រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន

Tel: 017 250 290

# រូបមន្តគណិតវិទ្យា

## សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១២

$$z = a + ib = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = re^{i\varphi}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f(\xi_k)\Delta x_k\right] = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សារបស់ក្រសួងអប់រំយុវជននិងកីឡា

រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន
Tel: 017 250 290

# រូបមន្តគណិតវិទ្យា

## សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១២

$$z = a + ib = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = re^{i\varphi}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\xi_k\right)\Delta x_k\right] = \left[F\left(x\right)\right]_a^b = F\left(b\right) - F\left(a\right)$$

ស្របតាមកម្មវិធីសិក្សារបស់ក្រសួងអប់រំយុវជននិងកីឡា

មេរៀនទី០១

# ចំនួនកុំផ្លិច

## ១-ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត

### ១.១.និយមន័យ

ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិតគឺជាចំនួនកុំផ្លិចដែលក្រោយពីបង្រួមរួច មានរាង $z = a + i.b$ ដែល $a,b \in \Re$ ។

### ១.២.ចំនួនកុំផ្លិចស្មើគ្នា

$A + i.B = a + i.b \Leftrightarrow \begin{cases} A = a \\ B = b \end{cases}$ ដែល $a,b,A,B \in \Re$ ។

### ១.៣.ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់

បើ $z = a + i.b$ នោះ $\overline{z} = a - i.b$ ដែល $a,b \in \Re$ ។

### ១.៤.ប្រមាណវិធីលើកុំផ្លិចទម្រង់ពីជគណិត

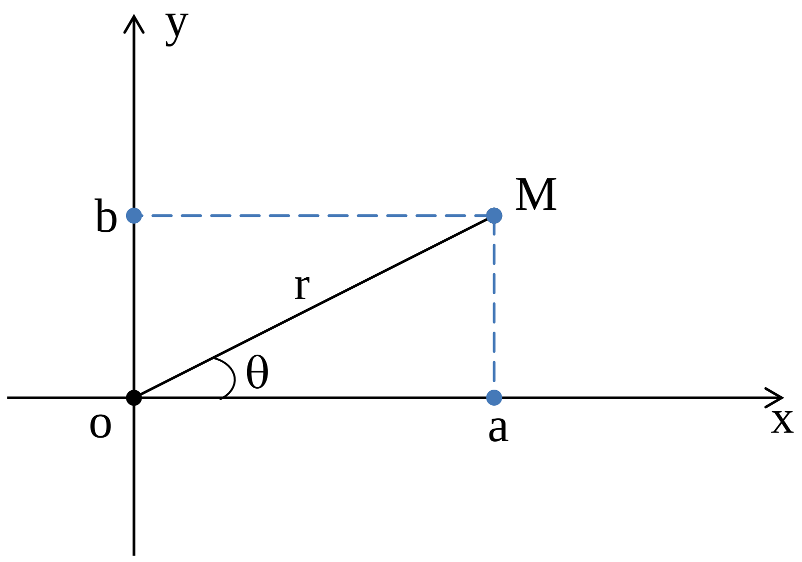
- វិធីបូក $(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$
- វិធីដក $(a+ib)-(c+id) = (a-c)+i(b-d)$
- វិធីគុណ $(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad-bc)$
- វិធីចែក $\dfrac{a+ib}{c+id} = \dfrac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + i.\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$

## ២-ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

### ២.១.ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់

ឧបមាថាគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z = a + i.b \; ; a,b \in \Re$ ។

យក $M(a,b)$ ជារូបភាពនៃ $z$ ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(xoy)$ ។




តាង $r = OM$ និង $\theta$ ជាមុំផ្គុំដោយ $\overrightarrow{OM}$ និងអក្ស័ $(ox)$ ។

$r = |z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ ហៅថាម៉ូឌុលនិង $\theta = \arg(z)$ ហៅថាអាគុយ

ម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $z = a + i.b$ ដែល $\cos\theta = \frac{a}{r}$ និង $\sin\theta = \frac{b}{r}$ ។

២.២.ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ចំនួនកុំផ្លិច $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ដែល $r > 0$ និង $\theta \in \Re$ ហៅថាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

២.៣.ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិចក្នុងទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ឧបមាថាគេមានពីរចំនួនកុំផ្លិច ៖

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ និង $w = \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

- វិធីគុណ $z \times w = r.\rho[\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi)]$
- វិធីចែក $\frac{z}{w} = \frac{r}{\rho}[\cos(\theta - \varphi) + i\sin(\theta - \varphi)]$

២.៤.រូបមន្តដឺម័រ

គ្រប់ចំនួនពិត $\varphi$ និងចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ $n$ គេបាន ៖

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i.\sin(n\varphi)$

២.៥.ស្វ័យគុណទី $n$

គ្រប់ចំនួនពិត $\varphi$ និង $r>0$ និង ចំនួនគត់រឺឡាទីហ្វ $n$ គេបាន ៖

$$\left[r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\right]^{n}=r^{n}\left[\cos(n\varphi)+i.\sin(n\varphi)\right]$$

២.៦.ឫសទី $n$

ឧបមាថាគេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ដែល $r>0$ , $\theta\in\Re$

ឫសទី $n$ នៃ $z$ កំណត់ដោយ ៖

$$w=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i.\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$

ដែល $k=0,1,2,...,(n-1)$ ។

## ៣-ចំនួនកុំផ្លិចទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

៣.១.រូបមន្តអឺលែ

គ្រប់ចំនួនពិត $x$ គេមាន $\cos x+i\sin x=e^{ix}$ ដែល $e=2.71828$

ហើយ $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ និង $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ ។

៣.២.ទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ចំនួនកុំផ្លិច $z=r\,e^{i\theta}$ ដែល $r>0$ ,$\theta\in\Re$ ហៅថាទម្រង់អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ។ $r$ ហៅថាម៉ូឌុល និង $\theta$ ហៅថាអាគុយម៉ង់ ។

៣.៣.ប្រមាណវិធីលើចំនួនកុំផ្លិចក្នុងទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ឧបមាថាគេមានពីរចំនួនកុំផ្លិច $z=r\,e^{i\theta}$ និង $w=\rho\,e^{i\varphi}$

- វិធីគុណ $z\times w=r.\rho e^{i(\theta+\varphi)}$
- វិធីចែក $\dfrac{z}{w}=\dfrac{r}{\rho}.e^{i(\theta-\varphi)}$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

មេរៀនទី០២

# លីមីតនៃអនុគមន៍

## ១)សញ្ញាណលីមីត

បើ $x$ ខិតជិត $a$ ហើយអនុគមន៍ខិតជិតតម្លៃ $L$ ណាមួយ នោះគេកំនត់សរសេរ $\lim_{x\to a} f(x)=L$ មានន័យថាអនុគមន៍ $f(x)$ មានលីមីតស្មើ $L$ កាលណា $x$ ខិតជិត $a$ ។

## ២-លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនួនកំណត់

✧ និយមន័យ

អនុគមន៍ $f$ មានលីមីត $L$ កាលណា $x$ ខិតជិត $a$ បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon>0$ មានចំនួន $\delta>0$ ដែល $0<|x-a|<\delta$ នាំឲ្យ $|f(x)-L|<\varepsilon$ ។ គេកំណត់សរសេរ $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ។

✧និយមន័យ

អនុគមន៍ $f$ ខិតទៅរក $+\infty$ ឬ $-\infty$ កាលណា $x$ ខិតជិត $a$ បើគ្រប់ចំនួន $M>0$ មានចំនួន $\delta>0$ ដែល $0<|x-a|<\delta$ នាំឲ្យ $f(x)>M$ ឬ $f(x)<-M$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ ឬ $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ ។

## ៣-លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់អនន្ត

✧និយមន័យ

អនុគមន៍ $f$ មានលីមីត $L$ កាលណា $x$ ខិតទៅ $+\infty$ ឬ $-\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon>0$ មានចំនួន $N>0$ ដែល $x>N$ ឬ $x<-N$ នាំឲ្យ $|f(x)-L|<\varepsilon$

គេកំណត់សរសេរ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ ឬ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ ។

✧ និយមន័យ

អនុគមន៍ $f$ មានលីមីត $+\infty$ កាលណា $x$ ខិតទៅ $+\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $M>0$ មានចំនួន $N>0$ ដែល $x>N$ នាំឲ្យ $f(x)>M$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ។

✧ និយមន័យ

អនុគមន៍ $f$ មានលីមីត $+\infty$ កាលណា $x$ ខិតទៅ $-\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $M>0$ មានចំនួន $N>0$ ដែល $x<-N$ នាំឲ្យ $f(x)>M$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ។

## ៤)ប្រមាណវិធីលើលីមីត

ឧបមាថាអនុគមន៍ $y=f(x)$ និង $y=g(x)$ មានលីមីតកាលណា $x\to a$ នោះគេមានប្រមាណវិធីលីមីតដូចខាងក្រោម

ក ) $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} k=k$ ដែល $f(x)=k$ អនុគមន៍ថេរ

ខ ) $\lim_{x\to a}\left[k\, f(x)\right]=k\lim_{x\to a} f(x)$

គ ) $\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$

ឃ ) $\lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)$

ង ) $\lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} g(x)$

ច ) $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ ដែល $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$

## ៥)លីមីតខាងឆ្វេងនិងខាងស្តាំ

-បើអនុគមន៍ $f(x)$ ខិតជិត $L$ កាលណា $x$ ខិតជិត $x_0$ ពីខាងឆ្វេង

នោះ $L$ ជាលីមីតខាងឆ្វេងនៃ $f(x)$ហើយគេកំនត់សរសេរ

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = R$ ។

-បើអនុគមន៍ $f(x)$ ខិតជិត $R$កាលណា $x$ខិតជិត$x_0$ពីខាងស្តាំ

នោះ $R$ ជាលីមីតខាងស្តាំនៃ $f(x)$ហើយគេកំនត់សរសេរ $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = R$

-អនុគមន៍ $y = f(x)$មានលីមីតត្រង់ $x_0$ លុះត្រាតែលីមីតខាងឆ្វេង

ស្មើនឹងលីមីតខាងស្តាំ ។

## ៦)លីមីតនៃអនុគមន៍អសនិទាន

រូបមន្ត ៖

ក ) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ ដែល $a \geq 0$ និង $n \in \mathbb{N}$ , $n \geq 2$

ខ ) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ ដែល $a < 0$ និង $n \in \mathbb{N}$ , $n \geq 2$

( ចំនួនគត់សេស ) ។

គ ) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$ ដែល $a \geq 0$ និង $n \in \mathbb{N}$ , $n \geq 2$

## ៧)លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

បើ $f$ និង $g$ ជាអនុគមន៍ពីរដែលមានលីមីត $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$

និង $\lim\limits_{x \to L} f(x) = f(L)$ នោះ $\lim\limits_{x \to a} f[g(x)] = f(L)$ ។

## ៨)លីមីតតាមការប្រៀបធៀប

ក )បើ $f$ និង $g$ ជាអនុគមន៍ពីរ ហើយ $A$ជាចំនួនពិតមួយ

ដែលចំពោះ $\forall x \geq A$: $f(x) \geq g(x)$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

នោះ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ។

ខ )បើ $f$ និង $g$ ជាអនុគមន៍ពីរ ហើយ $A$ ជាចំនួនពិតមួយ

ដែលចំពោះ $\forall x \geq A: f(x) \leq g(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

នោះ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ។

គ )បើ $f, g$ និង $h$ ជាអនុគមន៍បី ហើយ $A$ ជាចំនួនពិតមួយ

ដែល $\forall x \geq A: g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = \lambda$

នោះ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda$ ។ ( $\lambda$ ជាចំនួនពិត ) ។

ឃ )បើ $f$ និង $g$ ជាអនុគមន៍ពីរ ហើយ $A$ ជាចំនួនពិតមួយ

ដែល $\forall x \geq A: f(x) \leq g(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda$ , $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lambda'$

នោះ $\lambda \leq \lambda'$ ។ ( $\lambda$ និង $\lambda'$ ជាចំនួនពិត ) ។

## ៩)លីមីតអនន្តនៃអនុគមន៍

ក ) $\lim_{x\to\pm\infty} ax^2 = \begin{cases} +\infty & \text{បើ } a > 0 \\ -\infty & \text{បើ } a < 0 \end{cases}$

ខ ) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x} = 0$ , $a \in \Re$

## ១០)លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ក ) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

ខ ) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

គ ) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

## ១១)លីមីតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

ក ) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

ខ ) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ , $(a > 0)$

គ ) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

ឃ ) $\lim_{x\to+\infty} a^{x}=\begin{cases}+\infty & \text{បើ } a>1\\ 0 & \text{បើ } 0<a<1\end{cases}$

ង ) $\lim_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$

ច ) $\lim_{x\to-\infty} e^{x}=0$

ឆ ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty$

ជ ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$

ឈ ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty$

ញ ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{n}}{e^{x}}=+\infty$ ( ដែល $n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ) ។

## ១២)លីមីតនៃអនុគមន៍លោការីត

ក ) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

ខ ) $\lim_{x\to 0^{+}}\ln x=-\infty$

គ ) $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

ឃ ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

ង ) $\lim_{x\to 0^{+}} x\ln x=0$

ច ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{n}}=0$

ឆ ) $\lim_{x\to 0^{+}} x^{n}\ln x=0$ ( ដែល $n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ) ។

មេរៀនទី០៣

# ដេរីវេនៃអនុគមន៍

## ១-អត្រាបម្រែបម្រួល

គេឲ្យអនុគមន៍ $y=f(x)$ មានក្រាបតំណាង $(C)$ ។
បើអថេរ $x$ ប្រែប្រួលពី $x_1$ ទៅ $x_2$ នោះអនុគមន៍ $y=f(x)$ ប្រែប្រួលពី $f(x_1)$ ទៅ $f(x_2)$ នោះគេបានផលធៀប $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ កំណត់ដោយ

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ហៅថាអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យមនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ពី $x_1$ ទៅ $x_2$ ។

## ២-ដេរីវេត្រង់ចំណុចមួយ

### ២.១.និយមន័យ

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ត្រង់ចំណុច $x=x_0$ (បើមាន)

កំណត់ដោយ $f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ឬ $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ដែល $x=x_0+h$ ។

### ២.២.ភាពមានដេរីវេ

អនុគមន៍ $f$ មានដេរីវេត្រង់ចំណុច $x=x_0$ លុះត្រាតែ ៖

-អនុគមន៍ $f$ ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=x_0$

-ដេរីវេខាងឆ្វេង និង ដេរីវេខាងស្តាំស្មើគ្នាគឺ $f'_{-}(x_0)=f'_{+}(x_0)$

ដែល $f'_{-}(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (ដេរីវេខាងឆ្វេង)និង

$f'_{+}(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (ដេរីវេខាងស្តាំ) ។

## ៣-ដេរីវេលើចន្លោះមួយ

អនុគមន៍ $f$ មានដេរីវេលើចន្លោះ $I$ លុះត្រាតែវាមានដេរីវេត្រង់គ្រប់ចំណុច $x\in I$ ។គេកំណត់សរសេរ $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ។

❖ សម្គាល់

បើគេតាង $\Delta x=h$ ដែល $\Delta x\to 0$ នោះ $h\to 0$

គេបាន $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ។

## ៤-ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់

បើ $y=f(u)$ និង $u=g(x)$ នោះគេបាន $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$

ឬ $\dfrac{d}{dx}f\left[u(x)\right]=f'(u)\times u'(x)$ ។

## ៥-ដេរីវេនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

### ៥.១.ដេរីវេនៃអនុគមន៍ស៊ីនូស និង កូស៊ីនូស

បើ $y=\sin x$ នោះ $y'=\cos x$

បើ $y=\cos x$ នោះ $y'=-\sin x$

បើ $y=\sin u$ នោះ $y'=u'\cos u$

បើ $y=\cos u$ នោះ $y'=-u'\sin u$

ដែល $u=u(x)$ ។

### ៥.២.ដេរីវេនៃអនុគមន៍តង់សង់ និង កូតង់សង់

បើ $y=\tan x$ នោះ $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

បើ $y=\cot x$ នោះ $y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$

បើ $y=\tan u$ នោះ $y'=\frac{u'}{\cos^2 u}=u'(1+\tan^2 u)$

បើ $y=\cot u$ នោះ $y'=-\frac{u'}{\sin^2 u}=-u'(1+\cot^2 u)$

## ៦-ដេរីវេនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

បើ $y=e^x$ នោះ $y'=e^x$

បើ $y=a^x$ នោះ $y'=a^x\ln a$ , $a>0 , a\neq 1$

បើ $y=e^u$ នោះ $y'=u'e^u$

បើ $y=a^u$ នោះ $y'=u'.a^u\ln a$

## ៧-ដេរីវេនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ

បើ $y=\ln x$ នោះ $y'=\frac{1}{x}$

បើ $y=\ln(ax+b)$ នោះ $y'=\frac{a}{ax+b}$

បើ $y=\ln u$ នោះ $y'=\frac{u'}{u}$

## ៨-រូបមន្តដេរីវេ

| អនុគមន៍ | ដេរីវេ |
|---|---|
| 1 ) $y=a$ ( $a$ ចំនួនថេរ ) | $y'=0$ |
| 2 ) $y=x^n$ | $y'=nx^{n-1}$ |
| 3 ) $y=ax^n$ | $y'=nax^{n-1}$ |
| 4 ) $y=\sqrt{x}$ | $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| 5 ) $y=\frac{1}{x}$ | $y'=-\frac{1}{x^2}$ |
| 6 ) $y=\frac{a}{x^n}$ | $y'=-\frac{na}{x^{n+1}}$ |

7) $y=\sqrt{ax+b}$ $\quad$ $y'=\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

8) $y=(ax+b)^n$ $\quad$ $y'=na(ax+b)^{n-1}$

9) $y=\dfrac{1}{ax+b}$ $\quad$ $y'=-\dfrac{a}{(ax+b)^2}$

10) $y=u+v-w$ $\quad$ $y'=u'+v'-w'$

11) $y=u^n$ $\quad$ $y'=nu'u^{n-1}$

12) $y=\sqrt{u}$ $\quad$ $y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

13) $y=uv$ $\quad$ $y'=u'v+uv'$

14) $y=uvw$ $\quad$ $y'=u'vw+uv'w+uvw'$

15) $y=\dfrac{u}{v}$ $\quad$ $y'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

16) $y=\dfrac{1}{v}$ $\quad$ $y'=-\dfrac{v'}{v^2}$

17) $y=e^x$ $\quad$ $y'=e^x$

18) $y=e^{ax}$ $\quad$ $y'=ae^{ax}$

19) $y=\ln x$ $\quad$ $y'=\dfrac{1}{x}$

20) $y=\ln(ax+b)$ $\quad$ $y'=\dfrac{a}{ax+b}$

21) $y=\sin x$ $\quad$ $y'=\cos x$

22) $y=\sin(ax)$ $\quad$ $y'=a\cos(ax)$

23) $y=\cos x$ $\quad$ $y'=-\sin x$

24) $y=\cos(ax)$ $\quad$ $y'=-a\sin(ax)$

25) $y=\tan x$ $\quad$ $y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

26) $y=\tan(ax)$ $\quad$ $y'=\dfrac{a}{\cos^2(ax)}$

27 ) $y = \cot x$ $\qquad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

28 ) $y = \cot(ax)$ $\qquad y' = -\frac{a}{\sin^2(ax)}$

29 ) $y = \arcsin x$ $\qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

30 ) $y = \arccos x$ $\qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

31 ) $y = \arctan x$ $\qquad y' = \frac{1}{1+x^2}$

32 ) $y = arc\cot x$ $\qquad y' = -\frac{1}{1+x^2}$

33 ) $y = e^u$ $\qquad y' = u'e^u$

34 ) $y = \ln u$ $\qquad y' = \frac{u'}{u}$

35 ) $y = \sin u$ $\qquad y' = u'\cos u$

36 ) $y = \cos u$ $\qquad y' = -u'\sin u$

37 ) $y = \tan u$ $\qquad y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

38 ) $y = \cot u$ $\qquad y' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

39 ) $y = \arcsin u$ $\qquad y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

40 ) $y = \arccos u$ $\qquad y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

41 ) $y = \arctan u$ $\qquad y' = \frac{u'}{1+u^2}$

42 ) $y = arc\cot u$ $\qquad y' = -\frac{u'}{1+u^2}$

## ៩-ដេរីវេបន្តបន្ទាប់

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ អាចមានដេរីវេខ្លួនឯងបន្តទៀត។
គេហៅដេរីវេបន្តបន្ទាប់ដូចតទៅ ៖

ដេរីវេទី1 $y'=\dfrac{dy}{dx}=f'(x)=f^{(1)}(x)$

ដេរីវេទី2 $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}=f''(x)=f^{(2)}(x)$

ដេរីវេទី3 $y'''=\dfrac{d^3y}{dx^2}=f'''(x)=f^{(3)}(x)$

ដេរីវេទី4 $y^{(4)}=\dfrac{d^4y}{dx^4}=f^{(4)}(x)$

-------------------------------------------------------

ដេរីវេទី$n$ $y^{(n)}=\dfrac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x)$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

មេរៀនទី០៤

# អនុវត្តន៍ដេរីវេ

## ១-សមីការបន្ទាត់ប៉ះក្រាបតាងអនុគមន៍មួយ

✧ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ត្រង់ចំណុច $x_0$ គឺជាដេរីវេនៃ $f$ ត្រង់ $x_0$ គឺ $m=f'(x_0)$ ។

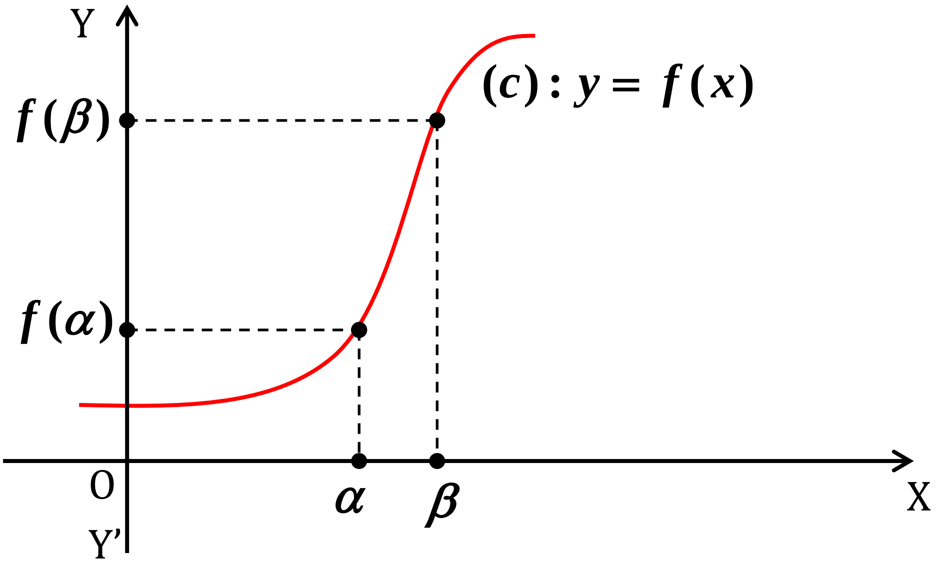
✧ សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ត្រង់ចំណុច $x_0$ គឺ $(T): y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ ។

## ២-ទិសដៅអថេរភាពនៃអនុគមន៍

### ២.១.អនុគមន៍កើន

✧ $f$ ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $I$ លុះត្រាតែ $f'(x)>0$ គ្រប់ $x\in I$

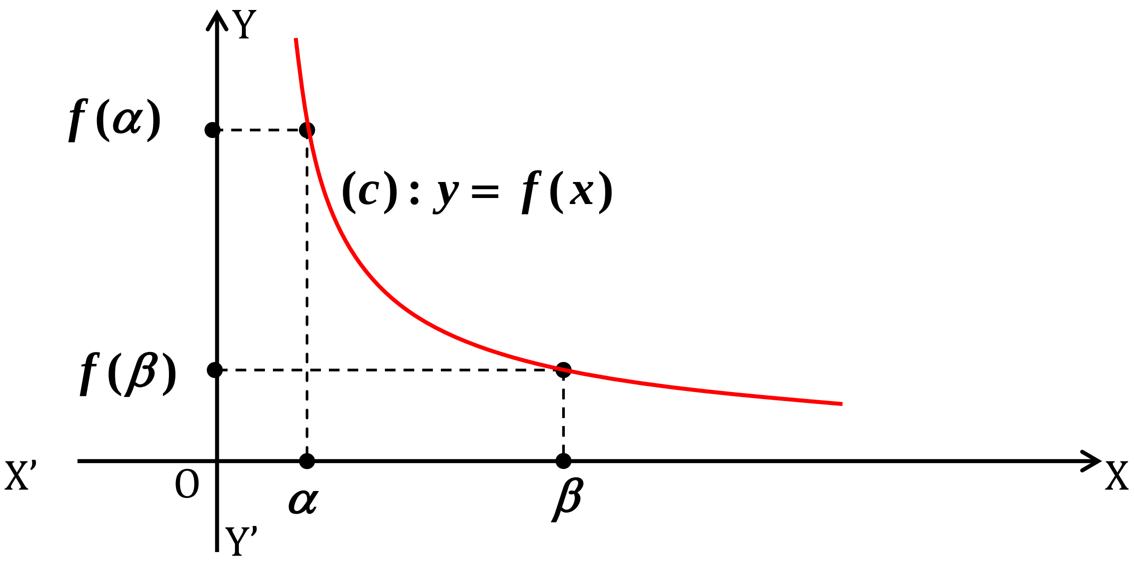
✧ លក្ខណៈ បើ $\alpha,\beta\in I$ ដែល $\alpha>\beta$ នាំឲ្យ $f(\alpha)<f(\beta)$ ។




### ២.២.អនុគមន៍ចុះ

✧ $f$ ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $I$ លុះត្រាតែ $f'(x)<0$ គ្រប់ $x\in I$

✧ លក្ខណៈ បើ $\alpha,\beta\in I$ ដែល $\alpha>\beta$ នាំឲ្យ $f(\alpha)>f(\beta)$ ។

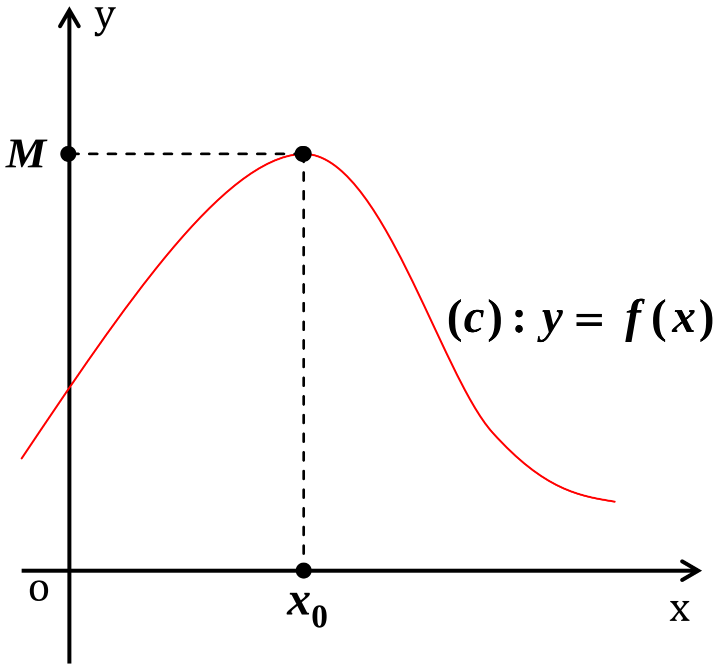



៣-បរមាធៀបនៃអនុគមន៍

✧ អនុគមន៍ $f$ មានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x = x_0$ កាលណា

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$$

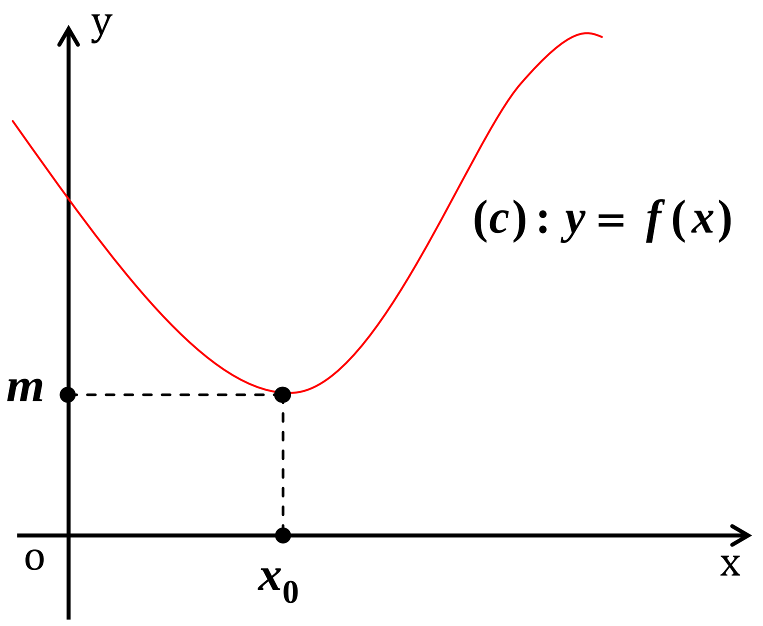
✧ $f\left(x_0\right) = M$ ជាតម្លៃអតិបរមាធៀប ។



✧ អនុគមន៍ $f$ មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x = x_0$ កាលណា

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$$

✧ $f(x_0) = m$ ជាតម្លៃអប្បបរមាធៀប




## ៤-ភាពផត ប៉ោង និង ចំណុចរបត់

៤.១.អនុគមន៍ផត-ប៉ោង

✧ បើគ្រប់ $x \in I$ គេមាន $f''(x) < 0$ នោះគេថា $f$ ជាអនុគមន៍ប៉ោង( Convex function )លើចន្លោះ $I$ ។

✧ បើគ្រប់ $x \in I$ គេមាន $f''(x) < 0$ នោះគេថា $f$ ជាអនុគមន៍ប៉ោង( Concave function )លើចន្លោះ $I$ ។

៤.២.ចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង

✧ គេថាចំណុច $I(x_0, y_0)$ ជាចំណុចរបត់នៃខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y = f(x)$ កាលណាខ្សែកោងប៉ោង( ឬផត ) នៅលើ $[a, x_0]$ ហើយផត( ឬប៉ោង )នៅលើ $[x_0, b]$ ។

✧ របៀបរកចំណុចរបត់របស់ខ្សែកោងតាង $y = f(x)$ គេត្រូវ ៖

☞ គណនាដេរីវេទីពីរ $y''=f''(x)$

☞ ដោះស្រាយសមីការ $f'(x)=0$

☞ សិក្សាសញ្ញានៃ $f''(x)$

-បើ $f''(x)$ប្តូរសញ្ញានៅសងខាងនៃឫស $x_0$ នោះខ្សែកោង មានចំណុចរបត់ $I\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ ។

-បើ $f''(x)$មិនប្តូរសញ្ញានោះខ្សែកោងគ្មានចំណុចរបត់ទេ ។

## ៨-ចំណោទបរមា

✧ វិធីរកបរមាកម្មនៃអនុគមន៍មួយអថេរ

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ $y=f\left(x\right)$

☞រកដេរីវេទីមួយ $y'=f'(x)$

☞ដោះស្រាយសមីការ $y'=f'(x)=0$ មានឫស $x=x_0$

☞រកដេរីវេទីពីរ $y''=f''(x)$

☞សន្និដ្ឋាន

-បើ $f''(x_0)<0$ នោះអនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀបត្រង់ ចំណុច $x=x_0$ គឺ $f(x_0)=M$ ។

-បើ $f''(x_0)>0$ នោះអនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបត្រង់ ចំណុច $x=x_0$ គឺ $f(x_0)=m$ ។

-បើ $f''(x_0)=0$ មិនអាចសន្និដ្ឋានបាន ។

✧ វិធីសាស្រ្តដោះស្រាយចំណោទបរមា

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ $y=f\left(x\right)$

☞ចំពោះលំហាត់ទាក់ទងនិងរូបធរណីមាត្រ គេត្រូវសង់រូបនោះ

☞ត្រូវជ្រើសរើសអថេរតាង( អញ្ញាត ) ទៅតាមប្រធានចំណោទ ដែលគេចោទសួរ ។

☞ត្រូវដាក់លក្ខខណ្ឌអញ្ញាតដើម្បីឲ្យចំណោទមានន័យ

☞ចងក្រងសមីការដែលទាក់ទងតាមបម្រាប់នៃប្រធាន និង តាមទ្រឹស្តីបទ-រូបមន្ត ដែលចាំបាច់ពាក់ពន្ធ័ក្នុងចំណោទ ។

☞បង្កើតអនុគមន៍មួយដែលមានអថេរតែមួយតាមវិធីជំនួស បំបាត់សមីការដែលអាចរកតម្លៃបរមាកម្មបានតាមទ្រឹស្តីដេរីវេ

✧✧ សម្គាល់ ៖

ក្នុងករណីដែលមិនអាចបំបាត់បានគេអាចប្រើទ្រឹស្តីបទសំខាន់ៗ ក្នុងវិសមភាព សម្រាប់ស្វែងរកតម្លៃបរមាធៀបក្នុងចំណោទ។

## ៦-ល្បឿន និង សំទុះនៃចលនា

៦.១.ល្បឿននៃចលនា

ល្បឿននៃចលនាមួយនៅខណៈ $t$ គឺ $V(t)=S'(t)=\dfrac{dS}{dt}$

ដែល $S(t)$ ជាចម្ងាយចរនៅខណៈ $t$ ។

៦.២.សំទុះនៃចលនា

សំទុះនៃចលនានៅខណៈ $t$ គឺ $a(t)=\dfrac{dV}{dt}=V'(t)$ ដែល $V(t)$ ជាល្បឿននៃចលនានៅខណៈ $t$ ។

## ៧-ឌីផេរ៉ង់ស្យែល

និយមន័យ

បើអនុគមន៍ $y=f(x)$មានដេរីវេនោះឌីផេរ៉ង់ស្យែលកំណត់ដោយ $dy=f'(x).dx$ ។

កាលណាតម្លៃ $\Delta x$ កាន់តែតូចនោះ $dy$ អាចជាតម្លៃប្រហែលនៃ $\Delta y$

គេបាន $f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta y\approx f(x)+dy=f(x)+f'(x).\Delta x$ ។

## ៨-វិសមភាពកំណើនមានកំណត់

ទ្រឹស្តីបទទី១

គេឲ្យ $f$ ជាអនុគមន៍កំណត់ និង ជាប់ ហើយមានដេរីវេលើចន្លោះ $I$ ។

បើមានពីរចំនួនពិត $m$ និង $M$ ដែលគ្រប់ $x\in I:\ m\le f'(x)\le M$
នោះគ្រប់ចំនួនពិត $a,b\in I$ ដែល $a<b$ គេបាន
$m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$ ។
សម្រាយបញ្ជាក់
តាងអនុគមន៍ $g$ ដែល $g(x)=f(x)-mx$ មានដេរីវេលើ $I$
គេបាន $g'(x)=f'(x)-m\ge 0$ គ្រប់ $x\in I$ ព្រោះ $f'(x)\ge m$ នោះ $g$
ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $I$ ។
ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a,b\in I$ ដែល $a<b$ គេបាន $g(a)\le g(b)$
ឬ $f(a)-ma\le f(b)-mb$ នោះ $f(b)-f(a)\ge m(b-a)$ $(i)$
តាងអនុគមន៍ $h$ ដែល $h(x)=f(x)-Mx$ មានដេរីវេលើ $I$
គេបាន $h'(x)=f'(x)-M\le 0$ គ្រប់ $x\in I$ ព្រោះ $f'(x)\le M$ នោះ $h$
ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ $I$ ។
ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a,b\in I$ ដែល $a<b$ គេបាន $h(a)\ge h(b)$
ឬ $f(a)-Ma\ge f(b)-Mb$ នោះ $f(b)-f(a)\le M(b-a)$ $(ii)$
តាមទំនាក់ទំនង $(i)\,\&\,(ii)$ គេបាន $m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$
ទ្រឹស្តីបទទី២
គេឲ្យ $f$ ជាអនុគមន៍ មានដេរីវេលើចន្លោះ $[a,b]$។
បើមានពីរចំនួនពិត $M$ ដែលគ្រប់ $x\in[a,b]:\ |f'(x)|\le M$ នោះគេបាន
$|f(b)-f(a)|\le M.|b-a|$ ។
សម្រាយបញ្ជាក់
គេមានគ្រប់ $x\in[a,b]:\ |f'(x)|\le M$ នោះគេទាញ $-M\le f'(x)\le M$
តាមវិសមភាពកំណើនមានកំណត់គេបាន ៖
ចំពោះ $a<b$ គេបាន $-M(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$ $(1)$
ចំពោះ $a>b$ គេបាន $-M(a-b)\le f(a)-f(b)\le M(a-b)$ $(2)$

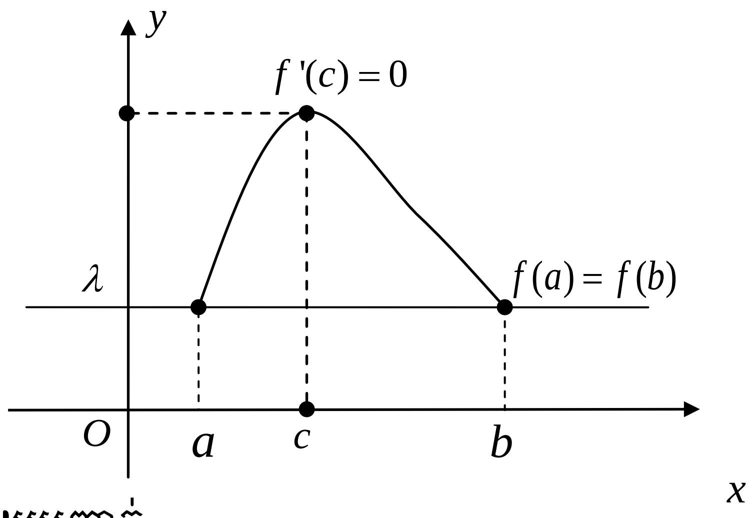
តាម(1)និង(2)គេបាន $|f(b)-f(a)|\le M.|b-a|$ ។

ដូចនេះទ្រឹស្តីបទត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

៩-ទ្រឹស្តីបទរ៉ូល

បើ $f$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ មានដេរីវេលើចន្លោះ$(a,b)$

និង $f(a)=f(b)$នោះមានចំនួន $c\in(a,b)$ យ៉ាងតិចដែល $f'(c)=0$ ។




សម្រាយបញ្ជាក់

គេតាង $f(a)=f(b)=\lambda$

-ករណីទី១ បើ $f(x)=\lambda$ គ្រប់ $x\in[a,b]$ នោះ $f$ ជាអនុគមន៍ថេរលើចន្លោះ $[a,b]$ និង $f'(x)=0$ គ្រប់ $x\in(a,b)$ ។

-ករណីទី២ បើ $f(x)>\lambda$ គ្រប់ $x\in[a,b]$ នោះ $f$ មានតម្លៃអតិបរមាយ៉ាងតិចមួយត្រង់ $x=c$ ។ ដោយ $f$ មានដេរីវេត្រង់ $x=c$ នោះ $f'(c)=0$

-ករណីទី៣ បើ $f(x)<\lambda$ គ្រប់ $x\in[a,b]$នោះ $f$ មានតម្លៃអប្បបរមាយ៉ាងតិចមួយត្រង់ $x=c$ដោយ $f$ មានដេរីវេត្រង់ $x=c$ នោះ $f'(c)=0$ ។

១០-ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម(ឬទ្រឹស្តីបទ Lagrange)

បើ $f$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ មានដេរីវេលើចន្លោះ$(a,b)$

នោះមានចំនួន $c\in(a,b)$ យ៉ាងតិចមួយដែល $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

យក $g(x)=f(b)-f(x)-\lambda(b-x)$ ដែល $\lambda=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ។

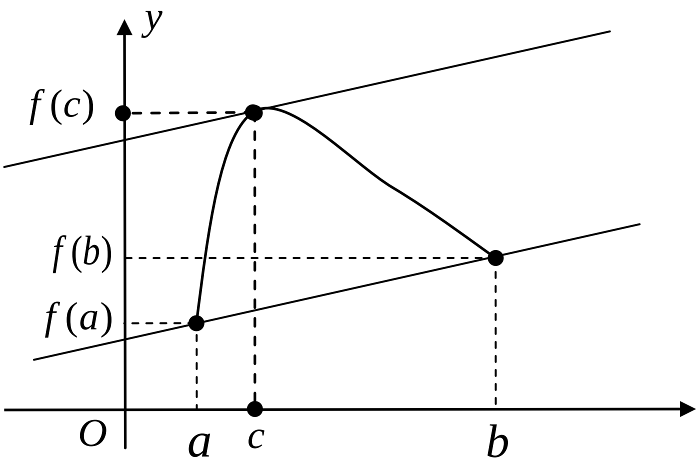
នោះ $g$ ជាអនុគមន៍ជាប់ក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ និង មានដេរីវេក្នុង $(a,b)$

ហើយដោយ

$g(a)=g(b)=0$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទរ៉ូលមាន $c\in(a,b)$ មួយយ៉ាងតិចដែល

$g'(c)=0$ ។ ដោយ $g'(c)=-f'(c)+\lambda$ នោះ $f'(c)=\lambda$ ។

ដូចនេះ $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ។




១១-អនុវត្តន៍ដេរីវេក្នុងសេដ្ឋកិច្ច

យើងតាង $C=C(x)$ ជាអនុគមន៍ចំណាយសរុបក្នុងការផលិតសម្ភារះ

ចំនួន $x$ គ្រឿង ,

$R=R(x)$ ជាអនុគមន៍ចំណូលសរុបពីការលក់សម្ភារះចំនួន $x$ គ្រឿង

និង $P=P(x)=R(x)-C(x)$ ជាអនុគមន៍ប្រាក់ចំណេញពីការលក់សម្ភារះ

ចំនួន $x$ គ្រឿង

គេបាន $C'(x)$ ហៅថាអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណាយបន្ថែម

$R'(x)$ ហៅថាអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណូលបន្ថែម

$P'(x)$ ហៅថាអនុគមន៍នៃប្រាក់ចំណេញបន្ថែម ។

មេរៀនទី០៥

# អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

## ១-ព្រីមីទីវ

១.១.និយមន័យ ៖

គេថាអនុគមន៍ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លើចន្លោះ $I$ កាលណា ចំពោះគ្រប់ $x \in I$ គេមាន $F'(x) = f(x)$ ។

១.២.ទ្រឹស្តីបទ

បើអនុគមន៍ $F(x)$ និង $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ លើចន្លោះ $I$ នោះគ្រប់ $x \in I$ គេមាន $F(x) = G(x) + C$ ដែល $C$ :ជាចំនួនថេរ ។

## ២-អាំងតេក្រាលមិនកំនត់

២.១.និយមន័យ

បើអនុគមន៍ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ នោះអាំងតេក្រាលមិនកំនត់នៃ អនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់ដោយ $\int f(x).dx = F(x) + C$ ។
ដែល $C$ :ជាចំនួនថេរ ។

២.២.លក្ខណះ

$a/ \ \int k.f(x).dx = k.\int f(x).dx$

$b/ \ \int [f(x)+g(x)].dx = \int f(x).dx + \int g(x).dx$

$c/ \ \int [f(x)-g(x)].dx = \int f(x).dx - \int g(x).dx$

## ៣-រូបមន្តសំខាន់ៗអាំងតេក្រាលមិនកំនត់

1. $\int k.dx = kx + c$

13. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}.\ln|ax+b| + c$

2. $\int x^n.dx = \frac{1}{n+1}.x^{n+1} + c$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

4. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$

6. $\int \sin x.dx = -\cos x + c$

7. $\int \cos x.dx = \sin x + c$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$

10. $\int e^x.dx = e^x + c$

11. $\int a^x.dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

12. $\int e^{ax}.dx = \frac{1}{a}.e^{ax} + c$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}.\sqrt{ax+b} + c$

15. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}.\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

16 . $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}.arctn(\frac{x}{a}) + c$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c$

20. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}.\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

21. $\int \cot x.dx = \ln|\sin x| + c$

22. $\int \tan x.dx = -\ln|\cos x| + c$

23. $\int \sin(ax).dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$

24. $\int \cos(ax).dx = \frac{1}{a}.\sin(ax) + c$

## ៨-រូបមន្តប្តូរអថេរ

សន្មតថាគេមានអាំងតេក្រាល ៖ $I = \int f[\phi(x)].\phi'(x).dx$

បើគេតាង $u = \phi(x)$ នាំអោយ $du = \phi'(x).dx$

គេបាន $I = \int f[\phi(x)].\phi'(x).dx = \int f(u).du = F(u) + c$ ។

## ៩-រូបមន្តគ្រឹះនៃអាំងតេក្រាលមិនកំនត់

1. $\int k.du = ku + c$

8. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}.\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

2. $\int u^n.du = \frac{1}{n+1}.u^{n+1} + c$

3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

4. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c$

5. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c$

6. $\int e^u.du = e^u + c$

7. $\int \sin u.du = -\cos u + c$

9. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}.\arctan\frac{x}{a} + c$

10. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + c$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c$

12. $\int \tan u.du = -\ln|\cos u| + c$

13. $\int \cot u.du = \ln|\sin u| + c$

14. $\int a^u.du = \frac{a^u}{\ln a} + c$

## ៧-រូបមន្តអាំងតេក្រាលសំខាន់ៗគួរចងចាំ ៖

1. $\int k.P'(x).dx = k.P(x) + c$

2. $\int P^n(x).P'(x).dx = \frac{1}{n+1}.P^{n+1}(x) + c \quad , n \neq -1$

3. $\int \frac{P'(x)}{P(x)}.dx = \ln|P(x)| + c$

4. $\int \frac{P'(x)}{\sqrt{P(x)}}.dx = 2\sqrt{P(x)} + c$

5. $\int \frac{P'(x)}{P^2(x)}.dx = -\frac{1}{P(x)} + c$

6. $\int e^{P(x)}.P'(x).dx = e^{P(x)} + c$

## ៨-រូបមន្តគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ពីរ $u = u(x)$ និង $v = v(x)$

គេមាន $d(u.v) = v.du + u.dv$ ( រូបមន្តឌីផេរ៉ង់ស្យែល )

គេបាន $\int d(u.v) = \int v.du + \int u.dv$ ឬ $u.v = \int v.du + \int u.dv$

ដូចនេះ $\int u.dv = u.v - \int v.du$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

មេរៀនទី០៦

# អាំងតេក្រាលកំណត់

## ១-រូបមន្តញូតុន-ឡិបនិច

អាំងតេក្រាលកំនត់ពី $a$ ទៅ $b$ នៃអនុគមន៍ $y=f(x)$ ជាផលដក $F(b)-F(a)$ ។ ដែល $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $f(x)$ ។

គេកំនត់សរសេរ៖ $\int_a^b f(x).dx = \Big[\ F(x)\ \Big]_a^b = F(b)-F(a)$ ។

## ២-លក្ខណះអាំងតេក្រាលកំនត់

ក) $\int_a^a f(x).dx = 0$

ខ) $\int_a^b f(x).dx = -\int_b^a f(x).dx$

គ) $\int_a^b k.f(x).dx = k.\int_a^b f(x).dx$

ឃ) $\int_a^b [f(x)+g(x)].dx = \int_a^b f(x).dx + \int_a^b g(x).dx$

ង) $\int_a^b [f(x)-g(x)].dx = \int_a^b f(x).dx - \int_a^b g(x).dx$

ច) $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(z).dz = \int_a^b f(t).dt$

## ៣-រូបមន្តប្តូរអថេរ

✍ សន្មតថាគេមាន $I = \int_a^b f(x).dx \quad (1)$

បើគេតាង $x=\phi(t)$ នាំអោយ $dx=\phi'(t).dt$ ហើយចំពោះ $x\in[a,b]$ នោះ $t\in[t_1,t_2]$ ។

ដូចនេះ $I=\int_a^b f(x).dx=\int_{t_1}^{t_2} f[\phi(t)].\phi'(t).dt$

✍ សន្មតថាគេមាន $I=\int_a^b f[\phi(x)].\phi'(x).dx \quad (2)$

បើគេតាង $u=\phi(x)$ នាំអោយ $du=\phi'(x).dx$

ចំពោះ $x\in[a,b]$ នោះ $u\in[\phi(a),\phi(b)]$

គេបាន $I=\int_a^b f[\phi(x)].\phi'(x).dx=\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u).du$

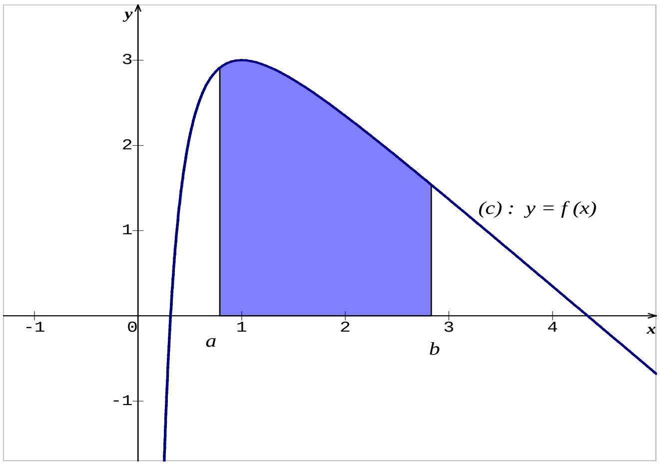
## ៨-រូបមន្តគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក $\int_a^b u.dv=[u.v]_a^b-\int_a^b v.du$

## ៩-គណនាក្រឡាផ្ទៃ

ក )ក្រឡាផ្ទៃខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ និង អក្ស័អាប់ស៊ីស ៖

ក្រឡាផ្ទៃខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង $(C): y=f(x)$ ជាមួយអក្ស័អាប់ស៊ីស $(x'ox)$ និង បន្ទាត់ $x=a$ និង $x=b$ កំនត់ដោយ ៖

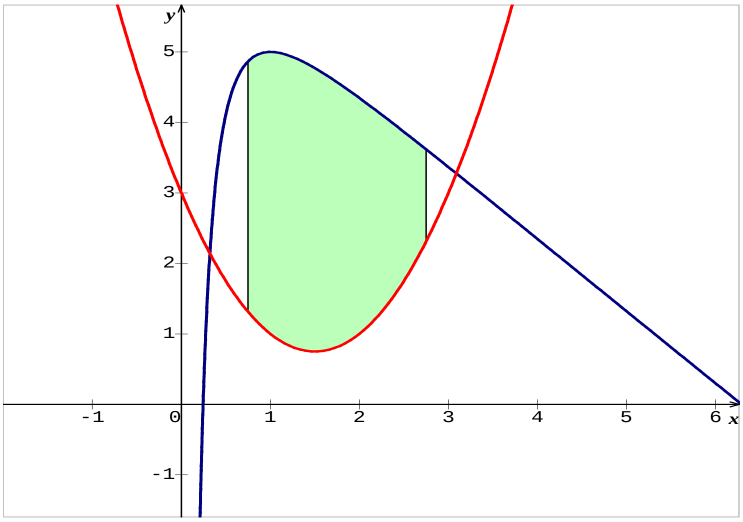
$$S=\int_a^b f(x).dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$



ខ )ក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ

ក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោង $(C_1): y = f(x)$ និង $(C_2): y = g(x)$ លើចន្លោះ $[a,b]$ ដែលគ្រប់ $x \in [a,b]: f(x) \geq g(x)$ កំនត់ដោយ ៖

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)].dx$$ ។




## ៦-គណនាមាឌសូលីដបរិវត្តន៍

ក )មាឌសូលីតបរិវត្តន៍កំនត់បានពីរង្វិលក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោង $(c): y = f(x)$ ជុំវិញអក្ស័អាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ កំនត់ដោយ $V = \pi \times \int_a^b [f(x)]^2.dx$ ។

ខ )មាឌសូលីតបរិវត្តន៍កំនត់បានពីរង្វិលក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងពីរ $(c_1): y = f(x)$ និង $(c_2): y = g(x)$ ជុំវិញអក្ស័អាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ កំនត់ដោយ $V = \pi \times \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)].dx$

ដែល $\left( f(x) \geq g(x) \ , \forall x \in [a,b] \right)$ ។

មេរៀនទី០៧

# សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

## ១.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទីមួយ

### ១.១.និយមន័យ ៖

សមីការឌីផេរង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនលំដាប់ទីមួយមានមេគុណថេរគឺជាសមីការដែលមានទំរង់ទូទៅជា $(E): y'-ay=0 \quad ,a\in\mathbb{R}$

### ១.២.ចម្លើយសមីការ:

សមីការឌីផេរង់ស្យែលលំដាប់ទីមួយ $(E): y'-ay=0 \quad ,a\in\mathbb{R}$
មានចំលើយទូទៅជាអនុគមន៍ទំរង់ $y=f(x)=k.e^{ax}$ ដែល $k$ ជាចំនួនពិត

## ២.សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទីពីរ

### ២.១.និយមន័យ:

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែអុម៉ូសែនលំដាប់ទីពីរដែលមានមេគុណថេរគឺជាសមីការដែលមានទម្រង់ជា $(E): ay''+by'+cy=0 \quad ,a\neq 0,a,b,c\in\mathbb{R}$ ។

### ២.២.សមីការសម្គាល់

សមីការសម្គាល់របស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$ay''+by'+cy=0 \quad ,a\neq 0,a,b,c\in\mathbb{R}$ ជាសមីការដឺក្រេទីពីរដែលមានរាង $ar^2+br+c=0$ ។

### ២.៣.ចម្លើយយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល:

ដើម្បីរកចម្លើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $ay''+by'+cy=0 \quad ,a\neq 0,a,b,c\in\mathbb{R}$
គេត្រូវដោះស្រាយសមីការសម្គាល់ $ar^2+br+c=0$ ។

-បើ $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

នោះសមីការសំគាល់មានឫសពីរ $r_1$ និង $r_2$ ក្នុងករណីនេះសមីការ ឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានចំលើយទូទៅជាអនុគមន៍ ៖

$$y = f(x) = A.e^{r_1 x} + B.e^{r_2 x}$$ ដែល $A, B \in \mathbb{R}$ ។

-បើ $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ នោះសមីការសំគាល់មានឫសឌុប $r_1 = r_2 = -\dfrac{b}{2a} = r_0$ ក្នុងករណីនេះសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានចំលើយទូទៅជាអនុគមន៍ ៖

$$y = f(x) = (Ax + B).e^{r_0 x}$$ ដែល $A, B \in \mathbb{R}$ ។

-បើ $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ នោះសមីការសំគាល់មានរឹសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា គឺ $r_1 = \alpha + i\beta$ និង $r_2 = \alpha - i\beta$

ក្នុងករណីនេះសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានចំលើយទូទៅជាអនុគមន៍

$$y = f(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x).e^{\alpha x}$$ ដែល $A, B \in \mathbb{R}$ ។

**៣.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានរាង** $(E):\ y' - ay = E(x)$ ,

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនេះមានចម្លើយទូទៅ $y = y_e + y_p$ ដែល $y_e$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $y' - ay = 0$ និង $y_p$ ជាចម្លើយពិសេសមួយ នៃសមីការ $y' - ay = E(x)$ ។

**៤.របៀបដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទម្រង់** $(E):\ ay'' + by' + cy = E(x)$

ដែល $E(x) \neq 0, a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$ ។

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការនេះគេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម ៖

-ស្វែងរកចម្លើយពិសេសមិនអូម៉ូសែនតាងដោយ $y_p$ នៃសមីការ $ay'' + by' + cy = E(x)$ ដែល $y_p$ មានទម្រង់ដូច $E(x)$ ។

-រកចម្លើយទូទៅតាងដោយ $y_h$ នៃសមីការលីនេអ៊ែអូម៉ូសែន

$ay''+by'+cy=0$ ។

-គេបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $(E)$ គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ

$y=y_P+y_h$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

មេរៀនទី០៨

# វិភាគលើបន្សំ

## ១-សំនុំ

សំនុំជាការប្រមូលផ្តុំនៃវត្ថុខុសៗគ្នាដែលបានកំណត់ច្បាស់លាស់

❖ វត្ថុនៃសំនុំហៅថាធាតុ ។

❖ កំណត់ច្បាស់លាស់មានន័យថាមានវិធានអាចឲ្យយើងកំណត់បានថាវត្ថុដែលឲ្យជាធាតុនៃសំនុំ ។

សំនុំគ្មានធាតុហៅថា សំនុំទទេ ដែលគេតាងដោយ $\varnothing$ ។

គេឲ្យ $A$ និង $B$ ជាសំនុំពីរ ៖

❖ បើសំនុំ $A$ និង $B$ មានធាតុដូចគ្នា យើងថាសំនុំ $A$ និង $B$ ស្មើគ្នា ។

គេសរសេរ $A = B$ ។

❖ បើ $A \subseteq B$ យើងថា $A$ ជាសំនុំរងនៃ $B$

❖ បើ $A \subset B$ យើងថា $A$ ជាសំនុំរងផ្ទាល់នៃ $B$

❖ សំនុំទទេជាសំនុំរងនៃគ្រប់សំនុំ

❖ $A$ ជាសំនុំរងនៃ $A$ ខ្លួនវា

ឧទាហរណ៍ រកសំនុំរងនៃសំនុំ $A = \{x, y, z\}$ ។

-សំនុំរងគ្មានធាតុ $\varnothing$

-សំនុំរងមានមួយធាតុ : $\{x\}, \{y\}, \{z\}$

-សំនុំរងមានពីរធាតុ : $\{x, y\}, \{y, z\}, \{z, x\}$

-សំនុំរងមានបីធាតុ : $\{x, y, z\}$

ដូចនេះសំនុំមានបីធាតុមាន $2^3 = 8$ សំនុំរង ។

ជាទូទៅ: សំនុំមាន $n$ ធាតុមាន $2^n$ សំនុំរង ។

## ២-ប្រសព្វ និង ប្រជុំនៃសំនុំ

គេឲ្យ $A$ និង $B$ ជាសំនុំពីរ ៖

❖ប្រសព្វនៃសំនុំ $A$ ជាមួយសំនុំ $B$ តាងដោយ $A \cap B$ ជាសំនុំដែលជាធាតុរួមជារបស់សំនុំ $A$ និង $B$ ។

គេកំណត់សរសេរ $A \cap B = \{x / x \in A$ និង $x \in B\}$

❖ប្រជុំនៃសំនុំ $A$ ជាមួយសំនុំ $B$ តាងដោយ $A \cup B$ ជាសំនុំដែលមានធាតុជាធាតុ របស់ $A$ ឬ ធាតុរបស់ $B$ ជាធាតុរួមជារបស់សំនុំ $A$ ផងនិង សំនុំ $B$ ផង ។

គេកំណត់សរសេរ $A \cup B = \{x / x \in A$ ឬ $x \in B\}$

## ៣-បំពេញនៃសំនុំ

សំនុំបំពេញនៃសំនុំ $E$ តាងដោយ $\overline{E}$ ជាសំនុំមានគ្រប់ធាតុដែលមិនមែនជាធាតុនៃសំនុំ $E$ ។

ឧទាហរណ៍: បើសំនុំសកល $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ និង $E = \{2,4,6,8\}$ នោះសំនុំបំពេញនៃសំនុំ $E$ គឺ $\overline{E} = \{1,3,5,7,9\}$ ។

## ៤-របាប់

*ទ្រឹស្តីបទ:* បើ $A$ និង $B$ ជាសំនុំកំណត់បាននោះ

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

ដែល $n(A)$: ជាចំនួនធាតុឬកាឌីណាល់នៃសំនុំ $A$

$n(B)$: ជាចំនួនធាតុឬកាឌីណាល់នៃសំនុំ $B$

$n(A \cap B)$: ជាចំនួនធាតុឬកាឌីណាល់នៃសំនុំ $A \cap B$ ។

$n(A \cup B)$: ជាចំនួនធាតុឬកាឌីណាល់នៃសំនុំ $A \cup B$ ។

*ទ្រឹស្តីបទ:* បើ $A$ និង $B$ ជាសំនុំគ្មានធាតុរួមគ្នានោះគេបាន:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

## ៥-គោលការណ៍ រាប់ ចម្លាស់ និង បន្សំ

ក )គោលការណ៍រាប់:

បើ $E_1, E_2, ...., E_p$ ជា $p$ ព្រឹត្តិការណ៍កើតឡើងផ្សេងៗគ្នា ដែលចំពោះព្រឹត្តិការណ៍នីមួយមានចំនួនលទ្ធផលរៀងគ្នា $r_1, r_2, ...., r_p$ នោះចំនួនលទ្ធផលសរុបនៃ $p$ ព្រឹត្តិការណ៍នេះមាន $r_1 \times r_2 \times ... \times r_p$ ។

ខ )ចម្លាស់:

ចម្លាស់នៃ $n$ ធាតុខុសៗគ្នាជាតម្រៀប( គិតលំដាប់ )នៃ $n$ ធាតុ
ដែលធាតុមួយ
នៅលំដាប់ទីមួយ ធាតុមួយទៀតនៅលំដាប់ទីពីរ និងបន្តបន្ទាប់ ។

ចំនួនចម្លាំនៃ $n$ ធាតុមាន: $1 \times 2 \times 3 \times ... \times n = n!$ ។

$n!$: អានថា $n$ ហ្វាក់តូរ្យែល ដែល $0! = 1$ ។

ជាទូទៅ: ចំនួនចម្លាស់ $n$ ធាតុ យកម្តង $p$ ធាតុមាន:

$$P(n,p) = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)...(n-p+1) \quad ។$$

គ )ចម្លាស់ដែលមានវត្ថុដូចគ្នា:

បើគេចម្លាស់ $n$ វត្ថុ ដែលក្នុងនោះមាន $p_1$ វត្ថុប្រភេទទទី១, $p_2$ វត្ថុប្រភេទទី២, ...... $p_k$ វត្ថុប្រភេទទី $k$ ដោយ $p_1 + p_2 + ... + p_k = n$

នោះចំនួនចម្លាស់គឺ: $N = \dfrac{n!}{p_1! p_2! .... p_k!}$ ។

ឃ )បន្សំ:

បន្សំគឺជាតម្រៀបមិនគិតលំដាប់ ។

ចំនួនបន្សំ $n$ ធាតុខុសៗគ្នាចាប់យកម្តង $p$ ធាតុ ( $p \le n$ )កំណត់
និង តាងដោយ ៖

$C(n,p)=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ ឬ $C_n^p=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ ឬ ${}_nC_p=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

ឬ $\dbinom{n}{p}=\dfrac{n!}{(n-p)!}$ ។

ង )រូបមន្តទ្វេធាញូតុន:

$$(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}\left[C(n,p)a^{n-p}b^p\right]=C(n,0)a^n+C(n,1)a^{n-1}b+....+C(n,n)b^n$$

ឬគេអាចសរសេរ ៖

$$(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}\left(C_n^p a^{n-p}b^p\right)=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+...+C_n^nb^n$$

ច )ត្រីកោណប៉ាស្កាល់:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 1 | | | |
| 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | |
| 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 |

$-------------------------$

$-------------------------$

មេរៀនទី០៩

# ប្រូបាបលីតេ

## ១-បញ្ញត្តិនៃប្រូបាប

ប្រូបាបមានសារៈសំខាន់នៅក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃរបស់យើង ដែលយើងប្រើប្រាស់វាសម្រាប់វាស់កម្រឹតនៃភាពមិនទៀងទាត់។ កាលណាយើងគ្រោងធ្វើអ្វី មួយ កាលណាអ្នកឧតុនិយមទស្សន៍ទាយអាកាសធាតុឬក្រុមហ៊ុន ធានារ៉ាប់រងធ្វើគោលនយោបាយរបស់ក្រុមហ៊ុនចាំបាច់ត្រូវប្រើប្រូបាបដើម្បីធ្វើ សេចក្តីសម្រេចចិត្ត ឬ ធ្វើការជ្រើសរើស ។

### ១.១.ព្រឹត្តិការណ៍ លំហសំណាក

ព្រឹត្តិការណ៍លំហសំណាកគឺជាសំនុំនៃលទ្ធផលអាចទាំងអស់ ។

### ១.២.រូបមន្តគោលនៃប្រូបាប

ក្នុងពិសោធន៍មួយ ដែលមានលំហសំណាក $S$ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ $A$ កើតឡើងកំណត់ដោយ $P(A)=\frac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}}=\frac{n(A)}{n(S)}$

ដោយ $A\subseteq S$ នោះគេបាន $0\le P(A)\le 1$ ។

-បើ $P(A)=0$ គេថាព្រឹត្តិការណ៍ $A$ ជាព្រឹត្តិកាណ៍មិនអាចកើតមាន ។

-បើ $P(A)=1$ គេថាព្រឹត្តិការណ៍ $A$ ជាព្រឹត្តិកាណ៍ប្រាកដជាកើតឡើង ។

## ២-វិធាននៃប្រូបាប

ដោយព្រឹត្តិការណ៍ជាសំនុំរងនៃលំហសំណាក យើងអាចប្រើប្រជុំ ប្រសព្វនិងបំពេញនៃព្រឹត្តិការណ៍ដើម្បីបង្កើតព្រឹត្តិការណ៍បន្ថែមទៀត ដែលយើងហៅថាព្រឹត្តិការណ៍សមាស ។

គេឲ្យ $A$ និង $B$ ជាព្រឹត្តិការណ៍កើតក្នុងលំហសំណាក $S$ នោះគេបានៈ

ក )ប្រជុំព្រឹត្តិការណ៍ $A\cup B$

ជាព្រឹត្តិការណ៍កើនឡើងនៃគ្រប់លទ្ធផលដែលជាលទ្ធផលនៅក្នុង $A$ ឬ $B$ ឬទាំងពីរព្រឹត្តិការណ៍ ។

ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ $A\cup B$ ( ព្រឹត្តិការណ៍ $A$ ឬ $B$ )កំណត់ដោយ៖

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ ។

បើព្រឹត្តិការណ៍ $A$ និង $B$ មិនចុះសម្រុងនឹងគ្នាគឺ $A\cap B=\varnothing$ នោះគេបាន៖

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ ។

ខ )ប្រសព្វព្រឹត្តិការណ៍ $A\cap B$

ជាព្រឹត្តិការណ៍កើតឡើងនៃគ្រប់លទ្ធផលដែលជាលទ្ធផលនៅក្នុង $A$ ផងនិង $B$ ផង ។

គ )បំពេញព្រឹត្តិការណ៍

បើ $\overline{E}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍បំពេញនៃព្រឹត្តិការណ៍ $E$ ជាព្រឹត្តិការណ៍នៃគ្រប់លទ្ធផលនៅក្នុងលំហសំណាក $S$ ដែលមិននៅក្នុង $E$ ។

ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍បំពេញ $\overline{E}$ នៃព្រឹត្តិការណ៍ $E$ កំណត់ដោយ៖

$P(\overline{E})=1-P(E)$ ។

**៣-ប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ**

ជួនកាល ការកើតឡើងនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយ មានឥទ្ធិពលលើប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយទៀត និងការគណនាប្រូបាបនេះគឺលើមូលដ្ឋាននៃការសន្មតថាព្រឹត្តិការណ៍ពិសេសនោះកើតឡើង គេហៅថាប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ ។និយមន័យប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ៖

ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ $A$ ដោយដឹងថា មានព្រឹត្តិការណ៍ $B$ បានកើតឡើងរួចហើយ ហៅថាប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ និងតាងដោយ $P(A/B)$ អានថាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ $A$ ដោយបានដឹងព្រឹត្តិការណ៍ $B$

កើតឡើងរួចហើយ ។រូបមន្តប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ:

$P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ដែល $P(B)\neq 0$ ។

វិធានផលគុណ: ចំពោះព្រឹត្តិការណ៍ $A$ និង $B$ ដោយ $P(B)\neq 0$ គេបាន:

$P(A\cap B)=P(B)\times P(A/B)$ ។

## ៨-ព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា ឬ មិនអាស្រ័យគ្នា

ព្រឹត្តិការណ៍ $A$ និង $B$ ដែលអាស្រ័យនឹងគ្នាក្នុងវិធីដែលការកើតឡើងនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយមិនជាប់ពាក់ពន្ធ័នឹងការកើតឡើងនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយទៀត យើងហៅព្រឹត្តិការណ៍បែបនេះថាជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា ឬ មិនអាស្រ័យនឹងគ្នា។

យើងថា ព្រឹត្តិការណ៍ពីរ $A$ និង $B$ ជាព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នា លុះត្រាតែ $P(A/B)=P(A)$ ឬ $P(B/A)=P(B)$ ។

គេបាន $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ ។

ជាទូទៅ: បើ $A_1,A_2,\ldots,A_n$ ជា $n$ ព្រឹត្តិការណ៍មិនទាក់ទងគ្នាពីរៗនោះគេបាន:

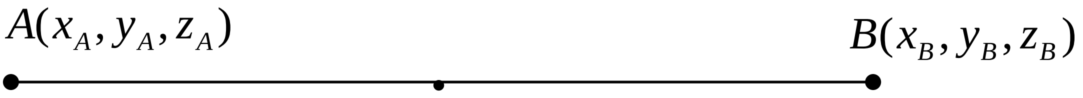
$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)\times P(A_2)\times P(A_3)\times\ldots\times P(A_n)$ ។

www.mathtoday.wordpress.com

មេរៀនទី១០

# ធរណីមាត្រវិភាគក្នុងលំហ

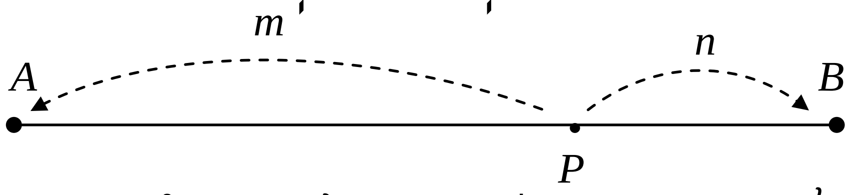
## ១-កូអរដោនេនៃចំណុចកណ្ដាលអង្កត់មួយក្នុងលំហ




$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

កូអរដោនេចំណុច $I$ កណ្ដាលអង្កត់ $[AB]$: $I\ \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$

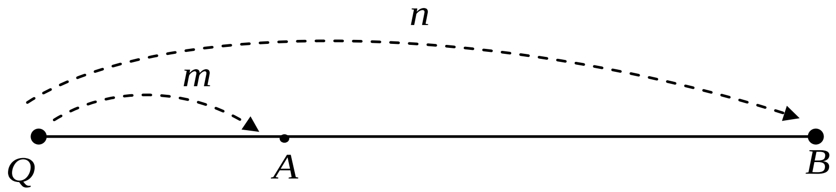
## ២-កូអរដោនេចំណុចចែកក្នុងអង្កត់មួយក្នុងលំហ




កូអរដោនេចំណុច $P$ ចែកក្នុងអង្កត់ $[AB]$ តាមផលធៀប $\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}$

$$P\ \left(\frac{mx_B+nx_A}{m+n}, \frac{my_B+ny_A}{m+n}, \frac{mz_B+nz_A}{m+n}\right)$$ ។

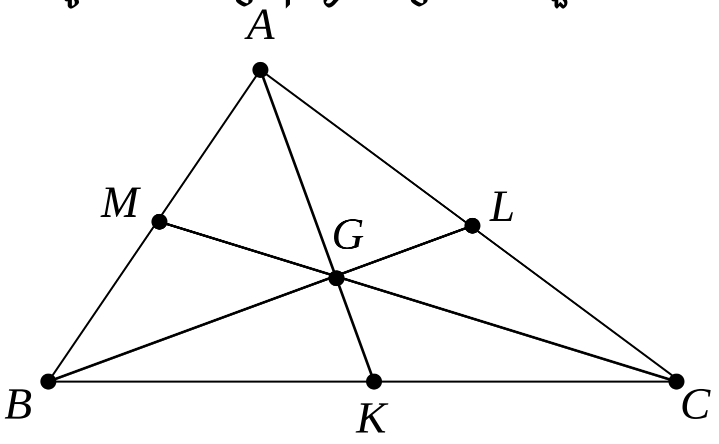
## ៣-កូអរដោនេចំណុចចែកក្រៅអង្កត់មួយក្នុងលំហ




កូអរដោនេចំណុច $Q$ ចែកក្រៅអង្កត់ $[AB]$ តាមផលធៀប $\frac{QA}{QB} = \frac{m}{n}$

$$Q\ \left(\frac{mx_B-nx_A}{m-n}, \frac{my_B-ny_A}{m-n}, \frac{mz_B-nz_A}{m-n}\right)$$ ។

## ៨-កូអរដោនេទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណមួយ

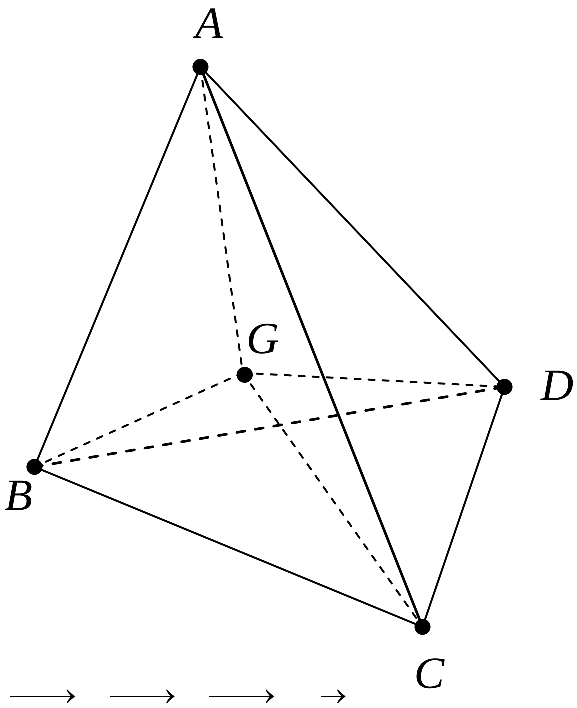



$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$$

កូអរដោនេទីប្រជុំទម្ងន់ $G$ នៃត្រីកោណ $ABC$ :

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\frac{z_A+z_B+z_c}{3}\right)$$

## ៩-កូអរដោនេទីប្រជុំទម្ងន់នៃតេត្រាអ៊ែតមួយ




$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{O}$$

កូអរដោនេទីប្រជុំទម្ងន់ $G$ នៃតេត្រាអ៊ែត $ABCD$:

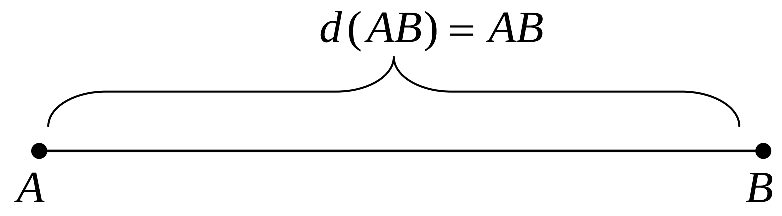
$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4},\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4},\frac{z_A+z_B+z_c+z_D}{4}\right)$$

## ៦-កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រភ្ជាប់ដោយពីរចំណុច

កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ ដែលភ្ជាប់ដោយពីរចំណុច $A$ និង $B$

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$$ ។

## ៧-ចម្ងាយរវាងពីរចំណុចក្នុងលំហ




ចម្ងាយរវាងពីរចំណុច $A$ និង $B$ នៅក្នុងលំហកំណត់ដោយ ៖

$$d(AB)=AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$ ។

## ៨-ប្រមាណវិធីវ៉ិចទ័រតាមកូអរដោនេនៅក្នុងលំហ

ឧបមាថាគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

ក ) $\vec{u}=\vec{O}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=0\\u_2=0\\u_3=0\end{cases}$ ខ ) $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=v_1\\u_2=v_2\\u_3=v_3\end{cases}$

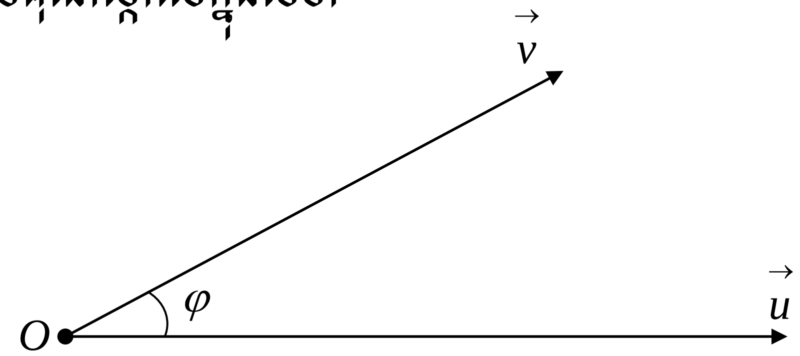
គ ) $\vec{u}=\lambda\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=\lambda v_1\\u_2=\lambda v_2\\u_3=\lambda v_3\end{cases}$ ដែល $\lambda\in\mathbb{R}$ ។

ឃ) $\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)$

ង) $\vec{u}-\vec{v}=(u_1-v_1, u_2-v_2, u_3-v_3)$

ច) $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}=(\lambda u_1+\mu v_1, \lambda u_2+\mu v_2, \lambda u_3+\mu v_3)$ ដែល $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

## ៩-ផលគុណស្កាលែក្នុងលំហ




ផលគុណស្កាលែរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ក្នុងលំហគឺជាចំនួនពិតកំណត់សរសេរដោយ $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\varphi$ ដែល $\varphi$ ជាមុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$

## ១០-លក្ខណៈផលគុណស្កាលែក្នុងលំហ

ក) $\vec{u}\cdot\vec{o}=\vec{o}\cdot\vec{u}=0$

ខ) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

គ) $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2=|\vec{u}|^2$

ឃ) $\lambda\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\lambda\vec{v}=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$

ង) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

ច) $\vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{w}$

ឆ) $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$

ជ) $|\vec{u}-\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$

## ១១-កន្សោមវិភាគផលគុណស្កាលែក្នុងលំហ

ឧបមាថាគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ ស្ថិតនៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។ផលគុណស្កាលែរវាងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ កំណត់ដោយ $\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$ ។

### ១២-ណរម ឬ ប្រវែងវ៉ិចទ័រមួយ

បើ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ នោះ $|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$ ។

### ១៣-កូស៊ីនូសនៃមុំផ្គុំដោយពីរវ៉ិចទ័រ

ឧបមាថាគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

ស្ថិតនៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។

បើ $\varphi$ ជាមុំរវាង $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ នោះគេបាន ៖

$$\cos\varphi=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$ ។

### ១៤-វ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់ និង វ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែរ

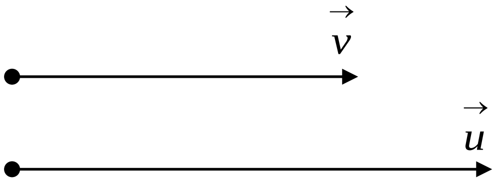
ក )វ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់

✍ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ជាវ៉ិចទ័រអរតូកូណាល់គ្នាលុះត្រាតែ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ ។

✍ ឧបមាថាគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

គេបាន $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0$ ។

ខ ) វ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែគ្នា



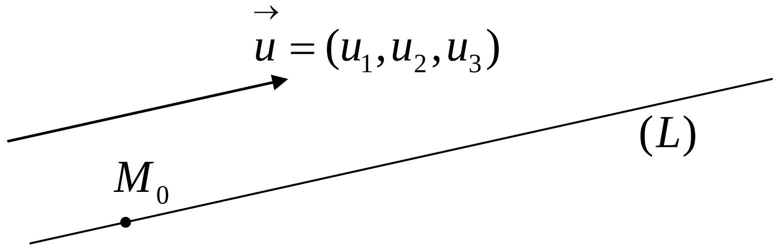
✍ វ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ កូលីនេអ៊ែគ្នាលុះត្រាតែមានចំនួនពិត $\lambda$ ដែល $\vec{u}=\lambda\vec{v}$

✍ ឧបមាថាគេមានវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

គេបាន $\vec{u}//\vec{v} \Leftrightarrow \frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}=\frac{u_3}{v_3}$ ។

## ១៥-សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង សមីការឆ្លុះ

ក )សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ




បន្ទាត់$(L)$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $\vec{u}=(\alpha,\beta,\gamma)$ ហើយកាត់តាមចំណុច $M_0(x_0,y_0,z_0)$ មានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រកំណត់ដោយ ៖

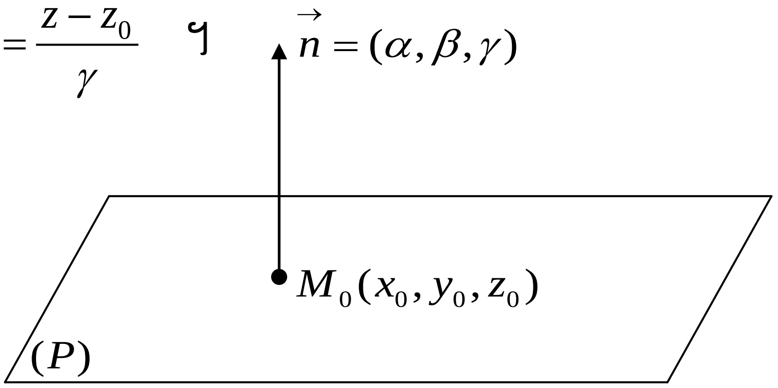
$$\begin{cases} x=x_0+\alpha t \\ y=y_0+\beta t \\ z=z_0+\gamma t \quad , t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

ខ)សមីការឆ្លុះ

បន្ទាត់$(L)$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $\vec{u}=(\alpha,\beta,\gamma)$ ហើយកាត់តាមចំណុច $M_0(x_0,y_0,z_0)$ មានសមីការឆ្លុះកំណត់ដោយ ៖

$(L):\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}$ ។

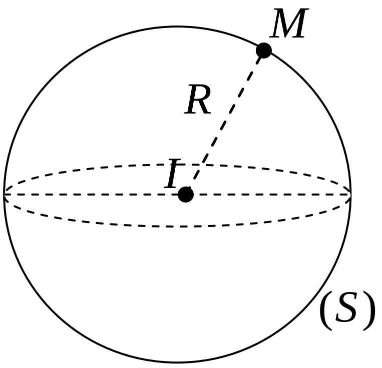
## ១៦-សមីការប្លង់



ប្លង់ $(p)$ ដែលកាត់តាមចំណុច $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រនរម៉ាល់ $\vec{n}=(\alpha,\beta,\gamma)$ កំណត់ដោយ ៖

$(p):\ \alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)=0$ ។

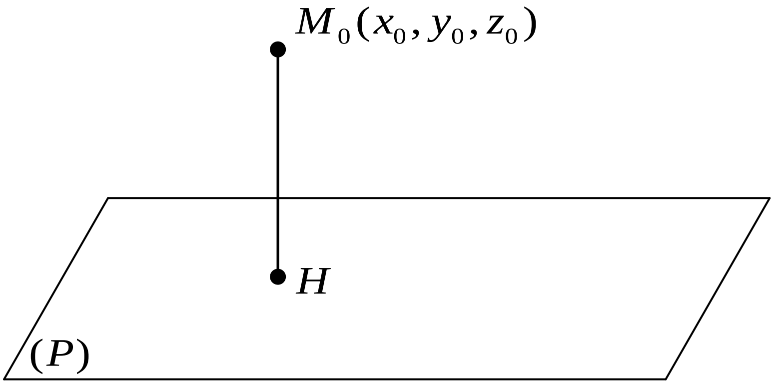
## ១៧-សមីការស្វ៊ែ




ស្វ៊ែ $(S)$ មានផ្ចិត $I(a,b,c)$ កាំ $R$ មានសមីការស្តង់ដា ៖

$(S):\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ ។

## ១៨-ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅប្លង់

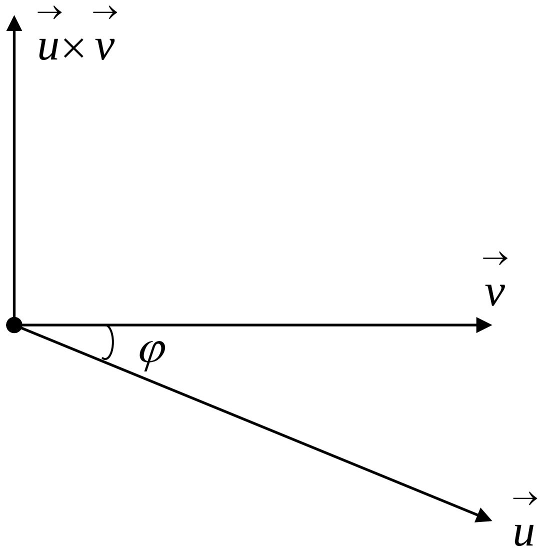



ចម្ងាយពីចំណុច $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ទៅប្លង់ $(p): ax+by+cz+d=0$

កំណត់ដោយ $d(M_0,(p))=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ។

## ១៩-ផលគុណវ៉ិចទ័រ

### និយមន័យ




ផលគុណរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ ក្នុងលំហកំណត់ដោយ ៖

$$\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\varphi.\vec{k}$$ ។

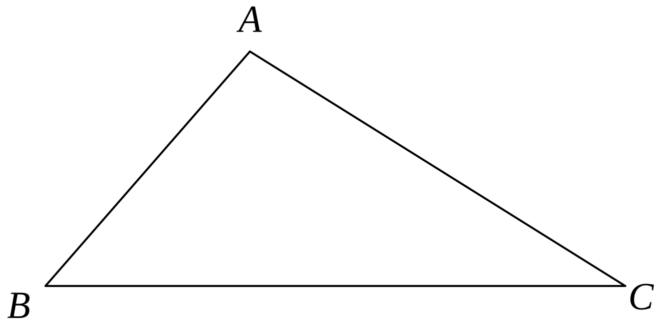
## ២០-កន្សោមផលគុណវ៉ិចទ័រក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន

ក្នុងលំហប្រកបដោយតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ និង $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ ។

ផលគុណរវាងពីរវ៉ិចទ័រ $\vec{u}$ និង $\vec{v}$ កំណត់ដោយ ៖

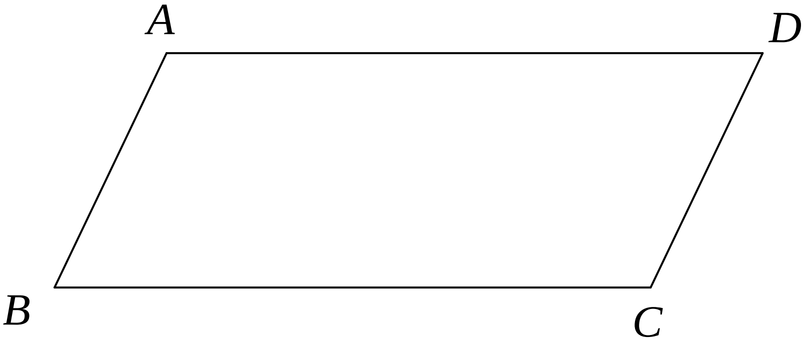
$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

## ២១-ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ



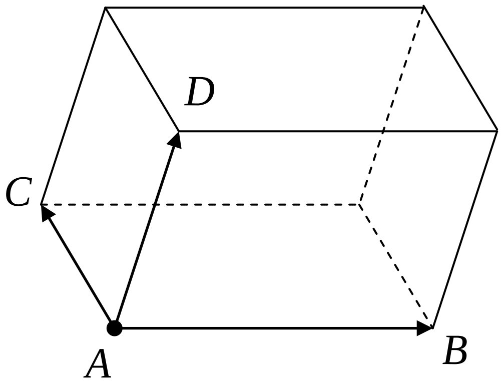

ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ $ABC$ កំណត់ដោយ $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$

## ២២-ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម



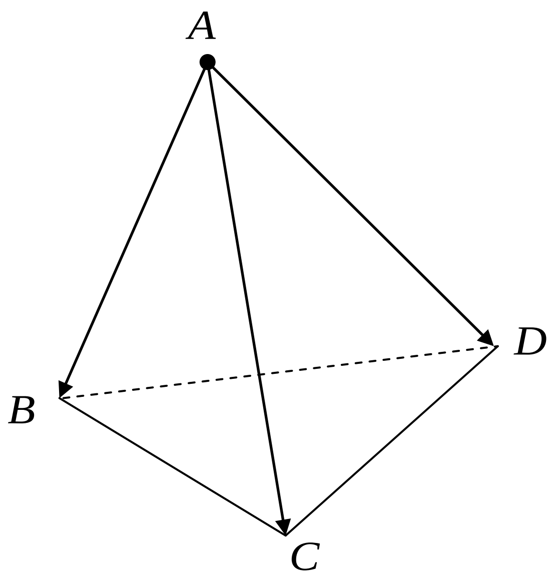

ផ្ទៃក្រឡានៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ កំណត់ដោយ $S_{ABCD} = \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$

## ២៣-មាឌប្រលេពីប៉ែត



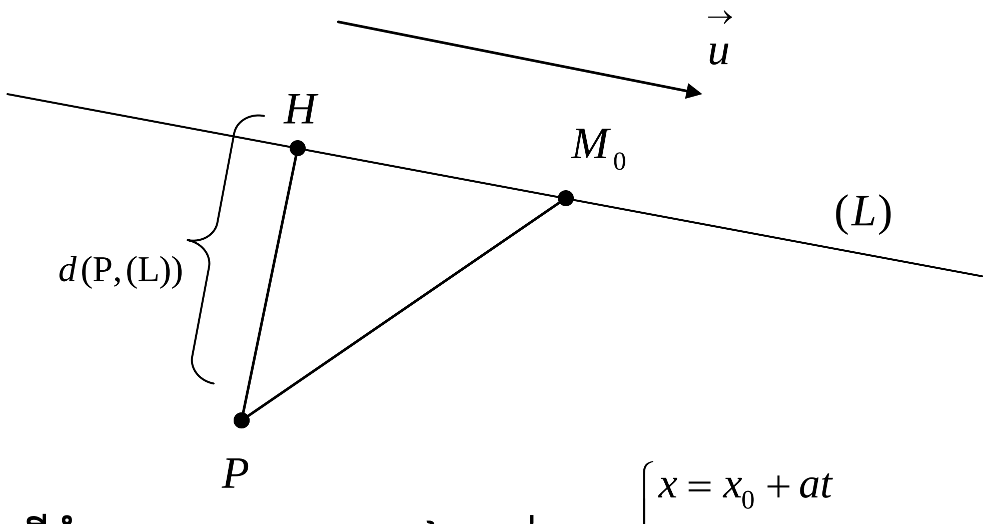
មាឌនៃប្រលេពីប៉ែត $V = \left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AD} \right|$

## ២៤-មាឌតេត្រាអ៊ែត




$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AD} \right|$$

## ២៥-ចម្ងាយពីចំណុចមួយទៅបន្ទាត់មួយក្នុងលំហ




ចម្ងាយពីចំណុច $P(\alpha,\beta,\gamma)$ ទៅបន្ទាត់ $(L):\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \ , t \in \mathbb{R} \end{cases}$

កំណត់ដោយ $d(P,(L))=\dfrac{\left|\overrightarrow{M_0P}\times\vec{u}\right|}{|\vec{u}|}$

ដែល $\vec{u}=(a,b,c),\mathrm{M}_0(x_0,y_0,z_0)$ ។

www.mathtoday.wordpress.com