រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន
បរិញ្ញាបត្រផ្នែកគណិតវិទ្យា

ព្រីមីទីវ និង អាំងតេក្រាល

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១២

$$\int f(x).dx = F(x) + C$$

ភ្នាសិទ្ធិ

ព្រីមីទីវ និង អាំងតេក្រាល

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១២

$$\int f(x).dx = F(x) + C$$

Tel: 017 768 246
www.mathtoday.wordpress.com

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក យ៉ង់ ឆារី
លោក លឹម ឆុន
លោក អ៊ឹង សំណាង

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិត្តសិរ

ការិយកុំព្យូទ័រ

លោក អ៊ឹង សំណាង

អារម្ភកថា

សួស្តីមិត្តអ្នកសិក្សាជាទីស្រឡាញ់រាប់អាន !
សៀវភៅ ***ព្រីមីធីវ និង អាំងតេក្រាល****ដែលលោកអ្នកកំពុងតែកាន់អាននេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបចំឡើងសម្រាប់ទុកជាឯកសារសម្រាប់អ្នកសិក្សាដែលមាន បំណងត្រៀមប្រឡងយកអាហារូបករណ៍ទៅសិក្សានៅបរទេស និង សម្រាប់ ត្រៀមប្រឡងអាហារូបករណ៍ចូលគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សានានាក្នុងប្រទេស។ យើងខ្ញុំបានជ្រើសរើសលំហាត់ពិសេសៗមកធ្វើដំណោះស្រាយ យ៉ាងពិស្តារ ព្រមទាំងមានលំហាត់អនុវត្តន៍សម្រាប់អ្នកសិក្សាហ្វឹកហាត់ដោះស្រាយដោយ ខ្លួនឯង។*

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅមួយក្បាលនេះ នឹងអាចចូលរួមផ្តល់នូវ គំនិត និង វិធីសាស្ត្រថ្មីៗក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់គណិតវិទ្យាកំរិត អាហារូបករណ៍ ចំពោះលោកអ្នកសិក្សាជាពុំខានឡើយ ។

ជាទីបញ្ចប់ខ្ញុំបាទសូមជូនពរចំពោះលោកអ្នក សូមមានសុខភាពល្អ មានប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និង ទទួលបានជោគជ័យក្នុងគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី១៨ សីហា ឆ្នាំ២០១២
អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាវជ្រាវ

លឹម ផល្គុន

Tel :017 768 246
Email: lim_phalkun@ymail.com
Website: www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី១

ព្រីមីទីវ និង អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

១-ព្រីមីទីវ

ក/និយមន័យ

$\mathbf{F(x)}$ ជាព្រីមីទីវនៃ $\mathbf{f(x)}$ កាលណា $\mathbf{F'(x)=f(x)}$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $\mathbf{x}$

ក្នុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ ។

ឧទាហរណ៍ គេមាន $\mathbf{F(x)=x(\ln^2 x-2\ln x+2)}$ និង $\mathbf{f(x)=\ln^2 x}$

កំណត់លើចន្លោះ $\mathbf{(0,+\infty)}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\mathbf{F(x)}$ ជាព្រីមីទីវនៃ $\mathbf{f(x)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\mathbf{F'(x)=(x)'(\ln^2 x-2\ln x+2)+x(\ln^2 x-2\ln x+2)'}$

$$\begin{aligned}&=(\ln^2 x-2\ln x+2)+x(\frac{2}{x}\ln x-\frac{2}{x})\\&=\ln^2 x-2\ln x+2+2\ln x-2\\&=\ln^2 x\end{aligned}$$

ដោយ $\mathbf{F'(x)=f(x)}$ នោះ $\mathbf{F(x)}$ ជាព្រីមីទីវនៃ $\mathbf{f(x)}$ ។

ខ/ទ្រឹស្តីបទ ៖

បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ f នោះព្រីមីទីវទាំងអស់នៃ f មានទម្រង់ទូទៅ $F(x)+C$ ដែល C ជាចំនួនពិតថេរ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

គេមាន $(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$ ព្រោះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។

សម្រាយនេះមានន័យថាព្រីមីទីវទាំងអស់នៃ f មានទម្រង់ទូទៅ $F(x)+C$ ដែល C ជាចំនួនពិតថេរ ។

២-អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

ក/និយមន័យ

បើ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$ នោះអាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃ $f(x)$ កំណត់ដោយ $\int f(x).dx=F(x)+C$ ដែល C ជាចំនួនពិតថេរ ។

ខ/លក្ខណះ

1/ $\int \lambda f(x).dx=\lambda \int f(x).dx$

2/ $\int [f(x)+g(x)-h(x)].dx=\int f(x).dx+\int g(x).dx-\int h(x).dx$

គ/រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ ៖

1/ $\int \lambda.dx = \lambda x + c$

2/ $\int x^{\alpha}.dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$

3/ $\int \frac{1}{x}.dx = \ln|x| + c$

4/ $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$

5/ $\int \frac{1}{x^2}.dx = -\frac{1}{x} + c$

6/ $\int e^x.dx = e^x + c$

7/ $\int a^x.dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

8/ $\int \sin x.dx = -\cos x + c$

9/ $\int \cos x.dx = \sin x + c$

10/ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$

11/ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$

12/ $\int \tan x.dx = -\ln|\cos x| + c$

13/ $\int \cot x.dx = \ln|\sin x| + c$

14/ $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

15/ $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$

16/ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c$

17/ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c$

18/ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$

19/ $\int \sinh x.dx = \cosh x + c$

20/ $\int \cosh x.dx = \sinh x + c$

ឃ/រូបមន្តប្តូរអថេរ

ឧបមាថាគេមានអាំងតេក្រាល $I = \int f[g(x)].g'(x).dx$

តាង $u = g(x)$ នោះ $du = g'(x).dx$

គេបាន $I = \int f(u).du = F(u) + c$ ដែល $F(u)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(u)$

ជំនួស $u = g(x)$ គេបានចម្លើយ $I = F[g(x)] + C$ ។

ឧទាហរណ៍១ គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{2x+3}{x^2+3x-4}.dx$

តាង $u = x^2 + 3x - 4$ នោះ $du = (2x+3).dx$

គេបាន $I = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$ ដោយ $u = x^2 + 3x - 4$

ដូចនេះ $I = \ln|x^2 + 3x - 4| + c$ ។

ឧទាហរណ៍២ គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int (e^x + 2)^3 e^x.dx$

តាង $u = e^x + 2$ នោះ $du = e^x.dx$

គេបាន $I = \int u^3.du = \frac{1}{4}u^4 + c$ ដោយ $u = e^x + 2$

ដូចនេះ $I = \frac{1}{4}(e^x + 2)^4 + c$ ។

ង/អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

គេមាន $d(uv) = udv + vdu$

គេទាញ $uv = \int u\,dv + \int v\,du$

ដូចនេះ $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ ។

ជាទូទៅគេបានរូបមន្ត ៖

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x).dx$$

ដែល f និង g ជាអនុគមន៍ពីរមានដេរីវេរៀងគ្នា f' និង g' ។

ឧទាហរណ៍ គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int x^3 \ln x.dx$

តាង $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^3.dx \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du = \dfrac{1}{x}.dx \\ v = \dfrac{1}{4}x^4 \end{cases}$

គេបាន $I = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + c$

ដូចនេះ $I = \frac{1}{4}x^4(\ln x - \frac{1}{4}) + c$ ។

៣-វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងមិនកំណត់

1-វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលទម្រង់ $I=\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

យើងមាន $\forall a\neq 0 : ax^2+bx+c=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$

តាង $x+\frac{b}{2a}=t$ នាំឲ្យ $dx=dt$

ហើយយក $r=\frac{4ac-b^2}{4a^2}$

គេបាន $I=\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+r}$

$-$បើ $\Delta=b^2-4ac>0$ នោះ $r=\frac{4ac-b^2}{4a^2}<0$

គេបាន ៖

$$I=\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+r}=\frac{1}{2a\sqrt{-r}}.\ln\left|\frac{t-\sqrt{-r}}{t+\sqrt{-r}}\right|+c$$

$-$បើ $\Delta=b^2-4ac<0$ នោះ $r=\frac{4ac-b^2}{4a^2}>0$

គេបាន ៖

$$I=\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+r}=\frac{1}{a\sqrt{r}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{r}}\right)+c$$ ។

ឧទាហរណ៍១. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{dx}{4x^2 + 12x + 25}$

គេមាន $4x^2 + 12x + 25 = 4\left[(x + \frac{3}{2})^2 + 4 \right]$

តាង $t = x + \frac{3}{2}$ នាំឲ្យ $dt = dx$

គេបាន $I = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{t^2 + 4} = \frac{1}{8}\arctan\left(\frac{t}{2}\right) + c = \frac{1}{8}\arctan\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right) + c$ ។

ឧទាហរណ៍២. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{dx}{4x^2 - 8x - 5}$

គេមាន $4x^2 - 8x - 5 = 4\left[(x - 1)^2 - \frac{9}{4} \right]$

តាង $t = x - 1$ នាំឲ្យ $dt = dx$

គេបាន $I = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{9}{4}} = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{t - \frac{3}{2}}{t + \frac{3}{2}}\right| + c = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2t - 3}{2t + 3}\right| + c$

ដោយ $t = x - 1$

ដូចនេះ $I = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x - 5}{2x + 1}\right| + c$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

១. $I = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}$

២. $I = \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 7}$

៣. $I = \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$

៤. $I = \int \frac{dx}{x^2 - 5x - 6}$

៥. $I = \int \frac{dx}{4x^2 - 4x + 8}$

៦. $I = \int \frac{dx}{9x^2 - 6x - 3}$

៧. $I = \int \frac{dx}{4x^2 + 8x - 12}$

៨. $I = \int \frac{dx}{9x^2 + 42x - 147}$

៩. $I = \int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 14}$

១០. $I = \int \frac{4dx}{-3x^2 + 15x - 12}$

១១. $I = \int \frac{3dx}{4x^2 - 8x + 8}$

១២. $I = \int \frac{7dx}{x^2 - 4x + 5}$

១៣. $I = \int \frac{2x.dx}{x^4 - 5x^2 + 4}$

១៤. $I = \int \frac{4x.dx}{x^4 + 8x^2 + 9}$

១៥. $I = \int \frac{\cos x.dx}{2\sin^2 x - 2\sin x + 1}$

១៦. $I = \int \frac{\sin x.dx}{2\cos^2 x - 6\cos x + 5}$

១៧. $I = \int \frac{3x^2 dx}{x^6 + 3x^3 - 4}$

១៨. $I = \int \frac{e^x.dx}{e^{2x} - 2e^x - 8}$

2. វិធីសាស្រ្តគណនាអាំងតេក្រាលទម្រង់

$$I=\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}.dx$$

គេត្រូវបំលែងអាំងតេក្រាលនេះឲ្យទៅជាទម្រង់ ៖

$$I=\frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}.dx-(B-A\frac{b}{2a})\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$I=\frac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c|-(B-A\frac{b}{2a})\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

ជាអាំងតេក្រាលអាចគណនាបាន ។

ឧទាហរណ៍១. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{2x-7}{x^2-3x+2}.dx$

យើងបាន $I=\int \frac{(2x-4)-3}{x^2-4x-5}.dx$

$$=\int \frac{2x-4}{x^2-4x-5}.dx-3\int \frac{dx}{x^2-4x-5}$$

$$=\int \frac{(x^2-4x-5)'}{x^2-4x-5}.dx-3\int \frac{dx}{(x-2)^2-9}$$

$$=\ln|x^2-4x-5|-3\int \frac{dx}{(x-2)^2-3^2}$$

តាង $t=x-2$ នាំឲ្យ $dt=dx$

$$I=\ln|x^2-4x-5|-3\int \frac{dt}{t^2-3^2}$$

$$I=\ln|x^2-4x-5|-\frac{1}{2}\ln|\frac{t-3}{t+3}|+c$$

ដោយ $t=x-2$

ដូចនេះ $I=\ln|x^2-4x-5|-\frac{3}{4}\ln|\frac{x-5}{x+1}|+c$ ។

ឧទាហរណ៍២. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{2x+6}{x^2-6x+13}.dx$

យើងបាន $I=\int \frac{(2x-6)+12}{x^2-6x+13}.dx$

$$I=\int \frac{2x-6}{x^2-6x+13}.dx+12\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$$

$$=\int \frac{(x^2-6x+13)'}{x^2-6x+13}.dx+12\int \frac{dx}{(x-3)^2+4}$$

$$=\ln|x^2-6x+13|+12\int \frac{dx}{(x-3)^2+2^2}$$

តាង $t=x-3$ នាំឲ្យ $dt=dx$

$$I=\ln|x^2-6x+13|+12\int \frac{dt}{t^2+2^2}$$

$$I=\ln|x^2-6x+13|+6\arctan\left(\frac{t}{2}\right)+c$$

ដូចនេះ $I=\ln|x^2-6x+13|+6\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right)+c$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

១. $I=\int \frac{2x-2}{x^2+2x+3}.dx$

២. $I=\int \frac{x.dx}{x^2-4x+7}$

៣. $I=\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$

៤. $I=\int \frac{2x-3}{x^2-5x-6}.dx$

៥. $I=\int \frac{x+2}{4x^2-4x+8}.dx$

១០. $I=\int \frac{6xdx}{-3x^2+15x-12}$

១១. $I=\int \frac{8x+1}{4x^2-8x+8}.dx$

១២. $I=\int \frac{2x+3}{x^2-4x+5}.dx$

១៣. $I=\int \frac{2x^3}{x^4-5x^2+4}.dx$

១៤. $I=\int \frac{4x^3+x^2}{x^4+8x^2+9}.dx$

៦. $I = \int \dfrac{18x\,dx}{9x^2 - 6x - 3}$

៧. $I = \int \dfrac{8x - 7}{4x^2 + 8x - 12}.dx$

៨. $I = \int \dfrac{36x}{9x^2 + 42x - 147}.dx$

៩. $I = \int \dfrac{4x - 3}{2x^2 + 8x + 14}.dx$

១៥. $I = \int \dfrac{\sin 2x + \cos x.dx}{2\sin^2 x - 2\sin x + 1}$

១៦. $I = \int \dfrac{\sin 2x.dx}{2\cos^2 x - 6\cos x + 5}$

១៧. $I = \int \dfrac{3x^5 dx}{x^6 + 3x^3 - 4}$

១៨. $I = \int \dfrac{4e^{2x}.dx}{e^{2x} - 2e^x - 8}$

3. វិធីសាស្រ្តគណនាអាំងតេក្រាលទម្រង់

$$I = \int \frac{P_n(x)}{(ax+b)^m}.dx \;,\; a \neq 0 \;,\; a, b, \in IR$$

$$P_n(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + ... + c_1 x + c_0$$

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលនេះគេត្រូវតាង ៖

$ax + b = t$ នាំឲ្យ $x = \frac{t}{a} - \frac{b}{a}$ និង $dx = \frac{1}{a}.dt$

គេបាន $I = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int \dfrac{P(\frac{t}{a} - \frac{b}{a})}{t^m}.dt$ (ជាអាំងតេក្រាលអាចគណនាបាន) ។

ឧទាហរណ៍១. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \displaystyle\int \dfrac{x^3 - 3x}{(x-1)^5}.dx$

តាង $x - 1 = t$ នាំឲ្យ $x = t + 1$ និង $dx = dt$

គេបាន $I = \displaystyle\int \dfrac{(t+1)^3 - 3(t+1)}{t^5}.dt$

$$=\int \frac{t^3+3t^2+3t+1-3t-3}{t^5}.dt$$

$$=\int \frac{t^3+3t^2-2}{t^5}.dt$$

$$=\int \frac{dt}{t^2}-3\int \frac{dt}{t^3}-2\int \frac{dt}{t^5}$$

$$=-\frac{1}{t}-\frac{3}{2t^2}+\frac{1}{2t^4}+c$$

ដូចនេះ $I=-\frac{1}{x-1}-\frac{3}{2(x-1)^2}+\frac{1}{2(x-1)^4}+c$ ។

ឧទាហរណ៍២. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}.dx$

តាង $x+1=t$ នាំឲ្យ $x=t-1$ និង $dx=dt$

គេបាន $I=\int \frac{(t-1)^2-(t-1)+1}{\sqrt[3]{t^2}}.dt$

$$I=\int \frac{t^2-3t+3}{\sqrt[3]{t^2}}.dt$$

$$=\int t^{\frac{4}{3}}.dt-3\int t^{\frac{1}{3}}.dt+3\int t^{-\frac{2}{3}}.dt$$

$$=\frac{3}{7}t^2\sqrt[3]{t}-\frac{9}{4}t\sqrt[3]{t}+9\sqrt[3]{t}+c$$

ដូចនេះ $I=\frac{3}{7}(x+1)^2\sqrt[3]{x+1}-\frac{9}{4}(x+1)\sqrt[3]{x+1}+9\sqrt[3]{x+1}+c$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

១. $I=\int \frac{x^3-3x+2}{(x+1)^3}.dx$

២. $I=\int \frac{2x^2-7x+1}{(2x-1)^3}.dx$

៣. $I=\int \frac{2x^3-3x^2+1}{(x+5)^4}.dx$

៤. $I=\int \frac{x^3-6x^2+9x-4}{(2x-3)^2}.dx$

៥. $I=\int \frac{4x^2-12x-27}{(1-x)^5}.dx$

៦. $I=\int \frac{x^2-10x-24}{(2x+3)^7}.dx$

៧. $I=\int \frac{x^4-4x^2+1}{(x+1)^3}.dx$

៨. $I=\int \frac{x^4-6x^3+4x^2-7}{(x-1)^4}.dx$

៩. $I=\int \frac{x^2-x+1}{(2x-1)^6}.dx$

១០. $I=\int \frac{2x^3-7x^2+3x}{x^3-3x^2+3x-1}.dx$

១១. $I=\int \frac{7x^3-3x^2}{x^3+3x^2+3x+1}.dx$

១២. $I=\int \frac{2x+3}{x^3+6x^2+12x+8}.dx$

១៣. $I=\int \frac{2x^3-3x+4}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}.dx$

១៤. $I=\int \frac{x^4-2x^3+1}{\sqrt[4]{(x-2)^3}}.dx$

១៥. $I=\int \frac{x^2-3x+3}{\sqrt[4]{2x-3}}.dx$

១៦. $I=\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt[4]{(2x+1)^5}}.dx$

១៧. $I=\int \frac{x^3+4x^2+6x+1}{\sqrt[3]{x^2-6x+9}}$

១៨. $I=\int \frac{(x^3-8)(x^2+x+1)}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}.dx$

4. វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលទម្រង់ $I=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

ចំពោះ $\forall a\neq 0$ គេមាន $ax^2+bx+c=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$

យក $r=\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ ហើយតាង $t=x+\frac{b}{2a}$ នាំឲ្យ $dt=dx$

គេបាន $I=\int\frac{dt}{\sqrt{a(t^2+r)}}=\left[\begin{array}{l}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|t+\sqrt{t^2+r}|+k\quad (a>0)\\ =\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{-r}}\right)+k\quad (a<0)\end{array}\right.$

ឧទាហរណ៍១. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

យើងបាន $I=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-1}}$ តាង $t=x-2$ នាំឲ្យ $dt=dx$

$I=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=\ln|t+\sqrt{t^2-1}|+c$

ដូចនេះ $I=\ln|x-2+\sqrt{(x-2)^2-1}|+c$ ។

ឧទាហរណ៍២. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-5}}$

យើងបាន $I=\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x-3)^2}}$ តាង $t=x-3$ នាំឲ្យ $dt=dx$

$I=\int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}=\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)+c$

ដូចនេះ $I=\arcsin\left(\frac{x-3}{2}\right)+c$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

១. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

២. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-2x+1}}$

៣. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+6x+5}}$

៤. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{7+6x-x^2}}$

៥. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

៦. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+12x-27}}$

៧. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x-24}}$

៨. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-42x-147}}$

៩. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$

១០. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+5x+6}}$

១១. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$

១២. $I=\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2+1}}$

១៣. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x-4}}$

១៤. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$

១៥. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+4}}$

១៦. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}}$

១៧. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-3}}$

១៨. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$

5. វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.dx$

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលនេះគេត្រូវបំលែងដូចខាងក្រោម ៖

$$I=\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$I=\frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.dx+(B-A\frac{b}{2a})\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$I=\frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+(B-A\frac{b}{2a})\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

(ជាអាំងតេក្រាលអាចគណនាបាន) ។

ឧទាហរណ៍១. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{3-2x}{\sqrt{3+2x-x^2}}.dx$

យើងបាន $I=\int \frac{3-2x}{\sqrt{3+2x-x^2}}.dx$

$$=\int \frac{(2-2x)+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$$

$$=\int \frac{2-2x}{\sqrt{3+2x-x^2}}.dx+\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$$

$$=2\sqrt{3+2x-x^2}+\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$$

តាង $x-1=t$ នាំឲ្យ $x=t+1$ និង $dx=dt$

$$I=2\sqrt{3+2x-x^2}+\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$$

$$I=2\sqrt{3+2x-x^2}+\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)+c$$

ដូចនេះ $I=2\sqrt{3+2x-x^2}+\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+C$ ។

ឧទាហរណ៍២. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{2x-7}{\sqrt{x^2-6x+10}}.dx$

យើងបាន $I=\int \frac{(2x-6)-1}{\sqrt{x^2-6x+10}}.dx$

$$=\int \frac{2x-6}{\sqrt{x^2-6x+10}}.dx-\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$$

$$=\int \frac{(x^2-6x+10)'}{\sqrt{x^2-6x+10}}.dx-\int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+1}}$$

$$=2\sqrt{x^2-6x+10}-\int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+1}}$$

តាង $x-3=t$ នាំឲ្យ $x=t+3$ និង $dx=dt$

$I=2\sqrt{x^2-6x+10}-\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$

$I=2\sqrt{x^2-6x+10}-\ln|t+\sqrt{t^2+1}|+c$

ដូចនេះ $I=2\sqrt{x^2-6x+10}-\ln|x-3+\sqrt{(x-3)^2+1}|+C$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

១. $I=\int \frac{4xdx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

២. $I=\int \frac{(4x+1)dx}{\sqrt{2x^2-2x+1}}$

៣. $I=\int \frac{8xdx}{\sqrt{2x^2+6x+5}}$

៤. $I=\int \frac{(4x-1).dx}{\sqrt{7+6x-x^2}}$

៥. $I=\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

៦. $I=\int \frac{4xdx}{\sqrt{4x^2+12x-27}}$

៧. $I=\int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{x^2-10x-24}}$

៨. $I=\int \frac{(3-2x)dx}{\sqrt{-x^2+5x+6}}$

៩. $I=\int \frac{(1-2x).dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$

១០. $I=\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4-x^2+1}}$

១១. $I=\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x^2-3x-4}}$

១២. $I=\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$

១៣. $I=\int \frac{(2x-5)dx}{\sqrt{x^2+5x+4}}$

១៤. $I=\int \frac{12x\,dx}{\sqrt{x^2-6x+5}}$

6. វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាលទម្រង់

$$I=\int \frac{dx}{(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលនេះគេត្រូវ ៖

តាង $Ax+B=\frac{1}{t}$ នាំឲ្យ $x=\frac{1}{A}(\frac{1}{t}-B)$ និង $dx=-\frac{1}{A}.\frac{dt}{t^2}$

ឧទាហរណ៍១. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{3x^2+14x+15}}$

តាង $x+2=\frac{1}{t}$ នាំឲ្យ $x=\frac{1}{t}-2$ និង $dx=-\frac{dt}{t^2}$

$$I=\int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{3(\frac{1}{t}-2)^2+14(\frac{1}{t}-2)+15}}$$

$$I=-\int \frac{dt}{\sqrt{3+2t-t^2}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{4-(1-t)^2}}$$

តាង $u=1-t$ នាំឲ្យ $du=-dt$

$$I=\int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}}=\arcsin\left(\frac{u}{2}\right)+c$$

ដូចនេះ $I=\arcsin\left(\frac{1-t}{2}\right)+c=\arcsin\left(\frac{x+1}{2x+4}\right)+C$ ។

ឧទាហរណ៍២. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x+1}}$

តាង $x=\frac{1}{t}$ នាំឲ្យ $du=-\frac{dt}{t^2}$

$$I=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{2}{t^2}-\frac{2}{t}+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+2}}=-\int\frac{d(t+1)}{\sqrt{(t-1)^2+1}}$$

$$I=-\ln|t-1+\sqrt{(t-1)^2}|+C=-\ln|\frac{1}{x}-1+\sqrt{(\frac{1}{x}-1)^2}|+C$$

លំហាត់អនុវត្តន៍

ចូរគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម ៖

១. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}}$

២. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x+1}}$

៣. $I=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{2x^2+6x+5}}$

៤. $I=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{7+6x-x^2}}$

៥. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{5-4x-x^2}}$

៦. $I=\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{4x^2+12x-27}}$

៧. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-10x-24}}$

៨. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{9x^2-42x-147}}$

៩. $I=\int\frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x-x^2}}$

១០. $I=\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{-x^2+5x+6}}$

១១. $I=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{2-x-x^2}}$

១២. $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}$

១៣. $I=\int\frac{dx}{(x-4)\sqrt{x^2-3x-4}}$

១៤. $I=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{2+x-x^2}}$

១៥. $I=\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+5x+4}}$

១៦. $I=\int\frac{dx}{(x+5)\sqrt{x^2-6x+5}}$

១៧. $I=\int\frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2-2x-3}}$

១៨. $I=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{-x^2-3x+4}}$

ជំពូកទី២

លំហាត់មានដំណោះស្រាយ

១-គណនាអាំងតេក្រាល

$$I = \int \left(12x^5 + 5x^4 - 9x^2 + 4x + 7 \right).dx$$

$$= 12\int x^5.dx + 5\int x^4dx - 9\int x^2.dx + 4\int xdx + 7\int dx$$

$$= 12\left(\frac{1}{6}x^6\right) + 5\left(\frac{1}{5}x^5\right) - 9\left(\frac{1}{3}x^3\right) + 4\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 7x + c$$

$$= 2x^6 + x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 7x + c$$

ដូចនេះ $I = 2x^6 + x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 7x + c$

២-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{4x^7 - 5x^4 + 1}{x^2}.dx$

$$= \int \left(4x^5 - 5x^2 + \frac{1}{x^2}\right).dx$$

$$= \int 4x^5.dx - \int 5x^2.dx + \int \frac{1}{x^2}.dx$$

$$= 4\int x^5.dx - 5\int x^2.dx + \int \frac{1}{x^2}.dx$$

$$= 4\left(\frac{1}{6}x^6\right) - 5\left(\frac{1}{3}x^3\right) + \left(-\frac{1}{x}\right) + c$$

$$= \frac{2}{3}x^6 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{x} + c$$

ដូចនេះ $I = \frac{2}{3}x^6 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{x} + c$

៣-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{x^7-4x^5+1}{x}.dx$

$$=\int \left(x^6-4x^4+\frac{1}{x}\right).dx$$

$$=\int x^6.dx-4\int x^4.dx+\int \frac{1}{x}.dx$$

$$=\frac{1}{7}x^7-\frac{4}{5}x^5+\ln|x|+c$$

៤-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}.dx$

$$=\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right).dx$$

$$=\int x^{\frac{1}{2}}.dx+\int \frac{1}{\sqrt{x}}.dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x}+c$$

ដូចនេះ $I=\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}.dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+c$

៥-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int (\sin x+\cos x)^2.dx$

$$=\int \left(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x\right).dx$$

$$=\int (1+\sin 2x).dx$$

$$=\int dx+\int \sin 2x.dx$$

$$=x-\frac{1}{2}\cos 2x+c$$

៦-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{2\cos^3 x+1}{\cos^2 x}.dx$

$$=\int\left(2\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}\right).dx$$

$$=2\int \cos x.dx+\int \frac{1}{\cos^2 x}.dx$$

$$=2\sin x+\tan x+c$$

ដូចនេះ៖ $I=2\sin x+\tan x+c$

៧-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \sin^2 x.dx$

$$=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right).dx$$

$$=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int \cos 2x.dx$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+c$$

៨-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \cos^2 x.dx$

$$=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right).dx$$

$$=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int \cos 2x.dx$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}.\sin 2x+c$$

ដូចនេះ៖ $I=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

៩–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int (\tan x+\cot x)^2 .dx$

$$=\int \left(\tan^2 x+2\tan x\cot x+\cot^2 x\right).dx$$

$$=\int \left(\tan^2 x+2+\cot^2 x\right).dx$$

$$=\int \left[\left(1+\tan^2 x\right)+\left(1+\cot^2 x\right)\right].dx$$

$$=\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right).dx$$

$$=\int \frac{dx}{\cos^2 x}+\int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$=\tan x-\cot x+c$$

ដូចនេះ $I=\tan x-\cot x+C$

១០–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \sin x.\cos 2x.dx$

$$=\frac{1}{2}\int \left[\sin(x+2x)+\sin(x-2x)\right].dx$$

$$=\frac{1}{2}\int (\sin 3x-\sin x).dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x+\cos x\right)+c$$

ដូចនេះ $I=-\frac{1}{6}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x+C$

១១-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \cos 2x\cos 4x.dx$

$$=\frac{1}{2}\int \left[\cos\left(2x+4x\right)+\cos\left(2x-4x\right)\right].dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \left(\cos 6x+\cos 2x\right).dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\sin 6x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]+c$$

$$=\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$$

ដូចនេះ $I=\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{4}\sin 2xx+C$ ។

១២-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{2}{3x+1}.dx$

$$=2\int \frac{dx}{3x+1}=\frac{2}{3}\int \frac{(3x+1)'}{3x+1}.dx$$

$$=\frac{2}{3}\ln|3x+1|+C$$

១៣-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{7}{\sqrt{2x-3}}.dx$

$$=7\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$$

$$=7\sqrt{2x-3}+C$$

១៤-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{10}{(x-2)^2}.dx$

$$=10\int \frac{dx}{(x-2)^2}$$

$$=-\frac{10}{x-2}+C$$

១៥–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{dx}{4x^2-9}$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-\frac{9}{4}}=\frac{1}{4}.\frac{1}{2(\frac{3}{2})}.\ln|\frac{x-\frac{3}{2}}{x+\frac{3}{2}}|+C$$

$$=\frac{1}{12}\ln|\frac{2x-3}{2x+3}|+C$$

១៦–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{dx}{x^2+9}$

$$=\int \frac{dx}{x^2+3^2}$$

$$=\frac{1}{3}\arctan(\frac{x}{3})+C$$

១៧–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

$$=\int \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}}$$

$$=\arcsin(\frac{x}{2})+C$$

១៨–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

$$=\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+C$$

១៩–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}}$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}|+C$$

២០-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int 2^x.3^{x+1}.5^{2x}.dx$

$$=\int 2^x.3^x.3.25^x.dx$$

$$=3\int (150)^x.dx$$

$$=\frac{3}{\ln(150)}.(150)^x+C$$

២១-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int (4e^{2x}+1)^2.dx$

$$=\int (16e^{4x}+8e^{2x}+1).dx$$

$$=16\int e^{4x}.dx+8\int e^{2x}.dx+\int dx$$

$$=4e^{4x}+4e^{2x}+x+C$$

$$=(2e^{2x}+1)^2+x-1+C$$

២២-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{(2x+3).dx}{x^2+3x-4}$

តាង $u=x^2+3x-4$ នាំអោយ $du=(2x+3).dx$

$$I=\int \frac{(2x+3).dx}{x^2+3x-4}$$

$$=\int \frac{du}{u}$$

$$=\ln|u|+c$$

$$=\ln\left|x^2+3x-4\right|+c$$

២៣–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{(2x-3).dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

តាង $u=x^2-3x+2$ នាំអោយ $du=\left(2x-3\right).dx$

$$I=\int \frac{(2x-3).dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$$

$$=\int \frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$=2\sqrt{u}+c$$

$$=2\sqrt{x^2-3x+2}+c$$

២៤–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{e^x}{(e^x+1)^2}.dx$

តាង $u=e^x+1$ នាំអោយ $du=e^x.dx$

$$I=\int \frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}+c$$

$$=-\frac{1}{e^x+1}+c$$

២៥–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \sin^4 x\cos x.dx$

តាង $u=\sin x$ នាំអោយ $du=\cos x.dx$

$$I=\int \sin^4 x\cos x.dx$$

$$=\int u^5.du=\frac{1}{6}u^6+c=\frac{1}{6}\sin^6 x+c$$

២៦–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}.dx$

គេមាន $I=\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}.dx$

$$=\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}.\frac{1}{\cos^2 x}.dx$$

$$=\int \tan^4 x.\frac{dx}{\cos^2 x}$$

តាង $u=\tan x$ នាំអោយ $du=\frac{dx}{\cos^2 x}$

$$I=\int u^5.du$$

$$=\frac{1}{5}u^5+c$$

$$=\frac{1}{5}\tan^5 x+c$$

២៧–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{4x^3.dx}{\left(x^4+1\right)^5}$

តាង $u=x^4+1$ នាំអោយ $du=4x^3.dx$

$$I=\int \frac{4x^3.dx}{\left(x^4+1\right)^5}$$

$$=\int \frac{du}{u^5}$$

$$=\int u^{-5}.du=-\frac{1}{4}.u^{-4}+c$$

$$=-\frac{1}{4}\left(x^4+1\right)^{-4}+c$$

២៨–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int (e^x+2)^4.e^x dx$

តាង $u=e^x+2$ នាំអោយ $du=e^x.dx$

$$I=\int (e^x+2)^4.e^x dx$$
$$=\int u^4.du=\frac{1}{5}u^5+c$$
$$=\frac{1}{5}(e^x+2)^5+c$$

២៩–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \cos^3 x.dx$

គេមាន $I=\int \cos^3 x.dx$

$$=\int \cos^2 x.\cos x.dx$$
$$=\int (1-\sin^2 x).\cos x.dx$$

តាង $u=\sin x$ នាំអោយ $du=\cos x.dx$

$$=\int (1-u^2).du$$
$$=u-\frac{1}{3}u^3+c=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+c$$

៣០–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \sin^7 x\cos^3 x.dx$

គេមាន $I=\int \sin^7 x\cos^3 x.dx$

$$=\int \sin^7 x.\cos^2 x.\cos x.dx$$
$$=\int \sin^7 x.(1-\sin^2 x).\cos xdx$$

តាង $u=\sin x$ នាំអោយ $du=\cos x.dx$

$$= \int u^7\left(1-u^2\right).du$$

$$= \int \left(u^7-u^9\right).du = \frac{1}{8}u^8 - \frac{1}{10}u^{10} + c$$

$$= \frac{1}{8}\sin^8 x - \frac{1}{10}\sin^{10} x + c$$

៣១–គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{\sin 2x.dx}{\sqrt{3-\sin^4 x}}$

គេមាន $I = \int \frac{\sin 2x.dx}{\sqrt{3-\sin^4 x}}$

$$= \int \frac{2\sin x\cos x.dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sin^2 x\right)^2}}$$

តាង $u = \sin^2 x$ នាំអោយ $du = 2\sin x\cos x.dx$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - u^2}}$$

$$= \arcsin\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + c \quad = \arcsin\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

៣២–គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{x^3-2x}{(x-1)^4}.dx$

$$I = \int \frac{x^3-2x}{(x-1)^4}.dx$$

តាង $u = x-1$ នាំអោយ $\begin{cases} x = u+1 \\ dx = du \end{cases}$

$$= \int \frac{(u+1)^3 - 2(u+1)}{u^4}.du$$

$$= \int \frac{u^3 + 3u^2 + 3u + 1 - 2u - 2}{u^4}.du$$

$$= \int \frac{u^3 + 3u^2 + u - 1}{u^4}.du$$

$$= \int \left(\frac{1}{u} + 3.\frac{1}{u^2} + u^{-3} - u^{-4}\right).du$$

$$= \ln|u| - \frac{3}{u} - \frac{1}{2}u^{-2} + \frac{1}{3}u^{-3} + c$$

$$= \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{2}(x-1)^{-2} + \frac{1}{3}(x-1)^{-3} + c$$

៣៣–គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{(\cos x - \sin x).dx}{1 + \sin 2x}$

គេមាន $I = \int \frac{(\cos x - \sin x).dx}{1 + \sin 2x}$

$$= \int \frac{(\cos x - \sin x).dx}{\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x}$$

$$= \int \frac{(\cos x - \sin x).dx}{(\sin x + \cos x)^2}$$

តាង $u = \sin x + \cos x$ នាំអោយ $du = (\cos x - \sin x).dx$

$$= \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{\sin x + \cos x} + c$$

៣៤-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.dx$

តាង $u=\sqrt{x}$ នាំអោយ $du=\frac{1}{2\sqrt{x}}.dx$

$$I=\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.dx$$

$$=\int \sin u.du=-\cos u+c$$

$$=-\cos\sqrt{x}+c$$

៣៥-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \cos(\sin x).\cos x dx$

តាង $u=\sin x$ នាំអោយ $du=\cos x.dx$

$$I=\int \cos(\sin x).\cos x dx$$

$$=\int \cos u.du=\sin u+c$$

$$=\sin(\sin x)+c$$

៣៦-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{5x^9.dx}{1+x^5}$

តាង $u=1+x^5$ នាំអោយ $du=5x^4.dx$

$$I=\int \frac{\left[\left(1+x^5\right)-1\right].5x^4.dx}{1+x^5}$$

$$=\int \frac{(u-1).du}{u}=\int \left(1-\frac{1}{u}\right).du=u-\ln|u|+c$$

$$=\left(1+x^5\right)-\ln\left|1+x^5\right|+c$$

៣៧–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{4x^7.dx}{\left(1+x^4\right)^2}$

តាង $u=1+x^4$ នាំអោយ $du=4x^3.dx$

$$I=\int \frac{x^4.4x^3.dx}{\left(1+x^4\right)^2}$$

$$=\int \frac{\left[\left(1+x^4\right)-1\right].4x^3.dx}{\left(1+x^4\right)^2}$$

$$=\int \frac{(u-1).du}{u^2}$$

$$=\int \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\right).du=\ln|u|+\frac{1}{u}+c$$

$$=\ln\left|1+x^4\right|+\frac{1}{1+x^4}+c$$

៣៨–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int e^{x^2+x}(2x+1).dx$

តាង $u=x^2+x$ នាំអោយ $du=(2x+1).dx$

$$I=\int e^{x^2+x}(2x+1).dx$$

$$=\int e^u.du=e^u+c$$

$$=e^{x^2+x}+c$$

ដូចនេះ $I=e^{x^2+x}+C$ ។

៣៩–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{(\cos x-\sin x).dx}{\sqrt{1+\sin x+\cos x}}$

តាង $u=1+\sin x+\cos x$ នាំអោយ $du=(\cos x-\sin x).dx$

$$I=\int \frac{(\cos x-\sin x).dx}{\sqrt{1+\sin x+\cos x}}$$
$$=\int \frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+c$$
$$=2\sqrt{1+\sin x+\cos x}+c$$

៤០–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{(x^2-1).dx}{(x^2+1)^2}$

ដោយចែកភាគយកនឹងភាគបែង នឹង x^2 គេបាន ៖

$$I=\int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right).dx}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}$$

តាង $u=x+\frac{1}{x}$ នាំអោយ $du=\left(1-\frac{1}{x^2}\right).dx$

$$=\int \frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}+c$$
$$=-\frac{1}{x+\frac{1}{x}}+c$$
$$=-\frac{x}{x^2+1}+c$$

៤១–គណនាអាំងតេក្រាល ៖

$$I=\int\frac{dx}{x^4+1}$$

គេមាន $I=\int\frac{dx}{x^4+1}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(1+\frac{1}{x^2})dx}{(x-\frac{1}{x})^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{(1-\frac{1}{x^2})dx}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

តាង $u=x-\frac{1}{x}$ នាំឲ្យ $du=(1+\frac{1}{x^2}).dx$

និង $v=x+\frac{1}{x}$ នាំឲ្យ $dv=(1-\frac{1}{x^2}).dx$

គេបាន $I=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{dv}{v^2-2}$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\frac{u}{\sqrt{2}})-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{v-\sqrt{2}}{v+\sqrt{2}}\right|+C$$

ដូចនេះ $I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x})-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|+C$ ។

៤២–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int (2x+1)\cos x.dx$

តាង $\begin{cases} u=2x+1 \\ dv=\cos x.dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du=2.dx \\ v=\sin x \end{cases}$

$$I=\int (2x+1)\cos x.dx$$
$$=(2x+1)\sin x-\int 2\sin x.dx$$
$$=(2x+1)\sin x+2\cos x+c$$

៤៣–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int (6x-1)\cos 3x.dx$

តាង $\begin{cases} u=6x-1 \\ dv=\cos 3x.dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du=6.dx \\ v=\frac{1}{3}\sin 3x \end{cases}$

$$I=\int (6x-1)\cos 3x.dx$$
$$=\frac{1}{3}(6x-1)\sin 3x-\int 2\sin 3x.dx$$
$$=\frac{1}{3}(6x-1)\sin 3x+\frac{2}{3}\cos 3x+c$$

៤៤–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int (2x+3)\sin 2x.dx$

តាង $\begin{cases} u=2x+3 \\ dv=\sin 2x.dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du=2.dx \\ v=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{cases}$

$$I=-\frac{1}{2}(2x+3)\cos 2x+\int \cos 2x.dx$$
$$=-\frac{1}{2}(2x+3)\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+c$$

៩៥-គណនាអាំងតេក្រាល

$$I=\int x^2\sin x.dx$$

តាង $\begin{cases} u=x^2 \\ dv=\sin x.dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du=2x.dx \\ v=-\cos x \end{cases}$

$$I=\int x^2\sin x.dx$$

$$=-x^2\cos x+\int 2x\cos x.dx$$

តាង $\begin{cases} u=2x \\ dv=\cos x.dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du=2.dx \\ v=\sin x \end{cases}$

$$=-x^2\cos x+\left[2x\sin x-\int 2\sin x.dx\right]$$

$$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+c$$

៩៦-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int (2x-3)e^x.dx$

តាង $\begin{cases} u=2x-3 \\ dv=e^x.dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du=2.dx \\ v=e^x \end{cases}$

$$I=\int (2x-3)e^x.dx$$

$$=(2x-3)e^x-\int 2e^x.dx$$

$$=(2x-3)e^x-2e^x+c$$

$$=(2x-5).e^x+c$$

ដូចនេះ $I=(2x-5).e^x+C$ ។

៤៧–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int (4x+1).e^{2x}.dx$

តាង $\begin{cases} u=4x+1 \\ dv=e^{2x}.dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du=4.dx \\ v=\frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$$I=\frac{1}{2}(4x+1)e^{2x}-\int 2e^{2x}.dx$$

$$=\frac{1}{2}(4x+1)e^{2x}-e^{2x}+c$$

$$=\frac{1}{2}(4x-1).e^{2x}+c$$

៤៨–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int x^2e^x.dx$

តាង $\begin{cases} u=x^2 \\ dv=e^x.dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du=2x.dx \\ v=e^x \end{cases}$

$$I=\int x^2e^x.dx$$

$$=x^2e^x-\int 2xe^x.dx$$

តាង $\begin{cases} u=2x \\ dv=e^x.dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du=2.dx \\ v=e^x \end{cases}$

$$=x^2e^x-\left[2xe^x-\int 2e^x.dx\right]$$

$$=x^2e^x-2xe^x-2e^x+c$$

$$=\left(x^2-2x-2\right)e^x+c$$

៤៩–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int x^3\ln x.dx$

តាង $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=x^3.dx \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} du=\dfrac{1}{x}.dx \\ v=\dfrac{1}{4}x^4 \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \int x^3\ln x.dx \\ &= \frac{1}{4}x^4\ln x-\int \frac{1}{4}x^4.\frac{1}{x}.dx \\ &= \frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^3.dx \\ &= \frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+c \end{aligned}$$

៥០–គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int x.\tan^2 x.dx$

តាង $\begin{cases} u=x \\ dv=\tan^2 x.dx \end{cases}$

នាំឲ្យ $\begin{cases} du=dx \\ v=\int \tan^2 xdx=\int (\dfrac{1}{\cos^2 x}-1).dx=\tan x-x \end{cases}$

គេបាន $I=x(\tan x-x)-\int (\tan x-x).dx$

ដូចនេះ $I=x\tan x-\dfrac{x^2}{2}+\ln|\cos x|+c$ ។

ជំពូកទី៣

លំហាត់អនុវត្តន៍

១-គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

1. $\int \left(x^4+4x^3\right).dx$

2. $\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2.dx$

3. $\int \frac{4x^7-3x^4+1}{x^2}.dx$

4. $\int \frac{(x+1)^2}{x^3}.dx$

5. $\int \left(5.\sqrt[3]{x^2}+7.\sqrt[4]{x^3}\right).dx$

6. $\int \frac{x^5+x^3+1}{\sqrt[3]{x^2}}.dx$

7. $\int \frac{dx}{2x+3}$

8. $\int (2x+1)^4.dx$

9. $\int \sqrt{3x+1}.dx$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+4)^2}}$

២-គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

1. $\int \left(e^x+e^{-x}\right)^2.dx$

2. $\int \left(e^{3x}+e^{-3x}\right).dx$

3. $\int \frac{\left(e^{2x}+1\right)^2}{e^{3x}}.dx$

4. $\int (\tan x+\cot x)^2.dx$

6. $\int (\sin x+\cos x)^2.dx$

7. $\int \sin^2 x.dx$

8. $\int \cos^2 x.dx$

9. $\int \sin 2x.\sin 4x.dx$

5. $\int (\sin x + \sin 2x).dx$

10. $\int \cos x.\cos 3x.dx$

៣-គណនាអាំងតេក្រាល៖

1. $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$

2. $\int \frac{dx}{4 - x^2}$

3. $\int \frac{dx}{x^2 + 4}$

4. $\int \frac{2dx}{x^4 - 1}$

5. $\int \frac{2x^2.dx}{x^4 - 1}$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$

៤-គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

1. $\int \frac{2x}{1 + x^2}.dx$

2. $\int \frac{2x}{(1 + x^2)^2}.dx$

3. $\int \frac{2x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}.dx$

4. $\int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 1}.dx$

5. $\int \frac{4x^3}{(1 + x^4)^2}.dx$

11. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}.dx$

12. $\int \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin 2x}.dx$

13. $\int \frac{\sin 2x.dx}{1 + \cos^2 x}$

14. $\int \frac{\sin 2x.dx}{3 - 4\sin^2 x}$

15. $\int \frac{\cos 7x - \cos 8x}{1 + 2\cos 5x}.dx$

6. $\int \sin^4 x.\cos x.dx$

7. $\int \cos^5 x \sin x.dx$

8. $\int \sin^2 x \cos^3 x$

9. $\int \sin^3 x.dx$

10. $\int \cos^5 x.dx$

16. $\int \frac{\sin x.\cos x}{\sqrt{a\sin^2 x + b\cos^2 x}}.dx$

17. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.dx$

18. $\int \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{\cos x + \sin x}}.dx$

19. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x}.dx$

20. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}.dx$

៥-គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

1. $\int \sin^5 x.\cos x.dx$

2. $\int \cos^7 x.\sin x.dx$

3. $\int \sin^2 x.\cos^3 x.dx$

4. $\int \cos^7 x.\sin^3 x.dx$

5. $\int \cos^4 x.\sin^5 x.dx$

6. $\int \sin^n x.\cos x.dx$

7. $\int \sin^n x.\cos^3 x.dx$

8. $\int \cos^n x.\sin x.dx$

9. $\int \cos^n x.\sin^3 x.dx$

10. $\int \sin^4 x.\cos^2 x.dx$

៦-គណនាអាំងតេក្រាល៖

1. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x}.dx$

3. $\int \frac{\sin^8 x}{\cos^{10} x}.dx$

2. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}.dx$

4. $\int \sin^5 x.dx$

៧-គណនាអាំងតេក្រាលៈ

1. $\int \frac{\sin^n x}{\cos^{n+2} x}.dx$

2. $\int \frac{\cos^n x}{\sin^{n+2} x}.dx$

3. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}.dx$

4. $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}.dx$

5. $\int \frac{dx}{x.\ln x}$

6. $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}.dx$

7. $\int \frac{e^{\sqrt{x}} + \sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.dx$

8. $\int \frac{\left(x^2+1\right).dx}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}$

9. $\int \frac{x^9}{1+x^5}.dx$

10. $\int \frac{x^7.dx}{\sqrt[3]{\left(x^4+1\right)^2}}$

៨-គណនាអាំងតេក្រាលៈ

1. $\int \frac{\ln^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}.dx$

2. $\int e^{\sin^2 x}.\sin 2x.dx$

3. $\int e^{-x^2+2x}.(x-1).dx$

6. $\int \frac{\left(1+e^x\right).dx}{\left(x+e^x\right)^2}$

7. $\int \frac{e^x.dx}{1+e^x}$

8. $\int \frac{e^x.dx}{\left(1+e^x\right)^2}$

4. $\int \frac{1+\sin x}{\sqrt{x-\cos x}}.dx$

9. $\int \frac{dx}{1+e^x}$

5. $\int \frac{\sin 2x}{e^{\cos^2 x}}.dx$

10. $\int \frac{(x+1).e^x}{1+xe^x}.dx$

៩-គណនាអាំងតេក្រាល៖

1. $\int \frac{(1-x).dx}{x+e^x}$

6. $\int \frac{x.dx}{x^4-1}$

2. $\int \frac{1+\ln x}{1+x^{-x}}.dx$

7. $\int \frac{\cos x.dx}{2-\cos^2 x}$

3. $\int e^{x+e^x}.dx$

8. $\int \frac{\sin x.dx}{5-\sin^2 x}$

4. $\int x^x.(1+\ln x).dx$

9. $\int \frac{\sin 2x.dx}{1+\sin^4 x}$

5. $\int \frac{\cot x}{\sqrt{1+\ln \sin x}}.dx$

10. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

១០-គណនាអាំងតេក្រាល៖

1. $\int \frac{dx}{\sin x}$

11. $\int \frac{1}{(1+x)^2}.\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}.dx$

2. $\int \frac{dx}{\cos x}$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^3-3x+2)^2}}$

3. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.dx$

13. $\int \frac{1}{(1-x)^2}.\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}.dx$

4. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}.dx$

5. $\int \frac{\cos x}{\sin^5 x}.dx$

6. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^8 x}.dx$

7. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^{10} x}.dx$

8. $\int \frac{2x^3 + x^7}{\sqrt[3]{\left(1+x^4\right)^2}}.dx$

9. $\int \frac{\tan x.dx}{3 - \ln^2 \cos x}$

10. $\int \frac{\sin 2x.dx}{\sqrt{3 - \cos^4 x}}$

14. $\int \frac{\ln\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)}{\sqrt{x^2+4}}.dx$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\left[x(x-3)^2 - 4\right]^2}}$

16. $\int \left(\frac{1}{1+x}.\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2 dx$

17. $\int \frac{\arctan x}{x^2+1}.dx$

18. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.dx$

19. $\int \sqrt[3]{\tan x}.dx$

20. $\int \frac{x^2-2}{x^4+4}.dx$

១១-គណនាអាំងតេក្រាលៈ

1. $\int \frac{x-1}{x^2+1}.dx$

2. $\int x^4.\ln x.dx$

3. $\int x^3.\ln x.dx$

6. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}.dx$

7. $\int x^5.\ln^2 x.dx$

8. $\int x^7.\ln^3 x.dx$

4. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.dx$

9. $\int \ln^4 x.dx$

5. $\int \frac{\ln x}{x^5}.dx$

10. $\int xe^{2x}.dx$

១២-គណនាអាំងតេក្រាល

1. $\int \left(3x^2+2x\right).\ln x.dx$

2. $\int xe^{-3x}.dx$

3. $\int x^2e^x.dx$

4. $\int x^3e^{-x}.dx$

5. $\int xe^{\sqrt{x}}.dx$

6. $\int \left(xe^x\right)^2.dx$

7. $\int \sin\left(\ln x\right).dx$

8. $\int \cos\left(\ln x\right).dx$

9. $\int e^x\sin x.dx$

10. $\int e^x\cos x.dx$

១៣-គណនាអាំងតេក្រាល៖

1. $\int e^{-x}.\sin x\cos x.dx$

2. $\int e^{-2x}\left(1-2\sin^2 x\right).dx$

3. $\int e^x.\cos^2 x.dx$

4. $\int \frac{\sin^2 x}{e^{2x}}.dx$

5. $\int x^3e^{x^2}.dx$

6. $\int \frac{x^5}{e^{x^3}}.dx$

7. $\int x^3\sin\left(\ln x\right).dx$

8. $\int x^4.\cos\left(\ln x\right).dx$

9. $\int x^n.\sin\left(\ln x\right).dx$

10. $\int x^n.\cos\left(\ln x\right).dx$

១៤-គណនាអាំងតេក្រាលៈ

1. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$

2. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$

3. $\int x\sin x.dx$

4. $\int (x+1).\cos x.dx$

5. $\int x^2.\sin 2x.dx$

6. $\int x.\sin^2 x.dx$

7. $\int x^2.\cos 2x.dx$

8. $\int (2x-1).e^x.dx$

9. $\int x^2.e^x.dx$

10. $\int \frac{x}{\sin^2 x}.dx$

11. $\int \frac{x}{\cos^2 x}.dx$

12. $\int x^3.\sin x.dx$

13. $\int x^3.\cos x.dx$

14. $\int x^3.e^x.dx$

15. $\int e^x \sin^2 x.dx$

16. $\int e^x \cos^2 x.dx$

17. $\int \frac{x^4}{e^x}.dx$

18. $\int (x^2-3x+1)e^x.dx$

១៥-គណនាអាំងតេក្រាលៈ

1. $\int \arctan x.dx$

2. $\int \arcsin x.dx$

6. $\int \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}.dx$

7. $\int \frac{\arccos x}{x^2\sqrt{1-x^2}}.dx$

3. $\int \arccos x.dx$

4. $\int \ln x.dx$

5. $\int x.\arctan x.dx$

8. $\int \frac{x^2.\arctan x}{1+x^2}.dx$

9. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}}$

10. $\int \frac{(x^2+3x)(2x+3).dx}{(x^2+3x+1)^2}$

១៦-គណនាអាំងតេក្រាល៖

1. $\int \frac{2x.\ln x}{(1+x^2)^2}.dx$

2. $\int x\tan^2 x.dx$

3. $\int x\cot x.dx$

4. $\int \frac{x.\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.dx$

5. $\int \frac{x.\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.dx$

6. $\int \frac{x^4.dx}{(x^4+1)^2}$

7. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.e^{\arcsin x}.dx$

8. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.e^{\arccos x}.dx$

9. $\int \frac{x^{n-1}.\ln x}{(1+x^n)^2}.dx$

10. $\int \frac{x^{2n-1}}{(1+x^n)^2}.dx$

១៧-គណនាអាំងតេក្រាល៖

1. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}.dx$

6. $\int \frac{x^2\cos x}{\sin^3 x}.dx$

2. $\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}.dx$

3. $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}.dx$

4. $\int \frac{x\sin x}{\cos^2 x}.dx$

5. $\int \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}.dx$

7. $\int \frac{x^2\sin x}{\cos^3 x}.dx$

8. $\int \frac{x^7.dx}{(1+x^4)^2}$

9. $\int \frac{x^{19}.dx}{(1+x^{10})}$

10. $\int \frac{x^7.dx}{(4+x^4)^3}$

១៨-គណនាអាំងតេក្រាលៈ

1. $\int \frac{x\sin x}{(2+\cos x)^2}.dx$

2. $\int \frac{x.dx}{\sqrt{\tan x}.\cos^2 x}$

3. $\int \frac{x^6-3x^4}{(x^4+1)^2}.dx$

4. $\int \frac{(x^2-x).dx}{(x^2-2x-3)^2}$

5. $\int \frac{x\cos x}{(1+\sin x)^2}.dx$

6. $\int \frac{(\sin x+\cos x)\cos 2x}{(1+\sin 2x)^2}.dx$

7. $\int \tan^2\sqrt{x}.dx$

8. $\int x\sin\sqrt{x}.dx$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2\sqrt{x}}$

10. $\int \frac{dx}{\cos^2\sqrt{x}}$

១៩-គណនាអាំងតេក្រាលៈ

1. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$

2. $\int e^x \sin x \sin 2x.dx$

3. $\int e^{\sqrt{x}}.dx$

4. $\int \cos \sqrt[3]{x}.dx$

5. $\int x^2\left(\tan x + \tan^3 x\right).dx$

6. $\int \frac{(x-1).e^x}{x^2}.dx$

7. $\int \left(e^x \ln x + \frac{e^x}{x}\right).dx$

8. $\int \left(\frac{\tan^2 x}{x} - \frac{\tan x}{x^2}\right).dx$

9. $\int \tan x(1+\tan x)e^x.dx$

10. $\int \frac{2-x}{x^3}.e^x.dx$

២០-គណនាអាំងតេក្រាលៈ

1. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}.dx$

2. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}.dx$

3. $\int \frac{dx}{x^4+1}$

4. $\int \sqrt{\tan x}.dx$

5. $\int \sqrt{\cot x}.dx$

6. $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}.dx$

7. $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}.dx$

8. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

9. $\int x^n \cos(\ln x).dx$

10. $\int x^n \sin(\ln x).dx$

២១-គណនាអាំងតេក្រាល៖

1. $\int x^n \ln x.dx$
2. $\int x^n \ln^2 x.dx$
3. $\int \sin^2(\ln x).dx$
4. $\int \cos^2(\ln x).dx$
5. $\int e^x.\sin^2 x.dx$
6. $\int e^x.\cos^2 x.dx$
7. $\int x^3 \sin^2 x.dx$
8. $\int x^3 \cos^2 x.dx$
9. $\int \frac{dx}{x^6+1}$
10. $\int \frac{nx^{n-1}.\ln x}{(1+x^n)^2}.dx$

២២-គេឱ្យអាំងតេក្រាល៖

$$I = \int e^{-2x} \cos^2 x.dx \quad \text{និង} \quad J = \int e^{-2x} \sin^2 x.dx$$

ក-គណនា $I+J$ និង $I-J$

ខ-ទាញរក I និង J ។

២៣-គេឱ្យអាំងតេក្រាល៖

$$I = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}.dx \quad \text{និង} \quad J = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}.dx$$

ក-គណនា $I+J$ និង $I-J$

ខ-ទាញរក I និង J ។

២៤-គេឱ្យអាំងតេក្រាល៖

$I = \int x\cos^2 x.dx$ និង $J = \int x\sin^2 x.dx$

ក-គណនា $I + J$ និង $I - J$

ខ-ទាញរក I និង J ។

២៥-គេឱ្យអាំងតេក្រាល៖

$I = \int \frac{x+1}{e^{-x}+x}.dx$ និង $J = \int \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+x}.dx$

គណនា $I + J$,J រួចទាញរក I ។

២៦–គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}.dx$ និង $J = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}.dx$

ក-គណនា $I + J$ និង $I - J$

ខ-ទាញរក I និង J ។

២៧–គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I = \int e^x \cos^2 x.dx$ និង $J = \int e^x \sin^2 x.dx$

ក-គណនា $I + J$ និង $I - J$

ខ-ទាញរក I និង J ។

ជំពូកទី៤

អាំងតេក្រាលកំណត់

១-រូបមន្តញូតុន-ឡៃបនិច

អាំងតេក្រាលកំនត់ពី a ទៅ b នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាផលដក $F(b)-F(a)$ ។ ដែល $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។ គេកំនត់សរសេរ៖

$$\boxed{\int_a^b f(x).dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)}$$

២-លក្ខណៈអាំងតេក្រាលកំនត់

ក. $\int_a^a f(x).dx = 0$ ខ. $\int_a^b f(x).dx = -\int_b^a f(x).dx$

គ. $\int_a^b k.f(x).dx = k.\int_a^b f(x).dx$

ឃ. $\int_a^b \left[f(x)+g(x)\right].dx = \int_a^b f(x).dx + \int_a^b g(x).dx$

ង. $\int_a^b \left[f(x)-g(x)\right].dx = \int_a^b f(x).dx - \int_a^b g(x).dx$

ច. $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(z).dz = \int_a^b f(t).dt$

៣-រូបមន្តប្តូរអថេរ

–សន្មតថាគេមាន $\mathbf{I=\int_a^b f(x).dx}$ $\mathbf{(1)}$

បើគេតាង $\mathbf{x=\phi(t)}$ នាំអោយ $\mathbf{dx=\phi'(t).dt}$ ហើយចំពោះ $\mathbf{x\in[a,b]}$

នោះ $\mathbf{t\in[t_1,t_2]}$

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{I=\int_a^b f(x).dx=\int_{t_1}^{t_2} f[\phi(t)].\phi'(t).dt}}$

–សន្មតថាគេមាន $\mathbf{I=\int_a^b f[\phi(x)].\phi'(x).dx}$ $\mathbf{(2)}$

បើគេតាង $\mathbf{u=\phi(x)}$ នាំអោយ $\mathbf{du=\phi'(x).dx}$

ចំពោះ $\mathbf{x\in[a,b]}$ នោះ $\mathbf{u\in[\phi(a),\phi(b)]}$

គេបាន $\boxed{\mathbf{I=\int_a^b f[\phi(x)].\phi'(x).dx=\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u).du}}$

៤-រូបមន្តគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

$$\boxed{\int_a^b u.dv=[u.v]_a^b-\int_a^b v.du}$$

៥-គណនាក្រឡាផ្ទៃ

ក. ក្រឡាផ្ទៃខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ និង អក្ស័អាប់ស៊ីស

ក្រឡាផ្ទៃខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $(C): y = f(x)$ ជាមួយអក្ស័អាប់ស៊ីស

$(x'ox)$ និង បន្ទាត់ $x = a$ និង $x = b$ កំនត់ដោយ៖

$$\boxed{S = \int_a^b f(x).dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)}$$

ខ. ក្រឡាផ្ទៃខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ

ក្រឡាផ្ទៃខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $(C_1): y = f(x)$ និង

លើចន្លោះ $[a,b]$ ដែលគ្រប់ $x \in [a,b]: f(x) \geq g(x)$ កំនត់ដោយ៖

$$\boxed{S = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right].dx}$$

៦-គណនាមាឌសូលីដបរិវត្តន៍

ក. មាឌសូលីតបរិវត្តន៍កំនត់បានពីរង្វិលក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌ័ដោយ

ខ្សែកោង $(c): y = f(x)$ ជុំវិញអក្ស័អាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ $[a,b]$

កំនត់ដោយ $\boxed{V = \pi \times \int_a^b [f(x)]^2 .dx}$ ។

ខ. មាឌសូលីតបរិវត្តន៍កំនត់បានពីររង្វិលក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរៈ

$(c_1): y = f(x)$ និង $(c_2): y = g(x)$ ជុំវិញអក្ស័រអាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ $[a,b]$

កំនត់ដោយ $\boxed{V = \pi \times \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x) \right].dx}$

ដែល $\left(f(x) \geq g(x) \ , \forall x \in [a,b] \right)$ ។

ជំពូកទី៦

លំហាត់មានដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 x^n e^{-2x}.dx \ ; n \in IN$

ក/សិក្សាអថេរភាពនៃ (I_n) រួចរកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n+1} ។

ខ/ស្រាយថា $\forall n \geq 2 : \ 0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n-1)e^2}$ ។ ទាញរក $\lim_{n\to+\infty} I_n$ ។

(ប្រឡងអាហារូបករណ៍ទៅប្រទេសចិនថ្នាក់ឧត្តមឆ្នាំ២០០២)

ដំណោះស្រាយ

ក/សិក្សាអថេរភាពនៃ (I_n) រួចរកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n+1} ៖

ចំពោះគ្រប់ $x \in [0,1]$ និង $n \in IN$ គេមាន $x^{n+1} \leq x^n$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង e^{-2x} គេបាន $x^{n+1}e^{-2x} \leq x^n e^{-2x}$

នាំឲ្យ $\int_0^1 x^{n+1}e^{-2x}.dx \leq \int_0^1 x^n e^{-2x}.dx$ ឬ $I_{n+1} \leq I_n$ ។

ដូចនេះ I_n ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ម្យ៉ាងទៀត $I_n = \int_0^1 x^n e^{-2x}.dx \ ; n \in IN$ នាំឲ្យ $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-2x}.dx$

តាង $\begin{cases} u = x^{n+1} \\ dv = e^{-2x}.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (n+1)x^n.dx \\ v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$

គេបាន $I_{n+1} = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}x^{n+1} \right]_0^1 + \frac{n+1}{2}\int_0^1 x^n e^{-2x}.dx$

ដូច្នេះ $I_{n+1} = -\frac{1}{2e^2} + \frac{n+1}{2} I_n$ ជាទំនាក់ទំនងដែលត្រូវរក ។

ខ/ស្រាយថា $\forall n \ge 2 : \ 0 \le I_n \le \frac{1}{(n-1)e^2}$ រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty} I_n$

គេមាន (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះនោះគេបាន $I_{n+1} \le I_n$ តែ $I_{n+1} = -\frac{1}{2e^2} + \frac{n+1}{2} I_n$

គេបាន $-\frac{1}{2e^2} + \frac{n+1}{2} I_n \le I_n$ នាំឲ្យ $I_n \le \frac{1}{(n-1)e^2} (1)$

ហើយ $\forall x \in [0,1] : x^n e^{-2x} \ge 0$ នាំឲ្យ $I_n = \int_0^1 x^n e^{-2x}.dx \ge 0 \ (2)$ ។

តាម(1)និង(2) $\forall n \ge 2 : \ 0 \le I_n \le \frac{1}{(n-1)e^2}$ និង $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ ។

លំហាត់ទី២ (ប្រឡងនៅប្រទេសហ្វីលីពីន ឆ្នាំ ១៩៩៨)

1/រកបីចំនួនថេរ A, B, C ដែលគ្រប់ $x \neq -1$ គេបាន ៖

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B(2x-1)}{x^2-x+1} + \frac{c}{x^2-x+1}$$

2/គណនា $I = \int \frac{x\,dx}{x^3+1}$

3/គ្រប់ $n > 0$ តាង $J_n = \int_0^n \frac{x}{x^3+1}.dx$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

1/រកបីចំនួនថេរ A, B, C ៖

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B(2x-1)}{x^2-x+1} + \frac{c}{x^2-x+1}$$

$$x = A(x^2-x+1) + B(2x-1)(x+1) + C(x+1)$$

$$x = (A+2B)x^2 + (-A+B+C)x + (A-B+C)$$

គេទាញ $\begin{cases} A+2B=0 \\ -A+B+C=1 \\ A-B+C=0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $A = -\frac{1}{3}, B = \frac{1}{6}, C = \frac{1}{2}$ ។

2/គណនា $\mathbf{I=\int \frac{x\,dx}{x^3+1}}$

ចំពោះ $\mathbf{A=-\frac{1}{3}\,,B=\frac{1}{6}\,,C=\frac{1}{2}}$

គេមានសមភាព $\mathbf{\frac{x}{x^3+1}=-\frac{1}{3}.\frac{1}{x+1}+\frac{1}{6}.\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}.\frac{1}{x^2-x+1}}$

គេគេបាន $\mathbf{I=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}}$

$$\mathbf{=-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}$$

តាង $\mathbf{u=x-\frac{1}{2}}$ នោះ $\mathbf{du=dx}$

គេបាន $\mathbf{I=\frac{1}{6}\ln\frac{(x^2-x+1)}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}$

$$\mathbf{=\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2u}{\sqrt{3}})+C}$$ ដោយ $\mathbf{u=x-\frac{1}{2}}$

ដូចនេះ $\mathbf{I=\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+C}$ ។

3/ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

គ្រប់ $n > 0$ គេមាន $J_n = \int_0^n \frac{x}{x^3+1}.dx$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន

$$I = \int \frac{xdx}{x^3+1} = \frac{1}{6}\ln\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + C$$

គេបាន $J_n = \left[\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})\right]_0^n$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{n^2-n+1}{(n+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2n-1}{\sqrt{3}}) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{n^2-n+1}{(n+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2n-1}{\sqrt{3}}) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \lim\limits_{n\to+\infty}[\frac{1}{6}\ln\frac{n^2-n+1}{(n+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2n-1}{\sqrt{3}}) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}]$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\frac{n^2-n+1}{(n+1)^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan(\frac{2n-1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{2}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ ។

លំហាត់ទី៣ (ប្រឡងនៅប្រទេសម៉ាលេស៊ីឆ្នាំ ១៩៩៨)

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}.dx$ ដែល n ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន

ក/រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-1} ។

ខ/គណនា $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n-1}}{I_n}$ ។

គ/គណនា I_0 រួចទាញរក I_n ។

ដំណោះស្រាយ

ក/រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-1} ៖

មាន $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}.dx$

តាង $\begin{cases} u = x^n \\ dv = \sqrt{1-x}.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = nx^{n-1}.dx \\ v = \int \sqrt{1-x}dx = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} \end{cases}$

$$I_n = \left[-\frac{2x^n}{3}(1-x)\sqrt{1-x} \right]_0^1 + \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}dx$$

$$I_n = \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}.dx - \frac{2n}{3}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}.dx$$

$$I_n = \frac{2n}{3}I_{n-1} - \frac{2n}{3}I_n$$

$$(1+\frac{2n}{3})I_n = \frac{2n}{3}I_{n-1}$$

ដូចនេះ $I_n = \frac{2n}{2n+3}\,I_{n-1}$ ជាទំនាក់ទំនងដែលត្រូវរក ។

ខ/គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_{n-1}}{I_n}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $I_n = \frac{2n}{2n+3}\,I_{n-1}$

នោះ $\frac{I_{n-1}}{I_n} = \frac{2n+3}{2n} = 1 + \frac{3}{2n}$

គេបាន $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_{n-1}}{I_n} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{3}{2n}) = 1$ ។ ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_{n-1}}{I_n} = 1$ ។

គ/គណនា I_0 រួចទាញរក I_n ៖

បើ $n=0$ នោះ $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}.dx$

តាង $\sqrt{1-x} = t$ នាំឲ្យ $x = 1-t^2$ នោះ $dx = -t.dt$

បើ $x=0$ នោះ $t=1$ និង $x=1$ នោះ $t=0$

គេបាន $I_0 = \int_1^0 t.(-2tdt) = \int_0^1 2t^2.dx = \left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

ដូចនេះ $I_0 = \frac{2}{3}$ ។ ម្យ៉ាងទៀត $I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$ នោះ $\frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{2n}{2n+3}$

បើ $n = 1$ នោះ $\frac{I_1}{I_0} = \frac{2}{5}$

បើ $n = 2$ នោះ $\frac{I_2}{I_1} = \frac{4}{7}$

បើ $n = 3$ នោះ $\frac{I_3}{I_2} = \frac{6}{9}$

បើ $n = n$ នោះ $\frac{I_{n-1}}{I_n} = \frac{2n}{2n+3}$

គុណអង្គនិងអង្គគេបាន $\frac{I_n}{I_0} = \frac{2\times 4\times 6\times ....\times 2n}{5\times 7\times 9\times ...\times (2n+3)}$ ដោយ $I_0 = \frac{2}{3}$

ដូចនេះ $I_n = \frac{2\times 4\times 6\times ....\times 2n}{5\times 7\times 9\times ...\times (2n+3)}\times\frac{2}{3}$ ។

លំហាត់ទី៤ (ប្រឡងអាហារូបករណ៍ប្រទេសចិនឆ្នាំ១៩៩៦)

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x.dx \ , n \in IN$

1/រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2} ។

2/ទាញរក I_{2p} និង I_{2p+1} ដែល $p \in IN$ ។

ដំណោះស្រាយ

1/រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2} ៖

មាន $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x.dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x . \cos x.dx \ , n \in IN$

តាង $\begin{cases} u = \cos^{n-1} x \\ dv = \cos x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -(n-1)\sin x \cos^{n-2} x.dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$I_n = \left[\cos^{n-1} x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{n-2} x.dx$$

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x.dx$$

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x.dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x.dx$$

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n}.I_{n-2}$$

ដូចនេះ $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$,

2/ទាញរក I_{2p} និង I_{2p+1} ដែល $p \in IN$ ៖

គេមាន $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ នោះ $\frac{I_n}{I_{n-2}} = \frac{n-1}{n}$

-បើ $n = 2k$ នោះ $\frac{I_{2k}}{I_{2k-2}} = \frac{2k}{2k-1}$

គេបាន $\prod_{k=1}^{p} \frac{I_{2k}}{I_{2k-2}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$

$$\frac{I_2}{I_0}.\frac{I_4}{I_2}.\frac{I_6}{I_4}...\frac{I_{2p}}{I_{2p-2}} = \frac{1\times 3\times 5\times ....\times(2p-1)}{2\times 4\times 6\times ....\times 2p}$$

$$I_{2p} = \frac{1\times 3\times 5\times ....\times(2p-1)}{2\times 4\times 6\times ......\times 2p}\times I_0$$

តែ $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ ដូចនេះ $I_{2p} = \frac{1\times 3\times 5\times ....\times(2p-1)}{2\times 4\times 6\times ......\times 2p}\times \frac{\pi}{2}$ ។

$-$បើ $\mathbf{n = 2k + 1}$ នោះ $\dfrac{\mathbf{I_{2k+1}}}{\mathbf{I_{2k-1}}} = \dfrac{\mathbf{2k}}{\mathbf{2k+1}}$

គេបាន $\prod\limits_{k=1}^{p} \dfrac{\mathbf{I_{2k+1}}}{\mathbf{I_{2k-1}}} = \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\mathbf{2k}}{\mathbf{2k+1}}$

$$\frac{I_3}{I_1}\cdot\frac{I_5}{I_3}\cdot\frac{I_7}{I_5}\cdots\frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}} = \frac{2\times4\times6\times....\times2p}{3\times5\times7\times.......\times2p+1}$$

$$I_{2p+1} = \frac{2\times4\times6\times....\times(2p)}{3\times5\times7\times......\times2p+1}\times I_1$$

តែ $\mathbf{I_1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

ដូចនេះ $\mathbf{I_{2p+1}} = \dfrac{\mathbf{2\times4\times6\times....\times(2p)}}{\mathbf{3\times5\times7\times......\times2p+1}}$ ។

លំហាត់ទី៥(ប្រឡងនៅប្រទេសអូស្រ្តាលីផ្នែកអេឡិចត្រូនិច)

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}.dx$ ដែល $n = 0,1,2,...$

ក/រក I_0 រួចបង្កើតទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-1} ។ គណនា I_n ។

ខ/ស្រាយបញ្ជាក់ថា $I_n < \frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក/រក I_0 រួចបង្កើតទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-1} ៖

បើ $n = 0$ នោះ $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}.dx$

តាង $\sqrt{1-x} = t$ នាំឲ្យ $x = 1 - t^2$ នោះ $dx = -t.dt$

បើ $x = 0$ នោះ $t = 1$ និង $x = 1$ នោះ $t = 0$

គេបាន $I_0 = \int_1^0 t.(-2tdt) = \int_0^1 2t^2.dx = \left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

ដូចនេះ $I_0 = \frac{2}{3}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}.dx$

តាង $\begin{cases} u = x^n \\ dv = \sqrt{1-x}.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = nx^{n-1}.dx \\ v = \int \sqrt{1-x}dx = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} \end{cases}$

$$I_n = \left[-\frac{2x^n}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 + \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}dx$$

$$I_n = \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}.dx - \frac{2n}{3}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}.dx$$

$$I_n = \frac{2n}{3}I_{n-1} - \frac{2n}{3}I_n$$

$$(1+\frac{2n}{3})I_n = \frac{2n}{3}I_{n-1}$$

ដូចនេះ $I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1}$ ជាទំនាក់ទំនងដែលត្រូវរក ។

គណនា I_n ៖

គេមាន $I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1}$ នោះ $\frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{2n}{2n+3}$

គេបាន $\prod_{k=1}^{n}\frac{I_k}{I_{k-1}} = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+3}$

ឬ $\frac{I_n}{I_0} = \frac{2\times4\times6\times....\times2n}{5\times7\times9\times...\times(2n+3)}$ ដោយ $I_0 = \frac{2}{3}$

ដូចនេះ $I_n = \frac{2\times4\times6\times....\times2n}{5\times7\times9\times...\times(2n+3)}\times\frac{2}{3}$ ។

ខ/ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\mathbf{I_n < \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}}$

គេមាន $\mathbf{I_n = \dfrac{2\times 4\times 6\times ....\times 2n}{5\times 7\times 9\times ...\times (2n+3)}\times \dfrac{2}{3}}$

$$\mathbf{= \frac{2\times 4\times 6\times ....\times (2n+2)}{3\times 5\times 7\times ....\times (2n+3)}\times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}\frac{2k}{2k+1}}$$

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រចំពោះគ្រប់ $\mathbf{k \in IN}$

គេមាន $\mathbf{(2k)+(2k+2) \geq 2\sqrt{(2k)(2k+2)}}$ ឬ $\mathbf{2k+1 \geq \sqrt{2k(2k+2)}}$

គេទាញ $\mathbf{\dfrac{2k}{2k+1} \leq \dfrac{2k}{\sqrt{2k(2k+2)}} = \sqrt{\dfrac{k}{k+1}}}$

គេបាន $\mathbf{I_n \leq \dfrac{1}{n+1}\prod\limits_{k=1}^{n+1}\sqrt{\dfrac{k}{k+1}} = \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}} < \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}}$

ដូចនេះ $\mathbf{I_n < \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}}$ ។

លំហាត់ទី៦

គេឲ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ និង $\mathbf{g}$ កំណត់ដោយ ៖

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi x}{1-x} & \text{បើ } x \neq 1 \\ \pi & \text{បើ } x = 1 \end{cases}$$ និង

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n \sin \pi x}{1-x} & \text{បើ } 0 \leq x < 1 \\ \pi & \text{បើ } x = 1 \end{cases}$$

1/ស្រាបញ្ជាក់ថា $\mathbf{f}$ និង $\mathbf{g}$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[0,1]$ ។

2/គណនា $S_n = I_0 + I_1 + I_2 + \dots + I_{n-1}$ ដែល $I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x . dx$ ។

3/ស្រាយថា $S_n = \int_0^1 f(x).dx - \int_0^1 g(x).dx$ រួចទាញថា $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \int_0^\pi \dfrac{\sin x}{x}.dx$

ដំណោះស្រាយ

1/ស្រាបញ្ជាក់ថា $\mathbf{f}$ និង $\mathbf{g}$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[0,1]$

គេមាន $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x}{1-x} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin \pi(1-t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin \pi}{\pi t} \times \pi = \pi = f(1)$

ដូចគ្នាដែរ $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n \sin \pi x}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1} [x^n f(x)] = \pi = g(1)$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ$[0,1]$ ។

2/គណនា $S_n = I_0 + I_1 + I_2 + ... + I_{n-1}$ ដែល $I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x.dx$

គេបាន $S_n = \int_0^1 (1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}) \sin \pi x.dx = \int_0^1 \frac{1 - x^n}{1 - x} \sin \pi x.dx$

$$= \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1 - x}.dx - \int_0^1 \frac{x^n \sin \pi x}{1 - x}.dx \quad ។$$

3/ស្រាយថា$S_n = \int_0^1 f(x).dx - \int_0^1 g(x).dx$ និង $\lim_{n \to +\infty} S_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}.dx$

គេមាន $= \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1 - x}.dx - \int_0^1 \frac{x^n \sin \pi x}{1 - x}.dx$ ។

ដោយ $f(x) = \frac{\sin \pi x}{1 - x}$ និង $g(x) = \frac{x^n \sin \pi x}{1 - x}$ កំណត់ជាប់លើ $[0,1]$ ។

ដូចនេះ $S_n = \int_0^1 f(x).dx - \int_0^1 g(x).dx$ ។

ដោយ f និង g ជាអនុគមន៍កំណត់ និង ជាប់លើ $[0,1]$

នោះគ្រប់ $x \in [0,1]$ មាន $M > 0$ ដែល $|f(x)| < M$

ហើយនិង $|g(x)| = x^n |f(x)| < M.x^n$ ។

នាំឲ្យ $|\int_0^1 g(x).dx| \le \int_0^1 |g(x)|dx < M.\int_0^1 x^n.dx = \frac{M}{n+1}$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty} \frac{M}{n+1} = 0$ នោះ $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g(x).dx = 0$

គេទាញ $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1-x}.dx$ (1)

តាង $1-x=t$ ឬ $x = 1-t \Rightarrow dx = -dt$

បើ $x=0$ នោះ $t=1$ និង $x=1$ នោះ $t=0$

គេបាន $\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1-x}.dx = \int_1^0 \frac{\sin \pi(1-t)}{t}(-dt) = \int_0^1 \frac{\sin \pi t}{t}.dt$ (2)

តាង $x = \pi t \Rightarrow dx = \pi.dt$

បើ $t=0$ នោះ $x=0$ និង $t=1$ នោះ $t=\pi$

គេបាន $\int_0^1 \frac{\sin \pi t}{t}.dt = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}.dx$ (3)

តាម (1) , (2) និង (3) គេបាន $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}.dx$ ពិត ។

លំហាត់ទី៧

លើអង្កត់ $[0,\frac{\pi}{2}]$ ដែលត្រូវនឹងចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n \in IN$ គេកំណត់អនុគមន៍

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{\sin x} & \text{បើ} \quad x > 0 \\ n & \text{បើ} \quad x = 0 \end{cases}$$

1/ស្រាយថា $f_n(x)$ មានអាំងតេក្រាលលើ អង្កត់ $[0,\frac{\pi}{2}]$ ។

2/តាង $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x).dx$ ។ រកទំនាក់ទំនងរវាង I_{2n+1} និង I_{2n-1} ។

ដំណោះស្រាយ

1/ស្រាយថា $f_n(x)$ មានអាំងតេក្រាលលើ អង្កត់ $[0,\frac{\pi}{2}]$ ៖

គេមាន $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{\sin x} = n \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{(nx)} . \frac{x}{\sin x} = n = f(0)$

នាំឲ្យ f_n ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 0$ នោះ f_n ជាប់លើ$[0,\frac{\pi}{2}]$។

ដូចនេះ $f_n(x)$ មានអាំងតេក្រាលលើ $[0,\frac{\pi}{2}]$។

2/ រកទំនាក់ទំនងរវាង I_{2n+1} និង I_{2n-1}

គេមាន $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{\sin x}.dx$ នោះ $I_{2n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}.dx$

និង $I_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}.dx$ ។

គេបាន $I_{2n+1} - I_{2n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x}{\sin x}.dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x \cos(2nx)}{\sin x}.dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nx).dx = \frac{1}{n}\left[\sin(2nx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

ដូចនេះ $I_{2n+1} = I_{2n-1}$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឲ្យ $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$ ដែល n ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន ។

1/រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n+2} ។

2/ស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $f(n) = (n+1)I_n.I_{n+1}$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(n+1) = f(n)$ ។

3/គណនា $f(n)$ ។

ដំណោះស្រាយ

1/រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n+2} ៖

គេមាន $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$ នោះ $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x.\sin xdx$

តាង $\begin{cases} u = \sin^{n+1} x \\ dv = \sin x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (n+1)\cos x \sin^n x.dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

គេបាន $I_{n+2} = \left[-\sin^{n+1} x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^n x.dx$

$$I_{n+2}=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^n x.dx$$

$$I_{n+2}=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x.dx-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}x.dx$$

$I_{n+2}=(n+1)I_n-(n+1)I_{n+2}$ នាំឲ្យ $I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$ ។

2/បញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $f(n)=(n+1)I_n.I_{n+1}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(n+1)=f(n)$

គេមាន $f(n)=(n+1)I_n.I_{n+1}$ នោះ $f(n+1)=(n+2)I_{n+1}.I_{n+2}$

តែ $I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$ នោះ

$$f(n+1)=(n+2).I_{n+1}\frac{n+1}{n+2}I_n=(n+1)I_nI_{n+1}$$

ដូចនេះ $f(n+1)=f(n)$ ។

3/គណនា $f(n)$ ៖

ដោយ $f(n+1)=f(n)$ នោះ $f(n)$ ជាអនុគមន៍ថេរ ។

គេបាន $f(n)=f(0)=I_0.I_1$ ដោយ $I_0=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$ និង $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.dx=1$

ដូចនេះ $f(n)=\dfrac{\pi}{2}$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 x(1+x)^n.dx$ ដែល $n = 0,1,2,...$ ។

តាង $S_n = I_0 + I_1 + I_2 + ... + I_n$ ។

ក/ចូរស្រាយថា $S_n = -1 + \int_0^1 (1+x)^{n+1}.dx$ ។

ខ/គណនា S_n រួចទាញរក I_n ។

គ/ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញថា៖

$$\frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+2}C_n^n = \frac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក/ស្រាយថា $S_n = -1 + \int_0^1 (1+x)^{n+1}.dx$

គេមាន $I_n = \int_0^1 x(1+x)^n.dx = \int_0^1 \left[(x+1)-1\right](1+x)^n.dx$

$$I_n = \int_0^1 (x+1)^{n+1}.dx - \int_0^1 (x+1)^n.dx$$

គេបាន $S_n = \sum_{k=0}^{n}(I_k) = \sum_{k=0}^{n}\left[\int_0^1 (1+x)^{k+1}.dx - \int_0^1 (1+x)^k.dx\right]$

$$= \int_0^1 (1+x)^{n+1}.dx - \int_0^1 dx$$ ដោយ $\int_0^1 dx = 1$

ដូចនេះ $S_n = -1 + \int_0^1 (1+x)^{n+1}.dx$ ។

ខ/គណនា S_n រួចទាញរក I_n ៖

គេមាន $S_n = -1 + \int_0^1 (1+x)^{n+1}.dx$

$$= -1 + \left[\frac{1}{n+2}(1+x)^{n+2}\right]_0^1 = -1 + \frac{2^{n+2}-1}{n+2}$$

ដូចនេះ $S_n = -1 + \frac{2^{n+2}-1}{n+2}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $S_n = I_0 + I_1 + ... + I_n = S_{n-1} + I_n$ នោះ $I_n = S_n - S_{n-1}$

$$I_n = (-1 + \frac{2^{n+2}-1}{n+2}) - (-1 + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}) = \frac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$$

ដូចនេះ $I_n = \frac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$ ។

គ/ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញថា៖

$$\frac{1}{2}C_n^0+\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2+....+\frac{1}{n+2}C_n^n=\frac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$$

តាមទ្វេធាញូតុន $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+....+C_n^nx^n$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង x គេបាន ៖

$$x(1+x)^n=C_n^0x+C_n^1x^2+C_n^2x^3+....+C_n^nx^{n+1}$$

ធ្វើអាំងតេក្រាលកំណត់ពី 0 ទៅ 1 លើសមភាពនេះគេបាន ៖

$$\int_0^1 x(1+x)^n.dx=\int_0^1(C_n^0x+C_n^1x^2+C_n^2x^3+....+C_n^nx^{n+1}).dx$$

$$I_n=\left[\frac{1}{2}C_n^0x^2+\frac{1}{3}C_n^1x^3+\frac{1}{4}C_n^2x^4+....+\frac{1}{n+2}C_n^nx^{n+2}\right]_0^1$$

$$I_n=\frac{1}{2}C_n^0+\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2+....+\frac{1}{n+2}C_n^n$$

ដោយ $I_n=\dfrac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

ដូចនេះ $\dfrac{1}{2}C_n^0+\dfrac{1}{3}C_n^1+\dfrac{1}{4}C_n^2+....+\dfrac{1}{n+2}C_n^n=\dfrac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$ ។

លំហាត់ទី១០ (ប្រឡងសាលាច្បាប់–សេដ្ឋកិច្ច ២៦/១០/១៩៩៧)

គេឲ្យ $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x.dx \ , n \in IN$

ក/រកទំនាក់ទំនង I_n និង I_{n-2} ដែលមាន n ។

ខ/គេសន្មត $I_{2p} = \frac{1\times 3\times ....\times (2p-1)}{2\times 4\times 6\times .....\times (2p)} \times \frac{\pi}{2}$

និង $I_{2p+1} = \frac{2\times 4\times 6\times .....\times 2p}{1\times 3\times 5\times .....\times (2p+1)}$ ។ បង្ហាញថា $\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} \le \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \le 1$

រួចទាញរក $\lim\limits_{p\to +\infty} \frac{(2\times 4\times 6\times ....\times 2p)^2}{[1\times 3\times 5\times ....\times (2p-1)]^2} \times \frac{1}{2p+1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក/រកទំនាក់ទំនង I_n និង I_{n-2} ដែលមាន n ៖

មាន $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x.dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x.\cos x.dx \ , n \in IN$

តាង $\begin{cases} u = \cos^{n-1} x \\ dv = \cos x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -(n-1)\sin x \cos^{n-2} x.dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$I_n = \left[\cos^{n-1} x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{n-2} x.dx$$

$$I_n=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x.dx$$

$$I_n=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}x.dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x.dx$$

$$I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n \Rightarrow I_n=\frac{n-1}{n}.I_{n-2}$$

ដូចនេះ $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ ។

ខ/បង្ហាញថា $\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}}\le\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}}\le 1$

គ្រប់ $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ និង $p\in IN$ គេមាន $\cos^{2p+2}x\le\cos^{2p+1}x\le\cos^{2p}x$

គេបាន $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p+2}x.dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p+1}x.dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p}x.dx$

ឬ $I_{2p+2}\le I_{2p+1}\le I_{2p}$ នាំឲ្យ $\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}}\le\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}}\le 1$ ។

ទាញរក $\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{(2\times4\times6\times....\times2p)^2}{[1\times3\times5\times....\times(2p-1)]^2}\times\frac{1}{2p+1}$ ៖

គេមាន $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ នោះ $I_{2p+2}=\frac{2p+1}{2p}I_{2p}$ ឬ $\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}}=\frac{2p+1}{2p}$

ដោយ $\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} \le \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \le 1$ នោះ $\frac{2p+1}{2p} \le \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \le 1$

ដោយ $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{2p+1}{2p} = 1$ គេទាញ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1$ ។

មាន $I_{2p} = \frac{1\times 3\times ....\times(2p-1)}{2\times 4\times 6\times .....\times(2p)}\times\frac{\pi}{2}$ និង $I_{2p+1} = \frac{2\times 4\times 6\times .....\times 2p}{1\times 3\times 5\times .....\times(2p+1)}$

គេបាន $\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = \frac{(2\times 4\times 6\times ....\times 2p)^2}{[1\times 3\times 5\times ....\times(2p-1)]^2}\times\frac{1}{2p+1}\times\frac{2}{\pi}$

គេទាញ $\frac{(2\times 4\times 6\times ....\times 2p)^2}{[1\times 3\times 5\times ....\times(2p-1)]^2}\times\frac{1}{2p+1} = \frac{\pi}{2}.\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1$ (សម្រាយខាងលើ)

ដូចនេះ $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{(2\times 4\times 6\times ....\times 2p)^2}{[1\times 3\times 5\times ....\times(2p-1)]^2}\times\frac{1}{2p+1} = \frac{\pi}{2}$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}$

1/គ្រប់ a វិជ្ជមាន គណនា $F(a)=\int_1^a f(x).dx$

2/គ្រប់ $n\in IN$ គេតាង $S_n=F(1)+F(2)+....+F(n)$ ។

គណនា S_n រួចរកលីមីតរបស់ស្វ៊ីត (S_n) កាលណា $n\to+\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ

1/គ្រប់ a វិជ្ជមាន គណនា $F(a)=\int_1^a f(x).dx$

គេមាន $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$

គេបាន $F(a)=\int_1^a (\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}).dx$

$$=\left[\ln|x|-\ln|x+1|\right]_1^a=\left[\ln|\frac{x}{x+1}|\right]_1^a$$

$$=\ln(\frac{a}{a+1})-\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{2a}{a+1}\ ,\ a>0$$

2/គណនា S_n រួចរកលីមីតរបស់ស្វ៊ីត (S_n) កាលណា $n \to +\infty$

គេមាន $S_n = F(1) + F(2) + ... + F(n) = \sum_{k=1}^{n} F(k)$ ដោយ $F(a) = \ln\frac{2a}{a+1}$

គេបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(\frac{2k}{k+1}) = \ln[\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{k+1}] = \ln\frac{2^n}{n+1}$

ដូចនេះ $S_n = \ln\frac{2^n}{n+1}$ ។

ហើយ $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\frac{2^n}{n+1} = +\infty$ (ព្រោះ $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n+1} = +\infty$)។

លំហាត់ទី១២

គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I}=\int_0^1\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}.dx$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I}=\int_0^1\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}.dx$

គេអាចសរសេរ $\mathbf{I}=\int_0^1\frac{x^{\frac{1}{2}}.dx}{\sqrt{x^3+1}}$ តាង $t=x^{\frac{3}{2}}$ នោះ $dt=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.dx$

បើ $x=0$ នោះ $t=0$ និង $x=1$ នោះ $t=1$ ។

គេបាន $\mathbf{I}=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$ តាង $t=\tan\varphi$ នោះ $dt=(1+\tan^2\varphi)d\varphi$

បើ $t=0$ នោះ $\varphi=0$ និង $t=1$ នោះ $\varphi=\frac{\pi}{4}$ ។

គេបាន $\mathbf{I}=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\tan^2\varphi)d\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\varphi.d\varphi}{1-\sin^2\varphi}$

តាង $u=\sin\varphi$ នោះ $du=\cos\varphi.d\varphi$

បើ $\varphi = 0$ នោះ $u = 0$ និង $\varphi = \frac{\pi}{4}$ នោះ $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$

គេបាន $I = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u})du$

$$I = \frac{1}{3}\left[-\ln|1-u| + \ln|1+u|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{3}\ln(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1})$$

ដោយ $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2$ នោះ $I = \frac{1}{3}\ln(\sqrt{2}+1)^2$

ដូចនេះ $I = \frac{2}{3}\ln(\sqrt{2}+1)$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^{\pi} x\sin^n x.dx$ ដែល $n = 0, 1, 2, ...$

ក/ចូរស្រាយថា $I_n = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$ ។

ចំពោះគ្រប់/ខ $n \geq 2$ ស្រាយថា $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក/ ស្រាយថា $I_n = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$

គេមាន $I_n = \int_0^{\pi} x\sin^n x.dx$ ដែល $n = 0, 1, 2, ...$

តាង $x = \pi - t$ នោះ $dx = -dt$

បើ $x = 0$ នោះ $t = \pi$ និង $x = \pi$ នោះ $t = 0$

គេបាន $I_n = \int_{\pi}^{0} (\pi - t)\sin^n(\pi - t)(-dt)$

$$I_n = \int_0^{\pi} (\pi - t)\sin^n t.dt = \pi\int_0^{\pi} \sin^n tdt - \int_0^{\pi} t\sin^n t.dt$$

$I_n = \pi \int_0^{\pi} \sin^n x.dx - I_n$ នាំឲ្យ $I_n = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \sin^n x.dx$ (1)

គេមាន $\int_0^{\pi} \sin^n x.dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n x.dx$ (2)

តាង $x = \pi - t$ នោះ $dx = -dt$

បើ $x = \frac{\pi}{2}$ នោះ $t = \frac{\pi}{2}$ និង $x = \pi$ នោះ $t = 0$

គេបាន $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n x.dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n(\pi - t)(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t.dt$ (3)

តាម គេបាន (3) និង (2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n x.dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$ (4)

យក គេបាន (1) ជំនួសក្នុង(4) $I_n = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$ ពិត ។

ចំពោះគ្រប់/ខ $n \ge 2$ ស្រាយថា $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

គេមាន $I_n = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x.\sin x dx$

តាង $\begin{cases} u = \sin^{n-1} x \\ dv = \sin x.dx \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} du = (n-1)\cos x \sin^{n-2} x.dx \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{cases}$

$$I_n = \pi\left[-\sin^{n-1} x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x.dx$$

$$I_n = (n-1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x.dx$$

$$I_n = (n-1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x.dx - (n-1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$$

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

គេទាញ $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ ឬ $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ។

ដូចនេះ $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេឲ្យអាំងតេក្រាល ៖

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx \quad \text{និង} \quad J_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx$$

ចូរស្រាយថា/ក $I_n = J_n$ ។

ខ /គណនា I_n និង J_n ។

ដំណោះស្រាយ

ក/ស្រាយថា $I_n = J_n$

មាន $I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx$ និង $J_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx$

ចំពោះ $I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx$ តាង $x = \frac{\pi}{2} - t$ នោះ $dx = -dt$

បើ $x = \frac{\pi}{6}$ នោះ $t = \frac{\pi}{3}$ និង $x = \frac{\pi}{3}$ នោះ $t = \frac{\pi}{6}$

គេបាន $\mathbf{I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^n(\frac{\pi}{2}-t)}{\sin^n(\frac{\pi}{2}-t)+\cos^n(\frac{\pi}{2}-t)}.(-dt)}$

$$\mathbf{I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^n t}{\cos^n t+\sin^n t}.dt = J_n}$$

ដូចនេះ $\mathbf{I_n = J_n}$ ។

ខ /គណនា $\mathbf{I_n}$ និង $\mathbf{J_n}$ ៖

គេបាន $\mathbf{I_n + J_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx}$

$$\mathbf{I_n + J_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}}$$ តែ $\mathbf{I_n = J_n}$

នោះ $\mathbf{2I_n = 2J_n = \frac{\pi}{6}}$ នាំឲ្យ $\mathbf{I_n = J_n = \frac{\pi}{12}}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{I_n = \frac{\pi}{12}}$ និង $\mathbf{J_n = \frac{\pi}{12}}$ ។

លំហាត់ទី១៥

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $\mathbf{I_\alpha = \int_0^{\sqrt{\alpha}} x^3 e^{-x^2}.dx}$ ដែល $\alpha > \mathbf{0}$ ។

គណនា $\mathbf{I_\alpha}$ ជាអនុគមន៍នៃ α រួចគណនា $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathbf{I_\alpha}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $\mathbf{I_\alpha}$ ជាអនុគមន៍នៃ α រួចគណនា $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathbf{I_\alpha}$

គេមាន $\mathbf{I_\alpha = \int_0^{\sqrt{\alpha}} x^3 e^{-x^2}.dx}$ ដែល $\alpha > \mathbf{0}$

តាង $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = xe^{-x^2}dx \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} du = 2x.dx \\ v = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2} \end{cases}$

គេបាន $\mathbf{I_\alpha} = \left[-\dfrac{x^2}{2} e^{-x^2} \right]_0^{\sqrt{\alpha}} + \int_0^{\sqrt{\alpha}} xe^{-x^2}.dx$

$$= -\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha} - \left[\frac{1}{2}e^{-x^2} \right]_0^{\sqrt{\alpha}} = -\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha} - (\frac{1}{2}e^{-\alpha} - \frac{1}{2})$$

ដូចនេះ $\mathbf{I_\alpha} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\alpha + 1}{2} e^{-\alpha}$ និង $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathbf{I_\alpha} = \dfrac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេមានអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+x+1}.dx$ ដែល $n = 0,1,2,...$

ក /ស្រាយថា(I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ រួចគណនា $I_n + I_{n+1} + I_{n+2}$ ។

ខ /គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(nI_n)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក/ ស្រាយថា(I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ

គេមាន $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+x+1}.dx$ និង $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+x+1}.dx$

ចំពោះគ្រប់ $x \in [0,1]$ និង $n \in IN$ គេមាន $x^n \ge x^{n+1}$

នាំឲ្យ $\frac{x^n}{x^2+x+1} \ge \frac{x^{n+1}}{x^2+x+1}$ នោះ $I_n \ge I_{n+1}$ ។

ដូចនេះ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

គណនា $I_n + I_{n+1} + I_{n+2}$ ៖

គេបាន $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1} + x^{n+2}}{x^2 + x + 1}.dx$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(1 + x + x^2)}{x^2 + x + 1}.dx$$

$$= \int_0^1 x^n.dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ ។

ខ /គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} (nI_n)$ ៖

គេមាន $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ (1)

គេបាន $I_{n-2} + I_{n-1} + I_n = \frac{1}{n-1}$ (2) គ្រប់ $n \geq 2$ ។

ដោយ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះនោះចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ គេមាន

$I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1} \leq I_{n-2}$

នាំឲ្យ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} \leq 3I_n \leq I_{n-2} + I_{n-1} + I_n$ (3)

តាម (1), (2) និង គេទាញបាន ៖ (3)

$$\frac{1}{n+1} \le 3I_n \le \frac{1}{n-1}$$

នាំឲ្យ $\dfrac{n}{3(n+1)} \le n\,I_n \le \dfrac{n}{3(n-1)}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{3(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{3(n-1)} = \dfrac{1}{3}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} (nI_n) = \dfrac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^n \frac{dx}{8x^2+6x+1}$ ដែល $n>0$

គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

គេមាន $I_n=\int_0^n \frac{dx}{8x^2+6x+1}$ ដែល $n>0$

តាង $f(x)=\frac{1}{8x^2+6x+1}=\frac{1}{(2x+1)(4x+1)}$

សរសេរ $f(x)$ ជារាងកាណូនិច្ច $f(x)=\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{4x+1}$

គេបាន $\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{4x+1}=\frac{1}{8x^2+6x+1}$

នាំឲ្យ $a(4x+1)+b(2x+1)=1$

ឬ $(4a+2b)x+(a+b)=1$

គេទាញ $\begin{cases}4a+2b=0\\ a+b=1\end{cases}$ នាំឲ្យ $a=-1\ ,\ b=2$

គេបាន $f(x) = -\dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{2}{4x+1}$

$$I_n = \int_0^n f(x).dx = \int_0^n \left(\frac{2}{4x+1} - \frac{1}{2x+1}\right).dx$$

$$= \int_0^n \frac{2dx}{4x+1} - \int_0^n \frac{dx}{2x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\ln|4x+1|\Big]_0^n - \frac{1}{2}\Big[\ln|2x+1|\Big]_0^n$$

$$= \frac{1}{2}\ln(4n+1) - \frac{1}{2}\ln(2n+1) = \ln\sqrt{\frac{4n+1}{2n+1}}$$

ដូចនេះ $I_n = \ln\sqrt{\dfrac{4n+1}{2n+1}}$ និង $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\sqrt{\dfrac{4n+1}{2n+1}} = \ln\sqrt{2}$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^1 \frac{t^{3n}}{1+t^3}.dt$ ដែល $n=0,1,2,...$ ។

ចូរគណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(nI_n)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(nI_n)$

គេមាន $I_n=\int_0^1 \frac{t^{3n}}{1+t^3}.dt$ ដែល $n=0,1,2,...$

គេបាន $I_{n+1}=\int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}.dt$

$$I_n+I_{n+1}=\int_0^1 \frac{t^{3n}+t^{3n+3}}{1+t^3}.dt=\int_0^1 t^{3n}.dt=\left[\frac{t^{3n+1}}{3n+1}\right]_0^1=\frac{1}{3n+1}$$

$I_n+I_{n+1}=\frac{1}{3n+1}$ (1) និង $I_{n-1}+I_n=\frac{1}{3n-2}$ (2)

គ្រប់ $t\in[0,1]$ គេមាន $t^{3n}\ge t^{3n+3}$ នាំឲ្យ $\frac{t^{3n}}{1+t^3}\ge\frac{t^{3n+3}}{1+t^3}$

គេទាញ $\int_0^1 \frac{t^{3n}}{1+t^3}dt\ge\int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}.dt$ ឬ $I_n\ge I_{n+1}$ គ្រប់ $n=0,1,2,...$

នាំឲ្យ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។ តាមលក្ខណៈនៃស្វ៊ីតចុះគេបាន ៖

$$I_{n+1} \le I_n \le I_{n-1} \text{ នាំឲ្យ } \frac{I_{n+1} + I_n}{2} \le I_n \le \frac{I_n + I_{n-1}}{2} \quad (3)$$

យកទំនាក់ទំនងគេបាន ៖(3)ជំនួសក្នុង(2)និង(1)

$$\frac{1}{6n+2} \le I_n \le \frac{1}{6n-4} \text{ នាំឲ្យ } \frac{n}{6n+2} \le nI_n \le \frac{n}{6n-4}$$

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{6n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{6n-4} = \frac{1}{6}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} (n I_n) = \frac{1}{6}$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់ពីសំណុំ IR ទៅ IR ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

សមីការ $f(x+1)+x^2f(x^3+1)=x^3+\sqrt[3]{x}$ គ្រប់ $x\in IR$ ។

ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^2 f(x).dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^2 f(x).dx$

បើគេតាង $x=t+1$ នោះ $dx=dt$

ចំពោះ $x=1$ នោះ $t=0$ និង $x=2$ នោះ $t=1$ ។

គេបាន $I=\int_1^2 f(x).dx=\int_0^1 f(t+1).dt \quad (1)$

បើគេតាង $x=t^3+1$ នោះ $dx=3t^2dt$

ចំពោះ $x=1$ នោះ $t=0$ និង $x=2$ នោះ $t=1$ ។

គេបាន $I=\int_1^2 f(x).dx=3\int_0^1 t^2 f(t+1).dt$

ឬ $\frac{1}{3}I=\int_0^1 t^2 f(t^3+1).dt \quad (2)$

បូកសមីការ គេបាន ៖ (2) និង (1)

$$I+\frac{1}{3}I=\int_0^1 [f(t+1)+t^2 f(t^3+1)].dt$$

ដោយ $f(x+1)+x^2 f(x^3+1)=x^3+\sqrt[3]{x}$ គ្រប់ $x\in IR$ ។

គេបាន $\frac{4}{3}I=\int_0^1 (t^3+\sqrt[3]{t}).dt=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}\right]_0^1=1$

ដូចនេះ $I=\frac{3}{4}$ ។

លំហាត់ទី២០

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x.dx$ ដែល $n = 1,2,3,...$ ។

ក/ ចូរគណនា I_1 ។

ខ/បង្ហាញថា (I_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្ររួចទាញរក I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ /គណនាផលបូក $S_n = I_1 + I_2 + ... + I_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ឃ /ទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x.dx$ ដែល $n = 1,2,3,...$ ។

ក /គណនា I_1 ៖

បើ $n = 1$ នោះ $I_1 = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x.dx$

តាង $\begin{cases} u = e^{-x} \\ dv = \sin x.dx \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} du = -e^{-x}.dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

គេបាន៖

$$I_1 = \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x.dx$$

$$I_1 = 1 + e^{-\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x.dx$$

តាង $\begin{cases} u = e^{-x} \\ dv = \cos x.dx \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} du = -e^{-x}.dx \\ v = \sin x \end{cases}$

គេបាន ៖

$$I_1 = 1 + e^{-\pi} - \left[e^{-x}\sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x.dx$$

$$I_1 = 1 + e^{-\pi} - I_1$$

ដូចនេះ $I_1 = \dfrac{1+e^{-\pi}}{2} = \dfrac{1+e^{\pi}}{2e^{\pi}}$ ។

ខ/បង្ហាញថា(I_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

មាន $I_n = \displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x.dx$ នោះ $I_{n+1} = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x.dx$

តាង $x = \pi + t$ នោះ $dx = dt$

ចំពោះ $x = n\pi$ នោះ $t = (n-1)\pi$ និង $x = (n+1)\pi$ នោះ $t = n\pi$

គេបាន $I_{n+1} = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-\pi-t}\sin(\pi+t).dt = -e^{-\pi}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-t}\sin t.dt$

$I_{n+1} = -e^{-\pi}\, I_n$ នាំឲ្យ (I_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ទាញរក I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

តាមរូបមន្ត $I_n = I_1 \times q^{n-1} = \dfrac{1+e^{-\pi}}{2} \times (-e^{-\pi})^{n-1}$ ។

គ គណនាផលបូក $S_n = I_1 + I_2 + \dots + I_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេបាន $S_n = I_1 \times \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{1+e^{-\pi}}{2} \times \dfrac{1-(-e^{-\pi})^n}{1+e^{-\pi}} = \dfrac{1-(-e^{-\pi})^n}{2}$

ឃ ទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$ ៖

គេបាន $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+(-e^{-\pi})^n}{2} = \dfrac{1}{2}$ ព្រោះ $\lim\limits_{n\to\infty}(-e^{-\pi})^n = 0$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី២១

គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^a \frac{x^n.dx}{x^3 + a^3}, a > 0$

ក. ចូរកំនត់តម្លៃរបស់ n ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a ។

ខ. គណនា I_n ចំពោះតម្លៃ n ដែលបានរកឃើញខាងលើ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំនត់តម្លៃរបស់ n ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a

យើងមាន $I_n = \int_0^a \frac{x^n.dx}{x^3 + a^3}, a > 0$

យើងតាង $x = a.t$ នាំឱ្យ $dx = a.dt$

ហើយចំពោះ $x \in [0, a]$ នាំឱ្យ $t \in [0, 1]$

គេបាន $I_n = \int_0^1 \frac{(a.t)^n.a.dt}{(at)^3 + a^3} = a^{n-2}.\int_0^1 \frac{t^n.dt}{t^3 + 1}$

តាមទំនាក់ទំនងនេះ ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a លុះត្រាតែ

$n - 2 = 0$ ឬ $n = 2$ ។

ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a គេត្រូវឱ្យ $n = 2$ ។

ខ. គណនា $\mathbf{I_n}$ ចំពោះតម្លៃ $\mathbf{n}$ ដែលបានរកឃើញខាងលើ

ចំពោះ $\mathbf{n = 2}$ គេបាន $\mathbf{I_2 = \int_0^1 \frac{x^2dx}{x^3+1}}$

តាង $\mathbf{U = x^3 + 1}$ នាំឱ្យ $\mathbf{dU = 3x^2.dx}$

ហើយចំពោះ $\mathbf{x \in [\,0,1\,]}$ នាំឱ្យ $\mathbf{U \in [\,1\ ,\ 2\,]}$

យើងបាន $\mathbf{I_2 = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{dU}{U} = \frac{1}{3}[\,\ln|U|\,]_1^2 = \frac{1}{3}\ln 2}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{I_2 = \frac{1}{3}\ln 2}}$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឱ្យស្វ៊ីតអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\,.dx$ ដែល $n \in IN$ ។

ក. ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2}

ខ. គណនាផលគុណ $P_n = I_n . I_{n-1}$, $\forall n \ge 1$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n} (P_k) = P_1 + P_2 + ... + P_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n

រួចទាញរកតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

ឃ. រករូបមន្តគណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2}

យើងមាន $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\,.dx$ និង $I_{n-2} = \int_0^1 x^{n-2} . \sqrt{1-x^2} . dx$

តាង $\begin{cases} U = \sqrt{1-x^2} \\ dV = x^n . dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} dU = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} . dx \\ V = \int x^n . dx = \dfrac{1}{n+1} x^{n+1} \end{cases}$

យើងបាន $I_n = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}.\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}.dx$

$$I_n = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^n-(x^n-x^{n+2})}{\sqrt{1-x^2}}.dx = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^n - x^n(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.dx$$

$$I_n = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^n.dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}.dx$$

$$I_n = \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}.\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{n+1}I_n$$

តាង $\begin{cases} U = x^{n-1} \\ dV = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} dU = (n-1)x^{n-2}.dx \\ V = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$

យើងបាន

$$I_n = \frac{1}{n+1}\left\{\left[-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 + (n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}.dx\right\} - \frac{1}{n+1}I_n$$

គេទាញ $(n+1)I_n = (n-1)I_{n-2} - I_n$ នាំឱ្យ $I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}$

ដូចនេះ ទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2}

គឺ $\boxed{I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}, \forall n \geq 2}$ ។

ខ. គណនាផលគុណ $P_n = I_n.I_{n-1}$, $\forall n \ge 1$ ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $P_n = I_n.I_{n-1}$ នាំឱ្យ $P_{n+1} = I_{n+1}.I_n$

ដោយ $I_n = \dfrac{n-1}{n+2} I_{n-2}$ នាំឱ្យ $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+3}.I_{n-1}$

គេទាញ $P_{n+1} = \dfrac{n}{n+3} I_{n-1}.I_n = \dfrac{n}{n+3} P_n$ (ព្រោះ $P_n = I_n.I_{n-1}$)

នាំអោយ $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} = \dfrac{n}{n+3} = \dfrac{n}{n+1}.\dfrac{n+1}{n+2}.\dfrac{n+2}{n+3}$ ។

យើងបាន $\prod_{k=1}^{(n-1)} \left(\dfrac{P_{k+1}}{P_k} \right) = \prod_{k=1}^{(n-1)} \left(\dfrac{k}{k+1}.\dfrac{k+1}{k+2}.\dfrac{k+2}{k+3} \right)$

$$\prod_{k=1}^{(n-1)} \left(\frac{P_{k+1}}{P_k} \right) = \prod_{k=1}^{(n-1)} \left(\frac{k}{k+1} \right) \times \prod_{k=1}^{(n-1)} \left(\frac{k+1}{k+2} \right) \times \prod_{k=1}^{(n-1)} \left(\frac{k+2}{k+3} \right)$$

$$\frac{P_2}{P_1}.\frac{P_3}{P_2}....\frac{P_n}{P_{n-1}} = \left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}....\frac{n-1}{n} \right) \times \left(\frac{2}{3}.\frac{3}{4}....\frac{n}{n+1} \right) \times \left(\frac{3}{4}.\frac{4}{5}....\frac{n+1}{n+2} \right)$$

$$\frac{P_n}{P_1} = \frac{1}{n}.\frac{2}{n+1}.\frac{3}{n+2}$$

នាំឱ្យគេទាញ $P_n = \dfrac{6}{n(n+1)(n+2)}.P_1 = \dfrac{6}{n(n+1)(n+2)}.I_0.I_1$

ដោយ $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}.dx = \left[\dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{2}\arcsin x \right]_0^1 = \dfrac{\pi}{4}$

និង $I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}.dx = \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

គេបាន $P_n = \frac{6}{n(n+1)(n+2)}.\frac{\pi}{4}.\frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}.\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ដូចនេះ $\boxed{P_n = \frac{\pi}{2}.\frac{1}{n(n+1)(n+2)}}$ ។

គ. គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(P_k\right) = P_1 + P_2 + \ldots\ldots\ldots + P_n$

$$P_n = \frac{\pi}{2}.\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

យើងបាន $S_n = \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\right) + \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}\right) + \ldots.. + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] = \frac{\pi}{8}.\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \frac{\pi}{8}.\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}}$ និង $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{8}}$ ។

ឃ. រករូបមន្តគណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}\ , \forall n \geq 2$

-ករណី $n = 2p+1$ (ចំនួនសេស)

យើងបាន $I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+3} . I_{2p-1}$

ឬ $$\frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}} = \frac{2p}{2p+3}$$

គេទាញ $$\frac{I_3}{I_1} \cdot \frac{I_5}{I_3} \cdot \frac{I_7}{I_5} \cdots\cdots \frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9} \cdots\cdots \frac{2p}{2p+3}$$

$$\frac{I_{2p+1}}{I_1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9} \cdots\cdots \frac{2p}{2p+3}$$

នាំឱ្យ $I_{2p+1} = \frac{2.4.6....2p}{5.7.9....(2p+3)} . I_1$ ដោយ $I_1 = \frac{1}{3}$

ដូចនេះ $$\boxed{I_{2p+1} = \frac{2.4.6....2p}{5.7.9....(2p+3)} \cdot \frac{1}{3}}$$ ។

-ករណី $\mathbf{n=2p}$ (ចំនួនគូ)

យើងបាន $\mathbf{I_{2p}=\dfrac{2p-1}{2p+2}.I_{2p-2}}$ ឬ $\mathbf{\dfrac{I_{2p}}{I_{2p-2}}=\dfrac{2p-1}{2p+2}}$

គេទាញ $\mathbf{\dfrac{I_2}{I_0}.\dfrac{I_4}{I_2}.\dfrac{I_6}{I_4}.....\dfrac{I_{2p}}{I_{2p-2}}=\dfrac{1}{4}.\dfrac{3}{6}.\dfrac{5}{8}.....\dfrac{2p-1}{2p+2}}$

$$\mathbf{\frac{I_{2p}}{I_0}=\frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{5}{8}.....\frac{2p-1}{2p+2}}$$

នាំឱ្យ $\mathbf{I_{2p+1}=\dfrac{1.3.5....(2p-1)}{4.6.8....(2p+2)}.I_0}$ ដោយ $\mathbf{I_0=\dfrac{\pi}{4}}$

ដូចនេះ $$\boxed{\mathbf{I_{2p+1}=\frac{1.3.5....(2p-1)}{4.6.8....(2p+2)}.\frac{\pi}{4}}}$$ ។

លំហាត់ទី២៣

ចូរបង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx$

អនុវត្តន៍ ៖ ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx$

តាង $t = a+b-x \Rightarrow dt = -dx$

បើ $x = a \Rightarrow t = b$ និង $x = b \Rightarrow t = a$

យើងបាន

$$\int_a^b f(x).dx = \int_b^a f(a+b-t)(-dt) = -\int_b^a f(a+b-t).dt = \int_a^b f(a+b-t).dt$$

ដូចនេះ $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx$ ។

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

តាមរូបមន្តខាងលើយើងអាចសរសេរ៖

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln\left[1+\sqrt{3}\tan(\frac{\pi}{3}-x)\right].dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln\left(1+\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}-\tan x}{1+\sqrt{3}\tan x}\right).dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln\left(\frac{4}{1+\sqrt{3}\tan x}\right).dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\ln 4-\ln(1+\sqrt{3}\tan x)\right].dx$$

$$I=\ln 4\int_0^{\frac{\pi}{3}}dx-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx=\frac{2\pi}{3}\ln 2-I$$

$2I=\frac{2\pi}{3}\ln 2$ នាំឱ្យ $I=\frac{\pi}{3}\ln 2$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx=\frac{\pi}{3}\ln 2}$ ។

លំហាត់ទី២៤

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0,1]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$?

អនុវត្តន៍: ចូរគណនា $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$

តាង $x=\pi-t$ នាំឱ្យ $dx=-dt$

និង ចំពោះ $x\in[0,\pi]$ នាំឱ្យ $t\in[\pi,0]$

គេបាន $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx=-\int_{\pi}^{0}(\pi-t).f[\sin(\pi-t)].dt$

$$\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx=\int_0^{\pi}(\pi-t).f(\sin t).dt=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t).dt-\int_0^{\pi} t.f(\sin t).dt$$

$$\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx=\pi\int_0^{\pi} f(\sin x).dx-\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx$$

នាំឱ្យគេទាញបាន $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$ ។

អនុវត្តន៍: គណនា $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}$

គេមាន $I=\int_0^{\pi}\frac{x.\sin x.dx}{1+\cos^2 x}=\int_0^{\pi}x.\frac{\sin x.dx}{2-\sin^2 x}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x.dx}{2-\sin^2 x}$

តាង $z=\cos x$ នាំឱ្យ $dz=-\sin x.dx$

ហើយចំពោះ $x\in[0,\pi]$ នោះ $z\in[1,-1]$

គេបាន $I=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-dz}{1+z^2}=\frac{\pi}{2}\left[\arctan z\right]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}=\frac{\pi^2}{4}}$ ។

លំហាត់ទី២៥

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍គូលើ $[-a,a]$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a f(x).dx$, $q>0$,$q\neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sqrt{2+2\cos 2x}}{1+3^x}.dx$

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a f(x).dx$, $q>0$,$q\neq 1$ ។

គេមាន $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}+\int_0^a\frac{f(x).dx}{1+q^x}\ (1)$

តាង $x=-t$ នាំឱ្យ $dx=-dt$ និងចំពោះ $x\in[-a,0]$ នាំឱ្យ $t\in[a,0]$

គេបាន $\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=-\int_a^0\frac{f(-t).dt}{1+q^{-t}}=\int_0^a\frac{q^t.f(-t)dt}{1+q^t}=\int_0^a\frac{q^x f(-x).dx}{1+q^x}$

ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូនោះ $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in[-a,a]$

គេទាញបាន $\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a\frac{q^x.f(x)}{1+q^x}.dx\ (2)$

យក (2) ទៅជួសក្នុង (1) គេបាន៖

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a\frac{q^x.f(x).dx}{1+q^x}+\int_0^a\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a\frac{(q^x+1)f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a f(x).dx$$

ដូចនេះ $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a f(x).dx\ ,\ q>0\ ,q\neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sqrt{2+2\cos 2x}}{1+3^x}.dx$

ដោយ $f(x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$ ជាអនុគមន៍គូនោះគេបាន៖

$$I=\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos 2x}.dx=2\int_0^{\pi}|\cos x|.dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.dx-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x.dx$$

$$=2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2(1-0)-2(0-1)=4$$

ដូចនេះ $\boxed{I=4}$ ។

លំហាត់ទី២៦

គេមានអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x.dx$ និង $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x.dx$

ក-ចូរគណនា $I+J$ និង $I-J$ ។

ខ-ទាញរកតម្លៃនៃ I និង J ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនា $I+J$ និង $I-J$

យើងបាន $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x.dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x.dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x+\sin^2 x).dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{I+J=\frac{\pi}{4}}$ ។

យើងបាន $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x.dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x.dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x).dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 0 = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{I - J = \frac{1}{2}}$ ។

ខ-ទាញរកតម្លៃនៃ I និង J

គេមាន $\begin{cases} I + J = \frac{\pi}{4} \\ I - J = \frac{1}{2} \end{cases}$

នាំឱ្យ $I = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ និង $J = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$ ។

លំហាត់ទី២៧

គេឱ្យអាំងតេក្រាល $\mathbf{I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}.dx \ , n \in IN}$ ។

ក-គណនា $\mathbf{I_0 + I_1 \ , I_1}$ រួចទាញរក $\mathbf{I_0}$ ។

ខ-គណនា $\mathbf{I_n + I_{n+1}}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនា $\mathbf{I_0 + I_1 \ , I_1}$ រួចទាញរក $\mathbf{I_0}$

យើងមាន $\mathbf{I_0 = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}.dx \ \ , \ \ I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}}$

យើងបាន $\mathbf{I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}.dx + \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}.dx = \int_0^1 \frac{1+e^x}{e^x+1}.dx = \int_0^1 dx = 1}$

$$\mathbf{I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}.dx = \int_0^1 \frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)}.dx = \left[\ln(e^x+1)\right]_0^1 = \ln(e+1) - \ln 2 = \ln\frac{e+1}{2}}$$

ដោយ $\mathbf{I_0 + I_1 = 1}$ នាំឱ្យ $\mathbf{I_0 = 1 - I_1 = 1 - \ln(\frac{e+1}{2})}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{I_0 + I_1 = 1 \ , \ I_1 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) \ , I_0 = 1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}}$ ។

ខ-គណនា $I_n + I_{n+1}$ ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងបាន $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x + 1}.dx + \int_0^1 \frac{e^{(n+1)x}}{e^x + 1}.dx$

$$= \int_0^1 \frac{e^{nx} + e^{(n+1)x}}{e^x + 1}.dx = \int_0^1 \frac{e^{nx}(1 + e^x)}{e^x + 1}.dx$$

$$= \int_0^1 e^{nx}.dx = \left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1 = \frac{e^n - 1}{n}$$

ដូចនេះ $\boxed{I_n + I_{n+1} = \frac{e^n - 1}{n}}$ ។

លំហាត់ទី២៨

គេសន្មតថា f ជាអនុគមន៍មួយកំនត់លើ IR ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

ទំនាក់ទំនង: $\mathbf{f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}}$ ។

ចូរគណនា $\mathbf{I=\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $\mathbf{I=\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx}$

យើងមាន $\mathbf{I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} f(x).dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx}$

តាង $\mathbf{x=-t}$ នាំឱ្យ $\mathbf{dx=-dt}$

ចំពោះ $\mathbf{x\in\left[-\frac{\pi}{3}\,,0\right]}$ នាំឱ្យ $\mathbf{t\in\left[\frac{\pi}{3},0\right]}$

គេបាន $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} f(x).dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} f(-t).(-dt) = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(-t).dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(-x).dx$

គេទាញ $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(-x).dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} [f(-x) + f(x)].dx$

ដោយ $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x} = \sqrt{4\sin^2 x} = 2|\sin x|$

គេបាន

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} 2|\sin x|.dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin x.dx = 2[-\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{3}} = 2\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = 1$$

ដូចនេះ $\boxed{I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx = 1}$ ។

លំហាត់ទី២៩

ក-គណនាអាំងតេក្រាលកំនត់ $I_n = \int_0^1 (1+x)^n .dx \quad ,n \in IN$ ។

ខ-ទាញបង្ហាញថា $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនាអាំងតេក្រាលកំនត់

$$I_n = \int_0^1 (1+x)^n .dx \quad ,n \in IN$$

$$= \left[\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.2^{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

ខ-ទាញបង្ហាញថា $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

តាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុនគេមាន៖

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$$

ធ្វើអាំងតេក្រាលកំនត់ក្នុងចន្លោះ $[0,1]$ នៃសមភាពនេះគេបាន៖

$$\int_0^1 (1+x)^n.dx = \int_0^1 \left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n\right).dx$$

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \left[C_n^0 x + \frac{1}{2}C_n^1 x^2 + \frac{1}{3}C_n^2 x^3 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n x^{n+1}\right]_0^1$$

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$$

ដូចនេះ $\boxed{C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}}$ ។

លំហាត់ទី៣០

គេមានស្វីត (I_n) កំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ដោយ ៖

$$I_n = \frac{1}{n!}.\int_0^1 (1-x)^n.e^x.dx$$

ក-ចូរគណនាតួ I_1 ។

ខ-ចូរបញ្ជាក់ I_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ I_n រួចទាញថា $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{P!}\right)$

គ-ចូររកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

រួចទាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828$

ដំណោះស្រាយ

ក-ចូរគណនាតួ I_1

គេមាន $I_1 = \frac{1}{1!}\int_0^1 (1-x)e^x.dx = \int_0^1 (1-x).e^x.dx$

តាង $\begin{cases} u = 1-x \\ dv = e^x dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du = -dx \\ v = e^x \end{cases}$

គេបាន $I = \left[(1-x)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x(-dx) = -1 + \left[e^x\right]_0^1 = e - 2$

ដូចនេះ $\boxed{I = e - 2}$ ។

ខ-បញ្ជាក់ I_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ I_n

គេមាន $I_n = \dfrac{1}{n!}.\int_0^1 (1-x)^n.e^x.dx$

នាំឱ្យ $I_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}.\int_0^1 (1-x)^{n+1}.e^x dx$

តាង $\begin{cases} u = (1-x)^{n+1} \\ dv = e^x dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du = -(n+1)(1-x)^n \\ v = e^x \end{cases}$

គេបាន $I_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}\left[(1-x)^{n+1}e^x\right]_0^1 + \dfrac{n+1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-x)^n e^x.dx$

$$I_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x dx = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$$

ដូចនេះ $I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$ ។

ទាញឱ្យបានថា $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\dfrac{1}{p!}\right)$

គេមាន $I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$ ឬ $I_{n+1} - I_n = -\dfrac{1}{(n+1)!}$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n-1}\left(I_{k+1}-I_k\right)=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}$

$$I_n-I_1=-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-....-\frac{1}{n!}$$

ដោយ $I_1=e-2=e-\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}$

គេបាន $I_n=e-\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-....-\frac{1}{n!}$

ដូចនេះ $I_n=e-\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right)$ ។

គ-ចូររកលីមីត $\lim_{n\to+\infty} I_n$

ចំពោះ $x\in\left[0,1\right]$ គេមាន $1\le e^x\le e$ និង $(1-x)^n\ge 0$

គេបាន $(1-x)^n\le e^x(1-x)^n\le e(1-x)^n$

នាំឱ្យ $\frac{1}{n!}\int_0^1(1-x)^n.dx\le\frac{1}{n!}\int_0^1(1-x)^n e^x.dx\le\frac{e}{n!}\int_0^1(1-x)^n.dx$

ដោយ $\int_0^1(1-x)^n.dx=\left[-\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$

គេទាញបាន $\frac{1}{n!(n+1)}\le I_n\le\frac{e}{n!(n+1)}$ ។

កាលណា $\mathbf{n \to +\infty}$ នាំឱ្យ $\frac{1}{n!(n+1)} \to 0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$ ។

ទាញថា $\lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828$

គេមាន $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right)$ នាំឱ្យ $\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right) = e - I_n$

គេបាន $\lim_{n \to +\infty}\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right) = \lim_{n \to +\infty}\left(e - I_n\right) = e$ ព្រោះ $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828}$

លំហាត់ទី៣១

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)^n$ ដែល $n\in IN$ និង $x\neq\pm1$ ។

ក/ចូរស្រាយថា $f'(x)=\frac{nx^{n-1}(1+x^2)}{(1-x^2)^{n+1}}$ ។

ខ/គេពិនិត្យ $I_n=\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{f(x).dx}{1+x^2}$ និង $J_n=\int_0^{\sqrt{2}-1}f'(x).dx$

ចូរស្រាយថា $I_{n-1}+4I_{n+1}=\frac{J_n}{n}$ គ្រប់ $n\in IN$ ។

គ/បង្ហាញថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ រួចចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{5(n+1)2^{n+1}}\leq I_n\leq\frac{1}{5(n-1)2^{n-1}}$$ ។

ឃ/គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(n\,2^n I_n)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក/ស្រាយថា $f'(x)=\frac{nx^{n-1}(1+x^2)}{(1-x^2)^{n+1}}$

តាមរូបមន្ត $(u^n)'=nu'u^{n-1}$

គេបាន $f'(x)=n\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'\left(\frac{x}{1-x^2}\right)^{n-1}$

$$= n\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2}.\frac{x^{n-1}}{(1-x^2)^{n-1}} = \frac{nx^{n-1}(1+x^2)}{(1-x^2)^{n+1}}$$

ដូចនេះ $f'(x) = \dfrac{nx^{n-1}(1+x^2)}{(1-x^2)^{n+1}}$ ។

ខ/ស្រាយថា $I_{n-1} + 4I_{n+1} = \dfrac{J_n}{n}$

គេបាន $I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{x^n dx}{(1-x^2)^n(1+x^2)}$ និង $J_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{nx^{n-1}(1+x^2)}{(1-x^2)^{n+1}}.dx$

$$I_{n-1} + 4I_{n+1} = \int_0^{\sqrt{2}-1} [\frac{x^{n-1}}{(1-x^2)^{n-1}(1+x^2)} + \frac{4x^{n+1}}{(1-x^2)^{n+1}(1+x^2)}].dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{x^{n-1}(1-x^2)^2 + 4x^{n+1}}{(1-x^2)^{n+1}(1+x^2)}.dx = \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{x^{n-1}(1+x^2)^2}{(1-x^2)^{n+1}(1+x^2)}.dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{x^{n-1}(1+x^2)}{(1-x^2)^{n+1}}.dx = \frac{1}{n}\int_0^{\sqrt{2}-1} f'(x).dx = \frac{1}{n}.J_n$$

ដូចនេះ $I_{n-1} + 4I_{n+1} = \dfrac{J_n}{n}$ ។

គ/បង្ហាញថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ

គេមាន $I_n = \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{x^n dx}{(1-x^2)^n(1+x^2)}$

តាង $x = \tan\frac{\varphi}{2}$ នាំឲ្យ $d\varphi = \frac{2dx}{1+x^2}$ និង $\tan\varphi = \frac{2x}{1-x^2}$

ចំពោះ $x = 0$ គេបាន $\tan\varphi = 0$ នោះ $\varphi = 0$

ចំពោះ $x = \sqrt{2}-1$ គេបាន $\tan\varphi = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(\sqrt{2}-1)^2} = 1$ នោះ $\varphi = \frac{\pi}{4}$

គេបាន $I_n = \frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n\varphi . d\varphi$

ចំពោះ $\varphi \in [0,\frac{\pi}{4}]$ គេមាន $\tan^n\varphi \geq \tan^{n+1}\varphi$

គេបាន $\frac{1}{2^{n+1}}\tan^n\varphi \geq \frac{1}{2^{n+1}}\tan^{n+1}\varphi \geq \frac{1}{2^{n+2}}\tan^{n+1}\varphi$

នោះ $\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n\varphi . d\varphi \geq \frac{1}{2^{n+2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1}\varphi . d\varphi$ ឬ $I_n \geq I_{n+1}$ ដូចនេះ

(I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

បង្ហាញថា ៖ $\dfrac{1}{5(n+1)2^{n+1}} \le I_n \le \dfrac{1}{5(n-1)2^{n-1}}$

គេមាន $I_{n-1} + 4I_{n+1} = \dfrac{J_n}{n}$

ហើយ $J_n = \int_0^{\sqrt{2}-1} f'(x).dx = \left[f(x)\right]_0^{\sqrt{2}-1} = \left[(\dfrac{x}{1-x^2})^n\right]_0^{\sqrt{2}-1} = \dfrac{1}{2^n}$

គេបាន $I_{n-1} + 4I_{n+1} = \dfrac{1}{n.2^n}$ គ្រប់ $n \ge 2$ ។

ដោយ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ នោះគេមាន $I_{n+2} \le I_n$ ឬ $I_n + 4I_{n+2} \le 5I_n$

តែ $I_{n-1} + 4I_{n+1} = \dfrac{1}{n.2^n}$ គេទាញ $I_n + 4I_{n+2} = \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

ហេតុនេះ $5I_n \ge \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$ ឬ $I_n \ge \dfrac{1}{5(n+1).2^{n+1}}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $I_n \le I_{n-2}$ ឬ $5I_n \le I_{n-2} + 4I_n$ តែ $I_{n-2} + 4I_n = \dfrac{1}{(n-1)2^{n-1}}$

ហេតុនេះ $5I_n \le \dfrac{1}{(n-1)2^{n-1}}$ ឬ $I_n \le \dfrac{1}{5(n-1)2^{n-1}}$ (2)

តាម(1)និង(2)គេបាន $\dfrac{1}{5(n+1)2^{n+1}} \le I_n \le \dfrac{1}{5(n-1)2^{n-1}}$ ។

ឃ/គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\,2^n I_n)$ ៖

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\dfrac{1}{5(n+1)2^{n+1}} \le I_n \le \dfrac{1}{5(n-1)2^{n-1}}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $n.2^n$ គេបាន $\dfrac{n}{10(n+1)} \le n2^n I_n \le \dfrac{1}{10(n-1)}$

ហេតុនេះ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{10(n+1)} \le \lim_{n\to\infty}(n2^n I_n) \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{10(n-1)}$$

$$\frac{1}{10} \le \lim_{n\to\infty}(n2^n I_n) \le \frac{1}{10}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\,2^n I_n) = \dfrac{1}{10}$ ។

លំហាត់ទី៣២

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $\mathbf{I_n = \int_1^e \frac{x^{-(2n+1)}}{1+x^2}.dx \; ; n = 0,1,2,....,e = 2.71828}$

ក/គណនា $\mathbf{I_0}$

ខ/បង្ហាញថា $\mathbf{I_n + I_{n+1} = \frac{e^{2n+2}-1}{2(n+1)e^{2n+2}}}$

គ/គ្រប់ $\mathbf{x \geq 1}$ ស្រាយថា $\mathbf{\frac{1}{2}x^{-2(n+1)} \leq \frac{x^{-2n}}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}x^{-2n}}$

ឃ/គណនាលីមីត $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n}$ និង $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក/គណនា $\mathbf{I_0}$

គេបាន $\mathbf{I_0 = \int_1^e \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int_1^e (\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}).dx}$

$$\mathbf{= \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \right]_1^e = \ln \frac{e\sqrt{2}}{\sqrt{1+e^2}}}$$

ដូចនេះ $\mathbf{I = \ln \frac{e\sqrt{2}}{1+e^2}}$ ។

ខ/បង្ហាញថា $I_n + I_{n+1} = \frac{e^{2n+2}-1}{2(n+1)e^{2n+2}}$

គេបាន $I_n + I_{n+1} = \int_1^e \frac{x^{-(2n+3)} + x^{-(2n+1)}}{1+x^2}.dx$

$$= \int_1^e x^{-2n-3}.dx = \left[-\frac{1}{2n+2} x^{-2n-2} \right]_1^e = \frac{1-e^{-2n-2}}{2(n+1)}$$

ដូចនេះ $I_n + I_{n+1} = \frac{e^{2n+2}-1}{2(n+1)e^{2n+2}}$ ។

គ/ ស្រាយថា $\frac{1}{2} x^{-2(n+1)} \le \frac{x^{-2n}}{1+x^2} \le \frac{1}{2} x^{-2n}$

គ្រប់ $x \ge 1$ គេមាន $x^{2n+2} \ge x^{2n}$

គេបាន $\frac{1}{x^{2n+2}} \le \frac{1}{x^{2n}}$ ឬ $x^{-2(n+1)} \le x^{-2n}$

$$\frac{1}{2} x^{-2(n+1)} \le \frac{1}{2} x^{-2n}$$

$$\frac{1}{2} x^{-2n} + \frac{1}{2} x^{-2(n+1)} \le x^{-2n}$$

$$\frac{1}{2} x^{-2(n+1)} (1+x^2) \le x^{-2n}$$

គេទាញបាន $x^{-2(n+1)} \le \frac{x^{-2n}}{1+x^2}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\forall x \ge 1 :$ $x^{2n} \ge x^{2n-2}$ ឬ $x^{-2n} \le x^{-2n+2}$

គេទាញ $x^{-2n} \le \frac{1}{2}x^{-2n+2} + \frac{1}{2}x^{-2n} = \frac{1}{2}x^{-2n}(1+x^2)$

នាំឲ្យ $\frac{1}{2}x^{-2n} \ge \frac{x^{-2n}}{1+x^2}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $\frac{1}{2}x^{-2(n+1)} \le \frac{x^{-2n}}{1+x^2} \le \frac{1}{2}x^{-2n}$ គ្រប់ $x \ge 1$ ។

ឃ/គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ ៖

គេមាន $\frac{1}{2}x^{-2(n+1)} \le \frac{x^{-2n}}{1+x^2} \le \frac{1}{2}x^{-2n}$ គ្រប់ $x \ge 1$

គេបាន $\frac{1}{2}x^{-2n-3} \le \frac{x^{-(2n+1)}}{1+x^2} \le \frac{1}{2}x^{-2n-1}$

$$\frac{1}{2}\int_1^e x^{-2n-3}.dx \le \int_1^e \frac{x^{-(2n+1)}}{1+x^2}.dx \le \frac{1}{2}\int_1^e x^{-2n-1}.dx$$

$$-\frac{1}{4(n+1)}\left[x^{-2n-2}\right]_1^e \le I_n \le -\frac{1}{4n}\left[x^{-2n}\right]_1^e$$

$$\frac{1-e^{-2n-2}}{4(n+1)} \le I_n \le \frac{1-e^{-2n}}{4n}$$

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-e^{-2n-2}}{4(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-e^{-2n}}{4n} = 0$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

ហើយម្យ៉ាងទៀត $\frac{n(1-e^{-2n-2})}{4(n+1)} \le nI_n \le \frac{1-e^{-2n}}{4}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(1-e^{-2n-2})}{4(n+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-2n}}{4} = \frac{1}{4}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \frac{1}{4}$ ។

លំហាត់ទី៣៣

គេឲ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ និង $\mathbf{g}$ កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=\arcsin(\sin x-\cos x)$$

$$g(x)=\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x})$$

ក/គណនាដេរីវេនៃ $h(x)=f(x)-g(x)$ ។

ខ/ទាញរកអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\tan x}.dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក/គណនាដេរីវេនៃ $h(x)=f(x)-g(x)$

គេបាន $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

ដោយ $f'(x)=\dfrac{(\sin x-\cos x)'}{\sqrt{1-(\sin x-\cos x)^2}}=\dfrac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}$

ហើយ $g'(x)=\dfrac{(\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x})'}{\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x}}$

$$g'(x)=\frac{\cos x-\sin x+\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}}{\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x}}$$

$$\frac{(\cos x-\sin x)+\dfrac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\sqrt{\sin 2x}}}{\sin x+\cos x+\sqrt{\sin 2x}}$$

$$=\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}$$

គេបាន $h'(x)=\dfrac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}-\dfrac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}=\dfrac{2\sin x}{\sqrt{2\sin x\cos x}}$

ដូចនេះ $h'(x)=\sqrt{2}.\sqrt{\tan x}$ ។

ខ/ទាញរកអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\tan x}.dx$

គេបាន $I=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}.\sqrt{\tan x}.dx=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}h'(x).dx=\dfrac{1}{\sqrt{2}}[h(\dfrac{\pi}{4})-h(0)]$

ដោយ $h(\dfrac{\pi}{4})=f(\dfrac{\pi}{4})-g(\dfrac{\pi}{4})=\arcsin(0)-\ln(\sqrt{2}+1)=-\ln(\sqrt{2}+1)$

និង $h(0)=\arcsin(-1)-\ln(1)=-\dfrac{\pi}{2}$ ។

ដូចនេះ $I=\dfrac{\sqrt{2}}{2}[\dfrac{\pi}{2}-\ln(\sqrt{2}+1)]$

លំហាត់ទី៣៤

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \sqrt{\tan x}.dx \ , n = 0,1,2,...$ ។

ក/ស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះរួចគណនា I_0 ។

ខ/គណនា $I_n + I_{n+2}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ/ស្រាយថា $\frac{1}{2n+3} \le I_n \le \frac{1}{2n-1}$ ។រកលីមីត $\lim_{n\to\infty} I_n$ និង $\lim_{n\to\infty}(nI_n)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក/ស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះរួចគណនា I_0 ៖

គេមាន $\forall x \in [o, \frac{\pi}{4}] : \ \tan^{n+1} x \le \tan^n x$

ឬ $\tan^{n+1} x.\sqrt{\tan x} \le \tan^n x.\sqrt{\tan x}$

គេបាន $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1} x\sqrt{\tan x}.dx \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\sqrt{\tan x}.dx$ ឬ $I_{n+1} \le I_n$ ។

ដូចនេះ(I_n) ជាស្វ៊ីតចុះរួចគណនា ។

បើ $n = 0$ គេបាន $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x}.dx$

តាង $\sqrt{\tan x} = t$ នោះ $dt = \frac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}}.dx = \frac{1+t^4}{2t}.dx$

នាំឲ្យ $dx = \frac{2t}{1+t^4}.dt$ ហើយចំពោះ $x \in [0,\frac{\pi}{4}]$ នោះ $t \in [0,1]$

គេបាន $I_0 = \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^4}.dt = \int_0^1 \frac{(1+t^2)-(1-t^2)}{1+t^4}.dt$

$$= \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4}dt - \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^4}.dt$$

យក $A = \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4}.dt = \int_0^1 \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}.dt = \int_0^1 \frac{d(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}})\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

យក $B = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^4}.dt = \int_0^1 \frac{\frac{1}{t^2}-1}{t^2+\frac{1}{t^2}}.dt = -\int_0^1 \frac{d(t+\frac{1}{t})}{(t+\frac{1}{t})^2-2}$

$$B = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{t^2-t\sqrt{2}+1}{t^2+t\sqrt{2}+1}\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)$$

ដូចនេះ $\mathbf{I_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)}$ ។

ខ/គណនា $\mathbf{I_n + I_{n+2}}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{n}$ ៖

គេបាន $$\mathbf{I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^n x + \tan^{n+2} x)\sqrt{\tan x}.dx}$$

$$\mathbf{= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+\frac{1}{2}} x.(1+\tan^2 x).dx}$$

តាង $\mathbf{t = \tan x \Rightarrow dt = (1+\tan^2 x).dx}$

ចំពោះ $\mathbf{x \in [0,\frac{\pi}{4}]}$ នោះ $\mathbf{t \in [0,1]}$

គេបាន $$\mathbf{I_n + I_{n+2} = \int_0^1 t^{n+\frac{1}{2}}.dt = \left[\frac{2}{2n+3} t^{n+\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{2n+3}}$$

ដូចនេះ $\mathbf{I_n + I_{n+2} = \frac{2}{2n+3}}$ ។

គ/ស្រាយថា $\mathbf{\frac{1}{2n+3} \le I_n \le \frac{1}{2n-1}}$ ៖

គេមាន $\mathbf{I_n + I_{n+2} = \frac{2}{2n+3}}$ **(1)**

គេបាន $\mathbf{I_{n-2} + I_n = \frac{2}{2n-1}}$ **(2)** គ្រប់ $\mathbf{n \ge 2}$ ។

ដោយ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះនោះ $I_n + I_{n+2} \le 2I_n \le I_{n-2} + I_n$ (3)

តាម $(1),(2)\&(3)$ គេបាន $\frac{2}{2n+3} \le 2I_n \le \frac{2}{2n-1}$

ដូចនេះ $\frac{1}{2n+3} \le I_n \le \frac{1}{2n-1}$ ។

ឃ/គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ និង $\lim\limits_{n\to\infty}(nI_n)$

គេមាន $\frac{1}{2n+3} \le I_n \le \frac{1}{2n-1}$ នោះ $\frac{n}{2n+3} \le nI_n \le \frac{n}{2n-1}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$ និង $\lim\limits_{n\to\infty}(nI_n) = \frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣៥

គេឲ្យអាំងតេក្រាល ៖

$$\mathbf{I}(\alpha)=\int_0^{\alpha}\left(\frac{\mathbf{2x+1}}{\sqrt{\mathbf{x^2+x}}}+\frac{\mathbf{2x+2}}{\sqrt{\mathbf{x^2+2x}}}+\dots+\frac{\mathbf{2x+n}}{\sqrt{\mathbf{x^2+nx}}}-\frac{\mathbf{2nx}}{\sqrt{\mathbf{x^2+1}}}\right).\mathbf{dx}$$

ដែល $\alpha>\mathbf{0}$ ។

ក/គណនា $\mathbf{I}(\alpha)$

ខ/គណនាលីមីត $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathbf{I}(\alpha)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក/គណនា $\mathbf{I}(\alpha)$ ៖

គេអាចសរសេរ $\mathbf{I}(\alpha)=\int_0^{\alpha}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{\mathbf{2x+k}}{\sqrt{\mathbf{x^2+kx}}}-\frac{\mathbf{2x}}{\sqrt{\mathbf{x^2+1}}}\right).\mathbf{dx}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\alpha}\left(\frac{\mathbf{2x+k}}{\sqrt{\mathbf{x^2+kx}}}-\frac{\mathbf{2x}}{\sqrt{\mathbf{x^2+1}}}\right).\mathbf{dx}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{x^2+kx}}-\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{x^2+1}}\right]_0^{\alpha}$$

ដូចនេះ $\mathbf{I}(\alpha)=\mathbf{2}\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{\alpha^2+\mathbf{k}\alpha}-\sqrt{\alpha^2+\mathbf{1}}+\mathbf{1}]$ ។

ខ/គណនាលីមីត $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$ ៖

គេមាន $I(\alpha)=2\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{\alpha^2+k\alpha}-\sqrt{\alpha^2+1}+1]$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k\alpha-1}{\sqrt{\alpha^2+k\alpha}+\sqrt{\alpha^2+1}}+1\right]$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k-1/\alpha}{\sqrt{1+k/\alpha}+\sqrt{1+1/\alpha^2}}+1\right]$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)=2\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{k}{2}+1)=\frac{n(n+5)}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣៦

គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}.dx$ ដែល $n = 0,1,2,...$ ។

ក/គណនា I_0 និង I_1 រួចស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ខ/សរសេរទំនាក់ទំនងរវាងតួ I_n និង I_{n+2} រួចគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+2}}{I_n}$ ។

គ/គណនាផលគុណ $P_n = I_n.I_{n+1}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ឃ/គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$ រួចទាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n}.I_n) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ។

ង/រករូបមន្តសម្រាប់គណនា I_n ។

ច/គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2\times4\times6\times....\times(2k)}{1\times3\times5\times.....\times(2k-1)} \right)^2 \times \frac{1}{2k+1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក/គណនា I_0 និង I_1 រួចស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ៖

ចំពោះ $n = 0$ គេបាន ៖

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\operatorname{Arcsin} x\right]_0^1 = \arcsin(1) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{2}$$

ចំពោះ $n = 1$ គេបាន ៖

$$I_1=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-x^2)'}{\sqrt{1-x^2}}.dx\quad=-\frac{1}{2}\left[2\sqrt{1-x^2}\right]_0^1=1$$

ដូចនេះ $I_0=\frac{\pi}{2}$ និង $I_1=1$ ។

ខ/សរសេរទំនាក់ទំនងរវាងតួ I_n និង I_{n+2} ៖

គេមាន $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}.dx$ នាំឲ្យ $I_{n+2}=\int_0^1\frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}.dx$

តាង $\begin{cases}u=x^{n+1}\\ dv=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=(n+1)x^n.dx\\ v=-\sqrt{1-x^2}\end{cases}$

$$I_{n+2}=\left[-x^{n+1}\sqrt{1-x^2}\right]_0^1+(n+1)\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}.dx$$

$$I_{n+2}=(n+1)\int_0^1\frac{x^n(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.dx=(n+1)\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}.dx-(n+1)\int_0^1\frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}.dx$$

$I_{n+2}=(n+1)I_n-(n+1)I_{n+2}$ នាំឲ្យ $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$ ។

ដូចនេះ $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$ ។

គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+2}}{I_n}$ ៖

គេមាន $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$ គេទាញ $\frac{I_{n+2}}{I_n}=\frac{n+1}{n+2}$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+2}}{I_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+2}=1$ ។

គ/គណនាផលគុណ $P_n=I_n.I_{n+1}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេមាន $P_n=I_n.I_{n+1}$ នោះ $P_{n+1}=I_{n+1}.I_{n+2}$ តែ $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$

គេបាន $P_{n+1}=I_{n+1}\times\frac{n+1}{n+2}I_n=\frac{n+1}{n+2}P_n$ ឬ $\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{n+1}{n+2}$

គេទាញ $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{P_{k+1}}{P_k}=\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{k+2}$ ឬ $\frac{P_n}{P_0}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\ldots\times\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$

ដោយ $P_0=I_0.I_1=\frac{\pi}{2}$

ដូចនេះ $P_n=I_nI_{n+1}=\frac{\pi}{2}.\frac{1}{n+1}$ ។

ឃ/គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$ រួចទាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n}.I_n)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ៖

គេមាន (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះនោះ $I_{n+2}\le I_{n+1}\le I_n$

គេទាញ $\frac{I_{n+2}}{I_n} \le \frac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$ ឬ $\frac{n+1}{n+2} \le \frac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$ ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = 1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $P_n = I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}.\frac{1}{n+1}$

គេទាញ $n I_n^{\ 2} = \frac{\pi}{2}.\frac{n}{n+1}.\frac{I_n}{I_{n+1}}$ ឬ $\sqrt{n}\, I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{\frac{n}{n+1}} \times \sqrt{\frac{I_n}{I_{n+1}}}$

គេបាន $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\, I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}.\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{I_n}{I_{n+1}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n}.I_n) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ។

ង/រករូបមន្តសម្រាប់គណនា I_n ៖

គេមាន $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2}$ គ្រប់ $n = 0\ , 1\ , 2\ , 3, \ldots$

–ករណី $n = 2p$ (គូ)

គេបាន $\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} = \frac{2p+1}{2p+2}$ នាំឲ្យ $\prod\limits_{p=0}^{k-1}\left(\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}}\right) = \prod\limits_{p=0}^{k-1}\left(\frac{2p+1}{2p+2}\right)$

ឬ $\frac{I_{2k}}{I_0} = \frac{1\times 3\times 5\times \ldots.\times(2k-1)}{2\times 4\times 6\times \ldots\ldots\times(2k)}$ ដោយ $I_0 = \frac{\pi}{2}$

ដូចនេះ $I_{2k}=\dfrac{1\times3\times5\times....\times(2k-1)}{2\times4\times6\times....\times(2k)}\times\dfrac{\pi}{2}$ ។

-ករណី $n=2p-1$ (សេស)

គេបាន $\dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}}=\dfrac{2p}{2p+1}$ នាំឲ្យ $\prod_{p=1}^{k}\left(\dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}}\right)=\prod_{p=1}^{k}\left(\dfrac{2p}{2p+1}\right)$

ឬ $\dfrac{I_{2k+1}}{I_1}=\dfrac{2\times4\times6\times....\times(2k)}{3\times5\times7\times......\times(2k+1)}$ ដោយ $I_1=1$

ដូចនេះ $I_{2k+1}=\dfrac{2\times4\times6\times....\times(2k)}{3\times5\times7\times......\times(2k+1)}$ ។

ច/គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2\times4\times6\times....\times(2k)}{1\times3\times5\times.....\times(2k-1)}\right)^2\times\dfrac{1}{2k+1}$

គេមាន $I_{2k+1}=\dfrac{2\times4\times6\times....\times(2k)}{3\times5\times7\times......\times(2k+1)}$ (1)

និង $I_{2k}=\dfrac{1\times3\times5\times....\times(2k-1)}{2\times4\times6\times....\times(2k)}\times\dfrac{\pi}{2}$ (2)

ចែក(1)និង(2)គេបាន $\dfrac{I_{2k+1}}{I_{2k}}=\left(\dfrac{2\times4\times6\times....\times(2k)}{1\times3\times5\times.....\times(2k-1)}\right)^2\times\dfrac{1}{2k+1}\times\dfrac{2}{\pi}$

គេទាញ $\left(\dfrac{2\times4\times6\times....\times(2k)}{1\times3\times5\times.....\times(2k-1)}\right)^2\times\dfrac{1}{2k+1}=\dfrac{\pi}{2}.\dfrac{I_{2k+1}}{I_{2k}}$

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{2\times4\times6\times....\times(2k)}{1\times3\times5\times.....\times(2k-1)}\right)^2\times\frac{1}{2k+1}=\frac{\pi}{2}\lim_{k\to+\infty}\frac{I_{2k+1}}{I_{2k}}$$

គេមាន (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះនោះ $I_{2k+2}\le I_{2k+1}\le I_{2k}$ គ្រប់ $k=0,1,2,...$

គេបាន $\frac{I_{2k+2}}{I_{2k}}\le\frac{I_{2k+1}}{I_{2k}}\le 1$ ដោយ $\frac{I_{n+2}}{I_n}=\frac{n+1}{n+2}$ នោះ $\frac{I_{2k+2}}{I_{2k}}=\frac{2k+1}{2k+2}$

ហេតុនេះ $\frac{2k+1}{2k+2}\le\frac{I_{2k+1}}{I_{2k}}\le 1$ ដោយ $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{2k+1}{2k+2}=1$ នោះ $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{I_{2k+1}}{I_{2k}}=1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\frac{2\times4\times6\times....\times(2k)}{1\times3\times5\times.....\times(2k-1)}\right)^2\times\frac{1}{2k+1}=\frac{\pi}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣៧

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \le \int_0^1 \frac{dx}{x^3+x^2+1} \le \frac{\pi}{4}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \le \int_0^1 \frac{dx}{x^3+x^2+1} \le \frac{\pi}{4}$$

គ្រប់ $x \in [0,1]$ គេមាន $0 \le x^3 \le x^2 \le x \le 1$

គេទាញ $x^2+1 \le x^3+x^2+1 \le x^2+x+1$

$$\frac{1}{x^2+x+1} \le \frac{1}{x^3+x^2+1} \le \frac{1}{x^2+1}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} \le \int_0^1 \frac{dx}{x^3+x^2+1} \le \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$$

ដោយ $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

ហើយ $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = \int_0^1 \frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\text{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

ដូចនេះ $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \leq \int_0^1 \frac{dx}{x^3 + x^2 + 1} \leq \frac{\pi}{4}$ ។

លំហាត់ទី៣៨

ក/គ្រប់ចំនួនពិត $x \ge 0$ ចូរស្រាយថា $e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2}$

ខ/ទាញបង្ហាញថា $\int_0^{\sqrt{3}} e^{-x^2}.dx \le \frac{\pi}{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក/គ្រប់ចំនួនពិត $x \ge 0$ ស្រាយថា $e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2}$

តាងអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ $x \ge 0$ ដោយ $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$

គេបាន $f'(x) = 2x(e^{x^2} - 1) \ge 0$ គ្រប់ $x \ge 0$ នាំឲ្យ f ជាអនុគមន៍កើន

គេបាន $x \ge 0$ នាំឲ្យ $f(x) \ge f(0) = 0$

គេទាញ $e^{x^2} \ge 1 + x^2$ នាំឲ្យ $\frac{1}{e^{x^2}} = e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2}$

ដូចនេះគ្រប់ $x \ge 0$ គេមាន $e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2}$ ។

ខ/ទាញបង្ហាញថា $\int_0^{\sqrt{3}} e^{-x^2}.dx \le \frac{\pi}{3}$

តាមសម្រាយខាងលើគ្រប់ $x \ge 0$ គេមាន $e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2}$

គេបាន $\int_0^{\sqrt{3}} e^{-x^2}.dx \le \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

យក $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ តាង $x = \tan\varphi \Rightarrow dx = (1+\tan^2\varphi).d\varphi$

ចំពោះ $x = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ និង $x = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$

គេបាន $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1+\tan^2\varphi).d\varphi}{1+\tan^2\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi = \frac{\pi}{3}$

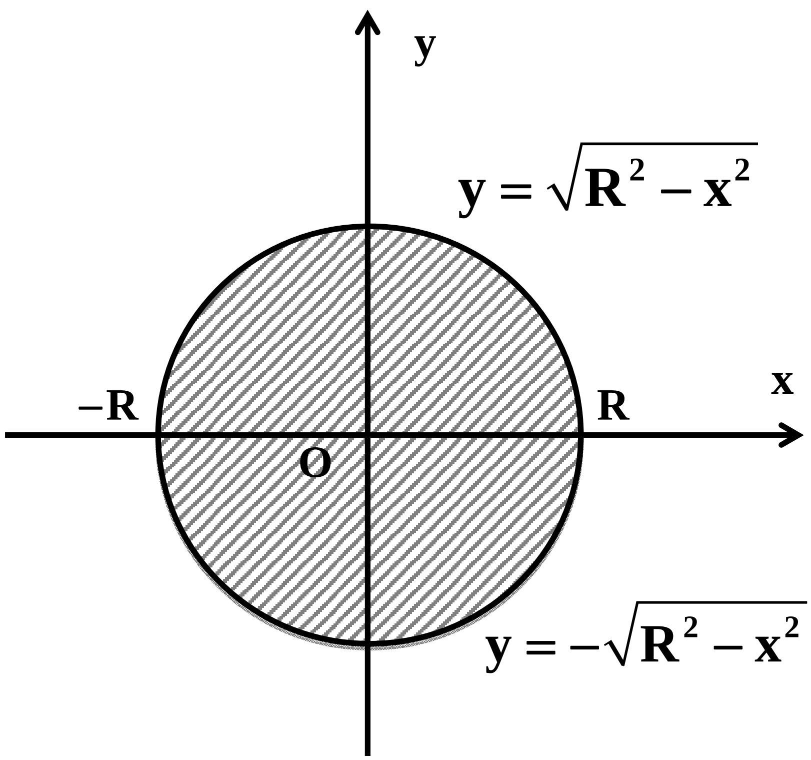
ដូចនេះ $\int_0^{\sqrt{3}} e^{-x^2}.dx \le \frac{\pi}{3}$ ។

លំហាត់ទី៣៩

ស្រាយថាផ្ទៃក្រឡារបស់រង្វង់ដែលមានផ្ចិត $\mathbf{O}$ កាំរង្វាស់ $\mathbf{R}$ ស្មើនឹង $\mathbf{S = \pi R^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រង្វង់ផ្ចិត $\mathbf{O}$ កាំ $\mathbf{R}$ មានសមីការ $\mathbf{x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \sqrt{R^2 - x^2} \\ y = -\sqrt{R^2 - x^2} \end{array} \right.}$



ផ្ទៃក្រឡារង្វង់កំណត់ដោយ $\mathbf{S = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,.\,dx}$

តាង $\mathbf{x = R\sin t \Rightarrow dx = R\cos t.dt}$

ចំពោះ $x\in[-R,R]\Rightarrow t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

គេបាន $S=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}.R\cos t.dt$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}R^2\cos^2 t.dt=2R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}.dt$$

$$=R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t).dt=R^2\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

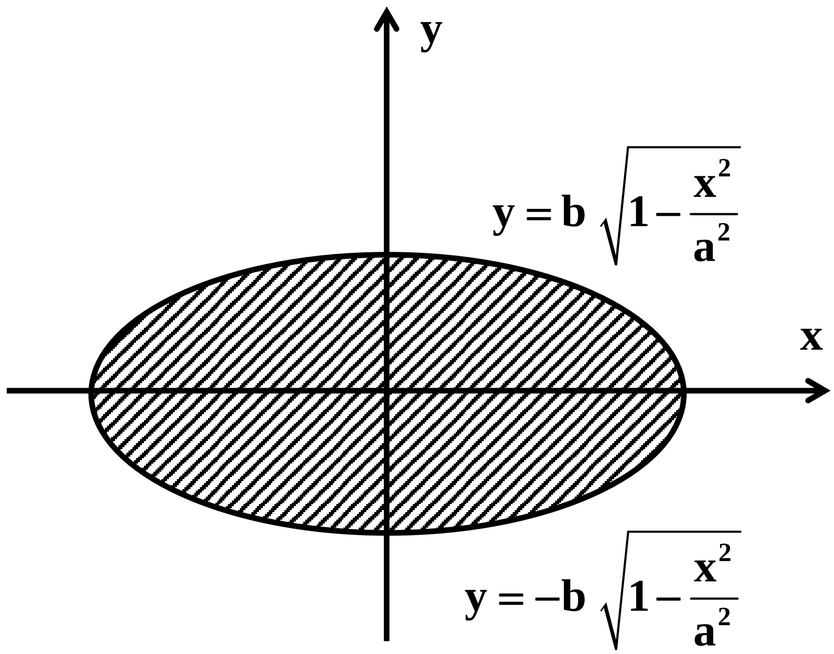
$$=R^2[(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi)-(-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi)]=\pi\ R^2$$

ដូចនេះរង្វង់ផ្ចិត O កាំរង្វាស់ R មានផ្ទៃក្រឡាស្មើនឹង $S=\pi R^2$ ។

លំហាត់ទី៤១

ចូររកក្រឡាផ្ទៃរបស់អេលីបដែលមានសមីការ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ។

ដំណោះស្រាយ



គេមាន $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

សមមូល $y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

ក្រឡាផ្ទៃរបស់អេលីបគឺ ៖

$$S=2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,.dx$$

តាង $x=a\sin t \Rightarrow dx=a\cos t.dt$

ចំពោះ $x\in[-a,a]$ នោះ $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

គេបាន $S=2b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.a\cos t=2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t.dt=\pi ab$

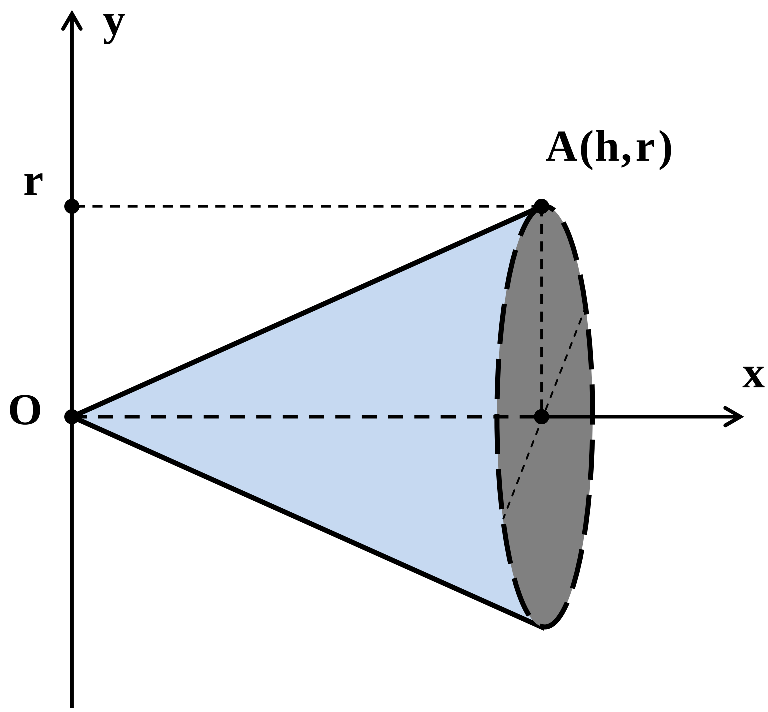
ដូចនេះ $S=\pi ab$ ។

លំហាត់ទី៤១

ចូរស្រាយថាកោណបរិវត្តន៍ដែលមានកាំថាសបាត $\mathbf{r}$ និង កម្ពស់ $\mathbf{h}$

មានមាឌ $\mathbf{V = \frac{1}{3}\pi\, r^2 h}$ ។

ដំណោះស្រាយ



មាឌរបស់កោណបានមកពីរង្វិល

ក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយបន្ទាត់

$\mathbf{(OA): y = \frac{r}{h}x}$ ជុំវិញអក្ស័ $\mathbf{(ox)}$

ក្នុងចន្លោះ $\mathbf{[0,h]}$ ។

គេបាន $\mathbf{V = \pi\int_0^h y^2.dx}$

$$\mathbf{= \pi\int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2.dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2}(\frac{h^3}{3} - 0) = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

ដូចនេះ $\mathbf{V = \frac{1}{3}\pi\, r^2 h}$ ។

លំហាត់ទី៤២

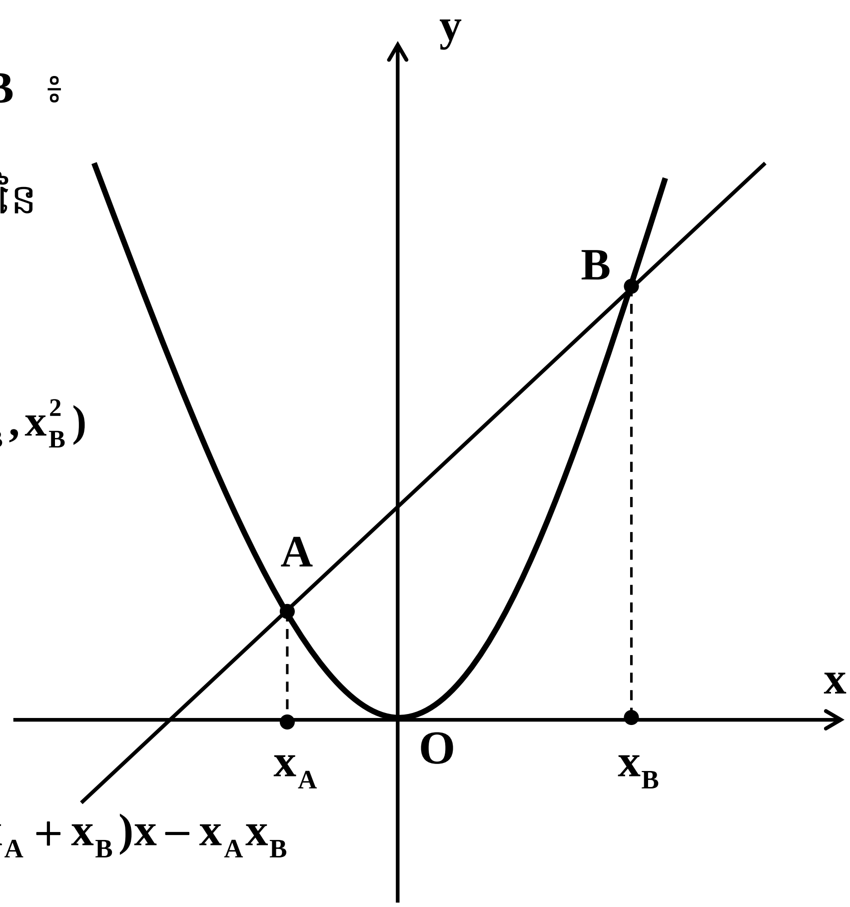
ក្នុងតម្រុយអរតូនរមេ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ គេឲ្យខ្សែកោង $(c): y = x^2$ ។

A និង B ជាពីរចំណុចនៃ (c) ដែល $AB = 2a$ ($a > 0$) ។

កំណត់កូអរដោនេនៃ A និង B ដើម្បីឲ្យផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយបន្ទាត់(AB)

និងខ្សែកោង (c) មានតម្លៃអតិបរមា រួចកំណត់តម្លៃអតិបរមានោះ ។

ដំណោះស្រាយ



កំណត់កូអរដោនេនៃ y និង B ៖

តាង x_A និង x_B ជាអាប់ស៊ីសនៃ

ចំណុច A និង B ។

គេបាន $A(x_A, x_A^2)$ និង $B(x_B, x_B^2)$

សមីការបន្ទាត់ (AB) គឺ ៖

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$\frac{y - x_A^2}{x - x_A} = \frac{x_B^2 - x_A^2}{x_B - x_A} \Rightarrow y = (x_A + x_B)x - x_A x_B$$

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយបន្ទាត់(AB)និងខ្សែកោង x_A ។

គេបាន $S=\int_{x_A}^{x_B}\left[(x_A+x_B)x-x_Ax_B-x^2\right].dx$

$$=\left[\frac{1}{2}(x_A+x_B)x^2-x_Ax_Bx-\frac{1}{3}x^3\right]_{x_A}^{x_B}=\frac{1}{6}(x_B-x_A)^3 \quad (1)$$

គេមាន $AB=2a$ នោះ $AB^2=4a^2$

គេបាន $(x_B-x_A)^2+(x_B^2-x_A^2)^2=4a^2$

$$(x_B-x_A)^2+(x_B-x_A)^2(x_B+x_A)^2=4a^2$$

គេទាញ $x_B-x_A=\dfrac{2a}{\sqrt{1+(x_A+x_B)^2}}$ (2)

យក(2)ជំនួសក្នុង(1)គេបាន ៖

$$S=\frac{1}{6}\times\frac{8a^3}{\left[\sqrt{1+(x_A+x_B)^2}\right]^3}=\frac{4a^3}{3}.\frac{1}{\left[\sqrt{1+(x_A+x_B)^2}\right]^3}$$

ដើម្បីឲ្យ Sមានតម្លៃអតិបរមាលុះត្រាតែ $1+(x_A+x_B)^2$ អប្បបរមា

គេទាញបាន $(x_A+x_B)^2=0$ នោះ $x_A=-x_B$

តាម(2)គេទាញបាន $2x_B=2a$ នោះ $x_B=a$ ហើយ $x_A=-a$

ដូចនេះ $A(-a,a^2)$ និង $B(a,a^2)$ និង $S_{max}=\dfrac{4a^3}{3}$ ។

លំហាត់ទី៤៣

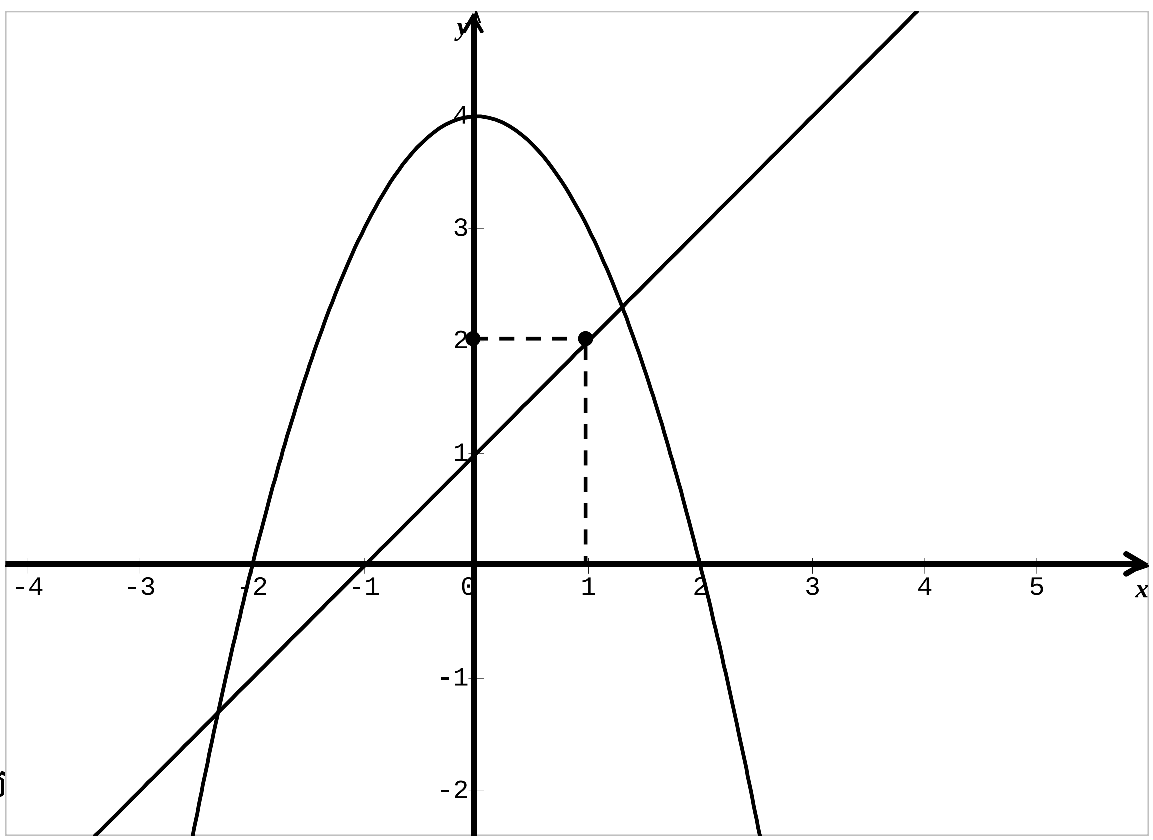
ក្នុងតម្រុយអរតូនរមេ $(o,\vec{i},\vec{j})$ គេឲ្យខ្សែកោង $(c): y = 4 - x^2$

និងបន្ទាត់ **(D)** មានមេគុណប្រាប់ទិស **m** វិលជុំវិញចំណុច **A(1,2)** ។

កំណត់តម្លៃ **m** ដើម្បីឲ្យផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង **(c)** និងបន្ទាត់ **(d)**

មានតម្លៃអប្បបរមា រួចកំណត់តម្លៃអប្បបរមានោះ ។

ដំណោះស្រាយ



ស

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង **(c)** និងបន្ទាត់ **(d)** ៖

$\mathbf{mx - m + 2 = 4 - x^2}$ ឬ $\mathbf{x^2 + mx - m - 2 = 0}$ $\mathbf{(E)}$

ឌីសគ្រីមីណង់ $\mathbf{\Delta = m^2 + 4m + 8 = (m+2)^2 + 4 > 0\ \forall m \in IR}$

នោះសមីការ **(E)** មានឫសពីរជានិច្ច ។ ហេតុនេះបន្ទាត់ **(d)** កាត់ **(c)** បាន

ពីរចំណុច **A** និង **B** ដែល $\mathbf{x_A + x_B = -m\ (1)\ ;\ x_A x_B = -m - 2\ (2)}$

តាង **S** ជាផ្ទៃក្រលាខណ្ឌដោយ **(d)** និង **(c)** ។

$$\mathbf{S = \int_{x_A}^{x_B} \left[(4 - x^2) - (mx - m + 2) \right].dx}$$

$$\mathbf{= \int_{x_A}^{x_B} (-x^2 - mx + m + 2).dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + (m+2)x \right]_{x_A}^{x_B}}$$

$$\mathbf{= -\frac{1}{3}(x_B^3 - x_A^3) - \frac{1}{2}m(x_B^2 - x_A^2) + (m+2)(x_B - x_A)}$$

$$\mathbf{= -\frac{1}{6}(x_B - x_A)[2(x_A^2 + x_A x_B + x_B^2) + 3m(x_A + x_B) - 6m - 12]}$$

$$\mathbf{= -\frac{1}{6}(x_B - x_A)[2(x_A + x_B)^2 - 2x_A x_B + 3m(x_A + x_B) - 6m - 12]\ \ (3)}$$

យក (1) និង (2) ជួសក្នុង (3) គេបាន ៖

$$\mathbf{S = -\frac{1}{6}(x_B - x_A)[2m^2 + 2m + 4 - 3m^2 - 6m - 12]}$$

$$= -\frac{1}{6}\sqrt{(x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B}\ (-m^2 - 4m - 8)$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{m^2 + 4m + 8}\ .\ (m^2 + 4m + 8) = \frac{1}{6}\left[\sqrt{(m+2)^2 + 4}\ \right]$$

ដើម្បីឲ្យ S មានតម្លៃអប្បបរមាលុះត្រាតែ $(m+2)^2 = 0$ នោះ $m = -2$

ហើយផ្ទៃក្រឡាអប្បបរមានោះគឺ $S_{min} = \frac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី៤៤

គេឲ្យ $I(t)=\int_{0}^{t}\frac{3.dx}{4x^2+5x+1}$ ដែល $t>0$

ក/កំណត់ a និង b ដើម្បីឲ្យ $\frac{3}{4x^2+5x+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{4x+1}$

ខ/គណនា $I(t)$ ជាអនុគមន៍នៃ t រួចទាញរក $\lim_{t\to+\infty} I(t)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក/កំណត់ a និង b ៖

$$\frac{3}{4x^2+5x+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{4x+1}$$

$$\frac{3}{4x^2+5x+1}=\frac{a(4x+1)+b(x+1)}{(x+1)(4x+1)}$$

$$\frac{3}{4x^2+5x+1}=\frac{(4a+b)x+(a+b)}{4x^2+5x+1}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} a+b=3 \\ 4a+b=0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $a=-1\ , b=4$ ។

ដូចនេះ $a=-1\ , b=4$ ។

ខ/គណនា $\mathbf{I(t)}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{t}$ ៖

ចំពោះ $\mathbf{a=-1}$, $\mathbf{b=4}$ គេបាន $\dfrac{3}{4x^2+5x+1}=\dfrac{4}{4x+1}-\dfrac{1}{x+1}$

យើងបាន $\mathbf{I(t)=\int_0^t(\dfrac{4}{4x+1}-\dfrac{1}{x+1}).dx}$

$$=\left[\ln|4x+1|-\ln|x+1|\right]_0^t$$

$$=\left[\ln|\frac{4x+1}{x+1}|\right]_0^t=\ln\left(\frac{4t+1}{t+1}\right)$$

ដូចនេះ $\mathbf{I=\ln\left(\dfrac{4t+1}{t+1}\right)}$ ។

គណនាលីមីត $\lim\limits_{t\to+\infty}I(t)$ ៖

គេបាន $\lim\limits_{t\to+\infty}I(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\ln\left(\dfrac{4t+1}{t+1}\right)$ ដោយ $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{4t+1}{t+1}=4$

ដូចនេះ $\lim\limits_{t\to+\infty}I(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\ln\left(\dfrac{4t+1}{t+1}\right)=\ln 4$ ។

លំហាត់ទី៤៥

គេតាង $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតកំនត់ដោយ $a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} x\cos^2 x.dx\ ; (n = 1, 2, 3, ...)$

ចូររកតម្លៃ $\lim_{n\to+\infty}(n^2 a_n)$ ។

(ប្រឡងអាហារូបករណ៍ទៅប្រទេសចិនថ្នាក់ឧត្តមឆ្នាំ ២០០៧)

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃ $\lim_{n\to+\infty}(n^2 a_n)$ ៖

គេមាន $a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} x\cos^2 x.dx$ ដោយ $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

គេបាន $a_n = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{n}} x(1+\cos 2x).dx$

តាង $\begin{cases} u = x \\ dv = 1+\cos 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = x + \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

$$a_n = \frac{1}{2}\left[x(x+\frac{1}{2}\sin 2x)\right]_0^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{n}}(x+\frac{1}{2}\sin 2x).dx$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n}\sin\frac{2}{n})-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n}\sin\frac{2}{n})-\frac{1}{2}[(\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{4}\cos\frac{2}{n})-(-\frac{1}{4})]$$

$$=\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{4n}\sin\frac{2}{n}-\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{8}\cos\frac{2}{n}-\frac{1}{8}$$

$$=\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{4n}\sin\frac{2}{n}-\frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{n}$$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2a_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{4}+\frac{n}{4}\sin\frac{2}{n}-\frac{n^2}{4}\sin^2\frac{1}{n})$

តាង $u=\frac{1}{n}$ ហើយកាលណា $n\to+\infty$ នោះ $u\to 0$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2a_n)=\lim\limits_{u\to 0}(\frac{1}{4}+\frac{1}{4u}\sin 2u-\frac{1}{4u^2}\sin^2 u)$

$$=\lim_{u\to 0}(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.\frac{\sin 2u}{2u}-\frac{1}{4}.\frac{\sin^2 u}{u^2})=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2a_n)=\frac{1}{2}$ ។

ជំពូកទី៧

លំហាត់អនុវត្តន៍

១-ក/ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$

ខ/ទាញរក $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}(\sin^6 x+\cos^6 x).dx$ ។

២-ក/ចូរស្រាយថា $\frac{1}{1+e^x}=1-\frac{1}{1+e^x}$

ខ/គណនា $I=\int_0^{\ln 2}\frac{dx}{1+e^x}$

៣-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}.dx$ និង $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}.dx$

ក/គណនា $I+J$ និង $I-J$ ។

ខ/ទាញរក I និង J

៤-គេឲ្យ $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x.dx$ និង $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x.dx$

ស្រាយថា $I=J$ រួចគណនា $I+J$ ហើយទាញរក I និង J ។

៥–គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 \cos^n x.dx$ ដែល $n=0,1,2,...$ ។

ក/គណនា I_0 និង I_1 រួចស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ខ/សរសេរទំនាក់ទំនងរវាងតួ I_n និង I_{n+2} រួចគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+2}}{I_n}$ ។

គ/គណនាផលគុណ $P_n=I_n.I_{n+1}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ឃ/គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$ រួចទាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n}.I_n)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ។

ង/រករូបមន្តសម្រាប់គណនា I_n ។

ច/គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2\times4\times6\times....\times(2k)}{1\times3\times5\times.....\times(2k-1)}\right)^2\times\frac{1}{2k+1}$ ។

៦–គណនា $I=\int_0^1\frac{dx}{x^2-x+1}$ និង $J=\int_0^1\frac{dx}{x^2+x+1}$

៧–ក/បង្ហាញថា $\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$ គ្រប់ $x\neq0$, $x\neq-1$ ។

ខ/គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^3\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}.dx$ ។

៨-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\int_{0}^{\alpha} x^3 f(x^2).dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\alpha^2} x f(x).dx \ , \alpha > 0$ ។

៩-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x).dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x).dx$

១០-ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ f ជាអនុគមន៍សេសនោះគេបាន ៖

$\int_{a}^{b} f(x).dx = \int_{-a}^{-b} f(x).dx$ ។

១១-ក/ ឧបមាថា $t > 1$ ។ គណនា $I(t) = \int_{1}^{t} \frac{2x\ln x}{(1+x^2)^2}.dx$

ខ/គណនាលីមីត $\lim\limits_{t \to +\infty} I(t)$ ។

១២-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^4+1}$ ។

១៣-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_{0}^{1} \frac{(2t)^n + (1-t^2)^n}{(1+t^2)^{n+1}}.dt$

ក/សរសេរទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n+2} ។

ខ/ រករូបមន្តគណនា I_n ។

១៤–គេឲ្យអាំងតេក្រាល ៖

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt[n]{\sin x}}{\sqrt[n]{\sin x} + \sqrt[n]{\cos x}}.dx \quad \text{និង} \quad J_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt[n]{\cos x}}{\sqrt[n]{\sin x} + \sqrt[n]{\cos x}}.dx$$

ក/ស្រាយថា $I_n = J_n$ ។

ខ/គណនា $I_n + J_n$ រួចទាញរក I_n និង J_n ។

១៥–ក/ស្រាយថា $\int_0^a f(x).dx = \int_0^a f(a-x).dx$

ខ/អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x).dx$

១៦/គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}.dx$

គណនា $I_{2n+1} - I_{2n-1}$ រួចទាញរក I_{2n+1} ។

១៧/គណនាអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}.dx$ ។

(ប្រឡងនៅសហរដ្ឋអាមេរិចឆ្នាំ 1998)

១៨-គេឲ្យ $I_n = \int_1^e (\ln x)^n .dx$

ក/ស្រាយថា $I_n = e - nI_{n-1}$ ។

ខ/គណនា I_4 ។

១៩-គេឲ្យ $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$

ក/រកទំនាក់ទំនងរបស់ I_n ។

ខ/ទាញរក I_4 និង I_5

២០-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}\ , x \geq 1$

ក/គណនា $\int f(x).dx$ ។

ខ/គេឲ្យ $a > 1$ ។ គណនា $I(a) = \int_1^a f(x).dx$ ។

គ/រក $\lim_{a \to +\infty} I(a)$ ។

២២-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}.dx$ ។

២៣-គេអោយអាំងតេក្រាល ៖ $I_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos^{n-1} x \quad ,n\in IN^*$

ក/គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ/គេតាង $S_n=I_1+I_2+I_3+...+I_n=\sum_{k=1}^{n}(I_k)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $S_n=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} \quad ,n\in IN$ ។

គ/គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}S_n$ ។

២៤-គេអោយអាំងតេក្រាល $I_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^n x.dx \quad ,n\in IN$

ក/ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(I_n)_{,n\in IN}$ ជាស្វ៊ីតចុះ រួចគណនា I_0 និង I_1

ខ/ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$ គេមាន $I_n=\frac{n-1}{n+2}.I_{n-2}$ ។

គ/គេតាង $P_n=I_n.I_{n-1}$ ដែល $n\geq 1$ ។

គណនា P_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចគណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(n^2.P_n)$ ។

ឃ/គេតាង $S_n = P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_n = \sum_{k=1}^{n}(P_k)$ ។

បង្ហាញថា $S_n = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$ រួចទាញរកលីមីត $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

ង/គណនា $\Pi_n = S_1 \times S_2 \times S_3 \times .... \times S_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ច/គណនា I_{2n} និង I_{2n+1} ជាអនុគមន៍នៃ n ។

២៥-គេអោយអាំងតេក្រាល $I_n = \frac{1}{2n-1} \cdot \int_0^1 (x^2)^n .dx \ ,n \in IN$ ។

ក/គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ/គណនា $S_n = I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n$ រួចទាញរកលីមីត $\lim_{n\to+\infty} S_n$

២៦-គេអោយអាំងតេក្រាល៖

$$I_n = \int_{na}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x} \quad \text{និង} \quad J_n = \int_{a}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x} \ ,n \in IN, a > 0 \quad ។$$

ក/បង្ហាញថា $I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n = J_n$ ។

ខ/គណនា I_n និង J_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ/ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរបង្រួមផលបូក៖

$$S_n = \frac{1}{\cos a \cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a \cos 3a} + ... + \frac{1}{\cos(na)\cos(n+1)a} \quad ។$$

២៧– គេអោយអាំងតេក្រាលៈ

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos^2 x.dx \quad \text{និង} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin^2 x.dx \ \ ,n \in IN$$ ។

ក/គណនា $I_n + J_n$ នឹង $I_n - J_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ/ទាញអោយបាននូវតំលៃI_n នឹងJ_n

២៨–គេអោយស្វ៊ីត $I_n = \int_{e^{-(n+1)\pi}}^{e^{-n\pi}} \cos(\ln x).dx \ \ ,n \in IN$

ក/ស្រាយបញ្ជាក់ $(I_n)_{,n\in IN}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ/សរសេរកន្សោមI_n ជាអនុគមន៍នៃn ។

គ/គណនាផលបូក$S_n = I_0 + I_1 + I_2 + ... + I_n$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

២៩–គេអោយ f ជាអនុគមន៍ មានខួប p និងកំនត់លើ $\left[np,(n+1)p\right]$

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ និង $a > 0, a \neq 1$ គេតាង

$$I_n = \int_{np}^{(n+1)p} a^x.f(x).dx$$

ក/ស្រាយថា $(I_n), n \in IN$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

ខ/សរសេរ I_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង I_0 ។

គ/អនុវត្តន៍ ចូរគណនា $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^x.\cos 2x.dx$ ។

៣០–គេអោយអាំងតេក្រាល $I_n = \int_1^e \frac{x^{-(2n+1)}}{1+x^2}.dx \quad ,n \in IN, e = 2,71828...$

ក/ចូរគណនាតួ I_0 ។

ខ/ចូរបង្ហាញថា: $I_{n+1} + I_n = \frac{e^{2n+2} - 1}{2(n+1).e^{2n+2}}$ ។

គ/ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព៖

$$\frac{1}{2}x^{-2(n+1)} \le \frac{x^{-2n}}{1+x^2} \le \frac{1}{2}x^{-2n} \quad ,\forall x \ge 1$$ ។

ឃ/គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty} I_n$ និង $\lim_{n\to+\infty}(nI_n)$ ។

៣១–គណនាអាំងតេក្រាល៖

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^n x} \quad \text{និង} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cot^n x}$$

៣២–គេអោយស្វ៊ីត $I_n = \int_0^1 \frac{t^n.dx}{1+t^2}$ （ $n \in IN$ ）

ក/ស្រាយថា (I_n)ជាស្វ៊ីតចុះ រួចគណនាតួ I_0 និង I_1 ។

ខ/សរសេរទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n+2} ។

គ/ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{2(n-1)} \quad ,\forall n \ge 2$ ។

ឃ/គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$ ។

៣៣–គេអោយអាំងតេក្រាល:

$$I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln x}{x^2}.dx \quad \forall n \in IN, e = 2,71828....$$

ក/ចូរបង្ហាយថា $I_n = \left(\frac{n}{e^n} - \frac{n+1}{e^{n+1}}\right) + \left(1 - \frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{e}\right)^n$

ខ/គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ ។

គ/គណនាផលបូក ៖ $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(I_k) = I_0 + I_1 + I_2 + ... + I_n$ ។

ទាញបញ្ជាក់លីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

៣៤– គេអោយអាំងតេក្រាល ៖

$$I_n = \lim_{\lambda\to+\infty}\left[\int_1^{\lambda} \frac{1}{(1+x)^2}.\sqrt[n]{\frac{x-1}{x+1}}.dx\right]$$ ។

ក/ចូរបង្ហាញថា $I_n = \frac{1}{2}.\frac{n}{n+1}$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ ។

ខ/គណនា $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n}(I_k) = I_1.I_2.I_3....I_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៣៥-គេអោយស្វ៊ីត ៖

$$I_n = \int_0^e x^n.dx \quad , n \in IN, e = 2.71828...$$ ។

ក/គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ/គណនា $S_n = \frac{1}{I_0} + \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} + ... + \frac{1}{I_n}$ ។

គ/ទាញបញ្ជាក់លីមីត $\lim_{n \to +\infty} S_n$ ។

៣៦-គេអោយស្វ៊ីតចំនួនពិត $(I_n), n \in IN$ ដោយ៖

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx.dx$$

ក/គណនាតួ I_0 និង I_1 ។

ខ/ស្រាយថា I_n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចរក I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ/គណនា $S_n = I_0 + I_1 + I_3 + ... + I_n$ រួចគណនា $\lim_{n \to +\infty} S_n$ ។

៣៧-គេអោយអនុគមន៍:

$$y = f_n(x) = \int_{nx}^{(n+1)x} e^{-t^2}.dx \qquad \left(n \in IN \quad e = 2.71828...\right)$$

ក/គណនាដេរីវេ $y' = f'_n(x)$

ខ/ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ គេសន្មត $\Omega_n = f'_n(1)$ ។

ចូរគណនា $S_n = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + ... + \Omega_n$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ ។

៣៨-គេអោយអនុគមន៍ f កំណត់លើ $[0, \pi]$ ។

ក/ចូរបង្ហាញថា: $\int_0^{\pi} xf(\sin x).dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x).dx$ ។

ខ/អនុវត្តន៍គ:ណនា $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}.dx$ ។

៣៩-គេអោយស្វ៊ីត $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2 - x + 1}}.dx$

ក/គណនាតួ I_0 និង I_1 ។

ខ/រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n ,I_{n+1} និង I_{n+2} ។

គ/អនុវត្តន៍: ចូរគណនា $k = \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x^2 - x + 1}}.dx$ ។