លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ
បរិញ្ញាបត្រផ្នែកគណិតវិទ្យា

សមីការអនុគមន៍

សម្រាប់សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា

$$f(2x+1)=3x+2$$

$$f(x)+f(y)=f(x+y)$$

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លោក លឹម ផល្គុន

លោក សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក លឹម ឆុន	លោក អ៊ឹង សំណាង
លោកស្រី ទុយ រីណា	លោក ទិត្យ ម៉េង
លោក នន់ សុខណា	លោក ព្រឹម សុនិត្យ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិគ្គសិរ

ការិយាល័យកុំព្យូទ័រ	រចនាជំព័រ និង ក្រប
លោក អ៊ឹង សំណាង	លោក ព្រំ ម៉ាឡា
កញ្ញា លី គុណ្ណាកា	

អារម្ភកថា

សួស្តីមិត្តអ្នកសិក្សា ជាទីមេត្រី !!

សៀវភៅ **សមីការអនុគមន៍** ដែលយើងខ្ញុំបានរៀបរៀងនេះ រួមមាន គន្លឹះដោះស្រាយសមីការអនុគមន៍ និង លំហាត់គំរូ និង ផ្នែកចុងក្រោយជាវិញ្ញាសាជ្រើសរើស ។ កំហុសឆ្គងនានា ទាំងបច្ចេកទេស និង អក្ខរាវិរុទ្ធប្រាកដជាកើតមានដោយអចេតនាពុំខានឡើយ អាស្រ័យហេតុនេះ យើងខ្ញុំរង់ចាំជានិច្ចនូវមតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីសំណាក់អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ដើម្បីកែតម្រូវសៀវភៅនេះឱ្យកាន់តែមានសុក្រិត្យភាពថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់ យើងខ្ញុំអ្នករៀបរៀង សូមជូនពរដល់អ្នកសិក្សាទាំងអស់ទទួលបានជោគជ័យក្នុងជីវិត និង មានសុខភាពល្អ ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី ១២ ខែ ឧសភា ឆ្នាំ ២០១០

អ្នករៀបរៀង **លឹម ផល្គុន**

Tel : 017 768 246

មេរៀនសង្ខេប

អនុគមន៍

១-និយមន័យ

E និង **F** ជាសំណុំមិនទទេ ។

បើទំនាក់ទំនង **f** ពីសំណុំ **E** ទៅសំណុំ **F** ភ្ជាប់ធាតុនីមួយៗនៃសំណុំ**E** ទៅនឹងធាតុតែមួយគត់នៃសំណុំ**F** នោះទំនាក់ទំនង **f** ហៅថាអនុគមន៍ពីសំណុំ**E** ទៅ **F**

គេកំនត់សរសេរ $\mathbf{f : E \to F}$

$$\mathbf{x \mapsto y = f(x)}$$

២-ដែនកំនត់ និង សំណុំរូបភាព

☞ដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ **f** គឺជាសំណុំអថេរ **x** ដែលបណ្តាលឲ្យអនុគមន៍ $\mathbf{y = f(x)}$ មានតម្លៃ ។

☞សំណុំរូបភាពនៃអនុគមន៍ **f** ដែលតាងដោយ **I** គឺសំណុំតម្លៃ $\mathbf{y = f(x)}$ ចំពោះគ្រប់ **x** នៅលើដែនកំនត់របស់វា ។

៣-អនុគមន៍ច្រាស់

☞សន្មតថាគេមានអនុគមន៍ $f : E \to F$ ។ ចំពោះអនុគមន៍ f បើគេអាចបង្កើតអនុគមន៍ f^{-1} ដោយភ្ជាប់ធាតុនៃសំណុំ F ទៅសំណុំ E វិញ នោះគេថា f^{-1} ជាអនុគមន៍ច្រាស់នៃអនុគមន៍ f ។

☞ដើម្បីរកអនុគមន៍ ច្រាស់នៃអនុគមន៍ f គេត្រូវ

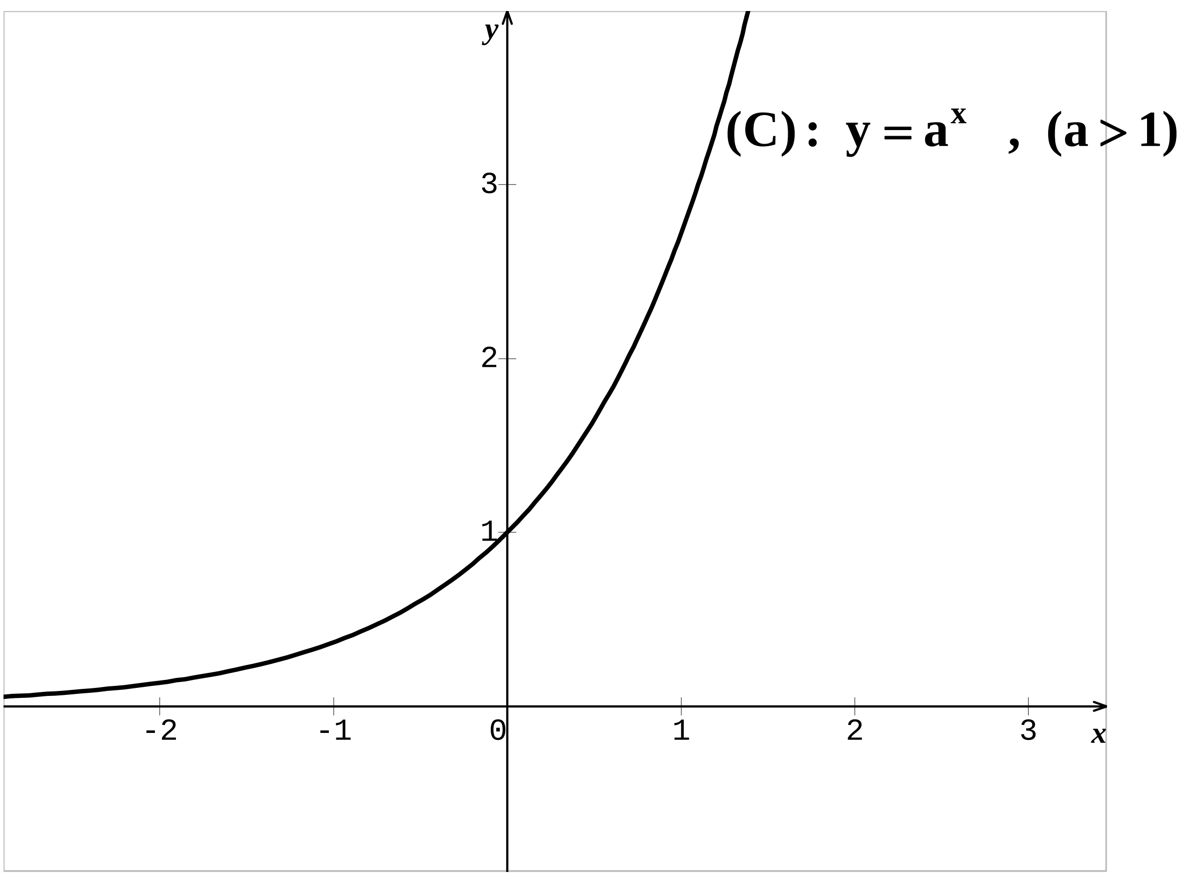
- ជំនួស f(x) ដោយ y
- ប្តូរ x ជា y រួច y ជា x គេបានសមីការមួយរួច ទាញរកតម្លៃរបស់ y ។
- បើសមីការថ្មីនេះមិនតាងy ជាអនុគមន៍នៃ x ទេនោះ អនុគមន៍ f គ្មានអនុគមន៍ច្រាស់ទេ ។
- ជំនួស y ដោយ $f^{-1}(x)$ គេបានអនុគមន៍ច្រាស់ ។

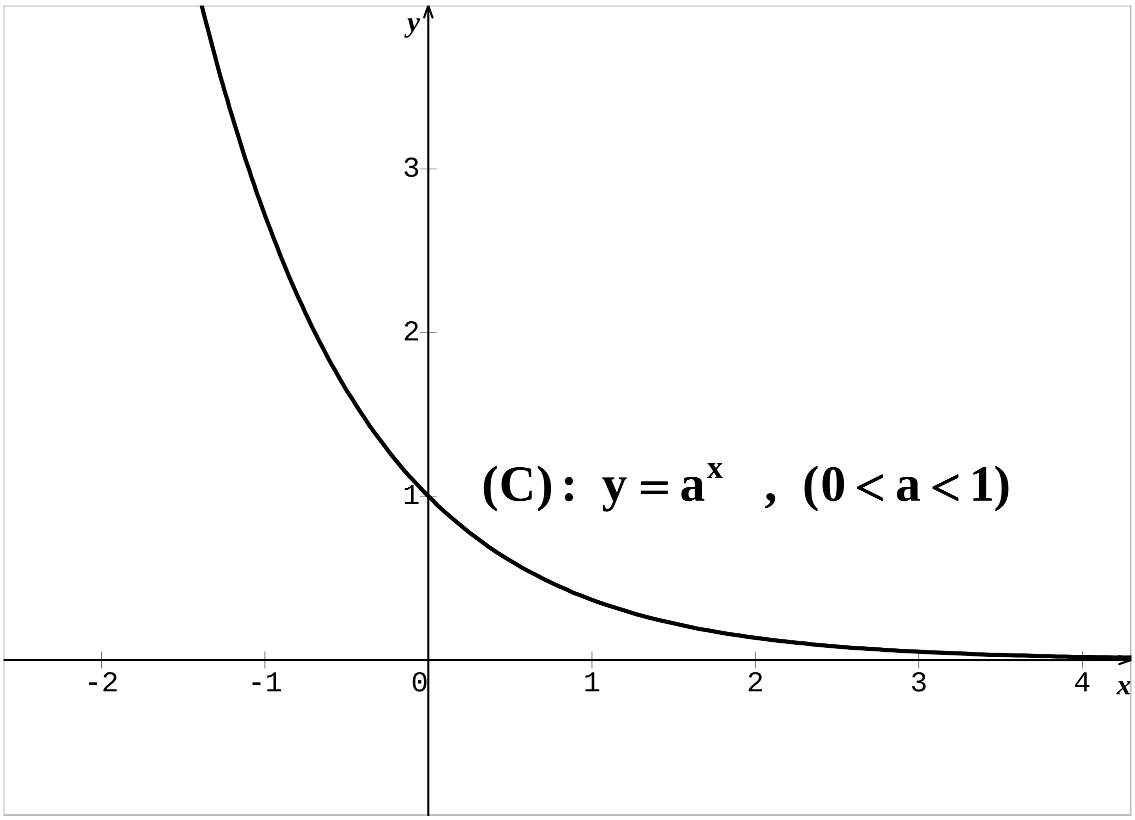
☞បើ f និង g ជាអនុគមន៍ច្រាស់គ្នានោះក្រាបរបស់វាឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ពុះទីមួយនៃអក្ស័កូអរដោនេ ។

៨-អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

☞អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $\mathbf{y = f(x) = a^x}$ ដែល $\mathbf{x \in IR}$ និង $\mathbf{a}$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន និងខុសពី **1** ។

☞ក្រាបនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល





☞ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a > 0$ និង $a \neq 1$ គេបាន

1/ $a^x = a^k \iff x = k$

2/ $a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x)$

៥-អនុគមន៍លោការីត

☞បើគេមាន $y=a^{x}$ នោះ $x=\log_{a} y$

ដែល $y>0, a>0$ និង $a\neq 1$ ។

គេថា $f(x)=a^{x}$ មានអនុគមន៍ច្រាស់ $f^{-1}(x)=\log_{a} x$ ។

ដូចនេះ $y=\log_{a} x$ ហៅថាអនុគមន៍លោការីតនៃ x

មានគោល a ។

☞លក្ខណៈនៃលោការីត

គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x និង y , $a>0, a\neq 1$ គេមាន

1/ $\log_{a}(xy)=\log_{a} x+\log_{a} y$

2/ $\log_{a}\left(\frac{x}{y}\right)=\log_{a} x-\log_{a} y$

3/ $\log_{a} x^{n}=n\log_{a} x$

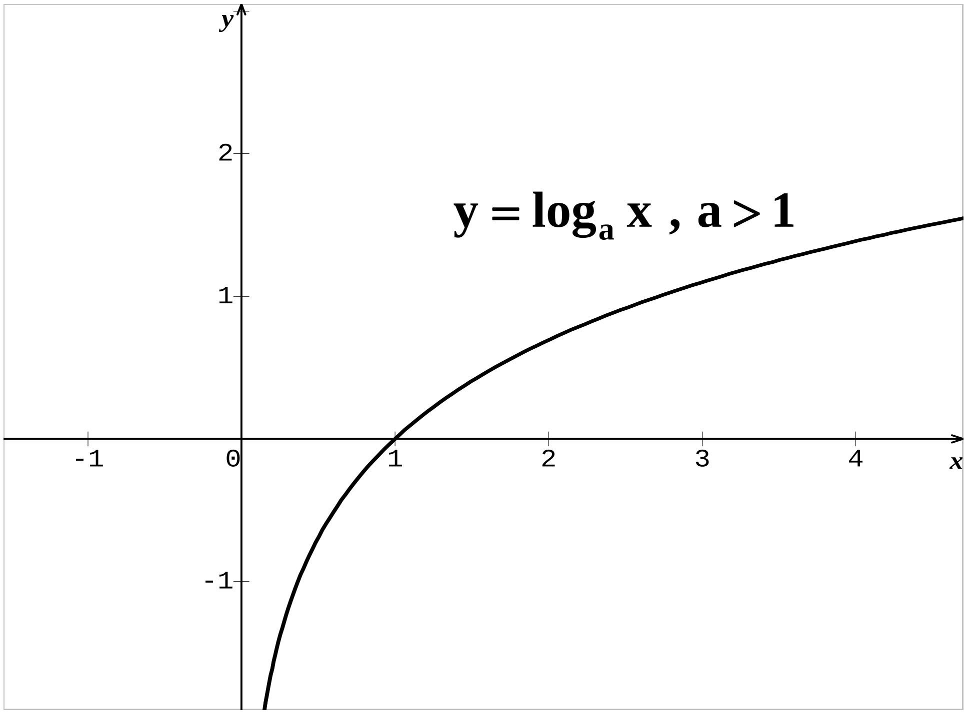
4/ $\log_{a} x=\frac{1}{\log_{x} a}$

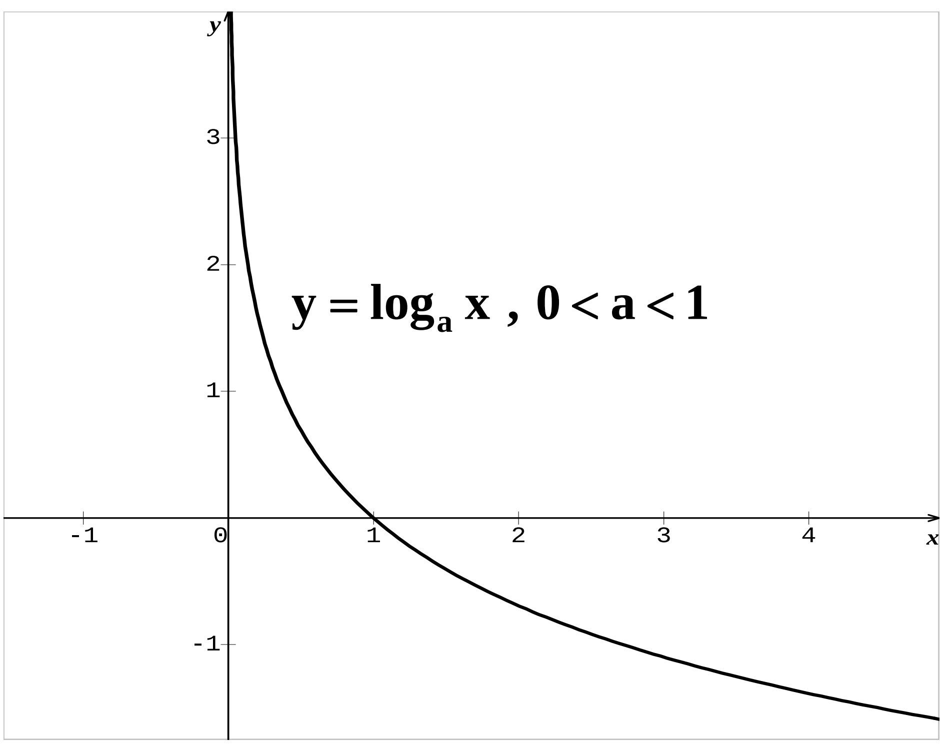
5/ $\log_{a} a=1$

6/ $\log_{a} 1=0$

7/ $a^{\log_{a} b}=b$

☞ក្រាបនៃអនុគមន៍លោការីត





៦-អនុគមន៍ គូ-សេស

បើគេមានអនុគមន៍ $y=f(x)$ មានដែនកំនត់ D

- គេថា f ជាអនុគមន៍គូលុះត្រាតែ $\begin{cases} x\in D\ ,\ -x\in D \\ f(-x)=f(x) \end{cases}$

- គេថា f ជាអនុគមន៍គូលុះត្រាតែ $\begin{cases} x\in D\ ,\ -x\in D \\ f(-x)=-f(x) \end{cases}$

៧-ដេរីវេ

☞ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ គឺជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ ។

☞រូបមន្តគ្រឹះ

1/ $y=u^{n}\Rightarrow y'=nu'u^{n-1}$

2/ $y=uv\Rightarrow y'=u'v+v'u$

3/ $y=\frac{u}{v}\Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^{2}}$

4/ $y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

5/ $y=\frac{1}{v}\Rightarrow y'=-\frac{v'}{v^{2}}$

6/ $y = e^u \Rightarrow y' = u'e^u$

7/ $y = \ln u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u}$

8/ $y = \sin u \Rightarrow y' = u'\cos u$

9/ $y = \cos u \Rightarrow y' = -u'\sin u$

10/ $y = \tan u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

11/ $y = \cot u \Rightarrow y' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

៨-អនុគមន៍កើន-អនុគមន៍ចុះ

-គេថា f ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ(a,b)លុះត្រាតែ គ្រប់ $x \in (a,b)$ គេមាន $f'(x) > 0$ ។

-គេថា f ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ(a,b)លុះត្រាតែ គ្រប់ $x \in (a,b)$ គេមាន $f'(x) < 0$ ។

-គេថា f ជាអនុគមន៍ថេរលើចន្លោះ(a,b)លុះត្រាតែ គ្រប់ $x \in (a,b)$ គេមាន $f'(x) = 0$ ។

៩-អនុគមន៍ខួប

ឧបមាថា **f** ជាអនុគមន៍មានដែនកំនត់**D**។ គេថា **f** ជាអនុគមន៍មានខួប **p** លុះត្រាតែ **p** ជាចំនួនវិជ្ជមានតូចបំផុតដែល $\forall x \in D : f(x+p) = f(x)$ ។

១០-ខួបនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

-អនុគមន៍ $y = \sin(ax)$ មានខួប $p = \dfrac{2\pi}{|a|}$

-អនុគមន៍ $y = \cos(ax)$ មានខួប $p = \dfrac{2\pi}{|a|}$

-អនុគមន៍ $y = \tan(ax)$ មានខួប $p = \dfrac{\pi}{|a|}$

-អនុគមន៍ $y = \cot(ax)$ មានខួប $p = \dfrac{\pi}{|a|}$

១១-អនុគមន៍ទាល់

ឧបមាថា **f** ជាអនុគមន៍មានដែនកំនត់**D**។

-គេថាអនុគមន៍ **f** ជាអនុគមន៍ទាល់លើចំនួន **M** លើដែន **D** លុះត្រាតែ $\forall x \in D : f(x) \le M$ ។

-គេថាអនុគមន៍ **f** ជាអនុគមន៍ទាល់ក្រោមចំនួន **m**

លើដែន **D** លុះត្រាតែ $\forall x \in D : f(x) \le m$ ។

-គេថាអនុគមន៍ **f** ជាអនុគមន៍ទាល់ លើដែន **D**

លុះត្រាតែ $\forall x \in D : m \le f(x) \le M$ ។

១២-អតិបរមាធៀប និង អប្បបរមាធៀបនៃអនុគមន៍

- អនុគមន៍ **f** មានអតិបរមាធៀបត្រង់ x_0 កាលណា

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$$

- អនុគមន៍ **f** មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ x_0 កាលណា

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$$

១៣-អនុគមន៍បណ្តាក់

ឧបមាថាគេមានអនុគមន៍ពីរ **f** និង **g** ។

- គេកំនត់តាងអនុគមន៍ **f** បណ្តាក់ **g** ដោយ

$f \circ g(x) = f[g(x)]$ ។

- គេកំនត់តាងអនុគមន៍ **g** បណ្តាក់ **f** ដោយ

$g \circ f(x) = g[f(x)]$ ។

របៀបដោះស្រាយសមីការអនុគមន៍

១-រកអនុគមន៍ $f(x)$ ដោយស្គាល់ទំនាក់ទំនង $f[u(x)]=v(x)$

របៀបដោះស្រាយ

គេមាន $f[u(x)]=v(x)$ (1)

-តាង $u(x)=t \Rightarrow x=u^{-1}(t)$

-ទំនាក់ទំនង (1) អាចសរសេរ

$f(t)=v[u^{-1}(t)]$

-ប្តូរ t ដោយ x គេបាន $f(x)=v[u^{-1}(x)]$ ។

ដូចនេះ $f(x)=V[u^{-1}(x)]$ ។

ឧទាហរណ៍១

ចូរកំនត់អនុគមន៍ $f(x)$ បើគេដឹងថា

$f(2x+1)=8x^3-6x+1$ ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$

ដំណោះស្រាយ

កំនត់អនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(2x+1)=8x^3-6x+1 \quad (1)$

តាង $2x+1=t \Rightarrow x=\frac{t-1}{2}$

តាម (1) គេបាន $f(t)=8\,(\frac{t-1}{2})^3-6(\frac{t-1}{2})+1$

$$=t^3-3t^2+3t-1-3t+3+1$$

$$=t^3-3t^2+3$$

ដូចនេះ $f(x)=x^3-3x^2+3$ ។

ឧទាហរណ៍២

ចូរកំនត់អនុគមន៍ $f(x)$ បើគេដឹងថា

$f(\frac{x-1}{x+1})=\frac{2x+1}{x-2}$?

ដំណោះស្រាយ

កំនត់អនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(\frac{x-1}{x+1})=\frac{2x+1}{x-2} \quad (1)$

តាង $t=\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow (x+1)t=x-1$

$$xt + t = x - 1$$

$$(t-1)x = -t - 1$$

$$x = -\frac{t+1}{t-1}$$

តាម (1) គេបាន $f(t) = \dfrac{2\left(-\dfrac{t+1}{t-1}\right)+1}{-\dfrac{t+1}{t-1}-2}$

$$= \frac{-2t-2+t-1}{-t-1-2t+2} = \frac{t+3}{3t-1}$$

ដូចនេះ $f(x) = \dfrac{x+3}{3x-1}$ ។

ឧទាហរណ៍៣

ចូរកំនត់អនុគមន៍ $f(x)$ បើគេដឹងថា

$f(x+\sqrt{x^2-2x+2}) = 2x+2$ ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$

ដំណោះស្រាយ

កំនត់អនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(x+\sqrt{x^2-2x+2}) = 2x+2$ (1)

តាង $x+\sqrt{x^2-2x+2} = t$

$$x^2 - 2x + 2 = (t - x)^2$$

$$x^2 - 2x + 2 = t^2 - 2xt + x^2$$

$$2(t-1)x = t^2 - 2$$

$$x = \frac{t^2 - 2}{2(t-1)}$$

តាម (1) គេបាន $f(t) = 2[\frac{t^2 - 2}{2(t-1)}] + 2 = \frac{t^2 + 2t - 4}{t - 1}$

ដូចនេះ $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{x - 1}$ ។

ឧទាហរណ៍៨

ចូរកំនត់អនុគមន៍ $f(x)$ បើគេដឹងថា

$f(x + \frac{1}{x}) = \frac{x^4 + 1}{x^4 - x^2 + 1}$?

ដំណោះស្រាយ

កំនត់អនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(x + \frac{1}{x}) = \frac{x^4 + 1}{x^4 - x^2 + 1}$

$$= \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1}$$

តាង $t = x + \frac{1}{x}$ ដែល $|t| = |x + \frac{1}{x}| = \frac{|x^2+1|}{|x|} \geq 2$

គេបាន $t^2 = (x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ ឬ $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

គេបាន $f(t) = \frac{t^2 - 2}{t^2 - 2 - 1} = \frac{t^2 - 2}{t^2 - 3}$

ដូចនេះ $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 3}$ ។

ឧទាហរណ៍៨

ចូរកំនត់អនុគមន៍ $f(x)$ បើគេដឹងថា

$f\left[\cos(x - \frac{\pi}{4})\right] = (\sin x - \cos x)^2$?

ដំណោះស្រាយ

កំនត់អនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f\left[\cos(x - \frac{\pi}{4})\right] = (\sin x - \cos x)^2$

$$= \sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x$$

$$= 1 - \sin 2x$$

តាង $t = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ ដែល $-1 \le t \le 1$

គេបាន $t = \cos x\cos\frac{\pi}{4} + \sin x\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$

ឬ $t^2 = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{2}(1 + \sin 2x) \Rightarrow \sin 2x = 2t^2 - 1$

គេបាន $f(t) = 1 - (2t^2 - 1) = 2 - 2t^2$

ដូចនេះ $f(x) = 2 - 2x^2$ ។

ឧទាហរណ៍៦

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $y = f(x)$ បើគេដឹងថា :

$f(x + \sqrt{x^2 - 2x + 2}) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ **ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។**

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រកអនុគមន៍ $y = f(x)$:

គេមាន $f(x + \sqrt{x^2 - 2x + 2}) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ **(1)**

បើយើងតាង $x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = t$

យើងបាន $\sqrt{x^2-2x+2}=t-x$

$$x^2-2x+2=(t-x)^2$$

$$x^2-2x+2=t^2-2tx+x^2$$

$$2tx-2x=t^2-2$$

$$2x(t-1)=t^2-2$$

$$x=\frac{t^2-2}{2(t-1)}\quad,\ t\neq 1$$

យកតម្លៃ $x=\frac{t^2-2}{2(t-1)}$ ជំនួសក្នុង (1) យើងបាន ៖

$$f(t)=\frac{[\frac{t^2-2}{2(t-1)}]^2-1}{[\frac{t^2-2}{2(t-1)}]^2+1}=\frac{t^4-4t^2+4-4t^2+8t-4}{t^4-4t^2+4+4t^2-8t+4}$$

$$f(t)=\frac{t^4-8t^2+8t}{t^4-8t+8}$$

$$f(t)=\frac{t(t^3-8t+8)}{t^4-8t+8}$$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=\frac{x(x^3-8x+8)}{x^4-8x+8}}$ ។

២-រកអនុគមន៍ $f(x)$ ដោយស្គាល់ទំនាក់ទំនង

$$A(x)f[u(x)]+B(x)f[v(x)]=C(x) \quad (1)$$

ដើម្បីរកអនុគមន៍នេះគេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម

-យក $u(x)=v(t)$ រួចទាញរក $x=\varphi(t)$ យកជំនួសក្នុង(1) គេបានសមីការ

$$A(\varphi(t))f[v(t)]+B(\varphi(t))f[v(\varphi(t))]=C(\varphi(t))$$

-បើ $v(\varphi(t))=u(t)$ នោះគេបាន

$$A(\varphi(t))f[v(t)]+B(\varphi(t))f[u(t)]=C(\varphi(t))$$

-ប្តូរ t ជា x គេបានសមីការ

$$A(\varphi(x))f[v(x)]+B(\varphi(x))f[u(x)]=C(\varphi(x)) \quad (2)$$

-តាមសមីការ (1) និង (2) គេបានប្រពន្ធ័សមីការ

ដែលអាចដោះស្រាយរក $f(u(x))$ ឬ $f(v(x))$ ។

-ឧបមាថា $f(u(x))=W(x)$, ដោយយក $u(x)=z$

គេទាញ $x=u^{-1}(z)$ ហើយ $f(z)=W(u^{-1}(z))$

-ប្តូរ z ជា x គេបាន $f(x)=W(u^{-1}(x))$ ជាអនុគមន៍ ដែលត្រូវរក ។

ឧទាហរណ៍

ចូរកំនត់អនុគមន៍ $f(x)$ បើគេដឹងថា

$2\,f(1-2x)+x\,f(1+2x)=4x^2-9x-2$?

ដំណោះស្រាយ

កំនត់អនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $2\,f(1-2x)+x\,f(1+2x)=4x^2-9x-2$ (1)

យក $1-2x=1+2t \Rightarrow x=-t$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន

$2f(1+2t)-t\,f(1-2t)=4t^2+9t-2$

ប្តូរ t ជា x គេបាន

$2f(1+2x)-xf(1-2x)=4x^2+9x-2$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបានប្រពន្ធ័សមីការ

$$\begin{cases} 2f(1-2x)+xf(1+2x)=4x^2-9x-2 & (1) \\ -xf(1-2x)+2f(1+2x)=4x^2+9x-2 & (2) \end{cases}$$

គុណសមីការ (1) នឹង $x \neq 0$ រួចសមីការ (2) នឹង 2

បន្ទាប់មកធ្វើផលបូកអង្គនឹងអង្គគេបាន

$(x^2+4)f(1+2x)=4x^3-x^2+16x-4$

គេទាញ $f(1+2x)=\frac{4x^3-x^2+16x-4}{x^2+4}$

បន្ទាប់ពីធ្វើវិធីចែកពហុធាគេទទួលបាន

$f(1+2x)=4x-1$, តាង $1+2x=t \Rightarrow x=\frac{t-1}{2}$

គេបាន $f(t)=4(\frac{t-1}{2})-1=2t-3$

ដូចនេះ $f(x)=2x-3$ ។

ឧទាហរណ៍

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំនត់គ្រប់ $x\in IR-\{-1\,;0\}$ ដោយ ÷

$x(2x+1)f(x)+f(\frac{1}{x})=x+1$ ។ រកអនុគមន៍ $f(x)$ រួច

ចូរគណនា $S=f(1)+f(2)+f(3)+....+f(2009)$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $x(2x+1)f(x)+f(\frac{1}{x})=x+1$ (1)

ជំនួស x ដោយ $\frac{1}{x}$ ក្នុងសមីការ (1) គេបាន ÷

$$\frac{1}{x}(\frac{2}{x}+1)f(\frac{1}{x})+f(x)=\frac{1}{x}+1$$

$$f(\frac{1}{x})+\frac{x^2}{x+2}f(x)=\frac{x^2+x}{x+2} \quad (2)$$

ដកសមីការ (1) និង (2) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$\left[x(2x+1)-\frac{x^2}{x+2}\right] f(x)=x+1-\frac{x^2+x}{x+2}$$

$$\frac{2x(x+1)^2}{x+2}f(x)=\frac{2x+2}{x+2}$$

គេទាញបាន $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$

គេបាន $S=\sum_{k=1}^{2009}[f(k)]=\sum_{k=1}^{2009}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{2009}=\frac{2008}{2009}$

ដូចនេះ $S=f(1)+f(2)+f(3)+....+f(2009)=\frac{2008}{2009}$ ។

៣-រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ ដោយស្គាល់ទំនាក់ទំនង

$$\begin{cases} A_1(x)f[u_1(x)]+B_1(x)g[v_1(x)]=C_1(x) \\ A_2(x)f[u_2(x)]+B_2(x)g[v_2(x)]=C_2(x) \end{cases}$$

ឧទាហរណ៍ ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ បើគេដឹងថា :

$f(2x-1)+2g(3x+1)=x^2$

និង $f(4x-3)-g(6x-2)=-2x^2+2x+1$ ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$:

គេមាន $f(2x-1)+2g(3x+1)=x^2$ (1)

និង $f(4x-3)-g(6x-2)=-2x^2+2x+1$ (2)

យើងតាង $2x-1=4t-3$ នាំឱ្យ $x=2t-1$

យក $x=2t-1$ ជួសក្នុង (1) គេបាន :

$$f[2(2t-1)-1]+2g[3(2t-1)+1]=(2t-1)^2$$

$$f(4t-3)+2g(6t-2)=4t^2-4t+1 \quad (3)$$

បើគេយក $x=t$ ជួសក្នុង (2) គេបាន

$$f(4t-3)-g(6t-2)=-2t^2+2t+1 \quad (4)$$

តាម (3) និង (4) គេបានប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases} f(4t-3)+2g(6t-2)=4t^2-4t+1 & (3) \\ f(4t-3)-g(6t-2)=-2t^2+2t+1 & (4) \end{cases}$$

ដកសមីការ (3) និង (4) គេបាន

$3g(6t-2)=6t^2-6t$ នាំឱ្យ $g(6t-2)=2t^2-2$

យក $x=6t-2$ នាំឱ្យ $t=\dfrac{x+2}{6}$

ហើយ $g(x)=2(\frac{x+2}{6})^2-2=\frac{(x-4)(x+8)}{18}$

តាម (4) នាំឱ្យ $f(4t-3)-(2t^2-2)=-2t^2+2t+1$

នាំឱ្យ $f(4t-3)=2t-1$ យក $x=4t-3$ នាំឱ្យ $t=\frac{x+3}{4}$

គេទាញ $f(x)=2(\frac{x+3}{4})-1=\frac{x+1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=\frac{x+1}{2}\ ,\ g(x)=\frac{(x-4)(x+8)}{18}}$

៨-សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទីមួយ

ក. និយមន័យ :

សមីការឌីផេរង់ស្យែលលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែនលំដាប់ទីមួយមានមេគុណ

ថេរគឺជាសមីការដែលមានទំរង់ទូទៅជា $(E): y'-ay=0\ \ ,a\in IR$

ខ. ចំលើយសមីការ:

សមីការឌីផេរង់ស្យែលលំដាប់ទីមួយ $(E): y'-ay=0\ \ ,a\in IR$

មានចំលើយទូទៅជាអនុគមន៍ទំរង់ $y=f(x)=k.e^{ax}$

ដែល k ជាចំនួនពិត ។

ឧទាហរណ៍ ១:

ចូរដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម :

1. $\mathbf{y'-2y=0}$

ដោយ $\mathbf{a=2}$ នោះសមីការមានចំលើយទូទៅជាអនុគមន៍

$\mathbf{y=k.e^{2x}\quad ,k\in IR}$ ។

2. $\mathbf{y'+3y=0}$

ដោយ $\mathbf{a=-3}$ នោះសមីការមានចំលើយទូទៅជាអនុគមន៍

$\mathbf{y=k.e^{-3x}\quad ,k\in IR}$ ។

3. $\mathbf{y'-4y=0}$ ដោយដឹងថា $\mathbf{y(0)=3}$

ដោយ $\mathbf{a=4}$ នោះសមីការមានចំលើយទូទៅជាអនុគមន៍

$\mathbf{y=k.e^{4x}\quad ,k\in IR}$

ដោយ $\mathbf{y(0)=k.e^{0}=3}$ នាំឱ្យ $\mathbf{k=3}$ ។

ដូចនេះគេបាន $\mathbf{y=3.e^{4x}}$ ជាចំលើយរបស់សមីការ ។

4. $\mathbf{y'-3y=6}$

សមីការអាចសរសេរ :

$y'-3y-6=0$

$y'-3(y+2)=0$

តាង $z=y+2$ នាំឱ្យ $z'=y'$

គេបាន $z'-3z=0$ នាំឱ្យ $z=k.e^{3x}\quad ,k\in IR$

ដោយ $z=y+2$ គេបាន $y+2=k.e^{3x}$

នាំឱ្យ $y=-2+k.e^{3x}$ ជាចំលើយសមីការ ។

5. $y''-y'=0$

តាង $z=y'$ នាំឱ្យ $z'=y''$

សមីការអាចសរសេរ :

$z'-z=0$ នាំឱ្យ $z=k.e^{x}\quad ,k\in IR$

ដោយ $z=y'$ គេទាញ $y'=k.e^{x}$

នាំឱ្យ $y=\int k.e^{x}.dx=k.e^{x}+c\quad (k,c\in IR)$ ។

៤-សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទីពីរ

ក. និយមន័យ:

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែអូម៉ូសែនលំដាប់ទីពីរដែលមាន មេគុណថេរគឺជាសមីការដែលមានទំរង់ទូទៅជា

$(\mathbf{E}): \mathbf{ay''+by'+cy=0}\ \ , \mathbf{a\neq 0, a, b, c\in IR}$ ។

ខ. សមីការសំគាល់ :

សមីការសំគាល់របស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$\mathbf{ay''+by'+cy=0}\ \ , \mathbf{a\neq 0, a, b, c\in IR}$

ជាសមីការដឺក្រេទីពីរដែលមានរាង $\mathbf{ar^2+br+c=0}$ ។

គ. ចំលើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល :

ដើម្បីរកចំលើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$\mathbf{ay''+by'+cy=0}\ \ , \mathbf{a\neq 0, a, b, c\in IR}$

គេត្រូវដោះស្រាយសមីការសំគាល់ $\mathbf{ar^2+br+c=0}$ ។

-បើ $\mathbf{\Delta=b^2-4ac>0}$ នោះសមីការសំគាល់មានឫសពីរ $\mathbf{r_1}$ និង

r_2 ក្នុងករណីនេះសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានចំលើយទូទៅជាអនុគមន៍

$\boxed{y = f(x) = A.e^{r_1 x} + B.e^{r_2 x}}$ ដែល $A, B \in IR$ ។

-បើ $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ នោះសមីការសំគាល់មានឫសឌុប

$r_1 = r_2 = -\dfrac{b}{2a} = r_0$ ក្នុងករណីនេះសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមាន

ចំលើយទូទៅជាអនុគមន៍ :

$$y = f(x) = (Ax + B).e^{r_0 x}$$ ដែល $A, B \in IR$ ។

-បើ $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ នោះសមីការសំគាល់មានរឹសពីរជា

ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ $r_1 = \alpha + i\beta$ និង $r_2 = \alpha - i\beta$

ក្នុងករណីនេះសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានចំលើយទូទៅជាអនុគមន៍

$$y = f(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x).e^{\alpha x}$$

ដែល $A, B \in IR$ ។

ឧទាហរណ៍ ១

ចូរដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម :

1. $y''-5y'+6y=0$

មានសមីការសំគាល់ $r^2-5r+6=0$

$\Delta=(-5)^2-4(1).(6)=1$

មានឫស $r_1=\dfrac{5-1}{2}=2\ ,r_2=\dfrac{5+1}{2}=3$

ចំលើយសមីការ $y=A.e^{2x}+B.e^{3x}$ ដែល $A,B\in IR$ ។

2. $y''-4y'+4y=0$

មានសមីការសំគាល់ $r^2-4r+4=0$

$\Delta=(-4)^2-4(1).(4)=0$

សមីកាមានឫសឌុប $r_1=r_2=r_0=-\dfrac{b}{2a}=2$

ចំលើយសមីការជាអនុគមន៍ $y=(Ax+B).e^{2x}$ ដែល $A,B\in IR$

3. $y''-4y'+13y=0$

មានសមីការសំគាល់ $r^2-4r+13=0$

$\Delta'=(-2)^2-(1).(13)=-9=9i^2$

សមីកាមានឫសជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ $\left[\begin{array}{l} r_1=2+3i \\ r_2=2-3i \end{array}\right.$

គេទាញបាន $\alpha=2\ ,\beta=3$ ដូចនេះ ចំលើយសមីការជាអនុគមន៍

$y=(A\cos 3x+B\sin 3x).e^{2x}$ ដែល $A,B\in IR$ ។

៦-ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានរាង

$(E):\ y'-ay=E(x)$,

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនេះមានចម្លើយទូទៅ $y=y_e+y_p$ ដែល y_e ជាចម្លើយនៃសមីការ $y'-ay=0$ និង y_p ជាចម្លើយពិសេសមួយ នៃសមីការ $y'-ay=E(x)$ ។

លំហាត់គំរូ

គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'-4y=-4x^2+10x-6$

ក-កំនត់ចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y_P(x)=ax^2+bx+c$ ជាចំលើយដោយឡែកមួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ-បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y=y_P(x)+y_h(x)$ ជាចំលើយទូទៅរបស់ (E) នោះអនុគមន៍ $y_h(x)$ជាចំលើយរបស់សមីការអូម៉ូសែន $(E'): y'-4y=0$ ។

គ-ដោះស្រាយសមីការ (E')រួចទាញរកចំលើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ចំនួនពិត a,b និង c

$(E): y'-4y=-4x^2+10x-6$

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y_P(x)=ax^2+bx+c$ ជាចំលើយដោយឡែក

មួយរបស់សមីការ (E)លុះត្រាតែអនុគមន៍ $y_p(x), y'_p(x)$ និង

$y''_p(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ។

គេបាន $(E): y'_P(x) - 4y_p(x) = -4x^2 + 10x - 6$

ដោយ $\begin{cases} y_P(x) = ax^2 + bx + c \\ y'_p(x) = 2ax + b \end{cases}$

គេបាន $(2ax + b) - 4(ax^2 + bx + c) = -4x^2 + 10x - 6$

នាំឱ្យ $-4ax^2 - (4b - 2a)x + (b - 4c) = -4x^2 + 10x - 6$

គេទាញបាន $\begin{cases} -4a = -4 \\ 4b - 2a = -10 \\ b - 4c = -6 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$

ដូចនេះ $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$

និង $y_P(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ ។

ខ-ការបង្ហាញ

អនុគមន៍ $y = y_P(x) + y_h(x)$ ជាចំលើយរបស់ (E)

លុះត្រាអនុគមន៍ y, y' ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

ដោយគេមាន $y' = y'_p(x) + y'_h(x)$ នោះគេបាន :

$$\left[y'_p(x) + y'_h(x)\right] - 4\left[y_p(x) + y_h(x)\right] = -4x^2 + 10x - 6$$

$$\left[y'_p(x) - 4y_p(x)\right] + \left[y'_h(x) - 4y_h(x)\right] = -4x^2 + 10x - 6 \quad (1)$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន

$$y'_P(x) - 4y_p(x) = -4x^2 + 10x - 6 \quad (2)$$

(ព្រោះ $y_p(x)$ ជាចំលើយរបស់សមីការ (E)) ។

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញបាន :

$$-4x^2 + 10x - 6 + \left[y'_h(x) - 4y_h(x)\right] = -4x^2 + 10x - 6$$

នាំឱ្យគេទាញបាន :

$y'_h(x) - 4y_h(x) = 0$ ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $y_h(x)$

ជាចំលើយរបស់សមីការ $(E') : y' - 4y = 0$ ។

គ-ដោះស្រាយសមីការ $(E'): y'-4y=0$

ដោយ $a=4$ ដូចនេះចំលើយសមីការ (E') ជាអនុគមន៍

$y_h(x)=k.e^{4x} \quad ,k\in IR$ ។

ទាញរកចំលើយទូទៅរបស់សមីការ (E):

តាមសំរាយខាងលើចំលើយសមីការ (E) គឺជាអនុគមន៍ទំរង់

$y=y_p(x)+y_h(x)$ ដោយគេមាន $y_p(x)=(x-1)^2$

និង $y_h(x)=k.e^{4x}$

ដូចនេះ $y=(x-1)^2+k.e^{4x} \quad ,k\in IR$ ជាចំលើយរបស់សមីការ

៧-របៀបដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានរាង

$(E):\ ay''+by'+cy=E(x)$ ដែល $a\neq 0$

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការនេះគេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម :

-ស្វែងរកចម្លើយពិសេសមិនអូម៉ូសែនតាងដោយ y_p នៃសមីការ

$ay''+by'+cy = E(x)$ ដែល y_p មានទម្រង់ដូច $E(x)$ ។

-រកចម្លើយទូទៅតាងដោយ y_h នៃសមីការលីនេអ៊ែអូម៉ូសែន

$ay''+by'+cy = 0$ ។

-គេបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ

$y = y_P + y_h$ ។

លំហាត់គំរូ

គេឱ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-4y'+4y = 4x^2 - 24x + 34$

ក-កំនត់ចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y_P(x) = ax^2 + bx + c$

ជាចំលើយដោយឡែកមួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ-បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y = y_P(x) + y_h(x)$ ជាចំលើយទូទៅរបស់ (E)

នោះអនុគមន៍ $y_h(x)$ ជាចំលើយរបស់សមីការអូម៉ូសែន

$(E'): y''-4y'+4y = 0$ ។

គ-ដោះស្រាយសមីការ (E') រួចទាញចំលើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ចំនួនពិត a,b និង c

$(E): y''-4y'+4y = 4x^2 - 24x + 34$

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y_P(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចំលើយដោយឡែកមួយរបស់សមីការ (E) លុះត្រាតែអនុគមន៍ $y_p(x), y'_p(x)$ និង $y''_p(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ។

គេបាន $(E): y''_p(x) - 4y'_P(x) + 4y_p(x) = 4x^2 - 24x + 34$

ដោយ $\begin{cases} y_P(x) = ax^2 + bx + c \\ y'_p(x) = 2ax + b \\ y''_p(x) = 2a \end{cases}$

គេបាន

$$(2a) - 4(2ax + b) + 4(ax^2 + bx + c) = 4x^2 - 24x + 34$$

$$4ax^2 + (4b - 8a)x + (2a - 4b + 4c) = 4x^2 - 24x + 34$$

គេទាញបាន $\begin{cases} 4a = 4 \\ 4b - 8a = -24 \\ 2a - 4b + 4c = 34 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 4 \end{cases}$

ដូចនេះ $a = 1\ ,b = -4\ ,c = -4$

និង $y_P(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ ។

ខ-ការបង្ហាញ

អនុគមន៍ $y = y_P(x) + y_h(x)$ ជាចំលើយរបស់ (E)

លុះត្រាអនុគមន៍ y, y', y'' ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

ដោយគេមាន $y' = y'_p(x) + y'_h(x)$ និង $y'' = y''_p(x) + y''_h(x)$

នោះគេបាន :

$$\left[y''_p + y''_h\right] - 4\left[y'_p + y'_h\right] + 4\left[y_p + y_h\right] = 4x^2 - 24x + 34$$

$$\left[y''_p - 4y'_p + 4y_p\right] + \left[y''_h - 4y'_h + 4y_h\right] = 4x^2 - 24x + 34 \quad (1)$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន

$$y''_p(x) - 4y'_P(x) + 4y_p(x) = 4x^2 - 24x + 34 \quad (2)$$

(ព្រោះ $y_p(x)$ ជាចំលើយរបស់សមីការ (E)) ។

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញបាន :

$$4x^2-24x+34+\left[y''_h-4y'_h+4y_h\right]=4x^2-24x+34$$

នាំឱ្យគេទាញបាន $y''_h(x)-4y'_h(x)+4y_h(x)=0$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ $y_h(x)$ ជាចំលើយរបស់

សមីការ $(E'): y''-4y'+4y=0$ ។

គ-ដោះស្រាយសមីការ $(E'): y''-4y'+4y=0$

សមីការសំគាល់ $r^2-4r+4=0$, $\Delta'=4-4=0$

នាំឱ្យសមីការមានឫសឌុប $r_1=r_2=r_0=2$

ដូចនេះចំលើយសមីការ (E') ជាអនុគមន៍

$y_h(x)=(Ax+B).e^{2x}$, $A,B\in IR$ ។

ទាញរកចំលើយទូទៅរបស់សមីការ (E):

តាមសំរាយខាងលើចំលើយសមីការ (E) គឺជាអនុគមន៍ទំរង់

$\mathbf{y = y_p(x) + y_h(x)}$ ។

ដោយគេមាន $\mathbf{y_p(x) = (x-2)^2}$ និង $\mathbf{y_h(x) = (Ax+B).e^{2x}}$

ដូចនេះ $\mathbf{y = (x-2)^2 + (Ax+B).e^{2x} \quad , A, B \in IR}$

ជាចំលើយរបស់សមីការ $\mathbf{(E)}$ ។

៨-របៀបដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានរាង

$\mathbf{(E):\ y'+P(x)y = Q(x)}$ ដែល $\mathbf{a \neq 0}$

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការនេះគេត្រូវអនុវត្តន៍ដូចខាងក្រោម :

-គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $\mathbf{e^{\int P(x).dx}}$ គេបាន :

$$\mathbf{y'e^{\int P(x).dx} + P(x)ye^{\int P(x).dx} = Q(x)e^{\int P(x).dx}} \quad \mathbf{(1)}$$

-តាងអនុគមន៍ $\mathbf{z = y\,e^{\int P(x).dx}}$ គេបាន :

$$\mathbf{z' = y'e^{\int P(x).dx} + P(x)ye^{\int P(x).dx}} \quad \mathbf{(2)}$$

-តាម **(1)** និង **(2)** គេទាញបាន :

$$z' = Q(x)e^{\int P(x).dx} \Rightarrow z = \int Q(x)e^{\int P(x).dx}.dx + c$$

-ទាញរក $y = z.e^{-\int P(x).dx}$ ។

លំហាត់គំរូ

1. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$y' + 2xy = 4x^3 e^{-x^2}$$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $e^{\int 2xdx} = e^{x^2}$ គេបាន

$$y'e^{x^2} + 2xe^{x^2}y = 4x^3 \quad (1)$$

តាងអនុគមន៍ $z = ye^{x^2}$ គេបាន :

$$z' = y'e^{x^2} + 2xe^{x^2}y \quad (2)$$

តាម **(1)** និង **(2)** គេបាន :

$$z' = 4x^3 \Rightarrow z = \int 4x^3 dx = x^4 + C$$

គេទាញបាន $y = z.e^{-x^2} = (x^4 + C)e^{-x^2}$

ដែល **C** ជាចំនួនថេរមួយណាក៏បាន ។

2. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$y'+y\cos x = 2x\,e^{x^2-\sin x}$$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $e^{\int \cos x dx} = e^{\sin x}$ គេបាន

$$y'\,e^{\sin x} + y\cos x\,e^{\sin x} = 2xe^{x^2} \quad (1)$$

តាងអនុគមន៍ $z = ye^{\sin x}$ គេបាន :

$$z' = y'\,e^{\sin x} + y\cos x e^{\sin x} \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន :

$$z' = 2xe^{x^2} \Rightarrow z = \int 2xe^{x^2}dx = e^{x^2} + C$$

គេទាញបាន $y = z.e^{-\sin x} = (e^{x^2} + C)e^{-\sin x}$

ដែល C ជាចំនួនថេរមួយណាក៏បាន ។

3. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$y'-y\sin 2x = e^{x-\cos^2 x}$$

សមីការអាចសរសេរ

$$y'-2y\sin x\cos x = e^{x}.e^{-\cos^2 x}$$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $e^{-\int 2\cos x \sin x dx} = e^{\cos^2 x}$ គេបាន

$$y'e^{\cos^2 x} - 2y\cos x\sin x e^{\cos^2 x} = e^x \quad (1)$$

តាងអនុគមន៍ $z = ye^{\cos^2 x}$ គេបាន :

$$z' = y'e^{\cos^2 x} - 2y\cos x\sin x e^{\cos^2 x} \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន :

$$z' = e^x \Rightarrow z = \int e^x dx = e^x + C$$

គេទាញបាន $y = z.e^{\cos^2 x} = (e^x + C)e^{\cos^2 x}$

ដែល C ជាចំនួនថេរមួយណាក៏បាន ។

4. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$$y' + (2x+1)y = (2x+1)(x^2+x+1)^3 e^{-x^2-x}$$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $e^{\int (2x+1)dx} = e^{x^2+x}$ គេបាន

$$y'e^{x^2+x} + (2x+1)y e^{x^2+x} = (2x+1)(x^2+x+1)^3 \quad (1)$$

តាងអនុគមន៍ $z = ye^{x^2+x}$ គេបាន :

$$z' = y'e^{x^2+x} + (2x+1)ye^{x^2+x} \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន :

$$z' = (2x+1)(x^2+x+1)^3$$

$$\Rightarrow z = \int (2x+1)(x^2+x+1)^3 dx = \frac{1}{4}(x^2+x+1)^4 + C$$

គេទាញបាន $y = z.e^{-x^2-x} = [\frac{1}{4}(x^2+x+1)^4 + C]e^{-x^2-x}$

កម្រង

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាជ្រើសរើស

និងដំណោះស្រាយ

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី១

I-គេឱ្យ $A=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+i\right)^n-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-i\right)^n$, $n\in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា $A=i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

II-ចូរគណនាលីមីត

$$L_n=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+....+\sqrt{2+x}}}}-2}{x-2}$$

(មាន **n** ឫសការេ)

III-គេឱ្យអាំងតេក្រាល

$$I_0=\int_0^1\frac{dt}{1+t+t^2} \quad \text{និង} \quad I_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t+t^2}.dt \ , (n\in IN)$$

ក. ចូរគណនាតម្លៃនៃ I_0 រួច ស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $I_n+I_{n+1}+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$ ។

គ. ទាញឱ្យបានថា $\frac{1}{3(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{3(n-1)}$, $\forall n\ge 2$ ។

ទាញរកលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(nI_n)$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-បង្ហាញថា $A = i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$

យើងមាន $A = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + i\right)^n - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - i\right)^n$, $n \in IN$

តាង

$$Z = \frac{1}{\sqrt{3}} + i = \frac{1 + i.\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

តាមរូបមន្តដឺម័រគេបាន

$$Z^n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + i\right)^n = \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

ហើយ $\overline{Z}^n = \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

គេទាញ

$$A = \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$= i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{A = i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}}$ ។

II-គណនាលីមីត :

$$L_n = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+....+\sqrt{2+x}}}}-2}{x-2}$$

$$L_n = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+....+\sqrt{2+x}}}}-2}{x-2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+x}}}}+2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+x}}}}+2}$$

$$L_n = \lim_{x\to 2}\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+x}}}-4}{x-2}\times\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+....+\sqrt{2+x}}}}+2}$$

$$L_n = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+....+\sqrt{2+x}}}-2}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+....+\sqrt{2+x}}}}+2}$$

$$L_n = L_{n-1}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4}L_{n-1}$$

តាមទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $(L_n), n\in IN^*$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

មានរេសុង $q = \frac{1}{4}$ ។

និងតួទីមួយ

$$L_1=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2+x-4}{(x-2)(\sqrt{2+x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{2+x}+2)}=\frac{1}{4}$$

តាមរូបមន្ត $L_n=L_1\times q^{n-1}=\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{4^n}$ ។

ដូចនេះ $L_n=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+....+\sqrt{2+x}}}}-2}{x-2}=\frac{1}{4^n}$ ។

III-ក. គណនាតម្លៃនៃ I_0 រួច ស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ

យើងបាន $I_0=\int_0^1\frac{dt}{1+t+t^2}=\int_0^1\frac{dt}{\frac{3}{4}+(\frac{1}{2}+t)^2}$

តាង $U=\frac{1}{2}+t$ នាំឱ្យ $dU=dt$

ហើយចំពោះ $\forall t\in[0,1]$ នោះ $U\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

គេបាន $I_0=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dU}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+U^2}=\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2U}{\sqrt{3}}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

ដូចនេះ $I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2}.dt$

និង $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t+t^2}.dt$

ចំពោះគ្រប់ $t \in [0,1]$

គេមាន $t^{n+1} \le t^n$ នាំឱ្យ $\frac{t^{n+1}}{1+t+t^2} \le \frac{t^n}{1+t+t^2}$

គេទាញ $\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t+t^2}.dt \le \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2}.dt$

ឬ $I_{n+1} \le I_n \ , \forall n \in IN$ ។

ដូចនេះ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$

យើងបាន

$$I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t+t^2} + \int_0^1 \frac{t^{n+1} dt}{1+t+t^2} + \int_0^1 \frac{t^{n+2} dt}{1+t+t^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{(t^n + t^{n+1} + t^{n+2})dt}{1+t+t^2} = \int_0^1 \frac{t^n(1+t+t^2).dt}{1+t+t^2}$$

$$= \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ ។

គ. ទាញឱ្យបានថា $\dfrac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \dfrac{1}{3(n-1)}$, $\forall n \ge 2$

យើងមាន (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។ តាមលក្ខណៈនៃស្វ៊ីតចុះយើងមាន :

$$I_n + I_{n+1} + I_{n+2} \le 3I_n \le I_{n-2} + I_{n-1} + I_n$$

ដោយ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$

នាំឱ្យ $I_{n-2} + I_{n-1} + I_n = \dfrac{1}{n-1}$

គេទាញ $\dfrac{1}{n+1} \le 3I_n \le \dfrac{1}{n-1}$

នាំឱ្យ $\frac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{3(n-1)}$, $\forall n \ge 2$ ។

ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n)$

មាន $\frac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{3(n-1)}$, $\forall n \ge 2$

នាំឱ្យ $\frac{n}{3(n+1)} \le nI_n \le \frac{n}{3(n-1)}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(nI_n\right) = \frac{1}{3}$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី២

I-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ :

$U_0 = \ln 3$ និង $U_{n+1} = \ln(1+e^{U_n})$, $n \in IN$ ។

ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

II-ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំកុំផ្លិច :

$$(E):\ (1+i)z^2 - (1+7i)z - 2(2-3i) = 0$$

III-គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^3 x.dx$ ដែល $n \in IN$

ក. ចូរគណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. ចូរគណនាផលបូក

$S_n = \sum_{k=0}^{n}(I_k) = I_0 + I_1 + I_2 + ... + I_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

រួចទាញរកតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

IV-គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន **n** ។

គេដឹងថា **n** ចែកនឹង **7** ឱ្យសំណល់ 5 ហើយ **n** ចែកនឹង **8** ឱ្យសំណល់ 3 ។

ក. តើចំនួន **n** នោះចែកនឹង **56** ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ខ. រកចំនួន **n** នោះដោយដឹងថា $5616 < n < 5626$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ **n**

គេមាន $U_{n+1} = \ln(1+e^{U_n})\ ,\ n \in IN$

គេទាញ $e^{U_{n+1}} = 1+e^{U_n}$ ឬ $e^{U_{n+1}} - e^{U_n} = 1$ ថេរ

នាំឱ្យ $\left(e^{U_n}\right)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d = 1$

និងតួទីមួយ $e^{U_0} = e^{\ln 3} = 3$ ។

គេបាន $e^{U_n} = 3+n$ នាំឱ្យ $U_n = \ln(n+3)$ ។

II-ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំកុំផ្លិច :

$$(E):\ (1+i)z^2 - (1+7i)z - 2(2-3i) = 0$$

យើងមាន $\Delta = (1+7i)^2 + 8(1+i)(2-3i)$

$$\Delta = 1 + 14i - 49 + 16 - 24i + 16i + 24$$

$$\Delta = -8 + 6i = (1+3i)^2$$

គេទាញឫស $\left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{1+7i-1-3i}{2(1+i)} = \dfrac{2i}{1+i} = 1+i \\ z_2 = \dfrac{1+7i+1+3i}{2(1+i)} = \dfrac{1+5i}{1+i} = 3+2i \end{array}\right.$

ដូចនេះ $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 + 2i$ ។

III-ក. គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^3 x.dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^2 x. \cos x.dx$$

តាង $U = \sin x$ នាំឱ្យ $dU = \cos x.dx$

ចំពោះ $x \in [\,0 , \frac{\pi}{2}\,]$ នាំឱ្យ $U \in [\,0\ ,\ 1\,]$

យើងបាន :

$$I_n = \int_0^1 U^n(1-U^2).dU = \int_0^1 U^n.dU - \int_0^1 U^{n+2}.dU$$

$$= \left[\frac{1}{n+1}U^{n+1}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{n+3}U^{n+3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} = \frac{n+3-n-1}{(n+1)(n+3)} = \frac{2}{(n+1)(n+3)}$$

ដូចនេះ $\boxed{I_n = \frac{2}{(n+1)(n+3)}}$ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}(I_k) = I_0 + I_1 + I_2 + \dots\dots\dots + I_n$

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន :

$$I_n = \frac{2}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$

យើងបាន :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$= \left(1-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$= \frac{3}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$$

$$= \frac{(n+1)(3n+8)}{2(n+2)(n+3)}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \frac{(n+1)(3n+8)}{2(n+2)(n+3)}}$ ។

គណនាតម្លៃនៃលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

យើងមាន $S_n = \frac{3}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right) = \frac{3}{2}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2}}$ ។

IV-ក. តើចំនួន **n** នោះចែកនឹង **56** ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

តាមសម្មតិកម្មគេដឹងថា **n** ចែកនឹង **7** ឱ្យសំណល់ 5 នាំឱ្យមាន

$q_1 \in IN$ ដែល $n = 7q_1 + 5$ (1)

ហើយម្យ៉ាងទៀត **n** ចែកនឹង **8** ឱ្យសំណល់ 3 នោះនាំឱ្យមាន

$q_2 \in IN$ ដែល $n = 8q_2 + 3$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបានប្រពន្ធ័ $\begin{cases} n = 7q_1 + 5 \ (1) \\ n = 8q_2 + 3 \ (2) \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} 8n = 56q_1 + 40 \ (3) \\ 7n = 56q_2 + 21 \ (4) \end{cases}$

ដកសមីការ (3) និង (4) គេបាន :

$n = 56(q_1 - q_2) + 19$ តាង $q = q_1 - q_2$, $q \in IN$

គេបាន $n = 56q + 19$ ។

ទំនាក់ទំនងនេះមានន័យថា ចំនួន **n** នោះចែកនឹង **56** ឱ្យសំណល់ 19

ខ. រកចំនួន **n** នោះដោយដឹងថា $5616 < n < 5626$

គេមាន $n = 56q + 19$ នាំឱ្យ $5616 < 56q + 19 < 5626$

ឬ $\dfrac{5597}{56} < q < \dfrac{5607}{56}$

ឬ $99+\frac{53}{56}< q < 100+\frac{7}{56}$ នាំឱ្យ $q=100$ ។

ចំពោះ $q=100$ គេបាន $n=5600+19=5619$ ។

ដូចនេះចំនួន n នោះគឺ $n=5619$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី៣

I- គេឱ្យស៊ីត $\mathbf{S_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}}$ ដែល $\mathbf{n \in IN^*}$ ។

ក-ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{n \in IN^*}$ ចូរបង្ហាញថា $\mathbf{S_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$ ។

ខ-គណនាផលបូក

$$\mathbf{\Sigma_n = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + ... + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}}$$

II- គេឱ្យអាំងតេក្រាល $\mathbf{I_n = \int_0^a \frac{x^n.dx}{x^3 + a^3}}$, $\mathbf{a > 0}$

ក. ចូរកំនត់តម្លៃរបស់ $\mathbf{n}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{I_n}$ មិនអាស្រ័យនឹង $\mathbf{a}$ ។

ខ. គណនា $\mathbf{I_n}$ ចំពោះតម្លៃ $\mathbf{n}$ ដែលបានរកឃើញខាងលើ ។

III-គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{Z = 2 + \sqrt{3} + i}$

ក. ចូរបង្ហាញថាម៉ូឌុល $\mathbf{|Z| = \sqrt{6} + \sqrt{2}}$

ខ. សរសេរ $\mathbf{Z}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចទាញថា

$\mathbf{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$ ។

IV-គេមានអនុគមន៍ $y = \dfrac{7x-23}{x^2-4x+3}$

ដែល x ជាចំនួនពិតហើយ $x \neq 1 \ , x \neq 3$

ក. ចូរគណនាដេរីវេ y' និង y'' ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $y''=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

I- ក.បង្ហាញថា $S_n = 1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

យើងមាន $S_n = \sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2}}$ （ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ）

$$= \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 + n^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2 + 2n(n+1) + 1}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{[n(n+1)+1]^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \frac{n(n+1)+1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$ ។

ខ-គណនាផលបូក :

គេបាន

$$\Sigma_n = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + ... + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \sum_{k=1}^{n} (S_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = n + 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n(n+2)}{n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{\Sigma_n = \frac{n(n+2)}{n+1}}$ ។

II-ក. កំនត់តម្លៃរបស់ n ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a

យើងមាន $I_n = \int_0^a \frac{x^n.dx}{x^3 + a^3}$, $a > 0$

យើងតាង $x = a.t$ នាំឱ្យ $dx = a.dt$

ហើយចំពោះ $x \in [\,0, a\,]$ នាំឱ្យ $t \in [0,1]$

គេបាន $I_n = \int_0^1 \frac{(a.t)^n.a.dt}{(at)^3 + a^3} = a^{n-2}.\int_0^1 \frac{t^n.dt}{t^3 + 1}$

តាមទំនាក់ទំនងនេះ ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a

លុះត្រាតែ $n - 2 = 0$ ៦ ¤ .

ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a គេត្រូវឱ្យ $n = 2$ ។

ខ. គណនា I_n ចំពោះតម្លៃ n ដែលបានរកឃើញខាងលើ

ចំពោះ $n = 2$ គេបាន $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}$

តាង $U = x^3 + 1$ នាំឱ្យ $dU = 3x^2 .dx$

ហើយចំពោះ $x \in [0,1]$ នាំឱ្យ $U \in [1\ ,\ 2]$

យើងបាន $I_2 = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{dU}{U} = \frac{1}{3}\left[\ln|U|\right]_1^2 = \frac{1}{3}\ln 2$ ។

ដូចនេះ $\boxed{I_2 = \frac{1}{3}\ln 2}$ ។

III- ក.បង្ហាញថាម៉ូឌុល $|Z| = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

គេមាន $Z = 2 + \sqrt{3} + i$

យើងបាន $|Z| = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4 + 4\sqrt{3} + 3 + 1}$

$$|Z| = \sqrt{8 + 4\sqrt{7}} = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

ដូចនេះ $|Z| = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ ។

ខ. សរសេរ Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងបាន $Z = 2+\sqrt{3}+i = 2\,(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+i.\frac{1}{2})$

$$= 2(1+\cos\frac{\pi}{6}+i.\sin\frac{\pi}{6})$$

$$= 2(2\cos^2\frac{\pi}{12}+2i\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12})$$

$$= 4\cos\frac{\pi}{12}(\cos\frac{\pi}{12}+i.\sin\frac{\pi}{12})$$

ដូចនេះ $Z = 4\cos\frac{\pi}{12}(\cos\frac{\pi}{12}+i.\sin\frac{\pi}{12})$ ។

ទាញឱ្យបានថា $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

គេមាន $Z = 4\cos\frac{\pi}{12}(\cos\frac{\pi}{12}+i.\sin\frac{\pi}{12})$

នាំឱ្យ $|Z| = 4\cos\frac{\pi}{12}$

ដោយគេមាន $|Z| = \sqrt{6}+\sqrt{2}$ នាំឱ្យ $4\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ។

IV-គេមានអនុគមន៍ $y = \frac{7x-23}{x^2-4x+3}$

ដែល x ជាចំនួនពិតហើយ $x \neq 1\ , x \neq 3$

ក. គណនាដេរីវេ y' និង y''

យើងសន្មត $\mathbf{y = \dfrac{7x-23}{x^2-4x+3} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-3}}$

ឬ $$\mathbf{\frac{7x-23}{x^2-4x+3} = \frac{A(x-3)+B(x-1)}{(x-1)(x-3)}}$$

ឬ $$\mathbf{\frac{7x-23}{x^2-4x+3} = \frac{(A+B)x-3A-B}{x^2-4x+3}}$$

គេទាញ $\mathbf{\begin{cases} A+B=7 \\ -3A-B=-23 \end{cases}}$ នាំឱ្យ $\mathbf{A=8\ ,\ B=-1}$

ហេតុនេះ $\mathbf{y = \dfrac{8}{x-1} - \dfrac{1}{x-3}}$

យើងបាន

$$\mathbf{y' = -\frac{8}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-3)^2}}$$

$$\mathbf{= \frac{-8(x-3)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)^2}}$$

$$\mathbf{= \frac{-7x^2+46x-71}{(x-1)^2(x-3)^2}}$$

និង $\mathbf{y'' = \dfrac{16}{(x-1)^3} - \dfrac{2}{(x-3)^3} = \dfrac{16(x-3)^3-2(x-1)^3}{(x-1)^3(x-3)^3}}$ ។

ដូចនេះ $y'=\frac{-7x^2+46x-71}{(x-1)^2(x-3)^2}$, $y''=\frac{16(x-3)^2-2(x-1)^3}{(x-1)^3(x-3)^3}$

ខ. ដោះស្រាយសមីការ $y''=0$

យើងមាន $y''=\frac{16(x-3)^3-2(x-1)^3}{(x-1)^3(x-3)^3}=0$

នាំឱ្យ $16(x-3)^3-2(x-1)^3=0$ គេទាញឬស $x=5$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី៤

I-គេមានផលបូក $S_n = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} + ... + \frac{n}{1000....000}$

ក. ចូរស្រាយថា

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \ , \forall x \neq 1 \ , n \in IN^*$$

រួចទាញឱ្យបានថា :

$$1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{[nx-(n+1)]x^n}{(1-x)^2}$$ ។

ខ. ទាញរកតម្លៃនៃ S_n និង $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

II-គេឱ្យអនុគមន៍ :

$$f_m(x) = \frac{1}{3}mx^3 - (m+1)x^2 - (m-5)x + 2m - 3$$

ចូរកំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f_m(x)$ កើនជានិច្ចលើ IR ។

III-គេឱ្យស្វ៊ីតអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\ .dx$ ដែល $n \in IN$

ក. ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2}

ខ. គណនាផលគុណ $P_n = I_n . I_{n-1} \ , \forall n \geq 1$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n}(P_k) = P_1 + P_2 + ... + P_n$

ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{n \to +\infty} S_n$ ។

ឃ. រករូបមន្តគណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

I- ក.ស្រាយថា

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

យើងមាន $1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $(\frac{1}{1-x})' = (1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x})'$

(ដេរីវេលើអង្គទាំងពីរ)

$$-\frac{(1-x)'}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} + \frac{(n+1)x^n(1-x) - (1-x)'x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} + \frac{[(n+1) - nx]x^n}{(1-x)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{1+2x+3x^2+....+nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{[nx-(n+1)]\,x^n}{(1-x)^2}}$

ខ. ទាញរកតម្លៃនៃ S_n និង $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

គេមាន

$$1+2x+3x^2+....+nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{[nx-(n+1)]\,x^n}{(1-x)^2}$$

ដោយយក $x=\frac{1}{10}$ គេបាន :

$$1+\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+....+\frac{n}{10^{n-1}}=\frac{100}{81}+\frac{100(\frac{1}{10}n-n-1)\,\frac{1}{10^n}}{81}$$

$$=\frac{100}{81}-\frac{10(9n+10)}{81.10^n}$$

ឬ $\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+....+\frac{n}{10^n}=\frac{10}{81}-\frac{9n+10}{81.10^n}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{S_n=\frac{10}{81}-\frac{9n+10}{81.10^n}}$ និង $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{10}{81}}$

II-កំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f_m(x)$ កើនជានិច្ចលើ IR

គេមាន $f_m(x)=\frac{1}{3}mx^3-(m+1)x^2-(m-5)x+2m-3$

គេបាន $f'_m(x)=mx^2-2(m+1)x-(m-5)$

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f_m(x)$ កើនជានិច្ចលើ IR លុះត្រាតែចំពោះគ្រប់

$x \in IR$ មាន $f'(x) > 0$ ។

គេបាន $mx^2 - 2(m+1)x - (m-5) > 0$ (1)

វិសមីការ (1) ពិតជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ កាលណា $\begin{cases} a = m > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$

គេមាន

$$\Delta' = (m+1)^2 + m(m-5)$$
$$= m^2 + 2m + 1 + m^2 - 5m$$
$$= 2m^2 - 3m + 1$$

$\Delta' = (m-1)(2m-1) < 0$ នាំឱ្យ $\frac{1}{2} < m < 1$ និង $m > 0$

ដូចនេះ $\frac{1}{2} < m < 1$ ។

III-ក. រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2}

យើងមាន $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\,.dx$

និង $I_{n-2} = \int_0^1 x^{n-2}.\sqrt{1-x^2}.dx$

តាង $\begin{cases} U = \sqrt{1-x^2} \\ dV = x^n.dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} dU = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}.dx \\ V = \int x^n.dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} \end{cases}$

យើងបាន $I_n = \left[\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}.\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 + \dfrac{1}{n+1}\int_0^1 \dfrac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}.dx$

$$I_n = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^n-(x^n-x^{n+2})}{\sqrt{1-x^2}}.dx = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^n-x^n(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.dx$$

$$I_n = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^n.dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}.dx$$

$$I_n = \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}.\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{n+1}I_n$$

តាង $\begin{cases} U = x^{n-1} \\ dV = \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} dU = (n-1)x^{n-2}.dx \\ V = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$

យើងបាន

$$I_n = \frac{1}{n+1}\left\{\left[-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 + (n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}.dx\right\} - \frac{1}{n+1}I_n$$

គេទាញ $(n+1)I_n = (n-1)I_{n-2} - I_n$ នាំឱ្យ $I_n = \dfrac{n-1}{n+2}I_{n-2}$

ដូចនេះ ទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2} គឺ

$$\boxed{I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2} , \forall n \geq 2}$$ ។

ខ. គណនាផលគុណ $P_n = I_n . I_{n-1}$, $\forall n \geq 1$ ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $P_n = I_n . I_{n-1}$ នាំឱ្យ $P_{n+1} = I_{n+1} . I_n$

ដោយ $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$ នាំឱ្យ $I_{n+1} = \frac{n}{n+3} . I_{n-1}$

គេទាញ $P_{n+1} = \frac{n}{n+3} I_{n-1} . I_n = \frac{n}{n+3} P_n$

នាំអោយ $\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{n}{n+3} = \frac{n}{n+1} . \frac{n+1}{n+2} . \frac{n+2}{n+3}$ ។

យើងបាន $\prod_{k=1}^{(n-1)} \left(\frac{P_{k+1}}{P_k} \right) = \prod_{k=1}^{(n-1)} \left(\frac{k}{k+1} . \frac{k+1}{k+2} . \frac{k+2}{k+3} \right)$

$$\prod_{k=1}^{(n-1)} \left(\frac{P_{k+1}}{P_k} \right) = \prod_{k=1}^{(n-1)} \left(\frac{k}{k+1} \right) \times \prod_{k=1}^{(n-1)} \left(\frac{k+1}{k+2} \right) \times \prod_{k=1}^{(n-1)} \left(\frac{k+2}{k+3} \right)$$

$$\frac{P_2}{P_1} . \frac{P_3}{P_2} .... \frac{P_n}{P_{n-1}} = \left(\frac{1}{2} . \frac{2}{3} .... \frac{n-1}{n} \right) \times \left(\frac{2}{3} . \frac{3}{4} .... \frac{n}{n+1} \right) \times \left(\frac{3}{4} . \frac{4}{5} .... \frac{n+1}{n+2} \right)$$

$$\frac{P_n}{P_1} = \frac{1}{n} . \frac{2}{n+1} . \frac{3}{n+2}$$

នាំឱ្យគេទាញ

$$P_n = \frac{6}{n(n+1)(n+2)}.P_1 = \frac{6}{n(n+1)(n+2)}.I_0.I_1$$

(ព្រោះ $P_1 = I_0.I_1$)

ដោយ $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}.dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

និង $I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}.dx = \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

គេបាន $P_n = \frac{6}{n(n+1)(n+2)}.\frac{\pi}{4}.\frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}.\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ដូចនេះ $\boxed{P_n = \frac{\pi}{2}.\frac{1}{n(n+1)(n+2)}}$ ។

គ. គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(P_k\right) = P_1 + P_2 + ... + P_n$

យើងមាន :

$$P_n = \frac{\pi}{2}.\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

យើងបាន $S_n = \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$

$= \frac{\pi}{4}\left[(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}) + ... + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]$

$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] = \frac{\pi}{8}.\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \frac{\pi}{8}.\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}}$ និង $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{8}}$ ។

ឃ. រករូបមន្តគណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន $I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}, \forall n \geq 2$

-ករណី $n = 2p+1$ (ចំនួនសេស)

យើងបាន $I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+3}.I_{2p-1}$ ឬ $\frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}} = \frac{2p}{2p+3}$

គេទាញ $\frac{I_3}{I_1}.\frac{I_5}{I_3}.\frac{I_7}{I_5}.....\frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}} = \frac{2}{5}.\frac{4}{7}.\frac{6}{9}.....\frac{2p}{2p+3}$

$$\frac{I_{2p+1}}{I_1} = \frac{2}{5}.\frac{4}{7}.\frac{6}{9}.....\frac{2p}{2p+3}$$

នាំឱ្យ $I_{2p+1} = \frac{2.4.6....2p}{5.7.9....(2p+3)}.I_1$ ដោយ $I_1 = \frac{1}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{I_{2p+1}=\frac{2.4.6....2p}{5.7.9....(2p+3)}.\frac{1}{3}}$ ។

-ករណី $n=2p$ (ចំនួនគូ)

យើងបាន $I_{2p}=\frac{2p-1}{2p+2}.I_{2p-2}$ ឬ $\frac{I_{2p}}{I_{2p-2}}=\frac{2p-1}{2p+2}$

គេទាញ $\frac{I_2}{I_0}.\frac{I_4}{I_2}.\frac{I_6}{I_4}.....\frac{I_{2p}}{I_{2p-2}}=\frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{5}{8}.....\frac{2p-1}{2p+2}$

$$\frac{I_{2p}}{I_0}=\frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{5}{8}.....\frac{2p-1}{2p+2}$$

នាំឱ្យ $I_{2p+1}=\frac{1.3.5....(2p-1)}{4.6.8....(2p+2)}.I_0$ ដោយ $I_0=\frac{\pi}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{I_{2p+1}=\frac{1.3.5....(2p-1)}{4.6.8....(2p+2)}.\frac{\pi}{4}}$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី៥

I-ដោះស្រាយសមីការ $47x + 29y = 1$ ក្នុងសំណុំចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ

II-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(U_n)_{n\in IN}$ កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} U_0 = \sqrt{5} \\ U_{n+1} = U_n^{\ 2} - 2 \ , \forall n \in IN \end{cases}$$

ក. ចូរស្រាយថា $U_n > 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ខ. គេពិនិត្យស្វ៊ីត $(V_n)_{n\in IN}$ កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង

$V_n = U_n + \sqrt{U_n^{\ 2} - 4}$ ។

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង V_{n+1} និង V_n ។

គ. ចូរគណនា V_n រួចទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

III-ចូរគណនាលីមីត $A = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}\sin x - \tan x}{\sin x - \cos x}$

IV- ចូរបង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx$

អនុវត្តន៍ : ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

ដំណោះស្រាយ

I-ដោះស្រាយសមីការ $47x + 29y = 1$ ក្នុងសំណុំចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ

យើងមាន $47 = 29\times 1 + 18$ នាំឱ្យ $18 = 47 - 29$

$$29 = 18\times 1 + 11$$

នាំឱ្យ $11 = 29 - 18 = 29 - (47 - 29) = 29\times 2 - 47$

$$18 = 11\times 1 + 7$$

នាំឱ្យ $7 = 18 - 11 = (47 - 29) - (29\times 2 - 47)$

ឬ $7 = 47\times 2 - 29\times 3$

$$11 = 7\times 1 + 4$$

នាំឱ្យ $4 = 11 - 7 = (29\times 2 - 47) - (47\times 2 - 29\times 3)$

ឬ $4 = -3\times 47 + 29\times 5$

$$7 = 4\times 2 - 1$$

នាំឱ្យ $1 = 4\times 2 - 7 = (-3\times 47 + 29\times 5).2 - (47\times 2 - 29\times 3)$

ឬ $1 = 47\times(-8) + 29\times(13)$

គេបាន $47x + 29y = 47\times(-8) + 29\times(13)$

$$47(x+8) = -29(y-13)$$

នាំឱ្យ $\begin{cases} x+8 = -29q \\ y-13 = 47q \quad , \forall q \in Z \end{cases}$

ដូចនេះ $x = -29q - 8 \ , \ y = 47q + 13 \ , \forall q \in Z$ ។

II-ក. ស្រាយថា $U_n > 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$

យើងមាន $U_0 = \sqrt{5} > 2$ ពិត

$$U_1 = U_0^{\ 2} - 2 = 5 - 2 = 3 > 2 \text{ ពិត}$$

យើងឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $U_k > 2$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $U_{k+1} > 2$ ពិត ។

យើងមាន $U_k > 2$ នាំឱ្យ $U_k^{\ 2} > 4$ ឬ $U_k^{\ 2} - 2 > 2$

ដោយ $U_{k+1} = U_k^{\ 2} - 2$ នោះគេទាញបាន $U_{k+1} > 2$ ពិត ។

ដូចនេះ $U_n > 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ខ. រកទំនាក់ទំនងរវាង V_{n+1} និង V_n

យើងមាន $V_n = U_n + \sqrt{U_n^{\ 2} - 4}$

នាំឱ្យ $V_{n+1} = U_{n+1} + \sqrt{U_{n+1}^2 - 4}$

តែ$U_{n+1} = U_n{}^2 - 2$

គេបាន $V_{n+1} = U_n{}^2 - 2 + \sqrt{(U_n{}^2 - 2)^2 - 4}$

$V_{n+1} = U_n{}^2 - 2 + \sqrt{U_n{}^4 - 4U_n{}^2 + 4 - 4}$

$= U_n{}^2 - 2 + \sqrt{U_n{}^2(U_n{}^2 - 4)}$

$= U_n^2 - 2 + U_n\sqrt{U_n{}^2 - 4}$

$$= \frac{2U_n{}^2 - 4 + 2U_n\sqrt{U_n{}^2 - 4}}{2}$$

$$= \frac{(U_n + \sqrt{U_n{}^2 - 4})^2}{2}$$

ដូចនេះគេបាន $\boxed{V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n{}^2}$ ជាទំនាក់ទំនងដែលត្រូវរក ។

គ. គណនា V_n រួចទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n{}^2$

នាំឱ្យ $\log_{\frac{1}{2}} V_{n+1} = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}V_n{}^2)$

$\log_{\frac{1}{2}} V_{n+1} = 1 + 2\log_{\frac{1}{2}} V_n$

តាង $W_n = \log_{\frac{1}{2}} V_n$ នាំឱ្យ $W_{n+1} = \log_{\frac{1}{2}} V_{n+1}$

គេបាន $W_{n+1} = 1 + 2W_n$ ឬ $(1 + W_{n+1}) = 2(1 + W_n)$

នាំឱ្យ $(1 + W_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$

និងតួទីមួយ $1 + W_0$

តែ $V_0 = U_0 + \sqrt{U_0^{\ 2} - 4} = \sqrt{5} + \sqrt{5 - 4} = \sqrt{5} + 1$

ព្រោះ $V_n = U_n + \sqrt{U_n^{\ 2} - 4}$ ។

គេបាន $1 + W_0 = 1 + \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{5} + 1) = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{\sqrt{5} + 1}{2})$ ។

តាមរូបមន្ត

$$1 + W_n = (1 + W_0).q^n = 2^n \log_{\frac{1}{2}}(\frac{\sqrt{5} + 1}{2})$$

$$= \log_{\frac{1}{2}}(\frac{\sqrt{5} + 1}{2})^{2^n}$$

ដោយ $W_n = \log_{\frac{1}{2}} V_n$

នោះ $1 + W_n = 1 + \log_{\frac{1}{2}} V_n = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{V_n}{2})$

គេទាញ $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{V_n}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n}$

នាំឱ្យ $V_n = 2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n}$

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $V_n = U_n + \sqrt{U_n^{\ 2} - 4}$

នាំឱ្យ $(V_n - U_n)^2 = U_n^{\ 2} - 4$

ឬ $V_n^{\ 2} - 2V_nU_n + U_n^{\ 2} = U_n^{\ 2} - 4$

គេទាញ $U_n = \frac{V_n^{\ 2}+4}{2V_n} = \frac{1}{2}V_n + \frac{2}{V_n}$

នាំឱ្យ

$$U_n = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n} + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n}} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^n}$$

ដូចនេះ $\boxed{U_n = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^n} \ ,\ V_n = 2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n}}$

III-គណនាលីមីត $A=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\sin x-\tan x}{\sin x-\cos x}$

តាង $z=\frac{\pi}{4}-x$ នាំឱ្យ $z=\frac{\pi}{4}-x$ បើ $x\to\frac{\pi}{4}$ នោះ $z\to 0$

គេបាន $A=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-z)-\tan(\frac{\pi}{4}-z)}{\sin(\frac{\pi}{4}-z)-\cos(\frac{\pi}{4}-z)}$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos z-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin z)-\frac{1-\tan z}{1+\tan z}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos z-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin z-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos z-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin z}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z-\sin z-\frac{1-\frac{\sin z}{\cos z}}{1+\frac{\sin z}{\cos z}}}{-\sqrt{2}\sin z}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{z\to 0}[\frac{\frac{1-\cos z}{z}-\frac{\sin z}{z}}{\frac{\sin z}{z}}(\cos z-\sin z)]$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ $A = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\sin x - \tan x}{\sin x - \cos x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ។

IV- បង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx$

តាង $t = a+b-x \Rightarrow dt = -dx$

បើ $x = a \Rightarrow t = b$ និង $x = b \Rightarrow t = a$

យើងបាន

$$\int_a^b f(x).dx = \int_b^a f(a+b-t)(-dt) = -\int_b^a f(a+b-t).dt = \int_a^b f(a+b-t).dt$$

ដោយ $\int_a^b f(a+b-t)dt = \int_a^b f(a+b-x).dx$

(លក្ខណៈអាំងតេក្រាលកំនត់)

ដូចនេះ $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx$ ។

គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

តាមរូបមន្តខាងលើយើងអាចសរសេរ :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln\left[1+\sqrt{3}\tan(\frac{\pi}{3}-x)\right].dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln\left(1+\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}-\tan x}{1+\sqrt{3}\tan x}\right).dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln\left(\frac{4}{1+\sqrt{3}\tan x}\right).dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\ln 4-\ln(1+\sqrt{3}\tan x)\right].dx$$

$$I=\ln 4\int_0^{\frac{\pi}{3}}dx-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx=\frac{2\pi}{3}\ln 2-I$$

$2I=\frac{2\pi}{3}\ln 2$ នាំឱ្យ $I=\frac{\pi}{3}\ln 2$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx=\frac{\pi}{3}\ln 2}$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី៦

I-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយ

$$\begin{cases} Z_0 = i \\ Z_{n+1} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} Z_n + \dfrac{1-\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}} , n \in IN \end{cases}$$

ក. គេតាង $\forall n \in IN : U_n = Z_n + 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $U_{n+1} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} U_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ខ. ចូរសរសេរ U_n ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

ទាញរក Z_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

II-ចូរបង្ហាញថា $A_n = 3^{3n+2} + 7^{2n+3}$ ចែកដាច់នឹង 11 ជានិច្ចគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

III- គេអោយអាំងតេក្រាល :

$I_n = \displaystyle\int_{na}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x}$ និង $J_n = \displaystyle\int_{a}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x}$ $, n \in IN^*, a > 0$ ។

ក-បង្ហាញថា $I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n = J_n$ ។

ខ-គណនា I_n និង J_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ-ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរបង្រួមផលបូក ៖

$$S_n = \frac{1}{\cos a \cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a \cos 3a} + \dots\dots\dots + \frac{1}{\cos(na)\cos(n+1)a}$$

IV-គេឱ្យខ្សែកោង $(H): y = \dfrac{2(x-1)}{x-2}$ និងចំនុច $I(2\ ;\ 2)$ ។

កំនត់រកសមីការរង្វង់ (C) មានផ្ចិត I ហើយប៉ះនឹងខ្សែកោង (H) ។

ដំណោះស្រាយ

I-ក. បង្ហាញថា $U_{n+1} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} U_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$

យើងមាន $\forall n \in IN : U_n = Z_n + 1$ នាំឱ្យ $U_{n+1} = Z_{n+1} + 1$

ដោយ $Z_{n+1} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} Z_n + \dfrac{1-\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}}$

យើងបាន $U_{n+1} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} Z_n + \dfrac{1-\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}} + 1$

$$U_{n+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} Z_n + \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$U_{n+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}(Z_n + 1) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} U_n$$

ដូចនេះ $\boxed{U_{n+1} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} U_n}$ ។

ខ. សរសេរ U_n ជារាងត្រីកោណមាត្ររួចទាញរក Z_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $U_{n+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} U_n$

នាំឱ្យ (U_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចមានរេសុង

$$q = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}$$

និងតួ $U_0 = Z_0 + 1 = i + 1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4})$

តាមរូបមន្ត :

$$U_n = U_0 \times q^n = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}).(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4})^n$$

$$= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4})^{n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{U_n = \sqrt{2}\left[\cos\frac{(n+1)\pi}{4} + i.\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\right]}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $U_n = Z_n + 1$

នាំឱ្យ $Z_n = U_n - 1 = \sqrt{2}[\cos\frac{(n+1)\pi}{4} + i.\sin\frac{(n+1)\pi}{4}] - 1$

ដូចនេះ $\boxed{Z_n = \left[-1 + \sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}\right] + i.\sqrt{2}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}$

II-បង្ហាញថា $A_n = 3^{3n+2} + 7^{2n+3}$ ចែកដាច់នឹង 11

យើងមាន $3^3 \equiv 5 \quad (\bmod 11)$

នាំឱ្យ $3^{3n+2} = 9.5^n \quad (\bmod 11)$

ម្យ៉ាងទៀត $7^2 \equiv 5 \quad (\bmod 11)$ នាំឱ្យ $7^{2n} \equiv 5^n \quad (\bmod 11)$

ហើយ $7^3 \equiv 2 \quad (\bmod 11)$

គេទាញបាន $7^{2n+3} \equiv 2.5^n \quad (\bmod 11)$

យើងបាន

$$A = 3^{3n+2} + 7^{2n+3} \equiv 9.5^n + 2.5^n = 11.5^n \equiv 0 \quad (\bmod 11)$$ ។

ដូចនេះ $A_n = 3^{3n+2} + 7^{2n+3}$ ចែកដាច់នឹង 11 ជានិច្ចគ្រប់

ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

III-ក-បង្ហាញថា $I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n = J_n$

យើងបាន

$$I_1 + I_2 + ... + I_n = \int_a^{2a} \frac{dx}{\cos^2 x} + \int_{2a}^{3a} \frac{dx}{\cos^2 x} + ... + \int_{na}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_a^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

ដូចនេះ $I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n = J_n$ ។

ខ-គណនា I_n និង J_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងបាន :

$$I_n = \int_{na}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x} = \Big[\ \tan x\Big]_{na}^{(n+1)a} = \tan(n+1)a - \tan(na)$$

និង

$$J_n = \int_{a}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x} = \Big[\ \tan x\Big]_{a}^{(n+1)a} = \tan(n+1)a - \tan a$$

ដូចនេះ

$$\boxed{I_n = \frac{\sin a}{\cos(na)\cos(n+1)a} \ , \ J_n = \frac{\sin(na)}{\cos a.\cos(n+1)a}}$$ ។

គ-គណនាផលបូក

$$S_n = \frac{1}{\cos a \cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a \cos 3a} + ...+ \frac{1}{\cos(na)\cos(n+1)a}$$

យើងបាន :

$$S_n = \frac{1}{\cos a \cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a \cos 3a} + ...+ \frac{1}{\cos(na)\cos(n+1)a}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\cos ka.\cos(k+1)a}\right] = \frac{1}{\sin a}\sum_{k=1}^{n}[I_k] = \frac{1}{\sin a}.J_n = \frac{\sin(na)}{\sin a \cos a \cos(n+1)a}$$

ដូចនេះ

$$S_n = \frac{1}{\cos a\cos 2a} + \dots + \frac{1}{\cos(na)\cos(n+1)a} = \frac{\sin na}{\sin a\cos a\cos(n+1)a}$$

IV-កំនត់រកសមីការរង្វង់ **(C)** មានផ្ចិត **I** ហើយប៉ះនឹងខ្សែកោង **(H)**

គេមាន $(H): y = \dfrac{2(x-1)}{x-2}$ និងចំនុច $I(2\ ;\ 2)$

តាមរូបមន្តសមីការរង្វង់ **(C)** មានផ្ចិត $I(2\ ;\ 2)$ សរសេរ :

$(C): (x-2)^2 + (y-2)^2 = R^2$ ដែល **R** ជាកាំនៃរង្វង់ ។

សមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង **(H)** និង **(C)** សរសេរ :

$$(x-2)^2 + \left[\frac{2(x-1)}{x-2} - 2\right]^2 = R^2$$

$$(x-2)^2 + \left(\frac{2x-2-2x+4}{x-2}\right)^2 = R^2$$

$$(x-2)^2 + \frac{4}{(x-2)^2} = R^2 \quad , \quad X = (x-2)^2$$

$X + \dfrac{4}{X} = R^2$ នាំឱ្យ $X^2 - R^2X + 4 = 0$ **(1)**

ដើម្បីឱ្យរង្វង់ **(C)** ប៉ះនឹងខ្សែកោង **(H)** លុះត្រាតែសមីការ **(1)** មាន

ឬសឌុបពោលគឺគេត្រូវឱ្យ $\Delta = R^4 - 16 = 0$ នាំឱ្យ $R = \sqrt[4]{16} = 2$

សមីការរង្វង់ (C) អាចសរសេរ :

$$(x-2)^2+(y-2)^2=4$$

$$x^2-4x+4+y^2-4y+4-4=0$$

ដូចនេះ $(C): x^2+y^2-4x-4y+4=0$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី៧

I-ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន $\mathbf{E_n = 447^n + 462^n - 122^n - 124^n}$

ចែកដាច់នឹង $\mathbf{221}$ ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbf{n}$ ។

II-គេឧបមាថា $\mathbf{S_m}$ និង $\mathbf{S_n}$ ជាផលបូក $\mathbf{m}$ តួដំបូង និង $\mathbf{n}$ តួដំបូង

រៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែល $\mathbf{\dfrac{S_m}{S_n} = \dfrac{m^2}{n^2}\ ;\ (\ m \neq n)}$ ។

គេតាង $\mathbf{U_m}$ ជាតួទី $\mathbf{m}$ និង $\mathbf{U_n}$ ជាតួទី $\mathbf{n}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\mathbf{\dfrac{U_m}{U_n} = \dfrac{2m-1}{2n-1}}$

III-គេមានស្វ៊ីត $\mathbf{U_n = (1+\dfrac{1}{n^2})(1+\dfrac{3}{n^2})(1+\dfrac{5}{n^2})....(1+\dfrac{2n-1}{n^2})}$

ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{n \in IN^*}$ ។

ក. ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{t \geq 0}$ ចូរបង្ហាញថា $\mathbf{1 - t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1}$

ខ. ទាញឱ្យបានថាគ្រប់ $\mathbf{x \geq 0}$ គេមាន $\mathbf{x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x}$

គ. ចូររកលីមីត $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

I- ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួនE_n ចែកដាច់នឹង 221

យើងឃើញថា $221 = 13 \times 17$ ដែល 13 និង 17 បឋមរវាងគ្នា

ដូចនេះដើម្បីស្រាយថា ចំនួនE_n ចែកដាច់នឹង 221 គេត្រូវស្រាយ

ឱ្យឃើញថា ចំនួនE_n វាចែកដាច់នឹង 13ផង និង ចែកដាច់នឹង 17 ផង ។

គេមាន $E_n = 447^n + 462^n - 122^n - 124^n$

$$= (447^n - 122^n) + (462^n - 124^n)$$

តាមរូបមន្ត $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + b^{n-1})$

យើងបាន $E_n = (447-122).p_1 + (462-124).q_1$

$$= 325p_1 + 338q_1 = 13(25p_1 + 26q_1)$$

ដែល $p_1, q_1 \in IN^*$ ។

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា ចំនួនE_n ចែកដាច់នឹង 13 ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $E_n = (447^n - 124^n) + (462^n - 122^n)$

$$= (447-124).p_2 + (462-122).q_2$$

$$= 323p_2 + 340q_2$$

$$= 17(19p_2 + 20q_2) \quad , p_2, q_2 \in IN^*$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា ចំនួន E_n ចែកដាច់នឹង 17 ។

ដូចនេះសរុបសេចក្តីទៅយើងបាន ចំនួនE_n ចែកដាច់នឹង **221** ជានិច្ច ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ **n** ។

II- បង្ហាញថា $\dfrac{U_m}{U_n}=\dfrac{2m-1}{2n-1}$

យើងមាន $\dfrac{S_m}{S_n}=\dfrac{m^2}{n^2}$

ដោយ $S_m=\dfrac{m(U_1+U_m)}{2}$; $S_n=\dfrac{n(U_1+U_n)}{2}$

គេបាន $\dfrac{m(U_1+U_m)}{2}\times\dfrac{2}{n(U_1+U_n)}=\dfrac{m^2}{n^2}$

នាំឱ្យ $\dfrac{U_1+U_m}{U_1+U_n}=\dfrac{m}{n}$ **(1)**

ដោយ $U_m=U_1+(m-1).d$, $U_n=U_1+(n-1).d$

ដែល **d** ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីត ។

យក $U_m=U_1+(m-1).d$, $U_n=U_1+(n-1).d$

ជួសក្នុង (1) គេបាន

$$\frac{2U_1+(m-1).d}{2U_1+(n-1)d}=\frac{m}{n}$$

ឬ $2U_1n + n(m-1)d = 2U_1m + m(n-1)d$

គេទាញ

$$U_1 = \frac{n(m-1)d - m(n-1)d}{2(m-n)} = \frac{d(mn - n - mn + m)}{2(m-n)} = \frac{d}{2}$$

ព្រោះ $m \neq n$ ។

យើងបាន

$$U_m = \frac{d}{2} + (m-1)d = \frac{2m-1}{2}.d.$$

$$U_n = \frac{d}{2} + (n-1).d = \frac{2n-1}{2}.d$$

គេបាន $\frac{U_m}{U_n} = \frac{\frac{2m-1}{2}.d}{\frac{2n-1}{2}.d} = \frac{2m-1}{2n-1}$ បើ $d \neq 0$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\frac{U_m}{U_n} = \frac{2m-1}{2n-1}}$ ។

III- ក. ចំពោះគ្រប់ $t \geq 0$ បង្ហាញថា $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$

គេមាន $t \geq 0$ នាំឱ្យ $1 + t \geq 1$ គេទាញបាន $\frac{1}{1+t} \leq 1$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $t^2 \geq 0$ នាំឱ្យ $1 - t^2 \leq 1$ ឬ $(1-t)(1+t) \leq 1$

គេទាញ $1-t \le \dfrac{1}{1+t}$ (2)

ដូចនេះតាម (1) និង (2) គេបាន $\boxed{1-t \le \dfrac{1}{1+t} \le 1}$ ។

ខ. ទាញឱ្យបានថាគ្រប់ $x \ge 0$ គេមាន $x - \dfrac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $1-t \le \dfrac{1}{1+t} \le 1$

ចំពោះ $x \ge 0$ គេបាន $\displaystyle\int_0^x (1-t).dt \le \int_0^x \frac{dt}{1+t} \le \int_0^x dt$

$$\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^x \le \left[\ln(1+t)\right]_0^x \le \left[t\right]_0^x$$

$$x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) - \ln(1) \le x$$

ដោយ $\ln(1) = 0$ ។

ដូចនេះ $\boxed{x - \dfrac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x}$ ។

គ. រកលីមីត $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

$$U_n = (1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{3}{n^2})(1+\frac{5}{n^2})....(1+\frac{2n-1}{n^2}) = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k-1}{n^2}\right)$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $x-\frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$

ដោយយក $x=\frac{2k-1}{n^2}$ គ្រប់ $n\in IN^*, k\in IN^*$ គេបាន :

$$\frac{2k-1}{n^2}-\frac{(2k-1)^2}{2n^4} \le \ln(1+\frac{2k-1}{n^2}) \le \frac{2k-1}{n^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2k-1}{n^2}-\frac{(2k-1)^2}{2n^4}\right] \le \sum_{k=1}^{n}\left[\ln(1+\frac{2k-1}{n^2})\right] \le \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{n^2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{n^2}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(2k-1)^2}{n^4}\right] \le \ln\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k-1}{n^2}\right)\right] \le \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{n^2}\right)$$

ដោយ $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{n^2}\right)=\frac{1+3+5+.....+(2n-1)}{n^2}=\frac{n^2}{n^2}=1$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(2k-1)^2}{n^4}\right]=\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$$

$$=\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(4k^2)-\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(4k)+\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(1)$$

$$=\frac{1}{n^4}.\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{n^4}.\frac{4n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^4}.n$$

$$=\frac{2(n+1)(2n+1)}{3n^3}-\frac{2(n+1)}{n^3}+\frac{1}{n^3}$$

គេទាញ $1-\frac{2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3}{3n^3} \le \ln U_n \le 1$

គេបាន $\lim_{n\to+\infty}\ln U_n=1$ នាំឱ្យ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = e = 2.71828...}$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី៨

I-គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ

$$\begin{cases} U_0 = 0 \ , U_1 = 1 \\ U_{n+2} = \sqrt{3}.U_{n+1} - U_n \ , \forall n \in IN \end{cases}$$

ក. គេតាង $Z_n = U_{n+1} - \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}U_n \ , \forall n \in IN$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $Z_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}Z_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ខ. ចូរកំនត់រកទំរង់ត្រីកោណមាត្រនៃ Z_n ។

គ. រួចទាញរកតួ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកតម្លៃ U_{2007} ។

II-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = e^x.\cos x$

ក. គណនា $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា $f'(x) = \sqrt{2}e^x\cos(x + \dfrac{\pi}{4})$

ខ. ដោយធ្វើវិចារតាមកំណើនចូរបង្ហាថា

$$f^{(n)}(x) = \sqrt{2}^n e^x.\cos(x + \frac{n\pi}{4})$$

III-គេមានអាំងតេក្រាល

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x.dx \quad \text{និង} \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x.dx$$

ក. ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{e^{(1+i)\frac{\pi}{2}}-1}{1+i}=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}+i.\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$

ខ. គណនា $A+i.B$ រួចទាញរកតម្លៃនៃ A និង B ។

ដំណោះស្រាយ

I-ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $Z_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}Z_n$

យើងមាន $Z_n=U_{n+1}-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}U_n\ ,\forall n\in IN$

នាំឱ្យ $Z_{n+1}=U_{n+2}-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}U_{n+1}$

ដោយគេមាន $U_{n+2}=\sqrt{3}.U_{n+1}-U_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$

គេបាន $Z_{n+1}=\sqrt{3}.U_{n+1}-U_n-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}U_{n+1}$

$$Z_{n+1}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}U_{n+1}-U_n=\frac{\sqrt{3}+i}{2}(U_{n+1}-\frac{2}{\sqrt{3}+i}U_n)$$

$$Z_{n+1}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}(U_{n+1}-\frac{\sqrt{3}-i}{2}U_n)=\frac{\sqrt{3}+i}{2}Z_n$$

ដូចនេះ $\boxed{Z_n=U_{n+1}-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}U_n\ ,\forall n\in IN}$ ។

ខ.កំនត់រកទំរង់ត្រីកោណមាត្រនៃ Z_n

ដោយយើងមាន $Z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}+i}{2} Z_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$

(តាមសម្រាយខាងលើ)

នាំឱ្យ (Z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចដែលមានរេសុង

$$q = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = (\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6})$$

និងតួ $Z_0 = U_1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2} U_0 = 1$ (ព្រោះ $U_0 = 0\ , U_1 = 1$)

គេបាន $Z_n = Z_0 \times q^n = (\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6})^n = \cos\frac{n\pi}{6} + i.\sin\frac{n\pi}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{Z_n = \cos\frac{n\pi}{6} + i.\sin\frac{n\pi}{6}}$ ។

គ. ទាញរកតួ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកតម្លៃ U_{2007} :

យើងមាន $Z_n = U_{n+1} - \frac{\sqrt{3}-i}{2} U_n$

ឬ $Z_n = (U_{n+1} - \frac{\sqrt{3}}{2} U_n) + \frac{i}{2} U_n$ (ព្រោះ $U_n \in IR$)

យើងបាន $\overline{Z_n} = (U_{n+1} - \frac{\sqrt{3}}{2} U_n) - \frac{i}{2} U_n$

(ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ Z_n) ។

គេទាញ $Z_n - \overline{Z}_n = i.U_n$ នាំឱ្យ $U_n = \dfrac{Z_n - \overline{Z}_n}{i}$

ដោយយើងមាន $Z_n = \cos\dfrac{n\pi}{6} + i.\sin\dfrac{n\pi}{6}$

និង $\overline{Z}_n = \cos\dfrac{n\pi}{6} - i.\sin\dfrac{n\pi}{6}$ ។

យើងបាន

$$U_n = \frac{(\cos\frac{n\pi}{6} + i.\sin\frac{n\pi}{6}) - (\cos\frac{n\pi}{6} - i.\sin\frac{n\pi}{6})}{i} = 2\sin\frac{n\pi}{6}$$

ដូចនេះ $\boxed{U_n = 2\sin\dfrac{n\pi}{6}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតចំពោះ $n = 2007$ យើងបាន :

$$U_{2007} = 2\sin\frac{2007\pi}{6} = 2\sin\frac{663\pi}{2}$$

$$= 2\sin(-\frac{\pi}{2} + 332\pi) = 2\sin(-\frac{\pi}{2}) = -2$$ ។

ដូចនេះ $\boxed{U_{2007} = -2}$ ។

II- ក. គណនា $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា $f'(x) = \sqrt{2}e^x\cos(x + \dfrac{\pi}{4})$

យើងមាន $f(x) = e^x\cos x$

យើងបាន $f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x$

$$= e^x(\cos x - \sin x)$$

$$= \sqrt{2}e^x(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x)$$

$$= \sqrt{2}e^x(\cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4})$$

$$= \sqrt{2}\,e^x \cos(x + \frac{\pi}{4})$$

ដូចនេះ $f'(x) = \sqrt{2}\,e^x \cos(x + \frac{\pi}{4})$ ។

ខ. ដោយធ្វើវិចារតាមកំណើនចូរបង្ហាញថា

$$f^{(n)}(x) = \sqrt{2}^n e^x.\cos(x + \frac{n\pi}{4})$$

យើងមាន $f'(x) = \sqrt{2}\,e^x.\cos(x + \frac{\pi}{4}) = f^{(1)}(x)$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $f^{(k)}(x) = \sqrt{2}^k e^x.\cos(x + \frac{k\pi}{4})$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ

$$f^{(k+1)}(x) = \sqrt{2}^{k+1} e^x \cos\left(x + \frac{(k+1)\pi}{4}\right)$$

យើងមាន $f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))'$

$$= \sqrt{2}^{k} e^{x} \cos(x + \frac{k\pi}{4}) - \sqrt{2}^{k} e^{x} \sin(x + \frac{k\pi}{4})$$

$$= \sqrt{2}^{k} e^{x} \left[\cos(x + \frac{k\pi}{4}) - \sin(x + \frac{k\pi}{4}) \right]$$

ដោយ $\cos(x + \frac{k\pi}{4}) - \sin(x + \frac{k\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{(k+1)\pi}{4} \right)$

គេបាន $f^{(k+1)}(x) = \sqrt{2}^{k+1} e^{x} \cos\left(x + \frac{(k+1)\pi}{4} \right)$ ពិត ។

ដូចនេះ $f^{(n)}(x) = \sqrt{2}^{n} e^{x}.\cos(x + \frac{n\pi}{4})$ ។

III-ក. បង្ហាញថា $\frac{e^{(1+i)\frac{\pi}{2}} - 1}{1+i} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2} + i.\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$

តាង $Z = \frac{e^{(1+i)\frac{\pi}{2}} - 1}{1+i} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}.e^{i\frac{\pi}{2}} - 1}{1+i} = \frac{i.e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}$

$$= \frac{i.e^{\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + i}{2} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2} + i.\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$$

ដូចនេះ $\frac{e^{(1+i)\frac{\pi}{2}} - 1}{1+i} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2} + i.\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$ ។

ខ. គណនា $A + i.B$ រួចទាញរកតម្លៃនៃ A និង B

គេមាន $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x.dx$ និង $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x.dx$

យើងបាន $A+i.B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos xdx+i.\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x.dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^x\cos x+i.e^x\sin x\right).dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\cos x+i.\sin x).dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x.e^{ix}.dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(1+i)x}.dx$$

$$=\left[\frac{1}{1+i}e^{(1+i)x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{e^{(1+i)\frac{\pi}{2}}-1}{1+i}=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}+i.\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$$

ដូចនេះ $A+i.B=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}+i.\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$

ហើយ $A=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}\ ,\ B=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី៩

I-ចូរស្រាយថា $\forall x \geq 0$ គេមាន $x \leq e^x - 1 \leq xe^x$

រួចទាញថា $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ ។

II-គេឱ្យអាំងតេក្រាល

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\sin^2 x}}{\sqrt[n]{\sin^2 x} + \sqrt[n]{\cos^2 x}}.dx$$

និង $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\cos^2 x}}{\sqrt[n]{\sin^2 x} + \sqrt[n]{\cos^2 x}}.dx$

ចូរបង្ហាញថា $I_n = J_n$ រួចទាញរកតម្លៃ I_n និង J_n ។

III-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (x_n) កំនត់ដោយ :

$$x_1 = 1 \text{ និង } x_{n+1} - x_n = \frac{2}{x_n + \sqrt{2n+1}}$$

ក-ចូរស្រាយថាចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ គេមាន $x_n = \sqrt{2n-1}$ ។

ខ-គណនា $S_n = \frac{1}{x_1 + \sqrt{3}} + \frac{1}{x_2 + \sqrt{5}} + ... + \frac{1}{x_n + \sqrt{2n+1}}$

គ. ទាញរកលីមីត $\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right]$ ។

IV-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុងរៀងគ្នាដូចខាងក្រោម :

$BC = a\ , AC = b\ , AB = c$ ។

ឧបមាថា M ជាចំនុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណនេះ ហើយគេតាង $x\ , y$ និង z ជាចំងាយរៀងគ្នាពីចំនុច M ទៅជ្រុង BC , AC និង AB នៃត្រីកោណ ។ចូរគណនាតម្លៃអប្បបរមានៃ $T = x^2 + y^2 + z^2$ ជាអនុគមន៍នៃ a , b , c ។

ដំណោះស្រាយ

I-ស្រាយថា $\forall x \geq 0$ គេមាន $x \leq e^x - 1 \leq xe^x$

តាងអនុគមន៍ $f(x) = e^x - 1 - x$ និង $g(x) = e^x - 1 - xe^x$

ចំពោះ $\forall x \geq 0$ គេបាន $f'(x) = e^x - 1$

ចំពោះគ្រប់ $\forall x \geq 0$ គេមាន $e^x - 1 \geq 0$ នាំឱ្យ $f'(x) = e^x - 1 \geq 0$

នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនចំពោះគ្រប់ $\forall x \geq 0$ ។

តាមលក្ខណៈនៃអនុគមន៍កើនចំពោះ$x \geq 0$ គេបាន $f(x) \geq f(0) = 0$

គេទាញ $e^x - 1 \geq x$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន :

$g'(x) = e^x - (e^x + xe^x) = -xe^x \le 0$ ចំពោះ $\forall x \ge 0$

នាំឱ្យ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះ $\forall x \ge 0$ ។

តាមលក្ខណៈនៃអនុគមន៍ចុះ ចំពោះ $x \ge 0$ គេបាន $g(x) \le g(0) = 0$

គេទាញបាន $e^x - 1 \le xe^x$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងទាញបាន $x \le e^x - 1 \le xe^x$

ចំពោះ $\forall x \ge 0$ ។

ទាញឱ្យបានថា $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

គេមាន $x \le e^x - 1 \le xe^x$ នាំឱ្យ $1 \le \dfrac{e^x - 1}{x} \le e^x$

គេទាញបាន $1 \le \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} \le \lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ ។

II-បង្ហាញថា $I_n = J_n$ រួចទាញរកតម្លៃ I_n និង J_n

យើងមាន $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\sin^2 x}}{\sqrt[n]{\sin^2 x} + \sqrt[n]{\cos^2 x}}.dx$

និង $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\cos^2 x}}{\sqrt[n]{\sin^2 x} + \sqrt[n]{\cos^2 x}}.dx$

តាង $x = \frac{\pi}{2} - t$ នាំឱ្យ $dx = -dt$

ចំពោះ $x = 0$ នាំឱ្យ $t = \frac{\pi}{2}$ ហើយ $x = \frac{\pi}{2}$ នាំឱ្យ $t = 0$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\sin^2 x}}{\sqrt[n]{\sin^2 x} + \sqrt[n]{\cos^2 x}} \backslash$$

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sqrt[n]{\sin^2(\frac{\pi}{2} - t)}}{\sqrt[n]{\sin^2(\frac{\pi}{2} - t)} + \sqrt[n]{\cos^2(\frac{\pi}{2} - t)}}(-dt)$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\cos^2 t}}{\sqrt[n]{\cos^2 t} + \sqrt[n]{\sin^2 t}}.dt = J_n$$

ដូចនេះ $I_n = J_n$ ។

$$I_n + J_n = 2I_n = 2J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\sin^2 x}}{\sqrt[n]{\sin^2 x} + \sqrt[n]{\cos^2 x}}.dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\cos^2 x}}{\sqrt[n]{\sin^2 x} + \sqrt[n]{\cos^2 x}}.dx$$

$$I_n + J_n = 2I_n = 2J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{I_n = J_n = \frac{\pi}{4}}$ ។

III- ក-ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$: $x_n = \sqrt{2n-1}$

គេមាន $x_1 = 1 = \sqrt{2.1-1}$ ពិត

បើ $n = 1$ នោះ $x_2 - x_1 = \frac{2}{x_1 + \sqrt{3}}$

នាំឱ្យ $x_2 = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3}$

គេបាន $x_2 = \sqrt{3} = \sqrt{2.2-1}$ ពិត ។

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $x_k = \sqrt{2k-1}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ :

$$x_{k+1} = \sqrt{2(k+1)-1} = \sqrt{2k+1}$$

យើងមាន $x_{k+1} - x_k = \frac{2}{x_k + \sqrt{2k+1}}$

នាំឱ្យ $x_{k+1} = x_k + \frac{2}{x_k + \sqrt{2k+1}}$

ដោយ $x_k = \sqrt{2k-1}$

នោះ $x_{k+1} = \sqrt{2k-1} + \frac{2}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}}$

$$x_{k+1} = \sqrt{2k-1} + \frac{2(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1})}{(2k+1)-(2k-1)}$$

$$= \sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}$$

$x_{k+1} = \sqrt{2k+1}$ ពិត ។

ដូចនេះ $\boxed{x_n = \sqrt{2n-1}}$ ។

ខ-គណនា $S_n = \dfrac{1}{x_1+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{x_2+\sqrt{5}} + \dots\dots + \dfrac{1}{x_n+\sqrt{2n+1}}$

យើងបាន $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_k+\sqrt{2k+1}}\right)$

ដោយ $x_{n+1} - x_n = \dfrac{2}{x_n+\sqrt{2n+1}}$

គេទាញ $\dfrac{1}{x_n+\sqrt{2n+1}} = \dfrac{1}{2}(x_{n+1}-x_n)$

គេបាន $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2}(x_{k+1}-x_k)\right] = \frac{1}{2}(x_{n+1}-x_1)$

ដោយ $x_1 = 1$ ហើយ $x_n = \sqrt{2n-1}$ នោះ $x_{n+1} = \sqrt{2n+1}$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \dfrac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)}$ ។

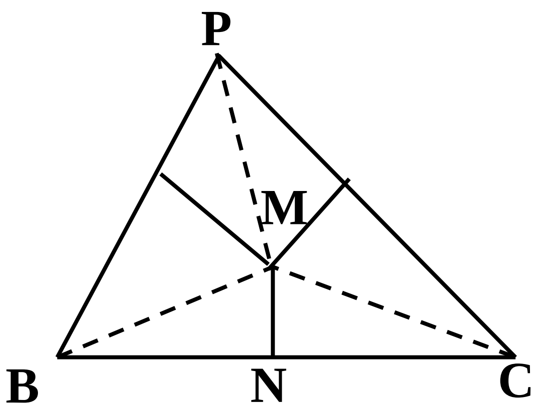
គ. ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\right]$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{2n+1}-1}{\sqrt{n}}\right]$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\right]=\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ ។

IV-គណនាតម្លៃអប្បបរមានៃ $T=x^2+y^2+z^2$



យើងតាង S ជាផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ ABC

យើងបាន $S=S_{AMB}+S_{BMC}+S_{AMC}$

$$S=\frac{1}{2}MQ.AB+\frac{1}{2}MN.BC+\frac{1}{2}MP.AC$$

$$S=\frac{1}{2}cz+\frac{1}{2}by+\frac{1}{2}ax$$

គេទាញបាន $ax + by + cz = 2S$

តាមវិសមភាពប៊ែនូយីយើងបាន :

$$ax + by + cz \le \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$2S \le \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{T}$$

គេទាញបាន $T \ge \dfrac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

ដូចនេះតម្លៃអប្បរមានៃ $T = x^2 + y^2 + z^2$ គឺ :

$$T_{min} = \frac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

ដែល $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ និង $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី១០

I-គេអោយអាំងតេក្រាល $I_n = \frac{1}{2n-1}.\int_0^1 (x^2)^n.dx \ , n \in IN^*$ ។

ក.គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ.គណនាផលបូក $S_n = I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n$

រួចទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

II-ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $y = f(x)$ បើគេដឹងថា :

$f(x + \sqrt{x^2 - 2x + 2}) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

III- គេមានពហុធា

$P_n(x) = (x\sin\theta + \cos\theta)^n \ , \theta \in IR \ , n \geq 2$

ចូររកសំណល់នៃវិធីចែករវាងពហុធា $P_n(x)$ និង $x^2 + 1$ ។

IV- ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(O, \vec{i}, \vec{j})$ គេឱ្យបួនចំនុច A , B , C , D

មានអាហ្វិករៀងគ្នា$Z_A = 1 + 6i$, $Z_B = 4 + 5i$, $Z_C = 5 + 4i$

និង $Z_D = -2 - 3i$ ។ចូរស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ ចារឹកក្នុងរង្វង់

ដែលគេនឹងបញ្ជាក់ផ្ចិត និង កាំ ។

ដំណោះស្រាយ

I- ក-គណនា I_n ជាអនុគមន៏នៃ n

$$I_n = \frac{1}{2n-1}.\int_0^1 (x^2)^n.dx \quad ,n \in IN^*$$

$$= \frac{1}{2n-1}\int_0^1 x^{2n}.dx$$

$$= \frac{1}{2n-1}\left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

ដូចនេះ $\boxed{I_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}}$ ។

ខ-គណនាផលបូក $S_n = I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n$

យើងមាន $I_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

យើងបាន

$$S_n = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}) + ... + \frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$

$$\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2}.\frac{2n+1-1}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \frac{n}{2n+1}}$ ។

ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$ ។

II-កំនត់រកអនុគមន៍ $y = f(x)$:

គេមាន $f(x+\sqrt{x^2-2x+2}) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ $\quad$ **(1)**

បើយើងតាង $x+\sqrt{x^2-2x+2} = t$

យើងបាន $\sqrt{x^2-2x+2} = t-x$

$$x^2-2x+2 = (t-x)^2$$

$$x^2-2x+2 = t^2-2tx+x^2$$

$$2tx-2x = t^2-2$$

$$2x(t-1) = t^2-2$$

$$x = \frac{t^2-2}{2(t-1)} \quad , \; t \neq 1$$

យកតម្លៃ $x = \dfrac{t^2-2}{2(t-1)}$ ជំនួសក្នុង **(1)** យើងបាន :

$$f(t)=\frac{[\frac{t^2-2}{2(t-1)}]^2-1}{[\frac{t^2-2}{2(t-1)}]^2+1}=\frac{t^4-4t^2+4-4t^2+8t-4}{t^4-4t^2+4+4t^2-8t+4}$$

$$f(t)=\frac{t^4-8t^2+8t}{t^4-8t+8}$$

$$f(t)=\frac{t(t^3-8t+8)}{t^4-8t+8}$$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=\frac{x(x^3-8x+8)}{x^4-8x+8}}$ ។

III-រកសំណល់នៃវិធីចែករវាងពហុធា $P_n(x)$ និង x^2+1

តាង $R(x)$ ជាអនុគមន៍សំណល់នៃវិធីចែករវាងពហុធា $P_n(x)$ និង x^2+1 នាំឱ្យអនុគមន៍ $R(x)$ ត្រូវមានដឺក្រេតូចជាងឬស្មើមួយ ។

យក $R(x)=ax+b$ ដែល a និង b ជាចំនួនពិតត្រូវរក

ហើយឧបមាថា $Q(x)$ ជាអនុគមន៍ផលចែក រវាងពហុធា $P_n(x)$ និង x^2+1 នោះគេបានទំនាក់ទំនង :

$$P_n(x)=Q(x).(x^2+1)+R(x)$$

$$(x\sin\theta+\cos\theta)^n=Q(x).(x^2+1)+ax+b$$

យើងជ្រើសរើសយក $\mathbf{x = i}$ ដែល $\mathbf{i^2 = -1}$ យើងបាន ៖

$$\mathbf{(i.\sin\theta + \cos\theta)^n = Q(i)(i^2+1) + ai + b}$$

$$\mathbf{i.\sin(n\theta) + \cos(n\theta) = ai + b}$$

ព្រោះ $\mathbf{(i.\sin\theta + \cos\theta)^n = i.\sin(n\theta) + \cos(n\theta)}$ (រូបមន្តដឺម័រ)

គេទាញបាន $\mathbf{a = \sin(n\theta)}$, $\mathbf{b = \cos(n\theta)}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\mathbf{R(x) = x.\sin(n\theta) + \cos(n\theta)}}$ ។

IV- ស្រាយថាចតុកោណ **ABCD** ចារិកក្នុងរង្វង់

យើងតាង $\mathbf{(c):\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$

ជាសមីការរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ **ABC**

យើងបាន $\mathbf{A \in (c)}$ នាំឱ្យ $\mathbf{1^2 + 6^2 + a + 6b + c = 0}$

ឬ $\mathbf{a + 6b + c = -37 \quad (1)}$

$\mathbf{B \in (c)}$ នាំឱ្យ $\mathbf{4^2 + 5^2 + 4a + 5b + c = 0}$

ឬ $\mathbf{4a + 5b + c = -41 \quad (2)}$

$\mathbf{C \in (c)}$ នាំឱ្យ $\mathbf{(-2)^2 + (-3)^2 - 2a - 3b + c = 0}$

ឬ $\mathbf{-2a - 3b + c = -13 \quad (3)}$

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} a+6b+c=-37 \\ 4a+5b+c=-41 \\ -2a-3b+c=-13 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបានចម្លើយ

$a=-2$, $b=-2$, $c=-23$ ។

សមីការរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ **ABC** អាចសរសេរ **:**

$$(c):\ x^2+y^2-2x-2y-23=0$$

ឬ $(c):(x-1)^2+(y-1)^2=25$

ម្យ៉ាងទៀតដោយយកកូអរដោនេ **D** ជួសក្នុងសមីការ

$(c):(-2-1)^2+(-3-1)^2=25$

វាផ្ទៀងផ្ទាត់នោះនាំឱ្យ $D\in(c)$ ។

ដោយបួនចំនុច **A** , **B** , **C**, **D** ស្ថិតនៅលើរង្វង់

$(c):(x-1)^2+(y-1)^2=25$ តែមួយនាំឱ្យចតុកោណ**ABCD**

ចារិកក្នុងរង្វង់ (c) មានផ្ចិត $I(1,1)$ និង កាំ $R=5$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី១១

I-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[7]{1+2007x^7}}$

ចូរគណនា $F_n(x) = f\left[\, f\,[.....f\,[f(x)].....]\,\right]$ ។

II-បង្ហាញថាចំនួន $A_n = 831^n - 743^n + 709^n - 610^n$

ចែកដាច់នឹង 187ជានិច្ច$\forall n \in IN$

III-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{2 - 2U_n + 5U_n^2}{1 + 8U_n - 2U_n^2} \;, \forall n \in IN \end{cases}$$

ក.គេតាង $\forall n \in IN : V_n = \dfrac{2U_n - 1}{U_n + 1}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $V_{n+1} = V_n{}^2$ ។

ខ. គណនា V_n និង U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

IV-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយកែងត្រង់ A ។

ចូរស្រាយថាគេមានទំនាក់ទំនង :

$BC^6 - AB^6 - AC^6 = 3\,AB^2\,AC^2\,BC^2$ ។

V-គេឱ្យវ៉ិចទ័របី $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ កែងគ្នាពីរៗក្នុងលំហនៃតំរុយអរតូនរម៉ាល់

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+\|\vec{c}\|^2}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

I- គណនា $F_n(x) = f\left[\, f\, [.....f\, [f(x)].....]\,\right]$

យើងមាន $F_1(x) = f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[7]{1+2007x^7}}$

$$F_2(x) = f\left[f(x)\right] = f\left[F_1(x)\right]$$

$$F_3(x) = f\left[f\left[f(x)\right]\right] = f\left[F_2(x)\right]$$

$$-----------------$$

$$F_n(x) = f\left[F_{n-1}(x)\right] = \frac{F_{n-1}(x)}{\sqrt[7]{1+2007F_{n-1}^7(x)}}$$

យើងបាន $F_n^7(x) = \dfrac{F_{n-1}^7(x)}{1+2007F_{n-1}^7(x)}$

នាំឱ្យ $\dfrac{1}{F7(x)} = \dfrac{1+2007F_{n-1}^7(x)}{F_{n-1}^7(x)} = \dfrac{1}{F_{n-1}^7(x)} + 2007$

គេទាញ $\dfrac{1}{F_n^7(x)} - \dfrac{1}{F_{n-1}^7(x)} = 2007$ ថេរ

នាំឱ្យគេទាញបានថា $\left(\frac{1}{F_n^7(x)}\right)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម

$d = 2007$ និងតួទីមួយ $U_1 = \frac{1}{F_1^7(x)} = \frac{1+2007x^7}{x^7}$ ។

តាមរូបមន្ត $U_n = U_1 + (n-1).d$

គេបាន $\frac{1}{F_n^7(x)} = \frac{1+2007x^7}{x^7} + 2007(n-1) = \frac{1+2007nx^7}{x^7}$

គេទាញ $F_n(x) = \sqrt[7]{\frac{x^7}{1+2007nx^7}} = \frac{x}{\sqrt[7]{1+2007nx^7}}$

ដូចនេះ $\boxed{F_n(x) = f\left[\, f\, [.....f\, [f(x)].....]\, \right] = \frac{x}{\sqrt[7]{1+2007nx^7}}}$

II-បង្ហាញថាចំនួន $A_n = 831^n - 743^n + 709^n - 610^n$

ចែកដាច់នឹង 187ជានិច្ច$\forall n \in IN$

យើងមាន $187 = 11 \times 17$ ។

ដោយ 11 និង 17 ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នានោះដើម្បីស្រាយថាចំនួន A_n

ចែកដាច់នឹង 187 គេគ្រាន់តែស្រាយឱ្យឃើញថាវាចែកដាច់នឹង 11ផង

ហើយវាចែកដាច់និង17ផង ។

តាមរូបមន្ត $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + b^{n-1})$

គេបាន $A_n = (831^n - 743^n) + (709^n - 610^n)$

$= (831 - 743)q_1 + (709 - 610)q_2$

$= 88q_1 + 99q_2 = 11(8q_1 + 9q_2)$

តាង $q = 8q_1 + 9q_2 \;,\; q_1 , q_2 \in IN$

គេបាន $A_n = 11q$ នាំឱ្យ A_n ចែកដាច់នឹង 11 ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $A_n = (831^n - 610^n) - (743^n - 709^n)$

$= (831 - 610)p_1 - (743 - 709)p_2$

$= 221p_1 - 34q_2 = 17\,(13p_1 - 2p_2)$

$A_n = 17p \;\;, (\;\; p = 13p_1 - 2p_2 \;, p_1 , p_2 \in IN \;)$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា A_n ចែកដាច់នឹង 17 ។

ដូចនេះ $A_n = 831^n - 743^n + 709^n - 610^n$ ចែកដាច់នឹង 187

ជានិច្ច $\forall n \in IN$ ។

III-ក .បង្ហាញថា $V_{n+1} = V_n{}^2$

យើងមាន $\forall n \in IN : V_n = \dfrac{2U_n - 1}{U_n + 1}$ នាំឱ្យ $V_{n+1} = \dfrac{2U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 1}$

ដោយ $U_{n+1} = \dfrac{2 - 2U_n + 5U_n^2}{1 + 8U_n - 2U_n^2}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

គេបាន

$$V_{n+1} = \frac{2\left(\dfrac{2-2U_n+5U_n^2}{1+8U_n-2U_n^2}\right)-1}{\dfrac{2-2U_n+5U_n^2}{1+8U_n-2U_n^2}+1}$$

$$= \frac{4-4U_n+10U_n^2-1-8U_n+2U_n^2}{2-2U_n+5U_n^2+1+8U_n-2U_n^2}$$

$$V_{n+1} = \frac{12U_n^2-12U_n+3}{3U_n^2+6U_n+3} = \frac{3(4U_n^2-4U_n+1)}{3(U_n^2+2U_n+1)}$$

$$= \left(\frac{2U_n-1}{U_n+1}\right)^2 = V_n^2$$

ដូចនេះ $\boxed{V_{n+1} = V_n{}^2}$ ។

ខ. គណនា V_n និង U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ដោយគេមាន $V_{n+1} = V_n{}^2$ គេទាញ $\ln V_{n+1} = 2\ln V_n$

នាំឱ្យ $(\ln V_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

មានរេសុង $q = 2$ និងតួដំបូង $\ln V_0 = \ln(\dfrac{2U_0-1}{U_0+1}) = \ln(\dfrac{1}{2})$ ។

តាមរូបមន្តគេបាន $\ln V_n = 2^n.\ln(\dfrac{1}{2}) = \ln(\dfrac{1}{2})^{2^n}$

នាំឱ្យ $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} = (0.5)^{2^n}$

ហើយដោយ $V_n = \frac{2U_n - 1}{U_n + 1}$ នាំឱ្យ $U_n = \frac{1+V_n}{2-V_n} = \frac{1+(0.5)^{2^n}}{2-(0.5)^{2^n}}$

ដូចនេះ $\boxed{V_n = (0.5)^{2^n} \;,\; U_n = \frac{1+(0.5)^{2^n}}{2-(0.5)^{2^n}}}$ ។

IV-ស្រាយថាគេមានទំនាក់ទំនង

$$BC^6 - AB^6 - AC^6 = 3AB^2\,AC^2\,BC^2$$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាហ្គ័រក្នុងត្រីកោណកែង **ABC** គេមាន **:**

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \qquad (1)$$

លើកអង្គទាំងពីរនៃ (1) ជាស្វ័យគុណ 3 គេបាន **:**

$$BC^6 = (AB^2 + AC^2)^3$$

$$BC^6 = AB^6 + 3AB^4.AC^2 + 3AB^2.AC^4 + AC^6$$

$$BC^6 - AB^6 - AC^6 = 3AB^2.AC^2\,(AB^2 + AC^2) \quad (2)$$

យក (1) ជួសក្នុង (2) គេបាន

$$BC^6 - AB^6 - AC^6 = 3AB^2\,AC^2\,BC^2$$ ។

V-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\| \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} \| = \sqrt{\| \vec{a} \|^2 + \| \vec{b} \|^2 + \| \vec{c} \|^2}$

គេមាន

$$\| \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} \|^2 = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2 = (\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 + (\vec{c})^2 + 2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c})$$

ដោយ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ កែងគ្នាពីរៗនោះគេមាន

$$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{a}.\vec{c} = 0$$

គេបាន $\| \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} \|^2 = \| \vec{a} \|^2 + \| \vec{b} \|^2 + \| \vec{c} \|^2$

ដូចនេះ $\| \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} \| = \sqrt{\| \vec{a} \|^2 + \| \vec{b} \|^2 + \| \vec{c} \|^2}$ ។

✍✍✍✍✍✍

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី១២

I-គេឱ្យខ្សែកោង (Γ) : $y = \dfrac{3x^2 + 6x}{4x - 4}$ និងចំនុច $I(1\ ,3)$ ។

ចូរកំនត់សមីការរង្វង់ (C) មានផ្ចិត I ហើយប៉ះនឹងខ្សែកោង (Γ)

II-ត្រីកោណកែងមួយមានផ្ទៃក្រឡា $6\ cm^2$ ហើយជ្រុងទាំងបី

បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ។

ចូរកំនត់ជ្រុងទាំងបីរបស់ត្រីកោណនេះ ។

III-គេមានស្វ៊ីត (I_n) កំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ដោយ :

$$I_n = \frac{1}{n!}.\int_0^1 (1-x)^n.e^x.dx$$

ក-ចូរគណនាតួ I_1 ។

ខ-ចូរបញ្ជាក់ I_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ I_n រួចទាញឱ្យបានថា

$$I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{P!}\right)$$

គ-ចូររកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ រួចទាញថា :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828$$

IV-គេឱ្យបន្ទាត់ពីរមានសមីការឆ្លុះរៀងគ្នាខាងក្រោម :

$$(L_1): \frac{x+2}{-3} = \frac{y-6}{4} = \frac{z+2}{3}$$

និង $(L_2): \frac{x-3}{9} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-2}{-1}$ ។

ក-ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់កែងរួម (Δ) រវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2)

ខ-គណនាចំងាយរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) ។

ដំណោះស្រាយ

I-កំនត់សមីការរង្វង់ (C) មានផ្ចិត I ហើយប៉ះនឹងខ្សែកោង (Γ)

យើងមាន $(\Gamma): y = \frac{3x^2+6x}{4x-4}$ និងចំនុច $I(1\ ,3)$

តាង R ជាកាំនៃរង្វង់ (C) ដែលត្រូវរក

តាមរូបមន្ត $(C): (x-x_I)^2+(y-y_I)^2 = R^2$

ឬ $(C): (x-1)^2+(y-3)^2 = R^2$

សមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងរង្វង់ជាមួយខ្សែកោងសរសេរ :

$$(x-1)^2+(\frac{3x^2+6x}{4x-4}-3)^2=R^2$$

$$(x-1)^2+\frac{(3x^2+6x-12x+12)^2}{16(x-1)^2}=R^2$$

$$(x-1)^2+\frac{\left[3(x-1)^2+9\right]^2}{16(x-1)^2}=R^2$$

យើងតាង $X=(x-1)^2$, $\forall x\neq 1$ គេបាន :

$$X+\frac{(3X+9)^2}{16X}=R^2$$

$$16X^2+(3X+9)^2=16R^2X$$

$$25X^2-2(8R^2-27)X+81=0 \quad (1)$$

ដើម្បីឱ្យរង្វង់ (C) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (Γ) លុះត្រាតែសមីការ (1)

មានឫសឌុបពោលគឺគេត្រូវឱ្យ $\Delta'=(8R^2-27)^2-2025=0$

នាំឱ្យ $8R^2-27=45$ នាំឱ្យ $R=3$ ។

ដូចនេះសមីការរង្វង់សរសេរ $(C):(x-1)^2+(y-3)^2=9$

ឬគេអាចសរសេរជារាងទូទៅ $(C):x^2+y^2-2x-6y+1=0$ ។

II-គណនារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណកែង

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាហ្គ័រក្នុងត្រីកោណកែង **ABC** គេមាន **:**

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \qquad (1)$$

ដោយ **AB , AC , BC** ជាស្វ៊ីតនព្វន្តនោះគេមាន **:**

$$AC = AB + d \ , \ BC = AB + 2d$$

ដែល $d > 0$ ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីត ។

តាមទំនាក់ទំនង (1) អាចសរសេរ

$$(AB + 2d)^2 = AB^2 + (AB + d)^2$$

ឬ $AB^2 + 4AB.d + 4d^2 = AB^2 + AB^2 + 2AB.d + d^2$

$$AB^2 - 2d.AB - 3d^2 = 0$$

$$(AB + d)(AB - 3d) = 0$$

គេទាញបាន $AB = -d$ (មិនយក) និង $AB = 3d$ (យក)

គេបាន $AB = 3d$, $AC = 4d$, $BC = 5d$

តាង **S** ជាផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណគេបាន

$S = \frac{1}{2}AB.AC = 6d^2 = 6$ នាំឱ្យ $d = 1$ ។

ដូចនេះ $AB = 3cm, AC = 4cm, BC = 5cm$ ។

III-ក.ចូរគណនាតួ I_1

គេមាន $I_1 = \frac{1}{1!}\int_0^1 (1-x)e^x.dx = \int_0^1 (1-x).e^x.dx$

តាង $\begin{cases} u = 1-x \\ dv = e^x dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du = -dx \\ v = e^x \end{cases}$

គេបាន $I = \left[(1-x)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x(-dx) = -1 + \left[e^x\right]_0^1 = e-2$

ដូចនេះ $\boxed{I = e-2}$ ។

ខ-បញ្ជាក់ I_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ I_n

គេមាន $I_n = \frac{1}{n!}.\int_0^1 (1-x)^n.e^x.dx$

នាំឱ្យ $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.\int_0^1 (1-x)^{n+1}.e^x dx$

តាង $\begin{cases} u = (1-x)^{n+1} \\ dv = e^x dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du = -(n+1)(1-x)^n \\ v = e^x \end{cases}$

គេបាន $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left[(1-x)^{n+1}e^x\right]_0^1 + \frac{n+1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-x)^n e^x.dx$

$$I_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x.dx = -\frac{1}{(n+1)!} + I_n$$

ដូចនេះ $\boxed{I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{(n+1)!}}$ ។

ទាញឱ្យបានថា $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\dfrac{1}{P!}\right)$

គេមាន $I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$

ចំពោះ $n = 1\ :\ I_2 = I_1 - \dfrac{1}{2!}$

ចំពោះ $n = 2 : I_3 = I_2 - \dfrac{1}{3!}$

....

ចំពោះ $n = n-1 : I_n = I_{n-1} - \dfrac{1}{n!}$

ដោយធ្វើផលបូកទំនាក់ទំនងនេះអង្គ និង អង្គ គេបាន :

$I_n = I_1 - \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} - .... - \dfrac{1}{n!}$ ដោយ $I_1 = e - 2 = e - \dfrac{1}{0!} - \dfrac{1}{1!}$

ដូចនេះ $\boxed{I_n = e - \dfrac{1}{0!} - \dfrac{1}{1!} - \dfrac{1}{2!} - .... - \dfrac{1}{n!} = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\dfrac{1}{p!}\right)}$ ។

គ-ចូររកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

ចំពោះ $x \in [0\,,\,1]$ គេមាន $1 \le e^x \le e$ និង $(1-x)^n \ge 0$

គេបាន $(1-x)^n \le e^x(1-x)^n \le e(1-x)^n$

នាំឱ្យ $\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n.dx \le \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x.dx \le \frac{e}{n!}\int_0^1 (1-x)^n.dx$

ដោយ $\int_0^1 (1-x)^n.dx = \left[-\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

គេទាញបាន $\frac{1}{n!(n+1)} \le I_n \le \frac{e}{n!(n+1)}$ ។

កាលណា $n \to +\infty$ នាំឱ្យ $\frac{1}{n!(n+1)} \to 0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$ ។

ទាញថា $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828$

គេមាន $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right)$ នាំឱ្យ $\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right) = e - I_n$

គេបាន $\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(e - I_n\right) = e$

ព្រោះ $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828}$

IV-ក.សមីការបន្ទាត់កែងរួម (Δ) រវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2)

តាង $A(x_A, y_A, z_A) \in (L_1)$ នាំឱ្យកូអរដោនេ A ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការបន្ទាត់ (L_1) ។

គេបាន $\frac{x_A+2}{-3} = \frac{y_A-6}{4} = \frac{z_A+2}{3} = p$

នាំឱ្យ $\begin{cases} x_A = -3p-2 \\ y_A = 4p+6 \quad (1) \\ z_A = 3p-2 \end{cases}$

តាង $B(x_B, y_B, z_B) \in (L_2)$ នាំឱ្យកូអរដោនេ B ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការបន្ទាត់ (L_2) ។

គេបាន $\frac{x_B+6}{9} = \frac{y_B+5}{4} = \frac{z_B-2}{-1} = q$

នាំឱ្យ $\begin{cases} x_B = 9q-6 \\ y_B = 4q-5 \quad (2) \\ z_B = -q+2 \end{cases}$

បើ (AB) ជាបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2)

នោះគេបាន $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{U}_1 \\ \overrightarrow{AB} \perp \vec{U}_2 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} \overrightarrow{AB} . \vec{U}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB} . \vec{U}_2 = 0 \end{cases}$

ដែល $\vec{U}_1$ និង $\vec{U}_2$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2)

ដោយគេមាន

$$\overrightarrow{AB} = (9q + 3p - 4, 4q - 4p - 11, -q - 3p + 4)$$

និង, $\vec{U}_1(-3,4,3)$, $\vec{U}_2(9,4,-1)$ ។

គេបាន

$$\overrightarrow{AB}.\vec{U}_1 = -3(9q + 3p - 4) + 4(4q - 4p - 11) - (-q - 3p + 4) = 0$$

នាំឱ្យ $-14q - 34p - 20 = 0$ (3)

$$\overrightarrow{AB}.\vec{U}_2 = 9(9q + 3p - 4) + 4(4q - 4p - 11) - (-q - 3p + 4) = 0$$

នាំឱ្យ $98q + 14p - 84 = 0$ (4) ។

តាម (3) និង (4) គេបានប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases} -14q - 34p - 20 = 0 \\ 98q + 14p - 84 = 0 \end{cases} \text{ នាំឱ្យ } \begin{cases} p = -1 \\ q = 1 \end{cases}$$

យកតម្លៃ $p = -1$ និង $q = 1$ ជួសក្នុងសមីការ (1) និង (2)

គេបាន $A(1,2,-5)$ និង $B(3,-1,1)$ ។

សមីការបន្ទាត់ (AB) អាចសរសេរ :

$$(AB): \frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{z-z_A}{z_B-z_A}$$

ឬ $(AB): \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+5}{6}$

ដូចនេះ $(\Delta): \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+5}{6}$

ជាបន្ទាត់កែងរួមដែលត្រូវរក ។

ខ-គណនាចំងាយរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2)

ដោយ A និង B ជាចំនុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់កែងរួមរវាង (L_1) និង (L_2) នោះគេបាន :

$$d((L_1),(L_2)) = d(AB)$$

$$= \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

$$d((L_1),(L_2)) = \sqrt{(3-1)^2+(-1-2)^2+(1+5)^2} = 7$$

ដូចនេះ $d((L_1),(L_2)) = 7$ （ ឯកតាប្រវែង ） ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី១៣

I- គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត $U_1, U_2, U_3, ..., U_n$ ដែលមានផលសងរួម d ហើយ $d \neq 0$ ។

គេពិនិត្យស្វ៊ីត (V_n) មួយកំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ដោយ $V_n = a^{U_n}$, $a > 0$, $a \neq 1$ ។

ក.បង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្ររួចគណនា V_n ជាអនុគមន៍នៃ a, U_1, d និង n ។

ខ. ចូរស្រាយថា $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n = a^{U_1} . \dfrac{1 - a^{nd}}{1 - a^d}$

គ. ចូរគណនាផលគុណ $P_n = V_1 \times V_2 \times V_3 \times ..... \times V_n$ ជាអនុគមន៍នៃ a, U_1 និង n ។

II-គេឱ្យចំនួន $A_n = 2007^{2008} + 2 \times 2007^{2009} + 2007^n$, $n \in IN$ ។

កំនត់ n ដើម្បីឱ្យ A_n ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់ ។

III-គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយកែងត្រង់ **A** ដែល $BC = 5$ ។

M ជាចំនុចមួយនៃជ្រុង **[BC]** ដែលមុំ $\widehat{MAB} = \widehat{MAC}$ ហើយ

$AM = \frac{12\sqrt{2}}{7}$ ។ ចូរគណនាជ្រុង **AB** និង **AC** ?

IV-គេឱ្យអនុគមន៍ **f** កំនត់លើ **IR** ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង:

$$x^2 f\left(x^3\right) + \frac{1}{(1+x)^2} f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 4x^3\left(1+x^4\right)^5$$

ចូរគណនាអាំងតេក្រាល: $I = \int_0^1 f(x).dx$ ។

V- នៅក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

មានឯកត្តា **1cm** នៅលើអក្ស គេឱ្យពីរចំនុច **A(0,–2,0)**

និង **B(1,–2,1)** ។ (P) ជាប្លង់មានសមីការ $2x + 2y + z + 4 = 0$ ។

ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមចំនុច **A** និង **B** ហើយផ្គុំ

ជាមួយប្លងបានមុំស្រួចមួយមានតម្លៃ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

I- ក. បង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន $V_n = a^{U_n}$ នាំឱ្យ $V_{n+1} = a^{U_{n+1}}$

យើងបាន $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{a^{U_{n+1}}}{a^{U_n}} = a^{U_{n+1} - U_n} = a^d$ ថេរ

(ព្រោះ $U_{n+1} - U_n = d$) ។

ដូចនេះ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = a^d$ ។

គណនា V_n ជាអនុគមន៍នៃ a, U_1, d និង n

តាមរូបមន្ត $V_n = V_1 \times q^{n-1}$ ដោយ $V_1 = a^{U_1}$ និង $q = a^d$

គេបាន $\boxed{V_n = a^{U_1}.a^{(n-1)d} = a^{U_1+(n-1)d}}$ ។

ខ.ស្រាយថា $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n = a^{U_1}.\frac{1-a^{nd}}{1-a^d}$

តាមរូបមន្ត $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n = V_1.\frac{1-q^n}{1-q}$

ដោយ $V_1 = a^{U_1}$ និង $q = a^d$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n = a^{U_1}.\frac{1-a^{nd}}{1-a^d}}$ ។

គ.គណនាផលគុណ $P_n = V_1 \times V_2 \times V_3 \times ..... \times V_n$

យើងបាន $P_n = V_1 \times V_2 \times V_3 \times ..... \times V_n$

$$= a^{U_1}.a^{U_2}.a^{U_3}.......a^{U_n}$$

$$= a^{U_1+U_2+U_3+....+U_n} = a^{\frac{n(U_1+U_n)}{2}}$$

ដូចនេះ $\boxed{P_n = a^{\frac{n(U_1+U_n)}{2}}}$ ។

II-កំនត់ **n** ដើម្បីឱ្យ A_n ជាការេប្រាកដ

យើងមាន $A_n = 2007^{2008} + 2\times 2007^{2009} + 2007^n$, $n \in IN$

$$= 2007^{2008}\ (1 + 2\times 2007 + 2007^{n-2008})$$

ដើម្បីឱ្យA_n ជាការេប្រាកដលុះត្រាតែ $2007^{n-2008} = 2007^2$

នាំឱ្យ $n = 2010$ ។

III- គណនាជ្រុង **AB** និង **AC**

តាង $AB = x$, $AC = y$

គេមាន $M\hat{A}B = M\hat{A}C = \frac{B\hat{A}C}{2} = 45^0$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ **ABM** និង **ACM** គេមាន :

$$\frac{AM}{\sin B}=\frac{BM}{\sin 45^0}\ (1)$$ និង $$\frac{AM}{\sin C}=\frac{MC}{\sin 45^0}\ (2)$$

បូកទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន :

$$\frac{AM}{\sin B}+\frac{AM}{\sin C}=\frac{BM+MC}{\sin 45^0}=\frac{BC}{\sin 45^0}$$

$$\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=\frac{BC}{AM.\sin 45^0}$$

$$\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=\frac{5}{\frac{12\sqrt{2}}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{35}{12}\quad (3)$$

ក្នុងត្រីកោណកែង **ABC** គេមាន $\sin B=\frac{AC}{BC}=\frac{y}{5}$

និង $\sin C=\frac{AB}{BC}=\frac{x}{5}$

ទំនាក់ទំនង (3) អាចសរសេរទៅជា :

$\frac{5}{y}+\frac{5}{x}=\frac{35}{12}$ នាំឱ្យ $x+y=\frac{7}{12}xy\quad (4)$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ ក្នុងត្រីកោណកែង **ABC** គេមាន :

$BC^2=AB^2+AC^2$ នាំឱ្យ $25=x^2+y^2\quad (5)$

ដោយ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ នោះតាម(5) គេបាន :

$(x+y)^2-2xy=25$ (6)

តាង $S=x+y>0$ និង $P=x.y>0$

តាម (5) និង (6) គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} S=\dfrac{7}{12}P \\ S^2-2p=25 \end{cases}$

នាំឱ្យ $S=7$, $P=12$

គេបាន $\begin{cases} S=x+y=7=3+4 \\ P=xy=12=3\times 4 \end{cases}$

នាំឱ្យ $x=3$, $y=4$ ឬ $x=4$, $y=3$

ដូចនេះ $AB=3$, $AC=4$ ឬ $AB=4$, $AC=3$ ។

IV-គណនាអាំងតេក្រាល: $I=\int_0^1 f(x).dx$

តាង $x=t^3$ នាំឱ្យ $dx=3t^2.dt$

និងចំពោះ $x\in[0,1]$ នាំឱ្យ $t\in[0,1]$

គេបាន $I=\int_0^1 f(x).dx=\int_0^1 f(t^3).3t^2dt$

នាំឱ្យ $\frac{1}{3}I=\int_0^1 t^2 f(t^3).dt$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតបើគេតាង $x=\frac{1-t}{1+t}$ នាំឱ្យ $dx=-\frac{2dt}{(1+t)^2}$

ចំពោះ $x\in[\ 0,1\ ]$ នាំឱ្យ $t\in[1,0]$

គេបាន

$$I=\int_0^1 f(x).dx=\int_1^0 f\left(\frac{1-t}{1+t}\right).(-\frac{2dt}{(1+t)^2})=2\int_0^1\frac{1}{(1+t)^2}f(\frac{1-t}{1+t}).dt$$

គេទាញបាន $\frac{1}{2}I=\int_0^1\frac{1}{(1+t)^2}f(\frac{1-t}{1+t}).dt \quad (2)$

បូកទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន :

$$\frac{1}{3}I+\frac{1}{2}I=\int_0^1\left[t^2f(t^3)+\frac{1}{(1+t)^2}f(\frac{1-t}{1+t})\right].dt$$

តាមសម្មតិកម្មគេមាន :

$$x^2f\left(x^3\right)+\frac{1}{(1+x)^2}f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=4x^3\left(1+x^4\right)^5$$

គេបាន $\frac{5}{6}I=\int_0^1 4t^3(1+t^4)^5.dt=\left[\frac{1}{6}(1+t^4)^6\right]_0^1=\frac{64-1}{6}=\frac{63}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_0^1 f(x).dx=\frac{63}{5}}$ ។

V-សរសេរសមីការប្លង់ (Q)

តាង $(Q): ax + by + cz + d = 0$ ជាសមីការដែលត្រូវរក ។

ដោយប្លង់ (Q) កាត់តាមចំនុច A និង B នោះកូអរដោនេចំនុច A និង B ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការប្លង់ (Q) ។

គេបាន $\begin{cases} a(0) + b(-2) + c(0) + d = 0 \\ a(1) + b(-2) + c(1) + d = 0 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} -2b + d = 0 \\ a - 2b + c + d = 0 \end{cases}$

នាំឱ្យគេទាញបាន $\begin{cases} b = \dfrac{d}{2} \quad (1) \\ a = -c \quad (2) \end{cases}$

ម្យ៉ាងទៀតបើយើងតាង θ ជាមុំផ្គុំដោយប្លង់ (P) និង (Q)

នោះគេបាន $\cos\theta = \dfrac{\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q}{\|\vec{n}_P\| \cdot \|\vec{n}_Q\|}$

ដោយ $\vec{n}_P(2,2,1)$ និង $\vec{n}_Q(a,b,c)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) និង (Q) ។

គេបាន

$$\cos\theta = \frac{2a+2b+c}{\sqrt{2^2+2^2+1}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{2a+2b+c}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ដោយ $\theta = \frac{\pi}{4}$ (បំរាប់) នោះគេទាញ $\frac{2a+2b+c}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

នាំឱ្យ $2(2a+2b+c)^2 = 9(a^2+b^2+c^2)$ (3)

យកសមីការ (1) និង (2) ជួសក្នុង (3) គេបាន :

$$2(-2c+d+c)^2 = 9(c^2+\frac{d^2}{4}+c^2)$$

$$2(-c+d)^2 = 9(2c^2+\frac{d^2}{4})$$

$$2(c^2-2cd+d^2) = 18c^2+\frac{9}{4}d^2$$

$$2c^2-4cd+2d^2-18c^2-\frac{9}{4}d^2 = 0$$

$$-16c^2-4cd-\frac{d^2}{4} = 0$$

$$16c^2+4cd+\frac{d^2}{4} = 0$$

$$\left(4c+\frac{d}{2}\right)^2 = 0 \text{ នាំឱ្យ } c = -\frac{d}{8} \text{ ។}$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញ $\mathbf{b = \frac{d}{2}}$ និង $\mathbf{a = \frac{d}{8}}$ ។

យកតម្លៃ $\mathbf{a = \frac{d}{8}}$, $\mathbf{b = \frac{d}{2}}$ និង $\mathbf{c = -\frac{d}{8}}$ ជួសក្នុងសមីការប្លង់ $\mathbf{(Q)}$

គេបាន :

$$\mathbf{(Q): \frac{d}{8}x + \frac{d}{2}y - \frac{d}{8}z + d = 0}$$

សមមូល $\mathbf{(Q): x + 4y - z + 8 = 0}$ ។

ដូចនេះសមីការប្លង់ $\mathbf{(Q)}$ដែលត្រូវរកគឺ :

$\mathbf{(Q): x + 4y - z + 8 = 0}$ ។

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាទី១៤

I- គេឱ្យ (U_n) ជាស្វ៊ីតកំនត់ដោយ $U_{n+1} = aU_n + b$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ និង $a \neq 0, a, b \in IR$ ។

ក. ចំពោះ $a = 1$ ចូររកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (U_n) ។

ខ.ចំពោះ $a \neq 1$ ឧបមាថា $U_n = V_n + k$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

គ. ឧបមាថា $a \neq 1$ ។

ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ a, b និង n និងតួ U_1 ។

II-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0,1]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$?

អនុវត្តន៍: ចូរគណនា $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x.dx}{1 + \cos^2 x}$ ។

III-ដោះស្រាយសមីការ $C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 = \frac{5}{3}n^2 - \frac{4}{3}n$ ។

IV- គេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$ មានក្រាបតំនាង (c) ក្នុងតម្រុយអរតូនរមេមួយ ។

ក-ខ្សែកោង (c) កាត់អក្ស័អាប់ស៊ីស $(x'0x)$ ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីស $x = \alpha$ ។បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ (c) ត្រង់ $x = \alpha$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $k = \frac{2\alpha + a}{\alpha^2 + 1}$ ។

ខ-ចូរកំនត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឱ្យខ្សែកោង (c) កាត់អក្ស័អាប់ស៊ីសបានពីរចំនុច M និង N ដែលបន្ទាត់ប៉ះ (c) ត្រង់ M និង N កែងនឹងគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

I-ក. ចំពោះ $a = 1$ រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (U_n)

ចំពោះ $a = 1$ គេមានទំនាក់ទំនង $U_{n+1} = U_n + b$

-បើ $b = 0$ នោះ $U_{n+1} = U_n \ , \forall n \in IN^*$

នាំឱ្យ(U_n) ជាស្វ៊ីតថេរ ។

-បើ $b \neq 0$ នោះ $U_{n+1} = U_n + b$ នាំឱ្យ(U_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

មានផលសងរួម $\mathbf{b}$ ។

ខ. កំនត់តម្លៃ $\mathbf{k}$ ដើម្បីឱ្យ $(\mathbf{V_n})$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ចំពោះ $\mathbf{a \neq 1}$ គេមាន $\mathbf{U_{n+1} = aU_n + b}$

គេមាន $\mathbf{U_n = V_n + k}$ នាំឱ្យ $\mathbf{U_{n+1} = V_{n+1} + k}$ ដោយ

$\mathbf{U_{n+1} = aU_n + b}$

គេបាន $\mathbf{V_{n+1} + k = a(V_n + k) + b}$

ឬ $\mathbf{V_{n+1} = aV_n + (a-1)k + b}$

តាមទំនាក់ទំនងនេះ ដើម្បីឱ្យ $(\mathbf{V_n})$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រលុះត្រាតែ

$\mathbf{(a-1)k + b = 0}$ ។

គេទាញបាន $\mathbf{k = -\dfrac{b}{a-1} = \dfrac{b}{1-a}}$ ។

គ. គណនា $\mathbf{U_n}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ និង $\mathbf{n}$ និងតួ $\mathbf{U_1}$

តាមដំណោះស្រាយខាងលើយើងឃើញថាចំពោះ $\mathbf{a \neq 1}$

ពេលដែល $\mathbf{k = \dfrac{b}{1-a}}$ នោះស្វ៊ីត $(\mathbf{V_n})$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

មានរេសុង $\mathbf{q = a}$ និងតួ $\mathbf{V_1 = U_1 - k = U_1 - \dfrac{b}{1-a}}$

តាមរូបមន្ត $V_n = V_1 \times q^{n-1} = (U_1 - \frac{b}{1-a}).a^{n-1}$

ដោយ$U_n = V_n + k$

ដូចនេះ $\boxed{U_n = (U_1 - \frac{b}{1-a}).a^{n-1} + \frac{b}{1-a}}$ ។

II-បង្ហាញថា $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$

តាង $x = \pi - t$ នាំឱ្យ $dx = -dt$

និង ចំពោះ $x \in [0, \pi]$ នាំឱ្យ $t \in [\pi, 0]$

គេបាន $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t).f[\sin(\pi - t)].dt$

$$\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \int_0^{\pi} (\pi - t).f(\sin t).dt = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t).dt - \int_0^{\pi} t.f(\sin t).dt$$

$$\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x).dx - \int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx$$

នាំឱ្យគេទាញបាន $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$ ។

អនុវត្តន៍: គណនា $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}$

គេមាន $I = \int_0^{\pi} \frac{x.\sin x.dx}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\pi} x.\frac{\sin x.dx}{2-\sin^2 x} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x.dx}{2-\sin^2 x}$

តាង $z=\cos x$ នាំឱ្យ $dz=-\sin x.dx$

ហើយចំពោះ $x\in[0,\pi]$ នោះ $z\in[1,-1]$

គេបាន $I=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{-1}\frac{-dz}{1+z^2}=\frac{\pi}{2}[\arctan z]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}=\frac{\pi^2}{4}}$ ។

III-ដោះស្រាយសមីការ $C_{n+1}^2+C_{n+1}^3=\frac{5}{3}n^2-\frac{4}{3}n$

លក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} n\in IN \\ n+1\geq 3\end{cases}$ នាំឱ្យ $n\geq 2$ ។

គេមាន

$$C_{n+1}^2=\frac{(n+1)!}{2!.(n-1)!}=\frac{(n-1)!.n(n+1)}{2.(n-1)!}=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$C_{n+1}^3=\frac{(n+1)!}{3!.(n-2)!}=\frac{(n-2)!.(n-1).n.(n+1)}{6.(n-2)!}$$

$$=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

សមីការអាចសរសេរ :

$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)(n+1)}{6}=\frac{5}{3}n^2-\frac{4}{3}n$$

$$3n(n+1)+n(n^2-1)=10n^2-8n$$

$$3n^2+3n+n^3-n-10n^2+8n=0$$

$$n^3-7n^2+10n=0$$

$n(n-2)(n-5)=0$ នាំឱ្យ $n=0, n=2, n=5$

ដោយ $n\geq 2$ ដូចនេះ $n=2$ ឬ $n=5$ ។

IV- បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ (c) ត្រង់ $x=\alpha$ មានមេគុណប្រាប់ទិស

$$k=\frac{2\alpha+a}{\alpha^2+1}$$

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+1}$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{(x^2+ax+b)'(x^2+1)-(x^2+1)'(x^2+ax+b)}{(x^2+1)^2}$

$$=\frac{(2x+a)(x^2+1)-2x(x^2+ax+b)}{(x^2+1)^2}$$

បើ k ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃ បន្ទាត់ប៉ះ (c) ត្រង់ $x=\alpha$

គេបាន $k=f'(\alpha)$ ។

គេបាន $\mathbf{k} = \dfrac{(2\alpha + a)(x^2+1) - 2\alpha.(\alpha^2 + a\alpha + b)}{(\alpha^2+1)^2}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតខ្សែកោង (c) កាត់អក្ស័អាប់ស៊ីស $(x'0x)$ ត្រង់ចំនុចមាន

អាប់ស៊ីស $x = \alpha$ ។

គេបាន $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2 + a\alpha + b}{\alpha^2+1} = 0$ នាំឱ្យ $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ (2)

យកសមីការ (2) ជួសក្នុង (1)

គេបាន $k = \dfrac{(2\alpha + a)(\alpha^2+1)}{(\alpha^2+1)^2} = \dfrac{2\alpha+a}{\alpha^2+1}$

ដូចនេះ $\boxed{k = \dfrac{2\alpha+a}{\alpha^2+1}}$ ។

ខ-កំនត់តម្លៃ a និង b

សមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វ M និង N រវាងខ្សែកោង (c)

ជាមួយអក្ស័ $(x'0x)$:

$f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x^2+1} = 0$ ឬ $x^2 + ax + b = 0$ (E)

តាង k_1 និង k_2 ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ (c) ត្រង់ M និង

N គេបាន :

$$k_1 = f'(x_M) = \frac{2x_M + a}{x_M^2 + 1}$$ និង $$k_2 = f'(x_N) = \frac{2x_N + a}{x_N^2 + 1}$$

ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ប៉ះនេះកែងគ្នាលុះត្រាតែ

$$k_1.k_2 = \left(\frac{2x_M + a}{x_M^2 + 1}\right).\left(\frac{2x_N + a}{x_N^2 + 1}\right) = -1$$

នាំឱ្យ $(2x_M + a)(2x_N + a) = -(x_M^2 + 1)(x_N^2 + 1)$

$$(2x_M + a).(2x_N + a) + (x_M^2 + 1)(x_N^2 + 1) = 0$$

$$4x_Mx_N + 2a(x_M + x_N) + a^2 + x_M^2x_N^2 + \left(x_M^2 + x_N^2\right) + 1 = 0$$

$$4x_Mx_N + 2a(x_M + x_N) + a^2 + x_M^2x_N^2 + \left[(x_M + x_N)^2 - 2x_Mx_N\right] + 1 = 0$$

$$(x_M + x_N)^2 + x_M^2x_N^2 + 2a(x_M + x_N) + 2x_Mx_N + a^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

ដោយ x_M និង x_N ជាឫសសមីការ (E) នោះគេមាន

$$\begin{cases} x_M + x_N = -a \\ x_Mx_N = b \end{cases}$$

ទំនាក់ទំនង (3) អាចសរសេរ :

$$a^2 + b^2 - 2a^2 + 2b + a^2 + 1 = 0$$

$b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2 = 0$ នាំឱ្យ $b = -1$

ម្យ៉ាងទៀតដើម្បីឱ្យ (c) កាត់អក្ស័ $(x'0x)$ បានពីរចំនុច M និង N

លុះត្រាតែសមីការ (E) មានឫសពីរផ្សេងគ្នា ពោលគឺគេត្រូវឱ្យ

$\Delta = a^2 - 4b > 0$ ដោយ $b = -1$ គេទាញបាន $\Delta = a^2 + 4 > 0$

ពិតជានិច្ចគ្រប់ចំនួនពិត a ។

ដូចនេះ $\boxed{a \in IR \ \ ,b = -1}$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

១_ ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $y = f(x)$ បើគេដឹងថា ៖

$f'(0) = f(0) = 1$ និង

$$\frac{1}{2x-1} f''(x) - \frac{2}{(2x-1)^2} f'(x) = 6x^2 - 4x$$

២_ ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $y = f(x)$ បើគេដឹងថា ៖

$f(0) = 2$ និង $f'(x) f^2(x) = x^2 - 4x + 1$

៣_ ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $y = f(x)$ បើគេដឹងថា ៖

$f(1) = 4$ និង $2x\ f(x) + (x^2 + 1)\ f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

៤_ ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $y = f(x)$ បើគេដឹងថា ៖

$f(1) = 2$ និង $x f'(x) + 2f(x) = 4x^2 + 9x$

៥_ គេឱ្យអនុគមន៍ f កំនត់ពីសំណុំ IR ទៅ IR^*_+

ដែលចំពោះគ្រប់

$x, y \in IR$ គេមាន $f(x+y) = f(x) f(y)$ និង $f'(0) = 4$

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

៦_ ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ f មានដេរីវេលើ IR បើគេដឹងថា $\forall x \in IR,\ y \in IR$ គេមាន $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$ ។

៧_ គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$ កំនត់លើ IR

ក. ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f^{-1}(x)$ ជាអនុគមន៍ច្រាស់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ខ. ចូរគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ និង $f^{-1}(x)$ ។

៨_ គេមានអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់លើ IR ដែលចំពោះគប់ $x \in IR$ គេមានទំនាក់ទំនង $f'(x) = 2xf(x)$ ហើយ $f(0) = 1$

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

៩_ គេឱ្យអនុគមន៍ f និង g មានដេរីវេលើ IR ដែលចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ គេមានទំនាក់ទំនង $f'(x)\, f^2(x) = g'(x)\, g^2(x)$

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង f និង g ។

១០_គេឱ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ កំនត់លើ **IR** ដោយ

$$\mathbf{f(x)=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}$$

ក. បង្ហាញថា $\mathbf{f}$ មានដេរីវេលើ **IR** និង

$$\mathbf{2\sqrt{1+x^2}.f'(x)=f(x)}$$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថាដេរីវេ $\mathbf{f''}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\mathbf{4(1+x^2)f''(x)+4xf'(x)=f(x)}$$ ។

១១_គេឱ្យអនុគមន៍

$\mathbf{f(x)=x-\sin x}$ និង $\mathbf{g(x)=x-\frac{x^3}{6}-\sin x}$ ចំពោះ $\mathbf{x>0}$

ក, ចូរសិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $\mathbf{f(x)}$ និង $\mathbf{g(x)}$ ។

ខ, ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\mathbf{x-\frac{x^3}{6}\le \sin x\le x}$ ចំពោះ $\mathbf{x>0}$ ។

គ, គេតាង $\mathbf{S_n=\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+\sin\frac{3}{n^2}+.....+\sin\frac{n}{n^3}}$ ។

ចូររកកន្សោមអមនៃ $\mathbf{S_n}$ រួចទាញរក $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty}S_n}$ ។