កំណែវិញ្ញាសា
សិស្សពូកែគណិតវិទ្យាវ័យក្មេង
ឧបទ្វីបបាល់កង់

ដោយ លឹម សុវណ្ណវិចិត្រ

1997- 2009

វិញ្ញាសាឆ្នាំ ១៩៩៧

1. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់បណ្តាចំណុចចំនួនប្រាំបួន ឋិតខាងក្នុងការេមួយមានជ្រុងរង្វាស់មួយឯកតា គេតែងតែអាចរកបាននូវចំនុចបី ដែលជាកំពូលរបស់ត្រីកោណមួយមានក្រលាផ្ទៃតូចជាង $1/8$ ។

2. គេឱ្យចំនួនពិត x, y ដែល

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=k$$

ចូរគណនា

$$\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8}-\frac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$$

ជាអនុគមន៍នៃ k ។

3. តាង I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ។ តាង N, M ជាចំណុចកណ្តាលរបស់ AB, CA ។ បន្ទាត់ BI, CI កាត់ MN ត្រង់ K និង L រៀងគ្នា។ ចូរបង្ហាញថា

$$AI + BI + CI > BC + KL$$

4. ត្រីកោណមួយ មានកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅស្មើ R និងមានជ្រុង a, b, c ដែល

$$R(b + c) = a\sqrt{bc}$$

ចូរគណនាមុំត្រីកោណនោះ។

5. តាង $n_1, n_2, \dots, n_{1998}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល

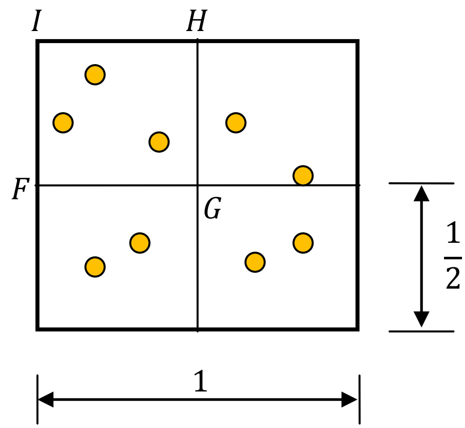
$$n_1^2+n_2^2+\cdots+n_{1997}^2=n_{1998}^2$$

ចូរបង្ហាញថា ក្នុងចំណោមចំនួនទាំងនេះ មានលេខគូយ៉ាងហោចណាស់ពីរ។

♐

ដំណោះស្រាយ

1. យើងចែកការេនោះជាការេតូចៗចំនួនបួនស្មើគ្នា ដូចក្នុងរូបទី 1។ ការេនិមួយៗមានរង្វាស់ជ្រុង 1/2 ។



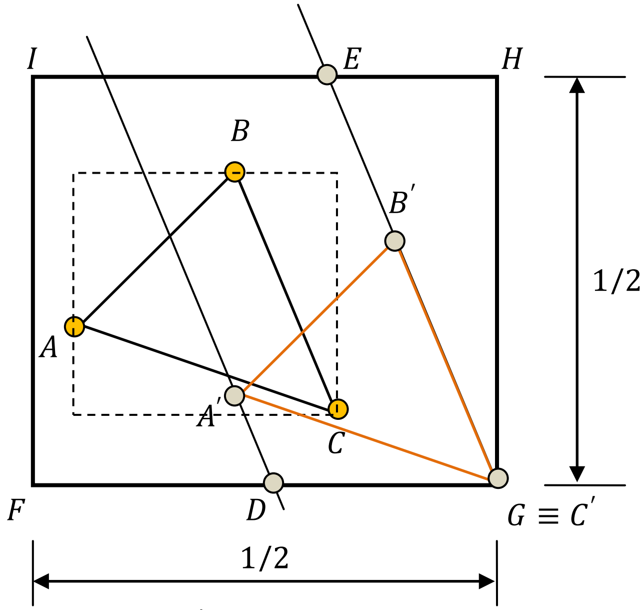
រូបទី 1 : ការបែងចែកចំនុចនៅក្នុងការេតូច

ក្នុងចំណោមការេតូចៗទាំងនេះ ត្រូវមានយ៉ាងហោចណាស់ការេមួយដែលមានចំណុចយ៉ាងតិចចំនួន 3 ។ យើងពិនិត្យលើការេមានចំណុចចំនួនបី ដូចក្នុងរូបទី 2 ។

តាងចំណុចនោះដោយ A, B, C ។ យើងគូសប្រអប់ចតុកោណកែងមួយចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ។ បើកំពូលណាមួយឋិតនៅចំកំពូលរបស់ប្រអប់ យើងទាញត្រីកោណអោយកំពូលនោះមកត្រួតនឹងកំពូលរបស់ការេក្រៅ។ ករណីនេះជាកំពូល C ។ ដូច្នេះត្រីកោណ ABC មកជា $A'B'C'$ ។ ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $A'B'C'$ ស្មើ ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $DB'C'$ ដែល $A'D \parallel B'C'$។ យើងមាន

$$S_{DB'C'} < S_{FB'C'} < S_{FC'E} = \frac{1}{8}$$

ដូច្នេះ ក្រឡាផ្ទៃរបស់ត្រីកោណABC តូចជាង 1/8 ហើយស្មើនឹង 1/8 ទាល់តែ មានកំពូលពីរឋិតលើកំពូលរបស់ការេ និងមួយទៀតស្ថិតលើជ្រុងឈមរបស់ការេ។ តែករណីនេះមិនអាចព្រោះចំណុចទាំងប្រាំបួនឋិតនៅខាងក្នុងការេធំ ទាំងអស់។



រូបទី 2 : ការេដែលមានចំនុចបី

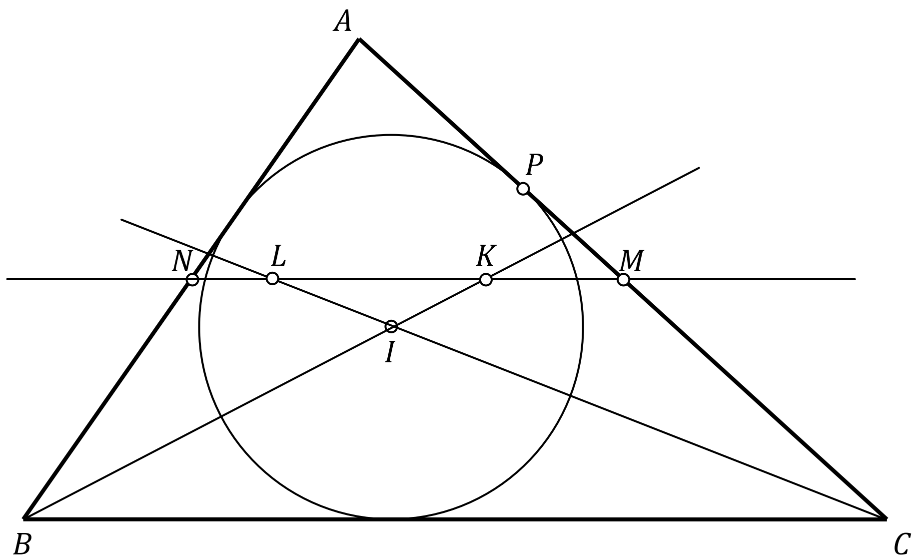
2. យើងមាន

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \\
&= \frac{2x^4+2y^4}{x^4-y^4} \\
\Longrightarrow \frac{k}{2} &= \frac{x^4+y^4}{x^4-y^4} \\
\Longrightarrow \frac{k}{2}+\frac{2}{k} &= \frac{x^4+y^4}{x^4-y^4}+\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4} \\
&= 2\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8} \\
\Longrightarrow \frac{x^8+y^8}{x^8-y^8} &= \frac{k}{4}+\frac{1}{k}=\frac{k^2+4}{4k} \\
\Longrightarrow \frac{x^8+y^8}{x^8-y^8}-\frac{x^8-y^8}{x^8+y^8} &= \frac{k^2+4}{4k}-\frac{4k}{k^2+4} \\
&= \frac{k^4+8k^2+16-16k^2}{4k(k^2+4)} \\
&= \frac{k^4-8k^2+16}{4k(k^2+4)} \\
&= \frac{(k^2-4)^2}{4k(k^2+4)}
\end{aligned}
$$

3. សូមពិនិត្យរូបទី 3 ។ យើងមាន $BI + CI > BC$ ពិត តាមវិសមភាពត្រីកោណ។ យើងនឹងបង្ហាញ ថា $AI > KL$ ។

យើងមាន

$$\angle KBN = \angle KBC = \angle NKB \implies NB = NK$$
$$\angle MCL = \angle BCL = \angle MLC \implies ML = MC$$
$$\begin{aligned} KL &= KN + LM - MN \\ &= \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC - \frac{1}{2}BC \end{aligned}$$



រូបទី3 : សំនួរទី 3

តាង P, Q, R ជាចំណុចប៉ះនៃរង្វង់ផ្ចិត I ជាមួយជ្រុង AC, BC, AB យើងមាន

$$\begin{aligned} &AP = AC - PC \\ &PC = CQ = BC - BQ \\ &BQ = BR = AB - AR \\ &AR = AP \\ &\implies AP = AC - PC \\ &\qquad = AC - (BC - BQ) \\ &\qquad = AC - BC + BQ \\ &\qquad = AC - BC + AB - AR \\ &\qquad = AC - BC + AB - AP \end{aligned}$$

$$\implies AP = \frac{AB + AC - BC}{2}$$

ដូច្នេះ $KL = AP$ ។ យើងមាន

$$AI = \sqrt{AP^2} + r^2 = \sqrt{KL^2} + r^2 > KL$$

ដែល r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង។ ដូច្នេះវិសមភាពពិត។

4. យើងមាន $a = 2R\sin A \le 2R$ ដូច្នេះ

$$2\sqrt{bc} \ge \frac{a}{R}\sqrt{bc} = b + c \ge 2\sqrt{bc}$$

យើងមានសមភាពទាល់តែនិងមានតែ $b = c$ និង $\sin A = 1$ ដូច្នេះ $A = \pi/2$ ។

5. បើមានពីរក្នុងចំណោម $n_1, n_2, \dots, n_{1997}$ ជាលេខគូ នោះសំណើពិត។ បើមានតែមួយក្នុងចំណោម $n_1, n_2, \dots, n_{1997}$ ជាលេខគូ នោះ យើងមានចំនួនសេសចំនួន 1996 និងចំនួនគូមួយ ដូច្នេះបូកចូលគ្នា បានជាលេខគូ $\Longrightarrow$ n_{1998} ជាលេខគូ ដូច្នេះសំណើពិត។ បន្ទាប់មកទៀត យើងនឹងបង្ហាញថា បណ្តា$n_1, n_2, \dots, n_{1997}$ មិនអាចជាលេខសេសទាំងអស់ទេ។ ករណីវាសេសទាំងអស់ យើងទាញបាន n_{1998} ជាលេខសេស។ យើងដឹងថា ការេនៃចំនួនសេសមួយ ចែកនឹង 8 សល់សំណល់មួយជានិច្ច ព្រោះ បណ្តាការេនៃចំនួនសេសដែលមានរាង $8m+1; 8m+3; 8m+5; 8m+7$ មាន

$$(8m+1)^2 = 64m^2 + 16m + 1 \equiv 1 \pmod 8$$
$$(8m+3)^2 = 64m^2 + 48m + 9 \equiv 1 \pmod 8$$
$$(8m+5)^2 = 64m^2 + 80m + 25 \equiv 1 \pmod 8$$
$$(8m+7)^2 = 64m^2 + 112m + 49 \equiv 1 \pmod 8$$

ដូច្នេះ

$$n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_{1997}^2 \equiv 1997 \equiv 5 \pmod 8$$
$$n_{1998}^2 \equiv 1 \pmod 8$$

ដូច្នេះសមភាព $n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_{1997}^2 = n_{1998}^2$ មិនអាចផ្ទៀងផ្ទាត់បានទេ។ មានន័យថា $n_1, n_2, \dots, n_{1997}$ មិនអាចជាលេខសេសទាំងអស់ទេ។

♐

វិញ្ញាសាឆ្នាំ ១៩៩៨

1. ចូរបង្ហាញថា ចំនួន $\underbrace{111\ldots11}_{1997}\underbrace{22\ldots22}_{1998}5$ (ដែលមានលេខ 1 ចំនួន 1997 ដង និង លេខ 2 ចំនួន 1998 ដង) ជាចំនួនការេ ។

2. តាង $ABCDE$ ជាបញ្ចកោណប៉ោងដែល $AB = AE = CD = 1, \angle ABC = \angle DEA = 90°$ និង $BC + DE = 1$ ។ ចូរគណនាក្រឡាផ្ទៃបញ្ចកោណ។

3. ចូរគណនាគ្រប់គូចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x, y) ដែល

$$x^y = y^{x-y}$$

4. តើអាចមានឬទេនូវ លេខបីខ្ទង់ចំនួន 16 ផ្សេងគ្នា ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ចំនួនទាំង 16 មានសំណល់ផ្សេងគ្នាទាំងអស់ពេលចែកនឹង 16 និង ចំនួនទាំង16 នេះ ប្រើតែតួលេខ ចំនួនបីតែប៉ុណ្ណោះ។

ꩰ

ដំណោះស្រាយ

$\boxed{\mathbf{1.}}$ តាង

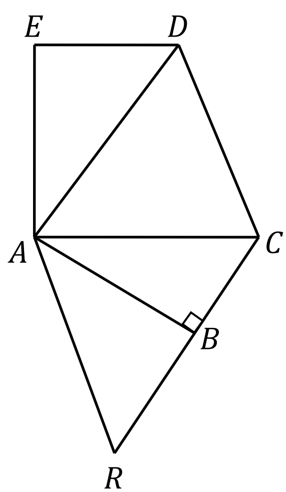
$$A = \underbrace{111 \ldots 11}_{1997}\underbrace{22 \ldots 22}_{1998}5$$

យើងទាញបាន

$$\begin{aligned}
A &= (10^{1996} + 10^{1995} + \cdots + 10 + 1) \times 10^{1999} + 2(10^{1997} + 10^{1996} + \cdots + 10 + 1) \times 10 \\
&\quad + 5 \\
&= 10^{1999}\frac{10^{19997} - 1}{9} + 20\frac{10^{1998} - 1}{9} + 5 \\
&= \frac{(10^{1998})^2 + 10.10^{1998} + 25}{9} \\
&= \left(\frac{10^{1998} + 5}{3}\right)^2
\end{aligned}$$

ដោយ A ជាចំនួនគត់ ដូច្នេះ $\frac{10^{1998}+5}{3}$ ត្រូវតែជាចំនួនគត់ដែរ។ ដូច្នេះ A ជាចំនួនការេ។

$\boxed{\mathbf{2.}}$ យើងពិនិត្យចំណុច R មួយបិតនៅលើបន្ទាត់ CB ដែល $BR = DE$ ។ ដូច្នេះ $CR = BR + BC = DE + BC = 1$ ។ ត្រីកោណ ABR និង AED ប៉ុនគ្នា ព្រោះមានមុំកែងដូចគ្នា និងមានជ្រុង $AB = AE, BR = ED$។ ដូច្នេះ $AR = AD$ ។ ដោយ $CD = CR = 1$ នោះត្រីកោណ ACD និង ACR ក៏ប៉ុនគ្នាដែរ។



រូបទី 1 : សំនួរទី 2

ដូច្នេះ

$$\begin{aligned} S_{ABCDE} &= S_{ABC} + S_{ADE} + S_{ACD} \\ &= S_{ABC} + S_{ABR} + S_{ACD} \\ &= 2\, S_{ARC} = CR.AB = 1 \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ ដោយ $x^y \in \mathbb{N}$ នោះ $x^y = y^{x-y} \Rightarrow x \geq y$ ។ ករណី $x = y$ យើងទាញបាន $x = y = 1$ ។ ករណី $x > y$ និង ចំពោះ $x, y \neq 1 \Rightarrow x > y \geq 2$ យើងមាន x មានរាង $x = y^n$ ដែល $n \in \mathbb{N}, n > 1$ ។ យើងទាញបាន

$$\begin{aligned} & y^{yn} = y^{y(y^{n-1}-1)} \\ \Longrightarrow\ & n = y^{n-1} - 1 \\ \Longrightarrow\ & n + 1 = y^{n-1} \geq 2^{n-1} \end{aligned}$$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 4$ យើងមាន $n + 1 \leq 2^{n-1}$ ដូច្នេះ $n < 4$ ។

ចំពោះ $n = 3$ យើងទាញបាន $y = 2;\ x = 8$

ចំពោះ $n = 2$ យើងទាញបាន $y = 3;\ x = 9$

ដូច្នេះសមីការមានចម្លើយ $(x, y) = (1,1); (8,2); (9,2)$ ។

$\boxed{\textbf{4.}}$ តាងតួលេខដែលយកមកបង្កើតចំនួនទាំង16 ដោយ x, y, z ។ ជាលេខពីលេខ 1 ដល់លេខ 9។ ចំនួនទាំង 16 ដែលបង្កើតឡើងដោយ x, y, z គឺ $\overline{xyz}$ ។ ចំនួនទាំង 16 នោះត្រូវតែមានរាង $16m_1, 16m_2 + 1, \dots, 16m_{16} + 15$ ដើម្បីឱ្យវាមានសំណល់ផ្សេងគ្នាពេលចែកនឹង 16។ យើងឃើញថា x, y, z មិនអាចសេសទាំងអស់ឬគូទាំងអស់បានទេ ព្រោះបើមិនអញ្ចឹងទេ យើងមិនអាចរកបានសំណល់ខុសគ្នាគ្រប់16 បានទេ(ព្រោះបើ x, y, z គូទាំងអស់ ចំនួនទាំងនេះត្រូវតែជាចំនួនគូ ដូច្នេះវាមានរាង $16m_1, 16m_2 + 2, \dots, 16m_{16} + 14$ អាចមានសំណល់ខុសគ្នាច្រើនបំផុតចំនួន 8។ បើសេសទាំងអស់ ចំនួនទាំងនេះត្រូវមាន រាង $16m_1 + 1, 16m_2 + 3, \dots, 16m_{16} + 15$ អាចមានសំណល់ខុសគ្នាច្រើនបំផុតចំនួន8។)។ ដូច្នេះក្នុងចំណោម x, y, z ត្រូវតែមានយ៉ាងហោចណាស់លេខគូមួយនិងយ៉ាងហោចលេខសេសមួយ។ ជាដំបូងយើងសន្មតថាមានលេខសេសមួយនិងលេខគូពីរ។ ដូច្នេះសំណល់ជាចំនួនសេសទាំង 8 (សំណល់ដែលស្មើ $1, 3, \dots, 15$)ត្រូវតែបានមកពីលេខសេសដែលកើតមកពីការដាក់តួលេខសេសមួយនេះនៅខាងចុង។ តាងបណ្តាលេខបែបនេះដោយ $\overline{xyz}$ ដែល z ជាតួលេខសេស។ យើងមាន $\overline{xyz} = \overline{xy}.10 + z$ ឱ្យសំណល់សេសចំនួន 8 ផ្សេងគ្នាពេលពេលចែកនឹង 16 ដូច្នេះ $\overline{xy}.10$ ត្រូវឱ្យសំណល់គូខុសៗគ្នាចំនួនយ៉ាងហោចណាស់ក៏ 8 ដែរ ពេលចែកនឹង16 ព្រោះ z ឱ្យសំណល់សេសរួចហើយ។ យើងមាន 9 របៀបក្នុងការជ្រើសរើសលេខពីរខាងដើមមកផ្គុំជា

$\overline{xy}$ (ព្រោះលេខខ្ទង់ទីមួយមានបីករណី គឺ x, y, z ហើយខ្ទង់ទីពីរបានបីករណីដែរគឺ x, y, z។ លេខទាំងនោះមានដូចជា $\overline{xxz}, \overline{xyz}, \overline{zxz}$, ...)។ ចំនួនទាំង9នោះត្រូវតែមានរាង $16n_1, 16n_2 + 2, \dots, 16n_8 + 14$ ដើម្បីឱ្យវាមានសំណល់គូផ្សេងគ្នាយ៉ាងហោចណាស់ចំនួន 8 ពេលចែកនឹង 16 ។ ដូច្នេះបន្ទាប់ពីចែកនឹង 2 រួចហើយ ពួកវាមានរាង $8n_1, 8n_2 + 1, \dots, 8n_8 + 7$ ។ មានន័យថា ក្នុងចំណោមចំនួនគូ9នោះ ត្រូវមាន4 ដែលឱ្យសំណល់សេសពេលចែកនឹង8 (សំណល់របស់ $8n_2 + 1, 8n_4 + 3$, ... ,$8n_8 + 7$)។ មិនអាចព្រោះ $\overline{xy}$ គូ។ ស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នាករណីមានលេខសេសពីរនិងលេខគូមួយ។

♑

វិញ្ញាសាឆ្នាំ ១៩៩៩

1. តាង a,b,c,x,y ជាចំនួនពិតប្រាំដែល $a^3+ax+y=0, b^3+bx+y=0$ និង $c^3+cx+y=0$ ។ បើ a,b,c ជាចំនួនខុសគ្នាទាំងអស់ ចូរបង្ហាញថា ផលបូករបស់វាស្មើសូន្យ។

2. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន n យើងតាង $A_n = 2^{3n}+3^{6n+2}+5^{6n+2}$ ។ ចូរកំណត់តួចែករួមធំបំផុតរបស់ $A_0, A_1, \dots, A_{1999}$ ។

3. តាង S ជាការេមួយដែលមានរង្វាស់ជ្រុង 20 និង តាង M ជាសំណុំនៃចំណុចដែលកើតមកពីកំពូលរបស់ S និងចំណុចចំនួន 1999 ផ្សេងទៀតឋិតនៅខាងក្នុង S ។ ចូរបង្ហាញថា មានត្រីកោណមួយ ដែលកំពូលឋិតក្នុងសំណុំ M និងមានក្រឡាផ្ទៃយ៉ាងច្រើនស្មើនឹង $1/10$ ។

4. តាង ABC ជាត្រីកោណមួយ ដែល $AB = AC$ ។ តាង $D \in [BC]$ ជាចំណុចមួយដែល $BC > BD > DC > 0$ និងតាង C_1, C_2 ជារង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABD និង ADC រៀងគ្នា។ តាង BB' និង CC' ជាអង្កត់ផ្ចិតរបស់រង្វង់ទាំងពីរ និងតាង M ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $B'C'$ ។ ចូរបង្ហាញថា ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ MBC មានតម្លៃថេរ (មានន័យថា វាមិនអាស្រ័យនឹងជម្រើសនៃចំណុច D ទេ)។

ដំណោះស្រាយ

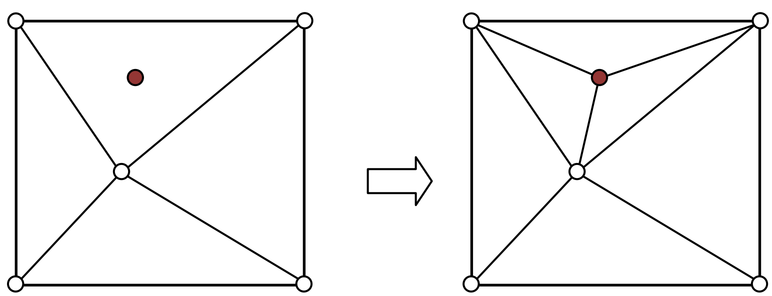
1. ដោយ a,b,c ជាចំនួនពិតខុសៗគ្នា ដូច្នេះពួកវាជាឫសពិតនៃសមីការ $t^3 + xt + y = 0$ ។ ផលបូកឫសទាំងបីនៃសមីការនេះស្មើសូន្យ។ ដូច្នេះ $a + b + c = 0$ ។

2. យើងមាន $A_0 = 35 = 7.5$, $A_1 = 2^3 + 3^8 + 5^8 \equiv 3 + 1 = 4 \pmod 5$ ។ ដូច្នេះ 5 មិនមែនជាតួចែករបស់ A_1 ទេ។ យើងមាន

$$5^{6n} = 25^{3n} \equiv 4^{3n} = 64^n \equiv 1 \pmod 7$$
$$3^{6n} = 27^{2n} \equiv 1 \pmod 7$$

ដូច្នេះ $A_n \equiv 1 + 9 + 25 = 35 \equiv 0 \pmod 7$ មានន័យថា 7 ជាតួចែករបស់គ្រប់ A_n ។ ដូច្នេះ $PGCD$ របស់ចំនួនអស់នេះស្មើនឹង 7 ។

3. យើងរាប់ចំនួនត្រីកោណដែលមិនត្រួតពីលើគ្នាតាមបែបដូចតទៅនេះ។ ចំពោះចំណុចមួយ យើងមានត្រីកោណបួនដែលភ្ជាប់ពីចំណុចនេះទៅកំពូលទាំងបួនរបស់ការេ។ រាល់លើក ពេលយើងបន្ថែមចំណុចមួយទៀត បើចំណុចនោះឋិតនៅក្នុងត្រីកោណដែលមានស្រាប់ យើងចែកត្រីកោណនោះជាបី។ យើងថែមបានត្រីកោណចំនួន2 ទៀត ព្រោះដកត្រីកោណចាស់មួយចោល។

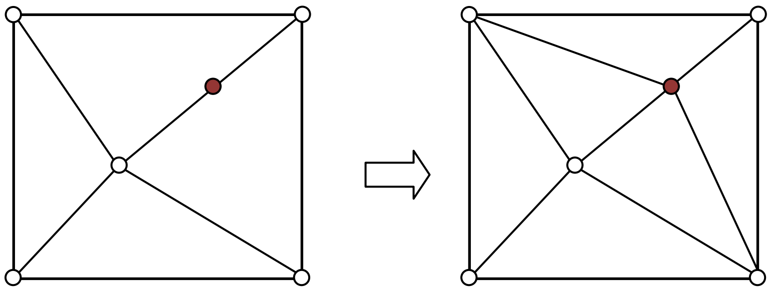


ត្រីកោណ 4 ត្រីកោណ $4 + 2 = 6$

រូបទី 1 : សំនួរទី 3

បើចំណុចដែលត្រូវថែមឋិតនៅលើជ្រុងរួមនៃត្រីកោណមានស្រាប់ចំនួនពីរ នោះយើងចែកត្រីកោណនោះជាត្រីកោណពីរតូចៗ។ យើងថែមបានត្រីកោណចំនួន2 ទៀត ។

តាមរបៀបខាងលើនេះ ពេលថែមចំណុចមួយយើងថែមបានត្រីកោណចំនួន 2 ។ ដូច្នេះចំពោះចំណុចមាន 1999 យើងមានត្រីកោណមិនត្រួតគ្នាចំនួន $4 + 2.1998 = 4000$ ។



ត្រីកោណ 4 ត្រីកោណ $4+2=6$

រូបទី 2 : សំនួរទី 3

ក្រឡាផ្ទៃសរុបស្មើនឹង 400 ដូច្នេះជាមធ្យម ត្រីកោណមួយមានក្រឡាផ្ទៃ $400/4000 = 1/10$ ។ បើត្រីកោណទាំងអស់ សុទ្ធតែមានក្រលាផ្ទៃធំជាង $1/10$ នោះក្រឡាផ្ទៃសរុបនឹងធំជាង $4000.1/10 = 400$: មិនត្រឹមត្រូវ។ ដូច្នេះត្រូវមានយ៉ាងហោចណាស់ត្រីកោណមួយដែលមានក្រលាផ្ទៃយ៉ាងច្រើន $1/10$ ។

4. តាមទ្រឹស្ដីបទស៊ីនុស

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

ចំពោះត្រីកោណ ABD និង ត្រីកោណ ADC យើងទាញបាន

$$2R_1 = \frac{AB}{\sin \angle ADB}$$

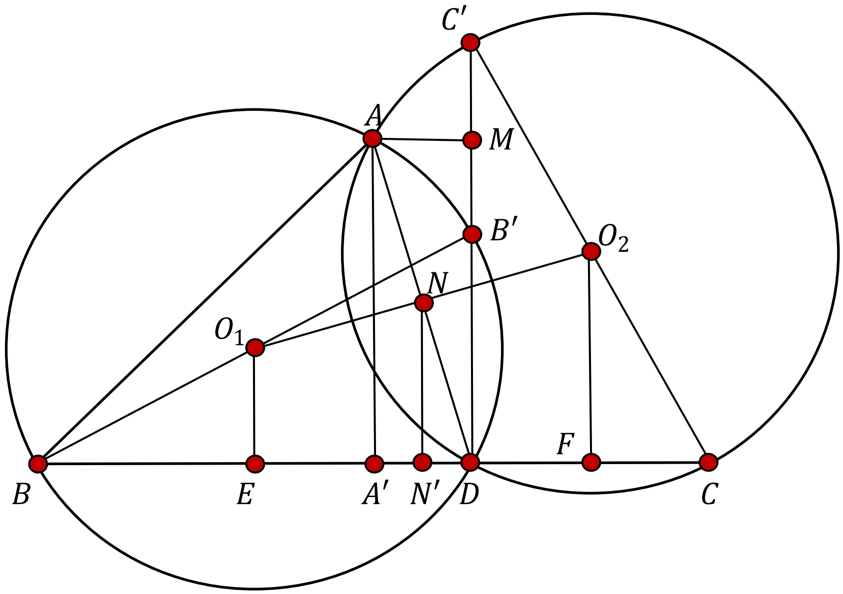
$$2R_2 = \frac{AC}{\sin \angle ADC} = \frac{AB}{\sin(\pi - \angle ADB)} = \frac{AB}{\sin \angle ADB} = 2R_2$$

ដូច្នេះ $R_1 = R_2$ ដែល R_1, R_2 ជាកាំរង្វង់C_1, C_2 រៀងគ្នា។ ដូច្នេះរង្វង់ទាំងពីរប៉ុនគ្នា ហើយចតុកោណ AO_1DO_2 ជាប្រលេឡូក្រាមស្មើ។

ត្រីកោណ $C'DC$ កែងត្រង់ D ព្រោះចារឹកកន្លះរង្វង់។ ត្រីកោណ $B'DB$ កែងត្រង់ D ព្រោះចារឹកកន្លះរង្វង់។ ដូច្នេះ D, B', C' រត់ត្រង់គ្នា។ M កណ្ដាល $B'C'$ ដូច្នេះ

$$DM = \frac{DB' + DC'}{2}$$

តាង N ជាចំណុចប្រសព្វអង្កត់ទ្រូងរបស់ប្រលេឡូក្រាមស្មើ AO_1DO_2 និង តាង E, A', N', F ជាចំណោលកែងរបស់ចំណុច O_1, A, N, O_2 លើបន្ទាត់ BC រៀងគ្នា។ អង្កត់ O_1E និង O_2F ជាបាតមធ្យមរបស់ត្រីកោណ $BB'D$ និង CDC' រៀងគ្នា។



រូបទី 3 : សំនួរទី 4

ដូច្នេះយើងមាន

$$DM = \frac{DB^{'} + DC^{'}}{2} = \frac{2EO_1 + 2FO_2}{2} = EO_1 + FO_2$$

ដោយអង្កត់ NN' ជាបាតមធ្យមរបស់ចតុកោណញ្ញយ EFO_2O_1 និង ត្រីកោណ ADA' នោះ

$$NN^{'} = \frac{EO_1 + FO_2}{2} = \frac{DM}{2}$$

$$NN^{'} = \frac{AA^{'}}{2}$$

$$\Longrightarrow AA^{'} = DM$$

ដូច្នេះ

$$S_{MBC} = \frac{MD.BC}{2} = \frac{AA^{'}.BC}{2} = S_{ABC}$$

ដូច្នេះក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ MBC មានតម្លៃថេរ។

វិញ្ញាសាឆ្នាំ ២០០០

1. តាង x និង y ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល

$$x^3 + y^3 + (x+y)^3 + 30xy = 2000$$

ចូរបង្ហាញថា $x + y = 10$ ។

2. ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 1$ ដែល $n^2 + 3^n$ ជាចំនួនការេ។

3. កន្លះរង្វង់មួយមានអង្កត់ផ្ចិត EF ត្រូវបានដាក់លើជ្រុង BC របស់ត្រីកោណABC ហើយវាប៉ះនឹងជ្រុង AB និង AC ត្រង់ចំនុច Q និង P រៀងគ្នា។ ចូរបង្ហាញថា ចំណុចប្រសព្វ K រវាងបន្ទាត់ EP និង FQ ឋិតនៅលើកម្ពស់គូសចេញពី A របស់ត្រីកោណ ABC ។

4. ការប្រកួតតេន្នីសមួយ មានប្រុស $2n$ នាក់ និងស្រី n នាក់ចូលរួមលេង។ កីឡាករម្នាក់ៗប្រកួតជាមួយគ្រប់កីឡាករផ្សេងទៀត។ ប្រុសឈ្នះ 5/7 ដងធៀបនឹងស្រី។ ដោយដឹងថា គ្មានគូប្រកួតណាស្មើគ្នាទេ។ ចូរកំណត់ n ។

♓

ដំណោះស្រាយ

$\boxed{\textbf{1.}}$ សមមភាពសមមូលនឹង

$$[x^3+y^3-10^3+30xy]+\ [(x+y)^3-10^3]=0$$

ដោយដឹងថា

$$\begin{aligned} x^3+y^3-10^3+30xy &= (x+y)^3-10^3-3xy(x+y)+30xy \\ &= (x+y-10)[(x+y)^2+10(x+y)+100]-3xy(x+y-10) \\ &= (x+y-10)[(x+y)^2+10(x+y)+100-3xy] \end{aligned}$$

$$(x+y)^3-10^3=(x+y-10)[(x+y)^2+10(x+y)+100]$$

$$\begin{aligned} &[x^3+y^3-10^3+30xy]+\ [(x+y)^3-10^3] \\ &=(x+y-10)[2(x+y)^2+20(x+y)+200-3xy] \\ &=(x+y-10)[2x^2+2y^2+20(x+y)+xy+200] \end{aligned}$$

យើងមាន $2x^2+2y^2+20(x+y)+xy+200>0$ ព្រោះ x,y វិជ្ជមាន។ ដូច្នេះ ផលគុណ $(x+y-10)[2x^2+2y^2+20(x+y)+xy+200]$ ស្មើសូន្យទាល់តែ $x+y=10$ ។

$\boxed{\textbf{2.}}$ តាង $n^2+3^n=a^2 \Longrightarrow 3^n=(a-n)(a+n)$ ។ តាង

$$a-n=3^x;\ a+n=3^y;\ x<y\ \Longrightarrow \begin{cases} n=x+y \\ 2n=3^y-3^x \end{cases}$$

យើងដឹងថា

$$\begin{cases} 3^y-3^x\geq 3^y-3^{y-1}=2.3^{y-1} \\ n=x+y\ \leq y-1\ +y\ =2y-1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow 2.3^{y-1}\leq 2n\ \leq 2(2y-1)$

$\Longrightarrow\ 3^{y-1}\leq 2y-1$

តាង $p=y-1$ ដូច្នេះ $3^p\leq\ 2p+1$ ។ តែតាមវិសមភាពប៊ែនូលី* ចំពោះ $p\ >\ 1$ យើងមាន $3^p\ >\ 2p+1$ ។ ដូច្នេះ ចំពោះ $p=1$ យើងទាញបាន $y=2$ ។ ចំពោះ $x=1$ យើងទាញបាន $n=3$ ផ្ទៀងផ្ទាត់។ ចំពោះ $x=0$ យើងទាញបាន $n=2$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់។

ចំពោះ $p=0$ យើងទាញបាន $y=1$ និង $x=0$ យើងទាញបាន $n=1$ ផ្ទៀងផ្ទាត់។

ចម្លើយ $n=1;\ n=3$ ។

3. តាង O ជាផ្ចិតរបស់កន្លះរង្វង់ និង តាង H ជាចំណោលកែងរបស់ចំណុច K ទៅលើជ្រុង BC ។ យើងពិនិត្យករណី O ឋិតលើអង្កត់ HF ។ មុំ $\angle EPF$ ស្កាត់អង្កត់ផ្ចិតរបស់កន្លះរង្វង់ ដូច្នេះជាមុំកែងដូច $\angle KHF$ ដែរ។ ដូច្នេះចតុកោណ $KHFP$ ចារឹកក្នុងរង្វង់ ហើយ

$$\angle KHP = \angle KFP$$

ចំពោះកន្លះរង្វង់ផ្ចិត O យើងមាន $\angle QFP = \frac{1}{2}QOP$ ដូច្នេះ

$$\angle KHP = \angle KFP = \frac{1}{2}QOP$$

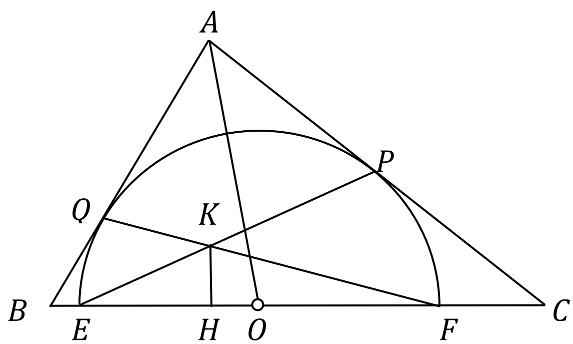
យើងមាន $OP \perp AC$ និង $OQ \perp AB$ ដូច្នេះត្រីកោណ AOP និង AOQ ជាត្រីកោណកែង ហើយមាន $OP = OQ$ ដូច្នេះ

$$\angle AOP = \angle AOQ = \frac{1}{2}\angle QOP = \angle KHP$$

$\angle PHO = 90^{\circ} - \angle KHP; \angle PAO = 90^{\circ} - \angle AOP$

$\Longrightarrow\ \angle PHO = \angle PAO$

$\Longrightarrow$ ចតុកោណ $APOH$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់។ ដូច្នេះមុំ $\angle AHO$ ក៏ជាមុំកែងដែរ $\Longrightarrow AH \perp BC \ \Longrightarrow K \in AH$ ។



រូបទី 1 : សំនួរទី 3

ករណី $O \in [EH]$ យើងស្រាយបញ្ជាក់ដូចគ្នា។

ករណី $H \equiv O$ នោះត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត។ ដូច្នេះសំណើពិត។

4. កីឡាករសរុបមានចំនួន $3n$ នាក់។ ចំនួនប្រកួតសរុបមាន

$$\binom{3n}{2} = \frac{3n(3n-1)}{2}$$

យើងដឹងថា ក្នុង 12 ប្រកួតប្រុសឈ្នះ 5 ដង ស្រីឈ្នះ 7 ដង។ ដូច្នេះចំនួនប្រកួតដែលប្រុសឈ្នះមានចំនួន

$$\frac{5}{12}\frac{3n(3n-1)}{2}=\frac{5n(3n-1)}{8}$$

ចំនួនប្រកួតប្រុសនឹងប្រុសមានចំនួន

$$\binom{2n}{2}=\frac{2n(2n-1)}{2}=n(2n-1)$$

ក្នុងការប្រកួតមួយរវាងប្រុសនឹងប្រុស ត្រូវតែមានប្រុសម្នាក់ឈ្នះ ព្រោះគ្មានអ្នកស្មើ។ ដូច្នេះក្នុងការប្រកួតរវាងប្រុសនឹងប្រុស ទាំង $n(2n-1)$ ប្រកួតនេះ មានប្រុសឈ្នះទាំងអស់។ ដូច្នេះ

$$\frac{5n(3n-1)}{8}\geq n(2n-1)$$
$$\Longrightarrow 15n-5\geq 16n-8$$
$$\Longrightarrow n\leq 3$$

បន្ទាប់មកទៀត យើងដឹងថា $5n(3n-1)/8$ ត្រូវតែជាចំនួនគត់។ ដូច្នេះ មានតែ $n=3$ ។ ដូច្នេះមានប្រុសចំនួន 6 នាក់ និងស្រី 3 នាក់ ហើយជាសរុបមានកីឡាករ 9 នាក់។

សម្គាល់

*** វិសមភាពប៊ែនូលី**

ចំពោះគ្រប់ $x\geq -1$ និង ចំនួនគត់ $n\geq 0$ គេមាន $(1+x)^n\geq 1+nx$ ។

♓

វិញ្ញាសាឆ្នាំ ២០០១

1. ដោះស្រាយសមីការ $a^3 + b^3 + c^3 = 2001$ ក្នុងសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

2. តាង ABC ជាត្រីកោណដែលមាន $\angle ACB = 90°$ និង $CA \neq CB$ ។ តាង CH ជាកម្ពស់ និង CL ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុង។

a) ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $X \neq C$ ឋិតនៅលើបន្ទាត់ CL យើងមាន $\angle XAC \neq \angle XBC$ ។

b) ចូរបង្ហាញផងដែរថា ចំពោះ $Y \neq C$ ឋិតលើបន្ទាត់ CH យើងមាន $\angle YAC \neq \angle YBC$ ។

3. តាង ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស និង D, E ជាចំណុចមួយឋិតលើជ្រុង $[AB]$ និង $[AC]$ រៀងគ្នា។ បើ DF, EG (ដែល $F \in AE, G \in AD$) ជាអង្កត់ពុះមុំក្នុងនៃត្រីកោណ ADE ចូរបង្ហាញថា ផលបូកក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ DEF និង DEG យ៉ាងច្រើនស្មើនឹងក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។ តើវាស្មើគ្នាពេលណា?។

4. តាង N ជាពហុកោណប៉ោងដែលមានកំពូលចំនួន 1415 មានបរិមាត្រ 2001 ។ ចូរបង្ហាញថា យើងអាចរកបានកំពូលបីនៃ N ដែលបង្កើតបានជាត្រីកោណមួយ ដែលមានក្រឡាផ្ទៃតូចជាង 1 ។

♈

ដំណោះស្រាយ

$\boxed{1.}$ ដោយសមីការគ្មានលក្ខណៈពិសេសណាមួយទាក់ទងនឹងលំដាប់របស់ a,b,c ដំបូងយើងសន្មតថា $a \leq b \leq c$ ។ យើងមាន $1^3+10^3+10^3=2001$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា $(1,10,10)$ ជាឫសតែមួយគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a \leq b \leq c$ ។

ជាដំបូងយើងស្រាយបញ្ជាក់បទគន្លឹះមួយសិន

បទគន្លឹះ៖ បើ n ជាចំនួនគត់ នោះ n^3 ពេលចែកនឹង 9 សល់ 0,1 ឬ −1 ។

បើ $n=3k$ *នោះ* $9|n^3$ ។

បើ $n=3k\pm 1$ *នោះ* $n^3=27k^3\pm 27k^2+9k\pm 1\ \equiv \pm 1 \pmod 9$

ដោយ $2001=9.222+3\equiv 3 \pmod 9$ នោះ

$a^3+b^3+c^3=2001\ \Longrightarrow a^3\equiv 1 \pmod 9;\ b^3\equiv 1 \pmod 9;\ c^3\equiv 1 \pmod 9;$ ។ ដូច្នេះ a,b,c ជាចំនួនដែលមានរាង $3k+1$ ។ យើងនឹងតម្លៃរបស់ a,b,c ក្នុងសំណុំ $\{1,4,7,10,13,\dots\}$ ។

បើ $c\geq 13$ នោះ $c^3\geq 2197>2001=a^3+b^3+c^3$ មិនពិត។

បើ $c\leq 7$ នោះ $2001=a^3+b^3+c^3\leq 3.7^3=1029$ មិនពិត។ ដូច្នេះ $c=10$។ យើងទាញបាន $a^3+b^3=1001$ ។ បើ $b<c=10$ នោះ $a\leq b\leq 7$ នោះ $1001=a^3+b^3\leq 2.7^3=686$ មិនពិត។ ដូច្នេះ $b=10$ ហើយ $a=1$ ។

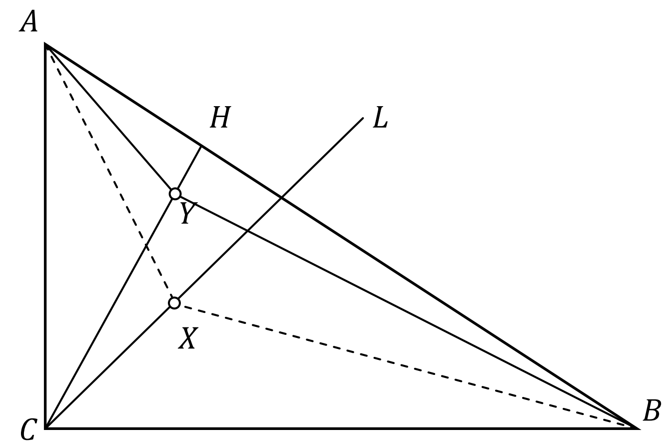
ដូច្នេះ $(a,b,c)\in\{(1,10,10),(10,1,10),(10,10,1)\}$ ។

$\boxed{2.}$ a)បើ $\angle XAC=\angle XBC$ នោះ ត្រីកោណ XAC ប៉ុនត្រីកោណ XBC ដូច្នេះ $AC=BC$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម។ ដូច្នេះ $\angle XAC\neq\angle XBC$ ។

b) សន្មតផ្ទុយពីសំណើថា មាន Y ឋិតលើបន្ទាត់ CH ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\angle YAC=\angle YBC$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស

$$\frac{CY}{\sin\angle CAY}=2R_1;\frac{CY}{\sin\angle CBY}=2R_2$$
$$\Longrightarrow R_1=R_2$$

យើងទាញបាន រង្វង់ C_1 មានកាំ R_1 និង C_2 មានកាំ R_2 ចារឹកក្រៅត្រីកោណ AYC និង BYC មានទំហំប៉ុនគ្នា។ ដូច្នេះ $AH=BH$ (ព្រោះ $AB\perp CY$)ដូច្នេះត្រីកោណ ACB ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល C ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម។



រូបទី 1 : សំនួរទី 2

3. យើងមាន

$$\begin{aligned}\angle AGE &= \angle ADE + \angle GED = \angle ADE + \frac{1}{2}\angle DEA\\ &= \angle ADE + \frac{1}{2}[180° - \angle ADE - \angle DAE]\\ &= \angle ADE + \frac{1}{2}[180° - \angle ADE - 60°]\\ &= 60° + \frac{1}{2}\angle ADE\end{aligned}$$

និង

$$\angle DFE = \angle ADF + \angle DAF = \frac{1}{2}\angle ADE + 60°$$
$$\Longrightarrow\ \angle AGE = \angle DFE \qquad (1)$$

តាង I ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (DF) និង (EG) និង តាង M ជាចំណុចមួយឋិតនៅលើអង្កត់ $[DE]$ ដែល $\angle DIM = \angle DIG$ ។ ដូច្នេះ $\Delta DIM \equiv \Delta DIG$ យើងទាញបាន

$$DM = DG, \qquad (2)$$
$$\angle DMI = \angle DGI \qquad (3)$$

តាម (3) យើងទាញបាន $\angle IME = \angle AGI = \angle AGE$ ហើយតាម (1) ថែមទៀត យើងទាញបាន $\angle IME = \angle AGI = \angle AGE = \angle DFE$ ។ ដូច្នេះ $\angle IME = \angle DFE \Longrightarrow \Delta IME \equiv IFE$

$$\Longrightarrow ME = FE \qquad (4)$$

តាម (2) និង (4) យើងទាញបាន

$$DE = DM + ME = DG + EF \qquad (5)$$

រង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ADE មានផ្ចិត I ហើយមានកាំតាងដោយ r ។ តាម (5) យើងមាន

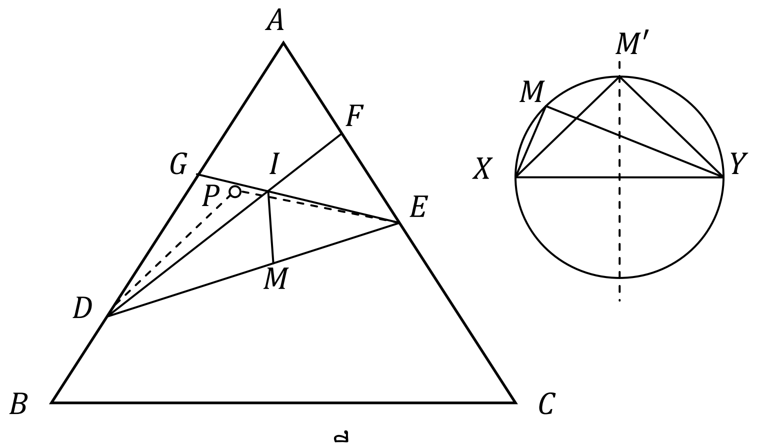
$$S_{IDG} + S_{IEF} = \frac{1}{2}r.DG + \frac{1}{2}r.EF = \frac{1}{2}r.(DG + EF) = \frac{1}{2}r.DE = S_{IDE}$$

ដូច្នេះ

$$S_{DEG} + S_{DEF} = S_{IDG} + S_{IDE} + S_{IDE} + S_{IEF} = 3S_{IDE} \quad (6)$$

យើងដឹងថា បើ M ជាចំណុចមួយឋិតនៅលើធ្នូ XY (M ប្រែប្រួលដោយរក្សា $\angle XMY$ ថេរ) នោះក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ MXY ធំបំផុតពេល M ឋិតនៅចំកណ្តាលធ្នូ XY ។

ដូច្នេះ បើ I ប្រែប្រួលដោយរក្សា $\angle DIE$ ថេរ នោះក្រឡាផ្ទៃ DIE ធំបំផុតពេល $I \equiv P$ ដែល $PD = PE, \angle DPE = \angle DIE$ ឬ $S_{IDE} \leq S_{PDE}$ ។



រូបទី 2 : សំនួរទី 3

យើងមាន $\angle DIE = 180° - \angle IDE - \angle IED = 180° - \frac{1}{2}(\angle ADE + \angle AED) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle DAE) = 180° - \frac{1}{2}(180° - 60°) = 120°$ ។ ដូច្នេះត្រីកោណសមបាត DPE មាន $\angle DPE = 120°$ ។

តាង O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ។ ដូច្នេះ $\angle BOC = 2\angle BAC = 120°$ ។ យើងទាញបានត្រីកោណ ΔDPE និង ΔBOC ដូចគ្នា។ ដូច្នេះ $S_{DPE} \leq S_{BOC}$ ដោយអង្គទាំងពីរស្មើគ្នាពេល $D \equiv B; E \equiv C$។ យើងទាញបាន

$$S_{IDE} \leq S_{BOC} \quad (7)$$

តាម (6) និង (7) យើងទាញបាន

$$S_{DEG} + S_{DEF} = 3S_{IDE} \leq 3S_{BOC} = S_{ABC}$$

ដូច្នេះសំណើពិត។ សមភាពកើតឡើងពេល $D \equiv B$ និង $E \equiv C$ ។

4. ពហុកោណប៉ោងមាន 1415 ជ្រុង ហើយមានបរិមាត្រ 2001 ។ តាង $A_1,\ A_2,\ \ldots\ ,\ A_{1415}$ ជាកំពូលរបស់ពហុកោណ។ យើងសន្មតថា ត្រីកោណទាំងអស់ដែលកើតឡើងដោយកំពូលបីតរៀង

គ្នារបស់ពហុកោណ មាន $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4, \dots$, $A_{1414}A_{1415}A_1$, $A_{1415}A_1A_2$ សុទ្ធតែមានក្រឡាផ្ទៃធំជាង 1 ទាំងអស់។

ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយយើងមាន

$$2S_{ABC} = AB.AC.\sin\angle BAC \le AB.AC$$

ដូច្នេះ $2 \le 2S_{A_1A_2A_3} \le A_1A_2.A_2A_3$ ។ ហើយតាមវិសមភាពកូស៊ី យើងទាញបាន

$$A_1A_2 + A_2A_3 \ge 2\sqrt{A_1A_2.A_2A_3} \ge 2\sqrt{2}$$

ដូចគ្នា យើងទាញបាន

$$A_2A_3 + A_3A_4 \ge 2\sqrt{2}$$
$$\dots$$
$$A_{1414}A_{1415} + A_{1415}A_1 \ge 2\sqrt{2}$$
$$A_{1415}A_1 + A_1A_2 \ge 2\sqrt{2}$$

បូកវិសមភាពទាំង 1415 នេះបញ្ចូលគ្នា យើងទាញបាន

$$2(A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{1414}A_{1415} + A_{1415}A_1) \ge 1415.2\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow 2.2001 \ge 1415.2\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow 4004001 \ge 4004450$$

មិនពិត។ ដូច្នេះក្នុងចំណោមត្រីកោណទាំងអស់ដែលកើតឡើងដោយកំពូលបីតរៀងគ្នារបស់ពហុកោណ ត្រូវតែមានយ៉ាងហោចណាស់មួយ ដែលមានក្រឡាផ្ទៃតូចជាង 1 ។

♈

វិញ្ញាសាឆ្នាំ ២០០២

1. ត្រីកោណ ABC មាន $CA = CB$ ។ P ជាចំណុចមួយឋិតលើរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ នៅចន្លោះ A និង B (ហើយឋិតនៅម្ខាងម្នាក់នៃ C ធៀបនឹង AB)។ D ជាចំណោលកែងពីចំណុច C ទៅលើ PB ។ ចូរបង្ហាញថា $PA + PB = 2PD$ ។

2. រង្វង់ពីរមានផ្ចិត O_1 និង O_2 កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច A និង B ដែលផ្ចិតរបស់រង្វង់ទាំងពីរឋិតនៅម្ខាងម្នាក់នៃបន្ទាត់ AB ។ បន្ទាត់ BO_1 និង BO_2 កាត់រង្វង់របស់ខ្លួនម្តងទៀតត្រង់ B_1 និង B_2 ។ តាង M ជាចំណុចកណ្តាលនៃ B_1B_2 ។ តាង M_1, M_2 ជាចំណុចឋិតលើរង្វង់ដែលមានផ្ចិត O_1 និង O_2 រៀងគ្នា ដែល $\angle AO_1M_1 = \angle AO_2M_2$ និង B_1 ឋិតលើធ្នូតូច AM_1 រីឯ B ឋិតលើធ្នូតូច AM_2 ។ ចូរបង្ហាញថា $\angle MM_1B = \angle MM_2B$ ។

3. ចូររកគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន N ដែលមានតួចែកវិជ្ជមានចំនួន 16 គត់ គឺ $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{16} = N$ ដែលតួចែក d_k ស្មើនឹង $(d_2 + d_4)d_6$ ចំពោះ $k = d_5$ ។

4. ចូរបង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c វិសមភាពខាងក្រោមពិត

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

♉

ដំណោះស្រាយ

$\boxed{1.}$ បន្លាយអង្កត់ PB ឱ្យបានអង្កត់ $BM = AP$ ។ យើងមាន

$\angle ACP = \angle ABP;\ \angle APC = \angle CBA$
$\angle CBM = 180° - \angle CBA - \angle ABP$
$\angle PAC = 180° - \angle ACP - \angle APC = 180° - \angle ABP - \angle CBA$

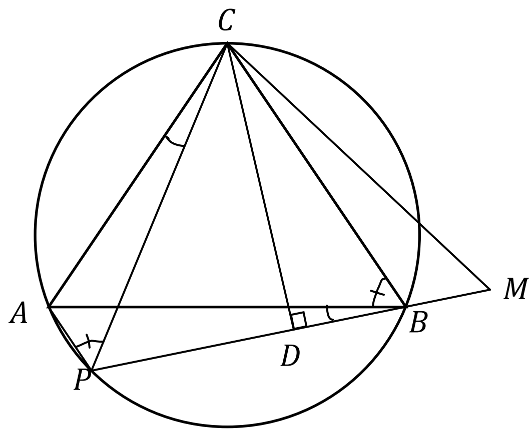
$$\Longrightarrow\ \angle CBM = \angle PAC$$

$\Longrightarrow$ ត្រីកោណ BCM និង ACP ប៉ុន គ្នា $\Longrightarrow CP = CM \Longrightarrow$ ត្រីកោណ ΔCPM ជាត្រីកោណសមបាត។

ដោយ $CD \perp PM$ ដូច្នេះ D ជាចំណុចកណ្ដាល PM ដូច្នេះ

$$2PD = PM = PB + BM = PB + PA$$

ដូចចង់បាន។



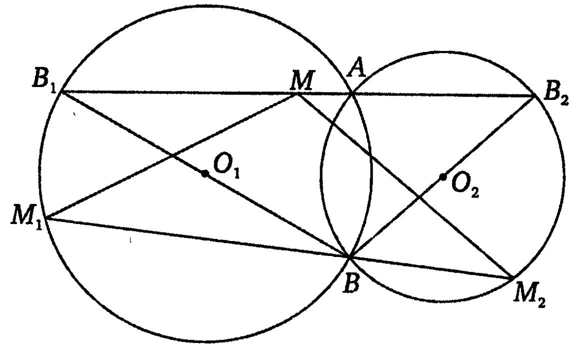
រូបទី 1 : សំនួរទី 1

$\boxed{2.}$ យើងមាន $\angle BAB_1 = \angle BAB_2 = 90°$ ដូច្នេះ B_1, A, B_2 រត់ត្រង់គ្នា។ លក្ខខណ្ឌ $\angle AO_1M_1 = \angle AO_2M_2 \Longrightarrow \angle ABM_1 = \angle AB_2M_2$ (ព្រោះ $B; B_2$ ឋិតនៅខាងធ្នូតូចដូចគ្នា)។ ដោយ ចតុកោណ AB_1M_1B ចារឹកក្នុងនោះ $\angle AB_1M_1 = \pi - \angle ABM_1$ ហើយដោយ AB_2M_2B ចារឹកក្នុងរង្វង់ នោះ $\angle ABM_2 = \pi - \angle AB_2M_2 \Longrightarrow\ \angle AB_1M_1 = \angle ABM_2$ ។ ដូច្នេះ

$$\angle AB_1M_1 + \angle AB_2M_2 = \angle ABM_2 + \angle AB_2M_2 = 180°$$
$$\angle ABM_1 + \angle ABM_2 = \angle ABM_1 + \angle AB_1M_1 = 180°$$

ដូច្នេះ បន្ទាត់ $(M_1B_1) \parallel (M_2B_2)$ ហើយ ចំណុច M_1, B, M_2 រត់ត្រង់គ្នា។

យើងនឹងបង្ហាញថា $MM_1 = MM_2$ ។ យើងដឹងថា $M_1B_1B_2M_2$ ជាចតុកោណព្នាយ ដែលមាន $\angle B_1M_1B = \angle B_2M_2B = 90°$ ។ យើងមាន M កណ្ដាល B_1B_2 ។ បាតមធ្យមរបស់ចតុកោណព្នាយនេះកាត់តាម M ហើយកែងនឹង M_1M_2 ត្រង់ចំណុចកណ្ដាល។ ដូច្នេះ $MM_1 = MM_2$ ។
ដូច្នេះត្រីកោណ MM_1M_2 សមបាត $\Rightarrow \angle MM_1B = \angle MM_2B$ ។



រូបទី 2 : សំនួរទី 2

$\boxed{\textbf{3.}}$ បើ N មានតួចែកបឋមចំនួនបួនផ្សេងគ្នា នោះចំនួនតួចែកសរុបរបស់ N ស្មើនឹង $1 + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ ដែលក្នុងនេះ 1 ជា $d_1 = 1$ ។ ដោយ N មានតួចែកតែ 16 ដូច្នេះ N មានតួចែកបឋមច្រើនមិនលើសពីបួនទេ។
បើ $d > 2$ ជាចំនួនគូ ជាតួចែករបស់ N នោះ 2 ក៏ជាតួចែកមួយរបស់ N ដែរ ដូច្នេះ $d_2 = 2$ ព្រោះ d_2 តូចជាងគេហើយធំជាង 1។
បើគ្រប់តួចែករបស់ N ជាចំនួនសេស នោះ $d_k = (d_2 + d_4)d_6$ ជាចំនួនគូ ផ្ទុយការសន្មត។ ដូច្នេះ $d_2 = 2$ ។
ដោយ $d_k = (d_2 + d_4)d_6 \Rightarrow d_k > d_6 \Rightarrow k > 6 \Rightarrow d_5 = k > 6 \Rightarrow d_5 \geq 7$ ។ $(d_2 + d_4)$ ជាតួចែករបស់ d_k ដូច្នេះក៏ជាតួចែករបស់ N ដែរ។ បើ $(d_2 + d_4) < d_5$ នោះយើងមានតួចែករបស់ N ដែល $d_4 < d_2 + d_4 < d_5$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ដែលគ្មានតួចែកផ្សេងទៀតចន្លោះ d_4 និង d_5។
ដូច្នេះ $(d_2 + d_4) \geq d_5$ ។ យើងទាញបាន

$$d_2 + d_4 = 2 + d_4 \geq d_5 \geq 7$$
$$d_4 \geq 5$$

យើងមាន $d_4 < d_5 \Rightarrow d_4 + 1 \leq d_5 \leq d_4 + 2 \Rightarrow d_5 = d_4 + 1$ ឬ $d_5 = d_4 + 2$ ។

- ករណី $d_5 = d_4 + 1$ យើងទាញបាន $d_k = (d_5 + 1)d_6$ ដូច្នេះ $(d_5 + 1)$ ជាតួចែករបស់ d_k ក៏ជាតួចែកមួយរបស់ N ដែរ។ ដោយ $d_5 < d_6 \Leftrightarrow d_5 < d_5 + 1 \leq d_6$ ហើយតួចែករបស់ N មាន $\ldots < d_4 < d_5 < d_6 < d_7 < \cdots$ នោះ $d_6 = d_5 + 1$ ។ យើងទាញបាន

$d_6 = d_4 + 2$ ។ ដូច្នេះ $d_4, d_5 = d_4 + 1, d_6 = d_4 + 2$ ជាចំនួនគត់បីបន្តបន្ទាប់គ្នា ហើយជាតួចែករបស់ N ។ ត្រូវតែមានមួយក្នុងចំណោមតួចែកអស់នេះដែលចែកដាច់នឹង 3 ។ ដូច្នេះ 3 ក៏ជាតួចែករបស់ N ដែរ។ ដូច្នេះ $d_3 = 3$ ។ ដោយ $d_2 = 2$ និង $d_3 = 3$ ជាតួចែករបស់ N នោះ $6 = 2.3$ ក៏ជាតួចែករបស់ N ដែរ។ ដោយ $d_6 > d_5 \geq 7$ នោះមានតែ $d_4 = 6 \Rightarrow d_5 = 7; d_6 = 8 = 4.2$ នោះ 4 ក៏ជាតួចែករបស់ N ដែរ ដូច្នេះ $d_4 = 4 \neq 6$ ផ្ទុយពីការសន្មត។

- ករណី $d_5 = d_4 + 2$

i) ករណី $4|N$ ។ ដោយ $d_4 \geq 5$ នោះ $d_3 = 4 \Rightarrow 8|N$ ។ ដោយ $d_6 \geq 8$ នោះ $d_4 = 8;$ ឬ $d_5 = 8$ ឬ $d_6 = 8$ ។

បើ $d_4 = 8$ នោះ $d_5 = 10 \Rightarrow 5|N \Rightarrow d_4 = 5 \neq 8$ ខុស។

បើ $d_5 = 8$ នោះ $d_4 = 6 \Rightarrow 3|N \Rightarrow d_3 = 3 \neq 4$ ខុស។

បើ $d_6 = 8$ នោះ $d_5 = 7; d_4 = 5 \Rightarrow 10|N$ ។ យើងមាន $d_k = (d_2 + d_4)d_6\,; k = d_5 = 7 \Rightarrow d_7 = (d_2 + d_4)d_6 \Leftrightarrow d_7 = (2 + 5)8 = 56 > 10$ ផ្ទុយនឹង $10|N$ ។

ដូច្នេះ 4 មិនមែនជាតួចែករបស់ N ទេ។

ii) ករណី $3|N$ យើងទាញបាន $d_3 = 3$ ។ ដូច្នេះ $6|N$ ។ ដោយ $d_5 \geq 7$ នោះ $d_4 = 6 \Rightarrow d_5 = 8 \Rightarrow 4|N$ ខុស។

ដូច្នេះ 3 និង 4 ចែក N មិនដាច់ $\Rightarrow d_3 \geq 5$ និង $d_4 \geq 7$ (ព្រោះ 6 មិនមែនជាតួចែក)។ ដោយ N និង $2 + d_4$ មិនមែនជាពហុគុណនៃ 4 ហើយ $d_2 = 2$ នោះយើងទាញបាន $2 + d_4$ ជាចំនួនសេស។ ដោយ $2 + d_4$ និង d_4 ចែកមិនដាច់នឹង 3 យើងទាញបាន $d_4 = 3k + 2$ ដែល k ជាចំនួនគត់។ ដោយ d_4 ជាចំនួនសេស នោះ $d_4 = 6l + 5$ ដែល l ជាចំនួនគត់។ ដោយ $d_5 \leq 16$ យើងទាញបាន $d_4 + 2 \leq 16 \Rightarrow d_4 \leq 14 \Rightarrow 7 \leq d_4 \leq 16 \Rightarrow 7 \leq 6l + 5 \leq 16 \Rightarrow 0,33 \leq l \leq 1,83 \Rightarrow l = 1 \Rightarrow d_4 = 11 \Rightarrow d_5 = 13$ ។

ដោយ $2.d_3$ ជាតួចែករបស់ N ហើយធំជាងឬស្មើ $d_4 = 11 \Rightarrow d_3 \geq 5,5 \Rightarrow d_3 \geq 6$ ។ ជាងនេះទៅទៀត $d_3 < d_4 = 11 \Rightarrow d_3 = \{7; 10\}$ ។ ដោយ d_3 មិនអាចស្មើ 10 ទេព្រោះបើមិនអញ្ចឹង $5 < d_3$ ក៏ជាតួចែករបស់ N ដែរ។ ដូច្នេះ $d_3 = 7$ ។

យើងទាញបាន $d_1 = 1; d_2 = 2; d_3 = 7; d_4 = 11; d_5 = 13$ ។ ដូច្នេះ $N = 2.7.11.13 = 2002$ ។ តួចែកផ្សេងទៀតមាន $d_6 = 14; d_7 = 22; d_8 = 26; d_9 = 77; d_{10} = 91; \ldots$ ។

4. តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\left(\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(a+c)}\right)^3 \geq \frac{27}{abc(a+b)(b+c)(c+a)}$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$\left(\frac{2(a+b+c)}{3}\right)^3 = \left(\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right)^3 \geq (a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc$$

$$\Longrightarrow abc(a+b)(b+c)(c+a) \leq \frac{8}{27^2}(a+b+c)^6$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{abc(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{27^2}{8}.\frac{1}{(a+b+c)^6}$$

$$\Longrightarrow \frac{27}{abc(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{27^3}{2^3}.\frac{1}{(a+b+c)^6}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(a+c)}\right)^3 \geq \frac{27^3}{2^3}.\frac{1}{(a+b+c)^6}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(a+c)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

ពិត។

វិញ្ញាសាឆ្នាំ ២០០៣

1. តាង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ចំនួន A មួយមាន $2n$ ខ្ទង់ ដែលខ្ទង់និមួយៗជាលេខ 4 និង ចំនួន B មួយមាន n ខ្ទង់ ដែលខ្ទង់និមួយៗជាលេខ 8 ។ ចូរបង្ហាញថា $A+2B+4$ ជាចំនួនការេ។

2. សន្មតថា មានចំណុចចំនួន n ឋិតក្នុងប្លង់មួយ ដែលគ្មានចំនុចបីណារត់ត្រង់គ្នា ហើយមានលក្ខណៈ បើគេដាក់ឬាកចំណុចទាំងនោះដោយ $\mathrm{A_1, A_2, \dots, A_n}$ តាមរបៀបណាក៏បាន នោះអង្កត់កាច់ចុះកាច់ឡើង $\mathrm{A_1A_2\dots A_n}$ មិនប្រសព្វខ្លួនឯងទេ។

ចូរកំណត់តម្លៃធំបំផុតរបស់ n ។

3. តាង D, E, F ជាចំណុចកណ្តាលនៃធ្នូ $\widehat{BC}, \widehat{CA}, \widehat{AB}$ របស់រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ដែលគ្មានចំណុច A, B, C រៀងគ្នា។ សន្មតថា បន្ទាត់ DE កាត់ BC និង CA ត្រង់ G និង H និង តាង M ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ GH ។ សន្មតថា FD កាត់ BC និង AB ត្រង់ K និង J ហើយតាង N ជាចំណុចកណ្តាល អង្កត់ KJ ។

a) ចូរកំណត់មុំនៃត្រីកោណ DMN ។

b) ចូរបង្ហាញថា បើ P ជាចំណុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់ AD និង EF នោះផ្ចិតរបស់រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ DMN ឋិតលើរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ PMN ។

4. គេឱ្យ $x, y, z > -1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\geq 2$$

♊

ដំណោះស្រាយ

$\boxed{1.}$ តាង $A = \underbrace{44\ldots4}_{2n}; B = \underbrace{88\ldots8}_{n}$ ។ ដូច្នេះ

$$A = 4(10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \cdots + 1) = 4.\frac{10^{2n}-1}{9}$$

$$B = 8(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 1) = 8\frac{10^{n}-1}{9}$$

$\Longrightarrow A + 2B + 4 = 4\frac{10^{2n}-1}{9} + 16\frac{10^{n}-1}{9} + 4$

$= \frac{4}{9}(10^{2n} - 1 + 4.10^{n} - 4 + 9)$

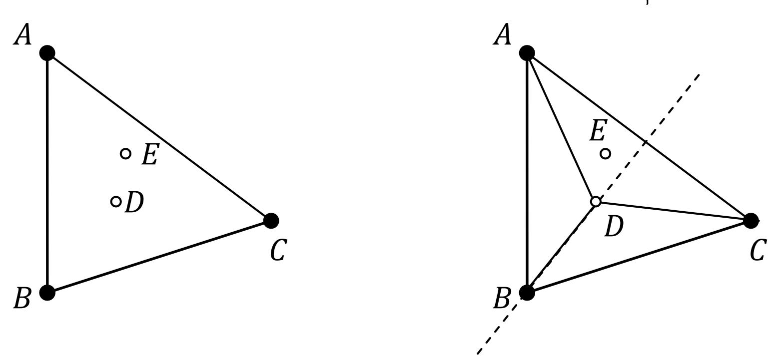
$= \frac{4}{9}(10^{2n} + 4.10^{n} + 4)$

$= \left[\frac{2}{3}(10^{n} + 2)\right]^2$

ដោយ $A + 2B + 4$ ជាចំនួនគត់ នោះ $\frac{2}{3}(10^n + 2)$ ជាចំនួនគត់ $\Longrightarrow A + 2B + 4$ ជាចំនួនការេ។

$\boxed{2.}$ ក្នុងចំណោមចំណុច 5 នៅក្នុងប្លង់មួយ ដែលគ្មានចំណុច 3 ណារត់ត្រង់គ្នា គេអាចរកបានចំណុច4 ដែលបង្កើតបានចតុកោណប៉ោងជានិច្ច។ ព្រោះ៖

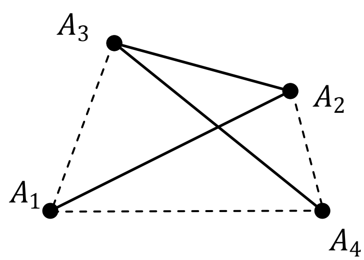
យើងពិនិត្យចំណុច 5 នៅក្នុងប្លង់មួយ។ ដំបូងយើងពិនិត្យចំណុចបីក្នុងចំណោមចំណុចទាំងប្រាំនេះសិន។ យើងគូសបន្ទាត់ភ្ជាប់ចំណុចទាំងបី $A; B; C$ ជាត្រីកោណមួយ។ តាងចំណុចទីបួន និងទីប្រាំដោយ $D; E$ ។ បើមានមួយក្នុងចំណោម D ឬ E ឋិតនៅក្រៅត្រីកោណ, ឧបមាថា D នោះយើងអាចបង្កើតបានចតុកោណប៉ោង $ABCD$ ។ ដូច្នេះយើងពិនិត្យករណី វាឋិតនៅក្នុងត្រីកោណទាំងពីរ។



រូបទី 1 : ចំណុចប្រាំក្នុងប្លង់

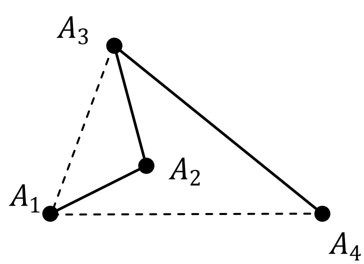
យើងសង់ត្រីកោណ $ADB; BDC; CDA$ ។ ដោយគ្មានចំណុចបីរត់ត្រង់គ្នានោះ E ត្រូវបិតនៅខាងក្នុង ត្រីកោណមួយក្នុងចំណោមនេះ។ យើងសន្មតថា វាបិតនៅក្នុងត្រីកោណ ADC ។ យើងគូសបន្ទាត់ (BD) ។ ដោយគ្មានចំណុចបីរត់ត្រង់គ្នានោះ E មិនត្រូវបិតនៅលើបន្ទាត់ (BD) ទេ។ សន្មតថាវាបិត នៅខាងម្ខាងដូចរូប។ ក្នុងករណីនេះ យើងសង់បានចតុកោណប៉ោង $ABDE$ ។ ដូច្នេះសំណើពិត។

បន្ទាប់មកទៀតចំពោះគ្រប់ចតុកោណប៉ោងទាំងអស់ យើងអាចគូសអង្កត់ភ្ជាប់កំពូលរបស់វា ដែល កាត់គ្នាជានិច្ច។ អង្កត់នោះជាអង្កត់ទ្រូងរបស់ចតុកោណ។



រូបទី 2 : ករណីអង្កត់ $A_1A_2A_3A_4$ កាត់ខ្លួនវា

ដូច្នេះចំនួនចំណុចមិនអាចលើសពីបួនបានទេ។ ក្នុងករណីចំណុចបួន បើចំណុចទាំងនោះបង្កើតបានជា ចតុកោណប៉ោងនោះវាក៏មិនអាចដែរ។ ករណីចំណុចទាំងបួនបង្កើតបានជាចតុកោណផត ដូចជា ករណីចំណុចទីបួនដាក់នៅចំផ្ចិតត្រីកោណសម័ង្សមួយ នោះទោះជាយើងដៅអក្សរ $A_1A_2A_3A_4$ តាម លំដាប់ណាក៏វាមិនកាត់គ្នាដែរ។



រូបទី 3 : ករណីអង្កត់ $A_1A_2A_3A_4$ មិនកាត់ខ្លួនវា

ដូច្នេះ n ធំបំផុតស្មើ 4 ។

3. **a)** យើងនឹងបង្ហាញថា $(JH) \parallel (BC)$ ដោយបង្ហាញថា

$$\frac{AJ}{AB} = \frac{AH}{AC}$$

តាង O ជាផ្ចិតរង្វង់។ (OE) កាត់ (AC) ត្រង់ចំណុច E' កណ្ដាល $[AC]$ ហើយ $OE \perp AC$ ។ យើងមាន $AH = AE' + E'H$ ។ យើងមាន

$$\begin{aligned}
&\angle AOC = 2B = 2\angle AOE' = 2\angle E'OC \\
&\angle BOC = 2A = 2\angle DOC \\
&\Longrightarrow \angle DOE = \angle DOC + \angle COE' = A + B \\
&\Longrightarrow \ \angle OED = \angle ODE = \frac{\pi - (A+B)}{2} = \frac{C}{2}
\end{aligned}$$

តាមរបៀបដូចគ្នាយើងទាញបាន

$$\angle ODF = \frac{B}{2}$$

តាង R ជាកាំរង្វង់។ យើងមាន

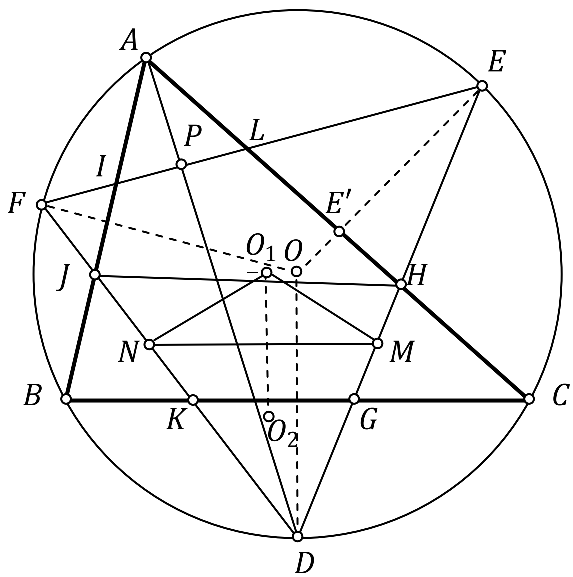
$$\begin{aligned}
&AE' = R\sin\angle AOE' = R\sin B\,; AC = 2R\sin B \\
&OE' = R\cos\angle AOE' = R\cos B \\
&\Longrightarrow \ \ EE' = OE - OE' = R - R\cos B = 2R\sin^2\frac{B}{2} \\
&\Longrightarrow E'H = EE'\tan\angle OED = 2R\sin^2\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \\
&\Longrightarrow AH = AE' + E'H = R\sin B + 2R\sin^2\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \\
&\Longrightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{R\sin B + 2R\sin^2\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{2R\sin B} \\
&\qquad\quad = \frac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} + 2\sin^2\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} \\
&\qquad\quad = \frac{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \\
&\qquad\quad = \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}
\end{aligned}$$

តាមរបៀបដូចគ្នា យើងទាញបាន

$$\frac{AJ}{AB} = \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

ដូច្នេះ

$$\frac{AJ}{AB}=\frac{AH}{AC}$$



រូបទី 4 : សំនួរទី 3

ដូច្នេះ $(JH)\parallel(KG)$ ។ ដោយ M,N ចំណុចកណ្តាល $[GH],[JK]$ នោះ $(MN)\parallel(KG)$ ។ យើងមាន

$$\angle NMD=\angle KGD=90°-\angle ODE=90°-\frac{C}{2}$$
$$\angle MND=\angle GKD=90°-\angle ODF=90°-\frac{B}{2}$$
$$\angle KDG=\angle ODE+\angle ODF=\frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2}$$

ដូច្នេះ

$$D=90°-\frac{A}{2};\ M=90°-\frac{C}{2};N=90°-\frac{B}{2}$$

b) តាង I,L ជាចំណុចប្រសព្វនៃ (FE) ជាមួយនឹង $[AB]$ និង $[AC]$ ។ យើងនឹងបង្ហាញថា P ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[IL]$ ដោយបង្ហាញថា ត្រីកោណ $\Delta IAP\equiv\Delta LAP$ ។ យើងមាន $\angle BAD=\angle DAC$ និង AP ជាជ្រុងរួម។ ដូច្នេះយើងបង្ហាញថា $\angle AIP=\angle APL$ មួយទៀតជាការស្រេច។ យើងមាន

$$\angle FDE=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2};\ \angle FED=\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2};\ \angle EFD=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$$
$$\angle ALP=\angle ELH=\pi-(\angle LEH+\angle EHL)$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{B}{2} - \angle EHL = \frac{\pi}{2} + \frac{B}{2} - \angle EHL \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{B}{2} - \angle CHG = \frac{\pi}{2} + \frac{B}{2} - (\pi - C - \angle CGH) \\
&= -\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2} + C + \angle CGH \\
&= -\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2} + C + \angle DGK \\
&= -\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2} + C + \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \\
&= \frac{B+C}{2}
\end{aligned}
$$

ដូចគ្នាយើងទាញបាន

$$\angle AIP = \frac{B+C}{2}$$

ដូច្នេះ $\angle AIP = \angle ALP \implies P$ កណ្តាល $[IL]$ ។

យើងតាមសំនួរ a) យើងទាញបាន $(NP) \parallel (AB); (MP) \parallel (AC)$ ។ យើងទាញបាន

$$\angle PNM = B;\ \angle PMN = C; \angle NPM = A$$

ផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ΔNDM និង ΔPMN ឋិតនៅលើបន្ទាត់កែងកាត់តាមចំណុចកណ្តាល ហើយកែងនឹង MN ។ តាង O_1, O_2 ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ΔPMN និង ΔNDM។ យើងមាន

$$
\begin{aligned}
&\angle NO_1M = 2\angle NPM = 2A \implies \angle NO_1O_2 = A \\
&\implies \angle O_1NM = \frac{\pi}{2} - A \\
&\angle NO_2M = 2\angle NDM = 2D \implies \angle NO_2O_1 = D \\
&\implies \angle O_2NM = \frac{\pi}{2} - D \\
&\implies \angle O_2NO_1 = \frac{\pi}{2} - A + \frac{\pi}{2} - D = \pi - (A + D) \\
&= \pi - \left(A + \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \\
&\implies \angle NO_2O_1 = \pi - \angle O_2NO_1 - \angle NO_1O_2 \\
&= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) - A = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}
\end{aligned}
$$

ដូច្នេះត្រីកោណ O_1O_2N ជាត្រីកោណសមបាត។ ដូច្នេះ $O_1N = O_1O_2$ ដូច្នេះ O_2 ឋិតនៅលើរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ΔPMN ។

$\boxed{\textbf{4.}}$ យើងមាន

$$(1-y)^2 \geq 0 \quad \implies \frac{1+y^2}{2} \geq y$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \leq 1 + y + z^2 \leq \frac{1+y^2}{2} + (1+z^2)$$

$$\Longrightarrow \frac{1+x^2}{1+y+z^2} \geq \frac{1+x^2}{\frac{1+y^2}{2} + (1+z^2)} = \frac{2(1+x^2)}{1+y^2+2(1+z^2)}$$

ដូចគ្នាយើងទាញបាន

$$\frac{1+y^2}{1+z+x^2} \geq \frac{2(1+y^2)}{1+z^2+2(1+x^2)}$$

$$\frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq \frac{2(1+z^2)}{1+x^2+2(1+y^2)}$$

យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា

$$\frac{2(1+x^2)}{1+y^2+2(1+z^2)} + \frac{2(1+y^2)}{1+z^2+2(1+x^2)} + \frac{2(1+z^2)}{1+x^2+2(1+y^2)} \geq 2$$

តាង $a = 1 + x^2; b = 1 + y^2; c = 1 + z^2$ ។ ដូច្នេះ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$\frac{2a}{b+2c} + \frac{2b}{c+2a} + \frac{2c}{a+2b} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត

$$[(ab+2ac) + (cb+2ab) + (ac+2bc)]\left[\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b}\right] \geq (a+b+c)^2 \ (*)$$

ហើយ

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

ព្រោះ

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow \ a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ [(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \geq 0$$

ពិត។ ដូច្នេះ (*) នាំឱ្យ

$$3(ab+bc+ca)\left[\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b}\right] \geq (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$$

អង្គទាំងពីរស្មើគ្នាពេល $a = b = c$ ។

II

វិញ្ញាសាឆ្នាំ ២០០៤

1. ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \le \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x និង y ដែលមិនស្មើសូន្យទាំងពីរព្រមគ្នា។

2. តាង ABC ជាត្រីកោណសមបាតដែល $AC = BC$ តាង M ជាចំណុចកណ្តាលរបស់ជ្រុង AC និង តាង Z ជាបន្ទាត់កាត់តាម C កែងនឹង AB ។ រង្វង់កាត់តាមចំណុច B, C និង M ប្រសព្វបន្ទាត់ Z ត្រង់ចំណុច C និង Q ។ ចូរកំណត់រង្វាស់កាំរបស់រង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ABC ជាអនុគមន៍នៃ $m = CQ$ ។

3. បើចំនួនគត់វិជ្ជមាន x និង y ដែល $3x+4y$ និង $4x+3y$ ជាចំនួនការេទាំងពីរ ចូរបង្ហាញថា ទាំង x និង y សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 7 ។

4. យើងពិនិត្យពហុកោណប៉ោងមួយ ដែលមានកំពូលចំនួន $n \ge 4$ ។ យើងបំបែកពហុកោណ ជា ត្រីកោណដែលមានកំពូលទាំងអស់ជាកំពូលរបស់ពហុកោណ ដែលគ្មានត្រីកោណពីរដែលមាន ចំណុចក្នុងរួមគ្នាទេ។ យើងលាបដោយពណ៌ខ្មៅ ចំពោះត្រីកោណណាដែលមានជ្រុងពីរជាជ្រុង របស់ពហុកោណ ដោយពណ៌ក្រហមបើត្រីកោណមានជ្រុងតែមួយគត់ជាជ្រុងរបស់ពហុកោណ ហើយលាបពណ៌សចំពោះត្រីកោណណាដែលគ្មានជ្រុងរួមនឹងពហុកោណ។ ចូរបង្ហាញថា ត្រីកោណខ្មៅច្រើនជាងត្រីកោណសចំនួនពីរ។

ឲ

ដំណោះស្រាយ

$\boxed{\mathbf{1.}}$ យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពក្នុងករណី $x, y \geq 0$ សិន។ ក្នុងករណីនេះ វិសមភាពសមមូលនឹង

$$(x+y)\sqrt{x^2+y^2} \leq 2\sqrt{2}(x^2-xy+y^2)$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីស្វាត យើងមាន

$$(x+y)^2 \leq (1+1)(x^2+y^2)$$
$$\Rightarrow (x+y) \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

$\Rightarrow\ (x+y)\sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2}(x^2+y^2)$

យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថា $\sqrt{2}(x^2+y^2) \leq 2\sqrt{2}(x^2-xy+y^2)$

$$\Leftrightarrow\ x^2+y^2 \leq 2(x^2-xy+y^2)$$
$$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$$

ពិត។ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នាពេល $x = y$ ។

បើ $x+y \leq 0$ នោះយើងអាចមានករណី x, y តូចជាងសូន្យទាំងពីរ ឬ មានមួយតូចជាងសូន្យ មួយទៀតធំជាងសូន្យ។ បើវាតូចជាងឬស្មើសូន្យទាំងពីរនោះ $(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2-xy \geq xy \geq 0$ នោះអង្គខាងឆ្វេងអវិជ្ជមាន តែអង្គខាងស្តាំវិជ្ជមាន។ ដូច្នេះវិសមភាពពិត។ បើមានមួយតូចជាងសូន្យមួយធំជាងសូន្យនោះ $x^2-xy+y^2 > 0$ នោះអង្គខាងឆ្វេងអវិជ្ជមាន តែអង្គខាងស្តាំវិជ្ជមាន។

បើ $x+y > 0$ តែ $y \leq 0$ នោះ $x+y \leq x+|y|$ និង $x^2-xy+y^2 \geq x^2-x|y|+y^2 > 0$ ដូច្នេះ

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \leq \frac{x+|y|}{x^2-x|y|+y^2}$$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់ករណី $y \geq 0$ យើងទាញបាន

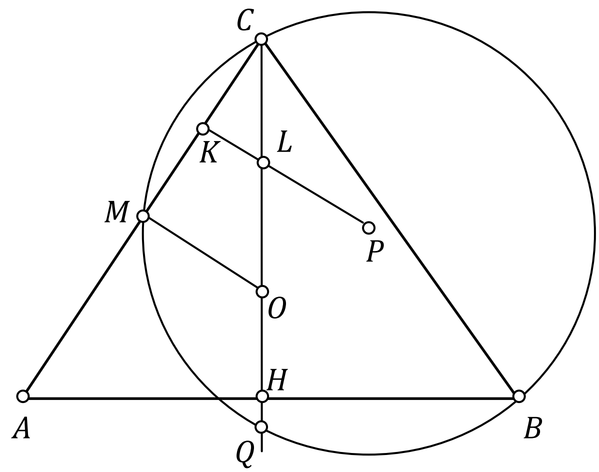
$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \leq \frac{x+|y|}{x^2-x|y|+y^2} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ពិត។

$\boxed{\mathbf{2.}}$ តាង P ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ BCM ; O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC និង តាង K ជាចំណុចកណ្តាល $[MC]$ ។ តាង H ជាជើងកម្ពស់គូសចេញពី C របស់ ΔABC ។

ដោយ $CA = CB$ នោះ O ឋិតនៅលើ CH ។ យក KP ប្រសព្វជាមួយនឹង CH ត្រង់ L ។ ដោយ KP និង OM សុទ្ធតែកែងនឹង AC នោះ $KP \parallel OM$ ។ ដោយ $MK = KC\ \Rightarrow OL = LC$ ។

ដោយ $OC = OB$ និង $PC = PB$ នោះ $OP \perp BC$ ។ ដូច្នេះ $\angle LOP = \angle COP = 90° - \angle BCH$ និង $\angle OLP = \angle CLK = 90° - \angle ACH$ ។



រូបទី 1 : សំនួរទី 2

ដោយ ΔABC ជាត្រីកោណសមបាត និង $\angle BCH = \angle ACH$ នោះ $\angle LOP = \angle OLP$ និង $PL = PO$ ។ ដោយ $PC = PQ$ នោះ $\angle CLP = \angle QOP$ និង $CL = OQ$ ។ ដូច្នេះ $CL = LO = OQ$

$$\Longrightarrow CO = \frac{2}{3}CQ$$

ដូច្នេះកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔABC ស្មើ $R = \frac{2}{3}m$ ។

3. តាង $a^2 = 3x + 4y, b^2 = 4x + 3y$ ដែល a, b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ យើងមាន $a^2 + b^2 = 7x + 7y$ ។ ដូច្នេះ $a^2 + b^2$ ចែកដាច់នឹង 7 ។ តាង $a = 7k + m;$ ដែល $m = 0; 1; \dots; 6$ និង $b = 7p + n$ ដែល $n = 0; 1; \dots; 6$ ហើយ k, p ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន។ យើងមាន

$$a^2 + b^2 = 49k^2 + 14km + m^2 + 49p^2 + 14p + n^2 \equiv 0 \pmod 7$$
$$\Longrightarrow \quad m^2 + n^2 \equiv 0 \pmod 7$$

បើ $m = 0$ នោះ មានតែ $n = 0$ ។ បើ $m = 1; 2; ..; 6$ នោះដោយជំនួសលេខចូល យើងមិនអាចរកបាន n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $m^2 + n^2 \equiv 0 \pmod 7$ ទេ។ ដូច្នេះ $a = 7k; b = 7p$ ។ យើងទាញបាន

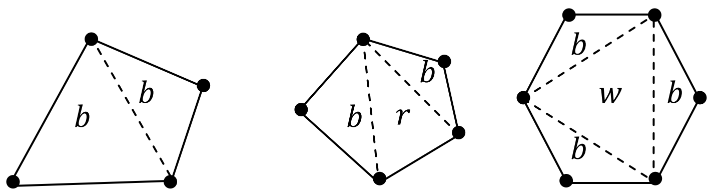
$$3x + 4y = 49k^2; 4x + 3y = 49p^2$$

$$\Longrightarrow x + y = 7(k^2 + p^2)$$
$$\Longrightarrow y = 49k^2 - 21(k^2 + p^2)$$

$$\Longrightarrow x = 49p^2 - 21(k^2+p^2)$$

ដូច្នេះ x, y សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 7 ។

4. តាង b,r,w ជាចំនួនត្រីកោណខ្មៅ ក្រហម និងស រៀងគ្នា។ ដោយគ្មានត្រីកោណកាត់ពីលើគ្នា នោះពហុកោណប៉ោងមានកំពូលចំនួន n បង្កើតបានត្រីកោណបែបនេះចំនួន $n-2$ ។



កំពូល៤ ត្រីកោណ ខ្មៅ២ | កំពូល៥ ត្រីកោណ ខ្មៅ២ ក្រហម១ | កំពូល៤ ត្រីកោណ ខ្មៅ២ ស១

រូបទី 2 : សំនួរទី 4

យើងមាន

$$b+r+w=n-2$$

ជ្រុងមួយរបស់ពហុកោណមិនមែនជាជ្រុងរួមនៃត្រីកោណណាមួយនោះទេ ព្រោះបើមិនអញ្ចឹងនឹងមានត្រីកោណកាត់គ្នា។ ដូច្នេះ

$$2b+r=n$$

យើងទាញបាន

$$w=b-2$$

ដូច្នេះចំនួនត្រីកោណពណ៌ស តិចជាងត្រីកោណខ្មៅចំនួនពីរ។

វិញ្ញាសាឆ្នាំ ២០០៥

1. ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x, y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$9\,(x^2+y^2+1)+2(3xy+2)=2005$$

2. តាង ABC ជាត្រីកោណមានមុំទាំងអស់ស្រួច ចារឹកក្នុងរង្វង់ k ។ គេដឹងថា បន្ទាត់ប៉ះគូសចេញពី A ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ កាត់បន្ទាត់ (BC) ត្រង់ចំណុច P ។ តាង M ជាចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ $[AP]$ និង R ជាចំណុចប្រសព្វទីពីរនៃរង្វង់ k ជាមួយបន្ទាត់ (BM) ។ បន្ទាត់ (PR) កាត់រង្វង់ k ម្ដងទៀតត្រង់ចំណុច S ផ្សេងពី R ។ចូរបង្ហាញថា បន្ទាត់ (AP) និង (CS) ស្របគ្នា។

3. ចូរបង្ហាញថា

a) មានចំណុច 5 ឋិតលើប្លង់មួយ ដែលក្នុងចំណោមត្រីកោណទាំងអស់ដែលមានកំពូលឋិតក្នុងចំណោមចំណុចទាំងនោះ មានត្រីកោណកែងចំនួន 8 ។

b) មានចំណុច 64 ឋិតលើប្លង់មួយ ដែលក្នុងចំណោមត្រីកោណទាំងអស់ដែលមានកំពូលឋិតក្នុងចំណោមចំណុចទាំងនោះ មានត្រីកោណកែងចំនួន 2005 ។

4. ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់មានលេខបីខ្ទង់ $\overline{abc}$ ដែល

$$\overline{abc}=abc(a+b+c)$$

ដែល $\overline{abc}$ ជាលេខក្នុងប្រព័ន្ធគោលដប់របស់ចំនួននោះ។

ഽ

ដំណោះស្រាយ

$\boxed{1.}$ យើងមាន

$$9(x^2+y^2+1)+2(3xy+2)=2005$$
$$\Leftrightarrow \ 9((x+y)^2-2xy+1)+2(3xy+2)=2005$$

តាង $k=x+y; l=xy$ ។ សមីការទៅជា

$$9(k^2-2l+1)+2(3l+2)=2005$$
$$\Leftrightarrow 9k^2-12l+13=2005$$
$$\Leftrightarrow \ 9k^2=12l+1992$$
$$\Leftrightarrow 3k^2=4l+664=4(l+166)$$

$\Longrightarrow k$ ជាចំនួនគូ។

$$3k^2=4l+664$$
$$\Leftrightarrow \ 2k^2-664+k^2-4l=0 \qquad (*)$$

ដោយ $k=x+y; l=xy$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត សមីការ $a^2-ka+l=0$ មានឫស x,y ។

ដើម្បីឱ្យសមីការនេះមានឫស ឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta=k^2-4l\geq 0$ ។ សមីការ (*) ទៅជា

$$2k^2-664=-(k^2-4l)\leq 0$$
$$\Longrightarrow 2k^2-664\leq 0$$
$$\Longrightarrow k^2\leq 332$$
$$\Longrightarrow k\leq 18{,}22$$

ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$3k^2=4l+664$$
$$\Longrightarrow 3k^2\geq 664$$
$$\Longrightarrow k^2\geq 221{,}33$$
$$\Longrightarrow k\geq 14{,}87$$

ដោយ k ជាចំនួនគូ យើងទាញបាន $k=16;18$ ។

បើ $k=16 \Longrightarrow l=26 \Longrightarrow k^2-4l=152$ មិនមែនជាចំនួនការេ ដូច្នេះ មិនអាចរកបាន x,y ជាចំនួនគត់។

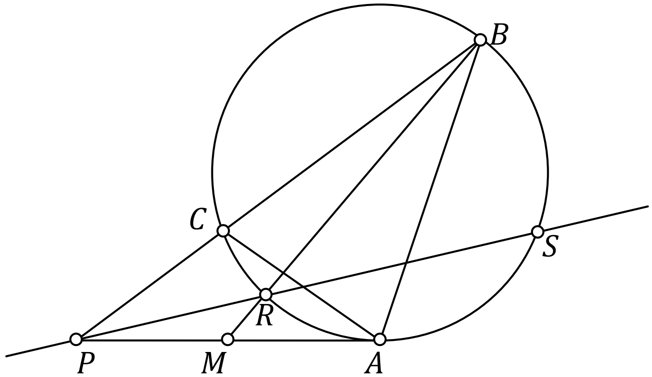
បើ $k=18 \Longrightarrow l=77 \Longrightarrow k^2-4l=16 \Longrightarrow x;y=\frac{18\pm4}{2}=\left[\begin{matrix}11\\7\end{matrix}\right.$

ដូច្នេះ $(x,y)=\{(11;7);(7;11)\}$ ។

$\boxed{2.}$ តាមស្វ័យគុណនៃចំណុច M ធៀបនឹងរង្វង់ យើងទាញ

$$PM^2=MA^2=MR.MB$$
$$\Longrightarrow \frac{PM}{BM}=\frac{MR}{MP}$$
$$\Longrightarrow \Delta PMR\sim\Delta\,BMP$$

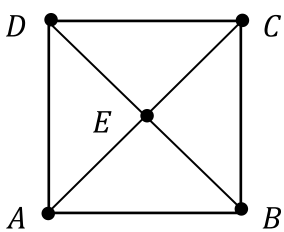
$$\Longrightarrow \angle MPR = \angle MBP;\ \angle MRP = \angle MPB$$



រូបទី 1 : សំនួរទី 2

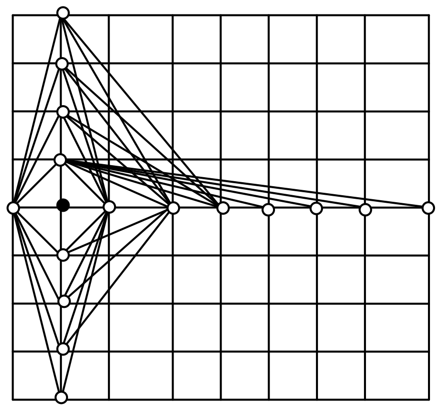
យើងមាន $\angle PSC = \angle RSC = \angle RBC = \angle MBP$ (មុំស្កាត់ធ្នូរួមគ្នា) ហើយ $\angle MBP = \angle MPR = \angle APS$ ។ ដូច្នេះ $\angle PSC = \angle APS \Longrightarrow CS \parallel AP$ ។

3. a) យើងពិនិត្យចំណុច៤ដែលជាកំពូលរបស់ការេមួយ និងចំណុចមួយទៀតឋិតនៅចំផ្ចិត។យើងមានត្រីកោណកែងចំនួនប្រាំបីគឺ $ABC; ABD; ACD;\ BCD; AED; EAB; EBC; ECD$ ។



រូបទី 2 : សំនួរទី 3

b) យើងពិនិត្យក្រឡា 8×8 ។ ចំពោះចំណុចមួយនៃក្រឡានេះ យើងពិនិត្យចំណុច៧ផ្សេងទៀតដែលឋិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយនិងចំណុច៧ផ្សេងទៀតដែលឋិតនៅលើកូឡោនតែមួយ។ ពីចំណុចអស់នេះយើងសង់បានត្រីកោណកែងចំនួន $7 \times 7 = 49$ ។ ចំណុចទាំងអស់មានចំនួន 64 ដូច្នេះយើងសង់បានត្រីកោណកែងបែបនេះចំនួន $49 \times 64 = 3136 > 2005$ ។ ដូច្នេះមានត្រីកោណកែងយ៉ាងហោចណាស់ចំនួន 2005 ។



រូបទី 3 : បណ្ដាត្រីកោណខ្លះក្នុងចំណោមត្រីកោណទាំង៤៩ សង់ចេញពីបណ្ដាចំណុចឋិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយនិងកូឡោនតែមួយ

$\boxed{4.}$ លក្ខខណ្ឌដែលឱ្យសមមូលនឹង

$$\begin{aligned}&100a+10b+c=abc(a+b+c)\\ &\Leftrightarrow 99a+9b+(a+b+c)=abc(a+b+c)\\ &\Leftrightarrow 99a+9b=(abc-1)(a+b+c)\\ &\Leftrightarrow 9(11a+b)=(abc-1)(a+b+c)\end{aligned}$$

យើងដឹងថា a,b,c ជាតួលេខពី1 ដល់ 9 ។

i) ករណី $a+b+c=9k$ ដែល $k=1;2;3$ ។ យើងទាញបាន

$$\begin{cases}a+b+c=9k\\ 11a+b=k(abc-1)\end{cases}$$

$$\Longrightarrow 11a+b=kab(9k-a-b)-k$$

$$\Leftrightarrow kba^2+[11-kb(9k-b)]a+b+k=0$$

$$\Delta=[11-kb(9k-b)]^2-4kb(b+k)$$

ករណី $k=1$: យើងមាន $1\le a;b;c\le 7$ ។

b	1	2	3	4	5	6	7
$11-kb(9k-b)$	3	-3	-7	-9	-9	-7	-3
Δ	1	-15	1	1	-39	-119	-215
a	$-$	$-$	1	1	$-$	$-$	$-$
c	$-$	$-$	5	4	$-$	$-$	$-$

$$\Longrightarrow (a,b,c)=\{(1;3;5);(1;4;4)\}$$

ករណី $k=2$: យើងមាន $a+b+c=18\ \Longrightarrow$ ។

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$11-kb(9k-b)$	-23	-53	-79	-101	-119	-133	-143	-149	-151
Δ	505	2745	6121	10009	13881	17305	19945	21561	22009
$\sqrt{\Delta}$	22,4	52.39	78.23	100.04	117.81	131.54	141.22	146.83	148.35

a	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

គ្មានចម្លើយ។

ករណី $k = 3 \implies a + b + c = 27 \implies a = b = c = 9$ ។លក្ខខណ្ឌទីពីរ

$$11.9 + 9 = 3(9.9.9 - 1) \iff 108 = 2184: \text{មិនពិត}$$

ii) ករណី $abc - 1 = 9m \implies abc = 9m + 1 \implies 11a + b = m(a + b + c)$

យើងរក a, b, c ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc = 9m + 1$ សិន។ សន្មតថា $a \le b \le c$ (សន្មតបែបនេះបាន ព្រោះពេលនេះយើងគ្រាន់តែរក a, b, c ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc = 9m + 1$ សិន)។ បើមានមួយក្នុងចំណោម a, b, c ចែកដាច់នឹង 3 នោះ abc ចែកដាច់នឹង 3 តែ $9m + 1$ ចែកមិនដាច់នឹង 3 ។ ដូច្នេះ យើងពិនិត្យ $a, b, c \in \{1; 2; 4; 5; 7; 8\}$ ។ បន្ទាប់មកទៀតយើងមិនពិនិត្យករណី $a.b$; ឬ $a.c$ ឬ $b.c$ ចែកដាច់នឹង 10 ទេ ព្រោះបើដូច្នេះ $abc(a + b + c)$ ត្រូវមានលេខសូន្យនៅកន្ទុយ ហើយ $= \overline{abc} \implies c = 0 \implies abc(a + b + c) = 0$ ។ម្យ៉ាងវិញទៀត

$$\overline{abc} = abc(a + b + c) \le 999$$
$$\implies a.a.a(3a) \le abc(a + b + c) \le 999$$
$$\implies a \le 4$$

បើ $a = 1; b = 1; c = \{1; \dots; 9\} \implies m =$ មិនគត់ $\implies$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a = 1; b = 4; \implies c = 7 \implies m = 3 \implies abc(a + b + c) = 336 \implies$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a = 1; b = 5; c = \{5; 7\} \implies m =$ មិនគត់ $\implies$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a = 1; b = 7; c = \{7; 8\} \implies m =$ មិនគត់ $\implies$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a = 2; b = 2; c = 7 \implies m = 3 \implies abc(a + b + c) = 308$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ ព្រោះផលគុណនេះប្រើតួលេខ $0; 3; 8$ ដែលផ្សេងពី $2; 7$ ឬនិយាយតាមមួយបែបទៀត ទោះបីជាយើងឆ្លាស់តួលេខ $(2; 2; 7)$ យ៉ាងម៉េចក៏មិនអាចផ្តុំបានលេខ 308 ដែរ។

បើ $a = 2; b = 4; c = 8 \implies m = 7 \implies abc(a + b + c) = 896$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a = 2; b = 7; c = \{7; 8\} \implies m =$ មិនគត់ $\implies$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a = 2; b = 8; \implies m =$ មិនគត់ $\implies$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a = 4; b = 4; c = 4 \implies m = 7 \implies abc(a + b + c) = 768$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a = 4; b = 7; c = \{7; 8\} \implies m =$ មិនគត់ $\implies$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a = 4; b = 8; c = \{8\} \implies m =$ មិនគត់ $\implies$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូច្នេះករណី $abc - 1 = 9m$ យើងមិនអាចរកបានតម្លៃ a, b, c ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌបានទេ។

iii) ករណី $a+b+c=3n; abc-1=3l$

យើងរក a,b,c ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌពីរនេះសិន។ ដូច្នេះយើងអាចសន្មតថា a តូចជាងគេ។ ដូច្នេះ $a\leq 4$ ។ សន្មតថា c ធំជាងគេ ដូច្នេះ

$$\overline{abc}=abc(a+b+c)\geq 111$$
$$\Rightarrow 3c^4\geq 111 \ \Rightarrow c\geq 3$$

បន្ទាប់មកទៀតក្នុងចំណោម $a;b,c$ គ្មានលេខមួយណាចែកដាច់នឹង 3 ទេ ព្រោះ $abc=3l+1$ ចែកមិនដាច់នឹង 3 ។ ហើយផលគុណ $a.b$; ឬ $a.c$ ឬ $b.c$ គ្មានមួយណាចែកដាច់នឹង 10 ទេ។ ដូច្នេះ យើងពិនិត្យ $a,b,c\in\{1;2;4;5;7;8\}$ ។

បើ $a=1;b=1;c=4\Rightarrow n=2,l=1\ \Rightarrow abc(a+b+c)=24$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=1;b=2;\ \Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=1;b=4;c=4\ \Rightarrow abc(a+b+c)=144$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=1;b=4;c=7\Rightarrow abc(a+b+c)=336$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=1;b=5;\Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=1;b=7;c=7\Rightarrow abc(a+b+c)=735$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=1;b=8;\Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=2;b=2;\ \Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=2;b=4;\Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=2;b=7;\Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=2;b=8;\Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=4;b=4;c=4\Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=4;b=7;c=7\Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

បើ $a=4;b=8;c=8\Rightarrow$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូច្នេះជាសរុបលេខដែលត្រូវរក មាន $\{135;144\}$ ។

ឈ

វិញ្ញាសាឆ្នាំ ២០០៦

1. បើ $n > 4$ ជាចំនួនពហុគុណ ចូរបង្ហាញថា $2n$ ចែកដាច់ $(n-1)!$ ។

2. ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ដែល $AB = AC$ និង $\angle BAC < 60°$ ។ ចំណុច D និង E ឋិតលើជ្រុង AC ដែល $EB = ED$ និង $\angle ABD = \angle CBE$ ។ តាង O ជាចំណុចប្រសព្វរវាងកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុង $\angle BDC$ និង $\angle ACB$ ។ ចូរគណនា $\angle COD$ ។

3. យើងហៅ n មួយជាសម្បុណ្ណលេខ បើផលបូកនៃតួចែកវិជ្ជមានរបស់វា (គិតទាំង 1 និង n) ស្មើ $2n$ ។ ចូរកំណត់គ្រប់សម្បុណ្ណលេខ n ដែល $n-1$ និង $n+1$ ជាចំនួនបឋម។

សម្គាល់៖សំនួរទី៤ ខ្ញុំមើលប្រធានអត់យល់ ឬ ដោះស្រាយមិនទាន់ចេញ។

♍

ដំណោះស្រាយ

$\boxed{\mathbf{1.}}$ ដោយ n ជាចំនួនពហុគុណ យើងមាន $n = a.b; a \geq 2; b \geq 2$ ។ សន្មតថា $a \leq b$ ។ ដូច្នេះ

$$(n-1)! = (ab-1)! = 1.2 \dots a \dots .(b-1)b \dots (ab-1)$$

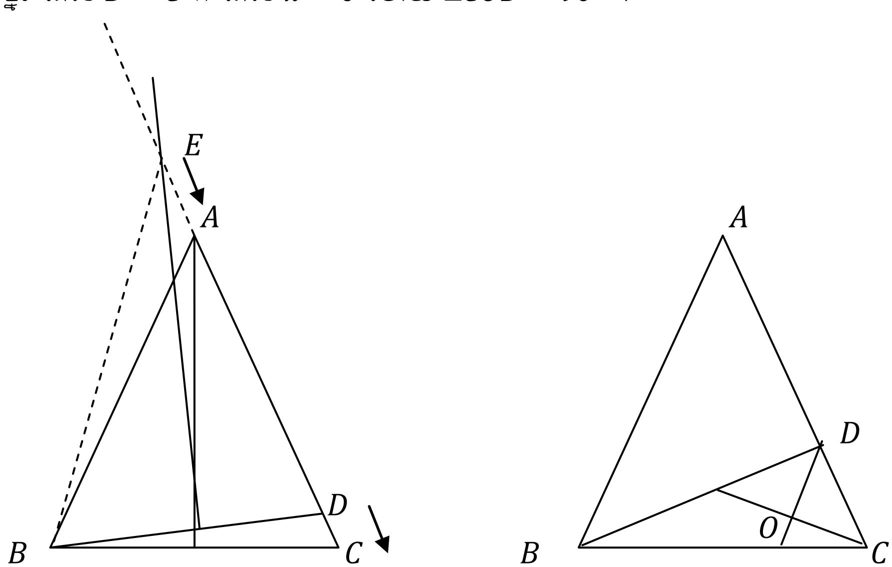
ដូច្នេះ $(n-1)!$ ចែកដាច់នឹង $2n = 2ab$ ។

$\boxed{\mathbf{2.}}$ បើ E បិតនៅជិត A ហើយដោយ $EB = ED$ នោះ Eបិតនៅត្រង់ចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់កែង នឹង BD ហើយកាត់តាមចំណុចកណ្តាល BD និងបន្ទាត់ (AC) ។ បើ $D \equiv C$ នោះចំណុច E ត្រួតនឹង A ។ បើ D មិនត្រួតលើC នោះ E ត្រូវបិតនៅក្រៅ AC ។ ដូច្នេះករណីនេះមានតែ $D \equiv C$ និង $E \equiv A$ តែប៉ុ ណ្ណោះ។ យើងទាញបាន $O \equiv D \equiv C$ ។ ដើម្បីគណនាមុំ $\angle COD$ ជាដំបូងយើងពិនិត្យពេលចំណុច D មិនទាន់ត្រួតនឹងចំណុច C សិន ពោលគឺបិតនៅក្នុង $[AC]$ ។ តាង $\angle DBC = x$ ។

យើងមាន

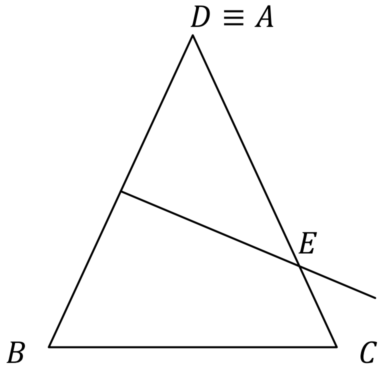
$$\angle COD = 180° - \angle ODC - \angle OCD = 180° - \frac{\angle BDC}{2} - \frac{\angle ACB}{2}$$
$$= 180° - \frac{180° - x - \angle ACB}{2} - \frac{\angle ACB}{2} = 90° + \frac{x}{2}$$
$$\lim_{x \to 0} \angle COD = \lim_{x \to 0} 90° + \frac{x}{2} = 90°$$

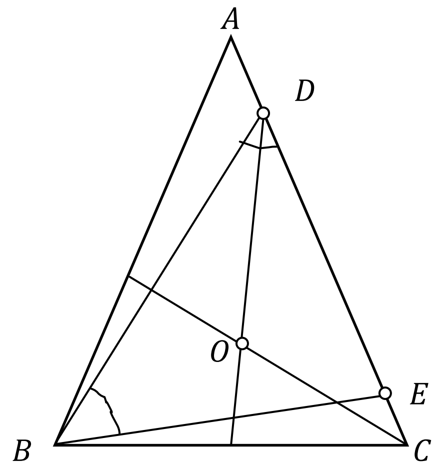
ដូច្នេះ ពេល $D \equiv C$ គឺ ពេល $x = 0$ ហើយ $\angle COD = 90°$ ។



រូបទី 1 : សំនួរទី 2

បើ E ឋិតនៅជិត C ហើយដោយ $EB = ED$ នោះ E ឋិតនៅត្រង់ចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់កែងនឹង BD ហើយកាត់តាមចំណុចកណ្តាល BD និងបន្ទាត់ (AC) ។ បើ $\angle BAC = 60^\circ$ នោះនៅពេល $D \equiv A$ យើងទាញបាន $E \equiv C$ ។ ដោយ $\angle BAC < 60^\circ$ នោះ $E \in [AC]$ ។ ករណីនេះយើងអាចរកបានទីតាំង $D; E$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សម្មតិកម្មបាន។





រូបទី 2 : សំនួរទី 2

តាង $\angle ABD = \angle CBE = x$ ។ យើងមាន

$$\angle CDB = \angle DBE = B - 2x$$
$$\Longrightarrow \ 180^\circ - 2B + x = B - 2x \quad \Leftrightarrow 3B - 3x = 180^\circ \ \Rightarrow B - x = 60^\circ$$

យើងមាន

$$\angle COD = 180^\circ - \angle OCD - \angle CDO = 180^\circ - \frac{(\angle BCD + \angle CDB)}{2}$$
$$\Leftrightarrow \ \angle COD = 180^\circ - \frac{B + B - 2x}{2} = 180^\circ - (B - x) = 120^\circ$$

3. យើងពិនិត្យបណ្តាចំនួនដែលមានរាង $6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5$ ។ យើងមិនយក $n = 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+5$ ទេ ព្រោះវា $n+1 = 6k+2, 6k+3,\ 6k+4, 6k+6$ វាមិនមែនជាចំនួនបឋម។ យើងមិនយក $n = 6k+4$ ទេព្រោះ $n-1 = 6k+3$ មិនមែនជាចំនួនបឋម។ ដូច្នេះ n ត្រូវមានរាង $6k$ ។ យើងពិនិត្យតួចែកខ្លះរបស់$6k$ គឺ $1, k, 2k, 3k, 6k$ ។ បើ $k > 1$ នោះផលបូកតួចែកទាំងនេះស្មើនឹង $1 + k + 2k + 3k + 6k = 12k + 1 > 2n = 12k$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់។ ដូច្នេះ $k = 1$ និង $n = 6$ ។

ដូច្នេះ $n = 6$ ជាសម្បុណ្ណលេខតែមួយគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ។

វិញ្ញាសាឆ្នាំ ២០០៧

1. តាង a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $a^3 = 6(a+1)$ ។ ចូរបង្ហាញថា សមីការ $x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$ គ្មានឬសជាចំនួនពិតទេ។

2. $ABCD$ ជាចតុកោណប៉ោងមួយ មាន $\angle DAC = \angle BDC = 36°, \angle CBD = 18°$ និង $\angle BAC = 72°$ ។ អង្កត់ទ្រូងប្រសព្វគ្នាត្រង់ P ។ ចូរគណនារង្វាស់មុំ $\angle APD$ ។

3. គេឱ្យចំណុច 50 ក្នុងប្លង់មួយ ផ្ទៀងផ្ទាត់គ្មានចំណុចបីណាដែលឋិតលើបន្ទាត់តែមួយនោះទេ។ ចំណុចនិមួយៗត្រូវលាបដោយពណ៌មួយក្នុងចំណោមពណ៌បួន។ ចូរបង្ហាញថា មានពណ៌មួយ ហើយយ៉ាងហោចណាស់ ត្រីកោណស្កាលែនចំនួន 130 ដែលមានកំពូលទាំងបីមានពណ៌មួយនោះ។ ត្រីកោណស្កាលែនជាត្រីកោណដែលមានជ្រុងទាំងបីមិនស្មើគ្នា។

4. ចូរបង្ហាញថា បើ p ជាចំនួនបឋម នោះ $7p + 3^p - 4$ មិនមែនជាចំនួនការេនោះទេ។

ដំណោះស្រាយ

$\boxed{1.}$ យើងមាន $\Delta = a^2 - 4(a^2 - 6) = 3(8 - a^2)$ ។ សមីការមានឫសពិតទាល់តែ

$$\Delta \geq 0 \implies a \leq 2\sqrt{2}$$

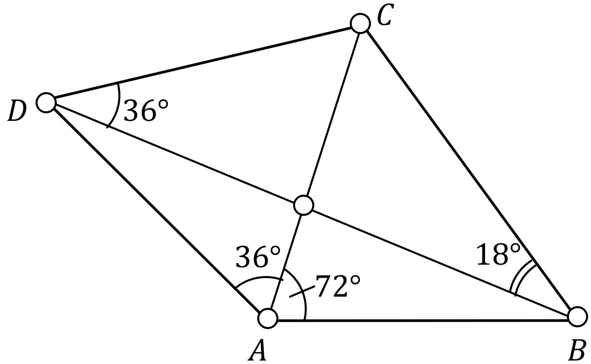
ករណី $a \leq 2\sqrt{2}$ យើងទាញបាន

$$a^3 = 6(a+1)$$
$$\implies 6 = a(a^2 - 6)$$

តាង $y = a(a^2 - 6)$។ យើងមាន $y' = 3a^2 - 6 = 3(a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2})$។ ចំពោះ $a \leq 2\sqrt{2}$ យើងទាញបាន $6 = y \leq 2\sqrt{2}(8 - 6) = 4\sqrt{2}$ មិនពិត។

a		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
y'	$+$	$-$	$-$	$+$	
y	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

$\boxed{2.}$ ពិនិត្យរូបទី 1។



រូបទី 1 : សំនួរទី 2

យើងមាន $\angle DAC = 2\angle DBC$ និង $\angle BAC = 2\angle BDC$ ដូច្នេះរង្វង់មានផ្ចិតត្រង់ A កាំ AC កាត់តាម B, D ។ ដូច្នេះ $AB = AC = AD$ ។ យើងទាញបាន

$$\angle ADB = \angle ABD = \frac{180° - (\angle DAC + \angle CAB)}{2}$$

$$= \frac{180° - (36° + 72°)}{2} = 36°$$

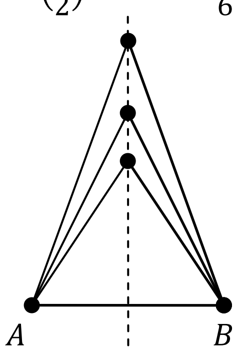
ដូច្នេះ $\angle APD = 180° - \angle DAC - \angle ADB = 180° - 2 \times 36° = 108°$ ។

$\boxed{3.}$ *សំណើ : ក្នុងចំណោមចំណុចចំនួន n បិតក្នុងប្លង់មួយ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់គ្មានចំណុចបីណារត់ត្រង់គ្នា យើងមានយ៉ាងហោចណាស់ត្រីកោណស្កាលែនចំនួន $\frac{n(n-1)(n-8)}{6}$ ។*

សម្រាយបញ្ជាក់

អង្កត់មួយដែលភ្ជាប់ចំណុចពីរអាចជាបាតនៃត្រីកោណសមបាតយ៉ាងច្រើនពីរ ព្រោះបើមិនអញ្ចឹងទេនឹងមានចំណុចបីរត់ត្រង់គ្នាកែងនឹងអង្កត់នោះ (រូបទី 2)។ ដូច្នេះយើងមានត្រីកោណសមបាតយ៉ាងច្រើន $2\binom{n}{2}$ ។ ដូច្នេះមានត្រីកោណស្កាលែនយ៉ាងហោចណាស់ ចំនួន

$$\binom{n}{3} - 2\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)(n-8)}{6}$$



រូបទី 2 : ករណីអង្កត់មួយជាបាតនៃត្រីកោណសមបាតចាប់ពីបីទៅ គេនឹងមានចំណុចយ៉ាងតិចបីរត់ត្រង់គ្នា។

ក្នុងសំនួរនេះយើងមានចំណុច 50 លាបដោយពណ៌បួន។ យើងមាន $50/4 = 12{,}5$ ដូច្នេះ មានចំណុចយ៉ាងហោចណាស់ 13 ដែលមានពណ៌តែមួយ។ ព្រោះបើពណ៌និមួយៗមានតែ 12 ចំណុចទេ នោះជាសរុប យើងមាន $4 \times 12 = 48 < 50$ ។ ក្នុងចំណោមចំនុចទាំង13 នេះ យើងមានត្រីកោណស្កាលែនយ៉ាងហោចណាស់ចំនួន $\frac{13(13-1)(13-8)}{6} = 130$ ។

$\boxed{4.}$ បើ $p = 2$ នោះ $7p + 3^p - 4 = 19$ ពិត។

តាមទ្រឹស្តីបទ Fermat:

1. បើ p ជាចំនួនបឋម នោះចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ a គេមាន $a^p \equiv a \pmod 4$

2. បើ p ជាចំនួនបឋម នោះចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ a ដែលបឋមនឹង p គេមាន $a^{p-1} \equiv 1 \pmod 4$

តាមទ្រឹស្តីបទ (1) យើងទាញបាន $3^p \equiv 3 \pmod p$ ដូច្នេះ

$$7p + 3^p - 4 \equiv 3 - 4 = -1 \pmod p$$

តាង $7p + 3^p - 4 = x^2$ ដូច្នេះ $x^2 \equiv -1 \pmod p$ មានន័យថា x បឋមនឹង p ។ ដូច្នេះតាមទ្រឹស្តីបទ(2) យើងទាញបាន

$$\begin{aligned} x^{p-1} &\equiv 1 \pmod p \\ \Leftrightarrow (x^2)^{\frac{p-1}{2}} &\equiv 1 \pmod p \\ \Leftrightarrow (-1)^{\frac{p-1}{2}} &\equiv 1 \pmod p \\ \Rightarrow \frac{p-1}{2} &= 2k \\ \Rightarrow p &= 4k+1 \end{aligned}$$

ដែល k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

ករណី $p = 4k + 1$ នោះ

$$7p + 3^p - 4 = 28k + 7 + 3^{4k+1} - 4 \equiv 3 + (-1)^{4k+1} = 2 \pmod 4$$

មិនអាចជាចំនួនការេបានទេ ព្រោះចំនួនការេ $\equiv 0; 1 \pmod 4$ ។

♎

វិញ្ញាសាឆ្នាំ ២០០៨

1. ចូរគណនាគ្រប់ចំនួនពិត a, b, c, d ដែល

$$\begin{cases} a+b+c+d=20 \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=150 \end{cases}$$

2. កំពូល A និង B របស់ត្រីកោណសម័ង្ស ABC ឋិតលើរង្វង់ k កាំរង្វាស់ 1 ឯកតា និង កំពូល C ឋិតនៅក្នុងរង្វង់ k ។ ចំណុច D មួយផ្សេងពី B ឋិតលើ k ដែល $AD = AB$ ។ បន្ទាត់ DC ប្រសព្វ k ជាលើកទីពីរត្រង់ E ។ ចូរគណនារង្វាស់ $[CE]$ ។

3. ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនបឋម p, q, r ដែល

$$\frac{p}{q} - \frac{4}{r+1} = 1$$

4. គេចែកតុទំហំ 4×4 មួយ ជាក្រឡាការេឯកតាពណ៌សចំនួន 16 ។ គេថា ក្រឡាមួយនៅជាប់គ្នា បើវាមានជ្រុងរួមមួយ។ ចលនាមួយ ជាការជ្រើសរើសក្រឡាមួយ ហើយនិងការប្តូរពណ៌របស់ក្រឡាមួយនោះ និង គ្រប់ក្រឡានៅជាប់នឹងក្រឡាមួយនោះ ពីសទៅខ្មៅ ឬ ពីខ្មៅទៅស។ បន្ទាប់ពី គេធ្វើចលនាចំនួន n ដងមក ក្រឡាទាំង 16 មានពណ៌ខ្មៅទាំងអស់។ ចូរកំណត់គ្រប់តម្លៃដែលអាចមាននៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

1. យើងមាន

$$
\begin{aligned}
&(a+\ b+c+d)^2\ =a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\\
&\Longrightarrow 20^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2(150)\\
&\Longrightarrow\ a^2+b^2+c^2+d^2=100
\end{aligned}
$$

តែ

$$
\begin{aligned}
100&=\frac{1}{3}[(a^2+b^2)+(a^2+c^2)+(a^2+d^2)+(b^2+c^2)+(b^2+d^2)+(c^2+d^2)]\\
&\geq\frac{2}{3}[ab+ac+ad+bc+bd+cd]\\
&=\frac{2}{3}(150)=100
\end{aligned}
$$

ដូច្នេះ អង្គទាំងពីរស្មើគ្នាបើនិងមានតែ $a=b=c=d\ \Longrightarrow a=b=c=d=5$ ។

2. តាង S ជាផ្ចិតរង្វង់ k ។ ដោយ $AB=AC=AD$ នោះ B,C,D ឋិតលើរង្វង់មានផ្ចិត A ។ តាង $\angle CBD=\alpha$ នោះ $\angle CAD=2\alpha$ $។ ដោយត្រីកោណ ABD សមបាតត្រង់ A នោះ $\angle DBA=60°-\alpha\ =\angle BDA$ ។ ហើយត្រីកោណ ACD សមបាតកំពូល A នោះ $\angle ACD=\angle ADC=\frac{180°-2\alpha}{2}=90°-\alpha$ ។ ដូច្នេះ

$$
\begin{aligned}
\angle BDE=\angle ADC-\angle BDA=90°-\alpha-(60°-\alpha)=30°\\
\Longrightarrow\ \ \angle BSE=2.\angle BDE=60°
\end{aligned}
$$

ដូច្នេះត្រីកោណ BSE សម័ង្ស $\Longrightarrow BE=1$ ។

យើងមាន

$$\angle BCE=\angle CBD+\angle BDC=\alpha+30°$$

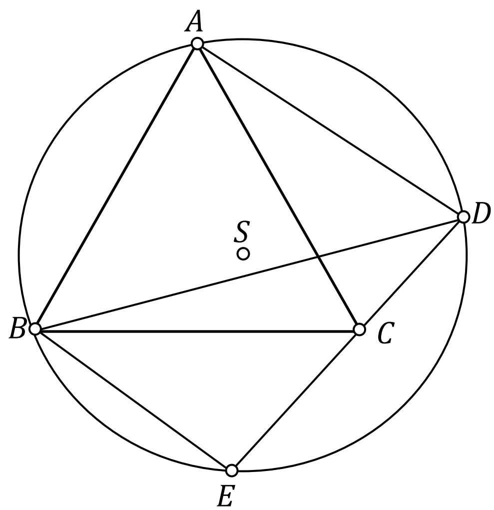
ដោយ $ABED$ ឋិតលើរង្វង់តែមួយ នោះ

$$\angle BEC=180°-\angle BAD=180°-(60°+2\alpha)=120°-2\alpha$$

ដូច្នេះ

$$
\begin{aligned}
\angle CBE&=180°-(\angle BEC+\angle BCE)=180°-(120°-2\alpha+\alpha+30°)\\
&=30°+\alpha
\end{aligned}
$$

ដូច្នេះ $\angle BCE=\angle CBE\ \Longrightarrow EB=EC=1$ ។



រូបទី 1 : សំនួរទី 2

3. លក្ខខណ្ឌដែលឱ្យអាចសរសេរជា

$$\begin{aligned} &p(r+1)-4q=q(r+1)\\ &\Leftrightarrow p(r+1)=q(r+5) \qquad (1)\end{aligned}$$

ដោយ p,q ជាចំនួនបឋមនោះ យើងមានករណី $p = q$ ឬ p ចែក $r + 5$ ដាច់។
ករណី $p = q$ នោះ $r+1=r+5$ មិនអាច។ ដូច្នេះ p និង q បឋមនឹងគ្នា ហើយ p ចែក $r+5$ ដាច់ និង q ចែក $r+1$ ដាច់។ តាង $d = \mathrm{PGCD}(r+1, r+5) \Longrightarrow d$ ចែកដាច់ $r+5-(r+1)=4 \Longrightarrow d=1;2;3;4$ ។ យើងមាន $(r+1)/d$ បឋមនឹង $(r+5)/d$ ។ សមីការ (1) សមមូលនឹង

$$p\frac{r+1}{d}=q\frac{r+5}{d}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} p=\dfrac{r+5}{d}\\ q=\dfrac{r+1}{d}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow p-q=\frac{4}{d}$$

យើងទាញបានថា $d \neq 3$ ។

បើ $d=4$ នោះ $p-q=1$ ជាចំនួនគត់បន្តបន្ទាប់គ្នា ហើយជាចំនួនបឋមទាំងពីរ ដូច្នេះមានតែ $p=3, q=2 \Longrightarrow r=7$ ។

បើ $d = 2$ នោះ $p - q = 2$ ។ ដូច្នេះ $r = 2p - 5 = 2q - 1$ ហើយ p និង q បឋមសេសទាំងពីរ (ព្រោះផលសងវាគូ)។ បើ p និង q សុទ្ធតែខុសពី 3 នោះ p, q មានរាង $6m + 1, 6m + 5$ ។ ដោយ $p - q = 2$ នោះផលសងនេះចែកនឹង 3 សល់សំណល់ 2។ ដូច្នេះ យើងយក $p = 6m + 5, q = 6n + 1$:

$$\Rightarrow p - q = 6(m - n) + 4 = 2$$
$$\Rightarrow m - n = -\frac{1}{3}$$

មិនអាច។

បើមានមួយក្នុងចំណោម p, q ដែលស្មើ 3 នោះ គឺ $q = 3$ (ព្រោះ $p > q$) $\Rightarrow\ p = 5$ ។

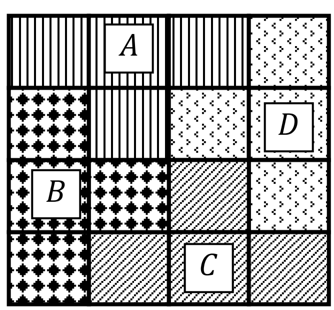
បើ $d = 1$ នោះ $p = r + 5; q = r + 1 \ \Rightarrow\ p\ -\ q\ =\ 4\ \Rightarrow p, q$ សេសទាំងពីរ។ ដោយ $r = q - 1$ នោះ r គូ $\Rightarrow r = 2\ \Rightarrow p = 7, q = 3$ ។

ដូច្នេះ $(p, q, r) = (3,2,7); (5,3,5); (7,3,2)$ ។

4. យើងមានទាំងអស់ 16 ក្រឡា។ ពេលយើងជ្រើសរើសយកក្រឡាមួយ ហើយដូរពណ៌ក្រឡានេះ និងពណ៌ក្រឡានៅជាប់គ្នា នោះម្តងនេះ យើងដូរបាន 5 ក្រឡា។ ម្តងដូរបានពណ៌ 5 ក្រឡា ដូច្នេះយើងត្រូវការចលនាយ៉ាងតិច 4 ដង ដែលដូរបាន 20 ក្រឡា។

បន្ទាប់ពីធ្វើចលនាបាន n ដង នោះ យើងដូរពណ៌បាន $5n$ ក្រឡា តាង $a_1, a_2, \dots, a_{16}$ ជាចំនួនដងដែលក្រឡានិមួយៗដូរពណ៌។ ដោយពីដំបូងក្រឡាទាំងអស់មានពណ៌សក្រោយមកមានពណ៌ខ្មៅ ដូច្នេះ $a_1, a_2, \dots, a_{16}$ ជាចំនួនសេស ហើយ ធំជាងឬស្មើ 1 ។ តាង $a_i = 2b_i + 1$ ។ ដូច្នេះ $2\sum_i b_i + 16 = 5n$ ។ ដូច្នេះ n ត្រូវតែជាចំនួនគូ។

យើងមាន ចលនា 4 ដង ដែលអាចប្តូរពណ៌ក្រឡាទាំងអស់ជាខ្មៅបាន ដូចបង្ហាញក្នុងរូបទី 2 ។



រូបទី 2 : ដំបូងយើងយកក្រឡា A រួចដូរពណ៌ក្រឡានេះនិងក្រឡាទាំងបីនៅជុំវិញ ពីសទៅខ្មៅ។ បន្ទាប់មកទៀតយកក្រឡា B រួចដូរក្រឡាទាំងបួន បន្ទាប់មកទៀត C, D ។ល។

បន្ទាប់មកទៀត ក្រឡាទាំងអស់បន្ទាប់ពីចលនា4ដង ដែលដូរព័ណ៌ក្រឡាជាខ្មៅទាំងអស់ហើយ យើងអាចជ្រើសរើសយកក្រឡាណាមួយ រួចដូរពណ៌វាពីរដង នោះយើងបានក្រឡាមានពណ៌ខ្មៅទាំងអស់ដដែល។ ដូច្នេះ បណ្តា ចលនាចំនួន $2m$ ដង ដែល $m \geq 2$ អាចប្តូរពណ៌ក្រឡាទាំងអស់ជាខ្មៅបាន។ ដូច្នេះ $n = 2m \geq 4$។

♏

វិញ្ញាសាឆ្នាំ ២០០៩

1. គេឱ្យបញ្ចកោណប៉ោង $ABCDE$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $AB+CD=BC+DE$ និង k_a ជារង្វង់មានផ្ចិតឋិតលើជ្រុងAE ដែលប៉ះជ្រុង AB, BC, CD និង DE រៀងគ្នាត្រង់ចំណុច P, Q, R និង S ដែលផ្សេងពីកំពូលរបស់បញ្ចកោណ។ ចូរបង្ហាញថា បន្ទាត់ PS និង AE ស្របគ្នា។

2. ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន

$$2^a 3^b + 9 = c^2$$

3. តាង x, y, z ជាចំនួនពិត ដែល $0 < x, y, z < 1$ និង

$$xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$$

ចូរបង្ហាញថាក្នុងចំណោម $(1-x)y, (1-y)z, (1-z)x$ មានយ៉ាងហោចណាស់មួយដែលធំជាងឬស្មើ$1/4$ ។

4. គ្រប់ចំណុចផ្សេងគ្នាទាំង 2009 ឋិតក្នុងប្លង់មួយ ត្រូវបានគេលាបដោយពណ៌ខៀវ ឬក្រហម ដែលយ៉ាងណាឱ្យរាល់រង្វង់ឯកតាផ្ចិតពណ៌ខៀវ មានចំណុចក្រហមចំនួនពីរគត់ឋិតនៅលើ។ ចូរគណនាចំនួនចំណុចពណ៌ខៀវច្រើនបំផុត។

ដំណោះស្រាយ

3. សន្មតផ្ទុយមកវិញថា $(1-x)y<1/4, (1-y)z<1/4, (1-z)x<1/4$ ។ យើងទាញបាន

$$(1-x)(1-y)(1-z)xyz = x^2y^2z^2 < \frac{1}{64}$$
$$\Longrightarrow xyz < \frac{1}{8} \qquad (1)$$

និង

$$(1-x)y+(1-y)z+(1-z)x<\frac{3}{4}$$

$$x+y+z-xy-yz-zx<\frac{3}{4} \qquad (2)$$

តាមសម្មតិកម្ម យើងមាន

$$\begin{aligned} xyz &= (1-x)(1-y)(1-z) \\ &= (1-y-x+xy)(1-z) \\ &= 1-z-y+yz-x+xz+xy-xyz \end{aligned}$$
$$\Longrightarrow x+y+z-xy-yz-zx = 1-2xyz \qquad (3)$$

ជំនួស(3) ចូលក្នុង(2) យើងទាញបាន

$$1-2xyz<\frac{3}{4}$$

$$\Longrightarrow xyz>\frac{1}{8} \qquad (4)$$

យើងឃើញថា (1) ផ្ទុយនឹង(4) ។ ដូច្នេះការសន្មតថា $(1-x)y<\frac{1}{4}, (1-y)z<\frac{1}{4}, (1-z)x<\frac{1}{4}$ មិនអាចពិតទេ។ វាត្រូវតែមានមួយដែលស្មើ1/4 រឺធំជាង។

4. តាង r ជាចំនួនចំណុចពណ៌ក្រហម។ តាង b ជាចំនួនចំណុចពណ៌ខៀវ។ យើងមាន

$b+r=2009$ ។

យើងដឹងថា គូចំណុចពណ៌ក្រហមមួយគូដែលឋិតនៅលើរង្វង់ឯកតាណាមួយ វាអាចឋិតនៅលើរង្វង់ឯកតាបានតែ 2 ផ្សេងគ្នាប៉ុណ្ណោះ។ ចំណុចពណ៌ក្រហមមានចំនួន r ដូច្នេះអាចបង្កើតបានគូចំណុចចំនួន

$$\binom{r}{2}=\frac{r(r-1)}{2}$$

ផ្សេងគ្នា។ ដូច្នេះមានចំណុចពណ៌ខៀវយ៉ាងច្រើន

$$2.\frac{r(r-1)}{2} = r(r-1)$$

ដូច្នេះ $b \le r(r-1)$ ។ យើងទាញបាន

$$2009 = b + r \le r(r-1) + r = r^2 \quad \Rightarrow r \ge 45$$

យើងមាន b ធំបំផុតពេល r តូចបំផុត ដូច្នេះពេល $r = 45 \Rightarrow b = 2009 - 45 = 1964$ ។