ឆ្នាំឌុប

វិញ្ញាសាត្រៀម

គណិតវិទ្យា(ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)

លំហាត់ និងដំណោះស្រាយ

រៀបរៀងដោយ៖ សិស្សរៀន Latex

កែសម្រួលដោយ៖ ហ៊ីង វុទ្ធី

២០២១

មាតិកា

១ អ៊ូច ប៊ុនថន ១

២ អ៊ី ចាន់ធា ៩

៣ ម៉ី ចន្ទ័មករា ២១

៤ ជិក ជី ៣១

៥ ផល ផានុ ៣៩

៦ ថា មករា ៤៩

៧ រស់ មាន ៥៧

៨ អឿន សំណាង ៦៥

៩ Kim Hun ៧៥

១០ សុខលាភ ៨១

១១ សារ៉ែន សុទ្ធា ៨៩

១២ ហ៊ីង វុទ្ធី ៩៧

១៣ ហ៊ីង វុទ្ធី ១០៥

១៤ ហ៊ីង វុទ្ធី ១១៣

១៥ ហ៊ីង វុទ្ធី ១១៩

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា   លេខបន្ទប់៖________

ប្រឡង៖ **សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ**   លេខតុ៖________

សម័យប្រឡង៖________ មណ្ឌលប្រឡង៖________

ហត្ថលេខាអនុរក្ស៖ នាមត្រកូល និងនាមខ្លួន៖________

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖________   អក្សរសម្ងាត់

ហត្ថលេខា៖________

• បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាស់ប្រឡងឡើយ។ ក្រដាស់ប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។

• បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាស់ប្រឡងជាដាច់ខាត។

______ / 125   **១**   វិញ្ញាសា៖ **គណិតវិទ្យាត្រៀម**   រយៈពេល៖ 120 នាទី   អក្សរសម្ងាត់

រៀបរៀងដោយ៖ **អ៊ុច ប៊ុនថន**

I នៅក្នុងទូទឹកកកមួយមានភេសជ្ជៈពីរប្រភេទគឺ ខាប៉ាបាវ 12 កំប៉ុង និងបាកាស 8 កំប៉ុង ។ បុរសម្នាក់បានយកភេសជ្ជៈបីកំប៉ុងចេញពីទូទឹកកកដោយចៃដន្យ។

១. រកប្រូបាបដែលបានបាកាសទាំងបីកំប៉ុង។

២. រកប្រូបាបដែលបានខាប៉ាបាវយ៉ាងតិចមួយកំប៉ុង។

II ១. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យ $(1-2i)x+(1+2i)y=1+i$ ។

២. រកចំនួនកុំផ្លិច Z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $|Z|+Z=3+4i$ ។

៣. ដោះស្រាយក្នុងសំណុំ $\mathbb{C}$ នូវសមីការ $Z^2+\sqrt{3}Z+1=0$ រួចសរសេរឬសនីមួយៗជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

III គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ $x>0$ ដោយ $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-25}{x^2+x-6}$ ។

១. កំណត់តម្លៃ a,b និង c ដើម្បីឲ្យ $f(x)=a+\dfrac{b}{x+3}+\dfrac{c}{x-2}$ ។

២. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\displaystyle\int f(x)dx$

IV គេឲ្យសមីការប៉ារ៉ាបូល $P: y^2-2y+6x-6=0$ ។

១. រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល ។

២. រកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស រួចសង់ក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូល។

V f ជាអនុគមន៍កំណត់គ្រប់ $x>0$ ដោយ $f(x)=x^2+\dfrac{1}{2}-3\ln x$ និងមានក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

១. ក. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ 0 ។

ខ. កំណត់អនុគមន៍ g ចំពោះ $x>0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x)=x^2g(x)$ ។ គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$ ។

២. សិក្សាអថេរភាពនៃ f រួចសង់តារាងអថេរភាព ។ គណនា $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ និង $f(2)$ ។ (គេយក $\ln 2=0.7$)

៣. ក. សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ខ. តើសមីការ $f(x)=0$ មានចម្លើយ ឬទេ ? ចូរបកស្រាយ ។

VI នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយ គេឲ្យចំណុច $A(1,2,-3),B(0,5,-1)$ និង $C(3,0,1)$។

១. ចូរសង់ចំណុច A,B និង C ។

២. គណនាប្រវែង AB,AC និង BC រួចទាញបញ្ជាក់ថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។

៣. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ។ រកសមីការប្លង់ (ABC) ។

៤. គណនាចម្ងាយពីចំណុច O ទៅប្លង់ (ABC) ។

ដំណោះស្រាយ

I

១. រកប្រូបាបដែលបានបាកាសទាំងបីកំប៉ុង

ក្នុងទូទឹកកកមានបាកាស 8 កំប៉ុង និងខាក់បារ 12 កំប៉ុង

បុរសម្នាក់បានយកគេសជ្ជៈបីកំប៉ុងដោយចៃដន្យ

- ចំនួនករណីអាច $n(S) = C(20,3) = \dfrac{20!}{17!3!}$

$$= \frac{17! \times 18 \times 19 \times 20}{17! \times 6}$$

$$= 19 \times 20 \times 3$$

$= 1140$ ករណី

តាង A : "បានបាកាសទាំងបីកំប៉ុង"

- ចំនួនករណីស្រប $n(A) = C(8,3) = \dfrac{8!}{5!3!}$

$$= \frac{5! \times 6 \times 7 \times 8}{5! \times 6}$$

$= 7 \times 8 = 56$ ករណី

គេបានប្រូបាប $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{56}{1140} = \dfrac{14}{285}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A) = \dfrac{14}{285}}$

២. រកប្រូបាបដែលបានខាក់បារយ៉ាងតិចមួយកំប៉ុង

តាង B : "បានខាក់បារយ៉ាងតិចមួយកំប៉ុង"

ដោយ B និង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយគ្នា

គេបាន $P(B) = 1 - P(A)$ នោះ $P(B) = 1 - \dfrac{14}{285}$

$$= \frac{285 - 14}{285}$$

$$= \frac{271}{285}$$

ដូចនេះ $\boxed{P(B) = \dfrac{271}{285}}$

II

១. កំណត់ចំនួនពិត x និង y

គេមាន $(1-2i)x + (1+2i)y = 1+i$

$$x - 2xi + y + 2yi = 1 + i$$

$$(x+y) + (-2x+2y)i = 1 + i$$

គេទាញបាន $\begin{cases} x+y=1 \\ -2x+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 & (i) \\ -x+y=\dfrac{1}{2} & (ii) \end{cases}$

បូក (i) និង (ii) គេបាន $2y = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow y = \dfrac{3}{4}$

តាម $(i) : x = 1 - y = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{x = \dfrac{1}{4}, \ y = \dfrac{3}{4}}$

២. រកចំនួនកុំផ្លិច Z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $|Z|+Z=3+4i$

តាង $Z=a+bi$ នោះ $|Z|=\sqrt{a^2+b^2}$

គេបាន $|Z|+Z=3+4i$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}+a+bi=3+4i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2}+a=3 \\ b=4 \end{cases}$$

ចំពោះ $b=4$ នោះ $\sqrt{a^2+4^2}+a=3$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+16}+a=3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+16}=3-a$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a^2+16})^2=(3-a)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2+16=9-6a+a^2$$

$$\Leftrightarrow 16=9-6a$$

$$\Leftrightarrow 6a=-7$$

$$\Leftrightarrow a=-\frac{7}{6}$$

ដូចនេះ $\boxed{Z=-\frac{7}{6}+4i}$

៣. ដោះស្រាយសមីការ $Z^2+\sqrt{3}Z+1=0$

តាម $\Delta=(\sqrt{3})^2-4(1)(1)=3-4=-1=(i)^2$

$$Z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-\sqrt{3}-i}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$Z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

ដូចនេះ $\boxed{Z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\,,\ Z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}$

- សរសេរឫសនីមួយៗជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$\begin{aligned} Z_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i \\ &= \cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{Z_1=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}}$

$$\begin{aligned} Z_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i \\ &= \cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{Z_2=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}}$

III

១. កំណត់តម្លៃ a, b និង c

គេមាន $f(x) = a + \dfrac{b}{x+3} + \dfrac{c}{x-2}$

$= \dfrac{a(x+3)(x-2) + b(x-2) + c(x+3)}{(x+3)(x-2)}$

$= \dfrac{a(x^2+x-6) + b(x-2) + x(x+3)}{x^2+x-6}$

$= \dfrac{ax^2 + (a+b+c)x + (-6a-2b+3c)}{x^2+x-6}$

តែ $f(x) = \dfrac{3x^2+4x-25}{x^2+x-6}$

គេទាញបាន $\begin{cases} a = 3 \\ a+b+c = 4 \\ -6a-2b+3c = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b+c = 1 \\ -2b+3c = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a = 3\,, b = 2\,, c = -1}$

២. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int f(x)dx$

គេបាន $I = \int f(x)dx = \int \left(a + \dfrac{b}{x+3} + \dfrac{c}{x-2}\right)dx$

$= \int \left(3 + \dfrac{2}{x+3} + \dfrac{-1}{x-2}\right)dx$

$= 3x + 2\ln|x+3| - \ln|x-2| + k\,, (x > 2)$

$= 3x + 2\ln(x+3) - \ln(x-2) + k\,, (k \in \mathbb{R})$

ដូចនេះ $\boxed{I = 3x + 2\ln(x+3) - \ln(x-2) + k}\,, (k \in \mathbb{R})$

IV

១. រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល

គេមាន $P : y^2 - 2y + 6x - 5 = 0$

គេបាន $y^2 - 2y = -6x + 5$

$\Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = -6x + 6$

$\Leftrightarrow (y-1)^2 = -6(x-1)$ ជាសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានបន្ទាត់ប្រាប់ទិសស្របនឹងអ័ក្ស $\overrightarrow{oy}$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដាគឺ $\boxed{P : (y-1)^2 = -6(x-1)}$

២. រកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស

ដោយសមីការ $(y-1)^2 = -6(x-1)$ មានទម្រង់ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

គេទាញបាន $h = 1\,, k = 1\,, 4p = -6 \Rightarrow p = -\dfrac{3}{2}$

កំពូល $V(h,k) = V(1,1)$

កំណុំ $F(h+p,k) = F(1-\dfrac{3}{2},1) = F(-\dfrac{1}{2},1)$

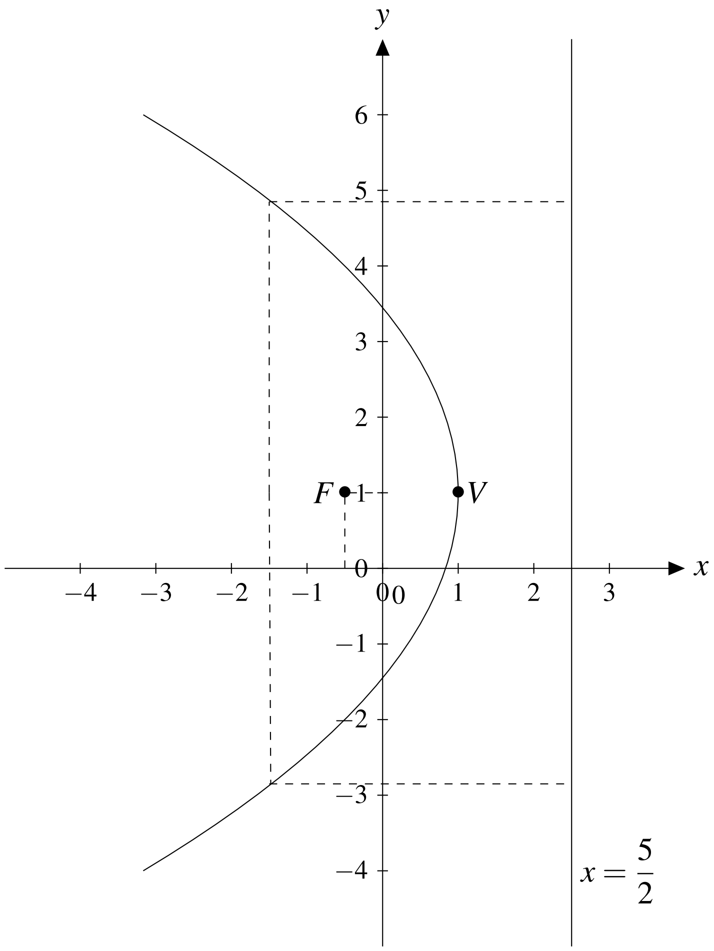
បន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x = h - p = 1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{V(1,1)\ ,\ F(-\frac{1}{2},1)\ ,\ x=\frac{5}{2}}$

- សង់ក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូល

  បើ $x=-1.5$ នោះ $y=4.8$ និង $y=-2.8$

  បើ $x=0$ នោះ $y=1\pm\sqrt{6}$



V គេមាន $f(x)=x^2+\frac{1}{2}-3\ln x$ ដែល $x>0$

១. ក. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ 0

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}(x^2+\frac{1}{2}-3\ln x)=0+\frac{1}{2}+\infty=+\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty}$

ដោយ $\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

ខ. កំណត់អនុគមន៍ g ចំពោះ $x>0$

គេមាន $f(x)=x^2g(x)$ គេបាន $x^2+\frac{1}{2}-3\ln x=x^2g(x)$

នាំឲ្យ $g(x)=\dfrac{x^2+\frac{1}{2}-3\ln x}{x^2}=1+\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{3\ln x}{x^2}$

ដូចនេះ $\boxed{g(x)=1+\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{3\ln x}{x^2}}$, $(x>0)$

- គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $+\infty$

គេបាន $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 g(x)$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1+\frac{1}{2x^2}-\frac{3\ln x}{x^2}\right)$$

$$= (+\infty)(1+0-0) = +\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

២. សិក្សាអថេរភាពនៃ f

$f(x) = x^2+\frac{1}{2}-3\ln x$ ដែល $x>0$

ដេរីវេ $f'(x) = 2x-\frac{3}{x} = \frac{2x^2-3}{x}$

ដោយ $x>0$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $2x^2-3 \Rightarrow x=\sqrt{\frac{3}{2}}$

សញ្ញានៃ $f'(x)$

x	0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

តម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ គឺ $f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 1.39$

• គូសតារាងអថេរភាព

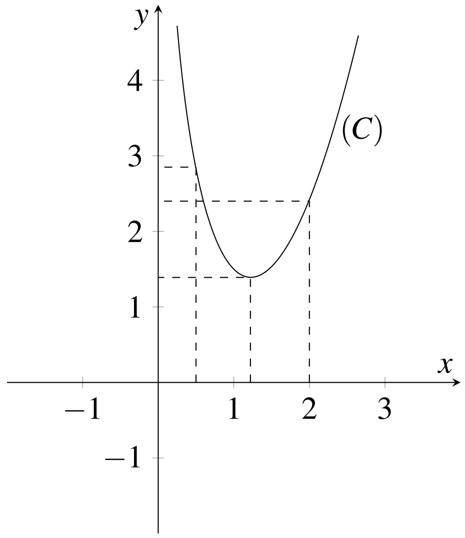
x	0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1.39	↗	$+\infty$

• គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$ និង $f(2)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}-3\ln\frac{1}{2} = 0.75+2.1 = 2.85$

$f(2) = 4+\frac{1}{2}-3\ln 2 = 4.5-2.1 = 2.4$

៣. ក. សង់ក្រាប C



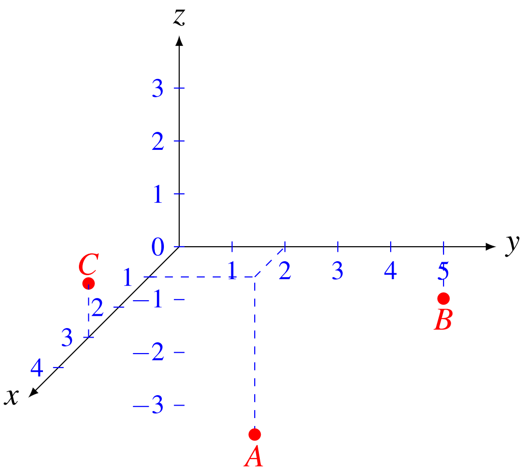
ខ. តើសមីការ $f(x)=0$ មានចម្លើយ ឬទេ?

តាមក្រាប C ខាងលើ សមីការ $f(x)=0$ គ្មានចម្លើយទេ

(ព្រោះ $f(x)\geq 1.39$ គ្រប់ $x\in D$) ។

VI គេមានចំណុច $A(1,2,-3),B(0,5,-1)$ និង $C(3,0,1)$

១. សង់ចំណុច A,B និង C



២. គណនាប្រវែង AB,AC និង BC

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(0-1,5-2,-1+3)=(-1,3,2)$

$\overrightarrow{AC}=(3-1,0-2,1+3)=(2,-2,4)$

$\overrightarrow{BC}=(3-0,0-5,1+1)=(3,-5,2)$

គេបាន $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+(3)^2+(2)^2}=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$ ឯកតាប្រវែង

$AC=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(2)^2+(-2)^2+(4)^2}=\sqrt{4+4+16}=\sqrt{24}$ ឯកតាប្រវែង

$BC=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(3)^2+(-5)^2+(2)^2}=\sqrt{9+25+4}=\sqrt{38}$ ឯកតាប្រវែង

ដូចនេះ $\boxed{AB=\sqrt{14}\,,AC=\sqrt{24}\,,BC=\sqrt{38}}$

• ទាញបញ្ជាក់ថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A

គេបាន $AB^2 = (\sqrt{14})^2 = 14$

$AC^2 = (\sqrt{24})^2 = 24$

$BC^2 = (\sqrt{38})^2 = 38$

ដោយ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (ច្បាប់ពីតាំ)

ដូចនេះ បញ្ជាក់ថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។

៣. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (12+4)\vec{i} - (-4-4)\vec{j} + (2-6)\vec{k}$$

$$= 16\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 16\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}}$

• គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC

តាមរូបមន្ត $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

ដោយ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (16, 8, -4) = 4(4, 2, -1)$

គេបាន $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = 2\sqrt{16+4+1} = 2\sqrt{21}$

ដូចនេះ: $\boxed{S_{\Delta ABC} = 2\sqrt{21} \text{ (ឯកតាផ្ទៃ)}}$

• រកសមីការប្លង់ (ABC)

ប្លង់ (ABC) កាត់តាមចំណុច $C(3, 0, 1)$ និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (16, 8, -4)$ គេបាន:

$(ABC) : a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0$

$16(x-3) + 8(y-0) - 4(z-1) = 0$

$16x - 48 + 8y - 4z + 4 = 0$

$16x + 8y - 4z - 44 = 0$

$4x + 2y - z - 11 = 0$

ដូចនេះ: $\boxed{(ABC):\ 4x + 2y - z - 11 = 0}$

៤. គណនាចម្ងាយពីចំណុច O ទៅប្លង់ (ABC)

គេមាន $(ABC):\ 4x + 2y - z - 11 = 0$ និងចំណុច $O(0, 0, 0)$

ចម្ងាយពីចំណុច O ទៅប្លង់ (ABC) កំណត់ដោយ

$$D = \frac{|4(0) + 2(0) - (0) - 11|}{\sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{16+4+1}}$$

$$= \frac{11}{\sqrt{21}} = \frac{11\sqrt{21}}{21} \text{ (ឯកតាប្រវែង)}$$

ដូចនេះ: $\boxed{D = \frac{11\sqrt{21}}{21} \text{ (ឯកតាប្រវែង)}}$

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា លេខបន្ទប់៖________

ប្រឡង៖ **សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ** លេខតុ៖________

សម័យប្រឡង៖________________ មណ្ឌលប្រឡង៖________________

ហត្ថលេខាអនុរក្ស៖ នាមត្រកូល និងនាមខ្លួន៖________________

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖________________

ហត្ថលេខា៖________________

អក្សរសម្ងាត់

• បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាស់ប្រឡងឡើយ។ ក្រដាស់ប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។

• បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាស់ប្រឡងជាដាច់ខាត។

____ / 125

២

វិញ្ញាសា៖ **គណិតវិទ្យាត្រៀម** រយៈពេល៖ 120 នាទី

រៀបរៀងដោយ៖ **អ៊ុំ ចាន់ធា**

អក្សរសម្ងាត់

I គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{5+x}-2}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$ គ. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{\sin 3x}$

II ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលក្រហម 4 ប៊ូលខ្មៅ 3 និងប៊ូលស 1 ។ គេយកប៊ូល 3 ចេញពីក្នុងថង់ព្រមគ្នាដោយ ចៃដន្យ។ រកប្រូបាបដែលគេយកបាន:

ក. ប៊ូលក្រហមពីរយ៉ាងតិច។ ខ. ប៊ូលពីរយ៉ាងតិចមានពណ៌ដូចគ្នា។ គ. ប៊ូលនីមួយៗមានពណ៌ខុសគ្នា។

III គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1+i\sqrt{3}$ និង $z_2=6\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ។

ក. សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ ខ. សរសេរ $z_1\times z_2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។

គ. សរសេរ $z_1\times z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

IV គណនាអាំងតេក្រាល:

ក. $I=\int_1^2 (3+x-x^2)\,dx$ ខ. $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x+\sin x)^2\,dx$ គ. $K=\int_0^2 \dfrac{x^2+(x+1)^2}{x^2+1}\,dx$

V ១. គេមានចំណុច: $A(-2,1,0)$, $B(0,1,1)$, $C(1,2,2)$ និង $D(0,3,-4)$ ក្នុងតម្រុយ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ។

ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{CD}$ រួចគណនាប្រវែង AB, AC, AD, BD, CD ។

ខ. ចូរបង្ហាញថា ត្រីកោណ ABD និង ACD កែងត្រង់ A ។

២. គេមានប៉ារ៉ាបូល (P) មួយ មានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $O(0,0)$ និងកំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ។

ក. រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល (P) បើគេដឹងថាវាកាត់តាមចំណុច $A(2,6)$

ខ. រកតម្លៃនៃ x_1 បើ $B\left(x_1,\frac{3}{2}\right)$ ស្ថិតលើប៉ារ៉ាបូល (P) រួចសង់ប៉ារ៉ាបូល (P) ។

VI គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y'+2y=x^2$ ។

ក. កំណត់អនុគមន៍ពហុធា g មានដឺក្រេទីពីរជាចម្លើយនៃ (E) ។

ខ. បង្ហាញថា អនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $f-g$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E') : $y'+2y=0$ ។ ដោះស្រាយសមីការ (E') : $y'+2y=0$ ។

VII គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=x-2+\dfrac{4}{e^x+1}$ មានខ្សែកោង C ។

១. គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$ ។ សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ (d_1) : $y=x-2$ ។

២. ចូរស្រាយបំភ្លឺថា នៅលើ $\mathbb{R}$ គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ ។

សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$ ។

៣. បង្ហាញថា បន្ទាត់ d_2 ដែលមានសមីការ $y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $-\infty$ ។

សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹង បន្ទាត់ d_2 ។ សង់ក្រាប C និងអាស៊ីមតូត d_1 និង d_2 របស់វា។

ដំណោះស្រាយ

I គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{5+x}-2}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{5+x}-2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(\sqrt{2+x}-1\right)\left(\sqrt{2+x}+1\right)\left(\sqrt{5+x}+2\right)}{\left(\sqrt{5+x}-2\right)\left(\sqrt{5+x}+2\right)\left(\sqrt{2+x}+1\right)}$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(2+x-1)\left(\sqrt{5+x}+2\right)}{(5+x-4)\left(\sqrt{2+x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{5+x}+2\right)}{(x+1)\left(\sqrt{2+x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{5+x}+2}{\sqrt{2+x}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{5-1}+2}{\sqrt{2-1}+1}$$

$$=\frac{4}{2}$$

$$=2$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{5+x}-2}=2}$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-x^2+x^2-2x+1}{x^{50}-x^2+x^2-2x+1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2\left(x^{98}-1\right)+(x-1)^2}{x^2\left(x^{48}-1\right)+(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)\left(x^{97}+x^{96}+x^{95}+\ldots+x+1\right)+(x-1)^2}{x^2(x-1)\left(x^{47}+x^{46}+x^{45}+\ldots+x+1\right)+(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left[x^2\left(x^{97}+x^{96}+x^{95}+\ldots+x+1\right)+(x-1)\right]}{(x-1)\left[x^2\left(x^{47}+x^{46}+x^{45}+\ldots+x+1\right)+(x-1)\right]}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2\left(x^{97}+x^{96}+x^{95}+\ldots+x+1\right)+(x-1)}{x^2\left(x^{47}+x^{46}+x^{45}+\ldots+x+1\right)+(x-1)}$$

$$=\frac{1^2(1+1+1+\ldots+1+1)+0}{1^2(1+1+1+\ldots+1+1)+0}$$

$$=\frac{98}{48}$$

$$=\frac{49}{24}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}=\dfrac{49}{24}}$ ។

គ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{\sin 3x}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{\sin 3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)}{\sin 3x}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)}{\sin 3x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\sin 3x}$$

តាង $t=x-\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow 3x=\pi+3t$

ពេល $x\to\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t\to 0$

គេបាន $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\sin 3x}=\lim_{t\to 0}\dfrac{2\sin t}{\sin(\pi+3t)}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin t}{-\sin 3t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{2\frac{\sin t}{t}}{3\frac{\sin 3t}{3t}}\right)$$

$$=-\frac{2}{3}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x-\sqrt{3}\cos x}{\sin 3x}=-\dfrac{2}{3}}$ ។

II រកប្រូបាបដែលគេយកបាន:

ក. ប៊ូលក្រហមពីរយ៉ាងតិច

តាង A: ព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេយកបានប៊ូលក្រហមពីរយ៉ាងតិច

ដោយគេយកប៊ូល 3 ព្រមគ្នា ចេញពីក្នុងថង់ដែលមានប៊ូល 8 ដោយចៃដន្យ

គេបាន ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(8,3)$

$$=\frac{8\times7\times6}{1\times2\times3}$$

$$=56$$

ម្យ៉ាងទៀត គេយកបានប៊ូលក្រហមពីរយ៉ាងតិច នោះគេអាចយកបានប៊ូលក្រហម 2 ឬ ប៊ូលក្រហម 3

គេបាន ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(4,2)\times C(4,1)+C(4,3)$

$$=\frac{4\times3}{2}\times4+4$$

$$=6\times4+4$$

$$=28$$

នាំឱ្យ $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{28}{56}=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ: $\boxed{P(A)=\dfrac{1}{2}}$ ។

ខ. ប៊ូលពីរយ៉ាងតិចមានពណ៌ដូចគ្នា

តាង B : ព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេយកបានប៊ូលពីរយ៉ាងតិចមានពណ៌ដូចគ្នា

នោះគេអាចយកបាន ប៊ូលក្រហម 2 ឬ ប៊ូលខ្មៅ 2 ឬប៊ូលក្រហមទាំងបី ឬប៊ូលខ្មៅទាំងបី

គេបាន ចំនួនករណីស្រប $n(B) = C(4,2)\times C(4,1)+C(3,2)\times C(5,1)+C(4,3)+C(3,3)$

$$= 6\times 4+3\times 5+4+1$$

$$= 24+15+5$$

$$= 44$$

នាំឱ្យ $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{44}{56} = \dfrac{11}{14}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B) = \dfrac{11}{14}}$ ។

គ. ប៊ូលនីមួយៗមានពណ៌ខុសគ្នា

តាង C : ព្រឹត្តិការណ៍ដែលគេយកបានប៊ូលនីមួយៗមានពណ៌ខុសគ្នា

នោះគេអាចយកបាន ប៊ូលក្រហម 1និងប៊ូលខ្មៅ 1និងប៊ូលស 1

គេបាន ចំនួនករណីស្រប $n(C) = C(4,1)\times C(3,1)\times C(1,1)$

$$= 4\times 3\times 1$$

$$= 12$$

នាំឱ្យ $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{12}{56} = \dfrac{3}{14}$

ដូចនេះ $\boxed{P(C) = \dfrac{3}{14}}$ ។

III ក. សរសេរ z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z_1 = 1+i\sqrt{3}$

ម៉ូឌុល $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

អាគុយម៉ង់

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{a}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin\alpha &= \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right| \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

គេបាន $z_1 = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)}$ ។

ខ. សរសេរ $z_1\times z_2$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន $z_1 = 1+i\sqrt{3}$

និង $z_2 = 6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$= 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$$

គេបាន $z_1 \times z_2 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}\right)$

$$= 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} + 3i\sqrt{6} - 3\sqrt{6}$$

$$= 3\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right) + 3i\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{z_1 \times z_2 = 3\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right) + 3i\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)}$ ។

គ. សរសេរ $z_1 \times z_2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$z_2 = 6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

គេបាន $z_1 \times z_2 = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]\left[6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$= 2 \times 6\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 12\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{z_1 \times z_2 = 12\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)}$ ។

IV គណនាអាំងតេក្រាល:

ក. $I = \int_1^2 (3 + x - x^2)dx$

គេបាន $I = \int_1^2 (3 + x - x^2)dx$

$$= \left[3x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \left(3 \cdot 2 + \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3}\right) - \left(3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 6 + 2 - \frac{8}{3} - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$= 5 - \frac{1}{2} - \frac{7}{3}$$

$$= \frac{30 - 3 - 14}{6}$$

$$= \frac{13}{6}$$

ដូចនេះ $\boxed{I = \frac{13}{6}}$ ។

ខ. $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+\sin x)^2dx$

គេបាន $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+\sin x)^2dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2x+2\cos x\sin x+\sin^2x\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos x\sin x)\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin x dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot d(\sin x)$

$=\left[x+\sin^2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{\pi}{2}+1$

ដូចនេះ $\boxed{J=1+\frac{\pi}{2}}$ ។

គ. $K=\int_0^2\frac{x^2+(x+1)^2}{x^2+1}dx$

គេបាន $K=\int_0^2\frac{x^2+(x+1)^2}{x^2+1}dx$

$=\int_0^2\frac{x^2+x^2+2x+1}{x^2+1}dx$

$=\int_0^2\frac{2x^2+2x+1}{x^2+1}dx$

$=\int_0^2\left(2+\frac{2x-1}{x^2+1}\right)dx$

$=\int_0^2 2\,dx+\int_0^2\frac{2x}{x^2+1}dx-\int_0^2\frac{dx}{x^2+1}$

$=[2x]_0^2+\int_0^2\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx-[\arctan x]_0^2$

$=[2x]_0^2+\left[\ln|x^2+1|\right]_0^2-[\arctan x]_0^2$

$=\left[2x+\ln|x^2+1|-\arctan x\right]_0^2$

$=(4+\ln 5-\arctan 2)-(0+\ln 1-\arctan 0)$

$=4+\ln 5-\arctan 2$

ដូចនេះ $\boxed{K=4+\ln 5-\arctan 2}$ ។

V ១. ក. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{CD}$ រួចគណនាប្រវែង AB, AC, AD, BD, CD

គេមានចំណុច: $A(-2,1,0)$, $B(0,1,1)$, $C(1,2,2)$ និង $D(0,3,-4)$

គេបានៈ

- $\overrightarrow{AB}=(2,0,1)\Rightarrow AB=\sqrt{2^2+0^2+1^2}=\sqrt{5}$
- $\overrightarrow{AC}=(3,1,2)\Rightarrow AC=\sqrt{3^2+1^2+2^2}=\sqrt{14}$
- $\overrightarrow{AD}=(2,2,-4)\Rightarrow AD=\sqrt{2^2+2^2+(-4)^2}=2\sqrt{6}$
- $\overrightarrow{BD}=(0,2,-5)\Rightarrow BD=\sqrt{0^2+2^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$
- $\overrightarrow{CD}=(-1,1,-6)\Rightarrow CD=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-6)^2}=\sqrt{38}$

ខ. បង្ហាញថា ត្រីកោណ ABD និង ACD កែងត្រង់ A

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(2,0,1)$ និង $\overrightarrow{AD}=(2,2,-4)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=(2\times 2)+(0\times 2)+[1\times(-4)]$

$$=4+0-4$$

$$=0$$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$

គេទាញបាន ត្រីកោណ ABD ជាត្រីកោណកែង កែងត្រង់ A (ពិត)

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{AC}=(3,1,2)$ និង $\overrightarrow{AD}=(2,2,-4)$

គេបាន $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=(3\times 2)+(1\times 2)+[2\times(-4)]$

$$=6+2-8$$

$$=0$$

ដោយ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$

គេទាញបាន ត្រីកោណ ACD ជាត្រីកោណកែង កែងត្រង់ A (ពិត)

ដូចនេះ បញ្ជាក់ថាត្រីកោណ ABD និង ACD កែងត្រង់ A ។

២. ក. រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល (P)

ដោយប៉ារ៉ាបូល P មានកំពូល $V(0,0)$ និងកំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ

នោះប៉ារ៉ាបូលមាន អ័ក្សឆ្លុះ ស្ថិតលើអ័ក្សអរដោនេ

គេបានសមីការស្តង់ដាមានរាង : $(x-0)^2=4P(y-0)$

តែប៉ារ៉ាបូល P កាត់តាម $A(2,6)$

គេបាន $2^2=4P\times 6$

$$4=24P$$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{6}$$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដាគឺ $\boxed{(P):\quad (x-0)^2=\frac{2}{3}(y-0)}$ ។

ខ. ▷ រកតម្លៃនៃ x_1

គេមាន $(P):\quad x^2=\frac{4}{6}y$

ដោយ $B\left(x_1,\frac{3}{2}\right)$ ស្ថិតលើ (P)

គេបាន ${x_1}^2=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}$

$${x_1}^2=1$$

$$\Rightarrow x_1=\pm 1$$

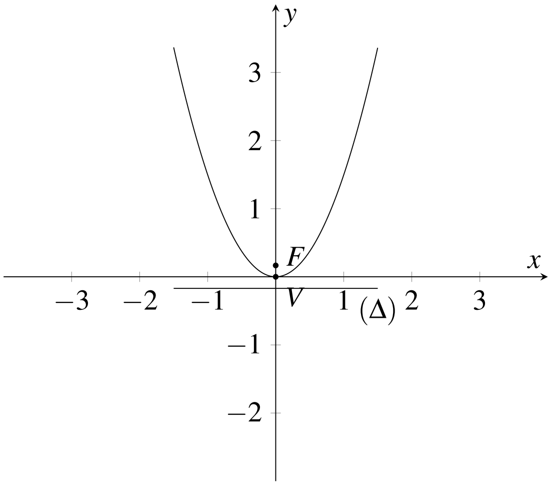
ដូចនេះ $\boxed{x_1=\pm 1}$ ។

▷ សង់ប៉ារ៉ាបូល (P) :

ប៉ារ៉ាបូល (P) មាន :

- កំពូល $V(0,0)$
- កំណុំ $F(0,0+P)$ នោះ $F\left(,\frac{1}{6}\right)$

- បន្ទាត់ប្រាប់ទិស (Δ) : $\quad y=0-P$ នោះ (Δ) : $\quad y=-\dfrac{1}{6}$



VI ក. កំណត់អនុគមន៍ពហុធា g មានដឺក្រេទីពីរជាចម្លើយនៃ (E)

តាង $g(x)=ax^2+bx+c$ ជាចម្លើយនៃ (E)

គេបាន $g'(x)=2ax+b$

ដោយ g ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ g ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (E)

គេបាន
$$g'(x)+2g(x)=x^2$$
$$2ax+b+2\left(ax^2+bx+c\right)=x^2$$
$$2ax+b+2ax^2+2bx+2c=x^2$$
$$2ax^2+(2a+2b)x+(b+2c)=x^2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a=1\\2a+2b=0\\b+2c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=-\dfrac{1}{2}\\c=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

គេបាន $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{g(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}}$ ។

ខ. ▷ បង្ហាញថា អនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $f-g$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E') : $y'+2y=0$

- បើអនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ $f-g$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E') : $y'+2y=0$

  គេមាន (E) : $y'+2y=x^2$

  ដោយ f ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ $f'(x)+2f(x)=x^2 \quad (1)$

  តែ g ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ $g'(x)+2g(x)=x^2 \quad (2)$

  យក (1) ដក (2)

  គេបាន $\left(f'(x)+2f(x)\right)-\left(g'(x)+2g(x)\right)=x^2-x^2$
  $$\left(f'(x)-g'(x)\right)+2\left(f(x)-g(x)\right)=0$$
  $$(f-g)'(x)+2(f-g)(x)=0$$ ជាចម្លើយនៃ (E') : $y'+2y=0$ (ពិត) ។

- បើ $f-g$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E') : $y'+2y=0$ នោះ អនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃ (E) : $y'+2y=x^2$

  ដោយ $f-g$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E') : $y'+2y=0$

គេបាន $(f-g)'(x)+2(f-g)(x)=0$

$$f'(x)-g'(x)+2f(x)-2g(x)=0$$

$$f'(x)+2f(x)=g'(x)+2g(x)$$

តែ g ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ $g'(x)+2g(x)=x^2$

នាំឱ្យ $f'(x)+2f(x)=x^2$ ជាចម្លើយនៃ (E) (ពិត) ។

ដូចនេះ បញ្ជាក់ថា អនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ

$f-g$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(E'):\ y'+2y=0$ ។

▷ ដោះស្រាយសមីការ $(E'):\ y'+2y=0$

មានសមីការសម្គាល់ $r+2=0 \quad \Rightarrow r=-2$

គេបានចម្លើយនៃសមីការ (E') គឺ $y=Ae^{-2x}$ ដែល $A\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការ (E') គឺ $\boxed{y=Ae^{-2x} \text{ ដែល } A\in\mathbb{R}}$ ។

VII

១. • គណនាលីមីតនៃ f ត្រង់ $-\infty$ និងត្រង់ $+\infty$

គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=x-2+\dfrac{4}{e^x+1}$

▷ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-2+\dfrac{4}{e^x+1}\right)$

$=-\infty$

▷ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2+\dfrac{4}{e^x+1}\right)$

$=+\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)=\mp\infty}$ ។

• សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $(d_1):\ y=x-2$

គេមាន $f(x)=x-2+\dfrac{4}{e^x+1}$ និង $(d_1):\ y=x-2$

តាង $g(x)=f(x)-(d_1)$

$=x-2+\dfrac{4}{e^x+1}-(x-2)$

$=\dfrac{4}{e^x+1}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ ក្រាប C ស្ថិតនៅផ្នែកខាងលើនៃបន្ទាត់ (d_1) គ្រប់តម្លៃ x ។

២. • ចូរស្រាយបំភ្លឺថា នៅលើ $\mathbb{R}$ គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

គេមាន $f(x)=x-2+\dfrac{4}{e^x+1}\Rightarrow f'(x)=1-\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$

$=\dfrac{(e^x+1)^2-4e^x}{(e^x+1)^2}$

$=\dfrac{(e^x)^2+2e^x+1-4e^x}{(e^x+1)^2}$

$=\dfrac{(e^x)^2-2e^x+1}{(e^x+1)^2}$

$=\dfrac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$

$=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ ពិត

ដូចនេះ នៅលើ $\mathbb{R}$ គេបានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ ។

• សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$

ដោយ $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

– បើ $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2=0$

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=0\ ,\ e^x+1>0\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\ e^x-1=0$$

$$e^x=1$$

$$e^x=e^0$$

$$\Rightarrow\ x=0$$

– បើ $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2>0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{e^x-1}{e^x+1}>0\\ \frac{e^x-1}{e^x+1}<0\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x>0\\ x<0\end{array}\right.$$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	

– $f(0)=0-2+\frac{4}{e^0+1}=0$

តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

ដូចនេះ

– ចំពោះ $x\in(-\infty,0)$ អនុគមន៍ f កើនពី $-\infty$ ទៅ 0

– ចំពោះ $x=0$ នោះអនុគមន៍ f មានតម្លៃស្មើ 0

– ចំពោះ $x\in(0,+\infty)$ អនុគមន៍ f កើនពី 0 ទៅ $+\infty$ ។

៣. • បង្ហាញថា បន្ទាត់ d_2 ដែលមានសមីការ $y=x+2$ ជាអាសុីមតូតទ្រេតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $-\infty$

គេមាន $f(x)=x-2+\dfrac{4}{e^x+1}$

$=x+2-4+\dfrac{4}{e^x+1}$

$=x+2+\dfrac{4-4e^x-4}{e^x+1}$

$=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+1}$

$=x+2-\dfrac{4}{1+\frac{1}{e^x}}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{4}{1+\frac{1}{e^x}}\right)=0$

នាំឱ្យ បន្ទាត់ $y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ត្រង់ $-\infty$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ត្រង់ $-\infty$ ។

- សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹង បន្ទាត់ d_2

តាង $h(x)=f(x)-(d_2)$

$=x-2+\dfrac{4}{e^x+1}-(x+2)$

$=x-2+\dfrac{4}{e^x+1}-x-2$

$=\dfrac{4}{e^x+1}-4$

$=\dfrac{4-4e^x-4}{e^x+1}$

$=-\dfrac{4e^x}{e^x+1}<0\ \forall x\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ ក្រាប C ស្ថិតនៅផ្នែកខាងក្រោមនៃបន្ទាត់ (d_2) គ្រប់តម្លៃ x ។

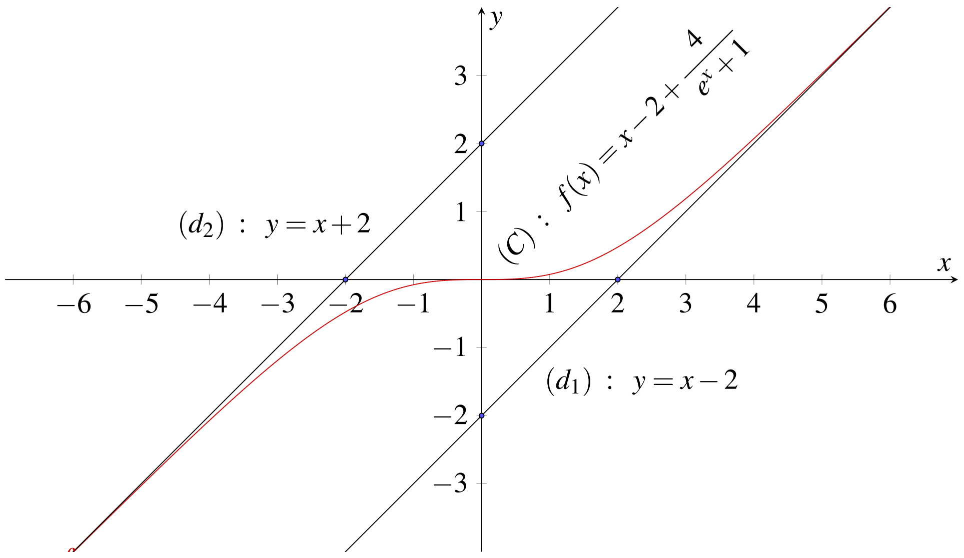
- សង់ក្រាប C និងអាស៊ីមតូត d_1 និង d_2 របស់វា

▷ $(d_1)\ :\ y=x-2$

x	0	2
y	-2	0

▷ $(d_2)\ :\ y=x+2$

x	0	-2
y	2	0



ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា លេខបន្ទប់៖________

ប្រឡង៖ **សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ** លេខតុ៖________

សម័យប្រឡង៖________________ មណ្ឌលប្រឡង៖________________

ហត្ថលេខាអនុរក្ស៖ នាមត្រកូល និងនាមខ្លួន៖________________

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖________________ អក្សរសម្ងាត់

ហត្ថលេខា៖________________

• បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាស់ប្រឡងឡើយ។ ក្រដាស់ប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។

• បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាស់ប្រឡងជាដាច់ខាត។

$\frac{\quad}{125}$

៣

វិញ្ញាសា៖ **គណិតវិទ្យាត្រៀម** រយៈពេល៖ 120 នាទី

រៀបរៀងដោយ៖ **ម៉ី ចន្ទមករា**

អក្សរសម្ងាត់

I គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z=\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{3}+i}$ ។

ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ពិជគណិត។

ខ. សរសេរ z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\dfrac{\pi}{12}$ និង $\sin\dfrac{\pi}{12}$ ។

II គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$ ខ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\pi-2x}{\cos x}$ គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)(1-\cos 2x)\sin x}{x^4}$

III ១. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានលក្ខណៈដើម៖ $(E): y''-2y'+3y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=0$ ។

២. រកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែអូម៉ូសែនលំដាប់ទី 2 មានមេគុណថេរដែលមានចម្លើយ $f(x)=(x+2)e^{3x}$ ។

IV ក្នុងប្រអប់មួយមានប៊ិកប្រភេទដូចគ្នាចំនួន 20 ដើម ដែលមានពណ៌ខៀវ 14 ដើម និងពណ៌ក្រហម 6 ដើម។ គេយកប៊ិក 5 ដើម ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តការណ៍៖

ក. យកបានប៊ិកខៀវទាំង 5 ដើម។

ខ. យកបានប៊ិកខៀវ 3 ដើមនិងក្រហម 2 ដើម។

គ. យកបានប៊ិកក្រហម 1 ដើមយ៉ាងតិច។

V គណនាអាំងតេក្រាល៖ $I=\displaystyle\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$ និង $J=\displaystyle\int_1^e\frac{1+\ln x}{x}dx$

VI អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{1+x^2+2\ln x}{x^2}$ ។ (C) ជាក្រាបនៃ f នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

១. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f រួចរកលីមីតនៃ f ត្រង់ចុងដែនកំណត់។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C) ។

២. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$ ។ បង្ហាញថាអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x=1$ ។ គណនា $f(1)$។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

៣. បង្ហាញថាក្រាប (C) មានចំណុចរបត់មួយ។គណនាកូអរដោនេចំណុចរបត់នោះ។

(គេយក $\sqrt[3]{e}=1.4$)

៤. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតដេករបស់វា។

៥. សង់ក្រាប (C)

VII ១. គេឲ្យប៉ារ៉ាបូល $P:\dfrac{1}{4}y^2-x-y+3=0$ ។ សរសេរសមីការស្តង់ដារប៉ារ៉ាបូល រួចទាញរកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស។

២. ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយ គេឲ្យ $A(2,3,0)$,$B(0,-3,2)$ និង $C(-2,3,4)$ ។

ក. ចូរសង់ត្រីកោណ ABC

ខ. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BA}$ និង $\overrightarrow{BC}$ ។បង្ហាញថា $\triangle ABC$ ជាត្រីកោណសមបាត។

ដំណោះស្រាយ

I ចំនួនកុំផ្លិច $z=\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{3}+i}$ ។

ក. សរសេរ z ជាទម្រង់ពិជគណិត

គេបាន $z=\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}+i}$;ព្រោះ $\boxed{\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}{\sqrt{3}+i}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}+1}{4},\quad (i^2=-1)$$

$$=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$$

ដូចនេះ $\boxed{z=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}+i\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}}$

ខ. សរសេរ z ជាទម្រង់ពិជគណិត

យើងមាន $z=\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{z=\dfrac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\right)}$

+ ទាញរកតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\cos\frac{\pi}{12}$

ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ $z=\dfrac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\right)$

ទម្រង់ពិជគណិត $z=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \sin\frac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

II គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$ រាង $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

គេបាន $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{3})(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+3-3)}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}=\frac{\sqrt{3}}{6}}$

ខ. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cos x}$ រាង $\frac{0}{0}$

$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta$

គេបាន $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

តាង $t=\frac{\pi}{2}-x$

ដោយ $x\to\frac{\pi}{2}$ នោះ $t\to 0$

យើងបាន $\lim_{t\to 0}\frac{2t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{2t}{t}}{\frac{\sin t}{t}}=\frac{2}{1}=2$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cos x}=2}$

គ. $\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(1-\cos 2x)\sin x}{x^4}$ រាង $\frac{0}{0}$

$1-\cos 2x=2\sin^2 x$

គេបាន $\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(1-\cos 2x)\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(2\sin^2 x)\sin x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)}{x}\cdot\frac{2\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{\sin x}{x}$$

$$=1\times 2\times 1$$ ព្រោះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)}{x}=1,\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$

$$=2$$

III ១. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានលក្ខណៈដើម៖

$(E): y''-2y'+3y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2-2\lambda+3=0$

យើងបាន $\Delta'=(-1)^2-1\cdot 3=-2<0$

ឫស $\lambda_{1,2}=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}=1\pm i\sqrt{2}$

$\Rightarrow(\alpha=1,\beta=\sqrt{2})$

ចម្លើយទូទៅ $y=(A\cos\beta x+B\sin\beta x)e^{\alpha x}=(A\cos\sqrt{2}x+B\sin\sqrt{2}x)e^x\quad ,A,B\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow y'=(-A\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x+B\sqrt{2}\cos\sqrt{2}x)e^x+e^x(A\cos\sqrt{2}x+B\sin\sqrt{2}x)$

$= e^x[(B-A\sqrt{2})\sin\sqrt{2}x + (B\sqrt{2}+A)\cos\sqrt{2}x]$

ដោយ $\begin{cases} y(0) &= 2 \\ y'(0) &= 0 \end{cases}$ និង $\begin{cases} \sin 0 &= 0 \\ \cos 0 &= 1 \\ e^0 &= 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A+0 &= 2 \\ 0+(B\sqrt{2}+A) &= 0 \end{cases}$ គេបាន $\begin{cases} A &= 2 \\ B &= -\sqrt{2} \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{y = (2\cos\sqrt{2}x - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x)e^x}$

២. រកសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែអូម៉ូសែនលំដាប់ទី២ មានគុណថេរ $(E): y'' + by' + cy = 0$

ដែលមានចម្លើយ $f(x) = (x+2)e^{3x}$

• $f'(x) = e^{3x} + 3e^{3x}(x+2)$

$= e^{3x}(3x+7)$

• $f''(x) = 3e^{3x}(3x+7) + 3e^{3x}$

$= e^{3x}(9x+24)$

យក $f''(x), f'(x)$ និង $f(x)$ ជំនួសក្នុងសមីការ (E)

យើងបាន $e^{3x}(9x+24) + be^{3x}(3x+7) + c(x+2)e^{3x} = 0$

$e^{3x}(9x+24+3bx+7b+cx+2c) = 0$

$(9+3b+c)x + (24+7b+2c) = \frac{0}{e^{3x}} = 0$

$\Longrightarrow \begin{cases} 9+3b+c &= 0 \quad (1) \\ 24+7b+2c &= 0 \quad (2) \end{cases}$

•$(1) \Rightarrow c = -9-3b \quad (3)$

• យក (3)ជំនួសក្នុង (2)

$24+7b+18-6b = 0$

$6+b = 0$

$b = -6$

• ជួសក្នុង (3)

$\Rightarrow c = -9-3(-6) = 9$

ដូចនេះ $\boxed{(E): y'' - 6y' + 9y = 0}$

IV ក្នុងប្រអប់មានប៊ិកសរុប 20 ដើម ក្នុងនោះខៀវ 14 ដើម និងក្រហម 6 ដើម គេចាប់យក 5 ដើមដោយចៃដន្យ

នោះចំនួនករណីអាចគឺ $n(s) = c(20,5) = \frac{20!}{(20-5)!5!} = \frac{20\times19\times18\times17\times16}{5\times4\times3\times2\times1} = 15540$ ករណី

ក. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍យកបានប៊ិកខៀវទាំង 5 ដើម

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍យកបានប៊ិកខៀវទាំង 5 ដើម

នោះ $n(A) = C(14,5) = \frac{14!}{(14-5)!5!} = 2002$ ករណី

យើងបាន $P(A) = \frac{2002}{15540} = 0.1291$

ដូចនេះ $\boxed{P(A) = 0.1291}$

ខ. យកបានប៊ិកខៀវ 3 ដើមនិងក្រហម 2 ដើម

តាង B ជាប្រូបាបយកបានប៊ិកខៀវ 3 ដើមនិងក្រហម 2 ដើម

នោះ $n(B) = C(14,3) \times C(6,2) = \dfrac{14!}{(14-3)!3!} \times \dfrac{6!}{(6-2)!2!} = 5460$ ករណី

យើងបាន $P(B) = \dfrac{5460}{15540} = 0.3521$

ដូចនេះ $\boxed{P(A) = 0.3521}$

គ. យកបានប៊ិកក្រហម 1 ដើមយ៉ាងតិច

តាង C ជាប្រូបាបយកបានប៊ិកក្រហម 1 ដើមយ៉ាងតិច

C ជាព្រឹត្តិការណ៍ប្រាស់នៃព្រឹត្តិការណ៍ A

យើងបាន $P(C) = 1 - P(A) = 1 - 0.1291 = 0.8709$

ដូចនេះ $\boxed{P(A) = 0.8709}$

V គណនាអាំងតេក្រាល

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$$
$$= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} \cos x dx$$
$$= \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^4 x} \cos x dx$$

តាង $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$

យើងបាន $I = \displaystyle\int \frac{1-u^2}{u^4} du$

$$= \int \left(\frac{1}{u^4} - \frac{u^2}{u^4} du \right)$$
$$= \frac{-1}{3u^3} - \frac{-1}{u} + C$$
$$= \frac{-1}{3\sin^3 x} - \frac{-1}{\sin x} + C$$

ដូចនេះ $\boxed{I = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{3\sin^3 x} + C, (C \in \Re)}$

$$J=\int_1^e \frac{1-\ln x}{x}dx$$
$$=\int_1^e\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\ln x\right)dx$$
$$=\int_1^e\left[\frac{1}{x}+(\ln x)'\ln x\right]dx$$
$$=\left[\ln x+\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e$$
$$=\left(\ln e+\frac{\ln^2 e}{2}\right)-\left(\ln 1+\frac{\ln^2 1}{2}\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)-(0+0)=\frac{3}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{J=\frac{3}{2}}$

VI អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{1+x^2+2\ln x}{x^2}$

១. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} x & >0 \\ x^2 & \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0$

ដូចនេះ $\boxed{D=(0,+\infty)}$

$+$ រកលីមីតនៃ fត្រង់ 0^+ និង $+\infty$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1+x^2+2\ln x}{x^2}=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1+x^2+2\ln x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x^2}+1+2\frac{\ln x}{x^2}\right)$$
$$=0+1+2\cdot 0$$
$$=1$$

$+$ ទាញរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C)

- ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x=0 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប } (C)}$

- ដោយ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ y=1 ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប } (C)}$

២. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

$$\bullet\ f'(x)=\frac{\left(2x+\dfrac{2}{x}\right)\cdot x^2-2x\left(1+x^2+2\ln x\right)}{x^4}$$
$$=\frac{2x^3+2x-2x-2x^3-4x\ln x}{x^4}$$
$$=\frac{-4x\ln x}{x^4}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\dfrac{-4x\ln x}{x^4}}$

+ សញ្ញានៃ $f'(x)$ យកតាម $(-\ln x)$

$\bullet(-\ln x)=0\Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow x=e^0=1$

$\bullet(-\ln x)>0\Leftrightarrow \ln x<0\Leftrightarrow x<e^0=1$

$\bullet(-\ln x)<0\Leftrightarrow \ln x>0\Leftrightarrow x>e^0=1$

+ តារាងសញ្ញាដេរីវេ $f'(x)$

x	0 $\qquad$ 1 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	‖ $\quad +\quad 0\quad -$

ត្រង់$x=1$ នោះ $f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$

ដូចនេះ $\boxed{\text{អនុគមន៍ } f \text{ មានអតិបរមាត្រង់ } x=1}$

+ គណនា $f(1)$

$\bullet f(1)=\dfrac{1+1+2\ln 1}{1}=\dfrac{1+1+0}{1}=2$

+ តារាងអថេរភាព

x	0 $\qquad$ 1 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	‖ $\quad +\quad 0\quad -$
$f(x)$	‖ $-\infty\ \nearrow\ 2\ \searrow\ 1$

៣. បង្ហាញថាក្រាប (C) មានចំណុចរបត់មួយ

$\bullet$ ដេរីវេទី១: $f'(x)=\dfrac{-4\ln x}{x^3}$

• ដេរីវេទី២: $f''(x) = -4\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^3 - 3x^2\ln x}{x^6}$

$$= -4\frac{x^2 - 3x^2\ln x}{x^6}$$

$$= \frac{-4x^2(1-3\ln x)}{x^6}$$

$$= \frac{(3\ln x - 1)}{x^4}$$

+ សញ្ញានៃ $f''(x)$ យកតាម $(3\ln x - 1)$

•$3\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$

•$3\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{e}$

•$3\ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x < \sqrt[3]{e}$

តារាងសិក្សាសញ្ញា $f''(x)$

x	0		$\sqrt[3]{e}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

• ត្រង់ $x = \sqrt[3]{e}$ នោះ $f''(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

ដូចនេះ: ក្រាប (C) មានចំណុចរបត់មួយត្រង់ $x = \sqrt[3]{e}$

+ រកកូអរដោនេចំណុចរបត់

• $f(\sqrt[3]{e}) = \dfrac{1 + (\sqrt[3]{e}) + 2\ln e^{\frac{1}{3}}}{(\sqrt[3]{e})^2}$

$$= \frac{1 + (1.4)^2 + 2\cdot\frac{1}{3}}{(1.4)^2}$$

$$= 1.85$$

ដូចនេះ: ចំណុចរបត់គឺ $I(1.4, 1.85)$

៤. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C) និងអាស៊ីមតូតដេក

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វគឺ

$$\frac{1 + x^2 + 2\ln x}{x^2} = 1$$

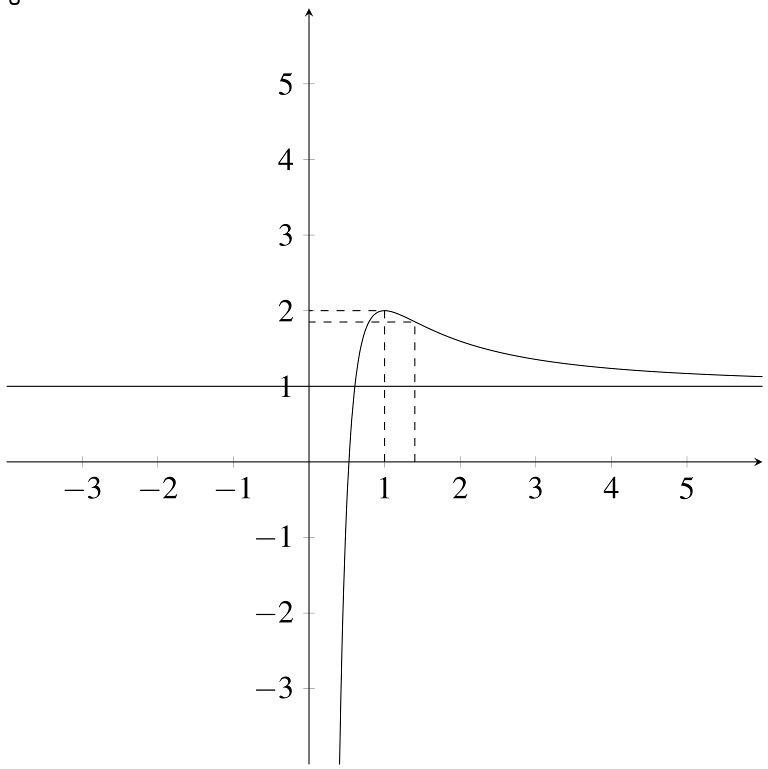
$$1 + x^2 + 2\ln x = x^2$$

$$\ln x = -\frac{1}{2}$$

$$x = e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = 0.6$$

ដូចនេះ: ចំណុចរបត់គឺ $I(0.6, 1)$

៥. ក្រាប



VII

១. ប៉ារ៉ាបូល $(P): \frac{1}{4}y^2 - x^2 - y + 3 = 0$

សរសេរសមីការស្តង់ដារ ទាញរកកូអរដោនេនៃកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស

$P: \frac{1}{4}y^2 - x - y + 3 = 0$

$$y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$$

$$y^2 - 4y = 4x - 12$$

$$y^2 - 4y + 2^2 = 4x - 12 + 2^2$$

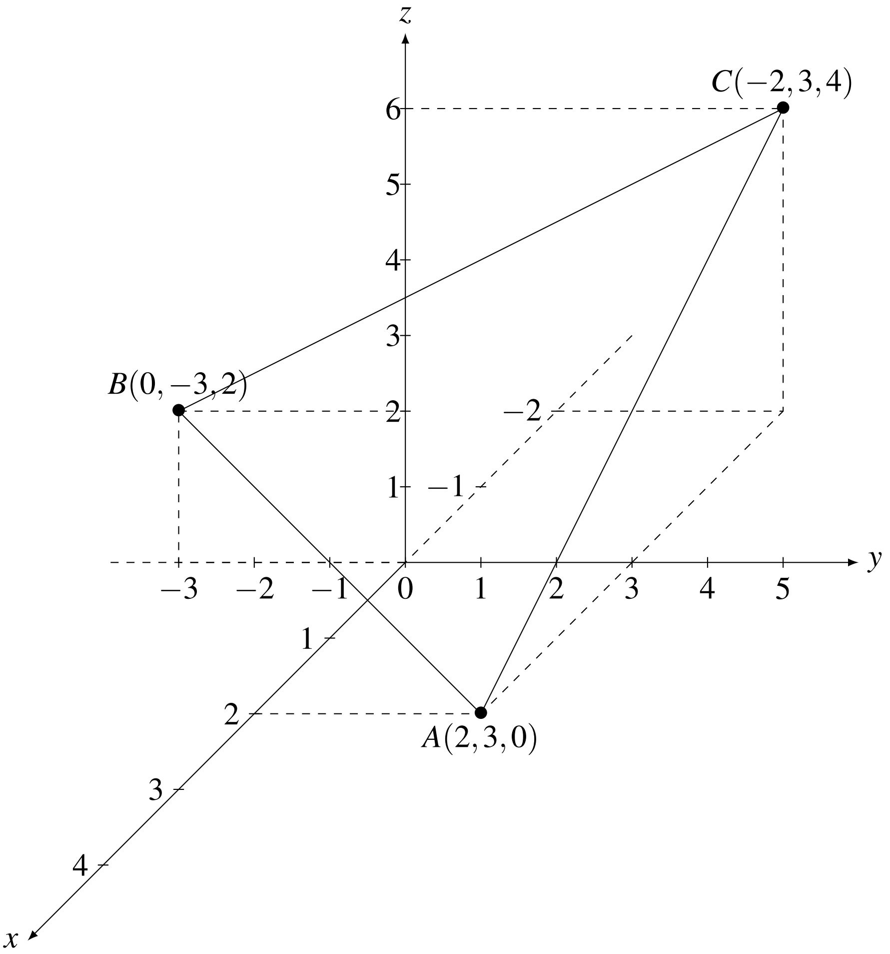
$$(y-2)^2 = 4x - 8$$

ដូចនេះសមីការស្តង់ដារប៉ារ៉ាបូល $\boxed{P: (y-2)^2 = 4x - 8}$ មានអ័ក្សឆ្លុះដេក

យើងទាញបាន $\begin{cases} k = 2, h = 2 \\ 4p = 4 \Rightarrow p = 1 \end{cases}$

- កំពូល $V(h,k) \Rightarrow V(2,2)$
- កំណុំ $F(h+p,k) \Rightarrow F(3,2)$
- សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x = h - p = 1$

២. ក. សង់ត្រីកោណ ABC



ខ. កូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}$ ។ បង្ហាញថា ΔABC ជាត្រីកោណសមបាត

$\overrightarrow{BA}=(2-0,3-3,0-2)=(2,0,2)$

$\overrightarrow{BC}=(-2-0,3+3,4-2)=(-2,6,2)$

បង្ហាញថា ΔABC ជាត្រីកោណសមបាត

$\bullet BA=|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{2^2+6^2+(-2)^2}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$

$\bullet BC=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-2)^2+6^2+2}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$

យើងបាន $BA=BC=2\sqrt{11}$

ដូចនេះ ΔABC ជាត្រីកោណសមបាតដែលមានបាត $[AC]$ ។

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា លេខបន្ទប់៖________

ប្រឡង៖ **សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ** លេខតុ៖________

សម័យប្រឡង៖____________________ មណ្ឌលប្រឡង៖____________________

ហត្ថលេខាអនុរក្ស៖ នាមត្រកូល និងនាមខ្លួន៖____________________

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖____________________

ហត្ថលេខា៖____________________

អក្សរសម្ងាត់

• បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាល់ប្រឡងឡើយ។ ក្រដាស់ប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។

• បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាស់ប្រឡងជាដាច់ខាត។

✂ -

____ / 125

៤

វិញ្ញាសា៖ **គណិតវិទ្យាត្រៀម** រយៈពេល៖ 120 នាទី

រៀបរៀងដោយ៖ **ជិក ជី**

អក្សរសម្ងាត់

I គណនាលីមីតខាងក្រោម :

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2021x-\sin 2023x}{2020x+\sin 2025x}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-20}{\sqrt[3]{3x+2}-2}$ គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2021x}-e^{-2021x}}{\sin 2x}$

II ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីពណ៌មានឃ្លីពណ៌សចំនួន2 ឃ្លីពណ៌ក្រហមចំនួន4 និងឃ្លីពណ៌ខៀវចំនួន 4 ។ គេចាប់យកឃ្លីចំនួន 3 ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ :

A ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ក្រហម ។ B យ៉ាងតិចមានឃ្លី 2 មានពណ៌ខៀវ ។

C ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ខុសៗគ្នា ។

III គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=3+3i\sqrt{3}$ និង $z_2=\sqrt{3}+i$ ។

ក. គណនា $z_1\times z_2$ និង $\dfrac{z_1}{z_2}$ ។ ខ. សរសេរ $z_1\times z_2$ និង $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ. សរសេរ $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^3$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

IV គណនាអាំងតេក្រាល ៖ $I=\int_1^2(2-x+3x^2)dx$ $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2x-\dfrac{1}{2}\cos 4x)dx$

និង $K=\int_2^3(3x-2+\dfrac{1}{x-1})dx$ ។

V ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $E: y''-y'+2y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយនៃ E បើគេដឹងថាអនុគមន៍ចម្លើយមានបរមារស្មើ 3 ត្រង់ $x=0$ ។

VI ១. គេមានសមីការ $(E): 9x^2+4y^2+18x-24y+9=0$ ។

ក. បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប ។

ខ. រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច កូអរដោនេផ្ចិត កំពូល កំណុំ រួចសង់អេលីបនេះ ។

២. គេមានបីចំណុច $A(-1;1;2);B(0;2;4)$ និង $C(-1;3;1)$ ។

ក. គណនាផលគុណនៃពីរវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។ រួចទាញបញ្ជាក់ថា ចំណុច $A;B$ និង C រត់មិនត្រង់គ្នា

ខ. ចូររកផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ។

VII គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}$ ។ គេតាងដោយ C ក្រាបរបស់អនុគមន៍នៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C ។

ខ. សិក្សាអថេរភាពនៃ f ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច A ជាប្រសព្វរវាងក្រាប C និងអ័ក្សអរដោនេ រួចបង្ហាញថាចំណុច A ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C ។

គ. រកសមីការបន្ទាត់ T ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ណុច A ។

ឃ. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ T នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ង. គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប C និងអ័ក្ស $(x'ox)$ លើចន្លោះ $[o,1]$ ។

ដំណោះស្រាយ

I គណនាលីមីត

ក $\lim_{x\to 0}\dfrac{2021x-\sin 2023x}{2020x+\sin 2025x}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x\to 0}\dfrac{2021x-\sin 2023x}{2020x+\sin 2025x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{2021x-\sin 2023x}{x}}{\frac{2020x+\sin 2025x}{x}}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{2021-\frac{\sin 2023x}{x}}{2020+\frac{\sin 2025x}{x}}$

$=\dfrac{2021-2023}{2020+2025}=\dfrac{-2}{4045}$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\dfrac{2021x-\sin 2023x}{2020x+\sin 2025x}=-\dfrac{2}{4045}}$

ក $\lim_{x\to 2}\dfrac{5x^2-20}{\sqrt[3]{3x+2}-2}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x\to 2}\dfrac{5x^2-20}{\sqrt[3]{3x+2}-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{5(x^2-4)(\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[2]{3x+2}+4}{3x+2-8}$

$=\lim_{x\to 2}\dfrac{5(x+2)(x-2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[2]{3x+2}+4)}{3x-6}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{5(x+2)(x-2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[2]{3x+2}+4)}{3(x-2)}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{5(x+2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[2]{3x+2}+4)}{3}$

$=\dfrac{5(2+2)(\sqrt[3]{(6+2)^2}+2\sqrt[3]{6+2}+4)}{3}$

$=\dfrac{20(2^2+2\times 2+4)}{3}=\dfrac{20\times 12}{3}$

$=20\times 4=80$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 2}\dfrac{5x^2-20}{\sqrt[3]{3x+2}-2}=80}$

ក $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2021}-e^{-2021x}}{2x}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2021}-e^{-2021x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2021x}-1+1-e^{-20212}}{2x}$

$=\lim_{x\to 0}(\dfrac{e^{2021x}-1}{2x}-\dfrac{e^{-2021x}-1}{2x})$

$=\dfrac{2021}{2}-\dfrac{-2021}{2}=\dfrac{4042}{2}=2021$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2021}-e^{-2021x}}{2x}=2021}$

II រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ :

បម្រាប់ ៖ ឃ្លីស 2 ឃ្លីក្រហម 4 និងឃ្លីខៀវ 4 នោះឃ្លីសរុប $=10$

ក្នុងការចាប់យកឃ្លី 3 ចេញពីថង់ គេបាន

ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(10,3)=\dfrac{10!}{(10-3)!\times 3!}=\dfrac{10\times 9\times 8\times 7!}{7!\times 3\times 2\times 1}=120$ ករណី

A ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ក្រហម :

តាមរូបមន្ត $P(A)=\dfrac{n(A)}{nS}$

ដោយ $n(A)=C(4,1)=4$ ករណី

$\Rightarrow P(A)=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\frac{1}{30}}$

B យ៉ាងតិចមានឃ្លី 2 ពណ៌ខៀវ :

តាម $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}$

ដោយ $n(B)=C(4,2)\times C(6,1)+C(4,3)=\frac{4!}{(4-2)!\times 2!}+\frac{4!}{(4-3)!\times 3!}$

$=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}+\frac{4}{1}=10$ ករណី

$\Rightarrow P(B)=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\frac{1}{12}}$

C ឃ្លីទាំង 3 មានពណ៌ខុសគ្នា :

តាម $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}$

ដោយ $n(C)=C(2,1)\cdot C(4,1)\cdot C(4,1)=2\cdot 4\cdot 4=32$ ករណី

$\Rightarrow P(C)=\frac{32}{120}=\frac{4}{15}$

ដូចនេះ $\boxed{P(C)=\frac{4}{15}}$

III គេមាន $z_1=3+3i\sqrt{3}$ និង $z_2=\sqrt{3}+i$

ក គណនា $z_1\times z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$

គេបាន $z_1\times z_2=(3+3i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)$

$=3\sqrt{3}+3i+3i\sqrt{3^2}-3\sqrt{3}$

$=3i+9i=12i$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3+3i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$

$=\frac{(3+3i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}$

$=\frac{3\sqrt{3}-3i+3i\sqrt{3^2}+3\sqrt{3}}{3-1}$

$=\frac{6\sqrt{3}+6i}{2}=3\sqrt{3}+3i$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{array}{l} z_1\times z_2=12i \\ \frac{z_1}{z_2}=3\sqrt{3}+3i \end{array}}$

ក សរសេរ $z_1\times z_2$ និង $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេបាន $z_1 \times z_2 = 12i = 12(0+i) = 12(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$$\frac{z_1}{z_2} = 3\sqrt{3} + 3i$$

$$= 3(\sqrt{3}+i) = 3\times 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})$$

$$= 6(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = [6(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})]^2$$

$$= 36(\cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6})$$

$$= 36(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

ដូចនេះ: $\boxed{z_1 \times z_2 = 12(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) \quad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = 36(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})}$

ក សរសេរ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

ដោយ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 6(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$$\Rightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 = [6(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})]^3$$

$$= 6^3(\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6})$$

$$= 216(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

$$= 216(0+i)$$

ដូចនេះ: $\boxed{0+216i}$

IV គណនាអាំងតេក្រាល ៖

- $I = \int_1^2 (2-x+3x^2)dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{3}\right]_1^2$

$$= \left[2(2) - \frac{2^2}{2} + 2^3\right] - \left[2(1) - \frac{1^2}{2} + 1^3\right]$$

$$= (4-2+8) - (2+\frac{1}{2})$$

$$= 10 - \frac{5}{2} = \frac{20-5}{2} = \frac{15}{2}$$

ដូចនេះ: $\boxed{I = \frac{15}{2}}$

- $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x)dx = \left[\frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{8}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$$= \left[\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2} - \frac{1}{8}\sin\pi\right] - \left[\frac{\sin 0}{2} - \frac{1}{8}\sin 0\right] = (\frac{1}{2} - 0) - (0-0) = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $\boxed{J = \frac{1}{2}}$

- $K=\int_2^3 (3x-2+\frac{1}{x-1})dx=\left[\frac{3x^2}{2}-2x+\ln|x-1|\right]_2^3$

  $=(\frac{3\times 3^2}{2}-2\times 3+\ln|3-1|)-(\frac{3\times 2^2}{2}-2\times 2+\ln|2-1|)$

  $=\frac{27}{2}-6+\ln 2-6+4+\ln 1=\frac{27-12}{2}+\ln 2=\frac{15}{2}+\ln 2$

  ដូចនេះ $\boxed{K=\frac{15}{2}+\ln 2}$

V ក ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

យើងមានសមីការ $E: y''-y'+2y=0$

មានសមីការសម្គាល់ : $r^2-r+2=0$

$(r-2)(r-1)=0$

គេបាន $r_1=-1, r_2=2$

ចម្លើយទូទៅនៃ E គឺ $y=Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$, $(A,B\in\mathbb{R})$

ដូចនេះ $\boxed{y=Ae^{-x}+Be^{2x} \text{ ជាចម្លើយទូទៅនៃ } (E)}$, $(A,B\in\mathbb{R})$

ក រកចម្លើយនៃ (E) :

ដោយដឹងថា អនុគមន៍ចម្លើយមានបរមាស្មើ 3 ត្រង់ $x=0$

គេបាន $\begin{cases} y(0)=3 \\ y'(0)=0 \end{cases}$

តែ $y=Ae^{-x}+Be^{2x}$

$\Rightarrow y'=-Ae^{-x}+2Be^{2x}$

- $y(0)=3\Rightarrow A+B=3$

  $\Rightarrow A=3-B \quad (1)$
- $y'(0)=0\Rightarrow -A+2B=0 \quad (2)$

យកសមីការ (1) ជំនួសក្នុង 2 គេបាន

$-(3-B)+2B=0$

$-3+B+2B=0$

$3B=3\Rightarrow B=\frac{3}{3}=1$

$(1)\Rightarrow A=3-1=2$

ដូចនេះ $\boxed{y=2e^{-x}+e^{2x} \text{ ជាចម្លើយនៃ } E \text{ ។}}$

VI ១. យើងមានសមីការ $(E): 9x^2+4y^2+18x-24y+9=0$

ក បង្ហាញថាសមីការ ជាសមីការអេលីប

គេបាន $(E): 9x^2+4y^2+18x-24y+9=0$

$$(9x^2+18x)+(4y^2-24y)=-9$$
$$9(x^2+2x+1)-9+4(y^2-6y+9)-36=-9$$
$$9(x+1)^2+4(y-3)^2=36$$
$$\frac{9(x+1)^2}{36}+\frac{4(y-3)^2}{36}=1$$
$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1 \text{មានទម្រង់}$$
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \quad \text{អ័ក្សធំឈរ}$$

ដូចនេះ: $(E): \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$ ជាសមីការអេលីប ។

ក រកប្រវែងអ័ក្សធំ ប្រវែងអ័ក្សតូច កូអរដោនេផ្ចិត កំពូល កំណុំ រួចសង់អេលីបនេះ

តាមសមីការខាងលើ គេបាន

$h=-1; k=3$

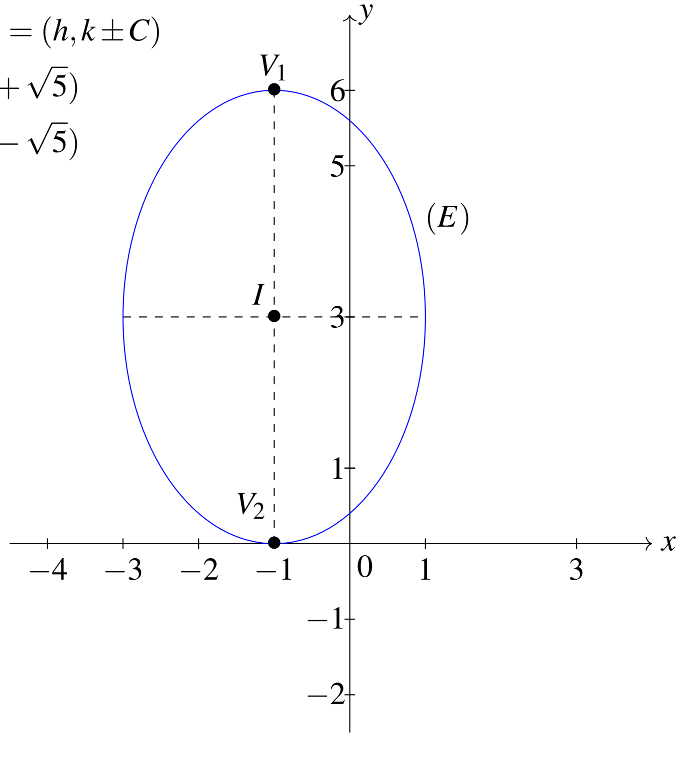
$a^2=9 \Rightarrow a=3$

$b^2=4 \Rightarrow b=2$

$c^2=a^2-b^2=9-4=5 \Rightarrow c=\sqrt{5}$

គេបាន

- ប្រវែងអ័ក្សធំ $2a=2\times 3=6$ (ឯកតាប្រវែង)
- ប្រវែងអ័ក្សតូច $2b=2\times 2=4$ (ឯកតាប្រវែង)
- កូអរដោនេផ្ចិត $I=(h,k)=(-1,3)$
- កូអរដោនេកំពូល $V=(h,k\pm a) \Rightarrow V_1=(-1,3+3)=(-1,6)$
  $\Rightarrow V_2=(-1,3-3)=(-1,0)$
- កូអរដោនេកំណុំ $F=(h,k\pm C)$
  $\Rightarrow F_1=(-1,3+\sqrt{5})$
  $\Rightarrow F_2=(-1,3-\sqrt{5})$
- សង់អេលីប



២. គេមានចំណុច $A(-1;1;2)$ $B(0;2;4)$ និង$B(-1;3;1)$:

ក គណនាផលគុណ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

ដោយ $\overrightarrow{AB}=(0+1,2-1,4-2)=(1,1,2)$

$\overrightarrow{AC}=(-1+1,3-1,1-2)=(0,2,-1)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$

$=[2(2)-1(-1)]\vec{i}-[0(2)-(1)(-1)]\vec{j}+[(0)(1)-(1)(2)]\vec{k}$

$=5\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=5\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}}$

+បង្ហាញថា ចំណុច $A;B$ និង C រត់មិនត្រង់គ្នា

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=5\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}\neq 0$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំណុច } A;B \text{ និង } C \text{ រត់មិនត្រង់គ្នា។}}$

៣. គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC

តាមរូបមន្ត $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{5^2+(-1)^2+(-2)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{30}$ (ឯកតាប្រវែង)

ដូចនេះ $\boxed{S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{30}\text{ (ឯកតាប្រវែង) ។}}$

VII គេមាន $f(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}$ កំណត់លើ $\in\mathbb{R}$:

ក គណនាលីមីត និងទាញរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប C

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4e^x}{e^x+1}=\dfrac{4(0)}{0+1}=\boxed{0}$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$)

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4e^x}{e^x(1+\frac{1}{e^x})}=\dfrac{4}{1+0}=\boxed{4}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ នោះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x=0 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃ } C \text{ ខាង } -\infty}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=4$ នោះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x=0 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃ } C \text{ ខាង } +\infty}$

ក សិក្សាអថេរភាពនៃ f :

គេបាន $f'(x)=4(\dfrac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2})=4(\dfrac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^2})=\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$

ដោយ $e^x>0,\forall x\in\mathbb{R}$ នោះ $f'(x)=\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}>0$ ជានិច្ច $\forall x\in\mathbb{R}$

នោះគេបាន f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$ ។

- រកកូអរដោនេនៃ ចំណុច A

ដោយ $C\cap(y'oy)$ ត្រង់ $A(0,y)$

$\Rightarrow f(0)=y$

$\dfrac{4e^0}{e^0+1}=y\Rightarrow y=\dfrac{4}{2}=2$

ដូចនេះ $\boxed{A(0,2)}$

- បង្ហាញថា $A(0,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C :

  បើ $A(a,b)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនោះ $f(2a-x)+f(x)=2b$

  គេបាន $f(2a-x)+f(x)=\dfrac{4e^{-x}}{e^{-x}+1}+\dfrac{4e^{x}}{e^{x}+1}=\dfrac{4}{1+e^{x}}+\dfrac{4e^{x}}{1+e^{x}}=4=2b$ (ពិត)

  ដូចនេះ $\boxed{A(0,2) \text{ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប } C}$ ។

ក រកសមីការបន្ទាត់ T ប៉ះនឹង C ត្រង់ចំណុច A

សមីការបន្ទាត់ T ប៉ះនឹង C ត្រង់ចំណុច A គឺ

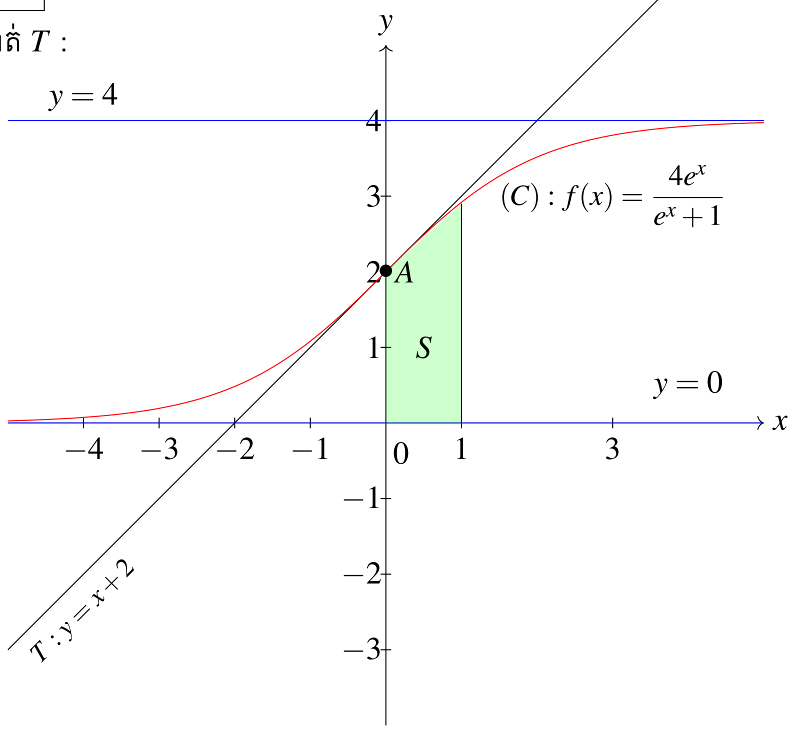
$$T: y = f'(x_A)(x-x_A)+f(x_A)$$

$$=(\frac{4x^0}{(e^0+1)^2}(x-0)+\frac{4e^0}{e^0+1}$$

$$=x+2$$

ដូចនេះ $\boxed{T: y=x+2}$

ក សង់ក្រាប C និង បន្ទាត់ T :



ក គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប C និងអ័ក្ស $(x'ox)$ លើចន្លោះ $[0,1]$

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡាខាងលើ

តាមក្រាបគេបាន $S=\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \frac{4e^x}{e^x+1}dx$

$$=4\left[\ln|e^x+1|\right]_0^1=4(\ln(e+1)-\ln(e^0+1))$$

$$=4\ln\frac{e+1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{S=4\ln\dfrac{e+1}{2}}$ (ឯកតាផ្ទៃ) ។

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា
ប្រឡង៖ **សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ**

លេខបន្ទប់៖________
លេខតុ៖________

សម័យប្រឡង៖________ មណ្ឌលប្រឡង៖________

ហត្ថលេខាអនុរក្ស៖ នាមត្រកូល និងនាមខ្លួន៖________
ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖________
ហត្ថលេខា៖________

អក្សរសម្ងាត់

- បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាស់ប្រឡងឡើយ។ ក្រដាស់ប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។
- បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាស់ប្រឡងជាដាច់ខាត។

✂ -

____ / 125

៥

វិញ្ញាសា៖ **គណិតវិទ្យាត្រៀម** រយៈពេល៖ 120 នាទី
រៀបរៀងដោយ៖ **ផល ផានុ**

អក្សរសម្ងាត់

I គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z_1=\sqrt{3}+i$, $Z_2=1+i$ និង $Z_3=1+i\sqrt{3}$ ។

១. រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច Z_1,Z_2 និង Z_3 ។

២. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $W=\dfrac{Z_3}{Z_2^2}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ហើយជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចគណនាឫសការេនៃ W ។

II គណនាលីមីត

ក. $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+3}}$

ខ. $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$

គ. $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{\sin x}-1)(1-\cos 2x)}{\sin^3 x}$

ឃ. $D=\lim\limits_{x\to +\infty}(2-\ln\dfrac{2x-1}{2x})$

III គេមានអនុគមន៍ f មួយកំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{e^x}{1-e^x}$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$ ។

១. រកចំនួនពិត A និង B ដើម្បីឱ្យ $f(x)=A+\dfrac{B}{1-e^x}$

២. គណនា $I(x)=\displaystyle\int\frac{e^x}{1-e^x}dx$ រួចទាញរក $J(x)=\displaystyle\int\frac{dx}{1-e^x}$ ។

IV នៅក្នុងប្រអប់មួយមានប៊ិចក្រហមចំនួន 7 ដើម និងប៊ិចខៀវចំនួន 5 ដើម។
គេយកប៊ិច 4 ដើមព្រមគ្នាចេញពីប្រអប់ដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ :

ក. ″ យកបានប៊ិចក្រហមទាំង 4 ដើម ″

ខ. ″ យកបានប៊ិចខៀវយ៉ាងតិច 1 ដើម ″

គ. ″ យកបានប៊ិចក្រហមចំនួន 3 ដើមគត់ ″

V គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-2y'+5y=nx^2+px+q$ ។

១. ដោះស្រាយសមីការ $(F): y''-2y'+5y=0$ ។ រកចម្លើយនៃ (F) បើ $y(0)=2$ និង $y'(0)=6$ ។

២. រកចំនួនពិត $n,p,$ និង q ដោយដឹងថា $y=2x^2+3x+1$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។ រកចម្លើយទូទៅ y នៃសមីការ (E) ។

VI ក្នុងតម្រុយអរតូណម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយគេឱ្យចំណុច $A(1,-2,0),B(1,0,4)$ និង $C(0,3,3)$ ។

១. ចូរសង់ត្រីកោណ ABC ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។

២. រកសមីការប្លង់ (α) ជាប្លង់មេដ្យាទ័រនៃ $[AB]$ ។

៣. រកសមីការនៃស្វ៊ែ S ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$ ។

៤. គណនា $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។ ទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

៥. គណនា $P=(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}$ ។ ទាញរកមាឌនៃតេត្រាអែត $OABC$ ។ រួចទាញរកចម្ងាយពី O ទៅប្លង់ ABC ។

VII អនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $y=f(x)=(x+2)e^{-x}$ ហើយមានក្រាប C ។

១. គណនា $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ។

២. បង្ហាញថាអនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាមួយត្រង់ $x=-1$ ។ គណនា $f(-1)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

៣. បង្ហាញថាក្រាប C មានចំណុចរបត់មួយ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចរបត់ ។

៤. គណនា $f(-2)$ និង $f(2)$ ដោយយក $e^{-2}=0.13$ រួចសង់ក្រាប C ។

៥. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃផ្ទៃប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប C អ័ក្ស $(x'ox)$ អ័ក្ស $(y'oy)$ និងបន្ទាត់ឈរ $x=2$ ។

៦. ដោយប្រើក្រាប C ចូរកំណត់តម្លៃនៃប៉ារ៉ាម៉ែត m ដើម្បីឱ្យសមីការ $me^x-x-2=0$ មានឫសពីរផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1<0<x_2$

ដំណោះស្រាយ

I គេមាន $Z_1 = \sqrt{3}+i$, $Z_2 = 1+i$ និង $Z_3 = 1+i\sqrt{3}$

១. រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច Z_1, Z_2 និង Z_3

• $Z_1 = \sqrt{3}+i$

$$= 2(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)$$

$$= 2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$$

ដូចនេះ: $\boxed{|Z_1| = 2\ ,\ arg(Z_1) = \frac{\pi}{6}+2k\pi\ , k\in\mathbb{Z}}$

• $Z_2 = 1+i$

$$= \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

ដូចនេះ: $\boxed{|Z_2| = \sqrt{2}\ ,\ arg(Z_2) = \frac{\pi}{4}+2k\pi\ , k\in\mathbb{Z}}$

• $Z_3 = 1+i\sqrt{3}$

$$= 2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= 2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$$

ដូចនេះ: $\boxed{|(Z_3)| = 2\ ,\ arg(Z_3) = \frac{\pi}{3}+2k\pi\ , k\in\mathbb{Z}}$

២. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $W = \frac{Z_3}{Z_2^2}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ហើយទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

• $W = \frac{Z_3}{Z_2^2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$

$$= \frac{1+i\sqrt{3}}{2i}$$

$$= \frac{i(1+i\sqrt{3})}{2i^2}$$

$i^2 = -1$

$$= \frac{i-\sqrt{3}}{-2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

ដូចនេះ: $\boxed{W = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$

• $W = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

$-\sin(\alpha) = \sin(-\alpha) = \sin(2\pi-\alpha)$

$$= \cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}$$

ដូចនេះ: $\boxed{W = \cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}}$

• គណនាឫសការេនៃ W

គេមាន $W=\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}$

គេបានឫសការេនៃ W គឺ $W_k=\cos(\frac{\frac{11\pi}{6}+2k\pi}{2})+i\sin(11\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{2})$, $k=0,1,2,3,...$

ចំពោះ $k=0$ គេបាន $W_0=\cos(\frac{11\pi}{12})+i\sin(\frac{11\pi}{12})$

ចំពោះ $k=1$ គេបាន $W_1=\cos(\frac{23\pi}{12})+i\sin(\frac{23\pi}{12})$

II គណនាលីមីត

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+3}}$ រាង $\frac{0}{0}$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1-2x-1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+3})}{(x+3-2x-3)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1})}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(-x)(\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+3})}{(-x)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1})}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1}}$

$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{2\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\boxed{A=\sqrt{3}}$

ខ. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$ រាង $\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{\sin x}{x}}$

$=\frac{1}{1}=1$

ដូចនេះ $\boxed{B=1}$

គ. $\lim_{x\to 0}\frac{(e^{\sin x}-1)(1-\cos 2x)}{\sin^3 x}$ រាង $\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^u-1}{u}=1$

$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\times\frac{2\sin^2 x}{\sin^2 x}$

$=1\times 2$

ដូចនេះ $\boxed{C=2}$

ឃ. $\lim_{x\to+\infty}(2-\ln\frac{2x-1}{2x})$ រាង $\frac{\infty}{\infty}$

$=\lim_{x\to+\infty}(2-\ln\frac{2x(1-\frac{1}{2x})}{2x})$

$=\lim_{x\to+\infty}(2-\ln(1-\frac{1}{2x})$

$\ln 1=0$

$=2-\ln 1=2$

ដូចនេះ $\boxed{D=2}$

III អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{e^x}{1-e^x}$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq 0$, $D=\mathbb{R}\setminus\bowtie\{0\}$

១. រកចំនួនពិត A និង B

ដោយ $f(x)=\dfrac{e^x}{1-e^x}$
$=\dfrac{e^x-1+1}{1-e^x}$
$=-\dfrac{1-e^x}{1-e^x}+\dfrac{1}{1-e^x}$
$=-1+\dfrac{1}{1-e^x}$

តែ $f(x)=A+\dfrac{B}{1-e^x}$

គេបាន $A=-1$, $B=1$

ដូចនេះ: $\boxed{A=-1\ , B=1}$

២. គណនា $I(x)=\displaystyle\int\frac{e^x}{1-e^x}dx$

ដោយ $I(x)=\displaystyle\int\frac{e^x}{1-e^x}dx$
$=-\displaystyle\int\frac{(1-e^x)'}{1-e^x}dx$
$=-\ln|1-e^x|+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ: $\boxed{I(x)=-\ln|1-e^x|+c\ ,\ c\in\mathbb{R}}$

ទាញរក $J(x)=\displaystyle\int\frac{dx}{1-e^x}$

ដោយ $f(x)=\dfrac{e^x}{1-e^x}=-1+\dfrac{1}{1-e^x}$

$1+\dfrac{e^x}{1-e^x}=\dfrac{1}{1-e^x}$

$J(x)=\displaystyle\int\frac{dx}{1-e^x}$
$=\displaystyle\int(1+\frac{e^x}{1-e^x})dx$

$J(x)=x-\ln|1-e^x|+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ: $\boxed{J(x)=x-\ln|1-e^x|+c\ ,\ c\in\mathbb{R}}$

IV រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

ដោយប៊ិចសរុបមាន 12 ដើម គេចាប់យក 4 ដើមដោយចៃដន្យ

គេបានចំនួនករណីអាច $n(S)=C(12,4)=\dfrac{12!}{(12-4)!4!}=\dfrac{12\times11\times10\times9\times8!}{8!\times4\times3\times2\times1}=495$

ក. "យកបានប៊ិចក្រហមទាំង 4 ដើម"

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(7,4)=\dfrac{7!}{(7-4)!4!}=\dfrac{7\times6\times5\times4!}{3!\times4!}=35$

គេបាន $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{35}{495}=\dfrac{7}{99}$

ដូចនេះ: $\boxed{P(A)=\dfrac{7}{99}}$

ខ. "យកប៊ិចខៀវយ៉ាងតិច 1 ដើម"

វិភាគ

ខៀវ	0	1	2	3	4
ក្រហម	4	3	2	1	0

គេបាន $P(A)+P(B)=1$

$$P(B)=1-P(A)$$
$$P(B)=1-\frac{7}{99}$$
$$P(B)=\frac{92}{99}$$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\frac{92}{99}}$

គ. ″យកបានប៊ិចក្រហមចំនួន 3 ដើមគត់″

C ជាព្រឹត្តិការណ៍យកបានប៊ិចក្រហម 3 ដើម និងប៊ិចខៀវ

ចំនួនករណីស្រប $n(C)=C(7,3)\times C(5,1)=\frac{7!}{4!3!}\times 5=\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}\times 5=35\times 5=175$

គេបាន $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{175}{495}=\frac{35}{99}$

ដូចនេះ $\boxed{P(C)=\frac{35}{99}}$

V សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-2y'+5y=nx^2+px+q$

១. ដោះស្រាយសមីការ (F)

$(F): y''-2y'+5y=0$

សមីការសម្គាល់: $\lambda^2-2\lambda+5=0$

$\Delta'=(b')^2-ac=(-1)^2-1\times 5=-4$

$\lambda=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{1\pm\sqrt{-4}}{1}=1\pm 2i=\alpha\pm\beta i$

$\Longrightarrow \quad \alpha=1\,,\ \beta=2$

ចម្លើយទូទៅមានទម្រង់ $(F): y=(A\cos\beta x+B\sin\beta x)e^{\alpha x}$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅ $\boxed{(F): y=(A\cos 2x+B\sin 2x)e^x\,,\ (A,B\in\mathbb{R})}$

• រកចម្លើយនៃ (F)

ដោយ $y(0)=2\,,\ y'(0)=6$

$(F): y=(A\cos 2x+B\sin 2x)e^x$

$\Longrightarrow y'=(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)e^x+(A\cos 2x+B\sin 2x)e^x$

នោះ $y(0)=(A\cos 0+B\sin 0)e^0$

$$2=A+0$$
$$A=2$$

$y'(0)=(-2A\sin 0+2B\cos 0)e^0+(A\cos 0+B\sin 0)e^0$

$$6=2B+A$$
$$6=2B+2$$
$$B=2$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅ $\boxed{(F): y=(2\cos 2x+2\sin 2x)e^x}$

២. រកចំនួនពិត n,p និង q

ដោយ $y=2x^2+3x+1$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

$\Longrightarrow y'=4x+3$

$\Longrightarrow y'' = 4$

គេបានសមីការ $(E): y'' - 2y' + 5y = nx^2 + px + q$

$$4 - 2(4x+3) + 5(2x^2+3x+1) = nx^2 + px + q$$
$$4 - 8x - 6 + 10x^2 + 15x + 5 = nx^2 + px + q$$
$$10x^2 + 7x + 3 = nx^2 + px + q$$

ដូចនេះ $\boxed{n = 10\ ,\ p = 7\ ,\ q = 3}$

• រកចម្លើយនៃសមីការ (E)

ចម្លើយនៃសមីការ (E) គឺ $y = y_c + y_p$

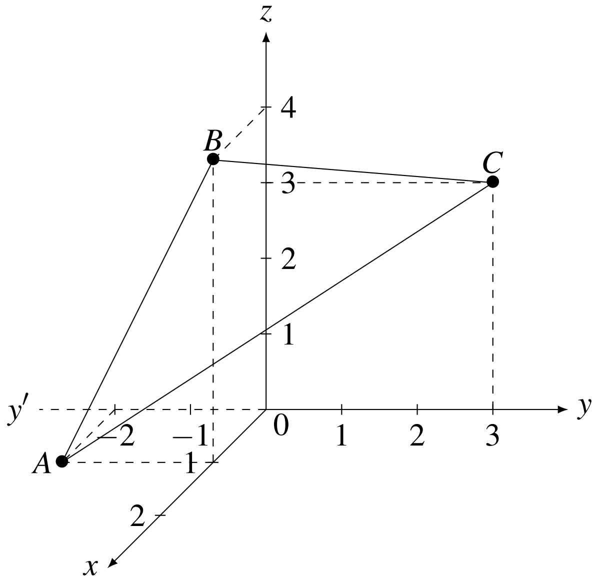
ដោយ $y_c = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^x$

$y_p = 2x^2 + 3x + 1$

ដូចនេះ $\boxed{y = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^x + 2x^2 + 3x + 1\ ,\ (A,B) \in \mathbb{R}}$

VI គេឱ្យចំណុច $A(1,-2,0), B(1,0,4)$ និង $C(0,3,3)$

១. សង់ត្រីកោណ ABC ក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$



២. រកសមីការប្លង់ (α)

សមីការប្លង់ $(\alpha): \ a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

ដោយប្លង់ (α) ប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[AB] \Rightarrow (\alpha) \perp AB$ ត្រង់ចំណុចកណ្តាលនៃ $[AB]$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1 \\ y_0 = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-2+0}{2} = -1 \\ z_0 = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{0+4}{2} = 2 \end{cases}$$

ហើយ $(\alpha) \perp \overrightarrow{AB}$ ដែល $\overrightarrow{AB} = (1,0,4) - (1,-2,0) = (0,2,4)$

គេបានប្លង់ $(\alpha): \ 0(x-1) + 2(y+1) + 4(z-2) = 0$

$$0 + 2y + 2 + 4z - 8 = 0$$
$$2y + 4z - 6 = 0$$

ដូចនេះ $\boxed{(\alpha): \ 2y + 4z - 6 = 0}$

៣. រកសមីការនៃស្វ៊ែ S

សមីការស្វ៊ែ $(S):\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

ដោយស្វ៊ែ (S) មានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$

គេបាន $I(1,-1,2)$ ជាផ្ចិតនៅកណ្ដាលនៃ $[AB]$

ហើយកាំ $r=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{(1-1)^2+(0+2)^2+(4+0)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{20}=\sqrt{5}$

គេបាន $(S):\ (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=\sqrt{5}^2$

ដូចនេះ $\boxed{(S):\ (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=5}$

៤. គណនា $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}=(0,2,4)$, $\overrightarrow{AB}=(0,3,3)-(1,-2,0)=(-1,5,3)$

គេបាន $\overrightarrow{n}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 0 & 2 & 4\\ -1 & 5 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 5 & 3\end{vmatrix}\overrightarrow{i}-\begin{vmatrix}0 & 4\\ -1 & 3\end{vmatrix}\overrightarrow{j}+\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 5\end{vmatrix}\overrightarrow{k}$

$\Longrightarrow \overrightarrow{n}=(6-20)\overrightarrow{i}-(0+4)\overrightarrow{j}+(0+2)\overrightarrow{k}$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{n}=-14\overrightarrow{i}-4\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}}$

• ទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

តាមរូបមន្ត $S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(-14)^2+(-4)^2+2^2}$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{7^2+2^2+1^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

ដូចនេះ $\boxed{S_{ABC}=3\sqrt{6}\text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$

៥. គណនា $P=(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}$

ដោយ $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-14,-4,2)$, $\overrightarrow{OA}=-(1,-2,0)=(-1,2,0)$

គេបាន $P=(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}$

$=-14(-1)-4(2)+2(0)$

$=14-8$

ដូចនេះ $\boxed{P=6}$

• ទាញរកមាឌនៃតេត្រាអែត $OABC$

តាមរូបមន្ត $V_{OABC}=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}|=\frac{1}{6}\times6=1$

ដូចនេះ $\boxed{\text{មាឌនៃតេត្រាអែត } V_{OABC}=1\text{ ឯកតាមាឌ}}$

• រួចទាញរកចម្ងាយពី O ទៅប្លង់ ABC

តាមរូបមន្ត $V_{OABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times d(O,ABC)$

$d(O,ABC)=3\frac{V_{OABC}}{S_{ABC}}$

$d=\frac{3}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{d(O,ABC)=\frac{\sqrt{6}}{6}\text{ ឯកតាប្រវែង}}$

VII អនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $y=f(x)=(x+2)e^{-x}$ ហើយមានក្រាប C ។

១. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+2)e^{-x} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x+2)e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}) = 0$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

ដូចនេះ: $\boxed{y = 0}$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ខាង $+\infty$

២. បង្ហាញថាអនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាមួយត្រង់ $x = -1$

ដោយ $f(x) = (x+2)e^{-x}$

$\Longrightarrow f'(x) = (x+2)'e^{-x} + (x+2)(e^{-x})'$

$= e^{-x} - (x+2)e^{-x}$

$= e^{-x}(-x-1)$

ដោយ $e^{-x} > 0\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x)$ មានសញ្ញាតាម $(-x-1)$

បើ $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow -x-1 = 0 \Longrightarrow x = -1$

- តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

ត្រង់ $x = -1 \Longrightarrow f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ ។

ដូចនេះ: អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាមួយត្រង់ $x = -1$ (in a box)

- គណនា $f(-1)$

ដោយ $f(x) = (x+2)e^{-x}$

$\Longrightarrow f(-1) = (-1+2)e^1 = 2.71$

- រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$	$-\infty$	↗	2.71	↘	0

៣. បង្ហាញថាក្រាប C មានចំណុចរបត់មួយ

$f'(x) = e^{-x}(-x-1)$

$f''(x) = (e^{-x})'(-x-1) + e^{-x}(-x-1)'$

$= -e^{-x}(-x-1) - e^{-x}$

$= e^{-x}(x+1-1)$

$= xe^{-x}$

ដោយ $e^{-x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

បើ $f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

ត្រង់ $x = 0 \Longrightarrow f''(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ។

ដូចនេះ **ក្រាប C មានចំណុចរបត់មួយត្រង់ $x = 0$**

• រកកូអរដោនេនៃចំណុចរបត់

$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

$\Longrightarrow f(0) = (0+2)e^{0} = 2$

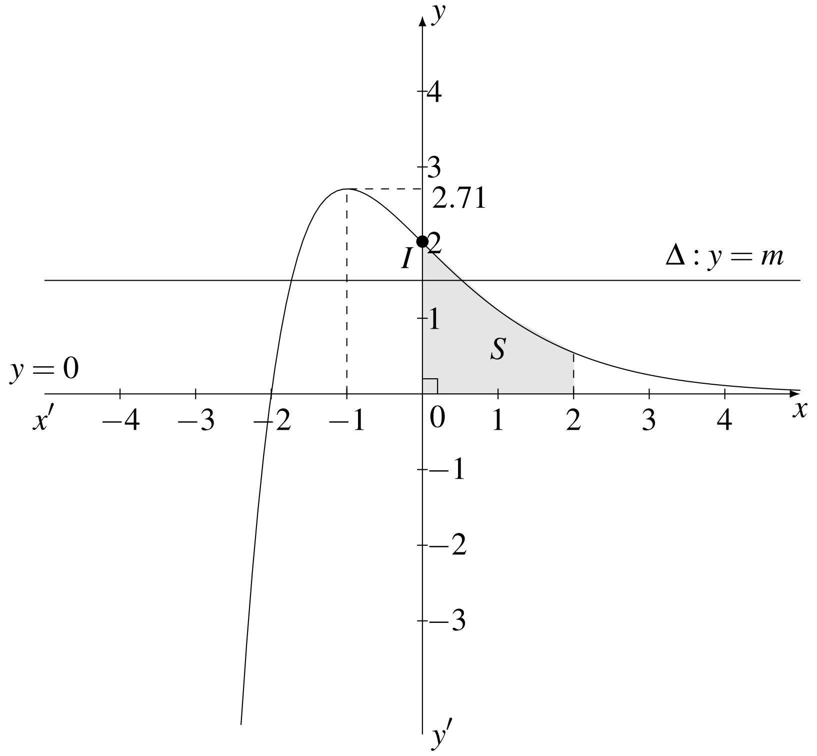
៤. គណនា $f(-2)$ និង $f(2)$

$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

$\Longrightarrow f(-2) = (-2+2)e^{2} = 0$

$\Longrightarrow f(2) = (2+2)e^{-2} = 4 \times 0.13 = 0.52$

• រួចសង់ក្រាប C



៥. គណនាផ្ទៃក្រឡា S

ដោយផ្ទៃក្រឡា S ខណ្ឌដោយក្រាប C អ័ក្ស $(x'ox)$ អ័ក្ស $(y'oy)$ និងបន្ទាត់ឈរ $x = 2$

គេបាន $S = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x+2)e^{-x}dx$

• រក$I = \int (x+2)e^{-x}dx$

តាង $u = x+2 \Longrightarrow du = dx$, $dv = e^{x} \Longrightarrow v = \int e^{x}dx = -e^{x}$

គេបាន $I=-e^{-x}(x+2)+\int e^{-x}dx$

$=-e^{-x}(x+2)-e^{-x}+C \quad , \quad C\in\mathbb{R}$

$=-e^{-x}(x+3)+C \quad , \quad C\in\mathbb{R}$

យើងបាន $S=[-e^{-x}(x+3)]_0^2$

$=-e^{-2}(2+3)+e^{0}(0+3)$

$=-0.13(5)+3$

$=2.35$

ដូចនេះៈ ផ្ទៃក្រឡា $S=2.35$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា

៦. កំណត់តម្លៃនៃប៉ារ៉ាម៉ែត m ដោយប្រើក្រាប C

សមីការ $me^x-x-2=0$

$me^x=x+2$

$m=\dfrac{x+2}{e^x}m \quad =(x+2)e^{-x}$

សមីការនេះជាសមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប C និង បន្ទាត់ដេក $\Delta: y=m$

ដើម្បីឱ្យសមីការ $me^x-x-2=0$ មានឫសពីរផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1<0<x_2$

លុះត្រាតែ $m\in(0,2)$

ដូចនេះៈ $m\in(0,2)$ សមីការមានឫសពីរផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1<0<x_2$

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា
ប្រឡង៖ **សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ**
សម័យប្រឡង៖________________ មណ្ឌលប្រឡង៖________________
ហត្ថលេខាអនុរក្ស៖ នាមត្រកូល និងនាមខ្លួន៖________________
ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖________________
ហត្ថលេខា៖________________

លេខបន្ទប់៖________
លេខតុ៖________

អក្សរសម្ងាត់

• បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាស់ប្រឡងឡើយ។ ក្រដាស់ប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។
• បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាស់ប្រឡងជាដាច់ខាត។

____ / 125

៦

វិញ្ញាសា៖ **គណិតវិទ្យាត្រៀម** រយៈពេល៖ 120 នាទី
រៀបរៀងដោយ៖ **ថា មករា**

អក្សរសម្ងាត់

I គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ និង $y=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ។

១. គណនា $A=x-y^2$ និង $B=x^2+x+1$ ។

២. សរសេរ x និងy ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។ បង្ហាញថា $C=x^{2019}+y^{2019}$ ជាចំនួនពិត ។

II គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$\mathrm{A}=\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^3-3\sqrt{3}}{x^2-3}$ $\quad\mathrm{B}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x+3}-e^3}{2x}$ $\quad\mathrm{C}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

III ចតុកោណកែងមួយមានបរិមាត្រ 400m ។ រកប្រវែងជ្រុងដើម្បីឱ្យចតុកោណកែងនេះមានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត។

IV នៅក្នុងប្រអប់មានប៊ិចចំនួន១០ដើម ដែលក្នុងនោះមានប៊ិចក្រហមចំនួន៤ដើម និងប៊ិចខៀវចំនួន៦ដើម។ គេចាប់យកប៊ិច៣ដើម ក្នុងពេលតែមួយចេញពីប្រអប់នោះដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

A .˝ចាប់បានប៊ិចខៀវទាំងបីដើម˝ ។ B .˝ចាប់បានប៊ិចក្រហមមួយដើម និងខៀវពីរដើម˝ ។

C .˝ចាប់បានប៊ិចខៀវតែមួយដើមគត់˝ ។

V គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+6y'+8y=8x+10$ ។

១. ដោះស្រាយសមីការ $(E_1): y''+6y'+8y=0$។ កំណត់ចម្លើយពិសេសមួយនៃ (E_1) ដែល $y(0)=-1$ និង $y'(0)=4$ ។

២. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $g(x)=ax+b$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។

VI ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់នៃលំហមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យចំណុច $A(1,0,0),B(0,1,0)$ និង $C(0,0,1)$។

១. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

២. គណនាផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចសរសេរសមីការប្លង់ ABC ។

៣. រកចម្ងាយពីចំណុច $D(0,1,1)$ ទៅប្លង់ ABC ។

៤. រកសមីការស្វ៊ែ S ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត AC ។

៥. រកសមីការប្លង់ P ប៉ះស្វ៊ែ S ត្រង់ C ។

VII f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $f(x)=1+2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ ហើយមានក្រាបC ។

១. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរនិងដេកនៃក្រាប C ។

២. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

៣. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ $D: y=1$។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ L ដែលប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច A ។

៤. គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$។ សង់បន្ទាត់ L អាស៊ីមតូត និងក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ។ (គេឱ្យ$e=2.7$, $\frac{2}{e}=0.7, \ln 2=0.7$)

ដំណោះស្រាយ

I

១. គណនា $A=x-y^2$ និង $B=x^2+x+1$

គេមាន $x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ និង $y=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

គេបាន $A=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\left[\frac{1}{4}+2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\frac{3}{4}\right]$ ដូចនេះ $A=$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

0 ។

ហើយ $B=x^2+x+1=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+1$

$$=\frac{1}{4}-2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+1=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+1$$

$$=-1+1=0$$

ដូចនេះ: $B=0$ ។

២. សរសេរx និងyជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេបាន $x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}$

ហើយ $y=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$

ដូចនេះ: $x=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}$ និង$y=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

+បង្ហាញថា$C=x^{2019}+y^{2019}$ជាចំនួនពិត

គេបាន $C=\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)^{2019}+\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)^{2019}$

$$=\cos\frac{7\pi\times 2019}{6}+i\sin\frac{7\pi\times}{6}+\cos\frac{5\pi\times 2019}{6}+i\sin\frac{5\pi\times 2019}{6}$$

$$=\cos\frac{3365\pi}{6}+i\sin\frac{3365\pi}{6}+\cos\frac{4711\pi}{2}+i\sin\frac{4711\pi}{6}$$

$$=\cos\left(1682\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(1682\pi+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(2354\pi+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(2354\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=0+i+0-i=0 \quad \text{(ពិត)}$$

ដូចនេះ: $C=x^{2019}+y^{2019}$ជាចំនួនពិត ។

II គណនាលីមីត

$$A=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^3-3\sqrt{3}}{x^2-3} \text{ រាង} \frac{0}{0}$$

គេបាន$A=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^3-(\sqrt{3})^3}{x^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{(x-\sqrt{3})(x^2+x\sqrt{3}+3)}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2+x\sqrt{3}+3}{x+\sqrt{3}}$

$$=\frac{3+3+3}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{9}{2\sqrt{3}}=\frac{9\sqrt{3}}{2\times 3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ដូចនេះ: $A=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ។

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x+3}-e^3}{2x} \text{ រាង} \frac{0}{0}$$

គេបាន $C=\lim_{x\to 0}\frac{e^3\left(e^{5x}-1\right)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^3\left(e^{5x}-1\right)}{5x}\times\frac{5}{2}=\frac{5e^3}{2}$

ដូចនេះ: $B=\frac{5e^3}{2}$ ។

C $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ រាង $\frac{0}{0}$

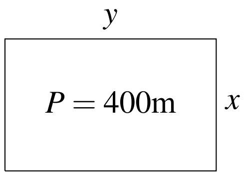
គេបាន $C=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\tan x\cdot\cos x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\tan x\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}2\left(\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{4}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\left[\frac{\tan x}{x}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\right]=\frac{1}{2}\times1\times1^2=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ: $C=\frac{1}{2}$ ។

III រកប្រវែងជ្រុងដើម្បីឱ្យចតុកោណកែងនេះមានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុត

តាងxជាទទឹង



yជាបណ្តោយ

លក្ខខណ្ឌ $0<x\le y<400$

-បរិមាត្រចតុកោណកែង

$P=2(x+y)$

$x+y=\frac{P}{2}=\frac{400}{2}=200$

$y=200-x\qquad(1)$

-ផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែង

$S=xy\qquad(2)$

យក(1) ជំនួស(2)គេបាន

$S(x)=x(200-x)=200x-x^2$

$\Rightarrow S'(x)=200-2x$

-បើ$S'(x)=0\Leftrightarrow200-2x=0\Rightarrow x=100$

-តារាងអថិរភាព

x	$-\infty$	100	$+\infty$
$S'(x)$	+	0	−
$S(x)$	↗	$S(100)$	↘

តាមតារាងអថិរភាពខាងលើ គេបានផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងធំបំផុត

-បើ $x=100$ តាម(1)គេបាន

$y=200-100=100$

ដូចនេះ: ប្រវែងជ្រុងចតុកោណកែងគឺ$x=y=100$m ។

IV ដោយក្នុងប្រអប់មានប៊ិចចំនួន១០ដើម ហើយគេចាប់យកប៊ិច៣ដើមពីក្នុងប្រអប់ដោយចៃដន្យក្នុងពេលតែមួយ នោះចំនួនករណីអាចគឺ

$n(S)=C(10,3)=\frac{10!}{(10-3)!3!}=\frac{10\times9\times8\times7!}{7!\times1\times2\times3}=\frac{720}{6}=120$ ករណី

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

A .˝ចាប់បានប៊ិចខៀវទាំងបីដើម˝

ដោយប៊ិចខៀវក្នុងប្រអប់ទាំងអស់មាន៦ដើម នោះចំនួនករណីស្របគឺ

$n(A)=C(6,3)=\dfrac{6!}{(6-3)!3!}=\dfrac{6\times5\times4\times3!}{3\times2\times1\times3!}=\dfrac{6\times5\times4}{6}=20$ ករណី

តាម $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$

ដូចនេះ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានប៊ិចខៀវទាំងបីដើមគឺ$P(A)=\dfrac{1}{6}$ ។

B ."ចាប់បានប៊ិចក្រហមមួយដើម និងខៀវពីរដើម"

ដោយក្នុងប្រអប់មានប៊ិចខៀវទាំងអស់៦ដើម និងប៊ិចក្រហម៤ដើម នោះចំនួនករណីស្របគឺ

$n(B)=C(6,2)\times C(4,1)=\dfrac{6!}{(6-2)!2!}\times\dfrac{4!}{(4-1)!1!}=\dfrac{6\times5\times4!}{4!\times2!}\times\dfrac{4\times3!}{3!}$

$=\dfrac{30}{2}\times4=60$ករណី

តាម $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{60}{120}=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានប៊ិចក្រហមមួយដើម និងខៀវពីរដើមគឺ $P(B)=\dfrac{1}{2}$ ។

C ."ចាប់បានប៊ិចខៀវតែមួយដើមគត់"

គេបាន ចំនួនករណីស្រប

$n(C)=C(6,1)\times C(4,2)=\dfrac{6!}{(6-1)!1!}\times\dfrac{4!}{(4-2)!2!}=\dfrac{6\times5!}{5!}\times\dfrac{4\times3\times2!}{2\times1\times2!}$

$=6\times\dfrac{4\times3}{2}=36$ករណី

តាម $P(C)=\dfrac{n(C)}{n(S)}=\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$

ដូចនេះ ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានប៊ិចខៀវតែមួយដើមគត់គឺ$P(C)=\dfrac{3}{10}$ ។

V គេមាន $(E):y''+6y'+8y=8x+10$

១. ដោះស្រាយសមីការ$(E_1):y''+6y'+8y=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2-6\lambda+8=0$

$(\lambda-1)(\lambda-4)=0$

$\Rightarrow\lambda_1=2,\lambda_2=4$

គេបាន ចម្លើយទូទៅនៃ(E_1)គឺ $y=Ae^{4x}+Be^{2x}$,$A,B\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃ(E_1)គឺ $y=Ae^{4x}+Be^{2x}$ $A,B\in\mathbb{R}$ ។

+កំណត់ចម្លើយពិសេសនៃ(E_1)

គេមាន $y(0)=-1,y'(0)=4$

គេបាន $y'=4Ae^{4x}+2Be^{2x}$,$A,B\in\mathbb{R}$

ដោយ $\begin{cases}y(0)=-1\\y'(0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=-1\\4A+2B=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=-1 & (1)\\2A+B=2 & (2)\end{cases}$

យក$(1)-(2)$គេបាន

$-A=-3\Rightarrow A=3$ជំនួស(1)គេបាន

$3+B=-1\Rightarrow B=-4$

នោះ ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ(E_1) គឺ$y=3e^{4x}-4e^{2x}$

ដូចនេះ ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ(E_1) គឺ$y=3e^{4x}-4e^{2x}$ ។

២. កំណត់ចំនួនពិតa និងb

គេមាន $g(x)=ax+b$

$\Rightarrow g'(x) = a$

$\Rightarrow g''(x) = 0$

ដោយgជាចម្លើយពិសេសនៃ(E) គេបាន

$g''(x) - 6g(x) + 8g(x) = 8x + 10$

$0 - 6a + 8(ax + b) = 8x + 10$

$8ax + 8b - 6a = 8x + 10$

$$\begin{cases} 8a = 8 \\ 8b - 6a = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 8b = 10 + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

ដូចនេះ តម្លៃ$a = 1$ និង$b = 2$ ។

VI

១. បង្ហាញថាត្រីកោណABCជាត្រីកោណសម័ង្ស

គេមាន $A(1,0,0), B(0,1,0)$ និង$C(0,0,1)$

គេបាន $\overrightarrow{AB} = (0-1, 1-0, 0-0) = (-1,1,0)$

$\overrightarrow{AC} = (0-1, 0-0, 1-0) = (-1,0,1)$

$\overrightarrow{BC} = (0-0, 0-1, 1-0) = (0,-1,1)$

នោះ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0} = \sqrt{2}$

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 0 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{0 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

ដោយ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{2}$ នោះត្រីកោណABCជាត្រីកោណសម័ង្ស (ពិត)

ដូចនេះ ត្រីកោណABCជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

២. គណនាផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

គេបាន $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\overrightarrow{k}$

$= (1-0)\overrightarrow{i} - (-1-0)\overrightarrow{j} + (0+1)\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} = (1,1,1)$

ដូចនេះ $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1,1,1)$ ។

+រកសមីការប្លង់ABC

ដោយប្លង់ABCកាត់តាមចំណុច$A(1,0,0)$ និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់$\overrightarrow{n} = (1,1,1)$

តាម $ABC : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$: 1(x-1) + 1(y-0) + 1(z-0) = 0$

$: x + y + z - 1 = 0$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ABCគឺ$ABC : x + y + z - 1 = 0$ ។

៣. រកចម្ងាយពីចំណុច$D(0,1,1)$ ទៅប្លង់ABC

គេមាន $D(0,1,1)$ និង$ABC : x + y + z - 1 = 0$

តាម $d(D, ABC) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

គេបាន $d(D,ABC)=\dfrac{|1\times 0+1\times 1+1\times 1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{|0+1+1-1|}{\sqrt{3}}$ ឯកតាប្រវែង

$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

ដូចនេះ ចម្ងាយពីចំណុចDទៅប្លង់ ABCគឺ $d(D,ABC)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ឯកតាប្រវែង ។

៤. រកសមីការស្វ៊ែS ដែលមានអង្កត់ផ្ចិតAC

តាង Iជាផ្ចិតនៃនៃស្វ៊ែSដែលមានអង្កត់ផ្ចិតAC

តាម $I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2},\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)=I\left(\dfrac{1+0}{2},\dfrac{0+0}{2},\dfrac{0+1}{2}\right)=I\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$

កាំ $r=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ឯកតាប្រវែង

តាម $S:(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

គេបាន $S:\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-0)^2+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$:\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ សមីការស្វ៊ែS គឺ $S:\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$ ។

៥. រកសមីការប្លង់P ប៉ះស្វ៊ែS ត្រង់C

ដោយប្លង់ P ប៉ះស្វ៊ែ S ត្រង់ចំណុចCនោះPកែង$\overrightarrow{IC}$

គេបាន $\overrightarrow{IC}=\left(0-\dfrac{1}{2},0-0,1-\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$

តាម $P:a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

នាំឱ្យ $P:-\dfrac{1}{2}(x-0)+0(y-0)+\dfrac{1}{2}(z-1)=0$

$:-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}z-\dfrac{1}{2}=0$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ P គឺ $P::-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}z-\dfrac{1}{2}=0$ ។

VII គេមាន$f(x)=1+2\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$ ហើយមានក្រាបC

១. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[1+2\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)\right]=1+2(-\infty)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+2\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)\right]=1+2\times 0=1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ ។

+ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរនិងដេកនៃក្រាបC

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$

ដូចនេះ បន្ទាត់$x=0$ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបC ។

ហើយ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

ដូចនេះ បន្ទាត់$y=1$ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបC ។

២. គណនាដេរីវេ$f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញានៃ$f'(x)$

គេបាន $f'(x)=2\times\dfrac{(\ln x)'x-(x)'\ln x}{x^2}=\dfrac{2-2\ln x}{x^2}$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{2-2\ln x}{x^2}$ ។

+សិក្សាសញ្ញានៃ$f'(x)$

បើ$f'(x)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2-2\ln x}{x^2}$

$2-2\ln x=0$

$\ln x=1=\ln e$

$\Rightarrow x=e$

តារាងសញ្ញានៃ$f'(x)$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

• បើ $x\in(0,e)$ គេបាន $f'(x)>0$នោះfជាអនុគមន៍កើន

• បើ $x=e$គេបាន$f'(x)=0$នោះfជាអនុគមន៍ថេរ

• បើ $x\in(e,+\infty)$គេបាន$f'(x)<0$នោះfជាអនុគមន៍ចុះ ។

+សង់តារាងអថេរភាព

បើ $x=e\Rightarrow f(e)=1+2\left(\dfrac{\ln e}{e}\right)=1+\dfrac{2}{e}=1.7$ ជាតម្លៃអតិបរមា

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1.7	↘	1

៣. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វAរវាងក្រាបC និងបន្ទាត់$D:y=1$

គេបាន $f(x)=y$

$1+2\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)=1$

$2\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)=0$

$\dfrac{\ln x}{x}=0$

$\ln x=0=\ln 1$

$\Rightarrow x=1$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វAរវាងក្រាបC និងបន្ទាត់$D:y=1$គឺ $A(1,1)$ ។

+កំណត់សមីការបន្ទាត់Lដែលប៉ះនឹងក្រាបCត្រង់ចំណុចA

គេមាន $A(1,1)\Rightarrow x_0=1, y_0=1$

តាម $L:y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

ដោយ $f'(x_0)=f'(1)=\dfrac{2-2\ln 1}{1}=2$

គេបាន $L:y=2(x-1)+1=2x-2+1=2x-1$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ$L:y=2x-1$ ។

៤. គណនា$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

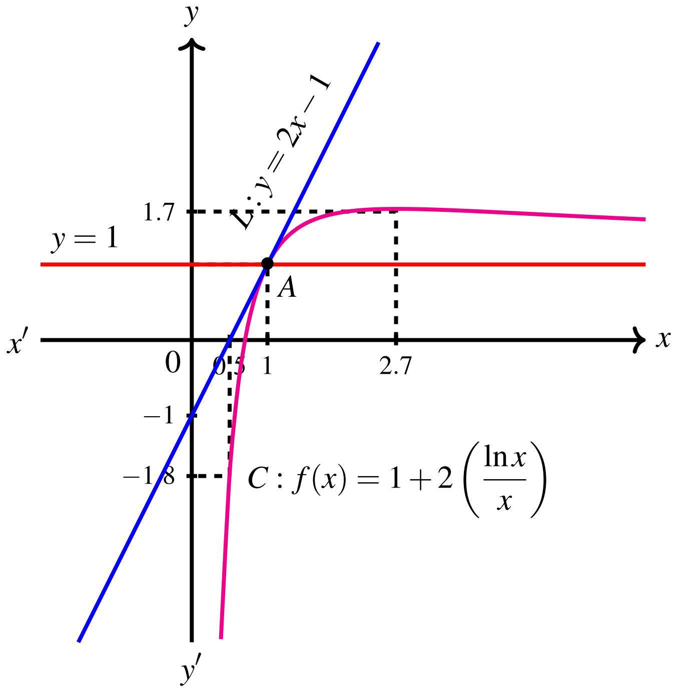
គេបាន $f\left(\frac{1}{2}\right)=1+2\left(\frac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)=1+2(-0.7\times 2)=1-2.8=-1.8$

ដូចនេះ $f\left(\frac{1}{2}\right)=-1.8$ ។

+សង់បន្ទាត់Lអាស៊ីមតូត និងក្រាបCនៅក្នុងតម្រុយតែមួយ

តារាងតម្លៃលេខ

x	0	1
$y=2x-1$	-1	1



ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា

ប្រឡង៖ **សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ**

លេខបន្ទប់៖________ លេខតុ៖________

សម័យប្រឡង៖________ មណ្ឌលប្រឡង៖________

ហត្ថលេខាអនុរក្ស៖ នាមត្រកូល និងនាមខ្លួន៖________

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖________ អក្សរសម្ងាត់

ហត្ថលេខា៖________

• បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាស់ប្រឡងឡើយ។ ក្រដាស់ប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។

• បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាស់ប្រឡងជាដាច់ខាត។

$\frac{\quad}{125}$

៧

វិញ្ញាសា៖ **គណិតវិទ្យាត្រៀម** រយៈពេល៖ 120 នាទី

រៀបរៀងដោយ៖ **រស់ មាន**

អក្សរសម្ងាត់

I គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^7-1}{x^2-4x+3}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ គ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2021x}-\cos 2020x}{\sin x}$

II នៅក្នុងថង់មួយមានឃ្លីព៌ណស ៤ គ្រាប់និងឃ្លីពណ៌ក្រហម ៥ គ្រាប់។ គេចាប់យកឃ្លី ៣ គ្រាប់ចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោមៈ

ក. A "យកបានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង ៣ គ្រាប់"

ខ. B "យកបានឃ្លីពណ៌ស ២ គ្រាប់ និងពណ៌ក្រហម ១ គ្រាប់"

គ. C "យ៉ាងតិចបានឃ្លីពណ៌ស ១ គ្រាប់"

III គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោមៈ

ក. $\int(x^2+2x-3)dx$ ខ. $\int\frac{e^x}{1-e^x}dx$

គ. $\int \ln x dx$ ឃ. $\int\frac{1}{\cos x}dx$

IV គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+y'-6y=(x+2)e^x$ ។

ក. ដោះស្រាយសមីការអូម៉ូហ្សែន $(F): y''+y'-6y=0$

ខ. រកចំនួនពិត a, b ដើម្បីឲ្យ $y_p=(ax+b)e^x$ ជាចម្លើយពិសេសសមីការមិនអូម៉ូហ្សែន

គ. បង្ហាញថា $y=y_c+y_p$ ជាចម្លើយទូទៅសមីការ (E) ដែល y_c ជាចម្លើយទូទៅសមីការអូម៉ូហ្សែន និង y_p ជាចម្លើយពិសេសសមីការមិនអូម៉ូហ្សែន រួចទាញរក y ។

V គេឲ្យសមីការអេលីបមួយ $(E): 25x^2+9y^2-50x-90y+25=0$ ។

ក. សរសេរសមីការ (E) ជាទម្រង់ស្តង់ដារ ។

ខ. គណនា ផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេរបស់អេលីប ។

គ. សង់អេលីប (E) ក្នុងតម្រុយ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

VI គេឲ្យអនុគមន៍ f មួយកំណត់ដោយ $f(x)=x-\frac{2}{e^x-1}$ មានខ្សែកោង C ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. សិក្សាលីមីតចុងដែនកំណត់ រួចរកអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃអនុគមន៍ f ។

គ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ ។

ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

ង. សង់អាស៊ីមតូត និងក្រាប C ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ដំណោះស្រាយ

I គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^7-1}{x^2-4x+3}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$\text{គេបាន} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^6+x^5+\cdots+x+1)}{x^2-x-3x+3}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^6+x^5+\cdots+x+1)}{x(x-1)-3(x-1)}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^6+x^5+\cdots+x+1)}{(x-1)(x-3)}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x^6+x^5+\cdots+x+1)}{(x-3)}$$
$$= \frac{1^6+1^5+\cdots+1+1}{1-3} = -\frac{7}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^7-1}{x^2-4x+3} = -\dfrac{7}{2}}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$\text{គេបាន} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0}(1+\cos x)$$
$$= (1+1) = 2$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x} = 2}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2021x}-\cos 2020x}{\sin x}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$\text{គេបាន} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2021x}-1+1-\cos 2020x}{\sin x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2021x}-1}{\sin x}+\frac{1-\cos 2020x}{\sin x}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2021x}-1}{x}\times\frac{x}{\sin x}+\frac{2\sin^2 1010x}{\sin x}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2021(e^{2021x}-1)}{2021x}\times\frac{x}{\sin x}+\frac{2020\sin 1010x}{1010x}\times\frac{x}{\sin x}\times\sin 1010x\right)$$
$$= (2021\times 1+2020\times 1\times 1\times 0) = 2021$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2021x}-\cos 2020x}{\sin x} = 2021}$

II គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

ក. A "យកបានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង 3 គ្រាប់"

* <u>ករណីអាច</u>

ដោយក្នុងថង់មានឃ្លីសរុប 9 គ្រាប់ គេចាប់យក 3 គ្រាប់ ចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ

យើងបានចំនួនករណីអាច $n(S) = C(9,3) = \dfrac{9!}{(9-3)!3!}$

$$= \frac{9\times8\times7\times6!}{6!\times3\times2\times1}$$

$$= \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}$$

$$= 3\times4\times7 = 84 \quad Case$$

*ករណីស្រប

A ជាព្រឹត្តិការណ៍យកបានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង 3 គ្រាប់

ដោយក្នុងថង់មានឃ្លីក្រហម 5 គ្រាប់យើងចង់បានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង 3 គ្រាប់

យើងបានចំនួនករណីស្រប $n(A) = C(5,3) = \dfrac{5!}{(5-3)!3!}$

$$= \frac{5\times4\times3!}{3!\times2\times1}$$

$$= \frac{5\times4}{2\times1}$$

$$= 5\times2 = 10 \quad Case$$

ដោយ$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{10}{84} = \dfrac{5}{42}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A) = \dfrac{5}{42}}$

ខ. B ”យកបានឃ្លីពណ៌ស ២ គ្រាប់ និងពណ៌ក្រហម ១ គ្រាប់”

ដោយក្នុងថង់មានឃ្លីស 4 គ្រាប់និងឃ្លីក្រហម 5 គ្រាប់ ហើយយើងចង់បាន ឃ្លីពណ៌ស ២ គ្រាប់ និងពណ៌ក្រហម ១ គ្រាប់

យើងបាន $n(B) = C(4,2)\times C(5,1) = \dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{5!}{4!1!}$

$$= \frac{4\times3\times2!}{2!\times2\times1}\times\frac{5\times4!}{4!\times1}$$

$$= 6\times5 = 30 \quad Case$$

ដោយ$P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{30}{84} = \dfrac{5}{14}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B) = \dfrac{5}{14}}$

គ. C ”យ៉ាងតិចបានឃ្លីពណ៌ស 1 គ្រាប់”

ដោយព្រឹត្តិការណ៍យ៉ាងតិចបានឃ្លីពណ៌ស 1 គ្រាប់ ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយជាមួយ ព្រឹត្តិការណ៍យកបានឃ្លីពណ៌ក្រហមទាំង 3 គ្រាប់

តាមប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយ $P(C) = 1 - P(A)$

$$= 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42}$$

ដូចនេះ $\boxed{P(C) = \dfrac{37}{42}}$

III គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក. $\displaystyle\int (x^2+2x-3)dx$

$= \int (x^2+2x-3)dx$

$= \int x^2dx + \int 2xdx - \int 3dx$

$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + C$

ដូចនេះ $\boxed{\int (x^2+2x-3)dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + C, C \in \Re}$

ខ. $\int \frac{e^x}{1-e^x}dx$

$= -\int \frac{-e^x}{1-e^x}dx$

$= -\int \frac{(1-e^x)'}{1-e^x}dx$

$= -\ln|1-e^x| + C$

ដូចនេះ $\boxed{\int \frac{e^x}{1-e^x}dx = -\ln|1-e^x| + C, C \in \Re}$

គ. $\int \ln x dx$

តាមរូបមន្តអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក $\int udv = uv - \int vdu$

តាង$u = \ln x => du = \frac{1}{x}dx$

$dv = dx => v = \int dx = x + c$

$\Leftrightarrow \int \ln x dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx$

$= x\ln x - \int dx$

$= x\ln x - x + C$

$= x(\ln x - 1) + C$

ដូចនេះ $\boxed{\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C, C \in \Re}$

ឃ. $\int \frac{1}{\cos x}dx$

$\int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx$

$= \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$

$= \int \frac{\cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}dx$

$* \frac{\cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \frac{a\cos x}{(1-\sin x)} + \frac{b\cos x}{(1+\sin x)}$

$= \frac{a\cos x(1+\sin x) + b\cos x(1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$

$\cos x = a\cos x + a\cos x\sin x + b\cos x - b\cos x\sin x$

$\cos x = (a+b)\cos x + (a-b)\cos x\sin x$

$$\Leftrightarrow + \begin{cases} a+b=1 & (1) \\ a-b=0 & (2) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad 2a+0=1$

$\Rightarrow \quad a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{\cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{\frac{1}{2}\cos x}{(1-\sin x)}+\frac{\frac{1}{2}\cos x}{(1+\sin x)}$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{\cos x}dx=\int \frac{\frac{1}{2}\cos x}{(1-\sin x)}+\frac{\frac{1}{2}\cos x}{(1+\sin x)}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{(1-\sin x)}dx+\frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)}dx$$
$$=-\frac{1}{2}\int \frac{(1-\sin x)'}{(1-\sin x)}dx+\frac{1}{2}\int \frac{(1+\sin x)'}{(1+\sin x)}dx$$
$$=-\frac{1}{2}\ln|1-\sin x|+\frac{1}{2}\ln|1+\sin x|+C$$

ដូចនេះ $\boxed{\int \frac{1}{\cos x}dx=-\frac{1}{2}\ln|1-\sin x|+\frac{1}{2}\ln|1+\sin x|+C, C\in\Re}$

IV ក. ដោះស្រាយសមីការអូម៉ូហ្សែន $(F): y''+y'-6y=0$

$(F): y''+y'-6y=0$ មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2-\lambda+6=0$

$$\Delta=(1)^2+4\cdot 6=25$$
$$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=5$$
$$\Rightarrow \lambda_1=\frac{-1-5}{2}=-3, \lambda_2=\frac{-1+5}{2}=2$$

តាម $y_c=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}$

យើងបានចម្លើយនៃសមីការ F គឺ $y_c=Ae^{-3x}+Be^{2x} A, B\, is\, constance$

ខ. រកចំនួនពិត a, b ដើម្បីឲ្យ $y_p=(ax+b)e^x$ ជាចម្លើយពិសេសសមីការមិនអូម៉ូហ្សែន

យើងមាន $y_p=(ax+b)e^x$

$$y_p'=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$$
$$y_p''=ae^x+(ax+a+b)e^x=(ax+2a+b)e^x$$

ដើម្បីឲ្យ y_p ជាចម្លើយពិសេសសមីការមិនអូម៉ូហ្សែនលុះត្រាតែ $y_p''+y_p'-6y_p=(x+2)e^x$

$\Leftrightarrow (ax+2a+b)e^x+(ax+a+b)e^x-6(ax+b)e^x=(x+2)e^x$

$$ax+2a+b+ax+a+b-6ax-6b=x+2$$
$$-4ax+3a-4b=x+2$$
$$\Leftrightarrow +\begin{cases}-4a=1\\ 3a-4b=2\end{cases}$$
$$\Rightarrow a=-\frac{1}{4}, b=-\frac{11}{16}$$

ដូចនេះ $a=-\frac{1}{4}, b=-\frac{11}{16}$ និង $y_p=(-\frac{1}{4}x-\frac{11}{16})e^x$

គ. បង្ហាញថា $y=y_c+y_p$ ជាចម្លើយទូទៅសមីការ (E)

ដោយ y_c ជាចម្លើយទូទៅសមីការអូម៉ូហ្សែន

យើងបាន $\quad y_c''+y_c'-6y_c=0 \quad (1)$

និង y_p ជាចម្លើយពិសេសសមីការមិនអូម៉ូហ្សែន

យើងបាន $y_p'' + y_p' - 6y_p = (x+2)e^x \quad (2)$

យក $(1),(2)$ យើងបាន

$$+\begin{cases} y_c'' + y_c' - 6y_c = 0 & (1) \\ y_p'' + y_p' - 6y_p = (x+2)e^x & (2) \end{cases}$$

$$y_c'' + y_p'' + y_c' + y_p' - 6y_c - 6y_p = (x+2)e^x$$

$$(y_c'' + y_p'') + (y_c' + y_p') - 6(y_c + y_p) = (x+2)e^x$$

គេបាន $y = y_c + y_p$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (E)

Therefore $y = y_c + y_p$ ជាចម្លើយទូទៅសមីការ (E)

$$y = y_c + y_p = Ae^{-3x} + Be^{2x} + \left(-\frac{1}{4}x - \frac{11}{16}\right)e^x$$

ដូចនេះ $\boxed{y = Ae^{-3x} + Be^{2x} - \left(\frac{1}{4}x + \frac{11}{16}\right)e^x \; A, B \; is \; constance}$

V

ក. សរសេរសមីការ (E) ជាទម្រង់ស្តង់ដារ

យើងមានសមីការ

$$(E): 25x^2 + 9y^2 - 50x - 90y + 25 = 0$$

$$25x^2 - 50x + 25 + 9y^2 - 90y + 9 \times 5^2 - 9 \times 5^2 = 0$$

$$25(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 10y + 5^2) = 225$$

$$25(x-1)^2 + 9(y-5)^2 = 225$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$ ជាទម្រង់ស្តង់ដារសមីការអេលីប

ខ. គណនា ផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេរបស់អេលីប

ដោយអេលីប $(E) \; : \; \dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-5)^2}{25} = 1$

មានទម្រង់ $\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ មានអ័ក្សធំស្របអ័ក្សអរដោនេ

$\Rightarrow h = 1, k = 5, a = 5, b = 3$

$and \; c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

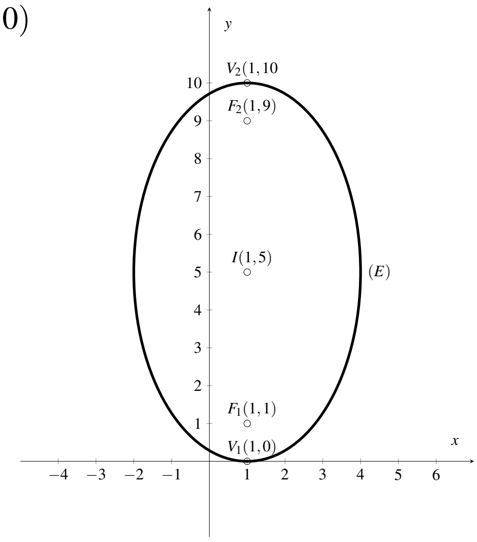
- ផ្ចិត $I(h,k) = (1,5)$

-កំពូល $V_1(h, k-a) = (1,0) \quad , \quad V_2(h, k+a) = (1,10)$

-កំណុំ $F_1(h, k-c) = (1,1) \quad , \quad F_2(h, k+c) = (1,9)$

-អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5} = 0.8$

គ. សង់អេលីប (E) ក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j})$



VI ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

$f(x)=x-\dfrac{2}{e^x-1}$ មានន័យកាលណា $e^x-1\neq 0$

$e^x\neq 1$

$e^x\neq e^0\Rightarrow x\neq 0$

$\therefore D=\Re-\{0\}$

ខ. សិក្សាលីមីតចុងដែនកំណត់ រួចរកអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៃអនុគមន៍ f

$\triangleright \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-\dfrac{2}{e^x-1}\right)$

$=0-\dfrac{2}{e^{0^+}-1}=-\dfrac{2}{0^+}$

$=-\infty$

$\triangleright \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x-\dfrac{2}{e^x-1}\right)$

$=0-\dfrac{2}{e^{0^-}-1}=-\dfrac{2}{0^-}$

$=+\infty$

$\triangleright \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\dfrac{2}{e^x-1}\right)$

$=+\infty-\dfrac{2}{e^{+\infty}-1}=+\infty-0$

$=+\infty$

$\triangleright \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x-\dfrac{2}{e^x-1}\right)$

$=-\infty-\dfrac{2}{e^{-\infty}-1}=-\infty-\dfrac{2}{0-1}$

$=-\infty+2=-\infty$

∘ដោយ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$ ដូចនេះបន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

∘ដោយ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-2}{e^x-1}=0$ដូចនេះបន្ទាត់ $y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

∘ដោយ $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-2}{e^x-1}=2$ដូចនេះបន្ទាត់ $y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត ។

គ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញាដេរីវេ

$f(x)=x-\dfrac{2}{e^x-1}$

$f'(x)=1-\dfrac{-2(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}$

$=1+\dfrac{2e^x}{(e^x-1)^2}$

$=\dfrac{(e^x-1)^2+2e^x}{e^x-1)^2}$

$=\dfrac{e^{2x}-2e^x+1+2e^x}{e^x-1)^2}$

$\therefore f'(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{(e^x-1)^2}$

- សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ

ដោយ $(e^{2x}+1),(e^x-1)^2 \geq 0\ \forall x \in D$

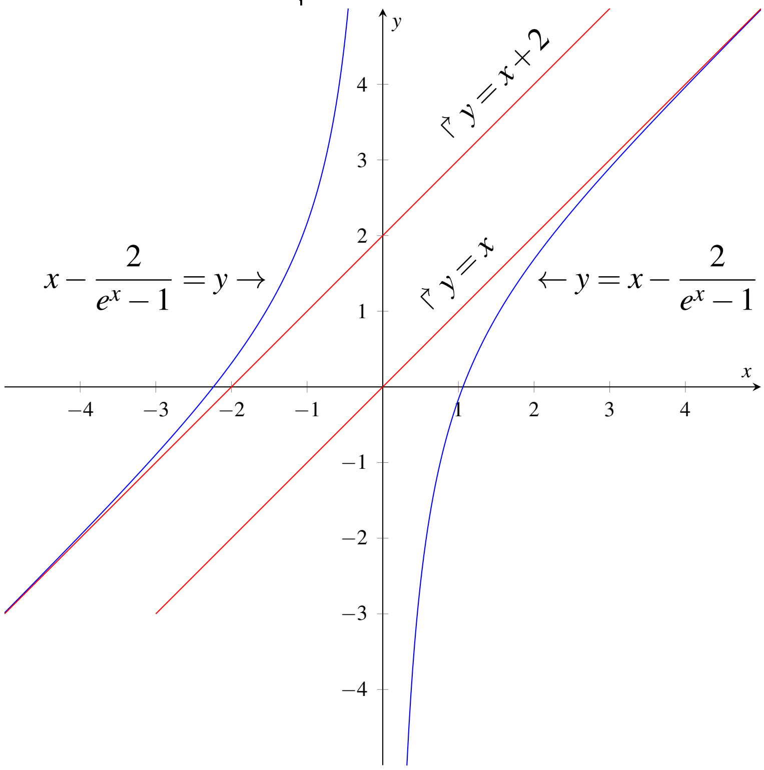
យើងបាន $f'(x) \geq\ \forall x \in D$

- គ្មានចំណុចបរមា

ឃ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

ង. សង់អាស៊ីមតូត និងក្រាប C ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $(O, \vec{i}, \vec{j})$



ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា លេខបន្ទប់៖________

ប្រឡង៖ **សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ** លេខតុ៖________

សម័យប្រឡង៖________ មណ្ឌលប្រឡង៖________

ហត្ថលេខាអនុរក្ស៖ នាមត្រកូល និងនាមខ្លួន៖________

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖________ | អក្សរសម្ងាត់ |

ហត្ថលេខា៖________

- បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាស់ប្រឡងឡើយ។ ក្រដាស់ប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។
- បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាស់ប្រឡងជាដាច់ខាត។

________ / 125

៨

វិញ្ញាសា៖ **គណិតវិទ្យាត្រៀម** រយៈពេល៖ 120 នាទី

រៀបរៀងដោយ៖ **អឿន សំណាង**

| អក្សរសម្ងាត់ |

I គណនា លីមីត ខាងក្រោម ៖

១. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{\sqrt{x+3}-2}$ ២. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+e^x-1}{x+x^2}$ ៣. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right)$

II ១. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដោយដឹងថា $(3+2i)a+(2-i)b=4+5i$ ។

២. គេមាន α និង β ជា ឬសនៃ សមីការ $x^2-2x+3=0$ ។

ចូរសរសេរ $z=1+\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha-2+i(\beta^3-\beta^2+\beta+5)$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

III គណនា អាំងតេក្រាលកំណត់ ខាងក្រោម ៖

១. $\int_{-1}^{1}\left(1-6x+3x^2\right)dx$ ២. $\int_{0}^{3}\left(2e^{2x}+e^x-1\right)dx$

៣. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x\cos^4 x)dx$ ៤. $\int_{0}^{1}\dfrac{x^2+x+1}{2x+3}dx$

IV គេមាន សមីការ $(E)\ : 2y''-y'-3y=0$ ។

ក. ដោះស្រាយ សមីការ (E) ។

ខ. រកចម្លើយមួយនៃ (E) ដោយដឹងថា ក្រាបនៃ អនុគមន៍ចម្លើយកាត់អ័ក្ស $(y'oy)$ ត្រង់$y=2$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះក្រាបត្រង់ចំណុចនេះស្របទៅនឹង បន្ទាត់ $(L):\frac{1}{2}x+3$ ។

V រកកូអរដោនេ នៃ កំពូល កំណុំ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស និង អ័ក្សឆ្លុះនៃប៉ារ៉ាបូល $x^2-4x+4y+12=0$ រួចសង់ក្រាប។

VI ក្នុងថង់មួយមានប៊ិចក្រហម 5 ដើម ប៊ិចខៀវ 8 ដើម និង ប៊ិចខ្មៅ 7 ដើម ។ គេចាប់យកប៊ិច 4 ដើមព្រមគ្នាដោយចៃដន្យចេញពីថង់ ។ គណនាប្រូបាប នៃព្រឹត្តការណ៍នីមួយៗ ខាងក្រោម ៖

១. $A=$ចាប់បានប៊ិចមានពណ៌ ដូចគ្នា 2 ដើម ។ ២. $B=$ចាប់បានប៊ិចមានពណ៌ ដូចគ្នា 3 ដើម ។

៣. $C=$ចាប់បានប៊ិចមានពណ៌ ដូចគ្នា 4 ដើម ។ ៤. $D=$ចាប់បានប៊ិចមានពណ៌ ដូចគ្នា 2 គូ ។

VII នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(0,4,-1)$; $B(-2,4,-5)$;$C(1,1,-5)$;$D(1,0,-4)$ និង $E(2,2,-1)$ ។

១. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចបង្ហាញថា បីចំណុច $A;B;C$ កំណត់បានប្លង់មួយ ព្រមទាំងសរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ។

២. សរសេរ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃ បន្ទាត់(d)កាត់តាម Cហើយស្របនឹងបន្ទាត់ $(DE):x-1=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+4}{3}$ ។

៣. រក កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M នៃបន្ទាត់ (DE) និង ប្លង់ (ABC) ។

៤. បង្ហាញថា ចំណុច $I(-1,2,-3)$ ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែរ ដែលស្វ៊ែរនោះ កាត់តាមចំណុច $A;B;C;D$ រួចសរសេរសមីការស្វ៊ែរនោះ។

VIII គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ$f(x)=x-\dfrac{2e^x}{e^x-1}$ មានក្រាប តំណាង (C) ។

១. រកដែនកំណត់នៃ អនុគមន៍ ព្រមទាំងគណនា លីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់ រួចបញ្ជាក់អាស៊ីមតូចបើមាន ។

២. បង្ហាញថា $I(0,-1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ ខ្សែកោង ។

៣. បង្ហាញថា បន្ទាត់ $(d_1);y=x-2$និង $(d_2);y=x$ ជា អាស៊ីមតូចទ្រេតនៃ ក្រាប (C) រួចសិក្សាទីតាំងធៀបនៃ (d_1) (d_2) ធៀបនឹង (C) ។

៤. បង្ហាញថា f ជា អនុគមន៍ម៉ូណូតូន គ្រប់ $x \neq 0$ និង សង់តារាងអថេរភាព នៃ f ។

៥. សង់ អាស៊ីមតូតទាំង អស់ និង ក្រាប (c) នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

៦. គណនា ផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃក ប្លង់ ខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ (d_1) និង បន្ទាត់ $x = 2; x = 4$ ។

ដំណោះស្រាយ

I គណនា លីមីត ៖

១. គេមាន $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-3x+1}{\sqrt{x+3}-2}$ មានរាងមិនកំណត់ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-3x+1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-2x-x+1}{\sqrt{x+3}-2} \times \dfrac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{[2x(x-1)-(x-1)](\sqrt{x+3}+2)}{\sqrt{(x+3)^2}-2^2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(2x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}(2x-1)(\sqrt{x+3}+2)$$

$$= (2\times 1-1)(\sqrt{1+3}+2) = 4$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-3x+1}{\sqrt{x+3}-2} = 4}$

២. គេមាន $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x + e^x - 1}{x+x^2}$ មានរាងមិនកំណត់ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x + e^x - 1}{x+x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x(1+x)} + \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x(1+x)}$

$$= 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{1}{1+x}\right) + \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x} \times \frac{1}{1+x}\right)$$

$$= 2\times 1 \times \frac{1}{1+0} + 1 \times \frac{1}{1+0} = 3$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x + e^x - 1}{x+x^2} = 3}$

៣. គេមាន $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right)$ រាងមិនកំណត់ $(+\infty-\infty)$

គេបាន $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)}$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\left[\sqrt{(4x^2+3)^2}-(2x)^2\right]}{\sqrt{4x^2+3}+2x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{3}{\sqrt{4x^2\left(1+\frac{3}{4x^2}\right)}+2x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{3}{2|x|\sqrt{1+\frac{3}{4x^2}}+2x} \quad ; \text{ពេល} x \to +\infty \text{ នោះ } |x| = x$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{3}{2x\left(\sqrt{1+\frac{3}{4x^2}}+1\right)}$$

$$= \frac{3}{2(+\infty)(\sqrt{1+0}+1)} = 0 \text{ ព្រោះ } \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{4x^2} = 0$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right)=0}$

II ១. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ៖

គេមាន $(3+2i)a+(2-i)b = 4+5i$

$$\Leftrightarrow 3+2ai+2b-bi = 4+5i$$

$$\Leftrightarrow (3a+2b)+(2a-b) = 4+5i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b &= 4 \\ 2a-b &= 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = 2 \text{ និង } b = -1$$

ដូច្នេះ $\boxed{a = 2 \text{ និង } b = -1}$

២. សរសេរ z ជា ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

គេមាន α និង β ជាឫសនៃ សមីការ $x^2-2x+3=0$

គេបាន $\begin{cases} \alpha^2-2\alpha+3=0 \\ \beta^2-2\beta+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 2\alpha-3 \\ \beta^2 = 2\beta-3 \end{cases}$

ដោយ $z = 1+\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha-2+i(\beta^3-\beta^2+\beta+5)$

$$= 1+\alpha\times\alpha^2-3\alpha^2+5\alpha-2+i(\beta\times\beta^2-\beta^2+\beta+5)$$

$$= 1+\alpha(2\alpha-3)-3(2\alpha-3)+5\alpha-2+i\,[\beta(2\beta-3)-(2\beta-3)+\beta+5]$$

$$= 1+2\alpha^2-3\alpha-6\alpha+9+5\alpha-2+i(2\beta^2-3\beta-2\beta+3+\beta+5)$$

$$= 8-4\alpha+2(2\alpha-3)+i[2(2\beta-3)-4\beta+8]$$

$$= 2+2i$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ដូច្នេះ $\boxed{z = 2\sqrt{2}}$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

III គណនា អាំងតេក្រាលកំណត់ ខាងក្រោម ៖

១. គណនា $\int_{-1}^{1}(1-6x+3x^2)dx$

គេមាន $\int_{-1}^{1}(1-6x+3x^2)dx = \left(x-3x^2+x^3\right)\Big|_{-1}^{1}$

$$= [1-3(1)^2+1^3]-[-1-3(-1)^2+(-1)^3]$$

$$= 4$$

ដូច្នេះ $\boxed{\int_{-1}^{1}(1-6x+3x^2)dx = 4}$

២. គណនា $\int_0^3 \left(2e^{2x}+e^x-1\right)dx$

គេមាន $\int_0^3 \left(2e^{2x}+e^x-1\right)dx = \left(e^{2x}+e^x-x\right)\Big|_0^3$

$$= \left(e^{2\times3}+e^3-3\right)-\left(e^{2\times0}+e^0-0\right)$$

$$= e^6+e^3-5$$

ដូច្នេះ $\boxed{\int_0^3 \left(2e^{2x}+e^x-x\right)dx = e^6+e^3-5}$

៣. គណនា $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x cos^4 x\right)dx$

តាង $u=\cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$

ពេល$x=0 \Rightarrow u=1\,; x=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow u=0$

គេបាន $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x cos^4 x\right)dx = -\int_1^0 u^4 du$;សម្គាល់ $\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$

$$= \int_0^1 u^4 du = \left(\frac{u^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{5}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x cos^4 x\right)dx = \dfrac{1}{5}}$

៤. គណនា $\int_0^1 \dfrac{x^2+x+1}{2x+3}dx$

គេមាន $\int_0^1 \dfrac{x^2+x+1}{2x+3}dx = \int_0^1 \left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}+\dfrac{7}{4(2x+3)}\right)dx$

$$= \left[\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}x+\frac{7}{8}\ln(2x+3)\right]\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{7}{8}\ln 5\right)-\left(\frac{7}{8}\ln 3\right)$$

$$= \frac{7}{8}\ln\frac{5}{3}$$

$$\begin{array}{rr|l} & x^2+x+1 & 2x+\;\;3 \\ \cline{3-3} - & x^2+\frac{3}{2}x & \frac{1}{2}x-\frac{1}{4} \\ \cline{2-2} & \frac{x}{2}+1 & \\ - & -\frac{x}{2}-\frac{3}{4} & \\ \cline{2-2} & \frac{7}{4} & \end{array}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\int_0^1 \dfrac{x^2+x+1}{2x+3}dx = \dfrac{7}{8}\ln\dfrac{5}{3}}$

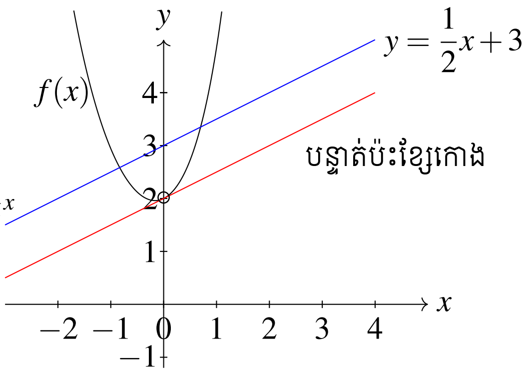
IV

១. ដោះស្រាយសមីការ (E) ៖

សមីការសម្គាល់ $2\lambda^2-\lambda-3=0$

គេបាន $\lambda_1=-1 \;\; \lambda_2=\dfrac{3}{2}$

$\boxed{\text{យើងបាន } y=Ae^{-x}+Be^{\frac{3}{2}x}\,;\, A;B \text{ ជាចំនួនថេរ}}$



២. រកចម្លើយមួយនៃ (E)

គេមាន $y=Ae^{-x}+Be^{\frac{3}{2}x} \Rightarrow y' = -Ae^{-x}+\dfrac{3}{2}Be^{\frac{3}{2}x}$

ដោយដឹងថាក្រាបនៃ អនុគមន៍ចម្លើយកាត់អ័ក្ស $(y'oy)$

ត្រង់ $y=2$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះ

ក្រាបត្រង់ចំណុចនេះស្របទៅនឹង បន្ទាត់ $(L): \dfrac{1}{2}x+3$

គេបាន $\begin{cases} f(0)=2 \\ f'(0)=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ -A+\dfrac{3}{2}B=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow A=B=1$

ដូច្នេះ $\boxed{y=e^{-x}+e^{\frac{3}{2}x} \text{ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E)}}$

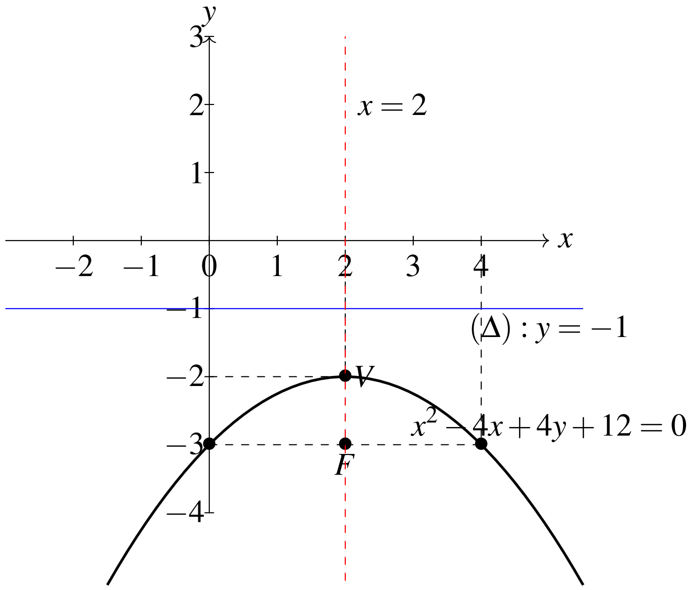
V រកកូរកូអរដោនេ នៃ កំពូល កំណុំ សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស និង អ័ក្សឆ្លុះ នៃ ប៉ារ៉ាបូល ៖

គេមាន$x^2-4x+4y+12=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4=-4y-12+4$

$\Leftrightarrow (x-2)^2=-4(y+2)$ គេបានប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះឈរ

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2=-4(y+2)\\(x-h)^2=4p(y-k)\end{cases} \Leftrightarrow h=2\,;\,k=-2\,;4p=-4 \Rightarrow p=-1$$

- កំពូល $V(h,k)=V(2,-2)$
- កំណុំ $F(h,k+p)=F(2,-2-1)$
  $=F(2,-3)$
- សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $(\Delta): y=k-p$
  $=-2-(-1)$
  $=-1$
- អ័ក្សឆ្លុះឈរគឺ $x=h=2$
- ក្រាបនៃ អនុគមន៍ $x^2-4x+4y+12=0$
  យក $y=-3 \Leftrightarrow x=0\,;\,x=4 \Leftrightarrow y=-3$



VI រកប្រូបាបនៃ ព្រឹត្តការណ៍ ខាងក្រោម ៖

១. $A=$ចាប់បានប៊ិចមានពណ៌ ដូចគ្នា 2 ដើម
ដោយ $n(S)=C(20,4)=\dfrac{20!}{(20-4)!4!}=\dfrac{20\times19\times18\times17\times16!}{16!4!}=15\times19\times17 \quad =4845$

តាមរូបមន្ត : $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$

$$=\frac{C(5,2)\times C(8,1)\times C(7,1)+C(5,1)\times C(8,2)\times C(7,1)+C(5,1)\times C(8,1)\times C(7,2)}{C(20,4)}$$

$=\dfrac{28}{57}$

ដូច្នេះ $\boxed{P(A)=\dfrac{112}{969}}$

២. $B=$ចាប់បានប៊ិចមានពណ៌ ដូចគ្នា 3 ដើម

$$\text{តាមរូបមន្ត } : P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{C(5,3)\times C(15,1)+C(8,3)\times C(12,1)+C(7,3)\times C(13,1)}{C(20,4)}$$
$$=\frac{1277}{4845}$$

ដូច្នេះ $\boxed{P(B)=\frac{1277}{4845}}$

៣. $C=$ចាប់បានប៊ិចមានពណ៌ ដូចគ្នា 4 ដើម

$$\text{តាមរូបមន្ត } : P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{C(5,4)+C(8,4)+C(7,4)}{C(20,4)}$$
$$=\frac{22}{969}$$

ដូច្នេះ $\boxed{P(C)=\frac{22}{969}}$

៤. D : ចាប់បានប៊ិចមានពណ៌ដូចគ្នា 2គូ

ដោយព្រឹត្តការណ៍នៃការចាប់បានប៊ិចមានពណ៌ ដូចគ្នា 2គូ គឺមានន័យថា ចាប់បានប៊ិចមានពណ៌ដូចគ្នា 4ដើម

ដូច្នេះ $\boxed{P(D)=P(C)=\frac{22}{969}}$

VII ១. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

គេមាន $A(0,4,-1)$; $B(-2,4,-5)$; $C(1,1,-5)$

+ តាមរូបមន្ត $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)=(-2-0,4-4,-5-(-1))=(-2,0,-4)$
+ តាមរូបមន្ត $\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A)=(1-0,1-4,-5-(-1))=(1,-3,-4)$

$$\text{គេបាន}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 0 & -4\\ 1 & -3 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -4\\ -3 & -4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-2 & -4\\ 1 & -4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & -3\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=[0(-4)-(-3)(-4)]\vec{i}-[(-2)(-4)-1(-4)]\vec{j}+[(-2)(-3)-1(0)]\vec{k}$$
$$=-12\vec{i}-12\vec{j}+6\vec{k}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-12\vec{i}-12\vec{j}+6\vec{k}}$

+ ដោយ$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\neq\vec{0}$ នោះគេបានចំណុចទាំងបីរត់មិនត្រង់ជួរកំណត់បានប្លង់(ABC)មួយ។
+ សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) តាមរូបមន្តសមីការប្លង់ $(ABC):a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

- វ៉ិចទ័រណ័រម៉ាល់នៃប្លង់(ABC) : $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-12,-12,6)$
- យក$A(0,4,-1)$ ជាចំណុចកាត់របស់ប្លង់(ABC)គេបាន $x_0=0$; $y_0=4$; $z_0=-1$

គេបាន$(ABC):-12(x-0)-12(y-4)+6(z+1)=0 \quad \Leftrightarrow 2x+2y-z-9=0$

ដូច្នេះ $\boxed{(ABC):2x+2y-z-9=0}$

២. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃ បន្ទាត់ (d)

$$\text{តាមរូបមន្ត}: (d):\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases} ;t\in\mathbb{R}$$

+បម្រាប់:(d)កាត់តាម $C(1,1,-5)$ គេបាន $x_0=1$; $y_0=1$; $z_0=-5$

+(d)ស្របនឹង$(DE): x-1=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+4}{3}$គេបាន $\vec{u}_d=\vec{u}_{(DE)}=(1,2,3)$

ដូច្នេះ $(d):\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=-5+3t \end{cases}$

៣. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ $M(x_M,y_M,z_M)$នៃ បន្ទាត់ (DE)និង ប្លង់ (ABC)

យើងមានសមីការប្លង់$(ABC): 2x+2y-z-9=0$

សមីការឆ្លុះ$(DE): x-1=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+4}{3} \Rightarrow$ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ$(DE):\begin{cases} x=1+t' \\ y=2t' \quad ;t'\in\mathbb{R} \\ z=-4+3t' \end{cases}$

$+M\in(DE)\Leftrightarrow \begin{cases} x_M=1+t' \\ y_M=2t' \quad ;t'\in\mathbb{R} \\ z_M=-4+3t' \end{cases}$

$+M\in(ABC)\Leftrightarrow 2x_M+2y_M-z_M=9=0$

$\Leftrightarrow 2(1+t')+2(2t')-(-4+3t)-9=0 \Rightarrow t'=1 \Rightarrow \begin{cases} x_M=1+1=2 \\ y_M=2(1)=2 \\ z_M=-4+3(1)=-1 \end{cases}$

ដូច្នេះ កូអរដោនេនៃMគឺ$M(2,2,-1)$

៤. បង្ហាញថាចំណុច $I(-1,2,-3)$ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែរ

ដោយស្វ៊ែរកាត់តាម A ;B ;CនិងDនោះដើម្បីឲ្យIជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែរលុះត្រាតែ$IA=IB=IC=ID$

+ $IA=\sqrt{(0+1)^2+(4-2)^2+(-1+3)^2}=3$ឯកតាប្រវែង

+ $IB=\sqrt{(-2+1)^2+(4-2)^2+(-5+3)^2}=3$ឯកតាប្រវែង

+ $\sqrt{(1+1)^2+(1-2)^2+(-5+3)^2}=3$ឯកតាប្រវែង

+ $\sqrt{(1+1)^2+(0-2)^2+(-4+3)^2}=3$ឯកតាប្រវែង

ដោយ $IA=IB=IC=ID$

ដូច្នេះ ចំណុច$I(-1,2,-3)$ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែរ

+សរសេរសមីការស្វ៊ែរ(S)

តាមរូបមន្ត$(S): (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

- បម្រាប់: $I(a,b,c)=I(-1,2,-3)$ $r=IA=3$

  ដូច្នេះ $(S): (x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$

VIII

១. + $f(x)$ មានន័យកាលណា $e^x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$

ដូច្នេះ $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

+ គណនាលីមីតត្រង់ចុងដែនកំណត់

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\dfrac{2e^x}{e^x-1}\right)=+\infty-\dfrac{2((0)}{0-1}=\boxed{-\infty}$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=0$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{2e^x}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{2e^x}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}\right)$
  $= \lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{2}{1-\frac{1}{e^x}}\right) = \boxed{+\infty}$ ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$
- $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(x - \frac{2e^x}{e^x-1}\right) = 0 - \frac{2(e^0)}{e^{0^+}-1} = -\frac{2}{0^+} = \boxed{-\infty}$ ព្រោះ $\frac{2}{0^+} = +\infty$
- $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(x - \frac{2e^x}{e^x-1}\right) = 0 - \frac{2(e^0)}{e^{0^-}-1} = -\frac{2}{0^-} = \boxed{+\infty}$ ព្រោះ $\frac{2}{0^-} = -\infty$

\+ បញ្ជាក់អាស៊ីមតូត

- ដោយ $\lim_{x\to0} f(x) = \infty$ នោះគេបានបន្ទាត់ $\boxed{x=0}$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃ ខ្សែកោង ។

២. បង្ហាញថា $I(0,-1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃខ្សែកោង

តាមរូបមន្ត: $f(2a-x)+f(x) = 2b$; $I(0,-1) \Leftrightarrow a=0$; $b=-1$

\+ មាន $f(x) = x - \frac{2e^x}{e^x-1} \Rightarrow f(2\times0-x) = f(-x) = -x - \frac{2e^{-x}}{e^{-x}-1} = -x - \frac{2}{1-e^x}$

គេបាន$f(2\times0-x)+f(x) = 2\times(-1) \Leftrightarrow f(-x)+f(x) = -2$

$$\Leftrightarrow -x - \frac{2}{1-e^x} + x - \frac{2e^x}{e^x-1} = -\frac{2}{1-e^x} + \frac{2e^x}{1-e^x} = -2\left(\frac{1-e^x}{1-e^x}\right) = -2$$ ពិត

៣. + បង្ហាញថា $(d_1): y = x-2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C)

គេមាន $(C): f(x) = x - \frac{2e^x}{e^x-1}$; $(d_1): y = x-2$

យក $f(x)-y = x - \frac{2e^x}{e^x-1} - x + 2 = \frac{-2e^x+2e^x-2}{e^x-1} = \frac{2}{1-e^x}$ និង $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1-e^x} = 0$

ដូច្នេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់}(d_1): y = x-2\text{ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ}(C)\text{ខាង}x\to+\infty}$

\+ បង្ហាញថា $(d_2): y = x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ (C)

យក $f(x)-y = x - \frac{2e^x}{e^x-1} - x = \frac{2e^x}{1-e^x}$ និង $\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^x}{1-e^x} = \frac{2\times0}{1-0} = 0$

ដូច្នេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់}(d_2): y = x\text{ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃ}(C)\text{ខាង}x\to-\infty}$

\+ សិក្សាទីតាំងរវាង (C) និង (d_1) ; (d_2)

- សិក្សាទីតាំងធៀបរវាង (C)និង(d_1)

  មាន $f(x)-y = \frac{2}{1-e^x}$ដោយ $2>0$នោះ $\frac{2}{1-e^x}$មានសញ្ញាតាម $1-e^x$

  $1-e^x>0 \Leftrightarrow x<0$; $1-e^x<0 \Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	‖	$-$

  +ចំពោះ $x\in(-\infty,0) \Rightarrow f(x)-y>0$ នោះខ្សែកោង(C)នៅលើ (d_1)

  +ចំពោះ $x\in(0,+\infty) \Rightarrow f(x)-y<0$ នោះខ្សែកោង(C)នៅក្រោម (d_1)

- សិក្សាទីតាំងធៀបរវាង (C)និង(d_2)

  មាន $f(x)-y = \frac{2e^x}{1-e^x}$ដោយ $2e^x>0$នោះ $\frac{2}{1-e^x}$មានសញ្ញាតាម $1-e^x$

  $1-e^x>0 \Leftrightarrow x<0$; $1-e^x<0 \Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$
$f(x)-y$	$+$ ‖ $-$

+ចំពោះ $x\in(-\infty,0)\Rightarrow f(x)-y>0$ នោះខ្សែកោង(C)នៅលើ (d_2)

+ចំពោះ $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f(x)-y<0$ នោះខ្សែកោង(C)នៅក្រោម (d_2)

៤. បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូន ចំពោះ $x\neq 0$

មាន$f(x)=x-\dfrac{2e^x}{e^x-1}\Rightarrow f'(x)=1-2\left[\dfrac{e^x(e^x-1)-e^x\times e^x}{(e^x-1)^2}\right]=1+\dfrac{2e^x}{(e^x-1)^2}>0\,;\,\forall x\neq 0$

ដោយ$f'(x)>0$នោះ $f(x)$ជាអនុគមន៍កើន នាំឲ្យ$f(x)$ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូន

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

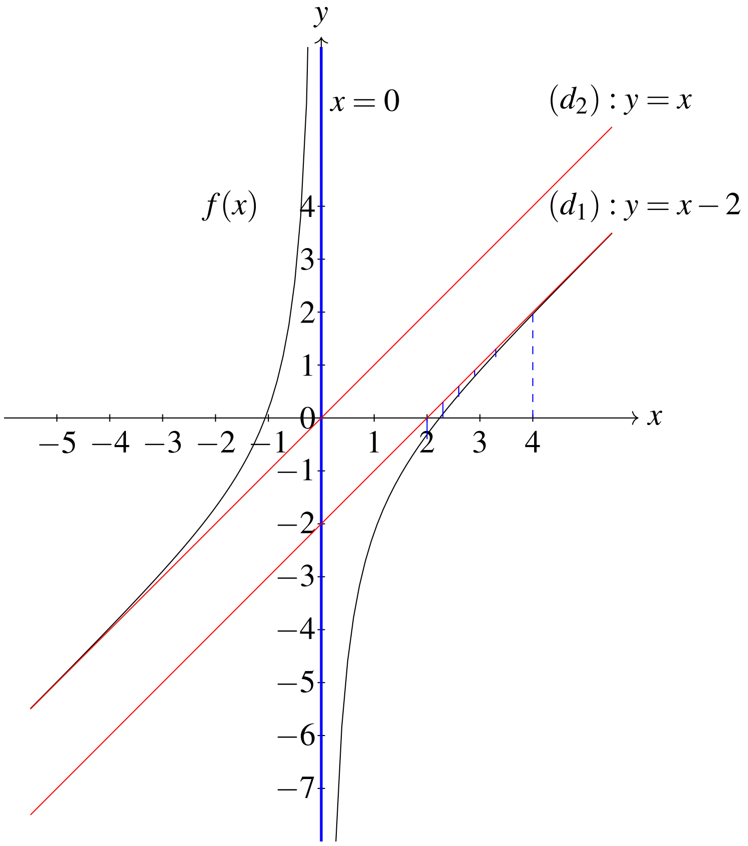
៥. សង់ក្រាប និង គ្រប់អាសុីមតូតទាំងអស់

+ $(d_1): y=x-2$;

x	0	1
y	-2	-1

;$(d_2): y=x$

x	0	1
y	0	1



៦. គណនា ផ្ទៃក្រឡាផ្នែក ប្លង់ ខណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) និងបន្ទាត់ (d_1) និង បន្ទាត់ $x=2\,;x=4$ ។

យើងដឹងហើយថា $x\in(0,+\infty)$បន្ទាត់$(d_1): y=x-2$នៅលើខ្សែកោង (C)នោះ

គេបាន $x\in[2,4]$បន្ទាត់(d_1) ក៏នៅលើខ្សែកោង(C)ដែរ

គេបាន $S=\int_2^4\left[x-2-x+\frac{2e^x}{e^x-1}\right]dx=\int_2^4\left(\frac{2e^x}{e^x-1}-2\right)dx=\left[2\ln(e^x-1)-2x\right]_2^4$

$$=2\ln(e^4-1)-8-2\ln(e^2-1)+4$$

$$=2\ln\left(\frac{e^4-1}{e^2-1}\right)-4$$

ដូច្នេះ $\boxed{S=2\ln\left(\frac{e^4-1}{e^2-1}\right)-4 \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា លេខបន្ទប់៖________

ប្រឡង៖ **សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ** លេខតុ៖________

សម័យប្រឡង៖________ មណ្ឌលប្រឡង៖________

ហត្ថលេខាអនុរក្ស៖ នាមត្រកូល និងនាមខ្លួន៖________

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖________ អក្សរសម្ងាត់

ហត្ថលេខា៖________

• បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាស់ប្រឡងឡើយ។ ក្រដាស់ប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។

• បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាស់ប្រឡងជាដាច់ខាត។

$\frac{\quad}{125}$ **៩**

វិញ្ញាសា៖ **គណិតវិទ្យាត្រៀម** រយៈពេល៖ 120 នាទី អក្សរសម្ងាត់

រៀបរៀងដោយ៖ Kim Hun

I (**១៥ពិន្ទុ**) គេឲ្យពីរចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = 2i(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ និង $z_2 = 2i(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6})$ ។

ក. សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ពីជគណិត ។ ខ. ចូរបង្កើតសមីការដឺក្រេទី 2 នៃ z ដែលមាន z_1 និង z_2 ជាឬស ។

គ. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យ $z_1^3 + z_2^3 = 2(x+1) + i(y-3)$ ។

II (**១៥ពិន្ទុ**) គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1+x}{\sqrt{x^2+3}-2}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{1}{x} + \ln x)$ គ. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x - e^x + \ln x)$

III ១. (**៥ពិន្ទុ**) ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $E:\ g''(x) - 7g'(x) + 10g(x) = 0$ ។

២. (**៥ពិន្ទុ**) កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយនៃ E ដែល $g(0) = 5\ ;\ g'(0) = 16$ ។

IV (**១៥ពិន្ទុ**) ថង់មួយមានបាល់ក្រហម 8 បាល់ស 5 ។បាល់ 3 ត្រូវបានយកចេញដោយចៃដន្យ។ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ដូចខាងក្រោម៖

ក. A : បាល់ទាំង 3 ពណ៌ស ។ ខ. B : បាល់ទាំង3ពណ៌ក្រហម ។ គ. C : បាល់ស2និងបាល់ក្រហម1 ។

V (**១០ពិន្ទុ**) គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}\quad ;\quad x\neq 1\ ,\ x\neq 2$ ។

១. សរសេរ f ជារាង $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$ ដែល $a\,,b$ ជាចំនួនពិតត្រូវកំណត់ ។

២. គណនា $\int_0^3 f(x)dx$

VI (**៣៥ពិន្ទុ**) គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ$\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = x + 2 + (x+1)e^{-x}$ មានក្រាបតំណាង C ។

១. គណនាលីមីតនៃ f ខាង $+\infty$ និង $-\infty$ ។

២. គណនា $f'(x)$ ។

៣. ដោយដឹងថា $1 - xe^{-x} > 0$ ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃ f ។

៤. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $\Delta : y = x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C ។

សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេតនេះ ។

៥. សង់បន្ទាត់ Δ និង ក្រាប C ក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

VII (**២៥ពិន្ទុ**)នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(2,1,4)\,;B(2,-2,7)$ និង ប្លង់ $P : 2x + 2y - z = 2$ ។

១. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាម B ហើយកែងនឹងប្លង់ P ។

២. បន្ទាត់ D មួយមានសមីការ $x = 1 + 2t\ ;\ y = -2t\ ;\ z = 1 - t\ ;\ \ (t\in\mathbb{R})$ ។

ចូរកំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M រវាង D និង P ។

៣. ចូរគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ MAB ។

ដំណោះស្រាយ

I ក. (**៥ពិន្ទុ**) សរសេរ z_1 និង z_2 ជាទម្រង់ពីជគណិត

ដោយ $z_1 = 2i(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 2i(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) \quad = -1 + \sqrt{3}i$

ដោយ $z_2 = 2i(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}) = 2i(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) \quad = 1 + \sqrt{3}i$

ខ. (**៥ពិន្ទុ**)ចូរបង្កើតសមីការដឺក្រេទី 2 នៃ z ដែលមាន z_1 និង z_2 ជាឫស

សមីការដឺក្រេទី២មានរាង $Z^2 - SZ + P = 0$

ដោយ $S = z_1 + z_2 = -1 + \sqrt{3}i + 1 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i$

ដោយ $P = z_1 \times z_2 = (-1 + \sqrt{3}i) \times (1 + \sqrt{3}i) = -1 - \sqrt{3}i + \sqrt{3}i - 3 = -4$

ដូចនេះ សមីការដឺក្រេទី២គឺ $Z^2 - 2i\sqrt{3}Z - 4 = 0$

គ. (**៥ពិន្ទុ**)កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យ $z_1^3 + z_2^3 = 2(x+1) + i(y-3)$

ដោយ $\quad z_1 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

$$\Rightarrow z_1^3 = 2^3(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 8(1 + 0i) = 8$$

ដោយ $\quad z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$$\Rightarrow z_2^3 = 2^3(\cos\pi + i\sin\pi) = 8(-1 + 0i) = -8$$

គេបាន $z_1^3 + z_2^3 = 2(x+1) + i(y-3)$

$$8 - 8 = 2(x+1) + i(y-3)$$

$$0 + 0i = 2(x+1) + i(y-3)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2(x+1) & = 0 \\ y - 3 & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & = -1 \\ y & = 3 \end{cases}$$

ដូចនេះ: $x = -1$ និង $y = 3$

II (**១៥ពិន្ទុ**) គណនាលីមីតខាងក្រោមៈ

ក. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{1+x}{\sqrt{x^2+3}-2}$ រាង $\frac{0}{0}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to -1} \frac{1+x}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(1+x)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(1+x)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2+3-4}$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(1+x)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{(1+x)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2+2}{-1-1} = \frac{4}{-2} = -2$$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to -1} \frac{1+x}{\sqrt{x^2+3}-2} = -2$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{1}{x} + \ln x)$ រាង $\infty - \infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{1}{x} + \ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{1 + x\ln x}{x}) = \frac{1+0}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{1}{x} + \ln x) = +\infty$

គ. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - e^x + \ln x)$ រាង $\infty - \infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - e^x + \ln x) = \lim\limits_{x\to +\infty} e^x(\frac{x}{e^x} - 1 + \frac{\ln x}{e^x}) = +\infty(0 - 1 - 0) = -\infty$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-e^x+\ln x)=-\infty$

III ១. (**៥ពិន្ទុ**) ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $E:\ g''(x)-7g'(x)+10g(x)=0$

មានសមីការសម្គាល់ $r^2-7r+10=0$

$\Delta=49-4.1.10=49-40=9=3^2$

$r=\dfrac{7\pm\sqrt{3^2}}{2}=\begin{cases}r_1=5\\ r_2=2\end{cases}$

$\Longrightarrow g(x)=Ae^{5x}+Be^{2x}\ ,\ A,B\in\Re$

២. (**៥ពិន្ទុ**)កំណត់ចម្លើយ $g(x)$ មួយនៃ E ដែល $g(0)=5\ ;\ g'(0)=16$

$g(x)=Ae^{5x}+Be^{2x}$

$g'(x)=5Ae^{5x}+2Be^{2x}$

$\begin{cases}g(0)=5\\ g'(0)=16\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}A+B=5\\ 5A+2B=16\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}A+B=5\times(-5)\\ 5A+2B=16\end{cases}\Longleftrightarrow-\begin{cases}5A+5B=25\\ 5A+2B=16\end{cases}$

$\Rightarrow 3B=9\Rightarrow B=3\qquad\Rightarrow A=2$

ដូចនេះ $g(x)=2e^{5x}+3e^{2x}$

IV (**១៥ពិន្ទុ**) គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

រូបមន្ត ប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍មួយ$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$

ចំនួនករណីអាច

$n(S)=C(13,3)=\dfrac{13!}{10!3!}=\dfrac{13\cdot12\cdot11\cdot10!}{10!\cdot3\cdot2\cdot1}=286$ ករណី

ក. $A:$ បាល់ទាំង 3 ពណ៌ស

ចំនួនករណីស្រប

$n(A)=C(5,3)=\dfrac{5!}{2!\cdot3!}=\dfrac{5\cdot4\cdot3!}{3!\cdot2\cot1}=10$ ករណី

$\Longrightarrow P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{10}{286}=\dfrac{5}{143}$

ខ. $B:$ បាល់ទាំង3ពណ៌ក្រហម

ចំនួនករណីស្រប

$n(B)=C(8,3)=\dfrac{8!}{5!\cdot3!}=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5!}{5!\cdot3\cdot2\cdot1}=56$ ករណី

$\Longrightarrow P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{56}{286}=\dfrac{28}{143}$

គ. $C:$ បាល់ស2និងបាល់ក្រហម1

$n(C)=C(5,2)\times C(8,1)=\dfrac{5!}{2!\cdot3!}\times\dfrac{8!}{7!\cdot1!}=\dfrac{5\cdot4\cdot3!}{3!\cdot2\cdot1}\times\dfrac{8\cdot7!}{7!\cdot1}=10\times8=80$ ករណី

$\Longrightarrow P(C)=\dfrac{n(C)}{n(S)}=\dfrac{80}{286}=\dfrac{40}{143}$

V $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}\quad;\quad x\neq1\ ,\ x\neq2$

១. (**៥ពិន្ទុ**)សរសេរ f ជារៀង $f(x)=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}$ ដែល $a\,,b$ ជាចំនួនពិតត្រូវកំណត់

ដោយ $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}$

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2}=\frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$x+1=a(x-2)+b(x-1)$$

បើ $x=1 \Longrightarrow 2=-a \Longrightarrow a=-2$

បើ $x=2 \Longrightarrow 3=b \Longrightarrow b=3$

ដូចនេះ $f(x)=-\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x-2}$

២. (**៥ពិន្ទុ**) គណនា $\displaystyle\int_0^3 f(x)dx$

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3 \left(-\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}\right)dx=-2\int_0^3 \frac{(x-1)'}{x-1}dx+3\int_0^3 \frac{(x-2)'}{x-2}dx$$

$$=-2\ln|x-1|+3\ln|x-2|\big|_0^3=-2\ln 2+3\ln 1-(-2\ln 1+3\ln 2)$$

$$=-2\ln 2-3\ln 2=-5\ln 2$$

VI (**៣៥ពិន្ទុ**) $f(x)=x+2+(x+1)e^{-x}$

១. (**៤ពិន្ទុ**)គណនាលីមីតនៃ f ខាង $+\infty$ និង $-\infty$

ដោយ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}[x+2+(x+1)e^{-x}]=+\infty+2+0=+\infty$

ដោយ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}[x+2+(x+1)e^{-x}]=-\infty+2+(-\infty)(+\infty)=-\infty+2-\infty=-\infty$

២. (**៥ពិន្ទុ**) គណនា $f'(x)$

$f(x)=x+2+(x+1)e^{-x}$

$\Longrightarrow f'(x)=1+0+(x+1)'e^{-x}+[e^{-x}]'(x+1)=1+e^{-x}-e^{-x}(x+1)=1+e^{-x}(1-x-1)=$
$1-xe^{-x}$

៣. (**៥ពិន្ទុ**) សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

ដោយ $1-xe^{-x}>0 \Longrightarrow f'(x)>0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	

$\Longrightarrow f(x)$ ជាអនុគមន៍កើន

(**៥ពិន្ទុ**) គូសតារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

៤. (**៣ពិន្ទុ**) បង្ហាញថាបន្ទាត់ $\Delta : y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)] = \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)e^{-x}=0$

$\Longrightarrow \Delta: y=x+2$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

(**៥ពិន្ទុ**)សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេត

តាង $h(x)=f(x)-\Delta=(x+1)e^{-x}$

បើ $h(x)=0 \Longleftrightarrow x+1=0 \quad ; \quad e^{-x}>0$

$\Longleftrightarrow x=-1$

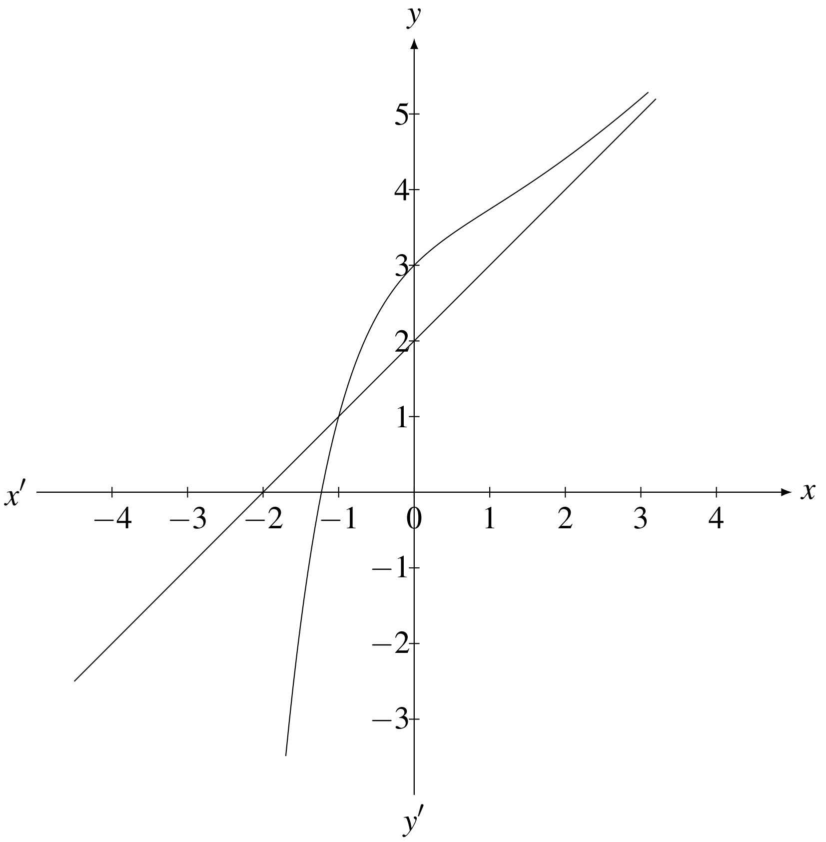
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

$x\in(-\infty,-1) \Longrightarrow$ ក្រាប C នៅក្រោម Δ

$x\in(-1,+\infty) \Longrightarrow$ ក្រាប C នៅលើ Δ

$x=-1 \qquad \Longrightarrow$ ក្រាប C កាត់ Δ ត្រង់ $(-1,1)$

៥. (**៨ពិន្ទុ**) សង់បន្ទាត់ Δ និង ក្រាប C ក្នុងតម្រុយតែមួយ



VII (**២៥ពិន្ទុ**) គេមានចំណុច $A(2,1,4)$; $B(2,-2,7)$ និង ប្លង់ $P: 2x+2y-x=2$

១. (**១០ពិន្ទុ**) កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាម B ហើយកែងនឹងប្លង់ P

សមីការមានរាង $\quad L: x=x_o+at \; ; \; y=y_o+bt \; ; \; z=z_o+ct \; ; \; t\in\Re$

ដោយ $\begin{cases} L\perp P \\ \vec{n}_p\perp P \end{cases} \Rightarrow L \parallel \vec{n}_p$

ដោយ L កាត់តាម $B(2,-2,7)$ ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{n}_p=(2,-2,-1)$

ដូចនេះ៖ $\quad L: x=2+2t \; ; \; y=-2++2t \; ; \; z=7-t \; ; \; t\in\Re$

២. (**៥ពិន្ទុ**) ចូរកំណត់កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វ M រវាង D និង P

យក D ជួសក្នុង P គេបាន : $2(1+2t)+2(-2t)-(1-t)=2$

$$2+4t-4t-1+t=2$$

$$t=1$$

យក $t=1$ ជួសក្នុង D គេបាន $x=3\ ;\ y=-2\ ;\ z=0$

ដូចនេះ កូអរដោនេនៃ M គឺ $M(3\,,-2\,,0)$

៣. (**១០ពិន្ទុ**) ចូរគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ MAB

តាមរូបមន្ត $S_{\triangle MAB}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AM}\,|$

ដោយ $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A\ ;\ y_B-y_A\ ;\ z_B-z_A)=(0\ ,\ -3\ ,\ 3)$

$\Longrightarrow\overrightarrow{AM}=(x_M-x_A\ ;\ y_M-y_A\ ;\ z_M-z_A)=(1\ ,\ -3\ ,\ -4)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AM}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -3 & 3\\ 1 & -3 & -4\end{vmatrix}=(12+9)\vec{i}-(0-3)\vec{j}+(0+3)\vec{k}=21\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$$

$S_{\triangle MAB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{12^2+3^2+3^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{459}=\dfrac{3}{2}\sqrt{51}$ឯកតាផ្ទៃ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា លេខបន្ទប់៖________

ប្រឡង៖ **សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ** លេខតុ៖________

សម័យប្រឡង៖________________ មណ្ឌលប្រឡង៖________________

ហត្ថលេខាអនុរក្ស៖ នាមត្រកូល និងនាមខ្លួន៖________________

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖________________ | អក្សរសម្ងាត់ |

ហត្ថលេខា៖________________

• បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាស់ប្រឡងឡើយ។ ក្រដាស់ប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។

• បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាស់ប្រឡងជាដាច់ខាត។

✂ -

____ / 125

១០

វិញ្ញាសា៖ **គណិតវិទ្យាត្រៀម** រយៈពេល៖ 120 នាទី

រៀបរៀងដោយ៖ **សុខលាភ**

| អក្សរសម្ងាត់ |

I គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរកំណត់ដោយ $x=\dfrac{1+2i}{3-4i}$ និង $y=\dfrac{2-i}{5i}$ ។

ក. ចូរសរសេរ x និង y ជាទម្រង់ពិជគណិត។ ខ. បង្ហាញថា $x+y$ ជាចំនួនពិត។

II ១. អ្នកគ្រូម្នាក់បានលើកទឹកចិត្តសិស្សពូកែក្នុងថ្នាក់ម្នាក់ដោយការផ្តល់ជូននូវសៀវភៅ 2 ក្បាលពីក្នុងចំណោមសៀវភៅគណិតវិទ្យា 6 ក្បាល វិទ្យាសាស្ត្រ 7 ក្បាល និងសេដ្ឋកិច្ច 4 ក្បាល។ ចូរគណនាចំនួនរបៀបនៃការជ្រើសរើសសៀវភៅ 2 ក្បាលនេះ បើសិស្សនោះ៖

ក. រើសយកសៀវភៅ 2 ក្បាលដែលជាមុខវិជ្ជាដូចគ្នា? ខ. រើសយកសៀវភៅ 2 ក្បាលដែលជាមុខវិជ្ជាខុសគ្នា?

២. អំណោយចំនួន 7 នឹងត្រូវបានចែកជូនសិស្សក្រីក្រចំនួន 10 នាក់។ តើមានប៉ុន្មានរបៀបក្នុងការចែកនេះ បើគ្មាននរណាម្នាក់បានលើសពី 1 ឡើយ?

III ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 4x\cos 7x}{x^2}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[2021]{x}-1}{x-1}$ គ. $\lim\limits_{x\to 0}(1+4\tan^2 x)^{\cot^2 x}$

IV គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{(2x-1)^2}{x}$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ $x\neq 0$ ។

ក. ចូរកំណត់តម្លៃ A,B និង C ដើម្បីអោយ $f(x)=Ax+B+\dfrac{C}{x}$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់នៃ $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$ ។

V គេមានម៉ាទ្រីសចំនួនបីគឺ $A=\begin{pmatrix}3&4\\-1&3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0&-1\\3&1\end{pmatrix}$ និង $C=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ ។

ក. ចូរគណនា $A+B$ និង $A-B$ ។

ខ. ចូរគណនាតម្លៃនៃម៉ាទ្រីស C បើ $C=A\times B$

VI គេមានសមីការប៉ារ៉ាបូលទូទៅមួយកំណត់ដោយ $P: y^2-6y-12x-27=0$ ។

ក. ចូរសរសេរសមីការប៉ារ៉ាបូល P ជាសមីការស្តង់ដារ។

ខ. ចូរកំណត់ កំពូល កំណុំ និង សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃសមីការ P នេះ។

គ. ចូរសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ ។

VII គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}$ ។

ក. រកដែនកំណត់ និង ដេរីវេទី១ នៃអនុគមន៍ f ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ។ រួចទាញរកអាស៊ីមតូតដេក និងអាស៊ីមតូតឈរនៃអនុគមន៍នេះ។

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍នេះ។

ឃ. គូសក្រាបតាងអនុគមន៍នេះ ។ (យក $\sqrt{3}=1.73$)

ដំណោះស្រាយ

I

ក. សរសេរ x និង y ជាទម្រង់ពិជគណិត

គេមាន $x=\dfrac{1+2i}{3-4i}$

$=\dfrac{(1+2i)(3+4i)}{3^2-(4i)^2}$

$=\dfrac{3-8+10i}{9+16}$

$=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$

និង $y=\dfrac{2-i}{5i}$

$=\dfrac{(2-i)(5i)}{(5i)^2}$

$=\dfrac{5+10i}{-25}$

$=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$i^2=-1$

ដូចនេះៈ ទម្រង់ពិជគណិតនៃ x និង y គឺ $x=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$, $y=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i$

ខ. បង្ហាញថា $x+y$ ជាចំនួនពិត

តាមសំណួរ (ក) ខាងលើ

គេបាន $x+y=(-\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i)+(-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i)$

$=(-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5})+(\dfrac{2}{5}-\dfrac{2}{5})i$

$=-\dfrac{2}{5}$

ដូចនេះៈ $x+y$ ជាចំនួនពិត ។

II

១. គណនាចំនួនរបៀបនៃការជ្រើសរើសសៀវភៅ 2 ក្បាលនេះ បើសិស្សនោះៈ

ក. រើសយកសៀវភៅ 2 ក្បាលជាមុខវិជ្ជាដូចគ្នា

- ករណីសៀវភៅគណិតវិទ្យាដូចគ្នាៈ វាជាបន្សំនៃការរើស 2 ធាតុ ចេញពីធាតុសរុប 6

  $C_6^2=\dfrac{6!}{2!\times 4!}=\dfrac{6\times 5}{2\times 1}=15$ ករណី
- ករណីសៀវភៅវិទ្យាសាស្ត្រដូចគ្នាៈ វាជាបន្សំនៃការរើសធាតុ 2 ចេញពីធាតុសរុប 7

  $C_7^2=\dfrac{7!}{2!\times 5!}=\dfrac{7\times 6}{2\times 1}=21$ ករណី
- ករណីសៀវភៅសេដ្ឋកិច្ចដូចគ្នាៈ ដូចគ្នាដែរ វាជាបន្សំ នៃការរើសធាតុ 2 ចេញពីធាតុសរុប 4

  $C_4^2=\dfrac{4!}{2!\times 2!}=\dfrac{4\times 3}{2\times 1}=6$ ករណី

  គេបាន ចំនួនរបៀបនៃការរើសបានសៀវភៅជាមុខវិជ្ជាដូចគ្នា គឺ

  $15+21+6=42$ របៀប

  ដូចនេះៈ ចំនួនរបៀបនៃការរើសយកសៀវភៅដែលជាមុខវិជ្ជាដូចគ្នាសរុបគឺ 42 ករណី ។

ខ. រើសយកសៀវភៅ 2 ក្បាលជាមុខវិជ្ជាខុសគ្នា

- ករណីសៀវភៅគណិតមួយក្បាលនិងវិទ្យាសាស្ត្រមួយក្បាល៖ យើងអាចគិតយ៉ាងដូច្នេះថា ការរើសយកសៀវភៅគណិតមួយក្បាលពីក្នុងចំណោមសៀវភៅគណិតសរុប 6 ក្បាលមាន 6 របៀប និង ការរើសយកសៀវភៅវិទ្យាសាស្ត្រមួយក្បាលពីក្នុងចំណោម 7ក្បាលគឺ 7 របៀប ។ ហេតុនេះ គេបាន $6\times 7 = 42$ របៀប
  ឬ យ៉ាងខ្លីតាមគោលការណ៍ផលគុណនៃបន្សំនេះគឺ $C_6^1 \times C_7^1 = \frac{6!}{1!\times 5!}\times\frac{7!}{1!\times 6!} = 6\times 7 = 42$ របៀប
- ករណីសៀវភៅគណិតមួយក្បាលនិងសេដ្ឋកិច្ចមួយក្បាល៖ តាមគោលការណ៍ផលគុណ
  គេបាន $C_6^1 \times C_4^1 = 6\times 6 = 24$ របៀប
- ករណីសៀវភៅវិទ្យាសាស្ត្រមួយក្បាលនិងសេដ្ឋកិច្ចមួយក្បាល៖ ដូចគ្នានឹងករណីខាងលើដែរ
  គឺតាមគោលការណ៍ផលគុណ $C_7^1 \times C_4^1 = 7\times 4 = 28$ ករណី
  គេបាន ចំនួនរបៀបនៃការរើសយកសៀវភៅ 2 ក្បាលខុសមុខវិជ្ជាគ្នាគឺ $42+24+28 = 94$ របៀប
  ដូចនេះ ចំនួនរបៀបនៃការរើសយកសៀវភៅ 2 ក្បាលជាមុខវិជ្ជាខុសគ្នាសរុប $\boxed{94 \text{ របៀប}}$ ។

២. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 4x\cos 7x}{x^2}$ រាង $\frac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 4x\cos 7x}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)+\cos x(1-\cos 4x)+\cos x\cos 4x(1-\cos 7x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\cos x(1-\cos 4x)}{x^2}+\frac{\cos x\cos 4x(1-\cos 7x)}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}+\frac{\cos x(2\sin^2 2x)}{x^2}+\frac{\cos x\cos 4x(2\sin^2\frac{7x}{2})}{x^2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\times 2^2+2\left(\frac{\sin\frac{7x}{2}}{\frac{7x}{2}}\right)^2\times\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}+8+\frac{49}{2}$$

$$= 33$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 4x\cos 7x}{x^2} = 33}$

ខ. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[2021]{x}-1}{x-1}$ រាង $\frac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[2021]{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt[2021]{x^{2020}}+\sqrt[2021]{x^{2019}}+\sqrt[2021]{x^{2018}}+\ldots+1)}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[2021]{x^{2020}}+\sqrt[2021]{x^{2019}}+\ldots+1}$$

$$= \frac{1}{2021}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[2021]{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2021}}$

គ. $\lim_{x\to 1}(1+4\tan^2 x)^{\cot^2 x}$ រាង 1^∞

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0}(1+4\tan^2 x)^{\cot^2 x} = \lim\limits_{x\to 1}[(1+4\tan^2 x)^{\frac{1}{4\tan^2 x}}]^{4\tan^2 x\times\cot^2 x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}[(1+4\tan^2 x)^{\frac{1}{4\tan^2 x}}]^4$

$= e^4$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+4\tan^2 x)^{\cot^2 x} = e^4}$

៣. ក. កំណត់តម្លៃ A,B និង C

យើងមាន $f(x) = \dfrac{(2x-1)^2}{x}$ ចំពោះគ្រប់$x\neq 0$

$= \dfrac{4x^2-4x+1}{x}$

$\Rightarrow f(x) = 4x-4+\dfrac{1}{x}$

តែ $f(x) = Ax+B+\dfrac{C}{x}$

គេបាន $Ax+B+\dfrac{C}{x} = 4x-4+\dfrac{1}{x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=4 \\ B=-4 \\ C=1 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{A=4, B=-4 \text{ និង } C=1}$

ខ. គណនាអាំងតេក្រាលនៃ $\int_1^2 f(x)dx$

តាមរយៈសំណួរ (ក) ខាងលើ ៖ $f(x) = 4x-4+\dfrac{1}{x}$

គេបាន$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(4x-4+\dfrac{1}{x}\right)dx$

$= \left[2x^2-4x+\ln|x|\right]_1^2$

$= (8-8+\ln 2)-(2-4+\ln 1)$

$= 2+\ln 2$

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

ដូចនេះ $\boxed{\int_1^2 f(x)dx = 2+\ln 2}$

៤. ក. គណនា $A+B$ និង $A-B$

យើងមាន $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ និង $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

គេបាន $A+B = \begin{pmatrix} 3+0 & 4+(-1) \\ -1+3 & 3+1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

និង $A-B=\begin{pmatrix}3-0 & 4-(-1)\\ -1-3 & 3-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -4 & 2\end{pmatrix}$

ដូចនេះ $\boxed{A+B=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix} \text{ និង } A-B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -4 & 2\end{pmatrix}}$

ខ. គណនាតម្លៃនៃម៉ាទ្រីស C

យើងមាន $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ និង $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

នោះ $A\times B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}(3\times 0)+(4\times 3) & 3(-1)+(4\times 1)\\ (1\times 0)+(3\times 3) & 1(-1)+(3\times 1)\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}12 & 1\\ 9 & 2\end{pmatrix}$

ដោយ $C=A\times B$ យើងបានម៉ាទ្រីស $C=\begin{pmatrix}12 & 1\\ 9 & 2\end{pmatrix}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃនៃម៉ាទ្រីស } C=\begin{pmatrix}12 & 1\\ 9 & 2\end{pmatrix}}$

៥. ក. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាបូល P ជាសមីការស្តង់ដារ

យើងមាន $P: y^2-6y-12x-27=0$

$\Leftrightarrow P: y^2-6y+9=12x+36$

$\Leftrightarrow P: (y-3)^2=12(x+3)$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដារនៃប៉ារ៉ាបូល P គឺ $\boxed{P: (y-3)^2=12(x+3)}$

ខ. កំណត់ កំណុំ កំពូល និង សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៃសមីការ P

យើងមានសមីការស្តង់ដារ $P: (y-3)^2=12(x+3)$

នោះ $h=-3, k=3, 4p=12\Rightarrow p=3$

គេបាន កំពូល $(h,k)=(-3,3)$

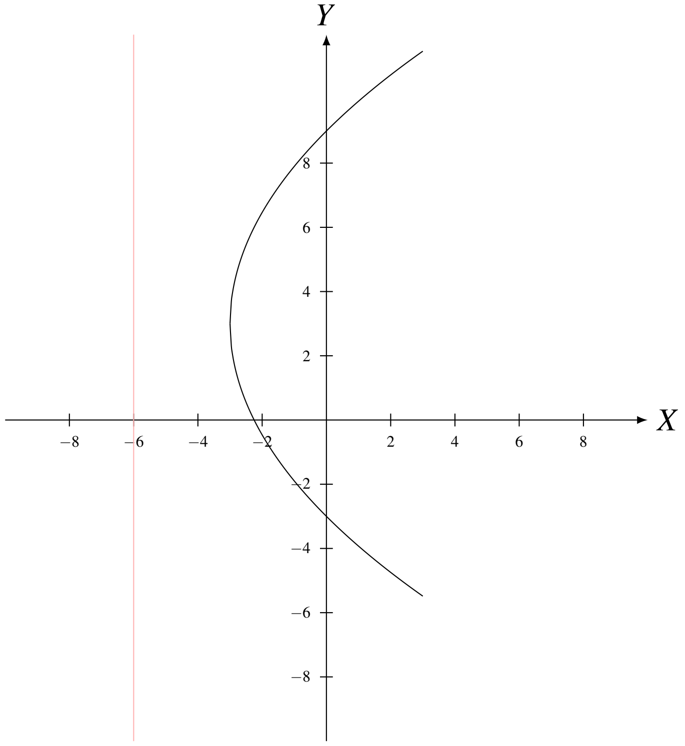
កំណុំ $(h+p,k)=(0,3)$

សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\Delta: x=h-p=-6$

ដូចនេះ

កំពូល $V=(-3,3)$
កំណុំ $F=(0,3)$
សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\Delta: x=-6$

គ. សំណង់ប៉ារ៉ាបូល P



៦. ក. រកដែនកំណត់ ដេរីវេទី1 និង ចំណុចបរមានៃអនុគមន៍ f

- ដែនកំណត់

  យើងមាន $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}$

  អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $x^2-4x+3\neq 0$ ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ $\boxed{D_f=\mathbb{R}-\{1,3\}}$

  $$(x-1)(x-3)\neq 0$$

- ដេរីវេទី១

  យើងមាន
  $$\begin{aligned} f(x)&=\frac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}\\ \Rightarrow f'(x)&=\frac{(2x+4)(x^2-4x+3)-(x^2+4x+3)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}\\ &=\frac{(2x^3-4x^2-10x+12)-(2x^3+4x^2-10x-12)}{(x^2-4x+3)^2}\\ &=\frac{-8x^2+24}{(x^2-4x+3)^2}\end{aligned}$$

  ដូចនេះ ដេរីវេទី១ នៃអនុគមន៍ f គឺ $\boxed{f'(x)=\dfrac{-8x^2+24}{(x^2-4x+3)^2}}$

- រកចំណុចបរមា

  យើងមាន $f'(x)=\dfrac{-8x^2+24}{(x^2-4x+3)^2}$

  $\forall x\in D_f,(x^2-4x+3)^2>0$

  នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $-8x^2+24$

  $f'(x)=0\Leftrightarrow -8x^2+24=0$

  $\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

  $\star$ ត្រង់ $x=-\sqrt{3},f'(x)$ ដូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ នោះ f មានចំណុចអប្បបរមាធៀបគឺ

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^2+4(-\sqrt{3})+3}{(-\sqrt{3})^2-4(-\sqrt{3})+3}$$
$$= \frac{6-4\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}}$$
$$= \frac{36-2\cdot 6\cdot 4\sqrt{3}+4^2\cdot 3}{36-4^2\cdot 3}$$
$$= \frac{84-48\sqrt{3}}{-12}$$
$$\approx 0.08$$

$\star$ ត្រង់ $x=\sqrt{3}, f'(x)$ ដូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ នោះ f មានចំណុចអតិបរមាធៀបគឺ

$$f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^2+4(\sqrt{3})+3}{(\sqrt{3})^2-4(\sqrt{3})+3}$$
$$= \frac{84+48\sqrt{3}}{-12}$$
$$\approx -13.93$$

ដូចនេះ អនុគមន៍ f មានចំណុចបរមាពីរគឺ

ត្រង់ $x=-\sqrt{3}$ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀប 0.08 និង
ត្រង់ $x=\sqrt{3}$ អនុគមន៍ f មានតម្លៃអតិបរមាធៀប -13.93

ខ. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

- $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}$$
$$=1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1}$

- $$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}$$
$$= \frac{1^2+4\cdot 1+3}{1^2-4\cdot 1+3}$$
$$=\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = \infty}$

- $$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}$$
$$= \frac{3^2+4\cdot 3+3}{3^2-4\cdot 3+3}$$
$$=\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to 3} f(x) = \infty}$

រូបទាញរកអាស៊ីមតូត

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$

ដូចនេះ: សមីការបន្ទាត់ $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃអនុគមន៍ f

ហើយ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$

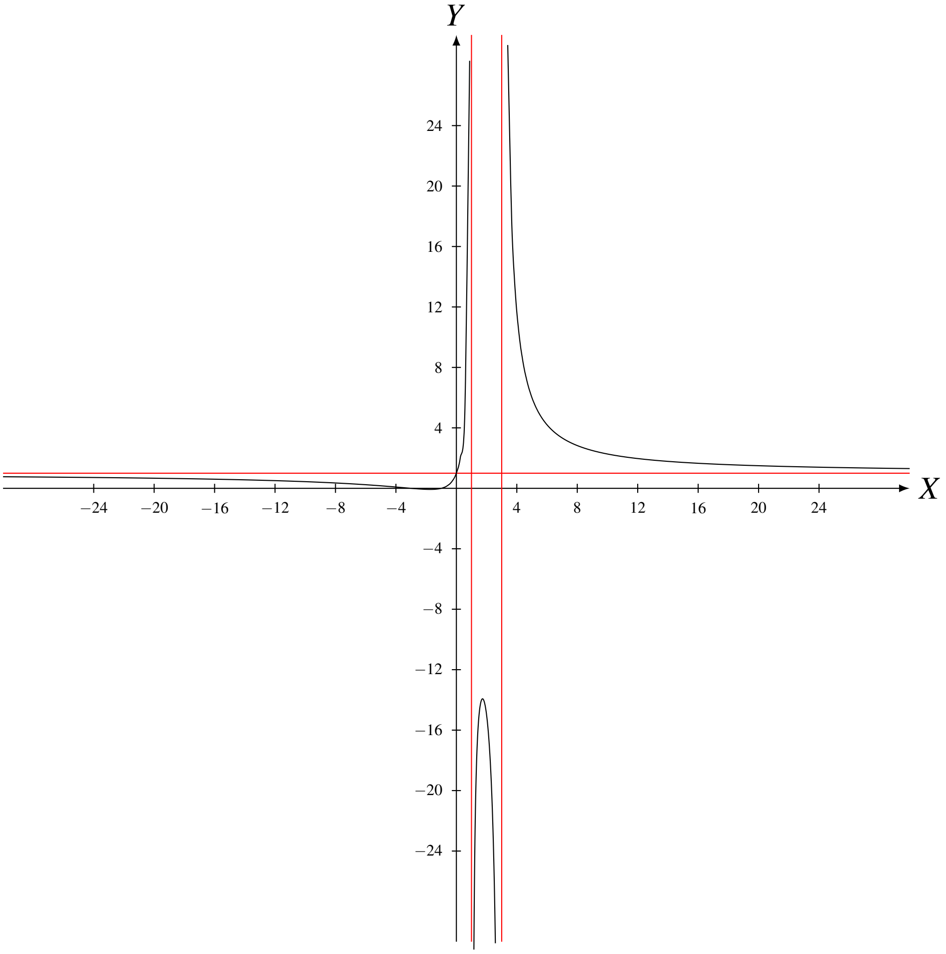
និង $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \infty$

ដូចនេះ: សមីការបន្ទាត់ $x = 1$ និង $x = 3$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃអនុគមន៍ f

គ. សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1 ↘		0.08	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-13.93	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

ឃ. សង់ក្រាបតាងអនុគមន៍នេះ



ជូនពរ រៀនឆាប់ ចេះ ចាំ និង សំណាងល្អគ្រប់ការប្រឡង

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា លេខបន្ទប់៖________

ប្រឡង៖ **សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ** លេខតុ៖________

សម័យប្រឡង៖________ មណ្ឌលប្រឡង៖________

ហត្ថលេខាអនុរក្ស៖ នាមត្រកូល និងនាមខ្លួន៖________

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖________

ហត្ថលេខា៖________ អក្សរសម្ងាត់

• បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាស់ប្រឡងឡើយ។ ក្រដាស់ប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។

• បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាស់ប្រឡងជាដាច់ខាត។

______ / 125

១១

វិញ្ញាសា៖ **គណិតវិទ្យាត្រៀម** រយៈពេល៖ 120 នាទី

រៀបរៀងដោយ៖ **សាវ៉ែន សុទ្ធា**

អក្សរសម្ងាត់

I គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+3}-x+1\right)$ ខ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-3x\sin x}{\cos^2x-1}$ គ. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{2(1+\cos x)}{\cos^4x-1}$ ។

II គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-3+3i\sqrt{3}$ និង $z_2=-3-3i\sqrt{3}$ ។

ក. សរសេរ $2z_1+\overline{z_2}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត និងត្រីកោណមាត្រ។

ខ. គណនា $(2z_1+\overline{z_2})^3$ ។ គេតាង $\overline{z_2}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z_2 ។

III ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលចំនួន15 ដែលមានបង់លេខពី1 ដល់ 15 ។ គេចាប់យកប៊ូល3 ចេញពីថង់ដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

ក. A : ״ គេចាប់បានប៊ូលទាំង3 សុទ្ធតែមានលេខចែកដាច់នឹង3 ״

ខ. B : ״ គេចាប់បានប៊ូលទាំង3 មានលេខសុទ្ធតែចែកមិនដាច់នឹង4 ״

គ. C :״ គេចាប់បានប៊ូលតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង3 ״ ។

IV គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

ក. $I=\displaystyle\int_0^1(x^2-1)^2dx$ ខ. $J=\displaystyle\int_0^{\ln7}(e^x-2)dx$ គ. $K=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin^4x\cos x\right]dx$

។

V ១. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យបីចំនុច $A(1,2,3)$,$B(3,2,1)$ និង $C(3,4,3)$ ។

ក. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{BC}$ ។ បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំនុច A,B,C រត់មិនត្រង់គ្នា។

គ. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(-1,1,1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ (ABC) ។ សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ។

២. គេមានប៉ារ៉ាបូលដែលមានសមីការទូទៅ $x^2-4x-8y-12=0$ ។ ចូរបម្លែងសមីការនេះជាទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល។ កំណត់កូអរដោនេកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស ព្រមទាំងសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។

VI គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E):y''+3y'-y=2y'+5y$ ។ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល(E) ។ បង្ហាញថា $y=2e^{2x}-e^{-3x}$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល(E) ។

VII គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដែល $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x}$ និងមានក្រាបតំណាង (C) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប ។

ខ. គណនា $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញារបស់វា។ សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍f និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

គ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ដែលប៉ះនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំនុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=1$ ។

ឃ. សង់ក្រាប (C) ,បន្ទាត់ (T) និងអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$ ។

ង. គណនាផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយក្រាប (C) ,អ័ក្ស(ox) និងបន្ទាត់ឈរ $x=1,x=e$ ។ គេឲ្យ $e=2.7$ និង $\dfrac{1}{e}=0.4$ ។

ដំណោះស្រាយ

I គណនាលីមីតខាងក្រោម

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+3}-x+1\right)$ រាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-x+3}-(x-1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2-x+3}-(x-1)\right]\left[\sqrt{x^2-x+3}+(x-1)\right]}{\left[\sqrt{x^2-x+3}+(x-1)\right]}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-x+3})^2-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-x+3}+x-}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+3-(x^2-2x+1)}{\sqrt{x^2-x+3}+x-1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+3-x^2+2x-1}{\sqrt{x^2-x+3}+x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-x+3}+x-1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+x-1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1-\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{1+0}{\sqrt{1-0+0}+1-0}=\frac{1}{2}$$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+3}-x+1\right)=\frac{1}{2}$

ខ. $\lim\limits_{x\to0}\frac{-3x\sin x}{\cos^2x-1}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-3x\sin x}{-(1-\cos^2x)}=\lim_{x\to0}\frac{3x\sin x}{\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{3x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\left(3\times\frac{x}{\sin x}\right)=3$$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to0}\frac{-3x\sin x}{\cos^2x-1}=3$

$1-\cos^2x=\sin^2x$

គ. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{2(1+\cos x)}{\cos^4x-1}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{2(1+\cos x)}{(\cos^2x-1)(\cos^2x+1)}=\lim_{x\to\pi}\frac{2(1+\cos x)}{(\cos x-1)(\cos x+1)(\cos^2x+1)}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{2}{(\cos x-1)(\cos^2x+1)}=\frac{2}{(\cos\pi-1)(\cos^2\pi+1)}=\frac{2}{(-1-1)(1+1)}=-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$$

ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{2(1+\cos x)}{\cos^4x-1}=-\frac{1}{2}$

II ក. សរសេរ $2z_1+\overline{z_2}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត និងត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z_2=-3-3i\sqrt{3}$ នាំឲ្យ $\overline{z_2}=-3+3i\sqrt{3}$

គេបាន $2z_1+\overline{z_2}=2(-3+3i\sqrt{3})+(-3+3i\sqrt{3})=-6+6i\sqrt{3}-3+3i\sqrt{3}=-9+9i\sqrt{3}$

ដូច្នេះ $2z_1+\overline{z_2}=-9+9i\sqrt{3}$

ខ. គណនា $(2z_1+\overline{z_2})^3$

គេមាន $2z_1+\overline{z_2}=-9+9i\sqrt{3}=18\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=18\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$=18\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]=18\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

គេទាញបាន $(2z_1+\overline{z_2})^3=\left[18\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^3$

$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

$$=18^3\left(\cos\frac{6\pi}{3}+i\sin\frac{6\pi}{3}\right)=18(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=18(1+0i)=18$$

ដូច្នេះ $\boxed{(2z_1+\overline{z_2})^3=18}$

III រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

ក. A : ″ គេចាប់បានប៊ូលទាំង3 សុទ្ធតែមានលេខចែកដាច់នឹង3 ″

$C(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!k!}$

តាមរូបមន្ត $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$

ដោយ $n(S)=C(15,3)=\frac{15!}{(15-3)!3!}=\frac{15!}{12!3!}=\frac{15\times14\times13\times12!}{12!3!}=\frac{15\times14\times13}{3!}=455$

លេខដែលចែកដាច់នឹង 3 មានលេខ $3,6,9,12,15$

នោះ $n(A)=C(5,3)=\frac{5!}{(5-3)!3!}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{5\times5\times3}{2!3!}=\frac{5\times4}{2!}=10$

គេបាន $P(A)=\frac{10}{455}=\frac{2}{91}$

ដូច្នេះ $\boxed{P(A)=\frac{2}{91}}$

ខ. B : ″ គេចាប់បានប៊ូលទាំង3 មានលេខសុទ្ធតែចែកមិនដាច់នឹង4 ″

តាមរូបមន្ត $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}$

ដោយ លេខចែកមិនដាច់នឹង4 មានលេខ $1,2,3,5,6,7,9,10,11,13,14,15$

នោះ $n(B)=C(12,3)=\frac{12!}{(12-3)!3!}=\frac{12!}{9!3!}=\frac{12\times11\times10\times9!}{9!3!}=\frac{12}{3!}=220$

គេបាន $P(B)=\frac{220}{455}=\frac{44}{91}$

ដូច្នេះ $\boxed{P(B)=\frac{44}{91}}$

គ. C :″ គេចាប់បានប៊ូលតែមួយគត់មានលេខចែកដាច់នឹង3 ″

តាមរូបមន្ត $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}$

ដោយ លេខចែកដាច់នឹង3 មានលេខ $3,6,9,12,15$

នោះ $n(C)=C(5,1)\times C(10,2)=5\times\frac{10!}{(10-2)!2!}=5\times\frac{10!}{8!2!}=5\times\frac{10\times9\times8!}{8!2!}=5\times\frac{10\times9}{2!}=$
225

គេបាន $P(C)=\frac{225}{455}=\frac{45}{91}$

ដូច្នេះ $\boxed{P(C)=\frac{45}{91}}$

IV គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

ក. $I=\int_0^1 (x^2-1)^2dx=\int_0^1 (x^4-2x^2+1)dx=\left[\frac{x^5}{5}-2\cdot\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1$

$=\left(\frac{1^5}{5}-2\cdot\frac{1^3}{3}+1\right)-(0-0+0)=\frac{8}{15}$

ដូច្នេះ $\boxed{I=\frac{8}{15}}$

ខ. $J=\int_0^{\ln 7}(e^x-2)dx=(e^x-2x)_0^{\ln 7}=\left(e^{\ln 7}-2\ln 7\right)-(e^0-0)=7-2\ln 7-1=6-2\ln 7$

ដូច្នេះ $\boxed{J=6-2\ln 7}$

$e^{\ln k}=k$

គ. $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin^4 x\cos x\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos x dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x(\sin x)'dx$

$=\left[-\frac{1}{3}\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left(\frac{\sin^5}{5}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\int [f(x)]^n\cdot f'(x)dx=\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c, c\in\mathbb{R}$

$=\left[-\frac{1}{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right]-\left[-\frac{1}{3}\cos\left(0+\frac{\pi}{3}\right)\right]+\frac{\sin^5\frac{\pi}{2}}{5}-\frac{\sin 0}{5}$

$=-\frac{1}{3}\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{3}+\frac{1}{5}-0$

$=\frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{3}+\frac{1}{5}$

$=-\frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}=-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}=\frac{11-5\sqrt{3}}{30}$

ដូច្នេះ $\boxed{K=\frac{11-5\sqrt{3}}{30}}$

V ១. ក. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$

គេមាន

$A(1,2,3)$, $B(3,2,1)$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(3-1,2-2,1-3)=(2,0,2)$

$A(1,2,3)$, $C(3,4,3)$ $\Rightarrow \overrightarrow{AC}=(3-1,4-2,3-3)=(2,2,0)$

$B(3,2,1)$, $C(3,4,3)$ $\Rightarrow \overrightarrow{BC}=(3-3,4-2,3-1)=(0,2,2)$

ដូច្នេះ $\boxed{\overrightarrow{AB}=(2,0,2),\ \overrightarrow{AC}=(2,2,0)}$ និង $\boxed{\overrightarrow{BC}=(0,2,2)}$

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

គេមាន

$\vec{u}=(a,b,c)\Rightarrow|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$\overrightarrow{AB}=(2,0,2)\Rightarrow|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+0^2+0^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ឯកតាប្រវែង

$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)\Rightarrow|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+2^2+0^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ឯកតាប្រវែង

$\overrightarrow{BC}=(0,2,2)\Rightarrow|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{0^2+2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ឯកតាប្រវែង

ដោយ $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{2}$ ឯកតាប្រវែង

ដូចនេះ $\boxed{ABC \text{ ជាត្រីកោណសម័ង្ស}}$

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$

$$=(0-4)\vec{i}-(0-4)\vec{j}+(4-0)\vec{k}=-4\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-4\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}}$

ទាញថាបីចំនុច A,B,C រត់មិនត្រង់គ្នា

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-4\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}\neq\vec{0}$

ដូច្នេះ $\boxed{\text{បីចំនុច } A,B,C \text{ រត់មិនត្រង់គ្នា}}$

គ. បង្ហាញថាវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=(-1,1,1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ (ABC)

គេមាន $\vec{n}=(-1,1,1)$

និង $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-4\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}$ ឬ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-4,4,4)$

ដោយ $\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

គេបាន $\vec{n}=(-1,1,1)$ កូលីនេអ៊ែរនឹង $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

តែ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នឹងប្លង់ (ABC)

នោះ $\vec{n}=(-1,1,1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ (ABC)

ដូច្នេះ $\boxed{\vec{n}=(-1,1,1) \text{ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ទៅនឹងប្លង់ } (ABC)}$

សរសេរសមីការប្លង់ (ABC)

ប្លង់ (ABC) កាត់តាមចំនុច $A(1,2,3)$ និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(-1,1,1)$

គេបាន $(ABC):(-1)(x-1)+(1)(y-2)+(1)(z-3)=0$

$$-x+1+y-2+z-3=0$$

$$-x+y+z-4=0$$

ដូច្នេះ $\boxed{(ABC)\ -x+y+z-4=0}$

២. បម្លែងសមីការនេះជាទម្រង់ស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល

គេមានសមីការទូទៅ $x^2-4x-8y-12=0$

គេបាន $x^2-4x-8y-12=0$

$$x^2-4x=8y+12$$

$$x^2-4x+4=8y+12+4$$

$$(x-2)^2=8y+16$$

$$(x-2)^2=8(y+2)$$

ដូច្នេះ $\boxed{\text{សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ } (x-2)^2=8(y+2)}$

កំណត់កូអរដោនេកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស

គេមាន $(x-2)^2 = 8(y+2)$ មានរាង $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

នាំឲ្យ $h = 2,\ k = -2$ និង $4p = 8\ \Rightarrow p = 2$

គេទាញបាន

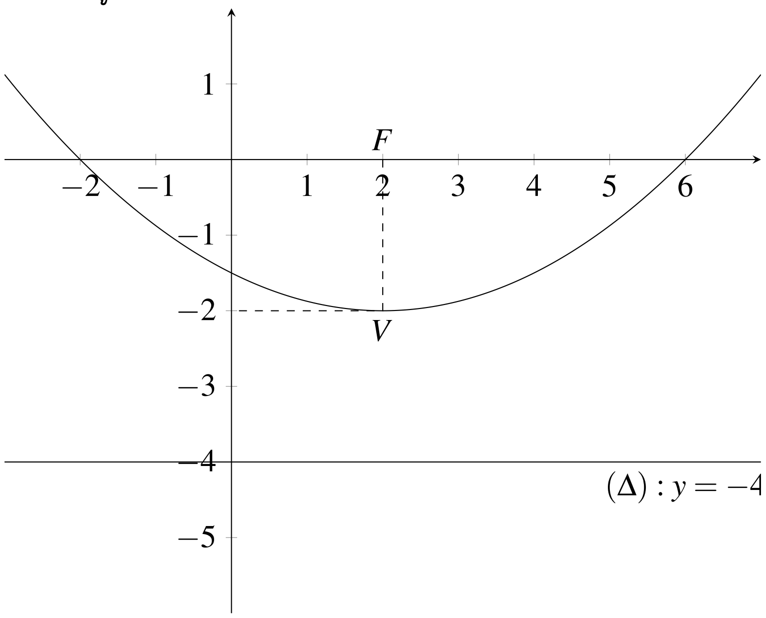
កំពូល $V(h,k) = V(2,-2)$

កំណុំ $F(h,k+p) = F(2,0)$

សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $(\Delta): y = k-p = -2-2 = -4$

ដូច្នេះ $\boxed{\text{កំពូល } V(2,-2),\ \text{កំណុំ } F(2,0) \text{ និង សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស } (\Delta): y = -4}$

សង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ



VI ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល(E)

គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' + 3y' - y = 2y' + 5y$

គេបាន $(E): y'' + 3y' - y - 2y' - 5y = 0$

$(E): y'' + y' - 6y = 0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ មាន $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25$

នាំឲ្យ $\lambda_1 = \dfrac{-1-\sqrt{25}}{2} = \dfrac{-1-5}{2} = -3$

$\lambda_2 = \dfrac{-1+\sqrt{25}}{2} = \dfrac{-1+5}{2} = 2$

គេបាន អនុគមន៍ចម្លើយទូទៅ $y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} = Ae^{-3x} + Be^{2x}$

ដូច្នេះ $\boxed{y = Ae^{-3x} + Be^{2x}}$ ដែល $A, B \in \mathbb{R}$

បង្ហាញថា $y = 2e^{2x} - e^{-3x}$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល(E)

គេមាន $y = 2e^{2x} - e^{-3x}$

នាំឲ្យ $y' = 4e^{2x} + 3e^{-3x}$

ហើយ $y'' = 8e^{2x} - 9e^{-3x}$

យក $y,\ y'$ និង y'' ទៅជំនួសក្នុងសមីការ (E)

គេបាន $(8e^{2x} - 9e^{-3x}) + (4e^{2x} + 3e^{-3x}) - 6(2e^{2x} - e^{-3x}) = 0$

$8e^{2x} - 9e^{-3x} + 4e^{2x} + 3e^{-3x} - 12e^{2x} + 6e^{-3x} = 0$

$12e^{2x} - 6e^{-3x} - 12e^{2x} + 6e^{-3x} = 0$

$0=0$ ពិត

ដូច្នេះ $\boxed{y=2e^{2x}-e^{-3x}}$ ជាចម្លើយពិសេសមួយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល(E)

VII ក. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\ln x\right)=1+(+\infty)(-\infty)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{\ln x}{x}\right)=1+0=1$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty \text{ និង } \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1}$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបខាង $-\infty$

ដោយ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$ នោះបន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាបខាង $+\infty$

ដូចនេះ $\boxed{x=0 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ និង } y=1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេក}}$

ខ. គណនា $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញារបស់វា

គេមាន $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x}$

នាំឲ្យ $f'(x)=\dfrac{(x+\ln x)'(x)-(x)'(x+\ln x)}{x^2}=\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)x-(x+\ln x)}{x^2}$

$=\dfrac{x+1-x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

ដូច្នេះ $\boxed{f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}}$

សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

គេមាន $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

ដោយ $x^2>0$ គ្រប់ $x\in(0,+\infty)$ នាំឲ្យ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $1-\ln x$

- $1-\ln x=0 \Rightarrow \ln x=1 \Rightarrow x=e$
- $1-\ln x>0 \Rightarrow \ln x<1 \Rightarrow x<e$
- $1-\ln x<0 \Rightarrow \ln x>1 \Rightarrow x>e$

គេបានតារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

ដូច្នេះ $\boxed{f'(x)>0 \text{ បើ } x<e,\ f'(x)<0 \text{ បើ } x>e,\ f'(x)=0 \text{ បើ } x=e}$

សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍f

តាមតារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$ គេបាន

$\boxed{f \text{ កើនចំពោះ } x\in(-\infty,e) \text{ និង } f \text{ ចុះចំពោះ } x\in(e,+\infty)}$

សង់តារាងថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

តាមតារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$ គេបាន f មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x=e$

តម្លៃអតិបរមាគឺ $f(e)=\dfrac{e+\ln e}{e}=\dfrac{e+1}{e}=1+\dfrac{1}{e}=1+0.4=1.4$

តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1.4	↘	1

គ. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ដែលប៉ះនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំនុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=1$

គេមាន $x_0=1$ នោះ $y_0=f(x_0)=f(1)=\dfrac{1+\ln 1}{1}=\dfrac{1+0}{1}=1$

$f'(x_0)=f'(1)=\dfrac{1-\ln 1}{1^2}=\dfrac{1-0}{1}=1$

គេបាន សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) គឺ

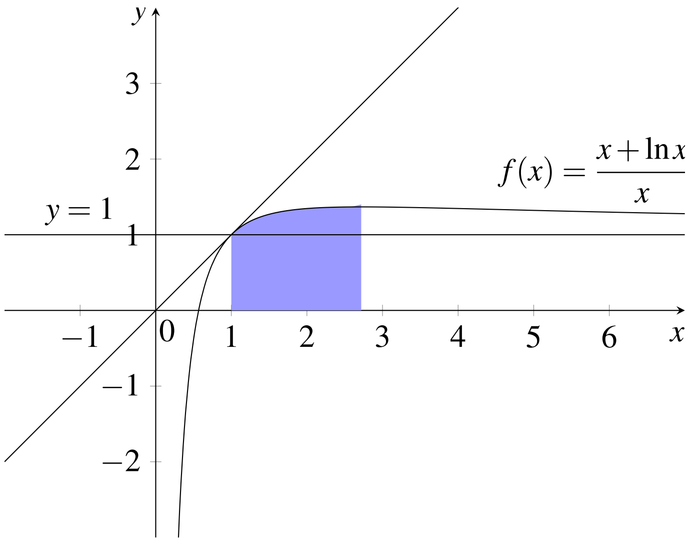
$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ សមមូល $y-1=(1)(x-1)$ សមមូល $y=x$

ដូច្នេះ **សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(T): y=x$**

ឃ. សង់ក្រាប (C) ,បន្ទាត់ (T) និងអាស៊ីមតូតទាំងអស់នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j})$

តារាងតម្លៃលេខនៃ $(T): y=x$

x	0	1
y	0	1



ង. គណនាផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយក្រាប (C) ,អ័ក្ស(ox) និងបន្ទាត់ឈរ $x=1, x=e$

តាមក្រាប គេបាន $f(x)>0$ លើចន្លោះ $[1,e]$

តាមរូបមន្ត គេបាន $S=\displaystyle\int_1^e f(x)dx=\int_1^e \frac{x+\ln x}{x}dx=\int_1^e\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)dx$

$$=\int_1^e\left[1+\ln x(\ln x)'\right]dx=\left[x+\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e$$

$$\int [f(x)]^n f'(x)dx=\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c$$

$$=\left(e+\frac{\ln^2 e}{2}\right)-\left(1+\frac{\ln^2 1}{2}\right)$$

$$=e+\frac{1}{2}-1=2.7+0.5-1=2.2$$

ដូច្នេះ **ផ្ទៃក្រឡា$S=2.2$ ឯកតាផ្ទៃ**

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា លេខបន្ទប់៖________

ប្រឡង៖ **សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ** លេខតុ៖________

សម័យប្រឡង៖________ មណ្ឌលប្រឡង៖________

ហត្ថលេខាអនុរក្ស៖ នាមត្រកូល និងនាមខ្លួន៖________

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖________ អក្សរសម្ងាត់

ហត្ថលេខា៖________

• បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាស់ប្រឡងឡើយ។ ក្រដាស់ប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។

• បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាស់ប្រឡងជាដាច់ខាត។

✂ -

____ / 125

១២

វិញ្ញាសា៖ **គណិតវិទ្យាត្រៀម** រយៈពេល៖ 120 នាទី

រៀបរៀងដោយ៖ **ហ៊ីង វុទ្ធី**

អក្សរសម្ងាត់

I គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=(\sqrt{6}-\sqrt{2})-(\sqrt{6}+\sqrt{2})i$ ។

១. គណនា z^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

២. សរសេរ z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរកម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ Z ។

៣. គណនាឫសទី 3 នៃ Z ។

II ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''-3y'+2y=0 \quad (E)$ ។ រកចម្លើយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាអនុគមន៍ចម្លើយមានអតិបរមាស្មើ 1 ត្រង់ $x=1$ ។

III គណនាលីមីត

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^7-2x^5+1}{x^3-3x^2+2}$ ខ. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sqrt{1-\cos 6x}}{\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$ គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

IV គេមានអាំងតេក្រាល: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\cos^4 x dx$ និង $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\sin^4 x dx$ ។

គណនា $I+J$; $I-J$ រួចទាញរក I និង J ។

V គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=-x-2+\dfrac{4e^x}{1+e^x}$ ហើយមានក្រាប C ។

១. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C កាលណា $x\to-\infty$ ។

២. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ។ គណនា $f'(0), f(0)$ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

៣. បង្ហាញថាគល់ 0 ជាចំណុចរបត់ និងជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C ។

៤. គណនា $f(3)$ ហើយសង់ក្រាប C គេឱ្យ $(e^3=20)$ ។

VI នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមានមួយ គេមានចំណុច $A(0,0,1);B(-1,-2,0)$ និង $C(2,1,-1)$ ។

ក. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចបង្ហាញថា A,B,C រត់មិនត្រង់ជួរ ។

ខ. សរសេរសមីការប្លង់ ABC ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

គ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាម A ហើយកែងប្លង់ ABC ។

ឃ. គណនា $(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}$ រួចទាញរកមាឌចតុមុខ $OABC$ ។

ដំណោះស្រាយ

I គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=(\sqrt{6}-\sqrt{2})-(\sqrt{6}+\sqrt{2})i$ ។

១. គណនា z^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត

គេបាន
$$z^2=\left[(\sqrt{6}-\sqrt{2})-(\sqrt{6}+\sqrt{2})i\right]^2$$
$$=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2-2(\sqrt{6}-\sqrt{2})\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)i+\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2i^2,\ i^2=-1$$
$$=(\sqrt{6})^2-2\sqrt{12}+(\sqrt{2})^2-2\left[(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2\right]i-(\sqrt{6})^2-2\sqrt{12}-(\sqrt{2})^2$$

ដូច្នេះ $z^2=-8\sqrt{3}-8i$

២. សរសេរ z^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរកម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ Z ។

គេបាន
$$z^2=16\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$
$$=16\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

នាំឱ្យ
$$z=\sqrt{z}=\sqrt{16}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{6}}{2}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{6}}{2}\right)$$
$$=4\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

ដូច្នេះ $|z|=4$, $\arg(z)=\frac{7\pi}{12}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

៣. គណនាឫសទី 3 នៃ Z

គេបាន
$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{12}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{12}+2k\pi}{3}\right)\quad ,k=0,1,2$$

ចំពោះ $k=0\Rightarrow z_1=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{7\pi}{36}+i\sin\frac{7\pi}{36}\right)$

ចំពោះ $k=1\Rightarrow z_1=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{31\pi}{36}+i\sin\frac{31\pi}{36}\right)$

ចំពោះ $k=2\Rightarrow z_1=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{55\pi}{36}+i\sin\frac{55\pi}{36}\right)$

II ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''-3y'+2y=0\quad(E)$ ។

គេមានសមីការសំគាល់ $\lambda^2-3\lambda+2=0$
$$(\lambda-1)(\lambda-2)=0$$
$$\lambda_1=1$$
$$\lambda_2=2$$

គេបាន $y=Ae^x+Be^{2x}\quad ,A,B\in\mathbb{R}$

រកចម្លើយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាអនុគមន៍ចម្លើយមានអតិបរមាស្មើ 1 ត្រង់ $x=1$

មានន័យថា $y'(1)=0\,,y(1)=1$

គេមាន $y=Ae^x+Be^{2x}\Rightarrow y(1)=Ae+Be=1\qquad(I)$

$y'=A^x+2Be^{2x}\Rightarrow y'(1)=Ae+2Be=1\qquad(II)$

យកសមីការ (II) ដក (I) គេបាន $Be=0\Rightarrow\begin{cases}B&=0\\Ae&=1\Rightarrow A=\frac{1}{e}\end{cases}$

ដូច្នេះ $y=\frac{1}{e}e^x=e^{x-1}$

III គណនាលីមីត

១. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^7-2x^5+1}{x^3-3x^2+2}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^7-x^6+x^6-x^5-x^5+x^4-x^4+x^3-x^3+x^2-x^2+x-x+1}{x^3-x^2-2x^2+2x-2x+2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^6(x-1)+x^5(x-1)-x^4(x-1)-x^3(x-1)-x^2(x-1)-x(x-1)-(x-1)}{x^2(x-1)-2x(x-1)-2(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^6+x^5-x^4-x^3-x^2-x-1)}{(x-1)(x^2-2x-2)}$$

$$=1$$

២. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{1-\cos 6x}}{\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$

តាង $t=x-\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=t+\frac{\pi}{3}$ បើ $t\to 0$ នោះ $x\to\frac{\pi}{3}$

គេបាន $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos 6(t+\frac{\pi}{3})}}{\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{3}-(t+\frac{\pi}{3})\right)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos 6t}}{-\sqrt{2}t}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2\sin^2 3t}}{-\sqrt{2}t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2}|\sin 3t|}{-\sqrt{2}t}$$

$$=\pm\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{3t}\times 3$$

$$=\pm 3$$

៣. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x})(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-1-\cos x}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\frac{x^2}{\sin^2 x}\times\frac{2}{4(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}\right)$$

$$=1\times 1\times\frac{2}{4(2\sqrt{2})}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

IV គេមានអាំងតេក្រាល: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2x\cos^4xdx$ និង $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2x\sin^4xdx$ ។

គណនា $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2x\cos^4xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2x\sin^4xdx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin^2x\cos^4x+\cos^2x\sin^4x)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2x\cos^2x(\sin^2x+\cos^2x)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x\cos x)^2dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2dx$

$=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 4x)dx$

$=\frac{1}{8}\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{1}{8}\left[(\frac{\pi}{4}-\frac{\sin\pi}{4})-(0-\frac{\sin 0}{4})\right]$

គេបាន $I+J=\frac{\pi}{32}\qquad (I)$

គណនា $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2x\cos^4xdx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2x\sin^4xdx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin^2x\cos^4x-\cos^2x\sin^4x)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2x\cos^2x(\cos^2x-\sin^2x)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x\cos x)^2\cos 2xdx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2x\frac{1}{2}\cos 2xdx$

តាង $t=\sin 2x\Rightarrow dt=\frac{1}{2}\cos 2xdx$

គេបាន $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}t^2dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{3}\left[\sin^3 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

គេបាន $I-J=\frac{1}{3}\qquad (II)$

យក (I)+(II): $2I=\frac{\pi}{32}+\frac{1}{3}=\frac{3\pi-32}{96}\Rightarrow I=\frac{3\pi-32}{192}\Rightarrow J=\frac{1}{6}$

V គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=-x-2+\frac{4e^x}{1+e^x}$ ហើយមានក្រាប C

១. គណនា $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x-2+\frac{4e^x}{1+e^x}\right)=-\infty$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x-2+\frac{4e^x}{1+e^x}\right)=+\infty$

ដោយ $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-2)]=\lim_{x\to-\infty}\left(-x-2+\frac{4e^x}{1+e^x}-(-x-2)\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4e^x}{1+e^x}=0$

នាំឱ្យ $y=-x-2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C កាលណា $x\to-\infty$

២. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

គេបាន $f'(x) = \left(-x-2+\dfrac{4e^x}{1+e^x}\right)'$

$$= -1+4.\frac{(e^x)'(1+e^x)-(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{-(1+e^x)^2+4e^x(1+e^x-e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{-1-2e^x-e^{2x}+4e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{-[(e^x)^2-2e^x+1]}{(1+e^x)^2}$$

$$= -\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2} < 0 \quad \text{ព្រោះ} \quad (1+e^x)^2>0, (e^x-1)^2>0$$

នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍ចុះ $\forall x \in \mathbb{R}$

សញ្ញានៃ $f'(x)$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	

គណនា $f'(0) = \dfrac{-e^0+2e^0-1}{(1+e^0)^2} = 0$

$$f(0) = -0-2+\frac{4e^0}{1+e^0} = -2+\frac{4}{2} = 0$$

សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

៣. បង្ហាញថាគល់ 0 ជាចំណុចរបត់កាលណា $f''(0)=0$

គេបាន $\quad f''(x) = -\left[\dfrac{(e^x-1)^2}{(1+e^x)^2}\right]'$

$$= -\frac{[(e^x-1)^2]'(1+e^x)^2-[(1+e^x)^2]'(e^x-1)^2}{(1+e^x)^4}$$

$$= -\frac{2(e^x-1)'(e^x-1)(1+e^x)^2-2(e^x+1)'(e^x+1)(e^x-1)^2}{(e^x+1)^4}$$

$$= -\frac{2e^x(e^x-1)(1+e^x)-2e^x(e^x-1)^2}{(e^x+1)^3}$$

នាំឱ្យ $\quad f''(0) = -\dfrac{2e^0(e^0-1)(1+e^0)-2e^0(e^0-1)}{(e^0+1)^3}$

$$f''(0)=0$$

បង្ហាញថា 0 ជាផ្ចិតផ្លុះនៃក្រាប C

ចំពោះ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists -x \in \mathbb{R}$ គេបាន $f(-x) = -(-x) - 2 + \dfrac{4e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$$= -\left[-x + 2 - \frac{\frac{4}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}\right]$$

$$= -\left[-x - 2 + 4 - \frac{4}{e^x} \times \frac{e^x}{e^x+1}\right]$$

$$= -\left[-x - 2 + \frac{4(e^x+1) - 4}{1+e^x}\right]$$

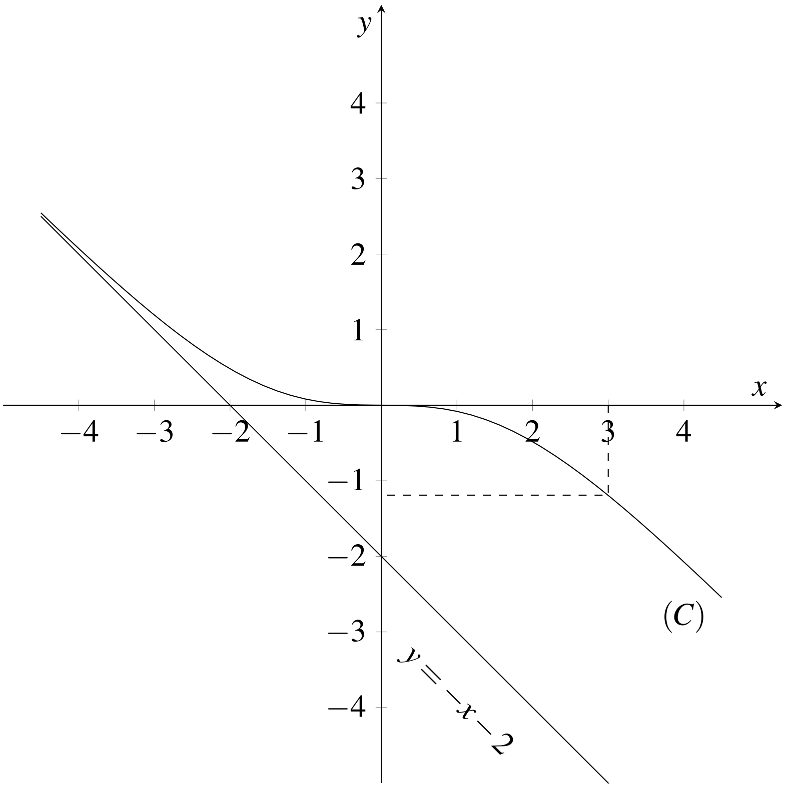
$$= -\left[-x - 2 + \frac{4e^x}{1+e^x}\right]$$

$$f(-x) = -f(x)$$

នាំឱ្យ f ជាអនុគមន៍សេសដែលមានផ្ចិតឆ្លុះ: 0

៤. គណនា $f(3) = -3 - 2 + \dfrac{4e^3}{1+e^3} = -5 + \dfrac{4 \times 20}{1+20} = \dfrac{-21(5)+80}{21} = -\dfrac{25}{21}$

សង់ក្រាប C



VI នៅក្នុងតម្រុយ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ គេមានចំណុច $A(0,0,1); B(-1,-2,0)$ និង $C(2,1,-1)$ ។

១. គណនាកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

ដោយ $\overrightarrow{AB} = (-1-0, -2-0, 0-1) = (-1,-2,-1)$

$\overrightarrow{AC} = (2+1, 1+2, -1-0) = (3,3,-1)$

គេបាន $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \vec{k}$

$$= (2+3)\vec{i} - (1+3)\vec{j} + (-3+6)\vec{k}$$

$$= 5\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$$

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\neq 0$ នោះ A,B,C រត់មិនត្រង់ជួរ ។

២. សរសេរសមីការប្លង់ ABC

គេបាន $(ABC):5(x-0)-4(y-0)+3(z-1)=0$

ដូច្នេះ សមីការប្លង់ $(ABC):5x-4y+3z-3=0$

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

គេបាន $S_{\triangle ABC}=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2}=\dfrac{\sqrt{5^2+(-4)^2+3^2}}{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ ឯកត្តាផ្ទៃក្រឡា

៣. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាម A ហើយកែងប្លង់ ABC

នាំឱ្យ វិចទ័រប្រាប់នៃបន្ទាត់ L ជាវិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ ABC នោះ $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(5,-4,3)$

គេបាន $L:\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases},t\in\mathbb{R}$ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់គឺ $(L):\begin{cases}x=5t\\ y=-4t\\ z=1+3t\end{cases},t\in\mathbb{R}$

៤. គណនា $(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}$

ដោយ $\overrightarrow{OA}=A(0,0,1),\overrightarrow{OB}=B(-1,-2,0),\overrightarrow{OC}=C(2,1,-1)$

គេបាន $(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}).\overrightarrow{OC}=\begin{vmatrix}0&0&1\\-1&-2&0\\2&1&-1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-1&-2\\2&1\end{vmatrix}=-1+4=3$

នាំឱ្យមាឌចតុមុខ $OABC$ គឺ $V_{OABC}=\dfrac{|\left(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{OC}|}{6}=\dfrac{|3|}{6}=\dfrac{1}{2}$ ឯកត្តាមាឌ ។

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា
ប្រឡង៖ **សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ**
សម័យប្រឡង៖______________ មណ្ឌលប្រឡង៖______________
ហត្ថលេខាអនុរក្ស៖ នាមត្រកូល និងនាមខ្លួន៖______________
ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖______________
ហត្ថលេខា៖______________

លេខបន្ទប់៖________
លេខតុ៖________

អក្សរសម្ងាត់

• បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាស់ប្រឡងឡើយ។ ក្រដាស់ប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។
• បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាស់ប្រឡងជាដាច់ខាត។

✂ -

______
125

១៣

វិញ្ញាសា៖ **គណិតវិទ្យាត្រៀម** រយៈពេល៖ 120 នាទី
រៀបរៀងដោយ៖ **ហ៊ីង វុទ្ធី**

អក្សរសម្ងាត់

I គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=-1+i\sqrt{3}$ និង $z_2=1+i$ ។ គណនា $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

II គណនាលីមីត

១. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+4x-16}{x^2+3x-10}$ ២. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2x-3\sin x+1}{4\sin^2x-1}$ ៣. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{x^2}$

III គណនាអាំងតេក្រាល

១. $I=\int\frac{3x^2+5x-4}{(x-1)(x+1)^2}dx$ ២. $J=\int\frac{3(x^2-2x+3)}{(x-1)(x+2)^2}dx$ ៣. $K=\int\cos^3 xdx$

IV គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E):\quad y''-3y'+2y=4x^3-2x$ ។

១. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលអូម៉ូសែ្សន $y''-3y'+2y=0$ ។

២. បើ $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) ចូរកំណត់ចំនួនពិត a,b,c និង d ។ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

V គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{3x+1}$ កំណត់លើ $\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$ ។

១. កំណត់តម្លៃអមនៃ $f'(x)$ ចំពោះ $\forall x\in[1,5]$ ។

២. $\forall x\in[1,5]$ ចូរបង្ហាញថា $\frac{3}{8}x+\frac{13}{8}\le\sqrt{3x+1}\le\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$ ។

VI f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $y=f(x)=x+e^{1-x}$ ហើយមានក្រាប C ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត L នៃក្រាប C ។

ខ. បង្ហាញថា f មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x=1$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

គ. សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ ។ គេយក $e=2.7$ ។

ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប C អាស៊ីមតូតទ្រេត L បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=2$ ។

VII ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យបីចំណុច $A(-2,1,-3),B(1,2,3)$ និង $C(2,-2,1)$ ។

១. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាម A ហើយស្របនឹង $\overrightarrow{BC}$ ។

២. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ។ រកសមីការប្លង់ ABC ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

៣. រកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $OABC$ ។

ដំណោះស្រាយ

I គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ និង $z_2 = 1 + i$ ។ គណនា $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$

ដោយ $z_1 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

គេបាន
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$
$$\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(-1 + i\sqrt{3})(1 - i)}{2(1 + i)(1 - i)}$$
$$= \frac{\sqrt{2}(-1 + i + i\sqrt{3} - i^2\sqrt{3})}{2(1 - i^2)}, i^2 = -1$$
$$\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

ដូច្នេះ នាំឱ្យ $\boxed{\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ និង } \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}$

II គណនាលីមីត

១. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3 + 4x - 16}{x^2 + 3x - 10} = \frac{2^3 + 4(2) - 16}{2^2 + 3(2) - 10} = \frac{8 + 8 - 16}{4 + 6 - 10} = \frac{0}{0}$ រាងមិនកំណត់

គេបាន
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 + 4x - 16}{x^2 + 3x - 10} = \lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + 8x - 16}{x^2 - 2x + 5x - 10}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2(x - 2) + 2x(x - 2) + 8(x - 2)}{x(x - 2) + 5(x - 2)}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 8)}{(x - 2)(x + 5)}$$
$$= \frac{2^2 + 2(2) + 8}{2 + 5} = \frac{16}{7}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3 + 4x - 16}{x^2 + 3x - 10} = \frac{16}{7}}$

២. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{4\sin^2 x - 1} = \frac{2\sin^2\frac{\pi}{6} - 3\sin\frac{\pi}{6} + 1}{4\sin^2\frac{\pi}{6} - 1} = \frac{2(\frac{1}{2})^2 - 3(\frac{1}{2}) + 1}{4(\frac{1}{2})^2 - 1} = \frac{0}{0}$ រាងមិនកំណត់

គេបាន
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{4\sin^2 x - 1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x - \sin x - 2\sin x + 1}{(2\sin x)^2 - 1}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x(2\sin x - 1) - (2\sin x - 1)}{(2\sin x - 1)(2\sin x + 1)}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{(2\sin x - 1)(\sin x - 1)}{(2\sin x + 1)(2\sin x - 1)}$$
$$= \frac{\frac{1}{2} - 1}{2(\frac{1}{2}) + 1} = -\frac{1}{4}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{4\sin^2 x - 1} = -\frac{1}{4}}$

៣. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x.\cos 2x.\cos 3x}{x^2} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$ រាងមិនកំណត់

ដោយប្រើរូបមន្ត $\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$

គេបាន $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{2}[\cos 3x+\cos(-x)]\cos 3x}{x^2}$, $\cos(-x)=\cos x$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{2}(\cos 3x.\cos 3x+\cos x.\cos 3x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 0)+\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 2x)]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{4-\cos 6x-1-\cos 4x-\cos 2x}{4}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 6x+1-\cos 4x+1-\cos 2x}{4x^2}, 1-\cos ax=2\sin^2\frac{ax}{2}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 3x+2\sin^2 2x+2\sin^2 x}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin^2 3x}{(3x)^2}\times 9+\frac{\sin^2 2x}{(2x)^2}\times 4+\frac{\sin^2 x}{x^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(9+4+1)=\frac{14}{2}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{x^2}=7}$

III គណនាអាំងតេក្រាល

១. $I=\int\frac{3x^2+5x-4}{(x-1)(x+1)^2}dx$

គេអាចសរសេរជារាងកាណូនិច

$$\frac{3x^2+5x-4}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

$$3x^2+5x-4=A(x^2+2x+1)+B(x-1)+C(x^2-1)$$

$$3x^2+5x-4=Ax^2+2Ax+A+Bx-B+Cx^2-C$$

$$3x^2+5x-4=(A+C)x^2+(2A+B)x+(A-B-C)$$

ផ្ទឹមមេគុណនៃអង្គទាំងពីរ គេបាន $\begin{cases}A+C=3\\2A+B=5\\A-B-C=-4\end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases}A=1\\B=3\\C=2\end{cases}$

នោះគេបាន $I=\int\frac{3x^2+5x-4}{(x-1)(x+1)^2}dx=\int\left[\frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{2}{x+1}\right]dx$

$$=\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{dx}{(x+1)^2}+2\int\frac{dx}{x+1}$$

$$=\ln|x-1|-\frac{3}{x+1}+2\ln|x+1|+C$$

ដូច្នេះ $\boxed{I=\int\frac{3x^2+5x-4}{(x-1)(x+1)^2}dx=\ln|x-1|-\frac{3}{x+1}+2\ln|x+1|+C}$

២. $J=\int\frac{3(x^2-2x+3)}{(x-1)(x+2)^2}dx$

គេអាចសរសេរជារាងកាណូនិច

$$\frac{3(x^2-2x+3)}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{x+2}$$

$$3(x^2-2x+3)=A(x^2+4x+4)+B(x-1)+C(x-1)(x+2)$$

$$3x^2-6x+9=Ax^2+4Ax+4A+Bx-B+Cx^2+Cx-2C$$

$$3x^2-6x+9=(A+C)x^2+(4A+B+C)x+(4A-B-2C)$$

ផ្ទឹមមេគុណនៃអង្គទាំងពីរ គេបាន $\begin{cases}A+C=3\\4A+B+C=-6\\4A-B-2C=9\end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases}A=\frac{2}{3}\\B=-11\\C=\frac{7}{2}\end{cases}$

នោះគេបាន $J=\int\frac{3(x^2-2x+3)}{(x-1)(x+2)^2}dx=\int\left[\frac{2}{3(x-1)}-\frac{11}{(x+2)^2}+\frac{7}{3(x+2)}\right]dx$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-1}-11\int\frac{dx}{(x+2)^2}+\frac{7}{3}\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{11}{x+2}+\frac{7}{3}\ln|x+2|+C$$

ដូច្នេះ $\boxed{J=\int\frac{3(x^2-2x+3)}{(x-1)(x+2)^2}dx=\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{11}{x+2}+\frac{7}{3}\ln|x+2|+C}$

៣. $K=\int\cos^3xdx=\int\cos x(\cos^2x)$ ដោយ $\sin^2x+\cos^2x=1$ នោះ $\cos^2x=1-\sin^2x$

គេបាន $K=\int\cos x(1-\sin^2x)dx=\int\cos xdx-\int\sin^2x\cos xdx$

តាង $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$

គេបាន $K=\int\cos xdx-\int t^2dt=\sin x-\frac{t^3}{3}+C=\sin x+\frac{\sin^3x}{3}+C$

ដូច្នេះ $\boxed{K=\sin x+\frac{\sin^3x}{3}+C}$

IV គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E):\quad y''-3y'+2y=4x^3-2x$

១. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលអូម៉ូស្សែន $y''-3y'+2y=0$

សមីការសំគាល់ $\lambda^2-3\lambda+5=0\Leftrightarrow(\lambda-1)(\lambda-2)=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=2$

ដូនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $\boxed{y_c=Ae^x+Be^{2x}}$

២. កំណត់ចំនួនពិត a,b,c និង d

បើ $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

នោះ $g'(x)=3ax^2+2bx+c\Rightarrow g''(x)=6ax+2b$ ជំនួសចូលសមីការ (E)

គេបាន
$$g''(x)-3g'(x)+2g(x)=4x^3-2x$$

$$6ax+2b-3(3ax^2+2bx+c)+2(ax^3+bx^2+cx+d)=4x^3-2x$$

$$2ax^3+(-9a+2b)x^2+(6a-6b+2c)x+(2b-3c+2d)=4x^3-2x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a&=4\\-9a+2b&=0\\6a-6b+2c&=2\\2b-3c+2d&=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a&=2\\b&=9\\c&=22\\d&=24\end{cases}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\text{ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ } (E) \text{ គឺ } y=y_c+g(x)=Ae^x+Be^x+2x^3+9x^2+22x+24\ ,A,B\in\mathbb{R}}$

V គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{3x+1}$ កំណត់លើ $\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$

១. កំណត់តម្លៃអមនៃ $f'(x)$ ចំពោះ $\forall x\in[1,5]$

ដោយ $f'(x)=\frac{(3x+1)'}{2\sqrt{3x+1}}=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}\Rightarrow f'(1)=\frac{3}{2\sqrt{4}}=\frac{3}{4}, f'(5)=\frac{3}{2\sqrt{16}}=\frac{3}{8}$

ចំពោះ $\forall x\in[1,5]$ និង $f'(1)>f'(5)$ នោះគេបាន $f'(5)\le f'(x)\le f'(1)$

ដូច្នេះ $\boxed{\text{តម្លៃអមនៃ } f'(x) \text{ គឺ } \frac{3}{8}\le f'(x)\le\frac{3}{4}}$

២. បង្ហាញថា $\frac{3}{8}x+\frac{13}{8}\le\sqrt{3x+1}\le\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$ ចំពោះ $\forall x\in[1,5]$

ដោយ $\frac{3}{8}\le f'(x)\le\frac{3}{4}$ តាមវិសមភាពកំណើនមានកំណត់

គេបាន $\frac{3}{8}(x-1)\le f(x)-f(1)\le\frac{3}{4}(x-1)$

$$\frac{3}{8}x-\frac{3}{8}\le\sqrt{3x+1}-\sqrt{3(1)+1}\le\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{8}x-\frac{3}{8}+2\le\sqrt{3x+1}\le\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}+2$$

ដូច្នេះ $\boxed{\frac{3}{8}x+\frac{13}{8}\le\sqrt{3x+1}\le\frac{3}{4}x+\frac{5}{4},\forall x\in[1,5]}$

VI f ជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $y=f(x)=x+e^{1-x}$ ហើយមានក្រាប C ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^{1-x})=+\infty+e^{-\infty}=+\infty+0=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+e^{1-x})=-\infty+e^{+\infty}=+\infty-\infty$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(x+\frac{e}{e^x})=\lim_{x\to-\infty}e^{-x}\left(\frac{x}{e^{-x}}+e\right)=+\infty(0+e)=+\infty$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{1-x}=0$ នោះគេបាន $L:y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប C

ខ. បង្ហាញថា f មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $x=1$

គេបាន $f'(x)=(x+e^{1-x})'=1+(1-x)'e^{1-x}=1-e^{1-x}$

បើ $f'(x)=0$ នោះ $1-e^{1-x}=0\Leftrightarrow e^{1-x}=e^0\Leftrightarrow 1-x=0\Rightarrow x=1$

បើ $f'(x)>0$ នោះ $1-e^{1-x}>0\Leftrightarrow e^{1-x}<e^0\Leftrightarrow 1-x<0\Rightarrow x>1$

បើ $f'(x)<0$ នោះ $1-e^{1-x}<0\Leftrightarrow e^{1-x}>e^0\Leftrightarrow 1-x>0\Rightarrow x<1$

តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

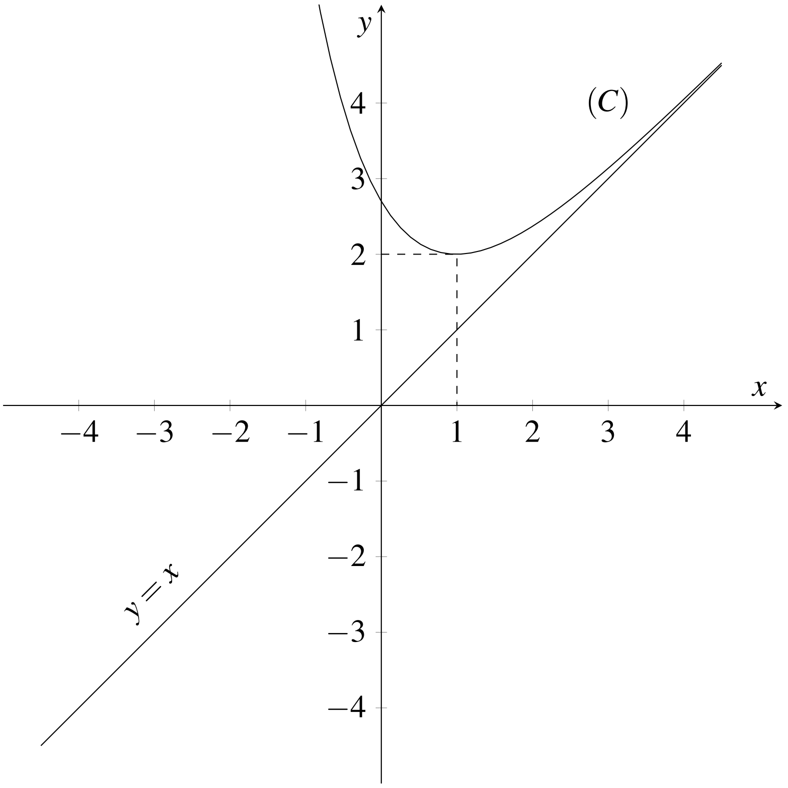
ដោយ $f'(x)$ ប្ដូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ ត្រង់ $x=1$ នោះ f មានអតិប្បបរមាត្រង់ $x=1$ គឺ $f(1)=1+e^0=2$

សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$-\infty$

គ. សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ គេយក $e=2.7$

បើ $x=0$ នោះ $y(0)=e$



ឃ. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប C អាស៊ីមតូតទ្រេត L បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=2$

គេបាន $S=\int_1^2[f(x)-x]dx=\int_1^2(x+e^{1-x}-x)dx=\int_1^2 e^{1-x}dx=e\int_1^2 e^{-x}dx$

$$=-e\left[e^{-x}\right]_1^2=-e(e^{-2}-e^{-1})=-e^{-1}+e^0=1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\text{ផ្ទៃក្រឡា } S=\frac{e-1}{e} \text{ ឯកត្តាផ្ទៃក្រឡា}}$

VII ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យបីចំណុច $A(-2,1,-3),B(1,2,3)$ និង $C(2,-2,1)$

១. រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាម A ហើយស្របនឹង $\overrightarrow{BC}$

នោះ $\overrightarrow{BC}=(2-1,-2-2,1-3)=(1,-4,-2)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ L

គេបានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ $L:\begin{cases}x=-2+t\\ y=1-4t\\ z=-3-2t\end{cases},t\in\mathbb{R}$

២. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

ដោយ $\overrightarrow{AB}=(1+2,2-1,3+3)=(3,1,6)$

$\overrightarrow{AC}=(2+2,-2-1,1+3)=(4,-3,4)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&1&6\\4&-3&4\end{vmatrix}=(4+18)\vec{i}-(12-24)\vec{j}+(-9-4)\vec{k}=22\vec{i}+12\vec{j}-13\vec{k}$

រកសមីការប្លង់ ABC

គេបាន សមីការប្លង់ ABC :
$$\begin{aligned}22(x+2)+12(y-1)-13(z+3)&=0\\22x+44+12y-12-13z-39&=0\\22x+12y-13z-7&=0\end{aligned}$$

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

គេបាន ក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC គឺ $S=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{22^2+12^2+13^2}=\sqrt{797}$ ឯកត្តាផ្ទៃក្រឡា

៣. រកមាឌនៃតេត្រាអែត $OABC$

ដោយ $\overrightarrow{AO}=(0+2,0-1,0+3)=(2,-1,3)$ និង $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(22,12,-13)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{AO}.(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})=(2)(22)+(-1)(12)+(3)(-13)=-7$

គេបាន មាឌតេត្រាអ៊ែត $OABC$ គឺ $V=\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{AO}.(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\right|=\dfrac{|-7|}{6}=\dfrac{7}{6}$ ឯកត្តាមាឌ

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា
ប្រឡង៖ **សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ**
សម័យប្រឡង៖______________________ មណ្ឌលប្រឡង៖______________________
ហត្ថលេខាអនុរក្ស៖ នាមត្រកូល និងនាមខ្លួន៖______________________
ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖______________________
ហត្ថលេខា៖______________________

លេខបន្ទប់៖________
លេខតុ៖________

អក្សរសម្ងាត់

• បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាស់ប្រឡងឡើយ។ ក្រដាស់ប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។
• បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាស់ប្រឡងជាដាច់ខាត។

______ / 125

១៤

វិញ្ញាសា៖ **គណិតវិទ្យាត្រៀម** រយៈពេល៖ 120 នាទី
រៀបរៀងដោយ៖ **ហ៊ីង វុទ្ធី**

អក្សរសម្ងាត់

I

១. ដោះស្រាយសមីការ $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$ (E) ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច ។
រកម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃឫសនីមួយៗរបស់សមីការ (E) ។

២. សរសេរ $w=\left(\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

II គណនាលីមីត៖

$$A=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{1-\cos x}\qquad B=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}\qquad C=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$$

III ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $2y''+3y'+y=0$ តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(0)=1, y'(0)=2$ ។

IV គណនាអាំងតេក្រាល

$$A=\int\frac{2x+7}{x^2-1}dx\qquad B=\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}\qquad C=\int xe^x dx$$

V ក្នុងថង់មួយមានប៊ូល ១៥ ដែលចែកជា ប៊ូលពណ៌បៃតងចំនួន ៧ និងសរសេរលើប៊ូលទាំង ៧ ប៊ូលខៀវចំនួន ៥ និងប៊ូលពណ៌ក្រហម ចំនួន ៣ ។ គេចាប់ប៊ូលបីចេញពីក្នុងថង់ដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

A: ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតង

B: ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌ក្រហមចំនួនពីរ និងបៃតងមួយ

C: ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌ខុសគ្នា ។

VI អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y=f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ ហើយមានក្រាប C ។

១. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f រួចបង្ហាញថាជាអនុគមន៍សេស ។

២. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់ រួចទាញរកអាស៊ីមតូតនៃអនុគមន៍ ។

៣. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

៤. សង់តារាងអថេរភាពនៃ អនុគមន៍ f និងសង់ខ្សែកោង C ។ គេឱ្យ $(e=2.7)$

៥. ដោយប្រើក្រាប (C) ចូរពិភាក្សាតាមតម្លៃប៉ារ៉ាម៉ែត្រ m នូវចំនួននឹងសញ្ញានៃឫសសមីការ $\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=m$ ។

VII ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមានមួយ គេឱ្យបីចំណុច $A(3,1,4), B(-1,2,5), C(5,-2,3)$

១. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត និង សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (D) ដែលកាត់តាមចំណុច C និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{AB}$ ។

២. រកសមីការប្លង់ (P) ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{AC}$ ហើយកាត់តាមចំណុច B ។ រកសមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$ ។

៣. គណនា $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចសរសេរសមីការប្លង់ ABC ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។
M ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (D) និងប្លង់ (P) គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច M ។

ដំណោះស្រាយ

I

១. ដោះស្រាយសមីការ $z^2-2\sqrt{2}z+4=0\quad(E)$ ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច ។

តាម $\Delta'=(b')^2-ac=(-\sqrt{2})^2-(1)(4)=2-4=-2<0$

គេបាន $z_1=\dfrac{-(-\sqrt{2})+\sqrt{2}i}{1}=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ នាំឱ្យ $z_2=\bar{z}_=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

ដូច្នេះ $\boxed{z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2},z_2=\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$

រក $|z_1|,|z_2|$ និង $\arg(z_1),\arg(z_2)$

ដោយ $|z_1|=|z_2|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$

គេបាន $z_1=2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$z_2=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right]$$

ដូច្នេះ $\boxed{|z_1|=|z_2|=2,\arg(z_1)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\arg(z_2)=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \text{ ដែល } k\in\mathbb{Z}}$

២. សរសេរ $w=\left(\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ដោយ $\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\dfrac{2\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{4}\right)$

នាំឱ្យ $w=\left[\cos\left(\dfrac{2\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{4}\right)\right]^2=\cos\left(\dfrac{4\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{4\pi}{4}\right)$

ដូច្នេះ $\boxed{w=\cos\pi+i\sin\pi}$

II គណនាលីមីត៖

$A=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{1-\cos x}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

គេបាន $A=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2 2x}{2\sin^2\frac{x}{2}}=16\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\sin^2 2x}{(2x)^2}\times\dfrac{\frac{x^2}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}\right]=16$

ដូច្នេះ $\boxed{A=16}$

$B=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

តាង $A(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\Rightarrow A(0)=2$

គេបាន $B=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x.A(x)}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x.A(x)}{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{1-x})^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{A(x)\sin x}{x+1-1+x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{A(x)}{2}\times\frac{\sin x}{x}\right]=\frac{A(0)}{2}\times1=\frac{2}{2}=1$$

ដូច្នេះ $\boxed{B=1}$

$C=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$ រាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

គេបាន $C=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x+2x-2}{x^2-x+x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x-1)+2(x-1)}{x(x-1)+(x-1)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{2}$$

ដូច្នេះ $\boxed{C=\dfrac{3}{2}}$

III ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $2y''+3y'+y=0$ តាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(0)=1,y'(0)=2$

មានសមីការសម្គាល់ $2\lambda^2+3\lambda+1=0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(2\lambda+1)=0$

$$\Leftrightarrow x+1=0, 2x+1=0$$

$$\Rightarrow x=-1, x=-\frac{1}{2}$$

គេបាន ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y=Ae^{-x}+Be^{-\frac{1}{2}x}, A,B\in\mathbb{R} \Rightarrow y(0)=A+B=1 \quad (1)$

$$y'=-Ae^{-x}+-\frac{1}{2}B^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow y'(0)=-A-\frac{1}{2}B=2 \quad (2)$$

យកសមីការ $(1)+(2)$ គេបាន $A-A+B-\frac{1}{2}B=1+2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}B=3 \Rightarrow B=6$

ជំនួសចូលសមីការ (1) នាំឱ្យ $A=1-B=1-6=-5$

ដូច្នេះ សមីការមានចម្លើយ $\boxed{y=-5e^{-x}+6e^{-\frac{1}{2}x}}$

IV គណនាអាំងតេក្រាល

$A=\int \frac{2x+7}{x^2-1}dx$

ដោយ $\frac{2x+7}{x^2-1}=\frac{2x+7}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

សមូល $2x+7=Ax+A+Bx-B=(A+B)x+A-B$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B &=2 \quad (1) \\ A-B &=7 \quad (2) \end{cases}$$

យក $(1)+(2)$ គេបាន $2A=9 \Rightarrow A=\frac{9}{2}$ ជំនួសចូល (1) នោះ $B=2-A=2-\frac{9}{2}=-\frac{5}{2}$

គេបាន $A=\int\left(\frac{9}{2(x-1)}-\frac{5}{2(x+1)}\right)dx=\frac{9}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{9}{2}\ln|x-1|-\frac{5}{2}\ln|x+1|+C$

ដូច្នេះ $\boxed{A=\frac{9}{2}\ln|x-1|-\frac{5}{2}\ln|x+1|+C, C\in\mathbb{R}}$

$B=\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}$

តាង $t=\ln x \Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$

គេបាន $B=\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}=\int_e^{e^2}\frac{dt}{t}=[\ln|t|]_e^{e^2}=[\ln|\ln x|]_e^{e^2}=|\ln|\ln e^2||-|\ln|e||=\ln 2-1$

ដូច្នេះ $\boxed{B=\ln 2-1}$

$C=\int xe^x dx$

តាង $u=x \Rightarrow du=dx$ និង $dv=e^x dx \Rightarrow v=\int e^x dx=e^x$

គេបាន $C=uv-\int vdu=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C$

ដូច្នេះ $\boxed{C=xe^x-e^x+c, c\in\mathbb{R}}$

V គេចាប់បូល 3 ចេញពីក្នុងថង់ដែលមានបូលសរុបចំនួន 15 ដោយចៃដន្យ

នោះករណីអាចគឺ $n(S)=C(15,3)=\frac{15!}{(15-3)!3!}=\frac{12!.13.14.15}{12!3!}=450$

រក $P(A)$

A: បូលដែលចាប់បានមានពណ៌បៃតង នាំឱ្យ $n(A)=C(7,3)=\frac{7!}{(7-3)3!}=\frac{4!.5.6.7}{4!3!}=5\times 7=35$

ដូច្នេះ $\boxed{P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{35}{450}=\frac{7}{90}}$

រក $P(B)$

B: ប៊ូលដែលចាប់បានពណ៌ក្រហមចំនួន 2 និង បៃតង 1 នំាឱ្យ $n(B) = C(3,2).C(7,1) = 3\times 7 = 21$

ដូច្នេះ $\boxed{P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{21}{450} = \dfrac{7}{150}}$

រក $P(C)$

C: ប៊ូលដែលចាប់បានមានពណ៌ខុសគ្នា នាំឱ្យ $n(C) = C(7,1).C(5,1).C(3,1) = 7\times 5\times 3 = 150$

ដូច្នេះ $\boxed{P(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{150}{450} = \dfrac{1}{3}}$

VI អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $y = f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ ហើយមានក្រាប C

១. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f

អនុគមន៍ f មានន័យកាលណា $\dfrac{x+1}{x-1} > 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+1}{x-1}$		$+$		$-$		$+$	

តាមតារាងសញ្ញា ដោយ $\dfrac{x+1}{x-1} > 0 \Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

ដូច្នេះ ដែនកំណត់ $\boxed{\mathscr{D} = (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)}$

បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍សេស

$\forall x\in\mathscr{D}, \exists -x\in\mathscr{D}$ គេបាន
$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\\ &= \ln(x-1) - \ln(x+1)\\ &= -[\ln(x+1) - \ln(x-1)]\\ &= -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\\ &= -f(x)\end{aligned}$$

ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍សេស

២. គណនាលីមីតចុងដែនកំណត់

គេបាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right) = \ln 1 = 0$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{-1+1}{-1-1}\right) = \ln 0^+ = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{1+1}{1-1}\right) = \ln +\infty = +\infty$$

គេបាន $y = 0$ ជាអាស៊ីមតូតដេក និង $x = -1, x = 1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃអនុគមន៍ f

៣. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍

គេបាន $f'(x) = \left[\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\right]' = [\ln(x+1)]' - [\ln(x-1)]' = \dfrac{(x+1)'}{x+1} - \dfrac{(x-1)'}{x-1}$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$$

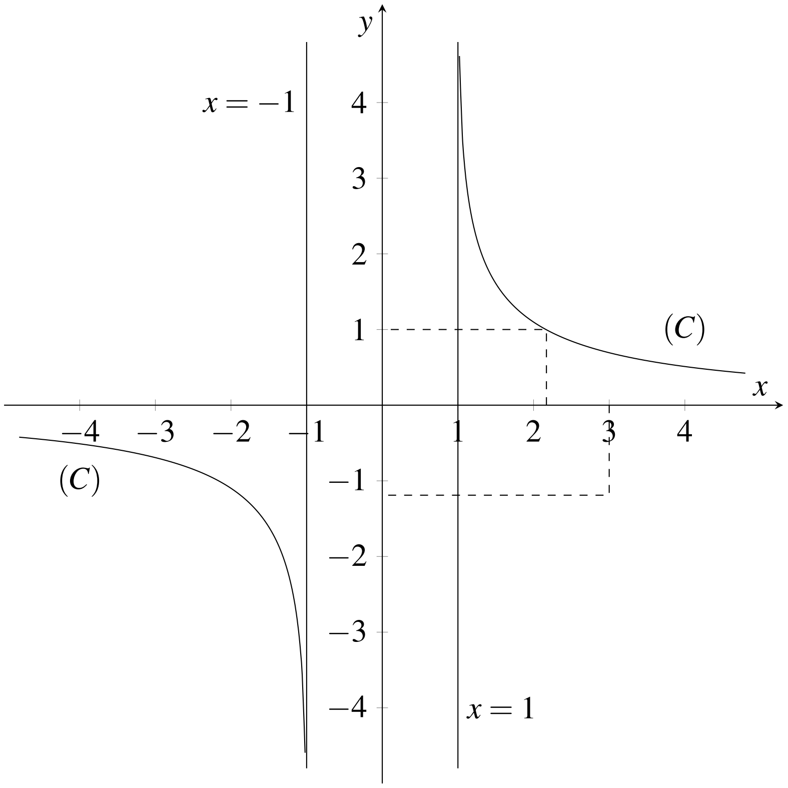
ដូច្នេះ $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)(x+1)}$

ដោយ $(x-1)(x+1) > 0, \forall x\in\mathscr{D} \Rightarrow f'(x) < 0$ នោះអនុគមន៍ f ចុះដាច់ខាតលើ $\mathscr{D}$

៤. តារាងអថេរភាពនៃ អនុគមន៍ f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$				$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$		$+\infty$	↘	0

សង់ខ្សែកោង C



បើ $y=1$ នោះ:

$$1=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow e=\frac{x+1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow ex-e=x+1$$

$$\Leftrightarrow x(e-1)=1+e$$

$$\Rightarrow x=\frac{3.7}{1.7}=2.17$$

៥. ពិភាក្សាតម្លៃ m នៃសមីការ $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=m \quad (I)$

(I) ជាសមីការអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាង ខ្សែកោង (C) និង បន្ទាត់ $y=m$ តាមក្រាប

គេបាន $m\in(-\infty,0)$ សមីការ (I) មានឫសតែមួយគត់ជាចំនួនពិតអវិជ្ជមាន

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=m\Leftrightarrow\frac{x+1}{x-1}=e^m\Rightarrow x=\frac{e^m+1}{e^m-1}$$

$m\in(0,+\infty)$ សមីកា (I) មានឫសតែមួយគត់ជាចំនួនវិជ្ជមានគឺ $x=\dfrac{e^m+1}{e^m-1}$

$m=0$ សមីការ (I) គ្មានឫស

VII ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមានមួយ គេឱ្យបីចំណុច $A(3,1,4),B(-1,2,5),C(5,-2,3)$

១. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត និង សមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (D) ដែលកាត់តាមចំណុច C និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{AB}$

ដោយ $\overrightarrow{AB}=(-1-3,2-1,5-4)=(-4,1,1)$

គេបាន សមីកាប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (D) : $\begin{cases}x=5-4t\\ y=-2+t\\ z=3+t\end{cases}\quad ,t\in\mathbb{R}$

សមីការឆ្លុះនៃ (D) : $\dfrac{x-5}{-4}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$

២. រកសមីការប្លង់ (P) ដែលមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\overrightarrow{AC}$ ហើយកាត់តាមចំណុច B

ដោយ $\overrightarrow{AC}=(5-3,-2-1,3-4)=(2,-3,-1)$

គេបាន $(P):2(x+1)-3(y-2)-(z-5)=0$

$$2x+2-3y+6-z+5=0$$

ដូច្នេះ សមីការប្លង់ $(P):2x-3y-z+13=0$

រកសមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$

ដោយ $[AB]=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4^2+1^2+1^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ នាំឱ្យ $r=\frac{[AB]}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

និងផ្ចិត $\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)=\left(\frac{3-1}{2},\frac{1+2}{2},\frac{4+5}{2}\right)=\left(1,\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$

គេបានសមីការស្វ៊ែ $S:(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{9}{2}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$$x^2-2x+1+y^2-3y+\frac{9}{4}+z^2-9z+\frac{81}{4}=\frac{9}{2}$$

$$x^2+y^2+z^2-2x-3y-9z+\frac{45}{2}-\frac{9}{2}=0$$

ដូច្នេះ សមីការស្វ៊ែ $S:x^2+y^2+z^2-2x-3y-9z+18=0$

៣. គណនា $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចសរសេរសមីការប្លង់ ABC

គេបាន $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-4&1&1\\2&-3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\-3&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-4&1\\2&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-4&1\\2&-3\end{vmatrix}\vec{k}$

$$=(-1+3)\vec{i}-(4-2)\vec{j}+(12-2)\vec{k}$$

$$\vec{n}=2\vec{i}-2\vec{j}+10\vec{k}$$

គេបានសមីការប្លង់ $ABC:2(x-3)-2(y-1)+10(z-4)=0$

$$2x-6-2y+2+10z-40=0$$

$$2x-2y+10z-44=0$$

$$x-y+5z-22=0$$

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

គេបាន $S_{\triangle ABC}=\frac{|n|}{2}=\frac{\sqrt{2^2+2^2+10^2}}{2}$

$$=\frac{\sqrt{4+4+100}}{2}=\frac{\sqrt{108}}{2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច $M(x,y,z)$

M ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $(D):x=5-4t,y=-2+t,z=3+t$ និងប្លង់ $(P);2x-3y-z+13=0$

គេបាន $2(5-4t)-3(-2+t)-(3+t)+13=0$

$$10-8t+6-3t-3-t+13=0$$

$$-12t=-26\Rightarrow t=\frac{13}{6}$$

នាំឱ្យ $x=5-\frac{4(13)}{6}=\frac{30-52}{6}=-\frac{11}{3},y=-2+\frac{13}{6}=\frac{-12+13}{6}=\frac{1}{6},z=3+\frac{13}{6}=\frac{31}{6}$

ដូនេះ ចំណុចប្រសព្វ $M\left(-\frac{11}{3},\frac{1}{6},\frac{31}{6}\right)$

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា លេខបន្ទប់៖________

ប្រឡង៖ **សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ** លេខតុ៖________

សម័យប្រឡង៖________ មណ្ឌលប្រឡង៖________

ហត្ថលេខាអនុរក្ស៖ នាមត្រកូល និងនាមខ្លួន៖________

ថ្ងៃខែឆ្នាំកំណើត៖________ | អក្សរសម្ងាត់ |

ហត្ថលេខា៖________

- បេក្ខជនមិនត្រូវធ្វើសញ្ញាសម្គាល់អ្វីមួយនៅលើក្រដាស់ប្រឡងឡើយ។ ក្រដាស់ប្រឡងណាដែលមានសម្គាល់នឹងត្រូវបានពិន្ទុសូន្យ។
- បេក្ខជនមិនត្រូវចម្លងប្រធានវិញ្ញាសាដាក់លើក្រដាស់ប្រឡងជាដាច់ខាត។

$\dfrac{\quad}{125}$

១៥

វិញ្ញាសា៖ **គណិតវិទ្យាត្រៀម** រយៈពេល៖ 120 នាទី | អក្សរសម្ងាត់ |

រៀបរៀងដោយ៖ **ហ៊ីង វុទ្ធី**

I គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $A=(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)$ និង $B=\dfrac{x+iy}{1+i}$ ដែល x,y ជាចំនួនពិត ។

១. សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត ហើយជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

២. សរសេរ B ជាទម្រង់ពីជគណិត ។ រកតម្លៃ x,y ដោយដឹងថា $2\overline{B}-A^2=0$ ($\overline{B}$ ជាកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ B) ។

II គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

១. $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{2x^2-x-3}{x^3+2x^2+6x+5}$

២. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x+e^x-1}{x^2+x}$

៣. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2x}{\cos x}$

៤. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2+2x-4}}$

III ១. ដោះស្រាយសមីការ $(E): y''+5y'+6y=0$ ។

២. រកចម្លើយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាបន្ទាត់ $(D): y=x-1$ ប៉ះក្រាបនៃចម្លើយត្រង់ $x=0$ ។

IV រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានអ័ក្សឆ្លុះស្របអ័ក្សអរដោនេ ហើយក្រាបវាកាត់តាមចំណុច $(-2,-3),(2,5)$ និង $(1,6)$ ។ កំណត់កូអរដោនេ កំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស រួចសង់ប៉ារ៉ាបូល ។

V គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x)=e^{2x}-2e^x+\frac{1}{2}x+1$ មានក្រាប (C) ។

១. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ ។ រកសមីការបន្ទាត់ (D) ជាអាស៊ីមតូតនៃ (C) ។

២. បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍កើន ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ g ។

៣. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ទៅនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ $x=0$ ។

៤. សង់ក្រាប $(T),(D)$ និង (C) ក្នុងតម្រុយតែមួយ ។

VI ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេមានចំណុច $A(2,0,1),B(3,1,5)$ និង $C(1,4,4)$

១. គណនា $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ។

២. គណនា $\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចគណនាក្រឡាផ្ទៃ $\triangle ABC$ ។

៣. រកសមីការប្លង់ (ABC) ។ បង្ហាញថាចំណុច $D(2,0,2)$ មិននៅក្នុងប្លង់ (ABC) ។

៤. រកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) រួចគណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ។

៥. សរសេរសមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$ ។

ដំណោះស្រាយ

I ១. សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន $A=(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)$

គេបាន $A^2=\left[(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)\right]^2$

$=(\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)i+i^2(\sqrt{3}+1)^2, i^2=-1$

$=3-2\sqrt{3}+1+4i-(3+2\sqrt{3}+1)$

ដូច្នេះ $A^2=-4\sqrt{3}+4i$

សរសេរ A^2 ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេបាន $A^2=-4\sqrt{3}+4i$

$=8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)$

ដូច្នេះ $A^2=8\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

២. សរសេរ B ជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន $B=\frac{x+iy}{1+i}$ ដែល $x,y\in\mathbb{R}$

$=\frac{(x+iy)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$=\frac{x-xi+iy-i^2y}{1-i^2}, i^2=-1$

$=\frac{(x+y)+(y-x)i}{2}$

ដូច្នេះ $B=\frac{x+y}{2}+\frac{y-x}{2}i$

រកតម្លៃ x,y ដោយដឹងថា $2\overline{B}-A^2=0$ ($\overline{B}$ ជាកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ B) នោះ $\overline{B}=\frac{x+y}{2}-\frac{y-x}{2}i$

គេបាន
$$2\overline{B}-A^2=0$$
$$2\overline{B}=A^2$$
$$x+y-(y-x)i=-4\sqrt{3}+4i$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y&=-4\sqrt{3} \quad (1)\\ y-x&=4 \quad (2)\end{cases}$$

យក $(1)+(2)$ នោះ $2y=4-4\sqrt{3}\Rightarrow y=2-2\sqrt{3}$

ជំនួសចូល (1) នោះ $x=-4\sqrt{3}-y=-4\sqrt{3}-2+2\sqrt{3}=-2-2\sqrt{3}$

ដូច្នេះ $x=-2-2\sqrt{3}, y=2-2\sqrt{2}$

II គណនាលីមីត

១. $\lim_{x\to-1}\frac{2x^2-x-3}{x^3+2x^2+6x+5}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x\to-1}\frac{2x^2-x-3}{x^3+2x^2+6x+5}=\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+2x-3x-3}{x^3+x^2+x^2+x+5x+5}$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{2x(x+1)-3(x+1)}{x^2(x+1)+x(x+1)+5(x+1)}$$
$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(2x-3)}{(x+1)(x^2+x+5)}$$
$$= \frac{2(-1)-3}{(-1)^2+(-1)+5}$$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-x-3}{x^3+2x^2+6x+5} = -1$

២. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + e^x - 1}{x^2+x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

គេបាន $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + e^x - 1}{x^2+x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x(x+1)} + \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x(x+1)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x+1} + \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \times \frac{1}{x+1}$$
$$= 1\times 1 + 1\times 1$$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + e^x - 1}{x^2+x} = 2$

៣. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

តាង $t = x - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{2}$ បើ $x \to \frac{\pi}{2}$ នោះ $t \to 0$

គេបាន $\lim_{t\to 0} \frac{\pi - 2(t+\frac{\pi}{2})}{\cos(t+\frac{\pi}{2})} = \lim_{t\to 0} \frac{-2t}{-\sin t}$

$$= 2\lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t}$$
$$= 2\times 1$$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\cos x} = 1$

៤. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2+2x-4}}$ រាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$

តាង $A(x) = \sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x-1} \Rightarrow A(2) = \sqrt{3}+\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

និង $B(x) = \sqrt{x+2}-\sqrt{x^2+2x-4} \Rightarrow B(2) = 2+2 = 4$

គេបាន $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2+2x-4}} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x-1})A(x).B(x)}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2+2x-4})B(x).A(x)}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{[x^2-1-(2x-1)]B(x)}{[x+2-(x^2+2x-4)]A(x)}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-2x)B(x)}{-(x^2+x-6)A(x)}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)B(x)}{-(x-2)(x+3)A(x)}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{xB(x)}{-(x+3)A(x)}$$
$$= \frac{2.B(2)}{-5.A(2)} = \frac{2\times 4}{-5\times 2\sqrt{3}} = -\frac{4\sqrt{3}}{15}$$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2+2x-4}} = -\frac{4\sqrt{3}}{15}$

III ១. ដោះស្រាយសមីការ $(E): y''+5y'+6y=0$

មានសមីការសំគាល់ $\lambda^2+5\lambda+6=0 \Leftrightarrow \lambda^2+2\lambda+3\lambda+6=0$

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda+2)+3(\lambda+2)=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+3)(\lambda+2)=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2, x=-3$$

គេបាន $y=Ae^{\lambda_1}+Be^{\lambda_2}=Ae^{-2x}+Be^{-3x}$

ដូនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y=Ae^{-2x}+Be^{-3x}$ ដែល $A,B\in\mathbb{R}$

២. រកចម្លើយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាបន្ទាត់ $(D): y=x-1$ ប៉ះក្រាបនៃចម្លើយត្រង់ $x=0$

នោះ $y(0)=0-1=-1$ និង $y'=(x-1)'=1 \Rightarrow y'(0)=1$

ដោយ $y=Ae^{-2x}+Be^{-3x} \Rightarrow y(0)=Ae^0+Be^0$

$$\Leftrightarrow -1=A+B \qquad (1)$$

និង $y=Ae^{-2x}+Be^{-3x} \Rightarrow y'=(-2x)'Ae^{-2x}+(-3x)'Be^{-3x}$

$$=-2Ae^{-2x}-3Be^{-3x}$$

$$\Rightarrow y'(0)=-2Ae^0-3Be^0$$

$$\Leftrightarrow 1=-2A-3B \qquad (2)$$

យក $2(1)+(2)$ គេបាន $2(-1)+1=2(A+B)-2A-3B$

$$-1=2A+2B-2A-3B$$

$$-1=-B$$

$$B=1$$

ជំនួលចូល (1) នោះ $-1=A+1 \Rightarrow A=-2$

ដូច្នេះ ចម្លើយនៃសមីការ (E) គឺ $y=-2e^{-2x}+e^{-3x}$

IV រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល

ដោយប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ ហើយក្រាបវាកាត់តាមចំណុច $(-2,-3),(2,5)$ និង $(1,6)$

សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរគឺ $(x-h)^2=4p(y-k)$

កាត់តាមចំណុច $(-2,-3)$ នោះ $(-2-h)^2=4p(-3-k)$

$$4+4h+h^2=-12p-4pk$$

$$h^2+4pk=-12p-4h-4 \qquad (1)$$

កាត់តាមចំណុច $(2,5)$ នោះ $(2-h)^2=4p(5-k)$

$$4-4h+h^2=20p-4pk$$

$$h^2+4pk=20p+4h-4$$

$$-12p-4h-4=20p+4h-4$$

$$32p+8h=0$$

$$4p+h=0 \qquad (2)$$

កាត់តាមចំណុច $(1,6)$ នោះ $$(1-h)^2=4p(6-k)$$
$$1-2h+h^2=24p-4pk$$
$$h^2+4pk=24p+2h-1$$
$$-12p-4h-4=24p+2h-1$$
$$36p+6h=-3$$
$$12p+2h=-1 \qquad (3)$$
យក $2(1)-(2)$ គេបាន $2(4p+h)-(12p+2h)=0-(-1)$
$$8p+2h-12p-2h=1$$
$$-4p=1$$
$$p=-\frac{1}{4}$$
ជំនួសចូល (2) នោះ $h=-4p=-4\left(-\frac{1}{4}\right)=1$

ជំនួសចូល (1) គេបាន $4+4h+h^2+12p=-4pk$
$$4+4(1)+1^2-3=k$$
$$6=k$$
ដូនេះ រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $P:(x-1)^2=-(y-6)$

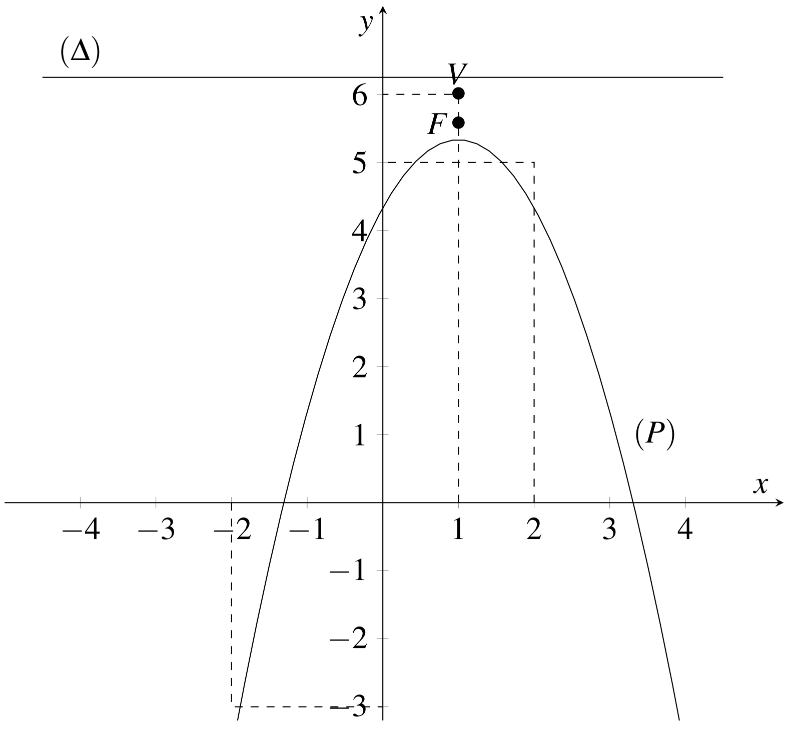
កំណត់កូអរដោនេ កំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស

គេបាន កពូល $V(h,k)=V(1,6)$

កំណុំ $F(h,k+p)=F\left(1,6-\frac{1}{4}\right)=F\left(1,\frac{23}{4}\right)$

សមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $\Delta: y=k-p=6+\frac{1}{4}=\frac{25}{4}$

សង់ប៉ារ៉ាបូល



V គេឱ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x) = e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1$ មានក្រាប (C)

១. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

គេបាន $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1\right)$

$= -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}\left(1 - \frac{2}{e^x} + \frac{x}{2e^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}}\right)$

$= +\infty$

រកសមីការបន្ទាត់ (D) ជាអាស៊ីមតូតនៃ (C)

ដោយ $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x} - 2e^x) = 0$ នាំឱ្យ $D: y = \frac{1}{2}x + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតខាង $-\infty$

២. បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍កើន

យើងមាន $g(x) = e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow g'(x) = 2e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}$

$= 4e^{2x} - 4e^x + 1$

$= (2e^x - 1)^2 > 0$

ដោយ $g'(x) > 0$ នោះ g ជាអនុគមន៍កើន

តារាងអថេរភាពនៃ g

x	$-\infty$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

៣. សរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះ (T) ទៅនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ $x = 0$

គេបាន $T: y - g(0) = g'(0)(x - x_0)$

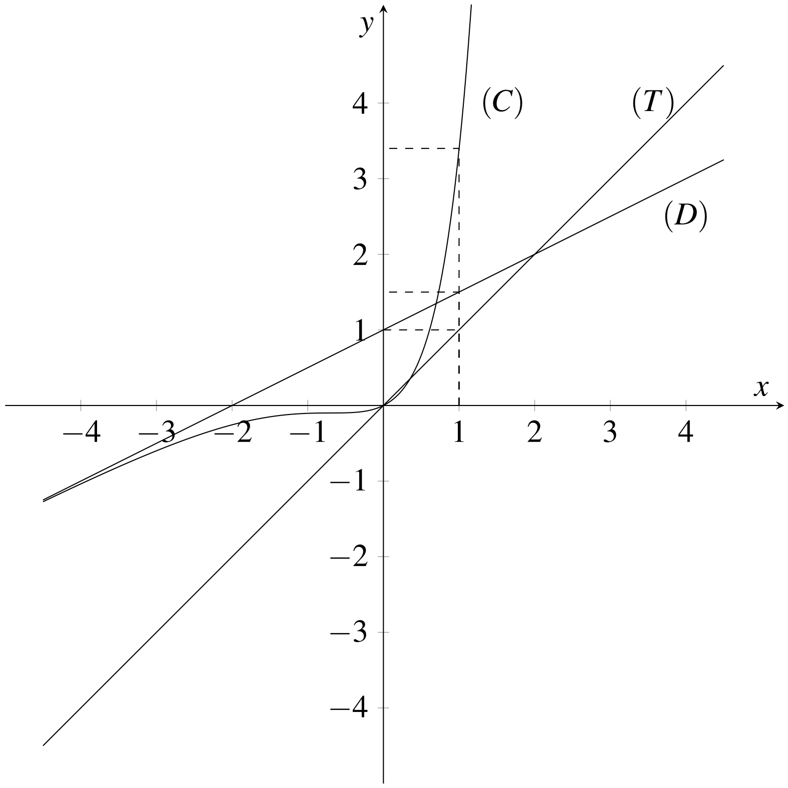
$y - (e^0 - 2e^0 + 0 + 1) = (2e^0 - 1)^2(x - 0)$

$y = x$

ដូច្នេះ បន្ទាត់ប៉ះ $T: y = x$

៤. សង់ក្រាប $(T), (D)$ និង (C) ក្នុងតម្រុយតែមួយ

x	$T: y = x$	$D: y = \frac{1}{2}x + 1$	$C: y = e^{2x} - 2e^x + \frac{1}{2}x + 1$
0	0	1	0
1	1	1.5	3.4



VI ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ គេមានចំណុច $A(2,0,1), B(3,1,5)$ និង $C(1,4,4)$

១. គណនា $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$

គេបាន $\overrightarrow{AB} = (3-2, 1-0, 5-1) = (1,1,4)$

$\overrightarrow{AC} = (1-2, 4-0, 4-1) = (-1,4,3)$

២. គណនា $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

គេបាន $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(3-16) - \vec{j}(3+4) + \vec{k}(4+1) = -13\vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k}$

គណនាក្រឡាផ្ទៃ $\triangle ABC$

គេបាន $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{N}| = \frac{1}{2}\sqrt{13^2+7^2+5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{169+49+25} = \frac{1}{2}\sqrt{243} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ ឯកត្តាផ្ទៃ

៣. រកសមីការប្លង់ (ABC)

គេបាន $(ABC) : a(x-x_A) + b(y-y_A) + c(z-z_A) = 0$

$$-13(x-2) - 7(y-0) + 5(z-1) = 0$$

$$-13x + 26 - 7y + 5z - 5 = 0$$

$$-13x - 7y + 5z + 21 = 0$$

$$13x + 7y - 5z - 21 = 0$$

បង្ហាញថាចំណុច $D(2,0,2)$ មិននៅក្នុងប្លង់ (ABC)

គេបាន $13x_D + 7y_D - 5z_D - 21 = 13(2) + 7(0) - 5(2) - 21$

$$= 26 - 10 - 21$$

$$= -5 \neq 0$$

៤. រកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC)

គេបាន $d\left[D,(ABC)\right]=\dfrac{|13x_D+7y_D-5z_D-21|}{\sqrt{13^2+7^2+5^2}}=\dfrac{|-5|}{9\sqrt{3}}$

$=\dfrac{5\sqrt{3}}{27}$ ឯកត្តាប្រវែង

គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $ABCD$

គេបាន មាឌតេត្រាអ៊ែត $=\dfrac{1}{3}$ក្រឡាផ្ទៃបាទ $\times$ កំពស់

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}|\overrightarrow{N}|\times d\left[D,(ABC)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{3}}{2}\times\frac{5\sqrt{3}}{27}$$

$$=\frac{3\times 5}{18}=\frac{5}{6}\text{ ឯកត្តាមាឌ}$$

៥. សរសេរសមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$

ដោយ $[AB]$ ជាអង្កត់ផ្ចិតនោះ $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2},\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)=\left(\dfrac{2+3}{2},\dfrac{0+1}{2},\dfrac{1+5}{2}\right)=I\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2},3\right)$

និងមានកាំ $r=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{2}=\dfrac{\sqrt{1^2+1^2+4^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{20}}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$

គេបាន $S:\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+(z-3)^2=(\sqrt{5})^2$

$$x^2-5x+\frac{25}{4}+y^2-y+\frac{1}{4}+z^2-6z+9-5=0$$

$$x^2+y^2+z^2-5x-y-6z+\frac{21}{2}=0$$