# លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

## សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១២

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{x^2}=\frac{a^2}{2}$$

រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

# លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

## សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១២

រៀបរៀង ដោយ លឹម ផល្គុន
Tel: 017 768 246
www.mathtoday.wordpress.com

## គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

## គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក យ៉ង់ ឆារី
លោក លឹម ឆុន
លោក អ៊ឹង សំណាង

## គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិត្តសិរ

## ការិយកុំព្យូទ័រ

លោកស្រី លី គុណ្ណាកា លោក អ៊ឹង សំណាង

# អារម្ភកថា

*សួស្តីមិត្តអ្នកសិក្សាជាទីស្រឡាញ់រាប់អាន !*
*សៀវភៅ* **លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍** *ដែលលោកអ្នកកំពុងតែកាន់អាននេះខ្ញុំបាទបានរៀបចំឡើងសម្រាប់ទុកជាឯកសារសម្រាប់អ្នកសិក្សាដែលមានបំណងចង់ចេះ លើផ្នែកនៃមេរៀននេះឲ្យបានកាន់តែច្បាស់ ។*
*នៅក្នុងសៀវភៅនេះរួមមាន មេរៀនសង្ខេប លំហាត់គំរូ និង លំហាត់អនុវត្តន៍សម្រាប់អ្នកសិក្សាហ្វឹកហាត់ដោះស្រាយដោយខ្លួនឯង។*

*យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅមួយក្បាលនេះ នឹងអាចចូលរួមផ្តល់នូវគំនិត និង វិធីសាស្ត្រថ្មីៗក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់ផ្នែក លីមីត និង ភាពជាប់នៃអនុគមន៍ ចំពោះលោកអ្នកសិក្សាជាពុំខានឡើយ ។*

*ជាទីបញ្ចប់ខ្ញុំបាទសូមជូនពរចំពោះលោកអ្នក សូមមានសុខភាពល្អ មានប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និង ទទួលបានជោគជ័យក្នុងគ្រប់ភារកិច្ច ។*

បាត់ដំបងថ្ងៃទី១៨ វិច្ឆិការ ឆ្នាំ២០១១

អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាវជ្រាវ
**លឹម ផល្គុន**
Tel : 017 768 246
Email: lim_phalkun@ymail.com
Website: www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី១

# លីមីតនៃអនុគមន៍

## ១-លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំនួនកំណត់

**និយមន័យ១** ៖ អនុគមន៍ $f$ មានលីមីត $L$ កាលណា $x$ ខិតជិត $a$ បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $\delta > 0$ ដែល $0 < |x - a| < \delta$ នាំឲ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។ គេកំណត់សរសេរ $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ។

**ឧទាហរណ៍** ដោយប្រើនិយមន័យបង្ហាញថា $\lim_{x \to 2}(3x + 4) = 10$ ?

យើងត្រូវបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មាន $\delta > 0$ ដែល

$|(3x + 4) - 10| < \varepsilon$ កាលណា $0 < |x - 2| < \delta$ ។

គេបាន $|(3x + 4) - 10| < \varepsilon \Leftrightarrow |3(x - 2)| < \varepsilon$ គ្រប់ $\varepsilon > 0$

សមមូល $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$ យក $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ នោះ $|x - 2| < \delta$ ។

សម្រាយនេះបញ្ជាក់ថា $\varepsilon > 0$ មាន $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ ដែល $|x - 2| < \delta$

នាំឲ្យ $|(3x + 4) - 10| < \varepsilon$ ។ ដូចនេះ $\lim_{x \to 2}(3x + 4) = 10$ ។

**និយមន័យ** ២៖ អនុគមន៍ $f$ ខិតទៅរក $+\infty$ ឬ $-\infty$ កាលណា $x$

ខិតជិត $a$ បើគ្រប់ចំនួន $M>0$ មានចំនួន $\delta>0$ ដែល

$0<|x-a|<\delta$ នាំឲ្យ $f(x)>M$ ឬ $f(x)<-M$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ ឬ $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ ។

**ឧទាហរណ៍** គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$

ចូរស្រាយតាមនិយមន័យថា $\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ ។

គេមាន $f(x)=\frac{2x+3}{x-2}=\frac{2(x-2)+7}{x-2}=2+\frac{7}{x-2}$

យើងនឹងរកគចំនួន $M>0$ ដែល $f(x)>M$ ។

ដើម្បីឲ្យ $f(x)>M$ យើងគ្រាន់តែឲ្យ $\frac{7}{x-2}>M$ និង $x>2$

គេទាញបាន $0<x-2<\frac{7}{M}$ យក $\delta=\frac{7}{M}>0$ នោះ $0<x-2<\delta$

សម្រាយនេះបញ្ជាក់ថាគ្រប់ចំនួន $M>0$ មាន $\delta=\frac{7}{M}>0$

ដែល $0<|x-2|<\delta$ នាំឲ្យ $f(x)>M$ ។ដូចនេះ $\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ ។

# លំហាត់អនុវត្តន៍

ចូរស្រាយបញ្ជាក់លីមីតខាងក្រោមតាមនិយមន័យ ៖

១/ $\lim_{x\to 3}(2x+1)=7$

២/ $\lim_{x\to -2}(x+5)=3$

៣/ $\lim_{x\to 2}(3x+2)=8$

៤/ $\lim_{x\to 1}(-2x+7)=5$

៥/ $\lim_{x\to 2}(x^2+1)=5$

៦/ $\lim_{x\to 1}(x^2+2x+4)=7$

៧/ $\lim_{x\to 1}\frac{3x+1}{x^2+1}=2$

៨/ $\lim_{x\to 2}\sqrt{x^3+1}=3$

៩/ $\lim_{x\to 2}(3^x+1)=10$

១០/ $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)=1$

១១/ $\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x}=+\infty$

១២/ $\lim_{x\to 1^+}\frac{2x+1}{x-1}=+\infty$

១៣/ $\lim_{x\to 2^-}\frac{x+2}{x-2}=-\infty$

១៤/ $\lim_{x\to 1^-}\frac{3x}{x-1}=-\infty$

១៥/ $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-4x+5}{(x-1)^2}=+\infty$

១៦/ $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x}{x^2-4x+4}=-\infty$

១៧/ $\lim_{x\to 8}(\sqrt[3]{x}+1)=3$

១៨/ $\lim_{x\to 2}(x^3+2x)=12$

## ២-លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រង់អនន្ត

**និយមន័យ១** ៖ អនុគមន៍ $f$ មានលីមីត $L$ កាលណា $x$ ខិតទៅ $+\infty$ ឬ $-\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $\varepsilon > 0$ មានចំនួន $N > 0$ ដែល $x > N$ ឬ $x < -N$ នាំឲ្យ $|f(x) - L| < \varepsilon$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ ឬ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ ។

ឧទាហរណ៍ គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{4x+1}{2x+3}$

ចូរស្រាយថា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ ។

គេមាន $f(x) = \dfrac{4x+1}{2x+3} = \dfrac{2(2x+3)-5}{2x+3} = 2 - \dfrac{5}{2x+3}$

នាំឲ្យ $|f(x) - 2| = \dfrac{5}{|2x+3|}$ ចំពោះ $|f(x) - 2| < \varepsilon$ , $\varepsilon > 0$

គេបាន $\dfrac{5}{|2x+3|} < \varepsilon$ នាំឲ្យ $|2x+3| > \dfrac{5}{\varepsilon}$

គេទាញ $\left[\begin{array}{l} 2x+3 > \dfrac{5}{\varepsilon} \\ 2x+3 < -\dfrac{5}{\varepsilon} \end{array}\right.$ សមមូល $\left[\begin{array}{l} x > \dfrac{5}{2\varepsilon} - \dfrac{3}{2} \\ x < -\dfrac{5}{2\varepsilon} - \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

ហេតុនេះ គ្រប់ $\varepsilon > 0$ មាន $A = \frac{5}{2\varepsilon}$ ឬ $A = \frac{5}{2\varepsilon} + \frac{3}{2}$

ដែល $x > A$ ឬ $x < -A$ នាំឲ្យ $|f(x) - 2| < \varepsilon$

ដូចនេះ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$ និង $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ ។

**និយមន័យ២** ៖ អនុគមន៍ $f$ មានលីមីត $+\infty$ កាលណា $x$ ខិតទៅ $+\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $M > 0$ មានចំនួន $N > 0$ ដែល $x > N$ នាំឲ្យ $f(x) > M$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ។

**និយមន័យ៣** ៖ អនុគមន៍ $f$ មានលីមីត $+\infty$ កាលណា $x$ ខិតទៅ $-\infty$ បើគ្រប់ចំនួន $M > 0$ មានចំនួន $N > 0$ ដែល $x < -N$ នាំឲ្យ $f(x) > M$ ។

គេកំណត់សរសេរ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ។

# លំហាត់អនុវត្តន៍

ចូរស្រាយបញ្ជាក់លីមីតខាងក្រោមតាមនិយមន័យ ៖

១/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{x+1}=3$

២/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-3x}{x+2}=-3$

៣/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x+2}{1-x}=-5$

៤/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x+1}{2x+1}=2$

៥/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$

៦/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8x+1}{1-4x}=-2$

៧/ $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+3)=-\infty$

៨/ $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x+3)=-\infty$

៩/ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+4)=+\infty$

១០/ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$

១១/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-x^2}{3x+5}=-\infty$

១២/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x+1}=-\infty$

១៣/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x+1}=0$

១៤/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7}{x+1}=0$

១៥/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x}{x^2+4x+5}=1$

១៦/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{(x-2)^2}=0$

## ៣-ប្រមាណវិធីលើលីមីត

បើ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ , $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ និង $\lim\limits_{x \to a} h(x) = N$

ដែល L , M និង N ជាចំនួនពិតនោះគេបាន ៖

ក/ $\lim\limits_{x \to a}[f(x) + g(x) - h(x)] = L + M - N$

ខ/ $\lim\limits_{x \to a}[\alpha f(x) + \beta g(x) - \gamma h(x)] = \alpha L + \beta M - \gamma N$

គ/ $\lim\limits_{x \to a}[f(x)g(x)h(x)] = L.M.N$

ឃ/ $\lim\limits_{x \to a}[\dfrac{f(x)}{g(x)}] = \dfrac{L}{M}$ ដែល $M \neq 0$

## ៤-លីមីតនៃអនុគមន៍អសនិទាន

រូបមន្ត ៖

1/ $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ ដែល $a \geq 0$ និង $n \in IN$ , $n \geq 2$

2/ $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ ដែល $a < 0$ និង $n \in IN$ , $n \geq 2$(ចំនួនគត់សេស)

3/ $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$ ដែល $a \geq 0$ និង $n \in IN$ , $n \geq 2$

## ឧទាហរណ៍ គណនាលីមីត

១/ $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^3+1} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(x^3+1)} = \sqrt{2^3+1} = \sqrt{9} = 3$

២/ $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[3]{\dfrac{x^2+5x+3}{x+5}} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+5x+3}{x+5}}$

$$= \sqrt[3]{\frac{9+15+3}{5+3}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$$

៣/ $\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{x^3+4x}+\sqrt[3]{x^2+3x-2})$

$$= \sqrt{\lim_{x\to 2}(x^3+4x)} + \sqrt[3]{\lim_{x\to 2}(x^2+3x-2)}$$

$$= \sqrt{8+8} + \sqrt[3]{4+6-2} = 4+2 = 6$$

## លំហាត់អនុវត្តន៍ ៖

គណនាលីមីត ៖

1/ $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-3x+4}{2x^2-x-1}}$

2/ $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{2x^2+7x+3}}$

3/ $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt[3]{\dfrac{x+4}{-7x+1}}$

4/ $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+2}}}$

# ៥-លីមីតនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់

បើ f និង g ជាអនុគមន៍ពីរដែលមានលីមីត $\lim_{x\to a} g(x) = L$

និង $\lim_{x\to L} f(x) = f(L)$ នោះ $\lim_{x\to a} f[g(x)] = f(L)$ ។

ឧទាហរណ៍១ គណនាលីមីត $\lim_{x\to 2} \ln(\frac{4x+7}{x+3})$

តាង $g(x) = \frac{4x+7}{x+3}$ និង $f(x) = \ln x$ នោះ $f[g(x)] = \ln(\frac{4x+7}{x+3})$

គេមាន $\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{4x+7}{x+3} = \frac{8+7}{2+3} = 3$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 2} f[g(x)] = \lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = \ln 3$ ។

ឧទាហរណ៍2 គណនាលីមីត $\lim_{x\to +\infty} \ln(\frac{4x+7}{x+3})$

តាង $g(x) = \frac{4x+7}{x+3}$ និង $f(x) = \ln x$ នោះ $f[g(x)] = \ln(\frac{4x+7}{x+3})$

គេមាន $\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{4x+7}{x+3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4+\frac{7}{x}}{1+\frac{3}{x}} = \frac{4}{1} = 4$

ដូចនេះ $\lim_{x\to +\infty} f[g(x)] = \lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} \ln x = \ln 4 = 2\ln 2$ ។

# ៦-លីមីតតាមការប្រៀបធៀប

1/ បើ $f$ និង $g$ ជាអនុគមន៍ពីរ ហើយ $A$ ជាចំនួនពិតមួយដែល

ចំពោះ $\forall x \geq A: f(x) \geq g(x)$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

នោះ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ។

2/ បើ $f$ និង $g$ ជាអនុគមន៍ពីរ ហើយ $A$ ជាចំនួនពិតមួយដែល

ចំពោះ $\forall x \geq A: f(x) \leq g(x)$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

នោះ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ។

3/ បើ $f, g$ និង $h$ ជាអនុគមន៍បី ហើយ $A$ ជាចំនួនពិតមួយដែល

$\forall x \geq A: g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lambda$

នោះ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$ ។ ( $\lambda$ ជាចំនួនពិត ) ។

៤/ បើ $f$ និង $g$ ជាអនុគមន៍ពីរ ហើយ $A$ ជាចំនួនពិតមួយដែល

$\forall x \geq A: f(x) \leq g(x)$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$ , $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lambda'$

នោះ $\lambda \leq \lambda'$ ។ ( $\lambda$ និង $\lambda'$ ជាចំនួនពិត ) ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍ដែល $f(x)=\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

គេមាន $f(x)=\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

ដោយគ្រប់ $x>0$ គេមាន $\sqrt{x+1}>\sqrt{x}$

នោះគេទាញ $2\sqrt{x}<\sqrt{x+1}+\sqrt{x}<2\sqrt{x+1}$

ឬ $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ឬ $\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}}<\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\dfrac{1}{2}$ នោះ $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}<f(x)<\dfrac{1}{2}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\dfrac{1}{2}$ ។

## ៧-លីមីតរាងមិនកំណត់

### ក/លីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

**វិធាន ៖** ដើម្បីគណនាលីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$ គេត្រូវ បំបែកភាគយក និង ភាគបែង ជាផលគុណកត្តា ហើយសម្រួលកត្តារួមចោល រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ ដែល $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{\cos^2 x}$

គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$ ?

គេមាន $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{\cos^2 x}$

$$=\frac{(2\sin^2 x-2\sin x)-(\sin x-1)}{1-\sin^2 x}$$

$$=\frac{(\sin x-1)(2\sin x-1)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{1-2\sin x}{1+\sin x}$$

គេបាន $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-2\sin x}{1+\sin x}=\dfrac{1-2}{1+1}=-\dfrac{1}{2}$ ។

## ខ/លីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$

វិធាន ៖ ដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំនត់ $\frac{\infty}{\infty}$ គេត្រូវដាក់តួដែលមាន

ដឺក្រេធំជាងគេនៅភាគយក និង ភាគបែងជាកត្តារួមសិន ហើសម្រួល

កត្តារួមចោល រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

ឧទាហរណ៍ គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+1}+7x+2}{3x+1}$$ គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}+7x+2}{3x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x^2})}+x(7+\frac{2}{x})}{x(3+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+7+\frac{2}{x})}{x(3+\frac{1}{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+7+\frac{2}{x}}{3+\frac{1}{x}}=\frac{2+7}{3}=3$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ ។

## គ/លីមីតដែលមានរាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$

**វិធាន** ៖ ដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំនត់ $+\infty-\infty$ គេត្រូវដាក់តួដែលមានដឺក្រេធំជាងគេ ជាកត្តារួមសិន ហើសម្រួលកត្តារួមចោល រួចគណនាលីមីតនៃកន្សោមថ្មី ។

ឧទាហរណ៍ គេមាន $\mathbf{f(x)=\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-3x+1}}$

គណនាលីមីត $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}$ ។

មាន $\mathbf{f(x)=\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-3x+1}}$

$$\mathbf{=\frac{\sqrt{(x^2+5x)^2}-\sqrt{(x^2-3x+1)^2}}{\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2-3x+1}}}$$

$$\mathbf{=\frac{x^2+5x-x^2+3x-1}{\sqrt{x^2(1+\frac{5}{x})}+\sqrt{x^2(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}}}$$

$$\mathbf{=\frac{x(8-\frac{1}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{5}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}})}=\frac{8-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}}$$

ដូចនេះ $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{8}{1+1}=4}$ ។

# លំហាត់អនុវត្តន៍ ៖

១-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim_{x\to\infty}\frac{4x+1}{2x+3}$ ខ/ $\lim_{x\to\infty}\frac{8x+7}{12x-5}$

គ/ $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+2x-1}{2e^x+1}$ ឃ/ $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+4x-1}{e^x+2x+3}$

ង/ $\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{(2x+1)^2}{2x^2+3x}$ ច/ $\lim_{x\to+\infty}\frac{(4e^x+1)^2}{(2e^x+1)(e^x+x)}$

២-រកតម្លៃ **a** និង **b** ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax}-bx-1)=3$

ខ/ $\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-1)x^2+2bx+3}{ax+b}=4$

គ/ $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+ax^2}-\sqrt[3]{bx^3-5x^2+1})=2$

៣-គេឲ្យពហុធា $P(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a,b,c\in IR$

កំណត់លេខមេគុណ $a,b,c$ ដោយដឹងថា ៖

$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{x^2+1}=2$ (i) និង $\lim_{x\to1}\frac{P(x)}{x^2-1}=2$ (ii)

# ៨-លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

ទ្រឹស្តីបទ ៖ បើ $x$ ជារង្វាស់មុំ ឬ ធ្នូគិតជារ៉ាដ្យង់នោះគេបាន ៖

1/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

2/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$

3/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

*សម្រាយបញ្ជាក់* ៖

តាង $\varphi$ ជាមុំគិតជារ៉ាដ្យង់ ដែល $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$

តាង $S_{OAT}$ , $S_{\overset{\frown}{OAP}}$ និង $S_{OAP}$

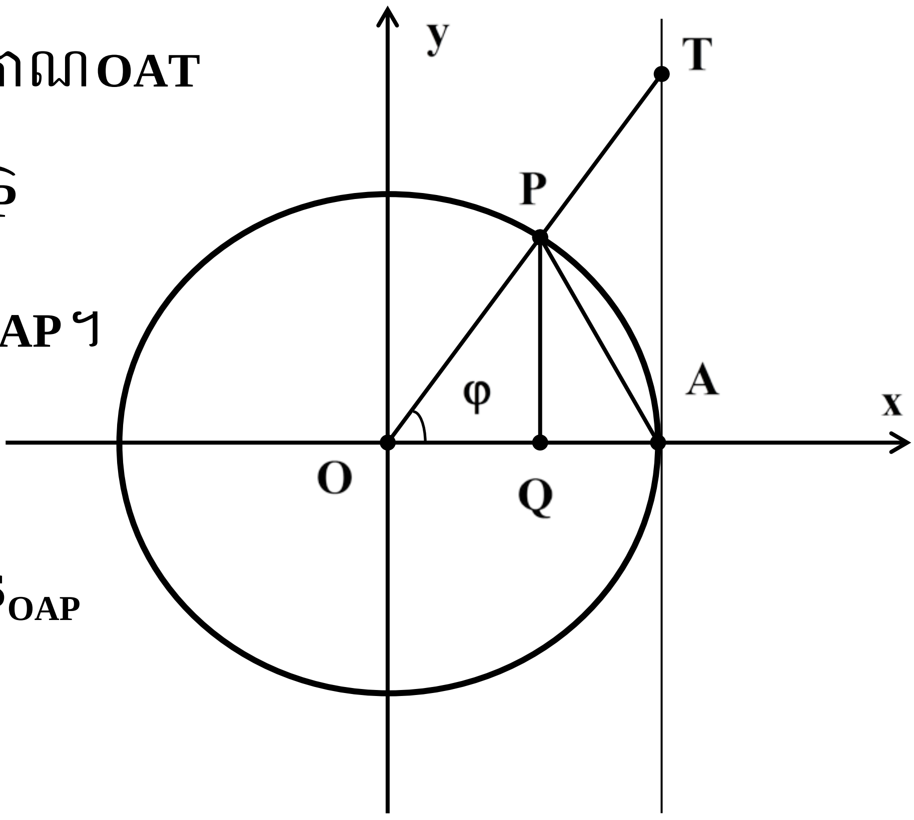
រៀងគ្នាជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ**OAT**

ផ្ទៃក្រឡាចំរៀកថាស $O\overset{\frown}{AP}$

និង ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ **OAP**។

តាមរូបខាងលើ

គេមាន $S_{OAT}\ge S_{O\overset{\frown}{AP}}\ge S_{OAP}$



ដោយ $S_{OAT}=\frac{1}{2}\times 1\times\tan\varphi$ , $S_{O\overset{\frown}{AP}}=\frac{1}{2}\times 1^2\times\varphi$

និង $S_{OAP}=\frac{1}{2}\sin\theta$ នោះគេបាន $\frac{1}{2}\tan\varphi\ge\frac{1}{2}\varphi\ge\frac{1}{2}\sin\varphi$

ឬ $\tan\varphi\ge\varphi\ge\sin\varphi$ ដោយ $\tan\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ នោះ $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\ge\varphi\ge\sin\varphi$

គេទាញ $\cos\varphi\le\frac{\sin\varphi}{\varphi}\le 1$ ។

បើ $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$ នោះ $0<-\varphi<\frac{\pi}{2}$ នោះវិសមភាពខាងលើទៅជា

$\cos(-\varphi)\le\frac{\sin(-\varphi)}{-\varphi}\le 1$ ឬ $\cos\varphi\le\frac{\sin\varphi}{\varphi}\le 1$

ហេតុនេះគេបាន $\cos\varphi\le\frac{\sin\varphi}{\varphi}\le 1$ ចំពោះគ្រប់ $\varphi\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$

ដោយ $\lim\limits_{\varphi\to 0}\cos\varphi=1$ នោះ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\varphi}{\varphi}=1$ ។

ដោយជំនួស $\varphi$ ជា $x$ នោះគេបាន $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ពិត ។

ម្យ៉ាងទៀត $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\frac{\sin x}{1+\cos x}=1\times 0=0$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$ ពិត ។

តាមរូបមន្ត $\tan x=\frac{\sin x}{x}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\cos x}=1\times 1=1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ ។

*សម្គាល់* ៖

1/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$

2/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$

ឧទាហរណ៍ ៖ គណនាលីមីត

1/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0+1=1$

2/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\times 1^2=\frac{1}{2}$

3/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\tan x}{x+\tan 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\frac{\tan x}{x}}{1+\frac{\tan 3x}{3x}.3}=\frac{1+1}{1+3}=\frac{1}{2}$ ។

# លំហាត់អនុវត្តន៍ ៖

១-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1/ $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x\sin 3x}{x^2}$

2/ $\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\sin 2x}{x}$

3/ $\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{\sin 6x}$

4/ $\lim_{x\to0}\frac{3x+\sin x}{x+\sin x}$

5/ $\lim_{x\to0}\frac{\sin x\sin 3x}{\sin^2 2x}$

6/ $\lim_{x\to0}\frac{2x-\tan x}{x+\tan x}$

7/ $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{\sin x\sin 6x}$

8/ $\lim_{x\to0}\frac{x+3\sin x}{\sin 2x}$

9/ $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x+\sin 2x}$

10/ $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

11/ $\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2-x\sin x}$

12/ $\lim_{x\to0}\frac{x}{x+\tan x}$

13/ $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$

14/ $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{x^2}$

15/ $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cos 3x}{x^2}$

16/ $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{1-\sqrt{\cos 2x}}$

17/ $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2}$

18/ $\lim_{x\to0}\frac{x^2+\sin^2 x}{1-\cos 2x}$

២-កំណត់តម្លៃ **a** ដើម្បីបំពេញលក្ខខណ្ឌលីមីតខាងក្រោម ៖

1/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=8$ 2/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=5$

3/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax+\sin(a+1)x}{x}=3$ 4/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-2\cos ax}{x^2}=4$

5/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+1)x+\sin(a-1)x}{x}=6$

៣-កំណត់តម្លៃ **a** និង **b** ដើម្បីឲ្យ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a+b\cos x}{x^2}=1$ ។

៤-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1/ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{x^2-1}$ 2/ $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\tan\frac{\pi x}{2}$

3/ $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{1-\cos 2x}{(\pi-x)^2}$ 4/ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}$

5/ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\cos 2\pi x}{(1-x)^2}$ 6/ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1-\sin\frac{\pi x}{4}}{(2-x)^2}$

៥-កំណត់ ដើម្បីឲ្យបាន $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+a\cos x+\cos 2x}{x^2}=b$

( **a** និង **b** ជាពីរចំនួនពិត ) ។

## ៩-លីមីតនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

*រូបមន្ត* ៖

1/ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

2/ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

3/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

4/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

5/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

6/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = +\infty$

( ដែល **n** ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ) ។

## ១០-លីមីតនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ

*រូបមន្ត* ៖

1/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

2/ $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$

3/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

4/ $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$

5/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$

6/ $\lim\limits_{x\to0^+} x^n \ln x = 0$

( ដែល **n** ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន )។

## *លំហាត់គំរូ*

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6e^x+x}{2e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x(6+\frac{x}{e^x})}{e^x(2+\frac{1}{e^x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6+\frac{x}{e^x}}{2+\frac{1}{e^x}}=\frac{6}{2}=3$

2/ $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2\ln x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)+\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=0+1=1$

3/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-\ln x}{x+\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(2-\frac{\ln x}{x})}{x(1+\frac{\ln x}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{\ln x}{x}}{1+\frac{\ln x}{x}}=\frac{2}{1}=2$

4/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}+3}{e^x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x}+3)}{\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1)}=\frac{0+3}{0+1}=3$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ ។

5/ $\lim\limits_{x\to+\infty}[2x-\ln(2e^{2x}+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(e^{2x})-\ln(2e^{2x}+1)]$

$$=\lim_{x\to+\infty}[\ln(\frac{e^{2x}}{2e^{2x}+1})]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln(\frac{1}{2+\frac{1}{e^{2x}}})=\ln\frac{1}{2}$$

# លំហាត់អនុវត្តន៍ ៖

១-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e^x+3}{e^x+1}$

2/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4e^x+1}{2e^x-3}$

3/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2e^x-x+1}{e^x+2x+3}$

4/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x+x}{3e^x+2x-1}$

5/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{(2e^x+1)(e^x-3)}$

6/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x+x}$

២-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1/ $\lim\limits_{x\to0^+}(1+2x-x\ln x)$

2/ $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}+\ln x}{\cot x}$

3/ $\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{1}{x}+\ln x)\sin x$

4/ $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^x-1}{x\ln x}$

5/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$

6/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1-\ln x}{4x+1}$

7/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-\ln x}{x+\ln x}$

8/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+xe^x}{1+2xe^x}$

9/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}(2x+\ln x)$

10/ $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln x-\ln(2x+1)]$

# ១១-ការគណនាលីមីតរាងផ្សេងៗទៀតគួយល់ដឹង

## ក-ការគណនាលីមីតដោយប្រើរូបមន្ត ៖

1/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

2/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ ដែល $a>0$ និង $a\neq 1$ ។

**លំហាត់គំរូ** គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\times\dfrac{\sin x}{x}=1\times 1=1$

2/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-(1-2\sin^2 x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$=1+2\times 1^2=3$$

3/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a^x-1)-(b^x-1)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}$$

$$=\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}$$

## ខ-ការគណនាលីមីតដោយប្រើរូបមន្ត ៖

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

**លំហាត់គំរូ** គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan 2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan 2x)}{\tan 2x}.\frac{\tan 2x}{2x}.2=1\times 1\times 2=2$

2/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-2\sin^2 x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2\sin^2 x)}{(-2\sin^2 x)}\times\frac{\sin^2 x}{x^2}\times(-2)=-2$$

3/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x-x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x-x^2)}{4x-x^2}\times\frac{4x-x^2}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x-x^2)}{4x-x^2}.(4-x)=1\times 4=4$$

4/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(3-2e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2(1-e^x)]}{2(1-e^x)}\times\frac{-2(e^x-1)}{x}=-2$

5/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[(1+ax)(1+bx)]}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)+\ln(1+bx)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{ax}.a+\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+bx)}{bx}.b=a+b$$ ។

## គ-ការគណនាលីមីតដោយប្រើរូបមន្ត ៖

1/ $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

2/ $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ ដែល $e=2.71828...$

**លំហាត់គំរូ** គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1/ $$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x/2}}\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

2/ $$\lim_{x\to 0}\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}}\right]^{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

3/ $$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=e^{2}$$

4/ $$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to +\infty}\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right]^{\frac{-2x}{x+1}}=e^{-2}=\frac{1}{e^{2}}$$ ។

# លំហាត់អនុវត្តន៍ ៖

១-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម ៖

1/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{2x}-2}{x}$

2/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{-\sin x}}{x}$

3/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin^2 x}-\cos 4x}{x^2}$

4/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{1-\cos 2x}}{x^2}$

5/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax^2}-e^{bx^2}}{2}$

6/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2-2x}-e^{x^2+2x}}{x}$

7/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}+e^{2x}-2}{x^2}$

8/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan^2 x}-e^{\sin^2 x}}{1+x\sin 2x-\cos 2x}$

9/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+e^{x^2}}}{\sin^2 x}$

10/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{2-e^{x^2}}-1}{x^2}$

២-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2\tan 3x)}{\sin x}$

2/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-e^{\sin^2 x})}{x\tan x}$

3/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)+\ln(\cos 2x)}{x^2}$

4/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^3-3x+3)}{(x-1)^2}$

## ៣-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

1/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+}\right)^{\frac{2}{x}}$

2/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}$

3/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{x}{x-\sin x}}$

4/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x^2+x+3}{x+3}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

5/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}$

6/ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$

7/ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+x+3}{x+4}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

8/ $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{x-2}}$

9/ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(\tan x\right)^{\tan 2x}$

10/ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{(\pi-x)^2}}$

11/ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}\right)^{\frac{x}{(1-x)^2}}$

12/ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$

13/ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-3x+4}\right)^{x}$

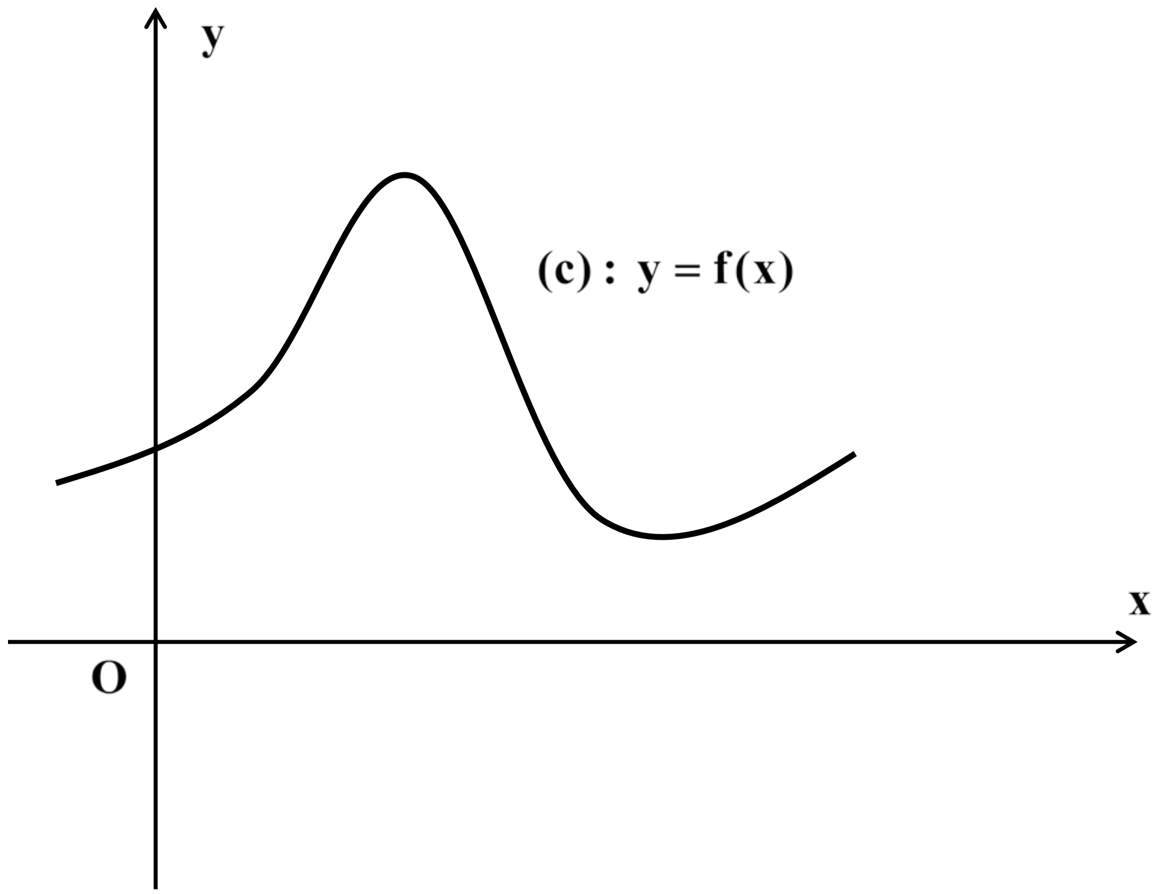
14/ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{e^x+x}{e^x+1}\right)^{e^x}$

ជំពូកទី២

# ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

## ១-សញ្ញាណនៃអនុគមន៍ជាប់

កាលណាគេគូសក្រាបនៃធនុគមន៍ $y = f(x)$ លើចន្លោះ $I$ មួយនៃដែនកំណត់ ដោយមិនលើកខ្មៅដៃ នោះគេបានគំនូស ជាខ្សែកោងជាប់គេថាអនុគមន៍ $f$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់គ្រប់ចំណុចនៃចន្លោះ $I$ ។



## ២-ភាពជាប់ត្រង់មួយចំណុច

**និយមន័យ** អនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = a$ កាលណា $f$ បំពេញលក្ខខណ្ឌទាំងបីខាងក្រោម ៖

1/ $f$ កំណត់ចំពោះ $x = a$

2/ $f$ មានលីមីតកាលណា $x$ ខិតជិត $a$

3/ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ ។

ឧទាហរណ៍១ គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

តើអនុគមន៍ $f$ ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = 2$ ឬទេ ?

ចំពោះ $x = 2$ គេបាន $f(2) = \sqrt{2^3 + 1} = \sqrt{9} = 3$ កំណត់

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x^3 + 1} = \sqrt{2^3 + 1} = 3$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 3$ ។

ដូចនេះ $f$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = 2$ ។

## ឧទាហរណ៍២

គេឲ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ កំណត់ដោយ ៖

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+2x+6} & \text{បើ} \quad x \geq 1 \\ \dfrac{2x-11}{x-2} & \text{បើ} \quad x < 1 \end{cases}$$

តើ $\mathbf{f}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=1$ ឬទេ ?

ចំពោះ $x=1$ គេបាន $f(2)=\sqrt{1^2+2+6}=\sqrt{9}=3$ កំណត់

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x^2+2x+6} = \sqrt{1+2+6} = 3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x-5}{x-2} = \frac{2-5}{1-2} = 3$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3$

នោះ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 3$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{f}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=2$ ។

ឧទាហរណ៍៣

គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ ៖

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{1+x} & \text{បើ } x \geq 0 \\ \dfrac{2\sqrt{x^2} - \sin x}{x} & \text{បើ } x < 0 \end{cases}$$

តើ $f$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 0$ ឬទេ ?

ចំពោះ $x = 0$ គេបាន $f(0) = \dfrac{1-0}{1+0} = 1$ កំណត់

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1-x}{1+x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2\sqrt{x^2} - \sin x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2|x| - \sin x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{-2x - \sin x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-2 - \frac{\sin x}{x}) = -3$$

ដោយ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ នោះ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ គ្មានលីមីត ។

ដូចនេះ $f$ ជាអនុគមន៍ដាច់ត្រង់ចំណុច $x = 0$ ។

ឧទាហរណ៍៤

គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-2\cos 2ax}{x^2} & \text{បើ } x\neq 0\\ 9 & \text{បើ } x=0\end{cases}$$

កំណត់ចំនួនពិត $a$ ដើម្បីឲ្យ $f$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

ចំពោះ $x=0$ គេបាន $f(0)=9$ កំណត់

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2ax}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2 ax}{x^2}=4a^2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2=4a^2$$

ដើម្បីឲ្យ $f$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=0$ គេគ្រាន់តែឲ្យ

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ ឬ $4a^2=9$ នោះ $a=\pm\dfrac{3}{2}$ ។

ដូចនេះ $a=\pm\dfrac{3}{2}$ ។

## ៣-លក្ខណៈភាពជាប់នៃអនុគមន៍

បើ $f$ និង $g$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=a$ នោះគេបាន ៖

1/ $f(x)+g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ ចំណុច $x=a$ ។

2/ $f(x)-g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ ចំណុច $x=a$ ។

3/ $f(x).g(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ ចំណុច $x=a$ ។

4/ $\lambda f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ ចំណុច $x=a$ ។ ($\lambda$ ជាចំនួនពិត)

5/ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ ចំណុច $x=a$ ដែល $g(a)\neq 0$ ។

## ៤-ភាពជាប់លើចន្លោះ

**និយមន័យ ៖**

1/អនុគមន៍ $f$ ជាប់លើចន្លោះបើក $(a,b)$ លុះត្រាតែ $f$ ជាប់ចំពោះ

គ្រប់តម្លៃ $x$ នៃចន្លោះបើកនោះ ។

2/អនុគមន៍ $f$ ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ លុះត្រាតែ $f$ ជាប់លើ $(a,b)$

និងមានលីមីត $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ និង $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$ ។

**ឧទាហរណ៍** គេមានអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=\begin{cases} 1+x\ln x & \text{បើ } x>0 \\ 1 & \text{បើ } x=0 \\ \dfrac{\sin\pi}{1-x} & \text{បើ } x<1 \\ \pi & \text{បើ } x=1 \end{cases}$$

ចូរសិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f$ លើចន្លោះ $[0,1]$ ។

យើងពិនិត្យឃើញថា $f$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $(0,1)$ ។

គេមាន $f(0)=1$ និង $f(1)=\pi$

ហើយ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(1+x\ln x)=1=f(0)$

និង $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sin\pi x}{1-x}$

តាង $1-x=t$ នោះ $x=1-t$

ហើយកាលណា $x\to1^-$ នោះ $t\to0^+$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin(\pi-\pi t)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin(\pi t)}{(\pi t)}.\pi=\pi=f(1)$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ $f$ ជាប់លើចន្លោះ $[0,1]$ ។

## ៥-ភាពជាប់នៃអនុគមន៍បណ្ដាក់

អនុគមន៍ $g$ ជាប់ត្រង់ $x = a$ និងអនុគមន៍ $f$ ជាប់ត្រង់ $x = g(a)$

នោះអនុគមន៍បណ្ដាក់ $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ ជាប់ត្រង់ $x = a$ ។

**ឧទាហរណ៍** គេឲ្យអនុគមន៍ $g$ កំណត់ដោយ $g(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$

និង $f(x) = \ln x$ ។

តើអនុគមន៍ $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ ជាប់ត្រង់ $x = 1$ ដែរឬទេ ?

គេមាន $g(1) = \dfrac{4}{1^2+1} = 2$

ហើយ $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x}{x^2+1} = \dfrac{4}{1+1} = 2 = g(1)$ នោះ $g$ ជាអនុគមន៍

ជាប់ត្រង់ $x = 1$ ។

ហើយបើ $x = g(1) = 2$ នោះ $f(2) = \ln 2$

និង $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \ln x = \ln = f(2)$ នោះ$f$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = 2$

សម្រាយខាងលើបញ្ជាក់ថា $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ ជាប់ត្រង់ $x = 1$ ។

# ៦-អនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់

បើ $f$ ជាអនុគមន៍មិនកំណត់ត្រង់ $x=a$ និងមានលីមីត $\lim_{x\to a} f(x)=\lambda$

នោះអនុគមន៍បន្លាយនៃ $f$ តាមភាពជាប់ត្រង់ $x=a$ កំណត់ដោយ ៖

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{បើ } x\neq a \\ \lambda & \text{បើ } x=a \end{cases}$$

ឧទាហរណ៍១ គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

រកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃ $f$ ត្រង់ $x=0$ ។

គេមាន $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$ ដោយ $\sin x=\tan x.\cos x$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x.\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}.\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\quad g(x)=\begin{cases} \dfrac{\tan x-\sin x}{x^3} & \text{បើ } x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{បើ } x=0 \end{cases}$

ឧទាហរណ៍២

គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{\sin x+x^2\ln|x|}{x}$ ដែល $x\neq 0$ ។

តើ $f$ អាចមានអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់ ត្រង់ $x=0$ ឬទេ ?

បើមានចូរកំណត់រកអនុគមន៍នោះ ។

គេមាន $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+x^2\ln|x|}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+x\ln|x|\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+\lim_{x\to 0}(x\ln|x|)=1+0=1$$

ដូចនេះ $f$ អាចមានអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប ត្រង់ $x=0$ ហើយបើ

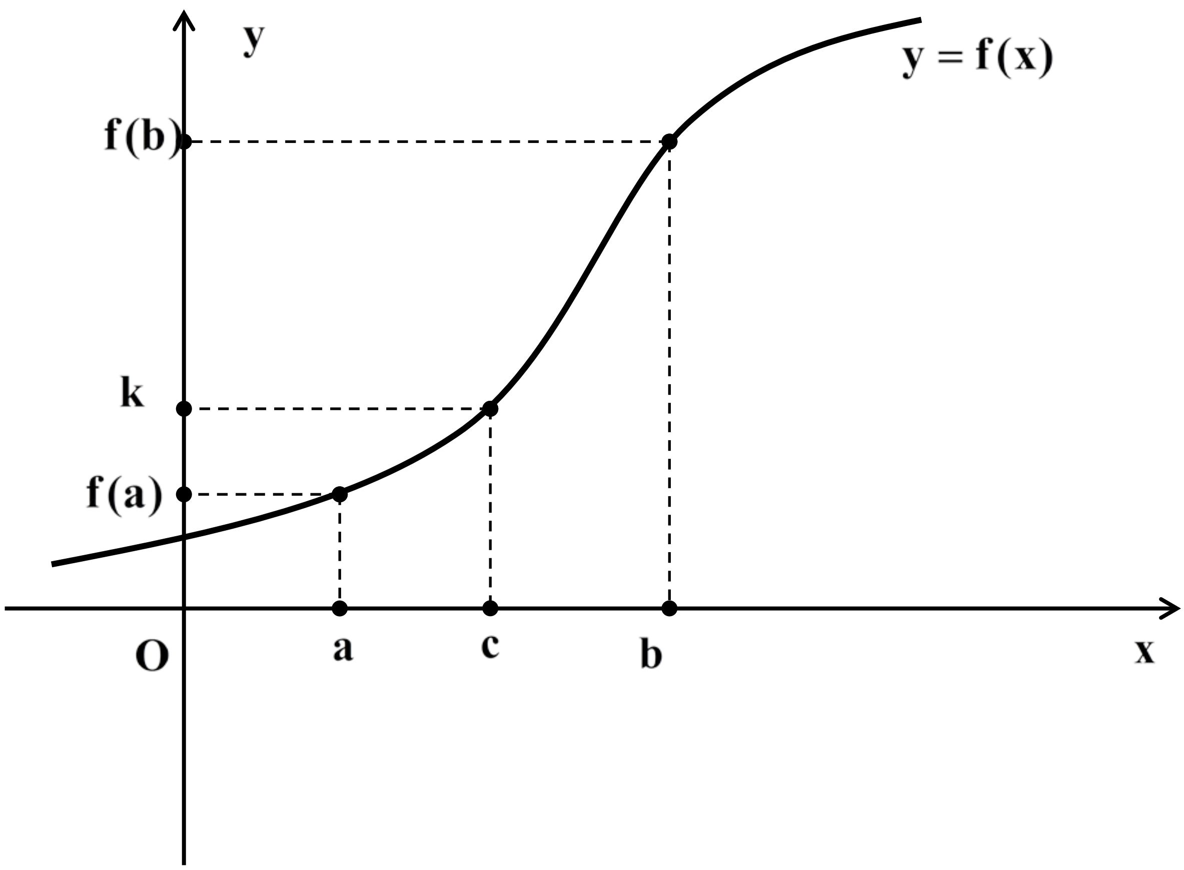
$g$ ជាបន្លាយនៃអនុគមន៍ $f$ តាមភាពជាប់ត្រង់ $x=0$ នោះគេបាន ៖

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x+x^2\ln|x|}{x} & \text{បើ } x\neq 0\\ 1 & \text{បើ } x=0\end{cases}$$

## ៧-ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល

*ទ្រឹស្តីបទ* ៖ បើអនុគមន៍ **f** ជាប់លើចន្លោះបិទ **[a,b]** និង **k** ជាចំនួនមួយនៅចន្លោះ **f(a)** និង **f(b)** នោះមានចំនួនពិត **c** មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះបិទ **[a,b]** ដែល $f(c)=k$ ។

*សម្រាយបញ្ជាក់* ៖




អនុគមន៍ **f** ជាប់ និង កើនដាច់ខាត លើចន្លោះបិទ**[a,b]** ។

**f** ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត មានន័យថាមានពីរចំនួន $\alpha$ , $\beta$ នៃ$[a,b]$

ដែល $\alpha < \beta$ នាំឲ្យ $f(\alpha) < f(\beta)$ ។ ឲ្យចំនួន $k$ នៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$

( $f(a) < k < f(b)$ ) និង $f$ ជាអនុគមន៍ជាប់ តាមទ្រឹស្តីបទបញ្ជាក់ថាមាន

ចំនួន $c$ នៅចន្លោះ $a$ និង $b$ ដែល $f(c) = k$ ។

ឧបមាថាមានចំនួន $c'$ មួយទៀតផ្សេងពី $c$ ដែល $f(c') = k$ នោះគេបាន

$f(c) = f(c')$ ដែលផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែលថា $f$ ជាងនុគមន៍កើនដាច់ខាត

ដូចនេះមានចំនួន $c$ តែមួយគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(c) = k$ មានន័យថា

សមីការ $f(x) = k$ មានចម្លើយតែមួយគត់ ។

***វិបាក*** ៖ បើអនុគមន៍ $f$ ជាប់ហើយកើនដាច់ខាត ឬ ចុះដាច់ខាតលើ

ចន្លោះបិទ $[a,b]$ នោះចំពោះគ្រប់ចំនួន $k$ នៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$

សមីការ $f(x) = k$ មានចម្លើយតែមួយគត់នៅចន្លោះ $[a,b]$ ។

***សម្គាល់*** ៖ ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលអាចប្រើបានចំពោះ $k = 0$ ជាពិសេស

បើ $f$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ និង $f(a).f(b) < 0$ នោះ

មានចំនួន $c$ មួយយ៉ាងតិចនៃ $[a,b]$ ដែល $f(c) = 0$ ។

*ឧទាហរណ៍*

ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $x\tan x = \cos x$ យ៉ាងហោច

ណាស់មានឫសជាចំនួនពិតមួយនៅចន្លោះ $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ ។

តាង $f(x) = x\tan x - \cos x$

គេមាន $f(0) = 0 - 1 = -1 < 0$

និង $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4} = \frac{3.14 - 2\times 1.41}{4} = \frac{0.32}{4} = 0.80 > 0$

គេបាន $f(0).f(\frac{\pi}{4}) < 0$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាលយ៉ាងហោច

ណាស់មានចំនួនពិត $c$ មួយនៃចន្លោះ $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ ដែល $f(c) = 0$ ។

ដូចនេះថាសមីការ $x\tan x = \cos x$ យ៉ាងហោចណាស់មានឫសជា

ចំនួនពិតមួយនៅចន្លោះ $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ ។

## លំហាត់អនុវត្តន៍

1/គេមានអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x^3} & \text{បើ } x\neq 0\\ -1 & \text{បើ } x=0\end{cases}$$

ចូរសិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ ត្រង់ចំណុច $x=0$ ។

2/គេមានអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2} & \text{បើ } x\neq 0\\ 1 & \text{បើ } x=0\end{cases}$$

តើអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=0$ ដែរឬទេ ?

3/គេមានអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+2\sin^2 x)}{x^2} & \text{បើ } x\neq 0\\ 2 & \text{បើ } x=0\end{cases}$$

ចូរស្រាយថាអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=0$ ។

4/គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos ax}{x^2} & \text{បើ } x \neq 0 \\ 8 & \text{បើ } x = 0 \end{cases}$$

ចូរកំណត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = 0$ ។

5/គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 2 & \text{បើ } x \leq 1 \\ (x+a)^2 & \text{បើ } x > 1 \end{cases}$$

ចូរកំណត់ចំនួនពិត a ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ចំណុច $x = 1$ ។

6/រកតម្លៃ A ដែលនាំឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងករណីនីមួយៗ

ក/ $f(x) = \begin{cases} Ax - 3 & \text{បើ } x < 2 \\ 3 - x + 2x^2 & \text{បើ } x \geq 2 \end{cases}$

ខ/ $f(x) = \begin{cases} 1 - 3x & \text{បើ } x < 4 \\ Ax^2 + 2x - 3 & \text{បើ } x \geq 4 \end{cases}$

គ/ $f(x) = \begin{cases} x^2 + Ax + 2 & \text{បើ } x \leq 1 \\ \dfrac{\sin \pi x}{\pi - \pi x} & \text{បើ } x > 1 \end{cases}$

7/ចូររកអនុគមន៍បន្លាយនៃ $f$ តាមភាពជាប់ត្រង់ចំណុច $x=a$ ក្នុងករណីនីមួយៗដូចខាងក្រោម ៖

ក/ $f(x)=\dfrac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}$ ត្រង់ចំណុច $x=0$ ។

ខ/ $f(x)=\dfrac{e^{x^2-3x+2}-1}{x-2}$ ត្រង់ចំណុច $x=2$ ។

គ/ $f(x)=\dfrac{\ln(x^2-6x+10)}{(x-3)^2}$ ត្រង់ចំណុច $x=3$ ។

ឃ/ $f(x)=\dfrac{\sin \pi x}{1-x^3}$ ត្រង់ចំណុច $x=1$ ។

ង/ $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{(\pi-x)^2}$ ត្រង់ចំណុច $x=\pi$ ។

8/គេមានអនុគមន៍ $y=f(x)$ កំណត់លើចន្លោះ $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ ដោយដឹងថា ៖

$$f(x)=\begin{cases} \sin x+\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} & \text{បើ} \quad x\neq 0 \\ \sqrt{2} & \text{បើ} \quad x=0 \end{cases}$$

តើអនុគមន៍ $f$ ជាប់ត្រង់ចំណុច $x=0$ ឬទេ ?

9/ គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីពីរ $ax^2+bx+c=0$ ដែល $a\neq 0$ ។

គេដឹងថាលេខមេគុណ $a,b,c$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $2a+3b+6c=0$ ។

ចូរបង្ហាញថាសមីការនេះមានឫសយ៉ាងតិចមួយនៅក្នុង $\left[0,\frac{2}{3}\right]$ ។

10/ ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $(x^n-1)\cos x+\sqrt{2}\sin x-1=0$

យ៉ាងហោចណាស់មានឫសពិតមួយនៅចន្លោះ $[0,1]$ ។

11/ រកតម្លៃ $A$ និង $B$ ដែលធ្វើឲ្យអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=\begin{cases} Ax^2+5x-9 & \text{បើ} \quad x<1 \\ B & \text{បើ} \quad x=1 \\ (3-x)(A-2x) & \text{បើ} \quad x>1 \end{cases}$$

ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $IR$ ។

12/ គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\cos \pi x}{1-2x}$ ដែល $x\neq \dfrac{1}{2}$

ក-ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ ។

ខ-តើ $f$ អាចមានអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប ត្រង់ $x=\dfrac{1}{2}$ ឬទេ ?

ជំពូកទី៣

# លំហាត់មានដំណោះស្រាយ

## លំហាត់ទី១

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{a+b\cos x}{x^2}$ ដែល $x\neq 0$

ចូរកំណត់ a និង b ដើម្បីឲ្យ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=4$ ។

## ដំណោះស្រាយ

កំណត់ a និង b ៖

គេមាន $f(x)=\dfrac{a+b\cos x}{x^2}$ ដោយ $\cos x=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$

នោះ $$f(x)=\frac{a+b(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2}=\frac{(a+b)-2b\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

គេបាន $$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(a+b)-2b\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

ដើម្បីឲ្យបាន $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 4$ គេគ្រាន់តែឲ្យ $a + b = 0$

និង $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2b\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 4$ ឬ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2} \times (-\dfrac{b}{2}) = 8$

នាំឲ្យ $-\dfrac{b}{2} = 4$ ឬ $b = -8$ ហើយ $a + b = 0$ នោះ $a = 8$ ។

ដូចនេះ $a = 8$ , $b = -8$ ។

## លំហាត់ទី២

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$ ខ. $\lim\limits_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{n}{1-x^n})$

គ. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$ ដែល $m$ និង $n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

## ដំណោះស្រាយ

ក. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$

$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right]=\lim_{x\to1}\left[\frac{(1+x+x^2)-3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right]$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)+(x^2-1)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)+(x-1)(x+1)}{-(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1+(x+1)}{-(x^2+x+1)}=\frac{1+2}{-3}=-1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=-1}$ ។

ខ. $\lim_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{n}{1-x^n})$

$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{n}{(1-x)(1+x+...+x^{n-1})}\right]$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(1+x+...+x^{n-1})-n}{(1-x)(1+x+....+x^{n-1})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)+....+(x^{n-1}-1)}{-(x-1)(1+x+...+x^{n-1})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)+......+(x-1)(x^{n-2}+....+x+1)}{-(x-1)(1+x+.....+x^{n-1})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1+.....+(x^{n-2}+....+x+1)}{-(1+x+.....+x^{n-1})}$$

$$=\frac{1+2+.....+(n-1)}{-n}=-\frac{n-1}{2}$$

គ. $\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{n}{1-x^n}\right)-\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{m}{1-x^m}\right)$$

$$=\left(-\frac{n-1}{2}\right)-\left(-\frac{m-1}{2}\right)=\frac{-n+1+m-1}{2}=\frac{m-n}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=\frac{m-n}{2}}$ ។

# លំហាត់ទី៣

គណនាលីមីត ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(3x+1)}{x^2}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-(nx+1)}{x^2}$ , $n\in IN$

# ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(3x+1)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+3x+3x^2+x^3-3x-1}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+x^3}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(3+x\right)=3$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(3x+1)}{x^2}=3}$ ។

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-(nx+1)}{x^2}$ , $n\in IN$

តាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុន ៖

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + ... + C_n^n x^n$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+C_n^3x^3+....+C_n^nx^n-nx-1}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{n(n-1)}{2}x^2+C_n^3x^3+....+C_n^nx^n}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{n(n-1)}{2}+C_n^3x+....+C_n^nx^{n-2}\right]=\frac{n(n-1)}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-(nx+1)}{x^2}=\frac{n(n-1)}{2}}$ ។

# លំហាត់ទី៤

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$ , $n\in IN$

# ដំណោះស្រាយ

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(3x^4-3x^3)-(x^3-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3x^3(x-1)-(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3x^3-x^2-x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-x^2)+(x^3-x)+(x^3-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)+x(x-1)(x+1)+(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[x^2+x(x+1)+(x^2+x+1)\right]=1+2+3=6$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}=6}$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$ , $n\in IN$

$$=\lim_{x\to1}\frac{nx^n(x-1)-(x-1)(x^{n-1}+....+x^2+x+1)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^n-x^{n-1})+....+(x^n-x)+(x^n-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^{n-1}(x-1)+...+x(x-1)(x^{n-2}+...+x+1)+(x-1)(x^{n-1}+...+x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left[x^{n-1}+....+x(x^{n-2}+...+x+1)+...(x^{n-1}+...+x+1)\right]$$

$$=1+2+....+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ។

## លំហាត់ទី៥

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$A=\lim_{x\to 2}\left(\sqrt[6]{\frac{6x^4-12x^3-x+2}{x+2}}\times\frac{\sqrt[3]{x^3-\sqrt{x^2+60}}}{\sqrt{x^2-\sqrt[3]{x^2+60}}}\right)$$

## ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$A=\lim_{x\to 2}\left(\sqrt[6]{\frac{6x^4-12x^3-x+2}{x+2}}\times\frac{\sqrt[3]{x^3-\sqrt{x^2+60}}}{\sqrt{x^2-\sqrt[3]{x^2+60}}}\right)$$

$$U=6x^4-12x^3-x+2$$

$$=6x^3(x-2)-(x-2)=(x-2)(6x^3-1)$$

$$V=x^3-\sqrt{x^2+60}=\frac{x^6-x^2-60}{x^3+\sqrt{x^2+60}}$$

$$=\frac{W}{x^3+\sqrt{x^2+60}}$$

ដែល $W=x^6-x^2-60=(x^6-64)-(x^2-4)$

$$= (x^2-4)(x^4+4x^2+16)-(x^2-4)$$
$$= (x-2)(x+2)(x^4+4x^2+15)$$

$$T = x^2-\sqrt[3]{x^2+60} = \frac{x^6-x^2-60}{x^4+x^2\sqrt[3]{x^2+60}+\sqrt[3]{(x^2+60)^2}}$$

$$= \frac{W}{x^4+x^2\sqrt[3]{x^2+60}+\sqrt[3]{(x^2+60)^2}}$$ ។

$$A = \lim_{x\to 2}\left(\sqrt[6]{\frac{U}{x+2}}\times\frac{\sqrt[3]{V}}{\sqrt{T}}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\sqrt[6]{\frac{U}{x+2}\cdot\frac{V^2}{T^3}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\sqrt[6]{\frac{(x-2)(6x^3-1)}{x+2}\cdot\frac{W^2}{(x^3+\sqrt{x^2+60})^2}\,\frac{(x^4+x^2\sqrt[3]{x^2+60}+\sqrt[3]{(x^2+60)^2})^3}{W^3}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\sqrt[6]{\frac{(x-2)(6x^3-1)(x^4+x^2\sqrt[3]{x^2+60}+\sqrt[3]{(x^2+60)^2})^3}{(x+2)(x^3+\sqrt{x^2+60})^2(x-2)(x+2)(x^4+4x^2+15)}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\sqrt[6]{\frac{(6x^3-1)(x^4+x^2\sqrt[3]{x^2+60}+\sqrt[3]{(x^2+60)^2})^3}{(x+2)^2(x^3+\sqrt{x^2+60})^2(x^4+4x^2+15)}}\right) = \sqrt[6]{\frac{47.48^3}{16.16^2.47}} = \sqrt{3}$$

ដូចនេះ $A=\sqrt{3}$ ។

# លំហាត់ទី៦

គណនាលីមីត $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^4+1}}{x-1+\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}$

# ដំណោះស្រាយ

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^4+1}}{x-1+\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)+\dfrac{x^3+1-x^4-1}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^4+1}}}{(x-1)+\dfrac{x+1-x^2-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1}}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)-\dfrac{x^3(x-1)}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^4+1}}}{(x-1)-\dfrac{x(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1}}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)[x+1-\dfrac{x^3}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^4+1}}]}{(x-1)(1-\dfrac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1}})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1-\dfrac{x^3}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^4+1}}}{1-\dfrac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1}}}=\frac{2-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{7+3\sqrt{2}}{2}$$

# លំហាត់ទី៧

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោមនេះ

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 2x}{x\sin x}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{3\sin x-\sin 3x}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{1-\cos 2x\cos 4x}$

ង. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

ច. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

ឆ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\sqrt{\cos 2x}}$

ជ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{x.\tan x}$

ឈ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin^2}-\cos x}{\sqrt{\cos x-\sqrt{\cos 3x}}}$

ញ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos 3x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$

# ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 2x}{x\sin x}$

តាមរូបមន្ត $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x+\cos^2 2x)}{x\sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 x(1+\cos 2x+\cos^2 2x)}{x\sin x}$$

$$= 2\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} . \lim_{x \to 0}(1+\cos 2x+\cos^2 2x) = 2.1.3 = 6$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^3 2x}{x\sin x} = 6}$ ។

ខ. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

ដោយ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x = \cos x . \tan x$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \cos x . \tan x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\tan x \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3}$$

$$= 2\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} . \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2.1.\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}}$ ។

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{3\sin x-\sin 3x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-2\sin x\cos x}{3\sin x-(3\sin x-4\sin^3 x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x(1-\cos x)}{4\sin^3 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin x\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2.\frac{1}{4}.\frac{x^2}{\sin^2 x}\right]=1^2.\frac{1}{4}.1^2=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{3\sin x-\sin 3x}=\dfrac{1}{4}}$ ។

ឃ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{1-\cos 2x\cos 4x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 4x)-(1-\cos 2x)}{(1-\cos 2x)+\cos 2x(1-\cos 4x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x-2\sin^2 x}{2\sin^2 x+2\cos 2x\sin^2 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x-\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos 2x\sin^2 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 2x}{x^2}-\frac{\sin^2 x}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}+\cos 2x.\frac{\sin^2 2x}{x^2}}=\frac{4-1}{1+4}=\frac{3}{5}$$

ង. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2\sin^2\frac{x}{2})}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(\sin^2\frac{x}{2})}{x^4}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(\sin^2\frac{x}{2})}{(\sin^2\frac{x}{2})^2}.\frac{\sin^4\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^4}.\frac{1}{16}=2.\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}=\dfrac{1}{8}}$ ។

ច. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\sin^2 x}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}.\frac{1}{4}+2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}.\frac{\cos x}{1+\sqrt{\cos 2x}}=2$$

ឆ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\sqrt{\cos 2x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos 2x}.\frac{1+\sqrt{\cos 2x}}{1+\sqrt{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin^2 x}.\frac{1+\sqrt{\cos 2x}}{1+\sqrt{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}.\frac{x^2}{\sin^2 x}.\frac{1}{4}.\frac{1+\sqrt{\cos 2x}}{1+\sqrt{\cos x}}=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\sqrt{\cos 2x}}=\dfrac{1}{4}}$ ។

ជ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{x.\tan x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-1-\cos x}{x\tan x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\tan x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x\tan x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}.\frac{x}{\tan x}.\frac{1}{4}.\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

ឈ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2}-\cos x}{\sqrt{\cos x-\sqrt{\cos 3x}}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos x-\cos 3x}\cdot\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 3x}}{\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+(1-\cos^2 x)}{2\sin\frac{x+3x}{2}\sin\frac{x-3x}{2}}\cdot\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 3x}}{\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{2\sin 2x.\sin(-x)}\cdot\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 3x}}{\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 3x}}{\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x}=-\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2}-\cos x}{\sqrt{\cos x-\sqrt{\cos 3x}}}=-\frac{1}{2}$ ។

# លំហាត់ទី៨

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}$

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi^2-4x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$

4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin x}}{\cos^2 x}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1+\tan \pi x}{1-x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}(4-x^2)\tan\dfrac{\pi x}{4}$

7. $\lim\limits_{x\to \pi}(\pi-x)\tan\dfrac{x}{2}$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{x}}{1-x^2}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sin\dfrac{2\pi}{x+3}}{(1-x)^2}$

10. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{1-\sqrt{2}\sin x}$

11. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\pi-3x}{\sqrt{3}-2\sin x}$

12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\cos\dfrac{\pi}{x}}$

13. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x-2)\tan\dfrac{\pi}{x}$

14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^3}{\cos\dfrac{\pi}{x+1}}$

15. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2-x)^2}{1-\sin\dfrac{\pi}{x}}$

18. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{\sin\dfrac{2\pi}{x}}$

16. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{x+\pi}}{\pi-x}$

19. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\tan\dfrac{\pi x}{x+1}$

17. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\cos\dfrac{\pi x}{x+3}}$

20. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-x^2)\cot\dfrac{2\pi}{x}$

# ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}$

តាង $x=1-z$ កាលណា $x\to 1$ នោះ $z\to 0$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi z}{2})}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos\frac{\pi z}{2}}{z^2}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\pi z}{4}}{z^2}=2\lim_{z\to 0}\frac{\sin^2\frac{\pi z}{4}}{(\frac{\pi z}{4})^2}\cdot\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2}{8}$$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\pi^2 - 4x^2}$

តាង $z = \dfrac{\pi}{2} - x$ នាំឱ្យ $x = \dfrac{\pi}{2} - z$ កាលណា $x \to \dfrac{\pi}{2}$ នោះ $z \to 0$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - z)}{\pi^2 - 4(\frac{\pi}{2} - z)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{\pi^2 - \pi^2 + 4\pi z - 4z^2}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{4\pi z - 4z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{1}{4\pi - 4z} = \frac{1}{4\pi}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\pi^2 - 4x^2} = \dfrac{1}{4\pi}}$ ។

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x}$ តាង $x = \dfrac{\pi}{4} - z$ កាលណា $x \to \dfrac{\pi}{4}$ នោះ $z \to 0$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - z) - \cos(\frac{\pi}{4} - z)}{\pi - 4(\frac{\pi}{4} - z)}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos z - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin z) - (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos z + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin z)}{4z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-\sqrt{2}\sin z}{4z} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

4. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin x}}{\cos^2 x}$

តាង $x=\frac{\pi}{2}-z$ កាលណា $x\to\frac{\pi}{2}$ នោះ $z\to 0$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin(\frac{\pi}{2}-z)}}{\cos^2(\frac{\pi}{2}-z)}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos z}}{\sin^2 z}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2-1-\cos z}{\sin^2 z.(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos z})}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\sin^2 z(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos z})}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2\sin^2\frac{z}{2}}{\sin^2 z.(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos z})}$$

$$=2\lim_{z\to 0}\frac{\sin^2\frac{z}{2}}{(\frac{z}{2})^2}.\frac{z^2}{\sin^2 z}.\frac{1}{4}.\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos z}}=2.\frac{1}{4}.\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin x}}{\cos^2 x}=\frac{\sqrt{2}}{8}}$ ។

5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1+\tan\pi x}{1-x^2}$

តាង $x=1-z$ កាលណា $x\to 1$ នោះ $z\to 0$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{(1-z)^3-1+\tan(\pi-\pi z)}{1-(1-z)^2}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{1-3z+3z^2-z^3-1-\tan\pi z}{1-1+2z-z^2}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{-3z+3z^2-z^3-\tan\pi z}{2z-z^2}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{z(-3+3z-z^2-\frac{\tan\pi z}{z})}{z(2-z)}=\frac{-3-\pi}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1+\tan\pi x}{1-x^2}=-\frac{3+\pi}{2}}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}(4-x^2)\tan\frac{\pi x}{4}$

តាង $z=2-x$ នាំឱ្យ $x=2-z$ កាលណា $x\to 2$ នោះ $z\to 0$

$$=\lim_{z\to 0}\left[4-(2-z)^2\right]\tan\frac{\pi}{4}(2-z)$$

$$=\lim_{z\to 0}(4z-z^2)\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi z}{4})=\lim_{z\to 0}(4-z)\frac{\frac{\pi z}{4}}{\tan\frac{\pi z}{4}}\cdot\frac{4}{\pi}=\frac{16}{\pi}$$

7. $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi - x)\tan\frac{x}{2}$

តាង $z = \pi - x$ នាំឱ្យ $x = \pi - z$ កាលណា $, x \to \pi$ នោះ $z \to 0$

$$= \lim_{z\to 0} z\tan\frac{\pi - z}{2} = \lim_{z\to 0} z\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{z}{2})$$

$$= \lim_{z\to 0} z\cot z = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\tan z} = 1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to\pi}(\pi - x)\tan\frac{x}{2} = 1}$ ។

8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{1-\sqrt{2}\sin x}$

តាង $z = \frac{\pi}{4} - x$ នាំឱ្យ $x = \frac{\pi}{4} - z$ កាលណា $, x \to \frac{\pi}{4}$ នោះ $z \to 0$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{1-\tan(\frac{\pi}{4} - z)}{1-\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - z)} = \lim_{z\to 0}\frac{1-\frac{1-\tan z}{1+\tan z}}{1-\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos z - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin z)}$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{2\tan z}{(1-\cos z+\sin z)(1+\tan z)}$$

$$= 2\lim_{z\to 0}\frac{\frac{\tan z}{z}}{(\frac{1-\cos z}{z} + \frac{\sin z}{z})(1+\tan z)} = 2.\frac{1}{(0+1)(1+0)} = 2$$

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\pi - 3x}{\sqrt{3} - 2\sin x}$ តាង $z = \dfrac{\pi}{3} - x$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\pi - 3(\frac{\pi}{3} - z)}{\sqrt{3} - 2\sin(\frac{\pi}{3} - z)}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{3z}{\sqrt{3} - 2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos z - \frac{1}{2}\sin z)}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{3z}{\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos z - \sin z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{3}{\sqrt{3}\frac{1-\cos z}{z} - \frac{\sin z}{z}} = \frac{3}{0-1} = -3$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\pi - 3x}{\sqrt{3} - 2\sin x} = -3}$ ។

10. $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 - x - 2)\tan\dfrac{\pi}{x}$

តាង $z = \dfrac{1}{x}$ នាំឱ្យ $x = \dfrac{1}{z}$ កាលណា, $x \to 2$ នោះ $z \to \dfrac{1}{2}$

$$= \lim_{z\to\frac{1}{2}} (\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 2)\tan \pi z$$

តាង $u = \dfrac{1}{2} - z$ នាំឱ្យ $z = \dfrac{1}{2} - u$ កាលណា, $z \to \dfrac{1}{2}$ នោះ $u \to 0$

$$= \lim_{u \to 0} [\frac{1}{(\frac{1}{2}-u)^2} - \frac{1}{\frac{1}{2}-u} - 2]\tan\pi(\frac{1}{2}-u)$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{1-\frac{1}{2}+u-2(\frac{1}{2}-u)^2}{(\frac{1}{2}-u)^2}\tan(\frac{\pi}{2}-\pi u) = \lim_{u \to 0} \frac{3u-2u^2}{(\frac{1}{2}-u)^2}\cot(\pi u)$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{3-2u}{(0.5-u)^2} \cdot \frac{\pi u}{\tan \pi u} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{12}{\pi}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x \to 2}(x^2 - x - 2)\tan\frac{\pi}{x} = \frac{12}{\pi}}$ ។

11. $\lim_{x \to 1} \frac{1-x^3}{\cos\frac{\pi}{x+1}}$

តាង $z = \frac{1}{x+1}$ នាំឱ្យ $x = \frac{1}{z} - 1$

កាលណា $, x \to 1$ នោះ $z \to \frac{1}{2}$

$$= \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{1-(\frac{1}{z}-1)^3}{\cos \pi z}$$

តាង $u = \frac{1}{2} - z$ នាំឱ្យ $z = \frac{1}{2} - u$

កាលណា $, z \to \frac{1}{2}$ នោះ $u \to 0$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{1-\left(\dfrac{1}{\frac{1}{2}-u}-1\right)^3}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi u\right)} = \lim_{u\to 0} \frac{\left(\frac{1}{2}-u\right)^3-\left(1-\frac{1}{2}+u\right)^3}{\left(\frac{1}{2}-u\right)^3\sin\pi u}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\frac{1}{8}-\frac{3}{4}u+\frac{3}{2}u^2-u^3-\frac{1}{8}-\frac{3}{4}u-\frac{3}{2}u^2-u^3}{\left(\frac{1}{2}-u\right)^3\sin\pi u}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{-\frac{3}{2}u-2u^3}{\left(\frac{1}{2}-u\right)^3\sin\pi u}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{-\frac{3}{2}-2u^2}{\left(\frac{1}{2}-u\right)^3}.\frac{\pi u}{\sin\pi u}.\frac{1}{\pi} = -\frac{12}{\pi}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{1-x^3}{\cos\frac{\pi}{x+1}} = -\frac{12}{\pi}}$ ។

12. $\lim_{x\to 2} \dfrac{(2-x)^2}{1-\sin\frac{\pi}{x}}$

តាង $z = \frac{1}{x}$ នាំឱ្យ $x = \frac{1}{z}$

កាលណា, $x \to 2$ នោះ $z \to \frac{1}{2}$

$$= \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{(2 - \frac{1}{z})^2}{1 - \sin \pi z}$$

តាង $u = \frac{1}{2} - z$ នាំឱ្យ $z = \frac{1}{2} - u$

កាលណា $, z \to \frac{1}{2}$ នោះ $u \to 0$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{(2 - \frac{1}{0.5 - u})^2}{1 - \sin(\frac{\pi}{2} - \pi u)}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{(1 - 2u - 1)^2}{(0.5 - u)^2 (1 - \cos \pi u)}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{4u^2}{(0.5 - u)^2 2 \sin^2 \frac{\pi u}{2}}$$

$$= 2 \lim_{u \to 0} \frac{1}{(0.5 - u)^2} \cdot \frac{(\frac{\pi u}{2})^2}{\sin^2 \frac{\pi u}{2}} \cdot \frac{4}{\pi^2} = \frac{8}{\pi^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x \to 2} \frac{(2 - x)^2}{1 - \sin \frac{\pi}{x}} = \frac{8}{\pi^2}}$ ។

13. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{x+\pi}}{\pi-x}$

តាង $t=\dfrac{\pi x}{x+\pi}\Rightarrow x=\dfrac{\pi t}{\pi-t}$ បើ $x\to\pi\ \Rightarrow t\to\dfrac{\pi}{2}$

$$=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\pi-\dfrac{\pi t}{\pi-t}}=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\pi-t)\cos t}{\pi(\pi-2t)}$$

តាង $u=\dfrac{\pi}{2}-t\ \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}-u$ បើ $t\to\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow u\to 0$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(\pi-\frac{\pi}{2}+u)\cos(\frac{\pi}{2}-u)}{\pi(\pi-\pi+2u)}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}+u}{2\pi}.\frac{\sin u}{u}=\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{x+\pi}}{\pi-x}=\dfrac{1}{4}}$ ។

14. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\cos\dfrac{\pi x}{x+3}}$

តាង $z=\dfrac{\pi x}{x+3}$ នាំឱ្យ $x=\dfrac{3z}{\pi-z}$

កាលណា$,x\to 3$ នោះ $z\to\dfrac{\pi}{2}$

$$= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3z}{\pi - z} - 3}{\cos z} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{3(2z-\pi)}{(\pi - z)\cos z}$$

តាង $u = \frac{\pi}{2} - z \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} - u$

បើ $z \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow u \to 0$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{3(\pi - 2u - \pi)}{(\pi - \frac{\pi}{2} + u)\cos(\frac{\pi}{2} - u)}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{-6u}{(\frac{\pi}{2} + u)\sin u}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{-6}{\frac{\pi}{2} + u} . \frac{u}{\sin u} = -\frac{12}{\pi}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\cos\frac{\pi x}{x+3}} = -\frac{12}{\pi}}$ ។

15. $\lim_{x\to 1} \frac{\tan\frac{\pi}{x}}{1 - x^2}$

តាង $z = \frac{1}{x}$ នាំឱ្យ $x = \frac{1}{z}$

កាលណា $x \to 1$ នោះ $z \to 1$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{\tan \pi z}{1-\frac{1}{z^2}} = \lim_{z\to 1}\frac{z^2\tan \pi z}{z^2-1}$$

តាង $u = 1 - z$ នាំឱ្យ $z = 1 - u$

កាលណា $z \to 1$ នោះ $u \to 0$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{(1-u)^2\tan(\pi-\pi u)}{(1-u)^2-1}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{(1-u)^2(-\tan \pi u)}{2u-u^2}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{-(1-u)^2}{2-u}.\frac{\tan \pi u}{\pi u}.\pi = -\frac{\pi}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{\tan\frac{\pi}{x}}{1-x^2} = -\frac{\pi}{2}}$ ។

16. $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sin\frac{2\pi}{x+3}}{(1-x)^2}$

តាង $z = \frac{1}{x+3}$ នាំឱ្យ $x = \frac{1}{z} - 3$ បើ $x \to 1$ នោះ $z \to \frac{1}{4}$

$$= \lim_{z\to \frac{1}{4}}\frac{1-\sin 2\pi z}{(1-\frac{1}{z}+3)^2} = \lim_{z\to \frac{1}{4}}\frac{z^2(1-\sin 2\pi z)}{(4z-1)^2}$$

តាង $u=\frac{1}{4}-z$ នាំឱ្យ $z=\frac{1}{4}-u$

កាលណា, $z\to\frac{1}{4}$ នោះ $u\to 0$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(0.25-u)^2[1-\sin(\frac{\pi}{2}-\pi u)]}{(1-4u-1)^2}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(0.25-u)^2(1-\cos\pi u)}{16u^2}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(0.25-u)^2.2\sin^2\frac{\pi u}{2}}{16u^2}$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{u\to 0}(0.25-u)^2.\frac{\sin^2\frac{\pi u}{2}}{(\frac{\pi u}{2})^2}.\frac{\pi^2}{4}=\frac{1}{8}.\frac{1}{16}.\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{512}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{1-\sin\frac{2\pi}{x+3}}{(1-x)^2}=\frac{\pi^2}{5\quad 1}}$ ។

17. $\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\sin\frac{2\pi}{x}}$

តាង $z=\frac{2}{x}$ នាំឱ្យ $x=\frac{2}{z}$ កាលណា, $x\to 2$ នោះ $z\to 1$

$$= \lim_{z\to 1}\frac{2-\frac{2}{z}}{\sin \pi z} = 2\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z.\sin \pi z}$$

តាង $u = 1-z$ នាំឱ្យ $z = 1-u$

កាលណា, $z \to 1$ នោះ $u \to 0$

$$= 2\lim_{u\to 0}\frac{-u}{(1-u)\sin(\pi-\pi u)}$$

$$= -2\lim_{u\to 0}\frac{1}{1-u}.\frac{\pi u}{\sin \pi u}.\frac{1}{\pi} = -\frac{2}{\pi}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\sin\frac{2\pi}{x}} = -\frac{2}{\pi}}$ ។

18. $\boxed{\lim_{x\to 1}(1-x^2)\tan\frac{\pi x}{x+1} = \frac{8}{\pi}}$

19. $\boxed{\lim_{x\to 2}(2x-x^2)\cot\frac{2\pi}{x} = \frac{4}{\pi}}$

# លំហាត់ទី៩

ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin 2x}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$ $,a,b\in IR^*$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{x}+3e^{2x}-5}{e^{3x}-1}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{2x}+...+e^{nx}-n}{x}$

ង. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{x}-1)(e^{2x}-1)...(e^{nx}-1)}{x^{n}}$

ច. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x^{2}}-\cos 2x}{x^{2}}$

ឆ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-2\sin x}-e^{\tan 3x}}{x^{3}+x}$

ជ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^{-2x^{2}}+\sin x-\tan x-x}{x^{3}}$

ឈ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3\sin^{2}x}-\cos x\cos 3x}{-e^{2x^{2}}+\cos 2x}$

ញ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{e^{x^{2}}+3}-2\cos 4x}{x\sin x}$

# ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin 2x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{\sin 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x \sin 2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} . \frac{2x}{\sin 2x} . \frac{1}{e^x} = 1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x} = 1}$ ។

ខ. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$ $, a, b \in IR^*$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(e^{ax} - 1) - (e^{bx} - 1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax} . a - \lim_{x \to 0} \frac{e^{bx} - 1}{bx} . b = a - b$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = a - b}$

គ. $\lim_{x \to 0} \frac{2e^x + 3e^{2x} - 5}{e^{3x} - 1}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2(e^x - 1) + 3(e^{2x} - 1)}{(e^{3x} - 1)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 . \frac{e^x - 1}{x} + 6 . \frac{e^{2x} - 1}{2x}}{3 . \frac{e^{3x} - 1}{3x}} = \frac{2 + 6}{3} = \frac{8}{3}$$

ឃ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{2x}+...+e^{nx}-n}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)+(e^{2x}-1)+........+(e^{nx}-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x-1}{x}+2.\frac{e^{2x}-1}{2x}+.....+n.\frac{e^{nx}-1}{nx}\right]$$

$$=1+2+.........+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ង. $\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-1)...(e^{nx}-1)}{x^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.2\frac{e^{2x}-1}{2x}......n\frac{e^{nx}-1}{nx}=1.2.3......n=n!$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-1)...(e^{nx}-1)}{x^n}=n!}$ ។

ច. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-\cos 2x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-(1-2\sin^2 x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1+2\sin^2 x}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}+2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=-1+2=1$$

ឆ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2\sin x}-e^{\tan 3x}}{x^3+x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{-2\sin x}-1)-(e^{\tan 3x}-1)}{x(x^2+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2\sin x}-1}{-2\sin x}.\frac{\sin x}{x}.\frac{-2}{x^2+1}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan 3x}-1}{\tan 3x}.\frac{\tan 3x}{3x}.\frac{3}{x^2+1}=-5$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2\sin x}-e^{\tan 3x}}{x^3+x}=-5}$ ។

ជ. $\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-2x^2}+\sin x-\tan x-x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(e^{-2x^2}-1)+\cos x\tan x-\tan x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(\cos x-1)}{x^3}$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-1}{-2x^2}-2\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}.\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=-\frac{5}{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-2x^2}+\sin x-\tan x-x}{x^3}=-\frac{5}{2}$ ។

ឈ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3\sin^2 x}-\cos x\cos 3x}{-e^{2x^2}+\cos 2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3\sin^2 x}-(1-2\sin^2\frac{x}{2})(1-2\sin^2\frac{3x}{2})}{-e^{2x^2}+1-2\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3\sin^2 x}-1+2\sin^2\frac{3x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}-4\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{3x}{2}}{-(e^{2x^2}-1+2\sin^2 x)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{3.\dfrac{e^{3\sin^2 x}-1}{3\sin^2 x}.\dfrac{\sin^2 x}{x^2}+2\dfrac{\sin^2\frac{3x}{2}}{x^2}+2\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}-4\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}.\sin^2\dfrac{3x}{2}}{2.\dfrac{e^{2x^2}-1}{2x^2}+2.\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}$$

$$=-\frac{3+2.\frac{9}{4}-2.\frac{1}{4}-0}{2+2}=\frac{3+4}{4}=\frac{7}{4}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3\sin^2 x}-\cos x\cos 3x}{-e^{2x^2}+\cos 2x}=\dfrac{7}{4}$ ។

## លំហាត់ទី១០

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x+\cos x-\sqrt{2}}{(\frac{\pi}{4}-x)^2} & \text{បើ } x\neq\frac{\pi}{4} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{បើ } x=\frac{\pi}{4} \end{cases}$

ចូរសិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f$ ត្រង់ចំនុច $x_0=\dfrac{\pi}{4}$ ?

## ដំណោះស្រាយ

សិក្សាភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f$ ត្រង់ចំនុច $x_0=\dfrac{\pi}{4}$

គេមាន $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x+\cos x-\sqrt{2}}{(\frac{\pi}{4}-x)^2}$

តាង $t=\dfrac{\pi}{4}-x$ នាំឱ្យ $x=\dfrac{\pi}{4}-t$ ។ កាលណា $x\to\dfrac{\pi}{4}$ នោះ $t\to 0$

គេបាន $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}-t)+\cos(\frac{\pi}{4}-t)-\sqrt{2}}{t^2}$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos t - \sin t \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\cos t + \sin\frac{\pi}{4}\sin t - \sqrt{2}}{t^2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t - \sqrt{2}}{t^2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{2}\cos t - \sqrt{2}}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{2}(\cos t - 1)}{t^2} = \frac{-2\sqrt{2}\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} . \lim_{t \to 0} \frac{\sin^2\frac{t}{2}}{(\frac{t}{2})^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = f(\frac{\pi}{4})$$

ដោយ $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = f(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x_0 = \frac{\pi}{4}$ ។

## លំហាត់ទី១១

គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{1 - x^3}$ កំនត់គ្រប់ $x \neq 1$ ។

តើគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ $f$ ឱ្យជាប់ត្រង់ចំនុច $x_0 = 1$ បានឬទេ ?

បើអាច ចូរកំនត់រកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)$

ត្រង់ចំនុច $x_0 = 1$ ។

## ដំណោះស្រាយ

កំនត់រកអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់

គេមាន $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{1 - x^3}$

តាង $t = 1 - x$ នាំឱ្យ $x = 1 - t$ ។ កាលណា $x \to 1$ នោះ $t \to 0$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(\pi - \pi t)}{1 - (1 - t)^3}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi t)}{1 - 1 + 3t - 3t^2 + t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi t)}{t(3 - 3t + t^2)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \cdot \frac{\pi}{3 - 3t + t^2} = \frac{\pi}{3}$$

ដោយ $\lim_{x\to1} f(x) = \frac{\pi}{3}$ កំនត់ នោះគេអាចបន្លាយអនុគមន៍ $f(x)$

ឱ្យជាប់ត្រង់ចំនុច $x_0 = 1$ ។

បើយើងតាង $g(x)$ ជាអនុគមន៍បន្លាយតាមភាពជាប់នៃអនុគមន៍ $f(x)$

ត្រង់ចំនុច $x_0 = 1$ នោះគេអាចសរសេរ៖

ដូចនេះ $$g(x) = \begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{1-x^3} & \text{បើ } x \neq 1 \\ \dfrac{\pi}{3} & \text{បើ } x = 1 \end{cases}$$

ជំពូកទី៤

# លំហាត់អនុវត្តន៍

១-ដោយប្រើនិយមន័យចូរស្រាយបញ្ជាក់លីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)=7$

ខ/ $\lim\limits_{x\to -1}(2x+5)=3$

គ/ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+3}{x}=3$

ឃ/ $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+2)=4$

ង/ $\lim\limits_{x\to 2}x^3=8$

ច/ $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x+5}=3$

ឆ/ $\lim\limits_{x\to 2}3^x=9$

ជ/ $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+x+3)=5$

ឈ/ $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2+5}=3$

ញ/ $\lim\limits_{x\to 8}\sqrt[3]{x}=2$

២-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-3x+2}$

ខ/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-5x+6}$

គ/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{2x^3-3x+1}$

ឃ/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-4x+3}{(x-1)^2}$

ង/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+2x-4}{x^2-6x+8}$

ច/ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{4\sin^2 x-1}$

៣-កំណត់តម្លៃនៃចំនួនថេរ **a** ដើម្បីឲ្យលីមីតខាងក្រោមជាលីមីតនៃចំនួន

ថេរ ហើយកំណត់លីមីតនេះផង ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+4}{x-2}$ ខ/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-a}{x-1}$

គ/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}+a}{x}$ ឃ/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+a}-1}{x-2}$

ង/ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+ax}-1}{x^2-1}$ ច/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+ax+2}{x^2-4}$

៤-កំណត់តម្លៃនៃចំនួនថេរ **a** និង **b** ដើម្បីឲ្យលីមីតខាងក្រោមជាលីមីតនៃ

ចំនួនថេរ ហើយកំណត់លីមីតនេះផង ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+ax+b}{(x-1)^2}$ ខ/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4+ax^3+bx+4}{x^3-2x^2-4x+8}$

គ/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4+6x^2+ax+b}{x^3-3x^2+4}$ ឃ/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^3+ax+b}{x^2}$

ង/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5+ax+b}{x^3-3x+2}$ ច/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ax^2+bx+4}{x^4-8x^2+16}$

ឆ/ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3+ax+b}{(x-a)^2}$ ជ/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+b-(1+2x)^3}{x^2}$

៥-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{\sin^2 5x}$

ខ/ $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x}$

គ/ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

ឃ/ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$

ង/ $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$

ច/ $\lim_{x\to+\infty} x^2(1-\cos\frac{1}{x})$

៦-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$

ខ/ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

គ/ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$

ឃ/ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

ង/ $\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$

ច/ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

ឆ/ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x.\cos 2x}{x^2}$

ជ/ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

ឈ/ $\lim_{x\to 1}(1-x^2)\tan\frac{\pi x}{2}$

ញ/ $\lim_{x\to 1}\frac{\tan\pi x}{1-x}$

៧-កំណត់អនុគមន៍ដឺក្រេទីពីរ $y = f(x)$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌទាំងពីរ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-1} = 1 \quad (i) \quad \text{និង} \quad \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1} \ (ii)$$

៨-គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{2-2\cos ax}{x^2}$ ដែល $a \in IR$

កំណត់តម្លៃនៃ $a$ ដើម្បីឲ្យ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 100$ ។

៩-គេឲ្យអនុគមន៍ $f$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $4 - x^2 \le f(x) \le 4 + x^2$ គ្រប់ $x \in IR$ ។

គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ។

១០-គេមាន $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + (a-1)x + 3 - 3a}{x^2 - 4x + 3}$

គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

១១-គេមាន $f(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{x^{p+1} - x^p - x + 1}$ ដែល $n \in IN$ និង $p \in IN$

គណនា $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ។

១២-មានអនុគមន៍ $f$ កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{\tan x - \sin x}{x^n}$ ដែល $n \in IN$

កំណត់គ្រប់ $n$ ដែលធ្វើឲ្យ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ជាចំនួនពិត ។

១៣-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\pi-2x}{\cos x}$ ខ/ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{x-1}$

គ/ $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos x}+\cos x-3\right)\right]$ ឃ/ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-\sin\frac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}$

១៤-គេមាន $S_n = \frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\frac{1}{7\times 11}+.....+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

ក/កំណត់ពីរចំនួនពិត $A$ និង $B$ ដើម្បីឲ្យចំពោះគ្រប់ $k\in IN$

គេបាន $\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{A}{3k-2}+\frac{B}{3k+1}$ ។

ខ/ប្រើសមភាពខាងលើចូរគណនា $S_n$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ។

១៥-ក/ គេមាន $k\in IN$ ។

ចូរស្រាយថា $0<\frac{2k-1}{2k}<\sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}}$

ខ/តាង $u_n=\frac{1\times 3\times 5\times ....\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times ....\times 2n}$ ។

បង្ហាញថា $0<u_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ រួចទាញថា $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ ។

១៦-គេមានពហុកោណនិយ័តចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលមាន $\mathbf{n}$ ជ្រុង និងកាំ

ស្មើនឹង $\mathbf{a}$ ។ តាង $\mathbf{S_n}$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃពហុកោណនេះ ។

គណនា $\mathbf{S_n}$ រួចកំណត់រកតម្លៃ $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathbf{S_n}$ ។

១៧-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)(2x+3)(2-x)}{(x^2+1)(2x+1)}$ ខ/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - x}{2e^x+1}$

គ/ $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x})$ ឃ/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\dfrac{2x+3}{x+1})$

ង/ $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[4]{x^4+4x^3} + \sqrt[3]{x^3+3x^2} + \sqrt{x^2+2x} - 3x)$

១៨-គណនាលីមីត ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2+x+2} - 2\sqrt{x^2-x+3})$

ខ/ $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x+2} - \sqrt{x^2-x+3})$

១៩-កំណត់តម្លៃ $\mathbf{a}$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1+ax-\sqrt{1+x}}{x} = \dfrac{1}{8}$

២០-គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ ដែល $m, n \in \mathbb{N}$ ។

២១-គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1.2+2.3+3.4+....+(n-1)n}{n^3}$ ។

២២-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})....(1-\frac{1}{n^2})$

ខ/ $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n}{\sqrt{n^4+2}}+....+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}})$

២៣-ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ គេមាន ៖

$$S_n=\frac{2}{1\times3}+\frac{2}{3\times5}+...+\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}=\sum_{p=0}^{n}\frac{2}{(2p+1)(2p+3)}$$

ក/គណនា $S_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ ដោយប្រើ $\frac{2}{(2p+1)(2p+3)}$

ជាទម្រង់ $\frac{a}{2p+1}+\frac{b}{2p+3}$ ។

ខ/ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ។

២៤-ដោយប្រើសមភាព $\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$ ចូរគណនាផលបូក

$S_n=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{n}{(n+1)!}$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ។

២៥-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2\ln x}{1-2x+\ln x}$

ខ/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x+x-1}{e^x+1}$

គ/ $\lim\limits_{x\to+\infty}[x-\ln(2e^x+1)]$

ឃ/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-2\ln x}{1+3\ln x}$

ង/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\ln x}{x+\ln x}$

ច/ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^x+x-1}{e^x+x}$

២៦-គណនាលីមីត ៖

ក/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

ខ/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+x-1}{x}$

គ/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x^2}-\cos 2x}{x^2}$

ឃ/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{\tan x}}{x}$

ង/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

ច/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

ឆ/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{2x}-2}{\sin x}$

ជ/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^x-1)(e^{3x}-1)}{x^2}$

ឈ/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\sin 2x}-\cos 2x}{\tan^2 x}$

ញ/ $\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{\frac{2}{x}}-1)$

## ២៧-គណនាលីមីត ៖

ក/ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{x}$

ខ/ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)}{x}$

គ/ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2-\cos x)}{x^2}$

ឃ/ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x\sin 3x)}{x^2}$

ង/ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

ច/ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2\cos x-\cos 2x)}{\sin^2 x}$

ឆ/ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln[(1+x)(1+2x)]}{x}$

ជ/ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan x)}{x}$

ឈ/ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2-e^x)}{x}$

ញ/ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(3-2\cos x\sqrt{\cos 2x})}{x^2}$

## ២៨-គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក/ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$

ខ/ $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x^2-2x+2)}{x^3-3x+2}$

គ/ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)}{\pi-4x}$

ឃ/ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$

ង/ $\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-4x+5)}{e^{x-2}+e^{2-x}-2}$

ច/ $\lim_{x\to 2}\frac{\ln(4-x)-\ln 2}{x-2}$

ឆ/ $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}$

ជ/ $\lim_{x\to e}\frac{\ln^2 x-3\ln x+2}{1-\ln x}$

២៩-គេឲ្យអនុគមន៍ f ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x-\frac{x^2}{2}\le f(x)\le x$ ចំពោះគ្រប់ x ។

គេតាង $S_n=\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$ ។ គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

៣០-គណនាលីមីត ៖

$$A=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+4x+1}+...+\sqrt{x^2+2nx+1}-\sqrt{n^2x^2+1})$$

៣១-គេមានស្វ៊ីត $(u_n)$ កំណត់ដោយ ៖

$u_0=1$ , $u_1=2$ និង $u_{n+2}=\frac{u_{n+1}+u_n}{2}$ ដែល $n=0,1,2,...$

ក/ចូរស្រាយថា $u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+\frac{5}{2}$ ។

ខ/ គណនា $u_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ។

៣២-គេមានស្វ៊ីត $u_n=\sqrt{n+\sqrt{(n-1)+....+\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}$

គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(u_n-\sqrt{n})$ ។

៣៣-គេឲ្យ $a_k=\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ តាង $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ ។រក $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ?

៣៤-គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x-3}-\sqrt[3]{x-1}}{x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2x-1}}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x+1-\sqrt[4]{4x+1}}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x-\sqrt[3]{3x-2}}$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt[3]{x^2+4}-x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^3-1}}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^4+1}}$

8. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x-4}-\dfrac{x}{2}}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}-2}$

10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-\sqrt{x^2+60}}{\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[4]{x-1}}$

៣៥-ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x^2+4}}{x-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{4x^2+4}}{x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{4x^2+4}-\sqrt{2x+2}}{x-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt[6]{x^2+60}}{x^2-\sqrt[3]{x^2+60}}$

## ៣៦-ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{1-\tan^3 x}$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{3-4\sin^2 x}{2\cos x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\cos x-\sin 2x}{4\cos^2 x-3}$

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan^4 x+\cot^4 x-2}{1-2\sin 2x}$

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{1-8\sin^3 x}{4\cos^2 x-3}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 x+\sin^3 x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x-x^2-\sin^2 x}{\cos x-x+1}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\sqrt{x^2+1}}{x^2+\sin^2 x}$

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{1-\sqrt[3]{\tan x}}$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4-\sin^4 x}{\sqrt{x^2+1}-\cos x}$

## ៣៧-ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{2^x+4}-2}{4^x-16}$

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2^x-\sqrt{2x+2}}{4^{2x-1}-x^2-2x-1}$

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\dots+\sqrt[n]{x}-n}{x-1}$

7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x}+\sqrt[n]{x}-2}{x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x-\sqrt{1+3^x}}{\sqrt{4^x-1}-3^{\frac{x}{2}}}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{e^{2x}-2xe^x+x^2-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^{3x}-1}$

8 . $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1+\sqrt[m]{x})(1+\sqrt[n]{x})-4}{x-1}$

9 . $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1+x^m)^n(1+x^n)^m-2^{m+n}}{x-1}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+x^n}-\sqrt[m]{1-x^n}}{x^n}$

## ៣៨-ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x.\sin 4x.\sin 8x}{x^3}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+1-\cos 4x}{x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x\sin^3 2x}{x^5}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3\left(\sin^2 4x\right)}{x^6}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(\sin 2x^3)}{x^6}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin[\sin(\sin x)]}{x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^3 2x.\sin^2 3x}{\sin x^5}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x.\sin 2x.\sin 3x\ldots\sin nx}{x^n}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan 2x)+\tan(\sin 4x)}{x}$

## ៣៩- គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 2x}{\sin^2 4x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 3x}{x^2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x+\cos 2x-3}{x^2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-3\cos 2x+2\cos 3x}{x^2}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x\ldots\cos nx}{x^2}$

## ៤០- គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\cos x}-\sqrt{3}}{x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3-\cos 2x}}{x^2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\sqrt{\cos 2x}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^n x}{x\sin x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3\cos x}-2}{1-\cos^3 2x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}{x^2}$

## ៤១- គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{1-x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\cos 2x}{(\pi-x)^2}$

3. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{(\sin\frac{x}{4}-\cos\frac{x}{4})^2}$

4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8+\tan \pi x}{2-x}$

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x^3}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(1-x^2\right).\tan\dfrac{\pi x}{2}$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sin\frac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}$

9. $\lim\limits_{x\to 2}(4-x^2)\tan\dfrac{\pi}{x}$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\cos\frac{\pi}{x+1}}$

## ៤២-គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos \pi x}{(1-x)^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sin\frac{\pi}{x}}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^3+\tan \pi x}{1-x}$

4. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\pi^2-x^2}$

## ៤៣-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $\lim_{x\to 0}\frac{x^3+\sin^3 x}{x^3}$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 3x}{x^2}$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{1-\cos\sqrt{x}}$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{1-\cos(1-\cos\sqrt{x})}$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{2\sin x-\sin 2x}$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{\tan x}$

8. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{x\sin x}$

9. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x\tan x}$

10. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos x}-3\cos x+1\right)\right]$

## ៤៤-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+\cos x}-\sqrt{(1+x)\cos x}}{\sin 3x-3\sin x}$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x+\cos\sqrt{x}}}{x}$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}}-2}{x^2}$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x+\tan x}{x-\sin x-\tan x}$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{1-\cos 2x}$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{1+\cos 5x}}{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 5x}}$

8. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos 2x\sqrt{\cos x}}$

## ៤៥-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $\lim_{x\to1}(1-x^2)\tan\frac{\pi x}{2}$

2. $\lim_{x\to1}\frac{\tan\pi x}{1-x}$

3. $\lim_{x\to1}\frac{1-\sin\frac{\pi x}{2}}{(1-x)^2}$

4. $\lim_{x\to2}(x^2-x-2)\tan\frac{\pi}{x}$

5. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi^2-4x^2}$

6. $\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{\sin(x-a)}$

7. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin^3 2x}{\tan x-\cos tx}$

8. $\lim_{x\to1}\frac{\frac{\pi}{4}-\arctan x}{1-x}$

9. $\lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\arcsin x-\arccos x}{1-x\sqrt{2}}$

10. $\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(\pi-x)^2}$

## ៤៦-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $\lim_{x\to1}(1-x^3)\tan\frac{\pi}{1+x}$

2. $\lim_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{4}}{\pi-x}$

6. $\lim_{x\to2}\frac{\cot\frac{\pi}{x}}{4-x^2}$

7. $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\cos\frac{\pi}{x+1}}$

3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8+\sin\pi x}{2-x}$

5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)^2}{1-\sin\frac{\pi}{x+1}}$

8. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\text{tna}\dfrac{\pi x}{3x-1}$

9. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1-\sin\frac{\pi}{x}}{x^2-4x+4}$

10. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{x+1}$

## ៤៧-គណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

1. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{1+x^2}\tan\left(\dfrac{\pi x+4}{2x+3}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-3)\cos\left(\dfrac{\pi x+2}{2x+1}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1)\tan\left(\dfrac{\pi x}{x+1}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+4}\tan\left(\dfrac{3\pi x+4}{6x-5}\right)$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1)\sin\left(\dfrac{\pi x+1}{x+2}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}\cot(\dfrac{\pi x+1}{2x-3})$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{2x^2+1}\cos\left(\dfrac{\pi x+1}{2x+3}\right)$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x-1}\right)$