

ចំណុចកំណត់
P IN

ជួបជួបដោយ គ្នា ជួបជួបដោយ

- និកត្តានិមិត្តតាងនិមិត្ត i ដែល $i = \sqrt{-1}$ ។ note $i^{4k} = 1, i^{4k+p} = i^p \quad 1 \leq p \leq 3$
- ចំនួននិមិត្តតាងនិមិត្ត bi ដែល $b \in \mathbb{R}$ ។
- ចំនួនកុំផ្លិចនាមប្រសិនបើវាជាចំនួនពិតធម្មតា ។
- កុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ $Z = a + bi$ គឺ $\bar{Z} = a - bi$ ។
- កុំផ្លិចពីរឡើងវិញ $Z_1 = a_1 + b_1i$ និង $Z_2 = a_2 + b_2i$

$$Z_1 = Z_2$$

លុះត្រាតែ $\begin{cases} a = a_2 \\ b = b_2 \end{cases}$ (ចំនួនពិតឡើងវិញចំនួនពិត, ចំនួននិមិត្តឡើងវិញនិងចំនួននិមិត្ត) ។

- លក្ខណៈនៃចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់

បើ Z & U នាចំនួនកុំផ្លិចគេបាន

- $\overline{Z + U} = \bar{Z} + \bar{U}$
- $\overline{Z - U} = \bar{Z} - \bar{U}$
- $\overline{Z \cdot U} = \bar{Z} \cdot \bar{U}$
- $\overline{\left(\frac{Z}{U}\right)} = \frac{\bar{Z}}{\bar{U}}, U \neq 0$
- ម៉ូឌុលនៃ $Z = a + bi$ គឺ $r = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- លក្ខណៈម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិច

បើ Z & U នាចំនួនកុំផ្លិចគេបាន

- $|Z \cdot U| = |Z| \cdot |U|$
- $\left|\frac{Z}{U}\right| = \frac{|Z|}{|U|}, U \neq 0$
- $|Z + U| \leq |Z| + |U|$
- $|Z|^2 = Z \cdot \bar{Z}$
- ចំនួនកុំផ្លិចនាមប្រសិនបើវាជាចំនួនពិតធម្មតា $Z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)), r > 0$
- របៀបបង្កើនចំនួនកុំផ្លិចនាមប្រសិនបើវាជាចំនួនពិតធម្មតា

- $Z = a + bi$ ដែល $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $Z = r \left(\frac{a}{r} + i \cdot \frac{b}{r} \right) = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$

- ផលចែកនិងផលគុណចំនួនកុំផ្លិចនាមប្រសិនបើវាជាចំនួនពិតធម្មតា

បើ $Z_1 = r_1(\cos(\alpha_1) + i\sin(\alpha_1))$ និង $Z_2 = r_2(\cos(\alpha_2) + i\sin(\alpha_2))$

- $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_2))$ ដែល $Z_2 \neq 0$
- $Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2))$

■ ស្វ័យគុណទី១នៃចំនួនកុំផ្លិច

$$Z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$$

$$Z^n = (r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)))^n$$

$$= r^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$$

■ ឫសទី១នៃចំនួនកុំផ្លិច

$$Z = r(\cos \alpha + i\sin \alpha) \text{ នោះឫសទី } n \text{ នៃ } Z \text{ កំណត់ដោយ}$$

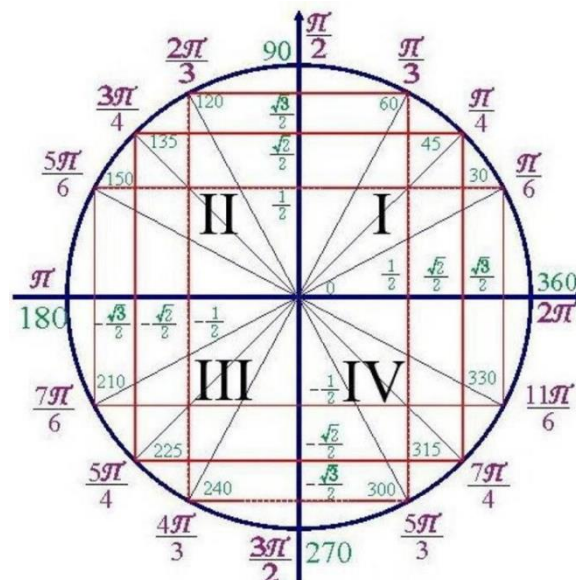
$$W_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) + i\sin \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) \right) \{n = 1, 2, 3, \dots, n-1\}$$

■ របៀបប្តូរចំនួនកុំផ្លិចទៅនិងចេញពីកោណបាត្រ

- បើ $Z = \cos(\alpha) - i\sin(\alpha) \Rightarrow Z = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$
- បើ $Z = -\cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \Rightarrow Z = \cos(\pi - \alpha) + i\sin(\pi - \alpha)$
- បើ $Z = -\cos(\alpha) - i\sin(\alpha) \Rightarrow Z = \cos(\pi + \alpha) + i\sin(\pi + \alpha)$
- បើ $Z = \sin(\alpha) + i\cos(\alpha) \Rightarrow Z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
- បើ $Z = -\sin(\alpha) + i\cos(\alpha) \Rightarrow Z = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$

■ តាមឫសចំនួននៃចំនួនកុំផ្លិច

កាស្រី	ទី១	ទី២	ទី៣	ទី៤
$\sin(\alpha)$	+	+	-	-
$\cos(\alpha)$	+	-	-	-
$\tan(\alpha)$	+	-	+	+
$\cot(\alpha)$	+	-	+	-



■ តារាងតម្លៃត្រីកោណមាត្រ

មុំ អន្តរាគមន៍	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	2π
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	∥	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot(\alpha)$	∥	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	∥

■ រូបមន្តត្រីកោណមាត្រ

មុំដូចគ្នា	មុំបន្ថែម	មុំនិរន្តិកស្មើ π
$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ $\cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$ $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot(\alpha)$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$ $\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$ $\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$ $\cot(\pi + \alpha) = \cot(\alpha)$

$\sin(a + 2k\pi) = \sin(a)$ $\cos(a + 2k\pi) = \cos(a)$	$\tan(a + 2k\pi) = \tan(a)$ $\cot(a + 2k\pi) = \cot(a) \quad (k \in \mathbb{Z})$
$\cos(k\pi) = \begin{cases} -1, k \text{ គេស } \\ 1, k \text{ គូ } \end{cases}$ $\sin(k\pi) = 0$	$\cos(\alpha + k\pi) = \begin{cases} -\cos(\alpha), k \text{ គេស } \\ \cos(\alpha), k \text{ គូ } \end{cases}$ $\sin(\alpha + k\pi) = \begin{cases} -\sin(\alpha), k \text{ គេស } \\ \sin(\alpha), k \text{ គូ } \end{cases}$

មុំបំពេញ	មុំនិរន្តិកស្មើ $\frac{\pi}{2}$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha)$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan(\alpha)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot(\alpha)$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan(\alpha)$

■ សមីការកូស៊ីនុស៍ត្រីកោណមាត្រ

- $\cos(x) = \cos(\alpha)$ $\rightarrow x = \pm\alpha + 2k\pi$
- $\sin(x) = \sin(\alpha)$ $\rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$
- $\tan(x) = \tan(\alpha)$ $\rightarrow x = \alpha + k\pi$
- $\sin(x) = 0$ $\rightarrow x = k\pi$
- $\cos(x) = 0$ $\rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

រូបមន្តត្រីកោណមាត្រសំខាន់ៗ

- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$
- $\cot(a + b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b}$
- $\cot(a - b) = \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot a - \cot b}$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$
- $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$
- $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)]$
- ♦ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- ♦ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- ♦ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- ♦ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- ♦ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
- ♦ $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$
- ♦ $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
- ♦ $\tan x \cot x = 1$
- ♦ $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$
- ♦ $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
- ♦ $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$
- ♦ $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$
- ♦ $\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$
- ♦ $\cot^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$

ផ្នែកលំហាត់

I. សរសេរចំនួនខាងក្រោមនិមួយៗជាទម្រង់ $Z = a + bi$.

$$១.Z = i^{2010} + i - i^2$$

$$៣.Z = i^{2016} - i^{2017} - i^{2018}$$

$$៥.Z = \frac{i\sqrt{2}}{1-4i^2}$$

$$៧.Z = (3 + 4i)^3$$

$$៩.Z = (3 - i)^2(3i - \sqrt{2})$$

$$១១.Z = \frac{2}{(2-i)(3+i)}$$

$$១៣.Z = \frac{3(1-i^{20})}{(-2-3i)^2}$$

$$១៥.Z = \frac{2(3-5i)}{2-i} - \frac{1}{2-3i}$$

$$១៧.Z = \left(\frac{3}{3i}\right)^3 - \frac{1}{i\sqrt{3}}$$

$$១៩.Z = \frac{3}{-i} + i - \frac{1}{i^{1998}}$$

$$២១.Z = \frac{3i-\sqrt{2}}{(1-i)(2+i)}$$

$$២៣.Z = ((3+i)(1-i))^2$$

$$២៥.Z = \frac{(i-\sqrt{2})}{(1-i\sqrt{3})i^{3002}}$$

$$២៧.Z = \left(\frac{3i-\sqrt{2}}{(1+3i)}\right)^2$$

$$២៩.Z = i^{2+i^{10}}$$

$$៣១.Z = 3 - i^{2019} + \frac{2}{i-1}$$

$$៣៣.Z = (x - iy)(w + 3ik)$$

$$៣៥.Z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}-i}\right)^2$$

$$៣៧.Z = \frac{(1-5i)}{(-\sqrt{3}-i\sqrt{2})}$$

$$៣៩.Z = \frac{1-i}{4-i} + \frac{2-i}{2-3i} - \frac{2+i\sqrt{2}}{3-i}$$

$$២.Z = i^{23} + \frac{1+i}{3i}$$

$$៤.Z = \frac{3+7i}{3-\sqrt{2}}$$

$$៦.Z = \left(\frac{1-i}{1+2i}\right)\left(\frac{1+i}{3-i}\right)$$

$$៨.Z = \frac{(1-2i)^2}{1-i^2}$$

$$១០.Z = 1 - \frac{3}{-2-3i}$$

$$១២.Z = \frac{(3-4i-\sqrt{3})}{-i}$$

$$១៤.Z = \frac{1-2i+i^{2019}}{2-i2\sqrt{3}}$$

$$១៦.Z = (1-3i)(-2i-1)(1-i\sqrt{2})$$

$$១៨.Z = i^{-13} + i^{12} - \frac{1}{i^5}$$

$$២០.Z = (-1-i)^2(-i-\sqrt{3})$$

$$២២.Z = \frac{(i-4)(2-i)}{(1-4i)}$$

$$២៤.Z = (3i - i\sqrt{2})^2$$

$$២៦.Z = \frac{i^{80}-2i^{311}}{i^{300}-i^{200}-3i}$$

$$២៨.Z = (i - i(-1 + 3i))^2$$

$$៣០.Z = \frac{1-2i^{11}}{2i^2}$$

$$៣២.Z = \frac{2}{(2-6i)(3-i^2)}$$

$$៣៤.Z = \frac{(x-iy)}{1-i\sqrt{3}}$$

$$៣៦.Z = \left(\frac{15i}{\sqrt{2}-i\sqrt{5}}\right)^2$$

$$៣៨.Z = \frac{1-5i}{\sqrt{3}-i} + \frac{1+2i}{2-i}$$

$$៤០.Z = \frac{1-i}{4-i} - \frac{2+i\sqrt{2}}{3-i}$$

II. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំកុំផ្លិច.

$$១.Z^2 + Z + 5 = 0$$

$$២.2Z^2 + 4Z + 11 = 0$$

$$៣.Z^2 - 3Z + 5 = 0$$

$$៥.Z^2 + 2Z + 3 = 0$$

$$៧.Z^2 - 3Z + 2Zi + 8 = 0$$

$$៩.Z^2 - (2 + i)Z + i = 0$$

$$៤.Z^2 + (3 - i)Z = 0$$

$$៦.Z^2 - (i + 2)Z = 0$$

$$៨.Z^2 + (1 + i)Z + i = 0$$

$$១០.Z^2 - Z + 4 = 0$$

III. សរសេរចំនួនកុំផ្លិចនិងប្រើទ្រឹស្តីកោណបូក។

$$១.Z = 1 - i$$

$$៣.Z = \sqrt{3} + i$$

$$៥.Z = i^4 + 3$$

$$៧.Z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$៩.Z = -1 - i\sqrt{3}$$

$$១១.Z = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$១៣.Z = i^{2018}$$

$$១៥.Z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$១៧.Z = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$$

$$១៩.Z = (-1 - i)(\sqrt{2} - i\sqrt{6})$$

$$២.Z = 1 + 2i^2$$

$$៤.Z = 5$$

$$៦.Z = 2i$$

$$៨.Z = -1 - i$$

$$១០.Z = i^2 + i + i^4$$

$$១២.Z = -\sqrt{6} - i\sqrt{2}$$

$$១៤.Z = -1 + i\sqrt{3}$$

$$១៦.Z = -1 + i$$

$$១៨.Z = \frac{-1-i\sqrt{3}}{i^2}$$

$$២០.Z = \frac{-1-i\sqrt{3}}{1-i}$$

IV. សរសេរនិងប្រើទ្រឹស្តីកោណបូក។

$$១.Z = \cos(2\pi) - i\sin(2\pi)$$

$$៣.Z = -i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$៥.Z = -i\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$$

$$៧.Z = 1 - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$៩.Z = i\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

$$១១.Z = i\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$១៣.Z = -\cos\left(\frac{\pi}{11}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)$$

$$១៥.Z = \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} - i\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$១៧.Z = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

$$២.Z = -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$៤.Z = 4\cos(9\pi) - 4i\sin(9\pi)$$

$$៦.Z = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$៨.Z = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$១០.Z = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$១២.Z = -i\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$១៤.Z = \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) - i\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)\right)$$

$$១៦.Z = 1 - \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$១៨.Z = 2 + 2\cos(2\pi) - 2i\sin(2\pi)$$

$$១៩.Z = i\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$២០.Z = -\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$$

V. សរសេរសមីការនៃប្រវត់ព័ត៌មានលំដាប់។

$$១.Z = \cos\left(\frac{24\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{24\pi}{12}\right)$$

$$២.Z = \cos(2019\pi) + i\sin(2019\pi)$$

$$៣.Z = i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$៤.Z = 4\cos(9\pi) - 4i\sin(9\pi)$$

$$៥.Z = -i\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$៦.Z = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$៧.Z = 1 - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$៨.Z = \cos\left(\frac{2\pi}{24}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{24}\right)$$

$$៩.Z = i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$១០.Z = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

VI. លំហាត់

- គេមាន $Z = (1 - i)^{20}$ ។ សរសេរ Z នៃប្រវត់ព័ត៌មានលំដាប់ត្រូវបានសរសេរនៃប្រវត់ព័ត៌មានលំដាប់។
- គេមានសមីការ $Z^2 - i(1 + \sqrt{3})Z + 4 + 2\sqrt{3} = 0$ ។ ចូរសរសេរប្រសាសន៍សមីការនេះនៃប្រវត់ព័ត៌មានលំដាប់ត្រូវបាន
- គេមាន $Z_1 = \sqrt{3} + i - 1, Z_2 = \sqrt{3} - i + 1$ ។
 - បង្ហាញថា $(Z_1 + Z_2)$ ស្មើនឹងចំនួនពិត ។ បង្ហាញថា $(Z_1 - Z_2 + 2)$ ស្មើនឹងចំនួននិមិត្ត ។
 - សរសេរ $(Z_1 - Z_2), (Z_1 + Z_2), \frac{(Z_1 - Z_2)}{(Z_1 + Z_2)}, (Z_1 - Z_2)(Z_1 + Z_2)$ នៃប្រវត់ព័ត៌មានលំដាប់ត្រូវបាន
- ចូរកំណត់ចំនួន x និង y ដោយគេដឹងថា $(2 + 3i)x + (-1 - i)y = \frac{2+3i}{1+4i}$ ។
- គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z = \frac{-\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{1-i}$ ។
 - សរសេរ Z នៃប្រវត់ព័ត៌មានលំដាប់ត្រូវបានសរសេរនៃប្រវត់ព័ត៌មានលំដាប់ត្រូវបាន
 - ដោយ $A = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)x + i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)y$ ។ រកតម្លៃ x, y ដោយគេដឹងថា $A = \bar{Z}$
- គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z_1 = 2 - i\sqrt{3}$ & $Z_2 = -1 + i$ ។
 - សរសេរ $x = Z_1 + iZ_2$ និង $y = Z_2 - iZ_1$ នៃប្រវត់ព័ត៌មានលំដាប់ត្រូវបាន
 - សរសេរ $x + 1 = Z_1 + iZ_2$ និង $y + \sqrt{3} = Z_2 - iZ_1$ នៃប្រវត់ព័ត៌មានលំដាប់ត្រូវបាន
 - សរសេរ $A = \frac{1}{3}xy$ និង $B = \frac{x}{y}$ នៃប្រវត់ព័ត៌មានលំដាប់ត្រូវបាន
- គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z_1 = 3 - i\sqrt{3}$ & $Z_2 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$ ។
 - សរសេរ $Z_1, Z_2, Z_1 \cdot Z_2, \frac{Z_1}{Z_2}, \frac{Z_2}{Z_1}$ នៃប្រវត់ព័ត៌មានលំដាប់ត្រូវបាន
 - រកប្រសាសន៍ព័ត៌មាន Z_1 & Z_2 ។
- គេមាន $Z_1 = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ & $Z_2 = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

១. រកប្រូឌុកនិងអាក្រូយ៉ង់នៃ Z_1 & Z_2 ។

9. គេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរគឺ $Z_1 = 2 + i2\sqrt{3}$ និង $Z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

១. សរសេរ $\frac{Z_1}{Z_2}, Z_1 \cdot Z_2$ និងប្រសិទ្ធភាពពិត។

២. សរសេរ $Z_1, Z_2, Z_1 \cdot Z_2, \frac{Z_1}{Z_2}, \frac{Z_2}{Z_1}$ និងប្រសិទ្ធភាពពិត។

៣. ចាត់តាំងប្រភេទពិតប្រាកដ $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \sin\left(\frac{\pi}{12}\right), \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ ។

10. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ និង $Z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + i$

១. សរសេរ Z_1 & Z_2 និងប្រសិទ្ធភាពពិត។

២. រកប្រូឌុកនិងអាក្រូយ៉ង់នៃ $(Z_1)^4$ & $(Z_2)^4$ ។ រួចគណនាបូស្កីននៃ Z_1 & Z_2 ។

៣. រកតម្លៃប្រភេទពិតប្រាកដ $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \sin\left(\frac{\pi}{12}\right), \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ និង $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ។

11. គេមាន $Z = \frac{1+i+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-i}$ ។

ក. សរសេរ Z និងប្រសិទ្ធភាពពិត។

ខ. គណនា $(\bar{Z})^{-3}, \frac{1}{1+\bar{Z}}, Z+1$, និងប្រសិទ្ធភាពពិត។

12. គេមានសមីការ $(E): Z^2 - 6Z + 12 = 0$ ។

១. ដោះស្រាយសមីការ (E) ដើម្បីស្វែងរកចំនួនកុំផ្លិច Z_1 និង Z_2 ហើយ Z_2 នាំចេញនិងប្រភេទពិតប្រាកដ។

២. សរសេរ $Z_1, Z_2, \frac{Z_1}{Z_2}, \frac{Z_2}{Z_1}, \frac{Z_1}{Z_3}$ និងប្រសិទ្ធភាពពិត។ $Z_3 = \bar{Z}_1 + \sqrt{3} - 3$

៣. សរសេរ $\frac{Z_1}{Z_3}$ និងប្រសិទ្ធភាពពិត។ រួចចាត់តាំងប្រភេទពិតប្រាកដ $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ និង $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ។

៤. សរសេរ $\left(\frac{Z_1}{Z_3}\right)^{2019}$ និងប្រសិទ្ធភាពពិត។

13. គណនាបូស្កីននៃចំនួនកុំផ្លិចខាងក្រោម

១. $Z = 12 - 10i$

២. $Z = 8 - 6i$

៣. $Z = 2 - i$

៤. $Z = \sqrt{2} - 6i$

14. គេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរគឺ $a = 1 + i\sqrt{3}, b = -1 + i\sqrt{3}$ ។

១. សរសេរ $Z = 2a - b$ និង $w = a - 2b$ និងប្រសិទ្ធភាពពិត។ រួចបង្ហាញថា Z និង w នាំកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា។

២. សរសេរ a, b, Z, w និងប្រសិទ្ធភាពពិត។ រួចបញ្ជាក់ប្រូឌុកនិងអាក្រូយ៉ង់នៃចំនួនទាំងបួន។

៣. គណនាបូស្កីននៃ $\frac{a}{b}, \frac{w}{Z}$ ។

15. គេមានអនុគមន៍ពហុធាតុ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ដែល $a, b, c \in \mathbb{R}$ ។

ក.ច្បើ $f(i) = 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + az + b - 1)$

ខ.កំណត់តំលៃ a, b, c, d ដែល $f(i) = 0$ និង $f(1 + i) = 3(1 + 2i)$

គ.ស៊ានស្រាយសមីការ $f(x) = 0$ ស្វែងរកសំណុំ $\mathbb{C}$ ។

16. គេមាន $Z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ ។

ក.គណនា $w_1 = 1 + Z + Z^2 + Z^3 + \dots + Z^8$

ខ.គណនា $w_2 = 1 + Z - Z^2 + Z^3 - \dots + Z^{10}$

គ.គណនា $w_3 = Z^{2013} - Z^{2014} + Z^{2015}$

17. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $A = -\frac{1}{3} - \frac{i}{\sqrt{3}}$ $B = 2$ ។

ក.សរសេរ $W = (A + B)^2 + Bi$ នាទីប្រុងពិសិដ្ឋនិយម។

ខ.សរសេរ $A, B, AB, \frac{A}{B}$ នាទីប្រុងពិសិដ្ឋនិយម។

គ.គណនាបូកសរុបនៃ B ។

18. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $A = (\sqrt{3} - 1) + i(1 + \sqrt{3})$ & $B = \frac{x+iy}{1+i}$ ដែល x & y នាទីប្រុងពិសិដ្ឋនិយម។

ក.សរសេរ A^2 នាទីប្រុងពិសិដ្ឋនិយមរួចសរសេរនាទីប្រុងពិសិដ្ឋនិយម។

ខ.សរសេរ B ប្រុងពិសិដ្ឋនិយម។

គ.រក x, y ដែលគេដឹងថា $2\bar{B} = A^2$ ។

19. គេមាន $Z = \frac{2(1-i)^2}{1-i\sqrt{3}}$ សរសេរនាទីប្រុងពិសិដ្ឋនិយមនិងនាទីប្រុងពិសិដ្ឋនិយម។

20. គេមានចំនួនកុំផ្លិច Z ដែល $|Z| = 1$ ។ បង្ហាញថា $\sqrt{2} \leq |1 - Z| + |1 + Z^2| \leq 4$ ។

21. គេមាន $Z = \frac{\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})}{\sqrt{3} + i}$ ។

ក.សរសេរ Z នាទីប្រុងពិសិដ្ឋនិយមរួចសរសេរនាទីប្រុងពិសិដ្ឋនិយម។

ខ.បង្ហាញថា $\cos(\frac{\pi}{12})$ និង $\sin(\frac{\pi}{4})$ ។

គ.សរសេរ $(Z + \frac{1}{Z})^4$ នាទីប្រុងពិសិដ្ឋនិយម។

22. គេមាន $Z = (1 + i\sqrt{3})(\sin(\frac{3\pi}{2}) - i\cos(\frac{3\pi}{2}))$ ។

ក.សរសេរ Z នាទីប្រុងពិសិដ្ឋនិយម។

ខ.សរសេរ Z នាទីប្រុងពិសិដ្ឋនិយម។

23. កំណត់តំលៃ a & b ដើម្បីឲ្យមាន $Z = 2 + 3i$ ជាចម្បងសមីការ $Z^2 + iaZ + b = 0$ ។

24. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ និង $Z_2 = -1 - i\sqrt{3}$ ។

ក.គណនាកន្សោប $W = 1 - 2Z_1 + 3Z_2^2$ ។

ខ.សរសេរ $Z_1, Z_2, \frac{Z_2}{Z_1}, Z_1 \cdot Z_2$ នាទីជ្រុងត្រីកោណមាត្រ។

គ.កំណត់តំរូវ a និង b ដោយគេដឹងថា $\bar{W} + aZ_1 = 2W - W^2 + bZ_2$ ។

25. គេមាន $Z_1 = -3 + i\sqrt{3}, Z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}, Z_3 = \sqrt{8} - i\sqrt{8}, Z = \frac{Z_1^3 Z_3^4}{Z_2^6}$ ។

ក.សរសេរ Z_1, Z_2, Z_3 នាទីជ្រុងត្រីកោណមាត្រ។

ខ.សរសេរ Z នាទីជ្រុងត្រីកោណមាត្រ។

គ.សរសេរ Z នាទីជ្រុងព័ន្ធគណិត។

26. គេមានសមីការ $E: Z^2 - 6Z + 12 = 0$ ។

ក.បង្ហាញថាសមីការ E មានឫសស្របគ្នា និងបំណែងនាចំនួនកុំផ្លិចដែលជាចំនួនគិតពិត និងបង្ហាញ។

ខ.រកប្រូឌុកនិងរង្វាស់ម៉ូឌុលនៃ u ។ រួចបង្ហាញរកប្រូឌុកនិងរង្វាស់ម៉ូឌុលនៃ u ។

គ.សរសេរ $u - 4$ នាទីជ្រុងព័ន្ធគណិត និងនាទីជ្រុងត្រីកោណមាត្រ។

27. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $A = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$ និង $B = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$ ។

ក.រកប្រូឌុកនិងរង្វាស់ម៉ូឌុលនៃ $A, B, \overline{AB}, \frac{1}{A}$ ។

ខ.តាង Z ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $AZ = B$ ។ សរសេរ Z នាទីជ្រុងព័ន្ធគណិត និងនាទីជ្រុងត្រីកោណមាត្រ។

28. គណនា $W = Z^3 + \bar{Z} - Z + Z^2$ ដែល $Z = \left(\frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1-i}\right)^3$ ។

29. បង្ហាញថា $(1 + i\sqrt{3})^n = 2^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$ ។

30. គេមាន $Z = x + iy$ ។ រកតំរូវ x និង y ដោយគេដឹងថា $(1 + 2i)\bar{Z} + 3Z(1 - i) = \frac{1}{-i+1}$ ។

31. គណនា $W = \sqrt{-2 - 2i\sqrt{3}}$ នាទីជ្រុង $a + bi$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិត។

32. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}, Z_2 = 1 - i$ ។

33. សរសេរ $Z = \frac{1+\sin(\frac{\pi}{4})-i\cos(\frac{\pi}{4})}{1+i\cos(\pi)+\sin(\pi)}$ នាទីជ្រុងត្រីកោណមាត្រ។

34. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}, W = 1 + i$ ។

ក.ដោយ $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ។ ប្រាកដថា $ZW = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ ។

ខ.សរសេរ ZW, W នាទីជ្រុងត្រីកោណមាត្រ រួចបង្ហាញរកនាទីជ្រុងត្រីកោណមាត្រនៃ Z ។

35. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(1 + Z)^4 = 16 \cos^4\left(\frac{\pi}{24}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ ។

36. គេមានសមីការ $2Z^3 - (5 + 6i)Z^2 + 9iZ + 1 - 3i = 0$ ។ ចូរដោះស្រាយសមីការនេះក្នុងសំណុំដោយគេដឹងថាឫសមួយចំនួននៃសមីការជាចំនួនពិត។

37. គេអោយ $K \in \mathbb{N}$ និងកន្សោម $B = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$ ។ សម្រួលកន្សោម B បើ៖

- ក. $n = 3k + 1$
- ខ. $n = 3k$
- គ. $n = 3k - 2$

38. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ។

- ក. សរសេរ $W = \frac{(1+Z^2)^2}{1+Z^3}$ នាទម្រង់ ត្រីកោណមាត្រ ។
- ខ. បង្ហាញថា $(1+Z)^n = 2^n \cos^n\left(\frac{\pi}{3}\right) \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)$ ។

39. គេអោយចំនួនកុំផ្លិច $Z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}, Z_2 = 1 + i, Z_3 = 1 - i\sqrt{3}$.

- ក. សរសេរ $A = Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3$ នាទម្រង់ព័ន្ធគណិត ។
- ខ. សរសេរ $B = \frac{Z_1}{Z_2 \cdot Z_3}$ នាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ
- គ. រក x និង y ដែល $x\overline{Z_1} + 1 + 4yi = \overline{Z_2 \cdot Z_3}$ ។

40. គេមាន $Z = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ។

- ក. សរសេរ $W = 1 + Z^2$ នាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
- ខ. សរសេរ $W_1 = Z^4 - Z^2 + 2$ នាទម្រង់ព័ន្ធគណិត ។

41. គេមាន $Z = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ។ តាង $A = Z + Z^4, B = Z^2 + Z^3$

- ក. បង្ហាញថា $1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4 = 0$ ។
- ខ. គណនា A, B នាប្រសិនបើការ $x^2 - x + 1 = 0$ ។ រួចបញ្ជាក់ថាផ្លូវ $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ។

42. បង្ហាញថា $\left|\frac{6Z-i}{2+3iZ}\right| \leq 1$ ។ លុះត្រាតែ $|Z| \leq \frac{1}{3}$ ។

43. គេមានសមីការ $f(z) = Z^3 - 2(\sqrt{3} + i)Z^2 + (\sqrt{3} + i)Z - 8i$ ។

- ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(z) = (Z - 2i)(Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4)$ ។
- ខ. ដោះស្រាយសមីការនេះក្នុងសំណុំកុំផ្លិច

44. គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2019}$ ។

- ក. សរសេរ Z នាទម្រង់ព័ន្ធគណិត រួចសរសេរនាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។
- ខ. សរសេរ $A = (Z + 1 + \sqrt{2})^2$ នាទម្រង់ព័ន្ធគណិត រួចសរសេរនាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

45. គេអោយស្វ៊ីតចំនួនកុំផ្លិច (A_n) ដែលមានកំណត់ដោយ $A_0 = 2, A_{n+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}A_n + \frac{\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}}$ ។

- ក. គេមាន $Z_n = 1 - A_n$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $Z_{n+1} = \frac{1+i}{2}Z_n$
- ខ. សរសេរ Z_0 និង Z_n នាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ.សរសេរ A_n នាទីប្រជុំត្រីកោណមាត្រ។

46. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមនេះ៖

$$ក. \cos^2 x + 4 \cos(x) - 5 = 0$$

$$ខ. \sin^2(x) - \cos^2(x) - 3 = 0$$

$$គ. \tan^2(3x) - 4 = 0$$

$$ឃ. \cot(x) + 4 \tan(x) - 5 = 0$$

$$ង. 4 \tan(x) + \frac{3}{\cos^2(x)} = 0$$

47. គេមានសមីការ $(E) Z^2 + Z + 1 = 0$ ។

ក. ដោះស្រាយសមីការ (E) ។

ខ. សរសេរ $A = \frac{Z_1+1}{Z_2+1}$ នាទីប្រជុំពិសិដ្ឋនៃសរសេរនាទីប្រជុំត្រីកោណមាត្រ។

48. សរសេរ $Z = (1-i)^3 \left(\frac{(3-i\sqrt{3})^4}{\sqrt{1+i+\sqrt{2}}} \right)$ នាទីប្រជុំត្រីកោណមាត្រ។

49. ដោះស្រាយសមីការ $x^2 - 2x + 2 = 0$ ។

ក. សរសេរឬសរបស់សមីការនេះនាទីប្រជុំត្រីកោណមាត្រ។

ខ. គេមាន Z ដែលត្រូវដោយ $Z = ai - b$ ។ កត់ត្រា a & b បើគេដឹងថា $\bar{Z} = \frac{x_1}{x_2+3i}$

50. សរសេរ $Z = \frac{(1-i+\sqrt{2})^4 (2-i+\sqrt{3})^6}{(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}})^8}$ នាទីប្រជុំត្រីកោណមាត្រ។

ស្ទួចស្ទួនពាសណាស់ល្អ!!!