រៀបរៀងដោយ

នេត មករា

គណិតវិទ្យា អូឡាំពិច

ស៊ីត សមីការស៊ីត

Vol. 1

សម្រាប់ ៖

សិស្សទូទៅ ថ្នាក់ទី ១០ ១១ ១២

សិស្សពូកែថ្នាក់ជាតិ អន្តរជាតិ APMO

CAMBODIA MATH OF OLYMPIC

អារម្ភកថា

សួរស្តី! មិត្តមិត្តអ្នកអានទាំងអស់ជាទីស្រលាញ់ សៀវភៅដែលលោកអ្នកកំពុងតែកាន់នៅក្នុងដៃនេះ ជាស្នាដៃដំបូងរបស់ខ្ញុំបាទ បានជាខ្ញុំបាទសម្រេចចិត្ត ចងក្រងសៀវភៅនេះឡើង ព្រោះដោយមើលឃើញថា ការសិក្សាអប់រំនៅកម្ពុជាយើងនៅមានកម្រិត ហើយបណ្ណាឯកសារសម្រាប់សិស្សានុសិស្សស្រាវជ្រាវបន្ថែមនៅមានកំរិតតិចតួចនៅឡើយ ។

គោលបំណងរបស់សៀវភៅនេះ គឺរួមចំណែកអភិវឌ្ឍន៍លើវិស័យអប់រំ និង ចូលរួមចែករំលែកចំណេះដឹង ផ្នែកភាសាគណិតវិទ្យាដល់សិស្សានុសិស្សដែលមានបំណង ស្វែងរកសំណុំឯកសារស្រាវជ្រាវបន្ថែម និង សិស្សានុសិស្សដែលមានបំណងចង់ក្លាយជាសិស្សពូកែនាពេលដ៏ខ្លីខាងមុខនេះ ។

សៀវភៅមួយក្បាលនេះ ត្រូវបានរៀបរៀងឡើងស្របទៅនឹងតម្រូវការរបស់សិស្សនុសិស្ស និង ស្របទៅតាមកម្មវិធីសិក្សារបស់ ក្រសួងអប់រំយុវជន និង កីឡា នៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា ហើយអ្វីដែលពិសេសនៅក្នុងសៀវភៅនេះនោះគឺ ល្បិចនិងវិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការស្មុតដែលមានលក្ខណ: ងាយស្រួលយល់ និង វិធីសាស្ត្រប្លែកៗដែលសិស្សានុសិស្សមិនធ្លាប់បានឃើញនៅក្នុងកម្មវិធីសិក្សារបស់ ក្រសួងអប់រំយុវជន និង កីឡា ។ លក្ខណ:របស់សៀវភៅនេះមានពីរចំនុចសំខាន់ ទីមួយគឺ គន្លឹះមេរៀន ព្រមទាំងឧទាហរណ៍ជាគំរូដើម្បីឲ្យសិស្សានុសិស្សកាន់តែយល់បានស៊ីជំរៅថែមទៀត និង ផ្នែកទីពីរ គឺជាផ្នែកលំហាត់ ហើយក្នុងនាមខ្ញុំបាទដែលជាអ្នករៀបរៀងបានសំរិតសំរាំង និង ដកស្រង់ចេញពីឯកសារ អង់គ្លេស ព្រមទាំងឯកសារវៀតណាម ។ បើទោះបីជាមានការត្រួតពិនិត្យ យ៉ាងម៉ត់ចត់យ៉ាងណាក៏ដោយ ក៏កំហុសឆ្គងនៅតែកើតមាននៅក្នុងសៀវភៅនេះយ៉ាងប្រាកដ ដូចនេះក្នុងនាមខ្ញុំបាទដែលជាអ្នករៀបរៀង ខ្ញុំបាទសូមអភ័យទោស ចំពោះមិត្តមិត្តអ្នកអានគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានទាំងអស់

និង ខ្ញុំបាទរងចាំជានិច្ចនូវការរិះគន់ក្នុង ន័យស្ថាបនាសៀវភៅនេះ ក៏ដូចជាសៀវភៅក្រោយៗទៀតឲ្យកាន់តែល្អប្រសើរ ឡើងបន្ថែមទៀត ។

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

ជាបឋមខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងក្រៃលែង ចំពោះអ្នកមាន **គុណរបស់កូនទាំងពីរ** ដែលលោកបានពុះពារគ្រប់ឧបសគ្គចិញ្ចឹម និង ថែរក្សាកូនបានយ៉ាងល្អ ព្រមទាំងបញ្ជូនកូនឲ្យបានរៀនសូត្រមានចំណេះដឹងដូចសព្វថ្ងៃនេះ ។ សូមថ្លែងអំណរគុណចំពោះលោកគ្រូ **ជុំ សុភ័ក្រ** លោកគ្រូ **ទឹម សុវណ្ណា** ព្រមទាំង លោកគ្រូ អ្នកគ្រូទាំងអស់ដែល បង្រៀននៅ **វិទ្យាល័យគាស់ក្រឡ** ដែលតែងតែយកចិត្តទុកដាក់ បង្ហាត់បង្រៀនដល់សិស្សានុសិស្សទាំងអស់នៃ **វិទ្យាល័យគាស់ក្រឡ** ជាពិសេសចំពោះរូប ខ្ញុំបាទផ្ទាល់ ដែលលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ តែងតែផ្តល់នូវឯកសារ ផ្សេងៗដល់រូបខ្ញុំ និង បានផ្តល់ដំបូន្មានយ៉ាងល្អដល់រូបខ្ញុំ ក៏ដូចជាផ្តល់នូវបទពិសោធជីវិតឲ្យរូបខ្ញុំ ។ សូមថ្លែងអំណាគុណដល់លោកគ្រូ **រឿង សោភ័ណ្ឌ** ដែលលោកគ្រូបានបង្ហាត់បង្រៀនរូបខ្ញុំ និង បានផ្តល់យោបល់ដល់រូបខ្ញុំ ឲ្យបានរៀបរៀងជាសៀវភៅនេះឡើង ។
ជាចុងបញ្ចប់ ខ្ញុំបាទសូមក្រាបលំអោនកាយ គោរព និង សូមជូនពរដល់ **អ្នកមានគុណរបស់កូនទាំងពីរ** ឲ្យមានសុខភាពល្អ និង ជួបតែសំណាងល្អក្នុងការប្រកបរបរការងារ ។ សូមជូនពរដល់ លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ នៃ**វិទ្យាល័យគាស់ក្រឡ** ទាំងអស់ឲ្យជួបតែសំណាងល្អ ទទួលបានភាពជោគជ័យក្នុងការងារ និង មានសុខភាពល្អរៀងទៅ ។

មាតិកា

គន្លឹះមេរៀន និង ទ្រឹស្តីបទនៃស្វ៊ីត

I. និយមន័យ

ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត គឺជាអនុគមន៍លេខដែលកំណត់ពីសំណុំនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbb{N}$ ទៅសំណុះនៃចំនួនពិត $\mathbb{R}$ ។

គេនិយមតាងស្វ៊ីតដោយ $a,b,c,v,u,......$ ។

II.តួនៃស្វ៊ីត

ឧទាហរណ៍ : គេមានស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = n+1$។ ចូរគណនាតម្លៃនៃ a_1,a_2,a_3,a_4 ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $a_n = n+1$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ យើងបាន

$a_1 = 1+1 = 2$, $a_2 = 2+1 = 3$, $a_3 = 3+1 = 4$, $a_4 = 4+1 = 5$

ដូច្នេះ $\boxed{a_1 = 2 \,,\, a_2 = 3 \,,\, a_3 = 4 \,,\, a_4 = 5}$

គ្រប់ធាតុ $a_1,a_2,a_3,a_4,...,a_n$ យើងហៅថាតួនៃស្វ៊ីត ដែលតួ a_1 ហៅថាតួទី1 តួ a_2 ហៅថាតួទី 2 ,..., និងតួ a_n យើងហៅតួទី n នៃស្វ៊ីត ឬ តួទូទៅនៃស្វ៊ីត ។

III.អថេរភាពនៃស្វ៊ីត

3.1ស្វ៊ីតកើន ស្វ៊ីតចុះ

គេមានស្វ៊ីត a_n កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbb{N}$ ។

- គេថា a_n ជាស្វ៊ីតកើន លុះត្រាតែ

$$a_{n+1} \ge a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n \ge 0 \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 \text{ ។}$$

- គេថា a_n ជាស្វ៊ីតចុះ លុះត្រាតែ

$$a_{n+1} \le a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n \le 0 \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1 \text{ ។}$$

- គេថា a_n ជាស្វ៊ីតកើនដាច់ខាត លុះត្រាតែ

$$a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$ ។

- គេថា a_n ជាស្វ៊ីតចុះដាច់ខាត លុះត្រាតែ

$$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n < 0 \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$ ។

ឧទាហរណ៍ : សិក្សាអថេរភាពនៃស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដែល $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow a_{n+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n}$

ហើយ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-(n-1)} = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

ដូចនេះ $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ គឺជាស្វ៊ីតកើនដាច់ខាត}}$

3.2 ស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

ស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូន លុះត្រាតែ ស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតកើន ឬ ស្វ៊ីតចុះ ហើយចំពោះស្វ៊ីតថេរក៏ជាស្វ៊ីត ម៉ូណូតូន ដែរ ។

IV.ស្វ៊ីតទាល់

4.1 ស្វ៊ីតទាល់លើ

ស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតទាល់លើ លុះត្រាតែមានចំនួនពិត M មួយដែល ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n \le M$ ។ ចំនួន M នេះហៅថាគោលលើ នៃស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ។

ឧទាហរណ៍ : បង្ហាញថា $a_n = 3^{-n} + 1$ ជាស្វ៊ីតទាល់លើ ?

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $a_n = 1 + 3^{-n} = 1 + \frac{1}{3^n}$ យើងបាន

$$a_1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{3^2} = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{3^3} = 1 + \frac{1}{27} = \frac{28}{27}$$

....

យើងទាញបាន $\frac{4}{3} \geq a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$ ។ $\Rightarrow a_n \leq \frac{4}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{a_n = 3^{-n} + 1 \text{ ជាស្វ៊ីតទាល់លើ និងមានគោលលើគឺ } \frac{4}{3}}$

4.2 ស្វ៊ីតទាល់ក្រោម

ស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម លុះត្រាតែមានចំនួនពិត m មួយដែល ចំពោះ $\forall n \in \mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n \geq m$ ។ ចំពោះចំនួនពិត m ហៅថាគោលក្រោមនៃស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ។

ឧទាហរណ៍ : បង្ហាញថាស្វ៊ីត $a_n = \frac{1}{n^2}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម ?

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $a_n = \frac{1}{n^2}$ ដោយចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ យើងបាន

$$a_1 = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$a_3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} = 0.11$$

....

$$a_{100}=\frac{1}{100^2}=\frac{1}{10000}=0.00001$$
$$a_{1000}=\frac{1}{1000^2}=\frac{1}{1000000}=0.0000001$$
$$a_{10000}=\frac{1}{10000^2}=\frac{1}{100000000}=0.000000001$$

....

យើងឃើញថា កាលណាតម្លៃ n មានតម្លៃកាន់តែធំទៅៗមិនកំណត់នោះ a_n មានតម្លៃ ខិតទៅរក 0 នេះបញ្ជាក់ថា a_n ទាល់ត្រង់ 0 ។

ដូច្នេះ $\boxed{a_n=\dfrac{1}{n^2} \text{ ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម ដែលមានគោលក្រោម } 0}$

4.3 ស្វ៊ីតទាល់

គេមានស្វ៊ីត $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ គេថាវាជាស្វ៊ីតទាល់ លុះត្រាតែ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតទាល់លើផង និង ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោមផង សមមូលនឹង $m\le a_n\le M$ ។

ពិនិត្យ ឧទាហរណ៍ខាងលើ យើងមានស្វ៊ីត $a_n=\dfrac{1}{n^2}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម ហើយម្យ៉ាងទៀត គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$, $a_n\le 1$ នោះយើងបានវាជាស្វ៊ីតទាល់លើ សមមូលនឹង $0\le a_n\le 1$ នោះ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតទាល់ ។

V.ស្វ៊ីតនព្វន្ត

5.1 និយមន័យនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

ស្វ៊ីតនព្វន្ត គឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត ដែលមានតួនីមួយៗក្រៅពីតួទីមួយ ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់ បូកនឹង ចំនួនថេរ d មួយហៅថាផលសងរួម ។

គេសរសេរ $d=a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}$

5.2 តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត ឬ តួទូទៅនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

បើគេមាន $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ដែលមានតួទីមួយ a_1 និងមានផលសងរួម d នោះយើងបាន តួទី n គឺ $a_n=a_1+(n-1)d$ ។

- **ករណីទូទៅ :** បើគេមាន $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ដែលមានតួទី p គឺ a_p និងមានផលសងរួម d នោះគេបាន តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្តគឺ
  $a_n = a_p + (n-p)d$ ។

5.3 ផលបូកនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

5.3.1 ផលបូកស្មើចម្ងាយពីតួចុង

ផលបូកស្មើចម្ងាយពីតួចុង ស្មើនឹងផលបូកតួចុងទាំងពីរ ។ គេកំណត់សរសេរ $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \cdots = a_p + a_{n-p+1}$ ឬ បើ $m+n = p+q$ នោះ យើងបាន $a_m + a_n = a_p + a_q$ ។

- បើគេមានបីចំនួនតគ្នា a,b,c ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត កាលណា $2b = a+c$ ។

5.3.2 ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទីមួយ a_1 និងតួទី n a_n គឺ

$S_n = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ ឬ $S_n = \dfrac{n\left[2a_1+(n-1)d\right]}{2}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ (1) យើងអាចសរសេរ

$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1$ (2)

$(1)+(2)$ យើងបាន

$$+\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 \end{cases}$$

$$2S_n = (a_1+a_n) + (a_2+a_{n-1}) + \cdots + (a_n+a_1)$$
$$2S_n = (a_1+a_n) + (a_1+a_n) + \cdots + (a_1+a_n)$$
$$2S_n = n(a_1+a_n)$$

នាំឲ្យយើងបាន $S_n = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $a_n = a_1 + (n-1)d$ នោះយើងបាន

$$S_n=\frac{n\{a_1+[a_1+(n-1)d]\}}{2}=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$$

នោះរូបមន្តផលបូកនៃស្វ៊ីតនព្វន្តត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

VI.ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

6.1 និយមន័យនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ស្វ៊ីតធរណីមាត្រជាស្វ៊ីតមួយដែលមានរាង $a_{n+1}=q\cdot a_n$ ដែល q ហៅថាផលធៀបរួម ។ ជាទូទៅគេសរសេរ $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}=\cdots=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$ ។

6.2 តួទូទៅនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ឬ តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

បើគេមាន $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ហើយមានតួទី p គឺ a_p និង q ជាផលធៀបរួម នោះគេបានតួទូទៅនៃស្វ៊ីតគឺ $a_n=a_p\cdot q^{n-p},\forall n\geq p$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ (យើងស្រាយដោយប្រើវិចារកំណើន)

យើងមាន $a_n=a_p\cdot q^{n-p},\forall n\geq p$

- ករណី $n=p:a_p=a_pq^{p-p}=a_p$ (ពិត)
- ឧបមាថាពិតចំពោះ $n=k,k\geq p:a_k=a_pq^{k-p}\quad(1)$
- យើងនឹងស្រាយបន្តថាពិតចំពោះ $n=k+1,k\geq p$ គឺ

  $a_{k+1}=a_pq^{k+1-p}\quad(2)$

តាម (1) យើងមាន $a_k=a_pq^{k-p}$ គុណអង្គទាំងពីរនឹង q នោះយើងបាន $a_k\cdot q=a_pq^{k-p}\cdot q=a_pq^{k+1-p}$ នាំឲ្យ $qa_k=a_pq^{k+1-p}\quad(3)$

តាម $(2)\,\&\,(3)$ $\begin{cases}a_{k+1}=a_pq^{k+1-p}\\ qa_k=a_pq^{k+1-p}\end{cases}\Rightarrow a_{k+1}=qa_k\Leftrightarrow\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=q$

តួទូទៅនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

6.3 ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមាន q ជាផលធៀបរួមកំណត់

ដោយ $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, $q \neq 1$ ។

- **<u>ចំណាំ</u>** : បើគេមានបីតួតគ្នា a, b, c ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រយើងត្រូវស្រាយថា $b = \sqrt{a \cdot c}$ ។

VII. ទូទៅនៃស្វ៊ី និង ប្រមាណវិធីលើស្វ៊ីត

7.1 លីមីត និង ប្រមាណវិធី

a) ទ្រឹស្តីបទទី1

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l' \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = l + l', \lim_{n\to+\infty} u_n v_n = l \cdot l'$$

b) ទ្រឹស្តីបទទី2

បើស្វ៊ីត $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតទាល់និង $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

នាំឲ្យ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$

c) ទ្រឹស្តីបទទី3

$$\begin{cases} w_n \leq u_n \leq v_n \ , \forall n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

d) ទ្រឹស្តីបទទី4

$$\begin{cases} u_n \neq 0 \ , \forall n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$$

7.2 ស្វ៊ីតកូស៊ី (Cauchy)

a) ទ្រឹស្តីបទទី1

គេមាន (u_n) ហៅថាស្វ៊ីតកូស៊ី កាលណា

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbb{N}, \forall m > n \geq \alpha, |u_m - u_n| \leq \varepsilon$ ឬ

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbb{N}, \forall n \geq \alpha, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| \leq \varepsilon$ ឬ

$\lim\limits_{n\to+\infty} |u_m - u_n| = 0$, $\forall p \in \mathbb{N}$

សំគាល់ : ស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតរួមកាលណា

$$\forall\varepsilon>0,\exists\alpha\in\mathbb{N},\forall n\geq\alpha,|u_m-l|\leq\varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}u_n=l$$

បើ $m\leq u_n\leq M$ ជាស្វ៊ីតទាល់ នោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតរួម ។

b) **ទ្រឹស្តីបទទី2**

បើ (u_n) ជាស្វ៊ីតរួម $\Leftrightarrow$ (u_n) ជា**ស្វ៊ីតកូស៊ី** (Cauchy)

7.3 ស្វ៊ីតជាប់គ្នា

គេមានស្វ៊ីតពីរ (u_n) និង (v_n) គេថា $(u_n)\&(v_n)$ ជា**ស្វ៊ីតជាប់គ្នា** កាលណា

1. (u_n) កើន និង (v_n) ចុះ
2. $u_n\leq v_n \quad , \forall n$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$

ទ្រឹស្តីបទ : បើ (u_n) និង (v_n) ជា**ស្វ៊ីតជាប់គ្នា** នោះវាសុទ្ធតែជា **ស្វ៊ីតរួម** ហើយវាមាន **លីមីតស្មើគ្នា** ។ ព្រោះ

- (u_n) កើនទាល់លើដោយមាន v_0 ជាម៉ាស្សូរ៉ង់ $\Rightarrow(u_n)$ **រួម** ។
- (v_n) ចុះទាល់ក្រោមដោយមាន u_0 ជាមីណូរ៉ង់ $\Rightarrow(v_n)$ **រួម** ។

ដើម្បី បង្ហាញថា (u_n) និង (v_n) ជា**ស្វ៊ីតជាប់គ្នា** យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $\begin{cases}u_n\leq u_{n+1}\leq v_n \ , \forall n\\ \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0\end{cases}$ ។

7.4 វិធីសាស្រ្តកំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត

7.4.1 សមីការស្វ៊ីតរាង $u_1=A,\ u_{n+1}=pu_n+q$

វិធីសាស្រ្តដោះស្រាយ

សមីការ $u_{n+1}=pu_n+q \quad (*)$

- **ពិនិត្យ** សមីការ $x=px+q \Rightarrow x=\dfrac{q}{1-p}$

- ធ្វើផលសង $(*)-x$ សមមូល $u_{n+1}-\frac{q}{1-p}=pu_n-\frac{q}{1-p}+q$

  នោះបាន $u_{n+1}-\frac{q}{1-p}=pu_n-\frac{pq}{1-p}=p\left(u_n-\frac{q}{1-p}\right)$

- តាង $v_n=u_n-\frac{q}{1-p}\Rightarrow v_{n+1}=pv_n\quad (v_n)$

  ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន ផលធៀបរួម p នោះ $v_n=v_1p^{n-1}$

  ហើយ $v_1=a_1-\frac{q}{1-p}$ រួចទាញរក ស្វ៊ីត (u_n) ។

ឧទាហរណ៍ : កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត $(a_n):a_1=\frac{5}{2},a_{n+1}=3a_n+1$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត $(a_n):a_1=\frac{5}{2},a_{n+1}=3a_n+1\ (*)$

សមីការសំគាល់ $x=3x+1\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ ។ ធ្វើផលសង $(*)-x$ នោះ

$$a_{n+1}-\left(-\frac{1}{2}\right)=3a_n+1-\left(-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow a_{n+1}+\frac{1}{2}=3a_n+\frac{3}{2}$$

$$a_{n+1}+\frac{1}{2}=3\left(a_n+\frac{1}{2}\right)$$ ។

តាង $b_n=a_n+\frac{1}{2}\Rightarrow b_1=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$

យើងបាន $b_{n+1}=3b_n$ នោះ (b_n)

ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម $q=3$

នោះយើងបាន $b_n=b_1q^{n-1}=3\cdot 3^{n-1}=3^n$

នាំឲ្យយើងបាន $a_n=b_n-\frac{1}{2}=3^n-\frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{a_n=3^n-\frac{1}{2}}$

7.4.2 សមីការស្ទីរាង $u_1 = A$, $pu_{n+1} = qu_n + f(n)$, $p,q \in \mathbb{R}, p \neq 0$

វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ

តួទូទៅនៃ (u_n) គឺ $u_n = u_n^* + u_n^{**}$ ដែល

u_n^* ជាចម្លើយទូទៅនៃស្វីត $pu_n^* - qu_n^* = 0$

សមីការសំគាល់ $px - q = 0 \Rightarrow x = \dfrac{q}{p}$

នោះយើងបាន $u_n^* = \mu \cdot \left(\dfrac{q}{p}\right)^n$ ដែល μ ជាចំនួនត្រូវរក ។

u_n^{**} ជាចម្លើយពិសឹសនៃស្វីត $pu_{n+1}^{**} = qu_n^{**} + f(n)$

ដើម្បីរក u_n^{**} យើងត្រូវពិនិត្យលើពីរករណី

- ករណី $x \neq 1$ នោះ $u_n^{**} = g(n)$ ជាពហុធាដឺក្រេដូច $f(n)$
- ករណី $x = 1$ នោះ $u_n^{**} = ng(n)$ ដែល $g(n)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេដូចពហុធា $f(n)$ ។

ឧទាហរណ៍ : កំណត់តួទូទៅនៃស្វីត (u_n) ដែលចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

$u_1 = 2$, $u_{n+1} = u_n + 6n + 4$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តួទូទៅនៃស្វីត (u_n)

យើងមាន $u_{n+1} = u_n + 6n + 4$ និង $u_1 = 2$,

តួទូទៅនៃស្វីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_n = u_n^* + u_n^{**}$

ដែល u_n^* ជាចំលើយទូទៅនៃសមីការស្វីត $a_{n+1} = a_n$

សមីការសំគាល់ $x = 1$ នោះយើងបាន $u_n^* = \mu$

u_n^{**} ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $u_{n+1}^{**} = u_n^{**} + 6n + 4$ (*)

ដោយ $x = 1$ នោះ $u_n^{**} = ng(n) = n(\alpha n + \beta)$

យើងទាញបាន $u_{n+1}^{**} = (n+1)g(n+1) = (n+1)(\alpha n + \alpha + \beta)$

យក u_n^{**}, u_{n+1}^{**} ជំនួសសមីការ (*)

យើងបាន

$(n+1)(\alpha n+\alpha+\beta)=n(\alpha n+\beta)+6n+4$ យើងយក

- $n=-1:0=-(\beta-\alpha)-2 \Rightarrow \alpha-\beta=2$
- $n=0:\alpha+\beta=4$

យើងបាន $\alpha=3$, $\beta=1$ នោះ $u_n^{**}=n(3n+1)=3n^2+n$

នាំឲ្យ $u_n=u_n^*+u_n^{**}=3n^2+n+\mu$ ពេល $n=1$

$u_1=3+1+\mu=2 \Rightarrow \mu=-2$

ដូចនេះ $\boxed{u_n=3n^2+n-2}$

7.4.3 សមីការស្វ៊ីតរាង $u_1=A,\ pu_{n+1}=qu_n+r\cdot\alpha^n$

វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ

ចម្លើយទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_n=u_n^*+u_n^{**}$

ដែល u_n^* ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការស្វ៊ីត $pu_{n+1}^*=qu_n^*$

សមីការសំគាល់ $px=q \Rightarrow x=\dfrac{q}{p}$ នោះយើងបាន

$u_n^*=\mu\left(\dfrac{q}{p}\right)^n$, μ ជាចំនួនថេរត្រូវរក ។

u_n^{**} ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការស្វ៊ីត $pu_{n+1}^{**}=qu_n^{**}+r\cdot\alpha^n$

ដើម្បីកំណត់ u_n^{**} យើងត្រូវពិនិត្យលើពីរករណី

- ករណី $x\neq\alpha$ នោះយើងបាន $u_n^{**}=k\cdot\alpha^n$
- ករណី $x=\alpha$ នោះយើងបាន $u_n^{**}=k\cdot n\alpha^n$ ។

ឧទាហរណ៍ : កំណត់ u_n ដែល $u_{n+1}=2u_n+3\cdot 2^n$, $u_0=-1$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n)

យើងមាន $u_{n+1}=2u_n+3\cdot 2^n$ និង $u_0=-1$

តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_n=u_n^*+u_n^{**}$

ដែល u_n^* ជាចំលើយទូទៅនៃសមីការ $u_{n+1}^*=2u_n^*$

សមីការសំគាល់ $x=2$ យើងបាន $u_n^* = \mu \cdot 2^n$ ។

u_n^{**} ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីកការ $u_{n+1}^{**} = 2u_n^{**} + 3\cdot 2^n \quad (*)$

ដោយ $x=\alpha=2$ នោះយើងបាន $u_n^{**} = k\cdot n\cdot 2^n$

នាំឲ្យ $u_{n+1}^{**} = k(n+1)2^{n+1}$

យក u_n^{**}, u_{n+1}^{**} ជំនួសក្នុងសមីការ $(*)$ យើងបាន

$k(n+1)2^{n+1} = 2\left(kn2^n\right) + 3\cdot 2^n$

យក $n=-1$ នោះ $0 = 2(-k2^{-1}) + 3\cdot 2^{-1}$

នាំឲ្យ $k=\dfrac{3}{2}$ នោះយើងបាន $u_n^{**} = 3n2^{n-1}$ តទៅទៀតយើងបាន

$u_n = u_n^* + u_n^{**} = \mu 2^n + 3n2^{n-1}$

ដោយ $u_0 = -1$ នាំឲ្យ $\mu 2^0 = -1$ នាំឲ្យ $\mu = -1$ នោះយើងបាន

$u_n = -2^n + 3n2^{n-1}$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = 3n2^{n-1} - 2^n}$

7.4.4 សមីការស្វ៊ីតរាង $u_1 = A, pu_{n+1} = qu_n + f(n)\alpha^n$

វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ

តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_n = u_n^* + u_n^{**}$

ដែល u_n^* ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការស្វ៊ីត $pu_{n+1}^* = pu_n^*$

ពិនិត្យសមីការសំគាល់ $px = q \Rightarrow x = \dfrac{q}{p}$

នោះបាន $u_n^* = \mu\left(\dfrac{q}{p}\right)^n$ ដែល μ ជាចំនួនថេរត្រូវរក ។

u_n^{**} ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការស្វ៊ីត $pu_{n+1}^{**} = qu_n^{**} + f(n)\alpha^n$

ដើម្បីរក u_n^{**} យើងត្រូវពិនិត្យពីរករណី

- ករណី $x \neq \alpha$ នោះ $u_n^{**} = g(n)\alpha^n$ ដែល $g(n)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេដូចពហុធា $f(n)$ ។

- ករណី $x=\alpha$ នោះ $u_n^{**}=ng(n)\alpha^n$ ដែល $g(n)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេដូចពហុធា $f(n)$ ។

ជំនួស u_{n+1}^{**} & u_n^{**} ចូលទៅក្នុងសមីការ $pu_{n+1}^{**}=qu_n^{**}+f(n)\alpha^n$ ដើម្បីកំណត់ពហុធា $g(n)$ ។

ឧទាហរណ៍ : កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\begin{cases} u_1=5 \\ u_{n+1}=2u_n+(n+1)2^n \end{cases}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n)

យើងមាន $u_{n+1}=2u_n+(n+1)2^n$ $(*)$ និង $u_1=5$

សមីការសំគាល់នៃស្វ៊ីត $u_{n+1}^*=2u_n^*$ គឺ $x=2$ នោះយើងបាន

$u_n^*=\mu\cdot 2^n$

ដោយ $x=\alpha=2$ នោះយើងបាន $u_n^{**}=n(an+b)2^n$

តាមសមីការ $u_{n+1}^{**}=2u_n^{**}+(n+1)2^n$ នោះបាន

$(n+1)[a(n+1)+b]2^{n+1}=2n(an+b)2^n+(n+1)2^n$

- $n=-1$: $a-b=0$ (1)
- $n=0$: $a+b=\frac{1}{2}$ (2)

តាម (1) & (2) យើងបាន $a=b=\frac{1}{4}$

នាំឲ្យ $u_n^{**}=n\left(\frac{n+1}{4}\right)2^n=n(n+1)2^{n-2}$ យើងបាន

$u_n=u_n^*+u_n^{**}=\mu 2^n+n(n+1)2^{n-2}$

ដោយ $u_1=5\Rightarrow 2\mu+1(1+1)2^{1-2}=5$ នោះ $\mu=\frac{4}{2}=2$

នាំឲ្យយើងបាន $u_n=2^{n+1}+n(n+1)2^{n-2}$

ដូចនេះ $\boxed{u_n=2^{n+1}+n(n+1)2^{n-2}}$

7.4.5 សមីការស៊ីតរាង $u_1 = A$ និង

$$pu_{n+1} = qu_n + f_1(n) + f_2(n) + \cdots + f_k(n)$$

វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ

តួទូទៅនៃស៊ីតកំណត់ដោយ $u_n = u_n^* + u_n^{**} + \cdots + u_n^k$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$pu_{n+1}^* = qu_n^*$$

$$pu_{n+1}^{**} = qu_n^{**} + f_1(n)$$

....

$$pu_{n+1}^k = qu_n^k + f_k(n)$$

ដើម្បីរក $u_n^*, u_n^{**}, ..., u_n^k$ យើងធ្វើដូវិធីសាស្ត្រខាងលើ ។

7.5 សមីការស៊ីតលំដាប់ពីរ

7.5.1 រាងទីមួយ $\begin{cases} u_1 = a \ , \ u_2 = b \\ pu_{n+2} + qu_{n+1} + ru_n = 0 \end{cases}$

វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការសំគាល់ $p\lambda^2 + q\lambda + r = 0 \quad (E)$

- ករណី $\Delta > 0$ នោះ (E) មានឫសពីរផ្សេងគ្នា λ_1, λ_2 ។
  នាំឲ្យយើងបាន $u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$ ដែល A, B ជាចំនួនថេរ
  ហើយត្រូវកំណត់តាម u_1, u_2 ។
- ករណី $\Delta = 0$ នោះ (E) មានឫសឌុប λ
  នាំឲ្យយើងបាន $u_n = (An + B)\lambda^n$ ដែល A, B ជាចំនួនថេរ
  ហើយត្រូវកំណតាម u_1, u_2 ។
- ករណី $\Delta < 0$ នោះ (E) មានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ
  $\lambda = x \pm iy$ (សរសេរ λ ជារាងត្រីកោណមាត្រ) បាន
  $\lambda = r\left(\cos\varphi \pm i\sin\varphi\right)$ ដែល
  $$r = |\lambda| = \sqrt{x^2 + y^2}, \tan\varphi = \frac{y}{x}, \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

នាំឲ្យយើងបាន $u_n = r^n\left(A\cos n\varphi + B\sin n\varphi\right)$ ដែល A, B ជាចំនួនថេរ ហើយត្រូវកំណត់តាម u_1, u_2 ។

ឧទាហរណ៍ : កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) ដែល $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n)

យើងមាន $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 9u_n$

សមីការសំគាល់ $\lambda^2 - 3\lambda + 9 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 9 = -3\cdot 9 < 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{3\cdot 9i^2} = 3i\sqrt{3}$

នោះយើងបាន $\lambda = \dfrac{-(-3) \pm 3i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2} \pm i\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ យើងសរសេរ λ ជារាងត្រីកោណមាត្រ នោះ $\lambda = 3\left(\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{3} \pm i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

នាំឲ្យ $u_n = 3^n\left(A\cos\dfrac{n\pi}{3} + B\sin\dfrac{n\pi}{3}\right)$

ដោយ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\left(A\cos\dfrac{\pi}{3} + B\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \\ 3^2\left(A\cos\dfrac{2\pi}{3} + B\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2 \end{cases}$

នោះយើងបាន $A = \dfrac{5}{9}$, $B = \dfrac{\sqrt{3}}{27}$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = 3^n\left(\dfrac{5}{9}\cos\dfrac{n\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{27}\sin\dfrac{n\pi}{3}\right)}$

7.5.2 សមីការស្វ៊ីតរាង $\begin{cases} u_1 = \alpha \ , u_2 = \beta \\ pu_{n+2} + qu_{n+1} + ru_n = f(n) \end{cases}$

វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ

ចម្លើយទូទៅនៃស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_n = u_n^* + u_n^{**}$ ដែល

u_n^* ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $pu_{n+2}^* + qu_{n+1}^* + ru_n^* = 0$

ដោះស្រាយសមីការសំគាល់ $p\lambda^2 + q\lambda + r = 0 \quad (E)$

- ករណី $\Delta > 0$ នោះ (E) មានឬសពីរផ្សេងគ្នា λ_1, λ_2 ។
  នាំឲ្យយើងបាន $u_n^* = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$ ដែល A, B ជាចំនួនថេរ
  ហើយត្រូវកំណត់តាម u_1, u_2 ។
- ករណី $\Delta = 0$ នោះ (E) មានឬសឌុប λ
  នាំឲ្យយើងបាន $u_n^* = (An + B)\lambda^n$ ដែល A, B ជាចំនួនថេរ
  ហើយត្រូវកំណតាម u_1, u_2 ។
- ករណី $\Delta < 0$ នោះ (E) មានឬសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ
  $\lambda = x \pm iy$ (សរសេរ λ ជារាងត្រីកោណមាត្រ) បាន
  $\lambda = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$ ដែល
  $$r = |\lambda| = \sqrt{x^2 + y^2}, \tan\varphi = \frac{y}{x}, \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
  នាំឲ្យយើងបាន $u_n^* = r^n(A\cos n\varphi + B\sin n\varphi)$ ដែល A, B
  ជាចំនួនថេរ ហើយត្រូវកំណត់តាម u_1, u_2 ពេល $u_n = u_n^* + u_n^{**}$ ។

u_n^{**} ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការស្វ៊ីត $pu_{n+2}^{**} + qu_{n+1}^{**} + ru_n^{**} = f(n)$

ដើម្បីរក u_n^{**} យើងត្រូវពិនិតបីករណី

- **ករណី** $\lambda_1, \lambda_2 \neq 1$ នោះ $u_n^{**} = g(n)$ ជាពហុធាដឺក្រេដូច $f(n)$ ។
- **ករណី** λ_1, λ_2 ក្នុងចំនោមឬសណាមួយស្មើ 1 នោះ $u_n^{**} = ng(n)$ ដែល $g(n)$ ជាពហុធាដឺក្រេដូច $f(n)$ ។
- **ករណី** $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ជាឬសឌុប នោះ $u_n^{**} = n^2 g(n)$ ។

ឧទាហរណ៍ : កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) ដែលកំណត់ដោយ

$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = n \end{cases}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n)

យើងមាន $u_{n+2}-3u_{n+1}+2u_n=n$ នោះតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n)

កំណត់ដោយ $u_n=u_n^*+u_n^{**}$ ដែល

u_n^* ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការស្វ៊ីត $u_{n+2}^*-3u_{n+1}^*+2u_n^*=0$

u_n^{**} ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $u_{n+2}^{**}-3u_{n+1}^{**}+2u_n^{**}=n$

- **កំណត់ u_n^***

  ដោយ u_n^* ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការស្វ៊ីត $u_{n+2}^*-3u_{n+1}^*+2u_n^*=0$

  ពិនិត្យសមីការសំគាល់ $\lambda^2-3\lambda+2=0$ នោះយើងបាន

  $\lambda_1=1,\lambda_2=2$ នាំឲ្យយើងបាន $u_n^*=A+B2^n$

- **កំណត់ u_n^{**}**

  ដោយ u_n^{**} ជាចម្លើយពិសេសនៃ $u_{n+2}^{**}-3u_{n+1}^{**}+2u_n^{**}=n\ (E)$

  ហើយដោយ $\lambda_1=1,\lambda_2=2$ នោះយើងបាន $u_n^{**}=n(\alpha n+\beta)$

  តាម (E) យើងបាន

  $$(n+2)[\alpha(n+2)+\beta]-3(n+1)[\alpha(n+1)+\beta]$$
  $$+2n(\alpha n+\beta)=n$$

បើ $n=-2: 0-3(-1)(-\alpha+\beta)-4(-2\alpha+\beta)=-2$

នាំឲ្យ $5\alpha-\beta=-2\ \ (1)$

បើ $n=-1: (\alpha+\beta)-2(-\alpha+\beta)=-1$

នាំឲ្យ $3\alpha-\beta=-1\ \ (2)$

តាម $(1)\&(2)$ យើងបាន $\alpha=-\dfrac{1}{2}$, $\beta=\dfrac{1}{2}$ នោះយើងបាន

$u_n^{**}=\dfrac{n}{2}(-n+1)$ នាំឲ្យយើងបា

$$u_n=u_n^*+u_n^{**}=A+B2^n+\frac{n}{2}(-n+1)$$

ដោយ $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A + 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = -1, B = 1$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = 2^n - 1 + \frac{n}{2}(-n+1)}$

7.5.3 សមីការស៊ីតរាង $\begin{cases} u_1 = \alpha , u_2 = \beta \\ pu_{n+2} + qu_{n+1} + ru_n = m\mu^n \end{cases}$

វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ

ចម្លើយទូទៅនៃស៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_n = u_n^* + u_n^{**}$ ដែល

u_n^* ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $pu_{n+2}^* + qu_{n+1}^* + ru_n^* = 0$

ដោះស្រាយសមីការសំគាល់ $p\lambda^2 + q\lambda + r = 0 \ \ (E)$

- ករណី $\Delta > 0$ នោះ (E) មានឫសពីរផ្សេងគ្នា λ_1 , λ_2 ។
  នាំឲ្យយើងបាន $u_n^* = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$ ដែល A, B ជាចំនួនថេរ
  ហើយត្រូវកំណត់តាម u_1 , u_2 ។
- ករណី $\Delta = 0$ នោះ (E) មានឫសឌុប λ
  នាំឲ្យយើងបាន $u_n^* = (An + B)\lambda^n$ ដែល A, B ជាចំនួនថេរ
  ហើយត្រូវកំណតាម u_1 , u_2 ។
- ករណី $\Delta < 0$ នោះ (E) មានឫសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នាគឺ
  $\lambda = x \pm iy$ (សរសេរ λ ជារាងត្រីកោណមាត្រ) បាន
  $\lambda = r\left(\cos\varphi \pm i\sin\varphi\right)$ ដែល
  $r = |\lambda| = \sqrt{x^2 + y^2} , \tan\varphi = \frac{y}{x} , \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
  នាំឲ្យយើងបាន $u_n^* = r^n\left(A\cos n\varphi + B\sin n\varphi\right)$ ដែល A, B
  ជាចំនួនថេរ ហើយត្រូវកំណត់តាម u_1 , u_2 ពេល $u_n = u_n^* + u_n^{**}$ ។

u_n^{**} ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការស៊ីត $pu_{n+2}^{**} + qu_{n+1}^{**} + ru_n^{**} = f(n)$

ដើម្បីរក u_n^{**} យើងត្រូវពិនិតបីករណី

- **ករណី** $\lambda_1, \lambda_2 \neq \mu$ នោះ $u_n^{**} = k\mu^n \ , \ k \in \mathbb{R}$ ។

- **ករណី** λ_1,λ_2 ក្នុងចំនោមឬសណាមួយស្មើ μ នោះ
  $u_n^{**}=kn\mu^n\,,k\in\mathbb{R}$ ។
- **ករណី** $\lambda_1=\lambda_2=\mu$ ជាឬសឌុប នោះ $u_n^{**}=kn^2\mu^n\ \ ,k\in\mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍ : កំណត់តួទី n នៃស៊ីត (u_n) ដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនង

$$\begin{cases}u_0=\dfrac{1}{2}\,,\,u_1=\dfrac{1}{4}\\ u_{n+2}-4u_{n+1}+4u_n=2^n\end{cases}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ តួទី n នៃស៊ីត (u_n)

យើងមាន $u_{n+2}-4u_{n+1}+4u_n=2^n$

តួទី n នៃស៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_n=u_n^*+u_n^{**}$ ដែល

u_n^* ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការស៊ីត $u_{n+2}^*-4u_{n+1}^*+4u_n^*=0$

u_n^{**} ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការស៊ីត $u_{n+2}^{**}-4u_{n+1}^{**}+4u_n^{**}=2^n\ (E)$

- **កំណត់** u_n^*

  u_n^* ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការស៊ីត $u_{n+2}^*-4u_{n+1}^*+4u_n^*=0$

  សមីការសំគាល់ $\lambda^2-4\lambda+4=0$ សមីការមានឬសឌុប $\lambda=2$

  នោះយើងបាន $u_n^*=(A+Bn)2^n$

- **កំណត់** u_n^{**}

  ដោយ $\lambda=\mu=2$ ជាឬសឌុប នោះយើងបាន $u_n^{**}=kn^2 2^n$

  តាម (E) យើងបាន

  $k(n+2)^2 2^{n+2}-4k(n+1)^2 2^{n+1}+4n^2 2^n=2^n$

  បើ $n=0:16k-8k=1\Rightarrow k=2^{-3}$

  នោះយើងបាន $u_n^{**}=n^2 2^{n-3}$

នាំឲ្យ $u_n=u_n^*+u_n^{**}=(A+Bn)2^n+n^2 2^{n-3}$

ដោយ $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_1 = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A+0\cdot B)2^0 + 0 = \dfrac{1}{2} \\ (A+B)\cdot 2 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow A = \dfrac{1}{2}\ ,\ B = -\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = (1-n)2^{n-1} + n^2 2^{n-3}}$

7.5.4 សមីការស្វ៊ីតរាង $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}\ ,\ u_1 = \alpha$

វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ

ពិនិត្យ សមីការសំគាល់ $\lambda = \dfrac{a\lambda + b}{c\lambda + d}\ (E)$

- **បើ** (E) មានឫសពីរផ្សេងគ្នា λ_1, λ_2 តាងស្វ៊ីត $v_n = \dfrac{u_n - \lambda_1}{u_n - \lambda_2}$ នោះយើងបាន (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។ កំណត់ v_n រួចទាញរក u_n ដែល $v_1 = \dfrac{u_1 - \lambda_1}{u_1 - \lambda_2}$ ។
- **បើ** (E) មានឫសឌុប λ តាងស្វ៊ីត $v_n = \dfrac{1}{u_n - \lambda}$ នោះយើងបាន (v_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។ កំណត់ v_n រួចទាញរក u_n ដែល $v_1 = \dfrac{1}{u_1 - \lambda}$ ។
- **បើ** (E) គ្មានឫស នោះយើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតខួបជាការស្រេច ។

ឧទាហរណ៍ : កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីតដែលកំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 4} \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត

យើងមានទំនាក់ទំនងស្ទីត $u_{n+1}=\dfrac{2u_n-1}{u_n+4}$

ពិនិត្យ សមីការសំគាល់ $\lambda=\dfrac{2\lambda-1}{\lambda+4}\Leftrightarrow\lambda(\lambda+4)=2\lambda-1$

$\Leftrightarrow(\lambda+1)^2=0\Rightarrow\lambda=-1$ ជាឬសឌុប

តាងស្ទីត $v_n=\dfrac{1}{u_n-\lambda}=\dfrac{1}{u_n+1}$ នោះយើងបាន

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}+1}=\frac{1}{\left(\frac{2u_n-1}{u_n+4}\right)+1}=\frac{u_n+4}{(2u_n-1)+(u_n+4)}$$

$$v_{n+1}=\frac{u_n+4}{3u_n+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{u_n+4}{u_n+1}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{3}{u_n+1}\right)=\frac{1}{3}+v_n$$

(v_n) ជាស្ទីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d=\dfrac{1}{3}$ ហើយ

$v_1=\dfrac{1}{u_1+1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$ យើងបាន

$v_n=v_1+(n-1)d=\dfrac{1}{2}+(n-1)\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}n+\dfrac{1}{6}$ យើងទាញបាន

$$u_n=\frac{1}{v_n}-1=\frac{1}{\frac{1}{3}n+\frac{1}{6}}-1=\frac{5-2n}{2n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{u_n=\dfrac{5-2n}{2n+1}}$

VIII ផលបូក និង ស៊េរី

8.1 រូបមន្តផលបូក

1. $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

2. $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

4. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$

5. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$

6. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

8.2 ស៊េរី

ក. លក្ខណៈនៃ $\sum$

1. $\sum_{k=1}^{n}\alpha=\alpha n$

2. $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

3. $\sum_{k=1}^{n}\alpha a_k=\alpha\sum_{k=1}^{n}a_k$

4. $\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot b_k\neq\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k$

5. $\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{a_k}{b_k}\right)\neq\dfrac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k}\ ,\ (b_k\neq 0)$

6. $\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2\pm 2\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k+\sum_{k=1}^{n}a_k^2$

IX. អនុមានរួមគណិតវិទ្យា ឬ វិចារកំណើនគណិតវិទ្យា

ក. ទ្រឹស្តីបទទី១

គោលការណ៍របស់វិចារកំណើនគណិតវិទ្យា

តាង $P(n)$ ជាសំណើមួយដែលមានអថេរ n ។ យើងឧបមាថា

1. $n=1: P(1)$ ពិត
2. បើឧបមាថា $n=k$ ដែល k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន $P(k)$ ពិត
   នោះយើងត្រូវស្រាយ ឲ្យពិតរហូតដល់ $n=k+1$ គឺ $P(k+1)$ ពិត

ដូចនេះ យើងបាន $P(n)$ ពិតចំពោះគ្រប់ n ។

ខ. ទ្រឹស្តីបទទី២

តាង $P(n)$ ជាសំណើមួយដែលមានអថេរ n ។ យើងឧបមាថា

1. $n=1, n=2$ នោះ $P(1), P(2)$ ពិត
2. បើ $P(n)$ ពិតនោះត្រូវស្រាយឲ្យពិតដល់ $P(n+2)$

ដូចនេះ $P(n)$ ពិតចំពោះគ្រប់ n ។

លំហាត់ពីឯកសារបរទេស

1. គេឲ្យស្វីត (x_n) ដែលកំណត់ដោយ $x_k = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \cdots + \dfrac{k}{(k+1)!}$

គណនា $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{1999}^n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{1999}^n}$

យើងមាន $x_k = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \cdots + \dfrac{k}{(k+1)!}$, $\forall k \in \mathbb{N}$

យើងបាន $x_{k+1} = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \cdots + \dfrac{k}{(k+1)!} + \dfrac{k+1}{(k+2)!}$

នោះ $x_{k+1} = x_k + \dfrac{k+1}{(k+2)!} \Rightarrow x_{k+1} - x_k = \dfrac{k+1}{(k+2)!} > 0$

$x_{k+1} > x_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ ។ នាំឲ្យបាន

$x_{1999}^n < x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{1999}^n < 1999 \cdot x_{1999}^n$

$\Rightarrow \quad x_{1999}^n < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{1999}^n} < \sqrt[n]{1999} \cdot x_{1999} \quad (*)$

ពិនិត្យ $\dfrac{k}{(k+1)!} = \dfrac{k+1}{(k+1)!} - \dfrac{1}{(k+1)!} = \dfrac{1}{k!} - \dfrac{1}{(k+1)!}$

ដោយ $\forall k \in \mathbb{N}$ នោះយើងបាន

$$x_k = \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$$

$$x_k = 1 - \frac{1}{(k+1)!} \quad \Rightarrow \quad x_{1999} = 1 - \frac{1}{2000!}$$

នោះ $(*)$ ទៅជា

$$1 - \frac{1}{2000!} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{1999}^n} < \sqrt[n]{1999} \cdot \left(1 - \frac{1}{2000!}\right)$$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2000!}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sqrt[n]{1999}\left(1-\frac{1}{2000!}\right)\right]=1-\frac{1}{2000!}$

នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+\cdots+x_{1999}^n}=1-\frac{1}{2000!}$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+\cdots+x_{1999}^n}=1-\frac{1}{2000!}}$

2. គេឲ្យស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} x_1=5 \\ x_{n+1}=\dfrac{5x_n+4}{x_n+2} \end{cases}, \forall n\in\mathbb{N}^*$ ។

បង្ហាញថាចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ x_n\neq 4$ ។ គណនា x_{2008}

រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)$ ។

ដំណោះស្រាយ

- **បង្ហាញថាចំពោះ** $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ x_n\neq 4$

យើងមាន $x_{n+1}=\dfrac{5x_n+4}{x_n+2}$, $x_1=5$ ចំពោះគ្រប់ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

  - ចំពោះ $n=1$, $x_1=5\neq 4$ ពិត
  - ឧបមាថាពិតចំពោះ $n=k$ គឺ $x_k\neq 4$
  - យើងនឹងស្រាយបន្តទៀតថាពិតចំពោះ $n=k+1$ គឺ $x_{k+1}\neq 4$

យើងមាន $x_{n+1}=\dfrac{5x_n+4}{x_n+2}\Rightarrow x_{k+1}=\dfrac{5x_k+4}{x_k+2}$

ដោយ $x_k\neq 4$ នោះ $x_{k+1}\neq\dfrac{5\cdot4+4}{4+2}=\dfrac{24}{6}=4\Rightarrow x_{k+1}\neq 4$

ដូចនេះ $\boxed{x_{n+1}\neq 4,\ \forall n\in\mathbb{N}^*}$

- **គណនា** x_{2008} **និងទាញរក** $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)$

យើងមាន $x_{n+1}=\dfrac{5x_n+4}{x_n+2} \Leftrightarrow x_{n+1}-4=\dfrac{5x_n+4}{x_n+2}-4=\dfrac{x_n-4}{x_n+2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x_n-4}=\dfrac{x_n+2}{x_n-4}=1+\dfrac{6}{x_n-4} \quad (*)$

តាង $a_n=\dfrac{1}{x_n-4}$, $a_1=\dfrac{1}{x_1-4}=1 \Rightarrow (*)$ ទៅជា $a_{n+1}=6a_n+1$

បូកអង្គទាំងពីរនឹង $\dfrac{1}{5}$ នោះ $a_{n+1}+\dfrac{1}{5}=6a_n+1+\dfrac{1}{5}=6a_n+\dfrac{6}{5}$

$a_{n+1}+\dfrac{1}{5}=6\left(a_n+\dfrac{1}{5}\right)$

តាង $b_n=a_n+\dfrac{1}{5}$ នោះបាន $b_{n+1}=6b_n$, $b_1=a_1+\dfrac{1}{5}=1+\dfrac{1}{5}=\dfrac{6}{5}$

យើងបាន $b_n=\dfrac{6}{5}\cdot 6^{n-1}=\dfrac{6^n}{5} \Rightarrow a_n=\dfrac{6^n-1}{5}$

ដោយ $a_n=\dfrac{1}{x_n-4} \Rightarrow x_n=\dfrac{1}{a_n}+5=\dfrac{5}{6^n-1}+4$

យក $n=2008: x_{2008}=\dfrac{5}{6^{2008}-1}+4 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)=4$

ដូចនេះ $\boxed{x_{2008}=\dfrac{5}{6^{2008}-1}+4\,,\ \lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)=4}$

3. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (x_n) ដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនង

$\begin{cases} x_1=2 \\ x_{n+1}=5x_n+2\cdot 3^n-6\cdot 7^n+12 \end{cases}$, $\forall n\geq 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (x_n)

យើងមានទំនាក់ទំនងស្វ៊ីត $x_{n+1}=5x_n+2\cdot 3^n-6\cdot 7^n+12$

នោះយើងបានតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ

$x_n = x_n^* + x_n^{**} + x_n^{\Delta}$ (∂) ដែល

- x_n^* ជាចំលើយទូទៅនៃសមីការ $x_{n+1}^* = 5x_n^* + 12$ (E)
- x_n^{**} ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $x_n^{**} = 5x_n^{**} + 2\cdot 3^n$ (F)
- x_n^{Δ} ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $x_n^{\Delta} = 5x_n^{\Delta} - 6\cdot 7^n$ (T)

តាមសមីការ (E) : $x_{n+1}^* = 5x_n^* + 12$

ពិនិត្យ $\alpha = 5\alpha + 12 \Rightarrow \alpha = -3$ នោះយើងបាន

$x_{n+1}^* - \alpha = 5x_n^* + 12 - \alpha \iff x_{n+1}^* + 3 = 5(x_n^* + 3)$

នាំឲ្យ $x_n^* + 3 = k\cdot 5^n \Rightarrow x_n^* = k\cdot 5^n - 3$

តាមសមីការ (F) : $x_n^{**} = 5x_n^{**} + 2\cdot 3^n$

យើងបាន $x_n^{**} = k'\cdot 3^n$ ជំនួសចូលសមីការ (F) នោះយើងបាន

$k'\cdot 3^{n+1} = 5k'\cdot 3^n + 2\cdot 3^n$

យក $n=0$ នោះ $3k' = 5k' + 2 \Rightarrow k' = -1 \Rightarrow x_n^{**} = -3^n$

តាមសមីការ (T) : $x_n^{\Delta} = 5x_n^{\Delta} - 6\cdot 7^n$ នោះយើងបាន

$x_n^{\Delta} = k''\cdot 7^n$ ជំនួសចូលសមីការ (T) យើងបាន

$k''\cdot 7^{n+1} = 5k''\cdot 7^n - 6\cdot 7^n$

យក $n=0$ នោះ $k''\cdot 7 = 5k'' - 6 \Rightarrow k'' = -3 \Rightarrow x_n^{\Delta} = -3\cdot 7^n$

នោះយើងបាន $x_n = k\cdot 5^n - 3 - 3^n - 3\cdot 7^n$

ដោយ $x_1 = 2 \Leftrightarrow 5k - 3 - 3 - 3\cdot 7 = 2 \Rightarrow k = \dfrac{29}{5}$

ដូចនេះ $\boxed{x_n = 29\cdot 5^{n-1} - 3 - 3^n - 3\cdot 7^n}$

4. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (x_n) ដែល $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = 2x_{n-1} + 3^n - n \end{cases}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (x_n)

យើងមាន $x_n = 2x_{n-1} + 3^n - n$

តួទី n នៃស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ $x_n = x_n^* + x_n^{**} + x_n^{\Delta}$

- x_n^* ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $x_n^* = 2x_{n-1}^*$

  នាំឲ្យ $x_n^* = k \cdot 2^n$ ដែល $\lambda = 2$

- x_n^{**} ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $x_n^{**} = 2x_{n-1}^{**} + 3^n \quad (E)$

  ដោយមាន $\lambda = 2 \neq 3$ នោះយើងបាន $x_n^{**} = k' \cdot 3^n$

  តាមសមីការ (E) នោះយើងបាន

  $k' \cdot 3^n = 2k' \cdot 3^{n-1} + 3^n$

  យក $n = 1 \Rightarrow 3k' = 2k' + 3 \Rightarrow k = 3$ នោះ $x_n^{**} = k' \cdot 3^n = 3^{n+1}$

- x_n^{Δ} ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $x_n^{\Delta} = 2x_{n-1}^{\Delta} - n \ (T)$

  ដោយ $\lambda = 2 \neq 1$ នោះយើងបាន $x_n^{\Delta} = an + b$

  តាមសមីការ (T) នោះយើងបាន

  $an + b = 2[a(n-1) + b] - n$

  យក $\begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b - 2a = 0 \\ b - a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1 , b = 2 , x_n^{\Delta} = n + 2$

នោះយើងបាន $x_n = k \cdot 2^n + 3^{n+1} + n + 2$

ដោយ $x_1 = 1 \Leftrightarrow k \cdot 2^1 + 3^2 + 3 = 1 \Rightarrow k = -\dfrac{11}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{x_n = -11 \cdot 2^{n-1} + 3^{n+1} + n + 2}$

5. គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន (a_n) ដែលកំណត់ដោយសមភាព $a_n^{\frac{2000}{1999}} \geq a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 , \forall n \geq 2$ ។ បង្ហាញថាមានចំនួនពិត $c > 0$ ដែលធ្វើឲ្យ $a_n > nc , \forall n \in \mathbb{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាមានចំនួនពិត $c>0$ ដែលធ្វើឲ្យ $a_n > nc\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$

យើងមាន $a_n^{\frac{2000}{1999}} \geq a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1\ ,\ \forall n\geq 2$

ពិនិត្យ $a_n > a_1^{\frac{2000}{1999}} > 0$

$$\Rightarrow \quad a_n^{\frac{2000}{1999}} > \underbrace{a_1^{\frac{2000}{1999}}+a_1^{\frac{2000}{1999}}+\cdots+a_1^{\frac{2000}{1999}}}_{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad a_n^{\frac{2000}{1999}} > \underbrace{a_1^{\frac{2000}{1999}}+a_1^{\frac{2000}{1999}}+\cdots+a_1^{\frac{2000}{1999}}}_{n-2}+a_1 \quad \text{ព្រោះ}\ a_1^{\frac{2000}{1999}} > a_1$$

$$\Rightarrow \quad a_n^{\frac{2000}{1999}} > (n-2)a_1^{\frac{2000}{1999}}+a_1\ ,\ \forall n\geq 2$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \exists\varepsilon\in\mathbb{N} : a_n \geq 1\ ,\ \forall n\geq\varepsilon$$

តាង c ជាមីណូរ៉ង់នៃស្វ៊ីត (a_n) នោះ $c=\min\left\{\frac{1}{4}, a_1, \frac{a_2}{2}, \cdots, \frac{a_\varepsilon}{\varepsilon}\right\}$

$$\Rightarrow \quad a_n > nc\ ,\ \forall n\in\{1,2,\ldots.,\varepsilon\}$$

ឧបមា $a_n > nc\ ,\ \forall n\leq\sigma$ ដែល $\sigma\in\mathbb{N}, \sigma\geq\varepsilon$

យើងមាន $a_{n+1}^2 > a_{n+1}^{\frac{2000}{1999}} \geq a_n + a_{n-1}+\cdots+a_1$

$$\geq [nc+(n-1)c+\cdots+1c]$$

$$\geq \frac{n(n+1)}{2}c$$

$$\geq (n+1)^2c^2 \quad \text{ព្រោះ}\ \frac{n}{2(n+1)} \geq \frac{1}{4} \geq c$$

$$\Rightarrow \quad a_n > nc\ ,\ \forall\varepsilon\leq n\leq\sigma\ ,\ \forall\varepsilon,\sigma\in\mathbb{N}$$

ដូចនេះ $\boxed{\exists c>0\ ,\ a_n > nc}$

6. គេមានផលបូក $S_n = \frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

យើងមាន $S_n = \frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k} = \frac{n+1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{2^n}{n}\right)$

$$\Rightarrow \quad S_{n+1} = \frac{n+2}{2^{n+2}}\left(\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{2^n}{n}+\frac{2^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$S_{n+1} = \frac{n+2}{2^{n+2}}\left(\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{2^n}{n}+\frac{2^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$S_{n+1} = \frac{n+2}{2^{n+2}}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}+\frac{2^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$S_{n+1} = \frac{n+2}{2^{n+2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}+\frac{2^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n+2}{2^{n+2}}$$

$$S_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)}\cdot\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}+\frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)}(S_n+1)$$

$$\Rightarrow \quad S_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)}(S_n+1) \quad \Rightarrow \quad S_{n+2} = \frac{n+3}{2(n+2)}(S_{n+1}+1)$$

យក $S_{n+2}-S_{n+1} = \frac{(n+3)(n+1)(S_{n+1}+1)-(n+2)(n+2)(S_n+1)}{2(n+1)(n+2)}$

$$S_{n+2}-S_{n+1} = \frac{(n^2+4n+3)(S_{n+1}+1)-(n^2+4n+4)(S_n+1)}{2(n+1)(n+2)}$$

$$S_{n+2}-S_{n+1} = \frac{(n^2+4n+3)\left[(S_{n+1}+1)-(S_n+1)\right]-(S_n+1)}{2(n+1)(n+2)}$$

$$S_{n+2}-S_{n+1}=\frac{(n^2+4n+3)(S_{n+1}-S_n)-(S_n+1)}{2(n+1)(n+2)}<0$$

$\Rightarrow$ (S_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតវិជ្ជមានចុះ ហើយ

$$S_{n+1}=\frac{n+2}{2(n+1)}\left(S_n+1\right) \Rightarrow 2S_{n+1}=\frac{n+2}{n+1}\left(S_n+1\right)$$

$$n\to+\infty\ ,\ \frac{n+2}{n+1}\to 1 \Rightarrow 2S_{+\infty}=S_{+\infty}+1 \Rightarrow S_{+\infty}=1$$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=1$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=1}$

7. កំណត់តួទី n ស្វ៊ីត (x_n) ដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនង

$$\begin{cases} x_0=1\ ,\ x_1=\dfrac{1}{2} \\ x_{n+2}=\dfrac{x_{n+1}x_n}{2002x_{n+1}+2001x_n+2000x_{n+1}x_n} \end{cases} ,\ \forall\in\mathbb{N}^* \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តួទី n **ស្វ៊ីត** (x_n)

យើងមាន $x_{n+2}=\dfrac{x_{n+1}x_n}{2002x_{n+1}+2001x_n+2000x_{n+1}x_n}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_{n+2}}=\frac{2002x_{n+1}+2001x_n+2000x_{n+1}x_n}{x_{n+1}x_n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_{n+2}}=\frac{2002}{x_n}+\frac{2001}{x_{n+1}}+2000 \quad (*)$$

តាង $y_n=\dfrac{1}{x_n}$

$\Rightarrow$ $(*)$ ទៅជា $y_{n+2}=2001y_{n+1}+2002y_n+2000$

យើងត្រូវកំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (y_n) ដែលមានទំនាក់ទំនង

$$\begin{cases} y_0 = 1\ ,\ y_1 = 2 \\ y_{n+2} = 2001y_{n+1} + 2002y_n + 2000\ \ (E) \end{cases} ,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

យើងពិនិត្យ $\lambda^2 = 2001\lambda + 2002 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2001\lambda - 2002 = 0$

$$\Rightarrow \quad \lambda = -1\ ,\ \lambda = -\frac{c}{a} = -\frac{-2002}{1} = 2002$$

$$\Rightarrow \quad y_n^* = A\cdot(-1)^n + B\cdot 2002^n$$

ហើយ $y_n^{**} = g(n) = k$ ជាចម្លើយពិសេសនៃមីការ (E) នោះយើងបាន

$k = 2001k + 2002k + 2000 \ \Rightarrow\ k = -\dfrac{1000}{2001}$ តទៅទៀតយើងបាន

$$y_n = y_n^* + y_n^{**} = A\cdot(-1)^n + B\cdot 2002^n - \frac{1000}{2001}$$

ដោយ $\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ -A + 2002B = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \dfrac{2000}{2003}\ ,\ B = \dfrac{3}{2003}$

$$\Rightarrow \quad y_n = \frac{2000\cdot(-1)^n}{2003} + \frac{3\cdot 2002^n}{2003} - \frac{1000}{2001}$$

$$\Rightarrow \quad x_n = \frac{1}{y_n} = \frac{1}{\dfrac{2000\cdot(-1)^n}{2003} + \dfrac{3\cdot 2002^n}{2003} - \dfrac{1000}{2001}}$$

ដូចនេះ: $$\boxed{x_n = \frac{1}{\dfrac{2000\cdot(-1)^n}{2003} + \dfrac{3\cdot 2002^n}{2003} - \dfrac{1000}{2001}}}$$

8. កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (x_n) ដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនង

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_{n+1} = \dfrac{8x_n}{4 + x_n^2} \end{cases} ,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ \ ។$$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត (x_n)

យើងមាន $\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_{n+1} = \dfrac{8x_n}{4+x_n^2} \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

ពិនិត្យថា $x_{n+1} = \dfrac{8x_n}{4+x_n^2} \Rightarrow x_2 = \dfrac{8x_1}{4+x_1^2} = \dfrac{8\alpha}{4+\alpha^2}$ នោះ

បើ $\alpha = -2 \quad \Rightarrow \quad x_n = -2$

បើ $\alpha \neq -2$ នោះយើងបាន

$$2 - x_n = 2 - \frac{8x_{n-1}}{4+x_{n-1}^2} = \frac{8+2x_{n-1}^2 - 8x_{n-1}}{4+x_{n-1}^2} = \frac{2\left(2-x_{n-1}\right)^2}{4+x_{n-1}^2}$$

$$\Rightarrow \quad 2 - x_n = \frac{2\left(2-x_{n-1}\right)^2}{4+x_{n-1}^2} \quad (1)$$

$$2 + x_n = 2 + \frac{8x_{n-1}}{4+x_{n-1}^2} = \frac{8+2x_{n-1}^2 + 8x_{n-1}}{4+x_{n-1}^2} = \frac{2\left(2+x_{n-1}\right)^2}{4+x_{n-1}^2}$$

$$\Rightarrow \quad 2 + x_n = \frac{2\left(2+x_{n-1}\right)^2}{4+x_{n-1}^2} \quad (2)$$

ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{2-x}{2+x}$ តាម (1) និង (2) យើងបាន

$$f(x_n) = \frac{2-x_n}{2+x_n} = \left(\frac{2-x_{n-1}}{2+x_{n-1}}\right)^2$$

$$= \left[f(x_{n-1})\right]^2 = \left[f(x_{n-2})\right]^{2^2} = \cdots = \left[f(x_1)\right]^{2^{n-1}} = \left[f(\alpha)\right]^{2^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \quad f(x_n) = \left[f(\alpha)\right]^{2^{n-1}} \quad (3)$$

តាង $\beta = \left[f(\alpha)\right]^{2^{n-1}} \Rightarrow \beta = \dfrac{2-x_n}{2+x_n}$

$$\Leftrightarrow \quad 2-x_n = 2\beta + \beta x_n \quad \Leftrightarrow \quad x_n = \frac{2-2\beta}{1+\beta}$$

$$\Rightarrow \quad x_n = \frac{2-2\left[f(\alpha)\right]^{2^{n-1}}}{1+\left[f(\alpha)\right]^{2^{n-1}}} = \frac{2\left[1-\left(\dfrac{2-\alpha}{2+\alpha}\right)^{2^{n-1}}\right]}{1+\left(\dfrac{2-\alpha}{2+\alpha}\right)^{2^{n-1}}} \,,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

ដូចនេះ $$\boxed{x_n = \frac{2\left[1-\left(\dfrac{2-\alpha}{2+\alpha}\right)^{2^{n-1}}\right]}{1+\left(\dfrac{2-\alpha}{2+\alpha}\right)^{2^{n-1}}} \quad \text{បើ } \alpha \neq -2}$$

9. គេឲ្យស្វ៊ីត (x_n) និង (y_n) ដែលកំណត់ដោយទំនាក់ទំនង

$$\begin{cases} x_1 = y_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{4y_{n+1}^2 - 1} \,,\ y_{n+1} = \dfrac{y_n}{1-4x_{n+1}^2} \end{cases}$$ ។

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \,,\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \,,\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$

យើងមាន $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4} \\ y_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

យើងពិនិត្យឃើញថា $x_1^2+y_1^2=\cos^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{4}=1$

ឧបមាថា $x_k^2+y_k^2=1$ នោះយើងត្រូវស្រាយថា $x_{k+1}^2+y_{k+1}^2=1$

ដោយ $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{4y_{n+1}^2-1}$, $y_{n+1}=\dfrac{y_n}{1-4x_{n+1}^2}$

$$\Rightarrow \quad x_k^2=x_{k+1}^2\left(4y_{k+1}^2-1\right)^2 \ , \ y_k^2=y_{k+1}^2\left(1-4x_{k+1}^2\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad x_k^2=\left[x_{k+1}(4y_{k+1}^2-1)\right]^2 \quad , \quad y_k^2=\left[y_{k+1}(1-4x_{k+1}^2)\right]^2$$

$$\Rightarrow \quad x_k^2+y_k^2=\left[x_{k+1}(4y_{k+1}^2-1)\right]^2+\left[y_{k+1}(1-4x_{k+1}^2)\right]^2$$

$$\Rightarrow \quad \left[x_{k+1}(4y_{k+1}^2-1)\right]^2+\left[y_{k+1}(1-4x_{k+1}^2)\right]^2=1$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{k+1}^2(4y_{k+1}^2-1)^2+y_{k+1}^2(1-4x_{k+1}^2)^2=1 \quad (*)$$

តាង $u=x_{k+1}^2$, $v=y_{k+1}^2$

$$\Rightarrow \quad (*) : u(4v-1)^2+v(1-4u)^2=1$$

$$\Leftrightarrow \quad (u+v-1)(16uv+1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u+v=1 \\ 16uv=-1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_{k+1}^2+y_{k+1}^2=1 \\ 16x_{k+1}^2\cdot y_{k+1}^2=-1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow x_{k+1}^2+y_{k+1}^2=1$$

នោះយើងបាន $x_n^2+y_n^2=1$ ពិតចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ។

តាង $\begin{cases} x_n=\sin\alpha_n \\ y_n=\cos\alpha_n \end{cases}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ ដែល $\sin^2\alpha_n+\cos^2\alpha_n=1$

ដោយ $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{4y_{n+1}^2-1}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\sin\alpha_{n+1}=\dfrac{\sin\alpha_n}{4\cos^2\alpha_{n+1}-1}$

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha_{n+1}(4\cos^2\alpha_{n+1}-1)=\sin\alpha_n \quad \Rightarrow \sin 3\alpha_{n+1}=\sin\alpha_n$$

$\Rightarrow \quad 3\alpha_{n+1}=\alpha_n$ ចូរប្រើវិចារកំណើនស្រាយឲ្យបាន $x_n=\sin\dfrac{\pi}{4\cdot 3^{n-1}}$

$$\Rightarrow \quad y_n = \cos\frac{\pi}{4\cdot 3^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin\dfrac{\pi}{4\cdot 3^{n-1}}\right) = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\dfrac{\pi}{4\cdot 3^{n-1}}\right) = 1 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0 \ , \ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 1}$

10. គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) ដែល $\begin{cases} a_0 = 1999 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{1+a_n} \end{cases} , \forall n \geq 0$ ។

កំណត់ផ្នែកគត់នៃ a_n ចំពោះ $0 \leq n \leq 999$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ផ្នែកគត់នៃ a_n **ចំពោះ** $0 \leq n \leq 999$

យើងមាន $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{1+a_n} \ , \forall n \geq 0 \ , \ a_n > 0$

$$\Rightarrow \quad a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2}{1+a_n} = \frac{a_n}{1+a_n} > 0$$ នោះយើងបាន

(a_n) ជាស្វ៊ីតចុះហើយទាល់ក្រោម ត្រង់ 0 (1)

ដោយ $a_n - a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n} \Rightarrow a_{n+1} = a_n - \dfrac{a_n}{1+a_n} > a_n - 1$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a_1 > a_0 - 1 \\ a_2 > a_1 - 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n+1} > a_n - 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} > a_0 - (n+1) \ , \ \forall n \geq 0$$

$\Rightarrow \quad a_{n-1} > a_0 - (n-1) \ , \ \forall n \geq 2$

$\Rightarrow \quad a_{n-1} > 2000 - n \ , \ \forall n \geq 2 \qquad (2)$

ហើយម្យ៉ាងទៀត $a_n = a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$

$$\Rightarrow \quad a_n = a_0 - \left(\frac{a_0}{1+a_0} + \frac{a_1}{1+a_1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}} \right)$$

$$\Rightarrow \quad a_n = 1999 - \left(\frac{a_0}{1+a_0} + \frac{a_1}{1+a_1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}} \right)$$

$$\Rightarrow \quad a_n = 1999 - n + \left(\frac{1}{1+a_0} + \frac{1}{1+a_1} + \cdots + \frac{1}{1+a_{n-1}} \right) \quad (3)$$

តាម $(1),(2),(3)$ នោះយើងបាន

$$0 < \frac{a_0}{1+a_0} + \frac{a_1}{1+a_1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}} < \frac{1}{1+a_{n-1}}$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \frac{n}{2001-n} < \frac{n}{1998+n} < 1 \qquad (\ 2 \leq n \leq 999\ ) \quad (4)$$

តាម $(3),(4)$ នោះយើងបាន

$$(1999-n) \leq a_n \leq (1999-n) + 1$$

$$\Rightarrow \quad [a_n] = 1999 - n \ , \ 2 \leq n \leq 999$$

ដោយ $a_0 = 1999 \ \Rightarrow \ [a_n] = 1999$ ហើយ

$$a_1 = \frac{a_0^2}{1+a_0} = a_0 - \frac{a_0}{1+a_0} = 1999 - \frac{1999}{2000} = 1998 + \frac{1}{2000}$$

$$\Rightarrow \quad [a_1] = 1998$$

$$\Rightarrow \quad [a_n] = 1999 - n \ , \ 0 \leq n \leq 999$$

ដូចនេះ: $\boxed{[a_n] = 1999 - n \ , \ 0 \leq n \leq 999}$

11. ស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ដែល

$$x_n = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdots \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$$ ។

ចូរគណនាលីមីតនៃ x_n ពេលដែល n ខិតទៅ $+\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចូរគណនាលីមីតនៃ x_n

យើងមាន $x_n = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdots \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$

ចំពោះ $y_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^2}}$

ចំពោះ $y_2 = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{2^2}\right)}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^3}}$

ឧបមាថា $y_n = \frac{2}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$

យើងត្រូវស្រាយបន្តទៀតថា $y_{n+1} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$

នោះ: $\frac{2}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$

$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

យើងមាន $y_{n+1} = \dfrac{2}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{2+2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}}$

$\Rightarrow \quad y_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1+\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)}} = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}$

យើងបាន $y_{n+1} = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}$, $\forall n \ge \mathbb{N}$

ដោយ $x_n = y_1 \cdot y_2 \cdots y_n = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2^2}} \cdot \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2^3}} \cdots \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^2}} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^3}} \cdots \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{\pi}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{\pi}{2}}$

12. គេឲ្យ n ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1, a_2, ..., a_n > 0$, $\forall n \ge 2$ ដែល $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}} \ge (n-1) \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}}\geq(n-1)\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}$

យើងមាន $A=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}}-(n-1)\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}$

$$\Rightarrow \quad A=\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}}$$

$$-\left[n-\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)\right]\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}}-\left(\sum_{k=1}^{n}(1-a_k)\right)\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}}-(1-a_i)\sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k(1-a_i)-a_i(1-a_k)}{\sqrt{a_i(1-a_i)}}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-a_i}{\sqrt{a_i(1-a_i)}}$$

$$=\sum_{1\leq i<k\leq n}\left(\frac{a_k-a_i}{\sqrt{a_i(1-a_i)}}-\frac{a_i-a_k}{\sqrt{a_k(1-a_k)}}\right)$$

ដោយ $\frac{a_k-a_i}{\sqrt{a_i(1-a_i)}}+\frac{a_i-a_k}{\sqrt{a_k(1-a_k)}}$

$$=\frac{\left(a_k-a_i\right)\left[\sqrt{a_k(1-a_k)}-\sqrt{a_i(1-a_i)}\right]}{\sqrt{a_k a_i(1-a_k)(1-a_i)}}$$

$$= \frac{(a_i - a_k)^2 (1 - a_i - a_k)}{\sqrt{a_k a_i (1-a_k)(1-a_i)}\left[\sqrt{a_k(1-a_k)} + \sqrt{a_i(1-a_i)}\right]} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad A = \sum_{1 \leq i < k \leq n} \left(\frac{a_k - a_i}{\sqrt{a_i(1-a_i)}} - \frac{a_i - a_k}{\sqrt{a_k(1-a_k)}} \right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}} \geq (n-1) \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}} \geq (n-1) \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}}$

13. គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{u_n^2}{2015} \end{cases}$

គណនា $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \cdots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \cdots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right)$

យើងមាន $u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{2015} \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2015} > 0$

នោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន

ម្យ៉ាងទៀត $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2015} \quad \Rightarrow \quad u_n^2 = 2015(u_{n+1} - u_n)$

មាន $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_n^2}{u_{n+1}u_n} = \frac{2015(u_{n+1} - u_n)}{u_{n+1}u_n} = 2015\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right)$

$$\Rightarrow \quad \frac{u_1}{u_2}+\frac{u_2}{u_3}+\cdots+\frac{u_n}{u_{n+1}}=2015\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u_1}{u_2}+\frac{u_2}{u_3}+\cdots+\frac{u_n}{u_{n+1}}=2015\left(1-\frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

ដោយ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{u_{n+1}}\right)=1$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_1}{u_2}+\frac{u_2}{u_3}+\cdots+\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)=2015$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_1}{u_2}+\frac{u_2}{u_3}+\cdots+\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)=2015}$

14. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n\geq 2$ នោះគេបាន $\frac{1}{P_2^2}+\frac{1}{P_3^2}+\frac{1}{P_4^2}+\cdots+\frac{1}{P_n^2}=\frac{n-1}{n}$ ។ ដែល P_n^k ជាចម្លាស់នៃ k ធាតុយកចេញពី n ធាតុ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{1}{P_2^2}+\frac{1}{P_3^2}+\frac{1}{P_4^2}+\cdots+\frac{1}{P_n^2}=\frac{n-1}{n}$, $n\geq 2$

យើងមាន $P_k^2=\frac{k!}{(k-2)!}=\frac{k(k-1)(k-2)!}{(k-2)!}=(k-1)k$, $\forall k\in\mathbb{N}\geq 2$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{P_k^2}=\frac{1}{(k-1)k}$ ។ តាង $A=\frac{1}{P_2^2}+\frac{1}{P_3^2}+\frac{1}{P_4^2}+\cdots+\frac{1}{P_n^2}$

យក $k=\overline{2,n}$ នោះយើងបាន

$$A=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$$

$$A=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$$

ដូចនេះ $$\boxed{\frac{1}{P_2^2}+\frac{1}{P_3^2}+\frac{1}{P_4^2}+\cdots+\frac{1}{P_n^2}=\frac{n-1}{n}}$$

15. គេឲ្យ n ចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង k ចំនួនគត់ដែល $0\le k\le n$ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{n+1}{n+2}\left(\dfrac{1}{C_{n+1}^{k}}+\dfrac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right)=\dfrac{1}{C_n^k}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\dfrac{n+1}{n+2}\left(\dfrac{1}{C_{n+1}^{k}}+\dfrac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right)=\dfrac{1}{C_n^k}$

តាង $$A=\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^{k}}+\frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right)=\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{C_{n+1}^{k+1}+C_{n+1}^{k}}{C_{n+1}^{k}C_{n+1}^{k+1}}\right)$$

ដោយ $$C_{n+1}^{k+1}+C_{n+1}^{k}=\frac{(n+1)!}{\left[n+1-(k+1)\right]!(k+1)!}+\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!}$$

$$=\frac{\left[(n-(k-1)\right](n+1)!}{(k+1)!(n+1-k)!}+\frac{(k+1)(n+1)!}{(n+1-k)!(k+1)!}$$

$$=\frac{(n+1)!\left(\left[\left[(n-(k-1)\right]+(k+1)\right]\right)}{(k+1)!(n+1-k)!}$$

$$=\frac{(n+1)!(n+2)}{(k+1)!(n+1-k)!}$$

$$=\frac{(n+2)!}{\left[(n+2)-(k+1)\right]!(k+1)!}$$

$$\Rightarrow\qquad C_{n+1}^{k+1}+C_{n+1}^{k}=C_{n+2}^{k+1}$$

នោះ $$A=\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{C_{n+2}^{k+1}}{C_{n+1}^{k}C_{n+1}^{k+1}}$$
$$=\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{(n+2)!}{(n+1-k)!}\cdot\frac{(n+1-k)!(n-k)!k!}{(n+1)!(n+1)!}$$
$$=\frac{(n-k)!k!}{n!}=\frac{1}{\frac{n!}{(n-k)!k!}}=\frac{1}{C_n^k}$$

ដូចនេះ $$\boxed{\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{1}{C_{n+1}^{k}}+\frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right)=\frac{1}{C_n^k}}$$

16. គេឲ្យស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases}x_1=\sqrt{2}\\ x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\end{cases}$, $\forall n\geq 1$ ។

កំណត់ x_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ x_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $x_1=\sqrt{2}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\cos\frac{\pi}{4}=2\cos\frac{\pi}{2^2}$

$$\Rightarrow\quad x_2=\sqrt{2+x_1}=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{2^2}\right)}=\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^3}}=2\cos\frac{\pi}{2^3}$$

ឧបមា $x_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ យើងនឹងបង្ហាញថា $x_{n+1}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$

មាន $$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}=\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

$$\Rightarrow\quad x_{n+1}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{x_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}\ ,\ \forall n \ge 1}$

17. ស្វ៊ីត (u_n) ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n \ge 1$ កំណត់ដោយ
$$u_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n^3} + \sqrt[4]{n^3+n^2} + \sqrt[4]{n^3+2n^2+n} + \sqrt[4]{n^3+3n^2+3n+1}}$$
គណនាផលបូក $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{2015}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{2015}$

យើងមាន :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n^3} + \sqrt[4]{n^3+n^2} + \sqrt[4]{n^3+2n^2+n} + \sqrt[4]{n^3+3n^2+3n+1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[4]{n} + \sqrt{n}\sqrt[4]{n+1} + \sqrt{n+1}\sqrt[4]{n} + \sqrt{n+1}\sqrt[4]{n+1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt[4]{n} + \sqrt[4]{n+1}\right) + \sqrt{n+1}\left(\sqrt[4]{n} + \sqrt[4]{n+1}\right)}$$
$$= \frac{1}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt[4]{n} + \sqrt[4]{n+1}\right)}$$
$$= \frac{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}$$
$$= \sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}\ ,\ \forall n \ge 1$$

យើងបាន

$$S = \left(\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{1}\right) + \left(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}\right) + \cdots + \left(\sqrt[4]{2016} - \sqrt[4]{2015}\right)$$

$\Rightarrow \quad S = \sqrt[4]{2016} - 1$

ដូចនេះ $\boxed{S = \sqrt[4]{2016} - 1}$

18. កំណត់ u_n នៃស្វ៊ីតដែល $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2-2\sqrt{1-u_n^2}}}{2} \end{cases}, \forall n \ge 1$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ u_n នៃស្វ៊ីត

យើងមាន $u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2-2\sqrt{1-u_n^2}}}{2}$

ពិនិត្យ $\quad u_1 = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6}$

$$n=1: \quad u_2 = \frac{\sqrt{2-2\sqrt{1-u_1^2}}}{2} = \frac{\sqrt{2-2\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{6}}}}{2} = \sin\frac{\pi}{2\cdot 6}$$

ឧបមា $n=k$: $u_k = \sin\dfrac{\pi}{2^{k-1}\cdot 6}$ នោះយើងត្រូវស្រាយបន្តទៀតថា

$$u_{k+1} = \sin\frac{\pi}{2^k\cdot 6} \quad \text{ចំពោះ } n=k+1$$

មាន
$$u_{k+1} = \frac{\sqrt{2-2\sqrt{1-u_k^2}}}{2} = \frac{\sqrt{2-2\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^{k-1}\cdot 6}}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\pi}{2^{k-1}\cdot 6}\right)}}{2} = \frac{\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{2^k\cdot 6}}}{2} = \sin\frac{\pi}{2^k\cdot 6}$$

ដូចនេះ: $\boxed{u_n = \sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}\cdot 6}\ ,\ n\ge 1}$

18. គេឲ្យស្ទីតចំនួនពិត (x_n) កំណត់ដោយ ទំនាក់ទំនង $\begin{cases} x_0 > 0, x_1 > 0 \\ x_{n+2} = \left(x_{n+1}\cdot x_n^2\right)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ។ កំណត់តួទូទៅ x_n នៃស្ទីត ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តួទូទៅ x_n នៃស្ទីត

យើងមាន $x_{n+2} = \left(x_{n+1}\cdot x_n^2\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(x_{n+2}\right) = \frac{1}{3}\ln\left(x_{n+1}\right) + \frac{2}{3}\ln\left(x_n\right)$$

តាង $y_n = \ln\left(x_n\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

យើងបាន $y_{n+2} = \frac{1}{3}y_{n+1} + \frac{2}{3}y_n \Leftrightarrow 3y_{n+2} = 2y_{n+1} + 2y_n$

ពិនិត្យ $3\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -\frac{2}{3} \end{array}\right.$

យើងបាន $y_n = A + B\left(-\frac{2}{3}\right)^n$, $\left(A, B \in \mathbb{R}\right)$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A + B = y_0 \\ A - \frac{2}{3}B = y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{5}\left(2y_0 + 3y_1\right) \\ B = \frac{3}{5}\left(y_0 - y_1\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y_n = \frac{1}{5}\left(2y_0 + 3y_1\right) + \frac{1}{5}\left(3y_0 - 3y_1\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad x_n = e^{\frac{1}{5}\left[\left(2y_0 + 3y_1\right) + \left(3y_0 - 3y_1\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]} = e^{\frac{1}{5}\ln x_0^2 x_1^3 + \frac{1}{5}\ln\left(\frac{x_0^3}{x_1^3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$\Rightarrow \qquad x_n=\left(x_0^2x_1^3\right)^{\frac{1}{5}}\cdot x_0^{-\frac{3}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n}\cdot x_1^{-\frac{3}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n}=x_0^{\frac{3}{5}+\frac{(-2)^n}{5\cdot 3^{n-1}}}\cdot x_1^{\frac{3}{5}-\frac{(-2)^n}{5\cdot 3^{n-1}}}$$

ដូចនេះ $\boxed{x_n=x_0^{\frac{3}{5}+\frac{(-2)^n}{5\cdot 3^{n-1}}}\cdot x_1^{\frac{3}{5}-\frac{(-2)^n}{5\cdot 3^{n-1}}}\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}}$

19. គណនាផលបូកខាងក្រោមដែលកកំណត់ដោយ

$$A=\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\cdots+\frac{2001}{1999!+2000!+2001!}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $A=\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\cdots+\frac{2001}{1999!+2000!+2001!}$

យើងមាន $\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\frac{k+2}{k!\left(1+k+1+(k+1)(k+2)\right)}$

$$=\frac{k+2}{k!\left[(k+2)(1+k+1)\right]}$$

$$=\frac{1}{k!(k+2)}=\frac{k+1}{(k+2)!}$$

$$=\frac{(k+2)-1}{(k+2)!}=\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}$$

យក $k=\overline{1,1999}$

$$\frac{3}{1!+2!+3!}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}$$

$$\frac{4}{2!+3!+4!}=\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}$$

....

$$\frac{2001}{1999!+2000!+2001!}=\frac{1}{2000!}-\frac{1}{2001!}$$

បូកសមីការអង្គនឹងអង្គយើងបាន $A=\frac{1}{2!}-\frac{1}{2001!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2001!}$

ដូចនេះ $\boxed{A=\frac{1}{2}-\frac{1}{2001!}}$

20. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{2}{4^x+2},\forall x\in\mathbb{R}$ ។ ចូរគណនា ផលបូក $A=f\left(\frac{1}{2001}\right)+f\left(\frac{2}{2001}\right)+\cdots+f\left(\frac{2000}{2001}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $A=f\left(\frac{1}{2001}\right)+f\left(\frac{2}{2001}\right)+\cdots+f\left(\frac{2000}{2001}\right)$

យើងមាន $f(x)=\frac{2}{4^x+2},\forall x\in\mathbb{R}^+$

ប្តូរ $x=1-x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ នោះយើងបាន

$$f(1-x)=\frac{2}{4^{1-x}+2}=\frac{2\cdot 4^x}{2\cdot 2+4^x}=\frac{4^x}{4^x+2}$$

ពិនិត្យ $f(x)+f(1-x)=\frac{2}{4^x+2}+\frac{4^x}{4^x+2}=\frac{4^x+2}{4^x+2}=1$

ពី $x+(1-x)=1\ \Rightarrow\ f(x)+f(1-x)=1$

យើងបាន $A=f\left(\frac{1}{2001}\right)+f\left(\frac{2}{2001}\right)+\cdots+f\left(\frac{2000}{2001}\right)\quad(1)$

ឬ $A=f\left(\frac{2000}{2001}\right)+f\left(\frac{1999}{2001}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2001}\right)\quad(2)$

យក $(1)+(2)$ យើងបាន

$$2A=\left[f\left(\frac{1}{2001}\right)+f\left(\frac{2000}{2001}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{2000}{2001}\right)+f\left(\frac{1}{2001}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad 2A=2000 \quad \Rightarrow \quad A=1000$$

ដូចនេះ $\boxed{A=1000}$

21. គណនា $\binom{2000}{2}+\binom{2000}{5}+\binom{2000}{8}+\cdots+\binom{2000}{2000}$

ដែល $\binom{n}{k}=C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $k,n\in\mathbb{N},n\geq k$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $\binom{2000}{2}+\binom{2000}{5}+\binom{2000}{8}+\cdots+\binom{2000}{2000}$

តាង $f(x)=(1+x)^{2000}=\sum_{k}^{2000}\binom{2000}{k}x^k$

តាង $z=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ នោះ $z^3=1$ និង $z^2+z+1=0$

តាង $S=\binom{2000}{2}+\binom{2000}{5}+\binom{2000}{8}+\cdots+\binom{2000}{2000}$

នោះ $3S=f(1)+zf(z)+z^2f(z^2)$

$$=2^{2000}+z(1+z)^{2000}+z^2(1+z^2)^{2000}$$

$$=2^{2000}+z(-z^2)^{2000}+z^2(-z)^{2000}$$

$$=2^{2000}+z\cdot z^{4000}+z^2\cdot z^{2000}$$

$$=2^{2000}+z^2\cdot z^{3(1333)}+z\cdot z^{2001}$$

$$=2^{2000}(+z^2+z+1)-1=2^{2000}-1$$

$$\Rightarrow \quad S = \binom{2000}{2} + \binom{2000}{5} + \binom{2000}{8} + \cdots + \binom{2000}{2000} = \frac{2^{2000}-1}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{S = \frac{2^{2000}-1}{3}}$

22. គេឲ្យស្វ៊ីត $(a_n)_{n\geq 1}$ ដែលកំណត់ដោយ $a_1 = 2$ និងទំនាក់ទំនង $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ ។ កំណត់ a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ a_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ សមីការសំគាល់ $\lambda = \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}$

ស្រដៀង (**លំហាត់ទី 8**)

យើងបាន $\frac{a_{n+1}+\sqrt{2}}{a_{n+1}-\sqrt{2}} = \frac{a_n^2+\sqrt{2}a_n+2}{a_n^2-\sqrt{2}a_n+2} = \left(\frac{a_n+\sqrt{2}}{a_n-\sqrt{2}}\right)^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}+\sqrt{2}}{a_{n+1}-\sqrt{2}} = \left(\frac{a_1+\sqrt{2}}{a_1-\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}} = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}} = \left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{\sqrt{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}+1\right]}{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}-1} \quad , \; n\geq 1$$

ដូចនេះ $\boxed{a_n = \frac{\sqrt{2}\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}+1\right]}{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2^n}-1}}$

23. គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = \sqrt{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{2} - 1}{1 + (1-\sqrt{2})u_n} \end{cases}$, $n \ge 1$

គណនា u_{2015} ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_{2015}

យើងមាន $\tan^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{4}}{1+\cos\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}-1\right)^2$

$\Rightarrow \quad \tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$ ហើយ $u_1 = \sqrt{3} = \tan\dfrac{\pi}{3}$

- $n=2$: $u_2 = \dfrac{u_1 - \tan\dfrac{\pi}{8}}{1+\tan\dfrac{\pi}{8}u_1} = \dfrac{\tan\dfrac{\pi}{3} - \tan\dfrac{\pi}{8}}{1+\tan\dfrac{\pi}{3}\tan\dfrac{\pi}{8}} = \tan\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{8}\right)$
- $n = k \ge 2$ មាន $u_k = \tan\left[\dfrac{\pi}{3} - (k-1)\dfrac{\pi}{8}\right]$
- យើងនឹងបង្ហាញថាពិតចំពោះ $n = k+1$

មាន $u_{k+1} = \dfrac{u_k - \tan\dfrac{\pi}{8}}{1+\tan\dfrac{\pi}{8}u_k} = \dfrac{\tan\left[\dfrac{\pi}{3}-(k-1)\dfrac{\pi}{8}\right] - \tan\dfrac{\pi}{8}}{1+\tan\left[\dfrac{\pi}{3}-(k-1)\dfrac{\pi}{8}\right]\tan\dfrac{\pi}{8}}$

$\Rightarrow \quad u_{k+1} = \tan\left[\dfrac{\pi}{3} - (k-1)\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{8}\right] = \tan\left[\dfrac{\pi}{3} - k\dfrac{\pi}{8}\right]$

$\Rightarrow \quad u_n = \tan\left[\dfrac{\pi}{3} - (n-1)\dfrac{\pi}{8}\right] \quad \Rightarrow \quad u_{2015} = \tan\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{2014\pi}{8}\right)$

$$\Rightarrow \quad u_{2015} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1007\pi}{4}\right) = -\tan\frac{3017\pi}{12} = -\tan\frac{5\pi}{12}$$

ដូចនេះ $\boxed{u_{2015} = -\tan\frac{5\pi}{12}}$

24. គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយទំនាក់ទំនង

$$u_1 > 0;\ 2011u_n - 2010u_{n-1} = \frac{2012^{2011}}{u_{n-1}^{2010}}\ ,\ n \geq 2 \text{ ។}$$

បង្ហាញថាស្វ៊ីត (u_n) មានតម្លៃតូចបំផុត 2012 ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាស្វ៊ីត (u_n) មានតម្លៃតូចបំផុត 2012

ពី $$2011u_n - 2010u_{n-1} = \frac{2012^{2011}}{u_{n-1}^{2010}}\ ,\ n \geq 2$$

នាំឲ្យ $$u_n = \frac{1}{2011}\left(2010u_{n-1} + \frac{2012^{2011}}{u_{n-1}^{2010}}\right)$$

ចំពោះ $n \geq 2$ នោះ $$u_n = \frac{1}{2011}\left(2010u_{n-1} + \frac{2012^{2011}}{u_{n-1}^{2010}}\right) > 0$$

តាមវិសមភាព *Cauchy* 2011 តួចំពោះ $u_{n-1} > 0$ យើងបាន

$$u_n = \frac{1}{2011}\left(2010u_{n-1} + \frac{2012^{2011}}{u_{n-1}^{2010}}\right)$$

$$= \frac{1}{2011}\left(\underbrace{u_{n-1} + u_{n-1} + \cdots + u_{n-1}}_{2010} + \frac{2012^{2011}}{u_{n-1}^{2010}}\right)$$

$$\geq 2012$$

ដូចនេះ $\boxed{u_n \geq 2012}$

25. ស្វីត (u_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = (1-t)u_n + \dfrac{2011t}{u_n^{\frac{1-t}{t}}} \end{cases}$

ដែល $t \in (0,1), n \in \mathbb{N}^*$ ។ បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វីតចុះ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វីតចុះ

យើងមាន $u_{n+1} = (1-t)u_n + \dfrac{2011t}{u_n^{\frac{1-t}{t}}}$, $u_0 > 0$

ពិនិត្យអនុ. $f(x) = (1-t)x + \dfrac{2011t}{x^{\frac{1-t}{t}}} = (1-t)x + 2011t \cdot x^{-\frac{1-t}{t}}$

យើងបាន $f'(x) = (1-t)\left(1 - 2011t \cdot x^{-\frac{1}{t}}\right)$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើន

ចំពោះ $t \in (0,1)$ បើ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2011^t$

ហើយ $u_n = f(u_{n-1}) \geq 2011^t$ ឬ $u_n \geq 2011^t \Leftrightarrow u_n^{\frac{1}{t}} \geq 2011$

នោះ $u_{n+1} - u_n = (1-t)u_n + \dfrac{2011t}{u_n^{\frac{1-t}{t}}} - u_n = tu_n^{\frac{1-t}{t}}\left(2011 - u_n^{\frac{1}{t}}\right) \leq 0$

ដូចនេះ $\boxed{(u_n) \text{ ជាស្វីតចុះចំពោះ } t \in (0,1), n \in \mathbb{N}^*}$

២៦