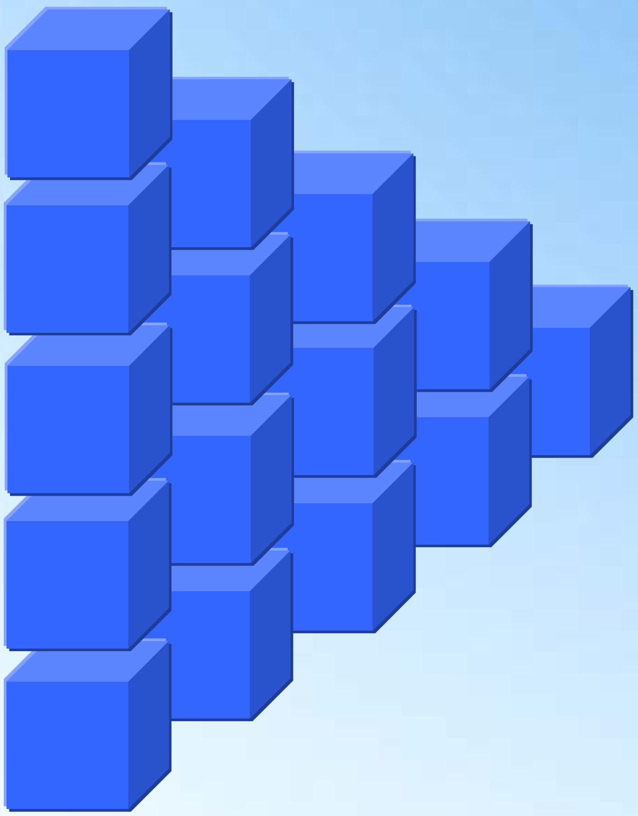
លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ
បរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា និង ពាណិជ្ជកម្ម

អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល លោការីត និង ត្រីកោណមាត្រ

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១១

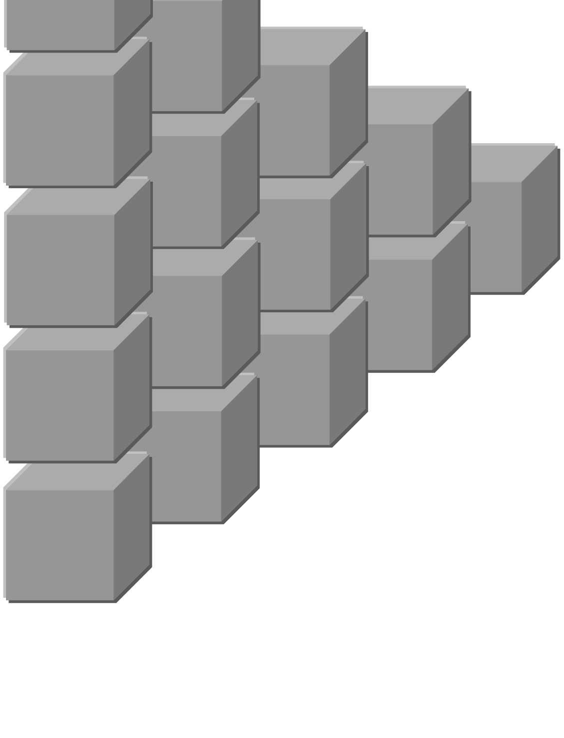


Problems and Solutions

លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ
បរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា និង ពាណិជ្ជកម្ម

អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល លោការីត និង ត្រីកោណមាត្រ

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១១



Problems and Solutions

ស្នាដៃបោះពុម្ពផ្សាយ

សៀវភៅគណិតវិទ្យា ៖

១_ដំណោះស្រាយលំហាត់គណិតវិទ្យា បោះពុម្ព ឆ្នាំ២០០០

(សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងចូលសាកលវិទ្យាល័យ និង អាហារូបករណ៍)

២_ពិភពស៊ីតចំនួនពិត (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១ និង សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា)

៣_ អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១ និង សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា)

៤_ ដំណោះស្រាយគំរូ ចំនួនកុំផ្លិច លីមីត ដេរីវេ (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១២)

៥_ សង្ខេបរូបមន្តគណិតវិទ្យា (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១_១២)

៦_ គំរូសិក្សាអនុគមន៍ (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១_១២)

៧_ កំនែលំហាត់គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០កម្មវិធីសិក្សាថ្មី (ភាគ១ ឆ្នាំ២០០៨)

៨_ **151** គណនាលីមីត (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១_១២)

៩_ គណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោក ភាគ១_ ភាគ២ និង ភាគ៣

(សម្រាប់សិស្សពូកែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១១ និង ១២)

១០_ កំនែលំហាត់គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១១ កម្រិតមូលដ្ឋាន កម្មវិធីសិក្សាថ្មី

(ភាគ១ ឆ្នាំ២០០៩)

១១_ស៊ីតនៃចំនួនពិត សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១ កម្រិតខ្ពស់ និង កម្រិតមូលដ្ឋាន

អ្នកចូលរួមត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក លឹម ឆុន

លោក សែន ពិសិដ្ឋ

លោកស្រី ទុយ វិណោ

លោក ទិត្យ ម៉េង

លោក ព្រឹម សុនិត្យ

លោក ផល ប៊ុនឆាយ

អ្នកត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិគ្គសិរ

ការីកុំព្យូទ័រ

កញ្ញា លី គុណ្ណាកា

អ្នកនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លោក លឹម ផល្លុន និង លោក សែន ពិសិដ្ឋ

អារម្ភកថា

សៀវភៅ អនុគមន៍ អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល លោការីត និង ត្រីកោណមាត្រ សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១ កំរិតមូលដ្ឋាន និង កំរិតខ្ពស់ ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់នៅក្នុងដៃនេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបរៀង និពន្ធ ឡើងក្នុងគោលបំនងទុកជាឯកសារសម្រាប់អ្នកសិក្សាដែលមានបំនងចង់យល់ដឹងអំពីមេរៀនស្ទីតនៃចំនួនពិតនេះឲ្យកាន់តែច្បាស់ និងម្យ៉ាងទៀតដើម្បីជាជំនួយដល់អ្នកសិក្សាដែលមានបំនងត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែផ្នែកគណិតវិទ្យា និង ត្រៀមប្រឡងយកអាហារូបករណ៍នានា ។

នៅក្នុងសៀវភៅនេះយើងខ្ញុំបានខិតខំស្រាវជ្រាវជ្រើសរើសយកលំហាត់យ៉ាងសម្រាំងបំផុតយកមកធ្វើដំណោះស្រាយយ៉ាងក្បោះក្បាយដែលអាចឲ្យលោកអ្នកងាយយល់ឆាប់ចងចាំអំពីសិល្បៈនៃការដោះស្រាយទាំងអស់នេះ ។ ប៉ុន្តែទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ កង្វះខាត និង កំហុសឆ្គងដោយអចេតនាប្រាកដជាកើតមានជាពុំខាន ទាំងបច្ចេកទេស និង អក្ខរាវិរុទ្ធ ។ អាស្រ័យហេតុនេះ យើងខ្ញុំជាអ្នករៀបរៀងរង់ចាំដោយរីករាយជានិច្ចនូវមតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីសំណាក់អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដើម្បីជួយកែលំអ សៀវភៅនេះឲ្យបានកាន់តែសុក្រិត្រភាពថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់នេះយើងខ្ញុំអ្នករៀបរៀងសូមគោរពជូនពរដល់អ្នកសិក្សាទាំងអស់ឲ្យមានសុខភាពមាំមួន និង ទទួលជ័យជំនះគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី ១២ កក្កដា ២០០៩

អ្នកនិពន្ធ លឹម ផល្គុន
Tel : (017) 768 246

ឯកសារយោង

១. សៀវភៅគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១១ កម្រិតមូលដ្ឋាន និង កម្រិតខ្ពស់របស់ក្រសួង
អប់រំ ឆ្នាំ ២០០៩

២. អ៊ិស្ប៉ូណង់ស្យែល និង លោការីត របស់លោក **លឹម ឃុសេង** ឆ្នាំ១៩៩៩

៣. **103 Trigonometry Problems**
(Titu Andreescu and Zuming Feng)

៤. **360 Problems for Mathematical Contests**
(Titu Andreescu and Dorin Andrica)

៥. **Mathematical Olympiad Treasures**
(Titu Andreescu and Boddan Enescu)

៦. **International Mathematical Olympiads 1959-1977**
(Samuel L. Greitzer)

រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្លុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

ផ្នែកប្រធានលំហាត់

រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

ផ្នែកប្រធានលំហាត់

១-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=2^{x^2-3x+4}+2^{2+3x-x^2}$

ក. ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f(x)\geq 16$ ។

ខ. រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $f(x)=20$ ។

២-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2^{x+1}+\sqrt{2}}{2^x+\sqrt{2}}$

ក. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត m និង n បើ $m+n=1$ នោះចូរស្រាយថា

$f(m)+f(n)=3$ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_p=\sum\limits_{k=1}^{p}\left[f\left(\dfrac{k}{p+1}\right)\right]$ ។

៣-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

ក.ចូរស្រាយថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស ។

ខ.ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ចូរស្រាយថា :

$$f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$$

៤-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\left(2+\sqrt{3}\right)^{x}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x}$

ក.ចូរស្រាយថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូ ។

ខ.ចំពោះគ្រប់ចំនួន x ចូរបង្ហាញថា $f(x)\geq 2$ ។

គ.ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=14$ ។

៥-ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $9^{x}-4.3^{x+2}+243=0$

ខ. $4^{x}-9.2^{x+2}+128=0$

គ. $3^{2x+3}-5.6^{x+1}+2^{2x+3}=0$

ឃ. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{x}+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{x}=10$

ង. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x}+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x}=14$

៦-ដោះស្រាយសមីការ :

$$\frac{3^{x^2-x}}{3^x}+\frac{4^{x^2-x}}{4^x}+\frac{5^{x^2-x}}{5^x}=\frac{6^{x^2-x}}{6^x}$$

៧-ដោះស្រាយសមីការ :

$$4^{(x-1)^2}+6=2^{(x-1)^2}+2\sqrt{8^{(x-1)^2}+8}$$

៨-ដោះស្រាយសមីការ :

$$3^{4x-11}+3^{10-x^2}+3^{(x-2)^2}=6x-x^2$$

៩-ដោះស្រាយសមីការ :

$$4^x+(x-14)2^x-8x+48=0$$

១០-ដោះស្រាយសមីការ :

$$9.4^{-x}-3.2^{-x}\left(\frac{43}{4}-7x\right)+\frac{15}{2}-\frac{21x}{4}=0$$

១១-ដោះស្រាយសមីការ :

$$3^{x^2-3x}+\frac{1}{3}=3^{x^2-4x+2}+3^{x-3}$$

១២-ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ :

$$\begin{cases}2^x\ 3^y=\dfrac{1}{72}\\ 3^x\ 4^y=\dfrac{1}{432}\end{cases}$$

១៣-ដោះស្រាយសមីការ :

$$2^{x-2}\,.\,3^{\frac{x-1}{x+1}}=2\sqrt{3}$$

១៤-គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំនត់ដោយ $a_0=1$ និង ទំនាក់ទំនង

កំណើន $a_{n+1}=\log_2\left(4^{a_n}+2^{1+a_n}\right)$

ដែល $n=0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ ...$ ។

ក.គេតាង $b_n=1+2^{a_n}$ ។

បង្ហាញថា $b_{n+1}=b_n{}^2$ គ្រប់ $n\geq 0$ ។

ខ.ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាចូរស្រាយថា $b_n=3^{2^n}$ ។

គ.ទាញរកតួ a_n នៃស្វ៊ីត (a_n) ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១៥-គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំនត់ដោយ $a_0=1$ និងទំនាក់ទំនង

កំណើន $a_{n+1}=\log_3\left(27^{a_n}+3^{1+2a_n}+3^{1+b_n}\right)$

ដែល $n=0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;...$ ។

ក.គេតាង $b_n=1+3^{a_n}$ ។

បង្ហាញថា $b_{n+1}=b_n{}^3$ គ្រប់ $n\geq 0$ ។

ខ.គណនា b_n និង a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១៦-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\lg\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

ក.រកដែនកំនត់នៃអនុគមន៍នេះ ។

ខ.ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $-1<a<1$ និង $-1<b<1$

ចូរបង្ហាញថា $f(a)+f(b)=f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$ ។

១៧-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$u_0=a$ និង $u_{n+1}=(u_n)^{\log_2 u_n}$ ដែល $a>2$ ។

ក.ចូរបង្ហាញថា $u_n>2$ ចំពោះគ្រប់ $n=0;1\ ;\ 2\ ;....$ ។

ខ.គេតាង $V_n = \log_2 u_n$ ។ បង្ហាញថា $V_{n+1} = V_n^{\ 2}$ ។

គ.គេតាង $W_n = \log_2 V_n$ ។

បង្ហាញថា (W_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ឃ.គណនា W_n ; V_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១៨-គេឱ្យ x និង y ជាពីរចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់

$4^x + 4^y = 5.2^{x+y-1}$ ។

ចូរស្រាយថា $x + y = 1 + 2\log_2\left(\frac{2^x + 2^y}{3}\right)$

១៩-ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $(\log_2 x)^2 + \log_2\left(\frac{x}{4}\right) = 0$

ខ. $(\log_2 x)^2 + \log_{0,5}\left(\frac{x^3}{4}\right) = 0$

គ. $\log_2 x = 1 + \log_x 4$

ឃ. $\left(\log_3\left(2^x + 1\right)\right)^2 - 3\log_3\left(2^x + 1\right) + 2 = 0$

ង. $7^{\log_2 x^2} - 8.7^{1+\log_2 x} + 343 = 0$

២០-ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $(\log_2 x)^2 + (x-5)\log_2 x + \ x - 6 = 0$

ខ. $(\log_3 x)^2 + 2(x-5)\log_3 x - 6x + 21 = 0$

គ. $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 + (x+3)\log_{\frac{1}{2}} x + 4x - 4 = 0$

២១-ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $A^{\log_a B} = B^{\log_a A}$

ដែល $a ; A ; B$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន និង ខុសពី 1 ។

ខ.ដោះស្រាយសមីការ $7^{\log_2 x} + x^{\log_2 7} = 686$

២២-ដោះស្រាយសមីការ $\log_2(\log_4 x) + \log_4(\log_2 x) = 2$

២៣-គេឱ្យស្វ៊ីត $u_n = \log_2(1 + 2^{2^n})$ ដែល $n \in IN$

គណនា $S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_k) = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ ។

២៤- គេឱ្យស្វ៊ីត $u_n = \ln\left(2\cos\frac{x}{2^n} - 1\right)$ ដែល $n \in IN$

គណនា $S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_k) = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ ។

២៥- ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} 4^x \cdot 5^y = \dfrac{1}{400} \\ 5^x \cdot 6^y = \dfrac{1}{900} \end{cases}$$

២៦-ដោះស្រាយសមីការ :

$$30\log_x \sqrt[3]{x} + \log_{0,5x} x^2 - \log_{4x} x^3 = 0$$

២៧- ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases} 5\,(\log_y x + \log_x y) = 26 \\ x\,y = 64 \end{cases}$$

២៨-ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\log^2_{6-x}(54 - x^3) - 5\log_{6-x}(54 - x^3) + 6 = 0\,.$$

២៩-ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$1 + \log^2_{(3-x)^3}(9x^2 - x^3) = \frac{1}{3}\log_{\sqrt{3-x}}(9x^2 - x^3)\,.$$

៣០-គេឲ្យអនុគមន៍

$$f(x) = \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{3x+1}{x^2+1}\right).\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{4x^2+4}{3x+1}\right)$$

ក. ដោះស្រាយសមីការ $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{3x+1}{x^2+1}\right) = \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{4x^2+4}{3x+1}\right)$

ខ. កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឲ្យកន្សោម $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{3x+1}{x^2+1}\right)$ និង $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{4x^2+4}{3x+1}\right)$ វិជ្ជមានព្រមគ្នា ។

គ. រកតម្លៃធំបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x)$ លើចន្លោះ $[\,0\,;3\,]$ ។

៣១-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $x\in IR$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f\left(\frac{a+b}{1+a+b}\right)<f\left(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}\right)$

ចំពោះគ្រប់ $a>0,b>0$ ។

៣២-គេឲ្យ $a\geq 1$ និង $b\geq 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\leq 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}$

៣៣-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$u_n=\log_2\left(1+\frac{1}{n}\right).\log_2\left(n^2+n\right)$$

ដែល $n=1\,;\,2\,;\,3\,;\,....$ ។

ក.ចូរបង្ហាញថា $u_n>0$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$

ខ.គណនាផលបូក $S_n=u_1+u_2+u_3+....+u_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n

គ.កំនត់ n ដើម្បីឱ្យ $S_n=100$ ។

៣៤-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^{2+\log_2 x}$ ដែល $x>0$

គេតាង $u_1=f(x)$; $u_2=f\left(f(x)\right)$; $u_3=f\left(f\left(f(x)\right)\right)$

និង $u_n=f_n\left(f\left(....f\left(f(x)\right)....\right)\right)$ ។

ក.គេយក $V_n=1+\log_2 u_n$ ។ ចូរបង្ហាញថា $V_{n+1}={V_n}^2$

ខ.ប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាចូរស្រាយថា $V_n = V_1^{2^n}$ ។

គ.គណនា V_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង x ។

៣៥-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ :

$u_n = \log_{(n+1)}(n+2)$ ដែល $n = 1 ; 2 ; 3 ; ....$ ។

ក.ចូរបង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$

ខ.គណនាផលបូក $S_n = \ln u_1 + \ln u_2 + \ln u_3 + ... + \ln u_n$

ជាអនុគមន៍នៃ n

៣៦-គេឱ្យ $f(x) = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 + 4\sin^2 x}$

ក. សម្រួល $f(x)$

ខ.កំនត់ x ដើម្បីឱ្យ $f(x) = \frac{1}{2}$

៣៧-ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ គេឱ្យ $S_n = \cos^n \frac{\pi}{12} + \sin^n \frac{\pi}{12}$

ក. គណនាតម្លៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

ខ. បង្ហាញថា $4S_{n+2} - 2\sqrt{6}S_{n+1} + S_n = 0$

៣៨-ចូរបង្ហាញថា $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$

(IMO 1963)

៣៩-គណនា $A=(1-4\sin^2\frac{\pi}{5})(1-4\sin^2\frac{3\pi}{5})$

៤០-គេឱ្យ $f(x)=\frac{x^3}{4x^2+4x-1}$ ។ គណនាតម្លៃ $f(\cos\frac{\pi}{7})$ ។

៤១-គេឱ្យ $f_k(x)=\frac{1}{k}(\sin^k x+\cos^k x)$

ដែល $k=1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;...$

ចូរបង្ហាញថា $f_4(x)-f_6(x)=\frac{1}{12}$ ។

៤២-ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n និង ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\neq\frac{k\pi}{2^t}$ ដែល $t=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ ....,\ n$

និង k ជាចំនួនគត់គេមានសមភាព :

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+.....+\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot x-\cot 2^n x$$

(IMO 1966)

៤៣-គេឱ្យ $a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d$ ជាចំនួននៅក្នុងចន្លោះ $[\ 0\ ;\ \pi\ ]$

ដោយដឹងថា

$$\begin{cases}\sin a+7\sin b=4(\sin c+2\sin d)\\ \cos a+7\cos b=4(\cos c+2\cos d)\end{cases}$$

ចូរបង្ហាញថា $2\cos(a-d)=7\cos(b-c)$ ។

៤៤-ចូរសរសេរជាផលគុណកត្តានៃកន្សោម :

$$\sin(x-y)+\sin(y-z)+\sin(z-x)$$

៤៥-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $a\ ;\ b\ ;\ c$ ។

តាង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

ក-ចូរបង្ហាញថា $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ រួចសរសេរទំនាក់ទំនង

ពីរទៀតដែលស្រដៀងគ្នានេះ ។

ខ-ចូរស្រាយថា $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\le\dfrac{1}{8}$

៤៦- គេឱ្យត្រីកោណABC ហើយគេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់

ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយថា $\cos A+\cos B+\cos C=1+\dfrac{r}{R}$

៤៧-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $a\ ;\ b\ ;\ c$ ។

តាង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណហើយ r និង R

រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ក-ចូរបង្ហាញថា $ab+bc+ca=r^2+p^2+4rR$

ខ-ចូរបង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8rR$

៤៨-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $a\ ;\ b\ ;\ c$ ។

តាង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណហើយ r

ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ។ ចូរស្រាយថា :

ក. $(p-a)\tan\dfrac{A}{2}=(p-b)\tan\dfrac{B}{2}=(p-c)\tan\dfrac{C}{2}=r$

ខ. $\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{4R+r}{p}$

គ. $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{p}{r}$

ឃ. $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=\dfrac{p}{r}$

៤៩-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $a\ ;\ b\ ;\ c$ ។

តាង S ជាផ្ទៃក្រលា និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

ក.ចូរបង្ហាញថា $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\dfrac{abc}{2R^2}$

ខ. ចូរបង្ហាញថា $a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C=4S$

៥០-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $a\ ;\ b\ ;\ c$ ។

តាង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

ចូរបង្ហាញថា $a\cot A+b\cot B+c\cot C=2(r+R)$

៥១-បង្ហាញថាក្នុងត្រីកោណ ABC មួយគេមាន

$$\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

៥២-បង្ហាញថាក្នុងត្រីកោណ ABC មួយគេមាន

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geq 4(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2})$$

៥៣-បង្ហាញថាក្នុងត្រីកោណ ABC មួយគេមាន

$$\frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos B}{b^3}+\frac{\cos C}{c^3}\geq\frac{81}{16p^3}$$

៥៤-បង្ហាញថាក្នុងត្រីកោណ ABC មួយដែល $A\neq B\neq C$ គេមាន

ក. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$

ខ. $\dfrac{a^3\sin^3(B-C)+b^3\sin^3(C-A)+c^3\sin^3(A-B)}{\sin(B-C)\sin(C-A)\sin(A-B)}=3abc$

៥៥-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ :

$U_n=\sqrt{2}^n.\sin\dfrac{n\pi}{4}$ ដែល $n\in IN^*$

ក.ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\dfrac{(n+1)\pi}{4}=\cos\dfrac{n\pi}{4}-\sin\dfrac{n\pi}{4}$

ខ. ទាញឱ្យបានថា $U_n=(\sqrt{2})^n\cos\dfrac{n\pi}{4}-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\dfrac{(n+1)\pi}{4}$

គ. គណនាផលបូក $S_n=U_1+U_2+U_3+........+U_n$

ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៥៦-គេឱ្យ x ជាចំនួនពិតដែល $60x^2-71x+21<0$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sin\left(\dfrac{\pi}{3x-1}\right)<0$ ។

៥៧-គេឱ្យ $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)}\geq 1+\sqrt{2}$$

៥៨-គេឱ្យត្រីកោណ ABC ។

១-ចំពោះគ្រប់ $x,y\in]0,\pi[$ ចូរស្រាយថា :

$\sin x+\sin y\leq 2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$ ។

២-ចូរស្រាយថា $\sin A+\sin B+\sin C\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ។

៣-ទាញបង្ហាញថា :

ក. $\sin A.\sin B.\sin C\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

ខ. $\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

៥៩-គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយ ”

$$\begin{cases} Z_0=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ Z_{n+1}=\dfrac{1}{2}(\ Z_n+|\ Z_n\ |\ )\ ;\ n\in IN \end{cases}$$

($|Z_n|$ ជាម៉ូឌុលនៃ Z_n) ។

សន្មតថា $Z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i.\sin\theta_n)$, $\forall n \in IN$

ដែល $\rho_n > 0$, $\rho_n ; \theta_n \in IR$ ។

ក-រកទំនាក់ទំនងរវាង θ_n និង θ_{n+1} ហើយ ρ_n និង ρ_{n+1} ។

ខ-រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (θ_n) រួចគណនា θ_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ-ចូរបង្ហាញថា $\rho_n = \rho_0 \cos\theta_0 \cos\frac{\theta_1}{2} \cos\frac{\theta_2}{2} \ldots\ldots \cos\frac{\theta_{n-1}}{2}$

រួចបញ្ចាក់ ρ_n អនុគមន៍នៃ n ។

៦០-គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ n ដោយ៖

$U_0 = 1$ និង $\forall n \in IN : U_{n+1} = U_n \cos a + \sin a$

ដែល $0 < a < \frac{\pi}{2}$ ។

ក. តាង $V_n = U_n - \cot\frac{a}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។

ខ.គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(V_0 + V_1 + \ldots. + V_n)$ និង $\lim_{n\to+\infty} U_n$

៦១-គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n)កំនត់ដោយ ៖

$U_0 = 0 \;\; ; \; U_1 = 1$ និង $\forall n \in IN : U_{n+2} = 2U_{n+1}\cos a - U_n$

ដែល $a \in IR$។

ក. តាង $Z_n = U_{n+1} - (\cos a - i\sin a)\, U_n \;\; , \forall n \in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា $Z_{n+1} = (\cos a + i\sin a)\, Z_n$ រួចទាញរក

Z_nជាអនុគមន៍ n និង a ។

ខ. ទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{a \to 0} U_n$ ។

៦២-ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$4\sin(x + \frac{\pi}{4})\cos(x + \frac{\pi}{12}) = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$$

៦៣-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ :

$$U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ និង } U_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - U_n{}^2}}{2}} \;\; , \forall n \in IN$$

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៦៤- គេឱ្យ

$$\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{2^2}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2}} = 2\cos\frac{\pi}{2^3}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^4}$$

– – – – – – – – – – – – – – –

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅ និង ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនោះផង

៦៥-យក a; b ;c ជាប្រវែងជ្រុង និង A,B,C ជារង្វាស់មុំទាំងបី

នៃត្រីកោណ ABC មួយដែល S ជាក្រលាផ្ទៃត្រីកោណនោះ ។

ស្រាយថា $CotA + CotB + CotC = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$

៦៦- គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង

$BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

៦៧-ដោះស្រាយសមីការ

ក. $2(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(2\sin^3 x) = 0$

ខ. $\left(\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos x\right)^2 + 3\log_{\sqrt{2}} \cos x + 2 = 0$

៦៨-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} (2\sin x)^{\ln 2} = (\sqrt{2}\sin y)^{\ln\sqrt{2}} \\ (\sqrt{2})^{\ln\sin x} = 2^{\ln\sin y} \end{cases}$$

ដែល $0 < x < \frac{\pi}{2}$ និង $0 < y < \frac{\pi}{2}$ ។

៦៩-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{3}{2} \\ 2^{\sin x} + 2^{\sin y} = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

៧០-គេឲ្យ $0 < a < \frac{\pi}{2}$ និង $0 < b < \frac{\pi}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\left(\frac{\sin^2 a}{\sin b}\right)^2 + \left(\frac{\cos^2 a}{\cos b}\right)^2 = 1$

លុះត្រាតែ $a = b$ ។

៧១-គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ

$$\sin^2 B + \sin^2 C = 1 + \sin B \sin C \cos A$$ ។

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង ។

៧២-គេឲ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង **a , b , c** ។

កំនត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ **ABC** បើគេដឹងថា ៖

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

៧៣-ក្នុងត្រីកោណ **ABC** មួយចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq 4\sqrt{\frac{R}{r}}$$

ដែល **r** និង **R** ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

៧៤-ក. ចូរស្រាយថា $\frac{\cos 2a}{\sin^2 2a}=\frac{1}{2\sin^2 a}-\frac{1}{\sin^2 2a}$

ខ.គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2^k}}{\sin^2\frac{x}{2^k}}\right)$ ។

រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្លុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

ផ្នែកជំពោះក្រោយ

លំហាត់ទី១

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=2^{x^2-3x+4}+2^{2+3x-x^2}$

ក. ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f(x)\geq 16$ ។

ខ. រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $f(x)=20$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f(x)\geq 16$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b គេមាន $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0$

គេបាន $a-2\sqrt{ab}+b\geq 0$ ឬ $a+b\geq 2\sqrt{ab}$

ដោយយក $a=2^{x^2-3x+4}$ និង $b=2^{2+3x-x^2}$

គេបាន $f(x)\geq 2\sqrt{2^{x^2-3x+4}.2^{2+3x-x^2}}$

$$f(x)\geq 2\sqrt{2^6}=16$$

ដូចនេះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f(x)\geq 16$ ។

ខ. រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $f(x)=20$

គេបាន $2^{x^2-3x+4}+2^{2+3x-x^2}=20$

$$2^{x^2-3x+4}+2^{6-(x^2-3x+4)}-20=0$$

$$2^{x^2-3x+4}+\frac{64}{2^{x^2-3x+4}}-20=0 \qquad (i)$$

តាង $t = 2^{x^2-3x+4} > 0$ សមីការ (i) អាចសរសេរ :

$t + \frac{64}{t} - 20 = 0$ ឬ $t^2 - 20t + 64 = 0$

$\Delta' = 100 - 64 = 36 > 0$

គេទាញឫស $t_1 = 10 - 6 = 4$; $t_2 = 10 + 6 = 16$

-ចំពោះ $t = 4$ គេបាន $2^{x^2-3x+4} = 4$

នាំឱ្យ $x^2 - 3x + 4 = 2$ ឬ $x^2 - 3x + 2 = 0$

ដោយ $a + b + c = 0$ នោះ $x_1 = 1$ ឬ $x_2 = 2$ ។

-ចំពោះ $t = 16$ គេបាន $2^{x^2-3x+4} = 16$

នាំឱ្យ $x^2 - 3x + 4 = 4$ ឬ $x(x-3) = 0$

គេទាញឫស $x_1 = 0$ ឬ $x_2 = 3$ ។

ដូចនេះគេបាន $x \in \{ 0 , 1 , 2 , 3 \}$ ។

លំហាត់ទី២

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2^{x+1}+\sqrt{2}}{2^{x}+\sqrt{2}}$

ក. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត m និង n បើ $m+n=1$ នោះចូរស្រាយថា ៖

$f(m)+f(n)=3$ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_p=\sum_{k=1}^{p}\left[f\left(\dfrac{k}{p+1}\right)\right]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $f(m)+f(n)=3$ បើ $m+n=1$

គេមាន $f(m)=\dfrac{2^{m+1}+\sqrt{2}}{2^{m}+\sqrt{2}}$ និង $f(n)=\dfrac{2^{n+1}+\sqrt{2}}{2^{n}+\sqrt{2}}$

$$f(m)+f(n)=\frac{2^{m+1}+\sqrt{2}}{2^{m}+\sqrt{2}}+\frac{2^{n+1}+\sqrt{2}}{2^{n}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2^{m+n+1}+2^{m+\frac{3}{2}}+2^{n+\frac{1}{2}}+2+2^{m+n+1}+2^{m+\frac{1}{2}}+2^{n+\frac{3}{2}}+2}{2^{m+n}+2^{m+\frac{1}{2}}+2^{n+\frac{1}{2}}+2}$$

$$=\frac{12+3.2^{m+\frac{1}{2}}+3.2^{n+\frac{1}{2}}}{4+2^{m+\frac{1}{2}}+2^{n+\frac{1}{2}}}=\frac{3(4+2^{m+\frac{1}{2}}+2^{n+\frac{1}{2}})}{4+2^{m+\frac{1}{2}}+2^{n+\frac{1}{2}}}=3$$

ដូចនេះ បើ $m+n=1$ នោះ $f(m)+f(n)=3$ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_p = \sum_{k=1}^{p}\left[f\left(\frac{k}{p+1}\right)\right]$

គេមាន $S_n = f\left(\frac{1}{p+1}\right)+f\left(\frac{2}{p+1}\right)+......+f\left(\frac{p}{p+1}\right)\quad (i)$

ឬ $\quad S_n = f\left(\frac{p}{p+1}\right)+f\left(\frac{p-1}{p+1}\right)+....+f\left(\frac{1}{p+1}\right)\quad (ii)$

បូកសមីការ (i) និង (ii) គេបាន :

$2S_n = 3+3+....+3 = 3p$ នាំឱ្យ $S_n = \frac{3p}{2}$

ពីព្រោះ $f\left(\frac{1}{p+1}\right)+f\left(\frac{p}{p+1}\right)=3$

$f\left(\frac{2}{p+1}\right)+f\left(\frac{p-1}{p+1}\right)=3$

$f\left(\frac{3}{p+1}\right)+f\left(\frac{p-2}{p+1}\right)=3$

$f\left(\frac{p}{p+1}\right)+f\left(\frac{1}{p+1}\right)=3$

ដូចនេះ $S_p = \sum_{k=1}^{p}\left[f\left(\frac{k}{p+1}\right)\right] = \frac{3p}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

ក.ចូរស្រាយថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស ។

ខ.ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ចូរស្រាយថា :

$$f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$$

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស

គេមាន $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេមាន $e^{x}+e^{-x}>0$

ដូចនេះអនុគមន៍ f មានដែនកំនត់ $D_f=IR$

ចំពោះគ្រប់ $x\in D_f$ គេបាន $-x\in D_f$

គេបាន $f(-x)+f(x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}+\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=0$

គេទាញ $f(-x)=-f(x)$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស ។

ខ. ស្រាយថា $f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$

គេមាន $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

គេបាន $f(a+b)=\dfrac{e^{2(a+b)}-1}{e^{2(a+b)}+1}=\dfrac{e^{2a+2b}-1}{e^{2a+2b}+1}$

$f(a)=\dfrac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}$ និង $f(b)=\dfrac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1}$

គេមាន $f(a)+f(b)=\dfrac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}+\dfrac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1}$

$$f(a)+f(b)=\frac{2(e^{2a+2b}-1)}{(e^{2a}+1)(e^{2b}+1)} \quad (i)$$

ហើយ $1+f(a)f(b)=1+\dfrac{(e^{2a}-1)(e^{2b}-1)}{(e^{2a}+1)(e^{2b}+1)}$

$$1+f(a)f(b)=\frac{2(e^{2a+2b}+1)}{(e^{2a}+1)(e^{2b}+1)} \quad (ii)$$

ចែកសមភាព (i) និង (ii) អង្គនឹងអង្គគេបាន :

$$\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}=\frac{e^{2a+2b}-1}{e^{2a+2b}+1}=f(a+b)$$

ដូចនេះ $f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x$

ក.ចូរស្រាយថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូ ។

ខ.ចំពោះគ្រប់ចំនួន x ចូរបង្ហាញថា $f(x)\geq 2$ ។

គ.ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=14$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូ

$f(x)=\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x$

ដែនកំនត់ $D_f=IR$

ចំពោះ $x\in D_f$ នោះ $-x\in D_f$

គេបាន $f(-x)=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-x}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{-x}$

ដោយ $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$

នោះ $f(-x)=\left(\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^{-x}+\left(\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^{-x}$

$$f(-x)=\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=f(x)$$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូ ។

ខ.ចំពោះគ្រប់ចំនួន x បង្ហាញថា $f(x)\geq 2$:

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន :

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x\geq 2\sqrt{(2+\sqrt{3})^x(2-\sqrt{3})^x}$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x\geq 2$$

ដូចនេះ $f(x)\geq 2$ ចំពោះគ្រប់ x ។

គ.ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=14$

គេបាន $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=14$

តាង $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x>0$ នោះ $\left(2-\sqrt{3}\right)^x=\frac{1}{t}$

សមីការអាចសរសេរ $t+\frac{1}{t}=14$ ឬ $t^2-14t+1=0$

$\Delta'=49-1=48=(4\sqrt{3})^2$

គេទាញឬស $t_1=7+4\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$

ហើយ $t_2=7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2}$

-ចំពោះ $t_1=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$

គេបាន $\left(2+\sqrt{3}\right)^x=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ នាំឱ្យ $x=2$ ។

-ចំពោះ $t_1=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2}$

គេបាន $\left(2+\sqrt{3}\right)^x=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2}$ នាំឱ្យ $x=-2$ ។

លំហាត់ទី៥

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $9^x - 4.3^{x+2} + 243 = 0$

ខ. $4^x - 9.2^{x+2} + 128 = 0$

គ. $3^{2x+3} - 5.6^{x+1} + 2^{2x+3} = 0$

ឃ. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x = 10$

ង. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 14$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $9^x - 4.3^{x+2} + 243 = 0$

$(3)^{2x} - 36(3)^x + 243 = 0$ តាង $t = (3)^x > 0$

$t^2 - 36t + 243 = 0$; $\Delta' = 324 - 243 = 81$

គេទាញឫស $t_1 = 18 - 9 = 9$; $t_2 = 18 + 9 = 27$

-ចំពោះ $t_1 = 9$ គេបាន $3^x = 9$ នាំឱ្យ $x = 2$

-ចំពោះ $t_2 = 27$ គេបាន $3^x = 27$ នាំឱ្យ $x = 3$

ដូចនេះ $x_1 = 2$; $x_2 = 3$ ។

ខ. $4^x - 9.2^{x+2} + 128 = 0$

$(2)^{2x} - 36(2)^x + 128 = 0$ តាង $t = 2^x > 0$

$t^2 - 36t + 128 = 0$; $\Delta' = 324 - 128 = 196$

គេទាញឬស $t_1 = 18 - 14 = 2$; $t_2 = 18 + 14 = 32$

-ចំពោះ $t_1 = 2$ នោះ $2^x = 2$ នាំឱ្យ $x = 1$

-ចំពោះ $t_2 = 32$ នោះ $2^x = 32$ នាំឱ្យ $x = 5$

ដូចនេះ $x_1 = 1$; $x_2 = 5$ ។

គ. $3^{2x+3} - 5.6^{x+1} + 2^{2x+3} = 0$

$27\,(9)^x - 30(6)^x + 8\,(4)^x = 0$

ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $4^x \neq 0$ គេបាន :

$$27\left(\frac{9}{4}\right)^x - 30\left(\frac{6}{4}\right)^x + 8 = 0$$

$$27\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 30\left(\frac{3}{2}\right)^x + 8 = 0$$

តាង $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x > 0$ នោះសមីការអាចសរសេរ :

$27t^2 - 30t + 8 = 0$; $\Delta' = 225 - 216 = 9$

គេទាញ $t_1 = \frac{15-3}{27} = \frac{4}{9}$; $t_2 = \frac{15+3}{27} = \frac{2}{3}$

-ចំពោះ $t_1=\frac{4}{9}$ គេបាន $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{4}{9}$ នាំឱ្យ $x=-2$

-ចំពោះ $t_2=\frac{2}{3}$ គេបាន $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{2}{3}$ នាំឱ្យ $x=-1$

ដូចនេះ $x_1=-2$; $x_2=-1$ ។

ឃ. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x=10$

តាង $t=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x>0$ នោះ $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x=\frac{1}{t}$

សមីការអាចសរសេរ $t+\frac{1}{t}=10$ ឬ $t^2-10t+1=0$

$\Delta'=25-1=24=\left(2\sqrt{6}\right)^2>0$

គេទាញឫស $\left[\begin{array}{l} t_1=5+2\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 \\ t_2=5-2\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-2} \end{array}\right.$

-ចំពោះ $t=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

គេបាន $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$ នាំឱ្យ $x=2$

-ចំពោះ $t=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-2}$

គេបាន $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-2}$ នាំឱ្យ $x=-2$

ដូចនេះ $x_1=2$; $x_2=-2$ ។

ង. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=14$

តាង $t=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x>0$ នោះ $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=\frac{1}{t}$

សមីការអាចសរសេរ $t+\frac{1}{t}=14$ ឬ $t^2-14t+1=0$

$\Delta'=49-1=48=(4\sqrt{3})^2$

គេទាញឫស $t_1=7+4\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$

ហើយ $t_2=7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2}$

-ចំពោះ $t_1=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$

គេបាន $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ នាំឱ្យ $x=4$ ។

-ចំពោះ $t_1=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2}$

គេបាន $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2}$ នាំឱ្យ $x=-4$ ។

ដូចនេះ $x_1=4$; $x_2=-4$ ។

លំហាត់ទី៦

ដោះស្រាយសមីការ :

$$\frac{3^{x^2-x}}{3^x}+\frac{4^{x^2-x}}{4^x}+\frac{5^{x^2-x}}{5^x}=\frac{6^{x^2-x}}{6^x}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ :

$$\frac{3^{x^2-x}}{3^x}+\frac{4^{x^2-x}}{4^x}+\frac{5^{x^2-x}}{5^x}=\frac{6^{x^2-x}}{6^x}$$

$$3^{x^2-2x}+4^{x^2-2x}+5^{x^2-2x}=6^{x^2-2x}$$

តាង $t=x^2-2x=(x-1)^2-1\geq -1$

សមីការអាចសរសេរ :

$$3^t+4^t+5^t=6^t \quad (i)$$

-បើ $t=3$ នោះសមីការ (i) អាចសរសេរ :

$$3^3+4^3+5^3=6^3$$

$$27+64+125=216$$

$216=216$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $t=3$ ជាឫសរបស់សមីការ (i) ។

-បើ $-1 \le t < 3$ គេមាន :

$$\left(\frac{3}{6}\right)^t > \left(\frac{3}{6}\right)^3 \ ; \ \left(\frac{4}{6}\right)^t > \left(\frac{4}{6}\right)^3 ; \left(\frac{5}{6}\right)^t > \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

គេបាន $\left(\frac{3}{6}\right)^t + \left(\frac{4}{6}\right)^t + \left(\frac{5}{6}\right)^t > \left(\frac{3}{6}\right)^3 + \left(\frac{4}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^3$

$$\frac{3^t + 4^t + 5^t}{6^t} > 1$$

នាំឱ្យ $3^t + 4^t + 5^t > 6^t$

ដូចនេះសមីការ (i) គ្មានឬសចំពោះ $-1 \le t < 3$ ។

-បើ $t > 3$ គេមាន :

$$\left(\frac{3}{6}\right)^t < \left(\frac{3}{6}\right)^3 \ ; \ \left(\frac{4}{6}\right)^t < \left(\frac{4}{6}\right)^3 ; \left(\frac{5}{6}\right)^t < \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

គេបាន $\left(\frac{3}{6}\right)^t + \left(\frac{4}{6}\right)^t + \left(\frac{5}{6}\right)^t < \left(\frac{3}{6}\right)^3 + \left(\frac{4}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^3$

$$\frac{3^t + 4^t + 5^t}{6^t} < 1$$

នាំឱ្យ $3^t + 4^t + 5^t < 6^t$

ដូចនេះសមីការ (i) គ្មានឫសចំពោះ $t > 3$ ។

សរុបមកសមីការ (i) មានឫសទោល $t = 3$

ចំពោះ $t = 3$ គេបាន $x^2 - 2x = 3$

ឬ $x^2 - 2x - 3 = 0$ នាំឱ្យ $x_1 = -1$; $x_2 = 3$

ដូចនេះ $x_1 = -1$; $x_2 = 3$ ។

លំហាត់ទី៧

ដោះស្រាយសមីការ :

$4^{(x-1)^2}+6=2^{(x-1)^2}+2\sqrt{8^{(x-1)^2}+8}$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ :

$4^{(x-1)^2}+6=2^{(x-1)^2}+2\sqrt{8^{(x-1)^2}+8}$

តាង $X=2^{(x-1)^2}>0$ នោះសមីការអាចសរសេរ :

$X^2+6=X+2\sqrt{X^3+8}$

$X^2-X+6=\sqrt{(X+2)(X^2-2X+4)}\ (i)$

តាង $u=X+2$ និង $v=x^2-2x+2$

សមីការ (ii) អាចសរសេរ :

$u+v=2\sqrt{uv}$ ឬ $\left(\sqrt{u}-\sqrt{v}\right)^2=0$

នាំឱ្យ $u=v$ ឬ $X+2=X^2-2X+2$

ឬ $X^2-3X+2=0$ គេទាញឬស $X_1=1$; $X_2=2$ ។

-ចំពោះ $X_1=1$ នោះ $2^{(x-1)^2}=1$ នាំឱ្យ $x=1$ ។

-ចំពោះ $X_2=2$ នោះ $2^{(x-1)^2}=2$ សមមូល $(x-1)^2=1$

គេទាញ $x_1=0$ ឬ $x_2=2$ ។ដូចនេះ $x\in\{\ 0\ ;1\ ;2\ \}$ ។

លំហាត់ទី៨

ដោះស្រាយសមីការ :

$3^{4x-11}+3^{10-x^2}+3^{(x-2)^2}=6x-x^2$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ :

$3^{4x-11}+3^{10-x^2}+3^{(x-2)^2}=6x-x^2$

គេមាន $6x-x^2=9-(9-6x+x^2)=9-(3-x)^2$

ដោយ $(3-x)^2\geq 0$ នោះគេបាន $6x-x^2\leq 9\quad (i)$

ម្យ៉ាងទៀតតាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$3^{4x-11}+3^{10-x^2}+3^{(x-2)^2}\geq 3\sqrt[3]{3^{4x-11}.3^{10-x^2}.3^{(x-2)^2}}$

$3^{4x-11}+3^{10-x^2}+3^{(x-2)^2}\geq 3\sqrt[3]{3^{4x-11+10-x^2+(x-2)^2}}$

$3^{4x-11}+3^{10-x^2}+3^{(x-2)^2}\geq 9\quad (ii)$

តាម (i) និង (ii) សមីការសមមូល :

$$\begin{cases}6x-x^2=9 & (1)\\ 3^{4x-11}+3^{10-x^2}+3^{(x-2)^2}=9 & (2)\end{cases}$$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបានឫស $x=3$ ។

លំហាត់ទី៩

ដោះស្រាយសមីការ :

$$4^x+(x-14)2^x-8x+48=0$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ :

$$4^x+(x-14)2^x-8x+48=0$$

តាង $2^x=t>0$ សមីការអាចសរសេរ :

$$t^2+(x-14)t-8x+48=0$$

$$\Delta=(x-14)^2-4(1)(-8x+48)$$
$$=x^2-28x+196+32x-192$$
$$=x^2+4x+4$$
$$=(x+2)^2$$

គេទាញឫស $t_1=\dfrac{-(x-14)+\sqrt{(x+2)^2}}{2}=8$

ឬ $t_2=\dfrac{-(x-14)-\sqrt{(x+2)^2}}{2}=-x+6$

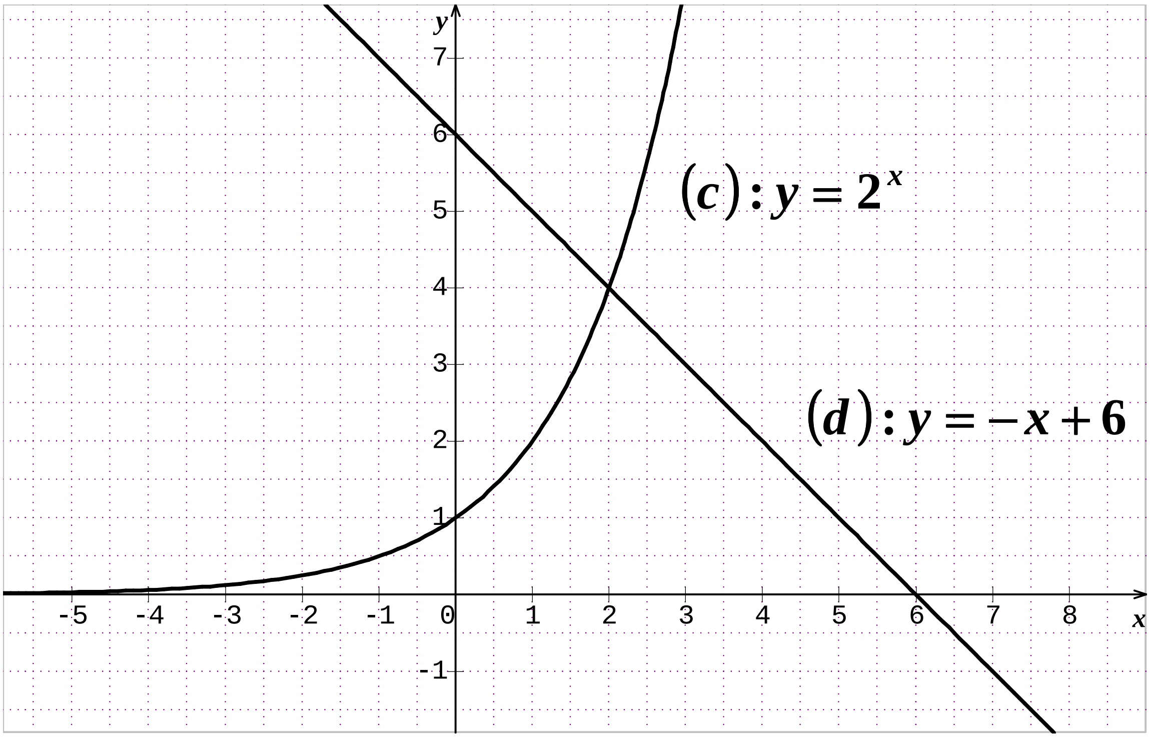
-ចំពោះ $t=8$ គេបាន $2^x=8=2^3$

គេទាញឫស $x=3$ ។

-ចំពោះ $t=-x+6$ គេបាន $2^x=-x+6$

ជាសមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង $(c):\ y=2^x$

ជាមួយនឹងបន្ទាត់ $(d):\ y=-x+6$ ។



តាមក្រាហ្វិកយើងឃើញថាខ្សែកោង (c) និងបន្ទាត់ (d) កាត់គ្នាត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីស $x=2$ ដែលជាឬសរបស់សមីការ ។

ដូចនេះសមីការមានឬសពីរគឺ $x_1=3$; $x_2=2$ ។

លំហាត់ទី១០

ដោះស្រាយសមីការ :

$$9.4^{-x}-3.2^{-x}\left(\frac{43}{4}-7x\right)+\frac{15}{2}-\frac{21x}{4}=0$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ :

$$9.4^{-x+1}-3.2^{-x+1}\left(\frac{43}{4}-7x\right)+\frac{15}{2}-\frac{21x}{4}=0$$

តាង $t=3.2^{-x+1}>0$ សមីការអាចសរសេរ :

$$t^2-\left(\frac{43}{4}-7x\right)t+\frac{15}{2}-\frac{21x}{4}=0$$

$$\Delta=\left(\frac{43}{4}-7x\right)^2-4\left(\frac{15}{2}-\frac{21x}{4}\right)$$

$$=\frac{1849}{16}-\frac{301x}{2}+49x^2-30+21x$$

$$=49x^2-\frac{259x}{2}+\frac{1369}{16}=\left(7x-\frac{37}{4}\right)^2$$

គេទាញឬស $\left[\begin{array}{l} t_1=\dfrac{3}{4} \\ t_2=-7x+10 \end{array}\right.$

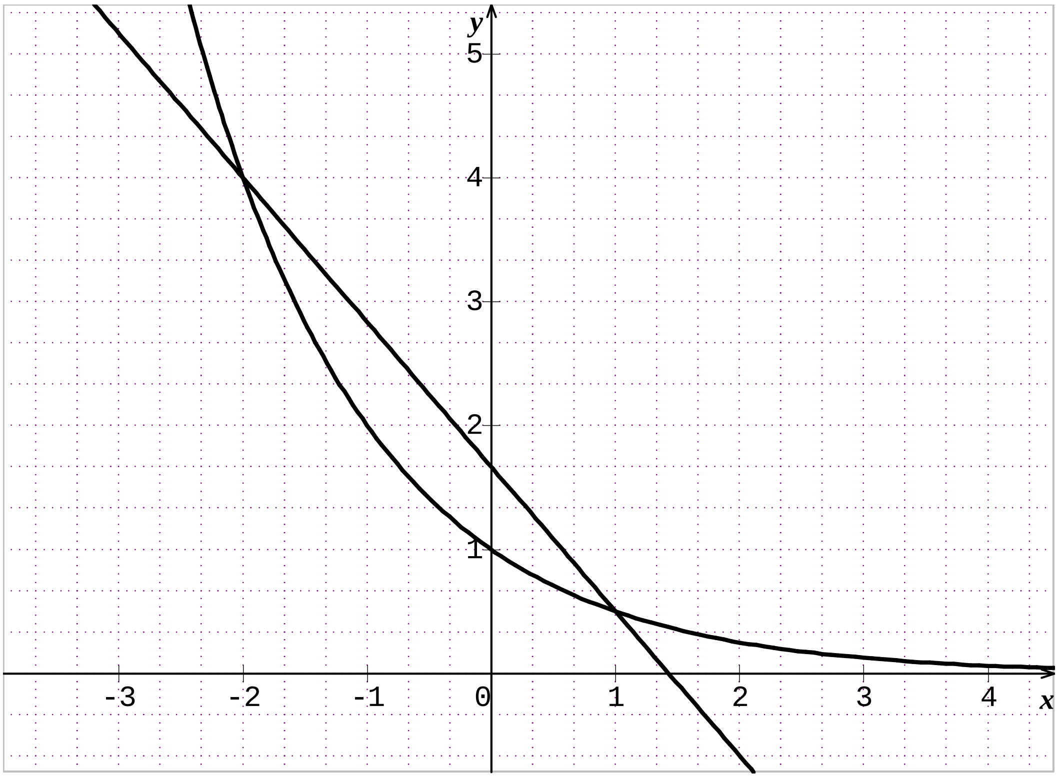
-ចំពោះ $t=\frac{3}{4}$ គេបាន $3.2^{-x+1}=\frac{3}{4}$ ឬ $2^{-x+1}=2^{-2}$

នាំឱ្យ $x=3$ ។

-ចំពោះ $t=-7x+10$ គេបាន $3.2^{-x+1}=-7x+10$

ឬ $2^{-x}=-\frac{7x}{6}+\frac{5}{3}$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង

ខ្សែកោង $(c): y=2^{-x}$ នឹងបន្ទាត់ $(d): y=-\frac{7x}{6}+\frac{5}{3}$ ។



តាមក្រាហ្វិកយើងឃើញថាខ្សែកោង (c) និងបន្ទាត់ (d) កាត់គ្នា

ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីស $x=-2; x=1$ ដែលជាឫសរបស់សមីការ

ដូចនេះសមីការមានឫសបី គឺ $x_1=-2$; $x_2=1$; $x_3=3$ ។

លំហាត់ទី១១

ដោះស្រាយសមីការ :

$$3^{x^2-3x}+\frac{1}{3}=3^{x^2-4x+2}+3^{x-3}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ :

$$3^{x^2-3x}+\frac{1}{3}=3^{x^2-4x+2}+3^{x-3}$$

សមីការអាចសរសេរ :

$$3^{x^2-3x}-3^{x^2-4x+2}-3^{x-3}+\frac{1}{3}=0$$

$$3^{x^2-4x}\left(3^x-9\right)-\frac{1}{27}\left(3^x-9\right)=0$$

$$\left(3^x-9\right)\left(3^{x^2-4x}-\frac{1}{27}\right)=0$$

គេបាន $3^x-9=0$ នាំឱ្យ $x=2$

$3^{x^2-2x}-\frac{1}{27}=0$ នាំឱ្យ $x^2-4x+3=0$

មានឫស $x_1=1;\ x_2=3$ ។

ដូចនេះសមីការមានឫស $x\in\{\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ]$ ។

លំហាត់ទី១២

ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ :

$$\begin{cases} 2^x\ 3^y = \dfrac{1}{72} \\ 3^x\ 4^y = \dfrac{1}{432} \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ :

$$\begin{cases} 2^x\ 3^y = \dfrac{1}{72} \quad (i) \\ 3^x\ 4^y = \dfrac{1}{432} \quad (ii) \end{cases}$$

សមីការ (i) អាចសរសេរ :

$$\log_2(2^x.3^y) = \log\left(\frac{1}{72}\right)$$

$$x + y\log_2 3 = \log_2\left(2^{-3}.3^{-2}\right)$$

$$x + y\ \log_2 3 = -3 - 2\log_2 3 \quad (1)$$

សមីការ (ii) អាចសរសេរ :

$$\log_3\left(3^x\ 4^y\right) = \log_3(432)$$

$$x + y\log_3 4 = \log_3\left(3^{-3}.2^{-4}\right)$$

$x+2y\log_3 2=-3-4\log_3 2 \quad (2)$

ដកសមីការ (1) នឹង (2) អង្គ នឹង អង្គគេបាន :

$y\log_2 3-2y\log_3 2=4\log_3 2-2\log_2 3$

$y(\log_2 3-2\log_3 2)=2(2\log_3 2-\log_2 3)$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\log_2 3-2\log_3 2$

គេទាញបាន $y=-2$ ។

យកតម្លៃ $y=-2$ ជំនួសក្នុង (2) គេបាន :

$x-4\log_3 2=-3-4\log_3 2$ នាំឱ្យ $x=-2$

ដូចនេះ $x=-2$; $y=-3$ ។

លំហាត់ទី១៣

ដោះស្រាយសមីការ :

$$2^{x-2}\,.\,3^{\frac{x-1}{x+1}} = 2\sqrt{3}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ :

$$2^{x-2}\,.\,3^{\frac{x-1}{x+1}} = 2\sqrt{3}$$

សមីការមានន័យកាលណា $x+1 \neq 0$ ឬ $x \neq -1$

សមីការអាចសរសេរ :

$$\log_2\left(2^{x-2}\,.\,3^{\frac{x-1}{x+1}}\right) = \log_2\left(2\sqrt{3}\right)$$

$$x-2+\frac{x-1}{x+1}\log_2 3 = 1+\frac{1}{2}\log_2 3$$

$$(x-3)+\left(\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{2}\right)\log_2 3 = 0$$

$$(x-3)(1+\frac{1}{x+1}\log_2 3) = 0$$

គេទាញឫស $x_1 = 3$; $x_2 = -1-\log_2 3$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំនត់ដោយ :

$a_0 = 1$ និង ទំនាក់ទំនងកំណើន $a_{n+1} = \log_2\left(4^{a_n} + 2^{1+a_n}\right)$

ដែល $n = 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ; \dots$ ។

ក.គេតាង $b_n = 1 + 2^{a_n}$ ។ បង្ហាញថា $b_{n+1} = {b_n}^2$ គ្រប់ $n \geq 0$ ។

ខ.ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាចូរស្រាយថា $b_n = 3^{2^n}$ ។

គ.ទាញរកតួ a_n នៃស្វ៊ីត (a_n) ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $b_{n+1} = {b_n}^2$ គ្រប់ $n \geq 0$

គេមាន $b_n = 1 + 2^{a_n}$

គេបាន $b_{n+1} = 1 + 2^{a_{n+1}}$ ដោយ $a_{n+1} = \log_2\left(4^{a_n} + 2^{1+a_n}\right)$

$$b_{n+1} = 1 + 2^{\log_2\left(4^{a_n} + 2^{1+a_n}\right)}$$

$$= 1 + 4^{a_n} + 2^{1+a_n}$$

$$= \left(2^{a_n}\right)^2 + 2\left(2^{a_n}\right) + 1$$

$$= \left(2^{a_n} + 1\right)^2 = {b_n}^2$$

ដូចនេះ $b_{n+1} = {b_n}^2$ ។

ខ.ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាស្រាយថា $b_n = 3^{2^n}$

ចំពោះ $n = 0$ គេបាន $b_0 = 1 + 2^{a_0} = 1 + 2 = 3$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $b_k = 3^{2^k}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n = k + 1$ គឺ $b_{k+1} = 3^{2^{k+1}}$ ពិត

យើងមាន $b_{k+1} = b_k^{\ 2}$ ដោយ $b_k = 3^{2^k}$

នោះ $b_{k+1} = \left(3^{2^k}\right)^2 = 3^{2^{k+1}}$ ពិត

ដូចនេះ $b_n = 3^{2^n}$ ។

គ.ទាញរកតួ a_n នៃស្វ៊ីត (a_n) ជាអនុគមន៍នៃ n :

យើងមាន $b_n = 1 + 2^{a_n}$

គេទាញ $a_n = \log_2 (b_n - 1)$ ដោយ $b_n = 3^{2^n}$

ដូចនេះ $a_n = \log_2 \left(3^{2^n} - 1\right)$ ។

លំហាត់ទី១៥

គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំនត់ដោយ $a_0 = 1$

និងទំនាក់ទំនងកំណើន $a_{n+1} = \log_3\left(27^{a_n} + 3^{1+2a_n} + 3^{1+b_n}\right)$

ដែល $n = 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ldots$ ។

ក.គេតាង $b_n = 1 + 3^{a_n}$ ។

បង្ហាញថា $b_{n+1} = b_n{}^3$ គ្រប់ $n \geq 0$ ។

ខ.គណនា b_n និង a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $b_{n+1} = b_n{}^3$ គ្រប់ $n \geq 0$

យើងមាន $b_n = 1 + 3^{a_n}$

នាំឱ្យ $b_{n+1} = 1 + 3^{a_{n+1}}$

ដោយ $a_{n+1} = \log_3\left(27^{a_n} + 3^{1+2a_n} + 3^{1+b_n}\right)$

គេបាន $b_{n+1} = 1 + 27^{a_n} + 3^{1+2a_n} + 3^{1+b_n}$

$$b_{n+1} = \left(3^{a_n}\right)^3 + 3\left(3^{a_n}\right)^2 + 3\left(3^{a_n}\right) + 1$$

$$b_{n+1} = \left(3^{a_n} + 1\right)^3 = b_n{}^3$$

ដូចនេះ $b_{n+1} = b_n{}^3$ គ្រប់ $n \geq 0$ ។

ខ.គណនា b_n និង a_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេមាន $b_{n+1} = {b_n}^3$ គ្រប់ $n \geq 0$

គេបាន $\ln(b_{n+1}) = 3\ln(b_n)$ តាង $c_n = \ln(b_n)$

នោះ $c_{n+1} = 3c_n$ នាំឱ្យ (c_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 3$

និងតួ $c_0 = \ln(b_0) = \ln(1 + 3^{a_0}) = \ln 4$ ។

តាមរូបមន្ត $c_n = c_0 \times q^n = 3^n \ln 4$

គេទាញ $\ln(b_n) = 3^n \ln 4$ នាំឱ្យ $b_n = 4^{3^n}$

ហើយដោយ $b_n = 1 + 3^{a_n}$

នាំឱ្យ $a_n = \log_3(b_n - 1) = \log_3\left(4^{3^n} - 1\right)$

ដូចនេះ $b_n = 4^{3^n}$ និង $a_n = \log_3\left(4^{3^n} - 1\right)$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\lg\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

ក.រកដែនកំនត់នៃអនុគមន៍នេះ ។

ខ.ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $-1<a<1$ និង $-1<b<1$ ចូរបង្ហាញថា

$$f(a)+f(b)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$$

ដំណោះស្រាយ

ក.រកដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ f

$$f(x)=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

អនុគមន៍មានន័យកាលណា $\begin{cases} \dfrac{1-x}{1+x}>0 \\ x\neq -1 \end{cases}$

ដូចនេះ $D_f=]-1\,;1[$ ។

ខ. បង្ហាញថា :

$$f(a)+f(b)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$$

យើងមាន $f(a)=\lg\left(\frac{1-a}{1+a}\right)$ និង $f(b)=\lg\left(\frac{1-b}{1+b}\right)$

យើងបាន $f(a)+f(b)=\lg\left(\frac{1-a}{1+a}\right)+\lg\left(\frac{1-b}{1+b}\right)$

$$=\lg\left(\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}\right)$$

$$=\lg\left(\frac{1-(a+b)+ab}{1+(a+b)+ab}\right)$$

$$f(a)+f(b)=\lg\left(\frac{1-(a+b)+ab}{1+(a+b)+ab}\right) \qquad (i)$$

ម្យ៉ាងទៀត $f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)=\lg\left(\frac{1-\frac{a+b}{1+ab}}{1+\frac{a+b}{1+ab}}\right)$

$$f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)=\lg\left(\frac{1-(a+b)+ab}{1+(a+b)+ab}\right) \quad (ii)$$

តាម (i) និង (ii) គេទាញ $f(a)+f(b)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ :

$u_0 = a$ និង $u_{n+1} = (u_n)^{\log_2 u_n}$ ដែល $a > 2$ ។

ក.ចូរបង្ហាញថា $u_n > 2$ ចំពោះគ្រប់ $n = 0;1\ ;\ 2\ ;\ ....$ ។

ខ.គេតាង $V_n = \log_2 u_n$ ។ បង្ហាញថា $V_{n+1} = V_n{}^2$ ។

គ.គេតាង $W_n = \log_2 V_n$ ។ បង្ហាញថា (W_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ឃ.គណនា $W_n\ ;\ V_n$ និង u_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា $u_n > 2$ ចំពោះគ្រប់ $n = 0;1\ ;\ 2\ ;\ ....$

ចំពោះ $n = 0$ គេបាន $u_0 = a > 2$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $u_k > 2$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n = k+1$ គឺ $u_{k+1} > 2$ ពិត

យើងមាន $u_{k+1} = (u_k)^{\log_2 u_k}$

ដោយ $u_k > 2$ នោះ $\log_2 u_k > 1$

នាំឱ្យ $u_{k+1} = (u_k)^{\log_2 u_k} > u_k > 2$ ពិត

ដូចនេះ $u_n > 2$ ចំពោះគ្រប់ $n = 0;1\ ;\ 2\ ;\ ....$ ។

ខ. បង្ហាញថា $V_{n+1} = V_n{}^2$

យើងមាន $V_n = \log_2 u_n$ នាំឱ្យ $V_{n+1} = \log_2 u_{n+1}$

ដោយ $u_{n+1} = (u_n)^{\log_2 u_n}$ គេបាន :

$V_{n+1} = \log_2\left[(u_n)^{\log_2 u_n}\right]$

$= \log_2 u_n .\log_2 u_n = V_n .V_n = V_n{}^2$

ដូចនេះ $V_{n+1} = V_n{}^2$ ។

គ. បង្ហាញថា (W_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ :

គេមាន $W_n = \log_2 V_n$ នាំឱ្យ $W_{n+1} = \log_2 V_{n+1}$

ដោយ $V_{n+1} = V_n{}^2$ គេបាន :

$W_{n+1} = \log_2\left(V_n{}^2\right) = 2\log_2 V_n$

ដូចនេះ (W_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = 2$ ។

ឃ.គណនា W_n ; V_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

តាមរូបមន្ត $W_n = W_0 \times q^n$

ដោយ $W_0 = \log_2 V_0 = \log_2(\log_2 u_0) = \log_2(\log_2 a)$

ដូចនេះ $W_n = 2^n \log_2(\log_2 a)$ ។

ហើយ $V_n = 2^{W_n} = (\log_2 a)^{2^n}$ និង $u_n = 2^{V_n} = 2^{(\log_2 a)^{2^n}}$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឱ្យ x និង y ជាពីរចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ $4^x + 4^y = 5.2^{x+y-1}$ ។

ចូរស្រាយថា $x+y = 1 + 2\log_2\left(\frac{2^x+2^y}{3}\right)$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $x+y = 1 + \log_2\left(\frac{2^x+2^y}{3}\right)$

យើងមាន $4^x + 4^y = 5.2^{x+y-1}$

$$(2^x+2^y)^2 - 2(2^x)(2^y) = 5.2^{x+y-1}$$

$$(2^x+2^y)^2 = 5.2^{x+y-1} + 2^{x+y+1}$$

$$(2^x+2^y)^2 = 2^{x+y-1}(5+2^2)$$

$$(2^x+2^y)^2 = 9.2^{x+y-1}$$

$$\left(\frac{2^x+2^y}{3}\right)^2 = 2^{x+y-1}$$

គេទាញ $x+y-1 = \log_2\left(\frac{2^x+2^y}{3}\right)^2 = 2\log_2\left(\frac{2^x+2^y}{3}\right)$

ដូចនេះ $x+y = 1 + 2\log_2\left(\frac{2^x+2^y}{3}\right)$ ។

លំហាត់ទី១៩

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $(\log_2 x)^2 + \log_2\left(\frac{x}{4}\right) = 0$

ខ. $(\log_2 x)^2 + \log_{0,5}\left(\frac{x^3}{4}\right) = 0$

គ. $\log_2 x = 1 + \log_x 4$

ឃ. $\left(\log_3(2^x + 1)\right)^2 - 3\log_3(2^x + 1) + 2 = 0$

ង. $7^{\log_2 x^2} - 8.7^{1+\log_2 x} + 343 = 0$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $(\log_2 x)^2 + \log_2\left(\frac{x}{4}\right) = 0$ លក្ខខណ្ឌ $x > 0$

សមីការអាចសរសេរ : $(\log_2 x)^2 + \log_2 x - \log_2 4 = 0$

$$(\log_2 x)^2 + \log_2 x - 2 = 0$$

តាង $t = \log_2 x$ គេបាន $t^2 + t - 2 = 0$

ដោយ $a + b + c = 0$ គេទាញឫស $t_1 = 1$; $t_2 = -2$

-ចំពោះ $t=1$ គេបាន $\log_2 x=1$ នាំឱ្យ $x=2$

-ចំពោះ $t=-2$ គេបាន $\log_2 x=-2$ នាំឱ្យ $x=\frac{1}{4}$

ដូចនេះ $x_1=2\ ;\ x_2=\frac{1}{4}$ ។

ខ. $(\log_2 x)^2+\log_{0,5}\left(\frac{x^3}{4}\right)=0$ លក្ខខណ្ឌ $x>0$

សមីការអាចសរសេរ :

$(\log_2 x)^2+\log_{\frac{1}{2}} x^3-\log_{\frac{1}{2}} 4=0$

$(\log_2 x)^2-3\log_2 x+2=0$

តាង $t=\log_2 x$ សមីការអាចសរសេរ :

$t^2-3t+2=0$ នាំឱ្យ $t_1=1$ ឬ $t_2=2$

-ចំពោះ $t=1$ គេបាន $\log_2 x=1$ នាំឱ្យ $x=2$

-ចំពោះ $t=2$ គេបាន $\log_2 x=2$ នាំឱ្យ $x=4$

ដូចនេះ $x_1=2\ ;\ x_2=4$ ។

គ. $\log_2 x=1+\log_x 4$ លក្ខខណ្ឌ $x>0$ និង $x\neq 1$

សមីការអាចសរសេរ $\log_2 x=1+2\log_x 2$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $\log_2 x\neq 0$ គេបាន :

$(\log_2 x)^2 = \log_2 x + 2$

$(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 = 0$

តាង $t = \log_2 x$ គេបាន $t^2 - t - 2 = 0$

គេទាញឫស $t_1 = -1$; $t_2 = 2$

-ចំពោះ $t = -1$ គេបាន $\log_2 x = -1$ នាំឱ្យ $x = \frac{1}{2}$

-ចំពោះ $t = 2$ គេបាន $\log_2 x = 2$ នាំឱ្យ $x = 4$

ដូចនេះ $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 4$ ។

ឃ. $\left(\log_3\left(2^x + 1\right)\right)^2 - 3\log_3\left(2^x + 1\right) + 2 = 0$

តាង $t = \log_3\left(2^x + 1\right)$ សមីការអាចសរសេរ :

$t^2 - 3t + 2 = 0$ នាំឱ្យ $t_1 = 1$ ឬ $t_2 = 2$

-ចំពោះ $t_1 = 1$ គេបាន $\log_3\left(2^x + 1\right) = 1$

នាំឱ្យ $2^x + 1 = 3$ ឬ $2^x = 2$ នាំឱ្យ $x = 1$ ។

-ចំពោះ $t_2 = 2$ គេបាន $\log_3\left(2^x + 1\right) = 2$

នាំឱ្យ $2^x + 1 = 9$ ឬ $2^x = 8$ នាំឱ្យ $x = 3$ ។

ដូចនេះ $x = 1$; $x = 3$ ។

ង. $7^{\log_2 x^2} - 8.7^{1+\log_2 x} + 343 = 0$

សមីការមានន័យកាលណា $x > 0$ ។

សមីការអាចសរសេរ :

$7^{2\log_2 x} - 56.7^{\log_2 x} + 343 = 0$

តាង $t = \log_2 x$ សមីការក្លាយជា :

$t^2 - 56t + 343 = 0$; $\Delta' = 784 - 343 = 441$

គេទាញឫស $t_1 = 28 - 21 = 7$; $t_2 = 28 + 21 = 49$

-ចំពោះ $t = 7$ គេបាន $7^{\log_2 x} = 7$ ឬ $\log_2 x = 1$

នាំឱ្យ $x = 1$ ។

-ចំពោះ $t = 49$ គេបាន $7^{\log_2 x} = 49$ ឬ $\log_2 x = 2$

នាំឱ្យ $x = 4$ ។

ដូចនេះ $x_1 = 1$; $x_2 = 4$ ។

លំហាត់ទី២០

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $(\log_2 x)^2+(x-5)\log_2 x+\ \ x-6=0$

ខ. $(\log_3 x)^2+2(x-5)\log_3 x-6x+21=0$

គ. $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2+(x+3)\log_{\frac{1}{2}} x+4x-4=0$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម :

ក. $(\log_2 x)^2+(x-5)\log_2 x+\ \ x-6=0$

តាង $t=\log_2 x$ ដែល $x>0$ ។ សមីការក្លាយជា :

$t^2+(x-5)t+x-6=0$

គណនា $\Delta=(x-5)^2-4(x-6)$

$=x^2-10x+25-4x+24$

$=x^2-14x+49=(x-7)^2$

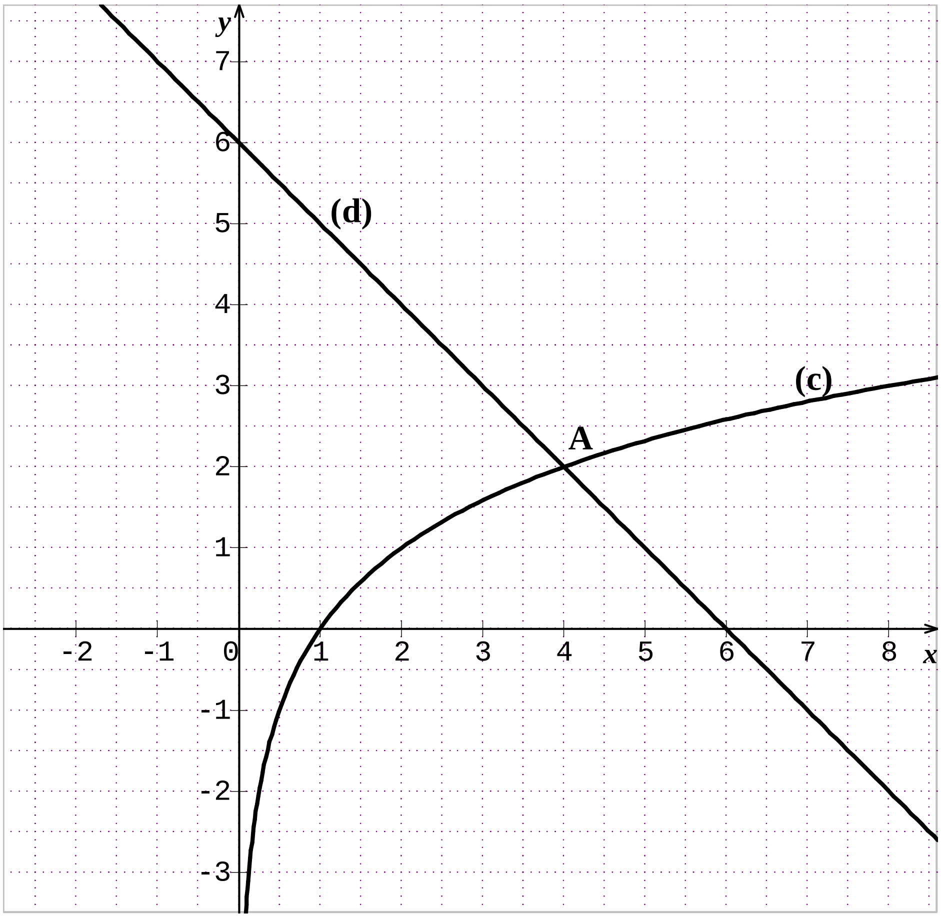
គេទាញឫស $\left[\begin{array}{l} t_1=\dfrac{-x+5+x-7}{2}=-1 \\ t_2=\dfrac{-x+5-x+7}{2}=-x+6 \end{array}\right.$

-ចំពោះ $t_1 = -1$ គេបាន $\log_2 x = -1$ នាំឱ្យ $x = \frac{1}{2}$

-ចំពោះ $t_2 = -x + 6$ គេបាន $\log_2 x = -x + 6$

ជាសមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង $(c): y = \log_2 x$

ជាមួយនឹងបន្ទាត់ $(d): y = -x + 6$ ។



តាមក្រាហ្វិកយើងឃើញថា (c) កាត់ (d) ត្រង់ចំនុច A

មានអាប់ស៊ីស $x = 4$ ដែលជាឫសរបស់សមីការ ។

ដូចនេះ $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 4$ ។

ខ. $(\log_3 x)^2 + 2(x-5)\log_3 x - 6x + 21 = 0$

តាង $t = \log_3 x$ ដែល $x > 0$ ។ សមីការអាចសរសេរ :

$t^2 + 2(x-5)t - 6x + 21 = 0$

$\Delta' = (x-5)^2 - (-6x+21) = (x-2)^2$

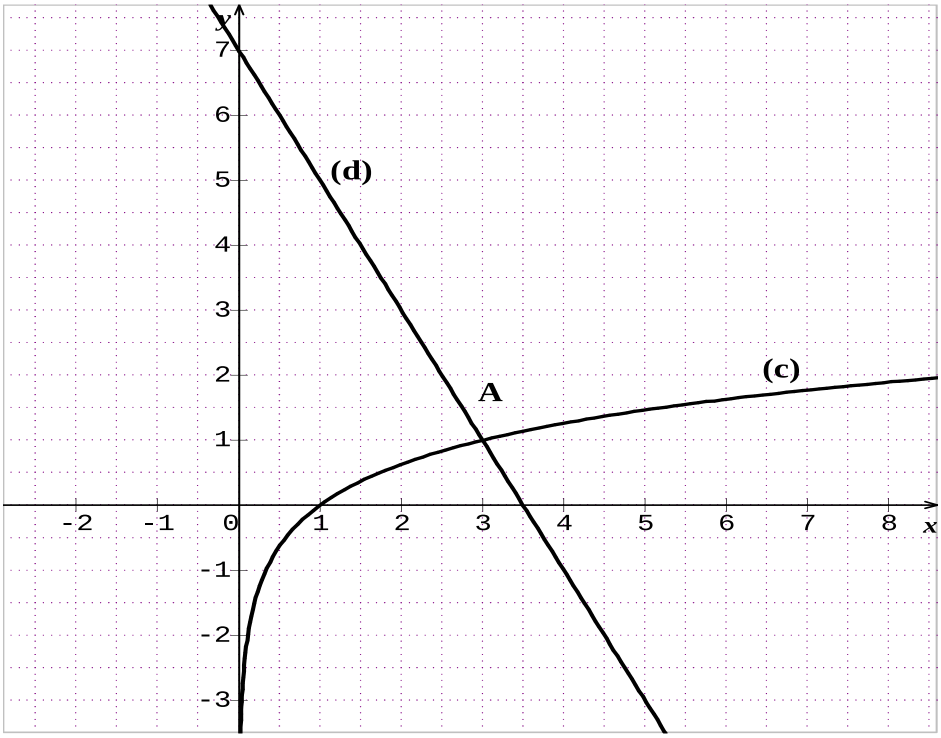
គេទាញឬស $t_1 = 3$; $t_2 = -2x+7$

-ចំពោះ $t_1 = 3$ គេបាន $\log_3 x = 3$ នាំឱ្យ $x = 27$

-ចំពោះ $t_2 = -2x+7$ គេបាន $\log_3 x = -2x+7$

ជាសមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង $(c): y = \log_3 x$

ជាមួយនឹងបន្ទាត់ $(d): y = -2x+7$ ។



តាមក្រាហ្វិកយើងឃើញថា (c) កាត់ (d) ត្រង់ចំនុច A

មានអាប់ស៊ីស $x = 3$ ដែលជាឬសរបស់សមីការ ។

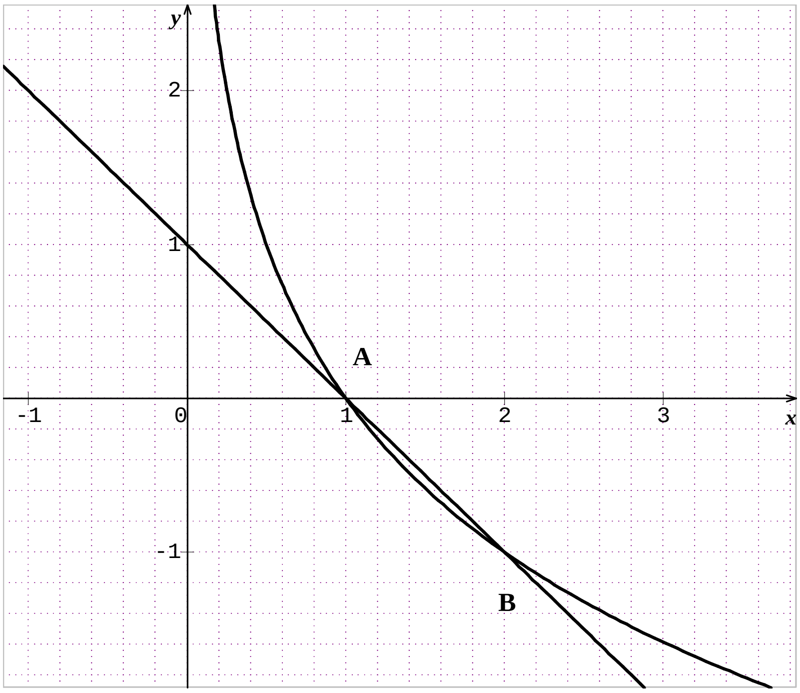
គ. $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 + (x+3)\log_{\frac{1}{2}} x + 4x - 4 = 0$

តាង $t = \log_{\frac{1}{2}} x$ នោះ $t^2 + (x+3)t + 4x - 4 = 0$

មានឬស $t_1 = -4$; $t_2 = -x+1$ ។

-ចំពោះ $t_1 = -4$ នោះ $\log_{\frac{1}{2}} x = -4$ នាំឱ្យ $x = 16$

-ចំពោះ $t_2 = -x+1$ នោះ $\log_{\frac{1}{2}} x = -x+1$



តាមក្រាហ្វិកគេទាញឬស $x = 1$; $x = 2$ ។

លំហាត់ទី២១

ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $A^{\log_a B} = B^{\log_a A}$

ដែល $a; A ; B$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន និង ខុសពី 1 ។

ខ.ដោះស្រាយសមីការ $7^{\log_2 x} + x^{\log_2 7} = 686$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A^{\log_a B} = B^{\log_a A}$

តាង $t = A^{\log_a B}$ (i)

គេបាន $\log_A t = \log_a B$ ដោយ $\log_A t = \dfrac{\log_B t}{\log_B A}$

$$\frac{\log_B t}{\log_B A} = \log_a B$$

$$\log_B t = \log_a B . \log_B A$$

$$\log_B t = \log_a A$$

គេទាញ $t = B^{\log_a A}$ (ii)

តាម (i) និង (ii) គេបាន $A^{\log_a B} = B^{\log_a A}$ ។

ខ.ដោះស្រាយសមីការ

$$7^{\log_2 x} + x^{\log_2 7} = 686$$

តាមរូបមន្តខាងលើគេបាន $x^{\log_2 7} = 7^{\log_2 x}$

សមីការអាចសរសេរ :

$$7^{\log_2 x} + 7^{\log_2 x} = 686$$

$$2.7^{\log_2 x} = 686$$

$$7^{\log_2 x} = 343$$

$$7^{\log_2 x} = 7^3$$

$$\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 2^3 = 8$$

ដូចនេះ $x = 8$ ជាឫសរបស់សមីការ ។

លំហាត់ទី២២

ដោះស្រាយសមីការ $\log_2(\log_4 x)+\log_4(\log_2 x)=2$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ :

សមីការមានន័យកាលណា $\begin{cases}\log_4 x>0\\ \log_2 x>0\\ x>0\end{cases}$ ឬ $x>1$

សមីការអាចសរសេរ :

$$\log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)+\frac{1}{2}\log_2(\log_2 x)=2$$

$$\log_2\left(\frac{1}{2}\right)+\log_2(\log_2 x)+\frac{1}{2}\log_2(\log_2 x)=2$$

$$-1+\frac{3}{2}\log_2(\log_2 x)=2$$

$$3\log_2(\log_2 x)=6$$

$$\log_2(\log_2 x)=2$$

$$\log_2 x=4$$

$$x=16$$

ដូចនេះ $x=16$ ជាឫសរបស់សមីការ ។

លំហាត់ទី២៣

គេឱ្យស្វ៊ីត $u_n = \log_2(1+2^{2^n})$ ដែល $n \in IN$

គណនា $S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_k) = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_k) = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

គេមាន $u_n = \log_2(1+2^{2^n})$

$$= \log_2\left(\frac{2^{2^{n+1}}-1}{2^{2^n}-1}\right)$$

គេបាន $S_n = \sum_{k=0}^{n}\log_2\left(\frac{2^{2^{k+1}}-1}{2^{2^k}-1}\right)$

$$= \log_2\left(\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{2^{2^{k+1}}-1}{2^{2^k}-1}\right)\right)$$

$$= \log_2\left(\frac{3}{1}\times\frac{15}{3}\times\frac{127}{15}\times....\times\frac{2^{2^{n+1}}-1}{2^{2^n}-1}\right)$$

$$= \log_2\left(2^{2^{n+1}}-1\right)$$

ដូចនេះ $S_n = \log_2(2^{2^{n+1}}-1)$ ។

លំហាត់ទី២៤

គេឱ្យស្វ៊ីត $u_n = \ln\left(2\cos\frac{x}{2^n} - 1\right)$ ដែល $n \in IN$

គណនា $S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_k) = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា S_n :

គេមាន $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ គេបាន

$2\cos 2a + 1 = 4\cos^2 a - 1 = (2\cos a - 1)(2\cos a + 1)$

គេទាញ $2\cos a - 1 = \frac{2\cos a + 1}{2\cos a + 1}$ ដោយយក $a = \frac{x}{2^n}$

គេបាន $u_n = \ln\left(2\cos\frac{x}{2^n} - 1\right) = \ln\left(\frac{2\cos\frac{2x}{2^n} + 1}{2\cos\frac{x}{2^n} + 1}\right)$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=0}^{n}\ln\left(\frac{2\cos\frac{2x}{2^k} + 1}{2\cos\frac{x}{2^k} + 1}\right) = \ln\left(\frac{2\cos 2x + 1}{2\cos\frac{x}{2^n} + 1}\right)$

ដូចនេះ $S_n = \ln(2\cos 2x + 1) - \ln\left(2\cos\frac{x}{2^n} + 1\right)$ ។

លំហាត់ទី២៥

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} 4^x . 5^y = \dfrac{1}{400} \\ 5^x . 6^y = \dfrac{1}{900} \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases} 4^x . 5^y = \dfrac{1}{400} \\ 5^x . 6^y = \dfrac{1}{900} \end{cases}$$

យើងមាន $\ln(4^x.5^y) = \ln(\frac{1}{400})$

ឬ $x\ln 4 + y\ln 5 = -2\ln 4 - 2\ln 5 \quad (1)$

ហើយ $\ln(5^x.6^y) = \ln(\frac{1}{900})$

ឬ $x\ln 5 + y\ln 6 = -2\ln 6 - 2\ln 5 \quad (2)$

តាម $(1) \& (2)$ គេបានប្រព័ន្ធ :

$$\begin{cases} x\ln 4 + y\ln 5 = -2\ln 4 - 2\ln 5 & (-\ln 6) \\ x\ln 5 + y\ln 6 = -2\ln 6 - 2\ln 5 & (\ln 5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x\ln 4.\ln 6 - y\ln 5.\ln 6 = 2\ln 4.\ln 6 + 2\ln 5.\ln 6 & (3) \\ x\ln^2 5 + y\ln 5.\ln 6 = -2\ln 6.\ln 5 - 2\ln^2 5 & (4) \end{cases}$$

បូកសមីការ (3) & (4) គេបាន :

$(\ln^2 5 - \ln 4.\ln 6)\,x = 2(\ln 4.\ln 6 - \ln^2 5)$ នាំឱ្យ $x = -2$

តាមសមីការ $4^x.5^y = \frac{1}{400}$ គេទាញ $4^{-2}.5^y = \frac{1}{400}$

នាំឱ្យគេទាញ $y = -2$ ។

ដូចនេះប្រព័ន្ធសមីការមានគូចម្លើយ $x = -2\ ,\ y = -2$ ។

លំហាត់ទី២៦

ដោះស្រាយសមីការ :

$$30\log_x \sqrt[3]{x} + \log_{0,5x} x^2 - \log_{4x} x^3 = 0$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ :

$$30\log_x \sqrt[3]{x} + \log_{0,5x} x^2 - \log_{4x} x^3 = 0$$

លក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 0.5x \neq 1 \\ 4x \neq 1 \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq 2 \\ x \neq \dfrac{1}{4} \end{cases}$

សមីការខាងលើអាចសរសេរ :

$$30\frac{\ln\sqrt[3]{x}}{\ln x} + \frac{\ln x^2}{\ln(0,5x)} - \frac{\ln x^3}{\ln(4x)} = 0$$

$$10 + \frac{2\ln x}{\ln x - \ln 2} - \frac{3\ln x}{\ln x + \ln 4} = 0$$

តាង $t = \ln x$

យើងបាន $10 + \dfrac{2t}{t - \ln 2} - \dfrac{3t}{t + \ln 4} = 0$

$$10(t-\ln 2)(t+2\ln 2)+2t(t+2\ln 2)-3t(t-\ln 2)=0$$

$$10t^2+10t\ln 2-2\ln^2 2+2t^2+4t\ln 2-3t^2+3t\ln 2=0$$

$$9t^2+17t\ln 2-2\ln^2 2=0$$

$$\Delta=289\ln^2 2+72\ln^2 2=361.\ln^2 2$$

គេទាញឫស ៖

$$t_1=\frac{-17\ln 2+19\ln 2}{9}=\frac{2}{9}\ln 2$$

$$t_2=\frac{-17\ln 2-19\ln 2}{9}=-4\ln 2$$

ដោយ $t=\ln x$ គេទាញ $\left[\begin{array}{l}\ln x=\frac{2}{9}\ln 2\\ \ln x=-4\ln 2\end{array}\right.$

នាំឱ្យ $x=\sqrt[9]{4}$; $x=\frac{1}{16}$

ដូចនេះសមីការមានឫស $x_1=\sqrt[9]{4}$, $x_2=\frac{1}{16}$ ។

លំហាត់ទី២៧

ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ :

$$\begin{cases} 5\,(\log_y x + \log_x y) = 26 \\ x\,y = 64 \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ

$$\begin{cases} 5\,(\log_y x + \log_x y) = 26 & (1) \\ x\,y = 64 & (2) \end{cases}$$

លក្ខខ័ណ្ឌ $\begin{cases} x > 0\ ,\ y > 0 \\ x \neq 1,\ y \neq 1 \end{cases}$

សមីការ (1) អាចសរសេរ $\log_y x + \dfrac{1}{\log_y x} = \dfrac{26}{5}$

ឬ $(\log_y x)^2 - \dfrac{26}{5}.\log_y x + 1 = 0$ តាង $t = \log_y x$

គេបាន $t^2 - \dfrac{26}{5}t + 1 = 0$, $\Delta' = \dfrac{169}{25} - 1 = \dfrac{144}{25}$

នាំឱ្យ $t_1 = \dfrac{13}{5} - \dfrac{12}{5} = \dfrac{1}{5}$, $t_2 = \dfrac{13}{5} + \dfrac{12}{5} = 5$

- ចំពោះ $t = \dfrac{1}{5}$ គេបាន $\log_y x = \dfrac{1}{5}$

នាំឱ្យ $x = y^{\frac{1}{5}}$ (3)

យក (3) ជួសក្នុង (2) គេបាន $y.y^{\frac{1}{5}} = 64$

នាំឱ្យ $y = 32$ ហើយតាម (3) គេបាន $x = (32)^{\frac{1}{5}} = 2$ ។

- ចំពោះ $t = 5$ គេបាន $\log_y x = 5$ នាំឱ្យ $x = y^5$ (4)

យក (4) ជួសក្នុង (2) គេបាន $y.y^5 = 64$

នាំឱ្យ $y = 2$ ហើយតាម (4) គេបាន $x = 2^5 = 32$ ។

ដូចនេះប្រព័ន្ធមានគូចម្លើយ :

$(x = 2 \ , \ y = 32)$ ឬ $(x = 32 \ , \ y = 2)$ ។

លំហាត់ទី២៨

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$\log^2_{6-x}(54-x^3)-5\log_{6-x}(54-x^3)+6=0$.

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$\log^2_{6-x}(54-x^3)-5\log_{6-x}(54-x^3)+6=0 \quad (1).$

លក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 54-x^3>0 \\ 6-x>0 \\ 6-x\neq 1 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} x<3\sqrt[3]{2} \\ x<6 \\ x\neq 5 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} x<3\sqrt[3]{2} \\ x\neq 5 \end{cases}$

តាង $y=\log_{6-x}(54-x^3)$ សមីការ (1)អាចសរសេរ ៖

$y^2-5y+6=0$, $\Delta=25-24=1$

គេទាញឬស $y_1=2$, $y_2=3$

-ចំពោះ $y=2$ គេបាន $\log_{6-x}(54-x^3)=2$

$$54-x^3=(6-x)^2$$

$$54-x^3=36-12x+x^2$$

$$x^3+x^2-12x-18=0$$

$$(x+3)(x^2-2x-6)=0$$

គេទាញឫស $x_1=-3$, $x_2=1-\sqrt{7}$, $x_3=1+\sqrt{7}$

-ចំពោះ $y=3$ គេបាន $\log_{6-x}(54-x^3)=3$

$$(54-x^3)=(6-x)^3$$

$$18x^2-108x+162=0$$

$$18(x-3)^2=0$$

គេទាញឫស $x=3$ ។

ដូចនេះសំណុំឫសរបស់សមីការគឺ :

$x\in\{-3\ ;\ 3;\ 1-\sqrt{7}\ ;\ 1+\sqrt{7}\}$ ។

លំហាត់ទី២៩

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$1+\log^2_{(3-x)^3}(9x^2-x^3)=\frac{1}{3}\log_{\sqrt{3-x}}(9x^2-x^3)\ .$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$1+\log^2_{(3-x)^3}(9x^2-x^3)=\frac{1}{3}\log_{\sqrt{3-x}}(9x^2-x^3)\quad (1).$$

លក្ខខណ្ឌ $\begin{cases}9x^2-x^3>0\\3-x>0\\3-x\neq 1\end{cases}$ សមមូល $\begin{cases}x\neq 0\quad ,\ x<9\\x<3\\x\neq 2\end{cases}$

ឬ $\begin{cases}x<3\\x\neq 0\\x\neq 2\end{cases}$

សមីការ **(1)**អាចសរសេរ ៖

$$1+\frac{1}{9}\log^2_{3-x}(9x^2-x^3)=\frac{2}{3}\log_{3-x}(9x^2-x^3)$$

$$\log^2_{3-x}(9x^2-x^3)-6\log_{3-x}(9x^2-x^3)+9=0$$

$$\left[\ \log_{3-x}(9x^2-x^3)\ -3\ \right]^2=0$$

$\log_{3-x}(9x^2 - x^3) = 3$

$9x^2 - x^3 = (3-x)^3$

$9x^2 - x^3 = 27 - 27x + 9x^2 - x^3$

$27x - 27 = 0$

$x = \frac{27}{27} = 1$

ដូចនេះសមីការមានឫស $x = 1$ ។

លំហាត់ទី៣០

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{3x+1}{x^2+1}\right).\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{4x^2+4}{3x+1}\right)$

ក. ដោះស្រាយសមីការ $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{3x+1}{x^2+1}\right) = \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{4x^2+4}{3x+1}\right)$

ខ. កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឲ្យកន្សោម $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{3x+1}{x^2+1}\right)$ និង $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{4x^2+4}{3x+1}\right)$ វិជ្ជមានព្រមគ្នា ។

គ. រកតម្លៃធំបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x)$ លើចន្លោះ $[\,0\,;3\,]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{3x+1}{x^2+1}\right)=\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{4x^2+4}{3x+1}\right)$$

លក្ខខ័ណ្ឌ $x \geq -\frac{1}{3}$

យើងបាន $\frac{3x+1}{x^2+1}=\frac{4x^2+4}{3x+1}$

$$(3x+1)^2=4(x^2+1)^2$$

សមមូល $\left[\begin{array}{l}3x+1=2x^2+2\\3x+1=-2x^2-2\end{array}\right.$ ឬ $\left[\begin{array}{l}2x^2-3x+1=0\\2x^2+3x+3=0\end{array}\right.$

គេទាញឫស $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{2}$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ x

ដើម្បីឲ្យកន្សោម $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{3x+1}{x^2+1}\right)$ និង $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{4x^2+4}{3x+1}\right)$

វិជ្ជមានព្រមគ្នាលុះត្រាតែ :

$$\begin{cases}\frac{3x+1}{x^2+1}\geq 1\\ \frac{4x^2+4}{3x+1}\geq 1\end{cases} \text{ សមមូល } \begin{cases}\frac{-x^2+3x}{x^2+1}\geq 0\\ \frac{4x^2-3x+3}{3x+1}\geq 0\end{cases}$$

នាំឲ្យ $\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ x > -\dfrac{1}{3} \end{cases}$ ឬ $0 \le x \le 3$ ។

ដូចនេះ $x \in [\ 0\ ;\ 3\ ]$ ។

គ. រកតម្លៃធំបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x)$ លើចន្លោះ $[\,0\,;3\,]$

ចំពោះ $x \in [\ 0\ ;\ 3\ ]$គេមាន $\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}\left(\dfrac{3x+1}{x^2+1}\right) \ge 0 \\ \log_{\sqrt{2}}\left(\dfrac{4x^2+4}{3x+1}\right) \ge 0 \end{cases}$

តាមវិសមភាពកូស៊ីគេមាន $a.b \le \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$;$\forall a;b \ge 0$

យើងមាន $f(x) = \log_{\sqrt{2}}\left(\dfrac{3x+1}{x^2+1}\right).\log_{\sqrt{2}}\left(\dfrac{4x^2+4}{3x+1}\right)$

យើងបាន :

$$f(x) \le \left[\frac{1}{2}\ \log_{\sqrt{2}}(\frac{3x+1}{x^2+1}) + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(\frac{4x^2+4}{3x+1})\right]^2$$

$$f(x) \le \frac{1}{4}\left[\ \log_{\sqrt{2}}(\frac{3x+1}{x^2+1})\ (\frac{4x^2+4}{3x+1})\ \right]^2$$

$$f(x) \le \frac{1}{4}\ \left(\log_{\sqrt{2}} 4\right)^2 = 4 \quad ;\ \forall x \in [0\ ;\ 3]$$

ដូចនេះតម្លៃធំបំផុតនៃអនុគមន៍ f ស្មើនឹង $M = 4$ ។

លំហាត់ទី៣១

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ ,\ x\in IR$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\frac{a+b}{1+a+b})<f(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b})$

ចំពោះគ្រប់ $a>0,b>0$។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\frac{a+b}{1+a+b})<f(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b})$

យើងមាន $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ ,\ x\in IR$

យើងបាន $f'(x)=\frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2})}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ដោយគ្រប់ $x\in IR: x^2+1>0$

នាំឲ្យ $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0\ ,\ \forall x\in IR$

ដូចនេះអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ IR។

ម្យ៉ាងទៀតចំពោះគ្រប់ $a>0,b>0$គេមាន ៖

$\dfrac{a}{1+a+b} < \dfrac{a}{1+a}$ និង $\dfrac{b}{1+a+b} < \dfrac{b}{1+b}$

គេទាញ $\dfrac{a}{1+a+b} + \dfrac{b}{1+a+b} < \dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b}$

ឬ $\dfrac{a+b}{1+a+b} < \dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b}$

ដោយសារតែអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ IR

ហេតុនេះតាមលក្ខណៈអនុគមន៍កើនគេបាន :

$\dfrac{a+b}{1+a+b} < \dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b}$

នាំឲ្យ $f\left(\dfrac{a+b}{1+a+b}\right) < f\left(\dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b}\right)$

ដូចនេះ $f\left(\dfrac{a+b}{1+a+b}\right) < f\left(\dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b}\right)$

ចំពោះគ្រប់ $a > 0, b > 0$ ។

លំហាត់ទី៣២

គេឲ្យ $a \geq 1$ និង $b \geq 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \leq 2\sqrt{\log_2(\frac{a+b}{2})}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \leq 2\sqrt{\log_2(\frac{a+b}{2})}$

ចំពោះ $a \geq 1$ និង $b \geq 1$ យើងមាន $a + b \geq 2\sqrt{a.b}$

(វិសមភាពកូស៊ី)

ឬ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$

នាំឲ្យ $\log_2(\frac{a+b}{2}) \geq \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$

ឬ $\log_2 a + \log_2 b \leq 2\log_2(\frac{a+b}{2})$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $\log_2 a + \log_2 b \geq 2\sqrt{\log_2 a}.\sqrt{\log_2 b}$

$2(\log_2 a + \log_2 b) \geq \log_2 a + 2\sqrt{\log_2 a}.\sqrt{\log_2 b} + \log_2 b$

$2(\log_2 a + \log_2 b) \geq (\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b})^2$

$\log_2 a + \log_2 b \geq \frac{1}{2}(\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b})^2$ (2)

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) យើងទាញ៖

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\right)^2 \le 2\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\left(\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\right)^2 \le 4\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b} \le 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b} \le 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}}$ ។

លំហាត់ទី៣៣

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ :

$$u_n = \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right) . \log_2\left(n^2+n\right)$$

ដែល $n = 1 ; 2 ; 3 ; ....$ ។

ក.ចូរបង្ហាញថា $u_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

ខ.គណនាផលបូក $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n

គ.កំនត់ n ដើម្បីឱ្យ $S_n = 100$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា $u_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

គេមាន $u_n = \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right) . \log_2\left(n^2+n\right)$

ដោយ $\log_2\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log_2\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log_2(n+1) - \log_2(n)$

និង $\log_2\left(n^2+n\right) = \log_2[n(n+1)] = \log_2(n) + \log_2(n+1)$

គេបាន $u_n = [\log_2(n+1)]^2 - [\log_2(n)]^2$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ គេមាន $\log_2(n+1) > \log_2(n)$

ដូចនេះ $u_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

ខ.គណនាផលបូក $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$

គេមាន $u_n = [\log_2(n+1)]^2 - [\log_2(n)]^2$

-បើ $n=1$: $u_1 = [\log_2 2]^2 - [\log_2 1]^2$

-បើ $n=2$: $u_2 = [\log_2 3]^2 - [\log_2 2]^2$

-បើ $n=3$: $u_3 = [\log_2 4]^2 - [\log_2 3]^2$

-បើ $n=n$: $u_n = [\log_2(n+1)]^2 - [\log_2(n)]^2$

ធ្វើវិធីបូកអង្គ និង អង្គនៃសមភាពទាំងនេះគេបាន :

ដូចនេះ $S_n = [\log_2(n+1)]^2$ ។

គ.កំនត់ n ដើម្បីឱ្យ $S_n = 100$

យើងបាន $[\log_2(n+1)]^2 = 100$

$$\log_2(n+1) = 10$$

$$n+1 = 2^{10} = 1024$$

ដូចនេះ $n = 1023$ ។

លំហាត់ទី៣៤

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^{2+\log_2 x}$ ដែល $x>0$

គេតាង $u_1=f(x)$; $u_2=f\left(f(x)\right)$; $u_3=f\left(f\left(f(x)\right)\right)$

និង $u_n=f_n\left(f\left(....f\left(f(x)\right)....\right)\right)$ ។

ក.គេយក $V_n=1+\log_2 u_n$ ។ ចូរបង្ហាញថា $V_{n+1}={V_n}^2$

ខ.ប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាចូរស្រាយថា $V_n={V_1}^{2^n}$ ។

គ.គណនា V_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង x ។

ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថា $V_{n+1}={V_n}^2$

គេមាន $V_n=1+\log_2 u_n$ នោះ $vV_{n+1}=1+\log_2 u_{n+1}$

ដោយ $u_n=f_n\left(f\left(....f\left(f(x)\right)....\right)\right)=f\left(u_{n-1}\right)$

គេបាន $u_{n+1}=f(u_n)=\left(u_n\right)^{2+\log_2 u_n}$

ហេតុនេះ $V_{n+1}=1+\log_2\left[\left(u_n\right)^{2+\log_2 u_n}\right]$

$$V_{n+1}=1+\left(2+\log_2 u_n\right)\log_2 u_n$$

$$V_{n+1}=(1+\log_2 u_n)^2={V_n}^2$$

ដូចនេះ $V_{n+1}={V_n}^2$ ។

ខ.ប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យាស្រាយថា $V_n = V_1^{2^n}$

គេមាន $V_{n+1} = V_n^{\ 2}$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

គេបាន $V_2 = V_1^{\ 2} = V_1^{2^1}$ ពិត

$V_3 = V_2^{\ 2} = V_1^{\ 4} = V_1^{2^2}$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតចំពោះ $n = k$ គឺ $V_k = V_1^{2^k}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n = k+1$ គឺ $V_{k+1} = V_1^{2^{k+1}}$

គេមាន $V_{k+1} = V_k^{\ 2}$ ដោយ $V_k = V_1^{2^k}$

គេបាន $V_{k+1} = \left(V_1^{2^k}\right)^2 = V_1^{2^{k+1}}$ ពិត

ដូចនេះ $V_n = V_1^{2^n}$ ។

គ.គណនា V_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង x :

គេមាន $V_n = V_1^{2^n}$

ដោយ $V_1 = 1 + \log_2 u_1 = 1 + \log_2\left(x^{2+\log_2 x}\right) = (1 + \log_2 x)^2$

ដូចនេះ $V_n = (1 + \log_2 x)^{2^{n+1}}$

ហើយ $V_n = 1 + \log_2 u_n$ នាំឱ្យ $u_n = 2^{V_n - 1}$

ដូចនេះ $u_n = (2)^{(1+\log_2 x)^{2^{n+1}} - 1}$ ។

លំហាត់ទី៣៥

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ :

$u_n = \log_{(n+1)}(n+2)$ ដែល $n = 1 ; 2 ; 3 ; ....$ ។

ក.ចូរបង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

ខ.គណនាផលបូក $S_n = \ln u_1 + \ln u_2 + \ln u_3 + ... + \ln u_n$

ជាអនុគមន៍នៃ n

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

គេមាន $u_n = \log_{(n+1)}(n+2)$ និង $u_{n+1} = \log_{(n+2)}(n+3)$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ គេមាន $(n+2)^2 > (n+2)^2 - 1$

ឬ $(n+2)^2 > (n+2-1)(n+2+1) = (n+1)(n+3)$

គេបាន $\log_{(n+2)}(n+2)^2 > \log_{(n+2)}[(n+1)(n+3)]$

ឬ $2 > \log_{(n+2)}(n+1) + \log_{(n+2)}(n+3)$ (1)

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន :

$$\log_{(n+2)}(n+1) + \log_{(n+1)}(n+2) \geq 2\sqrt{\log_{(n+2)}(n+1)\log_{(n+1)}(n+2)}$$

ឬ $\log_{(n+2)}(n+1) + \log_{(n+1)}(n+2) \geq 2$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន :

$$\log_{(n+2)}(n+1)+\log_{(n+1)}(n+2) > \log_{(n+2)}(n+1)+\log_{(n+2)}(n+3)$$

$$\log_{(n+1)}(n+2) > \log_{(n+2)}(n+3)$$

$$u_n > u_{n+1}$$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$ ។

ខ.គណនាផលបូក $S_n = \ln u_1 + \ln u_2 + \ln u_3 + ... + \ln u_n$

គេមាន $u_n = \log_{(n+1)}(n+2) = \dfrac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}$

គេបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}(\ln u_k) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}(u_k)\right)$

ដោយ $\prod_{k=1}^{n}(u_k) = \prod_{k=1}^{n}\left[\dfrac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}\right]$

$$= \frac{\ln 3}{\ln 2}\cdot\frac{\ln 4}{\ln 3}\cdot\frac{\ln 5}{\ln 4}.....\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}$$

$$= \frac{\ln(n+2)}{\ln 2} = \log_2(n+2)$$

ដូចនេះ $S_n = \ln[\log_2(n+2\ )]$ ។

លំហាត់ទី៣៦

គេឱ្យ $f(x)=\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}-\sqrt{\cos^4+4\sin^2 x}$

ក. សម្រួល $f(x)$

ខ.កំនត់ x ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\dfrac{1}{2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. សម្រួល $f(x)$

គេមាន $f(x)=\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}-\sqrt{\cos^4+4\sin^2 x}$

ដោយ $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ និង $\sin^2 x=1-\cos^2 x$

$$\begin{aligned} f(x)&=\sqrt{\sin^4 x+4(1-\sin^2 x)}-\sqrt{\cos^4 x+4(1-\cos^2 x)}\\ &=\sqrt{4-4\sin^2 x+\sin^4 x}-\sqrt{4-4\cos^2 x+\cos^4 x}\\ &=\sqrt{(2-\sin^2 x)^2}-\sqrt{(2-\cos^2 x)^2}\\ &=(2-\sin^2 x)-(2-\cos^2 x)=\cos^2 x-\sin^2 x \end{aligned}$$

ដូចនេះ $f(x)=\cos 2x$ ។

ខ.កំនត់ x ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\dfrac{1}{2}$

គេបាន $\cos 2x=\dfrac{1}{2}$ នាំឱ្យ $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ដែល $k\in Z$ ។

លំហាត់ទី៣៧

ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ គេឱ្យ $S_n=\cos^n\frac{\pi}{12}+\sin^n\frac{\pi}{12}$

ក. គណនាតម្លៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

ខ. បង្ហាញថា $4S_{n+2}-2\sqrt{6}S_{n+1}+S_n=0$

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាតម្លៃ $\cos\frac{\pi}{12}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})$$

$$=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})$$

$$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{12}$; $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{12}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $4S_{n+2}-2\sqrt{6}S_{n+1}+S_n=0$

គេមាន $S_n=\cos^n\frac{\pi}{12}+\sin^n\frac{\pi}{12}$

តាង $x_1=\cos\frac{\pi}{12}$; $x_2=\sin\frac{\pi}{12}$ នោះ $S_n=x_1{}^n+x_2{}^n$

គេមាន $x_1+x_2=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

ហើយ $x_1.x_2=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{6-2}{16}=\frac{1}{4}$

គេបាន x_1 និង x_2 ជាឫសសមីការ $x^2-\frac{\sqrt{6}}{2}x+\frac{1}{4}=0$

ឬ $4x^2-2\sqrt{6}x+1=0$

គេទាញ $\begin{cases}4x_1{}^2-2\sqrt{6}x_1+1=0\\4x_2{}^2-2\sqrt{6}x_2+1=0\end{cases}$

ឬ $\begin{cases}4x_1{}^{n+2}-2\sqrt{6}x_1{}^{n+1}+x_1{}^n=0\ (i)\\4x_2{}^{n+2}-2\sqrt{6}x_2{}^{n+1}+x_2{}^n=0\ (ii)\end{cases}$

បូកសមីការ (i) និង (ii) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$4(x_1{}^{n+2}+x_2{}^{n+2})-2\sqrt{6}(x_1{}^{n+1}+x_2{}^{n+1})+(x_1{}^n+x_2{}^n)=0$$

ដូចនេះ $4S_{n+2}-2\sqrt{6}S_{n+1}+S_n=0$ ។

លំហាត់ទី៣៨

ចូរបង្ហាញថា $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$

(IMO 1963)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$

តាង $S=\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$

គុណអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនឹង $2\sin\frac{\pi}{7}$ គេបាន :

$$2S\sin\frac{\pi}{7}=\sin\frac{2\pi}{7}-2\cos\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

$$=\sin\frac{2\pi}{7}-(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7})+(\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7})$$

$$=\sin\frac{2\pi}{7}-(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7})+(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7})$$

$$=\sin\frac{\pi}{7}$$

គេទាញ $S=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣៩

គណនា $A=(1-4\sin^2\frac{\pi}{5})(1-4\sin^2\frac{3\pi}{5})$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $A=(1-4\sin^2\frac{\pi}{5})(1-4\sin^2\frac{3\pi}{5})$

គេមាន $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

គេទាញ $4\cos^2 x-3=\frac{\cos 3x}{\cos x}$

$$4(1-\sin^2 x)-3=\frac{\cos 3x}{\cos x}$$

$$1-4\sin^2 x=\frac{\cos 3x}{\cos x}$$

គេបាន $A=\frac{\cos\frac{3\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}}\times\frac{\cos\frac{9\pi}{5}}{\cos\frac{3\pi}{5}}=\frac{\cos\frac{9\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}}$

ដោយ $\cos\frac{9\pi}{5}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{5})=\cos\frac{\pi}{5}$

គេទាញបាន $A=1$ ។

ដូចនេះ $(1-4\sin^2\frac{\pi}{5})(1-4\sin^2\frac{3\pi}{5})=1$ ។

លំហាត់ទី៤០

គេឱ្យ $f(x)=\dfrac{x^3}{4x^2+4x-1}$ ។ គណនាតម្លៃ $f(\cos\dfrac{\pi}{7})$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ $f(\cos\dfrac{\pi}{7})$

គេបាន $f(\cos\dfrac{\pi}{7})=\dfrac{\cos^3\dfrac{\pi}{7}}{4\cos^2\dfrac{\pi}{7}+4\cos\dfrac{\pi}{7}-1}\quad (i)$

គេមាន $\sin\dfrac{4\pi}{7}=\sin(\pi-\dfrac{3\pi}{7})$

$$2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}=\sin\frac{3\pi}{7}$$

$$4\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}(2\cos^2\frac{\pi}{7}-1)=3\sin\frac{\pi}{7}-4\sin^3\frac{\pi}{7}$$

$$4\cos\frac{\pi}{7}(2\cos^2\frac{\pi}{7}-1)=3-4\sin^2\frac{\pi}{7}$$

$$8\cos^3\frac{\pi}{7}-4\cos\frac{\pi}{7}=3-4(1-\cos^2\frac{\pi}{7})$$

$$\cos^3\frac{\pi}{7}=\frac{1}{8}(4\cos^2\frac{\pi}{7}+4\cos\frac{\pi}{7}-1)\qquad (ii)$$

តាម (i) និង (ii) គេទាញ $f(\cos\dfrac{\pi}{7})=\dfrac{1}{8}$ ។

លំហាត់ទី៤១

គេឱ្យ $f_k(x)=\frac{1}{k}(\sin^k x+\cos^k x)$ ដែល $k=1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;...$

ចូរបង្ហាញថា $f_4(x)-f_6(x)=\frac{1}{12}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $f_4(x)-f_6(x)=\frac{1}{12}$

គេមាន $f_4(x)=\frac{1}{4}(\sin^4 x+\cos^4 x)$

$$=\frac{1}{4}[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x]$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-2\sin^2 x\cos^2 x\right)$$

ហើយ $f_6(x)=\frac{1}{6}(\sin^6 x+\cos^6 x)$

$$f_6(x)=\frac{1}{6}\left[(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left(1-3\sin^2 x\cos^2 x\right)$$

គេបាន $f_4(x)-f_6(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

ដូចនេះ $f_4(x)-f_6(x)=\frac{1}{12}$ ។

លំហាត់ទី៤២

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n និង ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq \frac{k\pi}{2^t}$ ដែល $t = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ ....,\ n$ និង k ជាចំនួនគត់គេមាន

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + ... + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$$

(IMO 1966)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + ... + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$$

តាង $S_n = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + ... + \frac{1}{\sin 2^n x} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sin 2^k x}\right)$

គេមាន $\frac{1}{\sin 2a} = \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\sin 2a} = \frac{2\cos^2 a - \cos 2a}{\sin 2a}$

$$\frac{1}{\sin 2a} = \frac{2\cos^2 a}{\sin 2a} - \frac{\cos 2a}{\sin 2a} = \cot a - \cot 2a$$

គេបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\cot 2^{k-1} x - \cot 2^k x\right) = \cot x - \cot 2^n x$

ដូចនេះ $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + ... + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$

លំហាត់ទី៤៣

គេឱ្យ a , b , c , d ជាចំនួននៅក្នុងចន្លោះ $[\ 0\ ;\ \pi\ ]$ ដោយដឹងថា

$$\begin{cases}\sin a + 7\sin b = 4(\sin c + 2\sin d)\\ \cos a + 7\cos b = 4(\cos c + 2\cos d)\end{cases}$$

ចូរបង្ហាញថា $2\cos(a-d) = 7\cos(b-c)$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $2\cos(a-d) = 7\cos(b-c)$

គេមាន $\begin{cases}\sin a + 7\sin b = 4(\sin c + 2\sin d)\\ \cos a + 7\cos b = 4(\cos c + 2\cos d)\end{cases}$

ឬ $\begin{cases}\sin a - 8\sin d = 4\sin c - 7\sin b\\ \cos a - 8\cos d = 4\cos c - 7\cos b\end{cases}$

ឬ $\begin{cases}(\sin a - 8\sin d)^2 = (4\sin c - 7\sin b)^2 \quad (i)\\ (\cos a - 8\cos d)^2 = (4\cos c - 7\cos b)^2 \quad (ii)\end{cases}$

បូកសមីការ (i) និង (ii) អង្គនឹងអង្គគេបាន :

$$65 - 16\cos(a-d) = 65 - 56\cos(b-c)$$

$$-16\cos(a-d) = -56\cos(b-c)$$

ដូចនេះ $2\cos(a-d) = 7\cos(b-c)$ ។

លំហាត់ទី៤៤

ចូរសរសេរជាផលគុណកត្តានៃកន្សោម :

$\sin(x-y)+\sin(y-z)+\sin(z-x)$

ដំណោះស្រាយ

សរសេរជាផលគុណកត្តា

តាង $T=\sin(x-y)+\sin(y-z)+\sin(z-x)$

មាន $\sin(x-y)+\sin(y-z)=2\sin\frac{x-z}{2}\cos\frac{x-2y+z}{2}$

ហើយ $\sin(z-x)=2\sin\frac{z-x}{2}\cos\frac{z-x}{2}$

$$T=2\sin\frac{x-z}{2}\left(\cos\frac{x-2y+z}{2}-\cos\frac{z-x}{2}\right)$$

$$=-4\sin\frac{x-z}{2}\sin\frac{z-y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$=-4\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{y-z}{2}\sin\frac{z-x}{2}$$

ដូចនេះ

$$\sin(x-y)+\sin(y-z)+\sin(z-x)=-4\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{y-z}{2}\sin\frac{z-x}{2}$$

លំហាត់ទី៤៥

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $a\ ;\ b\ ;\ c$ ។

តាង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

ក-ចូរបង្ហាញថា $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ រួចសរសេរទំនាក់ទំនង

ពីរទៀតដែលស្រដៀងគ្នានេះ ។

ខ-ចូរស្រាយថា $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\le\dfrac{1}{8}$

ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថា $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

គេទាញ $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

ដោយ $\sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{1-\cos A}{2}$

$$=\frac{2bc-(b^2+c^2-a^2)}{4bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}$$

$$=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}$$

ដោយ $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ នោះ $\begin{cases}a-b+c=2(p-b)\\ a+b-c=2(p-c)\end{cases}$

គេបាន $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{4(p-b)(p-c)}{4bc}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$

ដូចនេះ $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ ។

ទំនាក់ទំនងពីរទៀតដែលស្រដៀងគ្នានេះគឺ :

$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$ និង $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

ខ-ស្រាយថា $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$

គេមាន $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$ និង $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

គេបាន $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$ (i)

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន

$(p-a)+(p-b)\ge 2\sqrt{(p-a)(p-b)}$

$2p-a-b\ge 2\sqrt{(p-a)(p-b)}$

$a+b+c-a-b\ge 2\sqrt{(p-a)(p-b)}$

$c\ge 2\sqrt{(p-a)(p-b)}$

គេទាញបាន $(p-a)(p-b)\le\frac{c^2}{4}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $(p-b)(p-c)\le\frac{a^2}{4}$ (2)

និង $(p-c)(p-a)\le \frac{b^2}{4}$ (3)

ធើ្វផលគុណទំនាក់ទំនង (1); (2) និង (3) គេបាន :

$(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2 \le \frac{a^2b^2c^2}{64}$

គេទាញ $\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\le \frac{1}{8}$ (ii)

តាមទំនាក់ទំនង (i) និង (ii) គេទាញបាន :

$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le \frac{1}{8}$ ។

លំហាត់ទី៤៦

គេឱ្យត្រីកោណ ABC ហើយគេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយថា $\cos A+\cos B+\cos C = 1+\frac{r}{R}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\cos A+\cos B+\cos C = 1+\frac{r}{R}$

គេមាន $\cos A+\cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$$= 2\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2})\cos\frac{A-B}{2}$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

ហើយ $\cos C = 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 - 2\sin\frac{C}{2}(\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2})$$

ដោយ $\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2} = \cos\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A-B}{2}$

$$= -2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

គេបាន $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \quad (i)$

គេដឹងថា :

$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$; $\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$

និង $\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

តាមរូបមន្តហេរុង :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr = \frac{abc}{4R}$$

គេទាញ $(p-a)(p-b)(p-c)=\dfrac{S^2}{p}=pr^2=r\,S$

ហើយ $abc=4prR$

គេបាន $\cos A+\cos B+\cos C=1+4.\dfrac{r\,S}{4prR}=1+\dfrac{r}{R}$

ដូចនេះ $\cos A+\cos B+\cos C=1+\dfrac{r}{R}$ ។

លំហាត់ទី៤៧

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $a\ ;\ b\ ;\ c$ ។

តាង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណហើយ r និង R

រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ក-ចូរបង្ហាញថា $ab+bc+ca=r^2+p^2+4r\,R$

ខ-ចូរបង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8r\,R$

ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថា $ab+bc+ca=r^2+p^2+4r\,R$

តាមរូបមន្តហេរុង :

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr$

គេទាញ $r=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$$

$$r^2 = \frac{p^3 - (a+b+c)p^2 + (ab+bc+ca)p - abc}{p}$$

$$r^2 = \frac{p^3 - 2p^3 + (ab+bc+ca)p - abc}{p}$$

$$r^2 = \frac{-p^3 + (ab+bc+ca)p - abc}{p}$$

$$ab+bc+ca = r^2 + p^2 + \frac{abc}{p}$$

ដោយ $S = pr = \frac{abc}{4R}$ គេទាញ $\frac{abc}{p} = 4rR$

ដូចនេះ $ab+bc+ca = r^2 + p^2 + 4rR$ ។

ខ-បង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8rR$

តាមសមភាព $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2(ab+bc+ca)$

គេទាញ $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$

ដោយ $a+b+c = 2p$

និង $ab+bc+ca = r^2 + p^2 + 4rR$

គេបាន $a^2+b^2+c^2 = 4p^2 - 2(r^2 + p^2 + 4rR)$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8rR$ ។

លំហាត់ទី៤៨

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a ; b ; c ។

តាង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណហើយ r

ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ។ ចូរស្រាយថា :

ក. $(p-a)\tan\dfrac{A}{2}=(p-b)\tan\dfrac{B}{2}=(p-c)\tan\dfrac{C}{2}=r$

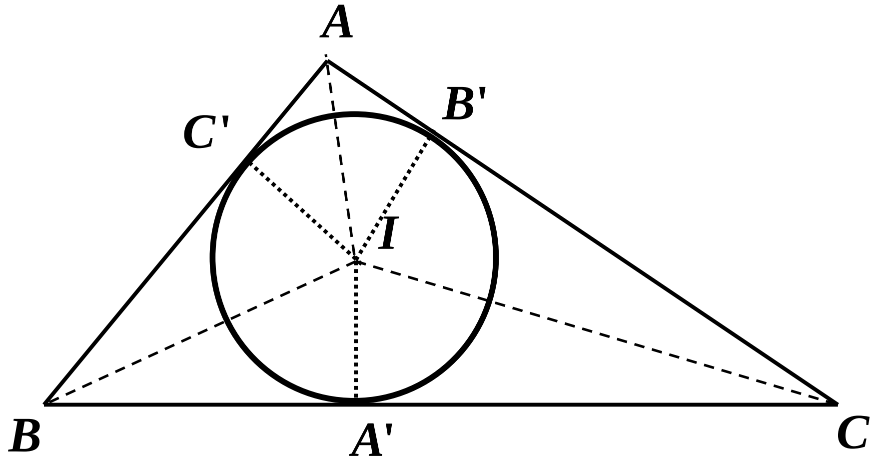
ខ. $\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{4R+r}{p}$

គ. $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{p}{r}$

ឃ. $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=\dfrac{p}{r}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $(p-a)\tan\dfrac{A}{2}=(p-b)\tan\dfrac{B}{2}=(p-c)\tan\dfrac{C}{2}=r$



គេមាន $AB+BC+CA=2p$

ដោយ $AB=AC'+C'B=AC'+BA'$ (ព្រោះ $C'B=BA'$)

ហើយ $CA=CB'+B'A=A'C+AC'$

(ព្រោះ $CB'=A'C$ និង $B'A=AC'$)

គេបាន $AC'+BA'+BC+A'C+AC'=2p$

$$2AC'+(BA'+A'C)+BC=2P$$

$$2AC'+BC+BC=2p$$

$$2AC'+2BC=2p$$

$$2AC'+2a=2p$$

គេទាញ $AC'=B'A=p-a$

ក្នុងត្រីកោណកែង $IC'A$ គេមាន $\tan\frac{A}{2}=\frac{IC'}{AC'}=\frac{r}{p-a}$

គេទាញ $(p-a)\tan\frac{A}{2}=r$ ។

ដូចគ្នាដែរ $\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b}$ ឬ $(p-b)\tan\frac{B}{2}=r$

និង $\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}$ ឬ $(p-c)\tan\frac{C}{2}=r$

ដូចនេះ $(p-a)\tan\frac{A}{2}=(p-b)\tan\frac{B}{2}=(p-c)\tan\frac{C}{2}=r$

ខ. $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}$

តាង $T=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}$

ដោយ $\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}$; $\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b}$;$\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}$

គេបាន :

$$T=\frac{r}{p-a}+\frac{r}{p-b}+\frac{r}{p-c}$$

$$=\frac{r[(p-b)(p-c)+(p-a)(p-c)+(p-a)(p-b)]}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{pr\left(3p^2-(b+c)p-(a+c)p-(a+b)p+bc+ac+ab\right)}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{S.\left(3p^2-2(a+b+c)p+ab+bc+ca\right)}{S^2}$$

$$=\frac{\left(3p^2-4p^2+ab+bc+ca\right)}{S}$$

$$=\frac{-p^2+ab+bc+ca}{pr}$$

តាមរូបមន្តហេរុង :

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr$$

គេទាញ $r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

$$r^2=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$$

$$r^2=\frac{p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p-abc}{p}$$

$$r^2=\frac{p^3-2p^3+(ab+bc+ca)p-abc}{p}$$

$$r^2=\frac{-p^3+(ab+bc+ca)p-abc}{p}$$

$$r^2=-p^2+ab+bc+ca-\frac{abc}{p}$$

$$ab+bc+ca=r^2+p^2+\frac{abc}{p}$$

ដោយ $S=pr=\frac{abc}{4R}$ គេទាញ $\frac{abc}{p}=4rR$

គេទាញ $ab+bc+ca=r^2+p^2+4r\,R$

ហេតុនេះ $T=\frac{-p^2+r^2+p^2+4rR}{pr}=\frac{r+4R}{p}$

ដូចនេះ $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}$ ។

គ. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{p}$

គេមាន $\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}$; $\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b}$; $\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}$

គេបាន $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{r^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$=\frac{pr^3}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{S\,r^2}{S^2}=\frac{r^2}{S}=\frac{r^2}{pr}=\frac{r}{p}$$

ដូចនេះ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{p}$ ។

ឃ. $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{p}{r}$

គេបាន $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{p-a}{r}+\frac{p-b}{r}+\frac{p-c}{r}$

$$=\frac{3p-(a+b+c)}{r}$$

$$=\frac{3p-2p}{r}=\frac{p}{r}$$

ដូចនេះ $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{p}{r}$ ។

លំហាត់ទី៤៩

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $a\ ;\ b\ ;\ c$ ។

តាង S ជាផ្ទៃក្រលា និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

ក.ចូរបង្ហាញថា $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\dfrac{abc}{2R^2}$

ខ. ចូរបង្ហាញថា $a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C=4S$

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\dfrac{abc}{2R^2}$

តាង $T=a\cos A+b\cos B+c\cos C$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

គេទាញ $\begin{cases} a=2R\sin A \\ b=2R\sin B \\ c=2R\sin C \end{cases}$

គេបាន $T=R(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$

$$=R\left[2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C\right]$$
$$=R\left[2\sin C\cos(A-B)-2\sin C\cos(A+B)\right]$$
$$=2R\sin C\left[\cos(A-B)-\cos(A+B)\right]$$
$$=4R\sin A\sin B\sin C$$

ដោយ $\sin A = \dfrac{a}{2R}$; $\sin B = \dfrac{b}{2R}$; $\sin C = \dfrac{c}{2R}$

គេបាន $T = 4R.\dfrac{abc}{8R^3} = \dfrac{abc}{2R^2}$

ដូចនេះ $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \dfrac{abc}{2R^2}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $a^2\cot A + b^2\cot B + c^2\cot C = 4S$

តាង $\sum = a^2\cot A + b^2\cot B + c^2\cot C$

$$= \frac{a}{\sin A}a\cos A + \frac{b}{\sin B}b\cos B + \frac{c}{\sin C}c\cos C$$

$$= 2Ra\cos A + 2Rb\cos B + 2Rc\cos C$$

$$= 2R(a\cos A + b\cos B + c\cos C)$$

$$= 2R.\frac{abc}{2R^2} = \frac{abc}{R} = 4.\frac{abc}{4R} = 4S$$

ដូចនេះ $a^2\cot A + b^2\cot B + c^2\cot C = 4S$ ។

លំហាត់ទី៥០

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $a\ ;\ b\ ;\ c$ ។

តាង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

ចូរបង្ហាញថា $a\cot A + b\cot B + c\cot C = 2(r+R)$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $a\cot A + b\cot B + c\cot C = 2(r+R)$

តាង $T = a\cot A + b\cot B + c\cot C$

$$= \frac{a}{\sin A}\cos A + \frac{b}{\sin B}\cos B + \frac{c}{\sin C}\cos C$$

$$= 2R\cos A + 2R\cos B + 2R\cos C$$

$$= 2R(\cos A + \cos B + \cos C) \quad (i)$$

គេមាន $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

ហើយ $\cos C = 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 - 2\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right)$$

ដោយ $\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}=\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}$

$$=-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

គេបាន $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\quad(i)$

គេដឹងថា ៖

$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\ ;\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$

និង $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$

តាមរូបមន្តហេរុង ៖

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr=\frac{abc}{4R}$ គេទាញបាន ៖

$(p-a)(p-b)(p-c)=\frac{S^2}{p}=pr^2=r\,S$ និង $abc=4prR$

គេបាន $\cos A+\cos B+\cos C=1+4.\frac{r\,S}{4prR}=1+\frac{r}{R}\ (ii)$

តាម (i) និង (ii) គេបាន $T=2R(1+\frac{r}{R})=2(r+R)$

ដូចនេះ $a\cot A+b\cot B+c\cot C=2(r+R)$ ។

លំហាត់ទី៥១

បង្ហាញថាក្នុងត្រីកោណ ABC មួយគេមាន

$$\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2}$

គេមាន $a=2R\sin A$ និង $b=2R\sin B$

គេបាន $a-b=2R(\sin A-\sin B)$

$$a-b=4R\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$a-b=4R\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}\quad(i)$$

ហើយ $a+b=2R(\sin A+\sin B)$

$$a+b=4R\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$a+b=4R\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\quad(ii)$$

ធ្វើវិធីចែក (i) និង (ii) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2}$$ ។

លំហាត់ទី៥២

បង្ហាញថាក្នុងត្រីកោណ ABC មួយគេមាន

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geq 4(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2})$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geq 4(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2})$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

គេទាញ $\frac{a^2}{bc}=\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\cos A$ ដោយ $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2$

គេបាន $\frac{a^2}{bc}\geq 2-2\cos A=4\sin^2\frac{A}{2}$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{b^2}{ca}\geq 4\sin^2\frac{B}{2}$ និង $\frac{c^2}{ab}\geq 4\sin^2\frac{C}{2}$

គេបាន $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geq 4\sin^2\frac{A}{2}+4\sin^2\frac{B}{2}+4\sin^2\frac{C}{2}$

ដូចនេះ $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geq 4(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2})$

លំហាត់ទី៥៣

បង្ហាញថាក្នុងត្រីកោណ ABC មួយគេមាន

$$\frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos B}{b^3}+\frac{\cos C}{c^3}\geq\frac{81}{16p^3}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos B}{b^3}+\frac{\cos C}{c^3}\geq\frac{81}{16p^3}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

គេទាញ $\frac{2bc\cos A}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}-1 \quad (1)$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{2ca\cos B}{b^2}=\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2}{b^2}-1 \quad (2)$

និង $\frac{2ab\cos A}{c^2}=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}-1 \quad (3)$

បូកសមីការ (1) ; (2) និង (3) គេបាន :

$$T=\frac{2bc\cos A}{a^2}+\frac{2ca\cos B}{b^2}+\frac{2ab\cos C}{c^2}$$

$$=\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}-3$$

$$\geq 2+2+2-3=3$$

គេទាញ $\frac{bc\cos A}{a^2}+\frac{ca\cos B}{b^2}+\frac{ab\cos C}{c^2}\geq\frac{3}{2}$

ឬ $\frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos B}{b^3}+\frac{\cos C}{c^3}\ge\frac{3}{2abc}$ (i)

គេមាន $2p=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$

គេទាញ $abc\le\frac{8p^3}{27}$ នាំឱ្យ $\frac{3}{2abc}\ge\frac{81}{16p^3}$ (ii)

តាម (i) និង (ii) គេទាញបាន ៖

$\frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos B}{b^3}+\frac{\cos C}{c^3}\ge\frac{81}{16p^3}$ ។

លំហាត់ទី៥៤

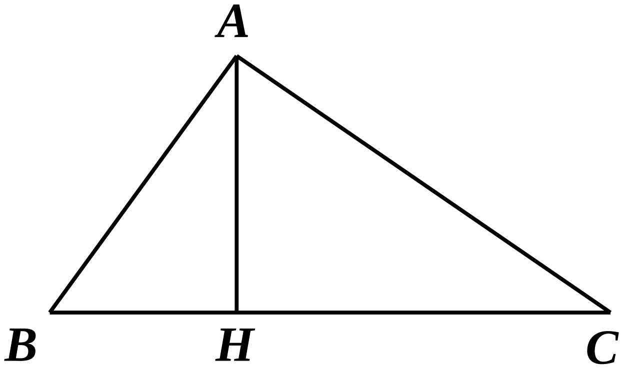
បង្ហាញថាក្នុងត្រីកោណ ABC មួយដែល $A\neq B\neq C$ គេមាន

ក. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$

ខ. $\frac{a^3\sin^3(B-C)+b^3\sin^3(C-A)+c^3\sin^3(A-B)}{\sin(B-C)\sin(C-A)\sin(A-B)}=3abc$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$



ក្នុងត្រីកោណកែង ABH គេមាន $\cos B = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{c}$

គេទាញ $BH = c\cos B$

ក្នុងត្រីកោណកែង ACH គេមាន $\cos C = \frac{HC}{AC} = \frac{HC}{b}$

គេទាញ $HC = b\cos C$

ដោយ $a = BC = BH + HC$ នាំឱ្យ $a = b\cos C + c\cos B$

ដូចគ្នាដែរ $b = a\cos C + c\cos A$ និង $c = a\cos B + b\cos A$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

គេបាន $\frac{b\cos C + c\cos B}{\sin A} = \frac{a\cos C + c\cos A}{\sin B}$

$$b\cos C\sin B + c\sin B\cos B = a\cos C\sin A + c\cos A\sin A$$

ឬ $(b\sin B - a\sin A)\cos C = \frac{c}{2}(\sin 2A - \sin 2B)$

$$(b\sin B - a\sin A)\cos c = c\sin(A-B)\cos(A+B)$$

$$(b\sin B - a\sin A)\cos C = -c\sin(A-B)\cos C$$

គេទាញ $c\sin(A-B) = a\sin A - b\sin B \quad (i)$

ដូចគ្នាដែរ $a\sin(B-C) = b\sin B - c\sin C \quad (ii)$

$$b\sin(C-A) = c\sin C - a\sin A \quad (iii)$$

បូកទំនាក់ទំនង (i) ; (ii) & (iii) គេបាន :

$a\sin(B-C) + b\sin(C-A) + c\sin(A-B) = 0$ ។

ខ. $\frac{a^3\sin^3(B-C)+b^3\sin^3(C-A)+c^3\sin^3(A-B)}{\sin(B-C)\sin(C-A)\sin(A-B)}=3abc$

តាង $x=a\sin(B-C); y=b\sin(C-A)\ ; z=c\sin(A-B)$

គេបាន $x+y+z=0$ ឬ $x+y=-z$

គេបាន $(x+y)^3=-z^3$

$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=-z^3$$

$$x^3+3xy(x+y)+y^3=-z^3$$

$$x^3-3xyz+y^3=-z^3$$

$$x^3+y^3+z^3=3xyz$$

ជំនួស $x=a\sin(B-C); y=b\sin(C-A)\ ; z=c\sin(A-B)$

រួចចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\sin(B-C)\sin(C-A)\sin(A-B)$

$$\frac{a^3\sin^3(B-C)+b^3\sin^3(C-A)+c^3\sin^3(A-B)}{\sin(B-C)\sin(C-A)\sin(A-B)}=3abc$$

លំហាត់ទី៥៥

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ :

$U_n = \sqrt{2}^n . \sin\frac{n\pi}{4}$ ដែល $n \in IN^*$

ក.ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}$

ខ. ទាញឱ្យបានថា $U_n = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

គ. គណនាផលបូក $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$

ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}$

តាមរូបមន្ត $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$

យើងបាន :

$$\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \sqrt{2}\cos(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{4})$$

$$= \sqrt{2}(\cos\frac{n\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4})$$

$$= \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{n\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{n\pi}{4})$$

$$= \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}}$ ។

ខ. ទាញឱ្យបានថា $U_n=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

យើងមាន $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}$

នាំឱ្យ $\sin\frac{n\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(\sqrt{2})^n$

គេបាន $(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{U_n=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}$ ។

គ. គណនាផលបូក $S_n=U_1+U_2+U_3+.........+U_n$

យើងបាន $S_n=U_1+U_2+U_3+..........+U_n=\sum_{k=1}^{n}(U_k)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[(\sqrt{2})^k\cos\frac{k\pi}{4}-(\sqrt{2})^{k+1}\cos\frac{(k+1)\pi}{4}\right]$$

$$=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n=1-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}$ ។

លំហាត់ទី៥៦

គេឱ្យ x ជាចំនួនពិតដែល $60x^2-71x+21<0$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sin\left(\frac{\pi}{3x-1}\right)<0$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sin\left(\frac{\pi}{3x-1}\right)<0$

តាង $f(x)=60x^2-71x+21$

បើ $f(x)=0\Leftrightarrow 60x^2-71x+21=0$

$\Delta=(-71)^2-4(60)(21)=5041-5040=1$

គេទាញឫស $x_1=\frac{71-1}{120}=\frac{7}{12}$, $x_2=\frac{71+39}{120}=\frac{3}{5}$

យើងបាន $f(x)=60x^2-71x+21<0$

នាំឱ្យ $\frac{7}{12}<x<\frac{3}{5}$ ឬ $\frac{7}{4}<3x<\frac{9}{5}$

$\frac{3}{4}<3x-1<\frac{4}{5}$ នាំឱ្យ $\frac{4}{5}<\frac{1}{3x-1}<\frac{4}{3}$

គេទាញ $\frac{4\pi}{5}<\frac{\pi}{3x-1}<\frac{4\pi}{3}$ នាំឱ្យ $\sin\left(\frac{\pi}{3x-1}\right)<0$ ។

ដូចនេះ បើ x ជាចំនួនពិតដែល $60x^2-71x+21<0$

គេបាន $\sin\left(\frac{\pi}{3x-1}\right)<0$ ។

លំហាត់ទី៥៧

គេឱ្យ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)} \ge 1+\sqrt{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)} \ge 1+\sqrt{2}$$

យើងមាន :

$$\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right) = 1+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x\cos x}$$

គេមាន $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x} \ge 2\sqrt{\frac{1}{\sin x\cos x}}$

គេទាញ $\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right) \ge 1+2\sqrt{\frac{1}{\sin x\cos x}}+\frac{1}{\sin x\cos x}$

ដោយ $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \le \frac{1}{2}$ នោះ $\frac{1}{\sin x\cos x} \ge 2$

គេបាន $\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right) \ge 1+2\sqrt{2}+2 = (1+\sqrt{2})^2$

ដូចនេះ $\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)} \ge 1+\sqrt{2}$ ។

លំហាត់ទី៥៨

គេឱ្យត្រីកោណ ABC ។

១-ចំពោះគ្រប់ $x, y \in]0,\pi[$ ចូរស្រាយថា :

$\sin x+\sin y \le 2\sin(\frac{x+y}{2})$ ។

២-ចូរស្រាយថា $\sin A+\sin B+\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ។

៣-ទាញបង្ហាញថា :

ក. $\sin A.\sin B.\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$

ខ. $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$

ដំណោះស្រាយ

១-ស្រាយថា $\sin x+\sin y \le 2\sin(\frac{x+y}{2})$

យើងមាន $\sin x+\sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

ដោយ $x, y \in]0,\pi[$

គេទាញ $0<\frac{x+y}{2}<\pi$, $-\frac{\pi}{2}<\frac{x-y}{2}<\frac{\pi}{2}$

ហើយ $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)>0$ និង $\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\le 1$

គេទាញ $\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\le 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$

ដូចនេះ $\sin x+\sin y\ \le 2\sin(\ \frac{x+y}{2}\ )$ គ្រប់ $x,y\in]0,\pi[$ ។

២-ស្រាយថា $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\sin x+\sin y\ \le 2\sin(\ \frac{x+y}{2}\ )$

ដោយ A,B,C ជាមុំក្នុងនៃត្រីកោណ ABC

នោះគេមាន $A,B,C\in]0\ ,\ \pi[$ ។

យើងបាន $\sin A+\sin B\le 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\quad (a)$

$$\sin C+\sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right)\le 2\sin(\ \frac{C+\frac{A+B+C}{3}}{2}\ )$$

$$<2\sin\left(\frac{A+B+4C}{6}\right)\quad (b)$$

បូកវិសមីការ (a) និង (b) អង្គ និង អង្គគេបាន :

$$\sin A+\sin B+\sin C+\sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right)\le 2\left[\sin(\frac{A+B}{2})+\sin(\frac{A+B+4C}{6})\right]\ (c)$$

ដោយគេមាន $\sin(\frac{A+B}{2})+\sin(\frac{A+B+4C}{6})\le 2\sin(\ \frac{\frac{A+B}{2}+\frac{A+B+4C}{6}}{2}\ )$

$$\sin(\frac{A+B}{2})+\sin(\frac{A+B+4C}{6})\le 2\sin(\ \frac{A+B+C}{3}\ )\ \ (d)$$

តាមទំនាក់ទំនង (c) និង (d) គេទាញបាន

$$\sin A+\sin B+\sin C+\sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right)\le 4\sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$$

$$\sin A+\sin B+\sin C \;\le\; 3\sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ដូចនេះ $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ។

៣-ទាញបង្ហាញ

ក, $\sin A.\sin B.\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$

តាមវិសមភាពកូស៊ី $\sin A+\sin B+\sin C\ge 3\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}$

គេទាញ $3\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$

នាំឱ្យ $\sin A\sin B\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$

ដូចនេះ $\sin A.\sin B.\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ។

ខ, $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$

យើងមាន $\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

ដោយ $A+B+C=\pi$ ឬ $\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$

គេមាន $\sin\frac{A+B}{2}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})=\cos\frac{C}{2}$ $,\cos\frac{A+B}{2}=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})=\sin\frac{C}{2}$

គេបាន$\sin A+\sin B+\sin C=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\cos\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2})$$

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$

យើងទាញ $4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$

ដូចនេះ $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ។

លំហាត់ទី៥៩

គេឲ្យស៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n)កំនត់ដោយ ”

$$\begin{cases} Z_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ Z_{n+1} = \frac{1}{2}(\ Z_n + |\ Z_n\ |\ )\ ;\ n \in IN \end{cases}$$

($|Z_n|$ ជាម៉ូឌុលនៃ Z_n) ។

សន្មតថា $Z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i.\sin\theta_n)$, $\forall n \in IN$

ដែល $\rho_n > 0$, $\rho_n ; \theta_n \in IR$ ។

ក_រកទំនាក់ទំនងរវាង θ_nនិងθ_{n+1} ហើយρ_nនិងρ_{n+1} ។

ខ_រកប្រភេទនៃស៊ីត(θ_n)រួចគណនាθ_nជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ_ចូរបង្ហាញថា$\rho_n = \rho_0 \cos\theta_0 \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}....\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}$

រួបញ្ចូក់ρ_n អនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក_ទំនាក់ទំនងរវាង θ_n និង θ_{n+1} ហើយ ρ_n និង ρ_{n+1}

យើងមាន $Z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i.\sin\theta_n)$

នាំឲ្យ $Z_{n+1} = \rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i\sin\theta_{n+1})$

ដោយ $Z_{n+1} = \frac{1}{2}(Z_n + |Z_n|)$ ហើយ $|Z_n| = \rho_n$

គេបាន ៖

$$\rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i\sin\theta_{n+1}) = \frac{1}{2}[\rho_n(\cos\theta_n + i.\sin\theta_n) + \rho_n]$$

$$\rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i.\sin\theta_{n+1}) = \frac{1}{2}\rho_n(1 + \cos\theta_n + i.\sin\theta_n)$$

$$\rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i.\sin\theta_{n+1}) = \rho_n\cos\frac{\theta_n}{2}(\cos\frac{\theta_n}{2} + i.\sin\frac{\theta_n}{2})$$

គេទាញបាន $\rho_{n+1} = \rho_n\cos\frac{\theta_n}{2}$ និង $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2} \quad \text{និង} \quad \rho_{n+1} = \rho_n\cos\frac{\theta_n}{2}}$ ។

ខ_ប្រភេទនៃស្វ៊ីត (θ_n)និងគណនា θ_nជាអនុគមន៏នៃ n ៖

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន $\theta_{n+1} = \frac{1}{2}\theta_n$

នាំឲ្យ (θ_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុងស្មើ $q = \frac{1}{2}$ ។

តាមរូបមន្ត $\theta_n = \theta_0 \times q^n$

ដោយ $Z_0 = \rho_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}$

គេទាញបាន $\rho_0 = 1\,;\,\theta_0 = \frac{\pi}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{\theta_n = \frac{\pi}{3}.\frac{1}{2^n}}$ ។

គ_បង្ហាញថា $\rho_n = \rho_0 \cos\theta_0 \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}....\cos\frac{\theta_n}{2}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន ៖

$$\rho_{n+1} = \rho_n \cos\frac{\theta_n}{2} \text{ ឬ } \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} = \cos\frac{\theta_n}{2}$$

គេបាន $\prod_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}\right) = \prod_{k=0}^{k=n-1}\left[\cos(\frac{\theta_k}{2})\right]$

$$\frac{\rho_n}{\rho_0} = \cos\theta_0 . \cos\frac{\theta_1}{2} . \cos\frac{\theta_2}{2} ....\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\rho_n = \rho_0 \cos\theta_0 \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}....\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតយើងមាន ៖

$$\sin\theta_n = 2\sin\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_n}{2} = 2\sin\theta_{n+1}\cos\frac{\theta_n}{2}$$

(ព្រោះ $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$)

គេទាញ $\cos\frac{\theta_n}{2} = \frac{1}{2} . \frac{\sin\theta_n}{\sin\theta_{n+1}}$

ហេតុនេះ $\rho_n = \frac{1}{2^n} . \frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_1} . \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} ..... \frac{\sin\theta_{n-1}}{\sin\theta_n} = \frac{1}{2^n} . \frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_n}$

ដូចនេះ $\boxed{\rho_n = \frac{1}{2^n} \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin(\frac{\pi}{3} . \frac{1}{2^n})} = \frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}} . \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{3} . \frac{1}{2^n})}}$ ។

លំហាត់ទី៦០

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n)កំនត់លើ n ដោយ៖

$U_0 = 1$ និង $\forall n \in IN : U_{n+1} = U_n \cos a + \sin a$

ដែល $0 < a < \frac{\pi}{2}$ ។

ក. តាង $V_n = U_n - \cot\frac{a}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា (V_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។

ខ.គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_0 + V_1 + ... + V_n)$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (V_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ៖

មាន $V_n = U_n - \cot\frac{a}{2}$ នាំឲ្យ $V_{n+1} = U_{n+1} - \cot\frac{a}{2}$

តែ $U_{n+1} = U_n \cos a + \sin a$

គេបាន $V_{n+1} = U_n \cos a + \sin a - \cot\frac{a}{2}$

$$= U_n \cos a + 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} - \cot\frac{a}{2}$$

$$= U_n \cos a + \cot\frac{a}{2}(2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\tan\frac{a}{2} - 1)$$

$$V_{n+1}=U_n\cos a+\cot\frac{a}{2}(2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}-1)$$

$$V_{n+1}=U_n\cos a+\cot\frac{a}{2}(2\sin^2\frac{a}{2}-1)$$

$$V_{n+1}=U_n\cos a-\cot\frac{a}{2}\cos a=(U_n-\cot\frac{a}{2})\cos a$$

$$V_{n+1}=V_n\cos a$$

ដោយ $V_{n+1}=V_n\cos a$

នាំឲ្យ (V_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $\cos a$

និង តួ $V_0=U_0-\cot\frac{a}{2}=1-\cot\frac{a}{2}$ ។

ខ.គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(V_0+V_1+....+V_n)$ និង $\lim_{n\to+\infty}U_n$

យើងមាន:

$$V_0+V_1+...+V_n=V_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=(1-\cot\frac{a}{2}).\frac{1-\cos^{n+1}a}{1-\cos a}$$

យើងបាន $\lim_{n\to+\infty}(V_0+V_1+....+V_n)=\lim_{n\to+\infty}\left[(1-\cot\frac{a}{2})\frac{1-\cos^{n+1}a}{1-\cos a}\right]$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty}\cos^{n+1}a=0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(V_0+V_1+....+V_n)=\frac{1-\cot\frac{a}{2}}{1-\cos a}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $V_n = U_n - \cot\frac{a}{2}$ នាំឲ្យ $U_n = V_n + \cot\frac{a}{2}$

ដោយ $V_n = V_0 \times q^n = (1-\cot\frac{a}{2})\cos^n a$

គេបាន $U_n = (1-\cot\frac{a}{2})\cos^n a + \cot\frac{a}{2}$

និង $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left[(1-\cot\frac{a}{2})\cos^n a + \cot\frac{a}{2}\right] = \cot\frac{a}{2}$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} U_n = \cot\frac{a}{2}$ ។

<u>លំហាត់ទី៦១</u>

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n)កំនត់ដោយ ៖

$U_0 = 0$; $U_1 = 1$ និង $\forall n \in IN : U_{n+2} = 2U_{n+1}\cos a - U_n$

ដែល $a \in IR$ ។

ក. តាង $Z_n = U_{n+1} - (\cos a - i\sin a)\,U_n$, $\forall n \in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា $Z_{n+1} = (\cos a + i\sin a)\,Z_n$ រួចទាញរក

Z_nជាអនុគមន៍ n និង a ។

ខ. ទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim_{a\to 0} U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា $Z_{n+1}=(\cos a+i\sin a)\ Z_n$

យើងមាន $Z_n=U_{n+1}-(\cos a-i\sin a)U_n$

យើងបាន $Z_{n+1}=U_{n+2}-(\cos a-i\sin a)U_{n+1}$

$$=2U_{n+1}\cos a-U_n-(\cos a-i\sin a)U_{n+1}$$

$$=(\cos a+i\sin a)U_{n+1}-U_n$$

$$=(\cos a+i\sin a)(U_{n+1}-\frac{U_n}{\cos a+i\sin a})$$

$$=(\cos a+i\sin a)\left[U_{n+1}-(\cos a-i\sin a)U_n\ \right]$$

$$=(\cos a+i\sin a)\ U_n$$

ដូចនេះ $Z_{n+1}=(\cos a+i\sin a)\ Z_n$ ។

គណនា Z_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ៖

ដោយ $Z_{n+1}=(\cos a+i\sin a)\ Z_n$

នាំឲ្យ (Z_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចដែលមានរេសុង

$q=\cos a+i\sin a$ និងតួ $Z_0=U_1-(\cos a-i\sin a)U_0=1$

តាមរូបមន្ត $Z_n=Z_0\times q^n=(\cos a+i\sin a)^n=\cos(na)+i\sin(na)$

ដូចនេះ $\boxed{Z_n=\cos(na)+i.\sin(na)}$ ។

ខ.ទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $Z_n = U_{n+1} - (\cos a - i\sin a)U_n$ (1)

និង $\overline{Z}_n = U_{n+1} - (\cos a + i\sin a)U_n$ (2)

ដកសមីការ (1) និង (2)អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$Z_n - \overline{Z}_n = 2i\sin a \; U_n$ នាំឲ្យ $U_n = \dfrac{Z_n - \overline{Z}_n}{2i\sin a}$

ដែល $\sin a \neq 0$ ។

ដោយ $Z_n = \cos(na) + i\sin(na)$

និង $\overline{Z}_n = \cos(na) - i\sin(na)$

គេបាន $U_n = \dfrac{\cos(na) + i\sin(na) - \cos(na) + i\sin(na)}{2i\sin a} = \dfrac{\sin(na)}{\sin a}$

ដូចនេះ $\boxed{U_n = \dfrac{\sin(na)}{\sin a}}$ ។

ហើយ $\lim\limits_{a\to 0} U_n = \lim\limits_{a\to 0} \dfrac{\sin(na)}{\sin a} = n \lim\limits_{a\to 0} \dfrac{\sin(na)}{(na)} \times \dfrac{a}{\sin a} = n$

ដូចនេះ $\lim\limits_{a\to 0} U_n = n$ ។

លំហាត់ទី៦២

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$4\sin(x+\frac{\pi}{4})\cos(x+\frac{\pi}{12})=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$4\sin(x+\frac{\pi}{4})\cos(x+\frac{\pi}{12})=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

តាមរូបមន្ត $2\sin a\cos b=\sin(a+b)+\sin(a-b)$

សមីការខាងលើអាចសរសេរជាបន្តបន្ទាប់ខាងក្រោម ៖

$$2\left[\sin(x+\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{12})+\sin(x+\frac{\pi}{4}-x-\frac{\pi}{12})\right]=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

$$2\left[\sin(2x+\frac{\pi}{3})+\sin\frac{\pi}{6}\right]=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}$$

$$2\sin(2x+\frac{\pi}{3})+1=1+\sqrt{2}$$

$$\sin(2x+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

គេទាញ $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ឬ $2x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

ដូចនេះ $x=-\frac{\pi}{24}+k\pi;\ x=\frac{5\pi}{24}+k\pi\ ;\ k\in Z$

លំហាត់ទី៦៣

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ :

$$U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ និង } U_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_n^2}}{2}} \quad , \forall n \in IN$$

គណនា U_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា U_n ជាអនុគមន៏នៃ n

យើងមាន $U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី p គឺ $U_p = \sin\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $(p+1)$ គឺ $U_{p+1} = \sin\frac{\pi}{2^{p+3}}$ ពិត

យើងមាន $U_{p+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_p^2}}{2}}$ តាមការឧបមា $U_p = \sin\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងបាន $U_{p+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^{p+2}}}}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}}{2}} = \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\pi}{2^{p+3}}}{2}} = \sin\frac{\pi}{2^{p+3}} \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $\boxed{U_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}$ ។

លំហាត់ទី៦៤

គេឱ្យ

$$\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{2^2}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2}} = 2\cos\frac{\pi}{2^3}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^4}$$

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅ និង ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនោះផង

ដំណោះស្រាយ

រករូបមន្តទូទៅ ÷

គេមាន

$$\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{2^2}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2}} = 2\cos\frac{\pi}{2^3}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^4}$$

តាមលំនាំឧទាហរណ៍យើងអាចទាញរករូបមន្តទូទៅដូចខាងក្រោម ÷

$$\boxed{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.........+\sqrt{2}}}}}_{(n)} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនេះ ÷

យើងតាង $A_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+......+\sqrt{2}}}}}_{(n)}$

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

យើងមាន $A_1 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{2^2}$ ពិត

យើងឧបមាថាវាពិតដល់តួទី p គឺ ”

$$A_p = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+......+\sqrt{2}}}}}_{(p)} = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+1}}$$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $p+1$ គឺ $A_{p+1} = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$ ពិត

យើងមាន $A_{p+1} = \sqrt{2+A_p}$

ដោយតាមការឧបមា $A_p = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+1}}$

យើងបាន $A_{p+1} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{p+1}}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{p+2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.........+\sqrt{2}}}}}_{(n)} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$ ។

លំហាត់ទី៦៥

យក a; b ;c ជាប្រវែងជ្រុង និង A,B,C ជារង្វាស់មុំទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC មួយដែល S ជាក្រលាផ្ទៃត្រីកោណនោះ ។

ស្រាយថា $CotA + CotB + CotC = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\cos A$$

$$= b^2 + c^2 - 4(\frac{1}{2}bc\sin A)\frac{\cos A}{\sin A}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4S\cot gA \quad (1)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 4S\cot gB \quad (2)$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 4S\cot gC \quad (3)$$

បូក (1),(2),(3) យើងបាន

$$a^2+b^2+c^2 = 2(a^2+b^2+c^2) - 4S(\cot gA + \cot gB + \cot gC)$$

$$\cot gA + \cot gB + \cot gC = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$$

ដូចនេះ $\boxed{\cot gA + \cot g\mathrm{B} + \cot gC = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}}$

លំហាត់ទី៦៦

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនួសក្នុងត្រីកោណ ABC គេមាន ៖

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ សមមូល $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ សមមូល $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ សមមូល $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

តាង $M = \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2abc} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2abc}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2 + a^2 + c^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2}{2abc}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}}$ ។

លំហាត់ទី៦៧

ដោះស្រាយសមីការ

ក. $2(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(2\sin^3 x) = 0$

ខ. $\left(\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos x\right)^2 + 3\log_{\sqrt{2}} \cos x + 2 = 0$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ

ក. $2(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(2\sin^3 x) = 0$

លក្ខ័ខណ្ឌ $\sin x > 0$

សមីការអាចសរសេរ :

$2\ (\log_2 \sin x)^2 + \log_2(\sin^3 x) + \log_2 2 = 0$

$2\ (\log_2 \sin x)^2 + 3\log_2 \sin x + 1 = 0$

តាង $X = \log_2 \sin x$

$2X^2 + 3X + 1 = 0$ មានឫស $X_1 = -1\ ;\ X_2 = -\frac{1}{2}$

-ចំពោះ $X = -1$ គេបាន $\log_2 \sin x = -1$ ឬ $\sin x = \frac{1}{2}$

គេទាញឫស $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ឬ $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in Z)$

-ចំពោះ $X=-\frac{1}{2}$ គេបាន $\log_2 \sin x=-\frac{1}{2}$ ឬ $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

គេទាញឫស $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ឬ $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \quad (k\in Z)$

ខ. $\left(\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos x\right)^2+3\log_{\sqrt{2}} \cos x+2=0$

លក្ខខណ្ឌ $\cos x>0$

តាង $t=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos x$ នោះ $\log_{\sqrt{2}} \cos x=-t$

គេបាន $t^2-3t+2=0$ មានឫស $t_1=1\ ;\ t_2=2$

-ចំពោះ $t_1=1$ គេបាន $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos x=1$ ឬ $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

គេទាញឫស $x=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad (k\in Z)$

-ចំពោះ $t_2=2$ គេបាន $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos x=2$ ឬ $\cos x=\frac{1}{2}$

គេទាញឫស $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad (k\in Z)$

លំហាត់ទី៦៨

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} (2\sin x)^{\ln 2} = (\sqrt{2}\sin y)^{\ln\sqrt{2}} \\ (\sqrt{2})^{\ln\sin x} = 2^{\ln\sin y} \end{cases}$$

ដែល $0 < x < \frac{\pi}{2}$ និង $0 < y < \frac{\pi}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} (2\sin x)^{\ln 2} = (\sqrt{2}\sin y)^{\ln\sqrt{2}} & (i) \\ (\sqrt{2})^{\ln\sin x} = 2^{\ln\sin y} & (ii) \end{cases}$$

សមីការ (i) អាចសរសេរ :

$$\ln(2\sin x)^{\ln 2} = \ln(\sqrt{2}\sin y)^{\ln\sqrt{2}}$$

$$\ln 2(\ln 2 + \ln\sin x) = \frac{1}{2}\ln 2\ (\frac{1}{2}\ln 2 + \ln\sin y)$$

$$\ln 2 + \ln\sin x = \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\sin y$$

$$\ln\sin x - \frac{1}{2}\ln\sin y = -\frac{3}{4}\ln 2 \quad (a)$$

សមីការ (ii) អាចសរសេរ :

$$\ln\left(\sqrt{2}\right)^{\ln\sin x} = \ln\left(2^{\ln\sin y}\right)$$

$$\ln\sin x \ \ln\sqrt{2} = \ln\sin y \ \ln 2$$

$$\frac{1}{2}\ln\sin x \ \ln 2 = \ln\sin y \ \ln 2$$

$$\ln\sin x = 2\ln\sin y \quad (b)$$

យកសមីការ (b) ជួក្នុង (a) គេបាន :

$$2\ln\sin y - \frac{1}{2}\ln\sin y = -\frac{3}{4}\ln 2$$

$$\frac{3}{2}\ln\sin y = -\frac{3}{4}\ln 2$$

$$\ln\sin y = -\frac{1}{2}\ln 2$$

$$\ln\sin y = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

គេទាញ $\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ នាំឱ្យ $y = \frac{\pi}{4}$ ព្រោះ $0 < y < \frac{\pi}{2}$

តាម (b) គេទាញ $\ln\sin x = 2\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

គេទាញ $\sin x = \frac{1}{2}$ នាំឱ្យ $x = \frac{\pi}{6}$ ព្រោះ $0 < x < \frac{\pi}{2}$

ដូចនេះ $x = \frac{\pi}{6}$ និង $y = \frac{\pi}{4}$ ។

លំហាត់ទី៦៩

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} \sin x+\sin y=\frac{3}{2} \\ 2^{\sin x}+2^{\sin y}=2+\sqrt{2} \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} \sin x+\sin y=\frac{3}{2} & (i) \\ 2^{\sin x}+2^{\sin y}=2+\sqrt{2} & (ii) \end{cases}$$

តាម (i) គេទាញ $\sin y=\frac{3}{2}-\sin x \quad (iii)$

យក (iii) ជួសក្នុង (ii) គេបាន :

$$2^{\sin x}+2^{\frac{3}{2}-\sin x}=2+\sqrt{2}$$

$$2^{\sin x}+2\sqrt{2}\,.\,2^{-\sin x}=2+\sqrt{2}$$

តាង $t=2^{\sin x}>0$

គេបាន $t+2\sqrt{2}\frac{1}{t}=2+\sqrt{2}$

ឬ $t^2-(2+\sqrt{2})t+2\sqrt{2}=0$ មានឫស $t_1=\sqrt{2}\ ;\ t_2=2$

-ចំពោះ $t=\sqrt{2}$ គេបាន $2^{\sin x}=\sqrt{2}$ នាំឱ្យ $\sin x=\frac{1}{2}$

គេទាញឫស $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ឬ $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \quad (k\in Z)$

ហើយតាម (iii) គេបាន $\sin y=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$

គេទាញ $y=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ ; k\in Z$

-ចំពោះ $t=2$ គេបាន $2^{\sin x}=2$ នាំឱ្យ $\sin x=1$

គេទាញឫស $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in Z)$

ហើយតាម (iii) គេបាន $\sin y=\frac{3}{2}-=\frac{1}{2}$

គេទាញ $y=\frac{\pi}{6}+2k\pi \ ; \ y=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \ ; k\in Z$ ។

លំហាត់ទី៧០

គេឲ្យ $0 < a < \frac{\pi}{2}$ និង $0 < b < \frac{\pi}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\left(\frac{\sin^2 a}{\sin b}\right)^2 + \left(\frac{\cos^2 a}{\cos b}\right)^2 = 1$

លុះត្រាតែ $a = b$ ។

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ

គេមាន $\left(\frac{\sin^2 a}{\sin b}\right)^2 + \left(\frac{\cos^2 a}{\cos b}\right)^2 = 1$

សមមូល $(\sin^2 b + \cos^2 b)\left(\frac{\sin^4 a}{\sin^2 b} + \frac{\cos^4 a}{\cos^2 b}\right) = 1$

$$\sin^4 a + \cos^4 a + \frac{\cos^2 b}{\sin^2 b}\sin^4 a + \frac{\sin^2 b}{\cos^2 b}\cos^4 a = 1$$

$$1 - 2\sin^2 a\cos^2 a + \frac{\cos^2 b}{\sin^2 b}\sin^4 a + \frac{\sin^2 b}{\cos^2 b}\cos^4 a = 1$$

$$\left(\frac{\cos b}{\sin b}\sin^2 a - \frac{\sin b}{\cos b}\cos^2 a)\right)^2 = 0$$

គេទាញ $\frac{\cos b}{\sin b}\sin^2 a = \frac{\sin b}{\cos b}\cos^2 a$

សមមូល $\dfrac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \dfrac{\sin^2 b}{\cos^2 b}$

សមមូល $\tan^2 a = \tan^2 b$

ដោយ $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ និង $0 < b < \dfrac{\pi}{2}$

នោះគេទាញ $a = b$ ។

លំហាត់ទី៧១

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ

$\sin^2 B + \sin^2 C = 1 + \sin B \sin C \cos A$ ។

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសគេមាន $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

គេទាញ $a = 2R\sin A , b = 2R\sin B , c = 2R\sin C$

ដោយ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស)

គេទាញបាន ៖

$$4R^2 \sin^2 A = 4R^2(\sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A)$$

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A \quad (1)$$

តែ $\sin^2 B + \sin^2 C = 1 + \sin B \sin C \cos A \quad (2)$

យកសមីការ (2) ជួសនៅក្នុង (1) គេទាញ $\sin^2 A = 1$

នាំឲ្យ $A = 90^0$ ។ ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែង ។

លំហាត់ទី៧២

គេឲ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង **a , b , c** ។

កំនត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ **ABC** បើគេដឹងថា ៖

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

ដំណោះស្រាយ

ប្រភេទនៃត្រីកោណ **ABC**

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ ABC គេមាន ៖

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ នាំឲ្យ $\frac{\cos A}{a}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}$ **(1)**

ដូចគ្នាដែរគេទាញ $\frac{\cos B}{b}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2abc}$ **(2)**

និង $\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$ **(3)**

បូកទំនាក់ទំនង (1) , (2) ,(3) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

ដោយ $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$

គេទាញបាន ៖

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}=\frac{bc+ca+ab}{2abc}$$

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$$

$$2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2bc+2ac$$

$$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ac+a^2)=0$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

គេទាញបានសមភាព $a=b=c$ ។

ដូចនេះ **ABC** ជាត្រីកោណសមង្ស័ ។

លំហាត់ទី៧៣

ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq 4\sqrt{\frac{R}{r}}$$

ដែល r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq 4\sqrt{\frac{R}{r}}$ (1)

តាង $BC=a\ ,\ AC=b\ ,\ AB=c$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ ABC គេមាន ៖

$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$ ដោយ $\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}$

នោះ $a^2=b^2+c^2-2bc(1-2\sin^2\frac{A}{2})$

គេទាញ $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$

តាង $p=\frac{a+b+c}{2}$ (កន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ)

គេបាន $a+b-c=2(p-c)$ និង $a-b+c=2(p-b)$

គេបាន $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$

នាំឲ្យ $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ ។ ដូចគ្នាដែរគេទាញ ៖

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\ ;\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

គេបាន $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$

គេមាន $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr=\frac{abc}{4R}$

គេទាញ $abc=4R.S$ និង $(p-a)(p-b)(p-c)=\frac{S^2}{p}=r.S$

គេបាន $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r.S}{4R.S}=\frac{r}{4R}$ ។

វិសមភាព (1) សមមូលទៅនឹង ៖

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq 4\sqrt{\frac{1}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}$$

$$\sqrt{\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}}+\sqrt{\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}}+\sqrt{\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}}\geq 2 \qquad (2)$$

ដោយ $\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)^2(p-b)(p-c)}{a^2bc}}=\frac{p-a}{a}\sin\frac{A}{2}$

គេទាញ $\dfrac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\dfrac{p-a}{a}$ ។ ដូចគ្នាដែរគេទាញបាន ៖

$\dfrac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=\dfrac{p-b}{b}$ និង $\dfrac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\dfrac{p-c}{c}$

វិសមភាព (2) សមមូលទៅនឹង ៖

$$\sqrt{\frac{p-a}{a}}+\sqrt{\frac{p-b}{b}}+\sqrt{\frac{p-c}{c}}\ge 2$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន ៖

$p=(p-a)+a\ge 2\sqrt{(p-a)a}$ នាំឲ្យ $\sqrt{\dfrac{p-a}{a}}\ge\dfrac{2(p-a)}{p}$

ដូចគ្នាដែរ $\sqrt{\dfrac{p-b}{b}}\ge\dfrac{2(p-b)}{p}$ និង $\sqrt{\dfrac{p-c}{c}}\ge\dfrac{2(p-c)}{p}$

គេបាន

$$\sqrt{\frac{p-a}{a}}+\sqrt{\frac{p-b}{b}}+\sqrt{\frac{p-c}{c}}\ge 2\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{p}$$

$\sqrt{\dfrac{p-a}{a}}+\sqrt{\dfrac{p-b}{b}}+\sqrt{\dfrac{p-c}{c}}\ge 2$ ពិត

ដូចនេះ $\dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}\ge 4\sqrt{\dfrac{R}{r}}$ ។

លំហាត់ទី៧៤

ក. ចូរស្រាយថា $\frac{\cos 2a}{\sin^2 2a}=\frac{1}{2\sin^2 a}-\frac{1}{\sin^2 2a}$

ខ.គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k}.\frac{\cos\frac{x}{2^k}}{\sin^2\frac{x}{2^k}}\right)$

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $\frac{\cos 2a}{\sin^2 2a}=\frac{1}{2\sin^2 a}-\frac{1}{\sin^2 2a}$

គេមាន $\cos 2a=2\cos^2 a-1$ និង $\sin 2a=2\sin a\cos a$

គេបាន $\frac{\cos 2a}{\sin^2 2a}=\frac{2\cos^2 a-1}{4\sin^2 a\cos^2 a}$

$$=\frac{2\cos^2 a}{4\sin^2 a\cos^2 a}-\frac{1}{4\sin^2 a\cos^2 a}$$

$$=\frac{1}{2\sin^2 a}-\frac{1}{\sin^2 2a}$$

ដូចនេះ $\frac{\cos 2a}{\sin^2 2a}=\frac{1}{2\sin^2 a}-\frac{1}{\sin^2 2a}$

ខ.គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k}.\frac{\cos\frac{x}{2^k}}{\sin^2\frac{x}{2^k}}\right)$

គេមាន $\frac{\cos 2a}{\sin^2 2a}=\frac{1}{2\sin^2 a}-\frac{1}{\sin^2 2a}$

យក $a=\frac{x}{2^{k+1}}$ គេបាន :

$$\frac{\cos\frac{x}{2^k}}{\sin^2\frac{x}{2^k}}=\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2^{k+1}}}-\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2^k}}$$

គុណអង្គទាំងពីរ នឹង $\frac{1}{2^k}$ គេបាន :

$$\frac{1}{2^k}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2^k}}{\sin^2\frac{x}{2^k}}=\frac{1}{2^{k+1}\sin^2\frac{x}{2^{k+1}}}-\frac{1}{2^k\sin^2\frac{x}{2^k}}$$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^{k+1}\sin^2\frac{x}{2^{k+1}}}-\frac{1}{2^k\sin^2\frac{x}{2^k}}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^{n+1}}}-\frac{1}{\sin x}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^{n+1}}}-\frac{1}{\sin x}$ ។