# គន្លឹះដោះស្រាយ

# ស្វ៊ីតចំនួនពិត

លំហាត់

លំហាត់ធ្លាប់ប្រឡងអន្តរជាតិ

លំហាត់ធ្លាប់ប្រឡងសិស្សពូកែថ្នាក់ជាតិ និង ខេត្ត

ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែថ្នាក់ជាតិ និង ខេត្ត

**លំហាត់ទី១**

គេឲ្យ $(x_n)$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលកំណត់ដោយ

$$x_1 = 1 \text{ និង } x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + x_n} + x_n$$

ចូរកំណត់តួទី២០១៩នៃស្វ៊ីត $(x_n)$។

**ដំណោះស្រាយ**. កំណត់តួទី២០១៩នៃស្វ៊ីត $(x_n)$

ជាដំបូងយើងនឹងបង្ហាញថា $x_n = \sqrt{n}$ ចំពោះ $n = 1, 2, 3, \ldots$

បើ $n = 1 \Longrightarrow x_1 = 1 = \sqrt{1}$ ពិត

បើ $n = 2 \Longrightarrow x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2} + x_1} + x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1} + 1 = \sqrt{2}$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k$ គឺ $x_k = \sqrt{k}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n = k + 1$ គឺ $x_{k+1} = \sqrt{k+1}$ ?

$$\begin{aligned} \text{គេមាន } x_{k+1} =& \frac{1}{\sqrt{k+1} + x_k} + x_k \\ =& \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} + \sqrt{k} \\ =& \sqrt{k+1} - \sqrt{k} + \sqrt{k} \\ =& \sqrt{k+1} \quad \text{ពិត} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $x_n = \sqrt{n},\ n = 1, 2, 3, \ldots$

យក $n = 2019$ គេបាន $\boxed{x_{2019} = \sqrt{2019}}$ □

**លំហាត់ទី២**

គេឲ្យស្ទីត $(x_n)$ កំណត់ដោយ $x_1 = x_2 = 1$ និង $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ ចំពោះ $n \geq 2$។

ក. ចូរបង្ហាញថា $x_{k+1}x_{k+2} - x_k x_{k+1} = (-1)^k$ ចំពោះ $\forall k \in \mathbb{N}$ ។

ខ. គេតាង arccot ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ cot ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\operatorname{arccot} x_1 - \operatorname{arccot} x_3 - \operatorname{arccot} x_5 - \cdots - \operatorname{arccot} x_{2011} = \operatorname{arccot} x_{2012}$$

**ដំណោះស្រាយ.**

ក. បង្ហាញថា $x_{k+1}x_{k+2} - x_k x_{k+1} = (-1)^k$ ចំពោះ $\forall k \in \mathbb{N}$

ចំពោះ $k = 1$ : $x_2x_3 - x_1x_4 = 1 \times 2 - 1 \times 3 = -1 = (-1)^1$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតរហូតដល់ $k = p$ គេបាន $x_{p+1}x_{p+2} - x_p x_{p+3} = (-1)^p$ ពិត

យើងនឹងបង្ហាញថាវាពិតរហូតដល់ $k = p+1$ ; $x_{p+2}x_{p+3} - x_{p+1}x_{p+4} = (-1)^{p+1}$ ?

គេបាន

$$\begin{aligned}
x_{p+2}x_{p+3} - x_{p+1}x_{p+4} &= x_{p+2}(x_{p+2} + x_{p+1}) - x_{p+1}(x_{p+3} + x_{p+2}) \\
&= x_{p+2}^2 + x_{p+1}x_{p+2} - x_{p+1}x_{p+3} - x_{p+1}x_{p+2} \\
&= x_{p+2}^2 - x_{p+1}(x_{p+1} + x_{p+2}) \\
&= x_{p+2}^2 - x_{p+1}x_{p+2} - x_{p+1}^2 \\
&= (x_{p+2} - x_{p+1})(x_{p+2} + x_{p+1}) - x_{p+1}x_{p+2} \\
&= x_p x_{p+3} - x_{p+1}x_{p+2} \\
&= -(x_{p+1}x_{p+2} - x_p x_{p+3}) \\
&= (-1)(-1)^p \\
&= (-1)^{p+1} \quad \text{ពិត}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{x_{k+1}x_{k+2} - x_k x_{k+3} = (-1)^k \quad \forall k \in \mathbb{N}}$

ខ. បង្ហាញថា $\operatorname{arccot} x_1 - \operatorname{arccot} x_3 - \operatorname{arccot} x_5 - \cdots - \operatorname{arccot} x_{2011} = \operatorname{arccot} x_{2012}$

គេមាន arccot ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ cot គេបាន

$a = \cot\alpha \Longrightarrow \alpha = \operatorname{arccot} a$

$b = \cot\beta \Longrightarrow \beta = \operatorname{arccot} b$

ហើយ $\cot(\alpha - \beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$

$\Longrightarrow \alpha - \beta = \operatorname{arccot}\left(\dfrac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}\right)$

$\Longrightarrow \operatorname{arccot} a - \operatorname{arccot} b = \operatorname{arccot}\left(\dfrac{ab+1}{b-a}\right)$

យក $a = x_{2i}, b = x_{2i+1}$ គេបាន

$$\operatorname{arccot} x_{2i} - \operatorname{arccot} x_{2i+1} = \operatorname{arccot}\left(\frac{x_{2i}x_{2i+1}}{x_{2i+1} - x_{2i}}\right) \quad (*)$$

គេមាន $x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \Longrightarrow x_{2i+1} = x_{2i} - x_{2i-1}$

$$\Longrightarrow x_{2i+1} - x_{2i} = x_{2i-1}$$

ហើយ $x_{k+1}x_{k+2} - x_k + x_{k+3} = (-1)^k \Longrightarrow x_{2i}x_{2i+1} - x_{2i-1} + x_{2i+2} = (-1)^{2i-1} = -1$

$$\Longrightarrow x_{2i}x_{2i+1} + 1 = x_{2i-1}x_{2i+2}$$

តាម $(*)$ គេបាន

$$\operatorname{arccot} x_{2i} - \operatorname{arccot} x_{2i+1} = \operatorname{arccot}\left(\frac{x_{2i-1}x_{2i+2}}{x_{2i-1}}\right) = \operatorname{arccot} x_{2i+2}$$

បើ $i = 1, \quad \operatorname{arccot} x_1 - \operatorname{arccot} x_3 = \operatorname{arccot} x_4 \quad ; x_1 = x_2$

បើ $i = 2, \quad \operatorname{arccot} x_4 - \operatorname{arccot} x_5 = \operatorname{arccot} x_6$

$- - - - - - - - - - - - - - - - - - -$

បើ $i = 1005, \operatorname{arccot} x_{2010} - \operatorname{arccot} x_{2011} = \operatorname{arccot} x_{2012}$

បូកអង្គនិងអង្គ គេបាន

$$\operatorname{arccot} x_1 - \operatorname{arccot} x_3 - \operatorname{arccot} x_5 - \cdots - \operatorname{arccot} x_{2011} = \operatorname{arccot} x_{2012}$$

ដូចនេះ $\boxed{\operatorname{arccot} x_1 - \operatorname{arccot} x_3 - \operatorname{arccot} x_5 - \cdots - \operatorname{arccot} x_{2011} = \operatorname{arccot} x_{2012}}$

□

**លំហាត់ទី៣**

គេឲ្យស្ទីត $(U_n)$ កំណត់ដោយ $U_1 = U_2 = 1$ និង $U_{n+1} = U_n + U_{n-1},\ n \geq 2$ ។
បង្ហាញថា $U_{2011}U_{2012} - U_{2010}U_{2013} = 1$ និង $U_{1042012}U_{1042013} - U_{1042011}U_{1042014} = -1$

**ដំណោះស្រាយ.**
បង្ហាញថា $U_{2011}U_{2012} - U_{2010}U_{2013} = 1$ និង $U_{1042012}U_{1042013} - U_{1042011}U_{1042014} = -1$
ជាដំបូងយើងនឹងបង្ហាញថា

$$U_{n+1}U_{n+2} - U_nU_{n+3} = (-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

បើ $n = 1: \quad U_2U_3 - U_1U_4 = 1 \times 2 - 1 \times 3 = -1 = (-1)^1$ ពិត
ឧបមាថាវាពិតរហូតដល់ $n = p$ គេបាន $U_{p+1}U_{p+2} - U_pU_{p+3} = (-1)^p$ ពិត
យើងនឹងបង្ហាញថាវាពិតរហូតដល់ $n = p + 1$ ; $U_{p+2}U_{p+3} - U_{p+1}U_{p+4} = (-1)^{p+1}$ ?
គេបាន

$$\begin{aligned}
U_{p+2}U_{p+3} - U_{p+1}U_{p+4} &= U_{p+2}(U_{p+2} + U_{p+1}) - U_{p+1}(U_{p+3} + U_{p+2}) \\
&= U_{p+2}^2 + U_{p+1}U_{p+2} - U_{p+1}U_{p+3} - U_{p+1}U_{p+2} \\
&= U_{p+2}^2 - U_{p+1}(U_{p+1} + U_{p+2}) \\
&= U_{p+2}^2 - U_{p+1}U_{p+2} - U_{p+1}^2 \\
&= (U_{p+2} - U_{p+1})(U_{p+2} + U_{p+1}) - U_{p+1}U_{p+2} \\
&= U_pU_{p+3} - U_{p+1}U_{p+2} \\
&= (-1)(U_{p+1}U_{p+2} - U_pU_{p+3}) \\
&= (-1)(-1)^p \\
&= (-1)^{p+1} \quad \text{ពិត}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $U_{n+1}U_{n+2} - U_nU_{n+3} = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
បើ $n = 2010, U_{2011}U_{2012} - U_{2010}U_{2013} = (-1)^{2010} = 1$
បើ $n = 1042011, U_{1042012}U_{1042013} - U_{1042011}U_{1042014} = (-1)^{1042011} = -1$

□

**លំហាត់ទី៤**

គេឲ្យស្វ៊ីត $(x_n)$ កំណត់ដោយ $x_1 = x_2 = 1$ និង $x_{n+1} = x_n + x_{n-1},\ n \geq 2$។ ស្វ៊ីត $(y_n)$ កំណត់ដោយ $y_n = |x_{n+4}x_{n-2} - x_{n+2}x_n|$ ចំពោះ $n \geq 3$។ ស្វ៊ីត $(z_n)$ កំណត់ដោយ $z_n - 9 = 4x_{n-2}x_nx_{n+2}x_{n+4}$ ចំពោះ $n \geq 3$។

ក. ចូរបង្ហាញថា $(y_n)$ ជាស្វ៊ីតថេរចំពោះ $n \geq 3$។ រួចទាញរកតម្លៃនៃតួ $y_{3042011}$។

ខ. ចូរបង្ហាញថា $(z_n)$ តួនីមួយៗជាការេប្រាកដ។

**ដំណោះស្រាយ.**

ក. បង្ហាញថា $(y_n)$ ជាស្វ៊ីតថេរចំពោះ $n \geq 3$

គេអាចសរសេរ
$$\begin{aligned}
y_n &= |x_{n+4}x_{n-2} - x_{n+2}x_n| \\
&= |(x_{n+3} + x_{n+2})x_{n-2} - x_{n+2}x_n| \\
&= |x_{n+3}x_{n-2} + x_{n+2}x_{n-2} - x_{n+2}x_n| \\
&= |x_{n+3}x_{n-2} + x_{n+2}(x_{n-2} - x_n)| \\
&= |x_{n+3}x_{n-2} - x_{n+2}x_{n-1}| \\
&= |x_{n+3}(x_{n-1} - x_{n-3}) - x_{n+2}x_{n-1}| \\
&= |-x_{n+3}x_{n-3} + x_{n-1}x_{n+3} - x_{n+2}x_{n-1}| \\
&= |-x_{n+3}x_{n-3} + x_{n-1}(x_{n+3} - x_{n+2})| \\
&= |-x_{n+3}x_{n-3} + x_{n-1}x_{n+1}| \\
&= |x_{n+3}x_{n-3} - x_{n+1}x_{n-1}| \\
&= y_{n-1} \quad \text{ថេរ}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $(y_n)$ ជាស្វ៊ីតថេរ
ទាញរកតម្លៃនៃតួ $y_{3042011}$
តាមសម្រាយខាងលើ $(y_n)$ ជាស្វ៊ីតថេរចំពោះ $n \geq 3$ គេបាន
$y_n = y_{n-1} = \cdots = y_{3042011} = \cdots = y_3 = |x_7x_1 - x_5x_3| = |13 \times 1 - 5 \times 2| = 3$
ដូចនេះ $y_{3042011} = 3$

ខ. បង្ហាញថា $(z_n)$ តួនីមួយៗជាការេប្រាកដ
គេមាន $y_n = \cdots = y_3 = 3 = |x_{n+4}x_{n-2} - x_{n+2}x_n|$

$\Longrightarrow x_{n+4}x_{n-2} - x_{n+2}x_n = \pm 3$

$\Longrightarrow x_{n+4}x_{n-2} = \pm 3 + x_{n+2}x_n$

ហើយ $z_n - 9 = 4x_{n-2}x_nx_{n+2}x_{n+4}$ គេបាន

$$\begin{aligned} z_n &= 4x_{n+2}x_n(\pm 3 + x_{n+2}x_n) + 9 \\ &= \pm 12x_{n+2}x_n + 4x_{n+2}^2x_n^2 + (\pm 3)^2 \\ &= (2x_{n+2}x_n \pm 3)^2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $z_n = (2x_{n+2}x_n \pm 3)^2$ តួនីមួយៗជាការេប្រាកដ

$\square$

**លំហាត់ទី៥**

គេមាន $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}, \forall x \in \mathbb{R}$ ។ ចូរកំណត់រក $\underbrace{(fofo\dots of)}_{2013\text{ដង}}(x)$។

**ដំណោះស្រាយ.** កំណត់រក $\underbrace{(fofo\dots of)}_{2013\text{ដង}}(x)$

របៀបទី១ គេមាន $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

គេអាចសរសេរ

$$(fof)(x) = f[f(x)] = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n$ គឺ $\underbrace{(fofo\dots of)}_{n\text{ដង}}(x) = f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតរហូតដល់ $n+1$ គឺយើងត្រូវបង្ហាញថា

$$\underbrace{(fofo\dots of)}_{(n+1)\text{ដង}}(x) = f_{n+1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1+(1+n)x^2}}$$

គេអាចសរសេរ

$$\underbrace{(fofo\dots of)}_{(n+1)}(x) = f[f_n(x)] = \frac{f_n(x)}{\sqrt{1+f_n^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+nx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}} \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $\underbrace{(fofo\dots of)}_{n\text{ដង}}(x) = f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

យក $n = 2013$ គេបាន $\underbrace{(fofo\dots of)}_{2013\text{ដង}}(x) = f_{2013}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+2013x^2}}$

របៀបទី២ តាងស្វ៊ីតជំនួយ

$$\begin{aligned}
a_1 =& f(x)\\
a_2 =& (fof)(x) = f(a_1) = \frac{a_1}{\sqrt{1+a_1^2}}\\
a_3 =& (fofof)(x) = f(a_2) = \frac{a_2}{\sqrt{1+a_2^2}}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_n =& f(a_{n-1}) = \frac{a_{n-1}}{\sqrt{1+a_{n-1}^2}}
\end{aligned}$$

គេអាចសរសេរ

$$\begin{aligned}
a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{1+a_n^2}} \iff & \frac{1}{a_{n+1}^2} = \frac{1+a_n^2}{a_n^2}\\
\Longrightarrow & \frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} = 1
\end{aligned}$$

តាង $b_n = \dfrac{1}{a_n^2} \quad ; b_1 = \dfrac{1}{a_1^2} = \dfrac{1+x^2}{x^2}$

គេបាន $b_{n+1} - b_n = 1$

ដូចនេះ $(b_n)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d = 1$ និងតួទី១ $b_1 = \dfrac{1+x^2}{x^2}$ គេបាន

$b_n = b_1 + (n-1)d = 1 + \dfrac{1}{x^2} + n - 1 = n + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{nx^2+1}{x^2}$

តែ $b_n = \dfrac{1}{a_n^2} \Longrightarrow a_n^2 = \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{x^2}{1+nx^2}$

ដូចនេះ $\underbrace{(fofo\dots of)}_{n\text{ដង}}(x) = a_n = \dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

យក $n = 2013$ គេបាន $\underbrace{(fofo\dots of)}_{2013\text{ដង}}(x) = a_{2013} = \dfrac{x}{\sqrt{1+2013x^2}}$

□

**លំហាត់ទី៦**

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^3+9x+6}{3x^2+6x+7}$ ។ ចូរគណនា $f_n(x)=\underbrace{(fofo\dots of)}_{n\text{ដង}}(x)$ ។

**ដំណោះស្រាយ**. គណនា $f_n(x)=\underbrace{(fofo\dots of)}_{n\text{ដង}}(x)$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ
$$\begin{aligned} a_1 &= f(x)\\ a_2 &= (fof)(x)=f(a_1)\\ a_3 &= (fofof)(x)=f(a_2)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_n &= f(a_{n-1}) \end{aligned}$$

គេអាចសរសេរ $a_{n+1}=f(a_n)=\dfrac{a_n^3+9a_n+6}{3a_n^2+6a_n+7}$

មានសមីការសម្គាល់ $r=\dfrac{r^3+9r+6}{3r^2+6r+7}$
$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow 3r^3+6r^2+7r-r^3-9r-6=0\\ &\Longleftrightarrow 2r^3+6r^2-2r-6=0\\ &\Longleftrightarrow r^3+3r^2-r-3=0\\ &\Longleftrightarrow r^2(r+3)-(r+3)=0\\ &\Longleftrightarrow (r+3)(r^2-1)=0\\ &\Longrightarrow r=-3, r=1, r=-1 \end{aligned}$$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $b_n=\dfrac{a_n+3}{a_n-1}\Longleftrightarrow b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}+3}{a_{n+1}-1}$
$$\begin{aligned} &=\frac{\dfrac{a_n^3+9a_n+6}{3a_n^2+6a_n+7}+3}{\dfrac{a_n^3+9a_n+6}{3a_n^2+6a_n+7}-1}\\ &=\frac{a_n^3+9a_n^2+27a_n+27}{a_n^3-3a_n^2+3a_n-1}\\ &=\left(\frac{a_n+3}{a_n-1}\right)^3\\ &= b_n^3\Longrightarrow \ln b_{n+1}=3\ln b_n \quad (*) \end{aligned}$$

តាង $c_n=\ln b_n$ តាម $(*)$ គេបាន $c_{n+1}=3c_n$

នោះ $(c_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលផលធៀបរួម $q=3$ និងតួទី១

$c_1=\ln b_1=\ln\left(\dfrac{a_1+3}{a_1-1}\right)=\ln\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^3$

$c_n = c_1 q^{n-1} = 3^{n-1}\ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^3 = \ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{3^n}$

តែ $c_n = \ln b_n \Longrightarrow b_n = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{3^n}$

ម្យ៉ាងទៀត $b_n = \frac{a_n+3}{a_n-1} \Longrightarrow a_n = \frac{b_n+3}{b_n-1} = \frac{\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{3^n}+3}{\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{3^n}-1}$

ដូចនេះ $f_n(x) = \frac{(x+3)^{3^n}+3(x-1)^{3^n}}{(x+3)^{3^n}-(x-1)^{3^n}}$ □

**លំហាត់ទី៧**

តាង $u_0, u_1, \ldots, u_n$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលបំពេញទំនាក់ទំនង $(3-u_{n+1})(6+u_n) = 18$ និង $u_0 = 3$ ។ ចូរគណនា $\sum_{k=0}^{2011}\frac{1}{u_k}$ ។

**ដំណោះស្រាយ.** គណនា $\sum_{k=0}^{2011}\frac{1}{u_k}$

គេមាន $(3-u_{n+1})(6+u_n) = 18$

$$\Longleftrightarrow 18 + 3u_n - 6u_{n+1} - u_n u_{n+1} = 18$$

$$\Longleftrightarrow 3u_n - 6u_{n+1} - u_n u_{n+1} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{3}{u_{n+1}} - \frac{6}{u_n} - 1 = 0 \quad (*)$$

តាង $v_n = \frac{1}{u_n}$ នោះ $v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{3}$

តាម $(*)$ គេបាន $3v_{n+1} - 6v_n - 1 = 0 \quad (1)$

មានសមីការសម្គាល់ $3c - 6c - 1 = 0 \quad (2) \Longrightarrow c = -\frac{1}{3}$

យក $(1)-(2)$ គេបាន $3(v_{n+1}) - 6(v_n - c) = 0 \Longrightarrow v_{n+1} + \frac{1}{3} = 2\left(v_n + \frac{1}{3}\right) \quad (**)$

តាង $w_n = v_n + \frac{1}{3}; \quad w_0 = v_1 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

តាម $(**)$ គេបាន $w_{n+1} = 2w_n$

នោះ $(w_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $q = 2$ និងតួទី១ $w_0 = \frac{2}{3}$

នោះ $w_n = w_0 q^n = \frac{2}{3}\times 2^n = \frac{2^{n+1}}{3}$

តែ $w_n = v_n + \frac{1}{3} \Longrightarrow v_n = \frac{2^{n+1}-1}{3}$

ហើយ $\frac{1}{u_n} = v_n = \frac{2^{n+1}-1}{3} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{2011} \frac{1}{u_k}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2011}(2^{k+1}-1) \\ &= \frac{1}{3}(2+2^2+\cdots+2^{2012}-2012) \\ &= \frac{1}{3}\left(2 \times \frac{2^{2012}-1}{2-1} - 2012\right) \\ &= \frac{1}{3}(2^{2013}-2014) \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sum_{k=0}^{2011} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{3}(2^{2013}-2014)}$ □

**លំហាត់ទី៨**

គេតាង $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ និង $f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x)), n = 1, 2, \dots$ ។ គណនា $f_{2012}(2012)$។

**ដំណោះស្រាយ.** គណនា $f_{2012}(2012)$

គេមាន $f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x))$

បើ $n = 1$ នោះ $f_1(x) = f_0(f_0(x)) = \frac{1}{1-f_0(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$

បើ $n = 2$ នោះ $f_2(x) = f_0(f_1(x)) = \frac{1}{1-f_1(x)} = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = x$

បើ $n = 3$ នោះ $f_3(x) = f_0(f_2(x)) = \frac{1}{1-f_2(x)} = \frac{1}{1-x} = f_0(x)$

ជាទូទៅ $f_0(x) = f_3(x) = \cdots = f_{3k}(x) = \frac{1}{1-x}$

$$f_1(x) = f_4(x) = \cdots = f_{3k+1}(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$f_2(x) = f_5(x) = \cdots = f_{3k+2}(x) = x$$

ដោយ $2012 = 3 \times 670 + 2$ គេបាន $f_{2012}(x) = x$

ដូចនេះ $\boxed{f_{2012}(2012) = 2012}$ □

**លំហាត់ទី៩**

គេតាង $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ ជាអនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$f(1,1)=2, f(m+1,n)=f(m,n)+m$ និង $f(m,n+1)=f(m,n)-n, \forall m,n\in\mathbb{N}$។

ចូររកគ្រប់គូ $(p,q)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(p,q)=2013$ ។

**ដំណោះស្រាយ**. រកគ្រប់គូ $(p,q)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(p,q)=2013$

គេមាន $f(m,n+1)=f(m,n)-n$

យក $m=1$ គេបាន $\quad f(1,n+1)=f(1,n)-n$

$$f(1,n)=f(1,n-1)-(n-1)$$
$$f(1,n-1)=f(1,n-2)-(n-2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(1,3)=f(1,2)-2$$
$$f(1,2)=f(1,1)-1$$

បូកអង្គនិងអង្គ គេបាន

$$f(1,n)=f(1,1)-(1+2+\cdots+(n-1))=2-\frac{n(n-1)}{2}$$

ម្យ៉ាងទៀត $\quad f(m+1,n)=f(m,n)+m$ គេបាន

$$f(m,n)=f(m-1,n)+(m-1)$$
$$f(m-1,n)=f(m-2,n)+(m-2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(3,n)=f(2,n)+2$$
$$f(2,n)=f(1,n)+1$$

បូកអង្គនិងអង្គ គេបាន

$$f(m,n)=f(1,n)+(1+2+\cdots+(m-1))=2-\frac{n(n-1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}$$

$$f(p,q)=2-\frac{q(q-1)}{2}+\frac{p(p-1)}{2}$$

តែ$f(p,q)=2013 \iff \dfrac{p^2-p}{2}-\dfrac{q^2-q}{2}=2011$

$$\iff (p-q)(p+q)-(p-q)=2011\times 2$$

$$\iff (p-q)(p+q-1)=1\times 4022=2\times 2011$$

$$\implies \begin{cases} p-q=1 \\ p+q-1=4022 \end{cases} \implies p=2012, q=2011$$

$$\implies \begin{cases} p-q=2 \\ p+q-1=2011 \end{cases} \implies p=1007, q=1005$$

ដូចនេះ $\boxed{(p,q)=\{(2012,2011),(1007,1005)\}}$ □

**លំហាត់ទី១០**

គេមានស្វ៊ីត៖ $\begin{cases} u_0=4, v_0=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{3}{4}u_n-\dfrac{1}{4}v_n, \forall n\in\mathbb{N} \\ v_{n+1}=\dfrac{3}{4}v_n-\dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$

ក. ចំពោះគ្រប់ $n$ ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន គេយក $w_n=u_n+v_n$ ។ ចូរបង្ហាញថា $(w_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n=w_0+w_1+\cdots+w_n$ ។ រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$។

គ. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $x_n=u_n-v_n$ ជាស្វ៊ីតថេរចំពោះគ្រប់ $n$។ រួចទាញរកតម្លៃ $x_n$។

ឃ. ចូរគណនា $u_n$ និង $v_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$។ រួចទាញរកតម្លៃ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$។

**ដំណោះស្រាយ.**

ក. បង្ហាញថា $(w_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

$$\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{3}{4}u_n-\dfrac{1}{4}v_n \quad (1) \\ \\ v_{n+1}=\dfrac{3}{4}v_n-\dfrac{1}{4}u_n \quad (2) \end{cases}$$

យក $(1)+(2)$ គេបាន $u_{n+1}+v_{n+1}=\frac{2}{4}u_n+\frac{2}{4}v_n=\frac{1}{2}(u_n+v_n) \Longrightarrow w_{n+1}=\frac{1}{2}w_n$
នោះ $(w_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម $q=\frac{1}{2}$ និងតួទី១ $w_0=u_0+v_0=6$

ខ. គណនាផលបូក $S_n=w_0+w_1+\cdots+w_n$
ដោយ $(w_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនោះគេបាន

$$\begin{aligned} S_n=w_0+w_1+\cdots+w_n &= \frac{w_0(q^{n+1}-1)}{q-1} \\ &= \frac{6\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right)}{\frac{1}{2}-1} \\ &= 12\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

ទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty} 12\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=12$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n=12\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right),\ \lim\limits_{n\to+\infty} S_n=12}$

គ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x_n=u_n-v_n$ ជាស្វ៊ីតថេរចំពោះគ្រប់ $n$
យក $(1)-(2)$ គេបាន
$u_{n+1}-v_{n+1}=u_n-v_n \Longleftrightarrow x_{n+1}=x_n$
នោះ $(x_n)$ ជាស្វ៊ីតថេរ
ទាញរកតម្លៃ $x_n$

ដោយ $(x_n)$ ជាស្វ៊ីតថេរ គេបាន
$x_n=x_{n-1}=\cdots=x_0=u_0-v_0=2$

ដូចនេះ $\boxed{x_n=2}$

ឃ. គណនា $u_n$ និង $v_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$

តាមសម្រាយខាងលើគេបាន

$$\begin{cases} u_n + v_n = \dfrac{6}{2^n} & (3) \\ u_n - v_n = 2 & (4) \end{cases}$$

យក $(3) + (4)$ គេបាន $2u_n = \dfrac{6}{2^n} + 2 \Longrightarrow u_n = \dfrac{3}{2^n} + 1$

យក $(3 - (4)$ គេបាន $2v_n = \dfrac{6}{2^n} - 2 \Longrightarrow v_n = \dfrac{3}{2^n} - 1$

ទាញរកតម្លៃ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{2^n} + 1\right) = 1$

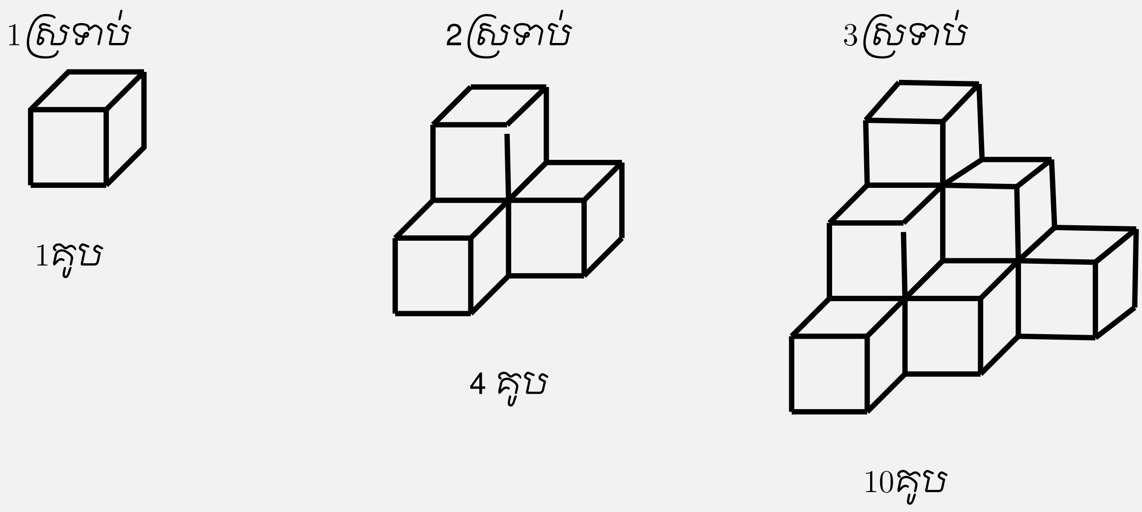
និង $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{2^n} - 1\right) = -1$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1, \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -1}$

□

## លំហាត់ទី១១

គេឲ្យវិធីបង្កើតដូចខាងក្រោមជាមួយបណ្តាគូបកើនឡើង ១០០ដងនៃចំនួនគូប។




ចូររកចំនួនស្រទាប់ដែលត្រូវបង្កើត។

**ដំណោះស្រាយ**. រកចំនួនស្រទាប់ដែលត្រូវបង្កើត

តាង $u_n$ ជាស្រទាប់ទី $n$

យើងពិនិត្យឃើញថាស្រទាប់អាចតាងដូចខាងក្រោម

$u_1 = \frac{1\times 2}{2}$

$u_2 = \frac{1\times 2}{2} + \frac{2\times 3}{2}$

$u_3 = \frac{1\times 2}{2} + \frac{2\times 3}{2} + \frac{3\times 4}{2}$

..............................................................

$$\begin{aligned}
u_n =& \frac{1\times 2}{2} + \frac{2\times 3}{2} + \frac{3\times 4}{2} + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} \\
=& \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + 1 + 2 + \cdots + n) \\
=& \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) \\
=& \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1+3) \\
=& \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)
\end{aligned}$$

ដូចនេះ ដើម្បីឲ្យផលបូកចំនួនគូប $u_n$ កើន 100 ចំនួនស្រទាប់គឺ $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 100n$

$\Longrightarrow n^2 + 3n - 598 = 0 \Longrightarrow n = 23, n = -26 < 0$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំនួនស្រទាប់គឺ } n = 23}$

□

**លំហាត់ទី១២**

គេឲ្យស្វ៊ីត $(x_n)$ មួយកំណត់ដោយ $x_1 = 1$ និង $x_{n+1} = 1 + x_n x_{n-1} \ldots x_2 x_1$ ចំពោះ $n = 1, 2, 3\ldots$ ។ គេតាង $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$។ ចូរគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$។

**ដំណោះស្រាយ.** គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

គេមាន $x_{n+1} = 1 + x_1 x_2 \ldots x_n$

$$\begin{aligned}
&\iff x_{n+1} - 1 = x_n(x_1x_2\ldots x_{n-1} + 1 - 1)\\
&\iff x_{n+1} - 1 = x_n(x_n - 1)\\
&\iff \frac{1}{x_{n+1}-1} = \frac{1}{x_n(x_n-1)}\\
&\iff \frac{1}{x_{n+1}-1} = \frac{1}{x_n-1} - \frac{1}{x_n}\\
&\implies \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n-1} - \frac{1}{x_{n+1}-1}\\
&\implies \frac{1}{x_k} = \frac{1}{x_k-1} - \frac{1}{x_{k+1}-1}
\end{aligned}$$

ហើយ $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x_1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{x_k}\\
&= \frac{1}{x_1} + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{x_k-1} - \frac{1}{x_{k+1}-1}\right)\\
&= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2-1} - \frac{1}{x_{n+1}-1}\\
&= 2 - \frac{1}{x_{n+1}-1} \quad \text{ព្រោះ} \quad x_1 = 1, x_2 = 1 + x_1 = 2
\end{aligned}$$

តែ $x_{n+1} - 1 = x_1x_2\ldots x_n > x_1(1+x_1)^{n-1} = 2^{n-1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n-1} = +\infty$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-1) = +\infty$

$\implies \frac{1}{x_{n+1}-1} = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2}$ □

## លំហាត់ទី១៣

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x,y)$ មួយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌបីខាងក្រោមចំពោះ គ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន $x$ និង $y$:

(i) $f(0,y)=1+y$

(ii) $f(x+1,0)=f(x,1)$

(iii) $f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y))$

ក. ចូរគណនា $f(1,n),f(2,n),f(3,n)$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$។

ខ. ចូរគណនា $f(4,2013)$ ។

**ដំណោះស្រាយ.**

ក. គណនា $f(1,n),f(2,n),f(3,n)$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$

(iii) : $f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y))$

យក $x=0,y=n-1$ គេបាន $f(1,n)=f(0,f(1,n-1))=1+f(1,n-1)$ តាម (i)

តាង $a_n=f(1,n)$ គេបាន

$a_n-a_{n-1}=1$

នោះ $(a_n)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $d=1$ និងតួទី១

$a_0=f(1,0)=f(0,1)=2$ តាម (ii)

$a_n=a_0+nd=2+n$

ដូចនេះ $\boxed{f(1,n)=a_n=n+2}$

តាម (iii) យក $x=1,y=n-1$ គេបាន $f(2,n)=f(1,f(2,n-1))=2+f(2,n-1)$

តាង $b_n=f(2,n)$ គេបាន

$b_n-b_{n-1}=2$

នោះ $(b_n)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $d=2$ និងតួទី១

$b_0=f(2,0)=f(1,1)=1+2=3$ តាម (ii)

$b_n=b_0+nd=3+2n$

ដូចនេះ $\boxed{f(2,n)=b_n=2n+3}$

តាម (iii) យក $x=2,y=n-1$ គេបាន $f(3,n)=f(2,f(3,n-1))=3+2f(3,n-1)$

តាង $c_n=f(3,n)$ គេបាន

$c_n-2c_{n-1}=3\iff c_n+3=2(c_{n-1}+3)$

នោះ $(c_n+3)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $q=2$ និងតួទី១

$c_0 + 3 = f(3,0) + 3 = f(2,1) + 3 = 2 + 3 + 3 = 8$ តាម (ii)

$c_n + 3 = (c_0 + 3)q^n \Longrightarrow c_n = 8 \times 2^n - 3 = 2^{n+3} - 3$

ដូចនេះ $\boxed{f(3,n) = c_n = 2^{n+3} - 3}$

ខ. គណនា $f(4, 2013)$

តាម (iii) យក $x = 3, y = n-1$ គេបាន $f(4,n) = f(3, f(4, n-1)) = 2^{3+f(4,n-1)} - 3$

$f(4,0) = f(3,1) = 2^4 - 3 = 2^{2^2} - 3$ មាននិទស្សន្ត2 ចំនួន $0+2$ ដង

$f(4,1) = 2^{3+f(4,0)} == 2^{2^{2^2}} - 3$ មាននិទស្សន្ត2 ចំនួន $1+2$ ដង

.................................................................................

$f(4,n) = 2^{2^{\cdots^2}} - 3$ មាននិទស្សន្ត2 ចំនួន $n+2$ ដង

យក $n = 2013$ នោះ

$f(4,2013) = 2^{2^{2^{\cdots^2}}} - 3$ មាននិទស្សន្ត2 ចំនួន $2013+2$ ដង

ដូចនេះ $\boxed{f(4,2013) = 2^{2^{2^{\cdots^2}}} - 3 \quad \text{មាននិទស្សន្ត2 ចំនួន } 2015 \text{ ដង}}$

□

**លំហាត់ទី១៤**

គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត $(u_n)$ ដែលកំណត់ដោយ $u_1 = \dfrac{1}{2}$ និង $u_n = \dfrac{2n-3}{2n}u_{n-1}$ ចំពោះ $n = 1, 2, \ldots$។ ចូរបង្ហាញថា $u_1 + u_2 + \cdots + u_n < 1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n$។

**ដំណោះស្រាយ**. បង្ហាញថា $u_1 + u_2 + \cdots + u_n < 1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n$

គេមាន $u_n = \dfrac{2n-3}{2n}u_{n-1}$

$\iff \quad 2nu_n = 2nu_{n-1} - 3u_{n-1}$

$\iff \quad 2(n-1)u_{n-1} - 2nu_n = u_{n-1}$

$\iff \quad 2(k-1)u_{k-1} - 2ku_k = u_{k-1}$

យក $k = 2, 3, \dots, n$

$$u_1 = 2u_1 - 4u_2$$

$$u_2 = 4u_2 - 6u_3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_n = 2nu_n - (2n+2)u_{n+1}$$

បូកអង្គនិងអង្គគេបាន

$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1 - 2(n+1)u_{n+1}$

ដោយ $u_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន គេបាន $u_1 + u_2 + \cdots + u_n < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ □

**លំហាត់ទី១៥**

គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $u_n$ កំណត់ដោយ $u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = -1$ និង $u_n = u_{n-1} \times u_{n-3}$ ចំពោះ $n \geq 4$។ ចូរគណនាតម្លៃមួយតួដំបូងនិងតួទី 2013។

**ដំណោះស្រាយ**. គណនាតម្លៃមួយតួដំបូងនិងតួទី 2013

គេមាន

$u_1 = 1$

$u_2 = 1$

$u_3 = -1$

$u_4 = u_3 \times u_1 = 1 \times (-1) = -1$

$u_5 = u_4 \times u_2 = (-1) \times (1) = -1$

$u_6 = u_5 \times u_3 = (-1) \times (-1) = 1$

$u_7 = u_6 \times u_4 = 1 \times (-1) = -1$

$u_8 = u_7 \times u_5 = (-1) \times (-1) = 1$

គេបាន

$u_9 = -1, u_{10} = -1, u_{11} = -1, u_{12} = -1, u_{13} = 1, u_{14} = -1, u_{15} = -1, u_{16} = 1$

$, u_{17} = -1, u_{18} = -1, u_{19} = -1, u_{20} = -1, u_{21} = 1$

គេបាន $(u_n)$ ជាស្វ៊ីតខួបដែលខួបនីមួយៗស្មើនឹង 7

ហើយ $2013 = 7 \times 287 + 4$ នោះបញ្ជាក់ថា $u_{2013}$ ជាតួទី 4 នៅក្នុងខួបទី 287។

ដូចនេះ $u_{2013} = -1$ □

## លំហាត់ទី១៦

គេឲ្យអនុគមន៍ $g(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $g(x)+g(y)=g(x+y)-xy-1$ ដែល $x,y$ ជាចំនួនពិត។ បើ $g(1)=1$ ចូររកគ្រប់ចំនួនគត់ $n$ ដែល $n\in\mathbb{Z}$ និង $n\neq 1$ ដែល $g(n)=n$។

**ដំណោះស្រាយ**. រកគ្រប់ចំនួនគត់ $n$ ដែល $n\in\mathbb{Z}$ និង $n\neq 1$ ដែល $g(n)=n$

គេមាន $g(x)+g(y)=g(x+y)-xy-1$

យក $x=k, y=1$ គេបាន $g(k+1)-g(k)=g(1)+k+1=k+2$

បើ $k=1$ នោះ $g(2)-g(1)=3$

បើ $k=2$ នោះ $g(3)-g(2)=4$

បើ $k=3$ នោះ $g(4)-g(3)=5$

..................................................

បើ $k=n-1$ នោះ $g(n)-g(n-1)=n+1$

បូកអង្គនិងអង្គ គេបាន $g(n)-g(1)=1+2+\cdots+(n+1)-3$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}-3$$

នាំឲ្យ $g(n)=\dfrac{n^2+3n+2}{2}-2$

តែ 
$$\begin{aligned} g(n)=n &\Longleftrightarrow \frac{n^2+3n+2}{2}-2=n \\ &\Longleftrightarrow n^2+3n-2-4=2n \\ &\Longleftrightarrow n^2+n-2=0 \\ &\Longrightarrow n=-2 \quad \text{ព្រោះ} \quad n\neq 1 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{n=-2}$ □

## លំហាត់ទី១៧

គេឲ្យស្វ៊ីត $(u_n)$ កំណត់ដោយ

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2013u_n}{2014}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

ហើយ $S_n$ ជាស្វ៊ីតកំណត់ដោយ $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{u_{k+1} - 1}$។ ចូរគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$។

**ដំណោះស្រាយ.** គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

គេមាន $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2013u_n}{2014} = u_n + \dfrac{u_n(u_n - 1)}{2014}$

ដោយ $u_1 = 2$ គេទាញបាន $2 = u_1 < u_2 < \cdots < u_n$

នោះបញ្ជាក់ថា $(u_n)$ ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនកើន

ឧបមាថា $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \quad (l > 2)$ គេបាន

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^2 + 2013u_n}{2014} \iff l = \frac{l^2 + 2013l}{2014}$$
$$\implies \quad l = 0, \quad l = -1 \quad \text{មិនយកព្រោះ}(l > 2)$$

នោះ $(u_n)$ ជាស្វ៊ីតមិនទាល់លើ នាំឲ្យលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$

ម៉្យាងទៀត $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2013u_n}{2014} \iff \dfrac{2014(u_{n+1} - u_n)}{u_n - 1} = u_n$

$$\iff \frac{2014(u_{n+1} - u_n)}{(u_n - 1)(u_{n+1} - 1)} = \frac{u_n}{u_{n+1} - 1}$$
$$\iff \frac{2014(u_{n+1} - 1 - (u_n - 1))}{(u_n - 1)(u_{n+1} - 1)} = \frac{u_n}{u_{n+1} - 1}$$
$$\iff 2014\left(\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}\right) = \frac{u_n}{u_{n+1} - 1}$$
$$\iff \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{u_{k+1} - 1} = 2014\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{u_k - 1} - \frac{1}{u_{k+1} - 1}\right)$$

$$\iff \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{u_{k+1}-1} = 2014\left(\frac{1}{u_1-1} - \frac{1}{u_{n+1}-1}\right)$$
$$\iff \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{u_{k+1}-1} = 2014\left(1 - \frac{1}{u_{n+1}-1}\right)$$
$$\iff S_n = 2014\left(1 - \frac{1}{u_{n+1}-1}\right)$$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-1) = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{u_{n+1}-1} = 0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2014$ □

**លំហាត់ទី១៨**

ចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃចំនួនគត់ $n$ ស្វ៊ីតមួយកំណត់ដូចខាងក្រោម

$$u_0 = 0, u_{2n} = u_n, u_{2n+1} = 1 - u_n$$

ចូរកំណត់តម្លៃនៃ $u_{1998}$។

**ដំណោះស្រាយ**. កំណត់តម្លៃនៃ $u_{1998}$

$$\begin{aligned}
u_{1998} =& u_{999} = u_{2\times 499+1} = 1 - u_{499}\\
=& 1 - u_{2\times 249+1} = 1 - 1 + u_{249} = u_{249}\\
=& u_{2\times 124+1} = 1 - u_{124} = 1 - u_{2\times 62}\\
=& 1 - u_{62} = 1 - u2 \times 31 = 1 - 1 + u_{31}\\
=& 1 - u_{2\times 15+1} = 1 - 1 + u_{15} = u_{15}\\
=& u_{2\times 7+1} = 1 - u_7 = 1 - u_{2\times 3+1}\\
=& 1 - 1 + u_3 = u_3 = u_{2\times 1+1} = 1 - u_1\\
=& 1 - u_{2\times 0+1} = 1 - 1 - u_0 = u_0 = 0
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $u_{1998} = 0$ □

**លំហាត់ទី១៩**

ចូរដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$$

ដែល $a, b, c, d, e, f$ គឺជាតួរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តនិងមានផលសងរួមមិនសូន្យ។

**ដំណោះស្រាយ**. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} ax+by=c & (1) \\ dx+ey=f & (2) \end{cases}$$

យក $e\times(1)-b\times(2)$ គេបាន $(ae-bd)x=ce-bf \Longrightarrow x=\dfrac{ce-bf}{ae-bd}$

យក $d\times(1)-a\times(2)$ គេបាន $(-ae+bd)y=cd-af \Longrightarrow y=\dfrac{cd-af}{bd-ae}$

ដោយ $a, b, c, d, e, f$ ជាតួរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត គេបាន

$b=a+t, c=a+2t, d=a+3t, e=a+4t, f=a+5t$ គេបាន

$$\begin{aligned} x=\frac{ce-bf}{ae-bd} &= \frac{(a+2t)(a+4t)-(a+t)(a+5t)}{a(a+4t)-(a+t)(a+3t)} \\ &= \frac{a^2+6at+8t^2-a^2-6at-5t^2}{a^2+4at-a^2-4at-3t^2} \\ &= \frac{3t^2}{-3t^2}=-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y=\frac{cd-af}{bd-ae} &= \frac{(a+2t)(a+3t)-a(a+5t)}{(a+t)(a+3t)-a(a+4t)} \\ &= \frac{a^2+5at+6t^2-a^2-5at}{a^2+4at+3t^2-a^2-4at} \\ &= \frac{6t^2}{3t^2}=2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $(x,y)=(-1,2)$ □

**លំហាត់ទី២០**

ពិនិត្យស្វ៊ីត $(a_n)$ កំណត់ដូចខាងក្រោម

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 2, n = 1, 2, 3, \dots \\ a_{n+2}a_n + a_{n+1}a_{n+1} - a_{n+1}a_n = 0 \end{cases}$$

ក. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $(a_n)$។

ខ. កំណត់តម្លៃ $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$។

**ដំណោះស្រាយ.**

ក. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $(a_n)$

បើ $n = 1, \quad a_3a_1 + a_2a_2 - a_2a_1 = 0 \Longrightarrow a_3 = -2$

បើ $n = 2, \quad a_4a_2 + a_3a_3 - a_3a_2 = 0 \Longrightarrow a_4 = -4$

បើ $n = 3, \quad a_5a_3 + a_4a_4 - a_4a_3 = 0 \Longrightarrow a_5 = 4$

បើ $n = 4, \quad a_6a_4 + a_5a_5 - a_5a_4 = 0 \Longrightarrow a_6 = 8$

បើ $n = 5, \quad a_7a_5 + a_6a_6 - a_6a_5 = 0 \Longrightarrow a_7 = -8$

បើ $n = 6, \quad a_8a_6 + a_7a_7 - a_7a_6 = 0 \Longrightarrow a_8 = -16$

បើ $n = 7, \quad a_9a_7 + a_8a_8 - a_8a_7 = 0 \Longrightarrow a_9 = 16$

ដូចនេះ យើងអាចកំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត $(a_n)$ គឺ $\begin{cases} a_{2m-1} = (-2)^{m-1} \\ a_{2m} = -(-2)^m \end{cases}$

យើងនឹងស្រាយថាការសន្មតនេះពិត

បើ $m = 1$ នោះ $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \end{cases}$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $m = k$ គឺ $\begin{cases} a_{2k-1} = (-2)^{k-1} \\ a_{2k} = -(-2)^k \end{cases}$ ពិត

ម្យ៉ាងទៀត បើ $n = 2k - 1$ គេបាន

$$\begin{aligned} a_{2k+1}a_{2k-1}+a_{2k}a_{2k}-a_{2k}a_{2k-1}=0 &\Longrightarrow (-2)^{k-1}a_{2k+1}+(-2)^{2k}+(-2)^{2k-1}=0\\ &\Longrightarrow (-2)^{k}a_{2k+1}=-(-2)^{2k}+2(-2)^{2k}\\ &\Longrightarrow a_{2k+1}=(-2)^{k}\quad \text{ពិត}\quad (*) \end{aligned}$$

បើ $n=2k$ គេបាន

$$\begin{aligned} a_{2k+2}a_{2k}+a_{2k+1}a_{2k+1}-a_{2k+1}a_{2k}=0 &\Longrightarrow -(-2)^{k}a_{2k+2}+(-2)^{2k}+(-2)^{2k}=0\\ &\Longrightarrow -(-2)^{k}a_{2k+2}=(-2)(-2)^{2k}\\ &\Longrightarrow a_{2k+2}=-(-2)^{k+1}\quad \text{ពិត}\quad (**) \end{aligned}$$

តាម $(*)$ & $(**)$ ពិតចំពោះគ្រប់ $m\in\mathbb{N}^*$

ដូចនេះ $a_n=\begin{cases}(-2)^{\frac{n-1}{2}} & \text{បើ } n \text{ សេស}\\ (-2)^{\frac{n}{2}} & \text{បើ } n \text{ គូ}\end{cases}$

ខ. កំណត់តម្លៃ $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$

តាមសម្រាយខាងលើ

គេមាន $a_{2m}+a_{2m+1}=-(-2)^m+(-2)^m=0$ ចំពោះ $m=1,2,3,\dots$

★ ពេល $n$ សេស គេអាចសរសេរ

$S_n=a_1+(a_2+a_3)+\dots+(a_{n-1}+a_n)$

$S_n=a_1=1$

★ ពេល $n$ គូ គេអាចសរសេរ

$S_n=a_1+(a_2+a_3)+\dots+(a_{n-2}+a_{n-1})+a_n$

$S_n=a_1+a_n=1-(-2)^{\frac{n}{2}}$

ដូចនេះ $S_n=\begin{cases}1 & \text{បើ } n \text{ សេស}\\ 1-(-2)^{\frac{n}{2}} & \text{បើ } n \text{ គូ}\end{cases}$

$\square$

**លំហាត់ទី២១**

គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត $x_1, x_2, \dots, x_n$ កំណត់ដោយ $x_1 = a \neq 1$ និង $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 1$ ។ គេតាង $S_n$ ជាផលបូក និង $P_n$ ជាផលគុណ $n$ តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $y_1, y_2, \dots, y_n$ ដែល $y_n = \dfrac{1}{x_n+1}$ ។ ចូរបង្ហាញថា $aS_n + P_n = 1$ ចំពោះ $n \geq 1$ ។

**ដំណោះស្រាយ.** បង្ហាញថា $aS_n + P_n = 1$ ចំពោះ $n \geq 1$

គេមាន $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ គេអាចសរសេរ

$$\begin{aligned}
x_{n+1} = x_n(x_n+1) &\Longleftrightarrow \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n(x_n+1)} \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n+1} \\
&\Longrightarrow \frac{1}{x_n+1} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} \\
&\Longrightarrow y_n = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} \\
&\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}}\right) \\
&\Longrightarrow S_n = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1}} \\
&\Longrightarrow aS_n = 1 - \frac{a}{x_{n+1}} \quad (1)
\end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀត $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ គេអាចសរសេរ

$$\begin{aligned}
x_{n+1} = x_n(x_n+1) &\Longleftrightarrow \frac{1}{x_n+1} = \frac{x_n}{x_{n+1}} \\
&\Longrightarrow y_n = \frac{x_n}{x_{n+1}} \\
&\Longrightarrow \prod_{k=1}^{n} y_k = \prod_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1}} \\
&\Longrightarrow P_n = \frac{x_1}{x_{n+1}} \\
&\Longrightarrow P_n = \frac{a}{x_{n+1}} \quad (2)
\end{aligned}$$

យក $(1) + (2)$ គេបាន $aS_n + P_n = 1$ ពិត

ដូចនេះ $aS_n + P_n = 1, \quad n \geq 1$ □

**លំហាត់ទី២២**

គេឲ្យអនុគមន៍ $f_1(x), f_2(x), f_3(x)\ldots\ldots$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ៖

$$\begin{cases} f_1(x) = x \\ f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1-f_n(x)} \end{cases}$$

ចូរគណនា $f_{2013}(2013)$ ។

**ដំណោះស្រាយ.** គណនា $f_{2013}(2013)$

គេមាន $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1-f_n(x)}$

បើ $n=1$ នោះ $f_2(x) = \dfrac{1}{1-f_1(x)} = \dfrac{1}{1-x}$

បើ $n=2$ នោះ $f_3(x) = \dfrac{1}{1-f_2(x)} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}} = \dfrac{1-x}{-x} = 1-\dfrac{1}{x}$

បើ $n=3$ នោះ $f_4(x) = \dfrac{1}{1-f_3(x)} = \dfrac{1}{1-1+\dfrac{1}{x}} = x = f_1(x)$

ជាទូទៅ $f_1(x) = f_4(x) = \cdots = f_{3k+1}(x) = x$

$$f_2(x) = f_5(x) = \cdots = f_{3k+2}(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f_3(x) = f_6(x) = \cdots = f_{3k+3}(x) = 1-\frac{1}{x}$$

ដោយ $2013 = 3\times 671$ គេបាន $f_{2013}(x) = 1-\dfrac{1}{x}$

ដូចនេះ $\boxed{f_{2013}(2013) = \dfrac{2012}{2013}}$

□

**លំហាត់ទី២៣**

គេឲ្យស្វ៊ីត $u_0 = 1, u_1 = 2$ និង $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{u_{n-1}}$ ចំពោះ $n \geq 1$។

ក. គណនា $u_2$។

ខ. បង្ហាញថា $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}, n \geq 1$ និងគណនា $u_n$។

**ដំណោះស្រាយ.**

ក. គណនា $u_2$

គេមាន $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{u_{n-1}}$

បើ $n = 1$ នោះ $u_2 = \dfrac{u_1^2+1}{u_0} = 2^2 + 1 = 5$

ខ. បង្ហាញថា $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}, n \geq 1$ និងគណនា $u_n$

គេមាន $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{u_{n-1}}$

គេអាចសរសេរ

$$\begin{cases} u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = 1 & (1) \\ u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

យក $(1) - (2)$ គេបាន

$$\begin{aligned} u_{n+1}(u_{n+1} + u_{n-1}) = u_n(u_n + u_{n+2}) \iff \frac{u_n + u_{n+2}}{u_{n+1}} &= \frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{u_n} = \ldots\ldots \\ &= \frac{u_0+u_2}{u_1} = \frac{1+5}{2} = 3 \\ \Longrightarrow \frac{u_n+u_{n+2}}{u_{n+1}} &= 3 \\ \Longrightarrow u_{n+1} &= 3u_n - u_{n-1} \quad \text{ពិត} \end{aligned}$$

គណនា $u_n$

គេមាន $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1} \iff u_{n+1} - 3u_n + u_{n-1} = 0$

មានសមីការសម្គាល់ $r^2 - 3r - 1 = 0$

$\Delta = 9 - 4 = 5$ គេបាន $r_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

នោះតួទូទៅនៃ $(u_n)$ គឺ $u_n = pr_1^n + qr_2^n = p\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + q\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

តែ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} p + q = 1 \\ p\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + q\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 2 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} q = 1 - p \\ p\left(3+\sqrt{5}\right) + (1-p)\left(3-\sqrt{5}\right) = 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} q = 1 - p \\ 2\sqrt{5}p = 1 + \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} q = 1 - p = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

ដូចនេះ $u_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

□

**លំហាត់ទី២៤**

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ស្វ៊ីតដែលមានធាតុបីគឺ $1, \sqrt{3}, 3$ មិនមែនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត។

**ដំណោះស្រាយ**. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ស្វ៊ីតដែលមានធាតុបីគឺ $1, \sqrt{3}, 3$ មិនមែនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត
ឧបមាថាមានស្វ៊ីតនព្វន្ត មានបីធាតុគឺ $1, \sqrt{3}, 3$
តាង $u_m = 1, u_n = \sqrt{3}, u_p = 3$
គណនា
$\dfrac{u_p - u_n}{u_n - u_m} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} \quad (1)$
ម្យ៉ាងទៀត តួទី $m, n, p$ នៃស្វ៊ីតនព្វន្តគឺ
$\dfrac{u_p - u_n}{u_n - u_m} = \dfrac{u_1 + (p-1)d - u_1 - (n-1)d}{u_1 + (n-1)d - u_1 - (m-1)d} = \dfrac{p-n}{n-m} \quad (2)$
តាម $(1)$ & $(2)$ គេទាញបាន $\dfrac{p-n}{n-m} = \sqrt{3}$ សមភាពនេះមិនពិតព្រោះអង្គទី១ជាចំនួនសនិទាន និងអង្គទី២ជា ចំនួនអសនិទាន (ព្រោះ $m, n, p \in \mathbb{N}$)
ដូចនេះ ស្វ៊ីតដែលមានធាតុបីគឺ $1, \sqrt{3}, 3$ មិនមែនជាស្វ៊ីតនព្វន្ត □

**លំហាត់ទី២៥**

គេឲ្យ $(x_n)$ ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតដែលកំណត់ដោយ $x_1 = 2011, x_2 = 2012$ និង $x_{n+1} = x_n(x_n-1)+2$ ចំពោះ $n \geq 2$។ ចូរបង្ហាញថា $(x_1^2+1)(x_2^2+1)\dots(x_{2012}^2+1)-1 = (x_{2103}-1)^2$ ។

**ដំណោះស្រាយ.** បង្ហាញថា $(x_1^2+1)(x_2^2+1)\dots(x_{2012}^2+1)-1 = (x_{2103}-1)^2$

តាង $S_n = (x_1^2+1)(x_2^2+1)\dots(x_n^2+1)-1$

យើងនឹងបង្ហាញថា $S_n = (x_{n+1}-1)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$

បើ $n=1$ នោះ $S_1 = (x_1^2+1)-1 = 2011^2 = (2012-1)^2 = (x_2-1)^2$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n=k$ គឺ $S_k = (x_{k+1}-1)^2$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n=k+1$ គឺ $S_{k+1} = (x_{k+2}-1)^2$?

គេបាន
$$\begin{aligned}
S_{k+1} =& (x_1^2+1)(x_2^2+1)\dots(x_{k+1}^2+1)-1\\
=&[(x_1^2+1)(x_2^2+1)\dots(x_k^2+1)-1+1](x_{k+1}^2+1)-1\\
=&(S_k+1)(x_{k+1}^2+1)-1\\
=&((x_{k+1}-1)^2+1)(x_{k+1}^2+1)-1\\
=&(x_{k+1}^2+1-2x_{k+1}+1)(x_{k+1}^2+1)-1\\
=&(x_{k+1}+1)^2-2x_{k+1}(x_{k+1}^2+1)+x_{k+1}^2\\
=&(x_{k+1}^2+1-x_{k+1})^2\\
=&(x_{k+1}(x_{k+1}-1)+2-1)^2\\
=&(x_{k+2}-1)^2 \quad \text{ពិត}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $S_n = (x_{n+1}-1)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$

យក $n = 2012$ នោះ $(x_1^2+1)(x_2^2+1)\dots(x_{2012}^2+1)-1 = (x_{2013}-1)^2$ $\square$

**លំហាត់ទី២៦**

$n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ $(u_n)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តហើយ $(v_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលផ្ទៀងផ្ទាត់:

$$\begin{aligned} &u_{m+1} = v_{m+1} = q \\ &u_{n+1} = v_{n+1} = b \qquad ; a > 0, b > 0, c > 0 \\ &u_{p+1} = v_{p+1} = c \end{aligned}$$

បង្ហាញថា $\left(a^{b-c}\right)\left(b^{c-a}\right)\left(c^{a-b}\right) = 1$ ។

**ដំណោះស្រាយ**. បង្ហាញថា $\left(a^{b-c}\right)\left(b^{c-a}\right)\left(c^{a-b}\right) = 1$
គេមាន $(u_n)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តហើយ $(v_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលផ្ទៀងផ្ទាត់:

$$\begin{aligned} &u_{m+1} = v_{m+1} = q \\ &u_{n+1} = v_{n+1} = b \qquad ; a > 0, b > 0, c > 0 \\ &u_{p+1} = v_{p+1} = c \end{aligned}$$

គេបាន $\quad a = u_1 + md = v_1 q^m; b = u_1 + nd = v_1 q^n; c = u_1 + pd = v_1 q^p$

នាំឲ្យ $\quad b - c = (n-p)d; c - a = (p-m)d; a - b = (m-n)d$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(a^{b-c}\right)\left(b^{c-a}\right)\left(c^{a-b}\right) &= \left(v_1 q^m\right)^{(n-p)d}\left(v_1 q^n\right)^{(p-m)d}\left(v_1 q^p\right)^{(m-n)d} \\ &= q^{(mn-mp+np-mn+mp-np)d} v_1^{(p-m+n-p+m-n)d} \\ &= q^0 . v_1^0 = 1 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $\left(a^{b-c}\right)\left(b^{c-a}\right)\left(c^{a-b}\right) = 1$ $\square$

**លំហាត់ទី២៧**

គេអោយស្វ៊ីត $(u_n)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} u_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-u_n^2}} \end{cases} ; n \geq 0$

គណនា $(u_n)$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ ។

**ដំណោះស្រាយ**. គណនា $(u_n)$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$

គេមាន $u_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{2^2}$

បើ $n = 0$;
$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-u_0^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{4}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\sin^2\frac{\pi}{4\times 2}} \\ &= \sin\frac{\pi}{2^3} \end{aligned}$$

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k$ គឺ $u_k = \sin\dfrac{\pi}{2^{k+2}}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n = k+1$ គឺស្រាយថា $u_{k+1} = \sin\dfrac{\pi}{2^{k+3}}$

គេមាន $u_{k+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-u_k^2}}$

នាំឲ្យ
$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^{k+2}}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}.\sin\frac{\pi}{2^{k+3}} \\ &= \sin\frac{\pi}{2^{k+3}} \quad \text{ពិត} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $u_n = \sin\dfrac{\pi}{2^{n+2}},\ n = 0, 1, 2, \ldots$ □

**លំហាត់ទី២៨**

គណនា $f(2013)$ ដោយដឹងថា៖

(i). $f(0) = f(1) = 0$

(ii). $f(n+1) = 2f(n) - f(n-1) + n + 1 \quad ; n \in \mathbb{N}$

**ដំណោះស្រាយ.** គណនា $f(2013)$

គេមាន $f(n+1) = 2f(n) - f(n-1) + n + 1$ នោះ $f(n+1) - f(n) = f(n) - f(n-1) + n + 1$

នាំឲ្យ $f(k+1) - f(k) = f(k) - f(k-1) + k + 1$ ដែល $k = 1, 2, 3, \ldots$

បើ $k = 1$ នោះ $f(2) - f(1) = f(1) - f(0) + 2$

បើ $k = 2$ នោះ $f(3) - f(2) = f(2) - f(1) + 3$

..........................................................................................

បើ $k = n-1$ នោះ $f(n) - f(n-1) = f(n-1) - f(n-2) + n$

បូកអង្គនិងអង្គ $f(n) - f(1) = f(n-1) - f(0) + 2 + \cdots + n$

$$f(n) - f(n-1) = \frac{n(n+1)}{2} - 1 \text{ ព្រោះ } f(0) = f(1) = 0$$

$$f(n) - f(n-1) = \frac{1}{2}(n^2 + n) - 1$$

$$\sum_{k=1}^{n}(f(k) - f(k-1)) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}(k^2 + k) - 1\right)$$

$$f(n) - f(1) = \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right] - n$$

នាំឲ្យ

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} - 2n\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2n^2 + 3n + 1 + 3n + 3 - 12}{6}\right) \\ &= \frac{1}{12}n(6n + 2n - 8) \\ &= \frac{1}{6}n(n^2 + 3n - 4) \\ &= \frac{1}{6}n(n-1)(n+4) \end{aligned}$$

នាំឲ្យ $f(2013) = \frac{1}{6} \times 2013 \times 2012 \times 2017 = 1361527442$

ដូចនេះ $f(2013) = 1361527442$

□

**លំហាត់ទី២៩**

$k$ ជាចំនួនគត់ដែល $k \geq 2$ ។ ស្វ៊ីត $(x_n)$ កំណត់ដោយ

$$x_0 = x_1 = 1, \text{ និង } x_{n+1} = \frac{x_n^k + 1}{x_{n-1}} \text{ ចំពោះ } n \geq 1$$

បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $k \geq 2$ ស្វ៊ីត $(x_n)$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ ។

**ដំណោះស្រាយ**. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $k \geq 2$ ស្វ៊ីត $(x_n)$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់

បើ $n = 1 \Rightarrow x_2 = \dfrac{x_1^k + 1}{x_0} = 2$ ជាចំនួនគត់

បើ $n = 2 \Rightarrow x_3 = \dfrac{x_2^k + 1}{x_1} = 2^k + 1$ ជាចំនួនគត់

ឧបមាថា $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ សុទ្ធតែចំនួនគត់ ។

យើងនឹងស្រាយថា $x_{n+1}$ ជាចំនួនគត់

គេមាន $x_{n+1} = \dfrac{x_n^k + 1}{x_{n-1}}$ និង $x_n = \dfrac{x_{n-1}^k + 1}{x_{n-2}}$

យើងបាន $\quad x_{n+1} = \dfrac{\left(\frac{x_{n-1}^k + 1}{x_{n-2}}\right)^k + 1}{x_{n-1}} = \dfrac{(x_{n-1}^k + 1)^k + x_{n-2}^k}{x_{n-1}.x_{n-2}^k}$

តាង $N = (x_{n-1}^k + 1)^k + x_{n-2}^k$ នោះស្រាយថា $N \vdots x_{n-2}^k$ និង $N \vdots x_{n-1}$

គេមាន $x_n = \dfrac{x_{n-1}^k + 1}{x_{n-2}}$ ជាចំនួនគត់ $\Longleftrightarrow x_{n-2} | x_{n-1}^k + 1$

$$\Longrightarrow x_{n-2}^k | \left(x_{n-1}^k + 1\right)^k$$

$$\Longrightarrow x_{n-2}^k | \left(x_{n-1}^k + 1\right)^k + x_{n-2}^k$$

$$\Longrightarrow (x_{n-1}^k + 1)^k + x_{n-2}^k \equiv 0 (\mod x_{n-2}^k)$$

$$\Longrightarrow N \equiv 0 \pmod{x_{n-2}^k} \quad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀត $x_{n-1}^k + 1 \equiv 1 (\mod x_{n-1})$

$$(x_{n-1}^k + 1)^k \equiv 1 (\mod x_{n-1})$$

$$(x_{n-1}^k + 1)^k + x_{n-2}^k \equiv 1 + x_{n-2}^k (\mod x_{n-1})$$

តែ $1 + x_{n-2}^k = x_{n-1}.x_{n-3} \equiv 0 (\mod x_{n-1})$

នាំឲ្យ $N \equiv 0 (\mod x_{n-1}) \quad (2)$

តាម $(1)$ និង $(2)$ យើងបាន $x_{n+1}$ ជាចំនួនគត់ $\forall k \geq 2, n \in \mathbb{N}$

ដូចនេះ $x_{n+1}$ ជាចំនួនគត់ $\forall k \geq 2, n \in \mathbb{N}$ □

**លំហាត់ទី៣០**

ស្ទីតចំនួនពិត $a_1, a_2, a_3, \ldots$ មានលក្ខណៈដូចខាងក្រោម៖

a. $a_1 = 2$

b. $a_{n+1} = a_n \times a_{n+2}$

c. $a_{41}a_{42}\ldots a_{80} = 1$

គណនា $a_2$

**ដំណោះស្រាយ**. គណនា $a_2$

គេមាន $a_{n+1} = a_n \times a_{n+2}$

គេបាន $a_3 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_2}{2}$ $\quad a_4 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{a_2}{2}}{a_2} = \frac{1}{2}$

$a_5 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{a_2}{2}} = \frac{1}{a_2}$ $\quad a_6 = \frac{a_5}{a_4} = \frac{\frac{1}{a_2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{a_2}$

$a_7 = \frac{a_6}{a_5} = \frac{\frac{2}{a_2}}{\frac{1}{a_2}} = 2 = a_1$ $\quad a_8 = \frac{a_7}{a_6} = \frac{2}{\frac{2}{a_2}} = \frac{1}{\frac{1}{a_2}} = a_2$

សន្និដ្ឋាន: $a_{n+6} = a_n; n \in \mathbb{N}^*$

ដូចនេះ $a_1a_2\ldots a_6 = a_7a_8\ldots a_{12} = \cdots = a_{42}a_{43}\ldots a_{47} = \cdots = a_{72}a_{73}\ldots a_{77} = 1$

តាម $(c)$ គេបាន $a_{41}a_{42}\ldots a_{80} = 1$ នោះ $a_{41}a_{78}a_{79}a_{80} = 1$

តែ $a_{41} = a_{6+35} = a_{35} = a_{6+29} = a_{29} = a_{6+23} = a_{23} = a_{6+17} = a_{17} = a_{6+11} = a_{11} = a_{6+5} = a_5$

នោះ $a_{78} = \cdots = a_{42} = \cdots = a_{12} = a_{6+6} = a_6$

$a_{79} = \cdots = a_{13} = a_{6+7} = a_1$

$a_{80} = \cdots = a_{14} = a_2$

គេបាន $a_6a_5a_1a_2 = 1 \Rightarrow \frac{2}{a_2} \times \frac{1}{a_2} \times a_2 \Rightarrow a_2 = 4$

ដូចនេះ $a_2 = 4$ $\square$

**លំហាត់ទី៣១**

គេអោយចំនួនបឋម $p, q$ និង $r$ ។ បង្ហាញថា $\sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{q}$ និង $\sqrt[3]{r}$ មិនមែនជាតួបី (មិនចាំបាច់ជាតួបន្តបន្ទាប់គ្នាទេ) នៃស្ទីតនព្វន្តណាមួយឡើយ ។

**ដំណោះស្រាយ.**
បង្ហាញថា $\sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{q}$ និង $\sqrt[3]{r}$ មិនមែនជាតួបី (មិនចាំបាច់ជាតួបន្តបន្ទាប់គ្នាទេ) នៃស្ទីតនព្វន្តណាមួយឡើយ
ឧបមាថា $\sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{q}$ និង $\sqrt[3]{r}$ ជាបីតួនៃស្ទីតនព្វន្តដែលមាន $a, d$ ជាចំនួនពិត និង $b, c$ ជាចំនួនគត់
គេបាន: $\sqrt[3]{p} = a, \sqrt[3]{q} = a + bd, \sqrt[3]{r} = a + cd$

$$\Longrightarrow d = \frac{\sqrt[3]{q} - \sqrt[3]{p}}{b} = \frac{\sqrt[3]{r} - \sqrt[3]{p}}{c}$$
$$\Longleftrightarrow c\sqrt[3]{q} - c\sqrt[3]{p} = b\sqrt[3]{r} - b\sqrt[3]{p}$$
$$\Longleftrightarrow (b - c)\sqrt[3]{p} = b\sqrt[3]{r} - c\sqrt[3]{q}$$

តាង $\alpha = b - c; \beta = b; \lambda = -c$ ដែលជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ។

$$\Longrightarrow \alpha\sqrt[3]{p} = \beta\sqrt[3]{r} + \lambda\sqrt[3]{q}$$
$$\Longleftrightarrow \alpha^3 p = \beta^3 r + \lambda^3 q + 3\alpha\beta\lambda\sqrt[3]{pqr}$$
$$\Longrightarrow \sqrt[3]{pqr} = \frac{\alpha^3 p - \beta^3 r - \lambda^3 q}{3\alpha\beta\lambda}$$ ជាករណីមិនពិត
ព្រោះអង្គទីមួយ $\sqrt[3]{pqr} \in \overline{\mathbb{Q}}$ និងអង្គទីពីរ $\frac{\alpha^3 p - \beta^3 r - \lambda^3 q}{3\alpha\beta\lambda} \in \mathbb{Q}$

ដូចនេះ $\sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{q}, \sqrt[3]{r}$ មិនមែនជាតួបីនៃស្ទីតនព្វន្តណាមួយឡើយ ។ □

**លំហាត់ទី៣២**

គេអោយស្វ៊ីត $(u_n)$ មួយកំណត់ដោយ $u_1 = 0;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} = 5u_n + \sqrt{24u_n^2 + 1}$$

បង្ហាញថា $(u_n)$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ ។

**ដំណោះស្រាយ.**

បង្ហាញថា $(u_n)$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់

បើ $n = 1 \Rightarrow u_2 = 5u_1 + \sqrt{24u_1^2 + 1} = 1$ ជាចំនួនគត់

បើ $n = 2 \Rightarrow u_3 = 5u_2 + \sqrt{24u_2^2 + 1} = 10$ ជាចំនួនគត់

ឧបមាថា $u_1, u_2, u_3, ..., u_{n-1}, u_n$ ជាចំនួនគត់

យើងនឹងស្រាយថា $u_{n+1}$ ជាចំនួនគត់

គេមាន $u_{n+1}^2 - 10u_nu_{n+1} + 25u_n^2 = 24u_n^2 + 1 \qquad (1)$

$u_n^2 - 10u_nu_{n-1} + 25u_{n-1}^2 = 24u_{n-1}^2 + 1 \qquad (2)$

យក $(1) - (2)$ គេបាន

$u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 - 10u_nu_{n+1} + 10u_nu_{n+1} = 0$

$(u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} - u_{n-1}) - 10u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) = 0$

$(u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} + u_{n-1} - 10u_n) = 0$

$u_{n+1} = u_{n-1}$ ឬ $u_{n+1} = 10u_n - u_{n-1}$

ចំពោះ $u_{n+1} = u_{n-1}$ មិនពិតព្រោះ $u_1 = 0 \neq u_3 = 10$

ចំពោះ $u_{n+1} = 10u_n - u_{n-1}$ ពិត ព្រោះ $u_{n-1}; u_n$ ជាចំនួនគត់

ដូចនេះ $u_n$ ជាចំនួនគត់ □

**លំហាត់ទី៣៣**

តាង $S_n$ ជាផលបូក $n$ តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $(a_n)$ ដែល $a_1 = 1$ ។ បើ $S_n$ និង $a_n$ បំពេញលក្ខណ្ឌ: $a_n = \dfrac{2S_n^2}{2S_n - 1} \quad (n \geq 2)$ ។ ចូរកំណត់តួទី $n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ ។

**ដំណោះស្រាយ**. កំណត់តួទី $n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$

គេមាន $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ និង $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$

នាំឲ្យ $S_n - S_{n-1} = a_n$ និង $S_1 = a_1 = 1$

គេមាន $a_n = \dfrac{2S_n^2}{2S_n - 1} \quad (n \geq 2)$

គេមាន $a_n = \dfrac{2S_n^2}{2S_n - 1}$ 
$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow S_n - S_{n-1} = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1}\\
&\Rightarrow 2S_n(S_n - S_{n-1}) - S_n + S_{n-1} = 2S_n^2\\
&\Rightarrow 2S_n^2 - 2S_nS_{n-1} - S_n + S_{n-1} = 2S_n^2\\
&\Rightarrow S_{n-1} - 2S_nS_{n-1} - S_n = 0\\
&\Rightarrow \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = 2\\
&\Rightarrow \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{S_k} - \frac{1}{S_{k-1}}\right) = \sum_{k=2}^{n} 2\\
&\Rightarrow \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_1} = 2(n-1)\\
&\Rightarrow \frac{1}{S_n} = \frac{1}{S_1} + (n-1)2, S_1 = a_1 = 1\\
&\Rightarrow \frac{1}{S_n} = 2n - 1\\
&\Rightarrow S_n = \frac{1}{2n-1}
\end{aligned}$$

យើងបាន $a_n = \dfrac{2S_n^2}{2S_n - 1} = \dfrac{\frac{2}{(2n-1)^2}}{\frac{2}{2n-1} - 1} = \dfrac{2}{(2n-1)(3-2n)}$

ដូចនេះ តួទី $n$ គឺ $a_n = \dfrac{2}{(2n-1)(3-2n)}, n \geq 2$

□

## លំហាត់ទី៣៤

គេកំណត់ស្វ៊ីត $A_n$ ដោយ $A_0 = 0; A_{n+1} = 1 + A_n + \sqrt{1 + 4A_n}$ ។ គណនា $A_{2013}$ ។

**ដំណោះស្រាយ.** គណនា $A_{2013}$

គេមាន $A_0 = 0; A_{n+1} = 1 + A_n + \sqrt{1 + 4A_n}$

យក $n = 0$ គេបាន $A_1 = 1 + A_0 + \sqrt{4A_0 + 1} = 2$

ហើយ $A_{n+1}^2 + A_n^2 + 1 - 2A_nA_{n+1} - 2A_{n+1} + 2A_n = 1 + 4A_n$

$$\begin{cases} A_{n+1}^2 + A_n^2 - 2A_nA_{n+1} - 2A_{n+1} - 2A_n = 0 & (1) \\ A_n^2 + A_{n-1}^2 - 2A_nA_{n-1} - 2A_n - 2A_{n-1} = 0 & (2) \end{cases}$$

យក $(1) - (2)$ គេបាន

$(A_{n+1}^2 - A_{n-1}^2) - 2A_n(A_{n+1} - A_{n-1}) - 2(A_{n+1} - A_{n-1}) = 0$

$(A_{n+1} - A_{n-1})(A_{n+1} + A_{n-1} - 2A_n - 2) = 0$

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_{n-1} \text{ មិនពិតព្រោះ } A_0 = 0 \neq A_2 = 6 \\ A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1} = 2 \end{cases}$$

គេអាចសរសេរ $(A_{n+1} - A_n) - (A_n - A_{n-1}) = 2 \qquad (3)$

តាង $B_n = A_{n+1} - A_n$ នោះ$B_{n-1} = A_n - A_{n-1}$ ហើយ $B_0 = A_1 - A_0 = 2 - 0 = 2$

តាម $(3)$ គេបាន $B_n - B_{n-1} = 2$

នាំឲ្យ $B_n$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $B_0 = 2$ និង $d = 2$

តាមរូបមន្ត $B_n = B_0 + nd = 2n + 2$

សមមូល $A_{n+1} - A_n = 2n + 2$ ឬ $A_{k+1} - A_k = 2k + 2$

បើ $k = 0, A_1 - A_0 = 2 \times 0 + 2$

បើ $k = 1, A_2 - A_1 = 2 \times 1 + 2$

..................................................

បើ $\underline{k = n - 1, A_n - A_{n-1} = 2(n-1) + 2}$

បូកអង្គនិងអង្គ គេបាន $A_n - A_0 = 2(1 + 2 + \cdots + (n-1)) + 2n$

$$= 2\frac{n(n-1)}{2} + 2n$$
$$= n^2 + n$$

នោះ $A_n = n^2 + n$

យក $n = 2013$ គេបាន $A_{2013} = 2013^2 + 2013 = 2013 \times 2014$

ដូចនេះ $A_{2013} = 2013^2 + 2013 = 2013 \times 2104$ □

**លំហាត់ទី៣៥**

គេអោយស្វ៊ីតចំនួនពិត $(a_n)$ កំណត់ដោយ $a_0 = 1$ និងទំនាក់ទំនងកំណើន

$$a_{n+1} = \log_2\left(4^{a_n} + 2^{1+a_n}\right)$$

ក. គេតាង $b_n = 1 + 2^{a_n}$ ។ បង្ហាញថា $b_{n+1} = b_n^2$ ; $n \geq 0$ ។

ខ. ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $b_n = 3^{2^n}$ ។

គ. ទាញរកតួ $(a_n)$ នៃស្វ៊ីត $(a_n)$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ ។

**ដំណោះស្រាយ.**

ក. បង្ហាញថា $b_{n+1} = b_n^2$ ; $n \geq 0$

គេមាន $b_n = 1 + 2^{a_n}$ នោះ $b_{n+1} = 1 + 2^{a_{n+1}}$

តែ $a_{n+1} = \log_2\left(4^{a_n} + 2^{1+a_n}\right)$

$$\begin{aligned} b_{n+1} = 1 + 2^{a_{n+1}} &\Longleftrightarrow b_{n+1} = 1 + 2^{\log_2\left(4^{a_n}+2^{1+a_n}\right)} \\ &\Longleftrightarrow b_{n+1} = 1 + 4^{a_n} + 2^{1+a_n} \\ &\Longleftrightarrow b_{n+1} = 1 + 2.2^{a_n} + \left(2^{a_n}\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow b_{n+1} = \left(1 + 2^{a_n}\right)^2 = b_n^2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $b_{n+1} = b_n^2$ ; $n \geq 0$

ខ. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $b_n = 3^{2^n}$

បើ $n = 0$ នោះ $b_0 = 3^{2^0} = 3$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k$ គេបាន $b_k = 3^{2^k}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតរហូតដល់ $n = k + 1$ គឺ $b_{n+1} = 3^{2^{k+1}}$

គេមាន $b_{k+1} = b_k^2 = \left(3^{2^k}\right)^2 = 3^{2^{k+1}}$ ពិត

ដូចនេះ $b_n = 3^{2^n}$ ; $n \geq 0$

គ. ទាញរកតួ $a_n$ នៃស្វ៊ីត $(a_n)$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$

គេមាន $b_n = 1 + 2^{a_n}$

សមមូល $2^{a_n} = 3^{2^n} - 1$

នាំឲ្យ $a_n = \log_2\left(3^{2^n} - 1\right)$

ដូចនេះ $a_n = \log_2\left(3^{2^n} - 1\right)$ ; $n \geq 0$

□

**លំហាត់ទី៣៦**

គេអោយស្វ៊ីតចំនួនពិត $(a_n)$ កំណត់ដោយ $a_0 = 1$ និងទំនាក់ទំនងកំណើន

$$a_{n+1} = \log_3\left(27^{a_n} + 3^{1+2a_n} + 3^{1+a_n}\right)$$

ក. គេតាង $b_n = 1 + 3^{a_n}$ ។ បង្ហាញថា $b_{n+1} = b_n^3 \quad ; n \geq 0$ ។

ខ. ទាញរក $b_n$ និង $a_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ ។

**ដំណោះស្រាយ.**

ក. បង្ហាញថា $b_{n+1} = b_n^3 \quad ; n \geq 0$

គេមាន $b_n = 1 + 3^{a_n}$ នោះ $b_{n+1} = 1 + 3^{n+1}$

ដោយ $a_{n+1} = \log_3\left(27^{a_n} + 3^{1+2a_n} + 3^{1+a_n}\right)$

$$\begin{aligned} b_{n+1} = 1 + 3^{n+1} &\Longleftrightarrow b_{n+1} = 1 + 3^{\log_3\left(27^{a_n} + 3^{1+2a_n} + 3^{1+a_n}\right)} \\ &\Longleftrightarrow b_{n+1} = 1 + 27^{a_n} + 3^{1+2a_n} + 3^{1+a_n} \\ &\Longleftrightarrow b_{n+1} = 1 + 3.3^{a_n} + 3.3^{2a_n} + 3^{3a_n} \\ &\Longleftrightarrow b_{n+1} = (1 + 3^{a_n})^3 \\ &\Longleftrightarrow b_{n+1} = b_n^3 \text{ ពិត} \end{aligned}$$

ដូចនេះ $b_{n+1} = b_n^3 ; n \geq 0$

ខ. ទាញរក $b_n$ និង $a_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$

គេមាន $b_{n+1} = b_n^3 \Rightarrow \ln b_{n+1} = 3 \ln b_n \qquad (1)$

តាង $c_n = \ln b_n$ នោះ $c_{n+1} = \ln b_{n+1}$ និង $c_0 = \ln b_0 = ln 4$

តាម $(1)$ គេបាន $c_{n+1} = 3c_n$

នាំឲ្យ $(c_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $q = 3$ និង $c_0 = \ln 4$

តាមរូបមន្ត $c_n = c_0 \times q^n = 3^n \ln 4 = \ln 4^{3^n}$

សមមូល $\ln b_n = \ln 4^{3^n}$ នាំឲ្យ $b_n = 4^{3^n}$

សមមូល $1 + 3^{a_n} = 4^{3^n}$ នាំឲ្យ $a_n = \log_3\left(4^{3^n} - 1\right)$

ដូចនេះ $b_n = 4^{3^n}$ និង $a_n = \log_3\left(4^{3^n} - 1\right)$

□

**លំហាត់ទី៣៧**

គេអោយស្វ៊ីតចំនួនពិត $(u_n)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \log_2\left(1 + 2^{2^n}\right)$$

គណនា $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ។

**ដំណោះស្រាយ.**
គណនា $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
តាមរូបមន្ត $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ នោះ $a + b = \dfrac{a^2 - b^2}{a - b}$
យក $a = 2^{2^n}, b = 1$ នោះ $2^{2^n} + 1 = \dfrac{2^{2^{n+1}} - 1}{2^{2^n} - 1}$
គេអាចសរសេរ
$u_n = \log_2\left(1 + 2^{2^n}\right) = \log_2\left(\dfrac{2^{2^{n+1}} - 1}{2^{2^n} - 1}\right)$
នាំឲ្យ $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \log_2\left(\frac{2^{2^{k+1}} - 1}{2^{2^k} - 1}\right) \\
&= \log_2 \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{2^{2^{k+1}} - 1}{2^{2^k} - 1}\right) \\
&= \log_2\left(\frac{2^{2^{n+1}} - 1}{2 - 1}\right) \\
&= \log_2\left(2^{2^{n+1}} - 1\right)
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $S_n = \log_2\left(2^{2^{n+1}} - 1\right)$ □

## លំហាត់ទី៣៨

គេអោយស្វ៊ីត $(u_n)$ កំណត់ដោយ $u_n = \ln(2\cos\frac{x}{2^n} - 1) \quad ; n \in \mathbb{N}$ ។
គណនា $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ ។

**ដំណោះស្រាយ.** គណនា $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

តាមរូបមន្ត
$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$
$$2\cos 2a = 4\cos^2 a - 2$$
$$2\cos 2a + 1 = 4\cos^2 a - 1$$
$$2\cos 2a + 1 = (2\cos a - 1)(2\cos a + 1)$$
$$2\cos a - 1 = \frac{2\cos 2a + 1}{2\cos a + 1}$$

យក $a = \frac{x}{2^n}$ នាំឲ្យ $2\cos\frac{x}{2^n} - 1 = \dfrac{2\cos\frac{x}{2^{n-1}} + 1}{2\cos\frac{x}{2^n} + 1}$

$$u_n = \ln\left(2\cos\frac{x}{2^n} - 1\right) = \ln\left(2\cos\frac{x}{2^{n-1}} + 1\right) - \ln\left(2\cos\frac{x}{2^n} + 1\right)$$
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\left[\ln\left(2\cos\frac{x}{2^{k-1}} + 1\right) - \ln\left(2\cos\frac{x}{2^k} + 1\right)\right]$$
$$= \ln(2\cos 2x + 1) - \ln(2\cos\frac{x}{2^n} + 1)$$
$$S_n = \ln\left(\frac{2\cos 2x + 1}{2\cos\frac{x}{2^n} + 1}\right)$$

ដូចនេះ $S_n = \ln\left(\dfrac{2\cos 2x + 1}{2\cos\frac{x}{2^n} + 1}\right)$ □

## លំហាត់ទី៣៩

គេអោយស្វ៊ីតចំនួនពិត $(u_n)_{n\geq 0}$ កំណត់ដោយ: $u_0 = a$ និងទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = u_n^{\log_2 u_n} \quad ; a > 2$ ។

ក. បង្ហាញថា $u_n > 2; n = 0, 1, 2, \ldots$

ខ. តាង $v_n = \log_2 u_n$ ។ បង្ហាញថា $v_{n+1} = v_n^2$ ។

គ. តាង $w_n = \log_2 v_n$ ។ បង្ហាញថា $(w_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ឃ. គណនា $w_n; v_n$ និង $u_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ ។

**ដំណោះស្រាយ.**

ក. បង្ហាញថា $u_n > 2; n = 0, 1, 2, ...$

បើ $n = 0 \Rightarrow u_0 = a > 2$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k$ គឺ $u_k > 2$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតរហូតដល់ $n = k + 1$គឺស្រាយថា $u_{k+1} > 2$

គេមាន $u_k > 2 \Longrightarrow \log_2 u_k > 1$

$u_{k+1} = u_k^{\log_2 u_k} > u_k > 2$ រឺ $u_{k+1} > 2$ ពិត

ដូចនេះ $u_n > 2; n = 1, 2, ...$

ខ. បង្ហាញថា $v_{n+1} = v_n^2$

គេមាន $v_n = \log_2 u_n \Longleftrightarrow v_{n+1} = \log_2 u_{n+1}$

$$\Longrightarrow v_{n+1} = \log_2 u_n^{\log_2 u_n}$$

$$\Longrightarrow v_{n+1} = \log_2 u_n \times \log_2 u_n$$

$$\Longrightarrow v_{n+1} = v_n v_n = v_n^2$$

ដូចនេះ $v_{n+1} = v_n^2$

គ. បង្ហាញថា $(w_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន $v_{n+1} = v_n^2$ នោះ $\log_2 v_{n+1} = 2\log_2 v_n$

តែ $w_n = \log_2 v_n \Rightarrow w_{n+1} = 2w_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ដូចនេះ $w_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $q = 2$ និងតួទី១ $w_0 = \log_2 v_0 = \log_2 \log_2 a$

ឃ. គណនា $w_n; v_n$ និង $u_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$

តាមរូបមន្ត $w_n = w_0 \times q^n = 2^n \log_2 \log_2 a$

សមមូល $\log_2 v_n = \log_2 (\log_2 a)^{2^n} \Rightarrow v_n = (\log_2 a)^{2^n}$

សមមូល $\log_2 u_n = (\log_2 a)^{2^n} \Rightarrow u_n = 2^{(\log_2 a)^{2^n}}$

ដូចនេះ $w_n = 2^n \log_2 \log_2 a$, $v_n = (\log_2 a)^{2^n}$ និង $u_n = 2^{(\log_2 a)^{2^n}}$

□

**លំហាត់ទី៤០**

គេអោយស្វ៊ីត $(u_n)$ កំណត់ដោយ $u_n = \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right)\log_2\left(n^2+n\right); n = 1, 2, \dots$ ។

ក. បង្ហាញថា $u_n > 0 \quad ; \forall n \geq 1$ ។

ខ. គណនា $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$ ។

គ. កំណត់តម្លៃ $n$ ដែល $S_n = 100$ ។

**ដំណោះស្រាយ.** ក. បង្ហាញថា $u_n > 0 \quad ; \forall n \geq 1$

$u_n = \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right)\log_2(n^2+n)$

$* \ \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log_2\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log_2(n+1) - \log_2 n$

$* \ \log_2(n^2+n) = \log_2 n(n+1) = \log_2(n+1) + \log_2 n$

$\Rightarrow u_n = \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right)\log_2(n^2+n) = \log_2^2(n+1) - \log_2^2 n > 0 \quad ; \forall n \geq 1$

ដូចនេះ $u_n > 0 \quad ; \forall n \geq 1$

ខ. គណនា $S_n$ ជាអនុគមន៍នៃ $n$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\log_2^2(k+1) - \log_2^2 k\right) = \log_2^2(n+1) - \log_2^2 1 = \log_2^2(n+1)$

ដូចនេះ $S_n = \log_2^2(n+1)$

គ. កំណត់តម្លៃ $n$ ដែល $S_n = 100$

ដោយ $S_n = \log_2^2(n+1)$ និង $S_n = 100$

គេបាន $\log_2^2(n+1) = 100 \Longrightarrow \log_2(n+1) = 10$

$\Longrightarrow n+1 = 2^{10} \Rightarrow n = 1023$

ដូចនេះ $n = 1023$

□