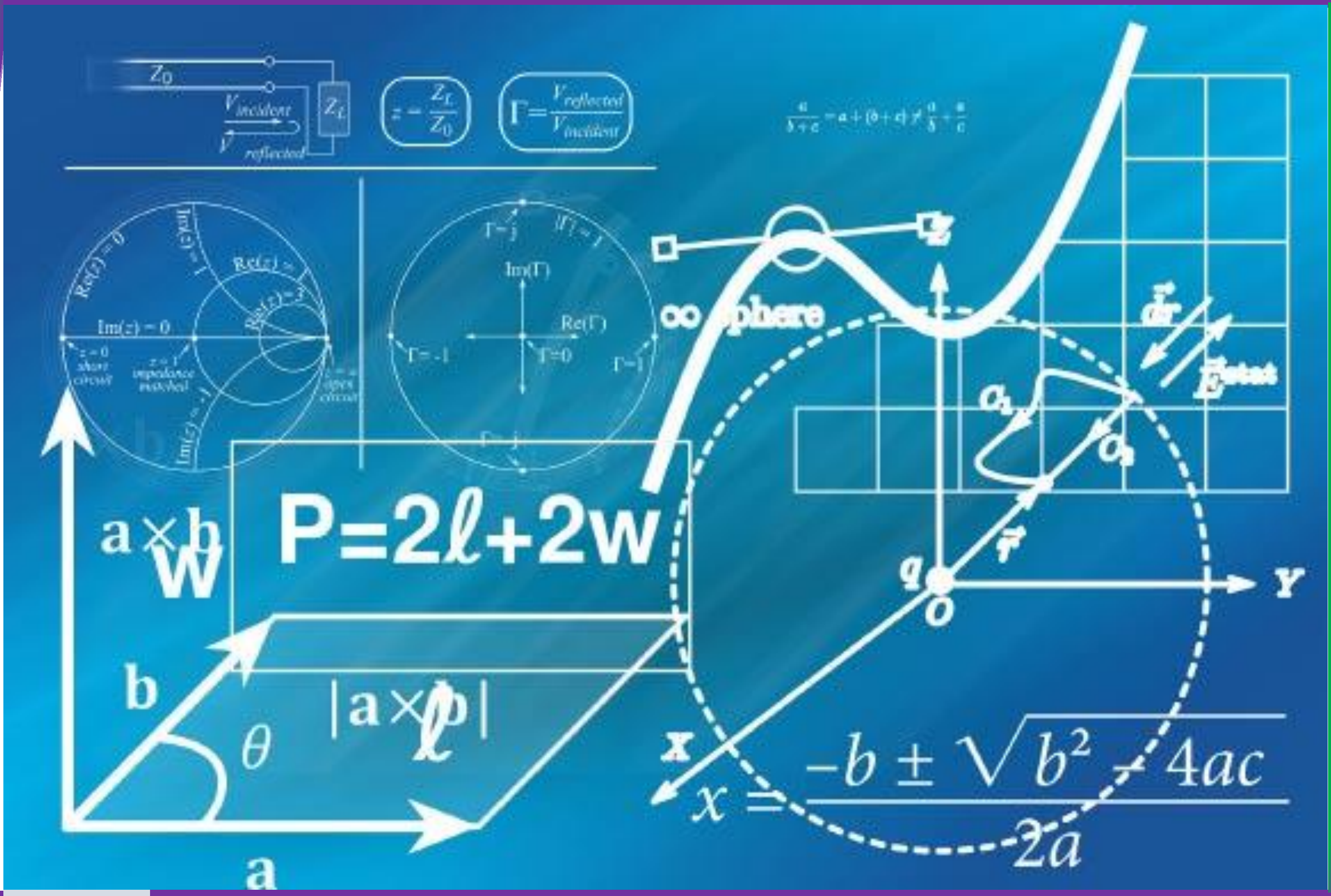
លំហាត់គណិតវិទ្យាជ្រើសរើស
សិស្សពូកែថ្នាក់ទី ១២



$e^{i\pi} + 1 = 0$

លោកគ្រូ នូ ច័ន្ទណារិទ្ធិ

Mathematics

ប្រធានលំហាត់ និង ដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី ១:

គេឱ្យស្វ៊ីត $\{b_n\}$ មាន $b_1 = 2, b_{n+1} = \dfrac{3b_n + 4}{2b_n + 3}$, $n \in \mathbf{N}$ ។ រក b_n ជាអនុគមន៍នៃ n។

ដំណោះស្រាយ

ដំបូងយើងត្រូវដោះស្រាយសមីការ $\lambda = \dfrac{3\lambda + 4}{2\lambda + 3}$

$\lambda = \dfrac{3\lambda + 4}{2\lambda + 3} \Rightarrow 2\lambda^2 + 3\lambda = 3\lambda + 4 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}$

នោះ $\dfrac{b_{n+1} - \sqrt{2}}{b_{n+1} + \sqrt{2}} = \dfrac{3b_n + 4 - \sqrt{2}(2b_n + 3)}{3b_n + 4 + \sqrt{2}(2b_n + 3)} = \dfrac{\left(\sqrt{2} - 1\right)^2}{\left(\sqrt{2} + 1\right)^2} \cdot \dfrac{b_n - \sqrt{2}}{b_n + \sqrt{2}}$

តាង $c_n = \dfrac{b_n - \sqrt{2}}{b_n + \sqrt{2}}, n \in \mathbf{N}$ នោះ $c_{n+1} = \left(\sqrt{2} - 1\right)^4 \cdot c_n$ និង $c_1 = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2$

យើងបាន $c_n = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^{4(n-1)} = \left(\sqrt{2} - 1\right)^{4n-2}$

តែ $\dfrac{b_n - \sqrt{2}}{b_n + \sqrt{2}} = c_n \Rightarrow \dfrac{b_n}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 + c_n}{1 - c_n} \Rightarrow b_n = \sqrt{2} \cdot \dfrac{1 + \left(\sqrt{2} - 1\right)^{4n-2}}{1 - \left(\sqrt{2} - 1\right)^{4n-2}}$

លំហាត់ទី ២:

ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ គឺ $S_n = -a_n - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + 2, n \in \mathbf{N}$។ រក a_n ជាអនុគមន៍នៃ n។

ដំណោះស្រាយ

•បើ $n = 1$ យើងបាន $a_1 = -a_1 - 1 + 2$

នោះ $a_1 = \dfrac{1}{2}$

•បើ $n \geq 2$

$$S_n - S_{n-1} = -a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 + a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - 2$$

$$\Rightarrow a_n = -a_n + a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2^n}$$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមភាពដោយ 2^n

$\Rightarrow 2^n a_n = 2^{n-1}a_{n-1} + 1,\ n \geq 2$

នោះស្វ៊ីត $\{2^n a_n, n \geq 1\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានតួទី១ និងផលសងរួមស្មើ 1

យើងបាន $2^n a_n = n$ ឬ $a_n = \dfrac{n}{2^n}$

លំហាត់ទី ៣:

ដោះស្រាយសមីការ $8^{sin^2x} + 8^{cos^2x} = 10 + cos2y$។

ដំណោះស្រាយ

$\Leftrightarrow 8^{sin^2x} + 8^{1-sin^2x} - 9 = 1 + cos2y$

$\Leftrightarrow t + \dfrac{8}{t} - 9 = 2cos^2y$ ដែល $t = 8^{sin^2x}(1 \leq t \leq 8)$

$\Leftrightarrow \dfrac{(t-1)(t-8)}{t} = 2cos^2y$

ដោយអង្គខាងឆ្វេង≤ 0 និងអង្គខាងស្តាំ≥ 0 នោះសមីការកើតមានកាលណា $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 8 \end{array}\right. \\ cos^2y = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 8^{sin^2x} = 1 \\ 8^{sin^2x} = 8 \end{array}\right. \\ cos^2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} sin2x = 0 \\ cosy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k\pi}{2} \\ y = \dfrac{\pi}{2} + l\pi\ (k, l \in \mathbf{Z}) \end{cases}$$

លំហាត់ទី ៤:

គេឱ្យអនុគមន៍ $y = \dfrac{2}{3}x^3 + (cosa - 3sina)x^2 - 8(cos2a + 1)$។

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ a **អនុគមន៍ដែលឱ្យមកមានតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមាជានិច្ច។**

ខ) អនុគមន៍នេះមានអតិបរមា និងអប្បបរមាត្រង់ចំណុច x_1 **និង** x_2**។**

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x_1^2 + x_2^2 \leq 18$។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ a អនុគមន៍ដែលឱ្យមកមានតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមាជានិច្ច
យើងមាន $y = \frac{2}{3}x^3 + (cosa - 3sina)x^2 - 8(cos2a + 1)$
$\Rightarrow y' = 2x^2 + 2(cosa - 3sina)x - 8(cos2a + 1)$
បើ $y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2(cosa - 3sina)x - 8(cos2a + 1) = 0$
ឬ $x^2 + (cosa - 3sina)x - 8cos^2a = 0 \quad (1)$
ពិនិត្យ : $\Delta = (cosa - 3sina)^2 + 32cos^2a > 0$ ចំពោះគ្រប់ a
នោះសមីការ (1) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាចំពោះគ្រប់ a
ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់ a អនុគមន៍ដែលឱ្យមកមានតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមាជានិច្ច
ខ) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x_1^2 + x_2^2 \le 18$
យើងមាន $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$
ដោយ x_1, x_2 ជាឫសនៃសមីការ $x^2 + (cosa - 3sina)x - 8cos^2a = 0$
នោះ $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(cosa - 3sina) \\ x_1x_2 = -8cos^2a \end{cases}$
យើងបាន $x_1^2 + x_2^2 = (cosa - 3sina)^2 + 16cos^2a$

$$= cos^2a - 6sinacosa + 9sin^2a + 16cos^2a$$
$$= 17cos^2a + 9\left(1 - sin^2a\right) - 3sin2a$$
$$= 8cos^2a + 9 - 3sin2a$$
$$= 8\left(\frac{1 + cos2a}{2}\right) + 9 - 3sin2a$$
$$= 13 + 4cos2a - 3sin2a \le 13 + \sqrt{4^2 + 3^2} = 18 \text{ ពិត}$$

Euler's Theorem: គេឱ្យ $a, m \in \mathbf{Z}$ ដែល $m \ge 1$។ បើ $(a, m) = 1$ នោះ $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$។

លំហាត់ទី ៥:

ចូររកសំណល់ពេលដែលគេចែក $9^{10} + 9^{10^2} + \ldots + 9^{10^{100}}$ នឹង 7។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $(9, 7) = 1$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទអឺលែរ $9^6 \equiv 1 \pmod 7$
នោះ $9^{10} \equiv 9^4 \equiv 3^8 \equiv 3^2 \equiv 2 \pmod 7$
ដូចគ្នាដែរ $9^{10^2} \equiv \left(9^{10}\right)^{10} \equiv 2^{10} \equiv 2 \pmod 7$

ឧបមាថាពិតដល់ $n = k$ គឺ $9^{10^k} \equiv 2(\text{mod}7)$
ពិនិត្យ : $n = k + 1$

$$9^{10^{k+1}} = \left(9^{10^k}\right)^{10} \equiv 2^{10} \equiv 2\ (\text{mod}7)$$

តាមកំណើន : $9^{10^n} \equiv 2\ (\text{mod}7)$
យើងបាន $9^{10} + 9^{10^2} + \dots + 9^{10^{100}} \equiv 2 \cdot 100 \equiv 4\ (\text{mod}7)$
ដូចនេះ សំណល់ $R = 7$

Cauchy-Schwartz Inequality:
ចំពោះចំនួនពិត $a_1, a_2, \dots, a_n$ និង $b_1, b_2, \dots, b_n$:
$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2\right)$។
លើសពីនេះបើ $a_1, a_2, \dots, a_n$ មិនសូន្យព្រមគ្នា នោះសមភាពកើតមានកាលណាមានចំនួនថេរ k ដែល $b_i = ka_i$ ចំពោះ $i = 1, 2, 3, \dots, n$។

វិបាក ១: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \ge \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$ ដែល $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \ge 0$ និង $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i \ne 0$។

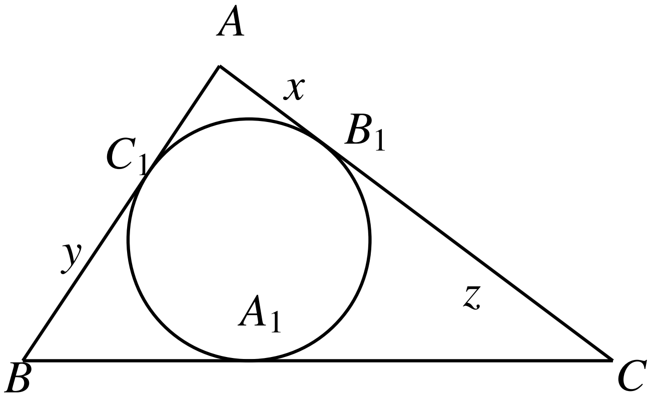
វិបាក ២: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \ge \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} a_ib_i}$ ដែល $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \ge 0$ និង $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \ne 0$។

វិបាក ៣: $\displaystyle\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i} \ge \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_ib_i}$ ដែល $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \ge 0$។

លំហាត់ទី ៦:

រង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ប៉ះជាមួយជ្រុង AB, AC និង BC រៀងគ្នាត្រង់ចំណុច C_1, B_1 និង A_1។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{\frac{AB_1}{AB}} + \sqrt{\frac{BC_1}{BC}} + \sqrt{\frac{CA_1}{CA}} \le \frac{3}{\sqrt{2}}$។

ដំណោះស្រាយ



តាង $x = Ab_1, y = BC_1, z = CA_1$

$\Rightarrow AB = x + y, BC = y + z, AC = z + x$

វិសមភាពដែលត្រូវស្រាយក្លាយជា : $\sqrt{\dfrac{x}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{y}{y+z}} + \sqrt{\dfrac{z}{z+x}} \leq \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

ឬ $\sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{y}{x}}} + \sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{y}}} + \sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{z}}} \leq \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

ឬ $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ ដែល $a = \sqrt{\dfrac{y}{x}}, b = \sqrt{\dfrac{z}{y}}, c = \sqrt{\dfrac{z}{x}} > 0$ និង $abc = 1$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwartz: $1 \cdot 1 + 1 \cdot c \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)(1 + c^2)}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{1+c}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leq \sqrt{2\left(\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}\right)}$$

តែ $\dfrac{1}{1+a^2} + \dfrac{1}{1+b^2} = 1 + \dfrac{1-a^2b^2}{(1+a^2)(1+b^2)} \leq 1 + \dfrac{1-a^2b^2}{(1+ab)^2} = \dfrac{2}{1+ab}$

$$\Rightarrow \sqrt{2\left(\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}\right)} \leq \sqrt{\frac{4}{1+ab}} = \frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{c}}} = \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{1+c}}$$

តាមវិសមភាព AM-GM:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{c+1}} + \frac{\sqrt{2}}{1+c}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{1+c}\left(\sqrt{2c(c+1)}+1\right) \le \frac{\sqrt{2}}{1+c}\left(\frac{2c+c+1}{2}+1\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$ ពិត

លំហាត់ទី ៧:

គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n > 1$។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{4\sqrt{\dots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}} < 3$។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k :

$$k = \sqrt{k^2} = \sqrt{1+(k^2-1)} = \sqrt{1+(k-1)(k+1)}$$

យើងបាន $3 = \sqrt{1+2\cdot 4} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\cdot 5}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{4\cdot 6}}} = \dots$

$$= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\dots+\sqrt{1+(n-1)(n+1)}}}}$$

នោះ $3 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\dots+\sqrt{1+(n-1)\sqrt{(n+1)^2}}}}} >$

$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{4\sqrt{\dots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}}$ ពិត

របៀបមួយទៀត:

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\dots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}} < \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\dots\sqrt{(n-1)\sqrt{(n+1)^2}}}}}$$

$$= \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\dots\sqrt{(n-2)\sqrt{(n-1)(n+1)}}}}} < \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\dots\sqrt{(n-2)\sqrt{n^2}}}}}$$

$< \dots . < \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{5^2}}} < 3$ ពិត

លំហាត់ទី ៨:

គេឱ្យ a, b, c, d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd + 4(a-b)^2\sqrt{abcd}$។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\sqrt{abcd} \leq 2(ab+cd)$ (វិសមភាព AM-GM)

នោះ $4abcd + 4(a-b)^2\sqrt{abcd} \leq 4abcd + 2(a-b)^2(ab+cd)$

យើងបាន $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = \left(a^2 - b^2\right)^2 + c^4 + d^4 + 2a^2b^2$

$$\geq \left(a^2 - b^2\right)^2 + 2c^2d^2 + 2a^2b^2$$

យើងនិងស្រាយថា $\left(a^2 - b^2\right)^2 + 2c^2d^2 + 2a^2b^2 \geq 4abcd + 2(a-b)^2(ab+cd)$

ដោយ $4abcd + 2(a-b)^2(ab+cd) = 4abcd + 2\left(a^2 - 2ab + b^2\right)(ab+cd)$

$= 4abcd + 2(a-b)^2ab + 2\left(a^2+b^2\right)cd - 4abcd = 2(a-b)^2ab + 2\left(a^2+b^2\right)cd$

វិសមភាពដែលត្រូវស្រាយទៅជា:

$$\left(a^2 - b^2\right)^2 + 2c^2d^2 + 2a^2b^2 \geq 2(a-b)^2ab + 2\left(a^2+b^2\right)cd$$

$$\left(a^2 - b^2\right)^2 - 2(a-b)^2ab = (a-b)^2\left(a^2 + 2ab + b^2 - 2ab\right)$$

$$= (a-b)^2\left(a^2+b^2\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}(a-b)^2(a+b)^2 = \frac{1}{2}\left(a^2-b^2\right)^2$$

ដូច្នេះ យើងគ្រាន់តែស្រាយថា : $\frac{1}{2}\left(a^2-b^2\right)^2 + 2c^2d^2 + 2a^2b^2 \geq 2\left(a^2+b^2\right)cd$

$$\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{2} - 2\left(a^2+b^2\right)cd + 2c^2d^2 \geq 0$$

$$\left(a^2+b^2\right)^2 - 4\left(a^2+b^2\right)cd + 4c^2d^2 \geq 0$$

$\left(a^2+b^2-2cd\right)^2 \geq 0$ ពិត

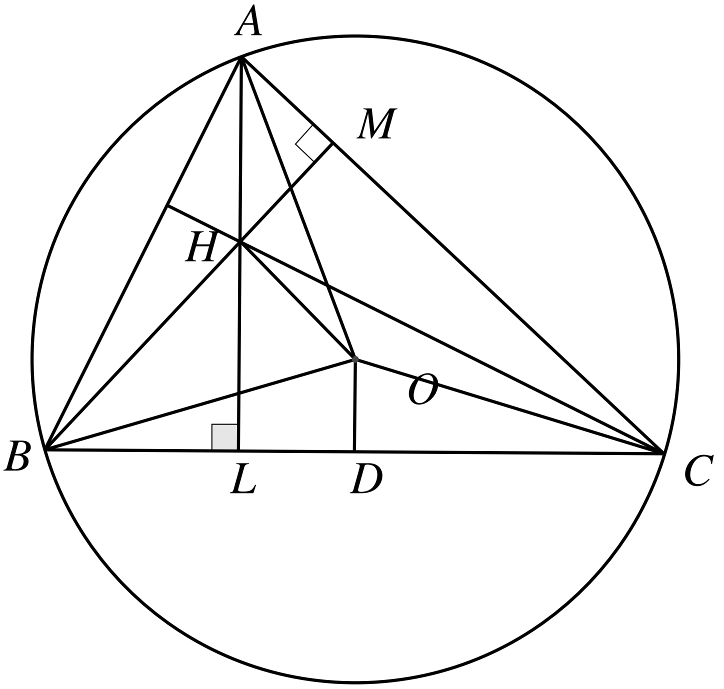
សមភាពកើតមានកាលណា $a = b = c = d$។

លំហាត់ទី ៩:

O និង H ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ និងអរតូសង់នៃត្រីកោណ ABC។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា :

ក) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ ខ) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$។

ដំណោះស្រាយ



ក) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

តាង D ជាចំណុចកណ្តាលនៃ BC

+ ក្នុងត្រីកោណ OBC:

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$$

នោះ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OD}$ (1)

+ ក្នុងចតុកោណ $HLCM$:

$$\angle HLC=\angle HMC=90^0$$
$$\angle LHM=180^0-C$$
$$\angle AHM=C$$

ដោយ O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC នោះ $\angle BOC=2A$

D ជាចំណុចកណ្តាលនៃ BC

នោះ $\angle BOD=\angle COD=A$ និង $OB=OC=OA=R$ (កាំនៃរង្វង់)

+ ក្នុងត្រីកោណ OBD:

$$cosA=\frac{OD}{OB}=\frac{OD}{R}\Rightarrow OD=RcosA$$

ឬ $2OD=2RcosA$ (2)

+ ក្នុងត្រីកោណ AHM:

$$sinC=\frac{AM}{AH}\quad(3)$$

តែក្នុងត្រីកោណ ABM, $cosA = \frac{AM}{AB} = \frac{AM}{c}$ ឬ $AM = ccosA$

តាម (3):

$$sinC = \frac{ccosA}{AH} \text{ ឬ } AH = \frac{c}{sinC} \cdot cosA$$

ឬ $AH = 2RcosA$ (ព្រោះ $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = 2R$) (4)

តាម (2)&(4) យើងបាន $2OD = AH$

ហើយដោយ AH និង OD សុទ្ធតែកែងនឹង BC នោះ $AH \parallel OD$

នោះ $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OD}$ (5)

តាម (1) $\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH}$

ខ) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$

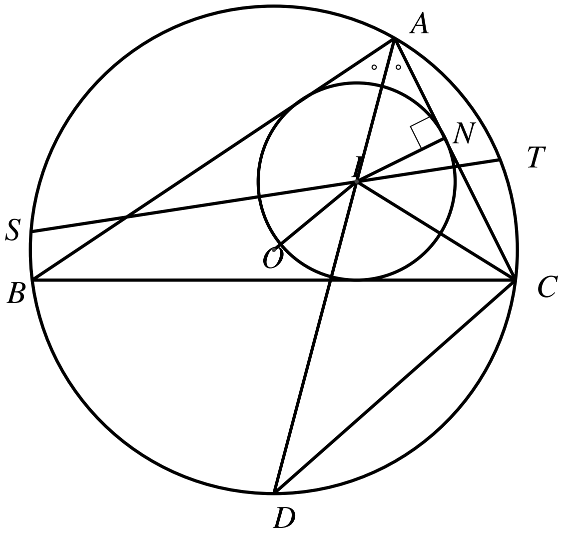
យើងបាន $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{DO} + 2\overrightarrow{HD} = 2\left(\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{HD}\right)$

$$= 2\left(\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DO}\right) = 2\overrightarrow{HO}$$

The Euler Line and Euler Formula:

បន្ទាត់អឺលែរ (The Euler Line of a triangle) ភ្ជាប់ពីផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅទៅផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង។ គេមានត្រីកោណ ABC មួយ។ O និង I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ និងចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនេះ។ R និង r ជាកាំរៀងគ្នានៃរង្វង់ចារឹកក្រៅ និងចារឹកក្នុង។ ប្រវែង $OI = \sqrt{R(R-2r)}$។

សម្រាយបញ្ជាក់



$$\angle DIC = \frac{A}{2} + \frac{C}{2} = \angle DCI$$

$|DI| = |DC| = 2Rsin\frac{A}{2}$

$\frac{|IN|}{|IA|} = sin\frac{A}{2}$; $|AI| = \frac{r}{sin\frac{A}{2}}$

តាង $|OI| = x$

យើងបាន $|SI| \cdot |IT| = |AI| \cdot |ID|$

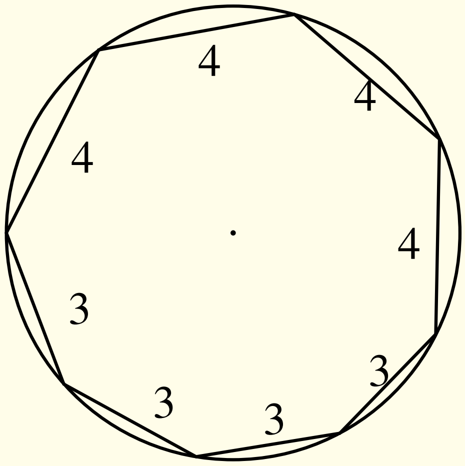
$$(R+x)(R-x) = \frac{r}{sin\frac{A}{2}} \cdot 2Rsin\frac{A}{2}$$

$$x^2 = R^2 - 2Rr$$

$$x = \sqrt{R^2 - 2Rr}$$

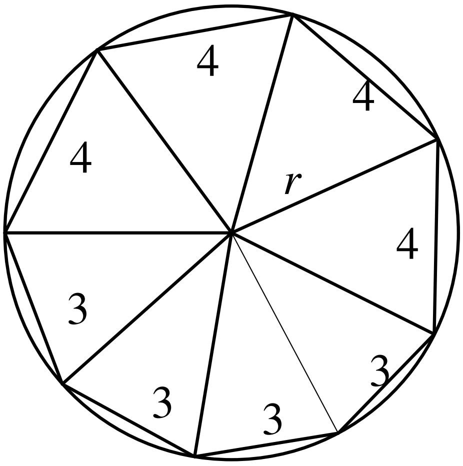
ដូចនេះ ចម្ងាយរវាងផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និងផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅគឺ $x = \sqrt{R(R-2r)}$

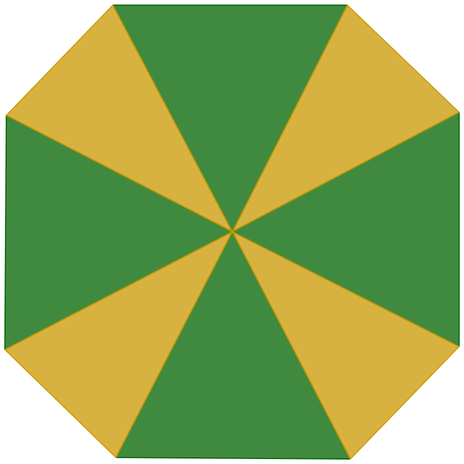
លំហាត់ទី ១០:
អដ្ឋកោណមួយមានជ្រុងមួយៗនៃជ្រុងបួនជាប់គ្នា មានរង្វាស់ 4 ហើយជ្រុងមួយៗនៃជ្រុងជាប់គ្នា បួនទៀតមានរង្វាស់ 3 (រូប)។ រកក្រឡាផ្ទៃនៃអដ្ឋកោណ។



ដំណោះស្រាយ

យើងអាចតំរៀបត្រីកោណទាំងនេះ ដើម្បីបង្កើតជាអដ្ឋកោណថ្មី មានផ្ទៃស្មើអដ្ឋកោណចាស់។



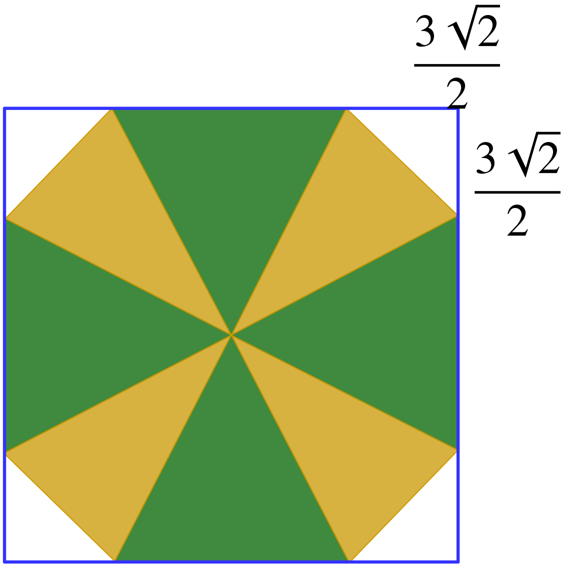


យើងសង់ការេដូចរូបខាងក្រោម:

តាង x ជាជ្រុងការេ នោះ $x = 4 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 4 + 3\sqrt{2}$

ផ្ទៃក្រឡាអដ្ឋកោណគឺ $S = S_{\text{ការេ}} - 4S_{\text{ត្រីកោណតូច}}$

$S = x^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = (4 + 3\sqrt{2})^2 - 9 = 25 + 24\sqrt{2}$ ឯកតាផ្ទៃ



របៀបមួយទៀត:

តាង r ជាកាំនៃរង្វង់

α, β ជាមុំមានរង្វាស់ស្មើពាក់កណ្ដាលនៃមុំផ្ចិតអង្កត់ធ្នូ 4 និង 3

យើងបាន $8\alpha + 8\beta = 2\pi \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4} - \alpha$

$sin\alpha = \frac{2}{r} \Rightarrow r = \frac{2}{sin\alpha}$

$$sin\beta = \frac{3}{2r} = sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{cos\alpha - sin\alpha}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2r} = \frac{cos\alpha - sin\alpha}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{2} = 2r(cos\alpha - sin\alpha)$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{2} = 2 \cdot \frac{2}{sin\alpha}(cos\alpha - sin\alpha)$$

នោះ $cot\alpha = \dfrac{4 + 3\sqrt{2}}{4}$ ហើយ $cot\beta = cot\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = \dfrac{cot\alpha + 1}{cot\alpha - 1}$

$$cot\beta = \frac{\frac{4 + 3\sqrt{2}}{4} + 1}{\frac{4 + 3\sqrt{2}}{4} - 1} = \frac{1}{3}(3 + 4\sqrt{2})$$

+ កម្ពស់នៃត្រីកោណ OAB : $h_1 = 2cot\alpha = 2 \times \dfrac{4 + 3\sqrt{2}}{4} = \dfrac{4 + 3\sqrt{2}}{2}$

+ កម្ពស់នៃត្រីកោណ OCD : $h_2 = \dfrac{3}{2}cot\beta = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{3}(3 + 4\sqrt{2}) = \dfrac{3 + 4\sqrt{2}}{2}$

ផ្ទៃក្រឡាអដ្ឋកោណ $S = 4\left(\dfrac{4h_1 + 3h_2}{2}\right) = 25 + 24\sqrt{2}$ ឯកតាផ្ទៃ

លំហាត់ទី ១១:

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^{log_b c} = c^{log_b a}$។

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន $a^{log_b c} = a^{log_b a \times log_a c} = \left(a^{log_a c}\right)^{log_b a}$

$\Rightarrow a^{log_b c} = c^{log_b a}$ ពិត

លំហាត់ទី ១២:

បង្ហាញថា បើ α, β, γ ជាមុំនៃត្រីកោណ ABC នោះ $cos\alpha + cos\beta + cos\gamma \le \dfrac{3}{2}$។

ដំណោះស្រាយ

តាង $\left|\overrightarrow{BC}\right| = a, \left|\overrightarrow{CA}\right| = b, \left|\overrightarrow{AB}\right| = c$

យើងមាន $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -cacos\beta, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -abcos\gamma, \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -bccos\alpha$

$$\left(\frac{\overrightarrow{BC}}{a}+\frac{\overrightarrow{CA}}{b}+\frac{\overrightarrow{AB}}{c}\right)^2=3-2(cos\alpha+cos\beta+cos\gamma)\geq 0$$

នោះ $cos\alpha+cos\beta+cos\gamma\leq\frac{3}{2}$ ពិត

លំហាត់ទី ១៣:

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ (n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ)។

ដំណោះស្រាយ

យើងអនុវត្តវិសមភាព $\frac{a_1+a_2+...+a_n+a_{n+1}}{n+1}>\sqrt[n+1]{a_1a_2...a_na_{n+1}}$
$(a_1,a_2,...,a_{n+1}>0)$

ដោយយក $a_1=a_2=...=a_n=1+\frac{1}{n}$ និង $a_{n+1}=1$

យើងបាន $\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}<\frac{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}$

នោះ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ (n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ)

លំហាត់ទី ១៤:

បើ $a_1,a_2,...,a_n$ ជា n ចំនួនគត់វិជ្ជមានខុសៗគ្នា ស្រាយបញ្ជាក់ថា
$\frac{\left(1+a_1+a_1^2\right)\left(1+a_2+a_2^2\right)...\left(1+a_n+a_n^2\right)}{a_1a_2...a_n}\geq 3^n$។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះ $a>0$ យើងបាន $\frac{1+a+a^2}{a}=1+a+\frac{1}{a}\geq 1+2$ ព្រោះ $a+\frac{1}{a}\geq 2$

នោះ $\frac{1+a_i+a_i^2}{a_i}\geq 3$ ចំពោះ $i=1,2,...,n$

$$\Rightarrow\frac{\left(1+a_1+a_1^2\right)}{a_1}\cdot\frac{\left(1+a_2+a_2^2\right)}{a_2}...\frac{\left(1+a_n+a_n^2\right)}{a_n}\geq\underbrace{3\times 3\times...\times 3}_{n\text{ ដង}}$$

នោះ $\dfrac{\left(1+a_1+a_1^2\right)\left(1+a_2+a_2^2\right)\dots\left(1+a_n+a_n^2\right)}{a_1a_2\dots a_n} \geq 3^n$ ពិត

លំហាត់ទី ១៥:

បើ $a > b > 1$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^n - b^n > n(a-b)$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $a > b > 1$ នោះ $\dfrac{a}{b} > 1$

$\Rightarrow 1 + \dfrac{a}{b} + \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{b}\right)^3 + \dots + \left(\dfrac{a}{b}\right)^{n-1} > n$

$\Rightarrow \dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n - 1}{\dfrac{a}{b} - 1} > n$

$\Rightarrow \dfrac{a^n - b^n}{b^{n-1}(a-b)} > n$

$\Rightarrow a^n - b^n > n(a-b)b^{n-1}$ ព្រោះ $a - b > 0, b^{n-1} > 0$

នោះ $a^n - b^n > n(a-b)$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$

លំហាត់ទី ១៦:

គេឱ្យ $a > b > 0$ និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានធំជាង 1។ បង្ហាញថា $\sqrt[n]{a^n + k^n} - \sqrt[n]{b^n + k^n}$ ចំពោះ

គ្រប់ $k \geq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងដឹងថា $x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}\right)$

តាង $x = \sqrt[n]{a^n + k^n}$ និង $y = \sqrt[n]{b^n + k^n}$ នោះ $x \geq a,\ y \geq b$

យើងបាន $\left(\sqrt[n]{a^n + k^n} - \sqrt[n]{b^n + k^n}\right)\left(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + b^{n-1}\right) \leq a^n - b^n$

$\Rightarrow \left(\sqrt[n]{a^n + k^n} - \sqrt[n]{b^n + k^n}\right)\left(\dfrac{a^n - b^n}{a-b}\right) \leq a^n - b^n$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a^n + k^n} - \sqrt[n]{b^n + k^n}$ ពិត ព្រោះ $a - b > 0, a^n - b^n > 0$

លំហាត់ទី ១៧:

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(cos\frac{a}{n}+xsin\frac{a}{n}\right)^n$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $t=\frac{a}{n}$ នោះ $n=\frac{a}{t}$

ពេល $n\to+\infty$ នោះ $t\to 0$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(cos\frac{a}{n}+xsin\frac{a}{n}\right)^n=\lim_{t\to0}(cost+xsint)^{\frac{a}{t}}$$

$$=\lim_{t\to0}\left[1+(cost-1+xsint)\right]^{\frac{a}{t}}$$

$$=\lim_{t\to0}\left[(1+(cost-1+xsint))^{\frac{1}{cost-1+xsint}}\right]^{\frac{a}{t}}$$

$$=e^{a\lim_{t\to0}\frac{cost-1+xsint}{t}}=e^{a\lim_{t\to0}\left(\frac{cost-1}{t}+x\cdot\frac{sint}{t}\right)}=e^{a(0+x)}=e^{ax}$$

លំហាត់ទី ១៨:

ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនពិត **R** ប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}tan^2x+2cot^22y=1\\ tan^2y+2cot^22z=1\\ tan^2z+2cot^22x=1\end{cases}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះចំនួនពិត φ គេបាន

$$2cot^22\varphi=2\left(\frac{cos^2\varphi-sin^2\varphi}{2sin\varphi cos\varphi}\right)=\frac{1}{2}\left(tan^2\varphi+cot^2\varphi-2\right)$$

តាង $a=tan^2x,\ b=tan^2y,\ c=tan^2z$ ដែល a,b,c ជាចំនួនពិត

ប្រព័ន្ធសមីការអាចសរសេរទៅជា

$$\begin{cases} a + \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right) = 2 \\ b + \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{c}\right) = 2 \\ c + \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) = 2 \end{cases} \quad (1)$$

សន្មត់ $a \geq b \geq c$ នោះ $a + \frac{1}{a} \leq b + \frac{1}{b} \leq c + \frac{1}{c}$

ដោយ $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x នោះតាម (1) គេបាន $0 < a, b, c \leq 1$

អនុគមន៍ $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ចុះក្នុងចន្លោះ $(0, 1]$ ហើយដោយ $a + \frac{1}{a} \leq b + \frac{1}{b} \leq c + \frac{1}{c}$

យើងទាញបាន $a = b = c$។

យើងត្រូវកំណត់ $u \in (0, 1]$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$u + \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) = 2$$

$\Longrightarrow 3u^2 - 4u + 1 = 0$ ឬ $(u - 1)(3u - 1) = 0$

■ ករណី $u - 1 = 0 \iff u = 1$

គេបាន $tan^2 x = 1$ នោះ $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$

■ ករណី $3u - 1 = 0 \iff u = \frac{1}{3}$

គេបាន $tan^2 x = \frac{1}{3}$ នោះ $x = \pm\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$

ដូចនេះ ចម្លើយ (x, y, z) នៃប្រព័ន្ធសមីការគឺ

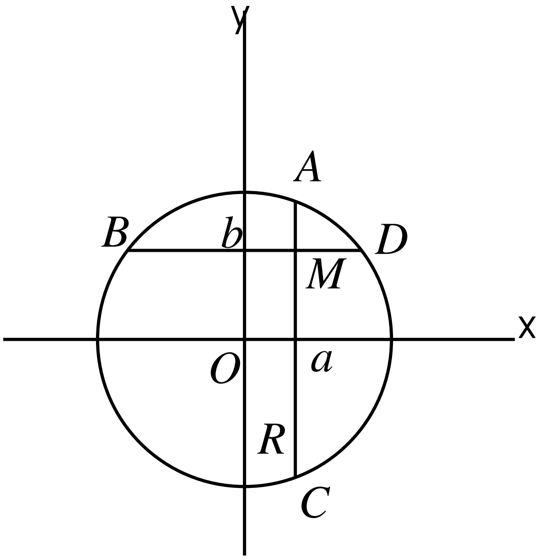
$\left(\frac{\pi}{4} + k_1 \cdot \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k_2 \cdot \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k_3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ និង $\left(\pm\frac{\pi}{6} + k_1 \cdot \pi, \pm\frac{\pi}{6} + k_2 \cdot \pi, \pm\frac{\pi}{6} + k_3 \cdot \pi\right)$

ដែល k_1, k_2, k_3 ជាចំនួនថេរសេរី

លំហាត់ទី ១៩:

M ជាចំណុច មួយនៅលើ ឬនៅក្នុងរង្វង់កាំ R។ តាម M គេគូសអង្កត់ធ្នូពីរកែងគ្នា AC និង BD។ រកតម្លៃធំបំផុត និងតម្លៃតូចបំផុតរបស់ផលបូក $S = AC + BD$ ។

ដំណោះស្រាយ



គេតាង $M(a,b)$ នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ xOyមួយ ដែលមាន $BD \parallel Ox$ និង $AC \parallel Oy$
គេបាន:

$a^2 + b^2 \leq R^2$

$A(a, \sqrt{R^2 - a^2}),\ B(-\sqrt{R^2 - b^2}, b)$

$C(a, -\sqrt{R^2 - a^2}),\ D(\sqrt{R^2 - b^2}, b)$

$AC = 2\sqrt{R^2 - a^2},\ BD = 2\sqrt{R^2 - b^2}$

$S(a,b) = AC + BD = 2\left(\sqrt{R^2 - a^2} + \sqrt{R^2 - b^2}\right)$

គេសង្កេតឃើញថា $S(a,b)$ មានតម្លៃធំបំផុតកាលណា $a = b = 0$ ។

ដូចនេះ $\max\limits_{a^2+b^2\leq R^2} S(a,b) = S(0,0) = 4R$

ម្យ៉ាងទៀត:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{R^2 - a^2} + \sqrt{R^2 - b^2}\right)^2 &= 2R^2 - \left(a^2 + b^2\right) + 2\sqrt{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)} \\ &\geq 2R^2 - \left(a^2 + b^2\right) = R^2 + \left(R^2 - \left(a^2 + b^2\right)\right) \geq R^2\end{aligned}$$

$\left(\sqrt{R^2 - a^2} + \sqrt{R^2 - b^2}\right)^2 \geq R^2 \Longrightarrow 2\left(\sqrt{R^2 - a^2} + \sqrt{R^2 - b^2}\right) \geq 2R$

ដូចនេះ $\min\limits_{a^2+b^2\leq R^2} S(a,b) = S(\pm R, 0) = S(0, \pm R) = 2R$

លំហាត់ទី ២០:

គេឱ្យទំនាក់ទំនង D មួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម :

(i) $D(1,0,0,1) = 1$,

(ii) $D(kw, x, ky, z) = kD(w, x, y, z)$,

(iii) $D(w, x, y, z) = -D(x, w, z, y)$

(iv) $(w+u, x, y+v, z) = D(w, x, y, z) + F(u, x, v, z)$ ដែល $k, u, v, w,$ x, y និង z ជាចំនួនពិត។
កំណត់ $D(a, b, c, d)$ ជាអនុគមន៍នៃ a, b, c និង d។

ដំណោះស្រាយ

តាម (iii): $D(1,1,0,0) = -D(1,1,0,0) \Longrightarrow D(1,1,0,0) = 0$

$D(0,0,1,1) = -D(0,0,1,1) \Longrightarrow D(0,0,1,1) = 0$

តាម (iii) និង (i): $D(0,1,1,0) = -D(1,0,0,1) = -1$

គេអាចសរសេរ

$D(a,b,c,d) = D(a+0,b,0+c,d) = D(a,b,0,d) + D(0,b,c,d)$ (តាម (iv))

$= aD(1,b,0,d) + cD(0,b,1,d)$ (តាម (ii))

$= -aD(b,1,d,0) - cD(b,0,d,1)$ (តាម (iii))

$= -a\left(D(b,1,0,0) + D(0,1,d,0)\right) - c\left(D(b,0,0,1) + D(0,0,d,1)\right)$ (តាម (iv))

$= -ab\left(D(1,1,0,0) - adD(0,1,1,0)\right) - cb\left(D(1,0,0,1) - cdD(0,0,1,1)\right)$ (តាម (ii))

$= -ab(0) - ad(-1) - bc(1) - cd(0) = ad - bc$

ដូចនេះ $D(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

លំហាត់ទី ២១:

បង្ហាញថា $A = \dfrac{1}{n+1}C(2n,n)$ ជាចំនួនគត់ ចំពោះ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $A = \dfrac{1}{n+1}C(2n,n) = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

$$A = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}\left((n+1)-n\right) = \frac{(2n)!(n+1)}{n!(n+1)!} - \frac{(2n)!n!}{n!(n+1)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

$$= C(2n,n) - C(2n,n-1)$$

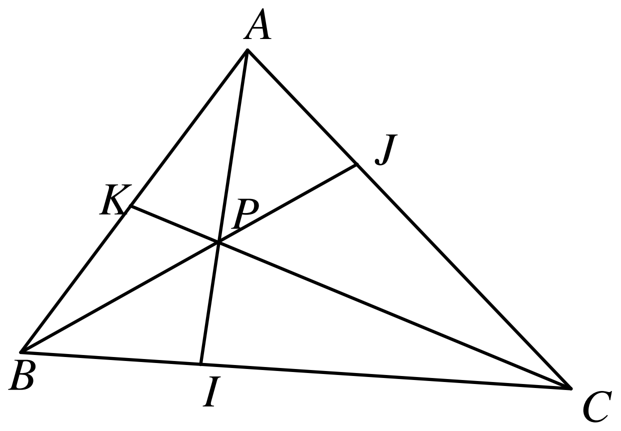
ដោយ $C(2n,n)$ និង $C(2n,n-1)$ ជាចំនួនគត់ នោះ $A = C(2n,n) - C(2n,n-1)$ ជាចំនួនគត់

លំហាត់ទី ២២:

P ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC មួយ។ បន្ទាត់ AP ជួប BC ត្រង់ I បន្ទាត់ BP ជួប CA ត្រង់ J ហើយបន្ទាត់ CP ជួប AB ត្រង់ K ។

បង្ហាញថា $\frac{PA}{PI}\times\frac{PB}{PJ}+\frac{PB}{PJ}\times\frac{PC}{PK}+\frac{PC}{PK}\times\frac{PA}{PI}\geq 12$ ។

ដំណោះស្រាយ



តាង $S=S_{\triangle ABC},\ S_1=S_{\triangle PBC},\ S_2=S_{\triangle PAC},\ S_3=S_{\triangle PAB}$

គេបាន $S=S_1+S_2+S_3$

ដោយ $\triangle ABC\&\triangle PBC$ មានជ្រុងរួម $BC \Longrightarrow \frac{AI}{PI}=\frac{S}{S_1}$

$$\frac{PA}{AI}=\frac{AI-PI}{PI}=\frac{AI}{PI}-1=\frac{S}{S_1}-1=\frac{S_2+S_3}{S_1}$$

តាមរបៀបដូចគ្នា

$$\frac{PB}{PJ}=\frac{S_3+S_1}{S_2}$$

$$\frac{PC}{PK}=\frac{S_1+S_2}{S_3}$$

គេអាចសរសេរ $\frac{PA}{PI}\times\frac{PB}{PJ}+\frac{PB}{PJ}\times\frac{PC}{PK}+\frac{PC}{PK}\times\frac{PA}{PI}=\frac{(S_2+S_3)(S_3+S_1)}{S_1S_2}+$

$\frac{(S_3+S_1)(S_1+S_2)}{S_2S_3}+\frac{(S_1+S_2)(S_2+S_3)}{S_3S_1}$

$$=\left(\frac{S_3}{S_1}+\frac{S_1}{S_3}\right)^2+\left(\frac{S_3}{S_1}+\frac{S_2}{S_3}\right)+\left(\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_2}{S_1}\right)+3+\frac{S_1^2}{S_2S_3}+\frac{S_2^2}{S_3S_1}+\frac{S_3^2}{S_1S_2}$$

$$=\left(\frac{S_3}{S_1}+\frac{S_1}{S_3}\right)^2+\left(\frac{S_3}{S_1}+\frac{S_2}{S_3}\right)+\left(\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_2}{S_1}\right)+3+\frac{S_1^3+S_2^3+S_3^3}{S_1S_2S_3}$$

$\geq 2+2+2+3+3=12$

ដូចនេះ $\frac{PA}{PI}\times\frac{PB}{PJ}+\frac{PB}{PJ}\times\frac{PC}{PK}+\frac{PC}{PK}\times\frac{PA}{PI}\geq 12$

លំហាត់ទី ២៣:

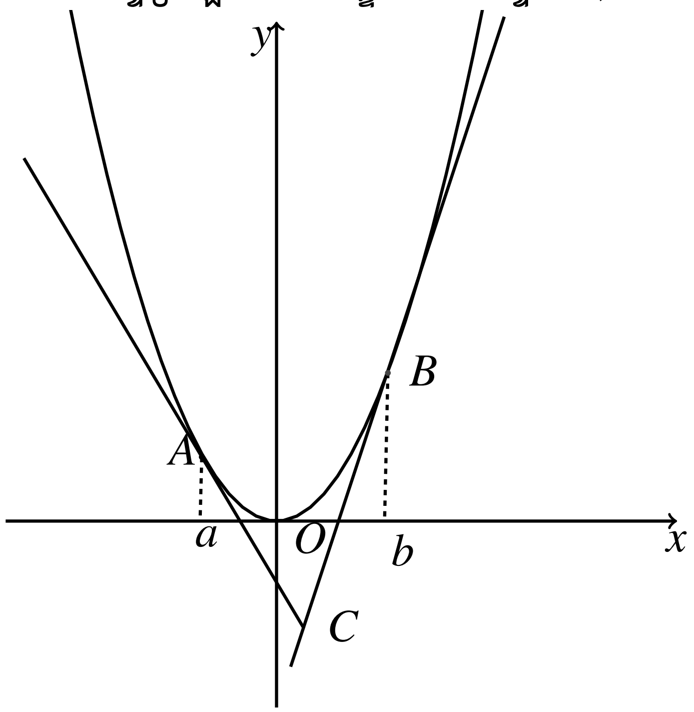
C ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ l និង m ដែលប៉ះប៉ារ៉ាបូល $y = x^2$ ត្រង់ចំណុច $A\left(a,a^2\right)$ និង $B\left(b,b^2\right)$ រៀងគ្នា ដែល $a<b$ ។

១. សរសេរផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយបន្ទាត់ l,m និង ប៉ារ៉ាបូល ជាអនុគមន៍នៃ a និង b ។

២. រកតម្លៃអប្បបរមានៃ S កាលណាចំណុច C ផ្លាស់ទីលើប៉ារ៉ាបូល $y=\frac{1}{2}x^2-x-2$។

ដំណោះស្រាយ

១. សរសេរផ្ទៃក្រឡាដែលខ័ណ្ឌដោយបន្ទាត់ l,m និង ប៉ារ៉ាបូល ជាអនុគមន៍នៃ a និង b



តាង $l: y=m_1x+n_1$ និង $m: y=m_2x+n_2$ ជាបន្ទាត់ទាំងពីរ

តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន

$$x^2-(m_1x+n_1)=(x-a)^2 \ldots\ldots ①$$

$$x^2-(m_2x+n_2)=(x-b)^2 \ldots\ldots ②$$

អាប់ស៊ីស x នៃចំណុច C ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ l និង m គឺ

$$m_1x+n_1=m_2x+n_2$$

តាម ① និង ② យើងបាន $x^2-(x-a)^2=x^2-(x-b)^2$

នោះ $x-a=-(x-b),\quad x=\frac{a+b}{2}$

ផ្ទៃក្រឡា $S=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)^2dx$

$S=\frac{1}{3}\left[(x-a)^3\right]_a^{\frac{a+b}{2}}+\frac{1}{3}\left[(x-b)^3\right]_{\frac{a+b}{2}}^{b}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3=\frac{1}{12}(b-a)^3$

២. រកតម្លៃអប្បបរមានៃ S កាលណាចំណុច C ផ្លាស់ទីលើប៉ារ៉ាបូល $y=\frac{1}{2}x^2-x-2$

តាម ① យើងបាន $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2=ab$

នោះចំណុច $C\left(\frac{a+b}{2},ab\right)$

ដោយចំណុច C រត់នៅលើប៉ារ៉ាបូល $y=\frac{1}{2}x^2-x-2$

នោះ $ab=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{a+b}{2}-2$

$\Rightarrow 8ab=(a+b)^2-4(a+b)-16$......③

តាង $b-a=k\quad (k>0)$ នោះ $b=a+k$ ជំនួសចូល ③

$8a(a+k)=(2a+k)^2-4(2a+k)-16$

$4a^2+4(k+2)a-\left(k^2-4k-16\right)=0$

ដោយ a ជាចំនួនពិត នោះ $\frac{D}{4}=4(k+2)^2+4\left(k^2-4k-16\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow k^2-6\geq 0$

តែ $k>0$ នោះ $k\geq\sqrt{6}$

តាមសំណួរទី ១ : ផ្ទៃក្រឡាអប្បបរមាគឺ $\frac{1}{12}\left(\sqrt{6}\right)^3=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ឯកតាផ្ទៃ

លំហាត់ទី ២៤:

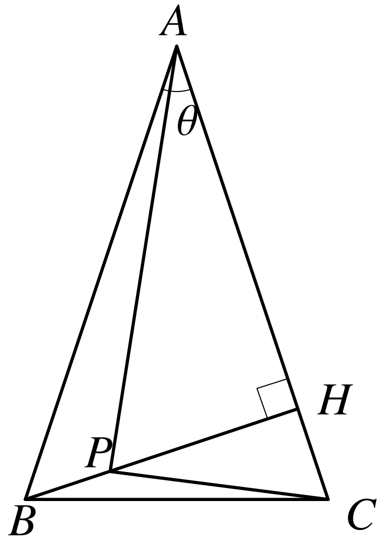
ABC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល B មាន $AB=1, AC=1, BC=\frac{1}{2}$។ H ជាជើងនៃចំណោលកែងគូសចេញពីកំពូល B មកលើ AC។

១. យើងតាង $\angle BAC=\theta$ ចូរគណនា $cos\theta$ និង $sin\theta$។

២. s ជាចំនួនពិត និង $0 < s < 1$។ P ជាចំណុចចែកក្នុង BH តាមផលធៀប $s : (1 - s)$ ។ គណនាតម្លៃអប្បបរមានៃ $AP^2 + BP^2 + CP^2$ និងតម្លៃនៃ s ក្នុងករណីនេះ។

ដំណោះស្រាយ

១. គណនា $cos\theta$ និង $sin\theta$



តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot cos\theta$

$$\Rightarrow cos\theta = \frac{1^2 + 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{7}{8}$$

ដោយ $0 < \theta < \pi$ នោះ $sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$

២. គណនាតម្លៃអប្បបរមានៃ $AP^2 + BP^2 + CP^2$ និងតម្លៃនៃ s ក្នុងករណីនេះ

យើងមាន $BH = ABsin\theta$ និង $BP : PH = s : (1 - s)$

$$BP = sBH = \frac{\sqrt{15}}{8}s,\ PH = (1 - s)BH = \frac{\sqrt{15}}{8}(1 - s)$$

$$AH = ABcos\theta = \frac{7}{8},\ CH = AC - AH = \frac{1}{8}$$

$$AP^2 = AH^2 + PH^2 = \frac{49}{64} + \frac{15}{64}(1 - s)^2$$

$$CP^2 = CH^2 + PH^2 = \frac{1}{64} + \frac{15}{64}(1 - s)^2$$

យើងបាន $F(s) = AP^2 + BP^2 + CP^2$

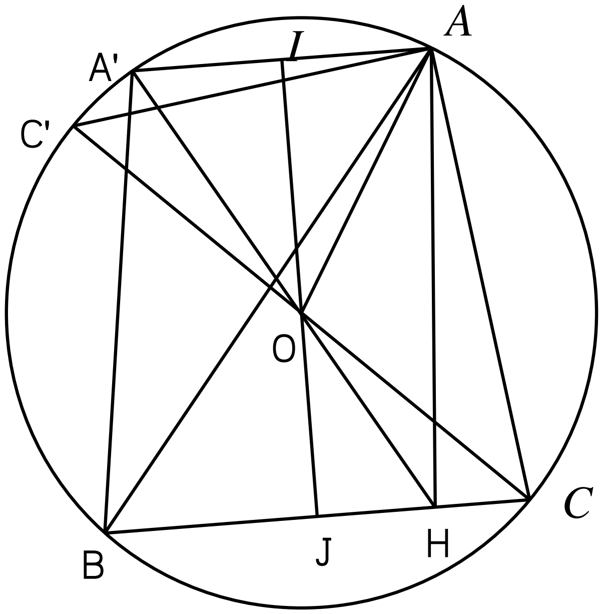
$$F(s) = \frac{49}{64} + \frac{15}{64}(1-s)^2 + \frac{15}{64}s^2 + \frac{1}{64} + \frac{15}{64}(1-s)^2 = \frac{15}{64}\left(3s^2 - 4s + 2\right) + \frac{50}{64}$$
$$= \frac{15}{64}\{3\left(s - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\} + \frac{50}{64} = \frac{45}{64}\left(s - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{15}{16}$$

ដោយ $0 < s < 1$ នោះ $AP^2 + BP^2 + CP^2$ អប្បបរមាស្មើ $\frac{15}{16}$ ពេល $s = \frac{2}{3}$

លំហាត់ទី ២៥:

រង្វង់ផ្ចិត O កាំ R មួយចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC មួយដែលមានមុំទាំងបីជាមុំស្រួចហើយ $\angle ACB$, $\angle ABC$ ផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព $\angle ACB - \angle ABC \geq \frac{\pi}{6}$។ H ជាជើងចំណោលកែងនៃកំពូល A ទៅលើជ្រុង BC របស់ត្រីកោណ។ បង្ហាញថា $\angle BAC + \angle COH < \frac{\pi}{2}$។

ដំណោះស្រាយ



គេគូសអង្កត់ធ្នូ $AA' \parallel BC$ ហើយគេបាន $\angle ACB = \angle A'BC$

$\angle A'BC - \angle ABC \geq \frac{\pi}{6} \Rightarrow \angle A'BC \geq \angle ABC + \frac{\pi}{6}$

$\angle CBA + \angle ABA' \geq \angle ABC + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \angle ABA' \geq \frac{\pi}{6}$

$\angle AOA' \geq \frac{\pi}{3}$

តាង I, J ជាចំណុចកណ្ដាលអង្កត់ធ្នូ AA', BC រៀងគ្នា

ត្រីកោណសមបាត OAA' មាន $\angle AOA' \geq \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow AA' \geq OA = R$

គេបាន $AI \geq R/2$

$AIJH$ ជាចតុកោណកែង នោះគេបាន $AI = HJ \geq R/2$

ត្រីកោណកែង JOH : $OH > JH \geq R/2 \Rightarrow OH > R/2 \quad (1)$

តែ $HC = JC - JH < R - JH \leq R/2 \Rightarrow HC < R/2 \quad (2)$

$(1)\&(2) \Rightarrow HC < OH$

$\Rightarrow \angle COH < \angle OCH$

គូសអង្កត់ផ្ចិត CC' ហើយគេបាន $\angle C'CB = \angle C'AB$ (ស្កាត់ធ្នូរួម $C'B$)

$\angle COH < \angle OCH \Rightarrow \angle COH + \angle BAC < \angle OCH + \angle BAC$

$\angle COH + \angle BAC < \angle C'AB + \angle BAC = \angle C'AC = \pi/2$

លំហាត់ទី ២៦:

គណនា $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3-x^2}+\sqrt{3+x^2}}{\sqrt{9-x^4}}dx$។

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3-x^2}+\sqrt{3+x^2}}{\sqrt{(3-x^2)(3+x^2)}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - x^2}}$$

$$= ln\left|x + \sqrt{3+x^2}\right| + arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

លំហាត់ទី ២៧:

គណនា $\displaystyle\int \frac{2tan^2x + cos2x - 1}{sin^2x}dx$។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $tanx = sinx/cosx;\ 1 - cos2x = 2sin^2x$

យើងបាន $\displaystyle\int \frac{2tan^2x + cos2x - 1}{sin^2x}dx = 2\int \frac{tan^2x}{sin^2x}dx - \int \frac{1 - cos2x}{sin^2x}dx$

$\displaystyle = 2\int \frac{1}{sin^2x} \cdot \frac{sin^2x}{cos^2x}dx - \int \frac{2sin^2x}{sin^2x}dx$

$\displaystyle = 2\int \frac{dx}{cos^2x} - 2\int dx$

$= 2tanx - 2x + C$

លំហាត់ទី ២៨:

ដោះស្រាយសមីការ $3 + 2log_{x+1}3 = 2log_3(x+1)$។

ដំណោះស្រាយ

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 1 \end{cases}$

យើងបាន $3 + \dfrac{2}{log_3(x+1)} = 2log_3(x+1) \quad (1)$

តាង $t = log_3(x+1)$

$(1) \Rightarrow 3 + \dfrac{2}{t} = 2t$

$\begin{cases} 2t^2 - 3t - 2 = 0 \\ t \neq 0 \end{cases}$

$t_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{25}}{4}$

$t_1 = 2,\ t_2 = -\dfrac{1}{2}$

■ ចំពោះ $t = 2$

$\Rightarrow log_3(x+1) = 2 \Leftrightarrow x + 1 = 3^2$

$\Rightarrow x = 8$

■ ចំពោះ $t = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow log_3(x+1) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x + 1 = 3^{-\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow x + 1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}-3}{3}$

លំហាត់ទី ២៩:

ដោះស្រាយសមីការ $log_2\left(9-2^{x-4}\right) = 7-x$។

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន $9-2^{x-4} = 2^{7-x} \quad (*)$

តាង $t = 2^x, t > 0$

$(*) \Rightarrow 9 - \dfrac{t}{16} = \dfrac{2^7}{t}$

$\Leftrightarrow t^2 - 2^4 \cdot 3^2 t + 2^{11} = 0$

នោះ $t_1 = 2^4,\ t_2 = 2^7$

■ ចំពោះ $t = 2^4$

$\Rightarrow 2^x = 2^4 \ \Leftrightarrow x = 4$

■ ចំពោះ $t = 2^7$

$\Rightarrow 2^x = 2^7 \ \Leftrightarrow x = 7$

លំហាត់ទី ៣០:

ដោះស្រាយសមីការ $log_x(2x+1) = log_{2x^3+x^2}\left(4x^3+4x^2+x\right)$។

ដំណោះស្រាយ

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} 2x+1>0 \\ 4x^3+4x^2+x>0 \\ x>0 \\ x\neq 1 \\ 2x^3+x^2>0 \\ 2x^3+x^2\neq 1 \end{cases}$

យើងបាន $\dfrac{log_2(2x+1)}{log_2 x} = \dfrac{log_2\left(4x^3+4x^2+x\right)}{log_2\left(2x^3+x^2\right)} \quad (*)$

ដោយ $log_2\left(4x^3+4x^2+x\right)=log_2x\left(4x^2+4x+1\right)$

$=log_2x+log_2\left(4x^2+4x+1\right)$

$=log_2x+log_2(2x+1)^2$

$=log_2x+2log_2(2x+1)$

$log_2\left(2x^3+x^2\right)=log_2x^2\,(2x+1)$

$=log_2x^2+log_2(2x+1)$

$=2log_2x+log_2(2x+1)$

$(*)\Rightarrow\dfrac{log_2(2x+1)}{log_2x}=\dfrac{log_2x+2log_2(2x+1)}{2log_2x+log_2(2x+1)}$

ចែកនឹង $log_2x\neq 0$ ចំពោះអង្គខាងស្តាំ

$$\Rightarrow\frac{log_2(2x+1)}{log_2x}=\frac{1+\dfrac{2log_2(2x+1)}{log_2x}}{2+\dfrac{log_2(2x+1)}{log_2x}}$$

តាង $t=\dfrac{log_2(2x+1)}{log_2x}$ នោះសមីការទៅជា: $t=\dfrac{1+2t}{2+t}$

$\Leftrightarrow t_1=1, t_2=-1$

■ ចំពោះ $t=1$

$\Rightarrow\dfrac{log_2(2x+1)}{log_2x}=1\ \Leftrightarrow log_2(2x+1)=log_2x$

$\Leftrightarrow 2x+1=x$ ឬ $x=1$ មិនយក

■ ចំពោះ $t=-1$

$\Rightarrow\dfrac{log_2(2x+1)}{log_2x}=-1\ \Leftrightarrow log_2(2x+1)=-log_2x$

$\Leftrightarrow log_2(2x+1)+log_2x=0$

$\Leftrightarrow log_2\left(2x^2+x\right)=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+x=1$

$\Leftrightarrow 2x^2+x-1=0$ ឬ $(2x-1)(x+1)=0$

នោះ $x=\dfrac{1}{2},\ x=-1$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $x=\dfrac{1}{2}$

លំហាត់ទី ៣១:

ដោះស្រាយសមីការ $log_5\left(3\cdot 2^{1+x}-2^{-x}\cdot 5^{2x+1}\right)=x+log_5 13$។

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន $3\cdot 2^{1+x}-2^{-x}\cdot 5^{2x+1}=5^{x+log_5 13}$

$\Leftrightarrow 6\cdot 2^x-\dfrac{5\cdot 5^{2x}}{2^x}=5^x\cdot 13$

$\Leftrightarrow 6\cdot 2^{2x}-2^x\cdot 5^x\cdot 13-5\cdot 5^{2x}=0$

ចែកសមីការដោយ $2^{2x}\neq 0$

$\Rightarrow 6-13\left(\dfrac{5}{2}\right)^x-5\left(\dfrac{5}{2}\right)^{2x}=0$

តាង $t=\left(\dfrac{5}{2}\right)^x$, $t>0$

$(*)\Rightarrow 6-13t-5t^2=0$

$t_1=\dfrac{2}{5}$, $t_2=-3$ (មិនយក)

■ ចំពោះ $t=\dfrac{2}{5}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{5}{2}\right)^x=\dfrac{2}{5}$ ឬ $\left(\dfrac{5}{2}\right)^x=\left(\dfrac{5}{2}\right)^{-1}$

$\Rightarrow x=-1$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $x=-1$

លំហាត់ទី ៣២:

គេតាង $[x]$ ជាផ្នែកគត់នៃចំនួនពិត x ហើយដែលកំណត់ដោយ $[x]\leq x<[x]+1$។

បង្ហាញថា បើ b ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន នោះគេបាន $\left[\dfrac{x}{b}\right]=\left[\dfrac{[x]}{b}\right]$។

ដំណោះស្រាយ

តាង $a=[x]$ ហើយតាមវិធីចែកអឺគ្លីតនៃ $a\&b$ គេបាន $a=bq+r, 0\leq r<b$

ដោយ $0\leq r<b\Rightarrow bq\leq bq+r<b(q+1)$ ហើយ $bq\leq a<b(q+1)\Rightarrow q\leq \dfrac{a}{b}<q+1$

គេទាញបាន $[a/b]=q$ ហើយ $[a/b]=[[x]/b]=q \quad (1)$
ម្យ៉ាងទៀត $[x]\le x<[x]+1 \Rightarrow x+a+\epsilon=bq+r+\epsilon, 0\le\epsilon<1$
គេបាន $[x/b]=[(bq+r+\epsilon)/b]=[q+(r+\epsilon)/b]$
តែ $0\le\epsilon<1 \& 0\le r\le b-1 \Rightarrow 0\le r+\epsilon<b$ ហើយ $0\le(r+\epsilon)/b<1$
គេបាន $q\le q+(r+\epsilon)/b<q+1$ ហើយ $q\le[x/b]<q+1 \Rightarrow [x/b]=q \quad (2)$
តាម $(1)\&(2) \Rightarrow [x/b]=[[x]/b]$

លំហាត់ទី ៣៣:
គេឱ្យផលបូក $S(a,b)=(a+1)^b+(a+2)^b+(a+3)^b+(a+4)^b+(a+5)^b$
ដែល a និង b ជាពីរចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបមិនអវិជ្ជមាន។
បង្ហាញថា $S(a,b)$ ចែកដាច់នឹង 5 បើ b មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះ $a\ge 0$ គេបាន $a+1, a+2, a+3, a+4, a+5$ ចែកនឹង 5 បានសំណល់ $0,1,2,3,4$។
គេបាន $S(a,b)\equiv 0^b+1^b+2^b+3^b+4^b\equiv 1^b+2^b+3^b+4^b \pmod 5$
តាមការសង្កេតគេបាន: $2^{4m}\equiv 1,\ 2^{4m+1}\equiv 2,\ 2^{4m+2}\equiv 4,\ 2^{4m+3}\equiv 3 \pmod 5$
$3^{4m}\equiv 1,\ 3^{4m+1}\equiv 3,\ 3^{4m+2}\equiv 4,\ 3^{4m+3}\equiv 2 \pmod 5$
$4^{4m}\equiv 1,\ 4^{4m+1}\equiv 4,\ 4^{4m+2}\equiv 1,\ 4^{4m+3}\equiv 4 \pmod 5$
- បើ $b=4m+1$ (មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4) នោះគេបាន
$1^b+2^b+3^b+4^b=1^{4m+1}+2^{4m+1}+3^{4m+1}+4^{4m+1}\equiv 1+2+3+4=10\equiv 0 \pmod 5$
$\Rightarrow S(a,b)\equiv 0 \pmod 5$
- បើ $b=4m+2$ (មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4) នោះគេបាន
$1^b+2^b+3^b+4^b=1^{4m+2}+2^{4m+2}+3^{4m+2}+4^{4m+2}\equiv 1+4+4+1=10\equiv 0 \pmod 5$
$\Rightarrow S(a,b)\equiv 0 \pmod 5$
- បើ $b=4m+3$ (មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4) នោះគេបាន
$1^b+2^b+3^b+4^b=1^{4m+3}+2^{4m+3}+3^{4m+3}+4^{4m+3}\equiv 1+3+2+4=10\equiv 0 \pmod 5$
$\Rightarrow S(a,b)\equiv 0 \pmod 5$
ដូចនេះ $S(a,b)$ ចែកដាច់នឹង 5 បើ b ចែកមិនដាច់នឹង 4។
របៀបមួយទៀត:

បង្ហាញថា $S(a,b) \div 5$ បើ $b \neq 4k$
ចំពោះ $a \geq 0 : a+1, a+2, a+3, a+4 \equiv 0,1,2,3,4 \pmod 5$
បើ b មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4 នោះ $b = 4k + r$ ដែល $r \in \{1,2,3,\}$
គេបាន $S(a,b) \equiv 1^{4k+r} + 2^{4k+r} + 3^{4k+r} + 4^{4k+r} \pmod 5$

$$\equiv 1 + (15+1)^k.2^r + (80+1)^k.3^r + (255+1)^k.4^r \pmod 5$$

$$\equiv 1 + 2^r + 3^r + 4^r \pmod 5$$

- បើ $r = 1 :\ S(a,b) \equiv 10 \equiv 0 \pmod 5$
- បើ $r = 2 :\ S(a,b) \equiv 30 \equiv 0 \pmod 5$
- បើ $r = 3 :\ S(a,b) \equiv 100 \equiv 0 \pmod 5$

ដូចនេះ $S(a,b) \equiv 0 \pmod 5$ បើ b មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4

លំហាត់ទី ៣៤:

សមីការ $t^3 = 3t^2 + 4t - 5$ មានឫសបីផ្សេងគ្នា a, b និង c។

គណនាតម្លៃនៃ $F_7(a,b,c) = \dfrac{a^7 - b^7}{a-b} + \dfrac{b^7 - c^7}{b-c} + \dfrac{c^7 - a^7}{c-a}$។

ដំណោះស្រាយ

សមីការ $t^3 = 3t^2 + 4t - 5$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $t = 0$ គឺថា $t \neq 0$
នោះគេបាន $t^3 = 3t^2 + 4t - 5 \Leftrightarrow t^{k+3} = 3t^{k+2} + 4t^{k+1} - 5t^k$
ដោយ a, b, c ជាឫសបីផ្សេងគ្នានោះគេបាន $a^{k+3} = 3a^{k+2} + 4a^{k+1} - 5a^k$ (1)
$b^{k+3} = 3b^{k+2} + 4b^{k+1} - 5b^k$ (2) , $c^{k+3} = 3c^{k+2} + 4c^{k+1} - 5c^k$ (3)

(1) − (2) រួចចែកនឹង $a - b$: $\dfrac{a^{k+3} - b^{k+3}}{a-b} = 3\dfrac{a^{k+2} - b^{k+2}}{a-b} + 4\dfrac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b} - 5\dfrac{a^k - b^k}{a-b}$ (4)

(2) − (3) រួចចែកនឹង $b - c$: $\dfrac{b^{k+3} - c^{k+3}}{b-c} = 3\dfrac{b^{k+2} - c^{k+2}}{b-c} + 4\dfrac{b^{k+1} - c^{k+1}}{b-c} - 5\dfrac{b^k - c^k}{b-c}$ (5)

(3) − (1) រួចចែកនឹង $c - a$: $\dfrac{c^{k+3} - a^{k+3}}{c-a} = 3\dfrac{c^{k+2} - a^{k+2}}{c-a} + 4\dfrac{c^{k+1} - a^{k+1}}{c-a} - 5\dfrac{c^k - a^k}{c-a}$ (6)

ដោយបូក (4) + (5) + (6) អង្គ និងអង្គ

$$\frac{a^{k+3}-b^{k+3}}{a-b}+\frac{b^{k+3}-c^{k+3}}{b-c}+\frac{c^{k+3}-a^{k+3}}{c-a}=3\left(\frac{a^{k+2}-b^{k+2}}{a-b}+\frac{b^{k+2}-c^{k+2}}{b-c}\right.$$
$$\left.+\frac{c^{k+2}-a^{k+2}}{c-a}\right)+4\left(\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}+\frac{b^{k+1}-c^{k+1}}{b-c}+\frac{c^{k+1}-a^{k+1}}{c-a}\right)$$
$$-5\left(\frac{a^k-b^k}{a-b}+\frac{b^k-c^k}{b-c}+\frac{c^k-a^k}{c-a}\right)\quad (7)$$

តាង $F_k=\frac{a^k-b^k}{a-b}+\frac{b^k-c^k}{b-c}+\frac{c^k-a^k}{c-a}$, $F_{k+1}=\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}+\frac{b^{k+1}-c^{k+1}}{b-c}+\frac{c^{k+1}-a^{k+1}}{c-a}$

$F_{k+2}=\frac{a^{k+2}-b^{k+2}}{a-b}+\frac{b^{k+2}-c^{k+2}}{b-c}+\frac{c^{k+2}-a^{k+2}}{c-a}$, $F_{k+3}=\frac{a^{k+3}-b^{k+3}}{a-b}+\frac{b^{k+3}-c^{k+3}}{b-c}+\frac{c^{k+3}-a^{k+3}}{c-a}$

គេបាន $F_{k+3}=3F_{k+2}+4F_{k+1}-5F_k$ (8)

- បើ $k=0$ នោះគេបាន $F_0=0, F_1=1+1+1=3, F_2=2(a+b+c)=3\times 3=6$ ហើយតាម (8) គេបាន $F_3=3F_2+4F_1-5F_0=3\times 6+4\times 3-5\times 0=30$
- បើ $k=1$ នោះតាម (8) គេបាន $F_4=3F_3+4F_2-5F_1=90+24-15=99$
- បើ $k=2$ នោះតាម (8) គេបាន $F_5=3F_4+4F_3-5F_2=297+120-30=387$
- បើ $k=3$ នោះតាម (8) គេបាន $F_6=3F_5+4F_4-5F_3=1161+396-150=1407$
- បើ $k=3$ នោះតាម (8) គេបាន $F_7=3F_6+4F_5-5F_3=4221+1548-495$ $=5274$

ដូចនេះ $F_7(a,b,c)=\frac{a^7-b^7}{a-b}+\frac{b^7-c^7}{b-c}+\frac{c^7-a^7}{c-a}=5274$

<u>របៀបមួយទៀត</u>:

សមីការ $t^3=3t^2+4t-5$

$t^4=3t^3+4t^2-5t=3\left(3t^2+4t-5\right)+4t^2-5t=13t^2+7t-15$

$t^5=t.t^4=t\left(13t^2+7t-15\right)=46t^2+37t-65$

$t^6=t.t^5=t\left(46t^2+37t-65\right)=175t^2+119t-230$

$t^7=644t^2+470t-875$

$a^7-b^7=644\left(a^2-b^2\right)+440(a-b)$

$\frac{a^7-b^7}{a-b}=644(a+b)+470$

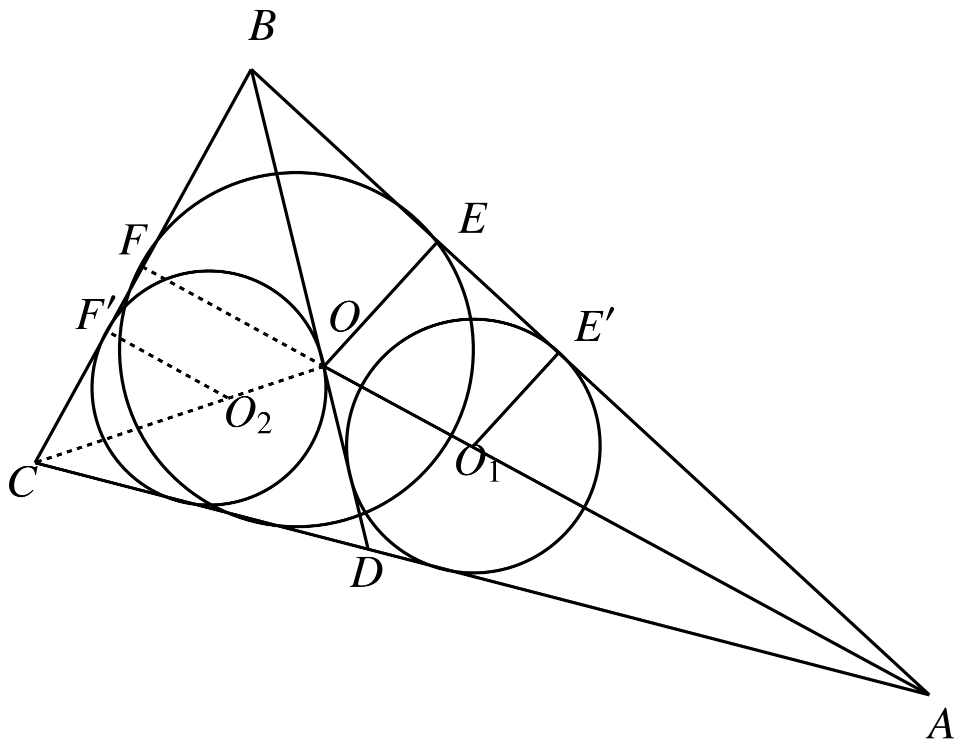
ដូចគ្នា $\frac{b^7-c^7}{b-c}=644(b+c)+470$, $\frac{c^7-a^7}{c-a}=644(c+a)+470$

ដូចនេះ $F_7(a,b,c) = 2\times644(a+b+c)+1410 = 2\times644\times3+1410 = 5274$

លំហាត់ទី ៣៥:

ត្រីកោណ ABC មួយមាន $\angle ABC = 2a$ និងផ្ទៃក្រឡា s។ D ជាចំណុចមួយនៅលើជ្រុង AC ហើយដែលរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABD ប៉ុនគ្នានឹងរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ BCD។ បង្ហាញថា $BD = \sqrt{\dfrac{s}{tana}}$។

ដំណោះស្រាយ



តាង : s_1 និង p_1 ជាផ្ទៃក្រឡា និងកន្លះបរិមាត្រនៃ $\triangle ABD$, s_2 និង p_2 ជាផ្ទៃក្រឡា និងកន្លះបរិមាត្រនៃ $\triangle BCD$

p ជាកន្លះបរិមាត្រនៃ $\triangle ABC$, r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង $\triangle ABC$, r' ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង $\triangle ABD$ និង $\triangle BCD$

E និង E' ជាចំណុចប៉ះរវាង AB ជាមួយរង្វង់ចារឹកក្នុង $\triangle ABC$ និង $\triangle ABD$

F និង F' ជាចំណុចប៉ះរវាង BC ជាមួយរង្វង់ចារឹកក្នុង $\triangle ABC$ និង $\triangle BCD$

គេបាន : $s = s_1 + s_2,\ pr = p_1r' + p_2r' = (p_1+p_2)r' \quad (1)$

ម្យ៉ាងទៀត : $2p_1 + 2p_2 = 2p_2 + BD \ \Rightarrow\ p_1+p_2 = p + BD$

(1) អាចសរសេរ : $pr = (p + BD)r'$ ហើយ $\frac{r'}{r} = \frac{p}{p + BD}$ (2)

$\triangle E'AO_1 \sim \triangle EAO\ :\ \frac{AE'}{AE} = \frac{r'}{r}$ ហើយ $\triangle F'CO_2 \sim \triangle FCO\ :\ \frac{CF'}{CF} = \frac{r'}{r}$ (3)

ក្នុង $\triangle ABC$ គេមាន $p = AE + BF + FC = AE + BC \Rightarrow AE = p - BC$

ក្នុង $\triangle ABC$ គេមាន $p = CF + AE + EB = CF + AB \Rightarrow CF = p - AB$

ក្នុង $\triangle ABD$ គេមាន $AE' = p_1 - BD$

ក្នុង $\triangle BCD$ គេមាន $CF' = p_2 - BD$

(3) : $\frac{r'}{r} = \frac{p_1 - BD}{p - BC} = \frac{p_2 - BD}{p - AB} = \frac{p_1 + p_2 - 2BD}{2p - (BC + AB)}$

$\frac{r'}{r} = \frac{p + BD - 2BD}{AC} = \frac{p - BD}{AC} \Rightarrow p \cdot AC = p^2 - BD^2$

$\Rightarrow BD^2 = p(p - AC) = p \cdot BE$ (5) ព្រោះ $BE = p - AC$

ក្នុង $\triangle EBO$: $BE = \frac{r}{tana}$

(5) : $BD^2 = \frac{pr}{tana} = \frac{s}{tana} \Rightarrow BD = \sqrt{\frac{s}{tana}}$

លំហាត់ទី ៣៦:

គេតាង $s(n)$ ជាផលបូកលេខទាំងអស់របស់ចំនួន 2^n ដែល $n = 1, 2, 3, ...$។
បង្ហាញថា គ្មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $s(n + 1) = s(n)$។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $2^n = a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$ ដែល a_j ជាចំនួនគត់ ហើយ $1 \leq a_m \leq 9, 0 \leq a_j \leq 9$ ចំពោះ $j =, 1, 2, 3, ..., m - 1$

គេបាន $2^m \equiv a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1 + a_0 \pmod 3$

$2^n \equiv s(n) \pmod 3$

ម្យ៉ាងទៀត $2^{n+1} = b_p 10^p + b_{p-1}10^{p-1} + \cdots + b_1 10 + b_0$

$s(n + 1) \equiv 2^{n+1} \equiv 2 \times 2^n \equiv 2s(n) \pmod 3$

ឧបមាថាមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $s(n + 1) = s(n)$ នោះគេបាន

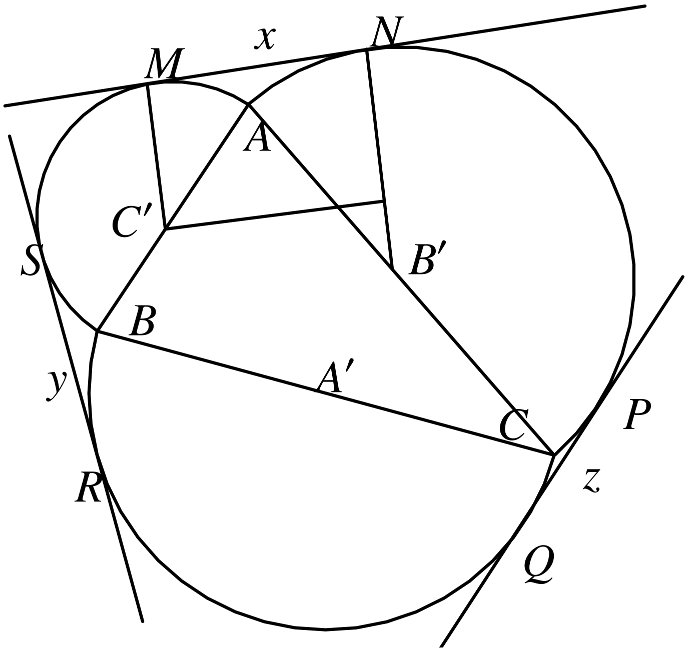
$s(n) \equiv 2s(n) \pmod 3 \Rightarrow s(n) \equiv 0 \pmod 3$

$\Rightarrow 2^n \equiv 0\ (\text{mod}3)$ ដែលជាករណីមិនអាចមាន។

ដូចនេះ គ្មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $s(n + 1) = s(n)$

លំហាត់ទី ៣៧:
ត្រីកោណមួយមានជ្រុងប្រវែង a, b និង c។ គេគូសកន្លះរង្វង់បី នៅខាងក្រៅត្រីកោណ និងមានអង្កត់ផ្ចិតជាជ្រុងនីមួយៗរបស់ត្រីកោណនោះ។ អង្កត់ប៉ះរួមនៃកន្លះរង្វង់ពីរៗ មានប្រវែង x, y និង z រៀងគ្នា។ សរសេរផលបូក $\sum = \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}$ ជាអនុគមន៍នៃ a, b និង c។

ដំណោះស្រាយ



គេយក $\triangle ABC$ ជាត្រីកោណដែលមាន $BC = a,\ CA = b$ និង $AB = c$
តាង A', B', C' ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នារបស់ជ្រុង BC, CA, AB។
តាង MN ជាបន្ទាត់ប៉ះរួមនៃកន្លះរង្វង់ផ្ចិតC' និងផ្ចិត B' ហើយ $MN = x$

RS ជាបន្ទាត់ប៉ះរួមនៃកន្លះរង្វង់ផ្ចិតA' និងផ្ចិត C' ហើយ $RS = y$

PQ ជាបន្ទាត់ប៉ះរួមនៃកន្លះរង្វង់ផ្ចិតB' និងផ្ចិត A' ហើយ $PQ = z$

គូស $C'T \perp B'N$ ត្រង់ T នោះគេបាន $MNTC'$ ជាចតុកោណកែង។
វិបាក $MN = C'T = x$
គេបាន $B'C' = a/2, B'T = B'N - TN = |(b/2) - (c/2)|$

$C'T = \sqrt{(B'C')^2 - (B'T)^2} = \sqrt{(a/2)^2 - ((b/2) - (c/2))^2}$

$x = (1/2)\sqrt{(a + b - c)(a - b + c)}$

តាមរបៀបដូចគ្នា គេបាន :

$y = (1/2)\sqrt{(a + b - c)(-a + b + c)}$

$z = (1/2)\sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)}$

គេបាន $\dfrac{yz}{x} = \dfrac{1}{2}(-a+b+c),\ \dfrac{zx}{y} = \dfrac{1}{2}(a-b+c),\ \dfrac{xy}{z} = \dfrac{1}{2}(a+b-c)$

ដូចនេះ $\sum = \dfrac{yz}{x} + \dfrac{zx}{y} + \dfrac{xy}{z} = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$

លំហាត់ទី ៣៨:

គេឱ្យចំនួនពិត $a_1, a_2, ..., a_m$ **និង** $u_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ **ដែល** $n = 1, 2, ..., m$។

បង្ហាញថា $\displaystyle\sum_{n=2}^{n}\left(\frac{u_n}{n}\right)^2 \le 12\sum_{n=1}^{m} a_n^2$។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)^2 = \left(a_n + \left(\dfrac{u_n}{n} - a_n\right)\right)^2 \le 2a_n^2 + 2\left(\dfrac{u_n}{n} - a_n\right)^2 = 4a_n^2 + 2\left(\dfrac{u_n}{n}\right)^2 - 4a_n\dfrac{u_n}{n}$

គេអាចសរសេរ $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{u_n}{n}\right)^2 \le 4\sum_{n=1}^{m} a_n^2 + 2\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{u_n}{n}\right)^2 - 4\sum_{n=1}^{m} a_n\left(\frac{u_n}{n}\right) \quad (1)$

តែ $u_n^2 - u_{n-1}^2 = (u_n + u_{n-1})(u_n - u_{n-1}) = (2u_n - a_n)a_n = 2u_na_n - a_n^2$

$\Rightarrow -2u_na_n = -\left(u_n^2 - u_{n-1}^2\right) - a_n^2 \le -\left(u_n^2 - u_{n-1}^2\right)$

គេបាន : $\displaystyle -2{-}\left(u_n^2 - u_{n-1}^2\right)\frac{u_na_n}{n} = -2u_1^2 - 2\sum_{n=2}^{m}\frac{u_na_n}{n} \le -u_1^2 - \sum_{n=2}^{m}\frac{1}{n}\left(u_n^2 - u_{n-1}^2\right) =$

$\displaystyle -\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n(n+1)}u_n^2 - \frac{u_m^2}{m(m+1)}$

$$\Rightarrow -2\sum_{n=1}^{m}\frac{u_na_n}{n} \le -\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n(n+1)}u_n^2 - \frac{u_m^2}{m} \le -\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n(n+1)}u_n^2 - \frac{u_m^2}{m(m+1)}$$

$$\Rightarrow -2\sum_{n=1}^{m}\frac{u_na_n}{n} \le -\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)}u_n^2 \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{u_n}{n}\right)^2 \le 4\sum_{n=1}^{m} a_n^2 + 2\sum_{n=1}^{m}\frac{u_n^2}{n^2(n+1)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{m}\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\left(\frac{u_n}{n}\right)^2 \le 4\sum_{n=1}^{m} a_n^2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{m}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\left(\frac{u_n}{n}\right)^2 \le 4\sum_{n=1}^{m} a_n^2 \Rightarrow 0 + \sum_{n=2}^{m}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\left(\frac{u_n}{n}\right)^2 \le 4\sum_{n=1}^{m} a_n^2 \quad (3)$$

ដោយ $f(n) = \dfrac{n-1}{n+1}$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច នោះគេបាន $f(n) \geq f(2) = \dfrac{1}{3}$
ចំពោះ $n \geq 2$

គេបាន $\dfrac{n-1}{n+1} \geq \dfrac{1}{3} \Rightarrow \sum_{m=2}^{n} \dfrac{n-1}{n+1}\left(\dfrac{u_n}{n}\right)^2 \geq \dfrac{1}{3}\sum_{m=2}^{n}\left(\dfrac{u_n}{n}\right)^2 \quad (4)$

តាម (3) និង (4) គេបាន $\sum_{n=2}^{n}\left(\dfrac{u_n}{n}\right)^2 \leq 12\sum_{n=1}^{m} a_n^2$

លំហាត់ទី ៣៩:

ដោះស្រាយសមីការ

$cos3xcos2x + sin3xsin2x = \left(cos\dfrac{\pi}{10} - sin\dfrac{\pi}{10}\right)\left(sin\dfrac{\pi}{10} + cos\dfrac{\pi}{10}\right)$។

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន $cos(3x - 2x) = cos^2\dfrac{\pi}{10} - sin^2\dfrac{\pi}{10}$

$\Rightarrow cosx = cos\dfrac{\pi}{5}$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{5} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

លំហាត់ទី ៤០:

សមីការ $x^3 - px + 2019 = 0$ ដែល p ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិមានឫសបី x_1, x_2 និង x_3។ តើតម្លៃនៃ $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ គឺប៉ុន្មាន?

ដំណោះស្រាយ

ដោយ x_1, x_2 និង x_3 ជាឫសនៃសមីការ $x^3 - px + 2019 = 0$
គេអាចសរសេរ $x^3 - px + 2019 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$

យើងបាន $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p \\ x_1x_2x_3 = -2019 \end{cases}$

ម្យ៉ាងទៀត x_1, x_2 និង x_3 ជាឫសនៃសមីការ $x^3 - px + 2019 = 0$

$$x_1^3 - px_1 + 2019 = 0$$

$$x_2^3 - px_2 + 2019 = 0$$
$$x_3^3 - px_3 + 2019 = 0$$

បូកសមភាពទាំងបីខាងលើ យើងបាន:

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - p(x_1 + x_2 + x_3) + 3 \cdot 2019 = 0$

$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = p(x_1 + x_2 + x_3) - 3 \cdot 2019 = p \cdot 0 - 3 \cdot 2019 = -6057$

<u>វិធីទី២</u>

យើងមាន $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3\left(x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_1^2x_3 + x_3^2x_1 \right.$

$$\left. + x_2^2x_3 + x_3^2x_2\right) - 6x_1x_2x_3$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3\left[p(x_1 + x_2 + x_3) - 3x_1x_2x_3\right] - 6x_1x_2x_3$$
$$= 3x_1x_2x_3 = 3(-2019) = -6057$$

លំហាត់ទី ៤១:

គេឱ្យស្វ៊ីត $(a_n)_{n\geq 1}$ កំណត់ដោយ $a_1 = 0$ និង $a_{n+1} = a_n + \sqrt{4.a_n + 1} + 1,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{4.a_1 + 1} + \sqrt{4.a_2 + 1} + \sqrt{4.a_3 + 1} + \ldots + \sqrt{4.a_n + 1} = n^2,\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1$។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $a_1 = 0$

$$a_2 = a_1 + \sqrt{4.a_1 + 1} + 1 = 2 = 1.2$$
$$a_3 = a_2 + \sqrt{4.a_2 + 1} + 1 = 6 = 2.3$$

....

នោះ $a_n = (n-1)n$

យើងបាន $\sqrt{4.a_1 + 1} + \sqrt{4.a_2 + 1} + \sqrt{4.a_3 + 1} + \ldots + \sqrt{4.a_n + 1} = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$ ពិត

លំហាត់ទី ៤២:

គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A = \begin{pmatrix} cos^2x & sin^2x \\ sin^2x & cos^2x \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}$ ។

ក) បង្ហាញថា $A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + cos^n2x}{2} & \dfrac{1 - cos^n2x}{2} \\ \dfrac{1 - cos^n2x}{2} & \dfrac{1 + cos^n2x}{2} \end{pmatrix}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n។

ខ) គណនា $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} detA^k}{det\left(\sum_{k=1}^{n} A^k\right)}$។

ដំណោះស្រាយ

ក) បង្ហាញថា $A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1+cos^n 2x}{2} & \dfrac{1-cos^n 2x}{2} \\ \dfrac{1-cos^n 2x}{2} & \dfrac{1+cos^n 2x}{2} \end{pmatrix}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

យើងមាន $A = \begin{pmatrix} cos^2x & sin^2x \\ sin^2x & cos^2x \end{pmatrix}$

ដោយ $cos^2x = \dfrac{1+cos2x}{2}$ និង $sin^2x = \dfrac{1-cos2x}{2}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \dfrac{1+cos2x}{2} & \dfrac{1-cos2x}{2} \\ \dfrac{1-cos2x}{2} & \dfrac{1+cos2x}{2} \end{pmatrix}$

នោះវាពិតក្នុងករណី $n = 1$

ឧបមាថាវាពិតរហូតដល់ $n = k$ គឺ $A^k == \begin{pmatrix} \dfrac{1+cos^k 2x}{2} & \dfrac{1-cos^k 2x}{2} \\ \dfrac{1-cos^k 2x}{2} & \dfrac{1+cos^k 2x}{2} \end{pmatrix}$

ឬ $A^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$ ដែល $a_k = \dfrac{1+cos^k 2x}{2}$, $b_k = \dfrac{1-cos^k 2x}{2}$

យើងនិងស្រាយថា $A^{k+1} = \begin{pmatrix} a_{k+1} & b_{k+1} \\ b_{k+1} & a_{k+1} \end{pmatrix}$ ដែល $a_{k+1} = \dfrac{1+cos^{k+1} 2x}{2}$,

$b_{k+1} = \dfrac{1-cos^{k+1} 2x}{2}$

យើងដឹងថា $A^{k+1} = A^k.A = \begin{pmatrix} \dfrac{1+cos^k 2x}{2} & \dfrac{1-cos^k 2x}{2} \\ \dfrac{1-cos^k 2x}{2} & \dfrac{1+cos^k 2x}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1+cos2x}{2} & \dfrac{1-cos2x}{2} \\ \dfrac{1-cos2x}{2} & \dfrac{1+cos2x}{2} \end{pmatrix}$

ដោយ $\dfrac{1+cos2x+cos^k 2x+cos^{k+1}2x}{4} + \dfrac{1-cos2x-cos^k 2x+cos^{k+1}2x}{4}$

$= \dfrac{1+cos^{k+1}2x}{2} = a_{k+1}$,

$$\frac{1-cos2x+cos^k2x-cos^{k+1}2x}{4}+\frac{1+cos2x-cos^k2x-cos^{k+1}2x}{4}$$

$$=\frac{1-cos^{k+1}2x}{2}=b_{k+1}$$

នោះ $A^{k+1}=\begin{pmatrix}a_{k+1} & b_{k+1}\\ b_{k+1} & a_{k+1}\end{pmatrix}$ ពិត

ដូចនេះ $A^n=\begin{pmatrix}\frac{1+cos^n2x}{2} & \frac{1-cos^n2x}{2}\\ \frac{1-cos^n2x}{2} & \frac{1+cos^n2x}{2}\end{pmatrix}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

ខ) គណនា $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} detA^k}{det\left(\sum_{k=1}^{n} A^k\right)}$

យើងមាន $A^k=\begin{pmatrix}\frac{1+cos^k2x}{2} & \frac{1-cos^k2x}{2}\\ \frac{1-cos^k2x}{2} & \frac{1+cos^k2x}{2}\end{pmatrix}$ នោះ $detA^k=\frac{\left(1+cos^k2x\right)^2}{4}-$
$\frac{\left(1-cos^k2x\right)^2}{4}=cos^k2x$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n} detA^k=cos2x+cos^22x+...+cos^n2x$$

$$\sum_{k=1}^{n}A^k=\begin{pmatrix}\frac{1+cos2x}{2} & \frac{1-cos2x}{2}\\ \frac{1-cos2x}{2} & \frac{1+cos2x}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1+cos^22x}{2} & \frac{1-cos^22x}{2}\\ \frac{1-cos^22x}{2} & \frac{1+cos^22x}{2}\end{pmatrix}+...$$
$$+\begin{pmatrix}\frac{1+cos^n2x}{2} & \frac{1-cos^n2x}{2}\\ \frac{1-cos^n2x}{2} & \frac{1+cos^n2x}{2}\end{pmatrix}$$

$\sum_{k=1}^{n}A^k=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$ ដែល $a=\frac{n+cos2x+cos^2x+...+cos^n2x}{2}$ និង
$b=\frac{n-cos2x-cos^22x-...-cos^n2x}{2}$

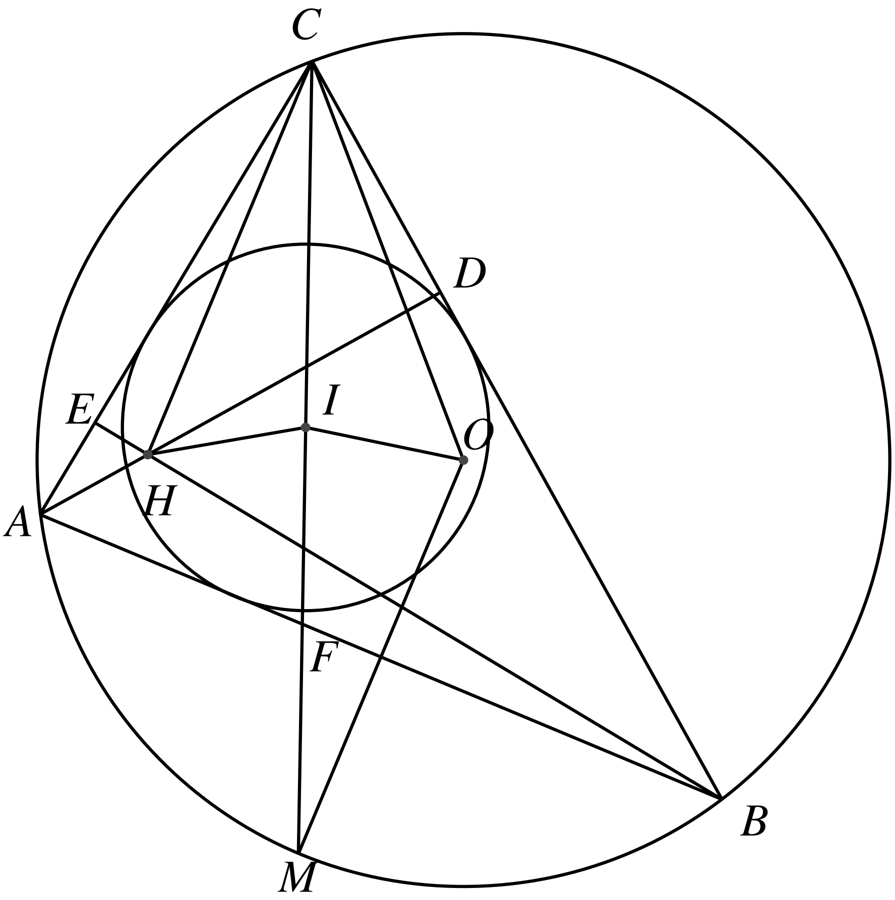
$$\Rightarrow det\left(\sum_{k=1}^{n}A^k\right)=a^2-b^2=n(cos2x+cos^22x+...+cos^n2x)$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} detA^k}{det\left(\sum_{k=1}^{n} A^k\right)} = \dfrac{1}{n}$

លំហាត់ទី ៤៣:

D និង E ជាជើងនៃចំណោលកែងពីកំពូល A និង B នៃត្រីកោណ ABC។ F ជាប្រសព្វរវាងកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ $\angle C$ ជាមួយជ្រុង AB។ O, I និង H ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ ផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និងអរតូសង់នៃត្រីកោណ ABC។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $\dfrac{CF}{AD} + \dfrac{CF}{BE} = 2$ នោះ $OI = IH$។

ដំណោះស្រាយ



តាង $BC = a,\ AC = b,\ \angle ACB = \gamma,\ \angle CAB = \alpha,\ CF = s_c$

យើងមាន $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AFC} + S_{\triangle BFC}$

$$\frac{1}{2}bs_c sin\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}as_c sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}absin\gamma \Rightarrow s_c = \frac{2abcos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{a+b}$$

$AD = bsin\gamma$ និង $BE = asin\gamma$

យើងបាន $\dfrac{CF}{AD}+\dfrac{CF}{BE}=\dfrac{2acos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{(a+b)sin\gamma}+\dfrac{2bcos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{(a+b)sin\gamma}=\dfrac{1}{sin\frac{\gamma}{2}}\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a+b}\right)=$
$\dfrac{1}{sin\frac{\gamma}{2}}$

តាមសម្មតិកម្ម យើងទាញបាន $sin\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\gamma=60^0$

តាង M ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ CF ជាមួយរង្វង់ចារឹកក្រៅ

នោះ $OM\perp AB$

តែ $CH\perp AB$ នោះ $\angle OMC=\angle MCH$

ឬ $\angle OCM=\angle MCH$

ដោយ $\angle EHC=90^0-\angle ECH=90^0-\left(90^0-\alpha\right)=\alpha$

ក្នុង $\triangle HCE:\ CH=\dfrac{CE}{sin\alpha}$

ក្នុង $\triangle BCE:\ CE=acos\alpha$

នោះ $CH=\dfrac{acos\gamma}{sin\alpha}=\dfrac{a}{sin\alpha}cos\gamma=2Rcos\gamma=R$ ព្រោះ $\gamma=60^0$

យើងបាន $\triangle CHI\simeq\triangle COI$ (ជ.ម.ជ)

វិបាក : $OI=IH$

លំហាត់ទី ៤៤:

គេឱ្យ $a,b,c,d\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ **និង** $x,y,z,t\in\mathbb{R}$ **ផ្ទៀងផ្ទាត់** $a^x=bcd,\ b^y=cda,$ $c^z=dab,\ d^t=abc$។ **ស្រាយបញ្ជាក់ថា** $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}+\dfrac{1}{1+z}+\dfrac{1}{1+t}=1$។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $a^x=bcd\Rightarrow x=log_a(bcd)=\dfrac{log(bcd)}{log(a)}$

នោះ $1+x=1+\dfrac{log(bcd)}{loga}=\dfrac{log(a)+log(bcd)}{log(a)}=\dfrac{log(abcd)}{log(a)}$

យើងបាន $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}+\dfrac{1}{1+z}+\dfrac{1}{1+t}=\dfrac{log(a)}{log(abcd)}+\dfrac{log(b)}{log(abcd)}+\dfrac{log(c)}{log(abcd)}+$
$\dfrac{log(d)}{log(abcd)}$

$$= \frac{log(abcd)}{log(abcd)} = 1 \text{ ពិត}$$

លំហាត់ទី ៤៥:

គេឱ្យចំនួនពិត a និង b ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2 + b^2 = 1$។ តើមានតម្លៃ a និង b ដែលធ្វើអោយ $cosa - sinb$ អវិជ្ជមានដែរឬទេ?

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $cosa - sinb = cosa + cos\left(\frac{1}{2}\pi + b\right)$

$$= 2cos\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\pi + a + b\right) \cdot cos\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\pi - (a - b)\right)$$

ដោយ $|a \pm b| = \sqrt{(a \pm b)^2}$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ab}$$

$$\leq \sqrt{2\left(a^2 + b^2\right)} = \sqrt{2} < \frac{1}{2}\pi$$

ព្រោះ $a^2 + b^2 \geq 2ab$

យើងបាន $0 < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\pi + a + b\right) < \frac{1}{2}\pi,\ 0 < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\pi - (a - b)\right) < \frac{1}{2}\pi$

នោះ $cosa - sinb > 0$

ដូចនេះ គ្មានតម្លៃនៃa និង b ដែលធ្វើអោយ $cosa - sinb$ អវិជ្ជមានទេ

លំហាត់ទី ៤៦:

បើ x ជាចំនួនពិត និង $[x]$ តាងអោយចំនួនគត់ធំបំផុត m ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $x = m + r$ ដែល $0 \leq r < 1$។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ a និង b ជាចំនួនពិតនោះ :

(ក) $[a + b] \geq [a] + [b]$,

(ខ) $\left[a + \frac{1}{a}\right] \geq 2$ បើ $a > 0$,

(គ) $\left[a + \frac{1}{a}\right]$ បើ $a < -1$,

(ឃ) $[2a + 2b] \geq [a] + [b] + [a + b]$ ។

ដំណោះស្រាយ

(ក) $[a+b] \geq [a]+[b]$,
តាង $a = m + r. b = n + s$ ដែល m, n ជាចំនួនគត់ និង $0 \leq r, s < 1$
នោះ $a + b = m + n + l + t$ ដែល $r + s = l + t$ ក្នុងនោះ l ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន និង $0 \leq t < 1$
$\Rightarrow [a+b] = m+n+l \geq m+n = [a]+[b]$
(ខ) $\left[a+\frac{1}{a}\right] \geq 2$ បើ $a > 0$,
តាង $a = m + r,\ 0 \leq r < 1,\ m$ ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន

$$\text{យើងបាន } a+\frac{1}{a} = \frac{(m+r)^2+1}{m+r}$$

$$= 2+\frac{(m+r-1)^2}{m+r} \geq 2$$

នោះ $\left[a+\frac{1}{a}\right] \geq 2$
(គ) $\left[a+\frac{1}{a}\right] \leq -3$ បើ $a < -1$,
បើ $a < -1$ នោះ $a = -m + r$ ដែល $m \geq 2$ ជាចំនួនគត់និង $0 \leq r < 1$
យើងបាន $a+\frac{1}{a} = -m + s$ ដែល $s = r + \frac{1}{r-m}$
បើ $m = 2, s < 0$
បើ $m \leq 3,\ s = 1 - \frac{(m-r)(1-r)}{m-r} + 1 < 1$
នោះ $\left[a+\frac{1}{a}\right] \leq -3$
(ឃ) $[2a+2b] \geq [a]+[b]+[a+b]$
តាង $a = m + r. b = n + s$ ដែល m, n ជាចំនួនគត់ និង $0 \leq r, s < 1$
នោះ $[a+b] = m+n$ ឬ $m+n+1$ អាស្រ័យលើ $r+s<1$ ឬ $r+s \geq 1$
ដោយ $[2a+2b] \geq 2m+2n+2$ បើ $r+s \geq 1$
$\Rightarrow [2a+2b] \geq [a]+[b]+[a+b]$

លំហាត់ទី ៤៧:

ស្រាយតាមវិចារកំណើនថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n > 1,\ n^n > (n+1)^{n-1}$។

ចំណោះស្រាយ

- ចំពោះ $n = 2:\ 2^2 > 3^1$ ពិត

- ឧបមាថាពិតរហូតដល់ $n = k$ គឺ $k^k > (k+1)^{k-1}$
- យើងនិងស្រាយថាពិតរហូតដល់ $n = k+1$ គឺស្រាយថា $(k+1)^{k+1} > (k+2)^k$

យើងមាន $1 + k > \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ ហើយ $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k > \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^k$

$\Rightarrow k + 1 > \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^k$

ឬ $(k+1) > \frac{(k+2)^k}{(k+1)^k}$

នោះ $(k+1)^{k+1} > (k+2)^k$ ពិត

ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n > 1,\ n^n > (n+1)^{n-1}$

លំហាត់ទី ៤៨:

គេឱ្យអនុគមន៍ $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $2f(x) - f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x - \frac{1}{x}$ ។ ចូរគណនា $\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{3}{k^4+1}\right) \cdot f(k)$។

ដំណោះស្រាយ

ជំនួស x ដោយ $\frac{1-x}{1+x}$ នោះ $2f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - f(x) = \frac{1-x}{1+x} - \frac{1+x}{1-x}$

$2f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - f(x) = \frac{4x}{x^2-1} \quad (1)$

$4f(x) - 2f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2x - \frac{2}{x} \quad (2)$

យក (1) បូក (2) យើងបាន $3f(x) = 2x - \frac{2}{x} + \frac{4x}{x^2-1} = 2\left(\frac{x^2-1}{x} + \frac{2x}{x^2-1}\right)$

$3f(x) = 2\left(\frac{x^4+1}{x^3-x}\right)$

យើងបាន $\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{3}{k^4+1}\right)\cdot f(k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(k-1)(k+1)k}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)k}-\frac{1}{k(k+1)}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n(n+1)}$$

លំហាត់ទី ៤៩:

គេឱ្យ $k\in\mathbb{N}$ និង $tanx_k=\frac{\sqrt{4k-2\sqrt{4k^2-1}}}{1+\sqrt{4k^2-1}}$។ គណនា $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)$។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $tanx_k=\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{1+\sqrt{2k+1}.\sqrt{2k-1}}$

នោះ $x_k=arctan\sqrt{2k+1}-arctan\sqrt{2k-1}$

$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}x_k=arctan\sqrt{2n+1}-arctan1$

យើងបាន $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$

លំហាត់ទី ៥០:

គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

(ក) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx+cos^2x}{cosx+e^{sinx}}dx$។

(ខ) $J=\int\frac{e^{2x}+(2e^x+1)\,sinx+2e^x+sin^2x+cosx}{e^x+sinx}dx$។

ដំណោះស្រាយ

(ក) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx+cos^2x}{cosx+e^{sinx}}dx$

យើងបាន $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos^2x+e^{sinx}cosx-e^{sinx}cosx+sinx}{cosx+e^{sinx}}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cosx\left(cosx+e^{sinx}\right)}{cosx+e^{sinx}}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{sinx}cosx-sinx}{cosx+e^{sinx}}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}cosxdx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(cosx+e^{sinx}\right)'}{cosx+e^{sinx}}dx$

$=[cosx]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[cosx+e^{sinx}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=ln\frac{\pi}{2}$

(ខ) $J=\int\frac{e^{2x}+(2e^x+1)\,sinx+2e^x+sin^2x+cosx}{e^x+sinx}dx$

យើងបាន $J=\int\frac{e^{2x}+2sinxe^x+sin^2x+e^x+sinx+e^x+cosx}{e^x+sinx}dx$

$=\int\left[\frac{(e^x+sinx)^2}{e^x+sinx}+\frac{e^x+sinx}{e^x+sinx}+\frac{e^x+cosx}{e^x+sinx}\right]dx$

$=\int\left[e^x+sinx+1+\frac{(e^x+sinx)'}{e^x+cosx}\right]dx$

$=e^x-cosx+x+ln\left|e^x+sinx\right|+C$

លំហាត់ទី ៥១:

កំណត់ចំនួន $a\in\mathbb{N}$ **តូចបំផុតដើម្បីអោយ** $A=2021^x(2021^x+1)(2021^x+2)(2021^x+3)+a$ **ជាការេប្រាកដចំពោះគ្រប់** $x\in\mathbb{N}$។

ដំណោះស្រាយ

តាង $y=2021^x$ នោះ $A=y(y+1)(y+2)(y+3)+a$

$A=(y^2+3y)(y^2+3y+2)+a$

$=(y^2+3y)^2+2(y^2+3y)+a$

$=(y^2+3y)^2+2(y^2+3y)+1+a-1$

$=\left(y^2+3y+1\right)^2+a-1$

A ជាការប្រាកដ កាលណា $a-1=0$
ដូចនេះ $a=1$

លំហាត់ទី ៥២:

កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត $(x_n)_{n\geq 1}$ ដែលកំណត់ដោយ

$x_1=1$ និង $x_{n+1}=\dfrac{x_n\sqrt{n}}{\sqrt{n(x_n^2+x_n+1)+1}}$។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $x_1=1$

$$x_2=\frac{x_1\sqrt{1}}{\sqrt{1\left(x_1^2+x_1+1\right)+1}}=\frac{1}{2}$$

$$x_3=\frac{x_2\sqrt{2}}{\sqrt{2\left(x_2^2+x_2+1\right)+1}}=\frac{1}{3}$$

យើងអាចសន្មត់បានថា $x_n=\dfrac{1}{n}$

យើងនិងស្រាយថា $x_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$

ដោយ $x_{n+1}=\dfrac{x_n\sqrt{n}}{\sqrt{n(x_n^2+x_n+1)+1}}=\dfrac{\frac{1}{n}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1\right)+1}}$

នោះ $x_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$ ពិត

ដូចនេះ $x_n=\dfrac{1}{n},\ n\geq 1$

លំហាត់ទី ៥៣:

គេឱ្យ $a,b,c>0$។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}+\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}+\dfrac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\dfrac{1}{abc}$។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 - xy + y^2 \geq xy$ ចំពោះគ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$
ដោយ $x > 0, y > 0$ នោះ $x^3 + y^3 = (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) \geq (x+y)xy$
ចំពោះចំនួនពិត $a, b, c > 0$ យើងបាន
$a^3 + b^3 \geq (a+b)ab \Leftrightarrow a^3 + b^3 + abc \geq (a+b)ab + abc = ab(a+b+c) > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^3+b^3+abc} \leq \frac{1}{ab(a+b+c)} \quad (1)$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ: $\frac{1}{b^3+c^3+abc} \leq \frac{1}{bc(a+b+c)} \quad (2)$

$$\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{ca(a+b+c)} \quad (3)$$

បូក (1), (2), (3) បញ្ចូលគ្នា:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{a+b+c}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)$$

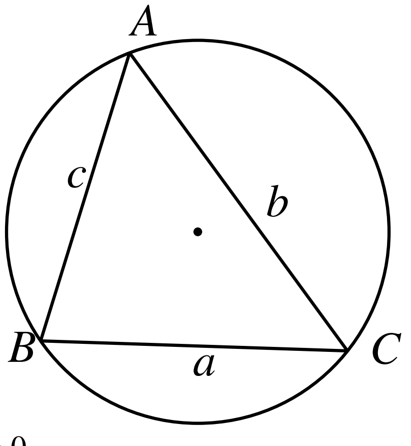
$$= \frac{1}{a+b+c}\left(\frac{a+b+c}{abc}\right)$$

$$= \frac{1}{abc}$$ ពិត

លំហាត់ទី ៥៤:

ត្រីកោណ ABC មាន $BC = a, CA = b, AB = c$ និង R ជាកាំនៃរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $R(b+c) = a\sqrt{bc}$។ កំណត់រង្វាស់មុំទាំងបីនៃត្រីកោណនេះ។

ដំណោះស្រាយ



យើងមាន $2R \geq BC = a$
តាមវិសមភាព Cauchy ចំពោះពីរចំនួនវិជ្ជមាន b និង c:

$$\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$$

នោះ $2R.\frac{b+c}{2} \geq a\sqrt{bc}$
$\Leftrightarrow R(b+c) \geq a\sqrt{bc}$

សញ្ញា "=" កើតមាន $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2R \\ b = c \end{cases}$; $\begin{cases} \angle BAC = 90^0 \\ AB = AC \end{cases}$

យើងបាន $\triangle ABC$ ជាត្រីកោណកែងសមបាតកំពូល A
ដូចនេះ $\angle B = \angle C = 45^0, \angle A = 90^0$

លំហាត់ទី ៥៥:
ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ នោះ $(tanx)^{sinx} + (cotx)^{cosx} \geq 2$។

ដំណោះស្រាយ

តាង $a \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ និង $b \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ដែល $a + b = \dfrac{\pi}{2}$
នោះ $(tanb)^{sinb} = (cota)^{sina}, \ (cotb)^{cosb} = (tana)^{sina}$
យើងឃើញថា បើវិសមភាពនេះពិតចំពោះ $x = a$ នោះវាក៏ពិតចំពោះ $x = b$ ដែរ។ វាគ្រប់គ្រាន់អោយយើងស្រាយវិសមភាពនេះចំពោះ $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right]$
បើ $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ នោះ $cotx \geq 1, \ cosx \geq sinx$
យើងបាន $(tanx)^{sinx} + (cotx)^{cosx} \geq (tanx)^{sinx} + (cotx)^{sinx}$

$$= (tanx)^{sinx} + \frac{1}{(tanx)^{sinx}} = A + \frac{1}{A} \ (1)$$

តែចំពោះចំនួនវិជ្ជមាន A : $A + \dfrac{1}{A} = \left(\sqrt{A} - \dfrac{1}{\sqrt{A}}\right)^2 + 2 \geq 2 \ (2)$
តាម (1)&(2) : $(tanx)^{sinx} + (cotx)^{cosx} \geq 2$ ពិត

លំហាត់ទី ៥៧:
ប្រៀបធៀបចំនួនពិត $\alpha = \dfrac{(2014.2014201420142014)^3 - 2014}{2015.2014201420142014}$ និង
$\beta = \dfrac{(2014.2014201420142015)^3 - 2014}{2015.2014201420142015}$។

ដំណោះស្រាយ

តាង $f(x) = \dfrac{x^3 - 2014}{x + 1}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2 + 2014}{(x+1)^2}$

ចំពោះ $x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ ហើយ f កើនដាច់ខាតចំពោះ $x > 0$
គេដឹងថា $0 < 2014.2014201420142014 < 2014.2014201420142015$

នោះគេទាញបាន $f(2014.2014201420142014) < f(2014.2014201420142015)$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{(2014.2014201420142014)^3 - 2014}{2015.2014201420142014} <$$

$$\beta = \frac{(2014.2014201420142015)^3 - 2014}{2015.2014201420142015}$$

លំហាត់ទី ៥៨:

គេឱ្យចំនួនគត់ធម្មជាតិ a និង b ដែល $a = da', b = db'$ ដែល a' និង b' ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា។ តាង A ជាសំណុំពហុគុណរួមនៃ a និង b ហើយ B ជាសំណុំពហុគុណនៃ ab'។ បង្ហាញថា $A = B$។

ដំណោះស្រាយ

- ចំពោះ $M \in A \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{N}$ ដែល $M = ka = lb \quad (1)$

គេមាន: $a = a'd, b = b'd$ ដែល $gcd(a', b') = 1$

តាម (1) : $ka'd = lb'd \Rightarrow ka' = lb'$

គឺ $b'|ka'$ តែ $gcd(a', b') = 1 \Rightarrow b'|k \Rightarrow k = b'q$ ដែល $q \in \mathbb{N}$

គេបាន $M = (ab')q \Rightarrow M \in B$ បានន័យថា $A \subset B \quad (i)$

- ចំពោះគ្រប់ $M' \in B \Rightarrow M' = (ab')r$ ដែល $r \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow M' = (ab')r = a(b'r) \quad (2)$

ម្យ៉ាងទៀត $ab' = (da')b' = a'(db') = a'b$

ដោយ M' ជាពហុគុណនៃ ab' នោះ M' ជាពហុគុណនៃ $a'b$

គេបាន $M' = (a'b)s = (a's)b$ ដែល $s \in \mathbb{N} \quad (3)$

តាម $(2)\&(3)$: $M' = a(b'r) \& M' = b(a's) \Rightarrow M' \in A$ បានន័យថា $B' \subset A \quad (ii)$

តាម (i) និង (ii) : $\Rightarrow A = B$ ។

លំហាត់ទី ៥៩:

អនុគមន៍ S កំណត់លើសំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដោយ:

$S(n) = 1^n + 2^{n-1} + 3^{n-2} + 4^{n-3} + \cdots + (n-2)^3 + (n-1)^2 + n$។

បង្ហាញថា $S(n+1) > 3S(n)$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 5$។

ដំណោះស្រាយ

$$S(n+1) = 1^{n+1} + 2^n + 3^{n-1} + 4^{n-2} + \cdots + (n-1)^3 + n^2 + (n+1) >$$
$$> 1^{n+1} + 2^n + 3^{n-1} + 4^{n-2} + 5^{n-3} + 6^{n-4} + \cdots + (n-1)^3 + n^2$$

តែគេមាន: $1^{n+1} + 2^n + 3^{n-1} + 4^{n-2} + 5^{n-3} + 6^{n-4} + \cdots + (n-1)^3 + n^2 >$

$> 1^{n+1} + 2^n + 3^{n-1} + 4^{n-2} + 5^{n-3} + 3\left(6^{n-5} + 7^{n-6} + \cdots + (n-1)^2 + n\right)$

$\Rightarrow S(n+1) > 1^{n+1} + 2^n + 3^{n-1} + 4^{n-2} + 5^{n-3} + 3\left(6^{n-5} + 7^{n-6} + \cdots\right.$

$\left.+(n-1)^2 + n\right)$ (1)

តែគេមាន: $1^{n+1}+2^n+3^{n-1}+4^{n-2}+5^{n-3}+3\left(6^{n-5}+7^{n-6}+\cdots+(n-1)^2+n\right) =$

$1^{n-1} + 2^n + 3^{n-1} + 4^{n-2} + 5^{n-3} + 3\left(S(n) - 1^n - 2^{n-1} - 3^{n-2} - 4^{n-3} - 5^{n-4}\right)$

$= 3S(n)-2+2\cdot 2^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3^{n-1}-3\cdot 3^{n-2}+4\cdot 4^{n-3}-3\cdot 4^{n-3}+5\cdot 5^{n-4}-3\cdot 5^{n-4}$

$= 3S(n) - 2 - 2^{n-1} + 4^{n-3} + 2\cdot 5^{n-4}$

$= 3S(n) + 2\left(5^{n-4} - 1\right) + 2^{n-1}\left(2^{n-5} - 1\right) > 3S(n)$ (2)

ព្រោះ $2^{n-1}\left(2^{n-5} - 1\right) > 0$

តាម (1)&(2) គេបាន $S(n+1) > 3S(n)$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 5$។

លំហាត់ទី ៦០:

ចំនួនបន្សំ នៃ n ធាតុខុសៗគ្នា យកម្តង i ធាតុ តាងដោយ $C(n,i)$។

ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យា បង្ហាញថា $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}C(n,i) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$ **ចំពោះ** $n = 1, 2, 3, \ldots$។

ដំណោះស្រាយ

- ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $\sum_{i=1}^{1}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}C(1,i) = (-1)^2 C(1,1)\frac{1}{1} = 1 = \frac{1}{1} = \sum_{j=1}^{1}\frac{1}{j}$

គឺសមភាពពិតចំពោះ $n = 1$

- ឧបមាថាសមភាពពិតដល់ $n = k$ គឺថា $\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}C(k,i) = \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}$ (1)

- សិក្សាចំពោះ $n = k+1$ គេបាន

$$\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}C(k+1,i)\frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}C(k+1,i)\frac{1}{i}+(-1)^{k+1+1}C(k+1,k+1)\frac{1}{k+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\left(C(k,i-1) + C(k,i)\right)\cdot\frac{1}{i} + (-1)^{k+1+1}C(k+1,k+1)\frac{1}{k+1}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}C(k,i-1)\cdot\frac{1}{i} + (-1)^{k+1+1}C(k+1,k+1)\frac{1}{k+1}\right) +$$

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}C(k,i)\frac{1}{i}$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}C(k,i-1)\cdot\frac{1}{i}+(-1)^{k+1+1}C(k,k+1-1)\frac{1}{k+1}\right)+$$
$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}C(k,i)\frac{1}{i}$$
$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}C(k+1,i)\frac{1}{i}=\left(\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}C(k,i-1)\cdot\frac{1}{i}\right)+$$
$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}C(k,i)\cdot\frac{1}{i}\quad(2)$$

តែគេអាចសរសេរ $C(k,i-1)\frac{1}{i}=\frac{k!}{i(i-1)!(k-i+1)!}=\frac{(k+1)!}{i!(k+1-i)!}\cdot\frac{1}{k+1}=$
$\frac{1}{k+1}C(k+1,i)\quad(3)$

តាម (1), (2)&(3) គេបាន $\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}C(k+1,i)\cdot\frac{1}{i}=\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}C(k+1,i)\frac{1}{k+1}+$
$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$

$$\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}C(k+1,i)\frac{1}{i}=(-1)\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i}C(k+1,i)\frac{1}{k+1}+\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\quad(4)$$

តែគេមាន $0=(1+(-1))^{k+1}=1+\sum_{i=1}C(k+1,i)1^{k+1-i}(-1)^{i}\Rightarrow-\sum_{i=1}C(k+$
$1,i)\cdot1^{k+1-i}(-1)=1$

$$\Rightarrow(-1)\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i}C(k+1,i)\frac{1}{k+1}=1\times\frac{1}{k+1}$$

$(4)\Rightarrow\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}C(k+1,i)\frac{1}{i}=\frac{1}{k+1}+\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}=\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{j}$ គឺសមភាពពិតចំពោះ
$n=k+1$

លំហាត់ទី ៦១:

គេឱ្យស្វ៊ីត x_n **និង** y_n **ដែលកំណត់ចំពោះ** $n = 1, 2, 3, \dots$ **ដោយ** $x_1 = 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$ **និង** $y_1 = 1, y_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n + 3y_n)$**។**

១. គណនាតួទី២ ទី៣ និងទី៤ នៃស្វ៊ីតនីមួយៗ។

២. គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)$ **និង** $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n)$**។**

ដំណោះស្រាយ

១. គណនាតួទី២ ទី៣ និងទី៤ នៃស្វ៊ីតនីមួយៗ

$x_2 = (1/2)(x_1 + y_1) = 1/2, y_2 = (1/4)(x_1 + 3y_1) = 3/4$

$x_3 = (1/2)(x_2 + y_2) = 5/8, y_3 = (1/4)(x_2 + 3y_2) = 11/16$

$x_4 = (1/2)(x_3 + y_3) = 21/32, y_4 = (1/4)(x_3 + 3y_3) = 43/64$

២. គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n)$

គេមាន $x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n - y_n)$

តាង $z_n = x_n - y_n$ នោះគេបាន $z_{n+1} = \frac{1}{4}z_n$ ដែលជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{1}{4}$

ដូចនេះ $z_{n+1} = \left(\frac{1}{4^n}\right)z_1$

តែ $z_1 = z_1 - y_1 = -1 \Rightarrow z_{n+1} = -\frac{1}{4^n} \Rightarrow z_n = -\frac{1}{4^{n-1}} \Rightarrow y_n = x_n + \left(\frac{1}{4^{n-1}}\right)$

គេបាន $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + x_n + \left(\frac{1}{4^{n-1}}\right)\right) = x_n + \left(\frac{1}{2\cdot 4^{n-1}}\right)$

ដោយ $x_{n+1} = x_n + \left(\frac{1}{2\cdot 4^{n-1}}\right)$ នោះគេបាន $x_2 = x_1 + 1/2$

$x_3 = x_2 + \left(\frac{1}{2\cdot 4^{3-2}}\right) = x_1 + 1/2 + \left(\frac{1}{2\cdot 4^{3-2}}\right)$

$x_4 = x_1 + 1/2 + \left(\frac{1}{2\cdot 4^{3-2}}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 4^{4-2}}\right)$

....

$x_n = x_1 + 1/2 + \left(\frac{1}{2\cdot 4^{3-2}}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 4^{4-2}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2\cdot 4^{n-2}}\right)$

$$x_n = x_1 + (1/2)\frac{1-\left(\frac{1}{4^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{4}} = (2/3)\left(1-\left(\frac{1}{4^{n-1}}\right)\right)$$

គេបាន $\lim_{n\to+\infty}(x_n) = \lim_{n\to+\infty}(2/3)\left(1-\left(\frac{1}{4^{n-1}}\right)\right) = \frac{2}{3}$

- គណនា $\lim_{n\to+\infty}(y_n)$

$$\lim_{n\to+\infty}(y_n) = \lim_{n\to+\infty}(x_n) + \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4^{n-1}}\right) = 2/3$$

លំហាត់ទី ៦២:

ត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងទាំងបី A, B, C និងបរិមាត្រ $2p$។
បង្ហាញថា $BC = \frac{psin(A/2)}{cos(B/2)cos(C/2)}$, $AC = \frac{psin(B/2)}{cos(A/2)cos(C/2)}$ និង $AB = \frac{psin(C/2)}{cos(A/2)cos(B/2)}$។

ដំណោះស្រាយ

គេតាង $BC = a,\ AC = b,\ AB = c$ នោះគេបាន $a+b+c = 2p$

គេមាន $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = \frac{a+b+c}{sinA+sinB+sinC} = \frac{2p}{sinA+sinB+sinC}$

$= \frac{2p}{2sin(A/2)cos(A/2) + 2sin\left((B+C)/2\right)cos\left((B-C)/2\right)}$

$= \frac{2p}{2sin(A/2)cos(A/2) + 2cos(A/2)cos\left((B-C)/2\right)}$

$= \frac{p}{cos(A/2)\left(cos\left((B+C)/2\right) + cos\left((B-C)/2\right)\right)}$

$\Rightarrow \frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = \frac{p}{2cos(A/2)cos(B/2)cos(C/2)}$

$\Rightarrow a = \frac{psinA}{2cos(A/2)cos(B/2)cos(C/2)} = \frac{2psin(A/2)cos(A/2)}{2cos(A/2)cos(B/2)cos(C/2)}$

$= \frac{psin(A/2)}{cos(B/2)cos(C/2)}$

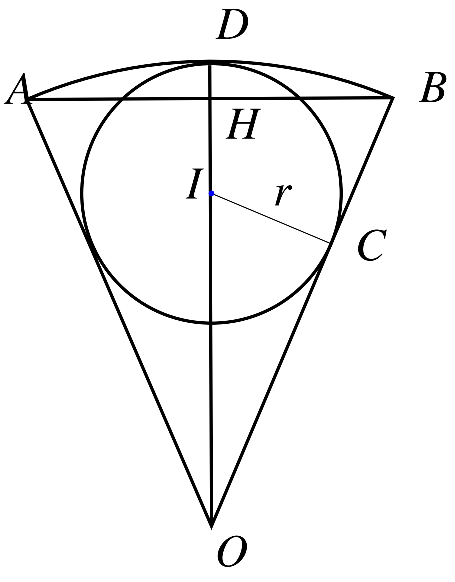
តាមរបៀបដូចគ្នា គេបាន $b = \frac{psinB}{2cos(A/2)cos(B/2)cos(C/2)}$

$$b = \frac{psin(B/2)}{cos(A/2)cos(C/2)}$$
$$c = \frac{psinC}{2cos(A/2)cos(B/2)cos(C/2)}$$
$$c = \frac{psin(C/2)}{cos(A/2)cos(B/2)}$$

លំហាត់ទី ៦៣:

រង្វង់ផ្ចិត I និងកាំ rមួយ ចារឹកក្នុងចម្រៀកថាស (AOB) ផ្ចិត O កាំ Rមួយ និងមានអង្កត់ធ្នូ $AB = 2R$។ បង្ហាញថា $\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}$។

ដំណោះស្រាយ



គេមាន ត្រីកោណ HOB ដូច COI

$$\frac{HOB}{COI} \Rightarrow \frac{OB}{OI} = \frac{BH}{CI}$$
$$\frac{R}{R-r} = \frac{a}{r} \Rightarrow Rr = aR - ar$$
$$\Rightarrow \frac{aR}{aRr} = \frac{Rr}{aRr} + \frac{ar}{aRr} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}$$

លំហាត់ទី ៦៤:

គេឱ្យបីចំនួនវិជ្ជមាន a, b, c ដែល $a \geq b \geq c$ និង $a + b + c \geq 1$។
បង្ហាញថា $a^2 + 3b^2 + 5c^2 \geq 1$។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $0 < a+b+c \le 1 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \le 1 \quad (1)$

$a \ge b \Rightarrow 2ab \ge 2b^2$

$b \ge c \Rightarrow 2bc \ge 2c^2$

$a \ge c \Rightarrow 2ac \ge 2c^2$

ដោយបូកអង្គ និងអង្គ គេបាន $2ab + 2bc + 2ac \ge 2b^2 + 4c^2$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \ge a^2 + 3b^2 + 5c^2 \quad (2)$

តាម $(1)\&(2) \Rightarrow a^2 + 3b^2 + 5c^2 \le 1$។

លំហាត់ទី ៦៥:

ស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_0 = a, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{nu_n + 1}$ ចំពោះ $n = 0, 1, 2, \ldots$ និង $a \ne 0$។ គណនា u_{2014} ជាអនុគមន៍នៃ a។

ដំណោះស្រាយ

គេអាចសរសេរ $u_{n+1}(nu_n + 1) = u_n \Leftrightarrow u_n - u_{n+1} = nu_n u_{n+1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = n$

គេបាន $n = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{u_1} - \dfrac{1}{u_0} = 0$

$n = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{u_2} - \dfrac{1}{u_1} = 1$

$n = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{u_3} - \dfrac{1}{u_2} = 2$

....

$n = 2013 \Rightarrow \dfrac{1}{u_{2014}} - \dfrac{1}{u_{2013}} = 2013$

ដោយបូកអង្គ និងអង្គ គេបាន

$\dfrac{1}{u_{2014}} - \dfrac{1}{u_0} = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 2013 = 2013 \times 1007$

$\dfrac{1}{u_{2014}} = \dfrac{2013 \times 1007 \times u_0 + 1}{u_0}$

$\Rightarrow u_{2014} = \dfrac{u_0}{2013 \times 1007 \times u_0 + 1} = \dfrac{a}{2027091a + 1}$

លំហាត់ទី ៦៦:

d ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ x និង y។ d' ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ $a = x + y$ និង $b = (k+3)x + (k+2)y$។ បង្ហាញថា $d = d'$ ។

ដំណោះស្រាយ

- ដោយ d ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ x និង $y \Rightarrow d|a = x + y$
d ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ x និង $y \Rightarrow d|(k+3)x \wedge d|(k+2)y$
$\Rightarrow d|b = (k+3)x + (k+2)y$
$d|a \wedge d|b \Rightarrow d|gcd(a,b) = d' \quad (1)$
- ដោយ d' ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ $a = x+y$ និង $b = (k+3)x+(k+2)y$
គេបាន $d'|(a = x + y) \Rightarrow d'|\,((k+2)x + (k+2)y)$
តែ $d'|b = (k+3)x+(k+2)y \Rightarrow d'|\,((k+3)x + (k+2)y - (k+2)x - (k+2)y) = x$
តាមរបៀបដូចគ្នា :
$d'|(x+y) \Rightarrow d'|\,((k+3)x + (k+3)y)$
តែ $d'|\,((k+3)x + (k+2)y)$
និង $d'|\,((k+3)x + (k+3y)) \Rightarrow d'|\,((k+3)x + (k+3)y - (k+3)x - (k+2)y) = y$
ដោយ $(d'|x \wedge d'|y) \Rightarrow d'|gcd(x,y) = d \quad (2)$
តាម $(1)\&(2) \Rightarrow d = d'$

លំហាត់ទី ៦៧:

អនុគមន៍ f កំណត់លើសំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ និងមានរូបភាពលើសំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ ហើយបំពេញលក្ខណ:
ដូចខាងក្រោម:
(1) $f(2) = 2$
(2) $f(mn) = f(m)f(n)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ mនិង n
(3) $f(m) > f(n)$ កាលណា $m > n$ ។
បង្ហាញថា $f(n) = n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n។

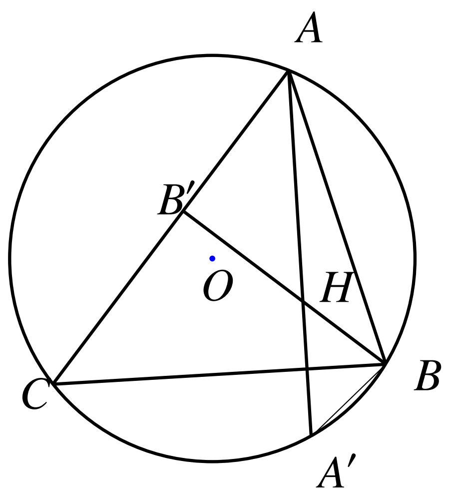
ដំណោះស្រាយ

- តាម (1)&(2) គេអាចសរសេរ $f(2) = 2 \Rightarrow f(2) = f(1 \cdot 2) = f(1)f(2)$
$2 = f(1) \cdot 2 \Rightarrow f(1) = 1$ ដែលពិតចំពោះ $n = 1$
- ឧបមាថាពិតដល់ $n = k$ គឺថា $f(k) = k \quad (4)$
-សិក្សាចំពោះ $n = k + 1$
i. បើ $k + 1 = 2p$ នោះ $1 \leq p \leq k$
តាម (1), (2)&(4) គេអាចសរសេរ $f(k + 1) = f(2p) = f(2)f(p) = 2p \Rightarrow f(k + 1) = k + 1$
ii. បើ $k + 1 = 2p + 1$ នោះ $1 \leq p < k \Rightarrow 2 \leq p + 1 \leq k$
ម្យ៉ាងទៀត $2p < 2p + 1 < 2(p + 1)$
តាម (3) គេអាចសរសេរ $f(2p) < f(2p + 1) < f(2(p + 1))$
$\Rightarrow 2p < f(2p + 1) < f(2(p + 1)) = f(2)f(p + 1) = 2(p + 1)$ ព្រោះ $p + 1 \leq k$
$\Rightarrow 2p < f(2p + 1) < 2p + 2$
ដោយ $f(2p + 1)$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ នោះគេទាញបាន $f(2p + 1) = 2p + 1$
$\Rightarrow f(k + 1) = k + 1$ នេះបញ្ជាក់ថាសមភាពពិតចំពោះ $n = k + 1$

លំហាត់ទី ៦៨:

ត្រីកោណ ABC មួយ មានអរតូសង់ H ដែលកំណត់លើកម្ពស់ AA' បានផលធៀប $\dfrac{AH}{HA'} = k$, k ជាចំនួនវិជ្ជមាន។ បង្ហាញថា $tanBtanC = k + 1, tanB + tanC = ktanA$ និង $cos(B - C) = \dfrac{k+2}{k}cosA$។

ដំណោះស្រាយ



- បង្ហាញថា $tanBtanC = k + 1$
តាង I ជាប្រសព្វរវាងរង្វង់ផ្ចិត O ដែលចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC និង AA'

គេមាន $tanBtanC = \frac{AA'}{A'B} \times \frac{AA'}{A'C} = \frac{AA' \cdot AA'}{A'B \cdot A'C}$ (1)
ត្រីកោណកែង $A'AC$ ដូច $A'BI$ ព្រោះ $\angle AA'C = \angle BA'I, \angle CAA' = \angle A'BI$
$\frac{A'AC}{A'BI} \Rightarrow \frac{A'A}{A'B} = \frac{A'C}{A'I} \Rightarrow A'B \cdot A'C = AA' \cdot A'I$
$\Rightarrow A'B \cdot A'C = AA' \cdot A'H$ ព្រោះ $A'I = A'H$
តាម (1) គេបាន $tanBtanC = \frac{AA' \cdot AA'}{AA' \cdot A'H} = \frac{AA'}{A'H} = \frac{AH + HA'}{HA'} = k + 1$
- បង្ហាញថា $tanB + tanC = ktanA$
គេមាន $tanB + tanC = \frac{sin(B + C)}{cosBcosC}$ (2)
ដោយ $tanBtanC = k + 1$ នោះ $sinBsinC = (k + 1)cosBcosC$
$-kcosBcosC = cosBcosC - sinBsinC = cos(B + C)$
$\Rightarrow cosBcosC = (-1/k)cos(B + C)$
តាម (2) គេបាន $tanB + tanC = -k\frac{sin(B + C)}{cos(B + C)} = -ktan(B + C) = -ktan(\pi - A) = ktanA$
- បង្ហាញថា $cos(B - C) = \frac{k + 2}{k}cosA$
គេមាន $cos(B - C) = cosBcosC + sinBsinC = (k + 2)cosBcosC$
$cos(B - C) = (k + 2)(-1/k)cos(B + C)$ ព្រោះ $cosBcosC = (-1/k)cos(B + C)$
$\Rightarrow cos(B - C) = (-(k + 2)/k)cos(\pi - A) = ((k + 2)/k)cosA$

លំហាត់ទី ៦៩:

បង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប k អាចសរសេរជារាង $a^2 + b^2 - 5c^2$ ដែល a, b, c ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប។

ដំណោះស្រាយ

- ករណី $k = 2n + 1,\ n \in \mathbb{Z}$ គេអាចសរសេរ $k = 2n + 1 = n^2 + 4n^2 - 5n^2 + 2n + 1$
$k = n^2 + 2n + 1 + 4n^2 - 5n^2$
$k = (n + 1)^2 + (2n)^2 - 5n^2$
- ករណី $k = 2n,\ n \in \mathbb{Z}$ គេអាចសរសេរ $k = 2n = n^2 + 4n^2 - 5n^2 - 8n + 10n$
$k = n^2 - 4n + 4 + 4n^2 - 4n + 1 - 5n^2 + 10n - 5$
$k = (n - 2)^2 + (2n - 1)^2 - 5(n - 1)^2$

លំហាត់ទី ៧០:

កំណត់ចំនួនឫសគត់វិជ្ជមានទាំងអស់នៃសមីការ $x+y+z=n$ ដែល n ជាចំនួនគត់ធំជាង 2។

ដំណោះស្រាយ

- ដំបូងគេពិនិត្យសមីការ $y+z=k$ ដែល k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន
y អាចយកតម្លៃ $1,2,..,k-1$ ព្រោះបើ $y\geq k \Rightarrow z\leq 0$ ដែលមិនអាច
z អាចយកតម្លៃ $k-y$ គឺ $z=k-1,k-2,...,1$
ដូចនេះ សមីការ $y+z=k$ មាន $(k-1)$ គូចម្លើយចំនួនគត់វិជ្ជមាន
- ចំពោះសមីការ $x+y+z=n$
x អាចយកតម្លៃ $1,2,..,n-2$ ព្រោះបើ $x\geq n-1 \Rightarrow x+y+z\geq n-1+1+1=n+1$ ដែលមិនអាច
ចំណែក y និង z ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $y+z=n-x$ ដែលអាចមាន $((n-x)-1)$ គូចម្លើយ (y,z)
បានន័យថា ចំពោះ តម្លៃណាមួយរបស់ x គេអាចបាន $(n-x-1)$ គូចម្លើយ (y,z) ។
ដោយ $x=1,2,...,n-2$ នោះគេបានចំនួន ចម្លើយគត់វិជ្ជមាន (x,y,z) ទាំងអស់នៃសមីការ $x+y+z=n$

$$\sigma=(n-1-1)+(n-2-1)+\cdots+(n-(n-2)-1)$$
$$=(n-2)+(n-3)+\cdots+1=0.5(n-1)(n-2)$$

ដូចនេះ ចំនួន ចម្លើយគត់វិជ្ជមាន (x,y,z) ទាំងអស់នៃសមីការ :$\sigma=0.5(n-1)(n-2)$

លំហាត់ទី ៧១:

ស៊ីតចំនួនពិត $x_1,x_2,...,x_n$ កំណត់ដោយ $x_1=0$ និង $|x_i|=|x_{i-1}+c|$ ដែល $2\leq i<n$ និង c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ កំណត់តម្លៃអប្បបរមារបស់ $A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}$ ជាអនុគមន៍នៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន c តែមួយគត់។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2=\sum_{i=2}^{n+1}|x_i|^2=\sum_{i=2}^{n+1}|x_{i-1}+c|^2$

$$=\sum_{i=2}^{n+1}(x_{i-1}+c)^2=\sum_{i=2}^{n+1}x_{i-1}^2+2c\sum_{i=2}^{n+1}x_{i-1}+nc^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2c \sum_{i=1}^{n} x_i + nc^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 2c \sum_{i=1}^{n} x_i + nc^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq x_{n+1}^2 = 2c \sum_{i=1}^{n} x_i + nc^2$$

គេទាញបាន $2c \sum_{i=1}^{n} x_i \geq -nc^2$

ហើយ $A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \geq -\frac{c}{2}$ ព្រោះ $c > 0$

ដូចនេះ $A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ មានតម្លៃអប្បបរមា $(-\frac{c}{2})$

លំហាត់ទី ៧២:

សិស្ស 9 នាក់ ធ្វើដំណើរកំសាន្តតាមកាណូតមួយ ដែលខំណ្ឌជា 3 បន្ទប់ដាច់ពីគ្នា។ សិស្សម្នាក់ៗត្រូវឡើងជិះនៅក្នុងបន្ទប់ណាមួយដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍:

A : **សិស្ស 3 នាក់ ជិះនៅក្នុងបន្ទប់ទីមួយ**

B : **សិស្ស 3 នាក់ ជិះនៅក្នុងបន្ទប់នីមួយៗ**

C : **សិស្ស 2 នាក់ជិះនៅក្នុងបន្ទប់ទីមួយ 3នាក់ ជិះនៅក្នុងបន្ទប់មួយ ហើយ 4 នាក់ជិះនៅក្នុងបន្ទប់ដែលនៅសល់។**

ដំណោះស្រាយ

រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A, B, C

ចំនួនករណីអាច $n(S) = 3 \times 3 \times \cdots \times 3$ (មាន 9 កត្តា) គឺ $n(S) = 3^9$

- រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A:

· បន្ទប់ទី ១ មានសិស្ស 3 នាក់ អាចជ្រើសរើសបាន $C(9, 3)$ របៀប

· សិស្សផ្សេងទៀតជិះនៅក្នុងបន្ទប់ដែលនៅសល់ អាចជ្រើសរើសបាន 2^6 របៀប

គេបានចំនួនករណីស្រប $n(A) = C(9, 3) \times 2^6 = 21 \times 2^8$

ដូចនេះ $p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7 \times 2^8}{3^8} = 0.273$

- រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B:

B : សិស្ស 3 នាក់ជិះនៅក្នុងបន្ទប់នីមួយៗគឺ សិស្ស 3 នាក់ ជិះនៅក្នុងបន្ទប់ទីមួយ បន្ទាប់មក 3 នាក់ជិះនៅក្នុងបន្ទប់មួយទៀត និង 3 នាក់ចុងក្រោយជិះនៅក្នុងបន្ទប់ដែលនៅសល់។
គេបានចំនួនករណីស្រប $n(B) = C(9,3) \times C(6,3) \times C(3,3) = 9!/(3!)^3$
ដូចនេះ $p(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{9!}{(3!)^3 \times 3^9} = \dfrac{560}{6561} = 0.085$
- រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ C:
· បន្ទប់មួយមានសិស្ស 2 នាក់ អាចជ្រើសរើសបាន $3C(9,2)$ របៀប
· បន្ទប់មួយទៀតមានសិស្ស 3 នាក់ អាចជ្រើសរើសបាន $2C(7,3)$ របៀប
· សិស្សផ្សេងទៀតជិះនៅក្នុងបន្ទប់នៅសល់ អាចជ្រើសរើសបានតែ១របៀប
គេបានចំនួនករណីស្រប $n(C) = 3C(9,2) \times 2C(7,3) \times 1 = 0.085$
ដូចនេះ $p(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{7560}{3^9} = 0.384$

លំហាត់ទី ៧៣:

រកគ្រប់អនុគមន៍ f ដែលកំណត់ និងមានដេរីវេចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x, y, xy \neq 1$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $f(x) + f(y) = f\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $f'(x) = \dfrac{1+y^2}{(1-xy)^2} f'\left(\dfrac{x+y}{1_{x}y}\right)$ (1)

$f'(y) = \dfrac{1+x^2}{(1-xy)^2} f'\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$ (2)

ដោយចែក (1)&(2)

$\dfrac{f'(x)}{f'(y)} = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$

$\Rightarrow f'(x)(1+x^2) = f'(y)(1+y^2)$

គេទាញបាន អង្គទាំងពីរត្រូវតែស្មើនឹងចំនួនថេរ k ណាមួយ គឺថា $f'(x)(1+x^2) = k$

$\Rightarrow f'(x) = k/(1+x^2)$

$\Rightarrow f(x) = \displaystyle\int (k/(1+x^2))dx = karctanx + c$

បើ $y = 0 \Rightarrow f(x) + f(0) = f\left(\dfrac{x+0}{1-0}\right) = f(x) \Rightarrow f(0) = 0$

តែ $f(0) = k\arctan 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$
ដូចនេះ $f(x) = k\arctan x$ ដែល k ជាចំនួនថេរណាមួយ។

លំហាត់ទី ៧៤:
ចំនួនមួយជាការេប្រាកដមានរាង $\overline{abcd}$ ។ ដោយដឹងថា $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$ ចូររកចំនួន $\overline{abcd}$។

ដំណោះស្រាយ

មាន $\overline{ab} - \overline{cd} = 1 \Rightarrow \overline{ab} = 1 + \overline{cd}$
· ដោយ $\overline{abcd}$ ជាការេប្រាកដ $\Rightarrow \overline{abcd} = n^2,\ n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = n^2$

$101(1 + \overline{cd}) + \overline{cd} = n^2$

$101 \cdot \overline{cd} = n^2 - 10^2 = (n + 10)(n - 10)\ (*)$

ដោយ n^2 មាន4 ខ្ទង់ $\Rightarrow n < 100$
· តាម $(*) \Rightarrow n + 10 = 101 \Rightarrow n = 91$
ដូចនេះ $\overline{abcd} = n^2 = 91^2 = 8281$

លំហាត់ទី ៧៥:
គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = 24x^2 + x + 2015$ ។ បើ $a > 0, b > 0$ ចូរបង្ហាញថា $f\left(\dfrac{a+b}{1+a+b}\right) < f\left(\dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b}\right)$។

ដំណោះស្រាយ

· អនុគមន៍ $f(x) = 24x^2 + x + 2015$, $D = \mathbb{R}$
· ដេរីវេ $f'(x) = 48x + 1$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{48}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{48}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f\left(-\dfrac{1}{48}\right)$	↗	

យើងបាន $\forall x > -\dfrac{1}{48} \Rightarrow$ អនុគមន៍ f កើន។

បើ $a > 0, b > 0 \Rightarrow 0 < \dfrac{a}{1+a+b} < \dfrac{a}{1+a}$

និង $0 < \dfrac{b}{1+a+b} < \dfrac{b}{1+b}$

$\Rightarrow 0 < \dfrac{a+b}{1+a+b} < \dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b}$

ដូចនេះ $f\left(\dfrac{a+b}{1+a+b}\right) < f\left(\dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b}\right)$

លំហាត់ទី ៧៦:

f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(1) = 1,\ f(x+1) \le f(x) + 1$ និង $f(x+5) \ge f(x) + 5$។ បើ $g(x) = f(x) - x + 1$ ចូរគណនាតម្លៃនៃ $g(2015)$។

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន $f(x) + 5 \le f(x+5) = f[(x+1)+4]$

$$\begin{aligned} &\le f(x+4) + 1 \\ &\le f(x+3) + 2 \\ &\le f(x+2) + 3 \\ &\le f(x+1) + 4 \\ &\le f(x) + 5 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x) + 5 \le f(x+5) \le f(x) + 5$

$\Rightarrow f(x+5) = f(x) + 5 \Rightarrow f(x+1) = f(x) + 1$

· ដោយ $f(1) = 1 \Rightarrow f(2) = 2, f(3) = 3, ..., f(2015) = 2015$

· បើ $g(x) = f(x) - x + 1 \Rightarrow g(2015) = f(2015) - 2015 + 1$

ដូចនេះ $g(2015) = 1$

លំហាត់ទី ៧៧:

គេឱ្យ $f(1) = 2$ និង $2f(n+1) = 2f(n) + 1$ ដែល $n = 1, 2, 3, ...$។

កំណត់តម្លៃ n ដើម្បីឱ្យ $f(n) = 2015$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{k} [f(n+1) - f(n)] = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow f(k+1)-f(1)=\dfrac{k}{2}\Rightarrow f(k+1)=f(1)+\dfrac{k}{2}\ (*)$

· យក $n=k+1\Rightarrow k=n-1$

$(*)\Rightarrow f(n)=2+\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{n+3}{2}$

· បើ $f(n)=2015\Rightarrow\dfrac{n+3}{2}=2015\Rightarrow n=4030-3=4027$

ដូចនេះ $n=4027$

លំហាត់ទី ៧៨:

គេឱ្យកន្សោម $f(x)=\sqrt[3]{x+\dfrac{x+1}{3}\sqrt{\dfrac{8x-1}{3}}}+\sqrt[3]{x-\dfrac{x+1}{3}\sqrt{\dfrac{8x-1}{3}}}$។

គណនា $f(2015)$។

ដំណោះស្រាយ

តាង $t=\sqrt{\dfrac{8x-1}{3}}\Leftrightarrow t^2=\dfrac{8x-1}{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{3t^2+1}{8}\Leftrightarrow x+1=\dfrac{3t^2+9}{8}\Leftrightarrow$
$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{t^2+3}{8}$

$x+\dfrac{x+1}{3}\sqrt{\dfrac{8x-1}{3}}=\dfrac{3t^2+1}{8}+\dfrac{t^3+3t}{8}=\left(\dfrac{1+t}{2}\right)^3$

$x-\dfrac{x+1}{3}\sqrt{\dfrac{8x-1}{3}}=\dfrac{3t^2+1}{8}-\dfrac{t^3+3t}{8}=\left(\dfrac{1-t}{2}\right)^3$

យើងបាន $f(x)=\dfrac{1+t}{2}+\dfrac{1-t}{2}=1$

ដូចនេះ $f(2015)=1$

លំហាត់ទី ៧៩:

បង្ហាញថាចំនួនទាំងបួនគឺ $tan\dfrac{\pi}{8}, tan\dfrac{3\pi}{8}, tan\dfrac{5\pi}{8}, tan\dfrac{7\pi}{8}$ ជាឫសនៃសមីការ $x^4-6x^2+1=0$។

ដំណោះស្រាយ

សមីការ $(E):\ x^4-6x^2+1=0$

តាង $x=tan\alpha\ ,\ cos\alpha\neq 0$

$(E) \Leftrightarrow tan^4\alpha - 6tan^2\alpha + 1 = 0$

$$\left(tan^2\alpha + 1\right)^2 - 8tan^2\alpha = 0$$

$$\frac{1}{cos^4\alpha} - \frac{8sin^2\alpha}{8cos^2\alpha} = 0$$

$$1 - 8cos^2\alpha sin^2\alpha = 0$$

$$1 - 2sin^2\alpha = 0$$

$$sin2\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

· បើ $sin2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} + k\pi$ ឬ $\alpha = \frac{3\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

· បើ $sin2\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{8} + k\pi$ ឬ $\alpha = \frac{5\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

- ចំពោះ $k = 0 \Rightarrow \alpha \in \left\{-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right\}$

- ចំពោះ $k = 1 \Rightarrow \alpha \in \left\{\frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}\right\}$

យើងយក $\frac{5\pi}{8} \in \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right\}$

ដូចនេះ $tan\frac{\pi}{8}, tan\frac{3\pi}{8}, tan\frac{5\pi}{8}, tan\frac{7\pi}{8}$ ជាឫសនៃសមីការ $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$

លំហាត់ទី ៨០:

គណនា $S = 1+x+x^2+\cdots+x^n$ និង $\sum = 1+2\left(\frac{1}{3}\right)+3\left(\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+(n+1)\left(\frac{1}{3^n}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

•ករណី $x = 1 \Rightarrow S = 1 + \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ តួ}} = n + 1$

•ករណី $x \neq 1 \Rightarrow S$ ជាផលបូកនៃ $(n + 1)$ តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $u_1 = 1, q = x$

ដូចនេះ $\boxed{S = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}}$

$$\sum = 1 + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{3^2}\right) + \cdots + (n + 1)\left(\frac{1}{3^n}\right)$$

•ករណី $x \neq 1 \Rightarrow S = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

ដេរីវេសងខាង : $(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)' = \dfrac{-(n+1)x^n \cdot (1 - x) + \left(1 - x^{n+1}\right)}{(1 - x)^2}$

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1 - x)^2}$$

ចំពោះ $x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow 1 + 2\left(\dfrac{1}{3}\right) + 3\left(\dfrac{1}{3^2}\right) + \cdots + n\left(\dfrac{1}{3^{n-1}}\right) = \dfrac{n\left(\dfrac{1}{3^{n+1}} - (n+1)\left(\dfrac{1}{3^n}\right) + 1\right)}{\dfrac{4}{9}}$

$$\sum = \frac{9n\left(\dfrac{1}{3^{n+1}} - 9(n+1)\left(\dfrac{1}{3^n}\right) + 9\right)}{4} + (n+1)\left(\frac{1}{3^n}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{S = \dfrac{3^{n+2} - 2n - 5}{4 \times 3^n}}$

លំហាត់ទី ៨១:

គេឱ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1 = 5,\ a_n = 2a_{n-1} - n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$។

គណនា a_n និង $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ រួចគណនា $\lim_{n\to+\infty} S_n$។

ដំណោះស្រាយ

តាង (r_n) ដែល $r_n = \alpha n + \beta$ ជាស្វ៊ីតជំនួយ$\Rightarrow r_{n-1} = \alpha(n-1) + \beta$

ដោយ $a_n = 2a_{n-1} - n \Rightarrow \alpha n + \beta = 2\left[\alpha(n-1) + \beta\right] - n$

$$\alpha n + \beta = 2\alpha n - 2\alpha + 2\beta - n$$

$$\alpha n - n + \beta - 2\alpha = 0$$

$$(\alpha - 1)n + (\beta - 2\alpha) = 0 \cdot n + 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = 0 \\ \beta - 2\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

យើងបាន $r_n = n + 2$

រកផលសង $a_n - r_n$:

$$a_n - (n+2) = 2a_{n-1} - n - n + 2$$
$$= 2a_{n-1} - 2(n+1)$$
$$= 2\left[a_{n-1} - (n+1)\right] \quad (1)$$

តាង $v_n = a_n - (n+2) \Rightarrow v_{n-1} = a_{n-1} - (n+1)$

តាម (1) $\Rightarrow v_n = 2v_{n-1} \Rightarrow \dfrac{v_n}{v_{n-1}} = 2$

$\Rightarrow (v_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $q = 2, v_1 = a_1 - 3 = 5 - 3 = 2$

$\Rightarrow v_n = v_1 \times q^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$

ដោយ $v_n = a_n - (n+2) \Rightarrow a_n - (n+2) = 2^n$

ដូចនេះ $\boxed{a_n = 2^n + n + 2}$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n}\left(2^i + i + 2\right) = \sum_{i=1}^{n} 2^i + \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 2$$
$$= \frac{2\left(2^n - 1\right)}{2-1} + \frac{n(n+1)}{2} + 2n = \frac{4 \times 2^n - 4 + n^2 + n + 4n}{2}$$

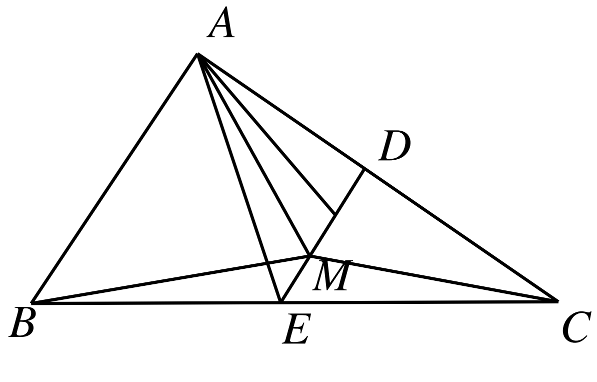
ដូចនេះ $\boxed{S_n = \dfrac{2^{n+2} + n^2 + 5n - 4}{2}}$

•គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{2}\left(4 + \dfrac{n^2}{2^n} + \dfrac{5n}{2^n} - \dfrac{4}{2^n}\right) = +\infty$

លំហាត់ទី ៨២:

យក M ជាចំណុចមួយស្ថិតនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ដែល $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$។ គណនា $P = \dfrac{S_{ABC}}{S_{AMC}}$។ ($S_{ABC}, S_{AMC}$ ជាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC, AMC)

ដំណោះស្រាយ



យក D និង E ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃ AC និង BC

យើងបាន $\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}\\ 2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{ME}\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}+4\overrightarrow{ME}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MD}=-2\overrightarrow{ME}$

$\Rightarrow D, M, E$ ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ និង $MD=2ME$

នោះ $\frac{S_{AEC}}{S_{AMC}}=\frac{S_{AED}}{S_{AMD}}=\frac{3\cdot S_{AME}}{2\cdot S_{AME}}$

យើងបាន $\frac{S_{ABC}}{S_{AMC}}=\frac{2S_{AEC}}{S_{AMC}}=2\times\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{P=\frac{S_{ABC}}{S_{AMC}}=3}$

លំហាត់ទី ៨៣:

គេឱ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $x^{2016}+y^{2016}+z^{2016}=3$។
រកតម្លៃធំបំផុតនៃ $f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$។

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាពកូស៊ី 2016 តួ យើងបាន:

$$1+1+1+\cdots+a^{2016}+a^{2016}\geq 2016\cdot\sqrt[2016]{(a^{2016})^2}=2016\cdot a^2$$

$$\Rightarrow a^2\leq\frac{2014+2a^{2016}}{2016}=\frac{1007+a^{2016}}{1008}\ (*)$$

តាម $(*)$ យើងបាន:

$$x^2\leq\frac{1007+x^{2016}}{1008}, y^2\leq\frac{1007+y^{2016}}{1008}, z^2\leq\frac{1007+z^{2016}}{1008}$$

$$\Rightarrow f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2\leq\frac{3\times 1007+x^{2016}+y^{2016}+z^{2016}}{1008}$$

$$\leq\frac{3\times 1007+3}{1008}=\frac{3(1007+1)}{1008}=3$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{តម្លៃធំបំផុតនៃ } f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2 \text{ គឺ } 3}$

លំហាត់ទី ៨៤:

គេឱ្យ p ជាចំនួនបឋមធំជាង 2 និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។
បង្ហាញថា p ជាតួចែកនៃ $1^{p^n}+2^{p^n}+3^{p^n}+\cdots+(p-1)^{p^n}$។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ p ជាចំនួនបឋមធំជាង $2 \Rightarrow p$ គឺជាចំនួនគត់សេស $\Rightarrow p^n$ ជាចំនួនគត់សេសចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

•យក m ជាចំនួនគត់សេស យើងបាន:

$$\begin{aligned} a^m + (p-a)^m &= [a + (p-a)]\left[a^{m-1} + a^{m-2}\cdot(p-a) + \cdots + (p-a)^{m-1}\right] \\ &= p\left[a^{m-1} + a^{m-2}\cdot(p-a) + \cdots + (p-a)^{m-1}\right] \quad (*) \end{aligned}$$

តាង $\sum = 1^{p^n} + 2^{p^n} + 3^{p^n} + \cdots + (p-1)^{p^n}$

$$= \left[1^{p^n} + (p-1)^{p^n}\right] + \left[2^{p^n} + (p-2)^{p^n}\right] + \cdots + \left[\left(\frac{p-1}{2}\right)^{p^n} + \left(\frac{p+1}{2}\right)^{p^n}\right]$$

តាម $(*)$ យើងបាន $\sum = p \times k$ ដែល k ជាចំនួនគត់

ដូចនេះ $\boxed{p \text{ ជាតួចែកនៃ } 1^{p^n} + 2^{p^n} + 3^{p^n} + \cdots + (p-1)^{p^n}}$

លំហាត់ទី ៨៥:

រកចំនួនពិត x, y និង z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $x^3 + y = 3x + 4, 2y^3 + z = 6y + 6$ និង $3z^2 + x = 9z + 8$។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $x^3 + y = 3x + 4$ (1), $2y^3 + z = 6y + 6$ (2) , $3z^2 + x = 9z + 8$ (3)

$(1) \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 2 - y$

$(x-2)(x+1)^2 = 2 - y \quad (i)$

$(2) \Rightarrow 2y^3 - 6y - 4 = 2 - z$

$2(y-2)(y+1)^2 = 2 - z \quad (ii)$

$(3) \Rightarrow 3z^3 - 9z - 6 = 2 - x$

$3(z-2)(z+1)^2 = 2 - x \quad (iii)$

គុណសមីការ $(i), (ii), (iii)$ យើងបាន:

$6(x-2)(y-2)(z-2)(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2 = (2-x)(2-y)(2-z)$

$\Rightarrow (x-2)(y-2)(z-2)\left[(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2 + 1\right] = 0$

$\Rightarrow x = 2$ ឬ $y = 2$ ឬ $z = 2$

•ផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ $x = 2$ និង $y = 2$ និង $z = 2$

■ (1) : $8 + 2 = 6 + 4$ ពិត

■ (2) : $16 + 2 = 12 + 6$ ពិត
■ (3) : $24 + 2 = 18 + 8$ ពិត
ដូចនេះ $\boxed{x = 2, y = 2, z = 2}$

លំហាត់ទី ៨៦:

គេឱ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c ដែល $c = a + b$។ បង្ហាញថា $\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{b^3} > \sqrt[4]{c^3}$។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $c = a + b$

$$\Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{a}{c} < a \\ 0 < \frac{b}{c} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{3}{4}} > \left(\frac{a}{c}\right)^1 \\ \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{3}{4}} > \left(\frac{b}{c}\right)^1 \end{cases}$$

បូកអង្គ និងអង្គ $\Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{3}{4}} + \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{3}{4}} > \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} = \frac{c}{c} = 1$

$$\Rightarrow \frac{a^{\frac{3}{4}}}{c^{\frac{3}{4}}} + \frac{b^{\frac{3}{4}}}{c^{\frac{3}{4}}} > 1$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{b^3} > \sqrt[4]{c^3}}$

លំហាត់ទី ៨៧:

ក) រក $f(x)$ ដោយដឹងថា $f\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) = \frac{x+1}{x-1}$ គ្រប់ $x \neq -2$ និង $x \neq 1$។

ខ) គេឱ្យ $g(x + \sqrt{x^2+1}) = x - \sqrt{x^2+1}$។ គណនា $g(2015) + 1$។

ដំណោះស្រាយ

ក) រក $f(x)$ ដោយដឹងថា $f\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) = \frac{x+1}{x-1}$ គ្រប់ $x \neq -2$ និង $x \neq 1$

តាង $t = \frac{3x-1}{x+1} \Rightarrow tx + 2t = 3x - 1$

$\Rightarrow tx - 3x = -2t - 1 \Rightarrow x = \dfrac{-2t-1}{t-3}$

យើងបាន $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{\dfrac{-2t-1}{t-3}+1}{\dfrac{-2t-1}{t-3}-1} = \dfrac{-2t-1+t-3}{-2t-1-t+3} = \dfrac{-t-4}{-3t+2} = \dfrac{t+4}{3t-2}$

$\Rightarrow f(t) = \dfrac{t+4}{3t-2}\ ,\ t \neq \dfrac{2}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{f(x) = \dfrac{t+4}{3x-2}\ ,\ x \neq \dfrac{2}{3}}$

ខ) គណនា $g(2015)+1$

យើងមាន $g(x+\sqrt{x^2+1}) = x - \sqrt{x^2+1}$

តាង $t = x+\sqrt{x^2+1} \Rightarrow x-\sqrt{x^2+1} = -\dfrac{1}{t}$ ព្រោះ $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right) = -1$

យើងបាន : $g(t) = -\dfrac{1}{t} \Rightarrow g(2015)+1 = 1 - \dfrac{1}{2015} = \dfrac{2014}{2015}$

ដូចនេះ $\boxed{g(2015)+1 = \dfrac{2014}{2015}}$

លំហាត់ទី ៨៨:

f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ $(u-v)(u+v)-(u+v)f(u-v) = 4uv(u^2-v^2)$។ គណនា $f(0)$។ បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍សេស ។ កំណត់អនុគមន៍ $f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

$(u-v)(u+v)-(u+v)f(u-v) = 4uv(u^2-v^2)\quad (*)$ + គណនា $f(0)$

•យក $u = v \neq 0$ នោះ $(*) \Rightarrow -2u\cdot f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

ដូចនេះ $\boxed{f(0) = 0}$ + បង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍សេស

•យក $u = 0$ និង $v \neq 0$ នោះ $(*) \Rightarrow -vf(v) - vf(-v) = 0$

$\Rightarrow vf(-v) = -vf(v) \Rightarrow f(-v) = -f(v)$ គ្រប់ $-v, v$ ស្ថិតក្នុងដែនកំណត់

ដូចនេះ $\boxed{f \text{ ជាអនុគមន៍សេស}}$

+ កំណត់អនុគមន៍ $f(x)$

តាង $x = u+v$ និង $y = u-v \Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{x+y}{2} \\ v = \dfrac{x-y}{2} \end{cases}$

$$(*) \Rightarrow yf(x) - xf(y) = 4\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot xy$$

$$\Rightarrow yf(x) - xf(y) = \left(x^2 - y^2\right)(xy) = x^3y - y^3x$$

$$\Rightarrow yf(x) - x^3y = xf(y) - xy^3$$

$$\Rightarrow y\left[f(x) - x^3\right] = x\left[f(y) - y^3\right]$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - x^3}{x} = \frac{f(y) - y^3}{y}$$

$\Rightarrow$ មានចំនួនពិត k ដែល $\dfrac{f(x) - x^3}{x} = k \Rightarrow f(x) = x^3 + kx$

គឺ f ជាអនុគមន៍សេស និង $f(0) = 0$

ដូចនេះ $\boxed{f(x) = x^3 + kx\,,\ k \in \mathbb{R}}$

លំហាត់ទី ៨៩:

គណនា $S = 0\times 1^2 + 1\times 2^2 + 2\times 3^2 + \cdots + 2014\times 2015^2$។

ដំណោះស្រាយ

$$S = 0\times 1^2 + 1\times 2^2 + 2\times 3^2 + \cdots + 2014\times 2015^2$$

$$= (1-1)\times 1^2 + (2-1)\times 2^2 + (3-1)\times 3^2 + \cdots + (2015-1)\times 2015^2$$

$$= \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 2015^3\right) - \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2015^2\right)$$

$$= \left(\frac{2015\times 2016}{2}\right)^2 - \left(\frac{2015\times 2016\times 4031}{6}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{S = 2015^2\times 1008^2 - 336\times 2015\times 4031}$

លំហាត់ទី ៩០:

គណនា $E = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{k}{[(2k-1)(2k+1)]^2} + \frac{(n-1)!}{(n+1)!}\right]$។

ដំណោះស្រាយ

$$E = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{k}{[(2k-1)(2k+1)]^2} + \frac{(n-1)!}{(n+1)!}\right]$$

$$E=\sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(\frac{1}{(2k-1)^2}-\frac{1}{(2k+1)^2}\right)\cdot\frac{1}{8}\right]+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n+1)!}$$

$$=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{(2n-1)^2}\right)+(n-1)\times\frac{(n-1)!}{(n-1)!\cdot n\cdot(n+1)}$$

$$=\frac{4n^2-4n+1-1}{8(2n-1)^2}+\frac{n-1}{n(n+1)}$$

ដូចនេះ $\boxed{E=\frac{n^2-n}{2(2n-1)^2}+\frac{n-1}{n(n+1)}}$

លំហាត់ទី ៩១:

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយនិង P ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ក្នុងចំណោមមុំ $\angle PAB,\ \angle PBC$ និង $\angle PCA$ មានមួយយ៉ាងតិចត្រូវតូចជាង ឬ ស្មើ 30^0 ។

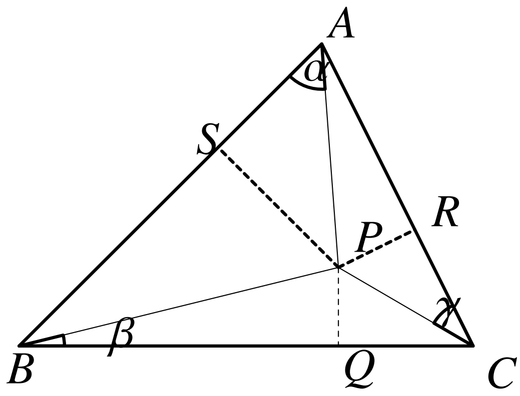
ដំណោះស្រាយ

•យក Q,R,S ជាចំណោលកែងនៃ P លើ BC,CA,AB

•យើងបាន $sin\alpha=\frac{PS}{PA}, sin\beta=\frac{PQ}{PB}$, $sin\gamma=\frac{PR}{PC}$

ឧបមាថា $\alpha>30^0,\beta>30^0,\gamma>30^0$

នោះ α,β,γ នីមួយៗត្រូវតូចជាង 150^0



$\Rightarrow sin\alpha>\frac{1}{2}, sin\beta>\frac{1}{2}, sin\gamma>\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{PS}{PA}>\frac{1}{2}, \frac{PQ}{PB}>\frac{1}{2}, \frac{PR}{PC}>\frac{1}{2}$

$\Rightarrow PA<2PS,\ PB<2PQ,\ PC<2PR$

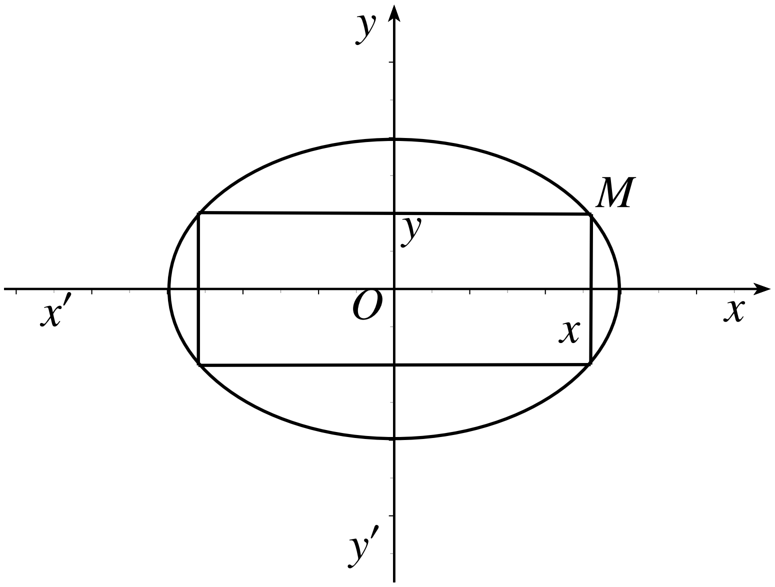
$\Rightarrow PA+PB+PC<2(PS+PQ+PR)$: ផ្ទុយពីវិសមភាព Erdos Mordell

ដូចនេះ $\boxed{\text{ក្នុងចំណោមមុំ } \angle PAB,\ \angle PBC \text{ និង } \angle PCA \text{ មានមួយយ៉ាងតិចត្រូវតូចជាង ឬ ស្មើ } 30^0}$

លំហាត់ទី ៩២:

រកវិមាត្រចតុកោណកែងដែលមានផ្ទៃក្រឡាធំបំផុតអាចចារឹកក្នុងអេលីប $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ។

ដំណោះស្រាយ



អេលីប $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

តាង $M(x, y)$ ជាកំពូលនៃចតុកោណកែង

លក្ខខណ្ឌ $0 < x < a$ និង $0 < y < b$

វិមាត្រចតុកោណកែងគឺ $2x, 2y$

ផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងគឺ $S = 4xy \quad (1)$

$(E) \Rightarrow y^2 = \dfrac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right) \Rightarrow y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

$(1) \Rightarrow S = 4x \cdot \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \dfrac{4b}{a}x\sqrt{a^2 - x^2}$

$\Rightarrow S' = \dfrac{4b(a + \sqrt{2}x)(a - \sqrt{2}x)}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$

S' យកសញ្ញាតាម $a - \sqrt{2}x$ ព្រោះ $a + \sqrt{2}x > 0$

បើ $a - \sqrt{2}x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

តារាងអថេរភាពនៃ S

x	0		$\frac{a\sqrt{2}}{2}$		a
S'	‖	$+$	0	$-$	‖
S	‖	↗	អតិ	↘	‖

S អតិបរមាត្រង់ $x=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ និង $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{b\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះ **វិមាត្រចតុកោណកែងគឺ $2x=a\sqrt{2}$ និង $2y=b\sqrt{2}$**

លំហាត់ទី ៩៣:

គេឱ្យអនុគមន៍ $y=\frac{4+mx-3x^2}{4x+m}$ ។

ក) កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីអោយបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោងត្រង់ $x=0$ កែងនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេត។

ខ) កំណត់ a ដើម្បីអោយសមីការ $sin^6x+cos^6x=a\,|sin2x|$ មានឫស។

ដំណោះស្រាយ

ក) កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីអោយបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោងត្រង់ $x=0$ កែងនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេត

អនុគមន៍ $y=\frac{4+mx-3x^2}{4x+m}$

$$\begin{array}{rrrr}
 & -\frac{3}{4}x & & +\frac{7}{16}m \\
\hline
4x+m) & -3x^2 & +mx & +4 \\
 & 3x^2 & +\frac{3}{4}mx & \\
\hline
 & & \frac{7}{4}mx & +4 \\
 & & -\frac{7}{4}mx & -\frac{7}{16}m^2 \\
\hline
 & & & \left(4+\frac{-7}{16}m^2\right)
\end{array}$$

យើងអាចសរសេរ $y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{16}m+\frac{4-\frac{7}{16}m^2}{4x+m}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{4-\frac{7}{16}m^2}{4x+m}\right)=0 \Rightarrow\ y=-\dfrac{3x}{4}+\dfrac{7}{16}m$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

$y'=-\dfrac{3}{4}-\dfrac{4\left(4-\frac{7}{16}m^2\right)}{(4x+m)^2}$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោងត្រង់ $x=0$ គឺ $y'(0)=\dfrac{m^2-16}{m^2}$

បន្ទាត់ប៉ះនេះកែងនឹងអាស៊ីមតូតទ្រេតកាលណា:

$$\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{m^2-16}{m^2}\right)=-1$$

$\Leftrightarrow 3m^2-48=4m^2$

$\Leftrightarrow m^2=-48$ គ្មានតម្លៃ m

ខ) កំណត់ a ដើម្បីអោយសមីការ $sin^6x+cos^6x=a\,|sin2x|$ មានឫស

$sin^6x+cos^6x=a\,|sin2x| \quad (1)$

$\Leftrightarrow \left(sin^2x\right)^3+\left(cos^2x\right)^3=a\,|sin2x|$

$\Leftrightarrow \left(sin^2x+cos^2x\right)\left(sin^4x-sin^2xcos^2x+cos^4x\right)=a\,|sin2x|$

$\Leftrightarrow \left(sin^2x+cos^2x\right)^2-3sin^2xcos^2x=a\,|sin2x|$

$\Leftrightarrow 1-3sin^2xcos^2x=a\,|sin2x|$

$\Leftrightarrow 1-3\left(\dfrac{sin2x}{2}\right)^2=a\,|sin2x|$

$\Leftrightarrow \dfrac{4-3sin^22x}{4}=a\,|sin2x|$

$\Leftrightarrow \dfrac{4-3sin^22x}{4\,|sin2x|}=a \quad (2)$

តាង $t=sin2x\,,\ -1\le t\le 1$

$(2)\Rightarrow \dfrac{4-3t^2}{4\,|t|}=a \quad (3)$

សមីការ(3) ជាសមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C_1) : $y=\dfrac{4-3t^2}{4\,|t|}$ ជាមួយបន្ទាត់ $y=a$ ។

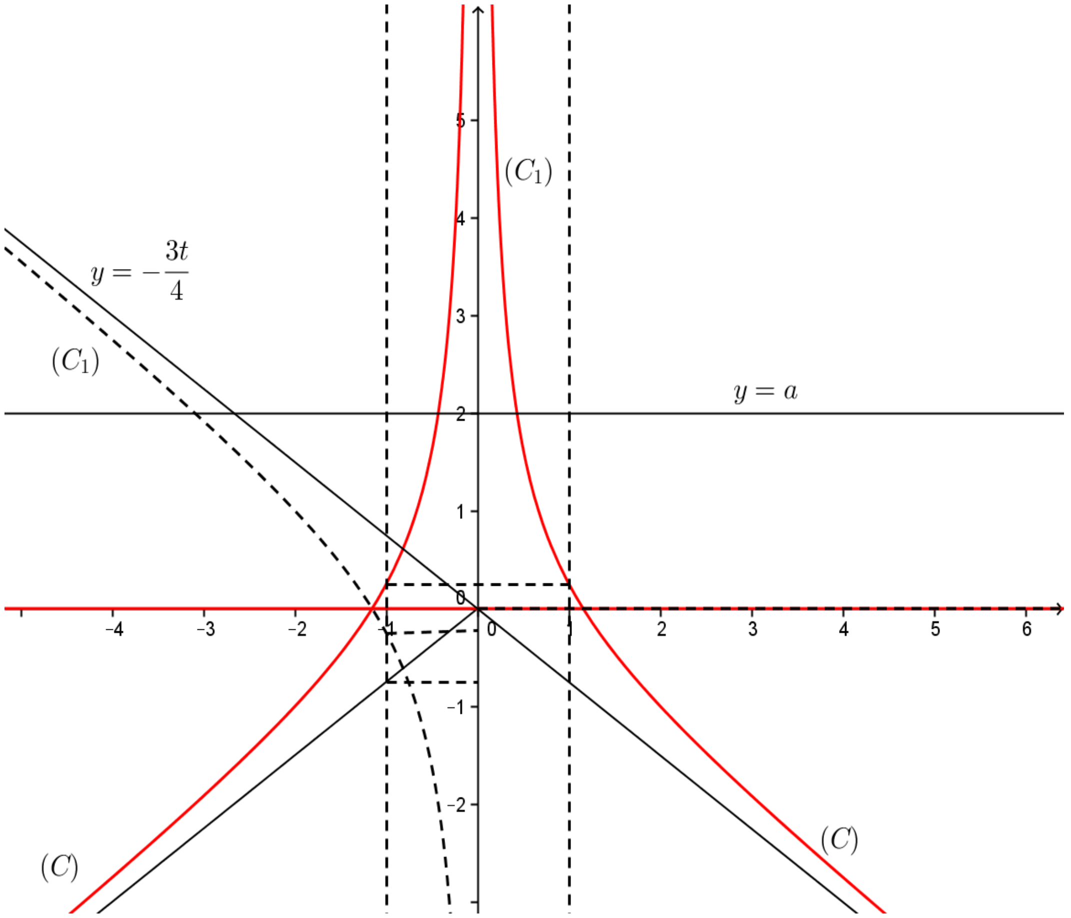
សំណង់ (C_1) $: y_1 = \dfrac{4-3t^2}{4t} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{3}{4}t$

$$y_1' = -\frac{1}{t^2} - \frac{3}{4} = -\left(\frac{1}{t^2} + \frac{3}{4}\right) < 0$$

តារាងអថេរភាព

t	$-\infty$	0	$+\infty$
y_1'	$-$	‖	$-$
y_1	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -\infty$

- បន្ទាត់ $t = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ
- បន្ទាត់ $y = \dfrac{-3t}{4}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត
- បន្ទាត់កាត់តាម $\left(-1, -\dfrac{1}{4}\right)$; $\left(1, \dfrac{1}{4}\right)$



សំណង់ (C) : $y = \dfrac{4-3t^2}{4|t|}$

$$y(-t)=\frac{4-3(-t)^2}{4\,|-t|}=\frac{4-3t^2}{4\,|t|}=y(t)$$

$\Rightarrow y$ ជាអនុគមន៍គូ

ខ្សែកោង (C) ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្ស (Oy)

បើ $t>0\ :\ y=\dfrac{4-3t^2}{4t}=y_1$

$\Rightarrow (C)$ និង (C_1) ត្រួតស៊ីគ្នា

តាមក្រាភិចសមីការ (1) មានឫសលុះត្រាតែ $a\geq\dfrac{1}{4}$

លំហាត់ទី ៩៤:

ក) សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=x^2+\dfrac{1}{x}$ ។

ខ) តើសមីការ $x^3-1000x+1=0$ មានឫសប៉ុន្មាន?

ដំណោះស្រាយ

ក) សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=x^2+\dfrac{1}{x}$

•ដែនកំណត់ $\mathbb{D}=\mathbb{R}^*=R-\{0\}$ •លីមីត

$$\lim_{x\to\pm\infty}y=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to0}y=\lim_{x\to0}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}-\infty & \text{បើ } x\to0^-\\ +\infty & \text{បើ } x\to0^+\end{cases}$$

•ដេរីវេ

$$y'=2x-\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3-1}{x^2}$$

$$y'=0\Leftrightarrow x^3=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},y=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\sqrt[3]{2}=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$	-1	0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$ ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	↗	$+\infty$

•សង់ខ្សែកោង

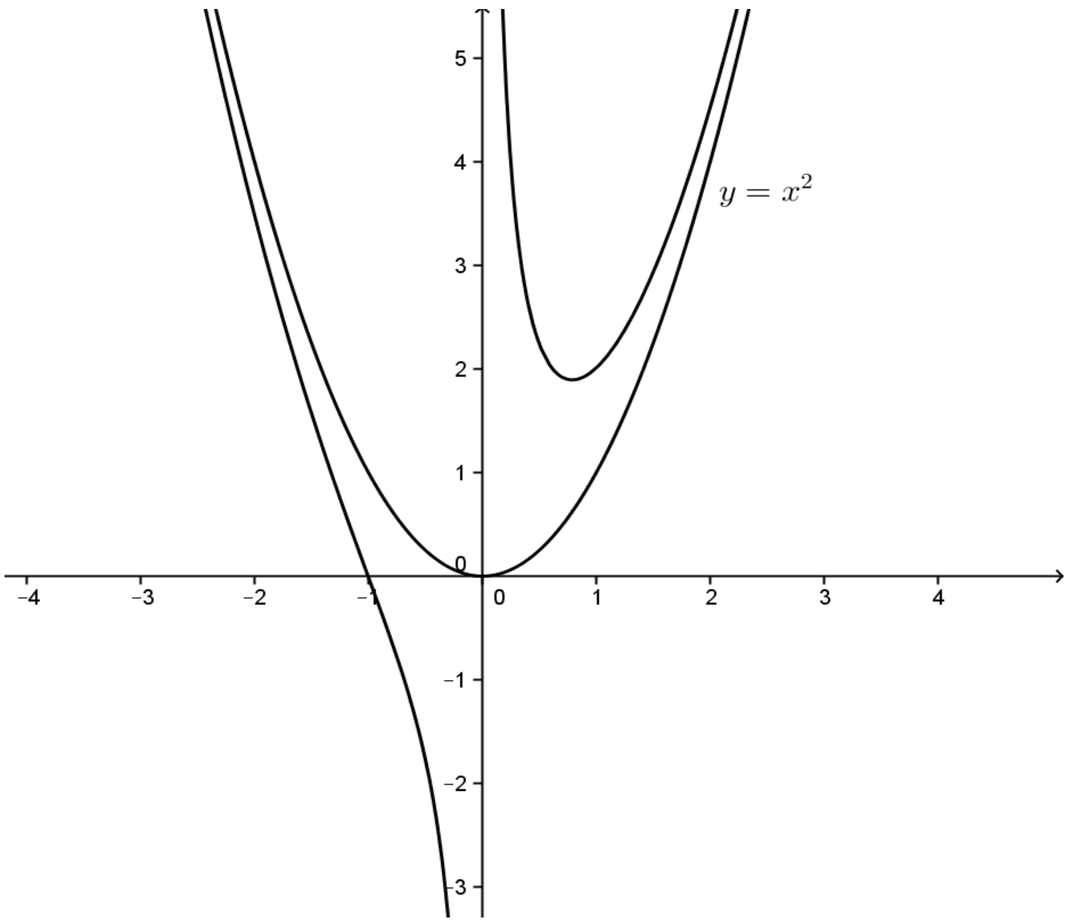
អ័ក្ស (Oy) ជាអាស៊ីមតូតឈរ

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0$ នោះប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ ជាអាស៊ីមតូតកោង

កាត់អ័ក្ស (Ox) ត្រង់ $A(-1,0)$

$y''=2+\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{2\left(x^3+1\right)}{x^3}\Rightarrow A(-1,0)$ ជាចំណុចរបត់

កាត់តាម $B(1,2)$



ខ) តើសមីការ $x^3-1000x+1=0$ មានឫសប៉ុន្មាន?

យើងបាន $x^2-1000+\dfrac{1}{x}=0$ ព្រោះ 0 មិនមែនឫស

$\Leftrightarrow\ x^2+\dfrac{1}{x}\ =\ 1000$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) ជាមួយបន្ទាត់ $y=1000$ ។ ដូចនេះ តាមក្រាភិចសមីការមានឫសបីផ្សេងគ្នា ។

លំហាត់ទី ៩៥:
បើ x_1 ជាឫសនៃសមីការ $ax^2 + bx + c = 0$ ហើយ x_2 ជាឫសនៃសមីការ $ax^2 + bx - c = 0$, $c \neq 0$ ។ បង្ហាញថា សមីការ $ax^2 + bx + \frac{c}{2} = 0$ មានឫស ហើយអោយទីតាំងរឹសទាំងនោះធៀបនឹង x_1 និង x_2 ។

ដំណោះស្រាយ

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$
• : $af(\alpha) < 0 \Rightarrow$ សមីការមានរឹសពីរ $x_1 < \alpha < x_2$
• : $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0 \Rightarrow$ សមីការមានរឹសពីរ ដែលរឹសមួយស្ថិតនៅចន្លោះ $\alpha \& \beta$ ។

តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន $\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \\ ax_2^2 + bx_2 - c = 0 \end{cases}$

តាង $f(x) = ax^2 + bx + \frac{c}{2}$

យើងបាន $\begin{cases} f(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + \frac{c}{2} = \left(ax_1^2 + bx_1 + c\right) - \frac{c}{2} \\ f(x_2) = ax_2^2 + bx_2 + \frac{c}{2} = \left(ax_2^2 + bx_2 - c\right) + \frac{3c}{2} = \frac{3c}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow f(x_1)\cdot f(x_2) = -\frac{3c^2}{4} < 0$

ដូចនេះ សមីការ $f(x) = 0$ មានរឹសពីរជានិច្ច ដែលមានរឹសមួយនៅចន្លោះ $x_1 \& x_2$

លំហាត់ទី ៩៦:
ដោះស្រាយវិសមីការ $4\left(x^3 - 2x + 1\right)(sinx + 2cosx) \geq 9\left|x^3 - 2x + 1\right|$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $asinx + bcosx = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}sinx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}cosx\right)$
យើងអាចសរសេរ $asinx \pm bcosx = \sqrt{a^2+b^2}sin(x \pm \varphi)$ ដែល
$\begin{cases} cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

$$4\left(x^3-2x+1\right)(sinx+2cosx)\geq 9\left|x^3-2x+1\right| \quad (1)$$

យើងបាន : $x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1)$

x		$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$		1	
x^3-2x+1	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$sinx+2cosx=\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}sinx+\frac{2}{\sqrt{5}}cosx\right)$$

$$=\sqrt{5}sin(x+\varphi),\ \begin{cases} cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}} \\ sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

ករណីទី ១: $x=-\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ x=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ x=0$

$(1)\Rightarrow 0\geq 0$ ពិត

ករណីទី ១: $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}<x<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ឬ $x>1$

$\Leftrightarrow x^3-2x+1>0\Leftrightarrow \left|x^3+2x-1\right|=x^3-2x+1$

$(1)\Rightarrow 4\sqrt{5}sin(x+\varphi)\geq 9$

$\Leftrightarrow sin(x+\varphi)\geq\frac{9}{4\sqrt{5}}=\frac{9\sqrt{5}}{20}>1$

(ព្រោះ $9\sqrt{5}\approxeq 9\times 2.23=20.07$)

វិសមីការគ្មានរឹសទេក្នុងករណីនេះ

ករណីទី ៣ : $x<-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ឬ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x<1$

$\Leftrightarrow x^3-2x+1<0\Leftrightarrow\left|x^3-2x+1\right|=-\left(x^3-2x+1\right)$

$(-4)\left[-\left(x^3-2x+1\right)\right](sinx+2cosx)\geq 9\left|x^3-2x+1\right|$

$(1)\Rightarrow -4\sqrt{5}sin(x+\varphi)\geq 9$

$\Leftrightarrow sin(x+\varphi)\leq-\frac{9}{4\sqrt{5}}<-1$ គ្មានរឹស

ដូចនេះ $S=\left\{-\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right\}$

លំហាត់ទី ៩៧:

កំណត់ m ដើម្បីអោយតំលៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x) = \left|x^2 - 3x + 2\right| + mx$ ធំជាង 1 ដាច់ខាត ។

ដំណោះស្រាយ

x		1		2	
x^2-3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$

<u>ករណីទី ១</u> : $1 \le x \le 2$

គេបាន: $f(x) = -x^2 + (m+3)x - 2$

ដូចនេះ $min f(x) = min\left\{f(1), f(2)\right\}$

<u>ករណីទី ២</u> : $x \le 1$ ឬ $x \ge 2$

គេបាន $f(x) = x^2 - (3-m)x + 2$ មានអាប់ស៊ីសកំពូលគឺ $\dfrac{3-m}{2}$

នោះ $min f(x) = min\left\{f(1), f(2), f\left(\dfrac{3-m}{2}\right)\right\}$

$min f(x) > 1$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} f(1) > 1 \\ f(2) > 1 \\ f\left(\dfrac{3-m}{2}\right) > 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = m > 1 \\ f(2) = 2m > 1 \\ f\left(\dfrac{3-m}{2}\right) = \left(\dfrac{3-m}{2}\right)^2 - \dfrac{(3-m)^2}{2} + 2 > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -\dfrac{9-6m+m^2}{4} + 8 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -9 + 6m - m^2 + 8 > 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m^2 - 6m + 5 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < m \\ 1 < m < 5 \end{cases} \Rightarrow 1 < m < 5$$

លំហាត់ទី ៩៨:

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \begin{cases} e^x - x & \text{បើ } x < 0 \\ cos^2\pi x & \text{បើ } 0 \le x \le 1 \\ 1 + \dfrac{lnx}{x} & \text{បើ } x > 1 \end{cases}$ ។

សិក្សាភាពជាប់ និងភាពមានដេរីវេត្រង់ $x = 0$ និង $x = 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

+ ភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $x = 0$

$$\begin{cases} f(0) = cos^2 0 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(e^x - x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} cos^2\pi x = 1 \end{cases} \Rightarrow f \text{ ជាប់ត្រង់ } x = 0$$

+ ភាពជាប់នៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $x = 1$

$$\begin{cases} f(1) = cos^2\pi = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} cos^2\pi x = 1 \\ \lim\limits_{t\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(1 + \dfrac{lnx}{x}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow f \text{ ជាប់ត្រង់ } x = 1$$

ចំណាំ :$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{បើ } x \le x_0 \\ h(x) & \text{បើ } x \ge x_0 \end{cases}$, g, h ជាអនុគមន៍ធម្មតាមានដេរីវេ។

f មានដេរីវេត្រង់ $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} g'(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} h'(x)$ ។

+ ភាពមានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(e^x - x)' = \lim\limits_{x\to 0^-}(e^x - 1) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(cos^2\pi x\right)' = \lim\limits_{x\to 0^+}(-2\pi cos\pi x sin\pi x) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ មានដេរីវេត្រង់ $x = 0$ ហើយ $f'(0) = 0$

+ ភាពមានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ $x = 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(-2\pi cos\pi x sin\pi x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(1+\dfrac{lnx}{x}\right)' = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1-lnx}{x^2} = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ គ្មានដេរីវេត្រង់ $x = 1$

លំហាត់ទី ៩៩:

រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ : ក) $y = \dfrac{sinx}{|x-1|+|3x+1|}$ ខ) $y = \sqrt{\dfrac{|2x+1|-2}{1-|x-2|}}$

គ) $y = ln\left(sin\sqrt{x}\right)$ ឃ) $y = log(1-2cosx)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) $y = \dfrac{sinx}{|x-1|+|3x+1|}$

យើងបាន $|x-1|+|3x+1| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| = 0 \\ |3x+1| = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$ គ្មានតម្លៃ x

នោះ $|x-1|+|3x+1| \neq 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

ខ) $y = \sqrt{\dfrac{|2x+1|-2}{1-|x-2|}}$

$|2x+1|-2$ មានសញ្ញាដូច $(2x+1)^2 - 4 = (2x-1)(2x+3)$

$1-|x-2|$ មានសញ្ញាដូច $1-(x-2)^2 = (-x+1)(x+3)$

x	$-\infty$		$-3/2$		$1/2$		1		3		$+\infty$
$\lvert 2x+1\rvert-2$		+	0	−	0	+		+		+	
$1-\lvert x-2\rvert$		−		−		−	0	+	0	−	
$\dfrac{\lvert 2x+1\rvert-2}{1-\lvert x-2\rvert}$				+				+			

បើ $a, b > 0$ នោះ $|a| - b$ មានសញ្ញាដូច $a^2 - b^2$ ព្រោះ $a^2 - b^2 = |a|^2 - b^2 = (|a| + b)(|a| - b)$។

ដូចនេះ $\mathbb{D} = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup]1, 3[$

គ) $y = ln\left(sin\sqrt{x}\right)$

y មានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} x \geq 0 \\ sin\sqrt{x} > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2k\pi < \sqrt{x} < \pi(2k+1);\ \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2k\pi < \sqrt{x} < \pi(2k+1);\ \forall k \in \mathbb{N}$

ព្រោះ $\Leftrightarrow 2k\pi < \sqrt{x} < \pi(2k+1)$ មិនអាច

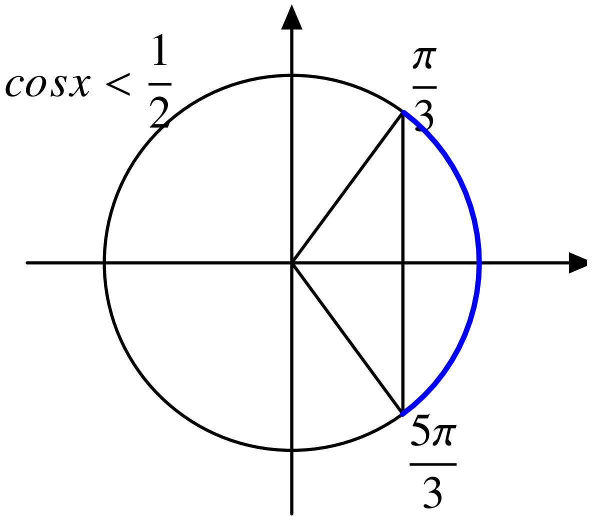
$\Leftrightarrow 4n^2\pi^2 < x < (2n+1)^2\pi^2;\ \forall n \in \mathbb{N}$

ដូចនេះ $\mathbb{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left]4n^2\pi^2, (2n+1)^2\pi^2\right[$

ឃ) $y = log(1 - 2cosx)$

y មានន័យលុះត្រាតែ $1 - 2cosx > 0$

$\Leftrightarrow cosx < \frac{1}{2}$



នោះ $\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

ដូចនេះ $\mathbb{D} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right[$

លំហាត់ទី ១០០:

គេឱ្យអនុគមន៍ $y = \dfrac{(3m+1)x+m-m^2}{x+m}$ មានខ្សែកោង (C_m) ។

ក) កំណត់ m ដើម្បីអោយ (C_m) មិនកាត់អ័ក្ស (Ox)។

ខ) កំណត់ m ដើម្បីអោយបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C_m) ត្រង់ចំណុចដែលជាប្រសព្វរវាង (C_m) និងអ័ក្ស (Ox) ស្របនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ហើយសរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះនោះ។

គ) បង្ហាញថា (C_m) ប៉ះនឹងបន្ទាត់នឹងពីរ។

ដំណោះស្រាយ

ក) កំណត់ m ដើម្បីអោយ (C_m) មិនកាត់អ័ក្ស (Ox)

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C_m) និងអ័ក្ស (Ox) គឺ

$$\frac{(3m+1)x+m-m^2}{x+m} = 0$$

(C_m) មិនកាត់អ័ក្ស (Ox) កាលសមីការគ្មានរឹស

$$\left[\begin{array}{l}(3m+1)x+m-m^2 \text{ គ្មានរឹស}\\ y \text{ ជាអនុគមន៍ថេរ } \neq 0\end{array}\right.$$

$y = \dfrac{(3m+1)x+m-m^2}{x+m}$ ជាអនុគមន៍ថេរកាលណា $y' = 0$

តែ $y' = \dfrac{\begin{vmatrix}3m+1 & m-m^2\\ 1 & m\end{vmatrix}}{(x+m)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix}3m+1 & m-m^2\\ 1 & m\end{vmatrix} = 0$

នោះ $4m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$

ម្យ៉ាងទៀត $(3m+1)x+m-m^2 = 0$ គ្មានរឹសកាលណា $m-m^2 \neq 0$ ហើយ $3m+1 = 0$

$\Rightarrow m = -\dfrac{1}{3}$

យើងបាន $\left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{1}{3}\\ \begin{cases} m = 0\\ y = 1 \neq 0\end{cases}\end{array}\right.$

ដូចនេះ $m = -\dfrac{1}{3}$ ឬ $m = 0$

ខ) កំណត់ m ដើម្បីអោយបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង (C_m) ត្រង់ចំណុចដែលជាប្រសព្វរវាង (C_m) និងអ័ក្ស (Ox) ស្របនឹងបន្ទាត់ $y = x$ ហើយសរសេរសមីការបន្ទាត់ប៉ះនោះ

តាមសម្រាយខាងលើ $m \neq -\frac{1}{3}, m \neq 0$

(C_m) កាត់អ័ក្ស (Ox) ត្រង់ $M \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{m^2 - m}{3m+1} \\ y = 0 \end{array} \right.$

តែ $y' = \dfrac{\begin{vmatrix} 3m+1 & m - m^2 \\ 1 & m \end{vmatrix}}{(x+m)^2} = \dfrac{4m^2}{(x+m)^2}$

$\Rightarrow$ បន្ទាត់ប៉ះនឹង (C_m) ត្រង់ M មានមេគុណប្រាប់ទិស

$a = 1 \Leftrightarrow \dfrac{9m^2 + 6m + 1}{4m^2} = 1 \Rightarrow 5m^2 + 6m + 1 = 0$

$\Rightarrow m = -1$ ឬ $m = -\dfrac{1}{3}$

•បើ $m = -1$ បន្ទាត់ប៉ះមានសមីការ

$y = x - \dfrac{m^2 - m}{3m+1} = x + 1$

•បើ $m = -\dfrac{1}{3}$ បន្ទាត់ប៉ះមានសមីការ

$y = x - \dfrac{m^2 - m}{3m+1} \Leftrightarrow y = x - \dfrac{3}{5}$

គ) បង្ហាញថា (C_m) ប៉ះនឹងបន្ទាត់នឹងពីរ

បើបន្ទាត់ (D) : $y = ax + b$ ប៉ះនឹង (C_m), $\forall m \neq 0$

នោះសមីការ $ax + b = \dfrac{(3m+1)x + m - m^2}{x+m}$ មានរឹសឌុប $\forall m \neq 0$

$\Leftrightarrow ax^2 + max + bx + bm - 3mx - x - m + m^2 = 0$ មានរឹសឌុប $\forall m \neq 0$

$\Delta = [(a-3)m + (b-1)]^2 - 4a\left(m^2 + m(b-1)\right) = 0, \ \forall m \neq 0$

$\Leftrightarrow (a-3)^2m^2 + 2(a-3)(b-1)m + (b-1)^2 - 4am^2 - 4a(b-1)m = 0, \ \forall m \neq 0$

$\Rightarrow \left(a^2 - 10a + 9\right)m^2 - 2(b-1)(a+3)m + (b-1)^2 = 0, \forall m \neq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - 10a + 9 = 0 \\ 2(b-1)(a+3) = 0 \\ (b-1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ ឬ } a = 9 \\ b = 1 \text{ ឬ } a = -3 \\ b = 1 \end{cases}$

ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់ m ខ្សែកោង (C_m) ប៉ះនឹងបន្ទាត់នឹងពីរគឺ (D_1) : $y = x + 1$ និង

$(D_2): \ y = 9x + 1$

លំហាត់ទី ១០១:

ដោះស្រាយសមីការ $cosx - 3\sqrt{3}sinx = cos7x$។

ដំណោះស្រាយ

$\Leftrightarrow cosx - cos7x - 3\sqrt{3}sinx = 0$

$\Leftrightarrow 2sin3xsin4x - 3\sqrt{3}sinx = 0$

$\Leftrightarrow 2sin4xsinx\left(3 - 4sin^2x\right) - 3\sqrt{3}sinx = 0$

$\Leftrightarrow sinx\left[2sin4x(1 + cos2x) - 3\sqrt{3}\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} sinx = 0 & (1) \\ sin4x(1 + cos2x) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} & (2) \end{array}\right.$$

តាម $(1): \ sinx = 0$

$\Leftrightarrow x = k\pi, \ k = 0, k = \pm 1, k = \pm 2, \ldots$

តាម $(2): \ sin4x(1 + cos2x) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow 2sin4xcos2x + sin4x = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \quad (3)$

តាមវិសមភាព កូស៊ី ចំពោះបីចំនួនវិជ្ជមាន $sin^2 2x, \dfrac{cos^2 2x}{2}$ និង $\dfrac{cos^2 2x}{2}$

$$1 = sin^2x + \frac{cos^2 2x}{2} + \frac{cos^2 2x}{2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{\left(sin2xcos^2 2x\right)^2}{4}}$$

$\Leftrightarrow sin2xcos^2 2x \leq \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

តាម $(3): \ 2sin4xcos2x + cos2x \leq \dfrac{8}{3\sqrt{3}} + 1 < \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \quad (4)$

តាម (3)&(4) បញ្ជាក់ថាសមីការ (2) គ្មានចម្លើយទេ។ ដូចនេះសមីការមានចម្លើយតែមួយគត់
$x = k\pi, \ k = 0, \ k = \pm 1, \ k = \pm 2, \ldots$

លំហាត់ទី ១០២:

គេឱ្យអនុគមន៍ $g(x) = e^x\left(x^2 + \lambda x + 1\right), \ \lambda \in \mathbb{R}$។

ក) បង្ហាញថា $g^{(n)}(x) = e^x\left(x^2 + u_n x + v_n\right)$ ដែល u_n និង v_n ជាស៊ីតអាស្រ័យតែ n។

ខ) បង្ហាញថា $u_{n+1} = u_n + 2$ និង $v_{n+1} = v_n + 2n + \lambda$ ។ គណនា u_n, v_n រួច $g^{(n)}(x)$។

ដំណោះស្រាយ

ក) បង្ហាញថា $g^{(n)}(x) = e^x\left(x^2 + u_n x + v_n\right)$ ដែល u_n និង v_n ជាស្ទីតអាស្រ័យតែ n

យើងបង្ហាញដោយកំនើន:

$g'(x) = e^x\left(x^2 + \lambda x + 1 + 2x + \lambda\right)$

$\quad = e^x\left(x^2 + (\lambda+2)x + \lambda + 1\right)$

បើតាង $u_1 = \lambda + 2, v_1 = \lambda + 1$

នោះ $g'(x) = e^x\left(x^2 + u_1 x + v_1\right)$

ឧបមាថាពិតដល់ n គឺ $g^{(n)}(x) = e^x\left(x^2 + u_n x + v_n\right)$ ដែល u_n និង v_n ជាស្ទីតអាស្រ័យតែ n

ចំពោះ $n+1$ គេបាន:

$g^{(n+1)}(x) = \left(g^{(n)}(x)\right)' = e^x\left(x^2 + u_n x + v_n + 2x + u_n\right)$

$\quad = e^x\left(x^2 + (u_n+2)x + u_n + v_n\right)$

បើតាង $u_{n+1} = u_n + 2, v_{n+1} = u_n + v_n$

នោះ $g^{(n+1)}(x) = e^x\left(x^2 + u_{n+1}x + v_{n+1}\right)$

ដូចនេះ $g^{(n)}(x) = \left(x^2 + u_n x + v_n\right)$

ខ) បង្ហាញថា $u_{n+1} = u_n + 2$ និង $v_{n+1} = v_n + 2n + \lambda$

តាមសម្រាយខាងលើ យើងបាន $u_{n+1} = u_n + 2$

(u_n) ជាស្ទីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d = 2$

នោះ $u_n = u_1 + (n-1)d = \lambda + 2 + 2(n-1)$

ដូចនេះ $u_n = 2n + \lambda$

$v_{n+1} = u_n + v_n = u_n + 2n + \lambda$

គណនា v_n : $v_n = v_{n-1} + 2(n-1) + \lambda$

$v_{n-1} = v_{n-2} + 2(n-2) + \lambda$

$\vdots \quad \vdots$

$v_2 = v_1 + 2\cdot 1 + \lambda$

— —

$v_n = v_1 + 2 + (1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)) + (n-1)\lambda$

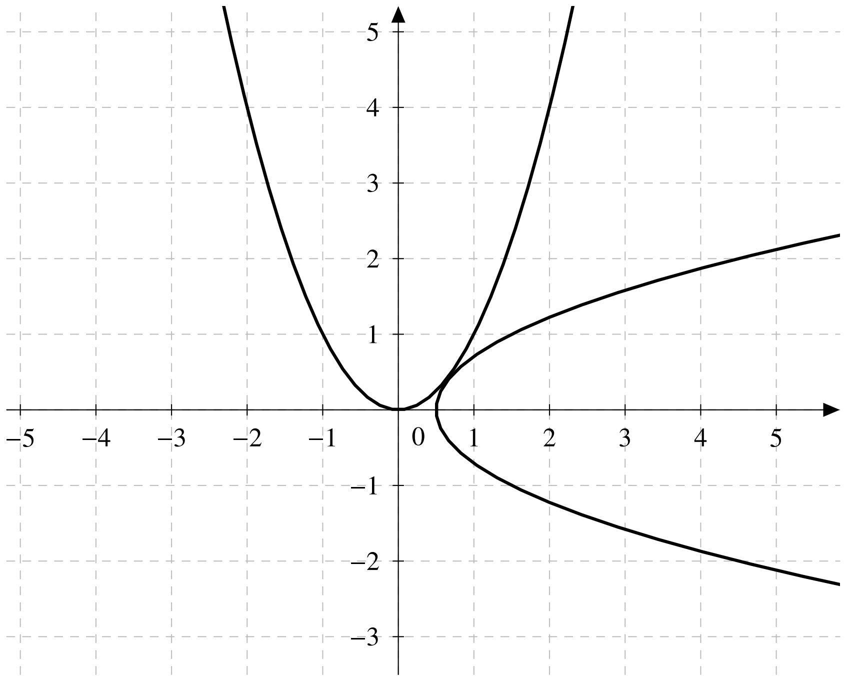
$\Rightarrow v_n = (\lambda+1) + 2\cdot\dfrac{(n-1)n}{2} + (n-1)\lambda$

ដូចនេះ $v_n = n^2+(\lambda-1)n+1$ និង $g^{(n)}(x) = e^x\left(x^2+(2n+\lambda)x+n^2+(\lambda-1)n+1\right)$

លំហាត់ទី ១០៣:

សរសេរគ្រប់សមីការបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោងទាំងពីរ $y = x^2$ និង $x = y^2+\frac{1}{2}$។

ដំណោះស្រាយ



តាង (a,b) ជាកូអរដោនេនៃចំណុចប៉ះនៅលើ $y=x^2$ និង (c,d) នៅលើ $x=y^2+\frac{1}{2}$

នោះយើងបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} b = a^2 \\ c = d^2+\frac{1}{2} \end{cases}$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y' = 2a = \frac{1}{2d} = \frac{d-b}{c-a}$

ជំនួសអថេរមិនស្គាល់ទាំងអស់ជាអនុគមន៍នៃ a យើងបាន

$$2a = \frac{\frac{1}{4a}-a^2}{\left(\frac{1}{4a}\right)^2+\frac{1}{2}-a}$$

នោះសមីការ $8x^3-8a^2+1=0$

$\Leftrightarrow (2a-1)\left(4a^2-2a-1\right)=0$

មានឫស $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ និង $a_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$

•ចំពោះ $a=\frac{1}{2}\Rightarrow b=\frac{1}{4}$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y=2\times\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}$

$$y=x-\frac{1}{4}$$

•ចំពោះ $a=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\Rightarrow b=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y=2\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$

$$y=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}\right)$$

•ចំពោះ $a=\frac{1-\sqrt{5}}{4}\Rightarrow b=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y=2\times\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2$

$$y=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{8}\right)$$

លំហាត់ទី ១០៤:

គេឱ្យអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=cosx+cos\sqrt{3}x$ ។
បង្ហាញថា f មិនមែនជាអនុគមន៍ខួប។

ដំណោះស្រាយ

ឧបមាថា f ជាអនុគមន៍ខួបនោះកើតមានចំនួនវិជ្ជមាន T ដែល $f(x+T)=f(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$។

$\Rightarrow cos(x+T)+cos\sqrt{3}(x+T)=cosx+cos\sqrt{3}x\quad(1)$

ធ្វើដេរីវេធៀប x អង្គសងខាងចំនួនពីរដង

$\Rightarrow -sin(x+T)-\sqrt{3}sin\sqrt{3}(x+T)=-sinx-\sqrt{3}sin\sqrt{3}x$

$\Rightarrow -cos(x+T)-3cos\sqrt{3}(x+T)=-cosx-3cos\sqrt{3}x\quad(2)$

តាម (1)&(2) : $cos(x+T)=cosx$ និង $cos\sqrt{3}(x+T)=cos\sqrt{3}x$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

បើ $cos(x+T) = cosx \Rightarrow T = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
បើ $cos\sqrt{3}(x+T) = cos\sqrt{3}x \Rightarrow \sqrt{3}T = 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$
នាំអោយ $\sqrt{3} = \frac{k}{m} \in \mathbb{Q}$ មិនពិត
ដូចនេះ f មិនមែនជាអនុគមន៍ខួប

លំហាត់ទី ១០៥:

សិក្សាភាពគូ និងភាពសេសនៃអនុគមន៍ $f(x) = ln^3\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

ដំណោះស្រាយ

$f(x) = ln^3\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$
ដែនកំណត់ :
យើងមាន : $x + \sqrt{1+x^2} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0$
$\Rightarrow D = \mathbb{R}$
$\forall x \in \mathbb{R}$ យើងបាន $f(-x) = ln^5\left(-x + \sqrt{1+(-x)^2}\right)$

$$\begin{aligned} f(-x) &= ln^5\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) \\ &= ln^5\left[\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}+x}\right] \\ &= ln^5\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\right) \\ &= \left[ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{-1}\right]^5 \\ &= \left[-ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]^5 \\ &= -ln^5\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = -f(x) \end{aligned}$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍សេស

លំហាត់ទី ១០៦:

គណនាលីមីត:

ក) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln tan\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)}{sin bx}$

ខ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ln\left(1+3^x\right)}{ln\left(1+2^x\right)}$

គ) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2},\ a>0$

ឃ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{1/x},\ a,b,c>0$

ង) $\lim\limits_{x\to 0}\left[ln(x ln a) ln\dfrac{ln ax}{ln\dfrac{x}{a}}\right]$

ច) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}{Arctan(1+x)-Arctan(1-x)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln tan\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)}{sin bx}$

រូបមន្ត

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1+x)}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

តាង $L_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln tan\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)}{sin bx}$

$$L_1=\lim_{x\to 0}\frac{ln\dfrac{1+tanax}{1-tanax}}{sinbx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ln\left(1+\dfrac{1+tanax}{1-tanax}-1\right)}{sinbx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ln\left(1+\dfrac{2tanax}{1-tanax}\right)}{\dfrac{2tanax}{1-tanax}}\cdot\frac{tanax}{sinbx}\cdot\frac{2}{1-tanax}=\frac{2a}{b}$$

ខ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ln(1+3^x)}{ln(1+2^x)}$

រូបមន្ត

- $a>1:\ \lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$
- $0<a<1:\ \lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=lna$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{lna}$

- ករណី $x\to-\infty$ នោះ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ln(1+3^x)}{ln(1+2^x)}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ln(1+3^x)}{ln(1+2^x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ln(1+3^x)}{3^x}\cdot\dfrac{2^x}{ln(1+2^x)}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=0$

- ករណី $x\to+\infty$ នោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ln(1+3^x)}{ln(1+2^x)}$ រាង $\dfrac{0}{0}$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ln(1+3^x)}{ln(1+2^x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ln3^x\cdot(3^{-x}+1)}{ln2^x\cdot(2^{-x}+1)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{xln3+ln(3^{-x}+1)}{xln2+ln(2^{-x}+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ln3+\dfrac{ln(3^{-x}+1)}{x}}{ln2+\dfrac{ln(2^{-x}+1)}{x}}=\frac{ln3}{ln2}=log_2 3$$

គ) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2},\ a>0$

តាង $L_3=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$

$$L_3=\lim_{h\to 0}\frac{\left(a^{x+h}-a^x\right)-\left(a^x-a^{x-h}\right)}{h^2}=\lim_{h\to 0}a^x\frac{\left(a^h-1\right)-\left(1-a^{-h}\right)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}a^x\cdot\frac{\left(a^h-1\right)-\left(1-\dfrac{1}{a^h}\right)}{h^2}=\lim_{h\to 0}a^x\cdot\frac{\left(a^h-1\right)-\left(\dfrac{a^h-1}{a^h}\right)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^x}{a^h}\cdot\frac{a^h-1}{h}\cdot\frac{a^h-1}{h}=a^x\cdot ln^2a$$

ឃ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{1/x}$, $a,b,c>0$

•**រូបមន្ត**: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} lnx=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx=+\infty$

•**បើ** $I=\lim\limits_{x\to a}u(x)^{v(x)}$ **មានរាង** 1^∞

$$\Rightarrow I=\lim_{x\to a}\left[(1+(u-1))^{\frac{1}{u-1}}\right]^{(u-1)v}=e^{\lim_{x\to a}[u(x)-1]v(x)}$$ ។

តាង $L_4=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{1/x}$

$$L_4=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\right)^{1/x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{a\left(a^x-1\right)+b\left(b^x-1\right)+c\left(c^x-1\right)}{a+b+c}\right]^{1/x}$$

$$L_4=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+\frac{1\left(a^x-1\right)+b\left(b^x-1\right)+c\left(c^x-1\right)}{a+b+c}\right]^{\frac{a+b+c}{a\left(a^x-1\right)+b\left(b^x-1\right)+c\left(c^x-1\right)}}\right\}^{h}(x)$$

ដែល $h(x)=\dfrac{a\left(a^x-1\right)+b\left(b^x-1\right)+c\left(c^x-1\right)}{(a+b+c)x}$

$$L_4=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{a+b+c}\cdot\left(a\cdot\frac{a^x-1}{x}+b\cdot\frac{b^x-1}{b}+c\cdot\frac{c^x-1}{x}\right)}$$

$$L_4=e^{\frac{1}{a+b+c}(alna+blnb+clnc)}=\left(e^{lna^ab^bc^c}\right)^{\frac{1}{a+b+c}}$$

$$L_4 = \left(a^a b^b c^c\right)^{\frac{1}{a+b+c}}$$

ង) $\lim_{x\to 0}\left[ln(xlna)ln\frac{lnax}{ln\frac{x}{a}}\right]$

តាង $L_5 = \lim_{x\to 0}\left[ln(xlna)ln\frac{lnax}{ln\frac{x}{a}}\right]$

$$L_5 = \lim_{x\to 0}\left[ln(xlna)\cdot ln\frac{lnx+lna}{lnx-lna}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[ln(xlna)\cdot ln\left(1+\frac{lnx+lna}{lnx-lna}-1\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[ln(xlna)\cdot ln\left(1+\frac{2lna}{ln\frac{x}{a}}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{lnx+ln(lna)}{lnx-lna}\cdot 2lna\cdot\frac{ln\left(1+\frac{2lna}{ln\frac{x}{a}}\right)}{\frac{2lna}{ln\frac{x}{a}}}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{ln(lna)}{lnx}}{1-\frac{lna}{lnx}}\cdot 2lna\cdot 1 = 2lna$$

ច) $\lim_{x\to 0}\frac{ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{Arctan(1+x)-Arctan(1-x)}$

រូបមន្ត

$\bullet Arctana + Arctanb = Arctan\dfrac{a+b}{1-ab},\ ab \neq 1$

$\bullet Arctana - Arctanb = Arctan\dfrac{a-b}{1+ab}\ ab \neq -1$

$\bullet \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Arctanx}{x} = 1$

តាង $L_6 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}{Arctan(1+x) - Arctan(1-x)}$

$$L_6 = \lim_{x\to 0}\frac{ln\left(1+\dfrac{1+x}{1-x}-1\right)}{Arctan\dfrac{1+x-(1-x)}{1+(1+x)(1-x)}} = \lim_{x\to 0}\frac{ln\left(1+\dfrac{2x}{1-x}\right)}{Arctan\dfrac{2x}{2-x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{ln\left(1+\dfrac{2x}{1-x}\right)}{\dfrac{2x}{1-x}}\right]\cdot\left[\frac{\dfrac{2x}{2-x^2}}{Arctan\dfrac{2x}{2-x^2}}\right]\cdot\frac{2-x^2}{1-x} = 2$$

លំហាត់ទី ១០៧:

គណនាអាំងតេក្រាល:

ក) $\displaystyle\int x^x(1+lnx)dx$

ខ) $\displaystyle\int \frac{ax^2+b}{x^2-1}ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx$

គ) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}ln\sqrt{x^2+1}dx$

ឃ) $\displaystyle\int \frac{x^5dx}{x^6-x^3-2}$

ង) $\displaystyle\int \frac{dx}{3sin^2x - 8sinxcosx - 5cos^2x}$

ច) $\displaystyle\int xf'(x)dx$

ឆ) $\displaystyle\int f'(2x)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) $\int x^x(1+lnx)dx$

ចំណាំ:

ដើម្បីគណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=u(x)^{v(x)}$ គេអាចសរសេរជារាង $y=e^{v(x)lnu(x)}$។
ឧទាហរណ៍: គណនាដេរីវេនៃ $y=(sinx)^{x^2}$ ។

$$y=e^{x^2ln(sinx)}$$

$$y'=e^{x^2ln(sinx)}\left(2xln(sinx)+x^2\frac{cosx}{sinx}\right)$$

$$=x(sinx)^{x^2}(xln(sinx)+xcotx)$$

តាង $t=x^x \Rightarrow dt=e^{xlnx}\left(lnx+x\cdot\frac{1}{x}\right)$

$$=x^x(lnx+1)dx$$

$$\Rightarrow \int x^x(1+lnx)dx=t+C=x^x+C$$

ខ) $\int \frac{ax^2+b}{x^2-1}ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx$

រូបមន្ត

- $\int \frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

$$\begin{array}{r|l} & a \\ \hline x^2-1) & ax^2 \quad\quad + b \\ & -ax^2 \quad\quad + a \\ \hline & (1a+1b) \end{array}$$

$$\int \frac{ax^2+b}{x^2-1}ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx=\int\left(a+\frac{a+b}{x^2-1}\right)ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx$$

$$=a\int ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx+(a+b)\int ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\frac{dx}{x^2-1}$$

តាង $\begin{cases} u=ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \Rightarrow du=-\frac{2dx}{x^2-1} \\ dv=dx \Rightarrow v=x \end{cases}$

$$\int \frac{ax^2+b}{x^2-1} ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| dx = \int audv + (a+b)\int u\cdot\frac{du}{2}$$

$$= a\left[xln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \int \frac{2xdx}{x^2-1}\right] + \frac{(a+b)}{4}u^2$$

$$= a\left(xln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - ln\left|x^2-1\right|\right) + \frac{(a+b)}{4}ln^2\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

គ) $\int x\sqrt{x^2+1}ln\sqrt{x^2+1}dx$

តាង $F = \int x\sqrt{x^2+1}ln\sqrt{x^2+1}dx$

តាង $\begin{cases} u = ln\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}ln\left(x^2-1\right) \Rightarrow du = \frac{xdx}{x^2-1} \\ dv = x\sqrt{x^2+1}dx \Rightarrow v = \int x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$

$$F = \int udv = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}.ln\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x\sqrt{(x^2+1)^3}}{x^2-1}$$

■ ចំពោះ $G = \int \frac{x\sqrt{(x^2+1)^3}}{x^2-1}$

$$\begin{cases} x = tant \Leftrightarrow t = Arctanx, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ dx = \frac{dt}{cos^2t} \\ \sqrt{x^2+1} = \sqrt{tan^2t+1} = \sqrt{\frac{1}{cos^2t}} = \frac{1}{cost} \end{cases}$$

$$\Rightarrow G = \int \left(\frac{sint}{cost}\right)\left(\frac{1}{cos^2t}\right)\cdot\frac{1}{\frac{sin^2t}{cos^2t}-1}\cdot\frac{dt}{cos^2t}$$

$$= \int \frac{sintdt}{cos^4t\,(sin^2t - cos^2t)} = \int \frac{sintdt}{cos^4t\,(1-2cos^2t)}$$

តាង $\begin{cases} s = \frac{1}{cost} \Leftrightarrow cost = \frac{1}{s} \\ ds = \frac{sintdt}{cos^2t} \end{cases}$

$$G = \int s^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{s^2}} ds = \int \frac{s^4}{s^2 - 2} ds$$

$$= \int \left(s^2 + 2 + \frac{4}{s^2 - 2}\right) ds$$

$$= \frac{s^3}{3} + 2s + \frac{4}{2\sqrt{2}} ln \left|\frac{s - \sqrt{2}}{s + \sqrt{2}}\right|$$

$$= \frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3} + 2\sqrt{(x^2+1)} + \sqrt{2} ln \left|\frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2}}\right|$$

ដូចនេះ $F = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}.ln\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3} + 2\sqrt{(x^2+1)}\right.$

$\left. + \sqrt{2} ln \left|\frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2}}\right|\right) + C$

ឃ) $\int \frac{x^5 dx}{x^6 - x^3 - 2}$

តាង $M = \int \frac{x^5 dx}{x^6 - x^3 - 2}$

$M = \int \frac{x^5 dx}{x^6 - x^3 - 2} = \int \frac{x^3.x^2 dx}{x^6 - x^3 - 2}$ (តាង $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$)

$$= \frac{1}{3}\int \frac{tdt}{t^2 - t - 2} = \frac{1}{6}\int \frac{2t - 1 + 1}{t^2 - t - 2} dt$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{2t-1}{t^2-t-2} dt + \frac{1}{6}\int \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}$$

$$= \frac{1}{6} ln\left|t^2 - t - 2\right| + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2 \times \frac{3}{2}} ln \left|\frac{t - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{t - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}}\right|$$

$$= \frac{1}{6} ln\left|x^6 - x^3 - 2\right| + \frac{1}{18} ln\left|\frac{x^3 - 2}{x^3 + 1}\right| + C$$

ង) $\int \frac{dx}{3sin^2x - 8sinxcosx - 5cos^2x}$

តាង $N = \int \frac{dx}{3sin^2x - 8sinxcosx - 5cos^2x}$

$$N = \int \frac{dx}{3sin^2x - 8sinxcosx - 5cos^2x} = \int \frac{\frac{dx}{cos^2x}}{3tan^2x - 8tanx - 5}$$

$$t = tanx \Rightarrow dt = \frac{dx}{cos^2x}$$

$$N = \int \frac{dt}{3t^2 - 8t - 5} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{8}{3}t - \frac{5}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\left(t - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{31}{9}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{31}}{3}} ln\left|\frac{t - \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{31}}{3}}{t - \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{31}}{3}}\right|$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{31}} ln\left|\frac{3tanx - 4 - \sqrt{31}}{3tanx - 4 + \sqrt{31}}\right| + C$$

ច) $\int xf'(x)dx$

តាង $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = f'(x)dx \Rightarrow v = f(x) \end{cases}$

$$\int xf'(x)dx = \int udv = xf(x) - \int f(x)dx$$

ឆ) $\int f'(2x)dx$

$$\boxed{\int f'(ax + b)dx = \frac{1}{a}f(ax + b) + C}$$

តាង $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$

$$\Rightarrow \int f'(2x)dx = \int f'(t) \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}f(t) + C = \frac{1}{2}f(2x) + C$$

លំហាត់ទី ១០៨:

កំណត់ $f(x)$ ដោយដឹងថា៖ ក) $f'\left(x^2\right) = \frac{1}{x}, x > 0$; ខ) $f'\left(sin^2x\right) = cos^2x$; គ) $f'(lnx) = \begin{cases} 1 & \text{បើ } 0 < x \le 1 \\ x & \text{បើ } 1 < x \end{cases}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) $f'\left(x^2\right) = \frac{1}{x}, x > 0$

បើ $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$

យើងបាន $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$

$\Rightarrow f(t) = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C$ ព្រោះ $\int f'(t)dt = f(t)$

ដូចនេះ $f(x) = 2\sqrt{x} + C$

ខ) $f'\left(sin^2x\right) = cos^2x$

បើ $t = sin^2x \Leftrightarrow cos^2x = 1 - sin^2x = 1 - t$

យើងបាន $f'(t) = 1 - t$

$\Rightarrow f(t) = \int (1 - t)dt = t - \frac{t^2}{2} + c$

ដូចនេះ $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + C$

គ) $f'(lnx) = \begin{cases} 1 & \text{បើ } 0 < x \le 1 \\ x & \text{បើ } 1 < x \end{cases}$

បើ $t = lnx \Leftrightarrow x = e^t$

គឺ $0 < x \le 1 \Leftrightarrow t \le 0$ និង $1 < x \Rightarrow 0 < t$

យើងបាន $f'(t) = \begin{cases} \int dt & \text{បើ } t \le 0 \\ \int e^t dt & \text{បើ } t > 0 \end{cases} = \begin{cases} t + C & \text{បើ } t \le 0 \\ e^t + C' & \text{បើ } t > 0 \end{cases}$

នោះ $f(x) = \begin{cases} x + C & \text{បើ } t \le 0 \\ e^x + C' & \text{បើ } t > 0 \end{cases}$

តែ f មានដេរីវេ$\Rightarrow f$ ជាប់ត្រង់ $x = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow e = 1 + C' \Rightarrow C' = C - 1$$

ដូចនេះ $f(x) = \begin{cases} x + C & \text{បើ } t \le 0 \\ e^x + C - 1 & \text{បើ } t > 0 \end{cases}$

លំហាត់ទី ១០៩:

គេឱ្យ $\dfrac{sin^4\alpha}{m} + \dfrac{cos^4\alpha}{n} = \dfrac{1}{m+n}$។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{sin^8\alpha}{m^3} + \dfrac{cos^8\alpha}{n^3} = \dfrac{1}{(m+n)^3}$; $(m \neq -n)$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $cos2\alpha = x$

នោះ $sin^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1-x),\ sin^4\alpha = \dfrac{1}{4}\left(1 - 2x + x^2\right)$

$cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1+x),\ sin^4\alpha = \dfrac{1}{4}\left(1 + 2x + x^2\right)$

យើងបាន $\dfrac{1-2x+x^2}{4m} + \dfrac{1+2x+x^2}{4n} = \dfrac{1}{m+n}$

$\Leftrightarrow (m+n)^2x^2 + 2(m-n)(m+n)x + (m-n)^2 = 0$

$\Leftrightarrow [(m+n)x + (m-n)]^2 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{n-m}{n+m}$

នាំអោយ $sin^2\alpha = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{n-m}{n+m}\right) = \dfrac{m}{n+m}$

$cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{n-m}{n+m}\right) = \dfrac{n}{n+m}$

យើងបាន $\dfrac{sin^8\alpha}{m^3} + \dfrac{cos^8\alpha}{n^3} = \dfrac{m^4}{(n+m)^4m^3} + \dfrac{n^4}{(n+m)^4n^3} = \dfrac{1}{(m+n)^3}$ ពិត

លំហាត់ទី ១១០:

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{1 + sin\theta + icos\theta}{1 + sin\theta - icos\theta} = sin\theta + icos\theta$ រួចទាញបញ្ជាក់ថា

$\left(1 + sin\dfrac{\pi}{5} + icos\dfrac{\pi}{5}\right)^5 + i\left(1 + sin\dfrac{\pi}{5} - icos\dfrac{\pi}{5}\right)^5 = 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន $\dfrac{1+sin\theta+icos\theta}{1+sin\theta-icos\theta}=\dfrac{1+sin\theta+icos\theta}{1+sin\theta-icos\theta}\times\dfrac{1+sin\theta+icos\theta}{1+sin\theta+icos\theta}$

$$=\frac{(1+sin\theta+icos\theta)^2}{(1+sin\theta)^2-(icos\theta)^2}$$

$$=\frac{1+sin^2\theta+i^2cos^2\theta+2sin\theta+2icos\theta+2isin\theta cos\theta}{1+2sin\theta+sin^2\theta-i^2cos^2\theta}$$

$$=\frac{1+sin^2\theta-cos^2\theta+2sin\theta+2icos\theta(sin\theta+1)}{2+2sin\theta}$$

$$=\frac{2sin^2\theta+sin\theta+2icos\theta(sin\theta+1)}{2(sin\theta+1)}$$

$=sin\theta+icos\theta$ ពិត

-រួចទាញបញ្ជាក់ថា

$$\left(1+sin\frac{\pi}{5}+icos\frac{\pi}{5}\right)^5+i\left(1+sin\frac{\pi}{5}-icos\frac{\pi}{5}\right)^5=0$$

តាមសម្រាយខាងលើ $\dfrac{1+sin\theta+icos\theta}{1+sin\theta-icos\theta}=sin\theta+icos\theta$

$$\Rightarrow\left(1+sin\frac{\pi}{5}+icos\frac{\pi}{5}\right)^5=\left(1+sin\frac{\pi}{5}-icos\frac{\pi}{5}\right)^5\left(sin\frac{\pi}{5}+icos\frac{\pi}{5}\right)^5$$

$$=\left(1+sin\frac{\pi}{5}-icos\frac{\pi}{5}\right)^5\left[cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)+isin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)\right]^5$$

$$=\left(1+sin\frac{\pi}{5}-icos\frac{\pi}{5}\right)^5\left[cos\left(\frac{5\pi}{2}-\pi\right)+isin\left(\frac{5\pi}{2}-\pi\right)\right]$$

$$=\left(1+sin\frac{\pi}{5}-icos\frac{\pi}{5}\right)^5\left(cos\frac{3\pi}{2}+isin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$=-i\left(1+sin\frac{\pi}{5}-icos\frac{\pi}{5}\right)^5$$

យើងបាន $\left(1+sin\frac{\pi}{5}+icos\frac{\pi}{5}\right)^5+i\left(1+sin\frac{\pi}{5}-icos\frac{\pi}{5}\right)^5=-i\left(1+sin\frac{\pi}{5}-icos\frac{\pi}{5}\right)^5$

$+i\left(1+sin\frac{\pi}{5}-icos\frac{\pi}{5}\right)^5=0$ ពិត

លំហាត់ទី ១១១:

គេឱ្យ a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និងសន្មត់ $x<0$។

បើ $\left(1+x^a+x^b\right)^2=3\left(1+x^{2a}+x^{2b}\right)$ បង្ហាញថា a និង b ជាចំនួនគត់គូ និងកំណត់តម្លៃដែលអាចមាននៃ x ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $u = x^a$ និង $v = x^b$ យើងបាន:

$$(1 + u + v)^2 = 3\left(1 + u^2 + v^2\right)$$

$\Rightarrow 1 + u^2 + v^2 + 2u + 2v + 2uv = 3 + 3u^2 + 3v^2$

$\Rightarrow (u - v)^2 + (u - 1)^2 + (v - 1)^2 = 0$

ដោយ $(u-v)^2$, $(u-1)^2$, $(v-1)^2$ សុទ្ធតែវិជ្ជមានហើយផលបូកស្មើសូន្យ នោះកត្តានីមួយៗស្មើសូន្យ។ $\Rightarrow u = v = 1$

ពិនិត្យ: បើ $u = 1$ នោះ $x^a = 1$

តែ $x < a$ នោះ a ត្រូវតែជាចំនួនគត់គូ ហើយ $x = -1$

ស្រាយដូចគ្នាចំពោះ b

ដូចនេះ a និង b ជាចំនួនគត់គូ ហើយ $x = -1$

លំហាត់ទី ១១២:

គេឱ្យ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$។

ដំណោះស្រាយ

ដោយសារតែ $a + b > c$ ចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ យើងបាន:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + 3abc - c^3 &= a^3 + b^3 + (-c)^3 - 3ab(-c) \\ &= (a + b + (-c))\left(a^2 + b^2 + (-c)^2 - b(-c) - c(a) - ab\right) \\ &= \frac{1}{2}(a + b - c)\left((b + c)^2 + (c + a)^2 + (a - b)^2\right) \\ &> 0 \end{aligned}$$

ដូច្នេះ $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$

លំហាត់ទី ១១៣:

គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) មាន $a_0 = 1$ និង $a_n = \dfrac{\sqrt{1 + a_{n-1}^2} - 1}{a_{n-1}}$។

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n = \tan \dfrac{\pi}{2^{n+2}}$ ចំពោះ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} (2^n.a_n)$ ។

ខ) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n > \dfrac{\pi}{2^{n+2}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n = \tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$ ចំពោះ $n = 0, 1, 2, 3, ...$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty}(2^n.a_n)$

យើងមាន $a_0 = 1 = \tan\frac{\pi}{4} = \tan\frac{\pi}{2^{0+2}}$

$$a_1 = \frac{\sqrt{1+a_0^2}-1}{a_0} = \frac{\sqrt{1+\tan\frac{\pi}{2^2}}-1}{tan\frac{\pi}{2^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^2}}-1}{\tan\frac{\pi}{2^2}} = \frac{1-cos\frac{\pi}{2^2}}{sin\frac{\pi}{2^2}} = \frac{2\sin^2\frac{\pi}{2^3}}{\sin\frac{\pi}{2^2}}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{2\sin^2\frac{\pi}{2^3}}{2\sin\frac{\pi}{2^3}\cos\frac{\pi}{2^3}} = \tan\frac{\pi}{2^3} = \tan\frac{\pi}{2^{1+2}}$$

ឧបមាថា $a_k = \tan\theta$ ដែល $\theta = \frac{\pi}{2^{k+2}}$

យើងនិងស្រាយថា $a_{k+1} = \tan\frac{\pi}{2^{k+3}}$

យើងបាន $a_{k+1} = \frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta} = \frac{\frac{1}{\cos\theta}-1}{\tan\theta}$

$$= \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\theta} = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow a_{k+1} = \tan\frac{\theta}{2}$$

តាមវិចារអនុមាណរួមគណិតវិទ្យា $a_n = \tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$ ចំពោះ $n = 0, 1, 2, 3, ...$

○ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}(2^n.a_n)$

យក $A = \lim\limits_{n\to+\infty}(2^n.a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$

តាង $t = \frac{\pi}{2^{n+2}} \Rightarrow 2^n = \frac{\pi}{4t}$

ពេល $n \to +\infty$ នោះ $t \to 0$

យើងបាន $A = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\pi \tan t}{4t} = \dfrac{\pi}{4} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\tan t}{t} = \dfrac{\pi}{4}$

ខ) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n > \dfrac{\pi}{2^{n+2}}$ យើងគ្រាន់តែស្រាយថា $\tan\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right) > \dfrac{\pi}{2^{n+2}}$

តាង $f(x) = \tan x - x$ ចំពោះ $x = \dfrac{\pi}{2^{n+2}} \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

នោះ $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2 > 0$ ចំពោះ $x > 0$

គេបានអនុគមន៍ f កើនដាច់ខាតនៅចន្លោះ $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

យើងបាន $f(x) > f(0) = 0 \quad (1)$

តែចំពោះគ្រប់ n, $\dfrac{\pi}{2^{n+1}} \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

យើងទាញបានថា $\tan\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right) > \dfrac{\pi}{2^{n+2}}$ ពិត

ដូចនេះ $a_n > \dfrac{\pi}{2^{n+2}}$

លំហាត់ទី ១១៤:

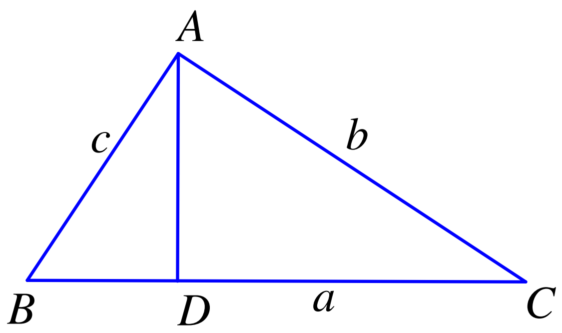
ស្រាយបញ្ជាក់ថា ក្នុងត្រីកោណ ABC គេបាន:

ក) $b\cos C + c\cos B = a$

ខ) $b\cos B + c\cos C = a\cos(B - C)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) $b\cos C + c\cos B = a$



ក្នុង $\triangle ABD :\ \cos B = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{BD}{c} \Rightarrow BD = c\cos B$

ក្នុង $\triangle ACD :\ \cos C = \dfrac{DC}{AC} = \dfrac{DC}{b} \Rightarrow DC = b\cos C$

ដោយ $BC = BD + DC \Rightarrow a = c\cos B + b\cos C$ ពិត

ខ) $b\cos B + c\cos C = a\cos(B - C)$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = m \Rightarrow \begin{cases} b = m\sin B \\ c = m\sin C \end{cases}$

យើងបាន $b\cos B + c\cos C = m\sin B\cos B + m\sin C\cos C$
$= \frac{m}{2}(2\sin B\cos B + 2\sin C\cos C) = \frac{m}{2}(\sin 2B + \sin 2C) = \frac{m}{2}\cdot 2\sin(B + C)\cos(B - C) = \frac{a}{\sin A}\cdot\sin A\cos(B - C) = a\cos(B - C)$ ពិត

លំហាត់ស្រាវជ្រាវ

I. គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (x_n) កំណត់ដោយ $x_1 = 2,\ x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n = n^2x_n,\ \forall n \geq 2$ ។ ចូរគណនា x_{2022} ។

II. គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (x_n) កំណត់ដោយ $x_1 = x_2 = 1$ និង $x_n = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2})$ ចំពោះ $n \geq 3$ ។ ចូររក x_{2022} ។

III. គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (x_n) និង (y_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1 = y_1 = \sqrt{3},\ x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2},\ y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}},\ n \geq 1$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x_ny_n \in (2, 3)$ ចំពោះ $n \geq 2$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ ។

IV. គេឱ្យស្វ៊ីត (u_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} u_0 = 5,\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}u_n \text{ ចំពោះ } n \geq 0 \end{cases}$ ។
ចូររកតួទូទៅ u_n និងគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$