3)^2+(0-1)^2+(4-3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $AB=AC=BC=3\sqrt{2}$ (ឯកតាប្រវែង)។

ដោយ $AB=AC=BC=3\sqrt{2}$ នោះ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

២.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B\in(P)$ និង $C\in(P)$៖

គេមាន $B(3,1,3),C(-1,0,4)$ និងប្លង់ $(P):x-2y+2z-7=0$ ។

ចំពោះ $B(3,1,3)$ នោះ $3-2+6-7=0$

$0=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $B\in(P)$ ។

ចំពោះ $C(-1,0,4)$ នោះ $-1+0+8-7=0$

$0=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $C\in(P)$ ។

សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (BC)៖

បន្ទាត់ (BC) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{BC}=(-4,-1,1)$ និងកាត់តាម $B(3,1,3)$

តាមរូបមន្ត $(BC):\begin{cases}x=x_b+at\\y=y_b+bt\\z=z_b+ct\ \ ,t\in\mathbb{R}\end{cases}$

ដូចនេះ $(BC):\begin{cases}x=3-4t\\y=1-t\\z=3+t\ \ ,t\in\mathbb{R}\end{cases}$

៣.គណនាកូអរដោនេនៃ H៖

តាង $H(x_h,y_h,z_h)$ ។ដោយ H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃ A លើប្លង់ (P) នោះ

$\overrightarrow{AH}\perp(P)$ ដោយ $\overrightarrow{n_p}\perp(P)$ ដែល នោះ $\overrightarrow{AH}//\overrightarrow{n_p}$

គេទាញ $\overrightarrow{AH}=\lambda\,\overrightarrow{n_p}$ ដោយ $\overrightarrow{AH}=(x_h-2,y_h+3,z_h-4)$ និង $\overrightarrow{n_p}=(1,-2,2)$

គេបាន $\begin{cases} x_h - 2 = \lambda \\ y_h + 3 = -2\lambda \\ z_h - 4 = 2\lambda \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} x_h = 2 + \lambda \\ y_h = -3 - 2\lambda \quad (1) \\ z_h = 4 + 2\lambda \end{cases}$

ម្យ៉ាងទៀត $H \in (P)$ សមមូល $(2+\lambda) - 2(-3-2\lambda) + 2(4+2\lambda) - 7 = 0$

ឬ $2 + \lambda + 6 + 4\lambda + 8 + 4\lambda - 7 = 0$

$$9\lambda + 9 = 0$$

$$\lambda = -1$$

យក $\lambda = -1$ ជួសក្នុង (1) នោះ $\begin{cases} x_h = 2 - 1 = 1 \\ y_h = -3 + 2 = -1 \\ z_h = 4 - 2 = 2 \end{cases}$

ដូចនេះ $H(1,-1,2)$ ។

៤.ស្រាយថា $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ ជាគោលអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន៖

គេមាន $\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$, $\vec{v} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$ និង $\vec{w} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HA}$

ដោយ $A(2,-3,4), B(3,1,3), C(-1,0,4)$ និង $H(1,-1,2)$

នោះ $\overrightarrow{HB} = (2,2,1), \overrightarrow{HC} = (-2,1,2)$ និង $\overrightarrow{HA} = (1,-2,2)$

គេបាន $\vec{u} = \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, $\vec{v} = \left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\vec{w} = \left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

គេមាន $|\vec{u}| = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}} = 1$, $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}} = 1$, $|\vec{w}| = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}} = 1$

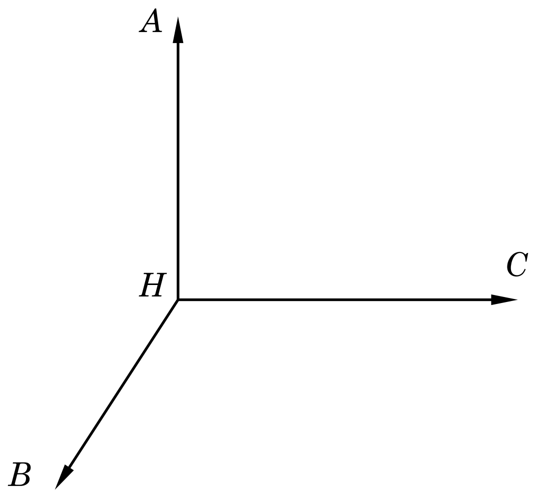
$\begin{cases} \vec{u}.\vec{v} = -\frac{4}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9} = 0 \\ \vec{u}.\vec{w} = \frac{2}{9}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9} = 0 \\ \vec{v}.\vec{w} = -\frac{2}{9}-\frac{2}{9}+\frac{4}{9} = 0 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ \vec{u} \perp \vec{w} \\ \vec{v} \perp \vec{w} \end{cases}$

គេទាញបាន $\vec{u},\vec{v}$ និង $\vec{w}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតានិងអរតូកូណាល់គ្នាពីរៗ។

ម្យ៉ាងទៀត $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\vec{i}-\frac{2}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}=\vec{w}$ ។

សរុបមកយើងសន្និដ្ឋានថា $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ ជាគោលអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន។

ជ.សរសេរសមីការប្លង់ $(HAB),(HAC)$ **និង** (HBC)



ប្លង់ $(HAB),(HAC)$ និង (HBC) កាត់តាមចំណុច $H(1,-1,2)$ និងមានវ៉ិចទ័រ

នរម៉ាល់រៀងគ្នា $\vec{v}=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\vec{u}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, $\vec{w}=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ មានសមីការ៖

$(HAB):-\frac{2}{3}(x-1)+\frac{1}{3}(y+1)+\frac{2}{3}(z-2)=0$ ឬ $-2x+y+2z-1=0$

$(HAC):\frac{2}{3}(x-1)+\frac{2}{3}(y+1)+\frac{1}{3}(z-2)=0$ ឬ $2x+2y+z-2=0$

$(HBC):\frac{1}{3}(x-1)-\frac{2}{3}(y+1)+\frac{2}{3}(z-2)=0$ ឬ $x-2y+2z-7=0$

លំហាត់ទី១៧

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច

$S(3,4,4)$, $A(2,6,2),B(-1,3,5)$ និង $C(3,1,1)$ ។

១.គណនា AB,AC , SB និង SC រួចទាញរកប្រភេទត្រីកោណ ABC & SBC ។

២.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}$ ។

៣.ស្រាយបញ្ជាក់ថាប្លង់ (P) កាត់តាម S ហើយកែងនឹងវិចទ័រ $\overrightarrow{SA}$ មានសមីការ

$x-2y+2z-3=0$ ។

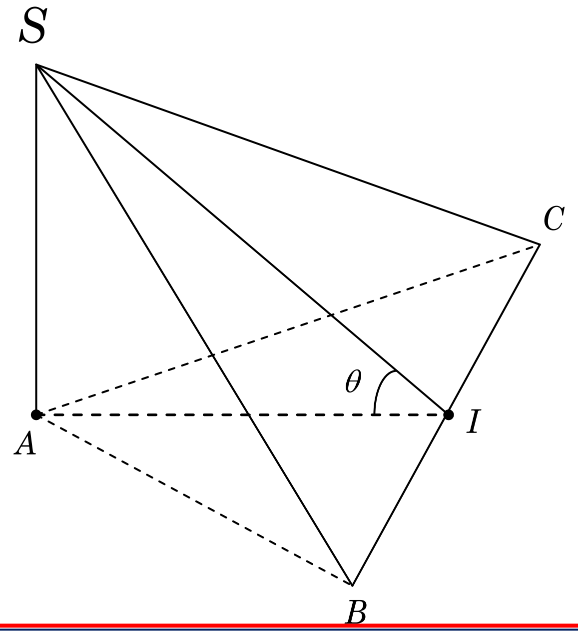
៤.តាង I ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[BC]$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I ។

សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រ (Q) នៃអង្កត់ $[BC]$ ។

៥.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $A\in(Q)$ និង $S\in(Q)$ ។ គណនារង្វាស់មុំ $\angle SIA$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា AB,AC , SB និង SC រួចទាញរកប្រភេទត្រីកោណ ABC & SBC ៖



គេមាន $S(3,4,4)$, $A(2,6,2),B(-1,3,5)$ និង $C(3,1,1)$

គេបាន $AB=\sqrt{(-1-2)^2+(3-6)^2+(5-2)^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

$$AC=\sqrt{(3-2)^2+(1-6)^2+(1-2)^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

$$SB=\sqrt{(-1-3)^2+(3-4)^2+(5-4)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$SC=\sqrt{(3-3)^2+(4-1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $AB=AC=3\sqrt{3}$ (ឯកតាប្រវែង)

និង $SB=SC=3\sqrt{2}$ (ឯកតាប្រវែង) ។

ដោយ $AB=AC$ និង $SB=SC$ នោះត្រីកោណ ABC និងត្រីកោណ SBC សុទ្ធតែជាត្រីកោណសមបាតមានកំពូល A និង S រៀងគ្នា។

២.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}$

គេមាន $S(3,4,4)$, $A(2,6,2),B(-1,3,5)$ និង $C(3,1,1)$

គេបាន $\overrightarrow{SA}=(-1,2,-2),\overrightarrow{AB}=(-3,-3,3)$,$\overrightarrow{AC}=(1,-5,-1)$

យើងបាន $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB}=3-6-6=-9$ និង $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}=-1-10+2=-9$

៣.ស្រាយបញ្ជាក់ថាប្លង់ (P) មានសមីការ $x-2y+2z-3=0$

ប្លង់ (P) កាត់តាម $S(3,4,4)$ ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{SA}=(-1,2,-2)$ សរសេរ៖

$(P): a(x-x_s)+b(y-y_s)+c(z-z_s)=0$

$$-(x-3)+2(y-4)-2(z-4)=0 \text{ ឬ } -x+2y-2z+3=0$$

ដូចនេះ $(P): x-2y+2z-3=0$ ។

៤.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I

ដោយ I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[BC]$ នោះ $I\left(\frac{x_b+x_c}{2},\frac{y_b+y_c}{2},\frac{z_b+z_c}{2}\right)$

ដោយ $B(-1,3,5)$ និង $C(3,1,1)$ នោះ $I\left(\frac{-1+3}{2},\frac{3+1}{2},\frac{5+1}{2}\right)$

ដូចនេះ ។

សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រ (Q) នៃអង្កត់ $[BC]$ ៖

ប្លង់មេដ្យាទ័រ (Q) នៃ $[BC]$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{BC}=(4,-2,-4)$ និងកាត់តាម ចំណុច $I(1,2,3)$ កណ្តាលនៃអង្កត់ $[BC]$ អាចសរសេរ ៖

$$(Q): a(x-x_i)+b(y-y_i)+c(z-z_i)=0$$

$$4(x-1)-2(y-2)-4(z-3)=0$$

$$4x-4-2y+4-4z+12=0$$

$$4x-2y-4z+12=0$$

$$2x-y-2z+6=0$$

ដូចនេះ $(Q):2x-y-2z+6=0$ ។

៥.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $A\in(Q)$ និង $S\in(Q)$ ៖

យើងមាន $A(2,6,2)$, $S(3,4,4)$ និង $(Q):2x-y-2z+6=0$

យកកូអរដោនេ A ជួសក្នុង (Q) គេបាន $4-6-4+6=0$ ពិតនោះ $A\in(Q)$

យកកូអរដោនេ S ជួសក្នុង (Q) គេបាន $6-4-8+6=0$ ពិតនោះ $S\in(Q)$

ដូចនេះ $A\in(Q)$ និង $S\in(Q)$ ។

គណនារង្វាស់មុំ $\angle SIA$ ៖

តាង $\angle SIA = \theta$ នោះ θ ជាមុំផ្គុំដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{IA}$ និង $\overrightarrow{IS}$ ។

គេមាន $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IS} = |\overrightarrow{IA}|.|\overrightarrow{IS}|\cos\theta$ នោះ $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IS}}{|\overrightarrow{IA}|.|\overrightarrow{IS}|}$

ដោយ $I(1,2,3)$, $A(2,6,2)$ និង $S(3,4,4)$ នោះគេបាន $\overrightarrow{IA} = (1,4,-1)$

និង $\overrightarrow{IS} = (2,2,1)$ ។

គេបាន $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IS}}{|\overrightarrow{IA}|.|\overrightarrow{IS}|} = \dfrac{2+8-1}{\sqrt{1+16+1}\sqrt{4+4+1}} = \dfrac{9}{9\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^o$

ដូចនេះ $\angle SIA = 45^o$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១៨

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(2,3,-1),B(-1,0,-1),C(5,3,5)$ និង $D(8,6,5)$ ។

១.គណនា $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{BC}$ រួចទាញបញ្ជាក់ប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ ។

២.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BC) និង (CD) ។

៣.H ជាចំណោលកែងនៃ A លើ BC ហើយ K ជាចំណោលកែងនៃ H លើ CD ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និង K ។

៤.គណនា AH និង BC រួចគណនាផ្ទៃក្រឡាចតុកោណ $ABCD$ ។

៥.ចូរស្រាយថា KCH ជាត្រីកោណកែងសមបាត។

៦.រកកូអរដោនេនៃចំណុច L ដោយដឹងថា $HKCL$ ជាការេ។

តើចំណុច B,L,D រត់ត្រង់គ្នាឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{BC}$ រួចទាញបញ្ជាក់ប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ ៖

គេមាន $A(2,3,-1),B(-1,0,-1),C(5,3,5)$ និង $D(8,6,5)$

យើងបាន $\overrightarrow{AD}=(6,3,6)$ និង $\overrightarrow{BC}=(6,3,6)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ នោះ $AD=BC$ និង $AD//BC$ ។

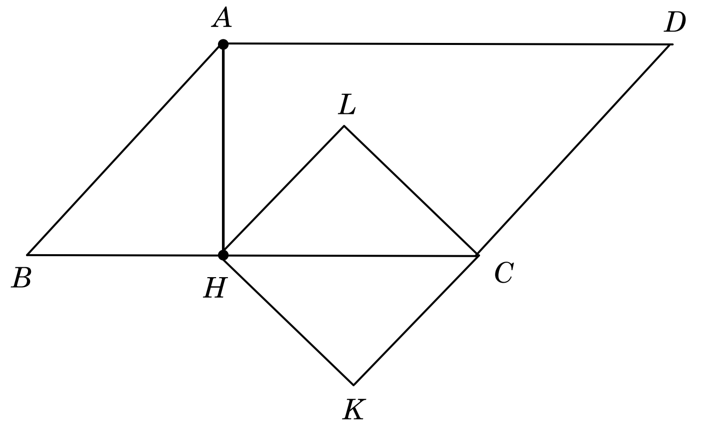
ដូចនេះ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

២.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BC) និង (CD) ៖

បន្ទាត់ (BC) និង (CD) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{BC}=(6,3,6)$ និង $\overrightarrow{CD}=(3,3,0)$ ហើយកាត់តាមចំណុចរៀងគ្នា $B(-1,0,-1)$ និង $C(5,3,5)$ ។

ដូចនេះ $(BC):\begin{cases}x=-1+6t_1\\ y=\quad 3t_1\\ z=-1+6t_1 \quad , t_1\in\mathbb{R}\end{cases}$ និង $(CD):\begin{cases}x=5+3t_2\\ y=3+3t_2\\ z=5 \quad , t_2\in\mathbb{R}\end{cases}$

៣.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និង K



យើងតាង $H(x_h,y_h,z_h)$ ជាចំណោលកែងនៃចំណុច A លើ BC នោះ $H\in(BC)$ និង $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ ។

ដោយ $H\in(BC)$ សមមូល $\begin{cases}x_h=-1+6t_1\\ y_h=\quad 3t_1\\ z_h=-1+6t_1\end{cases}$ (1)

គេមាន $A(2,3,-1)$ នោះ $\overrightarrow{AH}=(6t_1-3,3t_1-3,6t_1)$ និង $\overrightarrow{BC}=(6,3,6)$

គេបាន $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=6(6t_1-3)+3(3t_1-3)+36t_1=0$

សមមូល $36t_1-18+9t_1-9+36t_1=0$

សមមូល $81t_1-27=0$ ឬ $t_1=\dfrac{1}{3}$ យកជួសក្នុង (1) គេបាន $\begin{cases}x_h=-1+2=1\\y_h=1\\z_h=-1+2=1\end{cases}$

ដូចនេះ $H(1,1,1)$ ។

តាង $K(x_k,y_k,z_k)$ ជាចំណោលកែងនៃចំណុច H លើ (CD) នោះ $K\in(CD)$

និង $\overrightarrow{HK}\perp\overrightarrow{CD}$ ។

ដោយ $K\in(CD)$ សមមូល $\begin{cases}x_k=5+3t_2\\y_k=3+3t_2\\z_k=5\end{cases}$ (2)

គេមាន $H(1,1,1)$ នោះ $\overrightarrow{HK}=(3t_2+4,3t_2+2,4)$ និង $\overrightarrow{CD}=(3,3,0)$

គេបាន $\overrightarrow{HK}\perp\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{CD}=3(3t_2+4)+3(3t_2+2)=0$

សមមូល $9t_2+12+9t_2+6=0$

សមមូល $18t_2+18=0$ ឬ $t_2=-1$ យកជួសក្នុង (1) គេបាន $\begin{cases}x_k=5-3=2\\y_k=3-3=0\\z_k=5\end{cases}$

ដូចនេះ $K(2,0,5)$ ។

៤.គណនា AH និង BC រួចគណនាផ្ទៃក្រឡាចតុកោណ $ABCD$ ៖

យើងមាន $A(2,3,-1)$, $H(1,1,1)$, $B(-1,0,-1)$, $C(5,3,5)$

យើងបាន $AH=\sqrt{(1-2)^2+(1-3)^2+(1+1)^2}=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3$

$$BC=\sqrt{(5+1)^2+(3-0)^2+(5+1)^2}=\sqrt{36+9+36}=\sqrt{81}=9$$

ដូចនេះ $AH=3$, $BC=9$ (ឯកតាប្រវែង)។

ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ គឺ $S = AH \times BC = 3\times 9 = 27$ (ឯកតាផ្ទៃ)។

៥.ស្រាយថា KCH ជាត្រីកោណកែងសមបាត៖

គេមាន $K(2,0,5)$, $C(5,3,5)$ និង $H(1,1,1)$

គេបាន $\overrightarrow{KC} = (3,3,0)$ និង $\overrightarrow{KH} = (-1,1,-4)$

ដោយ $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KH} = -3+3+0 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{KC} \perp \overrightarrow{KH}$

ហើយ $KC = \sqrt{9+9+0} = 3\sqrt{2}$, $KH = \sqrt{1+1+16} = 3\sqrt{2}$ នោះ $KC = KH$

ដូចនេះត្រីកោណ KCH ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល K ។

៦.រកកូអរដោនេនៃចំណុច L ដោយដឹងថា $HKCL$ ជាការេ៖

គេមាន KCH ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល K នោះ $HKCL$ ជាការេលុះត្រា

តែ $\overrightarrow{HL} = \overrightarrow{KC}$ សមមូល $\begin{cases} x_l - 1 = 3 \\ y_l - 1 = 3 \\ z_l - 1 = 0 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} x_l = 4 \\ y_l = 4 \\ z_l = 1 \end{cases}$

ដូចនេះ $L(4,4,1)$ ។

តើចំណុច B, L, D រត់ត្រង់គ្នាឬទេ ?

គេមាន $B(-1,0,-1)$, $L(4,4,1)$ និង $D(8,6,5)$

គេបាន $\overrightarrow{BL} = (5,4,2)$ និង $\overrightarrow{BD} = (9,6,6)$

ដោយ $\frac{5}{9} \neq \frac{4}{6} \neq \frac{2}{6}$ នោះវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BL}$ និង $\overrightarrow{BD}$ មិនកូលីនេអ៊ែគ្នា។

ដូចនេះបីចំណុច B, L, D មិនរត់ត្រង់គ្នាទេ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី១៩

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបីចំណុច $A(-4,1,-2)$, $B(-1,7,4)$ និង $C(4,-7,2)$ ។

១.គណនា AB,AC និង BC រួចទាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង។

២.កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

៣.រកកូអរដោនេនៃចំណុច I ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $BC.\overrightarrow{IA}+AC.\overrightarrow{IB}+AB.\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{O}$

៤.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $(IA),(IB),(IC)$ ។

៥.គេឲ្យចំណុច $M(x,y,z)$ នៃលំហ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$BC.MA^2+AC.MB^2+AB.MC^2=(BC+AC+AB)MI^2+BC.AC.AB$$

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា AB,AC និង BC រួចទាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង៖

គេមាន $A(-4,1,-2)$, $B(-1,7,4)$ និង $C(4,-7,2)$

យើងបាន $AB=\sqrt{(-1+4)^2+(7-1)^2+(4+2)^2}=\sqrt{9+36+36}=\sqrt{81}=9$

$$AC=\sqrt{(4+4)^2+(-7-1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{64+64+16}=\sqrt{144}=12$$

$$BC=\sqrt{(4+1)^2+(-7-7)^2+(2-4)^2}=\sqrt{25+196+4}=\sqrt{225}=15$$

ដូចនេះ $AB=9,AC=12,BC=15$ (ឯកតាប្រវែង)។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $AB^2+AC^2=9^2+12^2=225=BC^2$ (តាមពីតាគ័រ)

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល A ។

២.កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ៖

គេមាន $A(-4,1,-2)$, $B(-1,7,4)$ និង $C(4,-7,2)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}=(3,6,6)$, $\overrightarrow{AC}=(8,-8,4)$

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) គឺ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 6 & 6\\ 8 & -8 & 4\end{vmatrix}=72\vec{i}-36\vec{j}-72\vec{k}$$

សមីការប្លង់ (ABC) អាចសរសេរ៖

$$(ABC): a(x-x_a)+b(y-y_a)+c(z-z_a)=0$$

$$72(x+4)-36(y-1)-72(z+2)=0$$

$$2x+8-y+1-2z-4=0$$

$$2x-y-2z+5=0$$

ដូចនេះ $(ABC): 2x-y-2z+5=0$ ។

៣.រកកូអរដោនេនៃចំណុច I ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $BC.\overrightarrow{IA}+AC.\overrightarrow{IB}+AB.\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{O}$

តាង $I(x_i,y_i,z_i)$ នោះ $\begin{cases}\overrightarrow{IA}=(-4-x_i,1-y_i,-2-z_i)\\ \overrightarrow{IB}=(-1-x_i,7-y_i,4-z_i)\\ \overrightarrow{IC}=(4-x_i,-7-y_i,2-z_i)\end{cases}$

ដោយ $AB=9, AC=12, BC=15$ នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases}BC.\overrightarrow{IA}=(-60-15x_i,15-15y_i,-30-15z_i)\\ AC.\overrightarrow{IB}=(-12-12x_i,84-12y_i,48-12z_i)\\ AB.\overrightarrow{IC}=(36-9x_i,-63-9y_i,18-9z_i)\end{cases}$$

តាង $\vec{S} = BC.\overrightarrow{IA} + AC.\overrightarrow{IB} + AB.\overrightarrow{IC}$

គេបាន $\vec{S} = (-36-36x_i, 36-36y_i, 36-36z_i)$

ដោយ $\vec{S} = BC.\overrightarrow{IA} + AC.\overrightarrow{IB} + AB.\overrightarrow{IC} = \vec{O}$ សមមូល $\begin{cases} -36-36x_i = 0 \\ 36-36y_i = 0 \\ 36-36z_i = 0 \end{cases}$

គេទាញ $x_i = -1$, $y_i = 1$, $z_i = 1$ ។

ដូចនេះ $I(-1,1,1)$ ។

៤.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $(IA),(IB),(IC)$ ៖

គេមាន $A(-4,1,-2), B(-1,7,4)$ និង $C(4,-7,2)$

បន្ទាត់ $(IA),(IB),(IC)$ មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរៀងគ្នា ៖

$\overrightarrow{IA} = (-3,0,-3), \overrightarrow{IB} = (0,6,3)$ និង $\overrightarrow{IC} = (5,-8,1)$ ។

ដូចនេះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $(IA),(IB),(IC)$ អាចសរសេរដូចតទៅ៖

$$(IA): \begin{cases} x = -4-3t_1 \\ y = 1 \\ z = -2-3t_1 \end{cases}, (IB): \begin{cases} x = -1 \\ y = 7+6t_2 \\ z = 4+3t_2 \end{cases}, (IC): \begin{cases} x = 4+5t_3 \\ y = -7-8t_3 \\ z = 2+t_3 \end{cases}$$

ដែល $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ ។

៥.ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$BC.MA^2 + AC.MB^2 + AB.MC^2 = (BC + AC + AB)MI^2 + BC.AC.AB$$

គេមាន $A(-4,1,-2), B(-1,7,4)$ និង $C(4,-7,2)$

$M(x,y,z)$, $I(-1,1,1)$ និង $AB = 9$, $AC = 12$, $BC = 15$

គេបាន $\begin{cases} MA^2 = (-4-x)^2 + (1-y)^2 + (-2-z)^2 \\ MB^2 = (-1-x)^2 + (7-y)^2 + (4-z)^2 \\ MC^2 = (4-x)^2 + (-7-y)^2 + (2-z)^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} MA^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 2y + 4z + 21 \\ MB^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 14y - 8z + 66 \\ MC^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 14y - 4z + 69 \end{cases}$$

$$\begin{cases} BC.MA^2 = 15x^2 + 15y^2 + 15z^2 + 120x - 30y + 60z + 315 \\ AC.MB^2 = 12x^2 + 12y^2 + 12z^2 + 24x - 168y - 96z + 792 \\ AB.MC^2 = 9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 72x + 126y - 36z + 621 \end{cases}$$

បូកសមីការនេះអង្គនិងអង្គគេបាន៖

$$BC.MA^2 + AC.MB^2 + AB.MC^2 = 36(x^2 + y^2 + z^2) + 72(x - y - z) + 1728 \ (i)$$

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $MI^2 = (-1-x)^2 + (1-y)^2 + (1-z)^2$

ឬ $MI^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2z + 3$

ដោយ $AB = 9, AC = 12, BC = 15$ នោះ $\begin{cases} BC + AC + AB = 36 \\ BC.AC.AB = 1620 \end{cases}$ នោះគេបាន ៖

$(BC + AC + AB)MI^2 + BC.AC.AB = 36(x^2 + y^2 + z^2) + 72(x - y - z) + 1728 \ (ii)$ តាម (i) និង (ii) គេបានទំនាក់ទំនង ៖

$$BC.MA^2 + AC.MB^2 + AB.MC^2 = (BC + AC + AB)MI^2 + BC.AC.AB$$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី២០

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបីចំណុច

$A(1,-1,-3)$, $B(2,-3,-1)$ និង $C(4,1,3)$ ។

១.គណនា AB,AC និង BC ។

២.រកកូអរដោនេនៃចំណុច D ដោយដឹងថា $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

៣.រកកូអរដោនេចំណុច I កណ្តាលអង្កត់$[BC]$ រួចសរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់$[BC]$ ។

៤.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (ID) ។

៥.សរសេរសមីការស្វ៊ែ(S) មានផ្ចិត I និងកាំ $r=AB$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា AB,AC និង BC ៖

យើងមាន $A(1,-1,-3)$, $B(2,-3,-1)$ និង $C(4,1,3)$

យើងបាន $AB=\sqrt{(2-1)^2+(-3+1)^2+(-1+3)^2}=\sqrt{1+4+4}=3$

$$AC=\sqrt{(4-1)^2+(1+1)^2+(3+3)^2}=\sqrt{9+4+36}=7$$

$$BC=\sqrt{(4-2)^2+(1+3)^2+(3+1)^2}=\sqrt{4+16+16}=6$$

ដូចនេះ $AB=3$, $AC=7$, $BC=6$ (ឯកតាប្រវែង)

២.រកកូអរដោនេនៃចំណុច D ដោយដឹងថា $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម៖

ចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាមលុះត្រាតែ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

តាង $D(x_d,y_d,z_d)$ ដោយ $A(1,-1,-3)$, $B(2,-3,-1)$ និង $C(4,1,3)$

គេបាន $\overrightarrow{AD}=(x_d-1,y_d+1,z_d+3)$ និង $\overrightarrow{BC}=(2,4,4)$

ដោយ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_d-1=2\\y_d+1=4\\z_d+3=4\end{cases}$ នោះ $\begin{cases}x_d=3\\y_d=3\\z_d=1\end{cases}$

ដូចនេះ $D(3,3,1)$ ។

៣.រកកូអរដោនេចំណុច I កណ្ដាលអង្កត់ $[BC]$ ៖

គេមាន $B(2,-3,-1)$ និង $C(4,1,3)$ នោះគេបាន $I\left(\frac{2+4}{2},\frac{-3+1}{2},\frac{-1+3}{2}\right)$

ដូចនេះ $I(3,-1,1)$ ។

សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[BC]$ ៖

វ៉ិចទ័រណ័រម៉ាល់នៃប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[BC]$ គឺ $\overrightarrow{BC}=(2,4,4)$

សមីការប្លង់អាចសរសេរ $a(x-x_i)+b(y-y_i)+c(z-z_i)=0$

$$2(x-3)+4(y+1)+4(z-1)=0$$

$$2x-6+4y+4+4z-4=0$$

$$2x+4y+4z-6=0$$

ដូចនេះសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[BC]$ គឺ $x+2y+2z-3=0$ ។

៤.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (ID) ៖

គេមាន $I(3,-1,1)$ និង $D(3,3,1)$

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (ID) គឺ $\overrightarrow{ID}=(0,4,0)$

ដូចនេះ $(ID):\begin{cases}x=3\\y=-1+4t\\z=1\end{cases}\quad ,t\in\mathbb{R}$

៥.សរសេរសមីការស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត I និងកាំ $r=AB$ ៖

គេមាន $I(3,-1,1)$ និង $AB=3$

តាមរូបមន្ត $(S):(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2=r^2$

ដូចនេះ $(S):(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$ (ជាសមីការស្តង់ដា)។

ឬ $(S):x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z+2=0$ (ជាសមីការទូទៅ)។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី២១

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យពីរចំណុច

$A(1,1,0)$ និង $B(3,-3,4)$ ។

១.សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រ (P) នៃអង្កត់ $[AB]$ ។

២.សរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែ (S) មានអង្កត់ផ្ចិត AB ។

៣.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $O\in(S)$ (O ជាគល់នៃតម្រុយអរតូនរម៉ាល់)។

សរសេរសមីការប្លង់ (Q) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ O ។

៤.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង (Q) ។

ដំណោះស្រាយ

១.សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រ (P) នៃអង្កត់ $[AB]$ ៖

គេមាន $A(1,1,0)$ និង $B(3,-3,4)$ នោះ $\overrightarrow{AB}=(2,-4,4)$

យក I ជាចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ $[AB]$ នោះ $I\left(\frac{1+3}{2},\frac{1-3}{2},\frac{0+4}{2}\right)$

ឬ $I(2,-1,2)$ ។ ប្លង់មេដ្យាទ័រ (P) នៃអង្កត់ $[AB]$ គឺជាប្លង់ដែលកែងនឹង $[AB]$

ត្រង់ចំណុចកណ្ដាល I ។ ហេតុនេះសមីការប្លង់ (P) អាចសរសេរ៖

$$(P): a(x-x_i)+b(y-y_i)+c(z-z_i)=0$$

$$2(x-2)-4(y+1)+4(z-2)=0$$

$$2x-4-4y-4+4z-8=0$$

$$2x-4y+4z-16=0$$

ដូចនេះ $(P): x-2y+2z-8=0$ ។

២.សរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែ (S) មានអង្កត់ផ្ចិត AB ៖

ស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $I(2,-1,2)$ និងកាំ $r=\frac{|\overrightarrow{AB}|}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+16}=3$ ។

តាមរូបមន្ត $(S):(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2=r^2$

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$$

$$x^2-4x+4+y^2+2y+1+z^2-4z+4-9=0$$

ដូចនេះ $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y-4z=0$ ។

៣.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $O\in(S)$ ៖

គេមាន $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y-4z=0$ និង $O(0,0,0)$

យកកូអរដោនេនៃចំណុច O ជំនួសក្នុងសមីការ (S) គេបាន $0=0$ ពិត

ដូចនេះ $O\in(S)$ ។

សរសេរសមីការប្លង់ (Q) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ O ៖

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (Q) ដែលប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់គល់ O គឺ $\overrightarrow{OI}=(2,-1,2)$

សមីការប្លង់ (Q) អាចសរសេរ $(Q): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$$2(x-0)-(y-0)+2(z-0)=0$$

ដូចនេះ $(Q): 2x-y+2z=0$ ។

៤.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង (Q) ៖

គេមាន $(P): x-2y+2z-8=0$ និង $(Q): 2x-y+2z=0$

យក $x=t$, $t\in\mathbb{R}$ គេបាន $\begin{cases} t-2y+2z-8=0 & (1) \\ 2t-y+2z=0 & (2) \end{cases}$

យក $(2)-(1)$ គេបាន $t+y+8=0$ នោះ $y=-8-t$

តាម (1) គេបាន $t-2(-8-t)+2z-8=0$

$$t+16+2t+2z-8=0 \text{ ឬ } z=-4-\frac{3}{2}t$$

ដូចនេះ $(L):\begin{cases} x=t \\ y=-8-t \\ z=-4-\frac{3}{2}t \quad , t\in\mathbb{R} \end{cases}$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី២២

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបីចំណុច

$A(1,1,1)$, $B(2,-3,4)$ និង $C(3,-4,-2)$ ។

១.រកកូអរដោនេនៃចំណុចG ដោយដឹងថា $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$ ។

២.សរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែ(S)មានផ្ចិតOនិងកាំOG ។

៣.សរសេរសមីការប្លង់(P) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ(S) ត្រង់G ។

៤.សរសេរសមីការប្លង់(Q) កាត់តាមG ហើយកែងនឹង $\vec{n}=(9,3,1)$ ។

៥.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថាបីចំណុចA,B,C ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (P) ។

៦.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង(Q) ។

ដំណោះស្រាយ

១.រកកូអរដោនេនៃចំណុចG ដោយដឹងថា $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$ ៖

តាង $G(x_g,y_g,z_g)$ ដោយ$A(1,1,1)$, $B(2,-3,4)$ និង $C(3,-4,-2)$

នោះ $\begin{cases}\overrightarrow{GA}=(1-x_g,1-y_g,1-z_g)\\ \overrightarrow{GB}=(2-x_g,-3-y_g,4-z_g)\\ \overrightarrow{GC}=(3-x_g,-4-y_g,-2-z_g)\end{cases}$

គេបាន$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=(6-3x_g,-6-3y_g,3-3z_g)$

ដោយ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{O}$ សមមូល $\begin{cases}6-3x_g=0\\-6-3y_g=0\\3-3z_g=0\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x_g=2\\y_g=-2\\z_g=1\end{cases}$

ដូចនេះ $G(2,-2,1)$ ។

២.សរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត O និងកាំ OG ៖

គេមាន $G(2,-2,1)$ នោះ $OG=\sqrt{4+4+1}=3$

ដូចនេះសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត O និងកាំ OG គឺ $(S):x^2+y^2+z^2=9$

៣.សរសេរសមីការប្លង់ (P) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ G ៖

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ G គឺ $\vec{n}=\overrightarrow{OG}=(2,-2,1)$

តាមរូបមន្ត $(P):a(x-x_g)+b(y-y_g)+c(z-z_g)=0$

$$2(x-2)-2(y+2)+(z-1)=0$$
$$2x-4-2y-4+z-1=0$$
$$2x-2y+z-9=0$$

ដូចនេះ $(P):2x-2y+z-9=0$ ។

៤.សរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាម G ហើយកែងនឹង $\vec{n}=(9,3,1)$ ៖

តាមរូបមន្ត $(Q):a(x-x_g)+b(y-y_g)+c(z-z_g)=0$

$$9(x-2)+3(y+2)+(z-1)=0$$
$$9x-18+3y+6+z-1=0$$
$$9x+3y+z-13=0$$

ដូចនេះ $(Q):9x+3y+z-13=0$ ។

៥.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាបីចំណុច A,B,C ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (P) ៖

គេមាន $A(1,1,1)$, $B(2,-3,4)$ និង $C(3,-4,-2)$

និង $(Q): 9x+3y+z-13=0$ ។

ចំពោះ $A(1,1,1)$ នោះ $(Q):9(1)+3(1)+(1)-13=0$ ឬ $0=0$ ពិត

ចំពោះ $B(2,-3,4)$ នោះ$(Q): 9(2)+3(-3)+(4)-3=0$ ឬ$0=0$ ពិត

ចំពោះ$C(3,-4,-2)$ នោះ $(Q): 9(3)+3(-4)+(-2)-13=0$ ឬ$0=0$ ពិត

ដូចនេះ A,B,C ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់(P) ។

៦.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង(Q) ៖

គេមាន $\begin{cases}(P):\ 2x-2y+z-9=0\\(Q):\ 9x+3y+z-13=0\end{cases}$

យក$x=t$ នោះ $\begin{cases}2t-2y+z-9=0 & (1)\\9t+3y+z-13=0 & (2)\end{cases}$

យក$(2)-(1)$ គេបាន $7t+5y-4=0$ នោះ $y=\frac{4}{5}-\frac{7}{5}t$

តាម (1): $2t-2\left(\frac{4}{5}-\frac{7}{5}t\right)+z-9=0$ នោះ $z=\frac{53}{5}-\frac{24}{5}t$

ដូចនេះ $(L):\begin{cases}x=t\\y=\frac{4}{5}-\frac{7}{5}t\\z=\frac{53}{5}-\frac{24}{5}t\ ,\ t\in\mathbb{R}\end{cases}$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី២៣

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(1,-2,-4)$, $B(-1,-4,-3)$,$C(3,4,5)$ និង $D(7,-7,-2)$ ។

១.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថា $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$ ។

២.គណនាជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC ។

៣.ស្រាយថាប្លង់(ABC) មានសមីការ $6x-5y+2z-8=0$ ។

៤.យក I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ$[BC]$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I រួច
   សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(ID) ។

៤.សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រ(Q) នៃអង្កត់$[BC]$ ។

៥.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង(Q) ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថា $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$

គេមាន $A(1,-2,-4)$, $B(-1,-4,-3)$,$C(3,4,5)$ និង $D(7,-7,-2)$

គេបាន $\overrightarrow{AD}=(6,-5,2)$, $\overrightarrow{AB}=(-2,-2,1)$ និង $\overrightarrow{AC}=(2,6,9)$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=(6)(-2)+(-5)(-2)+(2)(1)=-12+10+2=0$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=(6)(2)+(-5)(6)+(2)(9)=12-30+18=0$ ។

ដូចនេះ $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=0$ និង $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=0$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=0$ និង $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=0$ នោះគេទាញ $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}$

នោះ $\overrightarrow{AD} \perp (ABC)$ ដោយ $\overrightarrow{BC} \subset (ABC)$ នោះ $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$ ។

២.គណនាជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC ៖

គេមាន $A(1,-2,-4)$, $B(-1,-4,-3), C(3,4,5)$

គេបាន $AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (-4+2)^2 + (-3+4)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$

$$AC = \sqrt{(3-1)^2 + (4+2)^2 + (5+4)^2} = \sqrt{4+36+81} = 11$$

$$BC = \sqrt{(3+1)^2 + (4+4)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{16+64+64} = 12$$

ដូចនេះ $AB = 3$, $AC = 11$, $BC = 12$ (ឯកតាប្រវែង)

៣.ស្រាយថាប្លង់ (ABC) មានសមីការ $6x - 5y + 2z - 8 = 0$ ៖

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន $\overrightarrow{AD} \perp (ABC)$ នោះ $\overrightarrow{AD} = (6,-5,2)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) ។

សមីកាប្លង់ (ABC) អាចសរសេរ $a(x - x_a) + b(y - y_a) + c(z - z_a) = 0$

$$6(x-1) - 5(y+2) + 2(z+4) = 0$$

$$6x - 6 - 5y - 10 + 2z + 8 = 0$$

$$6x - 5y + 2z - 8 = 0$$

ដូចនេះប្លង់ (ABC) មានសមីការ $6x - 5y + 2z - 8 = 0$ ។

៤.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I

គេមាន $B(-1,-4,-3)$ & $C(3,4,5)$ ដោយ I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[BC]$

នោះ $I\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-4+4}{2}, \frac{-3+5}{2}\right)$ ឬ $I(1,0,1)$ ។

ដូចនេះ $I(1,0,1)$ ។

សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (ID) ៖

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (ID) គឺ $\overrightarrow{ID}=(6,-7,-3)$

ដូចនេះ $(ID):\begin{cases} x=1+6t \\ y=-7t \\ z=1-3t \ , t\in\mathbb{R} \end{cases}$

៤.សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រ (Q) នៃអង្កត់ $[BC]$ ៖

គេមាន $B(-1,-4,-3)$ & $C(3,4,5)$ នោះ $\overrightarrow{BC}=(4,8,8)$

ចំណុចកណ្ដាលនៃ $[BC]$ គឺ $I(1,0,1)$ ។ សមីការប្លង់ (Q) អាចសរសេរ៖

$$(Q): a(x-x_i)+b(y-y_i)+c(z-z_i)=0$$
$$4(x-1)+8(y-0)+8(z-1)=0$$
$$4x-4+8y+8z-8=0$$
$$4x+8y+8z-12=0$$
$$x+2y+2z-3=0$$

ដូចនេះ $(Q): x+2y+2z-3=0$ ។

៥.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និង (Q) ៖

គេមាន $(P): 6x-5y+2z-8=0$ និង $(Q): x+2y+2z-3=0$

យក $x=t \ ,t\in\mathbb{R}$ នោះ $\begin{cases} 6t-5y+2z-8=0 \\ t+2y+2z-3=0 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $y=-\frac{5}{7}+\frac{5}{7}t \ , z=\frac{31}{14}-\frac{17}{14}t$ ។

ដូចនេះ $(L): x=t \ , y=-\frac{5}{7}+\frac{5t}{7}, z=\frac{31}{14}-\frac{17t}{14}$ ដែល $t\in\mathbb{R}$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី២៤

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យពីរចំណុច $A(-4,1,3)$ និង $B(2,3,-1)$ និងប្លង់ $(P): x+2y-2z-1=0$ ។

១.ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AB) ។

២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (AB) និងប្លង់ (P) រួចបង្ហាញថា M ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[AB]$ ។

៣. H ជាចំណោលកែងនៃចំណុច B លើប្លង់ (P) ។ សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BH) រួចគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H ។

៤. K ជាចំណោលកែងនៃ A លើបន្ទាត់ (BH) ។ បង្ហាញថា MH ជាបាតមធ្យមនៃត្រីកោណ ABK រួចទាញរកកូអរដោនេនៃចំណុច K ។

៥. L ជាចំណោលកែងនៃ A លើប្លង់ (P) ។បង្ហាញថា $ALHK$ ជាចតុកោណកែងរួចទាញរកកូអរដោនេនៃចំណុច L ។

ដំណោះស្រាយ

១.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AB) ៖

គេមាន $A(-4,1,3)$ និង $B(2,3,-1)$ នោះ $\overrightarrow{AB}=(6,2,-4)$ ជាវិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (AB) ។ សមីការបន្ទាត់អាចសរសេរ ៖

$$(AB):\begin{cases} x=-4+6t \\ y=1+2t \\ z=3-4t \quad , t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (AB) និងប្លង់ (P) ៖

គេមាន $(AB):\begin{cases} x=-4+6t \\ y=1+2t \\ z=3-4t \quad , t\in\mathbb{R} \end{cases}$ និង $(P): x+2y-2z-1=0$

យកសមីការ (AB) ជំនួសក្នុង (P) គេបាន ៖

$$(-4+6t)+2(1+2t)-2(3-4t)-1=0$$
$$-4+6t+2+4t-6+8t-1=0$$
$$18t-9=0$$
$$t=\frac{1}{2}$$

យក $t=\frac{1}{2}$ ជំនួសក្នុង (AB) គេបាន $\begin{cases} x=-4+3=-1 \\ y=1+1=2 \\ z=3-2=1 \end{cases}$

ដូចនេះ $M(-1,2,1)$ ។

បង្ហាញថា M ជាចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ $[AB]$ ៖

គេមាន $M(-1,2,1)$ និង $A(-4,1,3)$ និង $B(2,3,-1)$

ដោយ $\frac{x_a+x_b}{2}=\frac{-4+2}{2}=-1=x_m$, $\frac{y_a+y_b}{2}=\frac{1+3}{2}=2=y_m$

និង $\frac{z_a+z_b}{2}=\frac{3-1}{2}=1=z_m$ នោះបញ្ជាក់ថាចំណុច M ជាចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ $[AB]$ ។

៣.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BH) រួចគណនាកូអរដោនេនៃ H

ដោយ H ជាចំណោលកែងនៃចំណុច B លើប្លង់ (P) នោះបន្ទាត់ $(BH)\perp(P)$

គេបានវ៉ិចទ័រនរម៉ាល់ $\overrightarrow{n_p}=(1,2,-2)$ របស់ប្លង់(P) ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (BH) និងចំណុច $B(2,3,-1)\in(BH)$ នោះសមីការបន្ទាត់(BH)សរសេរ៖

$$(BH):\begin{cases}x=2+t\\y=3+2t\\z=-1-2t\quad,\ t\in\mathbb{R}\end{cases}$$

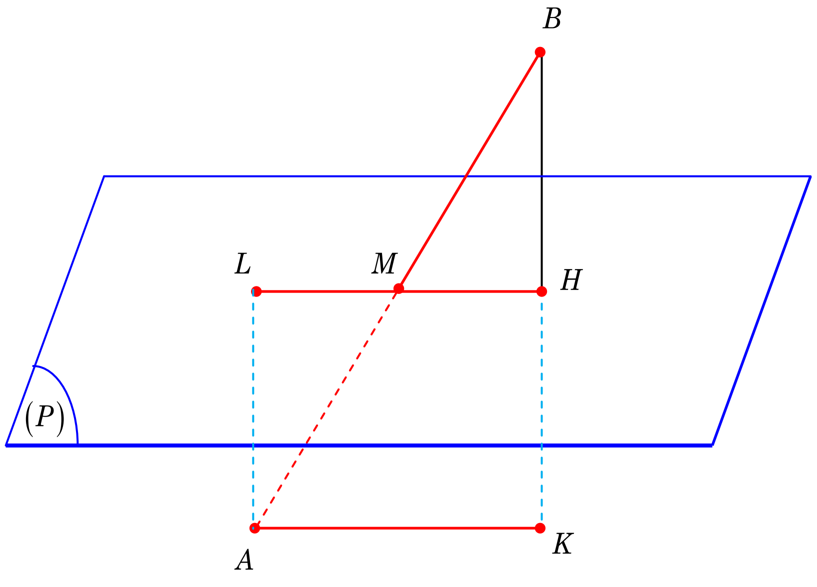
ម្យ៉ាងទៀតយកសមីការ(BH) ជំនួសក្នុង(P) គេបាន ៖

$$(2+t)+2(3+2t)-2(-1-2t)-1=0$$
$$2+t+6+4t+2+4t-1=0$$
$$9t+9=0$$
$$t=-1$$

យកតម្លៃ $t=-1$ ជួសក្នុង(BH) គេបាន $\begin{cases}x=2-1=1\\y=3-2=1\\z=-1+2=1\end{cases}$

ដូចនេះ $H(1,1,1)$ ។

៨.បង្ហាញថា MH ជាបាតមធ្យមនៃត្រីកោណ ABK ៖



គេមាន K ជាចំណោលកែងនៃ A លើបន្ទាត់ (BH) នោះ $AK \perp BK$
ហើយ $(BH) \perp (P)$ និង $MH \in (P)$ នោះ $MH \perp BH$ ហេតុនេះគេទាញ
$AK // MH$ ហើយដោយ M ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[AB]$ (សម្រាយខាងលើ)
នោះគេទាញបានថា H ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[BK]$ ដែរ។
ដូចនេះ MH ជាបាតមធ្យមនៃត្រីកោណកែង BAK ។
ទាញរកកូអរដោនេនៃចំណុច K ៖

ដោយ H ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[BK]$ នោះគេបាន $\begin{cases} x_h = \dfrac{x_b + x_k}{2} \\ y_h = \dfrac{y_b + y_k}{2} \\ z_h = \dfrac{z_b + z_k}{2} \end{cases}$

គេទាញ $\begin{cases} x_k = 2x_h - x_b = 2 - 2 = 0 \\ y_k = 2y_h - y_b = 2 - 3 = -1 \\ z_k = 2z_h - z_b = 2 + 1 = 3 \end{cases}$ ។

ដូចនេះ $H(0,-1,3)$ ។

៥.បង្ហាញថា $ALHK$ ជាចតុកោណកែង រួចទាញរកកូអរដោនេនៃចំណុច L

គេមាន L ជាចំណោលកែងនៃ A លើប្លង់ (P) នោះ $AL \perp (P)$ ដោយ $LH \subset (P)$
នោះ $AL \perp LH$ ។ ម្យ៉ាងទៀត $AK \perp HK$ និង $LH \perp HK$ នោះគេទាញថា
$ALHK$ ជាចតុកោណកែង។
តាង $L(x_l, y_l, z_l)$ នោះ $\overrightarrow{AL} = (x_l + 4, y_l - 1, z_l - 3)$ និង $\overrightarrow{KH} = (1,2,-2)$

ដោយ $ALHK$ ជាចតុកោណកែងនោះ $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{HK}$ ឬ $\begin{cases} x_l + 4 = 1 \\ y_l - 1 = 2 \\ z_l - 3 = -2 \end{cases}$

គេទាញ $x_l = -3, y_l = 3, z_l = 1$ ។ ដូចនេះ $L(-3,3,1)$ ។

លំហាត់ទី២៥

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ ៖

$$(L_1): \frac{x+1}{-1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-5}{2} \quad \text{និង} \quad (L_2): \begin{cases} x=2+t \\ y=3 \\ z=-1-t \quad ,t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

១.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) ។

២.A និង B ជាពីរចំណុចស្ថិតនីលើបន្ទាត់(L_2) ហើយមានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា $x_a=-1$ និង $x_b=5$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច A និង B ។

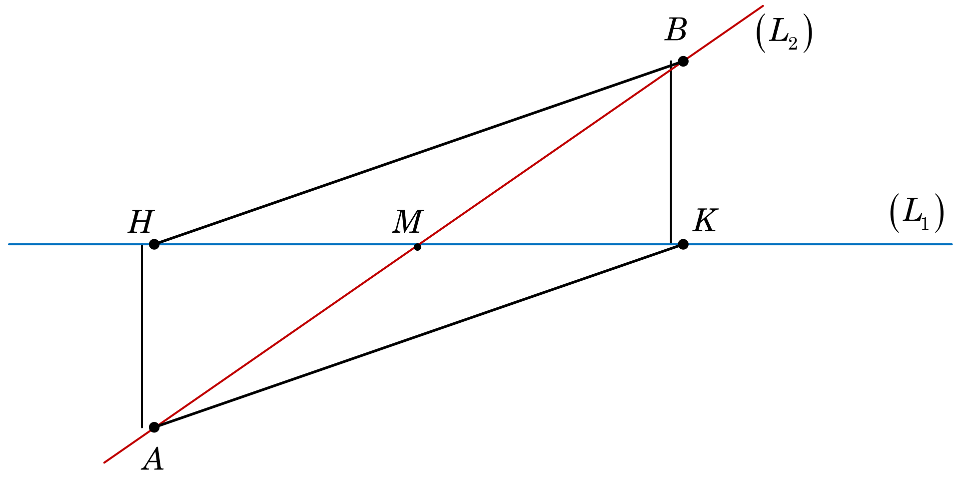
៣.H និង K ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច A និង Bទៅលើបន្ទាត់(L_1) រៀងគ្នា ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចH និង K ។

៤.គណនា $\overrightarrow{AK}$ និង $\overrightarrow{HB}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃចតុកោណ $AHBK$ ។

៥.គណនា AH និង HK រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ $AHBK$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) ៖



$(L_1): \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-5}{2}$ និង $(L_2): \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3 \\ z = -1-t \quad , t \in \mathbb{R} \end{cases}$

តាង $M(x_m, y_m, z_m)$ ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់(L_1) និង (L_2) នោះគេបាន

$M \in (L_1)$ សមមូល $\frac{x_m+1}{-1} = \frac{y_m+3}{-2} = \frac{z_m-5}{2} \quad (1)$

$M \in (L_2)$ សមមូល $\begin{cases} x_m = 2+t \\ y_m = 3 \\ z_m = -1-t \end{cases} \quad (2)$

យកសមីការ(2) ជំនួសក្នុង(1) គេបាន $\frac{2+t+1}{-1} = \frac{3+3}{-2} = \frac{-1-t-5}{2}$

សមមូល $\frac{t+3}{-1} = -3 = \frac{-t-6}{2}$ សមមូល $\begin{cases} \frac{t+3}{-1} = -3 \\ \frac{-t-6}{2} = -3 \end{cases}$ សមមូល $t = 0$

យក $t = 0$ ជួសក្នុង(2) គេបាន $x_m = 2$, $y_m = 3$, $z_m = -1$ ។

ដូចនេះ $M(2,3,-1)$ ។

២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច A និង B

ដោយ A និង B ជាពីរចំណុចស្ថិតនៅលើបន្ទាត់(L_2) ហើយមានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា

$x_a = -1$ និង $x_b = 5$ នោះគេបាន $\begin{cases} x_a = 2+t = -1 \\ y_a = 3 \\ z_a = -1-t \end{cases}$ គេទាញ $t = -3$

នោះ $x_a = -1, y_a = 3, z_a = -1+3 = 2$ ឬ $A(-1 , 3 , 2)$ ។

ហើយ $\begin{cases} x_b = 2+t = 5 \\ y_b = 3 \\ z_b = -1-t \end{cases}$ គេទាញ $t=3$ ហើយ $x_b = 5, y_b = 3, z_b = -4$ ។

ដូចនេះ $A(-1,3,2)$ និង $B(5,3,-4)$ ។

៣.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និង K

តាង $H(x_h, y_h, z_h)$ និង $K(x_k, y_k, z_k)$ ។ដោយ H និង K ជាចំណោលកែង នៃចំណុច A និង B ទៅលើបន្ទាត់ (L_1) រៀងគ្នានោះ $H \in (L_1)$ និង $K \in (L_1)$

គេបាន $H \in (L_1) \Leftrightarrow \dfrac{x_h+1}{-1} = \dfrac{y_h+3}{-2} = \dfrac{z_h-5}{2} = p$ ឬ $\begin{cases} x_h = -1-p \\ y_h = -3-2p \\ z_h = 5+2p \end{cases}$ (3)

ហើយ $K \in (L_1) \Leftrightarrow \dfrac{x_k+1}{-1} = \dfrac{y_k+3}{-2} = \dfrac{z_k-5}{2} = q$ ឬ $\begin{cases} x_k = -1-q \\ y_k = -3-2q \\ z_k = 5+2q \end{cases}$ (4)

ដោយ $A(-1,3,2)$ និង $B(5,3,-4)$ នោះគេបាន ៖

$\overrightarrow{AH} = (-p, -2p-6, 2p+3)$ និង $\overrightarrow{BK} = (-q-6\ ,\ -2q-6\ ,\ 2q+9)$

បន្ទាត់ (L_1) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{u_1} = (-1,-2,2)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_1} = 0$ ឬ $p+4p+12+4p+6=0$ នោះ $p=-2$

គេមាន $\overrightarrow{BK} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{BK}.\overrightarrow{u_1} = 0$ ឬ $q+6+4q+12+4q+18=0$ នោះ $q=-4$

ចំពោះ $p=-2$ តាម (3) គេបាន $x_h = 1\ ,\ y_h = 1, z_h = 1$ ។

ចំពោះ $q=-4$ តាម (4) គេបាន $x_k = 3\ ,\ y_k = 5\ ,\ z_k = -3$ ។

ដូចនេះ $H(1,1,1)$ និង $K(3,5,-3)$ ។

៨.គណនា $\overrightarrow{AK}$ និង $\overrightarrow{HB}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃចតុកោណ $AHBK$ ៖

គេមាន $A(-1,3,2)$, $K(3,5,-3)$, $H(1,1,1)$, $B(5,3,-4)$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AK}=(4,2,-5)$ និង $\overrightarrow{HB}=(4,2,-5)$ ។

ដោយសម្គាល់ឃើញថា $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{HB}=(4,2,-5)$ នោះ $AK=HB$ និង $AK//HB$

ដូចនេះចតុកោណ $AHBK$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

៩.គណនា AH និង HK រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ $AHBK$ ៖

គេមាន $A(-1,3,2)$, $H(1,1,1)$ និង $K(3,5,-3)$

គេបាន $AH=\sqrt{(1+1)^2+(1-3)^2+(1-2)^2}=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$

$$HK=\sqrt{(3-1)^2+(5-1)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{4+16+16}=\sqrt{36}=6$$

ដូចនេះ $AH=3$ (ឯកតាប្រវែង) និង $HK=6$ (ឯកតាប្រវែង) ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $AH\perp HK$ និង $BK\perp HK$ នោះត្រីកោណកែង AHK និង

ត្រីកោណកែង BKH ប៉ុនគ្នាព្រោះ $AH=BK$ និង HK ជ្រុងរួម។

គេបាន $S_{AHBK}=2S_{AHK}=2\left(\frac{1}{2}AH.HK\right)=AH.HK=18$ (ឯកតាផ្ទៃ)។

ដូចនេះ $S_{AHBK}=18$ (ឯកតាផ្ទៃ)។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី២៦

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច៖

$A(1,1,1),B(2,3,3),C(6,-1,5)$ និង $D\left(6,-4,\frac{7}{2}\right)$ ។

១.គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CD}$ ។

២.បង្ហាញថា $\overrightarrow{AD}//\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ រួចរកប្រភេទនៃចតុកោណ $ABCD$ ។

៣.គណនា $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ACD ។

៤.H ជាជើងនៃចំណោលកែងចំណុច C លើ $[AD]$ ។គណនាកូអរដោនេនៃ H ។

៥.គណនា AB , BC និង AD រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ $ABCD$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CD}$ ៖

គេមាន $A(1,1,1),B(2,3,3),C(6,-1,5)$ និង $D\left(6,-4,\frac{7}{2}\right)$

យើងបាន $\overrightarrow{AB}=(1,2,2),\overrightarrow{AC}=(5,-2,4),\overrightarrow{AD}=\left(5,-5,\frac{5}{2}\right),\overrightarrow{BC}=(4,-4,2)$

និង $\overrightarrow{CD}=\left(0,-3,-\frac{3}{2}\right)$ ។

២.បង្ហាញថា $\overrightarrow{AD}//\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ រួចរកប្រភេទនៃចតុកោណ $ABCD$ ៖

យើងមាន $\overrightarrow{AD}=\left(5,-5,\frac{5}{2}\right)$ និង $\overrightarrow{BC}=(4,-4,2)$

ដោយ $\frac{5}{4}=\frac{-5}{-4}=\frac{\frac{5}{2}}{2}$ នោះយើងទាញបានវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AD}\,\&\,\overrightarrow{BC}$ កូលីនេអ៊ែគ្នា។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $\overrightarrow{AB}=(1,2,2)$ និង $\overrightarrow{AD}=\left(5,-5,\frac{5}{2}\right)$

យើងបាន $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=(1)(5)+(2)(-5)+(2)\left(\frac{7}{2}\right)=5-10+5=0$

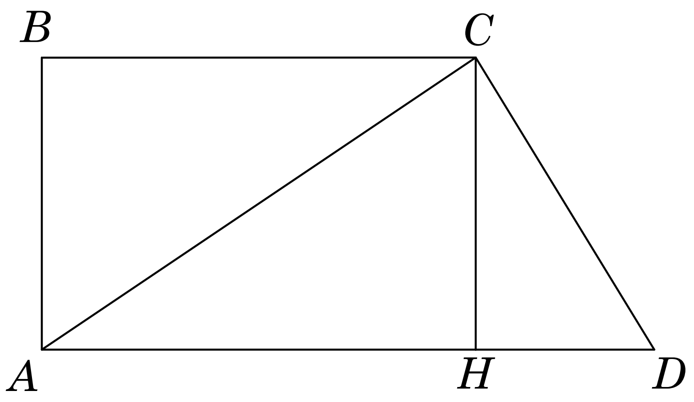
សមមូល $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ ។

ដូចនេះ $\overrightarrow{AD}//\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AD}//\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ នោះគេទាញបាន $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$ ។

ដូចនេះចតុកោណ $ABCD$ ជាចតុកោណព្នាយកែងត្រង់ A និង B ។

៣.គណនា $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ACD ៖



យើងមាន $\overrightarrow{AC}=(5,-2,4)$ និង $\overrightarrow{CD}=\left(0,-3,-\frac{3}{2}\right)$

ដូចនេះ៖ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}=0+6-6=0$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CD}$ នោះគេទាញបាន ACD ជាត្រីកោណកែង ត្រង់កំពូល C ។

៤.គណនាកូអរដោនេនៃ H

តាង $H(x_h,y_h,z_h)$ ។ ដោយ H ជាជើងនៃចំណោលកែងចំណុច C លើ $[AD]$

នោះយើងបាន $\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{AB}$ ដោយ $\overrightarrow{HC}=(6-x_h,-1-y_h,5-z_h)$

និង $\overrightarrow{AB}=(1,2,2)$ នោះគេទាញបាន $\begin{cases}6-x_h=1\\-1-y_h=2\\5-z_h=2\end{cases}$ សមមូល $\begin{cases}x_h=5\\y_h=-3\\z_h=3\end{cases}$

ដូចនេះ $H(5,-3,3)$ ។

៥.គណនា AB , BC និង AD រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ $ABCD$ ៖

ដោយ $A(1,1,1),B(2,3,3),C(6,-1,5),D\left(6,-4,\frac{7}{2}\right)$

យើងបាន $AB=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3$

$$BC=\sqrt{(6-2)^2+(-1-3)^2+(5-3)^2}=\sqrt{16+16+4}=6$$

$$AD=\sqrt{(6-1)^2+(-4-1)^2+\left(\frac{7}{2}-1\right)^2}=\sqrt{25+25+\frac{25}{4}}=\frac{15}{2}$$

ដូចនេះ $AB=3,BC=6$, $AD=\frac{15}{2}$ (ឯកតាប្រវែង) ។

ផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណព្នាយ $ABCD$ គឺ $S=\frac{(BC+AD)\times AB}{2}$

ដូចនេះ $S=\frac{(\frac{15}{2}+6)(3)}{2}=\frac{81}{4}$ (ឯកតាផ្ទៃ)។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី២៧

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(4,1,4),B(3,5,5),C(3,-1,2)$ និង $D\left(\frac{5}{2},1,\frac{5}{2}\right)$ ។

១.គណនា $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃចតុកោណ $ABCD$ ។

២.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AD) និង (BC) ។

៣.M ជាចំណុចស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (AD) ដោយដឹងថាចំណុច M មានអាប់ស៊ីស $x_m=1$ ។ ចូរគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M ។

៤.គណនា $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ MBC ។

៥.គណនា MB និង MC រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ MBC ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃចតុកោណ $ABCD$ ៖

គេមាន $A(4,1,4),B(3,5,5),C(3,-1,2)$ និង $D\left(\frac{5}{2},1,\frac{5}{2}\right)$

នោះ $\overrightarrow{AB}=(-1,4,1)$, $\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{3}{2},0,-\frac{3}{2}\right)$ និង $\overrightarrow{DC}=\left(\frac{1}{2},-2,-\frac{1}{2}\right)$

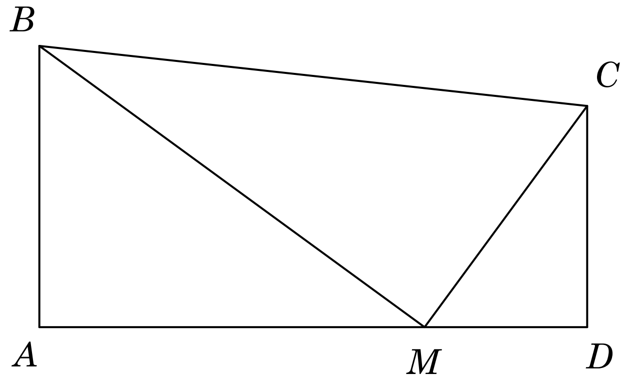
គេបាន $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}+0-\frac{3}{2}=0$ និង $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC}=-\frac{3}{4}+0+\frac{3}{4}=0$ ។

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$ និង $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC}=0$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$ និង $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC}=0$ សមមូល $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{DC}$

ហើយគេទាញបាន $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{DC}$ នោះ $ABCD$ ជាចតុកោណព្នាយកែង។

ដូចនេះ $ABCD$ ជាចតុកោណព្នាយកែងត្រង់ A និង D ។



២.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(AD)និង (BC)

បន្ទាត់(AD) និង (BC) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរៀងគ្នា $\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{3}{2},0,-\frac{3}{2}\right)$

និង $\overrightarrow{BC}=(0,-6,-3)$ ។ ដោយ $A(4,1,4)$ និង $B(3,5,5)$ នោះសមីការ

ប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(AD) និង (BC) អាចសរសេរ៖

$$(AD):\begin{cases} x=4-\frac{3}{2}t \\ y=1 \\ z=4-\frac{3}{2}t \end{cases},t\in\mathbb{R} \quad \text{និង} \quad (BC):\begin{cases} x=3 \\ y=5-6u \\ z=5-3u \end{cases},u\in\mathbb{R}$$

៣.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M ៖

ដោយ M ជាចំណុចស្ថិតនៅលើបន្ទាត់(AD)ហើយមានអាប់ស៊ីស $x_m=1$ នោះ:

គេបាន $\begin{cases} x_m=4-\frac{3}{2}t=1 \\ y_m=1 \\ z_m=4-\frac{3}{2}t \end{cases}$ គេទាញ $t=2$ ហើយ $x_m=1,\ y_m=1, z_m=1$ ។

ដូចនេះ $M(1,1,1)$ ។

៤.គណនា $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ MBC ៖

គេមាន $M(1,1,1)$, $B(3,5,5)$ និង $C(3,-1,2)$

នោះ $\overrightarrow{MB}=(2,4,4)$ និង $\overrightarrow{MC}=(2,-2,1)$ ។

គេបាន $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=(2)(2)+(4)(-2)+(4)(1)=4-8+4=0$ ។

ដូចនេះ $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=0$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{MC}$ ។

ដូចនេះត្រីកោណ MBC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ M ។

៥.គណនា MB និង MC រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ MBC ៖

យើងមាន MBC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ M ។ $\overrightarrow{MB}=(2,4,4)$ និង $\overrightarrow{MC}=(2,-2,1)$

យើងបាន $MB=|\overrightarrow{MB}|=\sqrt{4+16+16}=\sqrt{36}=6$

$MC=|\overrightarrow{MC}|=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3$ ។

ដូចនេះ $MB=6$ (ឯកតាប្រវែង) និង $MC=3$ (ឯកតាប្រវែង)។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ MBC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ M នោះយើងបាន៖

$S_{MBC}=\frac{1}{2}MB\times MC=\frac{1}{2}(6)(3)=9$ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា)។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី២៨

ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យស្វ៊ែ(S)សមីការ $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ និងបន្ទាត់(L): $\begin{cases} x=-4+3t \\ y=-7+4t \\ z=2+t \quad , t\in\mathbb{R} \end{cases}$

១.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A និង B រវាងបន្ទាត់(L)និងស្វ៊ែ(S) ។
(គេដឹងថាចំណុច A មានអាប់ស៊ីសអវិជ្ជមាន)។

២.សរសេរសមីការប្លង់(P) និង (Q) ប៉ះទៅនឹងស្វ៊ែ(S)រៀងគ្នាត្រង់ A និង B។

៣.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(d) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់(P) និង (Q)។

៤.សរសេរសមីការប្លង់(π) កាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់(d) ។

៥.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B\in(\pi)$ រួចសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(Δ) ដែលកែងនឹងប្លង់(π) ត្រង់ B ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A និង B រវាងបន្ទាត់(L)និងស្វ៊ែ(S)

គេមាន $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9 \quad (1)$

និង $\begin{cases} x=-4+3t \\ y=-7+4t \quad (2) \\ z=2+t \end{cases}$

យកសមីការ(2) ជំនួសក្នុង(1) គេបាន ៖

$$(-4+3t-1)^2+(-7+4t+1)^2+(2+t-2)^2=9$$

$$(3t-5)^2+(4t-6)^2+t^2=9$$

$$9t^2-30t+25+16t^2-48t+36+t^2-9=0$$

$$26t^2-78t+52=0$$

ដោយ $a+b+c=26-78+52=0$ គេទាញឫស $t_1=1$, $t_2=\frac{c}{a}=2$ ។

ចំពោះ $t=1$ តាម(2) គេបាន $\begin{cases} x=-4+3=-1 \\ y=-7+4=-3 \\ z=2+1=3 \end{cases}$

ចំពោះ $t=2$ តាម(2) គេបាន $\begin{cases} x=-4+6=2 \\ y=-7+8=1 \\ z=2+2=4 \end{cases}$

ដូចនេះ $A(-1,-3,3)$ និង $B(2,1,4)$

(ព្រោះចំណុច A មានអាប់ស៊ីសអវិជ្ជមាន)។

២.សរសេរសមីការប្លង់(P) និង (Q) ប៉ះទៅនឹងស្វ៊ែ(S)រៀងគ្នាត្រង់ A និង B ៖

ស្វ៊ែ $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ មានផ្ចិត $I(1,-1,2)$ ។

ដោយ $A(-1,-3,3)$ និង $B(2,1,4)$ នោះ $\overrightarrow{IA}=(-2,-2,1)$និង $\overrightarrow{IB}=(1,2,2)$

ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់(P)និង(Q) ដែលប៉ះនឹងស្វ៊ែ(S) ត្រង់ A និង B ។

សមីការប្លង់(P) សរសេរ $-2(x+1)-2(y+3)+(z-3)=0$

$$-2x-2-2y-6+z-3=0$$
$$-2x-2y+z-11=0$$

សមីការប្លង់(Q) សរសេរ $(x-2)+2(y-1)+2(z-4)=0$

$$x-2+2y-2+2z-8=0$$
$$x+2y+2z-12=0$$

ដូចនេះ $(P):-2x-2y+z-11=0$ និង $(Q):x+2y+2z-12=0$ ។

៣.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(d) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់(P) និង (Q)៖

គេមាន$(P): -2x-2y+z-11=0$ និង $(Q): x+2y+2z-12=0$

យក$z=t$ គេបាន $\begin{cases} -2x-2y+t-11=0 & (1) \\ x+2y+2t-12=0 & (2) \end{cases}$

បូកសមីការ$(1)\&(2)$ គេបាន $-x+3t-23=0$ ឬ $x=-23+3t$

តាម(2) គេបាន $-23+3t+2y+2t-12=0$ ឬ $y=\frac{35}{2}-\frac{5}{2}t$

ដូចនេះ $(d): \begin{cases} x=-23+3t \\ y=\frac{35}{2}-\frac{5}{2}t \\ z=t & ,t\in\mathbb{R} \end{cases}$

៤.សរសេរសមីការប្លង់(π) កាត់តាមចំណុចA ហើយកែងនឹងបន្ទាត់(d) ៖

បន្ទាត់(d) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{u_d}=\left(3,-\frac{5}{2},1\right)$ ។

ដោយប្លង់$(\pi)\perp(d)$ នោះ $\overrightarrow{u_d}=\left(3,-\frac{5}{2},1\right)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់របស់ប្លង់(d) ។

គេបាន $(\pi): a(x-x_a)+b(y-y_a)+c(z-z_a)=0$

$$3(x+1)-\frac{5}{2}(y+3)+(z-3)=0$$

$$6x+6-5y-15+2z-6=0$$

$$6x-5y+2z-15=0$$

ដូចនេះ $(\pi): 6x-5y+2z-15=0$ ។

៥.ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា$B\in(\pi)$ ៖

គេមាន $(\pi): 6x-5y+2z-15=0$ និង $B(2,1,4)$

យកកូអរដោនេនៃចំណុច B ជំនួសក្នុងសមីការ (π) គេបាន ៖

$$6(2)-5(1)+2(4)-15=0$$

$$12-5+8-15=0$$

$$0=0$$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $B\in(\pi)$ ។

សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) ដែលកែងនឹងប្លង់ (π) ត្រង់ B ៖

ប្លង់ $(\pi): 6x-5y+2z-15=0$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{n_\pi}=(6,-5,2)$ ។

ដោយបន្ទាត់ (Δ) កែងនឹងប្លង់ (π) នោះវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{n_\pi}=(6,-5,2)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសរបស់បន្ទាត់ (Δ) ។ ដោយបន្ទាត់ (Δ) កាត់តាមចំណុច $B(2,1,4)$ នោះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) សរសេរ ៖

$$(\Delta):\begin{cases}x=2+6t\\ y=1-5t\\ z=4+2t\quad ,\ t\in\mathbb{R}\end{cases}$$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី២៩

ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យស្វ៊ែ (S) សមីការ

$(x+5)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=36$ និងបន្ទាត់ (L): $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=3+t \\ z=-3+2t \quad , t\in\mathbb{R} \end{cases}$

១.គណនាកូអរដោនេនៃផ្ចិត I និងកាំ r របស់ស្វ៊ែ (S) ។

២.យក H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច I លើបន្ទាត់ (L) ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និងរង្វាស់ IH រួចទាញថាបន្ទាត់ (L) ប៉ះទៅនឹងស្វ៊ែ (S) ត្រង់ចំណុច H ។

៣. A និង B ជាចំណុចពីរស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (L) ហើយមានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា $x_a=-5$ និង $x_b=5$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច A និង B ។

៤.គណនា AB , IA និង IB រួចទាញបញ្ជាក់ប្រភេទនៃត្រីកោណ IAB ។

៥.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IAB ។

៦.សរសេរសមីការប្លង់ (IAB) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $(IA),(IB),(IH)$

ដំណោះស្រាយ

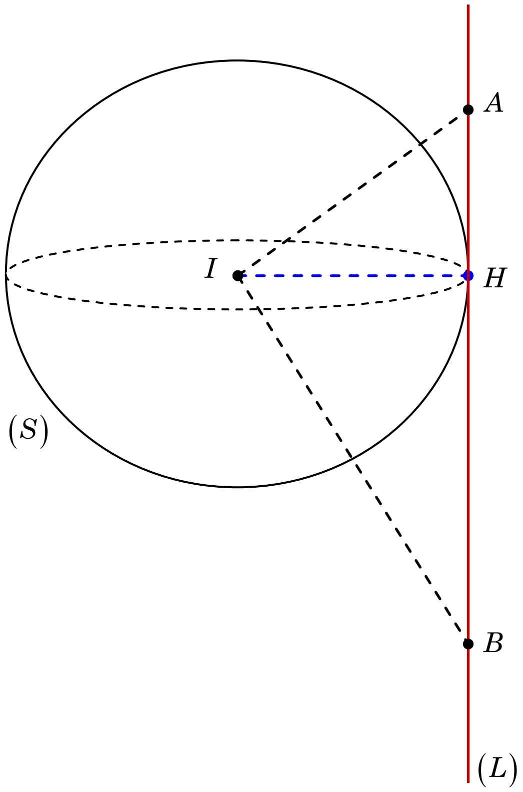
១.គណនាកូអរដោនេនៃផ្ចិត I និងកាំ r របស់ស្វ៊ែ (S) ៖

គេមាន $(S):(x+5)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=36$

មានទម្រង់ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ ដែល $\begin{cases} a=-5 \\ b=-2 \\ c=-1 \end{cases}$ និង $r=6$

ដូចនេះកូអរដោនេផ្ចិត $I(-5,-2,-1)$ និង កាំ $r=6$ ។

២.គណនាកូអរដោនេចំណុច H និង IH រួចទាញថា (L) ប៉ះទៅនឹង (S) ត្រង់ចំណុច H ៖



តាង $H(x_h, y_h, z_h)$ ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច I លើបន្ទាត់ (L) នោះ

គេបាន $H \in (L)$ សមមូល $\begin{cases} x_h = -1 + 2t \\ y_h = 3 + t \\ z_h = -3 + 2t \end{cases}$ (1)

គេមាន $\overrightarrow{IH} \perp \overrightarrow{u_L} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH} \,.\, \overrightarrow{u_L} = 0$ ដែល $\overrightarrow{u_L} = (2,1,2)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) ។ ដោយគេមាន $\overrightarrow{IH} = (2t+4 \,,\, t+5 \,,\, 2t-2)$

គេបាន $\overrightarrow{IH} . \overrightarrow{u_L} = 2(2t+4) + (t+5) + 2(2t-2) = 0$

$$4t + 8 + t + 5 + 4t - 4 = 0$$

$$9t + 9 = 0$$

គេទាញបាន $t=-1$ យកជួសក្នុង(1) គេបាន $\begin{cases} x_h=-1-2=-3 \\ y_h=3-1=2 \\ z_h=-3-2=-5 \end{cases}$

ដូចនេះ $H(-3,2,-5)$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $I(-5,-2,-1)$ និង $H(-3,2,-5)$

គេបាន $IH=\sqrt{(-3+5)^2+(2+2)^2+(-5+1)^2}=\sqrt{4+16+16}=6$

ដូចនេះ $IH=6$ (ឯកតាប្រវែង)។

ដោយ $IH\perp(L)$នោះ IH ជាចម្ងាយពីចំណុច I ទៅបន្ទាត់(L) និង $IH=r=6$

ដូចនេះយើងអាចសន្និដ្ឋានបានថាបន្ទាត់(L)ប៉ះទៅនឹងស្វ៊ែ(S)ត្រង់ចំណុច H ។

៣.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច A និង B៖

មាន A និង B ជាចំណុចពីរស្ថិត នៅលើបន្ទាត់(L) ហើយមានអាប់ស៊ីសរៀងគ្នា

$x_a=-5$ និង $x_b=5$ នោះគេបាន ៖

$\begin{cases} x_a=-1+2t=-5 \\ y_a=3+t \\ z_a=-3+2t \end{cases}$ សមមូល $t=-2$, $x_a=-5$, $y_a=1$, $z_a=-7$ ។

$\begin{cases} x_b=-1+2t=5 \\ y_b=3+t \\ z_b=-3+2t \end{cases}$ សមមូល $t=3$, $x_b=5$, $y_b=6$, $z_b=3$ ។

ដូចនេះ $A(-5,1,-7)$ និង $B(5,6,3)$ ។

៤.គណនា AB , IA និង IB រួចទាញបញ្ជាក់ប្រភេទនៃត្រីកោណ IAB ៖

គេមាន $I(-5,-2,-1)$, $A(-5,1,-7)$ និង $B(5,6,3)$

យើងបាន $AB=\sqrt{(5+5)^2+(6-1)^2+(3+7)^2}=\sqrt{100+25+100}=15$

$$IA=\sqrt{(-5+5)^2+(1+2)^2+(-7+1)^2}=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$$

$$IB=\sqrt{(5+5)^2+(6+2)^2+(3+1)^2}=\sqrt{100+64+16}=6\sqrt{5}$$

ដូចនេះ $AB=15$, $IA=3\sqrt{5}$, $IB=6\sqrt{5}$ (ឯកតាប្រវែង)។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $IA^2+IB^2=\left(3\sqrt{5}\right)^2+\left(6\sqrt{5}\right)^2=225=AB^2$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រយើងទាញបានថា IAB ជាត្រីកោណកែងត្រង់ I ។

៥.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IAB ៖

គេមាន $I(-5,-2,-1)$, $A(-5,1,-7)$ និង $B(5,6,3)$

គេបាន $\overrightarrow{IA}=(0,3,-6)$ និង $\overrightarrow{IB}=(10,8,4)$

នោះ $\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 3 & -6\\ 10 & 8 & 4\end{vmatrix}=60\vec{i}-60\vec{j}-30\vec{k}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}=(60,-60,-30)$ ។

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IAB គឺ ៖

$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{3600+3600+900}=45$ (ឯកតាផ្ទៃ)។

៦.សរសេរសមីការប្លង់ (IAB) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (IA),(IB),(IH) ៖

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (IAB) គឺ $\vec{n}=\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{IB}=(60,-60,-30)$

ដោយប្លង់ (IAB) កាត់តាមចំណុច $I(-5,-2,-1)$ នោះគេបាន៖

$(IAB): a(x-x_i)+b(y-y_i)+c(z-z_i)=0$

$$60(x+5)-60(y+2)-30(z+1)=0$$

ដូចនេះ $(IAB): 2x-2y-z+5=0$ ។

ម្យ៉ាងទៀតវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់$(IA),(IB),(IC)$ គឺ ៖

$\overrightarrow{IA}=(0,3,-6)$, $\overrightarrow{IB}=(10,8,4)$, $\overrightarrow{IH}=(2,4,-4)$

ដូចនេះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់$(IA),(IB),(IC)$អាចសរសេររៀងគ្នា ៖

$$(IA):\begin{cases}x=-5\\ y=-2+3u\\ z=-1+6u\end{cases},\ u\in\mathbb{R}$$

$$(IB):\begin{cases}x=-5+10v\\ y=-2+8v\\ z=-1+4v\end{cases},\ v\in\mathbb{R}$$

$$(IH):\begin{cases}x=-5+2w\\ y=-2+4w\\ z=-1-4w\end{cases},\ w\in\mathbb{R}$$

លំហាត់ទី៣០

គេឲ្យប្លង់ពីរ $(\alpha): x+2y+2z-11=0$, $(\beta): 2x-2y+z-1=0$

និងបន្ទាត់ $(\Delta): x=3+t\ , y=6-4t\ , z=7-t$ ដែល $t\in\mathbb{R}$

១.គណនាកូអរដោណេចំណុចប្រសព្វ A និង Bរវាងបន្ទាត់ (Δ)ជាមួយប្លង់

(α) និង (β) រៀងគ្នា ។

២.យក C ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x=1$ហើយស្ថិតនៅក្នុងប្លង់(α)និង (β) ។

រកកូអរដោនេនៃចំណុច C រួចរកក្រាបភេទនៃ ΔABC ។

៣.កំណត់សមីការស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិតនៅលើបន្ទាត់ (Δ) ហើយប៉ះរួមទៅនឹងប្លង់

(α) និង (β) ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាកូអរដោណេចំណុចប្រសព្វ A និង B ៖

យកសមីការ (Δ) ជួសក្នុងសមីការ (α) គេបាន៖

$$(3+t)+2(6-4t)+2(7-t)-11=0$$

$$3+t+12-8t+14-2t-11=0$$

$$-9t+18=0 \Rightarrow t=2$$

យក$t=2$ ជួសក្នុង (Δ) គេបាន $x=5, y=-2\ , z=5$ ។

ដូចនេះ $A(5\ ,-2\ ,5)$ ។

យកសមីការ (Δ) ជួសក្នុងសមីការ (β) គេបាន៖

$$2(3+t)-2(6-4t)+(7-t)-1=0$$

$$6+2t-12+8t+7-t-1=0$$

$$9t=0 \Rightarrow t=0$$

យក$t=0$ ជួសក្នុង (Δ) គេបាន $x=3, y=6\ , z=7$ ។

ដូចនេះ $B(3\ ,6\ ,7)$ ។

២.រកកូអរដោនេនៃចំណុច C រួចរកប្រភេទនៃ ΔABC

ចំពោះ $x=1$ គេបាន $\begin{cases}1+2y+2z-11=0\\2-2y+z-1=0\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}2y+2z-10=0\\-2y+z+1=0\end{cases}$

គេទាញបាន $y=2\ ,\ z=3$ ។ ដូចនេះ $C(1,2,3)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{CA}=(4,-4,2)\ ;\ \overrightarrow{CB}=(2,4,4)$

គេបាន $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=8-16+8=0\Leftrightarrow \overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$

ហើយ $|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{16+16+4}=6\ ;|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{4+16+16}=6$

គេទាញ $CA=CB=6$ ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាត

៣.កំណត់សមីការស្វ៊ែ (S) ៖

តាង $I(a,b,c)$ ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិតនៅលើបន្ទាត់ (Δ)
ហើយប៉ះរួមទៅនឹងប្លង់ (α) និង (β) ។

គេបាន $\begin{cases}a=3+t\\b=6-4t\\c=7-t\end{cases}$ (1) ហើយ $R=d(I,\alpha)=d(I,\beta)$

$$\frac{|(3+t)+2(6-4t)+2(7-t)-11|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{|2(3+t)-2(6-4t)+(7-t)-1|}{\sqrt{4+4+1}}$$

ឬ $\frac{|-9t+18|}{3}=\frac{|9t|}{3}\Rightarrow t=1$ យកជួសក្នុង (1) គេបាន $\begin{cases}a=4\\b=2\\c=6\end{cases}$

ហើយ $R=\frac{9}{3}=3$ ។ ដូចនេះសមីការស្តង់ដានៃសមីការស្វ៊ែសរសេរ

$(S):(x-4)^2+(y-2)^2+(z-6)^2=9$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣១

ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

គេឲ្យប្លង់(p): $x-2y+2z-6=0$ និងបន្ទាត់(L): $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+3}{-2}$ ។

១.ចូរបង្ហាញថា$(L)\perp(p)$ រួចគណនាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (L) ជាមួយប្លង់(p) ។

២.តាង A,B,C ជាចំណុចប្រសព្វរវាង(p)ជាមួយអ័ក្ស$(ox),(oy),(oz)$ រៀងគ្នា។ ចូរគណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

៣.គណនាកូអរដោនេចំណុច D ដោយដឹងថា $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

ដំណោះស្រាយ

១.បង្ហាញថា$(L)\perp(p)$ រួចគណនាកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M រវាង(L)និង(p) ៖

គេមានប្លង់(p): $x-2y+2z-6=0$ និងបន្ទាត់(L): $\frac{x}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+3}{-2}$

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់(p) គឺ $\vec{n}=(1,-2,2)$ ហើយវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់(L) គឺ $\vec{u}=(-1,2,-2)$ ។

គេបាន $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{1}{-1}=\frac{-2}{2}=\frac{2}{-2}$ នោះ $\vec{n}$ និង$\vec{u}$ ជាវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែគ្នា។

ដូចនេះ $(L)\perp(p)$ ។

ម្យ៉ាងទៀតតាង $\frac{x}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+3}{-2}=t$ នោះ $\begin{cases} x=-t \\ y=3+2t \\ z=-3-2t \end{cases}$ (1)

យក(1) ជំនួសក្នុង(p) គេបាន៖

$$\begin{aligned}(-t)-2(3+2t)+2(-3-2t)-6&=0\\ -t-6-4t-6-4t-6&=0\\ -9t-18&=0\\ t&=-2\end{aligned}$$

យក$t=-2$ ជួសក្នុង(1) គេបានចំណុច $M(2,-1,1)$ ។

២.គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

គេមាន $(p): x-2y+2z-6=0$

ចំពោះ $y=z=0$ នោះ $x-6=0$ ឬ $x=6$ គេបាន $A(6,0,0)$ ។

ចំពោះ $x=z=0$ នោះ $-2y-6=0$ ឬ $y=-3$ គេបាន $B(0,-3,0)$ ។

ចំពោះ $x=y=0$ នោះ $2z-6=0$ ឬ $z=3$ គេបាន $C(0,0,3)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(-6,-3,0)$ និង $\overrightarrow{AC}=(-6,0,3)$ ។

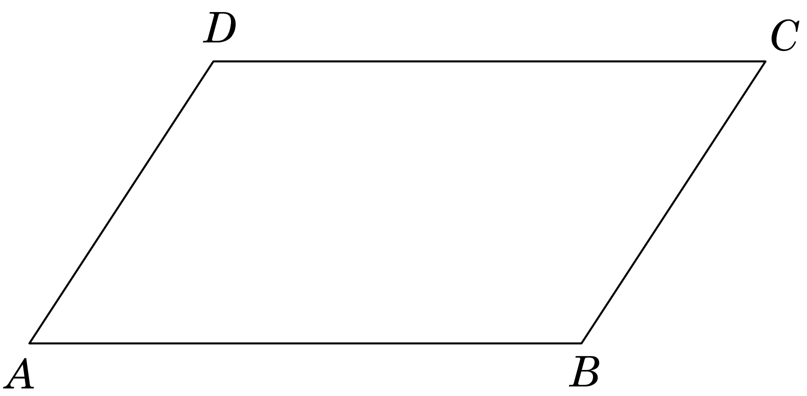
គេបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -6 & -3 & 0\\ -6 & 0 & 3\end{vmatrix}=-9\vec{i}+18\vec{j}-18\vec{k}$ ។

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-9,18,-18)$ ។

ហើយផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC គឺ $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

$S=\frac{1}{2}\sqrt{81+324+324}=\frac{27}{2}=13.5$ ឯកតាផ្ទៃ។

៣.គណនាកូអរដោនេចំណុច D ដោយដឹងថា $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម



តាង $D(x_d,y_d,z_d)$ នោះ $\overrightarrow{AD}=(x_d-6,y_d,z_d)$ និង $\overrightarrow{BC}=(0,3,3)$ ។

ដោយ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាមនោះ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

សមមូល $\begin{cases}x_d-6=0\\ y_d=3\\ z_d=3\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x_d=6\\ y_d=3\\ z_d=3\end{cases}$

ដូចនេះ $D(6,3,3)$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣២

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យវ៉ិចទ័រពីរ

$\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$ និង $\vec{v}=2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ ។

១.គណនា $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$ និង $|\vec{n}|$ ។

២.កំណត់សមីការប្លង់ (p) កាត់តាមចំណុច $A(-1,2,-3)$ ហើយកែងនឹង $\vec{n}$ ។

៣.កំណត់សមីការស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត O ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (p) ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$ និង $|\vec{n}|$

គេមាន $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$ និង $\vec{v}=2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ ។

យើងបាន $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 0\\ 2 & -2 & -1\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -2 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$$

ដូចនេះ $\vec{n}=(1,2,-2)$ និង $|\vec{n}|=\sqrt{1+4+4}=3$ ។

២.កំណត់សមីការប្លង់ (p) កាត់តាមចំណុច $A(-1,2,-3)$ ហើយកែងនឹង $\vec{n}$

តាមរូបមន្ត $(p): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

ដោយ $A(-1,2,-3)$ និង $\vec{n}=(1,2,-2)$

គេបាន $(p): 1(x+1)+2(y-2)-2(z+3)=0$

ដូចនេះ $(p): x+2y-2z-9=0$ ។

៣.កំណត់សមីការស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត O ហើយប៉ះនឹងប្លង់ (p)

សមីការស្វ៊ែ (S) ផ្ចិត O មានរាង $(S): x^2+y^2+z^2=R^2$ ដែល R ជាកាំ។

ដោយ (S) ប៉ះនឹងប្លង់ (p) នោះ $R=d(O,(p))$

គេបាន $R=\dfrac{|x_0+2y_0-2z_0-9|}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{|0+0+0-9|}{3}=3$

ដូចនេះ $(S): x^2+y^2+z^2=9$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣៣

ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(1,2,3);B(2,3,-6);\ C(-2,1,-2)$ និង $D(0,4,0)$ ។

១.ចូរគណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}$ រួចទាញថាបីចំណុច B,C,D

មិនរត់ត្រង់គ្នា ។

គណនាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ BCD រួចកំណត់សមីការប្លង់ (BCD) ។

២.គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ រួចទាញរកចម្ងាយពី A ទៅប្លង់ (BCD) ។

៣.H ជាចំណោលកែងនៃ A លើប្លង់បាត (BCD) ។

កំណត់សមីការបន្ទាត់ (AH) រួចរកកូអរដោនេ H ។

ដំណោះស្រាយ

១)គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}$ រួចទាញថាបីចំណុច B,C,D មិនរត់ត្រង់គ្នា៖

គេមាន $\overrightarrow{BC}=(-4\ ,-2\ ,\ 4)$; $\overrightarrow{BD}=(-2\ ,1\ ,\ 6)$

$$\text{គេបាន } \overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-4&-2&4\\-2&1&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&4\\1&6\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-4&4\\-2&6\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-4&-2\\-2&1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-16\vec{i}+16\vec{j}-8\vec{k}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=(-16\ ,16\ ,-8)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=(-16\ ,16\ ,-8)\neq\vec{O}=(0,0,0)$ នោះវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{BD}$

មិនកូលីនេអ៊ែគ្នា ។ ដូចនេះ B,C,D មិនរត់ត្រង់គ្នា ។

គណនាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ BCD ៖

តាមរូបមន្ត $S_{BCD}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-16)^2+16^2+(-8)^2}=12$ (ឯកតាផ្ទៃ)។

កំណត់សមីការប្លង់ (BCD) ៖

ប្លង់ (BCD)មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{N}=\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=(-16\ ,16\ ,-8)$
ហើយកាត់តាម $B(2,3,-6)$ ។

តាមរូបមន្ត $(BCD): a(x-x_D)+b(y-y_D)+c(z-z_D)=0$

$$-16(x-2)+16(y-3)-8(z+6)=0$$
$$-16x+32+16y-48-8z-48=0$$
$$-16x+16y-8z-64=0$$

ដោយសម្រួលនឹង -8 គេបាន $(BCD): 2x-2y+z+8=0$ ។

២)គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ៖

តាមរូបមន្ត $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{BA}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=(-16\ ,16\ ,-8)$ និង $\overrightarrow{BA}=(-1,-1,9)$ នោះ

$V_{BCDA}=\frac{1}{6}|16-16+72|=12$ (ឯកតាមាឌ)

ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច A ទៅប្លង់(BCD) ៖

តាមរូបមន្ត $V_{BCD}=\frac{1}{3}S_{BCD}\times d(A,(BCD))$

គេទាញ $d(A,(BCD)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{BCD}} = \frac{3\times 12}{12} = 3$ (ឯកតាប្រវែង)។

៣) កំណត់សមីការបន្ទាត់(AH)រួចរកកូអរដោនេ H ៖

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (AH) គឺ $\vec{u} = (2,-2,1)$ ដែល $\vec{n} = (2,-2,1)$

ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់។

$(BCD): 2x - 2y + z + 8 = 0$ ព្រោះ $(AH) \perp (BCD)$ ។

តាមរូបមន្តសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $(AH): \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \quad , t \in \mathbb{R} \end{cases}$

ដោយ $A(1,2,3)$ និង $\vec{u} = (2,-2,1)$

ដូចនេះ $(AH): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \quad , t \in \mathbb{R} \end{cases}$ ។

រកកូអរដោនេ H ៖

យកសមីការ (AH) ជួសក្នុងសមីការប្លង់ (BCD) គេបាន

$2(1+2t) - 2(2-2t) + 3 + t + 8 = 0$

សមមូល $2 + 4t - 4 + 4t + 3 + t + 8 = 0$

គេទាញ $t = -1$ យកជួសក្នុង (AH) គេបាន $x = -1$, $y = 4$, $z = 2$ ។

ដូចនេះ $H(-1\ ,\ 4\ ,\ 2)$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣៤

នៅក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយគេឲ្យមាន ចំណុច $A(0,2,1),B(2,1,-1),C(-4,5,3)$ និង $D(4,6,3)$ ។

១.ចូរស្រាយថា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC ។

២.កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

៣.គណនា $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}$ រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ។

៤.ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) ។

ដំណោះស្រាយ

១.ស្រាយថា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC ៖

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(2\ ,-1,-2)$,$\overrightarrow{AC}=(-4,3,2)$ និង $\overrightarrow{AD}=(4\ ,\ 4\ ,\ 2)$

គេបាន $$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & -2\\ -4 & 3 & 2\end{vmatrix}=4\,\vec{i}+4\,\vec{j}+2\,\vec{k}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}=(4,4,2)$ ។

២.កំណត់សមីការប្លង់ (ABC) ៖

ប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(4,4,2)$

តាមរូបមន្ត $(ABC): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$$4(x-0)+4(y-2)+2(z-1)=0$$

ដូចនេះ $(ABC): 2x+2y+z-5=0$ ។

៣.គណនា $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}$ រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ៖

គេមាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

ដូចនេះ $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AD}|^2=16+16+4=36$ ។

តាមរូបមន្ត $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\times 36=6$ (ឯកតាមាឌ) ។

៤.ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) ៖

គេមាន $V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times d(D,(ABC))$

ដែល $d(D,(ABC))=h$ ជាកម្ពស់នៃតេត្រាអ៊ែតគូសពីកំពូល D ។

គេទាញ $d(D,(ABC))=\frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}}=\frac{3\times 6}{3}=6$ (ឯកតាប្រវែង) ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣៥

ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យចំណុច

$A(0,0,2)$,$B(2,0,1)$,$C(2,2,3)$ និង $D(0,2,4)$ ។

១.បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

២.គណនាផលគុណវ៉ិចទរ័ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$

៣.សរសេរសមីការប្លង់(ABC)និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L)កែងទៅនឹងប្លង់ (ABC)ត្រង់ D។

៤.កំណត់កូអរដោនេនៃចំនុច E បើគេដឹងថា $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)$ ។

៥.គណនាមាឌរបស់ពីរ៉ាមីតដែលមានកំពស់$[AE]$ និងបាតជាចតុកោណ $ABCD$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ៖

$A(0,0,2)$,$B(2,0,1)$,$C(2,2,3)$ និង $D(0,2,4)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$

និង $\overrightarrow{CD}(x_D-x_C,y_D-y_C,z_D-z_C)$

នោះ $\overrightarrow{AB}(2,0,-1)$ និង $\overrightarrow{DC}(2,0,-1)$

ដោយ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ (កូអរដោនេដូចគ្នា)

ដូចនេះ ចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

២.គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$

គេមាន $\overrightarrow{AB}(2,0,-1)$ និង $\overrightarrow{AD}(0,2,2)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}=-2.\vec{i}-4.\vec{j}+4.\vec{k}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}(-2,-4,4)$ ។

តាមរូបមន្តក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ៖

$S_{ABCD}=\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right\|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+(4)^2}=6$ (ឯកត្តាក្រឡាផ្ទៃ) ។

៣.សមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្របន្ទាត់ (L) កែងនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ D

ដោយ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាមនោះបួនចំនុច A,B,C,D នៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

តាង $\overrightarrow{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) នោះគេបាន៖

$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}(-2,-4,4)$

សមីការប្លង់ (ABC) អាចសរសេរតាមរូបមន្ត ៖

$(ABC): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$(ABC): -2(x-0)-4(y-0)+4(z-4)=0$

$(ABC): -2x-4y+4z-16=0$

$(ABC): -x-2y+2z-8=0$

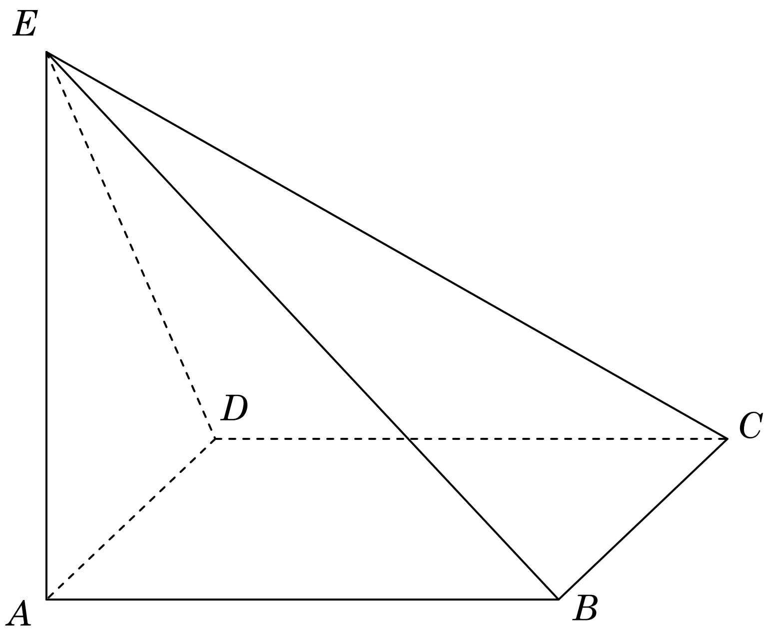
ម្យ៉ាងទៀតតាង $\overrightarrow{u}$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ បន្ទាត់ (L) កែងនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ D

គេបាន $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}(-2,-4,4)$

តាមរូបមន្ត $(L):\begin{cases}x=x_D+at\\ y=y_D+bt\\ z=z_D+ct\quad ,t\in\mathbb{R}\end{cases}$

ដូចនេះ $(L):\begin{cases} x=-2t \\ y=2-4t \\ z=4+4t \quad ,t\in\mathbb{R} \end{cases}$

ឃ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំនុច E បើគេដឹងថា $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)$



តាង $E(x_E,y_E,z_E)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{AE}(x_E,y_E,z_E-2)$ និង $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}(-2,-4,4)$

ដោយ $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)$ នាំឱ្យ $\begin{cases} x_E=-1 \\ y_E=-2 \\ z_E-2=2 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x_E=-1 \\ y_E=-2 \\ z_E=4 \end{cases}$

ដូចនេះ $E(-1,-2,4)$ ។

ង. គណនាមាឌរបស់ពីរ៉ាមីតដែលមានកំពស់ $[AE]$ និងបាតជាចតុកោណ $ABCD$

យើងបាន $V=\frac{1}{3}S_{ABCD}\times AE$ ដោយ $S_{ABCD}=6$ និង $AE=3$

ដូចនេះ $V=6$ (ឯកតាមាឌ) ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣៦

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានបួនចំណុច៖

$A(4,0,0)$ $B(0,-2,0)$, $C(0,0,2)$ និង $D(4,2,2)$ ។

១.បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

២.ចូរកំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BC) និងសមីការនៃប្លង់កាត់តាមបី

ចំណុច A,B និង C ។

៣.យក H ជាចំណោលកែងនៃ A លើបន្ទាត់ (BC) ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច

H រួចគណនា AH និងផ្ទៃក្រលាប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ។

៤.គេមានចំណុច $S(1,6,-6)$ ។ បង្ហាញថាបន្ទាត់ (SA) កែងនឹងប្លង់ $(ABCD)$

រួចគណនាមាឌនៃពីរ៉ាមីត $SABCD$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.បង្ហាញថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម

គេមាន $\overrightarrow{AD}=(0,2,2)$ និង $\overrightarrow{BC}=(0,2,2)$

ដោយ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ នោះ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

២.កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BC) ៖

បន្ទាត់ (BC) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{BC}=(0,2,2)$

តាមរូបមន្ត $(BC):\begin{cases} x=x_B+at \\ y=y_B+bt \\ z=z_B+ct \quad , t\in\mathbb{R}\end{cases}$

ដូចនេះ $(BC):\begin{cases} x=0 \\ y=-2+2t \\ z=2t \quad ,t\in\mathbb{R}\end{cases}$

កំណត់សមីការនៃប្លង់កាត់តាមបីចំណុច A,B និង C ៖

តាង $(P): ax+by+cz+d=0$ ជាប្លង់កាត់តាមបីចំណុច A,B និង C

នោះកូអរដោនេនៃចំណុច A,B និង C ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (P)

គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} 4a+d=0 \\ -2b+d=0 \\ 2c+d=0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $a=-\dfrac{d}{4}$, $b=\dfrac{d}{2}$, $c=-\dfrac{d}{2}$

យក $a=-\dfrac{d}{4}$, $b=\dfrac{d}{2}$, $c=-\dfrac{d}{2}$ ជួសក្នុង (P) គេបាន ៖

$-\dfrac{d}{4}x+\dfrac{d}{2}y-\dfrac{d}{2}z+d=0$ ឬ $(P): x-2y+2z-4=0$ ។

៣.រកកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចគណនា AH និងផ្ទៃក្រលាប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ៖

តាង $H(x_H,y_H,z_H)$ ។

ដោយ $H\in(BC)$ នោះ $\begin{cases} x_H=0 \\ y_H=-2+2t \\ z_H=2t \end{cases}$ (1)

គេបាន $\overrightarrow{AH}=(-4\ ,\ -2+2t\ ,2t\ )$

ដោយ $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$

គេបាន $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=(0)(-4)+2(-2+2t)+2(2t)=0$ នោះ $t=\dfrac{1}{2}$

យក $t=\dfrac{1}{2}$ ជួសក្នុង (1) គេបាន $x_H=0, y_H=-2+1=-1$, $z_H=1$ ។

ដូចនេះ $H(0,-1,1)$ ។

ហើយ $AH=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+1^2}=3\sqrt{2}$ និង $BC=\sqrt{0+4+4}=2\sqrt{2}$

គេបាន $S_{ABCD}=AH.BC=(3\sqrt{2})(2\sqrt{2})=12$ ។

ដូចនេះ $AH=3\sqrt{2}$, $S_{ABCD}=12$ (ឯកតាផ្ទៃ)។

៤. បង្ហាញថាបន្ទាត់ (SA) កែងនឹងប្លង់ $(ABCD)$ ៖

$\overrightarrow{SA}=(3\,,-6,6)$, $\overrightarrow{AB}=(-4,-2,0)$, $\overrightarrow{AD}=(0,2,2)$

គេមាន $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB}=-12+12+0=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{SA}\perp\overrightarrow{AB}$

ហើយ $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AD}=0-12+12=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{SA}\perp\overrightarrow{AD}$

នោះគេទាញបាន $(SA)\perp(ABCD)$ ។

គណនាមាឌនៃពីរ៉ាមីត $SABCD$ ៖

តាមរូបមន្ត $V_{SABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\times SA$ ដោយ $SA=\sqrt{9+36+36}=9$

ដូចនេះ $V_{SABCD}=\frac{1}{3}\times 12\times 9=36$ (ឯកតាមាឌ)។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣៧

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យប្លង់

$(P): x+2y+2z-4=0$ ។ តាង A,B និង C ជាចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P)

ជាមួយអក្ស័ (ox) , (oy) និង (oz) រៀងគ្នា ។

១.ចូរគណនាកូអរដោនេនៃចំណុច A,B និង C រួចសង់ចំណុចនេះ។

២.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចរកផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC ។

៣.គណនាផលគុណស្កាលែ $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}$ ។ទាញរកមាឌចតុមុខ $OABC$

៤.សរសេរសមីការស្វ៊ែរចារឹកក្រៅចតុមុខ $OABC$ រួចបញ្ជាក់

កូអរដោនេផ្ចិត និងកាំរបស់ស្វ៊ែរ (S) ផង។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច A,B និង C រួចសង់ចំណុចនេះ

គេមាន $(P): x+2y+2z-4=0$

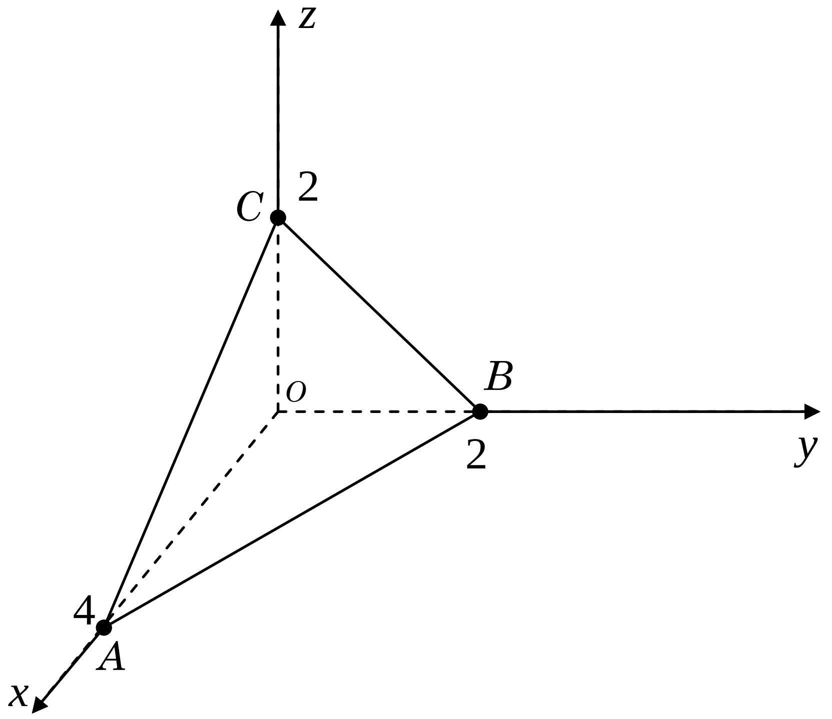
ចំពោះ $y=z=0$ នោះ $x-4=0 \Leftrightarrow x=4$ គេបាន $A(4,0,0)$ ។

ចំពោះ $x=z=0$ នោះ $2y-4=0 \Leftrightarrow y=2$ គេបាន $B(0,2,0)$ ។

ចំពោះ $x=y=0$ នោះ $2z-4=0 \Leftrightarrow z=2$ គេបាន $C(0,0,2)$ ។

២.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចរកផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(-4,2,0)$, $\overrightarrow{AC}=(-4,0,2)$



យើងបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 2 & 0\\ -4 & 0 & 2\end{vmatrix}=4\,\vec{i}+8\,\vec{j}+8\,\vec{k}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(4,8,8)$ ។

តាមរូបមន្តផ្ទៃក្រឡាត្រីកោ $S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+8^2+8^2}=6$

ដូចនេះ $S_{ABC}=6$ ខ្នាតផ្ទៃក្រឡា ។

៣.គណនាផលគុណស្កាលែ $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}$

គេមាន $\overrightarrow{AO}=(-4,0,0)$ និង $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(4,8,8)$

យើងបាន $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}=(-4)(4)+(0)(8)+(0)(8)=-16$

ដូចនេះ $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}=-16$ ។

ទាញរកមាឌចតុមុខ $OABC$ ៖

តាមរូបមន្ត $V_{OABC}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}\right|=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$

ដូចនេះ $V_{OABC}=\frac{8}{3}$ (ខ្នាតមាឌ)។

៤.សរសេរសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ(S) ចារឹកក្រៅចតុមុខ $OABC$ ៖

តាង$(S): x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ ជាសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែ។

ដោយស្វ៊ែ(S) ចារឹកក្រៅចតុមុខ$OABC$នោះកូអរដោនេនៃចំណុច

O,A,B,C ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ(S) ។

គេមាន$O(0,0,0)$, $A(4,0,0)$, $B(0,2,0)$,$C(0,0,2)$

គេបាន $\begin{cases} d=0 \\ 16+4a+d=0 \\ 4+2b+d=0 \\ 4+2c+d=0 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} a=-4 \\ b=-2 \\ c=-2 \\ d=0 \end{cases}$

គេបាន $(S): x^2+y^2+z^2-4x-2y-2z=0$

ដូចនេះ $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$ ។

បញ្ជាក់កូអរដោនេផ្ចិត និងកាំរបស់ស្វ៊ែ(S)៖

គេមាន $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6=\left(\sqrt{6}\right)^2$

ដូចនេះកូអរដោនេផ្ចិត$I(2,1,1)$ និងកាំ$R=\sqrt{6}$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣៨

ក្នុងតម្រុយអរតូណាម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(1,2,3)$ និងប្លង់ $(\alpha): x+2y-2z-8=0$ ។

១.កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) គូសចេញពីចំណុច A ហើយកែងនឹងប្លង់ (β) ត្រង់ចំណុច H ។

២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និងចំណុច A'ឆ្លុះគ្នានឹង A ធៀបនឹង(α) ។

៣.កំណត់សមីការប្លង់ (β) កាត់តាមចំណុច A' ហើយស្របនឹងប្លង់(α) ។

ដំណោះស្រាយ

១.កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (Δ) ៖

ប្លង់ $(\alpha): x+2y-2z-8=0$ មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(1,2,-2)$

ដោយបន្ទាត់ $(\Delta)\perp(\alpha)$ នោះ $\vec{n}=(1,2,-2)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (Δ) ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ (Δ) កាត់តាម $A(1,2,3)$ សរសេរ ៖

$$(\Delta):\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=3-2t \quad ; t\in\mathbb{R}\end{cases}$$

២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និងចំណុច A'

យកសមីការ (Δ) ជួសក្នុង (α) គេបាន ៖

$$(1+t)+2(2+2t)-2(3-2t)-8=0$$
$$1+t+4+4t-6+4t-8=0$$
$$9t-9=0$$

គេទាញបាន $t=\frac{9}{9}=1$ យកជួសក្នុងសមីការ (Δ) គេបាន $H(2,4,1)$ ។

ហើយដោយចំណុច A' ឆ្លុះគ្នានឹង A ធៀបនឹងប្លង់ (α) នោះចំណុច H

ជាចំណុចកណ្តាលនៃ A និង A' ។

គេបាន $x_{A'}=2x_H-x_A=4-1=3$, $y_{A'}=2y_H-y_A=8-2=6$

និង $z_{A'}=2z_H-z_A=2-3=-1$ ។ដូចនេះ $A'(3,6,-1)$ ។

៣.កំណត់សមីការប្លង់ (β) ៖

ដោយ $(\beta)//(\alpha)$ នោះ $\vec{n}=(1\ ,\ 2\ ,\ -2)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃ (β)

ដោយ (β)កាត់តាមចំណុច $A'(3,6,-1)$ នោះគេបាន

$$(\beta):1.(x-3)-2(y-6)+2(z+1)=0$$
$$(\beta):x-3-2y+12+2z+2=0$$
$$(\beta):x-2y+2z+11=0$$

ដូចនេះ $(\beta):x-2y+2z+11=0$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៣៩

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យពីរចំណុច $A(1,-2,2)$ និង $B(2,2,1)$ ។

១.គណនា $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$, $|\overrightarrow{OA}|$ និង $|\overrightarrow{OB}|$ រួចរកប្រភេទនៃត្រីកោណ OAB និងគណនាផ្ទៃក្រឡា ΔABC ។

២.ចូររកកូអរដោនេនៃចំណុច C ជាកំពូលនៃការេ $OACB$ ។

៣.គណនាផលគុណវិចទ័រ $\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡា ΔCAB

៤.ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (AB) ។

៥.គេឲ្យចំណុច $S(-1,5,1)$ ។គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $SABC$ ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$, $|\overrightarrow{OA}|$ និង $|\overrightarrow{OB}|$ រួចរកប្រភេទនៃត្រីកោណ OAB និងគណនាផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណនេះ

គេមាន $A(1,-2,2)$ និង $B(2,2,1)$ នោះយើងបាន $\overrightarrow{OA}=(1,-2,2)$ និង $\overrightarrow{OB}=(2,2,1)$ ។

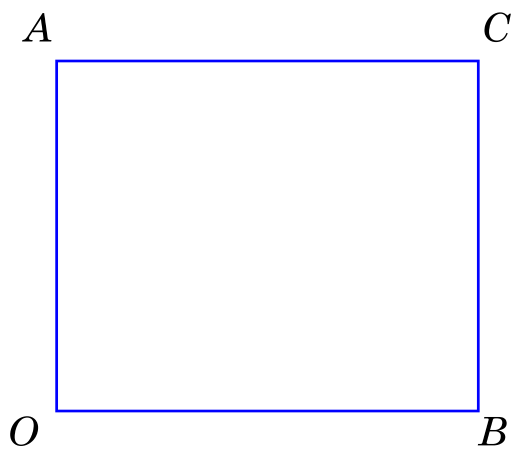
យើងបាន $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=(1)(2)+(-2)(2)+(2)(1)=0$

ហើយ $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{1+4+4}=3$ និង $|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{4+4+1}=3$ ដោយ $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ និង $OA=OB=3$

ដូចនេះ OAB ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល O ។

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណគឺ $S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$ ។

២.រកកូអរដោនេនៃចំណុច C ជាកំពូលនៃការេ $OACB$



តាង $C(x_c,y_c,z_c)$ ជាកំពូលនៃការេ $OACB$ ។ គេមាន $\overrightarrow{AC}=(x_c-1,y_c+2,z_c-2)$ និង

$\overrightarrow{OB}=(2,2,1)$ ដោយ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$ នោះ $\begin{cases} x_c-1=2 \\ y_c+2=2 \\ z_c-2=1 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x_c=3 \\ y_c=0 \\ z_c=3 \end{cases}$ ។ ដូចនេះ $C(3,0,3)$

។

៣.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡា ΔCAB

គេមាន $A(1,-2,2)$, $B(2,2,1)$ និង $C(3,0,3)$

នោះយើងបាន $\overrightarrow{CA}=(-2,-2,-1)$, $\overrightarrow{CB}=(-1,2,-2)$

ដូចនេះ $\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=6\vec{i}-3\vec{j}-6\vec{k}$ ។

ផ្ទៃក្រឡានៃ ΔCAB គឺ $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}|=\frac{1}{2}\sqrt{36+9+36}=\frac{9}{2}$ ។

ដូចនេះ $S_{CAB}=\frac{9}{2}$ ឯកតាផ្ទៃ។

៤.សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (AB)

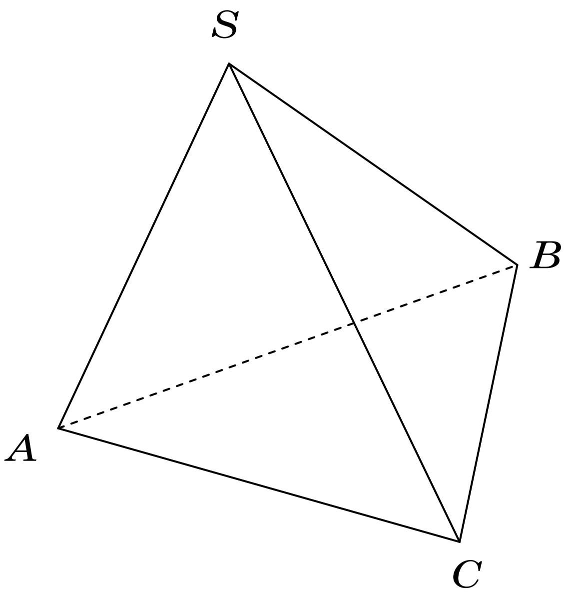
វ៉ិចទ័រនរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) គឺ $\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}=6\vec{i}-3\vec{j}-6\vec{k}$

តាមរូបមន្ត $(ABC): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

គេបាន $6(x-1)-3(y+2)-6(z-2)=0$

ដូចនេះ $(ABC):\ 2x-y-2z=0$ ។

៥.គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $SABC$ ៖



តាមរូបមន្ត $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}\right).\overrightarrow{CS}\right|$ ដោយ $\begin{cases}\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}=(6,-3,-6)\\ \overrightarrow{CS}=(-4,5,-2)\end{cases}$

យើងបាន $V=\frac{1}{6}\left|-24-15+12\right|=\frac{9}{2}$ ។

ដូចនេះ $V=\frac{9}{2}$ ឯកតាមាឌ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៤០

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$គេមានចំណុច $A(1,1,-1), B(4,-1,-3), C(-2,5,2)$ និង $D(3,2,7)$ ។

១.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$រួចទាញថាបីចំណុច$A,B,C$មិនរត់ត្រង់គ្នា។

២.គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណABC ។

៣.សរសេរសមីការប្លង់(ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L)គូសចេញពីD ហើយកែងនិងប្លង់(ABC)។

៤.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចHជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់(L)និងប្លង់(ABC)។

៥.កំណត់មាឌតេត្រាអ៊ែត$ABCD$រួចទាញរកចម្ងាយពីចំណុចDទៅប្លង់(ABC)។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$រួចទាញថាបីចំណុច$A,B,C$មិនរត់ត្រង់គ្នា

យើងមាន $A(1,1,-1), B(4,-1,-3), C(-2,5,2)$ និង $D(3,2,7)$

យើងបាន $\overrightarrow{AB}=(3,-2,-2)$ និង $\overrightarrow{AC}=(-3,4,3)$

នោះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & -2\\ -3 & 4 & 3\end{vmatrix}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ ។

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}\neq\vec{O}$ នោះ$\overrightarrow{AB}$ និង$\overrightarrow{AC}$ ជាវ៉ិចទ័រមិនកូលីនេអ៊ែគ្នា។ ដូចនេះបីចំណុចA,B,Cមិនរត់ត្រង់គ្នា ។

២.គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ៖

តាមរូបមន្តផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC គឺ $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ នោះ $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{4+9+36}=7$ ។

ដូចនេះ $S=\frac{7}{2}=3.5$ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា)។

៣.សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L)៖

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) គឺ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ ។

តាមរូបមន្ត $(ABC):a(x-x_a)+b(y-y_a)+c(z-z_a)=0$ ដោយ $A(1,1,-1)$

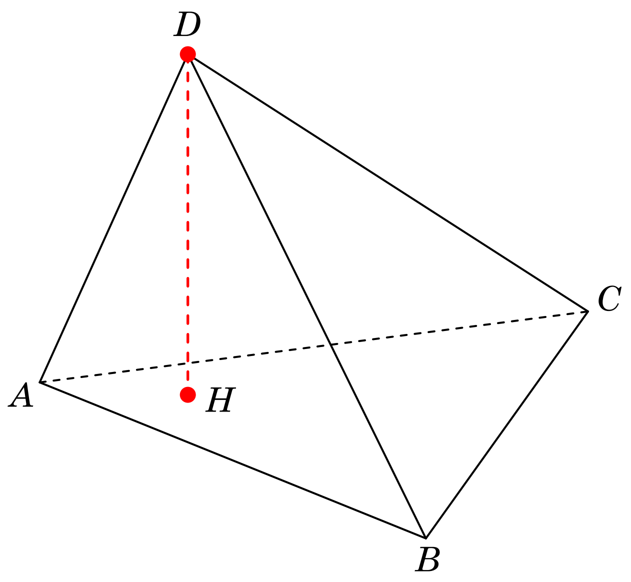
គេបាន $2(x-1)-3(y-1)+6(z+1)=0$

ដូចនេះ $(ABC):\ 2x-3y+6z+7=0$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $(L)\perp(ABC)$ នោះ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(2,-3,6)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (L) កាត់តាម $D(3,2,7)$ ហើយកែងនិងប្លង់ (ABC) ។

ដូចនេះសមីការបន្ទាត់ $(L):\begin{cases}x=3+2t\\y=2-3t\\z=7+6t\end{cases}$ ដែល $t\in\mathbb{R}$ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ។

៤.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (ABC)



គេមាន $(L):\begin{cases} x=3+2t \\ y=2-3t \\ z=7+6t \end{cases}$ និង $(ABC):2x-3y+6z+7=0$

យកសមីការ (L) ជំនួសក្នុង (ABC) គេបាន៖

$2(3+2t)-3(2-3t)+6(7+6t)+7=0$ សមមូល $t=-1$ ។

យក $t=-1$ ជំនួសក្នុងសមីការ (L) គេបាន $H(1,5,1)$ ។

៨.កំណត់មាឌតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ រួចទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC)៖

តាមរូបមន្ត $V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\right|$ ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(2,-3,6)$

និង $\overrightarrow{AD}=(2,1,8)$ នោះ $V=\frac{1}{6}\left|(2)(2)+(-3)(1)+(6)(8)\right|=\frac{49}{6}$ ។

ដូចនេះ $V=\frac{49}{6}$ (ឯកតាមាឌ)។

ម្យ៉ាងទៀត $V=\frac{1}{3}S\times d(D,(ABC))$ នោះ $d\left(D,(ABC)\right)=\frac{3V}{S}=\frac{3\times\frac{49}{6}}{\frac{7}{2}}=7$ ។

ដូចនេះ $d\left(D,(ABC)\right)=7$ (ឯកតាមាឌ)។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៤១

ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

គេឲ្យប្លង់ $(P): x+2y-2z+1=0$ និងចំណុច $A(2,4,1)$ និង $B(-2,8,3)$ ។

(Q) ជាប្លង់កាត់តាមពីរចំណុច A និង B ហើយកែងនិងប្លង់ (P) ។

(L) ជាបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងប្លង់ (Q) ។

១.ចូររកសមីការប្លង់ (Q) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ។

២. H ជាជើងនៃចំណោលកែងចំណុច A លើបន្ទាត់ (L) ហើយ A' ជាចំណុច

ឆ្លុះគ្នានៃ A ធៀបនិងបន្ទាត់ (L) ។គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និង A' ។

៣.រកកូអរដោនេនៃចំណុច M ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ (L) ដោយដឹងថា $AM+BM$

មានតម្លៃអប្បបរមា ។

ដំណោះស្រាយ

១.រកសមីការប្លង់ (Q) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L)

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់របស់ប្លង់ $(P): x+2y-2z+1=0$ គឺ $\vec{n}_P=(1,2,-2)$

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់របស់ប្លង់ (Q) កាត់តាមពីរចំណុច A និង B ហើយកែងនិងប្លង់ (P) គឺ

$\vec{n}_Q=\vec{n}_P\times\overrightarrow{AB}$

ដោយ $A(2,4,1)$ និង $B(-2,8,3)$ នោះ $\overrightarrow{AB}=(-4,4,2)$ ។

គេបាន $\vec{n}_Q=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -2\\ -4 & 4 & 2\end{vmatrix}=12\vec{i}+6\vec{j}+12\vec{k}$

សមីការប្លង់ (Q) អាចសរសេរ $12(x-2)+6(y-4)+12(z-1)=0$ ឬ

$2x+y+2z-10=0$

ដូចនេះ $(Q): 2x+y+2z-10=0$ ។

ម្យ៉ាងទៀតសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ជាប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) និងប្លង់ (Q) គឺជាសំណុំចម្លើយនៃប្រព័ន្ធ

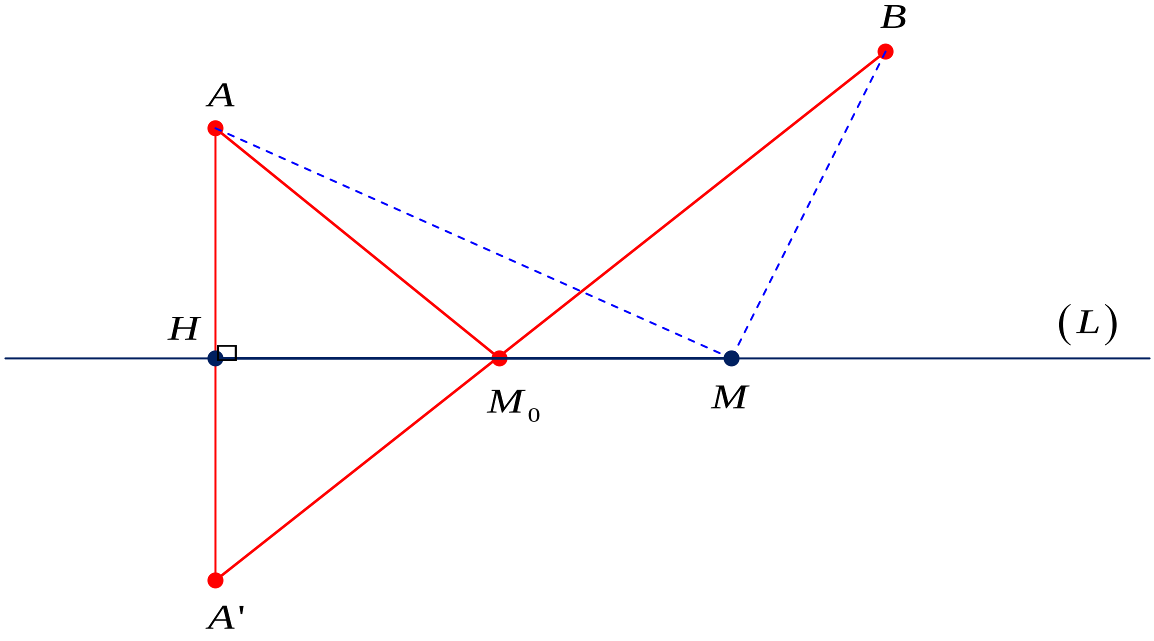
$\begin{cases} x+2y-2z+1=0 \\ 2x+y+2z-10=0 \end{cases}$ យក $x=t\in\mathbb{R}$ គេបាន $\begin{cases} t+2y-2z+1=0 & (1) \\ 2t+y+2z-10=0 & (2) \end{cases}$

បូកសមីការពីរនេះគេបាន $3t+3y-9=0$ នោះ $y=3-t$ យកជួសក្នុង (2) គេបាន

$2t+3-t+2z-10=0$ គេទាញ $z=\frac{7}{2}-\frac{t}{2}$ ។

ដូចនេះ $(L): \begin{cases} x=t \\ y=3-t \\ z=\frac{7}{2}-\frac{t}{2} \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

២.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និង A'



តាង $H(x_H, y_H, z_H)$ ជាចំណុចត្រូវរក។ដោយ $H \in (L)$ នោះកូអរដោនេនៃ H ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការនៃបន្ទាត់ (L) គឺ

$$\begin{cases} x_H = t \\ y_H = 3 - t \quad (1) \\ z_H = \dfrac{7}{2} - \dfrac{t}{2} \end{cases}$$

គេមាន $\overrightarrow{AH} = \left(t-2, -t-1, \dfrac{5}{2} - \dfrac{t}{2}\right)$ ហើយវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃ (L) គឺ

$\vec{u}_L = \left(1, -1, -\dfrac{1}{2}\right)$

ដោយ $\overrightarrow{AH} \perp (L)$ និង $\vec{u}_L // (L)$ នោះ $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}_L \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u}_L = 0$

គេបាន $(1)(t-2) + (-1)(-t-1) + \left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{5}{2} - \dfrac{t}{2}\right) = 0$

$$t - 2 + t + 1 - \frac{5}{4} + \frac{t}{4} = 0$$

$$-\frac{9}{4} + \frac{9t}{4} = 0$$

គេទាញបាន $t = 1$ យកជួសក្នុង (1) នោះ $H(1,2,3)$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ A' ជាចំណុចឆ្លុះគ្នានៃ A ធៀបនិងបន្ទាត់ (L) នោះ H ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AA']$៖

គេបាន $\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = 2 - 2 = 0 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = 4 - 4 = 0 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = 6 - 1 = 5 \end{cases}$

ដូចនេះ $H(1,2,3)$ និង $A'(0,0,5)$ ។

៣.រកកូអរដោនេចំណុច M នៅលើ (L) ដោយដឹងថា $AM+BM$ មានតម្លៃអប្បបរមា ៖

តាង M_0 ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (BA') និងបន្ទាត់ (L) ។

ចំពោះគ្រប់ចំណុច $M\in(L)$ គេមាន $AM+BM\geq AM_0+BM_0=BM_0+M_0A'$

ដូចនេះដើម្បីឲ្យ $AM+BM$

មានតម្លៃអប្បបរមាលុះត្រាតែចំណុច M ត្រួតស៊ីគ្នាជាមួយនឹងចំណុច M_0 គឺ $M\equiv M_0$ ។

សមីការបន្ទាត់ $(BA'):\dfrac{x-x_{A'}}{x_{A'}-x_B}=\dfrac{y-y_{A'}}{y_{A'}-y_B}=\dfrac{z-z_{A'}}{z_{A'}-z_B}$

ដោយ $A'(0,0,5)$ និង $B(-2,8,3)$

នោះ $(BA'):\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{8}=\dfrac{z-5}{-2}$ ឬ នោះ $(BA'):\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-5}{-1}$

តាង $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-5}{-1}=u$ នោះ $(BA'):\begin{cases}x=-u\\y=4u\\z=-u+5\quad,u\in\mathbb{R}\end{cases}$

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) គឺ $(L):\begin{cases}x=t\\y=3-t\\z=\dfrac{7}{2}-\dfrac{t}{2}\quad,t\in\mathbb{R}\end{cases}$

ផ្ទឹមសមីការ (BA') និង (L) គេបាន $\begin{cases}-u=t\\4u=3-t\\-u+5=\dfrac{7}{2}-\dfrac{t}{2}\end{cases}$ សមមូល $\begin{cases}-u-t=0\\4u+t=3\\-2u+t=-3\end{cases}$

នោះ $u=1,t=-1$ ។យក $u=1$ ជួសក្នុងសមីការ (BA') គេបានចំណុចប្រសព្វ

រវាង $(BA')\&(L)$ គឺ $M_0(-1,4,4)$ ។

ដូចនេះ $AM+BM$ មានតម្លៃអប្បបរមាលុះត្រាតែ $M\equiv M_0(-1,4,4)$ ។

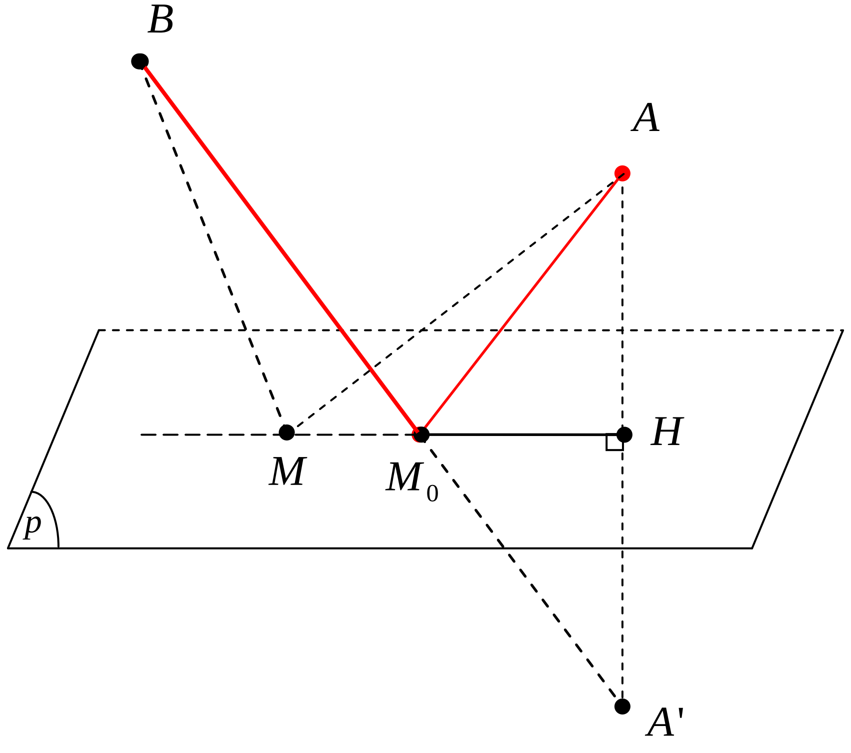
លំហាត់ទី៤២

គេឲ្យប្លង់ $(p): x+2y-2z+1=0$ និងចំណុចពីរ $A(2,4,1)$ និង $B(6,0,-1)$
ចូររកកូអរដោនេនៃចំណុច M ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់ (p) ដោយដឹងថា $MA+MB$
មានតម្លៃអប្បរមា ។

ដំណោះស្រាយ

រកកូអរដោនេនៃចំណុច M

តាង (L) ជាបន្ទាត់កាត់តាម A ហើយកែងនិងប្លង់ (p) ត្រង់ (H) នោះវ៉ិចទ័រនរម៉ាល់
$\vec{n}=(1,2,-2)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់។



សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់អាចសរសេរ $(L):\begin{cases} x=2+t \\ y=4+2t \\ z=1-2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

យកសមីការ(L)ជួសក្នុង(p)គេបាន៖

$$(2+t)+2(4+2t)-2(1-2t)+1=0$$
$$2+t+8+4t-2+4t+1=0$$
$$9t+9=0$$
$$t=-1$$

យក$t=-1$ជួសក្នុង(L)គេបាន $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$ នោះ $H(1,2,3)$ ។

យក A'ជាចំណុចឆ្លុះគ្នានៃ Aធៀបនិងប្លង់(p)នោះH ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AA']$ ។ គេបាន $\begin{cases} x_{A'}=2x_H-x_A=2-2=0 \\ y_{A'}=2y_H-y_A=4-4=0 \\ z_{A'}=2z_H-z_A=6-1=5 \end{cases}$ នោះ $A'(0,0,5)$ ។

យក M_0 ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់(BA')និងប្លង់(p) ។

ចំពោះគ្រប់ចំណុច$M\in(p)$ គេមាន ៖

$$AM+BM\geq AM_0+BM_0=BM_0+M_0A'$$

ដូចនេះដើម្បីឲ្យ $AM+BM$ មានតម្លៃអប្បបរមាលុះត្រាតែ $M\equiv M_0$ ។

កូអរដោនេនៃចំណុច M_0 ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់(BA')និងប្លង់(p) ។

បន្ទាត់(BA')មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{BA'}=(-6,0,6)$នោះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ

របស់វាអាចសរសេរ(BA'): $\begin{cases} x=6-6t \\ y=0 \\ z=-1+6t \ , t\in\mathbb{R} \end{cases}$

យកសមីការ(BA')ជួសក្នុង(p)គេបាន $6-6t+0+2-12t+1=0$

នោះ $t=\frac{1}{2}$ ជួសក្នុង(BA')គេបាន$M_0(3,0,2)$ ។

ដូចនេះ $M\equiv M_0(3,0,2)$ ។

លំហាត់ទី៤៣

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច $A(2,4,-5),B(6,-4,3),C(-1,1,7)$ និង $D(-4,7,1)$ ។

១.គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ និង $\overrightarrow{AD}$ រួចគណនារង្វាស់នៃជ្រុងនៃចតុកោណ $ABCD$ ។

២.ចូរបង្ហាញថា $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃចតុកោណ $ABCD$ និងគណនាផ្ទៃក្រឡារបស់វា។

៣.តាង E ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (AD) និង (BC) ។ គណនា EC និង ED ។

៤.គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC និង ACD ។

៥.រកសមីការនៃប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AD) និង (BC) ។

ដំណោះស្រាយ

១.គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ និង $\overrightarrow{AD}$ រួចគណនារង្វាស់នៃជ្រុងនៃចតុកោណ $ABCD$ ៖

គេមាន $A(2,4,-5),B(6,-4,3),C(-1,1,7)$ និង $D(-4,7,1)$

យើងបាន $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(6,-4,3)-(2,4,-5)=(4,-8,8)$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(-1,1,7)-(6,-4,3)=(-7,5,4)$$
$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=(-4,7,1)-(-1,1,7)=(-3,6,-6)$$
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=(-4,7,1)-(2,4,-5)=(-6,3,6)$$

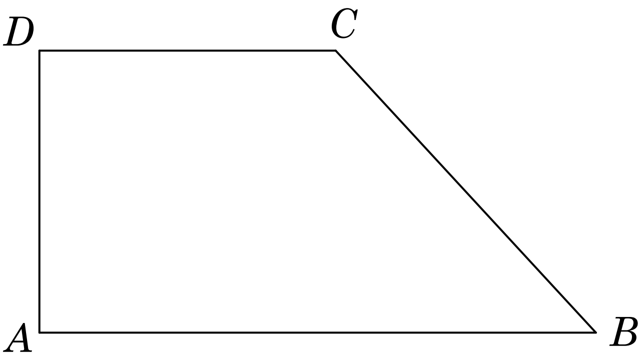
ហើយ $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{16+64+64}=\sqrt{144}=12$

$$BC=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{49+25+16}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$$
$$CD=|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{9+36+36}=\sqrt{81}=9$$
$$AD=|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{36+9+36}=\sqrt{81}=9$$

ដូចនេះ $AB=12$, $BC=3\sqrt{10}$, $CD=9$, $AD=9$ (ឯកតាប្រវែង) ។

២.បង្ហាញថា $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃចតុកោណ

$ABCD$ និងគណនាផ្ទៃក្រឡារបស់វា៖



យើងមាន $\overrightarrow{AB}=(4,-8,8)$ និង $\overrightarrow{AD}=(-6,3,6)$

យើងបាន $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=(4)(-6)+(-8)(3)+(8)(6)=-24-24+48=0$

សមមូល $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ ពិត។

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{AB}=(4,-8,8)$ និង $\overrightarrow{CD}=(-3,6,-6)$

ដោយ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{4}{-3}=\frac{-8}{6}=\frac{8}{-6}$ នោះ $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$ ពិត។

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$ ។ ចតុកោណ $ABCD$ មាន $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$ ជាចតុកោណព្នាយកែង។

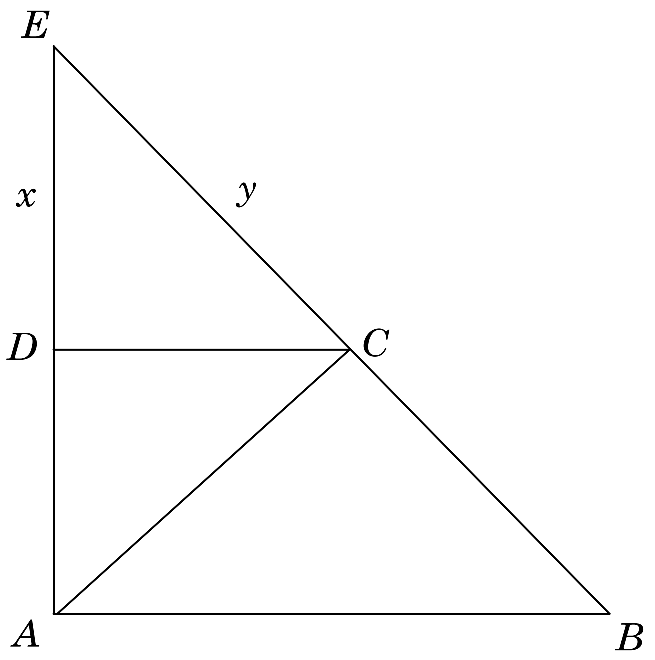
ផ្ទៃក្រឡារបស់ចតុកោណព្នាយនេះគឺ ៖

$$S=\frac{(AB+CD)\times AD}{2}=\frac{(12+9)(9)}{2}=94.5$$ ឯកតាផ្ទៃក្រលា។

៣.គណនា EC និង ED ៖

យើងតាង $ED=x$ និង $EC=y$ ។ ត្រីកោណកែង ABE និង DCE

មានមុំ E រួមនោះវាជាត្រីកោណកែងដូចគ្នា។



យើងបានផលធៀបដំណូច $\frac{ED}{EA}=\frac{EC}{EB}=\frac{DC}{AB}$

សមមូល $\frac{x}{x+9}=\frac{y}{y+3\sqrt{10}}=\frac{9}{12}$ នាំឲ្យគេទាញ $x=27$, $y=9\sqrt{10}$ ។

ដូចនេះ $ED=27$, $EC=9\sqrt{10}$ ។

៨.គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC និង ACD ៖

យើងមាន $\overrightarrow{AB}=(4,-8,8)$ និង $\overrightarrow{AC}=(-3,-3,12)$

យើងបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -8 & 8\\ -3 & -3 & 12\end{vmatrix}=-72\vec{i}-72\vec{j}-36\vec{k}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-72,-72,-36)$ ។

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC គឺ $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{72^2+72^2+36^2}=54$ ។

ហើយ $S_{ACD}=S_{ABCD}-S_{ABC}=94.5-54=40.5$ ។

ដូចនេះ $S_{ABC}=54$, $S_{ACD}=40.5$ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា)។

៥.សរសេរសមីការនៃប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AD) និង (BC) ៖

វិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) គឺ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-72,-72,-36)$ ។

សមីការប្លង់នេះអាចសរសេរតាមរូបមន្ត៖

$(ABC):a(x-x_a)+b(y-y_a)+c(z-z_a)=0$ ដែល $A(2,4,-5)$

$(ABC):-72(x-2)-72(y-4)-36(z+5)=0$

$(ABC):2x-4+2y-8+z+5=0$

$(ABC):2x+2y+z-7=0$

ហើយបន្ទាត់ (AD) និង (BC) មានវិចទ័រប្រាប់ទិសរៀងគ្នា $\overrightarrow{AD}=(-6,3,6)$

និង $\overrightarrow{BC}=(-7,5,4)$ នោះសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ពីរនេះអាចសរសេរ៖

$(AB):\begin{cases}x=2-6t\\ y=4+3t\\ z=-5+6t\quad,t\in\mathbb{R}\end{cases}$ និង $(BC):\begin{cases}x=6-7t'\\ y=-4+5t'\\ z=3+4t'\ ,t'\in\mathbb{R}\end{cases}$

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៤៤

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបន្ទាត់និងស្វ៊ែមានសមីការ

$(L):\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-3}{2}$ និង $(S):\ (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$

ចូរបង្ហាញថាបន្ទាត់(L)ប៉ះនឹងស្វ៊ែ(S)ត្រង់ចំណុច A មួយរួចគណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ A ខាងលើ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាបន្ទាត់(L) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ

បន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំនុច $M_0(1\,;4\,;3)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស

$\vec{u}(-2;3\,;2\,)$ ។

ស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $I(1\,;-1\,;2\,)$ និងកាំ $R=3$ ។

ចម្ងាយពីចំនុច I ទៅបន្ទាត់ (L) គឺ $d(I;(L))=\dfrac{|\overrightarrow{AM_0}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}$

ដោយ $\overrightarrow{IM_0}=(0\,;5\,;1\,)$ គេបាន $\overrightarrow{IM_0}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 5 & 1\\ -2 & 3 & 2\end{vmatrix}=7\,\vec{i}-2\,\vec{j}+10\,\vec{k}$

គេទាញ $d(I;(L))=\dfrac{\sqrt{7^2+(-2)^2+10^2}}{\sqrt{(-2)^2+3^2+2^2}}=\sqrt{\dfrac{153}{17}}=3$

ដោយ $d(I;(L))=R=3$ ។

ដូចនេះបន្ទាត់(L) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ (S)ត្រង់ចំនុច A មួយ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះ A ខាងលើ

តាង $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-3}{2}=t \Rightarrow \begin{cases} x=-2t+1 \\ y=3t+4 \\ z=2t+3 \end{cases} \quad (1)$

យកសមីការ(1)ជំនួសក្នុងសមីការស្វ៊ែ (S)គេបាន

$(-2t)^2+(3t+5)^2+(2t+1)^2=9$

$4t^2+9t^2+30t+25+4t^2+4t+1-9=0$

$17t^2+34t+17=0$

$17(t+1)^2=0 \Rightarrow t=-1$

យក $t=-1$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $A(3\,;1\,;1\,)$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៤៥

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ1 ។លំហមានទិសដៅតាមតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ គេតាង I,J,K ជាបីចំណុចផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$,$\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$ ។

១.កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច I,J,K ។

២.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{KJ}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ IJK ។

៣.គណនាផលគុណវិចទ័រ $\overrightarrow{KI}\times\overrightarrow{KJ}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IJK ។

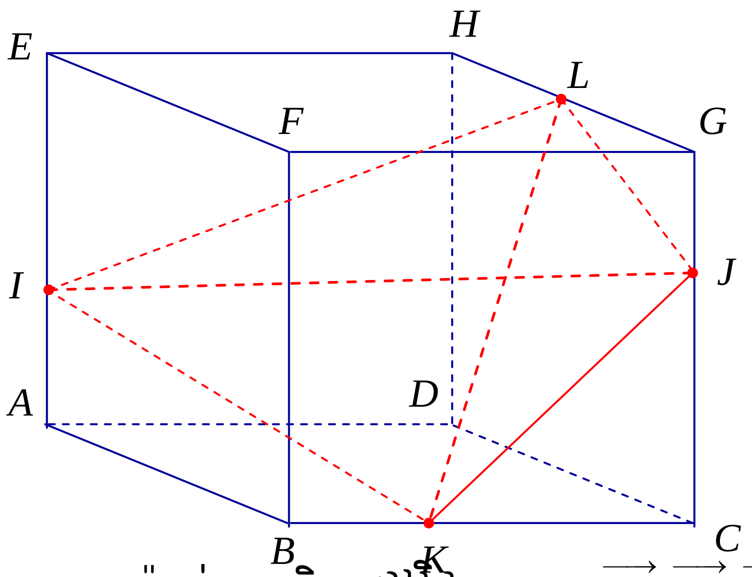
៤.L ជាចំណុចមួយនៃ$[GH]$ដែលផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{LI}.\overrightarrow{LJ}$ អប្បបរមា។

ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច L ។

៥.ចូរស្រាយថាបួនចំណុច I,J,K,L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

ដំណោះស្រាយ

១.កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច I,J,K



ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$យើងបាន៖

$A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $F(1,0,1), G(1,1,1)$ និង $H(0,1,1)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$

នោះយើងបាន $I(0,0,\frac{1}{3})$, $J(1,1,\frac{2}{3})$ និង $K(1,\frac{1}{3},0)$ ។

២.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{KJ}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ IJK

យើងមាន $\overrightarrow{KI}=(-1,-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $\overrightarrow{KJ}=(0,\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

នោះយើងបាន $\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{KJ}=(-1)(0)+(-\frac{1}{3})(\frac{2}{3})+(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})=0-\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=0$

ដូចនេះ $\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{KJ}=0$ ។ ម្យ៉ាងទៀតដោយ $\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{KJ}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{KI}\perp\overrightarrow{KJ}$

នោះត្រីកោណ IJK ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល K ។

៣.គណនាផលគុណវិចទ័រ $\overrightarrow{KI}\times\overrightarrow{KJ}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IJK

យើងមាន $\overrightarrow{KI}=(-1,-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $\overrightarrow{KJ}=(0,\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

យើងបាន $\overrightarrow{KI}\times\overrightarrow{KJ}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AD} & \overrightarrow{AE}\\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{vmatrix}=(-\frac{2}{9}-\frac{2}{9})\overrightarrow{AB}-(-\frac{2}{3}-0)\overrightarrow{AD}+(-\frac{2}{3}-0)\overrightarrow{AE}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{KI}\times\overrightarrow{KJ}=-\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ ។

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IJK ឲ្យតាមរូបមន្ត ៖

$$S_{IJK}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{KI}\times\overrightarrow{KJ}|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{16}{81}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{22}}{9}$$ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា)។

៤.កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច L

ដោយ L ជាចំណុចមួយនៃ $[GH]$ នោះគេបាន $L(x_0,1,1)$ ដែល $0<x_0<1$ ។

យើងមាន $\overrightarrow{LI}=(-x_0,-1,-\frac{2}{3})$, $\overrightarrow{LJ}=(1-x_0,0,-\frac{1}{3})$

យើងបាន $\overrightarrow{LI}.\overrightarrow{LJ}=-x_0(1-x_0)+(-1)(0)+(-\frac{2}{3})(-\frac{1}{3})$

$$=-x_0+x_0^2+0+\frac{2}{9}=(x_0-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{36}$$

ដើម្បីឲ្យផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{LI}.\overrightarrow{LJ}=\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{36}$

អប្បបរមាលុះត្រាតែ $\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2}$ ។

ចំពោះ $x_0=\frac{1}{2}$ នោះ $L(\frac{1}{2},1,1)$ ។

ង.ស្រាយថាបួនចំណុច I,J,K,L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ

យើងមាន $\overrightarrow{KI}\times\overrightarrow{KJ}=(-\frac{4}{9},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$ និង $\overrightarrow{KL}=(-\frac{1}{2},\frac{2}{3},1)$

យើងបាន $(\overrightarrow{KI}\times\overrightarrow{KJ}).\overrightarrow{KL}=(-\frac{4}{9})(-\frac{1}{2})+(\frac{2}{3})(\frac{2}{3})+(-\frac{2}{3})(1)$

$$=\frac{2}{9}+\frac{4}{9}-\frac{2}{3}=\frac{2+4-6}{9}=0$$

ដោយ $(\overrightarrow{KI}\times\overrightarrow{KJ}).\overrightarrow{KL}=0$ នោះបួនចំណុច I,J,K,L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៤៦

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ$1cm$ ។ K,L និង M ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃ $[EF],[CD]$និង$[DH]$។

១)គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{ML}$ រួចទាញរកឈ្មោះនៃ ΔKLM

២) P ជាចំណុចមួយនៃ $[EH]$ ហើយគេតាង $\angle KPL=\varphi$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ទីតាំងនៃ P ប្រែប្រួលក្នុង$[EH]$គេមាន $\varphi\le\frac{\pi}{2}$ ។

តើពេលណាទើបគេបាន $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ។

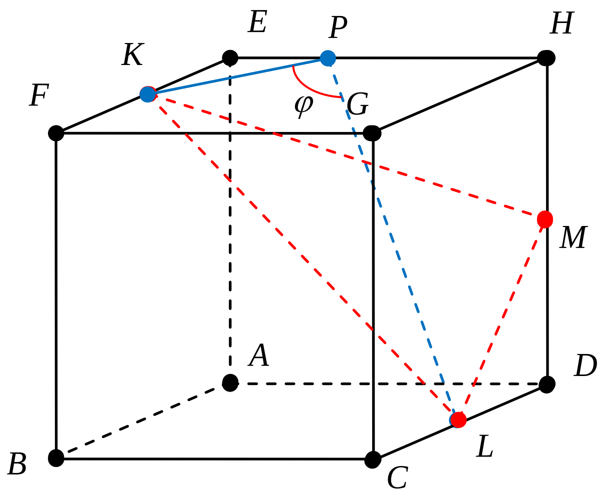
ដំណោះស្រាយ

១)គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{ML}$ រួចទាញរកឈ្មោះនៃ ΔKLM ៖

ជ្រើសរើសតម្រុយ $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ ។

យើងមាន $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$

$E(0,0,1), F(1,0,1), G(1,1,1,), H(0,1,1)$ ។



ដោយ K,L និង M ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃ$[EF],[CD]$និង$[DH]$

នោះគេបាន $K(\frac{1}{2},0,1), L(\frac{1}{2},1,0), M(0,1,\frac{1}{2})$ ។

គេមាន $\overrightarrow{MK}=(\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{ML}=(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2})$

យើងបាន $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{ML}=\frac{1}{4}+0-\frac{1}{4}=0$ ។ ដោយ $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{ML}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MK}\perp\overrightarrow{ML}$ ។

ដូចនេះ KLM ជាត្រីកោណកែងត្រង់ M ។

២)ស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ទីតាំងនៃ P ប្រែប្រួលក្នុង $[EH]$ គេមាន $\varphi\le\frac{\pi}{2}$

ដោយ P ជាចំណុចមួយនៃ $[EH]$ នោះគេបាន $P(0,t,1)$

ដែល $EP=t$, $0\le t\le 1$ ។គេមាន $\overrightarrow{PK}=(\frac{1}{2},-t,0)$, $\overrightarrow{PL}=(\frac{1}{2},1-t,-1)$

គេបាន $\overrightarrow{PK}\cdot\overrightarrow{PL}=(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})-t(1-t)+(0)(-1)=\frac{1}{4}-t+t^2=\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\ge 0$

គ្រប់ $t\in[0,1]$ ។

ដោយ $\overrightarrow{PK}.\overrightarrow{PL}\ge 0$ នោះមុំ $\angle KPL=\varphi$ ជាមុំស្រួច ឬ មុំកែង ។

ដូចនេះ គ្រប់ទីតាំងនៃ P ប្រែប្រួលក្នុង $[EH]$ គេមាន $\varphi\le\frac{\pi}{2}$ ។

តើពេលណាទើបគេបាន $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ៖

ដោយ $\overrightarrow{PK}\cdot\overrightarrow{PL}=\left(\frac{1}{2}-t\right)^2$

នោះដើម្បីឲ្យ $\varphi=\frac{\pi}{2}$ លុះត្រាតែ $\overrightarrow{PK}\cdot\overrightarrow{PL}=\left(\frac{1}{2}-t\right)^2=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$

ចំពោះ $t=\frac{1}{2}$ គេបាន $P(0,\frac{1}{2},1)$ នោះ P ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[EH]$ ។

ដូចនេះដើម្បីឲ្យ $\varphi=\frac{\pi}{2}$ លុះត្រាតែ P ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[EH]$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៤៧

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ1 ។លំហមានទិសដៅតាមតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ យក I,J,K និង L ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នា នៃ $[EF]$, $[BC]$,$[DH]$ និង$[BF]$ ។

១.ចូរស្រាយបំភ្លឺថា IJK ជាត្រីកោណសមង្ស័។

២.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{IJ}\times\overrightarrow{IK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔIJK ។

៣.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់(IJ)និង(KL)អរតូកូណាល់គ្នា។

៤.គណនារង្វាស់មុំ $\angle ILJ$ ។

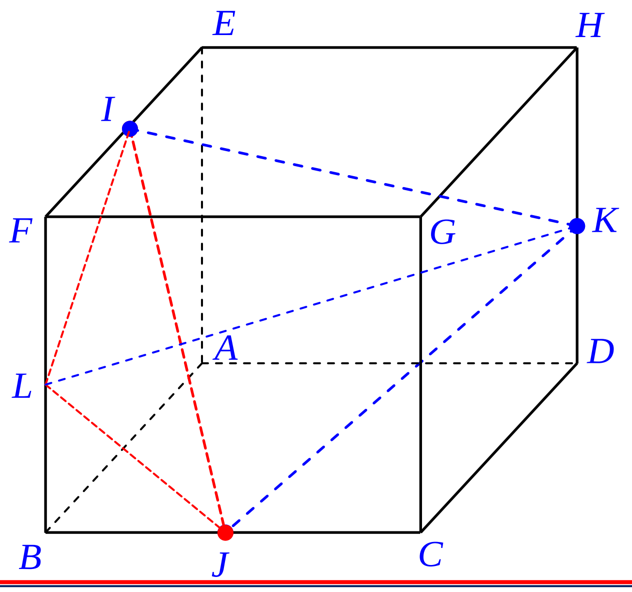
៥.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{IL}.\overrightarrow{IK}$ និង $\overrightarrow{JL}.\overrightarrow{JK}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ILK និងត្រីកោណ JLK ។

៦.គណនា$(\overrightarrow{IJ}\times\overrightarrow{IK}).\overrightarrow{IL}$ រួចទាញថាចំណុច I,J,K,L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

ដំណោះស្រាយ

១.ស្រាយបំភ្លឺថា IJK ជាត្រីកោណសមង្ស័

ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$។



ដោយ I,J,K និង L ជាចំណុចកណ្តាលនៃទ្រនុង $[EF],[BC],[DH]$

និង $[BF]$ នោះយើងបាន $I\left(\frac{1}{2},0,1\right),J\left(1,\frac{1}{2},0\right),K\left(0,1,\frac{1}{2}\right),L\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$

យើងមាន $\overrightarrow{IJ}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)$, $\overrightarrow{IK}=\left(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right)$ និង $\overrightarrow{JK}=\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

យើងបាន $|\overrightarrow{IJ}|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $|\overrightarrow{IK}|=\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

និង $|\overrightarrow{JK}|=\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ នោះ $|\overrightarrow{IJ}|=|\overrightarrow{IK}|=|\overrightarrow{JK}|=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ។

ដូចនេះ IJK ជាត្រីកោណសមង្ស័។

២.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{IJ}\times\overrightarrow{IK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔIJK

យើងមាន $A(0,0,0)$, $G(1,1,1)$ នោះ $\overrightarrow{AG}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ (1) ។

$$\overrightarrow{IJ}\times\overrightarrow{IK}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1\\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{3}{4}\vec{i}+\frac{3}{4}\vec{j}+\frac{3}{4}\vec{k}=\frac{3}{4}\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)\ (2)$$

តាម $(1)\&(2)$ យើងបាន $\overrightarrow{IJ}\times\overrightarrow{IK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$ ពិត។

តាមរូបមន្តផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម ៖

$$S_{IJK}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{IJ}\times\overrightarrow{IK}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{9}{16}+\frac{9}{16}}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$ (ឯកតាផ្ទៃ)។

៣.ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ (IJ) និង (KL) អរត្តូកូណាល់គ្នា

យើងមាន $\overrightarrow{IJ}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)$ និង $\overrightarrow{KL}=(1,-1,0)$នោះយើងបាន

$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0=0\Leftrightarrow\overrightarrow{IJ}\perp\overrightarrow{KL}$ ។

ដូចនេះបន្ទាត់(IJ)និង(KL)អរតូកូណាល់គ្នា។

៤.គណនារង្វាស់មុំ $\angle ILJ$

យើងមាន $\overrightarrow{LI}=\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ និង $\overrightarrow{LJ}=\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

នោះ $\overrightarrow{LI}.\overrightarrow{LJ}=0+0-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$

និង $|\overrightarrow{LI}|=\sqrt{\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $|\overrightarrow{LJ}|=\sqrt{0+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

យើងបាន $\cos\angle ILJ=\dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{1}{2}$ នោះ $\angle ILJ=120^o$ ។

៥.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{IL}.\overrightarrow{IK}$ និង $\overrightarrow{JL}.\overrightarrow{JK}$

យើងមាន $\overrightarrow{IL}=\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right),\overrightarrow{IK}=\left(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right)$

នោះយើងបាន $\overrightarrow{IL}.\overrightarrow{IK}=-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}=0$ ។

ហើយ $\overrightarrow{JL}=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{JK}=\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

នោះយើងបាន $\overrightarrow{JL}.\overrightarrow{JK}=0-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0$ ។

ដូចនេះ $\overrightarrow{IL}.\overrightarrow{IK}=0$ និង $\overrightarrow{JL}.\overrightarrow{JK}=0$។

ទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ILK និងត្រីកោណ JLK

ដោយ $\overrightarrow{IL}.\overrightarrow{IK}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{IL}\perp\overrightarrow{IK}$ និង $\overrightarrow{JL}.\overrightarrow{JK}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{JL}\perp\overrightarrow{JK}$ ។

ដូចនេះត្រីកោណ ILK និង JLK ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល I & J រៀងគ្នា។

៦.គណនា $(\overrightarrow{IJ}\times\overrightarrow{IK}).\overrightarrow{IL}$

យើងមាន $\overrightarrow{IJ}\times\overrightarrow{IK}=\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$, $\overrightarrow{IL}=\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$ នោះយើងបាន

$(\overrightarrow{IJ}\times\overrightarrow{IK}).\overrightarrow{IL}=\frac{3}{8}+0-\frac{3}{8}=0$ ។

ទាញថាបួនចំណុច I,J,K,L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ៖

យើងមាន $(\overrightarrow{IJ}\times\overrightarrow{IK}).\overrightarrow{IL}=0$ នោះ $(\overrightarrow{IJ}\times\overrightarrow{IK})\perp\overrightarrow{IL}$

ដោយ $\overrightarrow{IJ}\times\overrightarrow{IK}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (IJK) នោះគេទាញ $L\in(IJK)$ ។

ដូចនេះបួនចំណុច I,J,K,L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់ទី៤៨

គូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ1 ។លំហមានទិសដៅតាមតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ គេតាង I,J,K ជាបីចំណុចផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$,$\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$ ។

១.កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច I,J,K ។

២.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{KJ}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ IJK

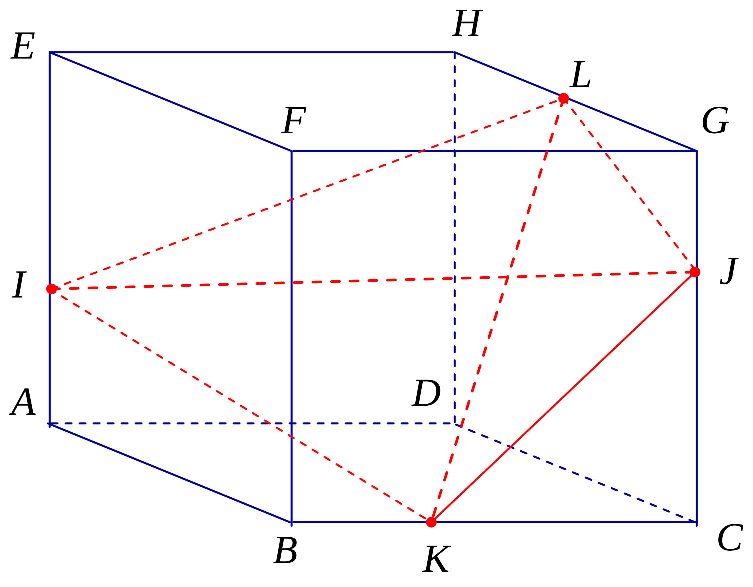
៣.គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{KI}\times\overrightarrow{KJ}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IJK

៤.L ជាចំណុចមួយនៃ$[GH]$ដែលផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{LI}.\overrightarrow{LJ}$ អប្បបរមា។
 ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច L ។

៥.ចូរស្រាយថាបួនចំណុច I,J,K,L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

ដំណោះស្រាយ

១.កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច I,J,K



ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ យើងបាន៖
$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$ និង
$H(0,1,1)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ និង $\overrightarrow{CJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$ នោះយើងបាន ៖
$I(0,0,\frac{1}{3})$, $J(1,1,\frac{2}{3})$ និង $K(1,\frac{1}{3},0)$ ។

២.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{KJ}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ IJK

យើងមាន $\overrightarrow{KI}=(-1,-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $\overrightarrow{KJ}=(0,\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

យើងបាន $\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{KJ}=(-1)(0)+(-\frac{1}{3})(\frac{2}{3})+(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})=0-\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=0$

ដូចនេះ $\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{KJ}=0$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $\overrightarrow{KI}.\overrightarrow{KJ}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{KI}\perp\overrightarrow{KJ}$ នោះត្រីកោណ IJK
ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល K ។

៣.គណនាផលគុណវិចទ័រ $\overrightarrow{KI}\times\overrightarrow{KJ}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IJK

យើងមាន $\overrightarrow{KI}=(-1,-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, $\overrightarrow{KJ}=(0,\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

យើងបាន

$$\overrightarrow{KI}\times\overrightarrow{KJ}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AD} & \overrightarrow{AE}\\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{vmatrix}=(-\frac{2}{9}-\frac{2}{9})\overrightarrow{AB}-(-\frac{2}{3}-0)\overrightarrow{AD}+(-\frac{2}{3}-0)\overrightarrow{AE}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{KI}\times\overrightarrow{KJ}=-\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ ។

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ IJK ឲ្យតាមរូបមន្ត ៖

$$S_{IJK}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{KI}\times\overrightarrow{KJ}|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{16}{81}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{22}}{9}$$ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា)។

៤.កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច L

ដោយ L ជាចំណុចមួយនៃ $[GH]$ នោះគេបាន $L(x_0,1,1)$ ដែល $0<x_0<1$ ។

យើងមាន $\overrightarrow{LI}=(-x_0,-1,-\frac{2}{3})$, $\overrightarrow{LJ}=(1-x_0,0,-\frac{1}{3})$

យើងបាន $\overrightarrow{LI}.\overrightarrow{LJ}=-x_0(1-x_0)+(-1)(0)+(-\frac{2}{3})(-\frac{1}{3})$

$$=-x_0+x_0^{\ 2}+0+\frac{2}{9}=(x_0-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{36}$$

ដើម្បីឲ្យផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{LI}.\overrightarrow{LJ}=\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{36}$ អប្បបរមាលុះត្រាតែ

$\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2}$ ។

ចំពោះ $x_0=\frac{1}{2}$ នោះ $L(\frac{1}{2},1,1)$ ។

៥.ស្រាយថាបួនចំណុច I,J,K,L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ

យើងមាន $\overrightarrow{KI}\times\overrightarrow{KJ}=(-\frac{4}{9},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$ និង $\overrightarrow{KL}=(-\frac{1}{2},\frac{2}{3},1)$

យើងបាន $(\overrightarrow{KI}\times\overrightarrow{KJ}).\overrightarrow{KL}=(-\frac{4}{9})(-\frac{1}{2})+(\frac{2}{3})(\frac{2}{3})+(-\frac{2}{3})(1)$

$$=\frac{2}{9}+\frac{4}{9}-\frac{2}{3}=\frac{2+4-6}{9}=0$$

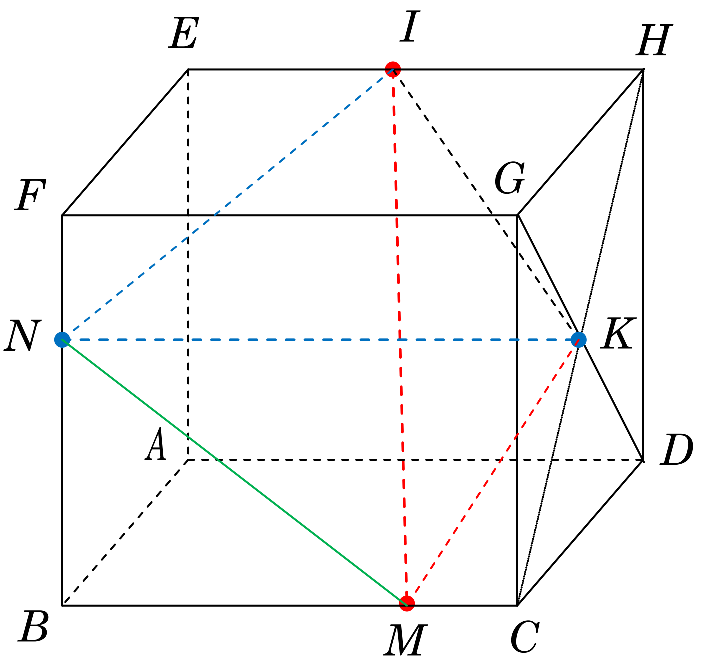
ដោយ $(\overrightarrow{KI}\times\overrightarrow{KJ}).\overrightarrow{KL}=0$ នោះបួនចំណុច I,J,K,L ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ។

លំហាត់ទី៤៩

គេឲ្យគូប $ABCDEFGH$ មានទ្រនុងស្មើនឹង $1cm$ ។ I ជាចំណុចកណ្ដាល នៃទ្រនុង $[EH]$, K ជាផ្ចិតការេ $CDHG$ ហើយ M និង N ជាចំណុចពីរ នៃទ្រនុង $[BC]$ និង $[BF]$ រៀងគ្នាដោយដឹងថា $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MK}$ និង $\overrightarrow{NI}\cdot\overrightarrow{NK}$ មានតម្លៃអប្បបរមា ។ តើបួនចំណុច I, K, M, N ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ ឬទេ ? បើសិនជាវាមិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយទេចូរគណនាមាឌតេត្រាអ៊ែតដែលមានកំពូល I, K, M, N ។

ដំណោះស្រាយ

តើបួនចំណុច I, K, M, N ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយឬទេ ?៖



យើងជ្រើសរើសតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$

ដោយ I ជាចំណុចកណ្ដាលនៃទ្រនុង $[EH]$ នោះ $I(0,\frac{1}{2},1)$ ហើយ K ជា

ផ្ចិតការេ $CDHG$ នោះ $K(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$ ។ M និង N ជាចំណុចពីរនៃទ្រនុង $[BC]$ និង $[BF]$ រៀងគ្នានោះ $M(1\ ,b,0)$ និង $N(1,0,c)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{MI}=(-1,\frac{1}{2}-b,1)$, $\overrightarrow{MK}=(-\frac{1}{2},1-b,\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{NI}=(-1,\frac{1}{2},1-c)$

និង $\overrightarrow{NK}=(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}-c)$ ។

យើងមាន $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MK}=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}-b)(1-b)+\frac{1}{2}=b^2-\frac{3}{2}b+\frac{3}{2}=(b-\frac{3}{4})^2+\frac{15}{16}$

និង $\overrightarrow{NI}\cdot\overrightarrow{NK}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+(1-c)(\frac{1}{2}-c)=(c-\frac{3}{4})^2+\frac{15}{16}$ ។

ដោយដឹងថា $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MK}$ និង $\overrightarrow{NI}\cdot\overrightarrow{NK}$ មានតម្លៃអប្បបរមានោះយើងបាន ៖

$b=\frac{3}{4}$ និង $c=\frac{3}{4}$ នោះគេបាន $M(1,\frac{3}{4},0)$ និង $N(1,0,\frac{3}{4})$ ។

យើងមាន $\overrightarrow{IK}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, $\overrightarrow{IM}=(1,\frac{1}{4},-1)$, $\overrightarrow{IN}=(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

យើងបាន $$\left(\overrightarrow{IM}\times\overrightarrow{IN}\right).\overrightarrow{IK}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{4} & -1\\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\end{vmatrix}=-\frac{9}{32}$$

ដោយ $\left(\overrightarrow{IM}\times\overrightarrow{IN}\right).\overrightarrow{IK}=-\frac{9}{32}\neq 0$ នោះបួនចំណុច I,M,N,K មិនស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយទេ។

ដូចនេះមាឌតេត្រាអ៊ែតដែលមានកំពូល I,M,N,K កំណត់ដោយ ៖

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IM}\times\overrightarrow{IN}\right).\overrightarrow{IK}\right|=\frac{1}{6}\times\frac{9}{32}=\frac{3}{64}\ cm^3$$ ។

លំហាត់ទី៥០

គេឲ្យគូប $ABCD$ មួយមានទ្រនុងស្មើ $1cm$ ។ I ជាចំណុចកណ្ដាល $[EF]$

$J \in [BC]$ ដែល $IJ \perp IH$ ហើយ $K \in [CD]$ ដែល $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{CD}$ ។

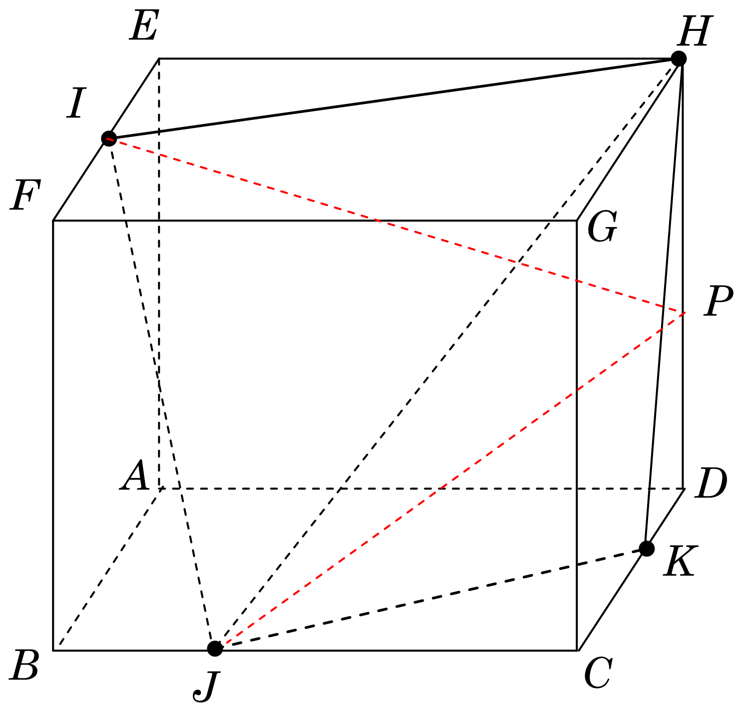
១.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបួនចំណុច H, I, J, K ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ។

២.រកទីតាំងនៃចំណុច $P \in [DH]$ ដោយដឹងថា $\overrightarrow{PI}.\overrightarrow{PJ}$ មានតម្លៃតូចបំផុត។

ដំណោះស្រាយ

១.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបួនចំណុច H, I, J, K ស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ

យើងជ្រើសរើសតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$



ដោយ I ជាចំណុចកណ្ដាល $[EF]$ នោះ $I(\frac{1}{2},0,1)$ ហើយ $J\in[BC]$ នោះ $J(1,b,0)$ ។ គេមាន $\overrightarrow{IJ}=(\frac{1}{2},b,-1)$ និង $\overrightarrow{IH}=(-\frac{1}{2},1,0)$ ។

ដោយ $IJ\perp IH$ នោះគេបាន $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IH}=-\frac{1}{4}+b+0=0$ នោះ $b=\frac{1}{4}$ ។ គេបាន $J(1,\frac{1}{4},0)$ ។

ហើយ $K\in[CD]$ ដែល $\overrightarrow{CK}=\frac{3}{8}\overrightarrow{CD}$ នោះ $\overrightarrow{KD}=\frac{5}{8}\overrightarrow{CD}$ ឬ $\overrightarrow{DK}=\frac{5}{8}\overrightarrow{DC}$

គេបាន $K(\frac{5}{8},1,0)$ ។

គេមាន $\overrightarrow{IJ}=(\frac{1}{2},\frac{1}{4},-1)$, $\overrightarrow{IK}=(\frac{1}{8},1,-1)$ និង $\overrightarrow{IH}=(-\frac{1}{2},1,0)$ ។

គេបាន $$(\overrightarrow{IJ}\times\overrightarrow{IK}).\overrightarrow{IH}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -1\\ \frac{1}{8} & 1 & -1\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(0+1)-\frac{1}{4}\left(0-\frac{1}{2}\right)-1\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right)$$

$(\overrightarrow{IJ}\times\overrightarrow{IK}).\overrightarrow{IH}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=0$ នោះបីវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ និង $\overrightarrow{IH}$ ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ (វ៉ិចទ័រកូប្លានែ)។

ដូចនេះបួនចំណុច H , I , J , K ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់តែមួយ ។

២.រកទីតាំងនៃចំណុច $P\in[DH]$ ដោយដឹងថា $\overrightarrow{PI}.\overrightarrow{PJ}$ មានតម្លៃតូចបំផុត ៖

ដោយ $P\in[DH]$ នោះ $P(0,1,c)$ ដែល $0<c<1$ ។

គេមាន $\overrightarrow{PI}=(\frac{1}{2},-1,1-c)$ និង $\overrightarrow{PJ}=(1,-\frac{3}{4},-c)$

យើងបាន $\overrightarrow{PI}.\overrightarrow{PJ}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+c^2-c=\left(c-\frac{1}{2}\right)^2+1$ ។

ដើម្បីឲ្យ $\overrightarrow{PI}.\overrightarrow{PJ}$ មានតម្លៃអប្បបរមាលុះត្រាតែ $c-\frac{1}{2}=0$ ឬ $c=\frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះចំណុច P ស្ថិតនៅកណ្ដាលនៃអង្កត់ $[DH]$ ទើប $\overrightarrow{PI}.\overrightarrow{PJ}$ មានតម្លៃ

អប្បបរមា ។

www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី០៥

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើសបន្ថែមសម្រាប់ការងារផ្ទះ

០១.នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបីចំណុច

$A(1,2,3)$, $B(5,6,-4)$ និង $C(9,1,7)$ ។

ក.គណនា AB , AC និង BC ។

ខ.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃ ΔABC ។

គ.រកកូអរដោនេនៃចំណុច P ដែល $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ ។

ឃ.រកប្រភេទនៃចតុកោណ $PBAC$ ។

០២.ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(1,4,-5),B(-1,6,-4),C(3,-2,4)$ និង $D(5,-4,3)$ ។

ក.គណនា AB,AC,AD,BC,BD និង CD ។

ខ.ចូរស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម។

គ.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$ ។

ឃ. I ជាចំណុចកណ្តាល $[AD]$ និង J ជាចំណុចផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I និង J រួចគណនា IJ ។

០៣.ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(6,-3,-1),B(1,-1,-5),C(6,9,5)$ និង $D(10,5,7)$ ។

ក.គណនា AB, AC, AD, BC, BD និង CD ។

ខ.ចូរស្រាយថា $AD//BC$ និង $DA \perp DC$ រួចទាញរកប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ និងគណនាផ្ទៃក្រឡារបស់វា។

គ.គណនា $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។

ឃ.H ជាចំណោលកែងនៃ A លើ $[BC]$ ។ គណនា BH និង HC រួចរកកូអរដោនេនៃចំណុច H ។

០៤.ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ គេឲ្យបួនចំណុច

$A(-5,4,3), B(1,7,-3), C(7,-5,-3)$ និង $D(-9,2,-2)$ ។

ក.គណនា AB, AC, AD, BC, BD និង CD ។

ខ.ស្រាយថាមុខខាងទាំងអស់នៃតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ សុទ្ធតែជាត្រីកោណកែង

០៥.នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ គេឲ្យចំណុច

$A(1,-1,-2), B(3,1,-1), C(-1,5,2)$ និង $D(-3,3,2)$ ។

ក.គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ និង $\overrightarrow{DB}$ ។

ខ.គណនារង្វាស់ទ្រនុងទាំងអស់របស់តេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ។

គ.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$ និង $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$ ។

ឃ.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$ ។

០៦.នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ គេឲ្យចំណុច

$A(-2,2,-1), B(-1,-6,3), C(2,6,6)$ និង $D(6,1,-5)$ ។

ក.គណនា $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$,$|\overrightarrow{AB}|$និង$|\overrightarrow{AC}|$ រួចទាញរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។

ខ.គណនា $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថា $\overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{BC}$ ។

គ.ស្រាយថា BCD ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

ឃ.រកកូអរដោនេនៃចំណុច E ដោយដឹងថា $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ ។

ង.ចូរស្រាយថា $(AE)\perp(BCD)$ ។

០៧.តម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យត្រីកោណ ABC

មានកំពូល $A(-1,1,5)$, $B(5,7,2)$ និង $C(3,-7,-3)$ ។

ក.គណនា AB,AC និង BC រួចបង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។

ខ.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AB),(AC) និង (BC) ។

គ.រកកូអរដោនេនៃចំណុច I ដោយដឹងថា $BC.\overrightarrow{IA}+AC.\overrightarrow{IB}+AB.\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{O}$ ។

ឃ.ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $BC.IA^2+AC.IB^2+AB.IC^2=BC.AC.AB$ ។

ង.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (IA),(IB),(IC) ។

ច.ចំពោះគ្រប់ចំណុច X នៃលំហចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង ៖

$BC.XA^2+AC.XB^2+AB.XC^2=(BC+AC+AB)XI^2+BC.AC.AB$ ។

០៨.នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យពីរចំណុច

$A(2,-5,4)$ និង $B(-2,7,-2)$ ។

ក.គណនាកូអរដោនេ I កណ្ដាលអង្កត់$[AB]$រួចគណនាប្រវែង AB ។

ខ.សរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែ(S) មានអង្កត់ផ្ចិតAB ។

គ.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(AB)និងសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រនៃ$[AB]$ ។

ឃ.គេឲ្យចំណុច $C(3,-1,7)$ ។ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $C\in(S)$ រួចសរសេរសមីការនៃ

ប្លង់(P) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ(S) ត្រង់ចំណុច C ។

ង.D ជាចំណុចមួយដែល$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចD រួច

ទាញរកប្រភេទនៃចតុកោណ $CADB$ ។

០៩.នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យប្លង់

$(P):\ 2x+y-2z+6=0$ និងចំណុច $A(4,-1,2)$ ។

១.គណនាចម្ងាយពីចំណុចA ទៅប្លង់(P) ។

២.H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុចA លើប្លង់(P) ។គណនាកូអរដោនេនៃ

ចំណុចHរួចសរសេរសមីការទូទៅនៃស្វ៊ែ(S)មានផ្ចិតHហើយកាត់តាមA ។

៣. B ជាចំណុចមានអរដោនេ $y_b=0$ ហើយ $B\in(P)$ និង $B\in(S)$ ។

ចូរគណនាកូអរដោនេនៃចំណុចB ។

៤.គេឲ្យចំណុច$D(4,-4,5)$ ។ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $D\in(P)$និង $D\in(S)$ ។

ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់(L) ប៉ះនឹងស្វ៊ែ(S) ត្រង់ចំណុចD

ដោយដឹងថា $(L)\subset(P)$ ។

១០.នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យបន្ទាត់ (L) មាន

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $(L):\begin{cases}x=-2+t\\ y=1-t\\ z=8-4t \quad ,t\in\mathbb{R}\end{cases}$ និងប្លង់ $(P):2x+y-2z+1=0$ ។

ក.គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងបន្ទាត់ (L) និងប្លង់ (P) ។

ខ.គេឲ្យ $B(2,3,4)$ ។ ចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $B\in(P)$ ។

គ.ពីចំណុច B គេគូសបន្ទាត់ (BH) កែងនឹងបន្ទាត់ (L) ដោយ $H\in(L)$ ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H រួចសរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BH) ។

ឃ.គេយក I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AB]$ ។ គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច I រួច

ទាញបង្ហាញថា $\overrightarrow{IH}$ ជាវ៉ិចទ័រនរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) ។

ង.K ជាចំណុចឆ្លុះគ្នានៃចំណុច H ធៀបនឹងប្លង់ (P) ។គណនាកូអរដោនេនៃ K

រួចស្រាយបញ្ជាក់ថាចតុកោណ $AHBK$ ជាការេ។

១១.នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យចំណុច

$A(1,1,5),B(4,-2,5),C(-2,1,-1)$ និង $D(-5,4,-1)$ ។

ក.គណនា $\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{BC}$ រួចទាញបញ្ជាក់ប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ ។

ខ.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (BC) និង (CD) ។

គ.H ជាចំណោលកែងនៃ A លើ BC ហើយ K ជាចំណោលកែងនៃ H លើ CD ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច H និង K ។

ឃ.គណនា AH និង BC រួចគណនាផ្ទៃក្រឡាចតុកោណ $ABCD$ ។

ង.ចូរស្រាយថា KCH ជាត្រីកោណកែងសមបាត។

ច.រកកូអរដោនេនៃចំណុច L ដោយដឹងថា $HKCL$ ជាការេ។

១២.នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យចំណុច $A(-1,2,7)$, $B(-5,-6,-1)$, $C(2,-1,-5)$ និង $D(5,5,1)$ ។

ក.គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ និង $\overrightarrow{AD}$ រួចគណនារង្វាស់នៃជ្រុងនៃចតុកោណ $ABCD$ ។

ខ.ចូរបង្ហាញថា $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ និង $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$ រួចទាញរកប្រភេទចតុកោណ $ABCD$ និងគណនាផ្ទៃក្រឡារបស់វា។

គ.តាង E ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (AD) និង (BC)។ គណនា EC និង ED ។

ឃ.គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC និង ACD ។

ង.រកសមីការនៃប្លង់ (ABC) និងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AD) និង (BC)។

www.mathtoday.wordpress.com