ស៊ាម សំណាង និង អ៊ូន ណែត

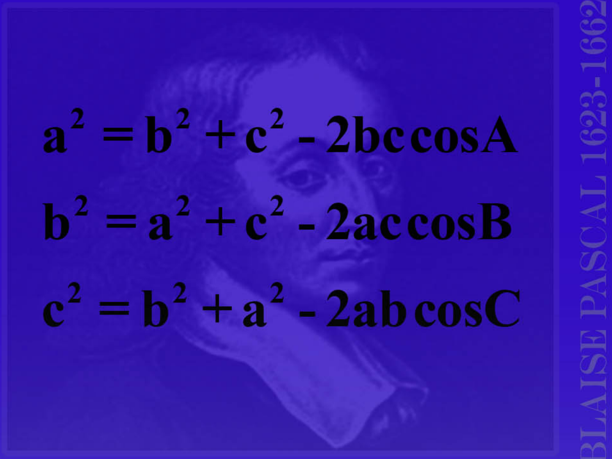
បរិញ្ញាបត្រផ្នែក គណិតវិទ្យា

កម្រងវិញ្ញាសា

គណិតវិទ្យា

ត្រៀមប្រឡងគ្រូកម្រិតឧត្តម បរិញ្ញាបត្រ +១

ប្រឡងសិស្សពូកែ និង ប្រឡងប្រជែងនានា



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C$$

ត្រួតពិនិត្យដោយ: សាស្ត្រាចារ្យ លឹម ផល្គុន

សាស្ត្រាចារ្យគណិតវិទ្យា សាលាមហាសាស្ត្រា

រក្សាសិទ្ធិ ©

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

រួមមាន: ១៥ វិញ្ញាសាជ្រើសរើសល្អៗ

✍សម្រាប់ត្រៀមប្រលងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតឧត្តម

✍ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែគណិតវិទ្យា

✍ប្រលងអាហារូបករណ៍ និង ប្រលងប្រជែងនានា!

☞ត្រួតពិនិត្យនិងកែសម្រួលដោយសាស្ត្រាចារ្យ: **លឹម ផល្គុន**

រៀបរៀងដោយ: ស៊ាម សំណាង និង អួន ណែត

វាយអត្ថបទដោយ:

លោក ស៊ាម សំណាង និង អួន ណែត

រចនាក្រុបដោយ: ស៊ាម សំណាង

អារម្ភកថា

សួស្តីប្រិយមិត្រអ្នកសិក្សា និង អ្នកដែលស្រលាញ់វិស័យអប់រំនិងអ្នកសិក្សាគណិតវិទ្យាជាទីរាប់អាន។

សៀវភៅ "**វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា**" ដែលមិត្រអ្នកសិក្សាកំពុងតែកាន់អាននេះ យើងខ្ញុំបានខិតខំចងក្រងនិង ដកស្រង់ចេញពីវិញ្ញាសាដែលបានបង្រៀន ដោយៈ សាស្ត្រាចារ្យ **លឹម ផល្គុន** ដើម្បីទុកជាឯកសារសម្រាប់ជំនួយស្មារតីក្នុងការប្រលងក្របខ័ណ្ឌក្រសួងអប់រំ និងប្រឡងប្រជែងផ្សេងៗនាពេលខាងមុខ។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថាឯកសារមួយនេះវានឹងក្លាយជាឯកសារដ៏ល្អសម្រាប់អ្នកហើយក៏សូមអធ្យាស្រ័យទុកជាមុននូវរាល់កំហុស ទាំងបច្ចេកទេសកុំព្យូទ័រ ព្រមទាំងអក្ខរាវិរុទ្ធផងដែរ។

សូមជូនពរឱ្យទទួលបានជោគជ័យគ្រប់ភារកិច្ចការងារ និងការសិក្សាគ្រប់ៗគ្នា...។

ភ្នំពេញ ថ្ងៃទី ០២ ខែ កក្កដា ឆ្នាំ ២០១៧

អ្នករៀបរៀង

សាំម សំណាង និង អួន ណៃត

បញ្ជីអត្ថបទ:

វិញ្ញាសាទី១……………………………………………………………………១
វិញ្ញាសាទី២……………………………………………………………………១៧
វិញ្ញាសាទី៣……………………………………………………………………...៣៤
វិញ្ញាសាទី៤……………………………………………………………………..…៥០
វិញ្ញាសាទី៥……………………………………………………………………៦៣
វិញ្ញាសាទី៦……………………………………………………………………៨២
វិញ្ញាសាទី៧……………………………………………………………………៩៧
វិញ្ញាសាទី៨…………………………………………………………………..១០៨
វិញ្ញាសាទី៩…………………………………………………………………..១២៥
វិញ្ញាសាទី១០…………………………………………………………..……..១៣៩
វិញ្ញាសាទី១១…………………………………………………………..……..១៥៣
វិញ្ញាសាទី១២…………………………………………………………..……..១៦៦
វិញ្ញាសាទី១៣…………………………………………………………..……..១៧៩
វិញ្ញាសាទី១៤……………………………..…………………..……..១៨៥-១៩៩
វិញ្ញាសាទី១៥……………………………..…………………..……..២០០-២១៣

<u>វិញ្ញាសាទី១</u>

I-ចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាគេមានសមភាព

$\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$ ពិតជានិច្ច ។

II-ចូរគណនាលីមីត $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cos\left(\frac{\pi}{x+2}\right)$

និង $B=\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)\sin\left(\frac{\pi x}{x+2}\right)$ ។

III-គេកំណត់រកគ្រប់គូចំនួនគត់វិជ្ជមានដាច់ខាត (a,b) នៃសមីការ

$\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$ ។

ក) កំណត់ a បើ $a=b$

ខ) បង្ហាញថា $(1,1),(2,3)$ និង $(5,8)$ ជាចម្លើយពិសេស ។

គ) ស្រាយបំភ្លឺថាបើ (a,b) ជាចម្លើយនៃសមីការ និង $a\neq b$

នោះ $a^2-b^2<0$ ។

IV-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍មានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់:

$\forall x,y\in\mathbb{R}: f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{f(x)f(y)}$ ។

ចូររក $f(x)$ ។

V-គេឱ្យ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ដែល $f(1)=2$

និង $f(x)f\left[f(x)\right]=x^2+3x+2$ គ្រប់ $x\in\mathbb{N}$ ។ចូររក $f(x)$

VI-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$\begin{cases}u_0=2017\\u_{n+1}=u_n^2-2nu_n+n^2+n-1\end{cases}$; ដែល $n=0,1,2,3...$

ក) គេតាង $u_n = v_n + an + b$ ។ចូរស្រាយថាគេអាចកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យស្វ៊ីត (v_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $v_{n+1} = v_n^2 - 2$ ចំពោះគ្រប់ $n = 0,1,2,3,4...$។

ខ) គណនា v_0 ដោយសរសេរវាជាទម្រង់ $v_o = a + \frac{1}{a}$ រួចគណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

VII-គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ មានក្រាប (H)

ក) សិក្សាអថេរភាព និង គូសខ្សែកោង (H) នៃអនុគមន៍ f ។

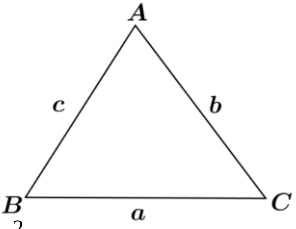
ខ) បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d): y = -x + m$ កាត់ខ្សែត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា A និង B។

គ) រកតម្លៃ m ដើម្បីឱ្យប្រវែង AB អប្បបរមា ។

VIII-ចូរគណនា $I = \iint_D 12xydxdy$

ដែល $D = \{(x,y) / 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2x - x^2\}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>



I-ស្រាយថា $\cos A\cos B\cos C \le \dfrac{1}{8}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Rightarrow \cos \mathrm{C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

យើងបាន

$$\cos A\cos B\cos C = \frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}{8a^2b^2c^2} \qquad (1)$$

តាង $\begin{cases} x = b^2+c^2-a^2 & (2) \\ y = a^2+c^2-b^2 & (3) \\ z = a^2+b^2-c^2 & (4) \end{cases}$

យក $(2)+(3): x+y = 2c^2 \Rightarrow c^2 = \dfrac{x+y}{2}$

$$(2)+(4): x+z = 2b^2 \Rightarrow b^2 = \frac{x+z}{2}$$

$$(3)+(4): y+z = 2a^2 \Rightarrow c^2 = \frac{y+z}{2}$$

យកជំនួសក្នុង (1) អាចសរសេរទៅជា:

$$\cos A\cos B\cos C=\frac{xyz}{8\frac{(x+y)(y+z)(x+z)}{8}}=\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(x+z)}$$

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត-មធ្យមធរណីមាត្រ

$$+\begin{cases}x+y\geq 2\sqrt{xy}\\ y+z\geq 2\sqrt{yz}\\ x+z\geq 2\sqrt{xz}\end{cases}$$

$$(x+y)(y+z)(x+z)\geq 8xyz$$

$$\Leftrightarrow\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(x+z)}\leq\frac{1}{8}\qquad(5)$$

តាម $(2)\&(5)$

ដូចនេះ $\cos A\cos B\cos C\leq\frac{1}{8}$ ពិត។

II-គណនាលីមីត

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cos\left(\frac{\pi}{x+2}\right)$$ រាង $(\infty\times 0)$

តាម $\cos\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

លីមីត A អាចសរសេរ $A=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{x+2}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\left(\frac{\pi x+2\pi-2\pi}{2(x+2)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\left(\frac{\pi x}{2x+4}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\pi x}{x(2x+4)}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2x+4}\right)}{\left(\frac{\pi x}{2x+4}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\pi}{(2x+4)}=\frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះ $A=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cos\left(\frac{\pi}{x+2}\right)=\frac{\pi}{4}$ ។

$B=\lim_{x\to\infty}(x+2)\sin\left(\frac{\pi x}{x+2}\right)$ រាង $(\infty\times 0)$

តាង $y=\frac{\pi x}{x+2}-\pi=-\frac{2\pi}{x+2}$

$\Rightarrow x+2=-\frac{2\pi}{y}$ & $\frac{\pi x}{x+2}=y+\pi$

បើ $x\to\infty\Rightarrow y\to 0$

$$B=\lim_{y\to 0}\left(-\frac{2\pi}{y}\right)\sin(y+\pi)$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(-\frac{2\pi}{y}\right)(-\sin y)$$

$$=2\pi\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=2\pi$$

ដូចនេះ $B=\lim_{x\to\infty}(x+2)\sin\left(\frac{\pi x}{x+2}\right)=2\pi$ ។

III-កំណត់គ្រប់គូចំនួនគត់វិជ្ជមានដាច់ខាត់$(a.b)$នៃសមីការ

$\left(a^2+ab-a^2\right)=1$

ក)- កំណត់ a បើ $a=b$

យើងមាន $\left(a^2+ab-a^2\right)=1 \quad a,b\in\mathbb{N} \quad (1)$

ចំពោះ $a=b$ សមីការ (1) ក្លាយទៅជា

$$\left(a^2+a.a-a^2\right)^2=1$$

$$a^4=1$$

$$a=\pm 1$$ ដោយ $a\in\mathbb{N}$

ដូចនេះ $a=1$ ។

ខ)- បង្ហាញថា $(1,1),(2,3)\&(5,8)$ ជាចម្លើយពិសេស

យើងមាន $\left(a^2+ab-a^2\right)=1$

- ចំពោះ $a=1,b=1$

$$\left(1^2+1\times1-1^2\right)^2=1$$

$1=1$ ពិត។

- ចំពោះ $a=2,b=3$

$$\left(2^2+2\times3-3^2\right)=1$$

$$\left(4+6-9\right)^2=1$$

$1=1$ ពិត។

- ចំពោះ $a=5,b=8$

$$\left(5^2+5\times8-8^2\right)=1$$

$$\left(25+40-64\right)=1$$

$1=1$ ពិត ។

ដូចនេះ $(1,1),(2,3)\&(5,8)$ ជាចម្លើយពិសេស។

គ)- ស្រាយបំភ្លឺថាបើ (a,b) ជាចម្លើយនៃសមីការនិង $a\neq b$ នោះ

$a^2-b^2<0$

យើងមាន $\begin{cases}(a^2+ab-b^2)=-1\\(a^2+ab-b^2)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=-(1+ab) & (2)\\a^2-b^2=1-ab & (3)\end{cases}$

ដោយ $\forall a,b\in\mathbb{N}$ មាន $1+ab>0$

តាម (2): $a^2-b^2<0$ ពិត

ម្យ៉ាងទៀត $\forall a\neq b\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 1\\b\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow 1-ab<0$

តាម (3) : $a^2-b^2<0$ ពិតដូចនេះ (a,b) ជាចម្លើយនៃសមីការនិង $a\neq b$

នោះ $a^2-b^2<0$ ពិត

IV- រក $f(x)$

- f ជាអនុគមន៍មានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$

  $\forall x,y\in\mathbb{R}: f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{f(x)f(y)}$ (1)

- បើ $f(x)=0$ នោះសមីការ (1) ពិតជានិច្ច

  $\Rightarrow f(x)=0$ ជាចម្លើយពិសេស

  -បើ $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)<0$ ហើយ $y\in\mathbb{R},\frac{x+y}{2}\in\mathbb{R}$

  $\Rightarrow\begin{cases}f(y)<0\\f\left(\frac{x+y}{2}\right)<0\end{cases}$

តាម (1) គេបាន $f(x)<0$ មិនពិត ព្រោះ

$$f(x).f(y)>0 \Rightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right)>0$$

នោះ $f(x)>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

តាម $(1)\Rightarrow \ln f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\ln\sqrt{f(x)f(y)}$

$$\ln f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{\ln f(x)+\ln f(y)}{2} \qquad (2)$$

តាង $g(x)=\ln f(x)$

តាម $(2)\Rightarrow g\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{g(x)+g(y)}{2} \qquad (3)$

តាម(3) ធ្វើដេរីវេធៀបនិង x យើងបាន

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)' g'\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{g'(x)}{2}$$

$$\frac{1}{2}g'\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{g'(x)}{2}$$

$$g'\left(\frac{x+y}{2}\right)=g'(x) \qquad (4)$$

តាម (4) ធ្វើដេរីវេធៀបនិង y យើងបាន:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)' g'\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{g'(y)}{2}$$

$$\frac{1}{2}g'\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{g'(y)}{2}$$

$$g'\left(\frac{x+y}{2}\right)=g'(y) \quad (5)$$

តាម $(4)\&(5): g'(x)=g'(y) \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$ នោះ $g'(x)$ ថេរ

$\Rightarrow \exists a\in\mathbb{R}, g'(x)=a$

$\Rightarrow g(x)=\int adx=ax+b$

តែ $g(x)=\ln f(x)\Rightarrow f(x)=e^{g(x)}=e^{ax+b}$

ដូចនេះ $f(x)=e^{ax+b}$

V- រក $f(x)$

បម្រាប់ $\begin{cases} f:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ f(1)=2 \\ f(x)f\left[f(x)\right]=x^2+3x+2 \quad (1)\end{cases}$

យក $x=1$ ជំនួសក្នុងសមីការ (1) យើងបាន:

$f(1).f\left[f(1)\right]=1^2+3\times1+2=6$

$2.f(2)=6\Rightarrow f(2)=3$

យក $x=2$ ជំនួសក្នុងសមីការ (1) យើងបាន:

$f(2).f\left[f(2)\right]=2^2+3\times2+2=12$

$3f(3)=12\Rightarrow f(3)=4$

យើងសង្កេតឃើញថា:

$f(1)=2$

$f(2)=3$

$f(3)=4$

....

ឧបមាថា វាពិតដល់ $x=k, k\in\mathbb{N}$ គឺ $f(k)=k+1$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $x=k+1$ គឺ $f(k+1)=k+2$

យក $x=k$ ជំនួសក្នុងសមីការ (1) យើងបាន

$f(k)f\left[f(k)\right]=k^2+3k+2$ តែ $f(k)=k+1$

$(k+1)f(k+1)=(k+1)(k+2)$

$\Rightarrow f(k+1)=(k+2)$ ពិត

ដូចនេះ $f(x)=x+1$, $x\in\mathbb{N}$ ។

VI- ក) បង្ហាញថាគេអាចកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យស្វ៊ីត (v_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $v_{n+1}=v_n^2-2$ ចំពោះគ្រប់ $n=0,1,2,3,4........$

សម្មតិកម្ម $\begin{cases} u_o=2017 \\ u_{n+1}=u_n^2-2nu_n+n^2+n-1 \quad (1) \end{cases}$

- $u_n=v_n+an+b \quad (2)$

$\Rightarrow u_{n+1}=v_{n+1}+a(n+1)+b=v_{n+1}+an+a+b \quad (3)$

យក $(2)\&(3)$ ទៅជួសក្នុង (1) យើងបាន:

$(1):\ v_{n+1}+a(n+1)+b=(v_n+an+b)^2-2n(v_n+an+b)+n^2+n-1$

$v_{n+1}+an+a+b=v_n^2+2(v_n)(an+b)+(an+b)^2-2n(v_n)-2an^2-2nb+n^2+n-1$

$$v_{n+1}=v_n^2+2anv_n+2bv_n+a^2n^2+2abn-2nv_n-2an^2-2nb+n^2+n-1-an+b^2-a-b$$

$$=v_n^2+(2an+2b+2n)v_n+(a+1)^2n^2+(2ab-2b-a+1)n-a-b+b^2-1 \quad (4)$$

ដើម្បីឱ្យ $\forall n\in\mathbb{N},\cup\{0\}:v_{n+1}=v_n^2-2$

លុះត្រាតែសមីការ (4) បំពេញលក្ខខណ្ឌ

$$\forall n\in\mathbb{N},\cup\{0\}:\begin{cases}2an+2b-2n=0 & (e_1)\\ (a+1)^2=0 & (e_2)\\ 2ab-2b-a+1=0 & (e_3)\\ -a-b-1+b^2=0 & (e_4)\end{cases}$$

តាម(e_2) : $a=1$ ជំនួសក្នុង (e_1) គេបាន

$$2n+2b-2n=0\Leftrightarrow b=0$$

យក $a=1,b=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$(e_3)\&(e_4):\begin{cases}0-0-1+1=0\\ -1-0-1+0=-2\end{cases}$$ ពិត

ដូចនេះ $a=1,b=0$។

ខ) គណនាv_o ដោយសរសេរវាជាទម្រង់ $v_o=a+\dfrac{1}{a}$ រួចគណនា u_n និងv_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ចំពោះ $a=1,b=0$ គេមាន

$$u_n=v_n+n$$

បើ $n=0,\mathrm{u}_o=v_o\Rightarrow v_0=u_o=2017$

គេអាចសរសេរ v_o តាង$v_o=a+\dfrac{1}{a}$

ឧបមាថា $a+\frac{1}{a}=2017$ ពិត

$\Rightarrow a^2-2017a+1=0$

$\Delta=2017^2-4=\left(2017-2\right)\left(2017+2\right)=2015\times 2017$

$$a_1=\frac{2017-\sqrt{2015\times 2017}}{2}$$

$$a_2=\frac{2017+\sqrt{2015\times 2017}}{2}$$

ដូចនេះ $v_o=\dfrac{2017-\sqrt{2015\times 2019}}{2}+\dfrac{2017+\sqrt{2015\times 2019}}{2}$ ។

VII-ក) សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប $\left(H\right)$

យើងមាន $f\left(x\right)=\dfrac{2x+1}{x+2}$

<u>ដែនកំណត់</u>: អនុគមន៍ f មានន័យលុះត្រាតែ $x+2\neq 0\Rightarrow x\neq -2$ និង

$D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

<u>ទិសដៅអថេរភាព</u> :

$$f^{'}\left(x\right)=\frac{\left(2x+1\right)^{'}\left(x+2\right)-\left(x+2\right)^{'}\left(2x+1\right)}{\left(x+2\right)^2}$$

$$f^{'}\left(x\right)=\frac{2\left(x+2\right)-\left(2x+1\right)}{\left(x+2\right)^2}=\frac{3}{\left(x+2\right)^2}>0 \quad \forall x\in D_f$$

នោះ f ជាអនុគមន៍ ម៉ូណូតូនកើន លើ D_f

-លីមីត និង អាស៊ីមតូត:

$$-\lim_{x\to -2}f\left(x\right)=\lim_{x\to -2}\frac{2x+1}{x+2}=\begin{cases}+\infty & if \quad x\to -2^-\\ -\infty & if \quad x\to -2^+\end{cases}$$

ដោយ $\lim_{x\to -2} f(x) = \pm\infty$

នោះបន្ទាត់ $x=-2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+1}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = 2$

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$ នោះបន្ទាត់ $y=2$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

<u>តារាងអថេរភាព</u> :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	+
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 2$

<u>សំណង់ក្រាប</u> :ផ្ចិតឆ្លុះ ជាចំណុចប្រសព្វរវាងអាស៊ីមតូតឈរ $x=-2$ និង

អាស៊ីមតូតដេក $y=2$ គឺ $I(-2,2)$

តាម $f(2a-x_o)+f(x_o)=2b$,$x_o\in D_f$ ដោយ

$I(-2,2)\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=2\end{cases}$ នោះ $f(-4-x_o)+f(x_o)=4$

មាន $f(x_o)=\frac{2x_o+1}{x_o+2}$ (1) និង

$$f(-4-x_o)=\frac{2(-4-x_o)+1}{(-4-x_o)+2}=\frac{-2x_o-7}{-x_0-2}=\frac{2x_o+7}{x_o+2} \quad (2)$$

យក $(1)+(2)$:

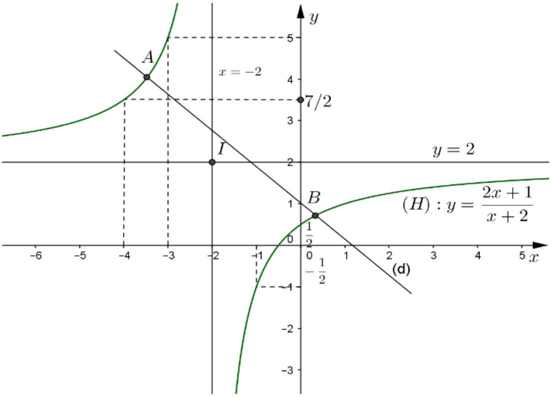
$$f(-4-x_o)+f(x_0)=\frac{2x_0+1}{x_o+2}+\frac{2x_o+7}{x_o+2}=4.\frac{x_0+2}{x_o+2}=4$$ ពិត

$\forall x_o \in D_f$

ដូចនេះ $I(-2,2)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃ ក្រាប (H) ។

តារាងជំនួយ $\quad (H): y=\dfrac{2x+1}{x+2}$

x	-4	-3	-2	-1	-1/2	0
y	7/2	5	‖	-1	0	1/2



ខ) បង្ហាញថា

$$(d)\cap(H)=\{A,B\}$$

$$(H): y=\frac{2x+1}{x+2}$$

$$(d): y=-x+m$$

-សមីការអាប់ស៊ីស $(d)\cap(H)$

$$\frac{2x+1}{x+2}=-x+m$$

$$2x+1=-x^2+mx-2x+2m$$

$$x^2-(m-4)x-2m+1=0$$

$$\Delta=(m-4)^2-4(-2m+1)$$

$$\Delta=m^2-8m+16+8m-4=m^2+12>0\quad\forall m\in\mathbb{R}$$

នោះសមីការ (E) មានឫសពីរជានិច្ច។

ដូច្នេះ បន្ទាត់ (d) ប្រសព្វ (H) ត្រង់ពីរចំណុច $A\&B$ ជានិច្ច $\forall m\in\mathbb{R}$ ។

គ) កំណត់ m ដើម្បីឱ្យ AB អប្បបរមា

យក x_A,x_B ជាអាប់ស៊ីសនៃ $A\&\mathrm{B}$

$$\Rightarrow A(x_A,-x_A+m)\quad ,\ B(x_B,-x_B+m)$$

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(-x_B+m+x_A-m)^2}$$

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(x_A-x_B)^2}$$

$$AB=\sqrt{2}\sqrt{(x_B-x_A)^2}=\sqrt{2}\sqrt{(x_B+x_A)^2-4x_Bx_A}$$

ដោយ $x_A\,\&\,x_B$ ជាឫសរបស់ $(E)\Rightarrow\begin{cases}x_A+x_B=m-4\\x_Ax_B=-2m+1\end{cases}$

$$AB=\sqrt{2}\sqrt{m^2-8m+16+8m-4}=\sqrt{2}\sqrt{m^2+12}$$

ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យ AB អប្បបរមាលុះត្រាតែ $m=0$ ។

X- គណនា

$$I = \iint_D 12xydxdy$$

$$D = \left\{ (x,y) : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2x - x^2 \right\}$$

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{2x-x^2} 12xydy \right) dx$$

$$I = \int_0^2 \left[6xy^2 \right]_0^{2x-x^2} dx$$

$$I = \int_0^2 6x\left(2x - x^2\right)^2 dx$$

$$I = \int_0^2 \left[6x\left(4x^2 - 4x^3 + x^4\right) \right] dx$$

$$I = \int_0^2 \left(24x^3 - 24x^4 + 6x^5\right) dx$$

$$I = \left[6x^4 - \frac{24}{5}x^5 + x^6 \right]_0^2$$

$$I = 96 - \frac{24 \times 32}{5} + 64 =$$

$$I = \frac{800 - 24 \times 32}{5} = 392$$ ។

វិញ្ញាសាទី២

I. ១) $A=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\tan\left(\dfrac{\pi x+2}{2x+1}\right)$

២) $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}+\sqrt[3]{x^3+2x^2}+...+\sqrt[3]{x^3+nx^2}-nx\right)$

៣) $C=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6+x}}}}-3}{x-3}$ (មាន n ឫសការេ)

II-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមាន G ជាទីប្រជុំទម្ងន់ ។

១) ចូរស្រាយថា $GB\perp GC$ លុះត្រាតែ $BC^2=\dfrac{AB^2+AC^2}{5}$ ។

២) ចូរកំណត់តម្លៃធំបំផុតនៃមុំ A ដោយដឹងថា $GB\perp GC$ ។ គេយក $\cos36^O=0.80$ ។

III-គេអោយស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $u_o=1$ និង

$u_{n+1}=\dfrac{2n+3}{4n^2+10n+4}u_n$ ដែល $n=0,1,2,3...$ ។

១)ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_n=\dfrac{2n+1}{(n+1)!2^n}$ ចំពោះគ្រប់ $n=0,1,2,3...$

២)ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត α និង β ដើម្បីឱ្យបាន $u_n=\dfrac{\alpha}{n!2^2}+\dfrac{\beta}{(n+1)!2^n}$

រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(u_k)$

IV-គេឱ្យស្វ៊ីតអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^a \frac{x^n dx}{\left(x^2 - 2ax + 2a^2\right)\left(x^2 + 2ax + 2a^2\right)}$

ដែល $a > 0$ និង $n = 0, 1, 2, 3, 4, ...$

១) ចូរគណនា I_7 និង $I_{11} + 4a^2 I_7$ រួចទាញរក I_{11} ជាអនុគមន៍នៃ a

២) តើគេត្រូវឱ្យ n មានតម្លៃប៉ុន្មានទើប I_n មិនអាស្រ័យនិង a ? គណនា I_n ចំពោះតម្លៃ n ទើប រកឃើញ។

V-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍មានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$ ដែលគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ និង $y \in \mathbb{R}$

គេមាន $f\left(x + y\right) = f\left(x\right) + f\left(y\right) + 4xy$ ។

ចូរកំណត់រក $f\left(x\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ចូរគណនាលីមីត

$$A \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\tan\left(\frac{\pi x+2}{2x+1}\right) \text{ រាង } (0\times\infty)$$

តាង $z=\frac{\pi x+2}{2x+1}-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi x+2}{2x+1}=\frac{\pi}{2}+z$

កាលណា $x\to\infty$ នោះ $z\to 0$

$$A=\lim_{\substack{x\to\infty\\ z\to 0}}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\tan\left(\frac{\pi}{2}+z\right)$$

$$A=-\lim_{\substack{x\to\infty\\ z\to 0}}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\cot z$$

ដោយ $z=\frac{\pi x+2}{2x+1}-\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi x+4-2\pi x-\pi}{2(2x+1)}=\frac{4-\pi}{4x+2}$

$$A=-\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\times\frac{1}{z}\times\lim_{z\to 0}\frac{z}{\tan z}$$

$$=-\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\times\frac{4x+2}{4-\pi}$$

$$=\frac{-1}{4-\pi}\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+8x+2}{x^2+x+1}=-\frac{8}{4-\pi}$$

ដូចនេះ $A \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\tan\left(\frac{\pi x+2}{2x+1}\right)=-\frac{8}{4-\pi}$ ។

$$B.\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}+\sqrt[3]{x^3+2x^2}+\sqrt[3]{x^3+3x^2}+...+\sqrt[3]{x^3+nx^2}-nx\right)$$

រាង $\left(\infty\text{-}\infty\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{x^3+kx^2}-\sum_{k=1}^{n}(x)\right)\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+kx^2}-x\right)$$

ប្រើ $a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+kx^2-x^3}{\sqrt[3]{\left(x^2+kx^2\right)^2}+x\sqrt[3]{\left(x^3+kx^2\right)}+x^2}\right]$$

$$B=\sum_{k=1}^{n}\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{kx^2}{x^2\sqrt[3]{\left(1+\frac{k}{x}\right)^2}+x^2\sqrt[3]{\left(1+\frac{k}{x}\right)}+x^2}\right]$$

$$B=\sum_{k=1}^{n}\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{k}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{k}{x}\right)^{2}}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{k}{x}\right)}+1}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{3}\right)=\frac{1}{3}(1+2+3+\ldots+n)=\frac{n(n+1)}{6}$$

ដូច្នេះ $B.\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}+\sqrt[3]{x^3+2x^2}+\ldots+\sqrt[3]{x^3+nx^2}-nx\right)=\frac{n(n+1)}{6}$ ។

$$C.\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6+x}}}}}-3}{x-3}$$ (មាន n ឫសការេ)

តាង $u_n=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6+x}}}}}-3}{x-3}$

យក $f_n(x)=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6+x}}}}}-3$

និង $\overline{f_n}(x)=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6+x}}}}}+3$

$$f_n(x).\overline{f_n}(x)=6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6+x}}}}}-9$$

$$=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6+x}}}}}-3$$

$$f_n(x).\overline{f_n}(x)=f_{n-1}(x)\Rightarrow f_n(x)=\frac{f_{n-1}(x)}{\overline{f_n}(x)}$$

$$\Rightarrow\frac{f_n(x)}{x-3}=\frac{f_{n-1}(x)}{x-3}\times\frac{1}{\overline{f_n}(x)}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to3}\frac{f_n(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f_{n-1}(x)}{x-3}\times\lim_{x\to3}\frac{1}{\overline{f_n}(x)}$$

$$u_n=u_{n-1}\times\frac{1}{\overline{f_n}(3)}$$

តែ $\overline{f_n}(3)=3+3=6$

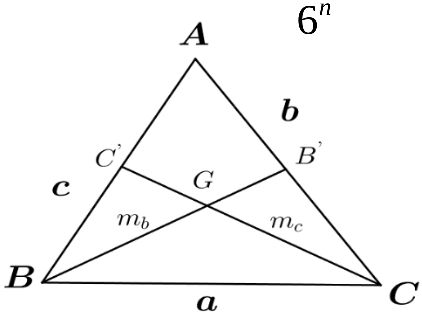
$u_n=\frac{1}{6}u_{n-1}\Rightarrow u_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=\frac{1}{6}$

$\Rightarrow u_n=u_1\times q^{n-1}=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}u_1$ ដែល $u_1=\lim_{x\to3}\frac{f_1(x)}{x-3}$

$$=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{6+x}-3}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{6+x-9}{(x-3)\left(\sqrt{6+x}+3\right)}=\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{6+x}+3\right)}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow u_n=\frac{1}{6^{n-1}}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6^n}$$

ដូច្នេះ $C.\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6+\sqrt{6+x}}}}}-3}{x-3}=\dfrac{1}{6^n}$ ។



II- 1) ស្រាយថា $GB\perp GC$ លុះត្រាតែ ៖

$$BC^2=\frac{AB^2+AC^2}{5}$$

តាង $BC=a\ ;AC=B\ ;\ \ AB=c$

$BB^{'}=m_b\ \ ;\ \ CC^{'}=m_c$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រៈ $GB\perp GC\Rightarrow BC^2=GB^2+GC^2$

ដោយ G ជាទីប្រជុំទម្ងន់ $\Rightarrow\begin{cases}GB=\dfrac{2}{3}m_b\\[2ex] GC=\dfrac{2}{3}m_c\end{cases}$

$$\Leftrightarrow a^2=\frac{4}{9}m_b^2+\frac{4}{9}m_c^2$$

-តាមទ្រឹស្តីមេដ្យាន

$$m_b^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}$$

$$m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow a^2=\frac{4}{9}\left(\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}+\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2=\frac{4}{9}\left(\frac{2a^2+2c^2-b^2+2a^2+2b^2-c^2}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2=\frac{1}{9}\left(4a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 9a^2=4a^2+b^2+c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2=\frac{b^2+c^2}{5}$$ ពិត

ដូច្នេះ $GB\perp GC \Leftrightarrow BC^2=\dfrac{AB^2+AC^2}{5}$ ។

2) កំណត់តម្លៃធំបំផុតនៃ A ដោយដឹងថា $GB\perp GC$

នោះ $a^2=\dfrac{b^2+c^2}{5}$ (1)

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{A}$ (2)

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) យើងបាន៖

$$\frac{b^2+c^2}{5}=b^2+c^2-2bc\cos A \Rightarrow \cos A=\frac{2}{5}\times\frac{b^2+c^2}{bc} \quad (3)$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី $b^2+c^2\ge 2bc$ (4)

តាម $(3)\&(4)$

$$\cos A\ge\frac{4}{5}=0.8=\cos 36^o$$

$$\cos A\ge\cos 36^o \Rightarrow A\le 36^o$$

ដូនេះ តម្លៃធំបំផុតនៃ A គឺ $A \le 36^o$ ។

III- 1) ដោយអនុមានរួមគណិតវិទ្យាស្រាយថា $u_n = \dfrac{2n+1}{(n+1)!2^n}$

យើងមាន $u_o = 1, u_{n+1} = \dfrac{2n+3}{4n^2+10n+4}.u_n$

ចំពោះ $n = 0 \Rightarrow u_n = \dfrac{2(0)+1}{(0+1)!2^0} = \dfrac{1}{1} = 1$

ឧបមាថាវាពិតដល់ n តួទី n គឺ $u_n = \dfrac{2n+1}{(n+1)!2^n}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា ពិត ដល់តួទី $n+1$ គឺ $u_{n+1} = \dfrac{2n+3}{(n+2)!2^{n+1}}$?

យើងមាន $u_{n+1} = \dfrac{2n+3}{4n^2+10n+4}.u_n$

តែតាមការឧបមា $u_n = \dfrac{2n+1}{(n+1)!2^n}$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{2n+3}{4n^2+10n+4} \times \frac{2n+1}{(n+1)!2^n}$$

$$= \frac{(2n+1)(2n+3)}{2(2n^2+5n+2)(n+1)!2^n}$$

$$= \frac{(2n+1)(2n+3)}{2(2n+1)(n+2)2^n}$$

$$= \frac{(2n+3)}{(n+2)!2^{n+1}}$$ ពិត

ដូច្នេះ $u_n=\dfrac{2n+1}{(n+1)!2^n}$ ។

2) កំណត់ α,β ដើម្បីឱ្យ

$$u_n=\frac{\alpha}{n!2^n}+\frac{\beta}{(n+1)!2^{n+1}}\qquad(1)$$

យើងមាន $u_n=\dfrac{2n+1}{(n+1)!2^n}$

តែ $(n+1)!=(n+1)n!$

$$u_n=\frac{2(n+1)-1}{(n+1)!2^n}=\frac{2(n+1)}{(n+1)!2^n}-\frac{1}{(n+1)!2^n}$$

$$=\frac{2}{n!2^n}-\frac{1}{(n+1)!2^n}$$

$$=\frac{2}{n!2^n}-\frac{2}{(n+1)2^{n+1}}\qquad(2)$$

តាម $(1)\&(2)$ យើងបាន $\alpha=2,\beta=-2$

ដូច្នេះ $\alpha=2,\beta=-2$

- រក $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(u_k)$

តាម (1) គេបាន

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2}{k!2^k}-\frac{2}{(k+1)!2^{k+1}}\right]$$

$$=\frac{2}{1!2!}-\frac{2}{(n+1)!2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(u_k\right)=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{2}{(n+1)2^{n+1}}\right]=1$$

ដូច្នេះ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(u_k\right)=1$។

IV- គេឱ្យស្វ៊ីតអាំងតេក្រាល

$$I_n=\int_0^a\frac{x^n dx}{\left(x^2-2ax+2a^2\right)\left(x^2+2ax+2a^2\right)}$$

1) គណនា I_7 & $I_{11}+4a^4I_7$ រួចទាញរក I_{11}

យើងមាន

$$\left(x^2-2ax+2a^2\right)\left(x^2+2ax+2a^2\right)=\left[\left(x^2+2a^2\right)-2ax\right]\left[\left(x^2+2a^2\right)+2ax\right]$$

$$=\left(x^2+2a^2\right)^2-\left(2ax\right)^2$$

$$=x^4+4x^2a^2+4a^4-4a^2x^2$$

$$=x^4+4a^4$$

$\Rightarrow I_n=\int_0^a\frac{x^n dx}{x^4+4a^4}$ ចំពោះ $n=7: I_7=\int_0^a\frac{x^7 dx}{x^4+4a^4}$

តាង $u=x^4+4a^4\Rightarrow du=4x^3$

បើ $\begin{cases}x=0\Rightarrow u=4a^4\\ x=a\Rightarrow u=5a^4\end{cases}$

$$I_7=\int_0^a\frac{x^7 dx}{x^4+4a^4}=\frac{1}{4}\int_0^a\frac{x^4.4x^3dx}{x^4+4a^4}$$

$$=\frac{1}{4}\int_{4a^4}^{5a^4}\frac{\left(u-4a^4\right)}{u}du$$

$$=\frac{1}{4}\int_{4a^4}^{5a^4}1du-\int_{4a^4}^{5a^4}\frac{a^4}{u}du$$

$$=\frac{1}{4}\left[u\right]_{4a^4}^{5a^4}-a^4\left[\ln|u|\right]_{4a^4}^{5a^4}$$

$$=\frac{1}{4}\left(5a^4-4a^4\right)-a^4\left(\ln\left|5a^4\right|-\ln\left|4a^4\right|\right)$$

$$=\frac{1}{4}a^4-a^4\ln\left|\frac{5}{4}\right|$$

$$I_7=a^4\left(\frac{1}{4}-\ln\left|\frac{5}{4}\right|\right)$$

ដូច្នេះ $I_7=a^4\left(\frac{1}{4}-\ln\left|\frac{5}{4}\right|\right)$។

- គណនា $I_{11}+4a^4I_7$

បើ $n=11\Rightarrow I_{11}=\int_0^a\frac{x^{11}dx}{x^4+4a^4}$ និង $I_7=\int_0^a\frac{x^7dx}{x^4+4a^4}$

$$\Rightarrow I_{11}+4a^4I_7=\int_0^a\frac{x^{11}+4a^4x^7}{x^4+4a^4}dx$$

$$=\int_0^a\frac{x^7\left(x^4+4a^4\right)dx}{x^4+4a^4}$$

$$=\int_0^a x^7dx=\left[\frac{x^8}{8}\right]_0^a=\frac{a^8}{8}$$

$$I_{11}+4a^4I_7=\frac{a^8}{8}$$

$$\Rightarrow I_{11}=\frac{a^8}{8}-4a^4I_7$$

$$=\frac{a^8}{8}-4a^8\left(\frac{1}{4}-\ln\frac{5}{4}\right)$$

$$=a^8\left(-\frac{7}{8}+4\ln\frac{5}{4}\right)$$ ។

2) កំណត់ n ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យ a

យើងមាន $I_n=\int_0^a \frac{x^n dx}{x^4+4a^4}$

តាង $x=at\Rightarrow dx=a.dt$

បើ $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=0\\ x=a\Rightarrow t=1\end{cases}$

$$\Rightarrow I_n=\int_0^1\frac{a^n t^n}{a^4t^4+4a^4}.a.dt$$

$$=\int_0^1 a^{n-3}\frac{t^n}{t^4+4}dt$$

ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យ a លុះត្រាតែ $n-3=0\Rightarrow n=3$

ចំពោះ $n=3: I_3=\int_0^a\frac{x^3}{x^4+4a^4}dx$

$$=\int_0^a \frac{1}{4}.\frac{\left(x^4+4a^4\right)'}{x^4+4a^4}dx$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|x^4+4a^4\right|\Big|_0^a=\frac{1}{4}\left(\ln 5a^4-\ln 4a^4\right)=\frac{1}{4}\ln\frac{5}{4}$$

ដូចនេះ $I_3=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{5}{4}\right)$ មិនអាស្រ័យ a ។

V- កំណត់ $f(x)$

សម្មតិកម្ម : f មានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$

$\forall x,y\in\mathbb{R}: f(x+y)=f(x)+f(y)+4xy$

- យក $x=0, y=0$ $\quad : f(0)=f(0)+f(x)$

$$0=f(0)$$

- $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

បើ $x=0 \Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=a\in\mathbb{R}$

- យក $y=h$

$f(x+h)=f(x)+f(h)+4xh$

$f(x+h)-f(x)=f(h)+4xh \quad :\forall h\neq 0$

$\Rightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(h)}{h}+4x$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)}{h}+4x\right)$$

$$f^{'}(x)=a+4x$$

$$f(x)=ax+2x^2+c$$

យក $x=0: f(0)=c\Rightarrow c=0$

$$f(x)=x^2+ax$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x+y)=f(x)+f(y)+4xy$

$$2(x+y)^2+a(x+y)=(2x^2+ax)+(2y^2+ay)+4xy$$

$2x^2+4xy+y^2+ax+ay=2x^2+ax+2y^2+ay+4xy$ ពិត

ដូច្នេះ $f(x)=2x^2+ax\ ,a\in\mathbb{R}$ ។

VI- គណនា $I=\int_C 3z^2dz$

1) C ជាភាគបន្ទាត់ភ្ជាប់ពី $(0,0)$ ទៅ $(2,4)$

តាង $z=x+iy$ តែ $y=2x$

$$\Rightarrow z=x+2xi=(1+2i)x$$

$$dz=(1+2i)dx$$

យើងបាន $I=\int_0^2 3(x+i2x)^2(1+2i)dx$

$$=\int_0^2 3(1+2i)^3x^2dx=(1+2i)^3\left[x^3\right]_0^2$$

$$=(1+6i-12-8i)(2)^3=-88-16i$$

2) C ជាភាគបន្ទាត់ភ្ជាប់ពី $(0,0)\longrightarrow(0,2)$ និង $(2,0)\longrightarrow(2,4)$

$$I=\int_C 3z^2dz=\int_{C_1}3z^2dz+\int_{C_2}3z^2dz$$

$$=\int_{z_o}^{z_B}3z^2dz+\int_{z_B}^{z_A}3z^2dz$$

$$=\left[z^3\right]_0^2+\left[z^3\right]_2^{2+4i}$$

$$=8+(2+4i)^3-8$$

$$=-88-16i$$ ។

3) C ផ្នែកប៉ារ៉ាបូល $y=x^2\ \ 0\le x\le 2$

$$z=x+iy=x+x^2i$$

$$\Rightarrow dz=(1+2xi)dx$$

$$I=\int_0^2 3\left(x+ix^2\right)^2(1+2xi)dx$$

$$=\int_0^2 3\left(x^2+2x^3i-x^4\right)(1+2xi)dx$$

$$=\int_0^2 3\left(x^2+4x^3i-5x^4-2x^5i\right)$$

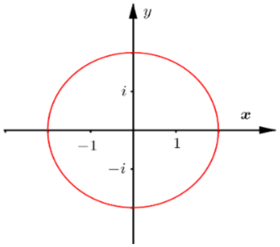
$$I=3\left[\frac{x^3}{3}+x^4i-x^5-\frac{x^6}{3}i\right]_0^2$$

$$I=3\left(\frac{8}{3}+16i-32-\frac{64}{3}i\right)$$

$$I=-88-16i$$

VII- គណនាអាំងតេក្រាល $I=\oint_C\frac{4z^3}{(z^2+1)(z^2-1)}dz$

ដែល $C:|z|\le 2$



$$f(z)=\frac{4z^3}{(z^2+1)(z^2-1)}$$

f មានន័យ លុះត្រាតែ $\begin{cases} z^2+1\neq 0 \\ z^2-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\neq \pm i \\ z\neq \pm 1\end{cases}$

$D_f=\mathbb{C}-\{\pm i,\pm 1\}$

C: $|z|\leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}\leq 2 \Leftrightarrow x^2+y^2\leq 4$

$$\Rightarrow I=\oint_C f(z)dz=2\pi i\left[\text{Res}\, f(-i)+\text{Res}\, f(i)+\text{Res}\, f(1)+\text{Res}\, f(-1)\right]$$

- $f(z)=\dfrac{4z^3}{(z-i)(z+i)(z-1)(z+1)}$

$$*\text{Res}\, f(-i)=\lim_{z\to -i}\frac{4z^3}{(z-i)(z-1)(z+1)}=\frac{-4i}{-2i(-1-1)}=1$$

$$*\text{Res}\, f(i)=\lim_{z\to i}\frac{4z^3}{(z+i)(z-1)(z+1)}=\frac{-4i}{2i(-1-1)}=1$$

$$*\text{Res}\, f(-1)=\lim_{z\to -1}\frac{4z^3}{(z-i)(z+i)(z-1)}=\frac{-4}{2(-1-1)}=1$$

$$*\text{Res}\, f(1)=\lim_{z\to 1}\frac{4z^3}{(z-i)(z+i)(z+1)}=\frac{4}{2(1+1)}=1$$

ដូចនេះ $I=\oint_C \dfrac{4z^3}{(z^2+1)(z^2-1)}dz$ គឺ $8\pi i$ ។

វិញ្ញាសាទី៣

I-ចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូលស្រាយបញ្ជាក់ថាគេមានសមភាព

$\sin A\sin B\sin C \le \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ ពិតជានិច្ច។

II-ចូរគណនាលីមីត $A=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\left(\dfrac{\pi}{2x+1}\right)$ និង $B=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\tan\left(\dfrac{\pi x}{2x+3}\right)$។

III-ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដើម្បីឱ្យចំនួន 2^n-1ចែកដាច់នឹង 7 ។

IV-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍មានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់

$x,y\in\mathbb{R}: f(x+y)=f(x)f(y)$។ ចូររក $f(x)$។

V-គេឱ្យអនុគមន៍ជាប់ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដោយដឹងថា $f(1000)=999$ និង

$f(x)f\left[f(x)\right]=1$គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ ។ចូររក $f(500)$ ។

VI-គេឱ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (u_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{\sqrt{1+u_n^2}}{u_n}, n\in\mathbb{N}\end{cases}$

ដែល $n=0,1,2,3,...$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_n=\tan\dfrac{\pi}{2^{n+2}}$ រួចទាញរក $\lim_{n\to\infty}\left(2^n u_n\right)$។

VII-គេឱ្យត្រីធា $f(x)=ax^2+bx+c$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} f(5)=5 \\ f(55)=5555 \\ f(555)=555555 \end{cases}$

ចូរស្រាយថា $f\left(\underbrace{555...555}_{(n)}\right)=\underbrace{555...555}_{(2n)}$ ។

VIII-គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$ មានក្រាប (C)

ក)សិក្សាអថេរភាព និង គូសខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ f ។

ខ)បង្ហាញថារង្វង់ $(\Omega): x^2+y^2=4$ ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់បីចំណុច ABC បង្កើតបានជាត្រីកោណសមង្ស័មួយ។

IX-ក) ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$ ។

ខ) **អនុវត្តន៍៖** ចូរគណនា $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln\left(1+\sqrt{3}\tan x\right)dx$ ។

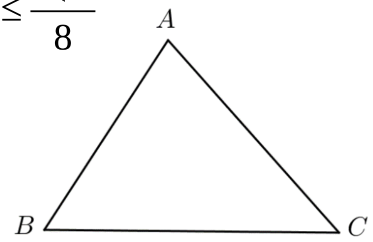
X-ចូរដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$\left(\cos y+e^y\cot x\right)dx+\left(e^y\ln\sin x-x\sin y\right)dy=0$ ។

XI-ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលក្រហម n និងប៊ូលខ្មៅ n ។គេចាប់យកប៊ូល 2 ព្រមគ្នាចេញពីក្នុងថង់នោះ។តាង P_n ជាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍គេចាប់បានប៊ូលពណ៌ដូចគ្នា។ចូរគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមភាព $\sin A\sin B\sin C \le \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$



-$\forall \Delta ABC$ មាន $\begin{cases}\sin A > 0\\ \sin B > 0\\ \sin C > 0\end{cases}$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\sin A + \sin B + \sin C \ge 3\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \sin A\sin B\sin C \le \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)^3 \quad (1)$$

-តាង $f\left(x\right) = \sin x \quad ,x \in \left(0,\pi\right)$

$$\Rightarrow f'\left(x\right) = \cos x$$

$$\Rightarrow f''\left(x\right) = -\sin x < 0$$

$\Rightarrow f\left(x\right)$ ជាអនុគមន៍ប៉ោងលើ $\left(0,\pi\right)$

តាមវិសមភាព Jensen :

$$\forall A,B,C \in \left(0,\pi\right): f\left(A\right) + f\left(B\right) + f\left(C\right) \le 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C \le 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

តែ $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)^3\le\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right)^3=\frac{3\sqrt{3}}{8}\qquad(2)$$

តាម $(1)\&(2)$: $\sin A\sin B\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$

ដូចនេះវិសមភាព $\sin A\sin B\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ពិត ។

II- គណនាលីមីត

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\left(\frac{\pi}{2x+1}\right)$$

តាម $\sin\theta=\sin(\pi-\theta)$

$$A=\lim_{x\to 0}1\frac{1}{x}\sin\left(\pi-\frac{\pi}{2x+1}\right)=\lim_{x\to 0}1\frac{1}{x}\sin\left(\frac{2\pi x}{2x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{2\pi x}{2x+1}\right)}{\left(\frac{2\pi x}{2x+1}\right)}\times\frac{2\pi x}{2x+1}\times\frac{1}{x}=2\pi$$

ដូចនេះ $A=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\left(\frac{\pi}{2x+1}\right)=2\pi$ ។

$$B=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\tan\left(\frac{\pi x}{2x+3}\right)$$

តាង $y=\frac{\pi x}{2x+3}-\frac{\pi}{2}=-\frac{3\pi}{4x+6}$

$\Rightarrow \dfrac{\pi x}{2x+3} = y + \dfrac{\pi}{2}$

កាលណា $x \to \infty, y \to 0$

$B = \lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to 0}} \dfrac{1}{x}\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+y\right)$

$= -\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\tan y} \times \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{4x+6}{3\pi}\right) = \dfrac{4}{3\pi}$

ដូចនេះ $B = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\tan\left(\dfrac{\pi x}{2x+3}\right) = \dfrac{4}{3\pi}$ ។

III-កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដើម្បីឱ្យ $2^n - 1$ចែកដាច់នឹង 7

បើ $2^n - 1$ចែកដាច់នឹង 7 នោះតាមលក្ខណៈសមមូលនៃវិធីចែក

យើងអាចសរសេរៈ

$2^n - 1 \equiv 0 \pmod 7$ ឬ $2^n \equiv 1 \pmod 7$ $\quad (1)$

មាន $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$

$\forall k \in n$: $2^{3k} \equiv 1 \pmod 7$ $\quad (2)$

តាម $(1)\&(2)$: $n = 3k$, $\forall k \in n$

ដូចនេះ $2^n - 1$ចែកដាច់នឹង 7 ។

IV-រក $f(x)$

f មានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$

មាន $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $f(x+y) = f(x)f(y)$ $\quad (1)$

ឧបមាថា $f(x) = c$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (1)

$(1) \Rightarrow c = c.c \Rightarrow c = c^2 \Rightarrow c(1-c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = 1 \end{cases}$

ដូចនេះ $f(x)=0, f(x)=1$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (1)។

ឧបមាថា f : មិនជាអនុគមន៍ថេរ

យក $x=0; y=0$ ជួសក្នុង (1)

$$f(0)=f(0)f(0)=f^2(0)$$

$$\Leftrightarrow f(0)\left(f(0)-1\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(0)=0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

- ករណី $f(0)=0$

តាម (1) យក $y=0$: $f(x)=f(x)f(0)=0$ (ថេរ) ជាចម្លើយដូចគ្នា

- ករណី $f(0)=1$

មាន $f(x+y)=f(x).f(y)$

យក $y=h$

$$f(x+h)=f(x).f(h)$$

$$\Rightarrow f(x+h)-f(x)=f(x)\left(f(h)-1\right)$$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង h : $h\neq 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f(x)\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$f'(x)=f(x)f'(0)$$

ដោយ f មានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$ នោះ $f'(0)=a\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=af(x)\Rightarrow f'(x)-af(x)=0$$

$$\left(y'-ay=0\right)\Rightarrow f(x)=ke^{ax} \quad ,a\in\mathbb{R}$$

យក $x=0$, $f(x)=k \Rightarrow k=1$

ដូចនេះ $f(x)=e^{ax}, a\in\mathbb{R}$ ។

V-រក $f(500)$

មាន $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(1000)=999 \\ f(x)f\left[f(x)\right]=1 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad (*) \end{cases}$$

- $f(x)f\left[f(x)\right]=1$

យក $x=1000$: $f(1000).f\left[f(1000)\right]=1$

$$\Rightarrow 999f(999)=1 \Rightarrow f(999)=\frac{1}{999}$$

តាង $g(x)=f(x)-500$

យក $\begin{cases} x=1000 \ : \ \text{g}(1000)=999-500=499>0 \\ x=999 \ : \ \text{g}(999)=\dfrac{1}{999}-500<0 \end{cases}$

ដោយ $g(1000).g(999)<0$

$$\exists c\in(999,1000) \quad | \, g(c)=0$$

$$\Leftrightarrow f(c)-500=0 \Rightarrow f(c)=500$$

យក $x=c$ ជួសក្នុង $(*)$: $f(c).f\left[f(c)\right]=1 \Rightarrow 500.f(500)=1$

ដូចនេះ $f(500)=\dfrac{1}{500}$ ។

VI-ស្រាយថា $u_n=\tan\dfrac{\pi}{2^{n+2}}$

មាន $\begin{cases} u_o = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{1+u_n^2}-1}{u_n} \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$

បើ $n=0 \Rightarrow u_o = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$ ពិត

ឧបមាថា $u_n = \tan\dfrac{\pi}{2^{n+2}}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតរហូតដល់តួទី $n+1$ គឺ $u_{n+1} = \tan\dfrac{\pi}{2^{n+3}}$

យើងមាន $u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{1+u_n^2}-1}{u_n}$

តែ $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}-1}{\tan\dfrac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{1-\cos\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{2.\sin^2\dfrac{\pi}{2^{n+3}}}{2\sin\dfrac{\pi}{2^{n+3}}\cos\dfrac{\pi}{2^{n+3}}} = \tan\frac{\pi}{2^{n+3}}$$

ដូចនេះ $u_n = \tan\dfrac{\pi}{2^{n+2}}$ ពិត។

VII-គេឱ្យ $f(x) = ax^2 + bx + c$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} f(5) = 55 \\ f(55) = 5555 \\ f(555) = 555555 \end{cases}$

ស្រាយថា $f\left(\underbrace{555...555}_{n}\right)=\underbrace{555...555}_{2n}$ (Polymonadic number)

រក a,b,c

តាមសម្មតិកម្មយើងបាន:

$$\begin{cases}5^2a+5b+c=55 & (1)\\ 55^2a+55b+c=5555 & (2)\\ 555^2a+555b+c=555555 & (3)\end{cases}$$

យក$(2)-(1)$ $:\left(55^2-5^2\right)a+50b=5500 \quad \Rightarrow 3000a+50b=5500$

$60a+b=110 \qquad (4)$

យក$(3)-(2)$

$\left(555^2-55^2\right)a+500b=550000\Rightarrow 500\times 610a+500b=550000$

$610a+b=1100 \qquad (5)$

យក $(5)-(4)$ $:$ $550a=990\Rightarrow a=\frac{990}{550}=\frac{9}{5}$ ជំនួសក្នុង (4) $\Rightarrow b=2$

ជួសក្នុង (1)

យើង បាន $c=0$

$$f(x)=\frac{9}{5}x^2+2x$$

តាង $x_n=\underbrace{555...555}_{n}=\frac{5}{9}\left(10^n-1\right)$

$$\Rightarrow x_{2n}=\underbrace{555...555}_{2n}=\frac{5}{9}\left(10^{2n}-1\right)$$

យើងនឹងស្រាយថា $f\left(x_n\right)=x_{2n}$?

$$f\left(x_n\right)=\frac{9}{5}\left[\frac{5}{9}.\left(10^n-1\right)\right]^2+\frac{10}{9}\left(10^n-1\right)$$

$$=\frac{5}{9}\left(10^n-1\right)^2+2.\frac{5}{9}\left(10^n-1\right)$$

$$=\frac{5}{9}\left(10^n-1\right)\left[\left(10^n-1\right)+2\right]$$

$$=\frac{5}{9}\left(10^{2n}-1\right)=x_{2n}$$

ដូចនេះ $f\left(x_n\right)=x_{2n}$ ពិត ។

VIII- ក) សិក្សាអថេរភាព និង គូសខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ f

មាន $f\left(x\right)=\dfrac{2}{1-x^2}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $1-x^2\neq 0\Rightarrow x\neq\pm 1$

-ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $D_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

-ទិសដៅអថេរភាព

$$f\left(x\right)=\frac{2}{1-x^2}\Rightarrow f'\left(x\right)=-\frac{2\left(1-x^2\right)'}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{4x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$$

បើ $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{4x}{\left(1-x^2\right)^2}=0\Rightarrow x=0$

-ចំណុចបរមា

ចំពោះ $x=0$ អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $f\left(0\right)=2$

-រកលីមីត និង អាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{2}{1-x^2} = \lim_{x\to -1^-} \frac{2}{(1+x)(1-x)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{2}{1-x^2} = \lim_{x\to -1^+} \frac{2}{(1+x)(1-x)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2}{1-x^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2}{(1+x)(1-x)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{1-x^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{(1+x)(1-x)} = -\infty$$

ហើយ $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{2}{1-x^2} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{2}{(1+x)(1-x)} = 0$

ដោយ $\lim_{x\to -1} f(x) = \pm\infty, \lim_{x\to 1} f(x) = \pm\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=-1 \,\&\, x=1$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃខ្សែកោង (C) ហើយ $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{2}{1-x^2} = 0$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $y=0$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

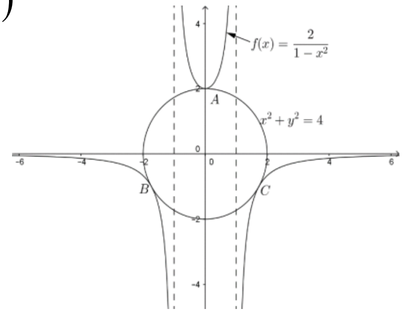
-តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

-សង់ក្រាប $f\left(x\right)=\dfrac{2}{1-x^2}$

វាជាអនុគមន៍គូរព្រោះ $f\left(-1\right)=\dfrac{2}{1-\left(-x\right)^2}=f\left(x\right),\forall x\in D_f$

នាំឱ្យអ័ក្ស $\left(oy\right)$ ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃក្រាប $\left(C\right)$



ខ) បង្ហាញថា សមីការរង្វង់ $\left(\Omega\right): x^2+y^2=4$ ប៉ះនឹងខ្សែកោង $\left(C\right)$ ត្រង់បីចំណុច ABC បង្កើតបានជាត្រីកោណសមង្ស័មួយ

មាន $y=f\left(x\right)=\dfrac{2}{1-x^2}$ និង $\left(\Omega\right): x^2+y^2=4$

គេបានសមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង $\left(C\right)$ និង $\left(\Omega\right)$

$$x^2+\left(\frac{2}{1-x^2}\right)^2=4\Leftrightarrow x^2\left(1-x^2\right)^2+4=4\left(1-x^2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(1-2x^2+x^4\right)+4=4\left(1-2x^2+x^4\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x^4+x^6+4-4+8x^2-4x^4=0$$

$$\Leftrightarrow x^6-6x^4+9x^2=0\Leftrightarrow x^2\left(x^4-6x^2+9\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x^2-\sqrt{3}\right)^2=0 \Leftrightarrow x^2\left(x-\sqrt{3}\right)^2\left(x+\sqrt{3}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases}$$

ដូចនេះ (Ω) ប៉ះ (C) ត្រង់ចំនុច ABC ដែលមានកូរអដោនេ

$A(0,2), B\left(-\sqrt{3},-1\right), C\left(\sqrt{3},-1\right)$ ។

-ផ្ទៀតផ្ទាត់ថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស

មាន

$$\begin{cases} AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}=\sqrt{\left(-\sqrt{3}-0\right)^2+\left(-1-2\right)^2}=2\sqrt{3} \\ AC=\sqrt{\left(x_C-x_A\right)^2+\left(y_C-y_A\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-0\right)^2+\left(-1-2\right)^2}=2\sqrt{3} \\ BC=\sqrt{\left(x_C-x_B\right)^2+\left(y_C-y_B\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\left(-\sqrt{3}\right)\right)^2+\left(-1-(-1)\right)^2}=2\sqrt{3} \end{cases}$$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

IX ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$

យក $I=\int_a^b f(x)dx$

តាង $z=a+b-x \Rightarrow x=a+b-z$

$\Rightarrow dx=-dz$

x	a	b
z	b	a

យើងបាន $I=\int_b^a f(a+b-z)(-dz)$

$$I=-\int_{b}^{a} f\left(a+b-z\right)dz$$

$$I=\int_{a}^{b} f\left(a+b-z\right)dz$$

$$I=\int_{a}^{b} f\left(a+b-x\right)dx$$

ដូចនេះ $\int_{a}^{b} f\left(x\right)dx=\int_{a}^{b} f\left(a+b-x\right)dx$ ។

ខ) គណនា $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\ln\left(1+\sqrt{3}\tan x\right)dx$

តាមលក្ខណបានសម្រាយខាងលើ $\int_{a}^{b} f\left(x\right)dx=\int_{a}^{b} f\left(a+b-x\right)dx$

យើងអាចសរសេរ:

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\ln\left(1+\sqrt{3}\tan\left(0+\frac{\pi}{3}-x\right)\right)dx$$

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\ln\left(1+\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right)dx$$

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\ln\left(1+\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}-\tan x}{1+\sqrt{3}\tan x}\right)dx$$

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}\tan x+3-\sqrt{3}\tan x}{1-\sqrt{3}\tan x}\right)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\ln\left(\frac{4}{1+\sqrt{3}\tan x}\right)dx$$

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left[\ln 4-\ln\left(1+\sqrt{3}\tan x\right)\right]dx$$

$$I=\ln 4\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}dx-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\sqrt{3}\tan x\right)dx$$

$$I = \ln 4\left(\frac{\pi}{3} - 0\right) - I$$

$$2I = \frac{2\pi}{3}\ln 2$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{3}\ln 2$$

ដូចនេះ $I = \frac{\pi}{3}\ln 2$ ។

X-ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$\left(\cos y + e^{x}\cot x\right)dx + \left(e^{y}\ln\left(\sin x\right) - x\sin y\right)dy = 0$$

សមីការខាងលើមានទម្រង់ជា ៖ $P\left(x,y\right)dx + Q\left(x,y\right)dy = 0$

ដែល $\begin{cases} P\left(x,y\right) = \cos y + e^{y}\cot x \\ Q\left(x,y\right) = e^{y}\ln\left(\sin x\right) - x\sin y \end{cases}$

មាន $\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\sin y + e^{y}\cot x \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = e^{y}\dfrac{\left(\sin x\right)'}{\sin x} - \sin y = -\sin y + e^{y}\cot x \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin y + e^{y}\cot x$$

នោះអង្គទី១ នៃសមីការគឺជាឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុបនៃអនុគមន៍ $Z = f\left(x,y\right)$

ដែល $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 0 \Rightarrow z = c \quad ,c \in \mathbb{R}$

និង $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos y + e^{y}\cot x \quad (1) \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{y}\ln(\sin x) - x\sin y \quad (2) \end{cases}$

តាម (1) : $\partial z = \left(\cos y + e^{y}\cot x\right)\partial x$

$z = \int \left(\cos y + e^{y}\cot x\right)dx$

$z = x\cos y + e^{y}\ln(\sin x) + \varphi(y)$

$\Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial y} = -x\sin y + e^{y}\ln(\sin x) + \varphi'(y) \quad (3)$

តាម $(3)\&(2)$ យើងទាញ :

$-x\sin y + e^{y}\ln\sin x + \varphi'(y) = e^{y}\ln\sin x - x\sin y$

$\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c_o$ ថេរ

$\Rightarrow z = x\cos y + e^{y}\ln\sin x + c_o$

តែ $z = c$

ដូចនេះចម្លើយនៃសមីការ គឺ:

$x\cos y + e^{y}\ln\sin x = k, k = c - c_o$ ។

XI- គណនា $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$

P_n : ជាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ចាប់ ប៊ូល ២ បានប៊ូលមានពណ៌ដូចគ្នា

-តាង A ជាព្រឹត្តិកាណ៍ចាប់ប៊ូល ២ បានប៊ូលមានពណ៌ខុសគ្នា

$\Rightarrow P_n = 1 - P(A)$

- $P(A) = \dfrac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}} = \dfrac{n(A)}{n(S)}$

-ចំនួនករណីអាច

$$n(S)=C_{2n}^{2}=\frac{(2n)!}{2!(2n-2)!}=\frac{(2n-2)!(2n-1)2n}{2(2n-2)!}=n(2n-1)$$

-ចនួនករណីស្រប $n(A)=C_n^1C_n^1=n^2$

$$\Rightarrow P_n=1-\frac{n}{2n-2}=\frac{n-1}{2n-1}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{2n-1}\right)=\frac{1}{2}$ ។

វិញ្ញាសាទី៤

I-ចំពោះត្រីកោណ ABC ដែលមានមុំក្នុងជាមុំស្រួចចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា សមភាព $\tan A\tan B\tan C \geq 3\sqrt{3}$ ពិតជានិច្ច។

II-ចូរគណនាលីមីត $A=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x+3\right)\cos\left(\dfrac{\pi x}{2x+3}\right)$ និង

$$B=\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+...+\sqrt{x+\sqrt{x+6}}}}}-3}{x-6}$$ (n ឬសការេ)

III-ចូរកំណត់ចំនួនពិត a ដោយដឹងថាមាន $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \geq 0$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=a \\ x_1+2^3x_2+3^3x_3+4^3x_4+5^3x_5=a^2 \\ x_1+2^5x_2+3^5x_3+4^5x_4+5^5x_5=a^3 \end{cases}$

VI-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍មានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$\forall x,y\in\mathbb{R}: f\left(x+y\right)=e^{2xy}f\left(x\right)f\left(y\right)$។ ចូររក $f\left(x\right)$ ។

V-គេឱ្យ m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់

$\dfrac{m}{n}=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+...-\dfrac{1}{1318}+\dfrac{1}{1319}$។

ចូរស្រាយថា m ចែកដាច់នឹង 9 ។

VI-គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\displaystyle\int_0^a\frac{x^4dx}{x^n+a^n}$ $,a>0$ $,n\in\mathbb{N}$ ។

១) កំណត់តម្លៃ n ដើម្បីឱ្យ I_n មានតម្លៃមិនអាស្រ័យនិង a។

២) គណនាតម្លៃ I_n ចំពោះតម្លៃ n ទើបរកឃើញខាងលើ។

VII-គេឱ្យផលបូក $S_n = 1+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ ដែល $n\in\mathbb{N}$ ។

១)គ្រប់ $k\in\mathbb{N}$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}} \le \int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}$ ។

២) ទាញឱ្យបានថា $\int_1^{n+1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \le S_n \le 1+\int_1^{n}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ ។

៣) រកលីមីត $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{S_n}{\sqrt[3]{n}}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

I- ស្រាយថា $\tan A\tan B\tan C \ge 3\sqrt{3}$

មាន $A+B+C=\pi \Rightarrow A+B=\pi-C$

$$\tan(A+B)=\tan(\pi-C)$$

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$$

$$\tan A+\tan B=-\tan C(1-\tan A\tan B)$$

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C \quad (1)$$

តាមវិសមភាព Cauchy

$$\tan A+\tan B+\tan C \ge 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C} \quad (2)$$

យក (1) ជួស (2)

$$\tan A\tan B\tan C \ge 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}$$

$$(\tan A\tan B\tan C)^3 \ge 27\tan A\tan B\tan C$$

$$\tan A\tan B\tan C \ge \sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $\tan A\tan B\tan C \ge \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ ពិត។

II- គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$A = \lim_{x\to\infty}(2x+3)\cos\left(\frac{\pi x}{2x+3}\right)$$

តាង $y = \frac{\pi x}{2x+3} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi x - \pi(2x+3)}{2(2x+3)} = -\frac{3\pi}{2(2x+3)}$

$$\Rightarrow 2x+3 = \frac{-3\pi}{2y} \quad \& \quad \frac{\pi x}{2x+3} = y + \frac{\pi}{2}$$

កាលណា $x \to \infty, y \to 0$

$$A = \lim_{y\to 0}\left(-\frac{3\pi}{2y}\right)\cos(\pi + y)$$

$$A = \frac{3\pi}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = \frac{3\pi}{2}$$

$$B = \lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x+3}}}} - 3}{x-6}$$

តាង $f_n(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x+3}}}} - 3$

$$\overline{f_n}(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x+3}}}} + 3$$

$$\Rightarrow f_n(x).\overline{f_n}(x) = x + \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x+3}}}} - 9$$

$$f_n(x).\overline{f_n}(x)=(x-6)+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+...+\sqrt{x+3}}}}-3$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_n(x)}{(x-6)}=\frac{1}{\overline{f_n}(x)}+\frac{f_{n-1}(x)}{x-6}.\frac{1}{\overline{f_n}(x)}$$

យក $u_n=\lim_{x\to 6}\frac{f_n(x)}{x-6}=B$

$$\Rightarrow u_n=\lim_{x\to 6}\left(\frac{1}{\overline{f_n}(x)}+\frac{f_{n-1}(x)}{x-6}.\frac{1}{\overline{f_n}(x)}\right)$$

$$u_n=\frac{1}{\overline{f_n}(6)}+u_{n-1}.\frac{1}{\overline{f_n}(6)}$$

តែ $\overline{f_n}(6)=3+3=6$

$$u_n=\frac{1}{6}u_{n-1}+\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow u_{n+1}=\frac{1}{6}u_n+\frac{1}{6}$$

គុណ 6^{n+1} យើងបាន:

$$6^{n+1}u_{n+1} = 6^n u_n + 6^n$$

$$\left(6^{n+1}u_{n+1} - 6^n u_n\right) = 6^n$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(6^{k+1}u_{k+1} - 6^k u_k\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(6^n\right)$$

$$6^n u_n - 6u_1 = 6 + 6^2 + 6^3 + ... + 6^{n-1}$$

$$6^n u_n - 6u_1 = 6.\frac{6^{n-1}-1}{6-1}$$

$$u_n = \frac{1}{5} - \frac{6}{5.6^n} + \frac{6u_1}{6^n}$$

តែ $u_1 = \dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6} = \dfrac{1}{6}$ $\Rightarrow u_n = \dfrac{1}{6^n} - \dfrac{1}{5.6^{n-1}} + \dfrac{1}{5}$

ដូចនេះ $B = \lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+...+\sqrt{x+3}}}}-3}{x-6}$

$= \dfrac{1}{6^n} - \dfrac{1}{5.6^{n-1}} + \dfrac{1}{5}$ ។

III-កំណត់គ្រប់ចំនួនពិត a ដោយដឹងថា

មាន $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=a \\ x_1+2^3x_2+3^3x_3+4^3x_4+5^3x_5=a^2 \\ x_1+2^5x_2+3^5x_3+4^5x_4+5^5x_5=a^3 \end{cases} \quad \begin{array}{|c} a^2 \\ -2a \\ 1 \end{array}$$

$\left(a^2-2a+1\right)x_1+2\left(a^2-8a+16\right)x_2+3(a^2-18a+81)x_3+$

$4\left(a^2-32a+265\right)x_4+5\left(a^2-50a+625\right)x_5=0$

$(a-1)^2x_1+2(a-4)^2x_2+3(a-9)^2x_3+4(a-16)^2x_4+5(a-25)^2x_5=0$

តាមសមីការនេះយើងទាញបាន ៖

$a=1, x_1=1, x_2=x_3=x_4=x_5=0$

$a=4, x_2=1, x_1=x_3=x_4=x_5=0$

$a=9, x_3=1, x_1=x_2=x_4=x_5=0$

$a=16, x_4=1, x_1=x_2=x_3=x_5=0$

$a=25, x_5=1, x_1=x_2=x_3=x_4=0$

IV-រក $f(x)$

មាន f មានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$

-$\forall x,y\in\mathbb{R}: f(x+y)=e^{2xy}f(x)f(y) \quad (1)$

-រកចម្លើយពិសេស

តាម (1) យើងសង្កេតឃើញថា $f(x)=0$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ជានិច្ច $\forall x\in\mathbb{R}$

-ករណី $f(x)\neq 0$

យក $x=0, y=0$ ជួសក្នុង (1)

$\Rightarrow f(0)=1.f^2(0)\Leftrightarrow f(0)-f^2(0)=0$

$\Leftrightarrow f(0)(1-f(0))=0\Rightarrow f(0)=0$ មិនយក ឬ $f(0)=1$

$\Rightarrow f(0)=1$

ម្យ៉ាងទៀត យក $y=h\in\mathbb{R}$ ជួសក្នុង (1)

$f(x+h)=e^{2xh}f(x)f(h)$

$f(x+h)-f(x)=e^{2xh}f(x)f(h)-f(x)$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{e^{2xh}f(x)f(h)-f(x)}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x)\left(e^{2xh}f(h)-1\right)}{h}$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f(x)\lim_{h\to0}\frac{e^{2xh}f(h)-1}{h}\quad(2)\ ,\ f(0)=1$$

រក $l=\lim_{h\to0}\frac{e^{2xh}f(h)-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\left(e^{2xh}-1\right)f(h)+f(h)-1}{h}$

$$l=\lim_{h\to0}\frac{\left(e^{2xh}-1\right)}{h}\times2x.f(h)+\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$l=2x+f'(0)$, តាង $f'(0)=a\in\mathbb{R}$

$=2x+a$

តាម (2): $f'(x)=f(x)(2x+a)$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x + a \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}dx = (2x+a)dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int (2x+a)dx$$

$$\ln|f(x)| = x^2 + ax + c \Rightarrow f(x) = \pm e^c.e^{x^2+ax}$$

$$\Rightarrow f(x) = ke^{x^2+ax}$$

យក $x = 0 : f(0) = k \Rightarrow k = 1$

ដូចនេះ $f(x) = e^{x^2+2a}$ ។

ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$f(x) = e^{x^2+ax}, a \in \mathbb{R}$$

$$f(x+y) = e^{2xy} f(x) f(y)$$

$e^{(x+y)^2+a(x+y)} = e^{2xy}.e^{x^2+ax}.e^{y^2+ay} = e^{(x+y)^2+a(x+y)}$ ពិត។

V- ស្រាយថា m ចែកដាច់នឹង (1979)

មាន $m \& n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\frac{m}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{1318}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{1319}\left(\frac{1}{k}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{659}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{1319}\left(\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=1}^{659}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{659}\left(\frac{1}{k}\right)+\sum_{k=660}^{1319}\left(\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=1}^{659}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\frac{m}{n}=\sum_{k=660}^{1319}\left(\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\dots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$$

$$=\left(\frac{1}{660}+\frac{1}{1319}\right)+\left(\frac{1}{661}+\frac{1}{1318}\right)+\dots+\left(\frac{1}{989}+\frac{1}{990}\right)$$

$$=\frac{1979}{660\times1319}+\frac{1979}{661\times1318}+\dots+\frac{1979}{989\times990}$$

$$=1979\left(\frac{1}{660\times1319}+\frac{1}{661\times1318}+\dots+\frac{1}{989\times990}\right)$$

ដូចនេះ m ចែកដាច់នឹង 1979 ។

VI-1. រក n ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនិង a

មាន $I_n=\int_0^a\frac{x^4}{x^n-a^n}dx\ \ ,a>0\ ,n\in\mathbb{N}$

តាង $x=at\Rightarrow dx=a.dt$

បើ $\begin{cases}x=0 & \Rightarrow t=0\\ x=a & \Rightarrow t=1\end{cases}$

យើងមាន $I_n=\int_0^1 \frac{(at)^4 a.dt}{(at)^n+a^n}=\int_0^1 \frac{a^5.dt}{a^n(t^n+1)}=\int_0^1 a^{5-n}\frac{dt}{t^n+1}$

ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនិង a លុះត្រាតែ $5-n=0\Rightarrow n=5$

ដូចនេះ $n=5$ ។

2.គណនា I_n ចំពោះ n ទើបរកឃើញ

ចំពោះ $n=5$ យើងបាន ៖

$$I_5=\int_0^a \frac{x^4}{x^5+a^5}dx$$

$$=\frac{1}{5}\int_0^a \frac{(x^5+a^5)'}{x^5+a^5}dx$$

$$=\frac{1}{5}\Big[\ln\left|x^5+a^5\right|\Big]_0^a$$

$$=\frac{1}{5}(\ln 2\text{a}^5-\ln a^5)$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left(\frac{2a^5}{a^5}\right)=\frac{1}{5}\ln 2$$

ដូចនេះ $I_5=\frac{1}{5}\ln 2$ ។

VI- 1. $\forall k\in\mathbb{N}$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}}\le\int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}\le\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}$

$\forall k\in\mathbb{N}$: យក $x\in[k,k+1]$

$\Leftrightarrow k \le x \le k+1$

$\Leftrightarrow k^2 \le x^2 \le (k+1)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{k^2} \le \sqrt[3]{x^2} \le \sqrt[3]{(k+1)^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}$

តាមវិសមភាពអាំងតេក្រាលយើងបានៈ

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}}[k+1-k] \le \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}[k+1-k]$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}} \le \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}} \le \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}$ ។

2.ទាញថា $\int_1^{n+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \le S_n \le 1 + \int_1^{n} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{9}} + ... + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$$

តាមសម្រាយខាងលើយើងមានៈ

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}} \le \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}} \quad (1)$$

តាម (1) យើងទាញបាន

$$\int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}\le\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\le\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}\right)$$

$$\int_1^{n+1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}\le S_n \quad (2)$$

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}}\le\int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}}\right)\le\sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

$$S_n-1\le\int_1^{n}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$S_n\le 1+\int_1^{n}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \quad (3)$$

តាម $(2)\&(3)$ យើងបាន៖ $\int_1^{n+1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}\le S_n\le 1+\int_1^{n}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

ដូចនេះ $\int_1^{n+1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}\le S_n\le 1+\int_1^{n}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ ពិត។

3. រក $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{S_n}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$

មាន $\int_1^{n+1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}\le S_n\le 1+\int_1^{n}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \quad (4)$ ដោយៈ

$$\int_1^{n+1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\int_1^{n+1}x^{-\frac{2}{3}}dx=\left[\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\right]_1^{n+1}=\left[3\sqrt[3]{x}\right]_1^{n+1}=3\left(\sqrt[3]{n+1}-1\right)$$

និង $\int_1^{n}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\left[3\sqrt[3]{x}\right]_1^{n}=3\left(\sqrt[3]{n}-1\right)$

តាម $(4)\Rightarrow 3\left(\sqrt[3]{n+1}-1\right)\le S_n\le 1+3\left(\sqrt[3]{n}-1\right)$

ចែកអង្គទាំងបី និង $\sqrt[3]{n}$ យើងបាន

$$3\left(\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\le\frac{S_n}{\sqrt[3]{n}}\le\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+3\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$$

$$3\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\le\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{\sqrt[3]{n}}\le\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+3\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right]$$

$$3\le\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{\sqrt[3]{n}}\le 3$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{\sqrt[3]{n}}=3$ ។

វិញ្ញាសាទី៥

I-ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

ក) $1^2+3^2+5^2+...+\left(2n-1\right)^2=C_{2n+1}^3$

ខ) $C_{n+1}^{p+1}\geq 2\sqrt{\dfrac{n-p}{p+1}}C_n^p$

II-ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1\dfrac{\arctan x}{1+x}dx$ និង

$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\left(\cos x-\sin x\right)\cos x}{1+\sin 2x}dx$ ។

III-គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត $\left(u_n\right)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$\begin{cases}u_0=3\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^2-2u_n+2}{\left(u_n-1\right)^2}\end{cases}$ ដែល $n=0,1,2,3,....$ ។

គណនា $\left(u_n\right)$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

VI-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍មានដេរីវេទីពីរត្រង់ x_0 ។

ចូរស្រាយថាបើ $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f\left(x\right)}{\left(x-x_o\right)^3}$ ជាចំនួនពិតនោះគេបានៈ

$\begin{cases}f\left(x_o\right)=0\\ f'\left(x_o\right)=0\\ f''\left(x_o\right)=0\end{cases}$

អនុវត្តន៏៖កំណត់ចំនួនពិត a,b,c និង l ដោយដឹងថា

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+a+bx+cx^2}{x^3}=l$ ។

V-ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+y=x^3e^x$ ។

VI-គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^1\frac{(2x)^n+\left(1-x^2\right)^n}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}dx$;

$n=0,1,2,3,...$ ។

១) គណនា I_o និង I_1 រួចស្រាយថា $\left(I_n\right)$ ជាស្វ៊ីតចុះ។

២)ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n+2} រួចគណនាផលគុណ $P_n=I_n.I_{n+1}$ ជាអនុគមន៏នៃ n ។

៣) គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$ និង $\lim_{n\to+\infty}\left(nI_n^2\right)$ ។

៤) រករូបមន្តគណនាសម្រាប់គណនាតួ I_n ។

VII-គ្រូបង្រៀនគណិតវិទ្យាម្នាក់មានប្រធានលំហាត់គណិតវិទ្យាចំនួន12 លំហាត់សម្រាប់ឱ្យសិស្សជ្រើសរើសយកសម្រាប់ធ្វើការប្រឡងតេស្ត សម្ថភាព។សិស្សម្នាក់អាចមានសិទ្ធជ្រើសរើសយកលំហាត់ 3 ក្នុងចំណោម លំហាត់12។គេដឹងថាមានលំហាត់ពីរ X និង Y បើបេក្ខជនជ្រើសរើស យកគឺត្រូវយកទាំងពីរ ហើយបើអត់ជ្រើសរើសយកគឺអត់ទាំងពីរ។

១-តើបេក្ខជនប្រឡងអាចជ្រើសរើសលំហាត់បានប៉ុន្មានរបៀបខុសគ្នា?

២-បេក្ខជនម្នាក់បានជ្រើសរើសយកលំហាត់ 3 ដើម្បីធ្វើការប្រឡង។ចូរ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៏៖

ក) A: ជ្រើសរើសបានលំហាត់ដែលគ្មាន X និង Y ។

ខ) B : ជ្រើសរើសបានលំហាត់ដែល X និង Y ។

ដំណោះស្រាយ

I-ស្រាយបញ្ជាក់ថា

ក. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=C_{2n+1}^3$

យើងមានៈ

$$\sum_{k=1}^{n}(k)=1+2+3+\ldots+\mathrm{n}=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(k^2\right)=1^2+2^2+3^2+\ldots+\mathrm{n}^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

តាង $S_n=1^2+2^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\sum_{k=1}^{n}\left[(2k-1)^2\right]$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[4k^2-4k+1\right]=4\sum_{k=1}^{n}\left(k^2\right)-4\sum_{k=1}^{n}(k)+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=4.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4.\frac{n(n+1)}{2}+n=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)+n$$

$$=\frac{n}{3}\left[2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\right]=\frac{n}{3}\left[4n^2+6n+2-6n-6+3\right]$$

$$=\frac{n}{3}\left(4n^2-1\right)=\frac{n}{3}(2n-1)(2n+1)$$

$S_n=\frac{n}{3}(2n+1)(2n-1) \quad (1)$ និង

$$C_{2n+1}^3=\frac{(2n+1)!}{3!(2n+1-3)!}=\frac{(2n+1)!}{6(2n-2)!}=\frac{(2n-2)!(2n-1)(2n)(2n+1)}{6(2n-2)!}$$

$$C_{2n+1}^{3}=\frac{(2n+1)(2n-1)}{3}\quad(2)$$

តាម $(1)\&(2)$ $:\sum_{k=1}^{n}\left[(2k-1)^{2}\right]=C_{2n+1}^{3}$ ពិត

ដូចនេះ $1^{2}+3^{2}+5^{2}+...+(2n-1)^{2}=C_{2n+1}^{3}$។

ខ. $C_{n+1}^{p+1}\geq 2\sqrt{\frac{n-p}{p+1}}.C_{n}^{p}$

មាន $C_{n}^{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}\quad(1)$

$$-C_{n+1}^{p+1}=\frac{(n+1)!}{(p+1)!(n+1-p-1)!}$$

$$=\frac{(n+1)}{(p+1)}\times\frac{n!}{p!(n-p)!}\quad(2)$$

យក (2) ចែកនឹង (1) យើងបាន

$$\frac{C_{n+1}^{p+1}}{C_{n}^{p}}=\frac{n+1}{p+1}\quad(3)$$

យើងនឹងស្រាយថា

$$\frac{n+1}{p+1}\geq 2\sqrt{\frac{n-p}{p+1}}\ ?\ \forall n,p\in\mathbb{N}\ ,n>p$$

ឧបមាថា $\frac{n+1}{p+1}\geq 2\sqrt{\frac{n-p}{p+1}}$ ពិត

តាង $\begin{cases}x=n+1\\ y=p+1\end{cases}\Leftrightarrow x-y=n-p$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} \geq 2\sqrt{\frac{x-y}{y}} \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} \geq 4\left(\frac{x-y}{y}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq 4y(x-y)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 \geq 0$$

$\Leftrightarrow (x-2y)^2 \geq 0$ ពិត។

II- គណនាអាំងតេក្រាល

-$I = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x+1} dx$ តាម $\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$

តាង $\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = \frac{1}{x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x^2} \\ v = \ln(x+1) \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \left[\arctan x . \ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{1+x^2} dx$$

$$I = \frac{\pi}{4}.\ln 2 - K \quad (1)$$

យក $K = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{1+x^2} dx$

តាង $x = \frac{1-t}{1+t}$ នោះ $dx = \frac{-1-t-1+t}{(1+t)^2} dt = \frac{-2dt}{(1+t)^2}$

បើ $x = 0$ នោះ $t = 1$

បើ $x = 1$ នោះ $t = 1$

$$\Rightarrow K=\int_1^0 \frac{\ln\left(\frac{1-t}{1+t}+1\right)}{\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2+1}\times\left(-\frac{2dt}{1+t^2}\right)$$

$$K=2\int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1-t+1+t}{1+t}\right)}{2\left(1+t^2\right)}dt$$

$$K=\int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{2}{1+t}\right)}{\left(1+t^2\right)}dt$$

$$K=\int_0^1 \frac{\ln 2-\ln(1+t)}{1+t^2}dt$$

$$K=\ln 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}-\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt$$

តែ $K=\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{1+x^2}dx$ យើងបាន

$$2K=\ln 2\left[\arctan t\right]_0^1=\frac{\pi}{4}\ln 2$$

$\Rightarrow K=\frac{\pi}{8}\ln 2$ ជំនួសក្នុង (1) យើងបាន

$$I=\frac{\pi}{4}\ln 2-\frac{\pi}{8}\ln 2=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

ដូចនេះ $I=\int_0^1 \frac{\arctan x}{x+1}dx=\frac{\pi}{8}\ln 2$។

- $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x-\sin x)\cos x}{1+\sin 2x}dx$

យើងមាន $\begin{cases}\sin 2x=2\sin x\cos x\\ 1=\sin^2 x+\cos^2 x\end{cases}$

$\Rightarrow 1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2$

$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\frac{(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}dx$

តាង $u=\cos x$ នោះ $dx=-\sin xdx$

$dv=\frac{\cos x-\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}$ នោះ $v=-\frac{1}{\sin x+\cos x}$

$\Rightarrow J=\left[-\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

$J=1+K$ ដែល $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin+\cos x}dx$

យក $L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

$K+L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}\quad(1)$

$L-K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\left[\ln|\sin x+\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0\quad(2)$

តាម (1) និង (2)

$$:\begin{cases} K+L=\dfrac{\pi}{2} \\ L-K=0 \quad \times(-1) \end{cases}$$

$$2K=\frac{\pi}{2} \Rightarrow K=\frac{\pi}{4}$$

ដូចនេះ $J=1-\dfrac{\pi}{4}$

III- គណនា u_n

មាន $\begin{cases} u_o=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^2-2u_n+2}{(u_n-1)^2} \end{cases} \quad , \quad n=0,1,2,3....$

ដោយ $u_{n+1}=\dfrac{(u_n-1)^2+1}{(u_n-1)^2}=1+\dfrac{1}{(u_n-1)^2}$

$$\Rightarrow u_{n+1}-1=\frac{1}{(u_n-1)^2}$$

$$\Rightarrow (u_{n+1}-1)(u_n-1)^2=1 \quad (1)$$

ដោយ $\forall n=0,1,2,3,....,u_n>1$

បំពាក់ $\ln$ អង្គសង់ខាងនៃ សមីការ (1) យើងបាន

$$\ln(u_{n+1}-1)+2\ln(u_n-1)=0 \quad (2)$$

តាង $v_n=\ln(u_n-1) \Rightarrow v_{n+1}=\ln(u_{n+1}-1)$

តាម (2) : $v_{n+1}+2v_n=0 \Rightarrow v_{n+1}=-2v_n$

$\Leftrightarrow (v_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=-2$ និង

$$v_o=\ln(u_o-1)=\ln 2$$

$v_n = v_o . q^n = (-2)^n . \ln 2$ តែ $v_n = \ln(u_n - 1)$

$\Rightarrow \ln(u_n - 1) = (-2)^n . \ln 2 = \ln 2^{(-2)^n}$

$\Rightarrow u_n - 1 = 2^{(-2)^n}$

ដូចនេះ $u_n = 1 + 2^{(-2)^n}$ ។

IV- ស្រាយថាបើ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^3}$ ជាចំនួនពិតនោះ $\begin{cases} f(x_0) = 0 \\ f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) = 0 \end{cases}$

ដោយ $f(x)$ មានដេរីវេទី ២ ត្រង់ x_0 នោះ f, f', f'' សុទ្ធតែជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ x_0

យើងបាន $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^3} \times (x - x_0)^3$

តែតាមបម្រាប់ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^3} = l \quad , l \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x_0) = l \times 0 = 0$

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}$ តែ $f(x_0) = 0$

យើងបាន $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)}$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^3} \times (x - x_0)^2$$

$$= l \times 0 = 0$$

- $f''(x_0)=\lim_{x\to x_0} f''(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{(x-x_0)}$ តែ $f'(x_0)=0$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}}{(x-x_0)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^2}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^3}\times(x-x_0)$$

$$=l\times 0=0$$

-កំណត់ចំនួនពិត a,b,c និង l

យើងមាន $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+a+bx+cx^2}{x^3}=l$

តាមសម្រាយខាងលើយើងទទួលបាន:

$f(x)=e^x+a+bx+cx^2$ នោះ $f(0)=e^0+a=0\Rightarrow a=-1$

$f'(x)=e^x+b+2cx$ នោះ $f'(0)=e^0+b=0\Rightarrow b=-1$

$f''(x)=e^x+2c$ នោះ $f''(0)=e^0+2c\Rightarrow c=-\frac{1}{2}$

-ចំពោះ $a=-1,b=-1,c=-\frac{1}{2}$ យើងបាន ៖

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-\frac{1}{2}x^2-1}{x^3}$$ រាង $\left(\frac{0}{0}\right)$

តាមវិធានឡូពីតាល់

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{3x^2}$ រាង $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{6x}$ រាង $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\dfrac{e^x}{6}=\dfrac{1}{6}$

ដូចនេះ $a=-1, b=-1, c=-\dfrac{1}{2}$ និង $l=\dfrac{1}{6}$ ។

V-ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$y''+y=x^3e^x \quad (1)$

តាង $y_G=z.e^x$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់(1) នោះ

$y''_G+y_G=x^3e^x \quad (2)$

តែ $y_G=z.e^x \Rightarrow y'_G=(z'+z)e^x$

$\Rightarrow y''_G=(z''+z')e^x+(z'+z)e^x=(z''+2z'+z)e^x$

យក y''_G & y_G ជំនួសក្នុង (2) យើងបាន

$(z''+2z'+z).e^x+z.e^x=x^3.e^x$

$(z''+2z'+2z).e^x=x^3.e^x$

$z''+2z'+2z=x^3 \quad (3)$

-រកចម្លើយពិសេស z_P នៃ(4)

ដែល $z''_P+2z'_P+2z_P=x^3 \quad (4)$

តាម(4)បញ្ជាក់ថា z_P ជាពហុធាដែលមានរាង

$z_P=ax^3+bx^2+cx+d$

ដោយ $z'_P=3ax^2+2bx+c$

$$z_P'' = 6ax + 2b$$

$$(4): 6ax + 2b + 6ax^2 + 4bx + 2c + 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 2d = x^3$$

$$2ax^3 + (6a + 2b)x^2 + (6a + 4b + 2c)x + (2b + 2c + 2d) = x^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 6a + 2b = 0 \\ 6a + 4b + 2c = 0 \\ 2b + 2c + 2d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{-3}{2} \\ c = \frac{3}{2} \\ d = 0 \end{cases}$$

$$z_P = \frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{2}x$$

-រកចម្លើយអូរម៉ូសែន z_h នៃសមីការ (3)

$$z_h'' + 2z_h' + 2z_h = 0$$

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

$$\Delta' = 1 - 2 = -1 = i^2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} r_1 = -1 - i = \alpha - i\beta \\ r_2 = -1 + i = \alpha + i\beta \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{array}\right.$$

$$z_h = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}$$

$$z_h = (A\cos x + B\sin x)e^{-x}$$

$$\Rightarrow z = z_h + z_p = (A\cos x + B\sin x)e^{-x} + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$$

ដូចនេះ $y_G=\left(A\cos x+B\sin x\right)+\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x\right)e^x$ ។

VI-1). គណនា $I_0\ \&\ I_1$

មាន $I_n=\int_0^1\frac{\left(2n\right)^n+\left(1-x^2\right)^n}{\left(1+x^2\right)}dx \quad ,n=0,1,2,3.....$

-ករណី $n=0\ :I_0=\int_0^1\frac{2}{1+x^2}dx$

$$=2\arctan x\Big|_0^1$$

$$=2\arctan 1-0$$

$$=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

-ករណី $n=1:\ I_1=\int_0^1\frac{2x+\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

$$I_1=\int_0^1\left(\frac{2x}{\left(1+x^2\right)}+\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)}\right)\frac{dx}{\left(1+x^2\right)}$$

តាង $x=\tan\frac{\theta}{2}$ នោះ $dx=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)d\theta$

$\Rightarrow dx=\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)d\theta \Rightarrow \frac{dx}{\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{2}d\theta$

ហើយ $\sin\theta=\frac{2x}{1+x^2}$, $\cos\theta=\frac{1-x^2}{1+x^2}$

បើ $x=0$ នោះ $\theta=0$

បើ $x=1$ នោះ $\theta=\frac{\pi}{2}$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\theta+\cos\theta\right)\frac{1}{2}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\cos\theta+\sin\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(-0+1\right)-\left(-1+0\right)\right]=\frac{1}{2}\times 2=1$$

-ស្រាយថា $\left(I_n\right)$ ជាស្ទីតចុះ

$\left(I_n\right)$ អាចសរសេរ : $I_n=\int_0^1\left[\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n\right].\frac{dx}{\left(1+x^2\right)}$

តាង $x=\tan\frac{\theta}{2}\Rightarrow\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}d\theta$

$$\sin\theta=\frac{2x}{1+x^2}\ ,\ \cos\theta=\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\forall x\in\left[0,1\right]\Rightarrow\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$I_n=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^n\theta+\cos^n\theta\right)d\theta$$

-$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta$?

-$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta$?

តាង $u=\frac{\pi}{2}-\theta\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}-u$ នោះ $du=-d\theta$

បើ $\theta = 0$ នោះ $u = \frac{\pi}{2}$

បើ $\theta = \frac{\pi}{2}$ នោះ $u = 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right)(-du)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u du \quad \text{ឬ} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$$

$$\Rightarrow I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta \Rightarrow I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} \theta d\theta$$

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : \ 0 \le \sin\theta \le 1$$

គុណនឹង $\sin^n \theta \ge 0$

$$\Rightarrow 0 \le \sin^{n+1}\theta \le \sin^n \theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} \theta d\theta \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$$

$$I_{n+1} \le I_n$$

ដូច្នេះ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

2). រកទំនាក់ទំនង $I_n \,\&\, I_{n+2}$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$$

$$\Rightarrow I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}\theta \sin\theta \, \mathrm{d}\theta$$

តាង $\begin{cases} u=\sin^{n+1}\theta \\ dv=\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=(n+1)\cos\theta\sin^n\theta d\theta \\ v=-\cos\theta \end{cases}$

$$I_{n+2}=\underbrace{\left[-\sin^{n+1}\theta.\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0}+(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^n\theta d\theta$$

$$=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\theta\right)\sin^n\theta d\theta$$

$$=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^n\theta-\sin^{n+2}\theta\right)d\theta$$

$$I_{n+2}=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}\theta d\theta$$

$$I_{n+2}=(n+1)I_n+(n+1)I_{n+2}$$

$$(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n$$

$$I_{n+2}=\frac{(n+1)}{(n+2)}I_n$$

-គណនា $P_n=I_n.I_{n+1}$

-$I_{n+2}=\frac{(n+1)}{(n+2)}I_n \quad (1)$

មាន $P_n=I_n.I_{n+1}\Rightarrow P_{n+1}=I_{n+1}.I_{n+2} \quad (2)$

យក (1) ជំនួសក្នុង (2)

$$P_{n+1}=I_{n+1}.\frac{n+1}{n+2}.I_n=\frac{n+1}{n+2}.I_n.I_{n+1}$$

$$P_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}P_n$$

$$\Leftrightarrow (n+2)P_{n+1}=(n+1)P_n \quad (3)$$

តាង $u_n = (n+1)P_n \quad (4)$

$\Rightarrow u_{n+1} = (n+2)P_{n+1} \quad (5)$

តាម $(3),(4)\&(5)$

យើងបាន $u_{n+1} = u_n \quad , \forall n = 0,1,2,3....$

នោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតថេរ

ដូចនេះ $P_n = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$ ។

3). គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(nI_n^2\right)$

មាន (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះនោះគេមាន ៖

$$I_{n+2} \le I_{n+1} \le I_n$$

$$\Leftrightarrow \frac{I_{n+2}}{I_n} \le \frac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$$

តែ $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n \Leftrightarrow \dfrac{I_{n+2}}{I_n} = \dfrac{n+1}{n+2}$

យើងបាន $\dfrac{n+1}{n+2} \le \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$

បំពាក់ $\lim\limits_{n\to+\infty}$ អង្គទាំងបីយើងបាន

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} \le \lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} \le \lim_{n\to+\infty} 1$$

$$1 \le \lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=1$

មាន $P_n=I_n.I_{n+1}$ តែ $P_n=\frac{\pi}{2(n+1)}$

$\Leftrightarrow I_n=\frac{\pi}{2(n+1)}\times\frac{1}{I_{n+1}}$ គុណ nI_n

យើងបាន $\Rightarrow nI_n^2=\frac{\pi n}{2(n+1)}\times\frac{I_n}{I_{n+1}}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(nI_n^2\right)=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\times\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n}{I_{n+1}}$$

$$=\frac{\pi}{2}.\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{I_{n+1}}{I_n}}=\frac{\pi}{2}$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}\left(nI_n^2\right)=\frac{\pi}{2}$ ។

4). រករូបមន្តគណនា I_n

មាន $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}.I_n \Leftrightarrow \frac{I_{n+2}}{I_n}=\frac{n+1}{n+2}$ $(*)$

-ករណី n គូ : យក $n=2k$, $k=0,1,2...$

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{I_{2k+2}}{I_{2k}}\right)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)$$

$$\frac{I_2}{I_0}\times\frac{I_4}{I_2}\times\frac{I_6}{I_4}\times\ldots\times\frac{I_{2n}}{I_{2n-2}}=\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}$$

$$\frac{I_{2n}}{I_0}=\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}$$

$$\Rightarrow I_{2n}=\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}I_0$$

-ករណី n សេស : យក $n=2k-1 \quad ,k\in\mathbb{N}$

$$\frac{I_{2k+1}}{I_{2k-1}}=\frac{2k}{2k+1}$$

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{I_{2k+1}}{I_{2k-1}}\right)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2k}{2k+1}\right)$$

$$\frac{I_{2n-1}}{I_1}=\frac{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}$$

$$I_{2n-1}=\frac{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}\ I_1$$ ។

វិញ្ញាសាទី៦

I-គេឱ្យអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ:

$$f(x)+f(4-x)=x^3-4x^2+5x$$ ។

ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^3\frac{f(x)}{x^2-4x+5}dx$ ។

II-ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $E_n=2903^n-803^n-464^n+261^n$ ចែកដាច់នឹង 1897 ជានិច្ចគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

III-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$$\begin{cases} u_o=2,u_1=\frac{5}{2} \\ u_{n+2}=u_{n+1}\left(u_n^2-2\right)-\frac{5}{2}\end{cases}$$ ដែល $n=0,1,2,3...$ ។

ចូររកផ្នែកគត់នៃ (u_n) ។

IV-ចូររកពហុធា $P(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $P\left(x^2\right)=x\left(x^2+1\right)P(x)$ ។

V-ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''-2y'+2y=(\sin x+\cos x)e^x$ ។

VI-គេឱ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានតួដំបូង a_1 និងផលរួម d ដែល $d\neq 0$ ។

គេពិនិត្យកន្សោមពីរ C_n និង S_n ដោយ៖

$$C_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\cos(a_n)\right]=\cos a_1+\cos a_2+\cos a_3+...+\text{cosa}_n$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\sin(a_n)\right]=\sin a_1+\sin a_2+\sin a_3+...+\text{sina}_n$$

យក $Z_n=C_n+iS_n$,គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

១)ចូរស្រាយថា $Z_n=\sum_{k=1}^{n}\left(e^{ia_k}\right)=e^{ia_1}\times\frac{1-e^{ind}}{1-e^{id}}$ ។

២)ទាញបញ្ជាក់ថា $Z_n=\frac{\sin\left(\frac{nd}{2}\right)}{\sin\left(\frac{d}{2}\right)}\times e^{i\frac{a_1+a_n}{2}}$ ។

៣)ទាញរកកន្សោមបង្រួមនៃ C_n និង S_n ។

VII-គេមានថង់ពីរ X និង Y ដែលក្នុងថង់ X មានប៊ូលក្រហម 3 និងប៊ូលខ្មៅ4 ហើយនៅក្នុងថង់ Y
មានប៊ូលក្រហម4និងប៊ូលខ្មៅ5។គេចាប់យកប៊ូល1ពីចេញពីថង់ X ដាក់ចូលទៅក្នុងថង់ Y និងចាប់យកប៊ូល 2 ពីថង់ Y ហើយដាក់ចូលក្នុងថង់ X វិញ។ចូរគណនាប្រូបាបប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍ៈ

១) A: នៅក្នុងថង់ X មានប៊ូលក្រហមស្មើនឹង $\frac{1}{3}$ នៃប៊ូលខ្មៅ។

២) B: នៅក្នុងថង់ X មានប៊ូលក្រហមស្មើនឹងប៊ូលខ្មៅ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនា $I=\int_1^3\frac{f(x)}{x^2-4x+5}dx$

យើងមាន $I=\int_1^3\frac{f(x)}{x^2-4x+5}dx\ (1)$

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)+f(4-x)=x^3-4x^2+5x=x\left(x^2-4x+5\right)$$

តាង $u=4-x\Rightarrow x=4-u$ ហើយ $dx=-du$

បើ $x=1$ នោះ $u=3$

បើ $x=3$ នោះ $u=1$

តាម (1) យើងបាន $I=\int_3^1 \frac{f(4-u)}{(4-u)^2-4(4-u)+5}(-du)$

$$I=\int_1^3 \frac{f(4-u)}{16-8u+u^2-16+4u+5}du$$

$I=\int_1^3 \frac{f(4-u)}{u^2-4u+5}du$ រឺ $I=\int_1^3 \frac{f(4-x)}{x^2-4x+5}dx\ (2)$

យក (1) បូក (2) យើងបាន៖

$$2I=\int_1^3 \frac{f(x)+f(4-x)}{x^2-4x+5}dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{x\left(x^2-4x+5\right)}{x^2-4x+5}dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int_1^3 xdx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)=2$$

ដូចនេះ $I=2$ ។

II-ស្រាយថា E_n ចែកដាច់នឹង 1897 ជានិច្ចគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

យើងមាន $E_n=2903^n-803^n-464^n+261^n$

ហើយ $1897=7\times 271$

$\Rightarrow E_n=\left(2903^n-803^n\right)-\left(464^n-261^n\right)$

$$= (2903 - 803)q_1 - (464 - 261)q_2$$
$$= 2100q_1 - 203q_2$$
$$= 7(300q_1 - 29q_2)$$

មានន័យថា កន្សោមខាងលើចែកដាច់នឹង 7

ម្យ៉ាងទៀត

$$E_n = (2903^n - 464^n) - (803^n - 261^n)$$
$$E_n = (2903 - 464)q_1 - (803 - 261)$$
$$E_n = 243q_1 - 542q_2$$
$$E_n = 271(9q_1 - 2q_2)$$

មានន័យថា កន្សោមខាងលើចែកដាច់នឹង 271

ដោយ 7 និង 271 មិនមែនជាកត្តាបឋមរួមគ្នា នោះ E_n ចែកដាច់នឹង 1897 ។

III-កំណត់ផ្នែកគត់នៃ u_n

យើងមាន $\begin{cases} u_o = 2, u_1 = \dfrac{5}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1}(u_n^2 - 2) - \dfrac{5}{2} \end{cases}$ ដែល $n = 0,1,2,3,4,...$

-យក $n = 0 : u_2 = u_1(u_0^2) - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}(2) - \frac{5}{2} = \frac{5}{2} = 2^1 + \frac{1}{2^1}$

$-n = 1 : u_3 = u_2(u_1^2 - 2) - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}\left(\frac{25}{4} - 2\right) - \frac{5}{2}$

$$u_3 = \frac{5}{2} \times \frac{13}{4} = \frac{65}{8}$$

$$-n=2: u_4 = u_3\left(u_2^2-2\right)-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}\left[\frac{13}{4}\left(\frac{17}{4}-1\right)\right]$$

$$u_4=\frac{5}{2}\left(\frac{221-16}{16}\right)=\frac{1025}{32}$$

យើងសង្កេតឃើញថា:

$$u_0=2=2^0+\frac{1}{2^0}$$

$$u_1=\frac{5}{2}=2^1+\frac{1}{2^1}$$

$$u_2=\frac{5}{2}=2^1+\frac{1}{2^1}$$

$$u_3=\frac{65}{8}=2^3+\frac{1}{2^3}$$

$$u_4=\frac{1025}{32}=2^5+\frac{1}{2^5}$$

-យក $n=3: u_5=u_4\left(u_3^2-2\right)-\frac{5}{2}$

ដោយ $u_3^2-2=\left(2^3-\frac{1}{2^3}\right)^2-2=2^6-\frac{1}{2^6}$

$$\Rightarrow u_5=\left(2^5+\frac{1}{2^5}\right)\left(2^6+\frac{1}{2^6}\right)-\frac{5}{2}$$

$$=2^{11}+\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2^{11}}-\frac{5}{2}=2^{11}+\frac{1}{2^{11}}$$

$n=4: u_6 = u_5\left(u_4^2-2\right)-\frac{5}{2}$

ដោយ $u_4^2-2=\left(2^5-\frac{1}{2^5}\right)^2-2=2^{10}+\frac{1}{2^{10}}$

$\Rightarrow u_6=\left(2^{11}+\frac{1}{2^{11}}\right)\left(2^{10}+\frac{1}{2^{10}}\right)-\frac{2}{5}=2^{21}+\frac{1}{2^{21}}$

យើងសង្កេតឃើញថាតួទូទៅនៃ$\left(u_n\right)$មានរាង$u_n=2^{v_n}+\frac{1}{2^{v_n}}$ដែល$\left(u_n\right)$

ជាស៊ីតចំនួនពិតកំណត់

ដោយ ៖$\left(v_n\right): 0,1,1,3,5,11,21,43$

ដោយសម្គាល់ឃើញថា

$v_o=0$

$v_1=1$

$v_2=1=2v_0+v_1$

$v_3=3=2v_1+v_2$

$v_4=5=2v_2+v_3$

$v_5=11=2v_3+v_4$

$v_6=21=2v_4+v_5$

....

ឧបមាពិតដល់ n គឺ$v_{n+2}=2v_n+v_{n+1}$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2=2+\lambda$

$\lambda^2-\lambda-2=0$ មានរាង $a-b+c=0$ យើងបាន $\begin{cases}\lambda=-1\\ \lambda=-\dfrac{c}{a}=2\end{cases}$

$\Rightarrow v_n=\alpha\lambda_1^n+\beta\lambda_2^n=\alpha(-1)^n+\beta(2)^n$

យក $n=0,1\Rightarrow\begin{cases}v_0=\alpha+\beta=0\\ v_1=-\alpha+2\beta=1\end{cases}+$

$3\beta=1\Rightarrow\beta=\dfrac{1}{3}$ និង $\alpha=-\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow v_n=\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}\in\mathbb{N}$

ដូចនេះ $u_n=(2)^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}+\dfrac{1}{2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}}$ ។

IV-ចូរកំណត់រកពហុធា $P(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖

$P(x^2)=x(x^2+1)P(x)\quad(1)$

-តាង n ជាដឺក្រេរបស់ពហុធា $P(x)$

$\Rightarrow -P(x^2)$ មានដឺក្រេទី $2n$ និង $x(x^2+1).\mathrm{P}(x)$ មានដឺក្រេទី $n+3$

ដើម្បីឱ្យពហុធាពីរមានដឺក្រេស្មើគ្នាលុះត្រាតែមានស្វ័យគុណស្មើគ្នា

តាម (1) យើងបាន $2n=n+3\Rightarrow n=3$

នាំឱ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី 3

ដោយ $x\in\mathbb{C}\Rightarrow -x\in\mathbb{C}$ ជំនួស x ដោយ $(-x)\in\mathbb{C}$ ក្នុង (1)

យើងបាន៖

$P\left(x^2\right)=-x\left(x^2+1\right)P\left(-x\right) \quad (2)$

ផ្ទឹម (1) និង (2) : $x\left(x^2+1\right)P\left(x\right)=-x\left(x^2+1\right)P\left(-x\right)$

$\Rightarrow P\left(-x\right)=-P\left(x\right)$

$\Rightarrow P\left(x\right)$ ជាអនុគមន៍សេស

$\Rightarrow P\left(x\right)$ មានរាង $P\left(x\right)=ax^3+cx$

តាម (1) -បើ $x=0$ នោះ $P\left(0\right)=0 \Rightarrow x=0$ ជាឫសរបស់ $P\left(x\right)$

-បើ $x=1$ នោះ $P\left(1\right)=2P\left(1\right)\Rightarrow P\left(1\right)=0 \Rightarrow x=1$ ជាឫសរបស់ $P\left(x\right)$

-បើ $x=i$ នោះ $P\left(-1\right)=i\left(0\right)P\left(i\right)=0\Rightarrow x=-1$ ជាឫសរបស់ $P\left(x\right)$

ដោយ $\begin{cases} P\left(0\right)=0 \\ P\left(1\right)=a+c=0 \\ P\left(-1\right)=-a-c=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow a+c=0 \Leftrightarrow a=-c$

$\Rightarrow P\left(x\right)=-cx^3+cx=-cx\left(x^2-1\right)=-cx\left(x+1\right)\left(x-1\right) \quad ,c\in\mathbb{R}^*$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ (1)

- $P\left(x^2\right)=-cx^2\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right) \quad (*)$

- $x\left(x^2+1\right)P\left(x\right)=x\left(x^2+1\right)\left[-cx(x+1)\left(x-1\right)\right]=-cx^2\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)$ $(**)$

តាម $(*)\&(**)$: $P\left(x^2\right)=x\left(x^2+1\right)P\left(x\right)$

V-ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

មាន $y''-2y'+y=(\sin x+\cos x)e^{x}\quad(1)$

តាង $y_G=z.e^{x}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃរបស់(1)

$y_G''-2y_G'+y_G=(\sin x+\cos x)e^{x}\quad(2)$

តែ $y_G'=e^{x}(z+z')$

$y_G''=e^{x}(z+z'+z'+z'')=e^{x}(z+2z'+z'')$

តាម $(2)\Rightarrow[z+2z'+z''-2z-2z'+2z].e^{x}=(\sin x+\cos x).e^{x}$

$$z''+z=\sin x+\cos x$$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2+1=0$

$$\lambda^2=-1=(i^2)$$

$$\Rightarrow\lambda=\pm i=0\pm i$$

យើងបាន ចម្លើយទូទៅនៃ $z_c=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$

$z_c=e^{0x}(A\cos x+B\sin x)=A\cos x+B\sin x$

-រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $z''+z=\sin x+\cos x$

តាង $y_p=x(a\cos x+b\sin x)$

$z_p'=a\cos x+b\sin x+x(-a\sin x+b\cos x)$

$z_p''=-a\sin x+b\cos x-a\sin x+b\cos x+x(-a\cos x-b\sin x)$

$\Rightarrow z_p''+z_p=-2a\sin x+2b\cos x$

z_p ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $z''+z=\sin x+\cos x$ កាលណា៖

$$z''+z=\sin x+\cos x$$

$$\Leftrightarrow -2a\sin x + 2b\cos x = \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 1 \\ 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-1}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

នោះ $z_p = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

យើងបាន $z = z_c + z_p = A\cos x + B\sin x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅ ។

$$y_G = \left(A\cos x + B\sin x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x \right) e^x \quad \left(A, B \in \mathbb{R} \right)$$

VI-១)ចូរស្រាយថា $Z_n = \sum_{k=1}^{n} \left(e^{ia_k} \right) = e^{ia_k} \times \frac{1 - e^{ind}}{1 - e^{id}}$

យើងមាន

$$\begin{cases} C_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\cos\left(a_k \right) \right] = \cos a_1 + \cos a_2 + \cos a_3 + ... + \cos a_n \\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sin\left(a_k \right) \right] = \sin a_1 + \sin a_2 + \sin a_3 + ... + \sin a_n \end{cases}$$

យក $Z_n = C_n + iS_n$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ នោះ

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(a_k\right)\right] + i\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(a_k\right)\right]$$

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(a_k\right) + i\sin\left(a_k\right)\right]$$

(ព្រោះតាមទ្រឹស្តីបទEuler $e^{ix} = \cos x + i\sin x$)

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n}\left(e^{ia_k}\right) = e^{ia_1} + e^{ia_2} + e^{ia_3} + \ldots + e^{ia_n}$$

ដោយ $\left(a_n\right)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានតួតំបូង a_1 និងផលសងរួម d , $d \neq 0$

$$\Rightarrow Z_n = e^{ia_1} + e^{i\left(a_1+d\right)} + e^{i\left(a_1+2d\right)} + \ldots + e^{i\left(a_1+d(n-1)\right)}$$

$$Z_n = e^{ia_1} + e^{ia_1}.e^{id} + e^{ia_1}.e^{i2d} + \ldots + e^{ia_1}.e^{id(n-1)}$$

$$Z_n = e^{ia_1}\left(1 + e^{id} + e^{i2d} + \ldots + e^{id(n-1)}\right)$$

$$Z_n = e^{ia_1} \times \frac{1-\left(e^{id}\right)^n}{1-e^{id}} = e^{ia_1} \times \frac{1-e^{ind}}{1-e^{id}}$$

ដូចនេះ $Z_n = e^{id} \times \dfrac{1-e^{ind}}{1-e^{id}}$ ពិត ។

២) ទាញបញ្ជាក់ថា $Z_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{nd}{2}\right)}{\sin\dfrac{d}{2}} \times e^{i\frac{a_1+a_n}{2}}$

យើងមាន $Z_n = e^{ia_1} \times \dfrac{1-e^{ind}}{1-e^{id}}$

តាមរូបមន្ត Euler $\begin{cases} e^{ind} = \cos nd + i\sin nd \\ e^{id} = \cos d + i\sin d \end{cases}$

យើងបាន $Z_n = e^{ia_1} \times \dfrac{1-(\cos nd + i\sin nd)}{1-(\cos d + i\sin d)}$

$$Z_n = e^{ia_1} \times \frac{1-\cos nd - i\sin nd}{1-\cos d - i\sin d} = e^{ia_1} \times \frac{2\sin^2\frac{nd}{2} - 2i\sin\frac{nd}{2}\cos\frac{nd}{2}}{2\sin^2\frac{d}{2} - 2i\sin\frac{d}{2}\cos\frac{d}{2}}$$

$$Z_n = e^{ia_1} \times \frac{2\sin\frac{nd}{2}\left(\sin\frac{nd}{2} - i\cos\frac{nd}{2}\right)}{2\sin\frac{d}{2}\left(\sin\frac{d}{2} - i\cos\frac{d}{2}\right)} = e^{ia_1} \times \frac{\sin\frac{nd}{2}\left(\cos\frac{nd}{2} + i\sin\frac{nd}{2}\right)}{\sin\frac{d}{2}\left(\cos\frac{d}{2} + i\sin\frac{d}{2}\right)}$$

$$Z_n = e^{ia_1} \times \frac{\sin\frac{nd}{2} \times e^{i\frac{nd}{2}}}{\sin\frac{d}{2} \times e^{i\frac{d}{2}}} = \frac{\sin\frac{nd}{2}}{\sin\frac{d}{2}} \times e^{i\left(a_1 + \frac{nd}{2} - \frac{d}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{nd}{2}}{\sin\frac{d}{2}} \times e^{i\left(\frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2}\right)}$$

ហើយ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលបូក $a_n = a_1 + d(n-1)$

ដូចនេះ $Z_n = \dfrac{\sin\frac{nd}{2}}{\sin\frac{d}{2}} \times e^{i\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)}$ ពិត។

៣)ទាញរកកន្សោមប្រួមនៃ C_n និង S_n

$$Z_n=\frac{\sin\frac{nd}{2}}{\sin\frac{d}{2}}\times e^{i\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)}=\frac{\sin\frac{nd}{2}}{\sin\frac{d}{2}}.\left(\cos\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)+i\sin\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)\right)$$

$$Z_n=\frac{\sin\frac{nd}{2}}{\sin\frac{d}{2}}.\cos\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)+i\frac{\sin\frac{nd}{2}}{\sin\frac{d}{2}}.\sin\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$$

និង $Z_n=C_n+iS_n$ ចំនួនកុំផ្លិចពីរស្មើគ្នាលុះត្រាតែ $C_n=\operatorname{Re}Z_n$ និង $S_n=\operatorname{Im}Z_n$

ដូចនេះ $C_n=\frac{\sin\frac{nd}{2}}{\sin\frac{d}{2}}.\cos\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$ នឹង $S_n=\frac{\sin\frac{nd}{2}}{\sin\frac{d}{2}}.\sin\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$

VII-១) $A:$ នៅក្នុងថង់ X មានប៊ូលក្រហមស្មើនឹង $\frac{1}{3}$ នៃប៊ូលខ្មៅ

ដើម្បីទីបញ្ចប់នៃការពិសោធន៍វិញ្ញានេះទទួលបាននៅក្នុងថង់ X :ចំនួនប៊ូលក្រហមស្មើនឹង $\frac{1}{3}$ នៃប៊ូ-លខ្មៅលុះត្រាតែ ចាប់ប៊ូលលើកទីមួយ 1 គ្រាប់ពីថង់ X ត្រូវបានប៊ូលក្រហមដាក់ចូលក្នុងថង់ Y និងចាប់ប៊ូល 2 ពីថង់ Y បានប៊ូលខ្មៅទាំង 2 ដាក់ចូលក្នុងថង់ X វិញ។

-តាង: A_1 ព្រឹត្តិការណ៍ចាប់ប៊ូលលើកទីមួយ 1 គ្រាប់ពីថង់ X ដាក់ក្នុងថង់ Y និង

A_2 ព្រឹត្តិការណ៍ចាប់ប៊ូលលើកទីពីរប៊ូល 2 គ្រាប់ពីថង់ Y ដាក់ក្នុងថង់ X វិញ។

$\Rightarrow A = A_1 \cap A_2$ នោះ $P(A) = P(A_1 \cap A_2)$

តាមប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ $P(A_2 / \mathrm{A}_1) = \dfrac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A)}$

$$\Rightarrow P(A) = P(A_1) \times P(A_2 / A_1)$$

$$= \frac{n(A_1)}{n(S_X)} \times \frac{n(A_2 / \mathrm{A}_1)}{n(S_{Y/A_1})}$$

$$= \frac{C(3,1)}{C(7,1)} \times \frac{C(5,2)}{C(10,2)} = \frac{3}{7} \times \frac{\frac{5!}{2!3!}}{\frac{10!}{2!8!}}$$

$$= \frac{3}{7} \times \frac{10}{45} = \frac{10}{105}$$

ដូចនេះ $P(A) = \dfrac{10}{105}$ ។

២) B: នៅក្នុងថង់ X មានប៊ូលក្រហមស្មើនឹងប៊ូលខ្មៅ

ដើម្បីឱ្យទីបញ្ចប់នៃការពិសោធន៍នៃវិញ្ញាសានេះគេទទួលបាននៅក្នុងថង់ X :

ចំនួនប៊ូលក្រហមស្មើនិងប៊ូលខ្មៅលុះត្រាតែះ ចាប់ប៊ូលលើកទីមួយ 1 គ្រប់ពីថង់ X ត្រូវបានប៊ូលខ្មៅដាក់ចូលក្នុងថង់ Y

នឹងចាប់ប៊ូលលើកទីពីរ 2 គ្រប់ពីថង់ Y បានប៊ូលខ្មៅ 1 គ្រប់ក្រហម 1 គ្រប់ដាក់ចូលថង់ X វិញ។

តាង B_1 ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់ប៊ូលលើកទីមួយ 1 គ្រប់ពីថង់ X ដាក់ចូលក្នុងថង់ Y

B_2 ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់ប៊ូល 2 គ្រប់ពីថង់ Y ដាក់ចូលថង់ X វិញ

$\Rightarrow B = B_1 \cap B_2$ នោះ $P(B) = P(B_1 \cap B_2)$

តាមប្រូបាបមានលក្ខខណ្ឌ $P(B_2 / B_1) = \dfrac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B)}$

$$\Rightarrow P(B) = P(B_1) \times P(B_2 / B_1)$$

$$= \frac{C(B_1)}{n(S_X)} \times \frac{n(B_1 / B_2)}{n(S_{Y/B_1})}$$

$$= \frac{C(4,1)}{C(7,1)} \times \frac{C(6,1).C(4,1)}{C(10,2)}$$

$$= \frac{4}{7} \times \frac{6 \times 4}{45} = \frac{96}{315} = \frac{32}{105}$$

ដូចនេះ $P(B) = \dfrac{32}{105}$ ។

វិញ្ញាសាទី៧

I.គេឱ្យ $C_n=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\cos(k\theta)}{2^k}\right]$ និង $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\sin(k\theta)}{2^k}\right]$

១.គេតាង $Z_n=C_n+iS_n$ ។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $Z_n=\sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^k\right]$

២.យក $Z=\lim_{n\to+\infty}Z_n$ ។ចូរស្រាយថា $Z=\frac{4-2\cos\theta+2i\sin\theta}{5-4\cos\theta}$

៣.ទាញរក $C=\lim_{n\to+\infty}C_n$ និង $S=\lim_{n\to+\infty}S_n$ ។

II.គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^1 x(1+x)^n.dx$ ដែល $n=1,2,3,...$ ។

តាង $S_n=I_0+I_1+I_2+...+I_n$ ។

១.ចូរស្រាយថា $S_n=-1+\int_0^1(1+x)^{n+1}.dx$ ។

២.គណនា S_n រួចទាញរក I_n ។

៣.ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញថា

$$\frac{1}{2}C_n^0+\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2+...+\frac{1}{n+2}C_n^n=\frac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$$ ។

III.គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases}a_0=1,a_1=2,a_2=5\\a_{n+3}=4a_{n+2}-6a_{n+1}+4a_n\end{cases}$

១.តាង $b_n=a_{n+1}-2a_n$ ។ចូរស្រាយថា $b_{n+2}=2b_{n+1}-2b_n$

២.ស្រាយថា $z_n=b_{n+1}-(1-i)b_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចមួយដែលគេនឹងបញ្ជាក់រេសុងនិងតួ z_0 ។

៣.ចូរគណនា z_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។ ៤.ទាញរក b_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៥.ទាញឱ្យបានថា $a_n = 2^n\left[1+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{k+2}}\sin\frac{k\pi}{4}\right)\right]$ ។

IV.គេមានលំហាត់ទាំងអស់ចំនួន15 លំហាត់ ដែលក្នុងនោះមានលំហាត់ពិជគណិត9 និងលំហាត់ធរណីមាត្រ6 ។គេដឹងថាក្នុងចំណោមលំហាត់ពិជគណិតទាំង9 មានលំហាត់ពិបាក3 និងលំហាត់ស្រួល 6 ហើយក្នុងចំណោមលំហាត់ធរណីមាត្រ 6 មានលំហាត់ពិបាក 2 និងលំហាត់ស្រួល 4 ។

គេបង្កើតវិញ្ញាសាសម្រាប់ប្រលងដែលក្នុងវិញ្ញាសារនីមួយៗមានលំហាត់ពិជគណិត 4 និងលំហាត់ធរណីមាត្រ 2 ។

១.តើគេអាចបង្កើតបានវិញ្ញាសាខុសៗគ្នាទាំងអស់បានប៉ុន្មាន? គេសន្មត់ថាវិញ្ញាសាខុសគ្នាជាវិញ្ញាសាដែលមានលំហាត់ខុសគ្នាយ៉ាងតិច)1 លំហាត់នៅក្នុងនោះ(

២.គេជ្រើសយកវិញ្ញាសាមួយពីក្នុងចំណោមវិញ្ញាសាទាំងអស់ដែលបង្កើតបានខាងលើដើម្បីយកមកចេញប្រលងសញ្ញាប័ត្រទុតិយភូមិ។ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

ក. A ជ្រើសបានវិញ្ញាសាដែលមានលំហាត់ធរណីមាត្រស្រួលទាំងពីរលំហាត់។

ខ. B ជ្រើសបានវិញ្ញាសាដែលលមានលំហាត់ធរណីមាត្រពិបាកទាំងពីរលំហាត់។

គ. C ជ្រើសរើសបានវិញ្ញាសាដែលមានលំហាត់ពិបាកច្រើនបំផុត។

ដំណោះស្រាយ

១.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $Z_n=\sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^k\right]$

$C_n=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\cos(k\theta)}{2^k}\right]$ និង $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\sin(k\theta)}{2^k}\right]$

$Z_n=C_n+iS_n$

$=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\cos(k\theta)}{2^k}\right]+i\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\sin(k\theta)}{2^k}\right]$

$=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\cos(k\theta)}{2^k}+i\frac{\sin(k\theta)}{2^k}\right]$

$=\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\cos(k\theta)+i\sin(k\theta)}{2^k}\right]$

$z_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{ik\theta}}{2^k}\right)$

ដូចនេះ $Z_n=\sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^k\right]$ ពិត។

២. ស្រាយថា $Z=\frac{4-2\cos\theta+2i\sin\theta}{5-4\cos\theta}$ ដែល $z=\lim_{n\to+\infty}z_n$

យើងមាន $Z_n=\sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^k\right]$; $\sum_{k=0}^{n}(q^n)=\underbrace{1+q+...+q^n}_{s_n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

$$=\frac{1-\left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^{i\theta}}{2}}=\frac{1-\frac{e^{i(n+1)\theta}}{2^{n+1}}}{1-\frac{e^{i\theta}}{2}}$$

$$\Rightarrow z=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{e^{i(n+1)\theta}}{2^{n+1}}}{1-\frac{e^{i\theta}}{2}}=\frac{1-L}{1-\frac{e^{i\theta}}{2}}$$

ដែល $L=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{e^{i(n+1)\theta}}{2^{n+1}}}{1-\frac{e^{i\theta}}{2}}$ $\quad ;e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$\Rightarrow L=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos(n+1)\theta}{2^{n+1}}+i\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(n+1)\theta}{2^{n+1}}$;ដោយ $-1\le\cos(n+1)\theta\le 1$

$-\frac{1}{2^{n+1}}\le\frac{\cos(n+1)\theta}{2^{n+1}}\le\frac{1}{2^{n+1}}$; ដោយ $n\to+\infty\Rightarrow\frac{1}{2^{n+1}}\to 0$

$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos(n+1)\theta}{2^{n+1}}=0$$

ដូចគ្នាដែរ $-1\le\sin(n+1)\theta\le 1$

$$-\frac{1}{2^{n+1}}\le\frac{\sin(n+1)\theta}{2^{n+1}}\le\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n+1)\theta}{2^{n+1}}=0\Rightarrow L=0$$

$$\Rightarrow z=\frac{1}{1-\frac{e^{i\theta}}{2}}=\frac{1-\frac{e^{-i\theta}}{2}}{\left(1-\frac{e^{i\theta}}{2}\right)\left(1-\frac{e^{-i\theta}}{2}\right)}=\frac{1-\frac{1}{2}(\cos\theta-i\sin\theta)}{1-\frac{e^{-i\theta}}{2}-\frac{e^{i\theta}}{2}+\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{\frac{2-\cos\theta+i\sin\theta}{2}}{\frac{5-2\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)}{4}}=\frac{2(2-\cos\theta+i\sin\theta)}{5-4\cos\theta}$$

ដូចនេះ $Z=\dfrac{4-2\cos\theta+2i\sin\theta}{5-4\cos\theta}$ ពិត។

៣.ទាញរក $C=\lim\limits_{n\to+\infty}C_n$ និង $S=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

មាន $Z_n=C_n+iS_n$

$$Z=\lim_{n\to+\infty}C_n+i\lim_{n\to+\infty}S_n$$

$$Z=C+iS=\frac{4-2\cos\theta+2i\sin\theta}{5-4\cos\theta}$$ ។

II.១.ចូរស្រាយថា $S_n=-1+\int_0^1(1+x)^{n+1}.dx$

- $I_n=\int_0^1 x(1+x)^n.dx \quad ,n=0,1,2,...$

- $S_n=I_o+I_1+...+I_n$

មាន $I_n=\int_0^1 x(1+x)^n.dx$

$$=\int_0^1\left[(1+x)-1\right](1+x)^n.dx$$

$$I_n=\int_0^1(1+x)^{n+1}.dx-\int_0^1(1+x)^n.dx$$

រៀបរៀងដោយៈ ស៊ាម សំណាង អ៊ួន ណែត

$$\left.\begin{array}{l} n=0 \Rightarrow I_0=\int_0^1 (1+x).dx-\int_0^1 dx \\ n=2 \Rightarrow I_1=\int_0^1 (1+x)^2 .dx-\int_0^1 (1+x).dx \\ n=2 \Rightarrow I_2=\int_0^1 (1+x)^3 .dx-\int_0^1 (1+x)^2 .dx \\ ---------------------- \\ n=n \Rightarrow I_n=\int_0^1 (1+x)^{n+1} .dx-\int_0^1 (1+x)^n .dx \end{array}\right\}+$$

$S_n=\int_0^1 (1+x)^{n+1} .dx-\int_0^1 dx=-1+\int_0^1 (1+x)^{n+1} .dx$ ពិត។

២.គណនា S_n រួចទាញរក I_n

$$S_n=-1+\int_0^1 (1+x)^{n+1} .dx$$

$$=-1+\left[\frac{(1+x)^{n+2}}{n+2}\right]$$

$$=-1+\frac{2^{n+2}}{n+2}=\frac{1}{n+2}=\frac{-n-2+2^{n+2}-1}{n+2}$$

$$S_n=\frac{2^{n+2}-(n+3)}{n+2}$$

$$S_n=\frac{2^{n+2}-(n+3)}{n+2} \Rightarrow S_{n-1}=\frac{2^{n+1}-(n+2)}{n+1}$$

$$=\frac{(n+1)2^{n+2}-(n+1)(n+3)-(n+2)2^{n+1}+(n+2)^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{2^{n+1}\left[(n+1)(2)-(n+2)\right]+(n-2)^2-(n+1)(n+3)}{(n+1)(n+2)}$$

ដូចនេះ $I_n=\dfrac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$ ។

៣.ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញថា

$$\frac{1}{2}C_n^0+\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2+...+\frac{1}{n+2}C_n^n=\frac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$$

មាន $I_n=\int_0^1 x(1+x)^n.dx$

តាមទ្វេធាញ៉ូតុន:

$$(1+x)^n=C_n^0+C_1^1x+C_2^2x^2+....+C_n^nx^n$$

$$x(1+x)^n=C_n^0x+C_n^1x^2+c_n^2x^3+...+C_n^nx^{n+1}$$

$$\int_0^1 x(1+x)^n=\int_0^1\left(C_n^0x+C_n^1x^2+c_n^2x^3+...+C_n^nx^{n+1}\right).dx$$

$$I_n=\left[\frac{1}{2}C_n^0x^2+\frac{1}{3}C_n^1x^3+\frac{1}{4}C_n^2x^4+....+\frac{1}{n+2}C_n^nx^{n+2}\right]_0^1$$

ដូចនេះ $I_n=\frac{1}{2}C_n^0+\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2+...+\frac{1}{n+2}C_n^n=\frac{n.2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$ ពិត។

III.១ ស្រាយថា $b_{n+2}=2b_{n+1}-2b_n$

សម្មតិកម្ម $\begin{cases} a_o=1, a_1=2, a_2=5 \\ a_{n+3}=4a_{n+2}-6a_{n+1}+4a_n \quad ; n=0,1,2,3,... \end{cases}$

យើងមាន $b_n=a_{n+1}-2a_n$

$$\Rightarrow b_{n+1}=a_{n+2}-2a_{n+1}$$

$$\Rightarrow b_{n+2}=a_{n+3}-2a_{n+2}$$

$$b_{n+2}=4a_{n+2}-6a_{n+1}+4a_n-2a_{n+2}$$

$$=2a_{n+2}-6a_{n+1}+4a_n$$

$$=2(a_{n+2}-2a_{n+1})-2(a_{n+1}-2a_n)$$

ដូចនេះ $b_{n+2}=2b_{n+1}-2b_n$ ពិត។

២ ស្រាយថា $Z_n=b_{n+1}-(1-i)b_n$ ជា)

$Z_n = b_{n+1} - (1-i)b_n$

$\Rightarrow Z_{n+1} = b_{n+2} - (1-i)b_{n+1}$

តែ $b_{n+2} = 2b_{n+1} - 2b_n$

$$\begin{aligned}\Rightarrow Z_{n+1} &= 2b_{n+1} - 2b_n - b_{n+1} + ib_{n+1} \\ &= b_{n+1} + ib_{n+1} - 2b_n \\ &= (1+i)b_{n+1} - 2b_n \\ &= (1+i)\left(b_{n+1} - \frac{2}{1+i}b_n\right)\end{aligned}$$

$$= (1+i)\left(\underbrace{b_{n+1} - (1-i)b_n}_{z_n}\right)$$

$Z_{n+1} = (1+i)Z_n$

ដូចនេះ Z_n ជាស្វ៊ីតដែលមានរេសុងជាចំនួនកុំផ្លិច $q = 1+i$ ។

និង $Z_o = b_1 - (1-i)b_o$

តែ $\begin{cases} b_o = a_1 - 2a_o = 2-2 = 0 \\ b_1 = a_2 - 2a_1 = 5-4 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow Z_o = 1$ ។

៣ គណនា Z_n ជាអនុគមន៍នៃ n

$Z_n = Z_o \times q^n$ តែ $Z_o = 1$

$$q = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Z_n = 1 \times \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$

ដូចនេះ $Z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$។

៤ ទាញរក b_n

មាន $Z_n = b_{n+1} - (1-i)b_n$

$$Z_n = \left(b_{n+1} - b_n\right) + ib_n$$

$$\Rightarrow b_n - I_m\left(z_n\right)$$

តែ $Z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) \Rightarrow I_m\left(z_n\right) = \sqrt{2}^n \sin\frac{n\pi}{4}$

ដូចនេះ $b_n = \sqrt{2}^n \sin\frac{n\pi}{4}$ ។

៥ ទាញឱ្យបានថា $a_n = 2^n\left[1 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{(\sqrt{2})^{k+2}}\sin\frac{k\pi}{4}\right)\right]$

មាន $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 2^{n+1}

$\frac{b_n}{2^{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}$ ឬ $\frac{a_{k+1}}{2^{k+1}}-\frac{a_k}{2^k}=\frac{b_k}{2^{k+1}}$

តែ $b_k=\sqrt{2}^k.\sin\frac{k\pi}{4}$

$$\frac{a_{k+1}}{2^{k+1}}-\frac{a_k}{2^k}=\frac{\sqrt{2}^k}{2^{k+1}}.\sin\frac{k\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{k+2}}.\sin\frac{k\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1}}{2^{k+1}}-\frac{a_k}{2^k}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2}^{k+2}}.\sin\frac{k\pi}{4}\right]$$

$$\Rightarrow\frac{a_n}{2^n}-a_o=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2}^{k+2}}.\sin\frac{k\pi}{4}\right]$$

តែ $a_o=1$

ដូចនេះ $a_n=2^n\left[1+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{(\sqrt{2})^{k+2}}\sin\frac{k\pi}{4}\right)\right]$ ពិត។

IV.១.តើគេអាចបង្កើតបានវិញ្ញាសាខុសៗគ្នាទាំងអស់បានប៉ុន្មាន?

ចំនួនករណីអាច $=C(9,4)\times C(6,2)=1890$ ករណី

២ គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

ក. A ជ្រើសបានវិញ្ញាសាដែលមានលំហាត់ធរណីមាត្រស្រួលទាំងពីរលំហាត់

ដោយលំហាត់ធរណីមាត្រស្រួលទាំងពីរត្រូវជ្រើសចេញពីលំហាត់ធរណីមាត្រស្រួល 4 លំហាត់ នឹង 4 លំហាត់ទៀតត្រូវជ្រើសចេញពីពិជគណិត 9 លំហាត់

$$\Rightarrow n(A)=C(4,2)\times C(9,4)=\frac{4!}{2!.2!}\times\frac{9!}{5!.4!}=756$$ ករណី

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{756}{1890}=0,4$$ ។

ខ. B ជ្រើសបានវិញ្ញាសាដែលមានលំហាត់ធរណីមាត្រពិបាកទាំងពីរលំហាត់

ដោយលំហាត់ធរណីមាត្រពិបាកពីរលំហាត់ត្រូវជ្រើសចេញពីលំហាត់ធរណីមាត្រដែលមានលំហាត់ពិបាក 2

$$\Rightarrow n(B)=C(2,2)\times C(9,4)=126$$ ករណី

$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{126}{1890}=0,066$$ ករណី។

គ. C ជ្រើសរើសបានវិញ្ញាសាដែលមានលំហាត់ពិបាកច្រើនបំផុត

$$n(B)=C(2,2)\times C(3,3)\times C(6,1)=6$$ ករណី

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{6}{1890}=0,0031$$ ករណី។

វិញ្ញាសាទី៨

I-គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ

$$f(x)=-1+\ln x-\frac{2(x-e)}{x+e}$$ ។

១) ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចទាញថា f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(0,+\infty)$។

២) ចំពោះគ្រប់ $x\geq e$ ចូរទាញបញ្ជាក់ថា $\ln\geq\frac{3x-e}{x+e}$ ។

II-ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$A=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}-\sqrt{1+\sin^2 x}}{\sqrt{1-\sin^2 x}+\sqrt{1+\sin^3 x}-\sqrt{1+\sin^4 x}}$$ និង

$$B=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}}$$

III-គេឱ្យ a និង b ជាពីរចំនួនពិត។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\left|\int_1^{\sqrt{3}}\frac{a\cos x+b\sin x}{1+x^2}dx\right|\leq\frac{\pi}{12}\sqrt{a^2+b^2}$$ ។

IV-គេឱ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនង់ស្មើ $1cm$ ។គេតាង K,L,M និង N ជាចំនុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃអង្គត់ $[EF],[FB],[BC]$ និង $[DH]$។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $KLMN$ ជាចំណុចកណ្តាលចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ។

V-នៅក្នុងថង់មួយមានឃ្លីក្រហម 3 ចុះលេខ $1,2,3$ ឃ្លីខៀវ 4 ចុះលេខ $4,5,6,7$ និងឃ្លីបៃតង 2 ចុះលេខ $8,9$

គេចាប់យកឃ្លី 3 គ្រប់ព្រមគ្នាចេញពីរក្នុងថង់នោះដោយចៃដន្យ។ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

១) A: ចាប់បានឃ្លីចុះលេខផ្គុំបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែលមានផលសងរួម $d=3$ ។

២) B: ចាប់បានឃ្លីមានផលបូកលេខជាពហុគុណនៃ 5 ។

VI-គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ចំនួនពិត $x>0$ ដោយ

$$f(x)=\int_0^x \frac{t^n dt}{\sqrt{x^4+t^4}}$$ ដែល $n\in\mathbb{N}$។

១) ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$។

២) ចូរកំណត់តម្លៃ n ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ថេរ រួចកំណត់រកអនុគមន៍ថេរនោះ។

VII-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_o=\dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ u_{n+1}=u_n^3-3u_n \end{cases}$

ដែល $n=0,1,2,3...$។

ចូរគណនា (u_n) ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

I-១.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចទាញថា f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $(0,+\infty)$

$$f(x)=-1+\ln x-\frac{2(x-e)}{x+e},x\in(0,+\infty)$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}-2.\frac{(x-e)'(x+e)-(x+e)'(x-e)}{(x+e)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}-2.\frac{x+e-x+e}{(x+e)^2}=\frac{1}{x}-\frac{4e}{(x+e)^2}=\frac{(x+e)^2-4xe}{x(x+e)^2}$$

$$=\frac{x^2+2xe+e^2-4xe}{x(x+e)^2}=\frac{x^2-2xe+e^2}{x(x+e)^2}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\frac{(x-e)^2}{x(x+e)^2}$ ដោយ $\forall x\in(0,+\infty)$; $\frac{(x-e)^2}{x(x+e)^2}\geq 0$

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow f$ ជាអនុគមន៍កើនលើ $(0,+\infty)$។

២.ចំពោះគ្រប់ $x\geq e$ ចូរទាញបញ្ជាក់ថា $\ln x\geq\frac{3x-e}{x+e}$

ដោយ f ជាអនុគមន៍កើនលើ $(0,+\infty)$

តាមលក្ខណៈអនុគមន៍កើន $x\geq e\Rightarrow f(x)\geq f(e)$

$$\Leftrightarrow -1+\ln x-\frac{2(x-e)}{x+e}\geq -1+\ln e-0$$

$$\ln x\geq 1+\frac{2x-2e}{x+e}$$

$$\ln x\geq \frac{x+e+2x-2e}{x+e}$$

ដូចនេះ $\ln x\geq \frac{3x-e}{x+e}$ ពិត។

II-គណនាលីមីត៖

$$A=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}-\sqrt{1+\sin^2 x}}{\sqrt{1-\sin^2 x}+\sqrt{1+\sin^3 x}-\sqrt{1+\sin^4 x}}$$

$$A=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}-\sqrt{1+\sin^2 x}}{\sqrt{1-\sin^2 x}+\sqrt{1+\sin^3 x}-\sqrt{1+\sin^4 x}}$$

តាង $\mathrm{t}=\sin x$

បើ $x\to\frac{\pi}{2}$ នោះ $t=1$

យើងបាន៖ $A=\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}-\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1-t^2}+\sqrt{1+t^3}-\sqrt{1+t^4}}$

$$A=\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{1-t}+\left(\sqrt{1+t}-\sqrt{1+t^2}\right)}{\sqrt{1-t^2}+\left(\sqrt{1+t^3}-\sqrt{1+t^4}\right)}$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{\sqrt{1-t}+\dfrac{1+t-\left(1+t^2\right)}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1+t^2}}}{\sqrt{1-t^2}+\dfrac{1+t^3-\left(1+t^4\right)}{\sqrt{1+t^3}+\sqrt{1+t^4}}}$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{\sqrt{1-t}+\dfrac{1+t-1-t^2}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1+t^2}}}{\sqrt{1-t^2}+\dfrac{1+t^3-1-t^4}{\sqrt{1+t^3}+\sqrt{1+t^4}}}$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{\sqrt{1-t}+\dfrac{t-t^2}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1+t^2}}}{\sqrt{1-t^2}+\dfrac{t^3-t^4}{\sqrt{1+t^3}+\sqrt{1+t^4}}}$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{\sqrt{1-t}+\dfrac{t(1-t)}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1+t^2}}}{\sqrt{1-t^2}+\dfrac{t^3(1-t)}{\sqrt{1+t^3}+\sqrt{1+t^4}}}$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{\sqrt{1-t}\left(1+\dfrac{t\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1+t^2}}\right)}{\sqrt{1-t}\left(\sqrt{1+t}+\dfrac{t^3\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t^3}+\sqrt{1+t^4}}\right)}=\frac{1+0}{\sqrt{2}+0}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ $A=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}-\sqrt{1+\sin^2 x}}{\sqrt{1-\sin^2 x}+\sqrt{1+\sin^3 x}-\sqrt{1+\sin^4 x}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ។

$$B=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}}$$

តាមរូបមន្ត $\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

យើងបាន ៖

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)}{\sqrt{x}}$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}}$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}.\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}}\right)}\times\frac{1}{2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}}=0$$

ដូចនេះ $B=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}}=0$ ។

III-ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left|\int_1^{\sqrt{3}}\frac{a\cos x+b\sin x}{1+x^2}dx\right|\le\frac{\pi}{12}\sqrt{a^2+b^2}$

$\forall x\in[a,b]: f$ ជាអនុគមន៍ជាប់

យើងមាន $-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$

$$\Rightarrow -\int_a^b \left|f(x)\right|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \left|f(x)\right|dx$$

$$\Leftrightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b \left|f(x)\right|dx$$

យើងបាន $\left|\int_1^{\sqrt{3}} \frac{a\cos x + b\sin x}{1+x^2}dx\right| \le \int_1^{\sqrt{3}} \left|\frac{a\cos x + b\sin x}{1+x^2}\right|dx$

តាមវិសមភាព Cauchy Schwarz : $a\cos x + b\sin x \le \sqrt{a^2+b^2}$

$$\Rightarrow \left|\frac{a\cos x + b\sin x}{1+x^2}\right| \le \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{1+x^2}$$

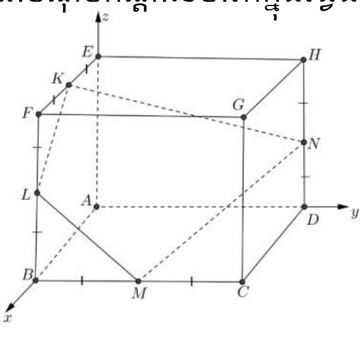
$$\Rightarrow \int_1^{\sqrt{3}} \left|\frac{a\cos x + b\sin x}{1+x^2}\right|dx \le \sqrt{a^2+b^2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

តែ $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

$$\left|\int_1^{\sqrt{3}} \frac{a\cos x + b\sin x}{1+x^2}dx\right| \le \frac{\pi}{12} \times \sqrt{a^2+b^2}$$

ដូចនេះ $\left|\int_1^{\sqrt{3}} \frac{a\cos x + b\sin x}{1+x^2}dx\right| \le \frac{\pi}{12}\sqrt{a^2+b^2}$ ពិត ។

IV-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $KLMN$ ជាចំណុចកណ្ដាលចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ



-យើងនិងបង្ហាញថា $KLMN$ ជាចំណុចកូប្លានែ(ចំណុចក្នុងប្លង់)

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{ML}\times\overrightarrow{MN}\right).\overrightarrow{\mathrm{MK}}=0$

-បង្កើតតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$

យើងបាន:

$A(0,0,0),B(1,0,0),C(1,1,0),D(0,1,0),E(0,0,1),F(1,0,1),G(1,1,1),H(0,1,1)$

-K កណ្ដាល$[EF]\Rightarrow K=\left(\frac{1}{2},0,1\right)$

-L កណ្ដាល$[FB]\Rightarrow L\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$

-M កណ្ដាល$[BC]\Rightarrow M\left(1,\frac{1}{2},0\right)$

-N កណ្ដាល$[DA]\Rightarrow N\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$ យើងបាន:

$\overrightarrow{ML}=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{MN}=\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{MK}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$

$$\left(\overrightarrow{ML}\times\overrightarrow{MN}\right).\overrightarrow{MK}=\begin{vmatrix}0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}=0\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}-\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{vmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}$$

$$0+\frac{1}{2}\left(-1+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=0$$ ពិត។

នាំឱ្យ $KLMN$ ជាចំណុចកូប្លានែ(ចំនុចស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ)

យើងមាន: $\begin{cases}\overrightarrow{ML}=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\\ \overrightarrow{MN}=\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\end{cases}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{ML}.\overrightarrow{MN}=0-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow \overrightarrow{ML}\perp\overrightarrow{MN}$$

$$\Rightarrow \angle LMN=90^o$$

យើងមាន

$$\begin{cases}\overrightarrow{KL}=\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)\\ \overrightarrow{KN}=\left(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{KL}.\overrightarrow{KN}=-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}=0\Rightarrow \overrightarrow{KL}\perp\overrightarrow{KN}$$

$\Rightarrow \angle LKN=90^o$ គេបាន:

$$\Rightarrow \angle LMN+\angle LKN=180^o$$

ដូចនេះ $KLMN$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ។

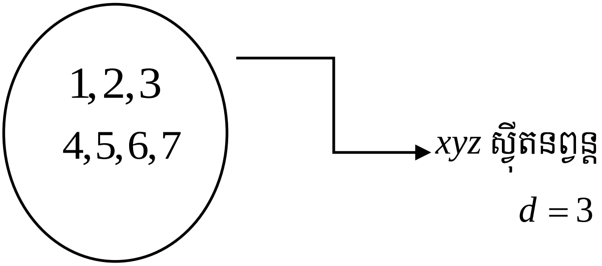
V-១) គណនា $P(A)$

A: ចាប់បានឃ្លីចុះលេខផ្ដុំបានជាស៊ីតនព្វន្តមួយដែលមានផលសងរួម $d=3$

សម្មតិកម្មៈ

-ឃ្លីក្រហម 3 ចុះលេខ

-ឃ្លីខៀវ 4 ចុះលេខ



-ឃ្លីបៃតង 2 ចុះលេខ

ករណីអាច $n(S)$

-ជ្រើសរើសឃ្លី 3 ព្រមគ្នាពីក្នុងថង់មានឃ្លី 9 គឺជាបន្សំ 3 ជ្រើសចេញពី 9

ករណីអាច $n(S)=C(9,3)=\dfrac{9!}{3!6!}=84$ ករណី

-ករណីស្រប $n(A)$

$A=\{(1,4,7),(2,5,8),(3,6,9)\} \Rightarrow n(A)=3$

ដូចនេះ $P(A)=\dfrac{3}{84}$ ។

២) គណនា $P(B)$

B: ចាប់បានឃ្លីមានផលបូកលេខជាពហុគុណនៃ 5

តាម $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}$

$n(S)=84$ ករណី

រកករណីស្រប $n(B)$

$$B=\begin{Bmatrix}(1,2,7),(1,3,6),(1,4,5),(1,5,9),(1,6,8),(2,3,5),(2,4,9),(2,5,8),\\(2,6,7),(3,4,8),(3,5,7),(3,8,9),(4,5,6),(4,7,9),(5,6,9),(5,7,8)\end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow n(B)=16$

ដូចនេះ $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{3}{84}=\dfrac{1}{18}$ ។

VI-១) គណនាដេរីវេ $f'(x)$

យើងមាន $f(x)=\int_0^x \dfrac{t^n dt}{\sqrt{x^4+t^4}}$ ដែល $n\in\mathbb{N}, x>0$

ចំណាំ ៖

$f(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} g(t)dt$ តើ $f'(x)=?$

-តាង $G(t)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $g(t)$

$\Rightarrow f(x)=\left[G(t)\right]_{u(x)}^{v(x)}$

$f(x)=G(v(x))-G(u(x))$

$\Rightarrow f'(x)=v'(x)g(x)-u'(x)g(u(x))$

ដូចនេះ $f'(x)=v'(x)g(x)-u'(x)g(u(x))$

នោះ $f(x)=\int_0^x \dfrac{t^n dt}{\sqrt{x^4+t^4}}$ ដែល $n\in\mathbb{N}, x>0$

$u(x)=0, v(x)=x, g(t)=\dfrac{t^n}{\sqrt{x^4+t^4}}$

នាំឱ្យ $f'(x)=v'(x)g(x)-u'(x)g(u(x))$

$$=1.\frac{x^n}{\sqrt{x^4+x^4}}-0=\frac{x^n}{\sqrt{2x^4}}=\frac{x^n}{x^2\sqrt{2}}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{x^{n-2}}{\sqrt{2}}$ ។

២) កំណត់តម្លៃ n ដើម្បីឱ្យ f ជាអនុគមន៍ថេរ

យើងមាន $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{t^n dt}{\sqrt{x^4+t^4}}$

តាង $t=x.z\Rightarrow dt=xdz$

បើ $t=0$ នោះ $z=0$

បើ $t=x$ នោះ $z=1$

$$\Rightarrow f(x)=\int_0^1\frac{(x.z)^n(xdz)}{\sqrt{x^4+(x.z)^4}}=\int_0^1\frac{x^{n+1}z^n dz}{x^2\sqrt{1+z^4}}$$

$$=\int_0^1 x^{n-1}\frac{z^n dz}{\sqrt{1+z^4}}$$

$$f(x)=x^{n-1}\int_0^1\frac{z^n dz}{\sqrt{1+z^4}}$$

ដូច្នេះ f ជាអនុគមន៍ថេរលុះត្រាតែ $n-1=0\Rightarrow n=1$

-រកអនុគមន៍ថេរនោះ

$n=1$ នោះ $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{tdt}{\sqrt{x^4+t^4}}$

តាមរូបមន្ត $\displaystyle\int\frac{udu}{\sqrt{u^2+a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|+c, c\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\int_0^x \frac{tdt}{\sqrt{x^4+t^4}}=\int_0^x \frac{tdt}{\sqrt{\left(t^2\right)^2+\left(x^2\right)^2}}$$

តាង $u=t^2 \Rightarrow du=2tdt \Rightarrow \frac{1}{2}du=tdt$

បើ $t=0$ នោះ $x=0$

បើ $t=x$ នោះ $u=x^2$

$$f(x)=\int_0^{x^2} \frac{\frac{1}{2}du}{\sqrt{u^2+\left(x^2\right)^2}}=\frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{du}{\sqrt{u^2+\left(x^2\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left|u+\sqrt{u^2+\left(x^2\right)^2}\right|\right]_0^{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+x^4}\right)-\ln\left(x^2\right)\right]$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2\left(1+\sqrt{2}\right)\right)-\ln\left(x^2\right)\right]$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2\left(1+\sqrt{2}\right)}{x^2}\right)$$

ដូចនេះ $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$។

VII-គណនា $\left(u_n\right)$ ជាអនុគមន៍នៃ n

របៀបទី១

យើងមាន $\begin{cases} u_0 = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ u_{n+1} = u_n^3 - 3u_n, n = 0,1,2,3.... \end{cases}$

-តាង $u_n = r\cos\theta_n, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{R}^*$

$\Rightarrow u_{n+1} = r\cos\theta_{n+1}$

តាមសមីការខាងលើគេបាន ៖

$r\cos\theta_n = r^3\cos^3\theta_n - 3r\cos\theta_n$

$\cos\theta_n = r^2\cos^3\theta_n - 3\cos\theta_n \quad (1)$

តាមរូបមន្ត $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

តាម (1) យើងត្រូវយក $r = 2$

$(1) \Rightarrow \cos\theta_{n+1} = 4\cos^3\theta_n - 3\cos\theta_n$

$\Rightarrow \cos\theta_{n+1} = \cos 3\theta_n$

$\Rightarrow \theta_{n+1} = 3\theta$

$\Rightarrow (u_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ មានរេសុង $q = 3$

$\Rightarrow \theta_n = \theta_0 \times q^n = 3^n.\theta_0$

$\Rightarrow u_n = 2\cos\left(3^n\theta_0\right)$

យក $n = 0 \ : u_0 = 2\cos\theta_0 = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\theta_0 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

តាម Euler: $\cos\theta_0 = \dfrac{e^{i\theta_o} + e^{-i\theta_0}}{2}$

យើងបាន $\dfrac{e^{i\theta_o} + e^{-i\theta_0}}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow e^{i\theta_o}+\frac{1}{e^{i\theta_o}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow e^{2i\theta_o}-\frac{4}{\sqrt{3}}e^{i\theta_o}+1=0$$

$$\Rightarrow\left(e^{i\theta_0}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-\frac{4}{3}+1=0$$

$$\Rightarrow\left(e^{i\theta_0}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow e^{i\theta_0}-\frac{2}{\sqrt{3}}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow e^{i\theta_o}=\frac{2\pm1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\begin{cases}e^{i\theta_0}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\\ e^{i\theta_0}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

-ករណី $e^{i\theta_o}=\sqrt{3}$

$$\Rightarrow i\theta_0=\ln\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \theta_0=-i\ln\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow u_n=2\cos\left(-3^n i\ln\sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow u_n=2\cos\left(i3^n\ln\sqrt{3}\right)$$

$$= 2\cosh\left(3^n \ln\sqrt{3}\right)$$

$$= 2.\frac{e^{3^n \ln\sqrt{3}} + e^{-3^n \ln\sqrt{3}}}{2}$$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^{3^n} + \left(\sqrt{3}\right)^{-3^n}$$

ដូចនេះ $u_n = \left(\sqrt{3}\right)^{3^n} + \left(\sqrt{3}\right)^{-3^n}$ ។

របៀបទី២

យើងមាន $\begin{cases} u_0 = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ u_{n+1} = u_n^3 - 3u_n , n = 0,1,2,3.... \end{cases}$

ដោយ $u_o = \dfrac{4}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

យក $a = \sqrt{3}$

$$u_o = a + \frac{1}{a}$$

-ករណី $n = 0$ $: u_1 = u_o^3 - 3u_o$

$$= \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

$$u_1 = a^3 + 3a + \frac{3}{a} + \frac{1}{a^3} - 3a - \frac{3}{a}$$

$$u_1 = a^3 + \frac{1}{a^3}$$

-ករណី $n=1: u_2 = u_1^3 - 3u_1$

$$= \left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)^3 - 3\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$$

$$= a^9 + \frac{1}{a^9}$$

យើងសង្កេតឃើញថា $u_o = a + \frac{1}{a} = a^{3^0} + a^{-3^0}$

$$u_1 = a^3 + \frac{1}{a^3} = a^{3^1} + a^{-3^1}$$

$$u_2 = a^9 + \frac{1}{a^9} = a^{3^2} + a^{-3^2}$$

....

តាមកំណើន : $u_n = a^{3^n} + a^{-3^n}$

ដូចនេះ $u_n = \left(\sqrt{3}\right)^{3^n} + \left(\sqrt{3}\right)^{-3^n}$ ។

វិញ្ញាសាទី៩

I-គេឱ្យប៉ារ៉ាបូលឈរ $(p): y = ax^2 + bx + c, a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$ នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរមេ $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ។

F ជាកំណុំនៃ (p)។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ (d) មានមេគុណប្រាប់ទិស m វិលជុំវិញចំនុច F កាត់ (p) បានពីរចំណុច A និង B ដែលបន្ទាត់ប៉ះ (p) ត្រង់ A និង B កែងគ្នាជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ m ។

II-គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{x\left(\sin\sqrt{x^2+1} - \sin x\right)}{\sqrt{1+\cos\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}}$ ។

ចូរគណនា $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$។

III-គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} - 2u_n = \dfrac{n2^{n+1}}{(n+1)!} \end{cases}$

ដែល $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

១) គេតាង $u_n = 2^n v_n$ គ្រប់ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

ចូរស្រាយថា $v_{n+1} - v_n = \dfrac{n}{(n+1)!}$ ។

២) គេតាង $C_n = v_n + \dfrac{1}{n!}$ ។ចូរស្រាយថា (C_n) ជាស្វ៊ីតថេរមួយដែលគេត្រូវបញ្ជាក់។

៣) គណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក (u_n) ជាអនុគមន៍នៃ n ។

IV-គេបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ពីរគ្រាប់តូចមួយនិងធំមួយព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ។

តាង m ជាចំនួនចេញលើគ្រប់ឡុកឡាក់តូចនិង n ជាចំនួនចេញលើគ្រប់ឡុកឡាក់ធំ។
ចូរគណនាប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

១) $A: m+n=8$ ។

២) $B: m^2 > 4n$ ។

៣) $C: 13 \le m^2+n^2 \le 40$ ។

V-ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{R}$ នូវសមីការ $\log_{12}\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\right)=\frac{1}{2}\log_9 x$ ។

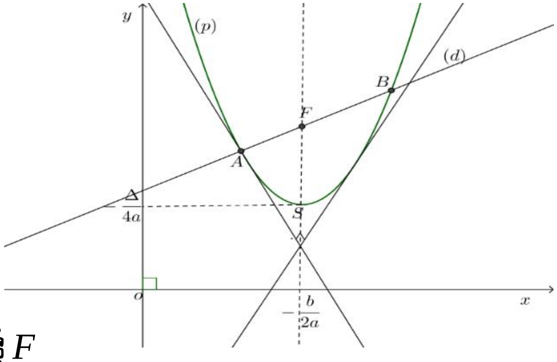
VI-គេឱ្យប៉ារ៉ាបូល $(p): y=x^2$ ហើយ A និង B ជាពីរចំណុចស្ថិតនៅលើ (p) ដែល $AB=2$។

១) រកសំណុំចំណុច I កណ្ដាលនៃអង្កត់ $[AB]$។

២) កំណត់ទីតាំងនៃចំណុច A និង B ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយ (p) និងបន្ទាត់ (AB) មានតម្លៃធំបំផុត។

ដំណោះស្រាយ

I. ស្រាយបញ្ជាក់



-រកកូអរដោនេកំនុំ F

មាន $y=ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{1}{a}y+\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow(p):\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{1}{a}\left(y+\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

$$\Rightarrow h=-\frac{b}{2a},k=-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$p=\frac{1}{4a}$$

$$F(h,k+p)=F\left(-\frac{b}{2a},\frac{1-b^2+4ac}{4a}\right)$$

សមីការបន្ទាត់ $(d): y-y_F=m(x-x_F)$

$$y=\frac{1-b^2-4ac}{4a}=m\left(x+\frac{b}{2a}\right)$$

$$(d): y=mx+\frac{bm}{2a}+\frac{1-b^2+4ac}{4a}$$

សមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វ $(p)\cap(d)$

$$ax^2+bx+c=mx+\frac{bm}{2a}+\frac{1-b^2+4ac}{4a}$$

$$ax^2+(b-m)x-\frac{bm}{2a}+\frac{b^2-1}{4a}=0 \quad (i)$$

$$\Delta=(b-m)^2-4a\left(-\frac{bm}{2a}+\frac{b^2-1}{4a}\right)$$

$$=b^2-2mb+m^2+2mb-b^2+1$$

$$\Delta=m^2+1>0, \forall m\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (d)\cap(p)=\{AB\}, \forall m\in\mathbb{R}$$

-មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ (p) ត្រង់ A & B គឺៈ

$$y'_A=2ax_A+b \ \& \ y'_B=2ax_B+b$$

$$\Rightarrow y'_A.y'_B=(2ax_A+b)(2ax_B+b)$$

$$\Rightarrow y'_A.y'_B=4a^2x_Ax_B+2ab(x_A+x_B)+b^2$$

តែ x_A & x_B ជាឬសរបស់ (i)

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតៈ

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = \dfrac{m-b}{a} \\ x_A.x_B = -\dfrac{bm}{2a^2} + \dfrac{b^2-1}{4a^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y'_A.y'_B = 4a^2\left(-\frac{bm}{2a^2} + \frac{b^2-1}{4a^2}\right) + 2ab\left(\frac{m-b}{a}\right) + b^2$$

$$-2bm + b^2 - 1 + 2bm - 2b^2 + b^2$$

$$\Rightarrow y'_A.y'_B = -1$$

ដូចនេះបន្ទាត់ប៉ះ(p) ត្រង់ $A \& B$ កែងគ្នាជានិច្ច $\forall m \in \mathbb{R}$ ។

II.គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $f(x) = \dfrac{x\left(\sin\sqrt{x^2+1} - \sin x\right)}{\sqrt{1+\cos\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}}$

រូបមន្តត្រូវប្រើៈ $\sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$f(x) = \frac{2x\sin\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{2}.\cos\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{2}}{\sqrt{2\cos^2\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{2}}}$$

$$f(x) = \pm\sqrt{2}x\sin\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}+2x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\pm\sqrt{2}\lim_{x\to+\infty}\left[x\sin\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}+2x}\right)\right]$$

តាង $z=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}+2x}$ ពេល $x\to\infty$ នោះ $z\to 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\pm\sqrt{2}\lim_{z\to+\infty}\frac{\sin z}{z}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2\sqrt{x^2+1}+2x}=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ។

III.១ ចូរស្រាយថា $v_{n+1}-v_n=\dfrac{n}{(n+1)!}$

សម្មតិកម្ម $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}-2u_n=\dfrac{n2^{n+1}}{(n+1)!} \end{cases}$ $\quad n=0,1,2,.... \quad (1)$

គេមាន $u_n=2^n v_n \quad (2)$

$\Rightarrow u_{n+1}=2^{n+1}v_{n+1} \quad (3)$

យក $(2)\&(3)$ ជួសក្នុង (1)

$$2^{n+1}v_{n+1}-2^{n+1}v_n=\frac{n2^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$2^{n+1}\left(v_{n+1}-v_n\right)=\frac{n2^{n+1}}{(n+1)!}$$

ដូចនេះ $v_{n+1}-v_n=\dfrac{n}{(n+1)!}$ ពិត។

២.ស្រាយថា$\left(C_n\right)$ជាស្វ៊ីតថេរមួយដែលគេត្រូវបញ្ជាក់

គេមាន $c_n = v_n + \frac{1}{n!}$

$$\Rightarrow c_{n+1} = v_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \qquad (4)$$

ដោយ $v_{n+1} - v_n = \frac{n}{(n+1)!}$

$$\Rightarrow v_{n+1} = v_n + \frac{n}{(n+1)!} \qquad (5)$$

យកសមីការ(5) ជួសក្នុង(4)

$$c_{n+1} = v_n + \frac{n}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$c_{n+1} = v_n + \frac{n+1}{(n+1)!}$$

ដោយ$(n+1)! = n!(n+1)$

$$\Rightarrow c_{n+1} = v_n + \frac{1}{n!}$$

$$c_{n+1} = c_n ; \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

ដូចនេះ $\left(c_n\right)$ ជាស្វ៊ីតថេរ

ដែល$c_n = c_o$ តែ$c_o = v_o + \frac{1}{0!} = \frac{u_o}{2^0} + 1 = 3$

ដូចនេះ$c_n = 3$។

៣. គណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក (u_n)

យើងមាន $c_n = v_n + \frac{1}{n!}$ តែ $c_n = 3$

ដូចនេះ $v_n = 3 - \frac{1}{n!}$ និង $u_n = 2^n.u_n$

ដូចនេះ $u_n = 2^n\left(3 - \frac{1}{n!}\right)$ ។

iv. ចូរគណនាប្រូបាប៊ីលីតេនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

១) $A: m + n = 8$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

+ចំនួនករណីអាច $n(s)$

គ្រាប់ឡុកឡាក់តូចអាចមានលទ្ធភាពចេញ 6 ករណី

គ្រាប់ឡុកឡាក់ធំអាចមានលទ្ធភាពចេញ 6 ករណី

$\Rightarrow n(s) = 6 \times 6 = 36$ ករណីអាច

+ចំនួនករណីស្រប $n(A)$

m	2	3	4	5	6
n	6	5	4	3	2

$m, n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Rightarrow n(s) = 5$ ករណី

ដូចនេះ $P(A) = \frac{5}{36}$ ។

២)គណនា $P(B)$

$B: m^2 > 4n \qquad m,n \in \{1,2,3,4,5,6\}$

B_1 បើ $n=1 \Rightarrow m \in \{3,4,5,6\}$

B_2 បើ $n=2 \Rightarrow m \in \{3,4,5,6\}$

B_3 បើ $n=3 \Rightarrow m \in \{4,5,6\}$

B_4 បើ $n=4 \Rightarrow m \in \{5,6\}$

B_5 បើ $n=5 \Rightarrow m \in \{5,6\}$

B_6 បើ $n=6 \Rightarrow m \in \{5,6\}$

$B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_6$

$$P(B) = \sum_{k=1}^{6} P(B_k) = P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_6)$$

$$4+4+3+2+2+2=17$$

ដូចនេះ $P(B) = \frac{17}{36}$ ។

៣. $C: 13 \le m^2 + n^2 \le 40$

$$P(c) = \frac{n(c)}{n(S)}$$

m	1	2	3	4	5	6
n	4,5,6	3,4,5,6	2,3,4,5	1,2,3,4	1,2,3	1,2

$n(c) = 20$ ដូចនេះ $P(c) = \frac{20}{36}$ ។

V-ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{R}$ នូវសមីការ $\log_{12}\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\right)=\frac{1}{2}\log_9 x$ (1)

ល.ខ $\begin{cases} x>0 \\ \sqrt{x}+\sqrt[4]{x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0$

តាង $t=\log_9 x \Rightarrow x=9^t$

$(1)\Rightarrow \log_{12}\left(3^t+\sqrt{3}^t\right)=\frac{1}{2}t$

$\Rightarrow 3^t+\sqrt{3}^t=12^{\frac{1}{2}t}$

$3^t+\sqrt{3}^t=3^{\frac{1}{2}t}.4^{\frac{1}{2}t}$

$3^t+\sqrt{3}^t=\sqrt{3}^t.2^t$

សម្រួលសមីការនិង $\sqrt{3}^t$

$\Rightarrow \sqrt{3}^t+1=2^t$

$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t+\left(\frac{1}{2}\right)^t=1$

$\Rightarrow \left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^t+\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^t=1$

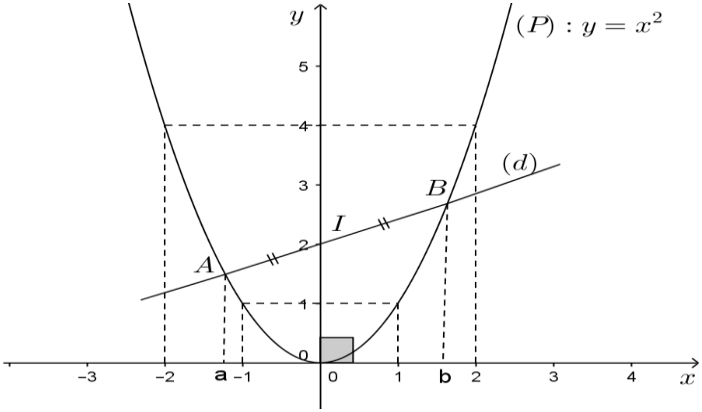
តែ $\cos^2\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{6}=1$

$\Rightarrow t=2$

ដូចនេះ $x=9^2=81$ ។

vi.១. រកសំណុំចំនុច I កណ្ដាល $[AB]$

$(P): y = x^2, A, B \in (P) / AB = 2$



តាង $a \& b$ ជាអាប់ស៊ីសនៃ $A \& B$ រៀងគ្នា

ដោយ $A, B \in (P) \Rightarrow A(a, a^2), B(b, b^2)$

I កណ្ដាល $[AB]$; $I = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a^2+b^2}{2}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{a+b}{2} & (1) \\ y_I = \frac{a^2+b^2}{2} & (2) \end{cases}$$

តាម (2) : $y_I : \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{2}$

$$= \frac{(a+b)^2}{2} - ab$$

$$= 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab$$

$$y_I = 2x_I^2 - ab \quad (3)$$

មាន $AB = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(b-a)^2 + (b^2 - a^2)^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow (b-a)^2 + (b-a)^2 (b+a)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (b-a)^2 \left[1 + (b+a)^2\right] = 4$$

$$\Leftrightarrow (b-a)^2 \left(1 + 4x_I^2\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow (b-a)^2 = \frac{4}{1+4x_I^2}$$

$$\Rightarrow ab = x_I^2 - \frac{1}{1+4x_I^2} \quad (4)$$

យក(4) ជួសក្នុង(3) $\quad y_I = 2x_I^2 - \left(x_I^2 - \frac{1}{1+4x_I^2}\right)$

$$y_I = x_I^2 + \frac{1}{1+4x_I^2}$$

ដូចនេះសំណុំចំនុច I គឺជាខ្សែកោង $(c): y = x^2 + \frac{1}{1+4x^2}$ ។

២) កំណត់ទីតាំងនៃចំណុច A និង B ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយ (p) និងបន្ទាត់ (AB) មានតម្លៃធំបំផុត

ផ្ទៃក្រឡាខ័ណ្ឌដោយ (p) និងបន្ទាត់ (AB) គឺ:

$$S = \int_a^b \left[(AB) - (P)\right].dx$$

$$(AB): y - y_A = m(x - x_A)$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a$$

$$(AB): y - a^2 = (b+a)(x-a)$$

$$(AB): y = (a+b)x - ab$$

$$S = \int_a^b \left((a+b)x - ab - x^2\right).dx$$

$$S = \left[\frac{1}{2}(a+b)x^2 - abx - \frac{x^3}{3}\right]_a^b$$

$$S = \left(\frac{1}{2}(a+b)b^2 - ab - \frac{b^3}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}(a+b)a^2 - a^2b\frac{a^3}{3}\right)$$

$$=\frac{3ab^2+3b^3-6ab^2-2b^3-3a^3-3a^2b+6a^2b+2a^3}{6}$$

$$=\frac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{6}$$

$$S=\frac{1}{6}(b-a)^3$$

$$AB=2\Leftrightarrow\sqrt{(b-a)^2+\left(b^2-a^2\right)^2}=2$$

$$\Rightarrow(b-a)^2=\frac{4}{1+(a+b)^2}$$

$$\Rightarrow b-a=\frac{2}{\sqrt{1+(a+b)^2}}\qquad(*)$$

$$\Rightarrow S=\frac{4}{3}\times\frac{1}{\left(\sqrt{1+(a+b)^2}\right)^3}$$

ដើម្បីឱ្យ S អតិបរមា $\Leftrightarrow a+b=0$

$$a=-b$$

តាម $(*)\Rightarrow 2b=2\Rightarrow b=1,a=-1$

ដូចនេះ $A(-1,1),B(1,1)$ ។

វិញ្ញាសាទី១០

I.គេឱ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីប្រាំ។គេលដឹងថា $P(x+1)$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)^3$ និង $P(x-1)$ ចែកដាច់និង $(x-1)^3$។ចូររកពហុធា $P(x)$ នោះ។

II.ដោយមិនប្រើវិធានឡូពីតាល់ចូរគណនាលីមីតនៃអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x-\tan x}{x^3}$ កាលណា $x\to 0$។

III.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$(E): y''-2y'+y=e^x(\sin x+\cos x)^2$ ។

IV.គេមានថង់ពីរ A និង B ដោយដឹងថាក្នុងថង A មានប៊ូលក្រហម 6 និងខៀវ 4 ហើយនៅក្នុងថង់ B មានប៊ូលក្រហម 4 និងខៀវ 6។គេចាប់យកប៊ូល 2 គ្រាប់ព្រមគ្នាចេញពីថង់ A ដាក់ក្នុងថង់ B និងចាប់យកប៊ូល 1 ពីថង់ B ដាក់ចូលថង់ A វិញ។ ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោមៈ

១.″E :ចំនួនប៊ូលក្រហមក្នុងថង់ A ស្មើនឹងចំនួនប៊ូលក្រហមក្នុងថង់ B″។

២.″F :ចំនួនប៊ូលខៀវក្នុងថង់ A ស្មើនឹងចំនួនប៊ូលខៀវក្នុងថង់ B″។

V.គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$u_{n+1}=\int_0^{u_n}\left(3x^2+6x+3\right)dx$ និង $u_o=1$។

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n។

VI.គណនាអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^1\frac{x^n dx}{x^4+x^2+1}$ ដែល $n=0,1,2,3,\ldots$។

១.ចូរស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះរួចគណនា I_o និង I_1។

២.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $I_{n+4}+I_{n+2}+I_n=\dfrac{1}{n+1}$ ។

៣.ចំពោះគ្រប់ $n\geq 4$ ចូរស្រាយថា $\dfrac{1}{3(n+1)}\leq I_n\leq \dfrac{1}{3(n-3)}$

រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n)$ ។

VII.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាពីរ៉ាមីតដែលមានផ្ទៃក្រឡាបាតស្មើ B និងកម្ពស់ស្មើ h មានមាឌ $V=\dfrac{1}{3}B.h$ ។

ដំណោះស្រាយ

I.ចូររកពហុធា $P(x)$

សម្មិតិកម្ម:

-$P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី៥

-$P(x)+1$ ចែកដាច់និង$(x+1)^3$

-$P(x-1)$ ចែកដាច់និង$(x-1)^3$

ដោយ $P(x)+1$ ចែកដាច់និង$(x+1)^3$

$\Rightarrow P(x)+1=(x+1)^3.A(x) \qquad (1)$

$\Rightarrow P'(x)=3(x+1)^2.A(x)+(x+1)^3.A'(x)$

$P'(x)=(x+1)^2\left[3.A(x)+(x+1)\ .A'(x)\right]$

តាមទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់បានថា$P'(x)$ ចែកដាច់នឹង$(x+1)^2$

+ដូចគ្នាដែរ $P(x)-1$ ចែកដាច់នឹង$(x-1)^3$

$\Rightarrow P(x)-1=(x-1)^3.\mathrm{B}(x)$

$\Rightarrow P(x)=(x-1)^3.B(x)+1 \qquad (2)$

$\Rightarrow P'(x)=3(x-1)^2.B(x)+(x-1)^3.B'(x)$

$\Rightarrow P'(x)=(x-1)^2\left[3.B(x)+(x-1).B'(x)\right]$

តាមទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់បានថា$P'(x)$ ចែកដាច់នឹង$(x-1)^2$

ដោយ$P(x)$ជាពហុធាដឺក្រេទី៥

នោះ $P'(x)$ជាពហុធាដឺក្រេទី៤

តាមសម្រាយខាងលើ $P'(x)$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)^2$ នឹង $(x-1)^2$

$\Rightarrow P'(x)$ ត្រូវចែកដាច់នឹង $(x+1)^2\,(x-1)^2$ ជាពហុធាដឺក្រេទី៤

$$\Rightarrow P'(x)=a(x+1)^2(x-1)^2, a\in\mathbb{R}^*$$

$$\Rightarrow P(x)=a\int (x+1)^2(x-1)^2\,dx$$

$$=a\int \left(x^2-1\right)^2 dx$$

$$=a\int \left(x^4-2x^2+1\right)dx$$

$$P(x)=a\left(\frac{x^5}{5}=\frac{2}{3}x^3+x\right)+c$$

យក $x=-1$ ជួសក្នុង (1) $\Rightarrow P(-1)=-1$

យក $x=1$ ជួសក្នុង $(2)\Rightarrow P(1)=1$

ដោយ $P(x)=a\left(\frac{x^5}{5}=\frac{2}{3}x^3+x\right)+c$

$$\Rightarrow\begin{cases}P(-1)=a\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-1\right)+c=-1\\ P(1)=a\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right)+c=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{18}{5}a + c = -1 \\ \frac{8}{15}a + c = 1 \end{cases}$$

$$2c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow \frac{8}{15}a = 1 \Rightarrow a = \frac{15}{8}$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{15}{8}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 + x\right)$$

ដូចនេះ $P(x) = \frac{3}{8}x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{15}{8}x$ ។

II. ដោយមិនប្រើវិធានឡូពីតាល់

គណនាលីមីត $\lim_{x\to 0} f(x)$; $f(x) = \frac{x - \tan x}{x^3}$

គេមាន $f(x) = \frac{x - \tan x}{x^3}$

$$\Rightarrow f(3x) = \frac{3x - \tan 3x}{(3x)^3} = \frac{3x - \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}}{27x^3}$$

$$= \frac{3x - 9x\tan^2 x - 3\tan x + \tan^3 x}{27x^3\left(1 - 3\tan^2 x\right)}$$

$$= \frac{3\left(x - \tan x\right) - \tan^2 x\left(9x - \tan x\right)}{27x^3\left(1 - 3\tan^2 x\right)}$$

$$=\frac{1}{9}.\frac{x-\tan x}{x^3}\times\frac{1}{1-3\tan^2 x}-\frac{\tan^2 x(9x-\tan x)}{27x^3(1-3\tan^2 x)}$$

$$f(3x)=\frac{1}{9(1-3\tan^2 x)}.f(x)-\frac{1}{27}.\frac{\tan^2 x}{x^2}\times\left(9-\frac{\tan x}{x}\right).\frac{1}{1-3\tan^2 x}$$

តាង $\lim_{x\to0} f(x)=l\Rightarrow\lim_{x\to0} f(3x)=l$

$$\lim_{x\to0} f(3x)=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{9(1-3\tan^2 x)}.f(x)-\frac{1}{27}.\frac{\tan^2 x}{x^2}\left(9-\frac{\tan x}{x}\right).\frac{1}{1-3\tan^2 x}\right]$$

$$l=\frac{1}{9}l-\frac{1}{27}(8)$$

$$27l=3l-8$$

$$24l=-8\Rightarrow l=\frac{-8}{24}=-\frac{1}{3}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to0} f(x)=-\frac{1}{3}$ ។

III.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$(E): y''-2y'+y=e^x(\sin x+\cos x)^2$$

តាង $y=z.e^x$ ជាចម្លើយរបស់ (E)

$$\Rightarrow y'=z'e^x+ze^x=(z'+z)e^x$$

$$\Rightarrow y''=(z''+z')e^x+(z'+z)e^x=(z''+2z'+z)e^x$$

យក y, y', y'' ជួសក្នុង (E)

$$\left(z''+2z'+z\right)e^{x}-2\left(z'+z\right)e^{x}+ze^{x}=e^{x}\left(\sin x+\cos x\right)^{2}$$

$$z''+2z'+z-2z'-2z+z=\left(\sin x+\cos x\right)^{2}$$

$$z''=1+\sin 2x$$

$$\Rightarrow z'=\int\left(1+\sin 2x\right)dx=x-\frac{1}{2}\cos 2x+A$$

$$\Rightarrow z=\int\left(x-\frac{1}{2}\cos 2x+A\right)dx=\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+Ax+B$$

ដូចនេះ $y=\left(\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+Ax+B\right)$

$$y=\left(\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right)e^{x}+\left(Ax+B\right)e^{x}\quad ;A,B\in\mathbb{R}$$ ។

IV.ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

១.គណនា $P\left(E\right)$

E :ចំនួនប៊ូលក្រហមក្នុងថង់ A ស្មើនឹងចំនួនប៊ូលក្រហមក្នុងថង់ B

ដើម្បីឱ្យចំនួនប៊ូលក្រហមក្នុងថង់ទាំងពីរស្មើគ្នាតាមការពិសោធន៏រួចមានពីរករណី៖

⌖ករណីទី១: ត្រូវយកបានប៊ូលក្រហមទាំងពីរពីថង់ A ដាក់ចូលថង់ B រួចយកបានប៊ូលក្រហម១ ពីថង់ B ដាក់ចូលថង់ A វិញ។

⌖ករណីទី២: ត្រូវយកបានប៊ូលក្រហមមួយនឹង ខៀវមួយពីថង់ A ដាក់ចូលថង់ B រួចយកបានប៊ូលខៀវមួយពីថង់ B ដាក់ចូលថង់ A វិញ។

-តាងព្រឹត្តិការណ៏៖

A_1 :ចាប់បានប៊ូលក្រហមពីរ ពីថង់ A ដាក់ចូល B

B_1 :ចាប់បានប៊ូលក្រហមមួយ ពីថង់ B ដាក់ចូល A

A_2 :ចាប់បានប៊ូលក្រហមមួយ ខៀវមួយពីថង់ A ដាក់ចូល B

B_2 :ចាប់បានប៊ូលខៀវមួយពីថង់ B ដាក់ចូល A

$E=\left(A_1\cap B_1\right)\cup\left(A_2\cap B_2\right)$

$P\left(E\right)=P\left(A_1\cap B_1\right)+P\left(A_2\cap B_2\right)$

$=P\left(A_1\right).P\left(B_1\setminus A_1\right)+P\left(A_2\right).\mathrm{P}\left(B_2\setminus A_2\right)$

$=\dfrac{c(6,2)}{c(10,2)}\times\dfrac{c(6,1)}{c(12,1)}+\dfrac{c(6,1)\times c(4,1)}{c(10,2)}\times\dfrac{c(7,1)}{c(12,1)}=0.47$ ករណី។

V.គណនា u_n ជាអនុគមន៏នៃ n

មាន $u_o=1$ $,u_{n+1}=\int_0^{u_n}\left(3x^2+6x+3\right)dx$

$=\left[x^3+3x^2+3x\right]_0^{u_n}$

$u_{n+1}=u_n^3+3u_n^2+3u_n$

$u_{n+1}=\left(u_n+1\right)^3-1$

$u_{n+1}+1=\left(u_n+1\right)^3$

$\ln\left(u_{n+1}+1\right)=3\ln\left(u_n+1\right)$

តាង $v_n=\ln\left(u_n+1\right)\Rightarrow v_{n+1}=\ln\left(u_{n+1}+1\right)$

$v_{n+1}=3v_n$

$\Leftrightarrow\left(v_n\right)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានផលធៀបរួម $q=3$

និង $v_o=\ln\left(u_o+1\right)=\ln 2$

$v_n=v_o.q^n=3^n\ln 2$

ដោយៈ

$$\left.\begin{aligned} v_n &= \ln\left(2^{3^n}\right) \\ v_n &= \ln\left(u_n+1\right) \end{aligned}\right| \Rightarrow u_n+1=2^{3^n}$$

ដូចនេះ $\Rightarrow u_n = 2^{2^n}-1$។

VI. ១.ចូរស្រាយថា $\left(I_n\right)$ ជាស្វ៊ីតចុះរួចគណនា I_o និង I_1

$$I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^4+x^2+1}.dx$$

មាន $x^4+x^2+1>0, \forall x\in[0,1]$

ដោយ $x\in[0,1]: x\le 1$

$$\Leftrightarrow x^{n+1}\le x^n$$

ចែកអង្គនឹង $x^4+x^2+1>0$

$$\frac{x^{n+1}}{x^4+x^2+1}\le\frac{x^n}{x^4+x^2+1}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^4+x^2+1}dx\le\int_0^1 \frac{x^n}{x^4+x^2+1}dx$$

$$I_{n+1}\le I_n$$

ដូចនេះ $\left(I_n\right)$ ជាស្វ៊ីតចុះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

យក $n=0: I_o=\int_0^1 \frac{1}{x^4+x^2+1}.dx$

មាន $\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}.\frac{\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)}{x^4+x^2+1}$

$$=\frac{1}{2}.\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}-\frac{1}{2}.\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{2}.\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)'}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}-\frac{1}{2}.\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)'}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}$$

$$\Rightarrow I_o=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)'}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}dx-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)'}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}.dx$$

រូបមន្តៈ

$$\int\frac{u'}{u^2+a^2}dx=\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+c$$

$$\int\frac{u'}{u^2-a^2}dx=\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+c$$

$$I_o=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{3}}\right]_0^1-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1}\right|\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}\right)\right]_o^1-\frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right|\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]-\frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{1}{3}\right)-\ln(1)\right]$$

$$=\frac{\pi}{4\sqrt{3}}-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi+\sqrt{3}\ln 3}{4\sqrt{3}}$$ ។

យក $n=1$

$$I_1=\int_0^1\frac{xdx}{x^4+x^2+1}$$

$$=\int_0^1\frac{xdx}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

តាង $u=x^2+\frac{1}{2}\Rightarrow du=2xdx\Rightarrow\frac{1}{2}dx=xdx$

x	0	1
u	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\frac{1}{2}dx}{u^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{du}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}arc\tan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[arc\tan\left(\sqrt{3}\right)-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

ដូចនេះ $I_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ ។

២.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $I_{n+4}+I_{n+2}+I_n=\frac{1}{n+1}$

គេមាន $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^4+x^2+1}.dx$

$$\Rightarrow I_{n+4}+I_{n+2}+I_n=\int_0^1\frac{x^{n+4}+x^{n+2}+x^n}{x^4+x^2+1}.dx$$

$$=\int_0^1 x^n dx$$

$$=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $I_{n+4}+I_{n+2}+I_n=\dfrac{1}{n+1}$ ពិត។

៣.ចំពោះគ្រប់ $n\ge 4$ ចូរស្រាយថា $\dfrac{1}{3(n+1)}\le I_n\le\dfrac{1}{3(n-3)}$

តាង $f(n)=I_{n+4}+I_{n+2}+I_n \quad ,n\ge 4$

ដោយ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះនោះគ្រប់ $n\ge 4$

$f(n)=I_{n+4}+I_{n+2}+I_n\le I_n+I_n+I_n$

$f(n)\le 3I_n$ (ព្រោះ $I_{n+4}\le I_n, I_{n+2}\le I_n$)

$\dfrac{1}{3}f(n)\le I_n \qquad ;(1)$

ម្យ៉ាងទៀត $f(n-4)=I_n+I_{n-2}+I_{n-4}$

$\Rightarrow f(n-4)\ge I_n+I_n+I_n$

$f(n-4)\ge 3I_n$ ព្រោះ $\begin{cases} I_{n-2}\ge I_n \\ I_{n-4}\ge I_n \end{cases}$

$I_n\le\dfrac{1}{3}f(n-4) \qquad ;(2)$ តាម (1) និង (2)

$\dfrac{1}{3}f(n)\le I_n\le\dfrac{1}{3}f(n-4)$

តែ $f(n)=\dfrac{1}{n+1}\Rightarrow f(n-4)=\dfrac{1}{n-3}$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{3(n+1)}\le I_n\le\dfrac{1}{3(n-3)}$ ។

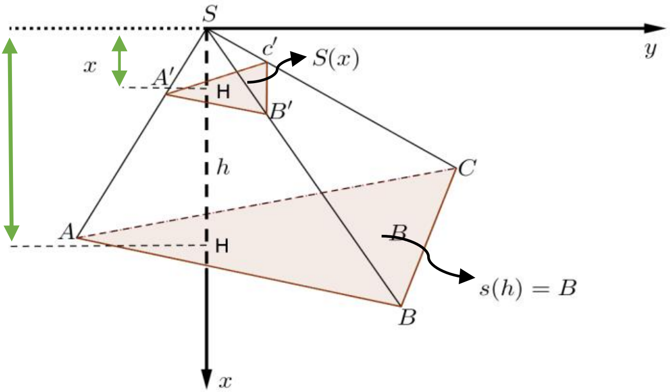
រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n)$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{3(n+1)}\le\lim\limits_{n\to+\infty}nI_n\le\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{3(n-3)}$

$\frac{1}{3}\le\lim\limits_{n\to+\infty}nI_n\le\frac{1}{3}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}nI_n=\frac{1}{3}$ ។

VII.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាមាឌពីរ៉ាមីត $V=\frac{1}{3}B.h$



$V=\int_0^h S(x)dx$

ដោយ $\Delta A'B'C'\sim\Delta ABC$

$S(x)=\frac{B.x^2}{h^2}$

$V=\frac{B}{h^2}\int_0^h x^2dx$

$=\frac{B}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h=\frac{1}{3}B.h$ ដូចនេះ មាឌពីរ៉ាមីត $V=\frac{1}{3}B.h$ ។

វិញ្ញាសាទី១១

I-គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $u_n = \dfrac{3n^2 - 3n - 2}{\left(n^3 - 3n^2 + 1\right)\left(n^3 - 3n - 1\right)}$

ដែល $n \in \mathbb{N}$ ។

តាង $S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k) = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ ។ចូរគណនាលីមីត $\lim_{n\to\infty} S_n$ ។

II-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^6 + 1}$ ។

III-គេមានថង់ពីរថង់ X និងថង់ Y ដោយដឹងថានៅក្នុងថង់ X មានប៊ិចពណ៌ក្រហម 4 និងប៊ិចពណ៌ខៀវ 6 ហើយនៅក្នុងថង់ Y មានប៊ិចក្រហម 2 និងប៊ិចខៀវ 7 ។គេចាប់យកប៊ិច 1 ពីថង់ X ដាក់ចូលទៅក្នុងថង់ Y រួចចាប់យកប៊ិច 1 ពីថង់ Y ដាក់ចូលក្នុងថង់ X វិញ។ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម

១. A: នៅក្នុងថង់ Y ចំនួនប៊ិចពណ៌ក្រហមស្មើនឹងពាក់កណ្តាលនៃប៊ិចពណ៌ខៀវ។

២. B: នៅក្នុងថង់ X ចំនួនប៊ិចពណ៌ក្រហមនិងប៊ិចខៀវស្មើគ្នា។

៣. C: ចំនួនប៊ិចពណ៌ក្រហមនិងចំនួនប៊ិចពណ៌ខៀវក្នុងថង់នីមួយៗមិនប្រែប្រួល។

IV-ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = e^{2x}\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right)$$

V-គេឱ្យស្វ៊ីត (I_n) កំណត់ដោយ $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \dfrac{\cos x}{e^x} dx$ ដែល $n = 0,1,2,3,..$

១.គណនា I_0 ។

២.ចូរស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្ររួចគណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៣.គណនាផលបូក $S_n = I_0 + I_1 + I_2 + ... + I_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n

រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

VI-គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $z = f(x,y) = x^x y^y - x^y y^x$ ដែល $x>0, y>0$។

១.ចូរគណនា $\frac{\partial z}{\partial x}$ និង $\frac{\partial z}{\partial y}$

២.ចូរស្រាយថា $z \geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0, y>0$។

៣.ទាញបញ្ជាក់ថាគ្រប់ $a,b,c>0$ គេបាន $a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

I.គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty} s_n$

យើងមាន $u_n = \dfrac{3n^2-3n-2}{(n^3-3n^2+1)(n^3-3n-1)}; n\in\mathbb{N}$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k) = u_1 + u_2 + \dots u_n$$

តាង $a_n = n^3 - 3n^2 + 1$

$$a_{n+1} = n^3 - 3n - 1$$

មាន $a_{n+1} - a_n = 3n^2 - 3n - 2$

$$u_n = \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n.a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$S=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$$

តែ $a_1=-1$

ដូចនេះ $s_n=-1-\frac{1}{n^3-3n-1}$ ។

នោះលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-1-\frac{1}{n^3-3n-1}\right)=-1$ ។

II.គណនាអាំងតេក្រាល $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^6+1}$

នោះ $I=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^6+1}$

គេមាន $x^6+1=\left(x^2\right)^3+1=\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)$

$$\frac{1}{x^6+1}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)}$$

$$=\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)}$$

$$=\frac{1}{x^4-x^2+1}-\frac{x^2}{x^6+1}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)}{x^4-x^2+1}-\frac{x^2}{x^6+1}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}-\frac{1}{2}\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}-\frac{x^2}{x^6+1}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}-\frac{x^2}{x^6+1}$$

$$=\frac{1}{x^6+1}=\frac{1}{2}.\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)'}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1}-\frac{1}{2}\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)'}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3}-\frac{1}{3}\frac{\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2+1}$$

រូបមន្តៈ

$$\int\frac{u'}{u^2+a^2}dx=\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right)+c$$

$$\int\frac{u'}{u^2-a^2}dx=\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+c$$

$$I=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\left[\frac{1}{2}\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)'}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1^2}-\frac{1}{2}\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)'}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\sqrt{3}^2}-\frac{1}{3}\frac{\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2+1}\right]dx$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan\left(x-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{3}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{3}}\right|-\frac{1}{3}\arctan\left(x^3\right)\right]_1^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left\{\left[\frac{1}{2}arc\tan\left(b-\frac{1}{b}\right)-\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{b^2-b\sqrt{3}+1}{b^2+b\sqrt{3+1}}\right|-\frac{1}{3}\arctan\left(b^3\right)\right]\right.$$

$$-\left[0-\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right|-\frac{1}{3}.\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}-0-\frac{1}{3}.\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{12}$$

$$=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left(2-\sqrt{3}\right)^2$$

ដូចនេះ $I=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$។

III.គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោមៈ

១. A: នៅក្នុងថង់ Y ចំនួនប៊ិចពណ៌ក្រហមស្មើនឹងពាក់កណ្តាលនៃប៊ិចពណ៌ខៀវ។

តាងព្រឹត្តិការណ៍

A_1 : ចាប់លើកទី១បានប៊ិចក្រហមពី X ដាក់ចូល Y

A_2 : ចាប់លើកទី២បានប៊ិចខៀវពី Y ដាក់ចូល X

$\Rightarrow A_1 \cap A_2$

$P(A) = P(A_1 \cap A_2) \quad (1)$

-ប្រូបាបមានលក្ខ័ខណ្ឌ

$$P(A_2 / A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}$$

$\Rightarrow P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2 / A_1) \quad (2)$

តាមសមីការ $(1) \& (2)$ យើងបាន:

$P(A) = P(A_1).P(A_2 / A_1)$

$P(A) = \frac{4}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{25}$ ។

២. គណនា $P(B)$

B:នៅក្នុងថង់ X ចំនួនប៊ិចពណ៏ក្រហមនិងប៊ិចខៀវស្មើគ្នា

តាងព្រឹត្តិការណ៏៖

B_1 : ចាប់លើកទី១បានប៊ិចពណ៏ខៀវពី X ដាក់ចូល Y

B_2 : ចាប់លើកទី២បានប៊ិចពណ៏ក្រហមពី Y ដាក់ចូល X

$\Rightarrow B = B_1 \cap B_2$

$P(B) = P(B_1 \cap B_2)$

$\quad\quad = P(B_1).P(B_2 / B_1)$

$P(B) = \frac{6}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{3}{25}$ ។

៣.គណនា $P(C)$

C:ចំនួនប៊ិចពណ៏ក្រហមនិងចំនួនប៊ិចពណ៏ខៀវក្នុងថង់នីមួយៗមិនប្រែប្រួល

$P(c)=1-P(A)-P(B)$

$P(c)=1-\frac{7}{25}-\frac{3}{25}=\frac{15}{25}$ ។

IV.ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$y'''-6y''+12y'-8y=e^{2x}\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)$

តាង $z=ye^{-2x}$

$\Rightarrow z'=y'e^{-2x}-2ye^{-2x}=\left(y'-2y\right)e^{-2x}$

$z''=\left(y''-2y'\right)e^{-2x}-2\left(y'-2y\right)e^{-2x}$

$z''=\left(y''-4y'+4y\right)e^{-2x}$

$\Rightarrow z'''=\left(y'''-4y''+4y'\right)e^{-2x}-2\left(y''-4y'+4y\right)e^{-2x}$

$z'''=\left(y'''-6y''+12y'-8y\right)e^{-2x} \quad (2)$

យក (1) ជួសក្នុង (2) យើងបាន

$z'''=\sin^6 x+\cos^6 x$

តាមរូបមន្ត $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

យក $a=\sin^6 x \ ,b=\cos^6 x$

នាំឱ្យ $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^3 x\cos^3 x$

$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$

$=1-\frac{3}{4}.\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)$

$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$

$$z''' = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$$

$$\Rightarrow \int z''' dx = \int \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x \right) dx$$

$$z'' = \frac{5}{8}x + \frac{3}{32}\sin 4x$$

$$z' = \frac{5}{16}x^2 - \frac{3}{128}\cos 4x$$

$$z = \frac{5}{48}x^3 - \frac{3}{512}\sin 4x + C$$

ដោយ $\frac{5}{48} - \frac{3}{512}\sin 4x = ye^{-2x} \Rightarrow y = e^{2x}\left(\frac{5}{48} - \frac{3}{512}\sin 4x \right)$

ដូចនេះ $y = e^{2x}\left(\frac{5}{48} - \frac{3}{512}\sin 4x \right)$ ។

V- ១ គណនា I_o

មាន $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos x}{e^x} dx \qquad , n = 0,1,2,3.....$

ចំពោះ $n = 0$: $I_o = \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{e^x} dx$

$$I_o = \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx$$

តាង $u = e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x}$

$$dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$$

$$\Rightarrow I_o = \left[e^{-x}\sin x\right]_0^{\pi} + \int e^{-x}\sin x dx$$

$$I_o = \int e^{-x}\sin x dx$$

តាង $u = e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x}$

$$dv = \sin x dx \Rightarrow v = \cos x$$

$$I_o = \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x dx$$

នាំឱ្យ $I_o = e^{-\pi} + 1 - I_o$

$$\Rightarrow I_o = \frac{e^{-\pi}+1}{2}$$

ដូចនេះ $I_o = \dfrac{e^{-\pi}+1}{2}$ ។

២. ស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

មាន $I_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos x}{e^x}dx \Rightarrow I_{n+1} = \int_{n\pi}^{(n+2)\pi} \frac{\cos x}{e^x}dx$

តាង $x = \pi + t \Rightarrow dx = dt$

បើ $x = (n+1)\pi \Rightarrow t = n\pi$

បើ $x = (n+2)\pi \Rightarrow t = (n+1)\pi$

នាំឱ្យ $I_{n+1} = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos(\pi+t)}{e^{\pi+t}}dt$

$$= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} -\frac{\sin t}{e^{\pi}.e^{t}}dt$$

$$= -\frac{1}{e^{\pi}}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{e^{t}}dt$$

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e^{\pi}}I_n$$

ដូចនេះ (I_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ មានរេសុង $q = -\frac{1}{e^{\pi}}$

✎ គណនា (I_n) ជាអនុគមន៍នៃ n

តាម $I_n = I_o \times q^n$

$$I_n = \frac{e^{-\pi}+1}{2}\left(-\frac{1}{e^{-\pi}}\right)^n$$

ដូចនេះ $I_n = \frac{e^{-\pi}+1}{2}\left(-\frac{1}{e^{-\pi}}\right)^n$ ។

៣.គណនាផលបូក $S_n = I_0 + I_1 + I_2 + ... + I_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n

$$S_n = I_o + I_1 + I_2 + ... + I_n$$

$$= I_o \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$= \frac{e^{-\pi}+1}{2} \times \frac{1-\left(-\frac{1}{e^{\pi}}\right)^{n+1}}{1+e^{-\pi}}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{2}\left[1-\left(-\frac{1}{e^{\pi}}\right)^{n+1}\right]$

➯រក $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left[1-\left(-\frac{1}{e^{\pi}}\right)^{n+1}\right]=\frac{1}{2}$ ។

VI- ១. គណនា $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

មាន $z=f\left(x,y\right)=x^x y^y-x^y y^x$

➯ $\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^x\right)^{'}y^y-\left(y^x\right)^{'}x^y-\left(x^y\right)^{'}y^x$

ដោយ $\left(x^x\right)^{'}=e^{x\ln x}$

$\Rightarrow\left(x^x\right)^{'}=\left(x\ln x\right)^{'}e^{x\ln x}=\left(\ln x+1\right)e^{x\ln x}$

$\left(x^x\right)^{'}=yx^{y-1}$

$\left(y^x\right)^{'}=y^x\ln y$

ដូចនេះ $\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln x+1\right)x^x y^y-yx^{y-1}x^y-x^y y^x\ln y$

➯ $\frac{\partial z}{\partial y}=x^x\left(y^y\right)^{'}-\left(x^y\right)^{'}y^x-x^y\left(y^x\right)^{'}$

$=\left(\ln y+1\right).x^x-y^x.x^y.\ln x-x^y.x.y^{x-1}$

២. ស្រាយថា $z>0\ ,\forall x,y>0$

មាន $z=x^x y^y-x^y y^x$

-ករណី $x = y \quad : x, y > 0$

$\Rightarrow z = x^x x^x - x^x x^x = 0 \quad (1)$

-ករណី $x > y \ : x, y > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y > 0 \\ \dfrac{x}{y} > 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^{x-y} > 1^{x-y}$$

$$\frac{x^{x-y}}{y^{x-y}} > 1$$

$$\frac{x^x}{x^y} \cdot \frac{y^y}{y^x} > 1$$

$$x^x y^x > x^y y^x$$

$\Rightarrow z > 0 \quad (2)$

-ករណី $x < y \ : x, y > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - x > 0 \\ \dfrac{y}{x} > 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^{y-x} > 1^{y-x}$$

$$\frac{y^{y-x}}{x^{y-x}} > 1$$

$$\frac{y^y}{y^x} \cdot \frac{x^x}{x^y} > 1$$

$$y^y x^x > y^x x^x$$

$\Rightarrow z > 0 \quad (3)$

៣. ទាញបញ្ជាក់ថា $a^a.b^b.c^c > (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$

តាមសម្រាយខាងលើ $\forall x, y >, z \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^x.y^y - x^y.y^x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^x.y^y \geq x^y.y^x \quad (*)$$

តាមវិសមភាព$(*)$ ចំពោះគ្រប់ $a > 0, b > 0, c > 0$ យើងទាញបាន ៖

$$\begin{cases} a^a.b^b \geq a^b.b^a \\ a^a.c^c \geq a^c.c^a \\ b^b.c^c \geq b^c.c^b \end{cases}$$

$$a^{2a}.b^{2b}.c^{2c} \geq a^{b+c}.b^{a+c}.c^{a+b}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $a^a.b^b.c^c$

$$a^{3a}.b^{3b}.c^{3c} \geq a^{a+b+c}.b^{a+b+c}.c^{a+b+c}$$

$$\left(a^a.b^b.c^c\right)^3 \geq (abc)^{a+b+c}$$

$$\left(a^a.b^b.c^c\right) \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$$

ដូចនេះ $\left(a^a.b^b.c^c\right) \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$ ពិត ។

វិញ្ញាសាទី១២

I-គេឱ្យម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ 2×2: $A=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$

១.គណនា A^2 និង A^3។គេឧបមាថា $A^n=\begin{bmatrix}x_n & -y_n\\ y_n & x_n\end{bmatrix}$គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$។

ចូរស្រាយថាគេមានទំនាក់ទំនង$\begin{cases}x_{n+1}=\sqrt{3}x_n-y_n\\ y_{n+1}=x_n+\sqrt{3}y_n\end{cases}$

២.គេតាង $z_n=x_n+iy_n$ ។ចូរស្រាយថា $z_{n+1}=\left(\sqrt{3}+i\right)z_n$ រួចទាញថា $z_n=2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$

៣.ចូរប្រៀបធៀប $\det\left(A^n\right)$ និង $\left[\det\left(A\right)\right]^n$។

II-គេឱ្យពហុធា $f\left(x\right)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ ។គេដឹងថា

$f\left(1\right)=1, f\left(2\right)=8$ និង $f\left(3\right)=27$។

ចូរស្រាយថា $f\left(2+\lambda\right)+f\left(2-\lambda\right)=2\lambda^4+10\lambda^2+16$។

III-ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''-2\alpha y'+\alpha^2 y=\dfrac{e^{\alpha x}}{x^4+64}$ ។

IV-គេឱ្យគូប $ABCDEFGH$ មួយមានទ្រនុងស្មើ $1cm$ ។K,L និង M ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃ $[EF],[CD]$ និង $[DH]$។

១.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{MK}.\overrightarrow{ML}$ រួចទាញរកឈ្មោះនៃ ΔKLM ។

២. P ជាចំណុចមួយនៃ $[EH]$ ហើយគេតាង $\angle KPL=\varphi$។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ទីតាំងនៃ P ប្រែប្រួលក្នុង $[EH]$ គេមាន $\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$

តើពេលណាទើបគេបាន $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

១.គណនា A^2 និង A^3។គេឧបមាថា $A^n=\begin{bmatrix} x_n & -y_n \\ y_n & x_n \end{bmatrix}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

យើងបាន: $A^2=A\times A$

$$=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3-1 & -\sqrt{3}-\sqrt{3} \\ \sqrt{3}+\sqrt{3} & -1+3 \end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$$ ។

$$A^3=A^2\times A$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\sqrt{3}-2\sqrt{3} & -2-6 \\ 6+2 & -2\sqrt{3}+2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$ ។

+ឧបមាថា $A^n=\begin{bmatrix} x_n & -y_n \\ y_n & x_n \end{bmatrix}$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$។

ស្រាយថា $\begin{cases} x_{n+1}=\sqrt{3}x_n-y_n \\ y_{n+1}=x_n+\sqrt{3}y_n \end{cases}$

+តាមលក្ខណះស្វ័យគុណនៃម៉ាទ្រីស $A^{n+1}=A^n.A$

$$=\begin{bmatrix} x_{n+1} & -y_{n+1} \\ y_{n+1} & x_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_n & -y_n \\ y_n & x_n \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} x_{n+1} & -y_{n+1} \\ y_{n+1} & x_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{3}x_n - y_n & -x_n-\sqrt{3}y_n \\ \sqrt{3}y_n + x_n & -y_n+\sqrt{3}x_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1}=\sqrt{3}x_n-y_n \\ y_{n+1}=-x_n-\sqrt{3}y_n \\ y_{n+1}=\sqrt{3}y_n-x_n \\ x_{n+1}=-y_n+\sqrt{3}x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1}=\sqrt{3}x_n-y_n \\ y_{n+1}=x_n+\sqrt{3}y_n \end{cases}$$

ដូចនេះ $\begin{cases} x_{n+1}=\sqrt{3}x_n-y_n \\ y_{n+1}=x_n+\sqrt{3}y_n \end{cases}$ ។

២.គេតាង $z_n = x_n + iy_n$ ។ចូរស្រាយថា $z_{n+1}=\left(\sqrt{3}+i\right)z_n$ រួចទាញថា $z_n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$

មាន $z_n = x_n + iy_n$

$$\Rightarrow z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$$

$$=\left(\sqrt{3}x_n - y_n\right)+i\left(x_n+\sqrt{3}y_n\right)=\sqrt{3}x_n - y_n + ix_n + i\sqrt{3}y_n$$

$$=\left(\sqrt{3}x_n + ix_n\right)+\left(i\sqrt{3}y_n - y_n\right)$$

$$z_{n+1}=\left(\sqrt{3}+i\right)x_n + iy_n\left(\sqrt{3}+i\right)=\left(\sqrt{3}+i\right)\left(x_n+iy_n\right)=\left(\sqrt{3}+i\right)z_n$$

ពិត

ដូចនេះ $z_{n+1}=\left(\sqrt{3}+i\right)z_n$ ពិត

ទាញថា $z_n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$

+តាមទំនាក់ទំនង $z_{n+1}=\left(\sqrt{3}+i\right)z_n$ បញ្ជាក់បានថា $\left(z_n\right)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចដែលមានរេសុង $q=\sqrt{3}+i$ និង $z_1=x_1+iy_1$

ដោយ $A=\begin{bmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\Rightarrow x_1=\sqrt{3}, y_1=1$

ដូចនេះ $\boxed{z_1=\sqrt{3}+i}$

$\cdot\ z_n=z_1\times q^{n-1}$

$$=\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)^{n-1}=\left(\sqrt{3}+i\right)^n$$

តែ $\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

ដូចនេះ $\boxed{\Rightarrow\ z_n=\left[2e^{i\frac{\pi}{6}}\right]^n=2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}\ \text{ពិត}}$

៣.ចូរប្រៀបធៀប $\det\left(A^n\right)$ និង $\left[\det\left(A\right)\right]^n$

មាន: $A=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\Rightarrow\det\left(A\right)=\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}=3+1=4$

$$\Rightarrow\left[\det\left(A\right)\right]^n=4^n\quad(1)$$

ម្យ៉ាងទៀត: $A^n=\begin{bmatrix} x_n & -y_n \\ y_n & x_n \end{bmatrix}\Rightarrow\det\left(A^n\right)=\begin{vmatrix} x_n & -y_n \\ y_n & x_n \end{vmatrix}$

$\det\left(A^n\right)=x_n^2+y_n^2=\left|z_n^2\right|\quad(2)$,ដែល

$\left(z_n=x_n+iy_n\Rightarrow\left|z_n\right|=\sqrt{x_n^2+y_n^2}\right)$

ដោយ $z_1=2e^{i\frac{n\pi}{6}}=re^{i\theta}\ \Rightarrow\left|z_n\right|=2^n$

តាម $(2)\Rightarrow\det\left(A^n\right)=\left(2^n\right)^2=4^n\quad(3)$

តាម $(1)\&(3)\Rightarrow\det\left(A^n\right)=\left[\det(A)\right]^n$

ដូចនេះ $\boxed{\det\left(A^n\right)=\left[\det(A)\right]^n}$។

II. ចូរស្រាយថា $f(2+\lambda)+f(2-\lambda)=2\lambda^4+10\lambda^2+16$

មានៈ . $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

. $f(1)=1,\ f(2)=8$ និង $f(3)=27$

+តាង $g(x)=f(x)-x^3$ (អោយស្មើសូន្យ)

$\Rightarrow g(1)=g(2)-g(3)=0$ នោះ $x\in\{1,2,3\}$ ជាឬសរបស់ $g(x)$

+<u>តាមទ្រឹស្តីបទកត្តាៈ</u> $g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-x_o)$

$\Rightarrow f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-x_o)+x^3$

យក $x=2+\lambda$:

$f(2+\lambda)=(1+\lambda)\lambda(\lambda-1)(\lambda+2-x_o)+(2+\lambda)^3\ (1)$

យក $x=2-\lambda$: $f(2-\lambda)=(1-\lambda)(-\lambda)(-\lambda-1)(-\lambda+2-x_o)$

$+(2-\lambda)^3$

$f(2-\lambda)=(1+\lambda)\lambda(\lambda-1)(\lambda-2+x_o)+(2-\lambda)^3\ (2)$

យក $(1)+(2)$ គេបានៈ $f(2+\lambda)+f(2-\lambda)$

$$=\lambda\left(\lambda^2-1\right)[2\lambda]+\left(2+\lambda\right)^3+\left(2-\lambda\right)^3$$
$$=2\lambda^4-2\lambda^2+8+12\lambda+6\lambda^2+\lambda^3+8-12\lambda+6\lambda^2-\lambda^3$$
$$=2\lambda^4+10\lambda^2+16$$

ដូចនេះ $\boxed{f\left(2+\lambda\right)+f\left(2-\lambda\right)=2\lambda^4+10\lambda^2+16}$ ពិត

III-ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''-2\alpha y'+\alpha^2 y=\dfrac{e^{\alpha x}}{x^4+64}$

<u>សម្គាល់:</u> $(E): ay''+by'+cy=e^{\alpha x}.f\left(x\right)$
ដើម្បីដោះស្រាយគេត្រូវតាង $z=y.e^{-\alpha x}$

គេមានៈ $y''-2\alpha y'+\alpha^2 y=\dfrac{e^{\alpha x}}{x^4+64}$ (1)

តាង $z=y.e^{-\alpha x}$ ជាចម្លើយរបស់ (1)

$$\Rightarrow z'=y'e^{-\alpha x}-\alpha e^{-\alpha x}.y=\left(y'-\alpha y\right)e^{-\alpha x}$$
$$\Rightarrow z''=\left(y''-\alpha y'\right)e^{-\alpha x}-\alpha e^{-\alpha x}\left(y'-\alpha y\right)$$
$$=e^{-\alpha x}\left(y''-\alpha y'-\alpha^2 y'\right)e^{-\alpha x}$$

$z''=\left(y''-2\alpha y'+\alpha^2 y\right)e^{-\alpha x}$ (2) យក(1) ជួសក្នុង(2)

$$z''=\frac{1}{x^4+64}\Rightarrow z'=\int\frac{dx}{x^4+6x}$$

$$=\frac{1}{16}\int\frac{\left(x^2+8\right)-\left(x^2-8\right)}{x^4+64}dx=\frac{1}{16}\int\frac{x^2+8}{x^4+64}dx-\frac{1}{16}\int\frac{x^2-8}{x^4+64}dx$$

$$=\frac{1}{16}\int \frac{1+\frac{8}{x^2}}{x^2+\frac{64}{x^2}}dx-\frac{1}{16}\int \frac{1-\frac{8}{x^2}}{x^2+\frac{64}{x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{16}\int \frac{\left(x+\frac{8}{x}\right)' dx}{\left(x-\frac{8}{x}\right)^2+16}-\frac{1}{16}\int \frac{\left(x+\frac{8}{x}\right)' dx}{\left(x+\frac{8}{x}\right)^2-16}$$

+រូបមន្ត៖

$$*\int \frac{u'}{u^2+a^2}dx=\int \frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+c$$

$$*\int \frac{u'}{u^2-a^2}dx=\int \frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+c$$

$;c\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow z'=\frac{1}{64}\arctan\left(\frac{x-\frac{8}{x}}{4}\right)-\frac{1}{128}\ln\left|\frac{x+\frac{8}{x}-4}{x+\frac{8}{4}+4}\right|+c$$

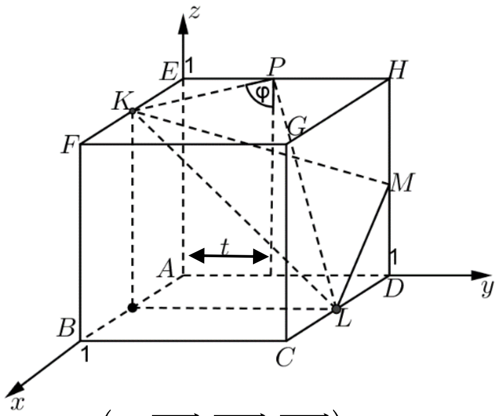
$$z'=\frac{1}{64}\arctan\left(\frac{x^2-8}{4x}\right)-\frac{1}{128}\ln\left|\frac{x^2-4x+8}{x^2+4x+8}\right|+c_1$$

$$\Rightarrow z=\frac{1}{64}\int \left[\arctan\left(\frac{x^2-8}{4x}\right)-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-4x+8}{x^2+4x+8}\right|+c\right]dx$$

ដូចនេះ $\boxed{y=z.e^{\alpha x}}$

;ដែល $z=\frac{1}{64}\int \left[\arctan\left(\frac{x^2-8}{4x}\right)-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-4x+8}{x^2+4x+8}\right|+c\right]dx$។

IV.១.គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{MK}.\overrightarrow{ML}$ រួចទាញរកឈ្មោះនៃ ΔKLM



+ជ្រើសរើសតម្រុយ $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$

K កណ្តាល $[EF] \Rightarrow K = \left(\frac{1}{2},0,1\right)$

L កណ្តាល $[CD] \Rightarrow L = \left(\frac{1}{2},1,0\right)$

M កណ្តាល $[HD] \Rightarrow M = \left(0,1,\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MK} = \left(\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right)$ និង $\overrightarrow{ML} = \left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{ML} = \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} \perp \overrightarrow{ML}$

ដូចនេះ KLM ជាត្រីកោណកែងត្រង់ M

២. ស្រាយថា $\varphi \le \frac{\pi}{2}$

ដោយ $P \in [EH]$ នោះចំណុច P ត្រូវមានកូអរដោនេ $P(0,t,1)$;$0 \le t \le 1$

$.\overrightarrow{PK}=\left(\frac{1}{2},-t,0\right)\;,\overrightarrow{PL}=\left(\frac{1}{2},1-t,-1\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PK}\cdot\overrightarrow{PL}=\frac{1}{4}-t+t^2 \Rightarrow \overrightarrow{PK}\cdot\overrightarrow{PL}=\left(\frac{1}{2}-t\right)^2\geq 0$$

ដូចនេះ $\boxed{\varphi \text{ ជាមុំស្រួចឬជាមុំកែង}}$

វិញ្ញាសាទី១៣

I-គេមានថង់ពីរ A និង B ដែលក្នុងថង់ A មានប៊ូលពណ៌ក្រហម m និងប៊ូលពណ៌ខៀវ n ហើយនៅក្នុង B មានប៊ូលពណ៌ក្រហម n និងប៊ូលពណ៌ខៀវ m ។គេចាប់យកប៊ូល 2 គ្រាប់ដោយប៊ូលមួយយកចេញពីថង់ A និងប៊ូលមួយទៀតយកចេញពីថង់ B ។ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

១.″A: ចាប់ប៊ូលមានពណ៌ដូចគ្នា″(គេតាង $P(A)$ ជាប្រូបាបដែលរកឃើញ)

២.″B: ចាប់ប៊ូលមានពណ៌ខុសគ្នា " (គេតាង $P(B)$ ជាប្រូបាបដែលរកឃើញ)

៣.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(A)\leq\frac{1}{2}$ និង $P(B)\geq\frac{1}{2}$ ។

II-គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): ay''+by'+cy=g(x)e^{\lambda x}$ ដែល $a\lambda\neq 0, a,b,c,\lambda\in\mathbb{R}$ និង g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។

១.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើអនុគមន៍ $y=ze^{\lambda x}$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់ (E) នោះអនុគមន៍ $z=h(x)$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ

$(F): z''+f'(\lambda)z'+f(\lambda)z=g(x)$ ដែល $f(\lambda)=a\lambda^2+b\lambda+c$ ។

២.**អនុវត្តន៏:** ចូរដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''-6y'+9y=x^ne^{3x}$ ដែល $n\in\mathbb{N}$

III-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases}u_0=2\\ u_{n+1}=\dfrac{2^n+1}{2^n+2}u_n\end{cases}$

ដែល $n=0,1,2,3,\ldots$ ។

១.គណនា u_n និង $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

២.គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}(S-nu_n)$ ។

IV-នៅក្នុងតម្រុយអរតូនម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឱ្យប្លង់ $(P): x+2y+2z-6=0$

តាង N,I,E ជាចំណុចប្រសព្វរវាងប្លង់ (P) ជាមួយអ័ក្ស $(ox),(oy),(oz)$ រៀងគ្នា។

១.ចូរគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ NIE ។

២.ចូរគណនាសមីការប្លង់ពុះមុំផ្គុំដោយប្លង់ (oxy) និងប្លង់ (P) ។

V-គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x)+f(2-x)=x^3+8$ ។

ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^2 \frac{f(x)dx}{x^2-2x+4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

I. ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

១.″A: ចាប់បានប៊ូលមានពណ៌ដូចគ្នា″

តាងព្រឹត្តិការណ៍៖

A_1 : ចាប់បានប៊ូលក្រហមមួយពីថង់ A

B_1 : ចាប់បានប៊ូលក្រហមមួយពីថង់ B

A_2 : ចាប់បានប៊ូលខៀវមួយពីថង់ A

B_2 : ចាប់បានប៊ូលខៀវមួយពីថង់ B

$\Rightarrow A=(A_1\cap B_1)\cup(A_2\cap B_2)$

$$P(A)=P(A_1\cap B_1)\cup P(A_2\cap B_2)$$
$$=P(A_1).P(B_1)+P(A_2).P(B_2)$$
$$=\frac{m}{m+n}.\frac{n}{m+n}+\frac{n}{m+n}.\frac{m}{m+n}$$

ដូចនេះ $P(A)=\frac{2mn}{(m+n)^2}$ ។

២.រក $P(B)$

B: ចាប់បានប៊ូលមានពណ៌ខុសគ្នា

តាមព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយ $P(B)=1-P(A)$

$1-\frac{2mn}{(m+n)^2}=\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}$ ។

៣.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $P(A)\leq\frac{1}{2}$ និង $P(B)\geq\frac{1}{2}$

គេមាន: $P(A)=\frac{2mn}{(m+n)^2}$

តាមវិសមភាពមធ្យម-នព្វន្តធរណីមាត្រ ($AM-GM$)

$$m+n\geq 2\sqrt{mn}$$

$$\Leftrightarrow (m+n)^2\geq 4mn$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(m+n)^2}\leq\frac{1}{4mn}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2mn}{(m+n)^2}\leq\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $P(A)\leq\frac{1}{2}$ ពិត។

-ស្រាយថា $P(B)\geq\frac{1}{2}$

យើងមាន $P(B)=\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}$

តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាស(c-s)

$$(1.m+1.n)^2 \le (1^2+1^2)(m^2+n^2)$$

$$(m+n)^2 \le 2(m^2+n^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2+n^2}{(m+n)^2} \ge \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $P(B) \ge \dfrac{1}{2}$ ពិត។

II. ១.ស្រាយថាបើ $y = z.e^{\lambda x}$ ជាចម្លើយរបស់ (E) នោះ $z = h(x)$ ជាចម្លើយរបស់ (F)

$(E): ay''+by'+cy = g(x)e^{\lambda x}$

$(F): az''+f'(\lambda)z = g(x)$

ដែល $f(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$

បើ $y = z.e^{\lambda x}$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់ (E) នោះ y, y', y'' ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់និង (E) ។

មាន $y = z.e^{\lambda x}$

$$y' = z'e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x}z = (z'+\lambda z)e^{\lambda x}$$

$$y'' = (z''+\lambda z')e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x}(z'+\lambda z)$$

$$= (z''+2\lambda z+\lambda^2 z)e^{\lambda x}$$

តាម (E)

$$\Rightarrow a(z''+2\lambda z'+\lambda^2 z)e^{\lambda x} + b(z'+\lambda z)e^{\lambda x} + cze^{\lambda x} = g(x)e^{\lambda x}$$

$$az''+2a\lambda z'+a\lambda^2 z+bz'+b\lambda z+cz = g(x)$$

$$az''+(2a\lambda+b)z'+(a\lambda^2+b\lambda+c)z = g(x)$$

$az''+f'(\lambda)z'+f(\lambda)z=g(x)$ ជាសមីការ (F)

ដូចនេះ បើ $y=z.e^{\lambda x}$ ជាចម្លើយរបស់(E) នោះ z ជាចម្លើយរបស់(F) ។

២.អនុវត្តន៏

ចូរដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-6y'+9y=x^n e^{3x}$ ដែល $n\in\mathbb{N}$

រាង $ay''+by'+cy=e^{\lambda x}.g(x)$

ដែល $a=1, b=-6, c=9, \lambda=3, g(x)=x^n$

តាមទ្រឹស្តីបទខាងលើ បើ $y=z.e^{3x}$ ជាចម្លើយទូទៅ$\in(E)$

នោះ z ជាចម្លើយ$(F): az''+f'(\lambda)z'+f(\lambda)z=g(x)$

$$\Leftrightarrow z''+f(3)z'+f(3)z=x^n$$

ដោយ $f(\lambda)=\lambda^2-6\lambda+9 \Rightarrow f'(\lambda)=2\lambda-6$

$$\Rightarrow f(3)=0\,,\, f'(3)=0$$

នាំឱ្យ $z''=x^n$

$$\Rightarrow z'=\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C_1$$

$$\Rightarrow z=\int \frac{1}{n+1}x^{n+1}dx$$

$$z=\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+C_1x+C_2$$

ដូចនេះ $y=\left(\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+C_1x+C_2\right)e^{3x}$ ។

III.១.គណនា u_n និង $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$ ជាអនុគមន៏នៃ n

មាន $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2^n+1}{2^n+2}u_n \end{cases}$ ដែល $n = 0,1,2,3,...$

យើងបាន $u_{n+1} = \dfrac{2^n+1}{2^n+2}u_n \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^n+1}{2^n+2}$

$$\Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2^n+1}{2^n+2}\right)$$

$$\frac{u_1}{u_o}\times\frac{u_2}{u_1}\times\ldots\times\frac{u_n}{u_{n-1}} = P_n \Rightarrow u_n = u_oP_n \quad (1)$$

ដែល $P_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{2^k+1}{2^k+2}\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{1}{2}.\dfrac{2^{k+1}+2}{2^k+2}\right)$

$$P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left[\frac{2^1+2}{2^0+2}\times\frac{2^2+2}{2^1+2}\times\frac{2^3+2}{2^2+2}\times\ldots\times\frac{2^n+2}{2^{n-1}+2}\right]$$

$$P_n = \frac{1}{2^n}\times\frac{2^n+2}{3}$$

ដោយ $u_o = 2$ តាម (1) យើងបាន ៖

$$u_n = \frac{2}{3}\times\frac{2^n+2}{2^n}$$

ដូចនេះ $u_n = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{2^n+2}{2^n}$ ។

➯ គណនា $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

ដោយ $u_n = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{2^n+2}{2^n} = \dfrac{2}{3}\left[1+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right]$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}(u_k)=\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\left[1+\frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

$$=\frac{2}{3}\left[n+1+2\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right]=\frac{2}{3}\left(n+5-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

២. គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}u_n\ \&\ \lim_{n\to\infty}\left(S_n-nu_n\right)$

- $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{2}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n+2}{2^n}$

$$=\frac{2}{3}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{2}{3}$$

$$S_n-nu_n=\frac{2}{3}\left(n+5-\frac{1}{2^{n+1}}-n.\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left(n+5-\frac{1}{2^{n+1}}-n-\frac{n}{2^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left(5-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{n}{2^{n-1}}\right)$$

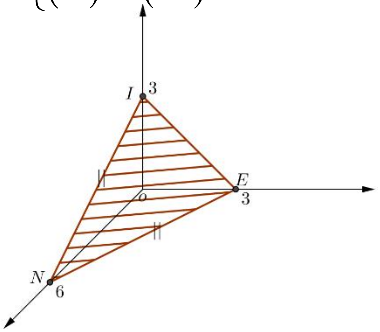
$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\left(S_n-nu_n\right)=\frac{2}{3}\lim_{n\to+\infty}\left(5-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{n}{2^{n-1}}\right)=\frac{10}{3}$$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{2}{3},\lim_{n\to\infty}\left(S_n-nu_n\right)=\frac{10}{3}}$

IV ១.ចូរគណនាក្រលាផ្ទៃនៃត្រីកោណ N,I,E

-យើងមាន $(P):x+2y+2z-6=0$

-(P) ប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស $(ox),(oy),(oz)$ រៀងគ្នាគឺ: $\begin{cases}(P)\cap(ox)=N\\(P)\cap(oy)=I\\(P)\cap(oz)=E\end{cases}$



-$(P)\cap(ox)$: $y=0, z=0$

$: x+0+0-6=0 \Rightarrow x=6$ នោះ $N(6,0,0)$

-$(P)\cap(oy)$: $x=0, z=0$

$: 0+2y+0-6=0 \Rightarrow y=3$ នោះ $I(0,3,0)$

-$(P)\cap(oz)$: $x=0, y=0$

$: 0+0+2z-6=0 \Rightarrow z=3$ នោះ $E(0,0,3)$

ក្រលាផ្ទៃនៃត្រីកោណ N,I,E គឺ $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{NI}\times\overrightarrow{NE}\right|$

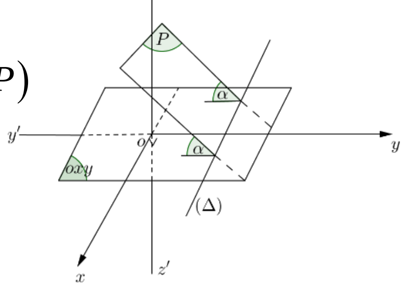
$\overrightarrow{NI}=(-6,3,0), \overrightarrow{NE}=(-6,0,3)$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{NI}\times\overrightarrow{NE}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -6 & 3 & 0\\ -6 & 0 & 3\end{vmatrix}=9\vec{i}+18\vec{j}+18\vec{k}$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\sqrt{9^2+18^2+18^2}=\frac{9}{2}\sqrt{1^2+2^2+2^2}=\frac{27}{2}$$

ដូចនេះ $S=\frac{27}{2}$ ឯកតាផ្ទៃ។

២.កំណត់សមីការប្លង់ពុះមុំដោយប្លង់ (oxy) និងប្លង់ (P)



សមីការប្លង់ទូទៅ : $ax+by+cz+d=0$

ប្លង់ $(P): x+2y+2z-6=0$

ប្លង់ $(oxy): z=0 \Leftrightarrow 0x+0y+1.z=0$

យក (Q) ជាប្លង់ពុះមុំផ្គុំដោយប្លង់ (oxy) និង (P)

តាង $M(x,y,z)$ ជាចំនុចទូទៅរបស់ (Q) គេបាន:

$$d\left(M,(P)\right)=d\left(M,(oxy)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{|x+2y+2z-6|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|z|}{1}\Rightarrow |x+2y+2z-6|=3|z|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+2z-6=3z \\ x+2y+2z-6=-3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z-6=0 & (Q_1) \\ x+2y+5z-6=0 & (Q_2) \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{(Q_1): x+2y-z-6=0,\ (Q_2): x+2y+5z-6=0}$ ។

V. គណនាអាំងតេក្រាល

$$I=\int_0^2 \frac{f(x)dx}{x^2-2x+4} \qquad (1)$$

មាន $f(x)+f(2-x)=x^3+8$, $\forall x\in\mathbb{R}$

តាង $x=2-t\Rightarrow dx=-dt$

បើ $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=2 \\ x=2\Rightarrow t=0 \end{cases}$

តាម $(1): I=\int_2^0 \frac{f(2-t)(-dt)}{(2-t)^2-2(2-t)+4}$

$$I=\int_0^2 \frac{f\left(2-t\right)dt}{4-4t+t^2-4+2t+4}$$

$$I=\int_0^2 \frac{f\left(2-x\right)dt}{x^2-2x+4}$$

$$I=\int_0^2 \frac{f\left(2-x\right)dt}{x^2-2x+4} \quad \left(2\right)$$

យក $\left(1\right)+\left(2\right)$ យើងបាន ៖

$$2I=\int_0^2 \frac{f\left(x\right)+f\left(2-x\right)}{x^2-2x+4}dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x^3+8}{x^2-2x+4}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 \left(x+2\right)dx$$

$$I=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^2=3$$

ដូចនេះ $I=3$

វិញ្ញាសាទី១៤

I.នៅក្នុងថង់មួយមានប៊ូលពណ៌ក្រហម 9 គ្រាប់ចុះលេខ1,2,3,4,5,6,7,8,9 និងប៊ូលពណ៌បៃតង 9 គ្រាប់ចុះលេខ1,2,3,4,5,6,7,8,9។គេចាប់យកប៊ូលពីរព្រមគ្នាចេញពីក្នុងថង់នោះ។

ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

១. "A: យកបានប៊ូលចុះលេខមានផលបូកស្មើ12"

២."B: យកបានប៊ូលចុះលេខខុសគ្នា"

៣."C: យកបានប៊ូលចុះលេខមានផលបូកស្មើ12 និងមានពណ៌ដូចគ្នា"។

II.គណនាលីមីត $A=\lim_{x\to+\infty}\int_0^1\frac{x^n dx}{x^2+1}$

$$B=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^3}\left(\sqrt{x}-2\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}\right)\right]$$

III.គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $u=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$ ។គេតាង $\alpha=u+u^2+u^4$ និង $\beta=u^3+u^5+u^6$។

១.ចូរស្រាយថា $\alpha+\beta=-1$ និង $\alpha\beta=2$ ។ ២.ចូរស្រាយថា α និង β ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា។ ៣.ចូរស្រាយថា $\mathrm{Im}(\alpha)>0$ រួចកំណត់ α និង β។

៤.ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរគណនាតម្លៃ $S=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}$ ។

IV.គណនាអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^1\frac{x^n dx}{x^2+x+1}$ ដែល $n=0,1,2,3,...$។

១.ចូរគណនា I_o និង I_o+2I_1 រួចទាញរក I_1 ។

២.ចូរស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ។ រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n, I_{n+1} និង I_{n+2}។

៣.គណនាកន្សោមអមនៃ I_n រួចគណនា $\lim_{x\to+\infty}(I_n)$ និង $\lim_{x\to+\infty}(nI_n)$។

រៀបរៀងដោយ ស៊ាម សំណាង -អួន ណែត

V.គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}\cos a & -\sin a\\ \sin a & \cos a\end{bmatrix}$ ដែល $a\in\mathbb{R}$

១.ចូរគណនា A^2 និង A^3។ ២គណនា A^n ។

VI.១.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\arctan x-\arctan y=\arctan\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)$

ដែល $0<x,y<1$។ ២.គណនា $s_n=\sum_{k=1}^{n}\left[arctan\left(\dfrac{1}{2k^2}\right)\right]$

ជាអនុគមន៍នៃ n។

៣.គណនាលីមីតនៃ s_n កាលណា $n\to+\infty$។

ដំណោះស្រាយ

ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

១.រក $P(A)$

A: យកបានប៊ូលចុះលេខមានផលបូកស្មើ12

-ប៊ូលក្រហមមាន9 :1,2,3,4,5,6,7,8,9

-ប៊ូលពណ៌បៃតង9 :1,2,3,4,5,6,7,8,9

រូបមន្ត: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(s)}$

-ចំនួនករណីអាច

គេចាប់យកប៊ូល ២ព្រមគ្នាចេញពីថង់ដែលមានប៊ូលសរុប18 គេបាន:

$n(S)=C(18,2)=\dfrac{18!}{2!16!}=153$ ករណីអាច

-ចំនួនករណីស្រប $n(A)$

-ករណីប៊ូលក្រហមទាំងពីរ

R	3	4	5
R	9	8	7

-ករណីប៊ូលបៃតងទាំងពីរ

G	3	4	5
G	9	8	7

-ករណីប៊ូលក្រហមមួយនិងបៃតងមួយ

R	3,4,5,6,7,8,9
G	9,8,7,6,5,4,3

នាំឱ្យ $n(A)=13$

$\Rightarrow P(A)=\dfrac{13}{153}$ ។

២.រក $P(B)$

$B:$ យកបានប៊ូលចុះលេខខុសគ្នា

រូបមន្ត $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(s)}$

-ចំនួនប៊ូលមានពណ៌ខុសគ្នាត្រូវយកចំនួនប៊ូលទាំងអស់ដកនិងចំនួនប៊ូលដែលមាន លេខដូចគ្នាចេញ

$n(B)=n(S)-9$

$\Rightarrow P(B)=\dfrac{153-9}{153}=\dfrac{144}{153}=\dfrac{16}{17}$ ។

៣.រក $P(c)$

$C:$ យកបានប៊ូលចុះលេខមានផលបូកស្មើ12 និងមានពណ៌ដូចគ្នា

ដោយប៊ូលក្រហមដូចគ្នាមាន៣ ករណី និង ប៊ូលបៃតងដូចគ្នាមាន៣ ករណីនោះ

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{6}{153}=\frac{2}{51}$$ ។

II.គណនាលីមីត $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^1\frac{x^n dx}{x^2+1}$

$\forall x\in[0,1]:0\le x\le 1$ លើកអង្គជាការេ

$$0\le x^2\le 1$$

$$1\le x^2+1\le 2$$

$$\frac{1}{2}\le\frac{1}{x^2+1}\le 1$$

$$\frac{1}{2}x^n\le\frac{x^n}{x^2+1}\le x^n$$

$$\int_0^1\frac{1}{2}x^n dx\le\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx\le\int_0^1 x^n dx$$

$$\left[\frac{1}{2(n+1)}x^{n+1}\right]_0^1\le\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx\le\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$$

$$\frac{1}{2(n+1)}\le\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx\le\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2(n+1)}\le\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx\le\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}$$

$$0\le\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx\le 0$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n dx}{x^2+1}=0$ ។

$$B=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^3}\left(\sqrt{x}-2\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}\right)\right]$$

រូបមន្ត: $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\left[\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+2}\right)+\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\left[\frac{x-x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}+\frac{x+4-x-2}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\left[\frac{-2}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}+\frac{2}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}}\right]$$

$$=2\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\left[\frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x=2}}\right]$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{x}.\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+4}}{\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+2}\right)}\right]$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{x}.\frac{x-x-4}{\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+4}\right)}\right]$$

$$=-8\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)\sqrt{x}\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)\sqrt{x}\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{x}}\right)}$$

ដូចនេះ $\boxed{B=-8\times\frac{1}{2\times2\times2}=-1}$

III.១.ចូរស្រាយថា $\alpha+\beta=-1$ និង $\alpha\beta=2$

$$u=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7},\alpha=u+u^2+u^4,\beta=u^3+u^5+u^6$$

មាន $u^7=\left(\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}\right)^7=\cos2\pi+i\sin2\pi=1$

$$\alpha+\beta=\underbrace{u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6}=u\frac{1-u^6}{1-u}=\frac{u-u^7}{1-u}=\frac{u-1}{1-u}=-1$$

ដូចនេះ $\boxed{\alpha+\beta=-1\text{ ពិត}}$

$$\alpha\beta=\left(u+u^2+u^4\right)\left(u^3+u^5+u^6\right)$$

$$=u^4+u^6+u^7+u^5+u^7+u^8+u^7+u^9+u^{10}$$

$$=u^4+u^6+1+u^5+1+u+1+u^2+u^3$$

$$=3+\underbrace{u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6}_{-1}=3-1=2$$

ដូចនេះ $\boxed{\alpha\beta=2\text{ ពិត}}$

២.ចូរស្រាយថា α និង β ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា

យើងត្រូវស្រាយថា $\overline{\alpha}=\beta$ ឬ $\overline{\beta}=\alpha$

គេមាន $\alpha=u+u^2+u^4 \Rightarrow \overline{\alpha}=\overline{u}+\overline{u}^2+\overline{u}^4$

តែ $u.\overline{u}=|u|^2=1 \Leftrightarrow \overline{u}=\frac{1}{u} \ \Rightarrow \overline{\alpha}=\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^4}=\frac{u^6}{u^7}+\frac{u^5}{u^7}+\frac{u^3}{u^7}$

តែ $u^7=1$ នោះ $\overline{\alpha}=u^6+u^5+u^3=\beta$

ដូចនេះ $\boxed{\overline{\alpha}=\beta \text{ ពិត}}$

៣.ចូរស្រាយថា $\operatorname{Im}(\alpha)>0$ រួចកំណត់ α និង β

$\alpha=u+u^2+u^4$ ដោយ $u=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$

$$\Rightarrow \alpha=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+i\sin\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+i\sin\frac{8\pi}{7}$$

$$\alpha=\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}\right)+i\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(\alpha)=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}$$

$$=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}$$

ដោយ $\begin{cases} \sin\dfrac{4\pi}{7} > 0 \\ \sin\dfrac{2\pi}{7} > \sin\dfrac{\pi}{7} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Im}(\alpha) > 0$

ដោយ $\begin{cases} \alpha+\beta = -1 \ : S \\ \alpha\beta = 2 \quad\quad : P \end{cases}$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត $\alpha \,\&\, \beta$ ជាឫសនៃសមីការ $X^2 - SX + P = 0$

$X^2 + X + 2 = 0 \quad ; \Delta = 1-8 = -7 = 7i^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{7}}{2} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{7}}{2} \\ X_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{7}}{2} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{\begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{7}}{2} \\ \beta = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{7}}{2} \end{cases}}$ ។

៤.ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរគណនាតម្លៃ $S = \sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{8\pi}{7}$

$\boxed{\Rightarrow \operatorname{Im}(\alpha) = \dfrac{\sqrt{7}}{2}}$ ។

IV.១.ចូរគណនា I_o និង $I_o + 2I_1$ រួចទាញរក I_1

$I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{x^2+x+1}$ ដែល $n = 0,1,2,3,...$

+ ចំពោះ $n=0$ យើងបាន: $I_o = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$

$$ax^2+bx+c \ : a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

$$I_o = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

តាង $x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$

$$x = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta$$

+ចំពោះ $x=0$: $\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

+ចំពោះ $x=1$: $\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow I_o = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta}{\frac{3}{4}\tan^2\theta+\frac{3}{4}} \Rightarrow I_o = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{I_o = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}}$។

$.I_o + 2I_1$

$$I_o + 2I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} + 2\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+x+1} = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$

$$= \left[\ln\left|x^2+x+1\right|\right]_0^1 = \ln 3 - \ln 1$$

ដូចនេះ $\boxed{I_o + 2I_1 = \ln 3}$។

+ទាញរក I_1

$$I_1 = \left(-I_o + \ln 3\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{I_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \ln 3\right)}$។

២.ស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{x^2+x+1} \Rightarrow I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}dx}{x^2+x+1}$$

$$\Rightarrow I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n - x^{n+1}}{x^2+x+1}dx = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{x^2+x+1}dx$$

$\forall x \in [0,1] \quad : 0 \le x \le 1$

$\Leftrightarrow 1 - x \ge 0$ គុណអង្គនឹង $x^n \ge 0$

$$\Leftrightarrow x^n(1-x)\geq 0$$

ដោយ $x^2+x+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$ ព្រោះ $\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{x^2(1-x)}{x^2+x+1}\geq 0,\forall x\in[0,1]\Rightarrow \int_0^1\frac{x(1-x)}{x^2+x+1}dx\geq 0$$

$$\Rightarrow I_n-I_{n+1}\geq 0\Rightarrow I_n\geq I_{n+1}$$

ដូចនេះ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ។

➶ **សម្គាល់:** រូបមន្តកំណើន $I_n=\int_\alpha^\beta\frac{x^n dx}{P_m(x)}$ ដែល $P_m(x)=\sum_{k=0}^{m}(a_k x^k)$

ឬ $P_m(x)=a_o+a_1x+a_2x^2+...+a_mx^m$ (ពហុធាដឺក្រេទី m)

ដើម្បីបង្កើតរូបមន្តកំណើនគេត្រូវរក:

$$S=a_oI_n+a_1I_{n+1}+a_2I_{n+2}+...+a_mI_{n+m};\ S=\sum_{k=0}^{m}(a_kI_{n+k})=\int_\alpha^\beta x^n dx$$

+រកទំនាក់ទំនង I_n,I_{n+1},I_{n+2}

$$.\ I_n+I_{n+1}+I_{n+2}=\int_0^1\frac{x^n+x^{n+1}+x^{n+2}}{x^2+x+1}dx=\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $I_n+I_{n+1}+I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}$

រៀបរៀងដោយ ស៊ាម សំណាង -អ៊ួន ណែត

៣.គណនាកន្សោមអមនៃ I_n រួចគណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(I_n\right)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(nI_n\right)$

$$I_n+I_{n+1}+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}\quad(1)$$

+ជំនួស n ដោយ $n-2$ ក្នុង (1) ដែល $n\geq 2$

$$I_{n-2}+I_{n-1}+I_n=\frac{1}{n-1}\quad(2)$$

ដោយ $\left(I_n\right)$ ជាស្វ៊ីតចុះយើងបាន:

$$\begin{cases} I_{n+1}\leq I_n\leq I_{n-1} \\ I_{n+2}\leq I_n\leq I_{n-2}\quad(+) \\ I_n\leq I_n\leq I_n \end{cases}$$

$$I_n+I_{n+1}+I_{n+2}\leq 3I_n\leq I_n+I_{n-1}+I_{n-2}\ (3)$$

យក $(1)\&(2)$ ជួសក្នុង (3)

$$\frac{1}{n+1}\leq 3I_n\leq\frac{1}{n-1}$$ ដូចនេះ $$\boxed{\frac{1}{3(n+1)}\leq I_n\leq\frac{1}{3(n-1)}\quad ,n\geq 2}$$

+គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(I_n\right)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(nI_n\right)$

. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(I_n\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3(n+1)}=0$ ។

. $\lim\limits_{x\to+\infty}(nI_n)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n}{3(n-1)}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{3}$ ។

V.១.ចូរគណនា A^2 និង A^3

$$A=\begin{bmatrix}\cos a & -\sin a\\ \sin a & \cos a\end{bmatrix}$$ ដែល $a\in\mathbb{R}$

$$A^2=\begin{bmatrix}\cos a & -\sin a\\ \sin a & \cos a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos a & -\sin a\\ \sin a & \cos a\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}\cos^2 a-\sin^2 a & -2\sin a\cos a\\ 2\sin a\cos a & \cos^2 a-\sin^2 a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2a & -\sin 2a\\ \sin 2a & \cos 2a\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2.A=\begin{bmatrix}\cos 2a & -\sin 2a\\ \sin 2a & \cos 2a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos a & -\sin a\\ \sin a & \cos a\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}\cos 3a & -\sin 3a\\ \sin 3a & \cos 3a\end{bmatrix}$$ ។

……………………………………

គណនា A^n ប្រើតាមកំណើន យើងបាន៖

$$A^n=\begin{bmatrix}\cos(na) & -\sin(na)\\ \sin(na) & \cos(na)\end{bmatrix}$$ ។

VI.១.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\arctan x-\arctan y=\arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

ដែល $0<x,y<1$

យើងមាន: $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$

$$\Rightarrow a-b=\arctan\left(\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}\right)\ (1)$$

យក $\begin{cases}\tan a=x\\ \tan b=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\arctan x\\ b=\arctan y\end{cases}$

តាម $(1)\Rightarrow$ $\boxed{\arctan x-\arctan y=\arctan\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)}$ ពិត។

២.គណនា $s_n=\sum_{k=1}^{n}\left[arctan\left(\dfrac{1}{2k^2}\right)\right]$ ជាអនុគមន៍នៃ n

មាន $\arctan\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)=\arctan x-\arctan y$

$$\begin{cases}x-y=\lambda\Rightarrow y=x-\lambda\\ 1+xy=2\lambda k^2\end{cases}$$

$$1+x(x-\lambda)=2\lambda k^2\Rightarrow x^2-\lambda x+1-2\lambda k^2=0$$

$\Delta=\lambda^2-4+8\lambda k^2$ ឱ្យ $\lambda^2-4=0\Rightarrow\lambda=2\ ;\Delta=16k^2$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\lambda-4k}{2}=\dfrac{2-4k}{2}=1-2k\\ x=\dfrac{\lambda+4}{2}=\dfrac{2+4k}{2}=1+2k\end{cases}$$

យើងមាន: $\arctan x-\arctan y=\arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

យក $x=2k+1, y=2k-1, k\in\mathbb{N}$

$$\arctan(2k+1)-\arctan(2k-1)=\arctan\left(\frac{2}{1+4k^2-1}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\arctan(2k+1)-\arctan(2k-1)=\arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)\\
&k=1\ :\arctan 3-\arctan 1=\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\\
&k=2\ :\arctan 5-\arctan 3=\arctan\left(\frac{1}{8}\right)\\
&k=3\ :\arctan 7-\arctan 5=\arctan\left(\frac{1}{18}\right)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&k=n\ :\arctan(2n+1)-\arctan(2n-1)=\arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)
\end{aligned}\right\}(+)$$

$$\arctan(2n+1)-\arctan 1=S_n$$

$$\boxed{s_n=\arctan\left(\frac{2n+1-1}{1+2n+1}\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)}$$ ។

៣.គណនាលីមីតនៃ s_n កាលណា $n\to+\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}s_n=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}}$$

រៀបរៀងដោយ ស៊ាម សំណាង -អ៊ូន ណៃត

វិញ្ញាសាទី១៥

I. គេឱ្យប៉ារ៉ាបូល $(p): y = ax^2 + bx + c\ , a \neq 0\ \ a,b,c \in \mathbb{R}$ ។
I ជាចំណុចនឹងមួយក្នុងប្លង់ហើយ (d) ជាបន្ទាត់មានមេគុណប្រាប់ទិស m វិលជុំវិញចំណុច I ហើយប្រសព្វនិង (p) ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នាគឺ A និង B (m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ)។

ចូរកំណត់កូរអរដោនេនៃចំណុចនឹង I ជាអនុគមន៍នៃ a,b,c ដោយដឹងថា បន្ទាត់ភ្ជាប់ពីរចំណុច A និង B ទៅចំណុចប្រសព្វរវាង (p) ជាមួយអ័ក្ស (oy) ជាបន្ទាត់កែងជានិច្ចគ្រប់ m ។

II.គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (x_n) និង (y_n) ដែលកំណត់ដោយៈ

$$x_n = \sum_{k=1}^{n}(k!k) = 1!1 + 2!2 + 3!3 + ... + n!n$$ និង

$$y_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{(k+1)!}\right] = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + ... + \frac{n}{(n+1)!}$$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាស្វ៊ីតចំនួនពិតដែលកំណត់ដោយ $z_n = \dfrac{x_n}{y_n}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

III.គេឱ្យចតុកោណនិយ័ត $ABCDE$ មួយចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R ។

១.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = 0$ ។

២.ដោយប្រើទំនាក់ទំនងខាងលើចូរស្រាយថាគេអាចកំណត់ពីរចំនួនពិត μ និង λ ដើម្បីបានសមភាព $1 + \mu\cos\dfrac{2\pi}{5} + \lambda\cos\dfrac{4\pi}{5} = 0$ ។

IV.គេឱ្យត្រីកោណ ABC មានជ្រុង $BC=a, AC=b, AB=c$ ហើយ I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ។

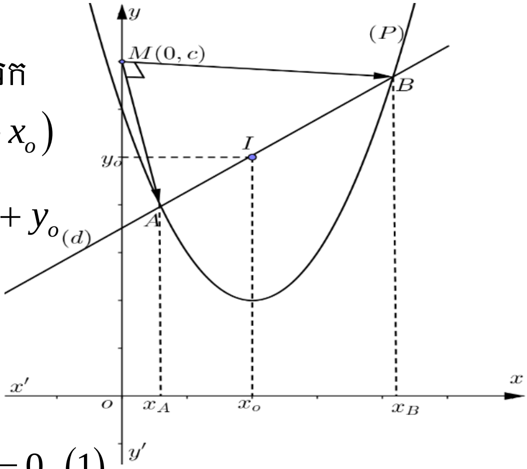
១.ចូរស្រាយបំភ្លឺថា I ជាប៉ារីសង់នៃចំណុច A,B,C ដែលមានមេគុណរៀងគ្នា a,b,c ។

២.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ចំណុច X នៃប្លង់គេមានទំនាក់ទំនង:

$aXA^2+bXB^2+cXC^2=\left(a+b+c\right)IX^2+abc$ ។

៣.តាង r និង R រៀងគ្នាជារង្វាស់កាំនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងនិងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ABC ។ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $OI^2=R^2-2rR$ ។

ដំណោះស្រាយ



I.កូរអរដោនេនៃចំណុចនឹង I

.តាង $I\left(x_o,y_o\right)$ ជាចំណុចនឹងដែលត្រូវរក

.សមីការបន្ទាត់ $\left(d\right): y-y_o=m\left(x-x_o\right)$

$$\left(d\right): y=mx-mx_o+y_o$$

.សមីការអាប់ស៊ីស $\left(d\right)\cap\left(p\right)$

$$ax^2+bx+c=mx-mx_o+y_o$$

$$ax^2-\left(m-b\right)x+\left(mx_o-y_o+c\right)=0 \quad \left(1\right)$$

បើ x_A និង x_B ជាអាប់ស៊ីសរបស់ A និង B នោះវាជាឫសរបស់ $\left(1\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = \dfrac{m-b}{a} & (2) \\ x_A x_B = \dfrac{mx_o - y_o + c}{a} & (3) \end{cases}$$

ដើម្បីឱ្យ $(MA) \perp (MB) \quad \forall m \in \mathbb{R}$ លុះត្រាតែ៖

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ ដែល $M(0,c) = (p) \cap (oy)$

$A, B \in (p)$ គេបាន៖ $A\left(x_A, ax_A^2 + bx_A + c\right), B\left(x_B, ax_B^2 + bx_B + c\right)$

+កំប៉ូសង់ស្កាលែនៃ $\overrightarrow{MA}$ & $\overrightarrow{MB}$

$$\overrightarrow{MA} = \left(x_A - 0, ax_A^2 + bx_A + c - c\right)$$

$$\overrightarrow{MA} = \left(x_A, ax_A^2 + bx_A\right) \ \& \ \overrightarrow{MB} = \left(x_B, ax_B^2 + bx_B\right)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} &= x_A x_B + x_A x_B (ax_A + b)(ax_B + b) \\ &= x_A x_B \left[1 + a^2 x_A x_B + abx_A + abx_B + b^2\right] \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = x_A x_B \left[a^2 x_A x_B + ab(x_A + x_B) + b^2 + 1\right]$$

ដោយ $A \neq B \neq M \Leftrightarrow x_A \neq x_B \neq x_M$

តែ $x_M = 0 \Rightarrow x_A \neq 0, x_B \neq 0 \ \Rightarrow x_A x_B \neq 0$

ដើម្បីឱ្យ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ លុះត្រាតែ

$a^2x_Ax_B+ab\left(x_A+x_B\right)+b^2+1=0 \quad (4)$ យក $(2)\&(3)$ ជួសក្នុង (4)

$$a\left(mx_o-y_o+c\right)+b\left(m-b\right)+b^2+1=0$$

$$amx_o-ay_o+ac+mb-b^2+b^2+1=0$$

$$m\left(ax_o+b\right)=\left(ay_o-ac-1\right)$$

សមីការនេះពិត $\forall m\in\mathbb{R}$ លុះត្រាតែៈ

$$\begin{cases}ax_o+b=0\\ ay_o-ac-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_o=-\dfrac{b}{a}\\ y_o=\dfrac{1+ac}{a}\end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\left(-\dfrac{b}{a},\dfrac{1+ac}{a}\right)}$ ។

II.ស្រាយថា $z_n=\dfrac{x_n}{y_n}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\left(k!k\right)=1!1+2!2+3!3+...+n!n$$

$$y_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{(k+1)!}\right]=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{n}{(n+1)!}$$

+គណនា x_n

$$\left.\begin{array}{l} k!k = k!\left[(k+1)-1\right] \\ \qquad = k!(k+1) - k! \\ k!k = (k+1)! - k! \\ .k = 1 \Rightarrow 1!1 = 2! - 1! \\ .k = 2 \Rightarrow 2!2 = 3! - 2! \\ .k = 3 \Rightarrow 3!3 = 4! - 3! \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ .k = n \Rightarrow n!n = (n+1)! - n! \end{array}\right\}(+)$$

$$x_n = (n+1)! - 1$$

+គណនា y_n

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!}$$

$$= \frac{(k+1)}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

$$= \frac{(k+1)}{k!(k+1)} - \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

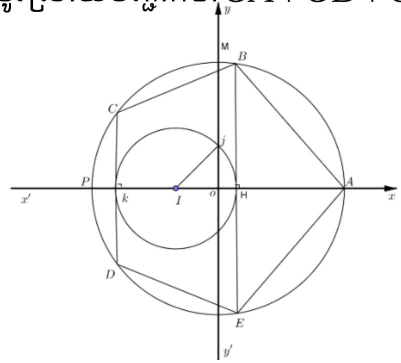
$$\left.\begin{array}{l} .k=1\Rightarrow \dfrac{1}{2!}=\dfrac{1}{1!}-\dfrac{1}{2!} \\ .k=2\Rightarrow \dfrac{2}{3!}=\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ .k=n\Rightarrow \dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!} \end{array}\right\}(+)$$

$$y_n=1-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow z_n=\frac{(n+1)!-1}{\dfrac{(n+1)!-1}{(n+1)!}}=(n+1)!$$ នោះ $z_n=(n+1)!\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}$

ដូចនេះ $z_n=\dfrac{x_n}{y_n}$ ជាស្វ៊ីតចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

III.១.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=0$



+តាមទំនាក់ទំនងសាល

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB}$$

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HE}$$

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KC}$$

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{Ok}+\overrightarrow{KD}$$

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OH}+2\overrightarrow{OK}+\left(\underbrace{\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HE}}_{0}\right)+\left(\underbrace{\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}}_{0}\right)$$

$$=2\left(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OK}\right)$$

$$.\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{IH}$$

$$=\overrightarrow{OI}-\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OH}\right)$$

$$\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OK}=2\overrightarrow{OI}=2\frac{\overrightarrow{OP}}{4}=\frac{\overrightarrow{OP}}{2}=-\frac{\overrightarrow{OA}}{2}$$

$$=2\left(-\frac{\overrightarrow{OA}}{2}\right)=-\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}$$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=0\text{ ពិត}}$។

២.ស្រាយថាគេអាចកំណត់ពីរចំនួនពិត μ និង λ

ដើម្បីបានសមភាព $1+\mu\cos\frac{2\pi}{5}+\lambda\cos\frac{4\pi}{5}=0 \quad (1)$

តាមសម្រាយខាងលើ: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=0$

យក $\vec{i}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតាលើ (ox)

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA}.\vec{i}+\overrightarrow{OB}.\vec{i}+\overrightarrow{OC}.\vec{i}+\overrightarrow{OD}.\vec{i}+\overrightarrow{OE}.\vec{i}=0$$

$$\Rightarrow R+OH-OK-OK+OH=0$$

$$R+2OH-2OK=0$$

$$R+2R\cos\frac{2\pi}{5}-2R\cos\left(\pi-\frac{4\pi}{5}\right)=0$$

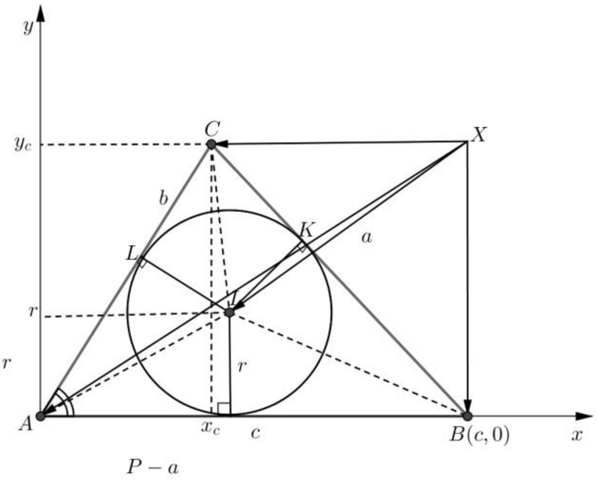
$$1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}=0 \quad (2)$$ តាម $(1)\&(2)$

$$1+\mu\cos\frac{2\pi}{5}+\lambda\cos\frac{4\pi}{5}=1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}$$

ដូចនេះ $\boxed{\mu=\lambda=2}$ ។

IV.១.ចូរស្រាយបំភ្លឺថា I ជាប៉ារីសង់នៃចំណុច A,B,C

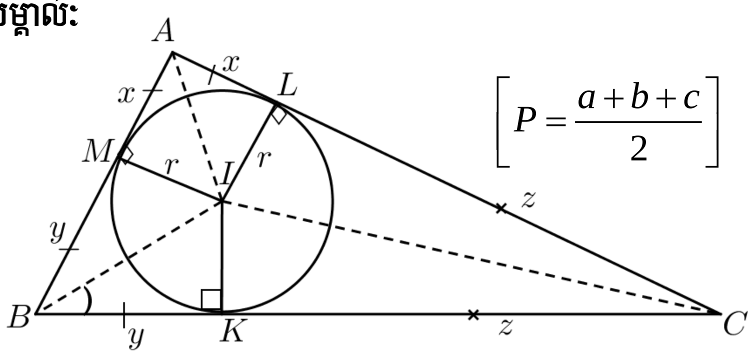
ដែលមានមេគុណរៀងគ្នា a,b,c



+ចំណុច I ជាប៉ារីសង់នៃប្រព័ន្ធចំណុច $\{x,a\},\{B,b\},\{C,c\}$ លុះត្រាតែ

$$a.\overrightarrow{IA}+b.\overrightarrow{IB}+c.\overrightarrow{IC}=\vec{0}$$

⊶សម្គាល់:



$$\left[P=\frac{a+b+c}{2}\right]$$

$$\begin{cases} .AM = AL = P - a \\ .\mathrm{B}K = BM = P - b \\ .CK = CL = +P - c \end{cases}$$

+ជ្រើសរើសតម្រុយដូចរូបខាងលើ:

កូអរដោនេកំពូល A, B, C ក្នុងតម្រុយគឺ:

$A(0,0), B(c,0), C(b\cos a, b\sin a)$ កូអរដោនេផ្ចិត $I(P-a, r)$

$.\overrightarrow{IA} = \left(-(P-a), r\right) = \left(-a(P-a), ar\right)$ (1)

$.\overrightarrow{IB} = \left(c-(P-a), -r\right) \Rightarrow b\overrightarrow{IB} = \left(bc - b(P-a), -br\right)$ (2)

$.\overrightarrow{IC} = \left(b\cos A - (P-a), b\sin A - r\right)$

$\Rightarrow c\overrightarrow{IC} = \left(bc\cos A - c(P-a), bc\sin A - cr\right)$ (3)

បូក(1),(2),(3) គេបាន:

$a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = (x_o, y_o)$

ដែល $\begin{cases} x_o = -a(P-a) + bc - b(P-a) + bc\cos A - c(P-a) \\ y_o = -ar - br + bc\sin A - cr \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o = -(a+b+c)(P-a) + bc(1+\cos A) \\ y_o = bc\sin A - (a+b+c)r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o = -(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{2} - a\right) + bc\left(1 + \frac{b^2+c^2+a^2}{2bc}\right) \\ y_o = 2s - 2s = 0 \end{cases}$$

ព្រោះ $S = \frac{1}{2}bc\sin A, S = \Pr$

$$x_o = -\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2} + \frac{2bc+b^2+c^2+a^2}{2}$$

$$= -\frac{(b+c)^2 - a^2}{2} + \frac{(b+c)^2 - a^2}{2} \Rightarrow x_o = 0$$

ដូចនេះ $\boxed{a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}}$ ពិត។

២.ស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ចំណុច X នៃប្លង់គេមាន

$$aXA^2 + bXB^2 + cXC^2 = (a+b+c)IX^2 + abc$$

(ទ្រឹស្តីបទអ៊ឺល៊ែរ)

គេមាន $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XI} + \overrightarrow{IA}$

$$\Rightarrow XA^2 = \left|\overrightarrow{XA}\right|^2 = \left|\overrightarrow{XI} + \overrightarrow{IA}\right|^2 \Rightarrow XA^2 = XI^2 + IA^2 + 2\overrightarrow{XI}.\overrightarrow{IA}$$

$\Rightarrow aXA^2 = aXI^2 + aIA^2 + 2a\overrightarrow{XI}.\overrightarrow{IA} \quad (i)$ ដូចគ្នាដែរ

$\Rightarrow bXA^2 = bXI^2 + bIA^2 + 2b\overrightarrow{XI}.\overrightarrow{IA} \quad (ii)$

$\Rightarrow cXA^2 = cXI^2 + cIA^2 + 2c\overrightarrow{XI}.\overrightarrow{IA} \quad (iii)$ យក $(i)+(ii)+(iii)$

$$b.XA^2 + b.XB^2 + c.XC^2 = (a+b+c)XI^2 + \left(a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2\right)$$

$$+2X\vec{I}.\left(\underbrace{a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC}}_{0}\right)$$

$$aXA^2 + bXB^2 + cXC^2 = (a+b+c)XI^2 + \left(aIA^2 + bIB^2 + cIC^2\right) \quad (iv)$$

យើងនឹងស្រាយថា $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$?

+ប្រើទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រក្នុងត្រីកោណ IAM

$$IA^2 = IM^2 + AM^2 = r^2 + (P-a)^2$$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង $S = \text{Pr} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{P(P-a)(P-b)(P-c)}{P}}$$

$$IA^2=\frac{(P-a)(P-b)(P-c)}{P}+(P-a)^2$$

$$=\frac{(P-a)\left[(P-b)(P-c)+P(P-a)\right]}{P}$$

$$=\frac{(P-a)\left(P^2-Pc-Pb+bc+P^2-Pa\right)}{P}$$

$$=\frac{(P-a)\left(2P^2-P\left(\overbrace{c+b+a}^{2P}\right)+bc\right)}{P}$$

$$IA^2=\frac{P-a}{P}.bc$$

ដូចគ្នាដែរ $IB^2=\frac{P-b}{P}.ac\ ;IC^2=\frac{P-c}{P}.ab$

$$\Rightarrow aIA^2+bIB^2+cIC^2=\frac{P-a}{P}abc+\frac{P-b}{P}abc+\frac{P-c}{P}abc$$

$\Rightarrow aIA^2+bIB^2+cIC^2=abc$ ពិត។

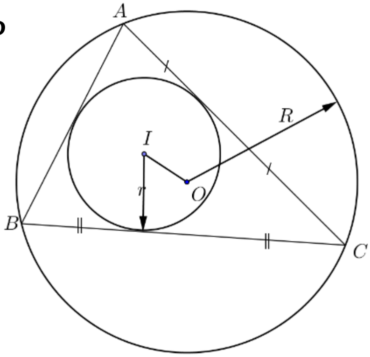
៣.ស្រាយថា $OI^2=R^2-2rR$

តាមរូបមន្តខាងលើ

$\forall X\ :aXA^2+bXB^2+cXC^2=(a+b+c)XI^2+abc$ យក $x=0$

$$aOA^2+bOB^2+cOC^2=\left(a+b+c\right)OI^2+abc$$

តែ $OA=OB=OC=R\ \ ,a+b+c=2P$



$$S=\frac{abc}{4R}=\Pr\Rightarrow abc=4\Pr R$$

$$\Rightarrow 2PR^2=2P.OI^2+4\Pr R$$

$$\Rightarrow R^2=OI^2+2rR+2rR$$

ដូចនេះ $\boxed{\Rightarrow OI^2=R^2-2rR}$ ពិត។