

ប្រឡងជ្រើសរើសវិស្វកម្មសាធារណៈ

ថ្នាក់ឧត្តមសិក្សាទៅសិក្សាសាធារណៈរដ្ឋសង្គមនិយមវៀតណាមក្នុងឆ្នាំ ២០១១

សម័យប្រឡង : ថ្ងៃទី ០១ ខែ កក្កដា ឆ្នាំ ២០១១

វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា

(រយៈពេល ១ម៉ោង ៣០នាទី)

ប្រធាន៖

I. (២៥ ពិន្ទុ) គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

១. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{2011x} + \ln[(1+x^2)e^{-x}]}{x^2}$

២. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \times \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \times \dots \times \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} \right)$ ។

II. (២៥ ពិន្ទុ) គេឱ្យ g_m ជាអនុគមន៍កំណត់ និងជាប់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ

$g_m(x) = (x^2 + 2)e^x - 3e^{-x+2} + me^{mx}$ ដែល $m \in \mathbb{R}$ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ។

១. គណនា $g'_m(x)$ រួចសិក្សាអបិរភាពនៃ g_m លើ $\mathbb{R}$ ។

២. តាមតម្លៃ m , ចូរគណនា $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_m(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_m(x)$ រួចសង្កេតពិនិត្យអបិរភាពនៃ g_m ។

៣. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់តម្លៃ m , សមីការ $g_m(x) = 0$ មានបួសតែមួយគត់ជានិច្ចក្នុង $\mathbb{R}$ ។

៤. ក្នុងសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$ ចូររកបួសទាំងអស់នៃសមីការ $(x^2 + 2)e^{2x-2} = 3$ ។

III. (២៥ ពិន្ទុ) ដោយប្រើចម្លើយ និងបន្សំ ចូរកំណត់ចំនួនពិត x ដើម្បីឱ្យ៖

១. $P(x-2, 2) + C(x, x-2) = 101$

២. $P(x, 10) + P(x, 9) = 9P(x, 8)$ ។

IV. (២៥ ពិន្ទុ) ចូរសរសេរសមីការស្តង់ដារនៃអ៊ីពែបូល (H) ដែលកាត់តាម
ចំណុច $M(4\sqrt{2}, 3)$ ហើយមានកំណុំរួមជាមួយអេលីប

$$(E): \frac{x^2}{35} + \frac{y^2}{10} = 1 \quad \forall$$

ចម្លើយ

I. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

$$\begin{aligned} ១. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{2011x} + \ln[(1+x^2)e^{-x}]}{x^2} & \quad (\text{រាងមិនកំណត់ } \frac{0}{0}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{2011x} + \ln(1+x^2) + \ln e^{-x}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{2011x} - x + \ln(1+x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{2011x} - 1) + \ln(1+x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{2011x} - 1}{x} + \frac{1}{x^2} \ln(1+x^2) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{2011x} - 1}{2011x} \times 2011 + \ln(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} \right] \\ &= 1 \times 2011 + \ln e = 2011 + 1 = \boxed{2012} \end{aligned}$$

$$\text{ព្រោះ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2011x} - 1}{2011x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} = e$$

$$២. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \times \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \times \dots \times \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} \right)$$

$$\text{យើងមាន } \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{(k-1)(k^2 + k + 1)}{(k+1)(k^2 - k + 1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{(k-1)k}{k(k+1)} \times \frac{k^2 + k + 1}{(k-1)^2 + (k-1) + 1}$$

យក $k = 2, 3, 4, \dots, n$ គេបាន៖

$$\begin{aligned} & \times \left[\begin{aligned} \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} &= \frac{1 \times 2}{2 \times 3} \times \frac{2^2 + 2 + 1}{1^2 + 1 + 1} \\ \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} &= \frac{2 \times 3}{3 \times 4} \times \frac{3^2 + 3 + 1}{2^2 + 2 + 1} \\ \frac{4^3 - 1}{4^3 + 1} &= \frac{3 \times 4}{4 \times 5} \times \frac{4^2 + 4 + 1}{3^2 + 3 + 1} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} &= \frac{(n-1)n}{n(n+1)} \times \frac{n^2 + n + 1}{(n-1)^2 + (n-1) + 1} \end{aligned} \right] \\ \Rightarrow & \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \times \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \times \dots \times \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{1 \times 2}{1^2 + 1 + 1} \times \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)} \\ & = \frac{2}{3} \times \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n} \\ \text{នោះ} \quad & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \times \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \times \dots \times \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} \right) = \frac{2}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n} \\ & = \frac{2}{3} \times 1 = \boxed{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$\text{ព្រោះ} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

II. គេឱ្យ g_m ជាអនុគមន៍កំណត់ និងជាប់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ

$$g_m(x) = (x^2 + 2)e^x - 3e^{-x+2} + me^{mx} \quad \text{ដែល } m \in \mathbb{R} \text{ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ។}$$

១. គណនា $g'_m(x)$

$$\text{គេបាន } g'_m(x) = (x^2 + 2 + 2x)e^x + 3e^{-x+2} + m^2 e^{mx}$$

ដូចនេះ $\boxed{g'_m(x) = (x^2 + 2x + 2)e^x + 3e^{-x+2} + m^2e^{mx}}$ ។

សិក្សាអបិរភាពនៃ g_m លើ $\mathbb{R}$

ដោយ $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$

$e^x > 0, 3 > 0, e^{-x+2} > 0, m^2 \geq 0, e^{mx} > 0$ គ្រប់ $x, m \in \mathbb{R}$

នោះ $g'_m(x) = (x^2 + 2x + 2)e^x + 3e^{-x+2} + m^2e^{mx} > 0$ លើ $\mathbb{R}$

ដូចនេះ អនុគមន៍ g_m កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ ។

២. តាមតម្លៃ m , ចូរគណនា $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_m(x)$ និង $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_m(x)$

- ចំពោះ $x \rightarrow -\infty$ ដោយ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2)e^x = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3e^{-x+2}) = -\infty$

* បើ $m \geq 0$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} me^{mx} = 0$

* បើ $m < 0$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} me^{mx} = -\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} g_m(x) = -\infty}$ គ្រប់ $m \in \mathbb{R}$ ។

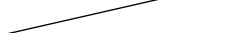
- ចំពោះ $x \rightarrow +\infty$ ដោយ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2)e^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3e^{-x+2}) = 0$

* បើ $m \geq 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} me^{mx} = +\infty$

* បើ $m < 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} me^{mx} = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g_m(x) = +\infty}$ គ្រប់ $m \in \mathbb{R}$ ។

សង់តារាងអបិរភាពនៃ g_m

x	$-\infty$ $+\infty$
$g'_m(x)$	$+$
$g_m(x)$	$-\infty$  $+\infty$

៣. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់តម្លៃ m , សមីការ $g_m(x) = 0$ មានបួសតែមួយ គត់ជានិច្ចក្នុង $\mathbb{R}$

ចំពោះគ្រប់ $m \in \mathbb{R}$ យើងមាន៖

$$\left. \begin{array}{l} g_m(x) \text{ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ } \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g_m(x) = -\infty < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g_m(x) = +\infty > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល} \Rightarrow \\ \text{មានចំនួនពិត } c \text{ យ៉ាងតិចមួយដែល} \end{array}$$

$g_m(c) = 0$ ។ ហើយដោយ $g_m(x)$ កើនដាច់ខាតលើ $\mathbb{R}$ នោះក្រាបនៃ $g_m(x)$ អាចកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសតែម្តងគត់។

ដូចនេះ សមីការ $g_m(x) = 0$ មានបួសតែមួយគត់ ក្នុង $\mathbb{R}$ ចំពោះគ្រប់ m ។

៤. ក្នុងសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$, រកបួសទាំងអស់នៃសមីការ $(x^2 + 2)e^{2x-2} = 3$

ចំពោះ $m = 0$ គេបាន $g_0(x) = (x^2 + 2)e^x - 3e^{-x+2} + (0)e^{(0)x}$

$$\Leftrightarrow g_0(x) = (x^2 + 2)e^x - 3e^{-x+2} = e^{-x+2}[(x^2 + 2)e^{2x-2} - 3]$$

បើ $g_0(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x+2}[(x^2 + 2)e^{2x-2} - 3] = 0$ ដោយ $e^{-x+2} > 0$

នោះគេបាន $(x^2 + 2)e^{2x-2} - 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2)e^{2x-2} = 3$

នេះមានន័យថាសមីការ $(x^2 + 2)e^{2x-2} = 3$ សមមូលនឹង $g_0(x) = 0$

តាមសម្រាយខាងលើ គេទាញបានសមីការ $g_0(x) = 0$ មានបួសតែមួយ

គត់ ។ យក $x = 1$ យើងឃើញថា $[(1)^2 + 2]e^{2(1)-2} = (1+2)e^0 = 3$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{x = 1}$ គឺជាបួសតែមួយគត់នៃសមីការ $(x^2 + 2)e^{2x-2} = 3$ ។

III. ដោយប្រើចម្លាស់ និងបន្សំ ចូរកំណត់ចំនួនពិត x ដើម្បីឱ្យ៖

$$9. P(x-2, 2) + C(x, x-2) = 101 \text{ លក្ខខណ្ឌ } \begin{cases} x-2 \geq 2 \\ x \geq x-2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4$$

$$\text{សមីការទី១} \quad \frac{(x-2)!}{[(x-2)-2]!} + \frac{x!}{(x-2)![x-(x-2)]!} = 101$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)!}{(x-4)!} + \frac{x!}{(x-2)!2!} = 101$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-4)!(x-3)(x-2)}{(x-4)!} + \frac{(x-2)!(x-1)x}{(x-2)!2} = 101$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 + \frac{x^2 - x}{2} = 101$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 12 + x^2 - x = 202$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 11x - 190 = 0$$

$$\text{មាន } \Delta = (-11)^2 - 4(3)(-190) = 121 + 2280 = 49^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-11) \pm 49}{2(3)} = \frac{11 \pm 49}{6} = \begin{cases} 10 \\ -38 / 6 \text{ មិនយក} \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{x=10}$ ជាតម្លៃដែលគេស្វ័យភ័យ

$$\text{២. } P(x,10) + P(x,9) = 9P(x,8) \text{ លក្ខខណ្ឌ } \begin{cases} x \geq 10 \\ x \geq 9 \\ x \geq 8 \end{cases} \Rightarrow x \geq 10$$

$$\text{សមីការទី២} \quad \frac{x!}{(x-10)!} + \frac{x!}{(x-9)!} = 9 \times \frac{x!}{(x-8)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x!}{(x-10)!} + \frac{x!}{(x-9)!} - 9 \times \frac{x!}{(x-8)!} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x!}{(x-10)!} \left[1 + \frac{1}{x-9} - \frac{9}{(x-9)(x-8)} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x!}{(x-10)!} \left[\frac{x^2 - 17x + 72 + x - 8 - 9}{(x-9)(x-10)} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x!}{(x-10)!} \times \frac{x^2 - 16x + 55}{(x-9)(x-10)} = 0$$

$$\text{ដោយ } \frac{x!}{(x-10)!} \neq 0 \text{ នោះ } x^2 - 16x + 55 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x-11) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5 < 10 \text{ មិនយក ឬ } x = 11$$

ដូចនេះ $\boxed{x=11}$ ជាតម្លៃដែលគេស្វែងរក។

IV. សរសេរសមីការស្តង់ដារនៃអ៊ីពែបូល (H)

$$\text{អេលីប (E): } \frac{x^2}{35} + \frac{y^2}{10} = 1 \text{ មានរាង } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ដែល}$$

$$a = \sqrt{35} \text{ \& } b = \sqrt{10} \text{ នោះ } c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ ។}$$

អេលីប (E) មានផ្ចិត O និងអ័ក្សធំស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

គេបានកំណុំ $(-5, 0) \text{ \& } (5, 0)$ ។

អ៊ីពែបូល (H) មានកំណុំរួមជាមួយអ៊ីពែបូល (E) នោះវាមានផ្ចិត O

$$\text{និងសមីការស្តង់ដាររាង (H): } \frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1 \text{ ។}$$

$$\text{ចម្ងាយពីផ្ចិតទៅកំណុំ } C = 5 \text{ ហើយ } C^2 = A^2 + B^2$$

$$\Rightarrow A^2 = C^2 - B^2 = 25 - B^2$$

$$\text{នោះគេបាន (H): } \frac{x^2}{25 - B^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$$

ម្យ៉ាងទៀត ចំណុច $M(4\sqrt{2}, 3) \in (H)$ នោះយើងបាន

$$\begin{aligned}
& \frac{(4\sqrt{2})^2}{25 - B^2} - \frac{(3)^2}{B^2} = 1 \\
\Leftrightarrow & \frac{32}{25 - B^2} = 1 + \frac{9}{B^2} \\
\Leftrightarrow & 32B^2 = (B^2 + 9)(25 - B^2) \\
\Leftrightarrow & B^4 + 32B^2 - 16B^2 - 225 = 0 \\
\Leftrightarrow & B^4 + 16B^2 - 225 = 0 \\
\Leftrightarrow & (B^2 + 25)(B^2 - 9) = 0
\end{aligned}$$

ដោយ $B^2 + 25 > 0 \Rightarrow B^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow B^2 = 9$

$$\Rightarrow A^2 = 25 - 9 = 16 \quad \forall$$

ដូចនេះ សមីការអ៊ីពែបូលនោះគឺ $\boxed{(H) : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1} \quad \forall$