រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន
បរិញ្ញាបត្រផ្នែកគណិតវិទ្យា

គណិតវិទ្យាអាហារូបករណ៍

សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងអាហារូបករណ៍

ជប៉ុន-ចិន-រុស្ស៊ី-សិង្ហបុរី-វៀតណាម

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$$

គ្រាសិទ្ធិ

វិញ្ញាសាទី០១

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យសមីការ $x^3-2x^2+x-7=0$ មានឬសបីតាងដោយ α,β,γ ។

ចូរគណនាតម្លៃលេខ $A=\frac{1}{(1-\alpha)^2}+\frac{1}{(1-\beta)^2}+\frac{1}{(1-\gamma)^2}$ ។

II-ចូរប្រៀបធៀបចំនួន $a=\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$ និង $b=2\sqrt[3]{3}$ ។

III-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x.dx$ ដែល $n=1,2,3,...$ ។

ក/ចូរគណនា I_1 ។

ខ/បង្ហាញថា(I_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្ររួចទាញរកI_nជាអនុគមន៍នៃn។

គ/គណនាផលបូក $S_n=I_1+I_2+...+I_n$ ជាអនុគមន៍នៃn។

ឃ/ទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n\to+\infty$ ។

IV-ចូរស្រាយថាប៊ូលដែលមានកាំ R មានមាឌ $V=\frac{4\pi}{3}R^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនាតម្លៃលេខ $A=\frac{1}{(1-\alpha)^2}+\frac{1}{(1-\beta)^2}+\frac{1}{(1-\gamma)^2}$

តាង $f(x)=x^3-2x^2+x-7$ មានឫសបីតាងដោយ α,β,γ ។

គេអាចសរសេរ $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

គេបាន $\ln f(x)=\ln(x-\alpha)+\ln(x-\beta)+\ln(x-\gamma)$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមភាពនេះគេបាន ៖

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}$$ ។

ធ្វើដេរីវេម្តងទៀតលើសមភាពនេះគេបាន ៖

$$\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}=-\frac{1}{(x-\alpha)^2}-\frac{1}{(x-\beta)^2}-\frac{1}{(x-\gamma)^2}$$

យក $x=1$ គេបាន $\frac{f''(1)f(x)-[f'(1)]^2}{f^2(1)}=-\frac{1}{(1-\alpha)^2}-\frac{1}{(1-\beta)^2}-\frac{1}{(1-\gamma)^2}$

គេទាញបាន $A=-\frac{f''(1)f(1)-[f'(1)]^2}{f^2(1)}$ ។

គេមាន $f(1)=1-2+1-7=-7$

$f'(x)=3x^2-4x+1$ នោះ $f'(1)=3-4+1=0$

ហើយ $f''(x)=6x-4$ នោះ $f''(1)=6-4=2$

គេបាន $A=-\frac{(2)(-7)-0^2}{(-7)^2}=\frac{2}{7}$

ដូចនេះ $A=\frac{1}{(1-\alpha)^2}+\frac{1}{(1-\beta)^2}+\frac{1}{(1-\gamma)^2}=\frac{2}{7}$ ។

II-ប្រៀបធៀបចំនួន $a=\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$ និង $b=2\sqrt[3]{3}$

របៀបទី១ ៖ តាង $x=\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$ និង $y=\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$

គេមាន $x>y$ នោះ $x^2>y^2$

គេបាន $x-y>0$ (1) និង $x^2-y^2>0$ (2)

គុណវិសមភាព (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$(x-y)(x^2-y^2)>0$ សមមូល $x^3+y^3\geq x^2y+xy^2$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង 3 គេបាន ៖

$3(x^3+y^3) > 3x^2y+3xy^2 = (x+y)^3-(x^3+y^3)$

គេទាញ $4(x^3+y^3) > (x+y)^3$ ឬ $x+y < \sqrt[3]{4(x^3+y^3)}$ (3)

ជំនួស $x=\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$ និង $y=\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$ ក្នុង (3) គេបាន ៖

$\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} < \sqrt[3]{4(3-\sqrt[3]{3}+3+\sqrt[3]{3})} = 2\sqrt[3]{3}$

ដូចនេះ $a<b$ ។

របៀបទី២ ៖ ឧបមាថា $a<b$ ពិត

គេបាន $\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$

សមមូល $\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}}+\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt[3]{3}}{3}} < 2$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}$

ដេរីវេ $f'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}$

បើ $f'(x)=0$ សមមូល $-\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}=0$

នាំឲ្យ $\sqrt[3]{(1-x)^2}=\sqrt[3]{(1+x)^2}$ ឬ $1-x=1+x$ នោះ $x=0$ ។

បើ $f'(x)>0$ សមមូល $-\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}>0$

នាំឲ្យ $\sqrt[3]{(1-x)^2}>\sqrt[3]{(1+x)^2}$ ឬ $1-x>1+x$ នោះ $x<0$ ។

តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖

x		0	
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$

តាមតារាងនេះគេបាន $\forall x\neq 0 : f(x)<2$

យក $x=\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ គេបាន $f(\frac{\sqrt[3]{3}}{3})<2$ ឬ $\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}}+\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt[3]{3}}{3}}<2$

ដូចនេះ $a<b$ ។

III-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x.dx$ ដែល $n = 1,2,3,...$ ។

ក/គណនា I_1 ៖

បើ $n = 1$ នោះ $I_1 = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x.dx$

តាង $\begin{cases} u = e^{-x} \\ dv = \sin x.dx \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} du = -e^{-x}.dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$$I_1 = \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x.dx$$

$$I_1 = 1 + e^{-\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x.dx$$

តាង $\begin{cases} u = e^{-x} \\ dv = \cos x.dx \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} du = -e^{-x}.dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$I_1 = 1 + e^{-\pi} - \left[e^{-x}\sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x.dx$$

$$I_1 = 1 + e^{-\pi} - I_1$$

ដូចនេះ $I_1 = \frac{1+e^{-\pi}}{2} = \frac{1+e^{\pi}}{2e^{\pi}}$ ។

ខ/បង្ហាញថា(I_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

មាន $I_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x.dx$ នោះ $I_{n+1} = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x.dx$

តាង $x = \pi + t$ នោះ $dx = dt$

ចំពោះ $x = n\pi$ នោះ $t = (n-1)\pi$ និង $x = (n+1)\pi$ នោះ $t = n\pi$

គេបាន $I_{n+1} = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-\pi-t}\sin(\pi+t).dt = -e^{-\pi}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-t}\sin t.dt$

$I_{n+1} = -e^{-\pi}\, I_n$ នាំឲ្យ (I_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ទាញរកI_nជាអនុគមន៍នៃn៖

តាមរូបមន្ត $I_n = I_1 \times q^{n-1} = \frac{1+e^{-\pi}}{2}\times(-e^{-\pi})^{n-1}$ ។

គ/គណនាផលបូក $S_n = I_1 + I_2 + ... + I_n$ ជាអនុគមន៍នៃn៖

គេបាន $S_n = I_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1+e^{-\pi}}{2}\times\frac{1-(-e^{-\pi})^n}{1+e^{-\pi}} = \frac{1-(-e^{-\pi})^n}{2}$

ឃ/ទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$ ៖

គេបាន $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+(-e^{-\pi})^n}{2} = \frac{1}{2}$ ព្រោះ $\lim\limits_{n\to\infty}(-e^{-\pi})^n = 0$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$ ។

IV-ស្រាយថាប៊ូលដែលមានកាំ R មានមាឌ $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ ៖

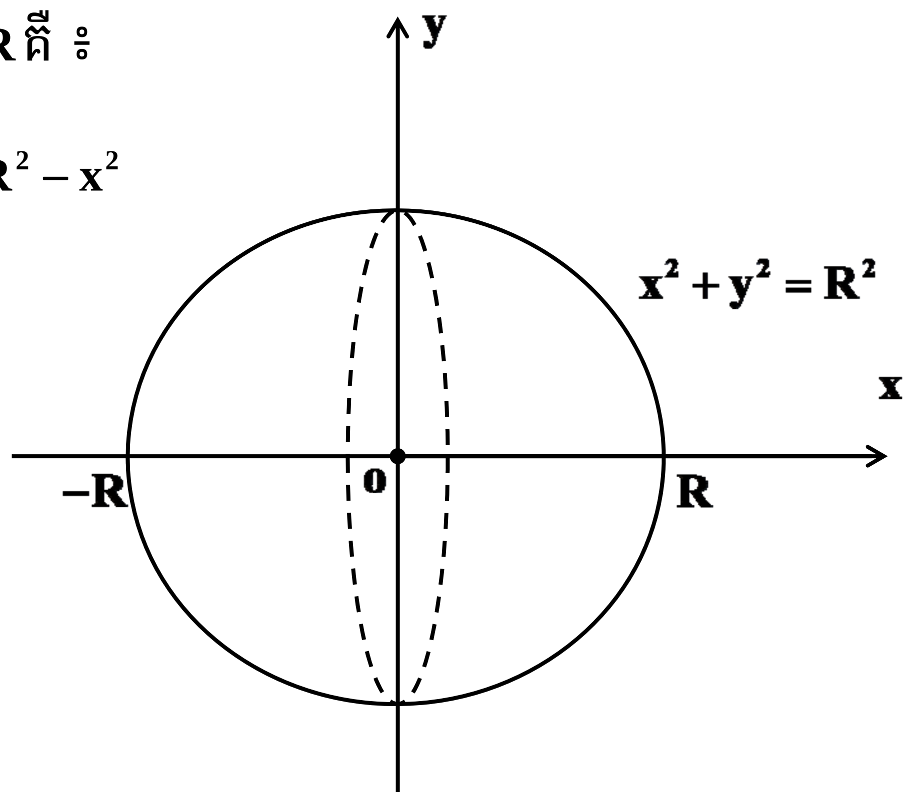
យើងដឹងថាប៊ូលកាំគឺជាសូលីដបរិវត្តន៍បង្ករពីរង្វិលផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌ ដោយរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R ជុំវិញអក្ស័អាប់ស៊ីស ។

សមីការរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R គឺ ៖

$x^2 + y^2 = R^2$ ឬ $y^2 = R^2 - x^2$

មាឌរបស់ប៊ូលគឺ ៖

$$V = \pi \int_{-R}^{R} y^2 dx$$



$$= \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2).dx$$

$$= \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R}$$

$$= \pi \left[(R^3 - \frac{R^3}{3}) - (-R^3 + \frac{R^3}{3}) \right] = \frac{4\pi}{3} R^3$$

ដូចនេះ $V = \frac{4\pi}{3} R^3$ ។

វិញ្ញាសាទី០២

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុង IR ៖

$$\sqrt{\frac{x^2-5x-5}{x^2-5x+2}} + \sqrt{\frac{x^2-5x-4}{x^2-5x+3}} = \frac{7}{x^2-5x+2}\sqrt{\frac{x^2-5x+2}{x^2-5x+3}}$$

II-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់ដោយ ៖

$2\,f(x-1) + f(\frac{x-1}{1-2x}) = x+1$ ចំពោះគ្រប់ $x \neq \frac{1}{2}$ និង $x \neq -\frac{1}{2}$

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

III-គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^3 x.dx$ ដែល $n \in IN$

ក. ចូរគណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}(I_k) = I_0 + I_1 + I_2 + ... + I_n$

ជាអនុគមន៍នៃ n ។ រួចទាញរកតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ដោះស្រាយសមីការ

តាង $y=x^2-5x$ សមីការអាចសរសេរ ៖

$$\sqrt{\frac{y-5}{y+2}}+\sqrt{\frac{y-4}{y+3}}=\frac{7}{y+2}\sqrt{\frac{y+2}{y+3}} \quad (1)$$

សមីការ (1) មានន័យកាលណា $y\geq 5$ ។

ក្នុងលក្ខខ័ណ្ឌនេះសមីការអាចសរសេរ ៖

$$\sqrt{(y-5)(y+3)}+\sqrt{(y-4)(y+2)}=7$$
$$\sqrt{y^2-2y-15}+\sqrt{y^2-2y-8}=7 \quad (2)$$

តាង $z=y^2-2y-8\geq 0$ សមីការ(2)អាចសរសេរ ៖

$$\sqrt{z-7}+\sqrt{z}=7$$
$$2z-7+2\sqrt{z(z-7)}=49$$
$$\sqrt{z^2-7z}=28-z \quad (0\leq z\leq 28)$$
$$z^2-7z=784-56z+z^2$$
$$49z=784\Rightarrow z=16$$

ដោយ $0\leq z\leq 28$ នាំឲ្យ $z=16$ (យក)

គេទាញ $y^2-2y-8=16$ ឬ $y^2-2y-24=0$

មានឬស $y_1=-4$, $y_2=6$

ដោយ $y\geq 5$ នាំឲ្យគេទាញបាន $y=6$ ជាឬសសមីការ(1)

ដោយ $y=x^2-5x$ គេបាន $x^2-5x=6$

ឬ $x^2-5x-6=0$ គេទាញឬស $x_1=-1$, $x_2=6$ ។

II-កំនត់រកអនុគមន៏ $f(x)$ ៖

គេមាន $2\,f(x-1)+f(\frac{x-1}{1-2x})=x+1$ (1) ចំពោះគ្រប់ $x\neq\frac{1}{2}$

យក $x-1=\frac{t-1}{1-2t}$ នាំឲ្យ $x=-\frac{t}{1-2t}$ ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$2f(\frac{t-1}{1-2t})+f(\frac{-\frac{t}{1-2t}-1}{1+\frac{2t}{1-2t}})=-\frac{t}{1-2t}+2$$

$$2f(\frac{t-1}{1-2t})+f(t-1)=\frac{2-5t}{1-2t}\quad (2)$$

យក $x=t$ ជួសក្នុង (1) គេបាន $2f(t-1)+f(\frac{t-1}{1-2t})=t+1$

ឬ $-4f(t-1)-2f(\frac{t-1}{1-2t})=-2t-2$ (3)

បូកសមីការ (2) និង (3)គេបាន ៖

$$-3f(t-1)=\frac{2-5t}{1-2t}-2t-2=\frac{4t^2-t-2}{1-2t}$$

គេទាញ $f(t-1)=\frac{4t^2-t-2}{3(2t-1)}$ យក $t-1=x$ ឬ $t=x+1$

គេបាន $f(x)=\frac{4(x+1)^2-(x+1)-2}{3(2x+2-1)}=\frac{4x^2+7x+1}{3(2x+1)}$

ដូចនេះ $f(x)=\frac{4x^2+7x+1}{3(2x+1)}$ ។

III-ក. គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^3 x.dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^2 x.\cos x.dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x(1-\sin^2 x)\cos x.dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^n x-\sin^{n+2} x)\cos x.dx$$

តាង $U=\sin x$ នោះ $dU=\cos x.dx$ បើ $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ នោះ $U\in[0\,,1\,]$

$$I_n=\int_0^1 U^n(1-U^2).dU=\int_0^1 U^n.dU-\int_0^1 U^{n+2}.dU$$

$$=\left[\frac{1}{n+1}U^{n+1}\right]_0^1-\left[\frac{1}{n+3}U^{n+3}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}=\frac{n+3-n-1}{(n+1)(n+3)}=\frac{2}{(n+1)(n+3)}$$

ដូចនេះ $\boxed{I_n=\frac{2}{(n+1)(n+3)}}$ ។

ខ. គណនាផលបូក ៖

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(I_k\right)=I_0+I_1+I_2+.........+I_n$$

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន៖

$$I_n=\frac{2}{(n+1)(n+3)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\left[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+....+(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})\right]+\left[(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+....+(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3})\right]$$

$$=\left(1-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}=\frac{(n+1)(3n+8)}{2(n+2)(n+3)}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n=\frac{(n+1)(3n+8)}{2(n+2)(n+3)}}$ និង $\boxed{\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{3}{2}}$ ។

វិញ្ញាសាទី០៣

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^a \frac{x^n.dx}{x^3 + a^3}$, $a > 0$

ក. ចូរកំនត់តម្លៃរបស់ n ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a ។

ខ. គណនា I_n ចំពោះតម្លៃ n ដែលបានរកឃើញខាងលើ ។

II-គេឱ្យស្វីត $S_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$ ដែល $n \in IN$ ។

ក-ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ចូរបង្ហាញថា $S_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ។

ខ-គណនាផលបូក

$$\Sigma_n = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \ldots.. + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$$

III-ចូរកំនត់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងចន្លោះ $]0;\frac{\pi}{2}[$ ដោយដឹងថា ៖

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2}$$

IV-ក. ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

ខ. ចូរស្រាយថា $x^2+(x-y)^2\le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គ្រប់ចំនួន $x,y\in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ក. កំនត់តម្លៃរបស់ n ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a

យើងមាន $I_n=\int_0^a \frac{x^n.dx}{x^3+a^3}$, $a>0$

យើងតាង $x=a.t$ នាំឱ្យ $dx=a.dt$

ហើយចំពោះ $x\in[0,a]$ នាំឱ្យ $t\in[0,1]$

គេបាន $I_n = \int_0^1 \frac{(a.t)^n.a.dt}{(at)^3 + a^3} = a^{n-2}.\int_0^1 \frac{t^n.dt}{t^3+1}$

តាមទំនាក់ទំនងនេះ ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a លុះត្រាតែ

$n-2=0$ ឬ $n=2$ ។

ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a គេត្រូវឱ្យ $n=2$ ។

ខ. គណនា I_n ចំពោះតម្លៃ n ដែលបានរកឃើញខាងលើ

ចំពោះ $n=2$ គេបាន $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2dx}{x^3+1}$

តាង $U = x^3+1$ នាំឱ្យ $dU = 3x^2.dx$

ហើយចំពោះ $x \in [0,1]$ នាំឱ្យ $U \in [1\ ,\ 2]$

យើងបាន $I_2 = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{dU}{U} = \frac{1}{3}[\ln|U|]_1^2 = \frac{1}{3}\ln 2$ ។

ដូចនេះ $\boxed{I_2 = \frac{1}{3}\ln 2}$ ។

II-ក.បង្ហាញថា $S_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

យើងមាន $S_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$

$$= \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 + n^2}{n^2(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2 + 2n(n+1) + 1}{n^2(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{[n(n+1)+1]^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \frac{n(n+1)+1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$ ។

ខ-គណនាផលបូក៖

គេបាន $\Sigma_n = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + ... + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \sum_{k=1}^{n} (S_k)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = n + 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - 1}{n(n+1)} = \frac{n(n+2)}{n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{\Sigma_n = \frac{n(n+2)}{n+1}}$ ។

III-កំនត់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងចន្លោះ $]0;\frac{\pi}{2}[$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2} \quad (1)$$

គេពិនិត្យ $\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ហើយ $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

សមីការ (1) អាចសរសេរទៅជា ៖

$$\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\sin x}+\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\cos x}=2$$

$$\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\sin x}+\frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\cos x}=2$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\sin x}+\frac{\cos\frac{\pi}{12}}{\cos x}=2$$

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{12}=2\sin x\cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}+x\right)=\sin 2x$$

ដោយ $0<x<\frac{\pi}{2}$ នោះគេទាញបាន $\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{12}+x=2x\\ \frac{\pi}{12}+x=\pi-2x\end{array}\right.$

គេទាញ $x=\frac{\pi}{12}$ ឬ $x=\frac{11\pi}{36}$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងលក្ខខ័ណ្ឌដែលឲ្យ)

ដូចនេះ $x\in\{\frac{\pi}{12}\,;\,\frac{11\pi}{36}\}$ ។

IV-ក. គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

គេមាន $\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}$

គេបាន $\sin\frac{2\pi}{10}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10})=\cos\frac{3\pi}{10}$

តាមរូបមន្តត្រីកោណមាត្រ ៖

$\sin 2a=2\sin a\cos a$ និង $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}=\cos\frac{3\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}=3\cos\frac{\pi}{10}-4\cos^3\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}=3-4\cos^2\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}=3-4(1-\sin^2\frac{\pi}{10})$$

ឬ $4\sin^2\frac{\pi}{10}-2\sin\frac{\pi}{10}-1=0$ តាង $t=\sin\frac{\pi}{10}>0$

គេបាន $4t^2-2t-1=0$, $\Delta'=1+4=5>0$

គេទាញឫស $t_1=\frac{1-\sqrt{5}}{4}<0$ (មិនយក) , $t_2=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

ដូចនេះ $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ។

ដោយ $\sin^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{\pi}{10}=1$

នាំឲ្យ $\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{1-(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ ។

ខ. ស្រាយថា $x^2+(x-y)^2\leq 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

តាងអនុគមន៍ $f(x;y)=x^2+(x-y)^2-4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គេបាន ៖

$$f(x;y)=x^2+x^2-2xy+y^2-4(x^2+y^2)(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2$$

$$= 2x^2 - 2xy + y^2 - 4(x^2 + y^2)\frac{6 + 2\sqrt{5}}{16}$$

$$= 2x^2 - 2xy + y^2 - (x^2 + y^2)\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x^2 - 2xy - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}y^2$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}x^2 + 2xy + \frac{\sqrt{5} + 1}{2}y^2\right)$$

$$= -\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}\,x + \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}}\,y\right)^2 \le 0 \quad , \forall x, y \in IR$$

ដូចនេះ $x^2 + (x - y)^2 \le 4(x^2 + y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$ ។

វិញ្ញាសាទី០៤

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\log_{6-x}^{2}(54-x^{3})-5\log_{6-x}(54-x^{3})+6=0$$.

II-គេឲ្យ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចពីរដែល $|z_1|=|z_2|=1$

និង $z_1.z_2\neq -1$ ។ ចូរស្រាយថា $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ ជាចំនួនពិតមួយ ។

III-គេឱ្យស្វ៊ីតអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,.dx$ ដែល $n\in IN$ ។

ក. ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2}

ខ. គណនាផលគុណ $P_n=I_n.I_{n-1}\ ,\forall n\geq 1$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=1}^{n}(P_k)=P_1+P_2+.........+P_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n

រួចទាញរកតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{n\to+\infty}S_n$ ។

ឃ. រករូបមន្តគណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

I-ដោះស្រាយសមីការ ៖

$\log^2_{6-x}(54-x^3)-5\log_{6-x}(54-x^3)+6=0 \quad (1)$.

លក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} 54-x^3>0 \\ 6-x>0 \\ 6-x\neq 1 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} x<3\sqrt[3]{2} \\ x<6 \\ x\neq 5 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x<3\sqrt[3]{2} \\ x\neq 5 \end{cases}$

តាង $y=\log_{6-x}(54-x^3)$ សមីការ (1) អាចសរសេរ ៖

$y^2-5y+6=0$, $\Delta=25-24=1$ គេទាញឫស $y_1=2$, $y_2=3$

-ចំពោះ $y=2$ គេបាន $\log_{6-x}(54-x^3)=2$

$$\begin{aligned} 54-x^3&=(6-x)^2 \\ 54-x^3&=36-12x+x^2 \\ x^3+x^2-12x-18&=0 \\ (x+3)(x^2-2x-6)&=0 \end{aligned}$$

គេទាញឫស $x_1=-3$, $x_2=1-\sqrt{7}$, $x_3=1+\sqrt{7}$

-ចំពោះ $y=3$ គេបាន $\log_{6-x}(54-x^3)=3$

$$(54-x^3)=(6-x)^3$$
$$18x^2-108x+162=0$$
$$18(x-3)^2=0$$

គេទាញឫស $x=3$ ។

II-ស្រាយថា $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ ជាចំនួនពិតមួយ

តាង $Z=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ នោះ $\overline{Z}=\frac{\overline{z}_1+\overline{z}_2}{1+\overline{z}_1.\overline{z}_2}$

ដោយ $z_1.\overline{z}_1=|z_1|^2=1$ នោះ $\overline{z}_1=\frac{1}{z_1}$ ហើយដូចគ្នា $\overline{z}_2=\frac{1}{z_2}$

គេបាន $\overline{Z}=\frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1}.\frac{1}{z_2}}=\frac{z_2+z_1}{z_2z_1+1}=Z$

ដោយ $\overline{Z}=Z$ នោះ $Z=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ ជាចំនួនពិត ។

III-ក. រកទំនាក់ទំនងរវាង $\mathbf{I_n}$ និង $\mathbf{I_{n-2}}$

យើងមាន $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,.dx$ និង $I_{n-2}=\int_0^1 x^{n-2}.\sqrt{1-x^2}\,.dx$

តាង $\begin{cases}U=\sqrt{1-x^2}\\ dV=x^n.dx\end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases}dU=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}.dx\\ V=\int x^n.dx=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\end{cases}$

យើងបាន $I_n=\left[\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}.\sqrt{1-x^2}\right]_0^1+\dfrac{1}{n+1}\int_0^1\dfrac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}.dx$

$$I_n=\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^n-(x^n-x^{n+2})}{\sqrt{1-x^2}}.dx=\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^n-x^n(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.dx$$

$$I_n=\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^n.dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,.dx$$

$$I_n=\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}.\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{n+1}I_n$$

តាង $\begin{cases}U=x^{n-1}\\ dV=\dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}\end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases}dU=(n-1)x^{n-2}.dx\\ V=-\sqrt{1-x^2}\end{cases}$

យើងបាន $I_n = \frac{1}{n+1}\left\{ \left[-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}\,\right]_0^1 + (n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}.dx \right\} - \frac{1}{n+1}I_n$

គេទាញ $(n+1)I_n = (n-1)I_{n-2} - I_n$ នាំឱ្យ $I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}$

ដូចនេះ ទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2}

គឺ $\boxed{I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}, \forall n \geq 2}$ ។

ខ. គណនាផលគុណ $P_n = I_n.I_{n-1}$, $\forall n \geq 1$ ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $P_n = I_n.I_{n-1}$ នាំឱ្យ $P_{n+1} = I_{n+1}.I_n$

ដោយ $I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}$ នាំឱ្យ $I_{n+1} = \frac{n}{n+3}.I_{n-1}$

គេទាញ $P_{n+1} = \frac{n}{n+3}I_{n-1}.I_n = \frac{n}{n+3}P_n$ (ព្រោះ $P_n = I_n.I_{n-1}$)

នាំអោយ $\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{n}{n+3} = \frac{n}{n+1}.\frac{n+1}{n+2}.\frac{n+2}{n+3}$ ។

យើងបាន $\prod_{k=1}^{(n-1)}\left(\frac{P_{k+1}}{P_k}\right) = \prod_{k=1}^{(n-1)}\left(\frac{k}{k+1}.\frac{k+1}{k+2}.\frac{k+2}{k+3}\right)$

$$\prod_{k=1}^{(n-1)}\left(\frac{P_{k+1}}{P_k}\right)=\prod_{k=1}^{(n-1)}\left(\frac{k}{k+1}\right)\times\prod_{k=1}^{(n-1)}\left(\frac{k+1}{k+2}\right)\times\prod_{k=1}^{(n-1)}\left(\frac{k+2}{k+3}\right)$$

$$\frac{P_2}{P_1}.\frac{P_3}{P_2}....\frac{P_n}{P_{n-1}}=\left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}....\frac{n-1}{n}\right)\times\left(\frac{2}{3}.\frac{3}{4}....\frac{n}{n+1}\right)\times\left(\frac{3}{4}.\frac{4}{5}....\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$\frac{P_n}{P_1}=\frac{1}{n}.\frac{2}{n+1}.\frac{3}{n+2}$$

នាំឱ្យគេទាញ $P_n=\frac{6}{n(n+1)(n+2)}.P_1=\frac{6}{n(n+1)(n+2)}.I_0.I_1$

ដោយ $I_0=\int_0^1\sqrt{1-x^2}.dx=\left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right]_0^1=\frac{\pi}{4}$

និង $I_1=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}.dx=\left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}$

គេបាន $P_n=\frac{6}{n(n+1)(n+2)}.\frac{\pi}{4}.\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}.\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ដូចនេះ $\boxed{P_n=\frac{\pi}{2}.\frac{1}{n(n+1)(n+2)}}$ ។

គ. គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(P_k\right)=P_1+P_2+.........+P_n$

យើងមាន៖

$$P_n = \frac{\pi}{2}.\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

យើងបាន $S_n = \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$

$$= \frac{\pi}{4}\left[(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}) + (\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}) + ... + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] = \frac{\pi}{8}.\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \frac{\pi}{8}.\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}}$ និង $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{8}}$ ។

ឃ. រករូបមន្តគណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន $I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}, \forall n \geq 2$

-ករណី $n = 2p+1$ (ចំនួនសេស)

យើងបាន $I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+3}.I_{2p-1}$ ឬ $\frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}} = \frac{2p}{2p+3}$

គេទាញ $\frac{I_3}{I_1}.\frac{I_5}{I_3}.\frac{I_7}{I_5}.....\frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}} = \frac{2}{5}.\frac{4}{7}.\frac{6}{9}.....\frac{2p}{2p+3}$

$$\frac{I_{2p+1}}{I_1}=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{9}\cdots\cdots\frac{2p}{2p+3}$$

នាំឱ្យ $I_{2p+1}=\frac{2.4.6....2p}{5.7.9....(2p+3)}.I_1$ ដោយ $I_1=\frac{1}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{I_{2p+1}=\frac{2.4.6....2p}{5.7.9....(2p+3)}\cdot\frac{1}{3}}$ ។

-ករណី $n=2p$ (ចំនួនគូ)

យើងបាន $I_{2p}=\frac{2p-1}{2p+2}.I_{2p-2}$ ឬ $\frac{I_{2p}}{I_{2p-2}}=\frac{2p-1}{2p+2}$

គេទាញ $\frac{I_2}{I_0}\cdot\frac{I_4}{I_2}\cdot\frac{I_6}{I_4}\cdots\cdots\frac{I_{2p}}{I_{2p-2}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdots\cdots\frac{2p-1}{2p+2}$

$$\frac{I_{2p}}{I_0}=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdots\cdots\frac{2p-1}{2p+2}$$

នាំឱ្យ $I_{2p+1}=\frac{1.3.5....(2p-1)}{4.6.8....(2p+2)}.I_0$ ដោយ $I_0=\frac{\pi}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{I_{2p+1}=\frac{1.3.5....(2p-1)}{4.6.8....(2p+2)}\cdot\frac{\pi}{4}}$ ។

វិញ្ញាសាទី០៥

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$1+\log^2_{(3-x)^3}(9x^2-x^3)=\frac{1}{3}\log_{\sqrt{3-x}}(9x^2-x^3)\ .$$

II-ចូរបង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx=\int_a^b f(a+b-x).dx$

អនុវត្តន៍ ៖ ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

III-គេឲ្យសមីការ $(E): x^3-mx^2+7(m-5)x-14m+90=0$

ក. ដោះស្រាយសមីការនេះចំពោះ $m=6$ ។

ខ. កំនត់ m ដើម្បីឲ្យសមីការមានឫសបី x_1 , x_2 , x_3

ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $x_1{}^3+x_2{}^3+x_3{}^3=73$

រួចគណនាឫសទាំងបីនោះ ។

IV-គេអោយអាំងតេក្រាល៖

$$I_n = \int_{na}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x} \quad \text{និង} \quad J_n = \int_{a}^{(n+1)\,a} \frac{dx}{\cos^2 x} \quad ,n \in IN, a > 0 \quad ។$$

ក-បង្ហាញថា $I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n = J_n$ ។

ខ-គណនា I_n និង J_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ-ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរបង្រួមផលបូក៖

$$S_n = \frac{1}{\cos a \cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a \cos 3a} + ... + \frac{1}{\cos(na)\cos(n+1)a} \quad ។$$

ដំណោះស្រាយ

I-ដោះស្រាយសមីការ ៖

. $1 + \log^2_{(3-x)^3}(9x^2 - x^3) = \frac{1}{3}\log_{\sqrt{3-x}}(9x^2 - x^3) \quad (1)$

លក្ខខ័ណ្ឌ $\begin{cases} 9x^2 - x^3 > 0 \\ 3 - x > 0 \\ 3 - x \neq 1 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} x \neq 0 \quad , \ x < 9 \\ x < 3 \\ x \neq 2 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x < 3 \\ x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

សមីការ(1)អាចសរសេរ ៖

$$1+\frac{1}{9}\log^2_{3-x}(9x^2-x^3)=\frac{2}{3}\log_{3-x}(9x^2-x^3)$$

$$\log^2_{3-x}(9x^2-x^3)-6\log_{3-x}(9x^2-x^3)+9=0$$

$$\left[\log_{3-x}(9x^2-x^3)\ -3\ \right]^2=0$$

$$\log_{3-x}(9x^2-x^3)=3$$

$$9x^2-x^3=(3-x)^3$$

$$9x^2-x^3=27-27x+9x^2-x^3$$

$$27x-27=0$$

ដូចនេះសមីការមានឫស $x=1$ ។

II-បង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx=\int_a^b f(a+b-x).dx$

តាង $t=a+b-x \Rightarrow dt=-dx$

បើ $x=a\Rightarrow t=b$ និង $x=b\Rightarrow t=a$

យើងបាន $\int_a^b f(x).dx=\int_b^a f(a+b-t)(-dt)=-\int_b^a f(a+b-t).dt=\int_a^b f(a+b-t).dt$

ដូចនេះ $\int_a^b f(x).dx=\int_a^b f(a+b-x).dx$ ។

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

តាមរូបមន្តខាងលើយើងអាចសរសេរ៖

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln\left[1+\sqrt{3}\tan(\frac{\pi}{3}-x)\right].dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln\left(1+\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}-\tan x}{1+\sqrt{3}\tan x}\right).dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln\left(\frac{4}{1+\sqrt{3}\tan x}\right).dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\ln 4-\ln(1+\sqrt{3}\tan x)\right].dx$$

$$I=\ln 4\int_0^{\frac{\pi}{3}}dx-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx=\frac{2\pi}{3}\ln 2-I$$

$2I=\frac{2\pi}{3}\ln 2$ នាំឱ្យ $I=\frac{\pi}{3}\ln 2$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx=\frac{\pi}{3}\ln 2}$ ។

III-ក. ដោះស្រាយសមីការ

ចំពោះ $m=6$ សមីការអាចសរសេរ ៖

$$x^3-6x^2+7x+6=0$$
$$x^3-3x^2-3x^2+9x-2x+6=0$$
$$x^2(x-3)-3x(x-3)-2(x-3)=0$$
$$(x-3)(x^2-3x-2)=0$$

គេទាញឫស $x_1=3$, $x_2=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$; $x_3=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ ។

ខ. កំនត់តម្លៃរបស់ m

គេមាន $(E): x^3-mx^2+7(m-5)x-14m+90=0$

ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

បើ x_1 , x_2 , x_3 ជាឫសរបស់សមីការនោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេមាន ៖

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=m & (1) \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=7(m-5) & (2) \\ x_1x_2x_3=14m-19 & (3) \end{cases}$$

តាមបំរាប់គេមាន $x_1{}^3+x_2{}^3+x_3{}^3=73$ (4)

ដោយគេមាន ៖

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

គេអាចសរសេរ $73-3(14m-90)=m^3-3m\left[7(m-5)\right]$

$$73-42m+270=m^3-21m^2+105m$$

$$m^3-21m^2+147m-343=0$$

$$(m-7)^3=0$$

ដូចនេះគេទាញបាន $m=7$ ។

ចំពោះ $m=7$ សមីការសរសេរ ៖

$$x^3-7x^2+14x-8=0$$

$$x^3-x^2-6x^2+6x+8x-8=0$$

$$x^2(x-1)-6x(x-1)+8(x-1)=0$$

$$(x-1)(x^2-6x+8)=0$$

$$(x-1)(x-2)(x-4)=0$$

គេទាញឫស $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=4$ ។

IV-ក-បង្ហាញថា $I_1+I_2+I_3+....+I_n=J_n$

$$I_1+I_2+I_3+....+I_n=\int_a^{2a}\frac{dx}{\cos^2 x}+\int_{2a}^{3a}\frac{dx}{\cos^2 x}+...+\int_{na}^{(n+1)a}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int_a^{(n+1)a}\frac{dx}{\cos^2 x}$$

ដូចនេះ $I_1+I_2+I_3+....+I_n=J_n$ ។

ខ-គណនា I_n និង J_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងបាន៖

$$I_n=\int_{na}^{(n+1)a}\frac{dx}{\cos^2 x}=\Big[\tan x\Big]_{na}^{(n+1)a}=\tan(n+1)a-\tan(na)=\frac{\sin a}{\cos(na).\cos(n+1)a}$$

និង $J_n=\int_{a}^{(n+1)a}\frac{dx}{\cos^2 x}=\Big[\tan x\Big]_{a}^{(n+1)a}=\tan(n+1)a-\tan a=\frac{\sin(na)}{\cos a.\cos(n+1)a}$

ដូចនេះ $\boxed{I_n=\frac{\sin a}{\cos(na)\cos(n+1)a}\ ,\ J_n=\frac{\sin(na)}{\cos a.\cos(n+1)a}}$ ។

គ-គណនាផលបូក

$$S_n=\frac{1}{\cos a\cos 2a}+\frac{1}{\cos 2a\cos 3a}+.........+\frac{1}{\cos(na)\cos(n+1)a}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\cos ka.\cos(k+1)a}\right]=\frac{1}{\sin a}\sum_{k=1}^{n}\left[I_k\right]=\frac{1}{\sin a}.J_n=\frac{\sin(na)}{\sin a\cos a\cos(n+1)a}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{\sin na}{\sin a\cos a\cos(n+1)a}$

វិញ្ញាសាទី០៦

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឱ្យខ្សែកោង $(H): y=\frac{2(x-1)}{x-2}$ និងចំនុច $I(2\,;2)$ ។

ចូរកំនត់រកសមីការរង្វង់ (C) មានផ្ចិត I ហើយប៉ះនឹងខ្សែកោង (H) ។

II-គេឧបមាថា S_m និង S_n ជាផលបូក m តួដំបូង និង n តួដំបូង

រៀងគ្នានៃស្វីតនព្វន្តមួយដែល $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2};(m\neq n)$ ។

តាង U_m ជាតួទី m និង U_n ជាតួទី n ។បង្ហាញថា $\frac{U_m}{U_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$

III-គេមានអាំងតេក្រាល $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$ និង $J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}$

ក-កំនត់ពីរចំនួនពិត a, b ដើម្បីឱ្យ $\frac{1}{\sin x}=\frac{a\sin x}{1+\cos x}+\frac{b\sin x}{1-\cos x}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល I រួចទាញរកតម្លៃ J ។

IV-គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 1$ និង $u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\ 4}}{4u_n^{\ 3} + 6u_n^{\ 2} + 4u_n + 1}$ គ្រប់ $n \in IN$

ចូរបង្ហាញថា $1 + \dfrac{1}{u_{n+1}} = \left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)^4$ គ្រប់ $n \in IN$

រួចគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

I-កំនត់រកសមីការរង្វង់ (C)

គេមាន $(H): y = \dfrac{2(x-1)}{x-2}$ និងចំនុច $I(2\,;2)$

តាមរូបមន្តសមីការរង្វង់ (C) មានផ្ចិត $I(2\,;2)$ សរសេរ៖

$(C): (x-2)^2 + (y-2)^2 = R^2$ ដែល R ជាកាំនៃរង្វង់ ។

សមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (H) និង (C) សរសេរ៖

$$(x-2)^2+\left[\frac{2(x-1)}{x-2}-2\right]^2=R^2$$

$$(x-2)^2+\left(\frac{2x-2-2x+4}{x-2}\right)^2=R^2$$

$$(x-2)^2+\frac{4}{(x-2)^2}=R^2 \quad , \quad X=(x-2)^2$$

$X+\frac{4}{X}=R^2$ នាំឱ្យ $X^2-R^2X+4=0 \quad (1)$

ដើម្បីឱ្យរង្វង់ (C) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (H) លុះត្រាតែសមីការ (1)

មានឫសឌុបពោលគឺគេត្រូវឱ្យ $\Delta=R^4-16=0$ នាំឱ្យ

$R=\sqrt[4]{16}=2$ ។

សមីការរង្វង់ **(C)** អាចសរសេរ៖

$$(x-2)^2+(y-2)^2=4$$

$$x^2-4x+4+y^2-4y+4-4=0$$

ដូចនេះ **(C)** : $x^2+y^2-4x-4y+4=0$ ។

II-បង្ហាញថា $\frac{U_m}{U_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$

យើងមាន $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$ ដោយ $S_m=\frac{m(U_1+U_m)}{2}$; $S_n=\frac{n(U_1+U_n)}{2}$

គេបាន $\frac{m(U_1+U_m)}{2}\times\frac{2}{n(U_1+U_n)}=\frac{m^2}{n^2}$ នាំឱ្យ $\frac{U_1+U_m}{U_1+U_n}=\frac{m}{n}$ (1)

ដោយ $U_m=U_1+(m-1).d$, $U_n=U_1+(n-1).d$

ដែល d ជាផលសងរួមនៃស្វីត។

យក $U_m=U_1+(m-1).d$, $U_n=U_1+(n-1).d$ ជួសក្នុង (1) គេបាន

$\frac{2U_1+(m-1).d}{2U_1+(n-1)d}=\frac{m}{n}$ ឬ $2U_1n+n(m-1)d=2U_1m+m(n-1)d$

គេទាញ $U_1=\frac{n(m-1)d-m(n-1)d}{2(m-n)}=\frac{d(mn-n-mn+m)}{2(m-n)}=\frac{d}{2}$

ព្រោះ $m\neq n$ ។

យើងបាន $U_m=\frac{d}{2}+(m-1)d=\frac{2m-1}{2}.d.$; $U_n=\frac{d}{2}+(n-1).d=\frac{2n-1}{2}.d$

គេបាន $\frac{U_m}{U_n} = \frac{\frac{2m-1}{2}.d}{\frac{2n-1}{2}.d} = \frac{2m-1}{2n-1}$ បើ $d \neq 0$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\frac{U_m}{U_n} = \frac{2m-1}{2n-1}}$ ។

III-ក-/កំនត់បីចំនួនពិត a, b

យើងបាន $\frac{1}{\sin x} = \frac{a\sin x}{1+\cos x} + \frac{b\sin x}{1-\cos x}$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{a\sin x(1-\cos x) + b\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x(a - a\cos x + b + b\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{(a+b)-(a-b)\cos x}{\sin x}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $a = b = \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល I រួចទាញរកតម្លៃ J

ចំពោះ $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$ គេមាន $\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1}{2}\frac{\sin x}{1+\cos x}$

គេបាន $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1}{2}\frac{\sin x}{1+\cos x}\right).dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1-\cos x}.dx+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}.dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\cos x)'}{(1-\cos x)}.dx-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\cos x)'}{(1+\cos x)}.dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|1-\cos x|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\left[\ln|1+\cos x|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln 1-\ln(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\right]-\frac{1}{2}\left[\ln 1-\ln(1+\frac{1}{\sqrt{2}})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\ln(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}})+\ln(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}})\right]=\frac{1}{2}\ln(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1})=\ln(\sqrt{2}+1)$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\ln(1+\sqrt{2})}$ ។

ម៉្យាងទៀត $J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}.\frac{dx}{\sin^2 x}$

តាង $\begin{cases} u=\frac{1}{\sin x} \\ dv=\frac{dx}{\sin^2 x}\end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du=-\frac{\cos x}{\sin^2 x} \\ v=\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x=-\frac{\cos x}{\sin x}\end{cases}$

គេបាន $J=\left[-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}.dx$

$$J=\sqrt{2}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}.dx=\sqrt{2}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$$

$J=\sqrt{2}-J+I$ នាំឱ្យ $J=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{I}{2}$ ដោយ $I=\ln(1+\sqrt{2})$

ដូចនេះ $\boxed{J=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})}$ ។

IV-បង្ហាញថា $1+\frac{1}{u_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^4$

យើងមាន $1+\frac{1}{u_{n+1}}=1+\frac{4u_n^{\ 3}+6u_n^{\ 2}+4u_n+1}{u_n^{\ 4}}$

$$=\frac{u_n^{\ 4}+4u_n^{\ 3}+6u_n^{\ 2}+4u_n+1}{u_n^{\ 4}}$$

$$=\frac{(u_n+1)^4}{u_n^{\ 4}}=\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^4$$

ដូចនេះ: $1+\frac{1}{u_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^4$ ។

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $1+\frac{1}{u_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^4$

គេបាន $\ln\left(1+\frac{1}{u_{n+1}}\right)=4\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$

តាង $v_n=\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$ នាំឲ្យ $v_{n+1}=\ln\left(1+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$

គេបាន $v_{n+1}=4v_n$ ។

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន

រេសុង $q = 4$ និងតួ $v_0 = \ln\left(1 + \frac{1}{u_0}\right) = \ln 2$ (ព្រោះ $u_0 = 1$) ។

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 . q^n = 4^n \ln 2$ ។

ដោយ $v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$

គេទាញ $\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) = 4^n \ln 2$ នាំឲ្យ $1 + \frac{1}{u_n} = 2^{4^n}$

ដូចនេះ $u_n = \frac{1}{2^{4^n} - 1}$ ។

វិញ្ញាសាទី០៧

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-ក-កំនត់ចំនួនពិត $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ដើម្បីឱ្យ $\frac{1}{\cos x}=\frac{a\cos x}{1-\sin x}+\frac{b\cos x}{1+\sin x}$

ចំពោះគ្រប់ $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}$ ។

II-គេដឹងថា $\int_0^{x^2} f(2t-1).dt=4x^6$ ។ ចូររកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

IIIគណនា $P_n=(1-x+x^2)(1-x^2+x^4).....(1-x^{2^n}+x^{2^{n+1}})$

IV-គេឲ្យស្វីតនៃចំនួនពិត(U_n)កំនត់ដោយ $U_n=\sqrt{2}^n.\sin\frac{n\pi}{4}$

ដែល $n\in IN$ ។

ក-ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}$

ខ-ទាញឲ្យបានថា $U_n = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

គ-គណនាផលបូក ៖

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

I-ក/កំនត់ចំនួនពិត a និង b

គេបាន $\frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1-\sin x} + \frac{b\cos x}{1+\sin x}$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x(1+\sin x) + b\cos x(1-\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x(a + a\sin x + b - b\sin x)}{1-\sin^2 x}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x\left[(a+b)+(a-b)\sin x\right]}{\cos^2 x}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{(a+b)+(a-b).\sin x}{\cos x}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a=\frac{1}{2}\ ,b=\frac{1}{2}}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}$

តាមសំរាយខាងលើ ចំពោះ $a=\frac{1}{2}$ និង $b=\frac{1}{2}$ គេមាន៖

$\frac{1}{\cos x}=\frac{a\cos x}{1-\sin x}+\frac{b\cos x}{1+\sin x}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ។

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}.dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\cos x}{2(1-\sin x)}+\frac{\cos x}{2(1+\sin x)}\right].dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1-\sin x}.dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1+\sin x}.dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[-\frac{(1-\sin x)'}{(1-\sin x)}.dx\right]+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\sin x)'}{(1+\sin x)}.dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\ln|1-\sin x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\left[\ln|1+\sin x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\ln 1\right]+\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\ln 1\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=\ln(\sqrt{2}+1)$$

II-រកអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $\int_0^{x^2} f(2t-1).dt = 4x^6$

តាង $g(t)=f(2t-1)$ និង $G(t)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $g(t)$ ។

គេបាន $\int_0^{x^2} g(t).dt = 4x^6$

$$\left[G(t)\right]_0^{x^2} = 4x^6$$

$$G(x^2)-G(0)=4x^6$$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃទំនាក់ទំនងនេះគេបាន៖

$2x.G'(x^2)=24x^5$ នាំឱ្យ $G'(x^2)=12x^4$ ដោយ $G'(t)=g(t)$

គេទាញ $g(x^2)=12x^4$ តែ $g(t)=f(2t-1)$

គេបាន $f(2x^2-1)=12x^4$ តាង $2x^2-1=y$ នាំឱ្យ $x^2=\frac{y+1}{2}$

នាំឱ្យ $f(y)=12\left(\frac{y+1}{2}\right)^2=3(y+1)^2$ ដូចនេះ $\boxed{f(x)=3(x+1)^2}$

III-គណនា

$$P_n=(1-x+x^2)(1-x^2+x^4).....(1-x^{2^n}+x^{2^{n+1}})$$

គេមាន $1+a^2+a^4=(1+a^2)^2-a^2=(1-a+a^2)(1+a+a^2)$

គេទាញ $1-a+a^2=\dfrac{1+a^2+a^4}{1+a+a^2}$ យក $a=x^{2^k}$

គេបាន $1-x^{2^k}+x^{2^{k+1}}=\dfrac{1+x^{2^{k+1}}+x^{2^{k+2}}}{1+x^{2^k}+x^{2^{k+1}}}$

$$P_n=\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1+x^{2^{k+1}}+x^{2^{k+2}}}{1+x^{2^k}+x^{2^{k+1}}}\right)=\frac{1+x^{2^{n+1}}+x^{2^{n+2}}}{1+x+x^2}$$

ដូចនេះ $P_n=\dfrac{1+x^{2^{n+1}}+x^{2^{n+2}}}{1+x+x^2}$ ។

IV-ក/បង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\dfrac{(n+1)\pi}{4}=\cos\dfrac{n\pi}{4}-\sin\dfrac{n\pi}{4}$

តាមរូបមន្ត $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

យើងបាន ៖

$$\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\sqrt{2}\cos(\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{4})$$

$$=\sqrt{2}(\cos\frac{n\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{n\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{n\pi}{4})=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}}$ ។

ខ-ទាញឲ្យបានថា $U_n=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

យើងមាន $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}$

នាំឲ្យ $\sin\frac{n\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(\sqrt{2})^n$

គេបាន $(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{U_n=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}$ ។

គ-គណនាផលបូក $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$

យើងបាន

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[(\sqrt{2})^k \cos\frac{k\pi}{4} - (\sqrt{2})^{k+1}\cos\frac{(k+1)\pi}{4}\right]$$

$$= \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 1 - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}$ ។

វិញ្ញាសាទី០៨

សម្រាប់រយះពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យ (x_n) និង (y_n) ជាស្វីតចំនួនពិតកំនត់លើ IN

ដោយ $x_0 = 5 , y_0 = 1$ និងទំនាក់ទំនងកំនើន ៖

$x_{n+1} = x_n^{\ 3} + 3x_n y_n^{\ 2}$ និង $y_{n+1} = 3x_n^{\ 2} y_n + y_n^{\ 3}$ គ្រប់ $n \in IN$

ចូរគណនា x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

II-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0,1]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$?

អនុវត្តន៍: ចូរគណនា $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}$ ។

III-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 9 \\ (\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{y}})(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})(1+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}) = 18 \end{cases}$

IV-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $x\in IR$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\frac{a+b}{1+a+b})<f(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b})$

ចំពោះគ្រប់ $a>0,b>0$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនា x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $x_{n+1}=x_n^{\ 3}+3x_ny_n^{\ 2}$ (1)

និង $y_{n+1}=3x_n^{\ 2}y_n+y_n^{\ 3}$ (2)

បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន ៖

$$x_{n+1}+y_{n+1}=(x_n+y_n)^3$$
$$\ln(x_{n+1}+y_{n+1})=3.\ln(x_n+y_n)$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $\{\ln(x_n+y_n)\}$ ជាស្វីតធរណីមាត្រមាន

រេសុង $q=3$ និងតួដំបូង $\ln(x_0+y_0)=\ln 6$ ។

គេបាន $\ln(x_n+y_n)=3^n\ln 6$

គេទាញ $x_n + y_n = 6^{3^n}$ (3)

ដកកសមីការ (1) និង (2) គេបាន ៖

$$x_{n+1} - y_{n+1} = (x_n - y_n)^3$$
$$\ln(x_{n+1} - y_{n+1}) = 3.\ln(x_n - y_n)$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $\{\ln(x_n - y_n)\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន

រេសុង $q = 3$ និងតួដំបូង $\ln(x_0 - y_0) = \ln 4$ ។

គេបាន $\ln(x_n - y_n) = 3^n \ln 4$ នាំឲ្យ $x_n - y_n = 4^{3^n}$ (4)

បូកសមីការ (3) និង (4) គេបាន $2x_n = 6^{3^n} + 4^{3^n}$

គេទាញ $x_n = \dfrac{6^{3^n} + 4^{3^n}}{2}$ ។

ដកសមីការ (3) និង (4) គេបាន $2y_n = 6^{3^n} - 4^{3^n}$

គេទាញ $y_n = \dfrac{6^{3^n} - 4^{3^n}}{2}$ ។

ដូចនេះ $x_n = \dfrac{6^{3^n} + 4^{3^n}}{2}$ និង $y_n = \dfrac{6^{3^n} - 4^{3^n}}{2}$ ។

II-បង្ហាញថា $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$

តាង $x = \pi - t$ នាំឱ្យ $dx = -dt$

និង ចំពោះ $x \in [0,\pi]$ នាំឱ្យ $t \in [\pi, 0]$

គេបាន $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t).f[\sin(\pi - t)].dt$

$$\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \int_0^{\pi} (\pi - t).f(\sin t).dt = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t).dt - \int_0^{\pi} t.f(\sin t).dt$$

$$\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x).dx - \int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx$$

នាំឱ្យគេទាញបាន $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$ ។

អនុវត្តន៍: គណនា $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}$

គេមាន $I = \int_0^{\pi} \frac{x.\sin x.dx}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\pi} x.\frac{\sin x.dx}{2-\sin^2 x} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x.dx}{2-\sin^2 x}$

តាង $z=\cos x$ នាំឱ្យ $dz=-\sin x.dx$

ហើយចំពោះ $x\in[0,\pi]$ នោះ $z\in[1,-1]$

គេបាន $I=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{-1}\frac{-dz}{1+z^2}=\frac{\pi}{2}\left[\arctan z\right]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}=\frac{\pi^2}{4}}$ ។

III-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=9\\ \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)=18\end{cases}$$

ដោយប្រើឯកលក្ខណៈភាព

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)^3=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+3\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)^3=1+9+3(18)=64$$

គេទាញ $1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}=4$ ឬ $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}=3$

គេបាន $(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})^3=27$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{y}}(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})=27$$

$$9+\frac{3}{\sqrt[3]{xy}}(3)=27$$

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{xy}}=3$$

$$xy=\frac{1}{8}$$

គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=9\\ xy=\frac{1}{8}\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x+y=\frac{9}{8}\\ xy=\frac{1}{8}\end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយសមីការវ្យែត $z^2-\frac{9}{8}z+\frac{1}{8}=0$

គេទទួលបានគូចម្លើយ ($x=1$, $y=\frac{1}{8}$) ឬ ($x=\frac{1}{8}$, $y=1$) ។

IV-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f\left(\frac{a+b}{1+a+b}\right) < f\left(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}\right)$

យើងមាន $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $x \in IR$

យើងបាន $f'(x)=\frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2})}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ដោយ $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$, $\forall x \in IR$

ដូចនេះអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ IR ។

ម៉្យាងទៀតចំពោះគ្រប់ $a>0, b>0$ គេមាន ៖

$\frac{a}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}$ និង $\frac{b}{1+a+b}<\frac{b}{1+b}$

គេទាញ $\frac{a}{1+a+b}+\frac{b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$

ឬ $\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$

ដោយសារតែអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ IR

ហេតុនេះតាមលក្ខណៈអនុគមន៍កើនគេបាន៖

$$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$$

នាំឲ្យ $f\left(\frac{a+b}{1+a+b}\right) < f\left(\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}\right)$

ដូចនេះ $f\left(\frac{a+b}{1+a+b}\right) < f\left(\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}\right)$

ចំពោះគ្រប់ $a > 0, b > 0$ ។

វិញ្ញាសាទី០៩

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យសមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, $a\neq c$ ។

តាង $\tan\alpha$ និង $\tan\beta$ ជាឫសរបស់សមីការខាងលើ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃកន្សោម ៖

$$A=a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta)$$

II-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍គូលើ $[-a,a]$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}f(x).dx$, $q>0$, $q\neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+3^x}.dx$

III-ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចែកនឹង 8 ឱ្យសំណល់ 1 ។

ចំនួន n នោះចែកនឹង 5 ឱ្យសំណល់ 2 ។

ក-បើចំនួន n នោះចែកនឹង 40 ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ខ-រកចំនួន n នោះដោយដឹងថា $3940 < n < 4000$ ។

IV-ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ បើគេដឹងថា៖

$$f(2x-1)+2g(3x+1)=x^2$$

និង $f(4x-3)-g(6x-2)=-2x^2+2x+1$ ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនាតម្លៃនៃកន្សោម ៖

$$A = a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta)$$

ដោយ $\tan\alpha$ និង $\tan\beta$ ជាឫសរបស់សមីការគេបាន ៖

$$\begin{cases} \tan\alpha+\tan\beta=-\dfrac{b}{a} \\ \tan\alpha.\tan\beta=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

យើងបាន $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-\frac{b}{a}}{1-\frac{c}{a}}=-\dfrac{b}{a-c}=\dfrac{b}{c-a}$

យើងបាន $A=a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta)$

$$\begin{aligned}
A&=\cos^2(\alpha+\beta)\left\lfloor a\tan^2(\alpha+\beta)+b\tan(\alpha+\beta)+c\right\rfloor\\
&=\frac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}\left[a\tan^2(\alpha+\beta)+b\tan(\alpha+\beta)+c\right]\\
&=\left[\frac{(c-a)^2}{(c-a)^2+b^2}\right]\left(\frac{ab^2}{(c-a)^2}+\frac{b^2}{c-a}+c\right)\\
&=\frac{(c-a)^2}{(c-a)^2+b^2}\times\frac{ab^2+b^2(c-a)+c(c-a)^2}{(c-a)^2}=c
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $A=a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta)=c$

II-ក.បង្ហាញថា $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a f(x).dx\ ,\ q>0\ ,q\neq 1$ ។

គេមាន $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}+\int_0^a\frac{f(x).dx}{1+q^x}\ (1)$

តាង $x=-t$ នាំឱ្យ $dx=-dt$ និងចំពោះ $x\in[-a,0]$ នាំឱ្យ $t\in[a,0]$

គេបាន $\displaystyle\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=-\int_a^0\frac{f(-t).dt}{1+q^{-t}}=\int_0^a\frac{q^t.f(-t)dt}{1+q^t}=\int_0^a\frac{q^xf(-x).dx}{1+q^x}$

ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូនោះ $f(-x)=f(x)\ ,\forall x\in[-a,a]$

គេទាញបាន $\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}\frac{q^x.f(x)}{1+q^x}.dx\ (2)$

យក (2) ទៅជួសក្នុង (1) គេបាន៖

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}\frac{q^x.f(x).dx}{1+q^x}+\int_{0}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}\frac{(q^x+1)f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}f(x).dx$$

ដូចនេះ $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}f(x).dx\ ,\ q>0\ ,q\neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+3^x}.dx$

ដោយ $\cos x$ ជាអនុគមន៍គូនោះគេបាន៖

$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.dx=[\sin x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=1-0=1$ ។ ដូចនេះ $\boxed{I=1}$ ។

III-ក. បើចំនួន n នោះចែកនឹង 40 ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ឧបមាថា n ចែកនឹង 8 ឱ្យផលចែក $q_1\in IN$ និងសំណល់ 1

និង ចំនួន n នោះចែកនឹង 5 ឱ្យផលចែក $q_2 \in IN$ និងសំណល់ 2

តាមអឺគ្លីត យើងបាន $\begin{cases} n = 8q_1 + 1 & (-15) \\ n = 5q_2 + 2 & (16) \end{cases}$

$$\text{ឬ} \begin{cases} -15n = -120q_1 - 15 & (1) \\ 16n = 80q_2 + 32 & (2) \end{cases}$$

បូកសមីការ (1) និង (2)

យើងបាន $n = 80q_2 - 120q_1 + 17 = 40q + 17$

ដែល $q = 2q_2 - 3q_1$ ។តាមទំនាក់ទំនង $n = 40q + 17$ បញ្ជាក់ថា

បើចំនួន n នោះចែកនឹង 40 ឱ្យសំណល់ $r = 17$

ខ. រកចំនួន n នោះដោយដឹងថា $3940 < n < 4000$

យើងមាន $n = 40q + 17$ ដោយ $3940 < n < 4000$

គេទាញ $3940 < 40q + 17 < 4000$

ឬ $98 + \frac{3}{40} < n < 100 + \frac{17}{40}$

ដោយ $q \in IN$ នាំឱ្យគេទាញបាន $q = \{ 99 , 100 \}$

ហើយ $n = \{ 3977 \ , 4017 \}$ ។

IV-កំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$និង $g(x)$

គេមាន $f(2x-1)+2g(3x+1)=x^2 \qquad (1)$

និង $\quad f(4x-3)-g(6x-2)=-2x^2+2x+1 \ \ (2)$

យើងតាង $2x-1=4t-3$ នាំឱ្យ $x=2t-1$

យក $x=2t-1$ ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$f[2(2t-1)-1]+2g[3(2t-1)+1]=(2t-1)^2$$
$$f(4t-3)+2g(6t-2)=4t^2-4t+1 \quad (3)$$

បើគេយក $x=t$ ជួសក្នុង(2) គេបាន

$$f(4t-3)-g(6t-2)=-2t^2+2t+1 \ \ (4)$$

តាម (3) និង (4) គេបានប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases} f(4t-3)+2g(6t-2)=4t^2-4t+1 \ \ (3) \\ f(4t-3)-g(6t-2)=-2t^2+2t+1 \ \ (4) \end{cases}$$

ដកសមីការ(3)និង(4)គេបាន

$3g(6t-2)=6t^2-6t$ នាំឱ្យ $g(6t-2)=2t^2-2$

យក $x=6t-2$ នាំឱ្យ $t=\dfrac{x+2}{6}$

ហើយ $g(x)=2(\dfrac{x+2}{6})^2-2=\dfrac{(x-4)(x+8)}{18}$

តាម (4)នាំឱ្យ $f(4t-3)-(2t^2-2)=-2t^2+2t+1$

នាំឱ្យ $f(4t-3)=2t-1$ យក $x=4t-3$ នាំឱ្យ $t=\dfrac{x+3}{4}$

គេទាញ $f(x)=2(\dfrac{x+3}{4})-1=\dfrac{x+1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=\dfrac{x+1}{2}\ ,\ g(x)=\dfrac{(x-4)(x+8)}{18}}$ ។

វិញ្ញាសាទី១០

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យខ្សែកោង $(C_m): \ y = f_m(x) = \dfrac{x^2 + 4mx - 4m^2 + 1}{m - x}$

ចូរបង្ហាញថាមានខ្សែកោងពីរនៃគ្រួសារខ្សែកោង (C_m)

ដែលកាត់តាមចំនុច $M_0(x_0\ ; y_0\ )$ ចំពោះគ្រប់ $(x_0 ; y_0) \in IR^2$ ។

m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

II-ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(O, \vec{i}, \vec{j})$ គេឱ្យបួនចំនុច A, B, C, D

ដែលមានអាហ្វិករៀងគ្នា

$Z_A = 1 + 6i$, $Z_B = 4 + 5i$, $Z_C = 5 + 4i$ និង $Z_D = -2 - 3i$ ។

ចូរស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ ចារិកក្នុងរង្វង់មួយដែលគេនឹងបញ្ជាក់ផ្ចិតនិង កាំរបស់វា ។

III-ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ $\begin{cases} 4^x \cdot 5^y = \dfrac{1}{400} \\ 5^x \cdot 6^y = \dfrac{1}{900} \end{cases}$

IV-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 3x + 1}$

កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$f\left(\frac{1+a+b}{2}\right) \geq f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right) ។$$

ដំណោះស្រាយ

I-ការបង្ហាញ ៖

បើ $M_0 \in (C_m)$ គេបាន $y_0 = \dfrac{{x_0}^2 + 4mx_0 - 4m^2 + 1}{m - x_0}$

សមមូល $y_0(m - x_0) = {x_0}^2 + 4mx_0 - 4m^2 + 1$

$$my_0 - x_0y_0 = x_0{}^2 + 4mx_0 - 4m^2 + 1$$
$$4m^2 + (y_0 - 4x_0)m - x_0{}^2 - x_0y_0 - 1 = 0 \quad (1)$$

ឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការ (1) សរសេរ ៖

$$\Delta = (y_0 - 4x_0)^2 - 16(-x_0{}^2 - x_0y_0 - 1)$$
$$= y_0{}^2 - 8x_0y_0 + 16x_0{}^2 + 16x_0{}^2 + 16x_0y_0 + 16$$
$$= (y_0{}^2 + 8x_0y_0 + 16x_0{}^2) + 16(x_0{}^2 + 1)$$
$$= (y_0 + 4x_0)^2 + 16(x_0{}^2 + 1) > 0 \ ; \forall x_0, y_0 \in IR$$

ដោយ $\Delta > 0$ នាំឲ្យសមីការ (1) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជានិច្ច ។

ដូចនេះមានខ្សែកោងពីរនៃគ្រួសារខ្សែកោង (C_m)ដែលកាត់តាម

ចំនុច $M_0(x_0\ ;y_0\ )$ ចំពោះគ្រប់ $(x_0\ ;y_0) \in IR^2$ ។

II-ស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ចារិកក្នុងរង្វង់

យើងតាង (c): $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

ជាសមីការរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC ។

យើងបាន $A \in (c)$ នាំឱ្យ $1^2 + 6^2 + a + 6b + c = 0$

ឬ $a + 6b + c = -37 \quad (1)$

$B \in (c)$ នាំឱ្យ $4^2 + 5^2 + 4a + 5b + c = 0$

ឬ $4a + 5b + c = -41 \ (2)$

$C \in (c)$ នាំឱ្យ $(-2)^2 + (-3)^2 - 2a - 3b + c = 0$

ឬ $-2a - 3b + c = -13 \ (3)$

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} a + 6b + c = -37 \\ 4a + 5b + c = -41 \\ -2a - 3b + c = -13 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបានចម្លើយ

$a = -2 \ , b = -2 \ , c = -23$ ។

សមីការរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC អាចសរសេរ ៖

$(c) : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$

ឬ $(c) : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$

ម៉្យាងទៀតដោយយកកូអរដោនេ D ជួសក្នុងសមីការ

$(c) : (-2-1)^2 + (-3-1)^2 = 25$

វាផ្ទៀងផ្ទាត់នោះនាំឱ្យ $D \in (c)$ ។

ដោយបួនចំនុច A , B , C, D ស្ថិតនៅលើរង្វង់មានសមីការ

$(c): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$ តែមួយនោះនាំឱ្យចតុកោណ $ABCD$

ចារិកក្នុងរង្វង់ (c)មានផ្ចិត $I(1,1)$ និង កាំ $R = 5$ ។

III-ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ ៖

$$\begin{cases} 4^x . 5^y = \dfrac{1}{400} \\ 5^x . 6^y = \dfrac{1}{900} \end{cases}$$

យើងមាន $\ln(4^x.5^y) = \ln(\dfrac{1}{400})$

ឬ $x\ln 4 + y\ln 5 = -2\ln 4 - 2\ln 5 \quad (1)$

ហើយ $\ln(5^x.6^y) = \ln(\dfrac{1}{900})$

ឬ $x\ln 5 + y\ln 6 = -2\ln 6 - 2\ln 5 \quad (2)$

តាម $(1) \& (2)$ គេបានប្រពន្ធ័ ខាងក្រោម

$$\begin{cases} x\ln 4 + y\ln 5 = -2\ln 4 - 2\ln 5 & (-\ln 6) \\ x\ln 5 + y\ln 6 = -2\ln 6 - 2\ln 5 & (\ln 5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x\ln 4.\ln 6 - y\ln 5.\ln 6 = 2\ln 4.\ln 6 + 2\ln 5.\ln 6 & (3) \\ x\ln^2 5 + y\ln 5.\ln 6 = -2\ln 6.\ln 5 - 2\ln^2 5 & (4) \end{cases}$$

បូកសមីការ $(3) \& (4)$ គេបាន

$(\ln^2 5 - \ln 4.\ln 6)x = 2(\ln 4.\ln 6 - .\ln^2 5)$ នាំឱ្យ $x = -2$

តាមសមីការ $4^x.5^y = \dfrac{1}{400}$ គេទាញ $4^{-2}.5^y = \dfrac{1}{400}$

នាំឱ្យគេទាញ $y = -2$ ។ដូចនេះ $x = -2 , y = -2$ ។

IV-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f\left(\dfrac{1+a+b}{2}\right) \geq f\left(\dfrac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$

យើងមាន $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2-3x+1}{3x^2-3x+1}$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$

$$f'(x) = \frac{(3x^2+6x-3)(3x^2-3x+1)-(6x-3)(x^3+3x^2-3x+1)}{(3x^2-3x+1)^2}$$

$$= \frac{3x^4-6x^3+3x^2}{(3x^2-3x+1)^2} = \frac{3x^2(x-1)^2}{(3x^2-3x+1)^2} \geq 0 , \forall x \in IR$$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនលើ IR ។

ម៉្យាងទៀតយើងសន្មតថា $\dfrac{1+a+b}{2} \geq \dfrac{1+a+b+ab}{2+a+b}$

គេបាន $\dfrac{2}{1+a+b} \leq \dfrac{2+a+b}{1+a+b+ab}$

$$\frac{2}{1+a+b} \leq \frac{(1+a)+(1+b)}{(1+a)(1+b)}$$

$$\frac{2}{1+a+b} \leq \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$$

ដោយ $\dfrac{1}{1+a+b} \leq \dfrac{1}{1+a}$ និង $\dfrac{1}{1+a+b} \leq \dfrac{1}{1+b}$ គ្រប់ a និង b។

គេទាញ $\dfrac{2}{1+a+b} \leq \dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}$

នាំឲ្យ $\dfrac{1+a+b}{2} \geq \dfrac{1+a+b+ab}{2+a+b}$ ពិត។

ដូចនេះតាមលក្ខណះអនុគមន៍កើនគេទាញបាន ៖

$$f\left(\frac{1+a+b}{2}\right) \geq f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$$ ។

វិញ្ញាសាទី១១

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបី ។

គេដឹងថា $P(x)+2$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)^2$ ហើយ $P(x)-2$ ចែកដាច់

នឹង $(x-1)^2$ ។ចូរកំនត់រកពហុធា $P(x)$ ។

II-ចូរដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ $\begin{cases} 4^x.3^{y+1}+27^y=171 \\ 8^x+2^x.3^{1+2y}=172 \end{cases}$

III-គេឲ្យ $a_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ និង $a_{n+1}=\dfrac{a_n{}^2-5}{2(a_n+2)}$

ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ។

ចូរស្រាយថា $a_n=\cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-កំនត់រកពហុធា $P(x)$ ៖

តាមបំរាប់គេអាចសរសេរ $\begin{cases} P(x)+2=(x+1)^2(ax+b) & (1) \\ P(x)-2=(x-1)^2(cx+d) & (2) \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} P(-1)+2=0 \\ P(1)-2=0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} P(-1)=-2 \\ P(1)=2 \end{cases}$

ដោយធ្វើដេរីវេលើ (1) និង (2) គេបាន ៖

$$\begin{cases} P'(x)=2(x+1)(ax+b)+a(x+1)^2 \\ P'(x)=2(x-1)(cx+d)+c(x-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P'(x)=(x+1)[2(ax+b)+a(x+1)] & (3) \\ P'(x)=(x-1)[2(cx+d)+c(x-1) & (4) \end{cases}$$

តាម (3) នឹង (4) បញ្ជាក់ថា $P'(x)$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)(x-1)$

គេទាញ $P'(x)=k(x+1)(x-1)$

(ព្រោះ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី៣)

គេបាន $P(x)=k\int(x^2-1).dx=k(\frac{x^3}{3}-x)+r$

ចំពោះ $x=\pm 1$ គេបាន $\begin{cases} P(-1)=\frac{2}{3}k+r=-2 \\ P(1)=-\frac{2}{3}k+r=2 \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបាន $k=3$, $r=0$

ដូចនេះ $P(x)=3\left(\frac{x^3}{3}-x\right)=x^3-3x$ ។

II-ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ ៖

$$\begin{cases} 4^x.3^{y+1}+27^y=171 & (1) \\ 8^x+2^x.3^{1+2y}=172 & (2) \end{cases}$$

ដោយបូកសមីការ (1) និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$8^x+4^x.3^{y+1}+2^x.3^{1+2y}+27^y=343$$

$$(2^x)^3+3(2^x)^2(3^y)+3(2^x)(3^y)^2+(3^y)^3=343$$

$$(2^x+3^y)^3=343$$

$$2^x+3^y=7 \quad (3)$$

ម៉្យាងទៀតដកសមីការ(1) និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$27^y - 2^x.3^{1+2y} + 4^x.3^{y+1} - 8^x = -1$$

$$(3^y)^3 - 3(3^y)^2(2^x) + 3(3^y)(2^x)^2 - (2^x)^3 = -1$$

$$(3^y - 2^x)^3 = -1$$

$$2^x - 3^y = 1 \quad (4)$$

តាម (3) និង (4) យើងបានប្រព័ន្ធ ៖

$$\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 & (3) \\ 2^x - 3^y = 1 & (4) \end{cases}$$

បូកសមីការ(3) និង (4) គេបាន $2.2^x = 8$ នាំឲ្យ

ដកសមីការ(3) និង (4) គេបាន $2.3^y = 6$ នាំឲ្យ $y = 1$ ។

ដូចនេះ $x = 2$, $y = 1$ ។

III-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n = \cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right) - 2$

ចំពោះ $n = 0$ គេបាន $a_0 = \cot\frac{\pi}{24} - 2$

$$\cot\frac{\pi}{24}=\frac{\cos\frac{\pi}{24}}{\sin\frac{\pi}{24}}=\frac{2\cos^2\frac{\pi}{24}}{2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}$$

$$=\frac{1+\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}=\frac{1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$\cot\frac{\pi}{24}=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4}$$

$$=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})+8+4\sqrt{3}}{4}$$

$$=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

គេទាញ $a_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$

ហេតុនេះ $a_n=\cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ពិតចំពោះ $n=0$ ។

សន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $a_k=\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ ៖

$a_{k+1} = \cot\left(\dfrac{2^{k-2}\pi}{3}\right) - 2$ ពិត ។

យើងមាន $a_{k+1} = \dfrac{{a_k}^2 - 5}{2(a_k + 2)}$ ដោយ $a_k = \cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right) - 2$

នោះ $a_{k+1} = \dfrac{\left[\cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right) - 2\right]^2 - 5}{2\cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right)}$

$$a_{k+1} = \frac{\cot^2\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right) - 4\cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right) - 1}{2\cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{\cot^2\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{3}\right) - 1}{2\cot\left(\dfrac{2^{k-3}\pi}{2}\right)} - 2$$

ដោយប្រើរូបមន្ត $\cot 2a = \dfrac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$

គេបាន $a_{k+1} = \cot\left(\dfrac{2^{k-2}\pi}{3}\right) - 2$ ពិត ។

ដូចនេះ $a_n = \cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right) - 2$ ។

វិញ្ញាសាទី១២

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឱ្យ $A=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+i\right)^n-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-i\right)^n,\ n\in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា $A=i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

II-គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

គេដឹងថា n ចែកនឹង 7 ឱ្យសំណល់ 5 ហើយ n ចែកនឹង 8

ឱ្យសំណល់ 3 ។

ក. តើចំនួន n នោះចែកនឹង 56 ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ខ. រកចំនួន n នោះដោយដឹងថា $5616 < n < 5626$ ។

III-គេឱ្យអាំងតេក្រាល

$$I_0=\int_0^1\frac{dt}{1+t+t^2} \quad \text{និង} \quad I_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t+t^2}.dt \ , \ (n\in IN)$$

ក. ចូរគណនាតម្លៃនៃ I_0 រួច ស្រាយថា (I_n) ជាស្វីតចុះ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $I_n+I_{n+1}+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$ ។

គ. ទាញឱ្យបានថា $\frac{1}{3(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{3(n-1)}\ ,\forall n\ge 2$ ។

ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n)$ ។

IV-គេឲ្យ a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 ជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$\frac{a_1}{k^2+1}+\frac{a_2}{k^2+2}+\frac{a_3}{k^2+3}+\frac{a_4}{k^2+4}+\frac{a_5}{k^2+5}=\frac{1}{k^2}$$

ចំពោះ $k=1,2,3,4,5$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃ $\frac{a_1}{37}+\frac{a_2}{38}+\frac{a_3}{39}+\frac{a_4}{40}+\frac{a_5}{41}$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-បង្ហាញថា $A = i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

យើងមាន $A = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + i\right)^n - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - i\right)^n$, $n \in IN$

តាង $Z = \frac{1}{\sqrt{3}} + i = \frac{1 + i.\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$

តាមរូបមន្តដឺមរ័គេបាន $Z^n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + i\right)^n = \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

ហើយ $\bar{Z}^n = \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

គេទាញ $A = \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

$$= \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3}\right) = i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{A = i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}}$ ។

II-ក. តើចំនួន $\mathbf{n}$ នោះចែកនឹង $\mathbf{56}$ ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

តាមសម្មតិកម្មគេដឹងថា $\mathbf{n}$ ចែកនឹង 7 ឱ្យសំណល់ 5 នាំឱ្យមាន

$\mathbf{q_1 \in IN}$ ដែល $\mathbf{n = 7q_1 + 5 \ \ (1)}$

ហើយម៉្យាងទៀត $\mathbf{n}$ ចែកនឹង $\mathbf{8}$ ឱ្យសំណល់ 3 នោះនាំឱ្យមាន

$\mathbf{q_2 \in IN}$ ដែល $\mathbf{n = 8q_2 + 3 \ (2)}$

តាម (1) និង (2) គេបានប្រពន្ធ័ $\begin{cases} \mathbf{n = 7q_1 + 5 \ (1)} \\ \mathbf{n = 8q_2 + 3 \ (2)} \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} \mathbf{8n = 56q_1 + 40 \ (3)} \\ \mathbf{7n = 56q_2 + 21 \ (4)} \end{cases}$

ដកសមីការ (3) និង (4) គេបាន $\mathbf{n = 56(q_1 - q_2) + 19}$

តាង $\mathbf{q = q_1 - q_2 \ \ , q \in IN}$

គេបាន $\mathbf{n = 56q + 19}$ ។

ទំនាក់ទំនងនេះមានន័យថាចំនួន $\mathbf{n}$ នោះចែកនឹង 56 ឱ្យសំណល់ 19

ខ. រកចំនួន n នោះដោយដឹងថា $5616 < n < 5626$

គេមាន $n = 56q + 19$ នាំឱ្យ $5616 < 56q + 19 < 5626$

ឬ $\frac{5597}{56} < q < \frac{5607}{56}$ ឬ $99 + \frac{53}{56} < q < 100 + \frac{7}{56}$

នាំឱ្យ $q = 100$ ។

ចំពោះ $q = 100$ គេបាន $n = 5600 + 19 = 5619$ ។

III-ក. គណនាតម្លៃនៃ I_0 រួច ស្រាយថា (I_n) ជាស្វីតចុះ

យើងបាន $I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{\frac{3}{4} + (\frac{1}{2} + t)^2}$

តាង $U = \frac{1}{2} + t$ នាំឱ្យ $dU = dt$

ហើយចំពោះ $\forall t \in [0,1]$ នោះ $U \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

គេបាន $I_0 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dU}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + U^2} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2U}{\sqrt{3}}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$ ។

ដូចនេះ $I_0=\int_0^1\frac{dt}{1+t+t^2}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ ។

ម៉្យាងទៀតគេមាន $I_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t+t^2}.dt$ និង $I_{n+1}=\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t+t^2}.dt$

ចំពោះគ្រប់ $t\in[0,1]$ គេមាន $t^{n+1}\le t^n$ នាំឱ្យ $\frac{t^{n+1}}{1+t+t^2}\le\frac{t^n}{1+t+t^2}$

គេទាញ $\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t+t^2}.dt\le\int_0^1\frac{t^n}{1+t+t^2}.dt$ ឬ $I_{n+1}\le I_n\ ,\forall n\in IN$ ។

ដូចនេះ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $I_n+I_{n+1}+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$

យើងបាន $I_n+I_{n+1}+I_{n+2}=\int_0^1\frac{t^n dt}{1+t+t^2}+\int_0^1\frac{t^{n+1}dt}{1+t+t^2}+\int_0^1\frac{t^{n+2}dt}{1+t+t^2}$

$$=\int_0^1\frac{(t^n+t^{n+1}+t^{n+2})dt}{1+t+t^2}=\int_0^1\frac{t^n(1+t+t^2).dt}{1+t+t^2}$$

$$=\int_0^1 t^n dt=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ ។

គ. ទាញឱ្យបានថា $\dfrac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \dfrac{1}{3(n-1)}\ ,\forall n \ge 2$

យើងមាន (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។ តាមលក្ខណៈនៃស្វ៊ីតចុះយើងមាន៖

$$I_n + I_{n+1} + I_{n+2} \le 3I_n \le I_{n-2} + I_{n-1} + I_n$$

ដោយ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ នាំឱ្យ $I_{n-2} + I_{n-1} + I_n = \dfrac{1}{n-1}$

គេទាញ $\dfrac{1}{n+1} \le 3I_n \le \dfrac{1}{n-1}$ នាំឱ្យ $\dfrac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \dfrac{1}{3(n-1)}\ ,\forall n \ge 2$ ។

ដូចនេះ $\dfrac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \dfrac{1}{3(n-1)}\ ,\forall n \ge 2$ ។

ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(n I_n)$:

មាន $\dfrac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \dfrac{1}{3(n-1)}\ ,\forall n \ge 2$

នាំឱ្យ $\dfrac{n}{3(n+1)} \le nI_n \le \dfrac{n}{3(n-1)}$ ។ ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(nI_n\right) = \dfrac{1}{3}$ ។

IV-កំនត់តម្លៃ $\frac{a_1}{37}+\frac{a_2}{38}+\frac{a_3}{39}+\frac{a_4}{40}+\frac{a_5}{41}$

តាងអនុគមន៍

$$f(x)=\left(\frac{a_1}{x+1}+\frac{a_2}{x+2}+\frac{a_3}{x+3}+\frac{a_4}{x+4}+\frac{a_5}{x+5}-\frac{1}{x}\right)\prod_{p=0}^{5}(x+p) \quad (1)$$

ដែល $x=x=1\ ,\ 4\ ,\ 9\ ,\ 16\ ,\ 25$

គេបាន $f(1)=f(4)=f(9)=f(16)=f(25)=0$

នាំឲ្យអនុគមន៍ f អាចសរសេរមួយបែបទៀតជារាង

$$f(x)=c(x-1)(x-4)(x-9)(x-16)(x-25) \quad (2)$$

តាម (1) គេទាញបាន៖ $\lim_{x\to 0} f(x)=1\times2\times3\times4\times5\times(0-1)=-120$

តាម (2) គេទាញបាន៖

$$\lim_{x\to 0} f(x)=c.(-1)(-4)(-9)(-16)(-25)=-(120)^2c$$

គេបានសមីការ $-(120)^2.c=-120\Rightarrow c=\frac{1}{120}$

គេបាន $\mathbf{f(x)=\frac{1}{120}(x-1)(x-4)(x-9)(x-16)(x-25)}$

បើ $\mathbf{x=36 \Rightarrow f(36)=\frac{35.32.27.20.11}{120}}$ **(3)**

តាម **(1)** បើ $\mathbf{x=36}$ គេបាន

$$\mathbf{f(36)=36.37.38.39.40.41\left(\frac{a_1}{37}+\frac{a_2}{38}+...+\frac{a_5}{41}-\frac{1}{36}\right)}\ \mathbf{(4)}$$

តាម (3) និង (4) គេទាញបាន

$$\mathbf{\frac{a_1}{37}+\frac{a_2}{38}+...+\frac{a_5}{41}=\frac{1}{36}+\frac{35.32.27.20.11}{120.36.37.38.39.40.41}}$$

ដូចនេះ $\mathbf{\frac{a_1}{37}+\frac{a_2}{38}+\frac{a_3}{39}+\frac{a_4}{40}+\frac{a_5}{41}=\frac{187465}{6744582}}$ ។

វិញ្ញាសាទី១៣

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គណនាផលបូក

$S_n = 1.1! + 2.2! + 3.3! + ... + n.n!$

ដែល $n! = n(n-1)(n-2)....3.2.1$ ។

II-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x + y = \sqrt[3]{a+b} \\ x^4 - y^4 = ax - by \end{cases}$

ដែល a និង b ជាចំនួនពិតដែល $a + b \neq 0$ ។

III-គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំនត់ដោយ ៖

$a_0 = 1$ និង $a_{n+1} = a_0.a_1....a_n + 4$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $a_n - \sqrt{a_{n+1}} = 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

IV-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x.dx$ ដែល $n = 0 , 1 , 2,...$

ក/ស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ រួចគណនា $I_n + I_{n+2}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ/បង្ហាញថា $\frac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{2(n-1)}$ គ្រប់ $n \ge 2$ ។

គ/គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(nI_n)$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនាផលបូក

$S_n = 1.1!+2.2!+3.3!+.....+n.n!$

គេមាន $k.k! = [(k+1)-1].k!$

$$k.k! = (k+1).k! - k!$$
$$k.k! = (k+1)! - k!$$

គេបាន $S_n = (2!-1!) + (3!-2!) + (4!-3!) + ... + (n+1)! - n!$

ដូចនេះ $S_n = (n+1)! - 1$ ។

II-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x+y=\sqrt[3]{a+b} \\ x^4-y^4=ax-by \end{cases}$$ សមមូល $$\begin{cases} a+b=(x+y)^3 \\ ax-by=x^4-y^4 \end{cases} \begin{vmatrix} y \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} ay+by=y(x+y)^3 \\ ax-by=x^4-y^4 \end{cases} +$$

$$a(x+y)=y(x+y)^3+x^4-y^4$$

ដោយ $a+b\neq 0$ នោះ $x+y\neq 0$

គេទាញ $a=\dfrac{y(x+y)^3+x^4-y^4}{x+y}=x^3+3xy^2$

ហើយ $b=(x+y)^3-a=3x^2y+y^3$

គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} x^3+3xy^2=a \\ 3x^2y+y^3=b \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} x+y=\sqrt[3]{a+b} \\ x-y=\sqrt[3]{a-b} \end{cases}$

ដូចនេះ $x=\dfrac{\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{a-b}}{2}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{a+b}-\sqrt[3]{a-b}}{2}$ ។

III-បង្ហាញថា $\mathbf{a_n - \sqrt{a_{n+1}} = 2}$

យើងសង្កេតឃើញថាគ្រប់ $\mathbf{k \in IN}$ គេមាន $\mathbf{a_k > 0}$ ។

គេមាន $\mathbf{a_{n+1} = a_0.a_1....a_n + 4}$

គេបាន $\mathbf{a_{n+2} = a_0.a_1.....a_{n+1} + 4}$

$$\mathbf{a_{n+2} = (a_0.a_1.....a_n)(a_0.a_1.....a_n + 4) + 4}$$
$$\mathbf{a_{n+2} = (a_0a_1.....a_n)^2 + 4(a_0.a_1....a_n) + 4}$$
$$\mathbf{a_{n+2} = (a_0a_1.....a_n + 2)^2}$$

គេទាញ $\mathbf{\sqrt{a_{n+2}} = a_0a_1.....a_n + 2}$

$\mathbf{\sqrt{a_{n+2}} = (a_{n+1} - 4) + 2}$ ឬ $\mathbf{a_{n+1} - \sqrt{a_{n+2}} = 2}$

ដូចនេះ $\mathbf{a_n - \sqrt{a_{n+1}} = 2}$ ។

IV- ក/ស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ

គ្រប់ $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ គេមាន $0\le\tan x\le 1$

គេបាន $\forall n\in IN:\cot^{n+1}x\le\cot^{n}x$ នាំឲ្យ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+1}x\ \le\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n}x.dx$

ដូចនេះ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

គណនា I_n+I_{n+2} ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេបាន $I_n+I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2x)\tan^n x.dx$

តាង $u=\tan x\Rightarrow du=(1+\tan^2x).dx$

ចំពោះ $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ នោះ $u\in[0\,,1]$

គេបាន $I_n+I_{n+2}=\int_0^1u^ndu=\left[\frac{1}{n+1}u^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$

ដូចនេះ $I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$ ។

ខ/បង្ហាញថា $\frac{1}{2(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{2(n-1)}$ គ្រប់ $n\ge 2$ ៖

មាន $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ នោះ $I_{n-2} + I_n = \dfrac{1}{n-1}$ គ្រប់ $n \ge 2$ ។

ដោយ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះនោះគេបាន $I_{n+2} \le I_n \le I_{n-2}$

គេទាញ $\dfrac{I_n + I_{n+2}}{2} \le I_n \le \dfrac{I_{n-2} + I_n}{2}$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \dfrac{1}{2(n-1)}$ គ្រប់ $n \ge 2$ ។

គ/គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n)$ ៖

ដោយ $\dfrac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \dfrac{1}{2(n-1)}$ គ្រប់ $n \ge 2$

គុណអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនឹង n គេបាន ៖

$\dfrac{n}{2(n+1)} \le nI_n \le \dfrac{n}{2(n-1)}$ ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{2(n-1)} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{2(n+1)} = \dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n) = \dfrac{1}{2}$ ។

វិញ្ញាសាទី១៤

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេមានសមីការ $z^3-(4+3i)z^2+2(1+5i)z+4(1-2i)=0$

ក/កំណត់ចំនួនពិត α ដើម្បីឲ្យ $z=\alpha$ ជាឫសមួយរបស់(E)។

ខ/ចូរសរសេរសមីការ(E)ជារាង $(z-\alpha)(z^2+pz+q)=0$

ដែល p និង q ជាចំនួនកុំផ្លិចត្រូវកំណត់ ។

គ/ដោះស្រាយសមីការ(E)ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ។

II-គេមានអនុគមន៍ $f(n)=\dfrac{an^2+bn+c}{2^n}$ ដែល $n\in IN$

ក/កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យបាន

$f(n+1)-f(n)=\dfrac{n^2}{2^n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

ខ/ទាញរកផលបូក $S_n=\dfrac{1^2}{2}+\dfrac{2^2}{2^2}+\dfrac{3^2}{2^3}+....+\dfrac{n^2}{2^n}$

រួចគណនាលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$ ។

III-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}}.dx$

IV-គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $xy' + 3y = 4x + 9$

ក/កំណត់ពីរចំនួនពិត α និង β ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $y_1 = \alpha x + \beta$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ/រកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

I-គេមានសមីការ $z^3 - (4+3i)z^2 + 2(1+5i)z + 4(1-2i) = 0$

ក/កំណត់ចំនួនពិត α ៖

ដើម្បីឲ្យ $z = \alpha$ ជាឫសមួយរបស់(E)លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

គេបាន $\alpha^3 - (4+3i)\alpha^2 + 2(1+5i)\alpha + 4(1-2i) = 0$

$$(\alpha^3 - 4\alpha^2 + 2\alpha + 4) + i(-3\alpha^2 + 10\alpha - 8) = 0$$

គេទាញ $\begin{cases}\alpha^3 - 4\alpha^2 + 2\alpha + 4 = 0 \\ -3\alpha^2 + 10\alpha - 8 = 0\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}(\alpha - 2)(\alpha^2 - 2\alpha - 2) = 0 \\ (\alpha - 2)(-3\alpha + 4) = 0\end{cases}$

គេទាញបាន $\alpha = 2$ ជាឬសតែមួយគត់របស់ប្រពន្ធ័សមីការខាងលើ

ដូចនេះ $\alpha = 2$ ជាចំនួនពិតដែលត្រូវរក ។

ខ/សរសេរសមីការ (E) ជារាង $(z - \alpha)(z^2 + pz + q) = 0$

សមីការ $(z - \alpha)(z^2 + pz + q) = 0$ អាចសរសេរជា ៖

$$z^3 + (p - \alpha)z^2 + (q - \alpha p)z - \alpha q = 0 \quad (1)$$

ដោយ $z^3 - (4 + 3i)z^2 + 2(1 + 5i)z + 4(1 - 2i) = 0 \quad (2)$

ធ្វើការប្រៀបធៀបសមីការ(1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$\begin{cases}p - \alpha = -4 - 3i \\ q - \alpha p = 2 + 10i \\ -\alpha q = 4 - 8i\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}p - 2 = -4 - 3i \\ q - 2p = 2 + 10i \\ -2q = 4 - 8i\end{cases}$ (ព្រោះ $\alpha = 2$)

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $p = -2 - 3i$; $q = -2 + 4i$

ដូចនេះ $(E):(z-2)[z^2-(2+3i)z-2+4i]=0$ ។

គ/ដោះស្រាយសមីការ (E) ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ៖

គេមាន $(E):(z-2)[z^2-(2+3i)z-2+4i]=0$

គេទាញ $z-2=0$ នាំឲ្យ $z=2$

ហើយ $z^2-(2+3i)z-2+4i=0$

$\Delta=(2+3i)^2-4(-2+4i)=3-4i=(2-i)^2$

គេទាញឫស $\left[\begin{array}{l} z_1=\dfrac{2+3i-2+i}{2}=2i \\ z_2=\dfrac{2+3i+2-i}{2}=2+i \end{array}\right.$

ដូចនេះសំណុំឫសសមីការ $z\in\{2\ ,\ 2i\ ,\ 2+i\ \}$ ។

II-គេមានអនុគមន៍ $f(n)=\dfrac{an^2+bn+c}{2^n}$ ដែល $n\in IN$

ក/កំណត់បីចំនួនពិត a,b,c ៖

$$f(n+1)-f(n)=\frac{n^2}{2^n}\quad(1)$$

មាន $f(n+1)=\frac{a(n+1)^2+b(n+1)+c}{2^{n+1}}=\frac{an^2+(2a+b)n+a+b+c}{2^{n+1}}$

គេបាន $f(n+1)-f(n)=\frac{-an^2+(2a-b)n+a+b-c}{2^{n+1}}$ (2)

ដោយប្រៀបធៀបសមីការ (1) និង (2) គេបាន ៖

$\begin{cases}-a=2\\2a-b=0\\a+b-c=0\end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases}a=-2\\b=-4\\c=-6\end{cases}$ ។ដូចនេះ $a=-2\ ,\ b=-4\ ,\ c=-6$

ខ/ទាញរកផលបូក $S_n=\frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+....+\frac{n^2}{2^n}$

ចំពោះ $a=-2\ ,\ b=-4\ ,\ c=-6$ គេបាន $f(n)=-\frac{2n^2+4n+6}{2^n}$

និង $f(n+1)-f(n)=\frac{n^2}{2^n}$ (តាមសម្រាយខាងលើ) ។

គេបាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k}=\sum_{k=1}^{n}[f(k+1)-f(k)]=f(n+1)-f(1)$

តែ $f(1)=-\frac{2+4+6}{2}=-6$ និង $f(n+1)=-\frac{n^2+4n+6}{2^n}$

ដូចនេះ $S_n = 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n}$ និង $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 6$ ។

III-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}}.dx$

គេអាចសរសេរ $I = \int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{2}}.dx}{\sqrt{x^3+1}}$ តាង $t = x^{\frac{3}{2}}$ នោះ $dt = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.dx$

បើ $x = 0$ នោះ $t = 0$ និង $x = 1$ នោះ $t = 1$ ។

គេបាន $I = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$ តាង $t = \tan\varphi$ នោះ $dt = (1+\tan^2\varphi)d\varphi$

បើ $t = 0$ នោះ $\varphi = 0$ និង $t = 1$ នោះ $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ។

គេបាន $I = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan^2\varphi)d\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\varphi.d\varphi}{1-\sin^2\varphi}$

តាង $u = \sin\varphi$ នោះ $du = \cos\varphi.d\varphi$

បើ $\varphi = 0$ នោះ $u = 0$ និង $\varphi = \frac{\pi}{4}$ នោះ $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$

គេបាន $I = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u})du$

$I = \frac{1}{3}\left[-\ln|1-u| + \ln|1+u|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{3}\ln(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1})$

ដោយ $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2$ នោះ $I = \frac{1}{3}\ln(\sqrt{2}+1)^2$

ដូចនេះ $I = \frac{2}{3}\ln(\sqrt{2}+1)$ ។

IV-គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល **(E):** $xy' + 3y = 4x + 9$

ក/កំណត់ពីរចំនួនពិត α និង β

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $y_1 = \alpha x + \beta$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ **(E)**

លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ **(E)** ។

គេបាន $xy'_1 + 3y_1 = 4x + 9$ **(1)**

ដោយ $y_1 = \alpha x + \beta$ នោះ $y'_1 = \alpha$ ។

សមីការ (1) អាចសរសេរ ៖

$\alpha x + 3(\alpha x + \beta) = 4x + 9$

$4\alpha x + 3\beta = 4x + 9$

គេទាញ $\alpha = 1$; $\beta = 3$ ។

ខ/រកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

គេមាន $xy'_1 + 3y_1 = 4x + 9$ (1)

$xy' + 3y = 4x + 9$ (2)

ដកសមីការ (2) និង (1) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$x(y' - y_1') + 3(y - y_1) = 0$ (3)

តាង $u = y - y_1$ នោះ $u' = y' - y_1'$

តាមសមីការ (3) គេបាន $xu' + 3u = 0$ នាំឲ្យ $\frac{u'}{u} = -\frac{3}{x}$

ឬ $(\ln u)' = -\frac{3}{x}$ នាំឲ្យ $\ln u = -\int \frac{3}{x}dx = -3\ln|x| + c_1$

គេទាញ $u = e^{-3\ln|x|+c_1} = \frac{1}{|x|^3}.e^{c_1} = \frac{k}{x^3}$;$k \in IR$

ដោយ $u = y - y_1$ នោះ $y = u + y_1 = \frac{k}{x^3} + x + 3$

ដូចនេះ $y = x + 3 + \frac{k}{x^3}$ $, k \in IR$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(E)។

វិញ្ញាសាទី១៥

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^a\sqrt{\frac{x}{x^n+a^n}}.dx$ ដែល $a>0$ ។

ក/កំណត់តម្លៃ n ដើម្បីឲ្យ I_n មានតម្លៃមិនអាស្រ័យនឹង a ។

ខ/គណនា I_n ចំពោះតម្លៃ n ដែលបានរកឃើញខាងលើ ។

II-គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីបី $(E): z^3-(3+4i)z^2-(1-6i)z+3-2i=0$

ក/កំណត់ចំនួនពិត b ដើម្បីឲ្យ $z=ib$ ជាឬសមួយរបស់(E) ។

ខ/បង្ហាញថាសមីការ (E) មានឬសមួយជាចំនួនពិត ហើយឬសពីរទៀតជាចំនួនកុំផ្លិចរួចរកឬសទាំងនោះ ។

គ/ក្នុងប្លង់កុំផ្លិចប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ គេមានបីចំនុច A,B,C មានអាហ្វិក z_1,z_2,z_3 ជាឬសនៃ (E) ។ ចូរដៅចំនុច A,B,C រួចរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។

III-គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ ៖

$u_1 = -1$ និង $u_{n+1} = \sqrt{1+\frac{1}{n}}\, u_n + \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$ គ្រប់ $n \in IN$ ។

ក/រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត $v_n = \frac{u_{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{u_n}{\sqrt{n}}$ រួចគណនា $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ ។

ខ/ទាញរកតួទូទៅ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

IV-គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$$(E): x^2y'' + (4x - 2x^2)y' + 2(x-1)^2 y = 0$$

$$(F): y'' - 2y' + 2y = 0$$

ក/ចូរបង្ហាញថាបើ $y = x^2 f(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (F)

នោះអនុគមន៍ f ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E) ។

ខ/ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយរបស់សមីការ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

I-ក/កំណត់តម្លៃ **n** ដើម្បីឲ្យ $\mathbf{I_n}$ មានតម្លៃមិនអាស្រ័យនឹង **a**

គេមាន $\mathbf{I_n = \int_0^a \sqrt{\frac{x}{x^n + a^n}}.dx}$ ដែល $\mathbf{a > 0}$

តាង $\mathbf{x = a\,t}$ នោះ $\mathbf{dx = a.dt}$

បើ $\mathbf{x = 0}$ នោះ $\mathbf{t = 0}$ ហើយ $\mathbf{x = a}$ នោះ $\mathbf{t = 1}$

គេបាន $\mathbf{I_n = \int_0^1 \sqrt{\frac{at}{a^n t^n + a^n}}\,a.dt = (a)^{\frac{3-n}{2}} \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2}}dt}{\sqrt{t^3+1}}}$

ដើម្បីឲ្យ $\mathbf{I_n}$ មានតម្លៃមិនអាស្រ័យនឹង **a** លុះត្រាតែ $\mathbf{\frac{3-n}{2} = 0}$

គេទាញបាន $\mathbf{n = 3}$ ។

ខ/គណនា $\mathbf{I_n}$ ចំពោះតម្លៃ **n** ដែលបានរកឃើញខាងលើ

បើ $\mathbf{n = 3}$ គេបាន $\mathbf{I_3 = \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2}}dt}{\sqrt{t^3+1}}}$ តាង $\mathbf{u = t^{\frac{3}{2}}}$ នោះ $\mathbf{du = \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}.dt}$

បើ $\mathbf{t = 0}$ នោះ $\mathbf{u = 0}$ និង $\mathbf{t = 1}$ នោះ $\mathbf{u = 1}$ ។

គេបាន $I_3 = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{2}{3}\left[\ln|u+\sqrt{u^2+1}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\ln(1+\sqrt{2})$

ដូចនេះ $I_3 = \frac{2}{3}\ln(1+\sqrt{2})$ ។

II-គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីបី $(E): z^3-(3+4i)z^2-(1-6i)z+3-2i=0$

ក/កំណត់ចំនួនពិត b

ដើម្បីឲ្យ $z = ib$ ជាឫសមួយរបស់(E)លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់(E)

គេបាន $i^3b^3-(3+4i)i^2b^2-(1-6i)ib+3-2i=0$

$$-ib^3+3b^2+4ib^2-ib-6b+3-2i=0$$

$$(3b^2-6b+3)+i(-b^3+4b^2-b-2)=0$$

គេទាញ $\begin{cases} 3b^2-6b+3=0 & (1) \\ -b^3+4b^2-b-2=0 & (2) \end{cases}$

តាម (1) គេបាន $3(b-1)^2=0$ នាំឲ្យ $b=1$ ។

យក $b=1$ជួសក្នុង (2)គេបាន $-1+4-1-2=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់។

ដូចនេះ $b=1$ ។

ខ/បង្ហាញថាសមីការ **(E)** មានឬសមួយជាចំនួនពិត ៖

តាង $z = a$ ជាឬសពិតរបស់សមីការ **(E)** គេបាន ៖

$$a^3 - (3+4i)a^2 - (1-6i)a + 3 - 2i = 0$$
$$a^3 - 3a^2 - 4ia^2 - a + 6ia + 3 - 2i = 0$$
$$(a^3 - 3a^2 - a + 3) + i(-4a^2 + 6a - 2) = 0$$

គេទាញបាន $\begin{cases} a^3 - 3a^2 - a + 3 = 0 \\ -4a^2 + 6a - 2 = 0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} (a-3)(a-1)(a+1) = 0 \\ (a-1)(-4a+2) = 0 \end{cases}$

ប្រពន្ធ័សមីការមានឬសតែមួយគត់គឺ $a = 1$ ។

ដោះស្រាយសមីការ **(E)** :

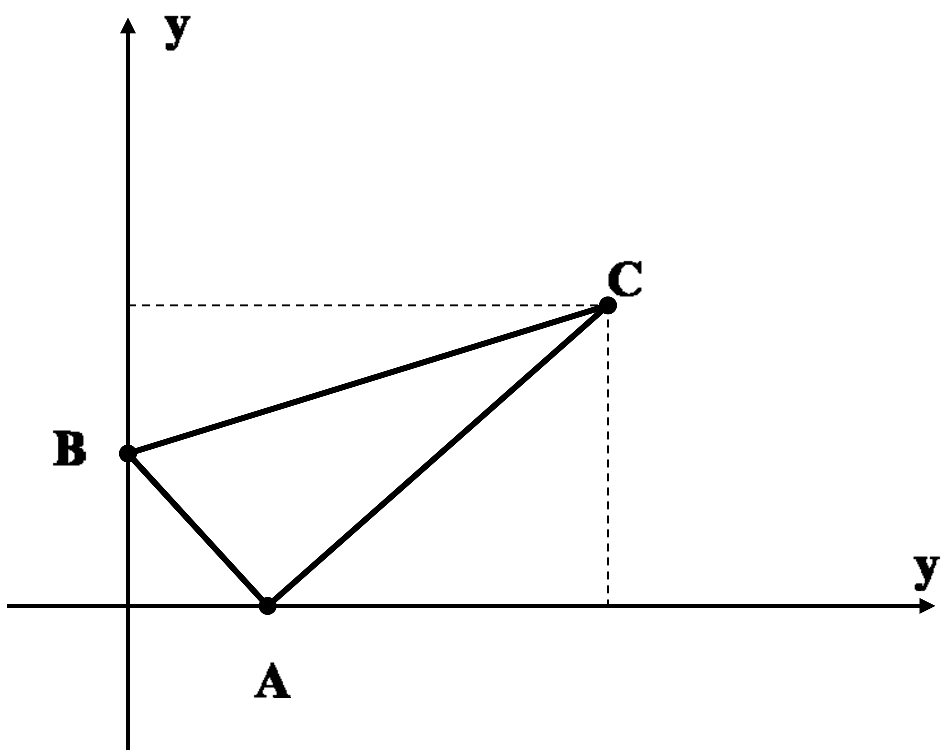
តាមសម្រាយខាងលើគេទាញបាន $z_1 = i$; $z_2 = 1$ ជាឬសនៃ **(E)**

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត $z_1 + z_2 + z_3 = 3 + 4i$

គេទាញ $z_3 = 3 + 4i - i - 1 = 2 + 3i$ ។

ដូចនេះ $z_1 = i$; $z_2 = 1$, $z_3 = 3 + 2i$ ។

គ/ ដៅចំនុច A,B,C រួចរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC



គេមាន $A(1);B(i)\ ;\ C(3+2i)$

អាហ្វិកនៃ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ គឺ $z_B - z_A = -1+i$ និង $z_C - z_A = 2+2i$

គេមាន $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2+2i}{-1+i} = -2i$ នាំឲ្យ $Arg(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}) = \frac{\pi}{2}$

នាំឲ្យ $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ ។ ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។

III-ក/រកប្រភេទនៃស្ទីត $\mathbf{v_n = \dfrac{u_{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{u_n}{\sqrt{n}}}$

មាន $\mathbf{u_1 = -1}$ និង $\mathbf{u_{n+1} = \sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\, u_n + \dfrac{\sqrt{n+1}}{2^n}}$ គ្រប់ $\mathbf{n \in IN}$

គេបាន $\mathbf{u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} u_n + \dfrac{\sqrt{n+1}}{2^n} = \sqrt{n+1}(\dfrac{u_n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2^n})}$

នាំឲ្យ $\mathbf{\dfrac{u_{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2^n}}$ ឬ $\mathbf{v_n = \dfrac{1}{2^n}}$

គេបាន $\mathbf{\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2^n}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}}$ ថេរ

ដូចនេះ $\mathbf{(v_n)}$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រមានរេសុង $\mathbf{q = \dfrac{1}{2}}$ ។

គណនា $\mathbf{S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k}$

គេបាន $\mathbf{S_n = v_1 \times \dfrac{1-q^n}{1-q}}$ តែ $\mathbf{v_1 = \dfrac{u_2}{\sqrt{2}} - u_1}$

និង $\mathbf{u_2 = \sqrt{2}u_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ នោះ $\mathbf{v_1 = -\dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}}$

គេបាន $S_n = \frac{1}{2}.\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2^n}$

ដូចនេះ $S_n = 1-\frac{1}{2^n}$ ។

ខ/ទាញរកតួទូទៅ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $v_n = \frac{u_{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{u_n}{\sqrt{n}}$

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{u_{k+1}}{\sqrt{k+1}} - \frac{u_k}{\sqrt{k}}\right)$$

$$S_{n-1} = \frac{u_n}{\sqrt{n}} - u_1$$

គេទាញ $u_n = \sqrt{n}(S_{n-1} + u_1)$

ដោយ $S_{n-1} = 1-\frac{1}{2^{n-1}}$ និង $u_1 = -1$

ដូចនេះ $u_n = -\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$ ។

IV-គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$$(E): x^2y''+(4x-2x^2)y'+2(x-1)^2y=0$$

$$(F): y''-2y'+2y=0$$

ក/ការបង្ហាញ

បើ $y=x^2f(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (F)នោះ y,y',y''

ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (F) ។

គេមាន $y'=2xf(x)+x^2f'(x)$

$$y''=2f(x)+2xf'(x)+2xf'(x)+x^2f''(x)$$

$$y''=2f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)$$

យក y,y',y'' ជួសក្នុងសមីការ (F) គេបាន ៖

$$2f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)-4xf(x)-2x^2f'(x)+2x^2f(x)=0$$

$$x^2f''(x)+(4x-2x^2)f'(x)+2(x-1)^2f(x)=0$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ f ជាចម្លើយរបស់(E) ។

ខ/ដោះស្រាយសមីការ (F)

គេមាន $(F): y''-2y'+2y=0$

សមីការសម្គាល់ $r^2-2r+2=0$

$\Delta'=1-2=-1=i^2$

គេទាញឫស $r_1=1-i$; $r_2=1+i$ នាំឲ្យ $\alpha=1$, $\beta=1$

ដូចនេះ $y=(A\cos x+B\sin x)e^x$; $A,B\in IR$ ។

ទាញរកចម្លើយរបស់សមីការ (E)៖

គេមាន $y=x^2f(x)$ នាំឲ្យ $f(x)=\dfrac{y}{x^2}=(A\cos x+B\sin x)\dfrac{e^x}{x^2}$

ដូចនេះ $f(x)=(A\cos x+B\sin x)\dfrac{e^x}{x^2}$; $A,B\in IR$ ។

វិញ្ញាសាទី១៦

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{a^{2x}}{1+a^{2x-1}}$ ដែល $a>0$ និង $a\neq 1$ ។

ចូរស្រាយថាគ្រប់ $\varphi\in IR$ គេបាន $f(\sin^2\varphi)+f(\cos^2\varphi)=a$ ។

II-គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{\sqrt[3]{1+na_n^3}} \end{cases}$

ដែល $n=1\,,\,2\,,\,3\,,\ldots$ ។

ចូរគណនាកន្សោម a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

III-គេឲ្យសមីការ $(E): z^2-(4+3i)z+a+9i=0$

ក/កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យសមីការ(E)មានឫសមួយជាចំនួនពិត

ហើយឫសមួយទៀតជាចំនួនកុំផ្លិច។

ខ/ដោះស្រាយសមីការ(E)ចំពោះតម្លៃaដែលបានរកឃើញខាងលើ

IV-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^{\pi} x\sin^n x.dx$ ដែល $n = 0,1,2,...$ ។

ក/ចូរស្រាយថា $I_n = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$ ។

ខ/ចំពោះគ្រប់ $n \ge 2$ ស្រាយថា $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ស្រាយថាគ្រប់ $\varphi \in IR$ គេបាន $f(\sin^2\varphi) + f(\cos^2\varphi) = a$

គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{a^{2x}}{1+a^{2x-1}}$ ដែល $a > 0$ និង $a \neq 1$

យក $u = \sin^2\varphi$ និង $v = \cos^2\varphi$ នោះ $u + v = 1$ ។

យើងនឹងស្រាយថាបើ $u + v = 1$ នោះ $f(u) + f(v) = a$ ។

គេបាន $f(u) + f(v) = \frac{a^{2u}}{1+a^{2u-1}} + \frac{a^{2v}}{1+a^{2v-1}}$

$$= \frac{a^{2u}(1+a^{2v-1}) + a^{2v}(1+a^{2u-1})}{(1+a^{2u-1})(1+a^{2v-1})}$$

$$f(u)+f(v)=\frac{a^{2u}+a^{2u+2v-1}+a^{2v}+a^{2u+2v-1}}{1+a^{2v-1}+a^{2u-1}+a^{2u+2v-2}}$$ ដោយ $u+v=1$

$$=\frac{a^{2u}+a^{2-1}+a^{2v}+a^{2-1}}{1+a^{2v-1}+a^{2u-1}+a^{2-2}}$$

$$=\frac{a^{2u}+a^{2v}+2a}{a^{2u-1}+a^{2v-1}+2}$$

$$=\frac{a(a^{2u-1}+a^{2v-1}+2)}{a^{2u-1}+a^{2v-1}+2}=a$$

ដូចនេះ $f(\sin^2\varphi)+f(\cos^2\varphi)=a$ ។

II-គណនាកន្សោម a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេមាន $a_1=1\ ,\ a_{n+1}=\frac{a_n}{\sqrt[3]{1+na_n^3}}$ ដែល $n=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,...$ ។

លើកអង្គទាំងពីរជាគូបគេបាន $a_{n+1}^3=\frac{a_n^3}{1+na_n^3}$

គេទាញ $\frac{1}{a_{n+1}^3}=\frac{1+na_n^3}{a_n^3}=\frac{1}{a_n^3}+n$ ឬ $\frac{1}{a_{n+1}^3}-\frac{1}{a_n^3}=n$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{a_{k+1}^3}-\frac{1}{a_k^3})=\sum_{k=1}^{n-1}(k)$

នាំឲ្យ $(\frac{1}{a_2^3}-\frac{1}{a_1^3})+(\frac{1}{a_3^3}-\frac{1}{a_2^3})+...+(\frac{1}{a_n^3}-\frac{1}{a_{n-1}^3})=\frac{(n-1)n}{2}$

ឬ $\frac{1}{a_n^3}-\frac{1}{a_1^3}=\frac{n^2-n}{2}$ ដោយ $a_1=1$

ដូចនេះ $a_n=\sqrt[3]{\frac{2}{n^2-n+2}}$ ។

III-គេឲ្យសមីការ $(E): z^2-(4+3i)z+a+9i=0$

ក/កំណត់តម្លៃ a ៖

តាង $z=\alpha$ ជាឬសពិតមួយរបស់សមីការ (E) នោះវាផ្ទៀងផ្ទាត់

នឹងសមីការ (E) គឺ $\alpha^2-(4+3i)\alpha+a+9i=0$

ឬ $(\alpha^2-4\alpha+a)+i(3\alpha-9)=0$ នាំឲ្យ $\begin{cases}\alpha^2-4\alpha+a=0\\3\alpha-9=0\end{cases}$

គេទាញ $\alpha=3$ ហើយ $9-4(3)+a=0$ នោះ $a=3$ ។

ដូចនេះ $a=3$ ។

ខ/ដោះស្រាយសមីការ(E)៖

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត បើ $\alpha\,,\beta$ ជាឫសរបស់សមីការ (E) នោះគេបាន

$\alpha+\beta=4+3i$ តែតាមសម្រាយខាងលើ $\alpha=3$ នោះ $\beta=1+3i$ ។

ដូចនេះឫសសមីការគឺ $\alpha=3\,;\beta=1+3i$ ។

IV-ក/ស្រាយថា $I_n=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x.dx$

គេមាន $I_n=\int_0^{\pi}x\sin^n x.dx$ ដែល $n=0,1,2,...$

តាង $x=\pi-t$ នោះ $dx=-dt$

បើ $x=0$ នោះ $t=\pi$ និង $x=\pi$ នោះ $t=0$

គេបាន $I_n=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)\sin^n(\pi-t)(-dt)$

$$I_n=\int_0^{\pi}(\pi-t)\sin^n t.dt=\pi\int_0^{\pi}\sin^n tdt-\int_0^{\pi}t\sin^n t.dt$$

$$I_n = \pi \int_0^{\pi} \sin^n x.dx - I_n$$ នាំឲ្យ $$I_n = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \sin^n x.dx \quad (1)$$

គេមាន $$\int_0^{\pi} \sin^n x.dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n x.dx \quad (2)$$

តាង $x = \pi - t$ នោះ $dx = -dt$

បើ $x = \frac{\pi}{2}$ នោះ $t = \frac{\pi}{2}$ និង $x = \pi$ នោះ $t = 0$

គេបាន $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n x.dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n(\pi - t)(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t.dt \quad (3)$$

តាម (2) និង (3) គេបាន $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n x.dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx \quad (4)$$

យក (4)ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $$I_n = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$$ ពិត ។

ខ/ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{n \geq 2}$ ស្រាយថា $\mathbf{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$

គេមាន $\mathbf{I_n = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x . \sin x dx}$

តាង $\begin{cases} \mathbf{u = \sin^{n-1} x} \\ \mathbf{dv = \sin x.dx} \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} \mathbf{du = (n-1)\cos x \sin^{n-2} x.dx} \\ \mathbf{v = \int \sin x dx = -\cos x} \end{cases}$

$$\mathbf{I_n = \pi\left[-\sin^{n-1} x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x.dx}$$

$$\mathbf{I_n = (n-1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x.dx}$$

$$\mathbf{I_n = (n-1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x.dx - (n-1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx}$$

$$\mathbf{I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n}$$

គេទាញ $\mathbf{nI_n = (n-1)I_{n-2}}$ ឬ $\mathbf{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$ ។

វិញ្ញាសាទី១៧

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$f_m(x) = x^3 - (m+4)x^2 + 2(2m+3)x - 4m + 3$ មានក្រាប (c_m)

(m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រពិត) ។

ចូរកំណត់សមីការបន្ទាត់ថេរ (Δ) មួយដែលប៉ះនឹងខ្សែកោង (c_m)

ជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ m ។

II-គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + \dfrac{1}{2^n}) \end{cases}$

ដែល $n = 1, 2, 3, ...$ ។

ក/រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត $b_n = a_n - \dfrac{n}{2^n}$ ។

ខ/គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

III-គេឲ្យអាំងតេក្រាល ៖

$$\mathbf{I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx}$$ និង $$\mathbf{J_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx}$$

ក/ចូរស្រាយថា $\mathbf{I_n = J_n}$ ។

ខ/គណនា $\mathbf{I_n}$ និង $\mathbf{J_n}$ ។

IV-គេឲ្យ $\mathbf{f}$ ជាអនុគមន៍កំណត់ពីសំណុំ $\mathbf{IR}$ ទៅ $\mathbf{IR}$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

សមីការ $\mathbf{f(x+1) + x^2 f(x^3+1) = x^3 + \sqrt[3]{x}}$ គ្រប់ $\mathbf{x \in IR}$ ។

ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I = \int_1^2 f(x).dx}$ ។

V-ចូរកំណត់ចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z}$ ដែលមានម៉ូឌុល $\mathbf{|z|}$ ដោយដឹងថា ៖

$\mathbf{|z| + (1+i)z = 4 + 7i}$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-កំណត់សមីការបន្ទាត់ថេរ (Δ)

គេមាន $f_m(x) = x^3 - (m+4)x^2 + 2(2m+3)x - 4m + 3$

តាង $(\Delta): y = \alpha x + \beta$ ជាបន្ទាត់ថេរដែលប៉ះនឹង(c_m) ត្រង់ចំនុច

$M_o(x_0, y_0)$ ចំពោះគ្រប់ $m \in IR$ ។

សមមូលគេបាន $\begin{cases} f(x_0) = \alpha x_0 + \beta \\ f'(x_0) = \alpha \end{cases}$

ដោយ $f'(x) = 3x^2 - 2(m+4)x + 2(2m+3)$

គេបាន $\begin{cases} x_0^3 - (m+4)x_0^2 + 2(2m+3)x_0 - 4m + 3 = \alpha x_0 + \beta \\ 3x_0^2 - 2(m+4)x_0 + 2(2m+3) = \alpha \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} x_0^3 - 4x_0^2 + 6x_0 - \alpha x_0 - \beta + 3 = m(x_0^2 - 4x_0 + 4) \\ 3x_0^2 - 8x_0 + 6 - \alpha = m(2x_0 - 4) \end{cases}$

ប្រពន្ធ័នេះពិត $\forall m \in IR$ លុះត្រាតែ ៖

$$\begin{cases} x_0^3 - 4x_0^2 + 6x_0 - \alpha x_0 - \beta + 3 = 0 & (1) \\ x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0 & (2) \\ 3x_0^2 - 8x_0 + 6 - \alpha = 0 & (3) \\ 2x_0 - 4 = 0 & (4) \end{cases}$$

តាមសមីការ (2)និង(4) គេទាញបាន $x_0 = 2$ ។

តាមសមីការ (3) គេបាន $3(2)^2 - 8(2) + 6 - \alpha = 0$ នាំឲ្យ $\alpha = 2$

តាម (1) គេបាន $8 - 16 + 12 - 4 - \beta + 3 = 0$ នាំឲ្យ $\beta = 3$ ។

ដូចនេះ $(\Delta) : y = 2x + 3$ ។

II-ក/រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត $b_n = a_n - \frac{n}{2^n}$

គេបាន $b_n = a_n - \frac{n}{2^n}$ នាំឲ្យ $b_{n+1} = a_{n+1} - \frac{n+1}{2^{n+1}}$

ដោយ $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{2^n})$

គេបាន $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{2^n}) - \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}(a_n - \frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2} b_n$

ដូចនេះ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{1}{2}$ ។

ខ/គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

ដោយ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=\frac{1}{2}$ និងតួទីមួយ

$b_1=a_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ នោះ $b_n=b_1\times q^{n-1}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1}{2^n}$

តាម $b_n=a_n-\frac{n}{2^n}$ នោះ $a_n=b_n+\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2^n}+\frac{n}{2^n}=\frac{n+1}{2^n}$

ដូចនេះ $a_n=\frac{n+1}{2^n}$ ។

III- /ចូរស្រាយថា $I_n=J_n$

មាន $I_n=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx$ និង $J_n=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx$

ចំពោះ $I_n=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx$ តាង $x=\frac{\pi}{2}-t$ នោះ $dx=-dt$

បើ $x=\frac{\pi}{6}$ នោះ $t=\frac{\pi}{3}$ និង $x=\frac{\pi}{3}$ នោះ $t=\frac{\pi}{6}$

គេបាន $$I_n=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^n(\frac{\pi}{2}-t)}{\sin^n(\frac{\pi}{2}-t)+\cos^n(\frac{\pi}{2}-t)}.(-dt)$$

$$I_n=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^n t}{\cos^n t+\sin^n t}.dt=J_n$$

ដូចនេះ $I_n=J_n$ ។

ខ/គណនា I_n និង J_n ៖

គេបាន $$I_n+J_n=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx$$

$$I_n+J_n=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}dx=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$ តែ $I_n=J_n$

នោះ $2I_n=2J_n=\frac{\pi}{6}$ នាំឲ្យ $I_n=J_n=\frac{\pi}{12}$ ។

ដូចនេះ $I_n=\frac{\pi}{12}$ និង $J_n=\frac{\pi}{12}$ ។

IV-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{1}^{2}f(x).dx$

-បើគេតាង $x=t+1$ នោះ $dx=dt$

ចំពោះ $x=1$ នោះ $t=0$ និង $x=2$ នោះ $t=1$ ។

គេបាន $I=\int_{1}^{2}f(x).dx=\int_{0}^{1}f(t+1).dt \quad (1)$

-បើគេតាង $x=t^3+1$ នោះ $dx=3t^2dt$

ចំពោះ $x=1$ នោះ $t=0$ និង $x=2$ នោះ $t=1$ ។

គេបាន $I=\int_{1}^{2}f(x).dx=3\int_{0}^{1}t^2f(t+1).dt$

ឬ $\frac{1}{3}I=\int_{0}^{1}t^2f(t^3+1).dt \quad (2)$

បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន ៖

$$I+\frac{1}{3}I=\int_{0}^{1}[f(t+1)+t^2f(t^3+1)].dt$$

ដោយ $f(x+1)+x^2f(x^3+1)=x^3+\sqrt[3]{x}$ គ្រប់ $x\in IR$ ។

គេបាន $\frac{4}{3}I=\int_0^1(t^3+\sqrt[3]{t}).dt=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}\right]_0^1=1$

ដូចនេះ $I=\frac{3}{4}$ ។

V- កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច z ដែលមានម៉ូឌុល $|z|$

គេមាន $|z|+(1+i)z=4+7i$ (1)

តាង $z=x+iy$ ដែល $x,y\in IR$ ។សមីការ (1) អាចសរសេរ ៖

$$\sqrt{x^2+y^2}+(1+i)(x+iy)=4+7i$$
$$\sqrt{x^2+y^2}+x+iy+ix-y=4+7i$$
$$(\sqrt{x^2+y^2}+x-y)+i(x+y)=4+7i$$

គេទាញបាន $\begin{cases} x+y=7 & (2) \\ \sqrt{x^2+y^2}+x-y=4 & (3) \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបានគូចម្លើយ $x=3$, $y=4$

ដូចនេះចំនួនកុំផ្លិចដែលត្រូវរកគឺ $z=3+4i$ ។

វិញ្ញាសាទី១៨

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{(3m+1)x+m-m^2}{x+m}$

ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង $m\neq 0$ ។ (H_m) ជាក្រាបតាង f ។

ក/ចូរស្រាយថា f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែនកំណត់របស់វា។

ខ/កំណត់សមីការបន្ទាត់នឹងមួយដែលប៉ះ (H_m) ជានិច្ចគ្រប់ m ។

II-គេមានអនុគមន៍ $g(x)=2\cos^2 x-\cos x+1$ ដែល $x\in IR$

ក/ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $g(x)$ ។

ខ/តាង $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} g(\dfrac{x}{2^k})$ ។ ចូរគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

III-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int\limits_0^1 \dfrac{t^{3n}}{1+t^3}.dt$ ដែល $n=0,1,2,\ldots$ ។

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n)$ ។

IV-ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ៖

ក/ $z^2 - 4z + 7 - 4i = 0$

ខ/ $(1+i)z^2 - 2(1+3i)z + 1 + 5i = 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ក/ស្រាយថា **f** ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែនកំណត់របស់វា

គេមាន $f(x) = \dfrac{(3m+1)x + m - m^2}{x+m}$

ដែនកំណត់ $D_f = IR - \{-m\}$

ដេរីវេ ៖

$$f'(x) = \frac{(3m+1)(x+m) - (3m+1)x - m + m^2}{(x+m)^2}$$

$$= \frac{(3m+1)x + 3m^2 + m - (3m+1)x - m + m^2}{(x+m)^2}$$

$$= \frac{4m^2}{(x+m)^2} > 0 \ \forall x \in D_f \ ; m \neq 0$$

ដូចនេះ **f** ជាអនុគមន៍កើនលើដែនកំណត់ D_f ។

ខ/កំណត់សមីការបន្ទាត់នឹងមួយដែលប៉ះ(H_m)ជានិច្ចគ្រប់ m៖

តាង $(d): y = ax + b$ ជាបន្ទាត់ដែលត្រូវរក ។

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង (d)និង (H_m)

$$\frac{(3m+1)x+m-m^2}{x+m} = ax+b$$

$$(x+m)(ax+b) = (3m+1)x+m-m^2$$

$$ax^2+(am+b)x+bm = (3m+1)x+m-m^2$$

$$ax^2+(am-3m+b-1)x+(bm-m+m^2) = 0 \quad (1)$$

ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ (d) ប៉ះនឹង (H_m) លុះត្រាតែសមីការ(1)មានឫស

ឌុបចំពោះគ្រប់តម្លៃ m ពោលគឺ $\Delta = 0$ គ្រប់ m ។

$$\Delta = (am-3m+b-1)^2 - 4a(bm-m+m^2)$$
$$= (a^2-10a+9)m^2 - 2(a+3)(b-1)m + (b-1)^2$$

$\forall m \in IR : \Delta = 0$ សមមូល $\begin{cases} a^2-10a+9=0 \\ (a+3)(b-1)=0 \\ (b-1)^2=0 \end{cases}$

គេទាញបាន $a=1, b=1$ ឬ $a=9$, $b=1$ ។

ដូចនេះ $(d_1): y = x + 1$ និង $(d_2): y = 9x + 1$ ។

II-គេមានអនុគមន៍ $g(x) = 2\cos^2 x - \cos x + 1$ ដែល $x \in IR$

ក/កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $g(x)$

គេមាន $g(x) = 2\cos^2 x - \cos x + 1$

$$= (\sqrt{2}\cos x - \frac{1}{2\sqrt{2}})^2 + \frac{7}{8}$$

ដើម្បីឲ្យ $g(x)$ មានតម្លៃតូចបំផុតលុះត្រាតែ ៖

$\sqrt{2}\cos x - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0$ ឬ $\cos x = \frac{1}{4}$ ។

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃ $g(x)$គឺ $g_{min}(x) = \frac{7}{8}$,

ខ/គណនា $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

គេមាន $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} g(\frac{x}{2^k})$ ដោយ $2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$

នោះ $g(x) = 2\cos^2 x - 1 - \cos x = \cos 2x - \cos x$

គេបាន $S_n = \sum_{k=0}^{n}(\cos\frac{x}{2^{k-1}} - \cos\frac{x}{2^k}) = \cos 2x - \cos\frac{x}{2^n}$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(\cos 2x - \cos\frac{x}{2^n}) = \cos 2x - 1 = -2\sin^2 x$

III-គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(n\,I_n)$

គេមាន $I_n = \int_0^1 \frac{t^{3n}}{1+t^3}.dt$ ដែល $n = 0, 1, 2, ...$

គេបាន $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}.dt$

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{3n}+t^{3n+3}}{1+t^3}.dt = \int_0^1 t^{3n}.dt = \left[\frac{t^{3n+1}}{3n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{3n+1}$$

$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{3n+1}$ (1) និង $I_{n-1} + I_n = \frac{1}{3n-2}$ (2)

គ្រប់ $t \in [0\,,1]$ គេមាន $t^{3n} \ge t^{3n+3}$ នាំឲ្យ $\frac{t^{3n}}{1+t^3} \ge \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}$

គេទាញ $\int_0^1 \frac{t^{3n}}{1+t^3}dt \ge \int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}.dt$ ឬ $I_n \ge I_{n+1}$ គ្រប់ $n = 0, 1, 2, ...$

នាំឲ្យ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។ តាមលក្ខណៈនៃស្វ៊ីតចុះគេបាន ៖

$I_{n+1} \le I_n \le I_{n-1}$ នាំឲ្យ $\frac{I_{n+1}+I_n}{2} \le I_n \le \frac{I_n + I_{n-1}}{2}$ (3)

យកទំនាក់ទំនង(1)និង(2)ជំនួសក្នុង(3)គេបាន ៖

$\frac{1}{6n+2} \le I_n \le \frac{1}{6n-4}$ នាំឲ្យ $\frac{n}{6n+2} \le nI_n \le \frac{n}{6n-4}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{6n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{6n-4} = \frac{1}{6}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} (nI_n) = \frac{1}{6}$ ។

IV-ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ៖

ក/ $z^2 - 4z + 7 - 4i = 0$

$(z-2)^2 - (1+2i)^2 = 0$ នាំឲ្យ $z_1 = 3+2i$, $z_2 = 1-2i$ ។

ខ/ $(1+i)z^2 - 2(1+3i)z + 1 + 5i = 0$

ដោយ $a+b+c=0$ គេទាញឫស $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{1+5i}{1+i} = 3+2i$

ដូចនេះ $z_1 = 1$; $z_2 = 3+2i$ ។

វិញ្ញាសាទី១៩

សម្រាប់រយះពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^n \frac{dx}{8x^2+6x+1}$ ដែល $n>0$

គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកលីមីត $\lim_{n\to+\infty} I_n$ ។

II-គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{\tan\frac{x}{2}}{\cos x}$ ដែល $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ ។

ក/ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីបាន ៖

$f(x)=\frac{a}{\sin 2x}+\frac{b}{\sin x}$ គ្រប់ $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ ។

ខ/តាង $S_n=\sum_{k=0}^{n} 2^k f(\frac{x}{2^k})$ ។ គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

III-គេឲ្យសមីការ $(E): x^3+px+q=0$

ក/កំណត់ពីរចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឲ្យ $x=1+2i$ ជាឬសនៃ (E) ។

ខ/ចំពោះតម្លៃ p និង q ដែលបានរកឃើញខាងលើចូរដោះស្រាយ (E)

IV-គេឲ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ កំណត់ដោយ ៖

$$\mathbf{f\ (x) = \frac{(2m+1)x^2 - (m^2-1)x + 4}{x}}$$ មានក្រាបតំនាង $\mathbf{(c_m)}$

($\mathbf{m}$ ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង $\mathbf{m \neq -\frac{1}{2}}$) ។

ក/កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប$\mathbf{(c_m)}$ ។

ខ/កំណត់សមីការប៉ារ៉ាបូលនឹង$\mathbf{(P)}$ មួយដែលប៉ះនឹងអាស៊ីមតូត

ទ្រេតនៃក្រាប$\mathbf{(c_m)}$ជានិច្ចគ្រប់ $\mathbf{m}$ ។ ចូរសង់ $\mathbf{(P)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនា $\mathbf{I_n}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{n}$ រួចទាញរកលីមីត $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n}$

គេមាន $\mathbf{I_n = \int_0^n \frac{dx}{8x^2+6x+1}}$ ដែល $\mathbf{n > 0}$

តាង $\mathbf{f(x) = \frac{1}{8x^2+6x+1} = \frac{1}{(2x+1)(4x+1)}}$

សរសេរ $\mathbf{f(x)}$ ជារាងកាណូនិច្ច $\mathbf{f(x) = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{4x+1}}$

គេបាន $\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{4x+1}=\frac{1}{8x^2+6x+1}$

នាំឲ្យ $a(4x+1)+b(2x+1)=1$

ឬ $(4a+2b)x+(a+b)=1$

គេទាញ $\begin{cases}4a+2b=0\\ a+b=1\end{cases}$ នាំឲ្យ $a=-1\ ,\ b=2$

គេបាន $f(x)=-\frac{1}{2x+1}+\frac{2}{4x+1}$

$$I_n=\int_0^n f(x).dx=\int_0^n\left(\frac{2}{4x+1}-\frac{1}{2x+1}\right).dx$$

$$=\int_0^n\frac{2dx}{4x+1}-\int_0^n\frac{dx}{2x+1}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|4x+1|\right]_0^n-\frac{1}{2}\left[\ln|2x+1|\right]_0^n$$

$$=\frac{1}{2}\ln(4n+1)-\frac{1}{2}\ln(2n+1)=\ln\sqrt{\frac{4n+1}{2n+1}}$$

ដូចនេះ $I_n=\ln\sqrt{\frac{4n+1}{2n+1}}$ និង $\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt{\frac{4n+1}{2n+1}}=\ln\sqrt{2}$ ។

II-គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{\tan\frac{x}{2}}{\cos x}$ ដែល $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ ។

ក/កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ៖

គេមាន $f(x)=\frac{a}{\sin 2x}+\frac{b}{\sin x}$ គ្រប់ $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

គេបាន $\frac{a}{\sin 2x}+\frac{b}{\sin x}=\frac{\tan\frac{x}{2}}{\cos x}$

$$\frac{a+2b\cos x}{2\sin x\cos x}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}=\frac{4\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin x\cos x}=\frac{2(1-\cos x)}{2\sin x\cos x}$$

គេទាញបាន $a+b\cos x=2-2\cos x$ នាំឲ្យ $a=2\ ,\ b=-1$ ។

ដូចនេះ $a=2\ ,\ b=-1$ ។

ខ/ គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

គេមាន $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}f(\frac{x}{2^k})$ ដោយ $f(x)=\frac{2}{\sin 2x}-\frac{1}{\sin x}$

គេបាន $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^{k-1}\sin\frac{x}{2^{k-1}}} - \frac{1}{2^k \sin\frac{x}{2^k}} \right)$

$$= \frac{2}{\sin 2x} - \frac{1}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\sin 2x} - \frac{1}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} \right) = \frac{2}{\sin 2x} - \frac{1}{x}$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2x - \sin 2x}{x \sin 2x}$ ។

III-គេឲ្យសមីការ $(E): x^3 + px + q = 0$

ក/កំណត់ពីរចំនួនពិត p និង q

ដើម្បីឲ្យ $x = 1 + 2i$ ជាឫសនៃ (E) លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

គេបាន $(1+2i)^3 + p(1+2i) + q = 0$

$$1 + 6i - 12 - 8i + p + 2ip + q = 0$$
$$(-11 + p + q) + i(2p - 2) = 0$$

គេទាញ $\begin{cases} 2p - 2 = 0 \\ -11 + p + q = 0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $p = 1$, $q = 10$

ដូចនេះ $p=1\ ,\ q=10$ ។

ខ/ ដោះស្រាយសមីការ(E)

ចំពោះ$p=1\ ,\ q=10$ គេបាន $x^3+x+10=0$

គេអាចសរសេរ $x^3+2x^2-2x^2-4x+5x+10=0$

$$x^2(x+2)-2x(x+2)+5(x+2)=0$$
$$(x+2)(x^2-2x+5)=0$$

-បើ $x+2=0$ នោះ $x=-2$

-បើ $x^2-2x+5=0$, $\Delta'=1-5=-4=(2i)^2$

គេទាញឫស $x_1=1-2i$; $x_2=1+2i$ ។

សរុបមកសមីការមានឫសបី $x\in\{-2\ ,\ 1-2i\ ,\ 1+2i\ \}$ ។

IV-ក/កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប(c_m)

គេមាន $f\ (x)=\dfrac{(2m+1)x^2-(m^2-1)x+4}{x}$

គេបាន $f(x)=(2m+1)x-m^2+1+\dfrac{4}{x}$ ដោយ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x}=0$

ដូចនេះបន្ទាត់ $(d): y=(2m+1)x-m^2+1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

របស់ខ្សែកោង (c_m) តាង f ។

ខ/កំណត់សមីការប៉ារ៉ាបូលនឹង (P) ៖

តាង $(p): y=ax^2+bx+c$ ជាប៉ារ៉ាបូលនឹងដែលត្រូវរក ។

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង (P) និង (d) ៖

$$ax^2+bx+c=(2m+1)x-m^2+1$$
$$ax^2+(b-2m-1)x+m^2+c-1=0 \quad (1)$$

ដើម្បីឲ្យ (d) ប៉ះនឹង (P) ជានិច្ចគ្រប់ m លុះត្រាតែសមីការ (1)

មានឫសឌុបជានិច្ចគ្រប់ m ពោលគឺគេត្រូវឲ្យ $\Delta=0$ គ្រប់ m ។

គេមាន $\Delta=(b-2m-1)^2-4a(m^2+c-1)$

$$\Delta=(b-1)^2-4m(b-1)+4m^2-4am^2-4ac+4a$$

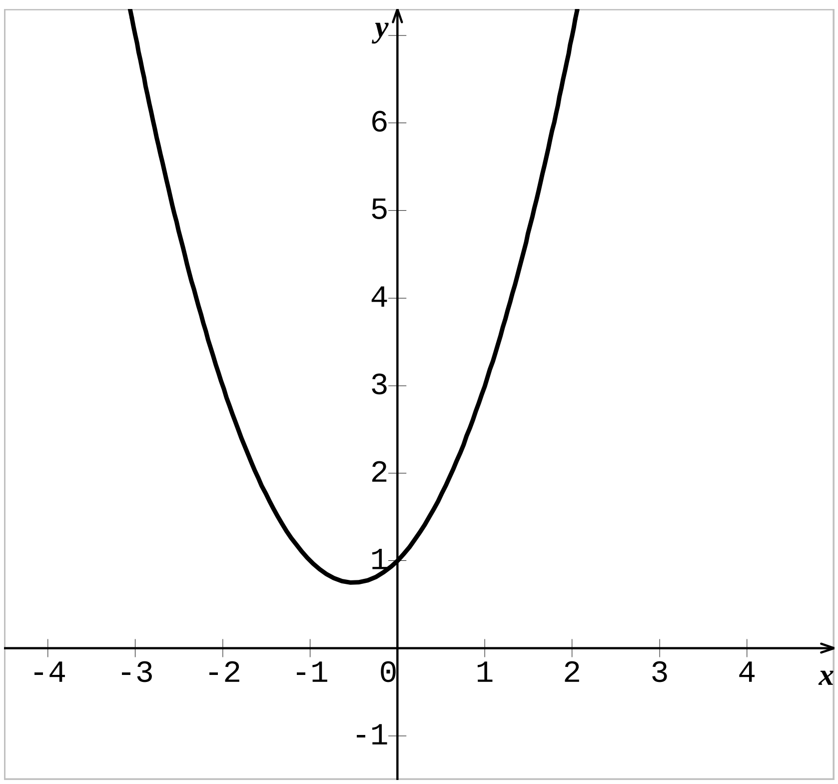
$$\Delta=(4-4a)m^2-4(b-1)m+[(b-1)^2-4ac+4a]$$

ដើម្បីឲ្យ $\Delta = 0$ គ្រប់ m លុះត្រាតែ $\begin{cases} 4 - 4a = 0 \\ b - 1 = 0 \\ (b-1)^2 - 4ac + 4a = 0 \end{cases}$

គេទាញបាន $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ ។

ដូចនេះ $(P): y = x^2 + x + 1$ ជាប៉ារ៉ាបូលដែលត្រូវរក ។

សង់ប៉ារ៉ាបូល $(P): y = x^2 + x + 1$



វិញ្ញាសាទី២០

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_\alpha = \int_0^{\sqrt{\alpha}} x^3 e^{-x^2}.dx$ ដែល $\alpha > 0$ ។

គណនា I_α ជាអនុគមន៍នៃ α រួចគណនា $\lim_{\alpha \to +\infty} I_\alpha$ ។

II-គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (t_n) កំណត់ដោយ ៖

$t_0 = \frac{1}{7}$ និងទំនាក់ទំនងកំណើន $t_{n+1} = \frac{\sqrt[3]{t_n}}{\sqrt[3]{1+t_n} - \sqrt[3]{t_n}}$

ដែល $n = 0, 1, 2, ...$ ។

ក/តាង $u_n = \ln(1 + \frac{1}{t_n})$ ។ ស្រាយថា (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ/គណនាតួ u_n និង t_n ជាអនុគមន៍នៃn ។

III-រកតម្លៃ x ដើម្បីឲ្យ $y = \cos 2x - 4\cos^2 \frac{x}{2} + 1$ មានតម្លៃអប្បបរមា

រួចកំណត់តម្លៃអប្បបរមានោះ ។

IV-គេឲ្យប៉ារ៉ាបូល $(P): y = x^2 - 4x + 5$

ក/កំណត់កូអរដោនេនៃកំពូល និង កំណុំរបស់ (P) រួចសង់ (P)

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ។

ខ/គេគូសបន្ទាត់ (d) មួយមានមេគុណប្រាប់ទិស m ចេញពី

ចំណុចនឹង I មួយ ។ បន្ទាត់ (d) កាត់ (P) បានពីរចំណុច A និង B ។

កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចនឹង I ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ប៉ះ (P) ត្រង់

ចំណុច A និង B កែងនឹងគ្នាជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ m ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនា I_α ជាអនុគមន៍នៃ α រួចគណនា $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I_\alpha$

គេមាន $I_\alpha = \int_0^{\sqrt{\alpha}} x^3 e^{-x^2}.dx$ ដែល $\alpha > 0$

តាង $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = xe^{-x^2}dx \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} du = 2x.dx \\ v = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2} \end{cases}$

គេបាន $I_\alpha = \left[-\frac{x^2}{2} e^{-x^2} \right]_0^{\sqrt{\alpha}} + \int_0^{\sqrt{\alpha}} x e^{-x^2} .dx$

$$= -\frac{\alpha}{2} e^{-\alpha} - \left[\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^{\sqrt{\alpha}}$$

$$= -\frac{1}{2} \alpha e^{-\alpha} - (\frac{1}{2} e^{-\alpha} - \frac{1}{2})$$

ដូចនេះ $I_\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\alpha+1}{2} e^{-\alpha}$ និង $\lim_{\alpha \to +\infty} I_\alpha = \frac{1}{2}$ ។

II-ក/ស្រាយថា (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

សម្មតិកម្ម $t_0 = \frac{1}{7}$ និង $t_{n+1} = \frac{\sqrt[3]{t_n}}{\sqrt[3]{1+t_n} - \sqrt[3]{t_n}}$

គេមាន $u_n = \ln(1 + \frac{1}{t_n})$ នាំឲ្យ $u_{n+1} = \ln(1 + \frac{1}{t_{n+1}})$

ដោយ $t_{n+1} = \frac{\sqrt[3]{t_n}}{\sqrt[3]{1+t_n} - \sqrt[3]{t_n}}$ នោះគេបាន ៖

$$u_{n+1} = \ln(1 + \frac{\sqrt[3]{1+t_n} - \sqrt[3]{t_n}}{\sqrt[3]{t_n}}) = \ln(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{t_n}}) = \frac{1}{3} \ln(1 + \frac{1}{t_n})$$

គេបាន $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n$ នាំឲ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង

$q=\frac{1}{3}$ និងតួ $u_0=\ln(1+\frac{1}{t_0})=\ln 8$ ។

ខ/គណនាតួ u_n និង t_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

តាមរូបមន្ត $u_n=u_0\times q^n=(\frac{1}{3})^n\ln 8$

ហើយ $u_n=\ln(1+\frac{1}{t_n})=\frac{1}{3^n}\ln 8$

គេទាញ $1+\frac{1}{t_n}=8^{\frac{1}{3^n}}$ នាំឲ្យ $t_n=\frac{1}{8^{\frac{1}{3^n}}-1}$ ។

ដូចនេះ $u_n=\frac{1}{3^n}\ln 8$ និង $t_n=\frac{1}{8^{\frac{1}{3^n}}-1}$ ។

III-រកតម្លៃ x

គេមាន $y=\cos 2x-4\cos^2\frac{x}{2}+1$

$$=2\cos^2 x-1-2(1+\cos x)+1$$

$y = 2\cos^2 x - 2\cos x - 2$

$y = \frac{1}{2}(2\cos x - 1)^2 - \frac{3}{2}$

ដើម្បីឲ្យ y មានតម្លៃតូចបំផុតលុះត្រាតែ $2\cos x - 1 = 0$

គេបាន $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ នាំឲ្យ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ;\ k \in Z$

ដូចនេះ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ;\ k \in Z$ និង $y_{min} = -\frac{3}{2}$ ។

IV-គេឲ្យប៉ារ៉ាបូល $(P) : y = x^2 - 4x + 5$

ក/កំណត់កូអរដោនេនៃកំពូល និង កំណុំរបស់ (P) ៖

គេមាន $y = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$ ឬ $(x-2)^2 = y - 1$ ។

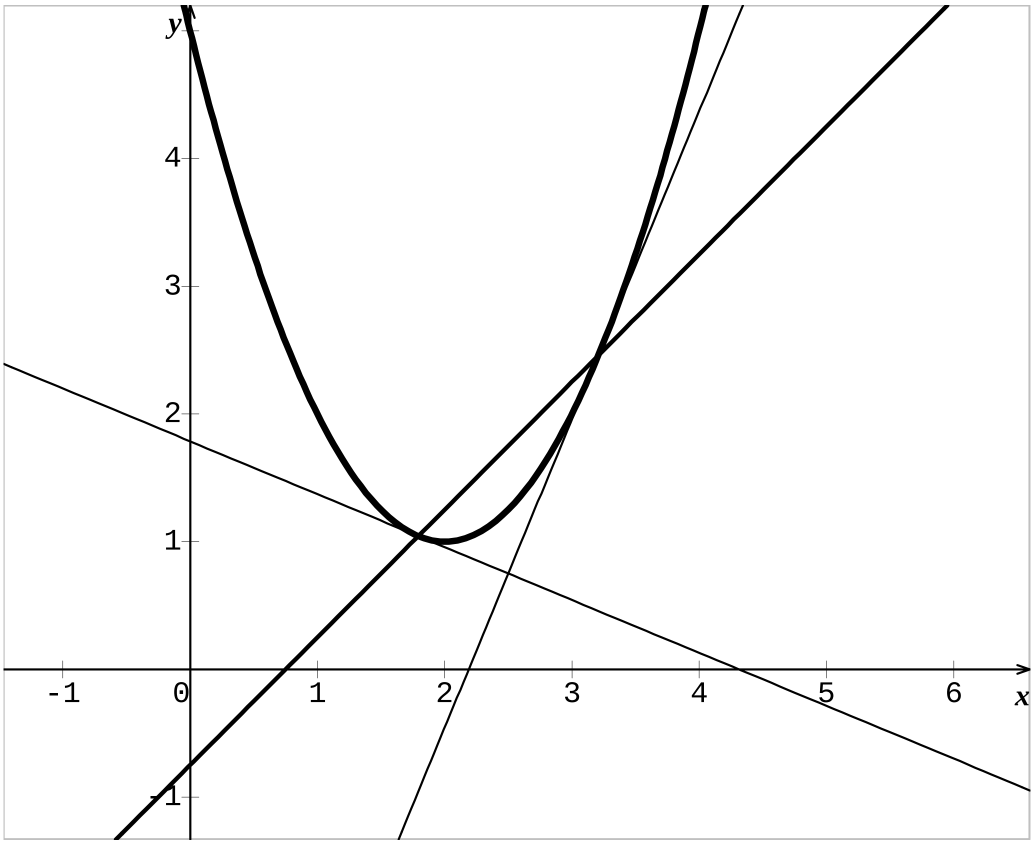
ដោយប្រៀបធៀបជាមួយសមីការ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

គេទាញ $h = 2\ ,\ p = \frac{1}{4}\ ,\ k = 1$ ។

ដូចនេះកូអរដោនេកំពូល $S(h,k) = S(2,1)$

និងកំណុំ $F(h, k+p) = F(2;\frac{5}{4})$ ។

ខ/កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចនឹង **I** ៖



តាង $\mathbf{I}(\alpha,\beta)$ ជាចំណុចនឹងដែលត្រូវរក ។

សមីការបន្ទាត់ $\mathbf{(d): y = m(x-\alpha)+\beta}$

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង **(d)** និង **(P)** ៖

$\mathbf{x^2 - 4x + 5 = mx - m\alpha + \beta}$ ឬ $\mathbf{x^2 - (m+4)x + m\alpha - \beta + 5 = 0}$ **(1)**

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ **(P)** ត្រង់ **A** និង **B** គឺ ៖

$y'_A = 2x_A - 4$ និង $y'_B = 2x_B - 4$ ។

ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ប៉ះ (P)ត្រង់ចំណុច A និង B កែងនឹងគ្នាជានិច្ច

គ្រប់តម្លៃ mលុះត្រាតែ $y'_A . y'_B = -1$ គ្រប់ m ។

គេបាន $(2x_A - 4)(2x_B - 4) = -1$

$$4x_A x_B - 8(x_A + x_B) + 17 = 0 \quad (1)$$

ដោយ x_A និង x_B ជាឬសនៃសមីការ (1) នោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត

គេបាន $\begin{cases} x_A + x_B = m + 4 & (2) \\ x_A x_B = m\alpha - \beta + 5 & (3) \end{cases}$

យក (2) និង (3) ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$4(m\alpha - \beta + 5) - 8(m + 4) + 7 = 0$$
$$(4\alpha - 8)m = 4\beta + 5$$

សមីការនេះផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់ m លុះត្រាតែ$\begin{cases} 4\alpha - 8 = 0 \\ 4\beta + 5 = 0 \end{cases}$

គេទាញ $\alpha = 2 \; ; \beta = -\dfrac{5}{4}$ ។ ដូចនេះ $I(2 \, , -\dfrac{5}{4})$ ។

វិញ្ញាសាទី២១

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2}\tan\frac{\pi x}{2x+1}$

II-គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos 3x}$ ដែល $0<x<\frac{\pi}{6}$

ក/ចូរស្រាយថា $f(x)=\frac{1}{4}(\frac{1}{\cos 3x}-\frac{1}{\cos x})$ គ្រប់ $0<x<\frac{\pi}{6}$ ។

ខ/គណនា $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}f(\frac{x}{3^k})$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ។

III-គេមានអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+x+1}.dx$ ដែល $n=0,1,2,...$

ក/ស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ រួចគណនា $I_n+I_{n+1}+I_{n+2}$ ។

ខ/គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n)$ ។

IV-គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$(E): y''+y=(4x^2+8x+2)e^{2x}$ និង $(F): y''+y=0$

ក/កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឲ្យ $y_1=(ax^2+bx+c)e^{2x}$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ/ស្រាយថា $y=y_1+y_2$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

លុះត្រាតែ y_2 ជាចម្លើយរបស់សមីការ (F) ។

គ/ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយរបស់ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនាលីមីត ៖

តាង $L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2}\tan\dfrac{\pi x}{2x+1}$

គេមាន $\dfrac{\pi x}{2x+1}=a+\dfrac{b}{2x+1}=\dfrac{2ax+a+b}{2x+1}$

គេទាញ $\begin{cases}2a=\pi\\a+b=0\end{cases}$ នាំឲ្យ $a=\dfrac{\pi}{2}\ ;\ b=-\dfrac{\pi}{2}$

គេបាន $\frac{\pi x}{2x+1}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2(2x+1)}$ នោះ $\tan\frac{\pi x}{2x+1}=\cot\frac{\pi}{2(2x+1)}$

$L=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2}\cot\frac{\pi}{2(2x+1)}$ តាង $u=\frac{1}{2x+1}$ នោះ $x=\frac{1-u}{2u}$ ។

កាលណា $x\to\infty$ នោះ $u\to 0$ ។

គេបាន $L=\lim_{u\to 0}\frac{4u^2}{(1-u)^2u}\cot\frac{\pi u}{2}=\lim_{u\to 0}\frac{4u\cos\frac{\pi u}{2}}{(1-u)^2\sin\frac{\pi u}{2}}$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{4\cos\frac{\pi u}{2}}{(1-u)^2}\times\frac{\frac{\pi u}{2}}{\sin\frac{\pi u}{2}}\times\frac{2}{\pi}=\frac{8}{\pi}$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2}\tan\frac{\pi x}{2x+1}=\frac{8}{\pi}$ ។

II-ក/ ស្រាយថា $f(x)=\frac{1}{4}(\frac{1}{\cos 3x}-\frac{1}{\cos x})$ គ្រប់ $0<x<\frac{\pi}{6}$

គេមាន $f(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos 3x}$ ដែល $0<x<\frac{\pi}{6}$

គេបាន $f(x)=\frac{1-\cos^2 x}{\cos 3x}=\frac{1}{4}.\frac{1-(4\cos^2 x-3)}{\cos 3x}$

ដោយ $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos x(4\cos^2 x - 3)$

គេបាន $f(x) = \frac{1}{4}(\frac{1}{\cos 3x} - \frac{4\cos^2 x - 3}{\cos 3x}) = \frac{1}{4}(\frac{1}{\cos 3x} - \frac{1}{\cos x})$

ដូចនេះ $f(x) = \frac{1}{4}(\frac{1}{\cos 3x} - \frac{1}{\cos x})$ គ្រប់ $0 < x < \frac{\pi}{6}$ ។

ខ/គណនា $S_n = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{x}{3^k})$ និង $\lim_{n\to+\infty} S_n$

គេបាន $S_n = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{\cos\frac{x}{3^{k-1}}} - \frac{1}{\cos\frac{x}{3^k}}) = \frac{1}{4}(\frac{1}{\cos 3x} - \frac{1}{\cos\frac{x}{3^n}})$

ហើយ $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{4}(\frac{1}{\cos 3x} - 1) = \frac{\sin^2\frac{3x}{2}}{2\cos 3x}$ ។

III-ក/ស្រាយថា (I_n) ជាស្វីតចុះ

គេមាន $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+x+1}.dx$ និង $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+x+1}.dx$

ចំពោះគ្រប់ $x \in [0,1]$ និង $n \in IN$ គេមាន $x^n \ge x^{n+1}$

នាំឲ្យ $\frac{x^n}{x^2+x+1} \ge \frac{x^{n+1}}{x^2+x+1}$ នោះ $I_n \ge I_{n+1}$ ។

ដូចនេះ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

គណនា $I_n + I_{n+1} + I_{n+2}$ ៖

គេបាន $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1} + x^{n+2}}{x^2 + x + 1}.dx$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(1 + x + x^2)}{x^2 + x + 1}.dx$$

$$= \int_0^1 x^n.dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ ។

ខ/គណនាលីមីត $\lim\limits_{n \to +\infty} (nI_n)$ ៖

គេមាន $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ (1)

គេបាន $I_{n-2} + I_{n-1} + I_n = \frac{1}{n-1}$ (2) គ្រប់ $n \geq 2$ ។

ដោយ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះនោះចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ គេមាន

$I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1} \leq I_{n-2}$

នាំឲ្យ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} \le 3I_n \le I_{n-2} + I_{n-1} + I_n$ (3)

តាម (1) , (2) និង (3) គេទាញបាន ៖

$\frac{1}{n+1} \le 3I_n \le \frac{1}{n-1}$ នាំឲ្យ $\frac{n}{3(n+1)} \le n I_n \le \frac{n}{3(n-1)}$

ដោយ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3(n-1)} = \frac{1}{3}$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}(nI_n) = \frac{1}{3}$ ។

IV-គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$(E): y''+ y = (4x^2 + 8x + 2)e^{2x}$ និង $(F): y''+ y = 0$

ក/កំណត់ចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឲ្យ $y_1 = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ/ស្រាយថា $y = y_1 + y_2$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

លុះត្រាតែ y_2 ជាចម្លើយរបស់សមីការ (F) ។

គ/ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយរបស់ (E) ។

វិញ្ញាសាទី២២

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឱ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំណត់ដោយ៖

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ v_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{និង} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n - v_n}{\sqrt{2}} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{ដែល } n \geq 1$$

ក. គេពិនិត្យស្វីតនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_n = u_n + i.v_n$ ។

ចូរស្រាយថា (z_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច រួចគណនា z_n

ជាអនុគមន៍នៃ n ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

II-គណនាផលបូក $S = \sum_{i=0}^{101} \dfrac{x_i^{\ 3}}{1 - 3x_i + 3x_i^{\ 2}}$

ដែល $x_i = \dfrac{i}{101}$; $i = 1, 2, 3, \ldots$ ។

III-គេឲ្យ $a \geq 1$ និង $b \geq 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \leq 2\sqrt{\log_2(\frac{a+b}{2})}$

IV-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 3x + 1}$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$f\left(\frac{1+a+b}{2}\right) \geq f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$ ។

V-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ និង មានដេរីវេលើ IR ដែលចំពោះគ្រប់

$x, y \in IR$ គេមានទំនាក់ទំនង $f(\frac{x+y}{2}) = \sqrt{f(x)f(y)}$ និង $f(x) > 0$ ។

ចូរកំណត់អនុគមន៍ $y = f(x)$.

ដំណោះស្រាយ

I-ក. ស្រាយថា (z_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច៖

គេមាន $z_n = u_n + i.v_n$

គេបាន $z_{n+1} = u_{n+1} + i.v_{n+1}$

$$= \frac{u_n - v_n}{\sqrt{2}} + i.\frac{u_n + v_n}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}(u_n + iv_n) = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{1} z_n$$

ដូចនេះ(z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច ។

គណនា z_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេបាន $z_n = z_1 \times q^{n-1}$

តែ $z_1 = u_1 + iv_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}$

និង $q = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}$

គេបាន $z_n = (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^n$

ដូចនេះ $z_n = \cos\frac{n\pi}{4} + i.\sin\frac{n\pi}{4}$ (រូបមន្តដឺម័រ)

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $z_n = u_n + i.v_n$

ដោយ $z_n = \cos\frac{n\pi}{4} + i.\sin\frac{n\pi}{4}$

ដូចនេះ $u_n = \cos\frac{n\pi}{4}$ និង $v_n = \sin\frac{n\pi}{4}$ ។

II-គណនាផលបូក $S = \sum_{i=0}^{101} \frac{x_i^{\ 3}}{1 - 3x_i + 3x_i^{\ 2}}$

យើងមាន $1 - 3x + 3x^2 = x^3 + (1-x)^3 = x^3 - (x-1)^3$

តាង $f(x) = \frac{x^3}{1 - 3x + 3x^2} = \frac{x^3}{x^3 + (1-x)^3}$

គេបាន $f(x_i) = \frac{x_i^{\ 3}}{x_i^{\ 3} + (1-x_i)^3}$

ហើយ $f(1-x_i) = \frac{(1-x_i)^3}{(1-x_i)^3 + x_i^{\ 3}}$

គេបាន $f(x_i) + f(1-x_i) = \frac{x_i^{\ 3}}{x_i^{\ 3} + (1-x_i)^3} + \frac{(1-x_i)^3}{(1-x_i)^3 + x_i^{\ 3}} = 1$

គេទាញ $f(x_i) = 1 - f(1-x_i)$

ដោយ $x_i = \frac{i}{101}$ នោះ $1 - x_i = 1 - \frac{i}{101} = \frac{101 - i}{101}$

គេបាន $S=\sum_{i=0}^{101} f(x_i)=\sum_{i=0}^{101} f\left(\frac{i}{101}\right)=\sum_{i=0}^{101}\left[1-f(\frac{101-i}{101})\right]$

$$S=102-\sum_{i=0}^{101} f\left(\frac{101-i}{101}\right)=102-S$$

គេទាញ $S=\frac{102}{2}=51$ (ព្រោះ $\sum_{i=0}^{101} f\left(\frac{i}{101}\right)=\sum_{i=0}^{101} f\left(\frac{101-i}{101}\right)$)

III-បង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\le 2\sqrt{\log_2(\frac{a+b}{2})}$

យើងមាន $a+b\ge 2\sqrt{a.b}$ (វិសមភាព $AM-GM$)

ឬ $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{a.b}$

នាំឲ្យ $\log_2(\frac{a+b}{2})\ge\frac{1}{2}(\log_2 a+\log_2 b)$

ឬ $\log_2 a+\log_2 b\le 2\log_2(\frac{a+b}{2})$ (1)

ម៉្យាងទៀតគេមាន ៖

$\log_2 a+\log_2 b\ge 2\sqrt{\log_2 a}.\sqrt{\log_2 b}$

$$2(\log_2 a+\log_2 b)\geq \log_2 a+2\sqrt{\log_2 a}.\sqrt{\log_2 b}+\log_2 b$$

$$2(\log_2 a+\log_2 b)\geq (\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b})^2$$

$$\log_2 a+\log_2 b\geq \frac{1}{2}(\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b})^2 \quad (2)$$

តាមទំនាក់ទំនង **(1)** និង **(2)** យើងទាញ៖

$$\frac{1}{2}(\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b})^2\leq 2\log_2(\frac{a+b}{2})$$

$$(\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b})^2\leq 4\log_2(\frac{a+b}{2})$$

$$\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\leq 2\sqrt{\log_2(\frac{a+b}{2})}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\leq 2\sqrt{\log_2(\frac{a+b}{2})}}$ ។

IV-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f\left(\frac{1+a+b}{2}\right)\geq f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$

យើងមាន $f(x)=\frac{x^3+3x^2-3x+1}{3x^2-3x+1}$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x-3)(3x^2-3x+1)-(6x-3)(x^3+3x^2-3x+1)}{(3x^2-3x+1)^2}$$

$$=\frac{3x^4-6x^3+3x^2}{(3x^2-3x+1)^2}=\frac{3x^2(x-1)^2}{(3x^2-3x+1)^2}\geq 0\ ,\ \forall x\in IR$$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនលើ IR ។

ម៉្យាងទៀតយើងសន្មតថា $\frac{1+a+b}{2} \ge \frac{1+a+b+ab}{2+a+b}$

គេបាន $\frac{2}{1+a+b} \le \frac{2+a+b}{1+a+b+ab}$

$$\frac{2}{1+a+b} \le \frac{(1+a)+(1+b)}{(1+a)(1+b)}$$

$$\frac{2}{1+a+b} \le \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$$

ដោយ $\frac{1}{1+a+b} \le \frac{1}{1+a}$ និង $\frac{1}{1+a+b} \le \frac{1}{1+b}$

គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ។

គេទាញ $\frac{2}{1+a+b} \le \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$

នាំឲ្យការសន្មត $\frac{1+a+b}{2} \ge \frac{1+a+b+ab}{2+a+b}$ ពិត។

ដូចនេះតាមលក្ខណះអនុគមន៍កើនគេទាញបាន ៖

$$f\left(\frac{1+a+b}{2}\right) \ge f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right) ។$$

V-កំណត់អនុគមន៍ $y = f(x)$

គេមានទំនាក់ទំនង $f(\frac{x+y}{2}) = \sqrt{f(x)f(y)}$

ដោយ $f(x) > 0$ នោះ $f(y) > 0$ និង $f(\frac{x+y}{2}) > 0$

តាងអនុគមន៍ $g(x) = \ln f(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$

គេបាន $g(\frac{x+y}{2}) = \ln\left[f(\frac{x+y}{2})\right]$ ដោយ $f(\frac{x+y}{2}) = \sqrt{f(x)f(y)}$

ហេតុនេះ $g(\frac{x+y}{2}) = \ln\left[\sqrt{f(x)f(y)}\right] = \frac{1}{2}[\ln f(x) + \ln f(y)]$

ឬ $g(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}[g(x) + g(y)]$

ធ្វើដេរីវេធៀបនឹង x ក្នុងសមភាព $g(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}[g(x) + g(y)]$

ដោយចាត់ទុក y ជាអថេរមិនអាស្រ័យនឹង x គេបាន ៈ

$\frac{1}{2}g'(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}g'(x)$ ឬ $g'(\frac{x+y}{2}) = g'(x)$

យក $x = 0$ គេបាន $g'(\frac{y}{2}) = g'(0)$

ធ្វើអាំងតេក្រាល $\int g'(\frac{y}{2})dy = \int g'(o)dy = g'(0)y + k$

តាង $z = \frac{y}{2}$ នោះ $dy = 2dz$

គេបាន $2\int g'(z)dz = g'(0)y + k$

$$2g(z) = g'(0)y + k \text{ ឬ } g(z) = \frac{1}{2}g'(0)y + \frac{k}{2} = g'(0)z + \frac{k}{2}$$

យក $a = g'(0)$ និង $b = \frac{k}{2}$ គេបាន $g(z) = az + b$

ឬ $g(x) = ax + b$ ដោយ $g(x) = \ln f(x)$

គេបាន $\ln f(x) = ax + b$ នាំឱ្យ $f(x) = e^{ax+b}$

ដូចនេះ $f(x) = e^{ax+b}$ ដែល $a, b \in IR$ ។

វិញ្ញាសាទី២៣

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេកំណត់ចំនួន $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ ដូចខាងក្រោម៖

$$a_0 = \frac{1}{2}; a_{k+1} = a_k + \frac{{a_k}^2}{n} \quad (n > 1, k = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

ចូរបង្ហាញថា $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$ ។

II-គណនាផលគុណខាងក្រោម៖

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \left(\tan^{2^k} \frac{x}{2^k} \right) = \tan x . \tan^2 \frac{x}{2} . \tan^4 \frac{x}{4} ..... \tan^{2^n} \frac{x}{2^n}$$

III-ដោះស្រាយសមីការ

$$\log_3(2^x + 1) + \frac{6}{\log_3(2^x + 1)} = 1 + 2\sqrt{\log_3(2^x + 1) + \frac{8}{\log_3^2(2^x + 1)}}$$

IV-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើចន្លោះ $[0,1]$ ដោយដឹងថា៖

$f(0)=f(1)=1$ និង $|f(a)-f(b)|<|a-b|$ ចំពោះគ្រប់ $a\neq b$

ក្នុងចន្លោះ $[0,1]$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-បង្ហាញថា $1-\frac{1}{n}<a_n<1$

គេមាន $a_{k+1}=a_k+\frac{{a_k}^2}{n}=\frac{a_k(n+a_k)}{n}$

គេបាន $\frac{1}{a_{k+1}}=\frac{n}{a_k(a_k+n)}=\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_k+n}$

ឬ $\frac{1}{a_k+n}=\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}$

ហេតុនេះ $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a_k+n}=\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}})=\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}=2-\frac{1}{a_n}$ (*)

គេមាន $a_0=\frac{1}{2}>0$ ពិត ។ ឧបមាថា $a_k>0$ ពិត

តាម $a_{k+1}=a_k+\frac{{a_k}^2}{n}$ គេទាញបាន $a_{k+1}>0$ ពិត

ដូចនេះ $a_k > 0$ នោះ $a_k + n > n$ ឬ $\frac{1}{a_k + n} < \frac{1}{n}$ $,\forall n > 1$

គេបាន $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k + n} < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{(n)} = \frac{n}{n} = 1$

តាម (*) គេទាញបាន $2 - \frac{1}{a_n} < 1$ នាំឱ្យ $a_n < 1$ (i)

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $a_n < 1$ នោះ $a_k < 1$ ឬ $a_k + n < n + 1$

ឬ $\frac{1}{a_k + n} > \frac{1}{n+1}$ គ្រប់ $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ ។

គេបាន $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k + n} > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

ដោយពិនិត្យឃើញថាគ្រប់ $n > 1$ គេមាន $\frac{n}{n+1} - \frac{n-2}{n-1} = \frac{2}{n^2 - 1} > 0$

នោះគេទាញបាន $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k + n} > \frac{n}{n+1} > \frac{n-2}{n-1}$

តាម (*) គេទាញបាន $2 - \frac{1}{a_n} > \frac{n-2}{n-1}$

ឬ $\frac{1}{a_n} < 2 - \frac{n-2}{n-1} = \frac{n}{n-1}$ នោះ $a_n > \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ (ii)

តាម (i) & (ii) គេទាញបាន $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$ ។

ដូចនេះ $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$ ។

II-គណនាផលគុណ $P_n = \prod_{k=0}^{n} \left(\tan^{2^k} \frac{x}{2^k} \right)$

គេមាន $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{2\sin^2 a}{2\sin a \cos a} = \frac{2\sin^2 a}{\sin 2a}$

យក $a = \frac{x}{2^k}$ គេបាន $\tan \frac{x}{2^k} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2^k}}{\sin \frac{2x}{2^k}}$

គេទាញ $P_n = \prod_{k=0}^{n} \left(2^{2^k} \cdot \frac{\sin^{2^{k+1}} \frac{x}{2^k}}{\sin^{2^k} \frac{2x}{2^k}} \right) = 2^{2^{n+1}-1} \cdot \frac{\sin^{2^{n+1}} \frac{x}{2^n}}{\sin 2x}$

ដូចនេះ $P_n = 2^{(2^{n+1}-1)} \cdot \frac{\sin^{2^{n+1}} \frac{x}{2^n}}{\sin 2x}$ ។

III-ដោះស្រាយសមីការ

$$\log_3(2^x+1)+\frac{6}{\log_3(2^x+1)}=1+2\sqrt{\log_3(2^x+1)+\frac{8}{\log_3^2(2^x+1)}}$$

តាង $t=\log_3(2^x+1)$ សមីការអាចសរសេរ ៖

$t+\frac{6}{t}=1+2\sqrt{t+\frac{8}{t^2}}$ ឬ $\frac{t^2-t+6}{t}=2\sqrt{\frac{(t+2)(t^2-2t+4)}{t^2}}$

ឬ $\frac{t^2-t+6}{t}=2\sqrt{\frac{t+2}{t}\cdot\frac{t^2-2t+4}{t}}$ (1)

តាង $u=\frac{t+2}{t}$ និង $v=\frac{t^2-2t+4}{t}$ គេបាន $u+v=\frac{t^2-t+6}{t}$

សមីការ អាចសរសេរ (1)$u+v=2\sqrt{uv}\Leftrightarrow(\sqrt{u}-\sqrt{v})^2=0$

គេទាញ $u=v$ ឬ $\frac{t+2}{t}=\frac{t^2-2t+4}{t}$) $t\neq 0$)

ឬ $t+2=t^2-2t+4$

ឬ $t^2-3t+2=0$ មានឬស $t_1=1\ ;\ t_2=2$ ។

ចំពោះ-$t=1\Rightarrow\log_3(2^x+1)=1$

$$\Rightarrow 2^x + 1 = 3$$

$$\Rightarrow \quad 2^x = 2$$

$$\Rightarrow \quad x = 1$$

ចំពោះ-$t = 2 \Rightarrow \log_3(2^x + 1) = 2$

$$\Rightarrow 2^x + 1 = 9$$

$$\Rightarrow \quad 2^x = 8$$

$$\Rightarrow \quad x = 3$$

ដូចនេះសមីការមានឫស $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ ។

បង្ហាញថា $|f(a) - f(b)| < \dfrac{1}{2}$

-ករណីទី១៖

ចំពោះ $|a - b| \leq \dfrac{1}{2}$ នោះគេបាន $|f(a) - f(b)| < |a - b| \leq \dfrac{1}{2}$ ពិត

-ករណីទី២ ៖

ចំពោះ $|a - b| > \dfrac{1}{2}$នោះតាមលក្ខណៈឆ្លុះគេអាចសន្មតថា $a > b$

គេមាន $|f(a) - f(b)| = |f(a) - f(1) + f(0) - f(b)|$

តាមវិសមភាពត្រីកោណគេបាន៖

$$|f(a)-f(b)|\le|f(a)-f(1)|+|f(0)-f(b)|$$

$$|f(a)-f(b)|<|a-1|+|0-b|=1-a+b=1-(a-b)<\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $|f(a)-f(b)|<\frac{1}{2}$ ។

វិញ្ញាសាទី២៤

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ ៖

$$\begin{cases} xy + x + y = 11 \\ x^2y^2 + x^2 + y^2 = 49 \end{cases}$$ ដែល $x \in IR$, $y \in IR$ ។

II-ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(a_n)_{n\geq1}$ កំណត់ដោយ $a_1 = 1$, $a_2 = 3$

និង $a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n$, $\forall n \in IN$

ចូរកំណត់គ្រប់តម្លៃ n ដើម្បីឱ្យ a_n ចែកដាច់នឹង 11 ។

III-ក. ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

ខ. ចូរស្រាយថា $x^2 + (x-y)^2 \leq 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គ្រប់ចំនួន $x, y \in IR$ ។

IV-គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\ln(1+2e^{x})$ ដែល x ជាចំនួនពិត ។

គេពិនិត្យស្វ៊ីតពីរ (a_n) និង (b_n) កំណត់ ដោយទំនាក់ទំនង

$a_0=f(0)$, $a_{n+1}=f(a_n)$ និង $b_n=1+e^{a_n}$ គ្រប់ $n=0,1,2,...$

ក/ចូរស្រាយថា (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ/គណនា b_n និង a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

V-គេឱ្យ x,y,z ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2y^2+2yx^2+1=0$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃអនុគមន៍ ៖

$$f(x,y)=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+y(y+\frac{1}{x}+2)$$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ ៖

របៀបទី១

$$\begin{cases} xy + x + y = 11 & (1) \\ x^2y^2 + x^2 + y^2 = 49 & (2) \end{cases}$$

តាង $s = x + y$ និង $p = xy$

សមីការ **(1)** ក្លាយជា $p + s = 11$ ឬ $s = 11 - p$ **(3)**

សមីការ **(2)** អាចសរសេរ $x^2y^2 + (x + y)^2 - 2xy = 49$

ឬ $p^2 + s^2 - 2p = 49$ **(4)**

យកសមីការ (3) ជំនួសក្នុង (4) គេបាន ៖

$$p^2 + (11 - p)^2 - 2p = 49$$

$$p^2 + 121 - 22p + p^2 - 2p = 49$$

$$2p^2 - 24p + 72 = 0$$

$$2(p - 6)^2 = 0$$

គេទាញឫស $p=6$ ហើយតាម (3) គេបាន $s=11-6=5$

គេបាន $s=5$, $p=6$ នោះ x និង y ជាឫសសមីការ ៖

$X^2-5X+6=0$ នាំឲ្យ $X_1=2$, $X_2=3$

ដូចនេះ $x=2, y=3$ ឬ $x=3$, $y=2$ ។

របៀបទី២

$$\begin{cases} xy+x+y=11 & (1) \\ x^2y^2+x^2+y^2=49 & (2) \end{cases}$$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (1) នឹង 10 គេបាន ៖

$$\begin{cases} 10xy+10x+10y=110 & (1) \\ x^2y^2+x^2+y^2=49 & (2) \end{cases}$$

ធ្វើផលដកសមីការ (2) និង (1) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$x^2y^2+x^2+y^2-10xy-10x-10y=-61$$
$$(x^2y^2-12xy+36)+(x^2+y^2+25+2xy-10x-10y)=0$$
$$(xy-6)^2+(x+y-5)^2=0$$

គេទាញ $\begin{cases} (x+y-5)^2 = 0 \\ (xy-6)^2 = 0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$

នោះ x និង y ជាឬសសមីការ $X^2-5X+6=0$

នាំឲ្យ $X_1 = 2 , X_2 = 3$ ។

ដូចនេះ $x=2, y=3$ ឬ $x=3 , y=2$ ។

II-កំណត់គ្រប់តម្លៃ n ដើម្បីឱ្យ a_n ចែកដាច់នឹង 11

គេមាន $a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n \ , \forall n \in IN$

ឬ $a_{n+2} - a_{n+1} = (n+2)(a_{n+1} - a_n)$

ឬ $\dfrac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = n+2$

គេបាន $\displaystyle\prod_{k=1}^{(n-2)} \left(\frac{a_{k+2} - a_{k+1}}{a_{k+1} - a_k} \right) = \prod_{k=1}^{(n-2)} (k+2)$

$$\frac{a_n - a_{n-1}}{a_2 - a_1} = 3.4.5......n$$ ដោយ $a_2 - a_1 = 2$

គេទាញបាន $a_n - a_{n-1} = n!$

ហើយ $\sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n}(k!)$

$$a_n - a_1 = 2!+3!+....+n! \text{ ដោយ } a_1 = 1 = 1!$$

គេបាន $a_n = 1!+2!+3!+.....+n!$ ។

-ករណីទី១ ៖ ចំពោះ $n < 11$ គេមាន

$a_1 = 1$

$a_2 = 3$

$a_3 = 1!+2!+3! = 9$

$a_4 = 1!+2!+3!+4! = 33 = 3\times 11$

$a_5 = a_4 + 5! = 153$

$a_6 = a_5 + 6! = 873$

$a_7 = a_6 + 7! = 5913$

$a_8 = a_7 + 8! = 46233 = 4203\times 11$

$a_9 = a_8 + 9! = 409113$

$a_{10} = a_9 + 10! = 4037913$

គេបាន $n = 4$, $n = 8$ ។

-ករណីទី២ ចំពោះ $n \ge 11$

គេបាន $a_n = a_{10} + \sum_{k=11}^{n}(k!)$

ដោយ $\sum_{k=11}^{n}(k!)$ ចែកដាច់នឹង 11 ហើយ a_{10} ចែកមិនដាច់នឹង 11

នោះចំពោះ $n \ge 11$ គេបាន a_n ចែកមិនដាច់នឹង 11 ។

ដូចនេះតម្លៃ n ដែលធ្វើឱ្យ a_n ចែកដាច់នឹង 11 មានតែពីរគត់គឺ ៗ

$n = 4$ ឬ $n = 8$ ។

III-ក. គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

គេមាន $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}$

គេបាន $\sin\frac{2\pi}{10} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}) = \cos\frac{3\pi}{10}$

តាមរូបមន្តត្រីកោណមាត្រ ៖

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$ និង $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10} = \cos\frac{3\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10} = 3\cos\frac{\pi}{10} - 4\cos^3\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10} = 3 - 4\cos^2\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10} = 3 - 4(1 - \sin^2\frac{\pi}{10})$$

ឬ $4\sin^2\frac{\pi}{10} - 2\sin\frac{\pi}{10} - 1 = 0$ តាង $t = \sin\frac{\pi}{10} > 0$

គេបាន $4t^2 - 2t - 1 = 0$, $\Delta' = 1 + 4 = 5 > 0$

គេទាញឫស $t_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$ (មិនយក) , $t_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

ដូចនេះ $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ។

ដោយ $\sin^2\frac{\pi}{10} + \cos^2\frac{\pi}{10} = 1$

នាំឲ្យ $\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{1 - (\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ ។

ខ. ស្រាយថា $x^2+(x-y)^2\le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

តាងអនុគមន៍ $f(x;y)=x^2+(x-y)^2-4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គេបាន ៖

$$f(x;y)=x^2+x^2-2xy+y^2-4(x^2+y^2)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$$

$$=2x^2-2xy+y^2-4(x^2+y^2)\frac{6+2\sqrt{5}}{16}$$

$$=2x^2-2xy+y^2-(x^2+y^2)\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x^2-2xy-\frac{1+\sqrt{5}}{2}y^2$$

$$=-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}x^2+2xy+\frac{\sqrt{5}+1}{2}y^2\right)$$

$$=-\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\,x+\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\,y\right)^2\le 0\ \ ,\forall x,y\in IR$$

ដូចនេះ៖ $x^2+(x-y)^2\le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$ ។

IV-ក/ស្រាយថា (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

គេមាន $a_0 = f(0) = \ln 3$ និង $a_{n+1} = \ln(1 + 2e^{a_n})$

ហើយ $b_n = 1 + e^{a_n}$ នោះ $b_{n+1} = 1 + e^{a_{n+1}}$

$$b_{n+1} = 1 + e^{\ln(1+2e^{a_n})} = 1 + 1 + 2e^{a_n}$$

$$b_{n+1} = 2(1 + e^{a_n}) = 2b_n$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង 2 ។

ខ/គណនា b_n និង a_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ដោយ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$ និងតួទីមួយ

$b_0 = 1 + e^{a_0} = 1 + e^{\ln 3} = 4$ នោះគេបាន ៖

$b_n = b_0 \times q^n = 4 \times 2^n = 2^{n+2}$ ហើយតាម $b_n = 1 + e^{a_n}$

គេទាញ $a_n = \ln(b_n - 1) = \ln(2^{n+2} - 1)$ ។

ដូចនេះ $b_n = 2^{n+2}$, $a_n = \ln(2^{n+2} - 1)$ ។

V-កំណត់តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុត ៖

គេមាន $x^2y^2+2yx^2+1=0$

គេបាន $y^2+2y+\frac{1}{x^2}=0$ ឬ $(y+1)^2+\frac{1}{x^2}=1$ ដែល $x\neq 0$

តាង $y+1=\cos\varphi$ និង $\frac{1}{x}=\sin\varphi$

នោះ $(y+1)^2+\frac{1}{x^2}=1$ ពិតគ្រប់ φ

គេមាន $f(x,y)=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+y(y+\frac{1}{x}+2)$

$$=2\sin^2\varphi+\sin\varphi+(\cos\varphi-1)(\cos\varphi-1+\sin\varphi+2)$$
$$=2\sin^2\varphi+\sin\varphi+\cos^2\varphi-1+\sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi$$
$$=\sin^2\varphi+\sin\varphi\cos\varphi=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{\pi}{4}+2\varphi)$$

ដូចនេះ $\min f(x,y)=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ និង $\max=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ។

វិញ្ញាសាទី២៥

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-ចូរដោះស្រាយសមីការ $\log_{12}(\sqrt[4]{x}+\sqrt{x})=\frac{1}{2}\log_9 x$

II-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $x\in IR$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\frac{a+b}{1+a+b})<f(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b})$

ចំពោះគ្រប់ $a>0,b>0$ ។

III-គេឲ្យ m និង n ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ ជាចំនួនគត់ ។

IV-គេឱ្យ $a\,;b\,;c\,;d$ និង x ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$\frac{\sin x}{a}=\frac{\sin 2x}{b}=\frac{\sin 3x}{c}=\frac{\sin 4x}{d}$$ ដែល $x\neq k\pi\ ;\ k\in Z$

ចូរបង្ហាញថា $a^3(4b^2-d^2)=b^4(3a-c)$

ដំណោះស្រាយ

I-ចូរដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\log_{12}(\sqrt[4]{x}+\sqrt{x})=\frac{1}{2}\log_9 x \quad (1)$$

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} x>0 \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt{x}>0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $x>0$

តាង $t=\frac{1}{2}\log_9 x$ នោះ $x=9^{2t}$ (2)

តាម (1) គេបាន $\log_{12}(\sqrt[4]{x}+\sqrt{x})=t$

នាំឲ្យ $\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}=12^t$ (3)

យកសមីការ (2) ជំនួសក្នុង (3) គេបាន $3^t+9^t=12^t$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 12^t គេបាន $(\frac{1}{4})^t+(\frac{3}{4})^t=1$ (4)

-ចំពោះ $t=1$ យកជំនួសក្នុងសមីការ (4) គេបាន $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

នោះ $t=1$ ជាឫសនៃសមីការ (4) ។

-ចំពោះ $t>1$ គេបាន $(\frac{1}{4})^t+(\frac{3}{4})^t<\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

នោះ (4) គ្មានឫសចំពោះ $t>1$ ។

-ចំពោះ $t<1$ គេបាន $(\frac{1}{4})^t+(\frac{3}{4})^t>\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

នោះ (4) គ្មានឫសចំពោះ $t>1$ ។

សរុបមកសមីការ (4) មានឫសតែមួយគត់គឺ $t=1$ ។

ចំពោះ $t=1$ តាម (2) គេបាន $x=9^2=81$ ។

យក $x=81$ ទៅជំនួសក្នុងសមីការ (1) គេបាន ៖

$$\log_{12}(\sqrt[4]{81}+\sqrt{81})=\frac{1}{2}\log_9 81$$

$\log_{12}12=\log_9 9$ ពិត

ដូចនេះសមីការមានឫស $x=81$ ។

II-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\frac{a+b}{1+a+b})<f(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b})$

យើងមាន $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $x\in IR$

យើងបាន $f'(x)=\frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2})}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ដោយ $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0\ ,\ \forall x\in IR$

ដូចនេះអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ IR ។

ម៉្យាងទៀតចំពោះគ្រប់ $a>0,b>0$ គេមាន ៖

$\frac{a}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}$ និង $\frac{b}{1+a+b}<\frac{b}{1+b}$

គេទាញ $\frac{a}{1+a+b}+\frac{b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$

ឬ $\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$

ដោយសារតែអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ IR

ហេតុនេះតាមលក្ខណៈអនុគមន៍កើនគេបាន ៖

$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$ នោះ $f(\frac{a+b}{1+a+b}) < f(\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b})$

ដូចនេះ $f(\frac{a+b}{1+a+b}) < f(\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b})$

ចំពោះគ្រប់ $a > 0, b > 0$ ។

III-តាង $f(m,n) = \frac{(2m)!\,(2n)!}{m!n!(m+n)!}$

-ចំពោះ $n = 0$ គេបាន $f(m,0) = \frac{(2m)!}{(m!)^2} = C_{2m}^{m}$ ជាចំនួនគត់គ្រប់

ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន m ។

-យើងមាន $f(m+1,n) = \frac{(2m+2)!(2n)!}{(m+1)!n!(m+n+1)!}$

$$= \frac{(2m)!(2n)!(2m+1)(2m+2)}{(m!)(m+1).n!(m+n)!(m+n+1)}$$

$$= \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!} \cdot \frac{4m+2}{m+n+1}$$

$$= \frac{4m+2}{m+n+1} f(m,n)$$

ស្រាយដូចគ្នា $\mathbf{f(m,n+1)=\frac{4n+2}{m+n+1}f(m,n)}$

គេបាន $\mathbf{f(m+1,n)+f(m,n+1)=4f(m,n)}$

គេទាញ $\mathbf{f(m,n+1)=4f(m,n)-f(m+1,n)}$ **(*)** ,

យើងនឹងស្រាយតាមកំណើនតាម**n** ថា$\mathbf{f(m,n)}$ ជាចំនួនគត់ ។

ចំពោះ $\mathbf{n=0}$ គេបាន $\mathbf{f(m,0)=C_{2m}^{m}}$ ជាចំនួនគត់

ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{m\in IN\cup\{0\}}$ (សម្រាយខាងលើ)។

ឧបមាថា $\mathbf{f(m,n)}$ ជាចំនួនគត់គ្រប់ $\mathbf{n\in IN\cup\{0\}}$

យើងនឹងស្រាយថា$\mathbf{f(m+1,n)}$ ជាចំនួនគត់ដែរ ។

តាម **(*)** គេទាញបាន $\mathbf{f(m,n+1)}$ ជាចំនួនគត់ដែរព្រោះ $\mathbf{f(m,n)}$

និង $\mathbf{f(m+1,n)}$ ជាចំនួនគត់ ។

ដូចនេះ $\mathbf{\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!n!(m+n)!}}$ ជាចំនួនគត់ ។

IV-បង្ហាញថា $a^3(4b^2 - d^2) = b^4(3a - c)$

តាង $\frac{\sin x}{a} = \frac{\sin 2x}{b} = \frac{\sin 3x}{c} = \frac{\sin 4x}{d} = t$

គេទាញ $\begin{cases} \sin x = at \\ \sin 2x = bt \\ \sin 3x = ct \\ \sin 4x = dt \end{cases}$

គេមាន $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$

$$\sin^2 4x = 4\sin^2 2x \cos^2 2x$$

$$\sin^2 4x = 4\sin^2 2x(1 - \sin^2 2x)$$

$$d^2t^2 \quad = 4b^2t^2(1 - b^2t^2)$$

គេទាញ $t^2 = \frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{d^2}{4b^2}\right) \quad (1)$

ម៉្យាងទៀត $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$$\sin 3x = \sin x(3 - 4\sin^2 x)$$

$$ct = at(3 - 4a^2t^2)$$

គេទាញ $t^2 = \frac{1}{4a^2}(3 - \frac{c}{a}) \quad (2)$

ផ្ទឹម (1) និង (2) គេបាន ៖

$$\frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{d^2}{4b^2}\right) = \frac{1}{4a^2}\left(3 - \frac{c}{a}\right)$$

$$\frac{4b^2 - d^2}{4b^4} = \frac{3a - c}{4a^3}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង a^3b^4 គេបាន $a^3(4b^2 - d^2) = b^4(3a - c)$

ដូចនេះ $a^3(4b^2 - d^2) = b^4(3a - c)$ ។

ꕥꕥꕥ❄ꕤꕤꕤ