គណិតវិទ្យាអាហារូបករណ៍

ត្រៀមប្រឡងអាហារូបករណ៍ទៅសិក្សានៅប្រទេសនានា
ជប៉ុន-ចិន-វៀតណាម-រុស្ស៊ី-សិង្ហបុរី

ភាគ ១

រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

រក្សាសិទ្ធិ

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក យ៉ង់ ឆារី

លោក លឹម ឆុន

លោក អ៊ឹង សំណាង

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិគ្គសិរ

ការិយកុំព្យូទរ័

លោក អ៊ឹង សំណាង និង លឹម ផល្គុន

អារម្ភកថា

សួស្តីមិត្តអ្នកសិក្សាជាទីស្រឡាញ់រាប់អាន !
សៀវភៅ **គណិតវិទ្យាអាហារូបករណ៍** ដែលលោកអ្នកកំពុងតែកាន់អាននេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបចំឡើងសម្រាប់ទុកជាឯកសារសម្រាប់អ្នកសិក្សាដែលមានបំណងចង់ត្រៀមប្រឡងទៅបន្តការសិក្សានៅបរទេស។
នៅក្នុងសៀវភៅនេះ យើងខ្ញុំបានជ្រើសរើសលំហាត់ល្អៗ មកធ្វើដំណោះស្រាយជាគំរូ ដែលអាចឲ្យអ្នកសិក្សាងាយយល់ និង ឆាប់ចងចាំ ។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅមួយក្បាលនេះ នឹងអាចចូលរួមផ្តល់នូវគំនិតនិងវិធីសាស្ត្រថ្មីៗក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់ត្រៀមប្រឡងអាហារូបករណ៍ ចំពោះលោកអ្នកសិក្សាជាពុំខានឡើយ ។

ជាទីបញ្ចប់ខ្ញុំបាទសូមជូនពរចំពោះលោកអ្នក សូមមានសុខភាពល្អ មានប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និង ទទួលបានជោគជ័យក្នុងគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី ២៧ កញ្ញា ឆ្នាំ២០១២
អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាវជ្រាវ

លឹម ផល្គុន

Tel : 077 549 491ឬ 017 768 246
Email: lim_phalkun@ymail.com
Website: www.mathtoday.wordpress.com

វិញ្ញាសាទី០១

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យសមីការ $x^3-2x^2+x-7=0$ មានឫសបីតាងដោយ α,β,γ ។

ចូរគណនាតម្លៃលេខ $A=\frac{1}{(1-\alpha)^2}+\frac{1}{(1-\beta)^2}+\frac{1}{(1-\gamma)^2}$ ។

II-ចូរប្រៀបធៀបចំនួន $a=\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$ និង $b=2\sqrt[3]{3}$ ។

III-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x.dx$ ដែល $n=1,2,3,...$ ។

ក/ចូរគណនា I_1 ។

ខ/បង្ហាញថា(I_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្ររួចទាញរកI_nជាអនុគមន៍នៃn ។

គ/គណនាផលបូក $S_n=I_1+I_2+...+I_n$ ជាអនុគមន៍នៃn ។

ឃ/ទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n\to+\infty$ ។

IV-ចូរស្រាយថាប៊ូលដែលមានកាំ R មានមាឌ $V=\frac{4\pi}{3}R^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនាតម្លៃលេខ $A=\frac{1}{(1-\alpha)^2}+\frac{1}{(1-\beta)^2}+\frac{1}{(1-\gamma)^2}$

តាង $f(x)=x^3-2x^2+x-7$ មានឫសបីតាងដោយ α,β,γ ។

គេអាចសរសេរ $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

គេបាន $\ln f(x)=\ln(x-\alpha)+\ln(x-\beta)+\ln(x-\gamma)$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមភាពនេះគេបាន ៖

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}$$ ។

ធ្វើដេរីវេម្តងទៀតលើសមភាពនេះគេបាន ៖

$$\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}=-\frac{1}{(x-\alpha)^2}-\frac{1}{(x-\beta)^2}-\frac{1}{(x-\gamma)^2}$$

យក $x=1$ គេបាន $\frac{f''(1)f(x)-[f'(1)]^2}{f^2(1)}=-\frac{1}{(1-\alpha)^2}-\frac{1}{(1-\beta)^2}-\frac{1}{(1-\gamma)^2}$

គេទាញបាន $A=-\frac{f''(1)f(1)-[f'(1)]^2}{f^2(1)}$ ។

គេមាន $f(1)=1-2+1-7=-7$

$f'(x)=3x^2-4x+1$ នោះ $f'(1)=3-4+1=0$

ហើយ $f''(x)=6x-4$ នោះ $f''(1)=6-4=2$

គេបាន $A=-\frac{(2)(-7)-0^2}{(-7)^2}=\frac{2}{7}$

ដូចនេះ $A=\frac{1}{(1-\alpha)^2}+\frac{1}{(1-\beta)^2}+\frac{1}{(1-\gamma)^2}=\frac{2}{7}$ ។

II-ប្រៀបធៀបចំនួន $a=\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$ និង $b=2\sqrt[3]{3}$

របៀបទី១ ៖ តាង $x=\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$ និង $y=\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$

គេមាន $x>y$ នោះ $x^2>y^2$

គេបាន $x-y>0$ (1) និង $x^2-y^2>0$ (2)

គុណវិសមភាព (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$(x-y)(x^2-y^2)>0$ សមមូល $x^3+y^3\geq x^2y+xy^2$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង 3 គេបាន ៖

$$3(x^3+y^3) > 3x^2y + 3xy^2 = (x+y)^3 - (x^3+y^3)$$

គេទាញ $4(x^3+y^3) > (x+y)^3$ ឬ $x+y < \sqrt[3]{4(x^3+y^3)}$ (3)

ជំនួស $x = \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$ និង $y = \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$ ក្នុង (3) គេបាន ៖

$$\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} < \sqrt[3]{4(3-\sqrt[3]{3}+3+\sqrt[3]{3})} = 2\sqrt[3]{3}$$

ដូចនេះ $a < b$ ។

របៀបទី២ ៖ ឧបមាថា $a < b$ ពិត

គេបាន $\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$

សមមូល $\sqrt[3]{1-\dfrac{\sqrt[3]{3}}{3}} + \sqrt[3]{1+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{3}} < 2$

តាងអនុគមន៍ $f(x) = \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x}$

ដេរីវេ $f'(x) = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}$

បើ $f'(x) = 0$ សមមូល $-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}} = 0$

នាំឲ្យ $\sqrt[3]{(1-x)^2} = \sqrt[3]{(1+x)^2}$ ឬ $1-x = 1+x$ នោះ $x = 0$ ។

បើ $f'(x)>0$ សមមូល $-\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}>0$

នាំឲ្យ $\sqrt[3]{(1-x)^2}>\sqrt[3]{(1+x)^2}$ ឬ $1-x>1+x$ នោះ $x<0$ ។

តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$ ៖

x		0	
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	↗	2	↘

តាមតារាងនេះគេបាន $\forall x\neq 0 : f(x)<2$

យក $x=\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ គេបាន $f(\frac{\sqrt[3]{3}}{3})<2$ ឬ $\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}}+\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt[3]{3}}{3}}<2$

ដូចនេះ $a<b$ ។

III-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x.dx$ ដែល $n = 1,2,3,...$ ។

ក/គណនា I_1 ៖

បើ $n = 1$ នោះ $I_1 = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x.dx$

តាង $\begin{cases} u = e^{-x} \\ dv = \sin x.dx \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} du = -e^{-x}.dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$$I_1 = \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x.dx$$

$$I_1 = 1 + e^{-\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x.dx$$

តាង $\begin{cases} u = e^{-x} \\ dv = \cos x.dx \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} du = -e^{-x}.dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$I_1 = 1 + e^{-\pi} - \left[e^{-x}\sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x.dx$$

$$I_1 = 1 + e^{-\pi} - I_1$$

ដូចនេះ $I_1 = \dfrac{1 + e^{-\pi}}{2} = \dfrac{1 + e^{\pi}}{2e^{\pi}}$ ។

ខ/បង្ហាញថា(I_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

មាន $I_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x.dx$ នោះ $I_{n+1} = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x.dx$

តាង $x = \pi + t$ នោះ $dx = dt$

ចំពោះ $x = n\pi$ នោះ $t = (n-1)\pi$ និង $x = (n+1)\pi$ នោះ $t = n\pi$

គេបាន $I_{n+1} = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-\pi-t}\sin(\pi+t).dt = -e^{-\pi}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-t}\sin t.dt$

$I_{n+1} = -e^{-\pi} I_n$ នាំឲ្យ (I_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ទាញរកI_nជាអនុគមន៍នៃn៖

តាមរូបមន្ត $I_n = I_1 \times q^{n-1} = \frac{1+e^{-\pi}}{2}\times(-e^{-\pi})^{n-1}$ ។

គ/គណនាផលបូក $S_n = I_1 + I_2 + ... + I_n$ ជាអនុគមន៍នៃn៖

គេបាន $S_n = I_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1+e^{-\pi}}{2}\times\frac{1-(-e^{-\pi})^n}{1+e^{-\pi}} = \frac{1-(-e^{-\pi})^n}{2}$

ឃ/ទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$ ៖

គេបាន $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+(-e^{-\pi})^n}{2} = \frac{1}{2}$ ព្រោះ $\lim\limits_{n\to\infty}(-e^{-\pi})^n = 0$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$ ។

IV-ស្រាយថាប៊ូលដែលមានកាំ R មានមាឌ $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ ៖

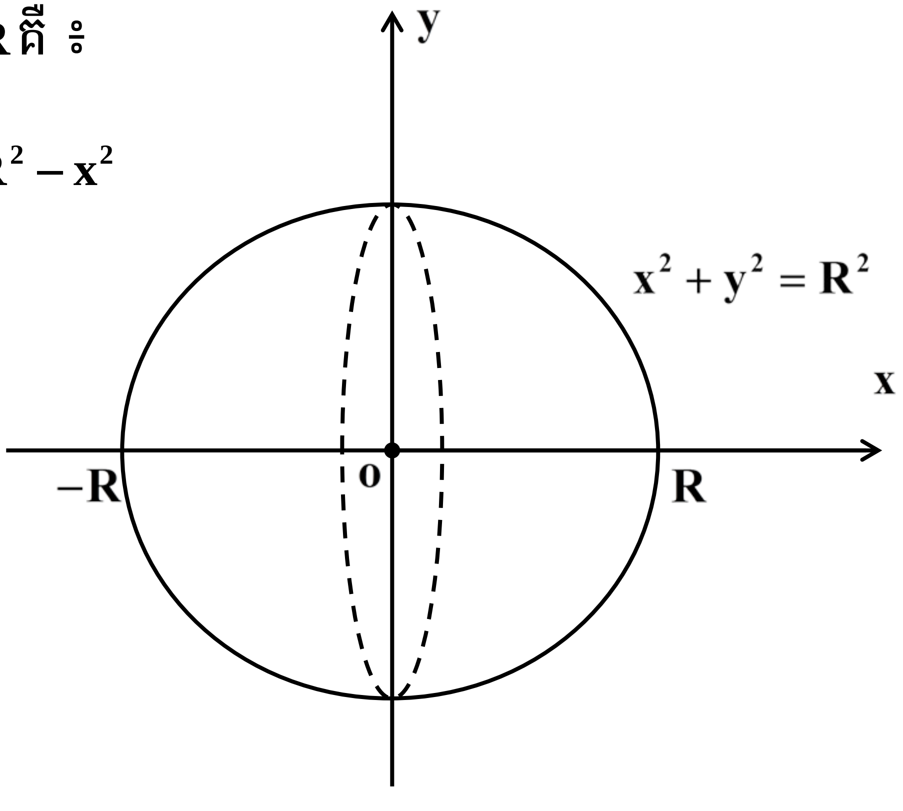
យើងដឹងថាប៊ូលកាំគឺជាសូលីដបរិវត្តន៍បង្ករពីរង្វិលផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌ ដោយរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R ជុំវិញអក្សអាប់ស៊ីស ។

សមីការរង្វង់ផ្ចិត O កាំ R គឺ ៖

$x^2 + y^2 = R^2$ ឬ $y^2 = R^2 - x^2$

មាឌរបស់ប៊ូលគឺ ៖

$$V = \pi \int_{-R}^{R} y^2 dx$$



$$= \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2).dx$$

$$= \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R}$$

$$= \pi \left[(R^3 - \frac{R^3}{3}) - (-R^3 + \frac{R^3}{3}) \right] = \frac{4\pi}{3} R^3$$

ដូចនេះ $V = \frac{4\pi}{3} R^3$ ។

វិញ្ញាសាទី០២

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុង IR ៖

$$\sqrt{\frac{x^2-5x-5}{x^2-5x+2}}+\sqrt{\frac{x^2-5x-4}{x^2-5x+3}}=\frac{7}{x^2-5x+2}\sqrt{\frac{x^2-5x+2}{x^2-5x+3}}$$

II-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់ដោយ ៖

$$2f(x-1)+f\left(\frac{x-1}{1-2x}\right)=x+1$$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq\frac{1}{2}$ និង $x\neq-\frac{1}{2}$

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

III-គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^3 x.dx$ ដែល $n\in IN$

ក. ចូរគណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. ចូរគណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}(I_k)=I_0+I_1+I_2+\dots\dots\dots+I_n$

ជាអនុគមន៍នៃ n ។ រួចទាញរកតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{n\to+\infty}S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ដោះស្រាយសមីការ

តាង $y = x^2 - 5x$ សមីការអាចសរសេរ ៖

$$\sqrt{\frac{y-5}{y+2}} + \sqrt{\frac{y-4}{y+3}} = \frac{7}{y+2}\sqrt{\frac{y+2}{y+3}} \quad (1)$$

សមីការ (1) មានន័យកាលណា $y \geq 5$ ។

ក្នុងលក្ខខ័ណ្ឌនេះសមីការអាចសរសេរ ៖

$$\sqrt{(y-5)(y+3)} + \sqrt{(y-4)(y+2)} = 7$$

$$\sqrt{y^2 - 2y - 15} + \sqrt{y^2 - 2y - 8} = 7 \quad (2)$$

តាង $z = y^2 - 2y - 8 \geq 0$ សមីការ(2)អាចសរសេរ ៖

$$\sqrt{z-7} + \sqrt{z} = 7$$

$$2z - 7 + 2\sqrt{z(z-7)} = 49$$

$$\sqrt{z^2 - 7z} = 28 - z \quad (0 \leq z \leq 28)$$

$$z^2 - 7z = 784 - 56z + z^2$$

$$49z = 784 \Rightarrow z = 16$$

ដោយ $0 \leq z \leq 28$ នាំឲ្យ $z = 16$ (យក)

គេទាញ $y^2-2y-8=16$ ឬ $y^2-2y-24=0$

មានឫស $y_1=-4$, $y_2=6$

ដោយ $y\geq 5$ នាំឲ្យគេទាញបាន $y=6$ ជាឫសសមីការ(1)

ដោយ $y=x^2-5x$ គេបាន $x^2-5x=6$

ឬ $x^2-5x-6=0$ គេទាញឫស $x_1=-1$, $x_2=6$ ។

II-កំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ៖

គេមាន $2\,f(x-1)+f(\frac{x-1}{1-2x})=x+1$ (1) ចំពោះគ្រប់ $x\neq\frac{1}{2}$

យក $x-1=\frac{t-1}{1-2t}$ នាំឲ្យ $x=-\frac{t}{1-2t}$ ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$2f(\frac{t-1}{1-2t})+f(\frac{-\frac{t}{1-2t}-1}{1+\frac{2t}{1-2t}})=-\frac{t}{1-2t}+2$$

$$2f(\frac{t-1}{1-2t})+f(t-1)=\frac{2-5t}{1-2t}\quad(2)$$

យក $x=t$ ជួសក្នុង (1) គេបាន $2f(t-1)+f(\frac{t-1}{1-2t})=t+1$

ឬ $-4f(t-1)-2f(\frac{t-1}{1-2t})=-2t-2$ (3)

បូកសមីការ (2) និង (3)គេបាន ៖

$$-3f(t-1)=\frac{2-5t}{1-2t}-2t-2=\frac{4t^2-t-2}{1-2t}$$

គេទាញ $f(t-1)=\frac{4t^2-t-2}{3(2t-1)}$ យក $t-1=x$ ឬ $t=x+1$

គេបាន $f(x)=\frac{4(x+1)^2-(x+1)-2}{3(2x+2-1)}=\frac{4x^2+7x+1}{3(2x+1)}$

ដូចនេះ $f(x)=\frac{4x^2+7x+1}{3(2x+1)}$ ។

III-ក. គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^3 x.dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^2 x.\cos x.dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x(1-\sin^2 x)\cos x.dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^n x-\sin^{n+2} x)\cos x.dx$$

តាង $U=\sin x$ នោះ $dU=\cos x.dx$ បើ $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ នោះ $U\in[0\,,1\,]$

$$I_n=\int_0^1 U^n(1-U^2).dU=\int_0^1 U^n.dU-\int_0^1 U^{n+2}.dU$$

$$=\left[\frac{1}{n+1}U^{n+1}\right]_0^1-\left[\frac{1}{n+3}U^{n+3}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}=\frac{n+3-n-1}{(n+1)(n+3)}=\frac{2}{(n+1)(n+3)}$$

ដូចនេះ $\boxed{I_n=\frac{2}{(n+1)(n+3)}}$ ។

ខ. គណនាផលបូក ៖

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(I_k\right)=I_0+I_1+I_2+.........+I_n$$

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន៖

$$I_n=\frac{2}{(n+1)(n+3)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\left[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+....+(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})\right]+\left[(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+....+(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3})\right]$$

$$=\left(1-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}=\frac{(n+1)(3n+8)}{2(n+2)(n+3)}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n=\frac{(n+1)(3n+8)}{2(n+2)(n+3)}}$ និង $\boxed{\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{3}{2}}$ ។

វិញ្ញាសាទី០៣

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^a \frac{x^n.dx}{x^3 + a^3}, a > 0$

ក. ចូរកំនត់តម្លៃរបស់ n ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a ។

ខ. គណនា I_n ចំពោះតម្លៃ n ដែលបានរកឃើញខាងលើ ។

II-គេឱ្យស្វីត $S_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$ ដែល $n \in IN$ ។

ក-ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ចូរបង្ហាញថា $S_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ។

ខ-គណនាផលបូក

$$\Sigma_n = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + ... + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$$

III-ចូរកំនត់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងចន្លោះ $]0;\frac{\pi}{2}[$ ដោយដឹងថា ៖

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2}$$

IV-ក. ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

ខ. ចូរស្រាយថា $x^2+(x-y)^2\le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គ្រប់ចំនួន $x,y\in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ក. កំនត់តម្លៃរបស់ n ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a

យើងមាន $I_n=\int_0^a \frac{x^n.dx}{x^3+a^3}\,,\ a>0$

យើងតាង $x=a.t$ នាំឱ្យ $dx=a.dt$

ហើយចំពោះ $x\in[0,a]$ នាំឱ្យ $t\in[0,1]$

គេបាន $I_n = \int_0^1 \frac{(a.t)^n .a.dt}{(at)^3 + a^3} = a^{n-2} . \int_0^1 \frac{t^n .dt}{t^3 + 1}$

តាមទំនាក់ទំនងនេះ ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a លុះត្រាតែ

$n - 2 = 0$ ឬ $n = 2$ ។

ដូចនេះ ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a គេត្រូវឱ្យ $n = 2$ ។

ខ. គណនា I_n ចំពោះតម្លៃ n ដែលបានរកឃើញខាងលើ

ចំពោះ $n = 2$ គេបាន $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}$

តាង $U = x^3 + 1$ នាំឱ្យ $dU = 3x^2 .dx$

ហើយចំពោះ $x \in [0,1]$ នាំឱ្យ $U \in [1 , 2]$

យើងបាន $I_2 = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{dU}{U} = \frac{1}{3} [\ln|U|]_1^2 = \frac{1}{3} \ln 2$ ។

ដូចនេះ $\boxed{I_2 = \frac{1}{3} \ln 2}$ ។

II-ក.បង្ហាញថា $S_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

យើងមាន $S_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$

$$= \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 + n^2}{n^2(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2 + 2n(n+1) + 1}{n^2(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{[n(n+1)+1]^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \frac{n(n+1)+1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$ ។

ខ-គណនាផលបូក៖

គេបាន $\Sigma_n = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + ... + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \sum_{k=1}^{n}(S_k)$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = n + 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - 1}{n(n+1)} = \frac{n(n+2)}{n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{\Sigma_n = \frac{n(n+2)}{n+1}}$ ។

III-កំនត់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងចន្លោះ $]0;\frac{\pi}{2}[$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x}+\frac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2}\quad (1)$$

គេពិនិត្យ $\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ហើយ $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

សមីការ (1) អាចសរសេរទៅជា ៖

$$\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\sin x}+\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\cos x}=2$$

$$\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\sin x}+\frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\cos x}=2$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\sin x}+\frac{\cos\frac{\pi}{12}}{\cos x}=2$$

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{12}=2\sin x\cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}+x\right)=\sin 2x$$

ដោយ $0<x<\frac{\pi}{2}$ នោះគេទាញបាន $\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{12}+x=2x\\ \frac{\pi}{12}+x=\pi-2x\end{array}\right.$

គេទាញ $x=\frac{\pi}{12}$ ឬ $x=\frac{11\pi}{36}$ (ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងលក្ខខ័ណ្ឌដែលឲ្យ)

ដូចនេះ $x\in\{\frac{\pi}{12};\frac{11\pi}{36}\}$ ។

IV-ក. គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

គេមាន $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}$

គេបាន $\sin\frac{2\pi}{10} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right) = \cos\frac{3\pi}{10}$

តាមរូបមន្តត្រីកោណមាត្រ ៖

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$ និង $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10} = \cos\frac{3\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10} = 3\cos\frac{\pi}{10} - 4\cos^3\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10} = 3 - 4\cos^2\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10} = 3 - 4\left(1 - \sin^2\frac{\pi}{10}\right)$$

ឬ $4\sin^2\frac{\pi}{10} - 2\sin\frac{\pi}{10} - 1 = 0$ តាង $t = \sin\frac{\pi}{10} > 0$

គេបាន $4t^2 - 2t - 1 = 0$, $\Delta' = 1 + 4 = 5 > 0$

គេទាញឫស $t_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$ (មិនយក) , $t_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

ដូចនេះ $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ។

ដោយ $\sin^2\frac{\pi}{10} + \cos^2\frac{\pi}{10} = 1$

នាំឲ្យ $\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ ។

ខ. ស្រាយថា $x^2 + (x-y)^2 \le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

តាងអនុគមន៍ $f(x;y) = x^2 + (x-y)^2 - 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គេបាន ៖

$$f(x;y) = x^2 + x^2 - 2xy + y^2 - 4(x^2+y^2)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$$

$$= 2x^2 - 2xy + y^2 - 4(x^2+y^2)\frac{6+2\sqrt{5}}{16}$$

$$= 2x^2 - 2xy + y^2 - (x^2+y^2)\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{1-\sqrt{5}}{2}x^2 - 2xy - \frac{1+\sqrt{5}}{2}y^2$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}x^2 + 2xy + \frac{\sqrt{5}+1}{2}y^2\right)$$

$$= -\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\,x + \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\,y\right)^2 \le 0 \quad , \forall x, y \in IR$$

ដូចនេះ $x^2 + (x-y)^2 \le 4(x^2+y^2)s\ {}^2\frac{\pi\,i}{1}$ ។

វិញ្ញាសាទី០៤

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\log_{6-x}^{2}(54-x^{3})-5\log_{6-x}(54-x^{3})+6=0$$.

II-គេឲ្យ z_1 និង z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចពីរដែល $|z_1|=|z_2|=1$

និង $z_1.z_2\neq -1$ ។ ចូរស្រាយថា $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ ជាចំនួនពិតមួយ ។

III-គេឱ្យស្វីតអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,.dx$ ដែល $n\in IN$ ។

ក. ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2}

ខ. គណនាផលគុណ $P_n=I_n.I_{n-1}\ ,\forall n\geq 1$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=1}^{n}(P_k)=P_1+P_2+.........+P_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n

រួចទាញរកតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{n\to+\infty}S_n$ ។

ឃ. រករូបមន្តគណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

I-ដោះស្រាយសមីការ ៖

$\log^2_{6-x}(54-x^3)-5\log_{6-x}(54-x^3)+6=0 \quad (1)$.

លក្ខខណ្ឌ $\begin{cases}54-x^3>0\\6-x>0\\6-x\neq 1\end{cases}$ សមមូល $\begin{cases}x<3\sqrt[3]{2}\\x<6\\x\neq 5\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x<3\sqrt[3]{2}\\x\neq 5\end{cases}$

តាង $y=\log_{6-x}(54-x^3)$ សមីការ (1) អាចសរសេរ ៖

$y^2-5y+6=0$, $\Delta=25-24=1$ គេទាញឫស $y_1=2$, $y_2=3$

-ចំពោះ $y=2$ គេបាន $\log_{6-x}(54-x^3)=2$

$$54-x^3=(6-x)^2$$

$$54-x^3=36-12x+x^2$$

$$x^3+x^2-12x-18=0$$

$$(x+3)(x^2-2x-6)=0$$

គេទាញឫស $x_1=-3$, $x_2=1-\sqrt{7}$, $x_3=1+\sqrt{7}$

-ចំពោះ $y=3$ គេបាន $\log_{6-x}(54-x^3)=3$

$$(54-x^3)=(6-x)^3$$

$$18x^2-108x+162=0$$

$$18(x-3)^2=0$$

គេទាញឫស $x=3$ ។

II-ស្រាយថា $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ ជាចំនួនពិតមួយ

តាង $Z=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ នោះ $\overline{Z}=\frac{\overline{z}_1+\overline{z}_2}{1+\overline{z}_1.\overline{z}_2}$

ដោយ $z_1.\overline{z}_1=|z_1|^2=1$ នោះ $\overline{z}_1=\frac{1}{z_1}$ ហើយដូចគ្នា $\overline{z}_2=\frac{1}{z_2}$

គេបាន $\overline{Z}=\frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1}.\frac{1}{z_2}}=\frac{z_2+z_1}{z_2z_1+1}=Z$

ដោយ $\overline{Z}=Z$ នោះ $Z=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ ជាចំនួនពិត ។

III-ក. រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2}

យើងមាន $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,.dx$ និង $I_{n-2}=\int_0^1 x^{n-2}.\sqrt{1-x^2}\,.dx$

តាង $\begin{cases} U=\sqrt{1-x^2} \\ dV=x^n.dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} dU=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}.dx \\ V=\int x^n.dx=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1} \end{cases}$

យើងបាន $I_n=\left[\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}.\sqrt{1-x^2}\right]_0^1+\dfrac{1}{n+1}\int_0^1\dfrac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}.dx$

$$I_n=\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^n-(x^n-x^{n+2})}{\sqrt{1-x^2}}.dx=\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^n-x^n(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.dx$$

$$I_n=\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^n.dx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,.dx$$

$$I_n=\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}.\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{n+1}I_n$$

តាង $\begin{cases} U=x^{n-1} \\ dV=\dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} dU=(n-1)x^{n-2}.dx \\ V=-\sqrt{1-x^2} \end{cases}$

យើងបាន $I_n = \frac{1}{n+1}\left\{ \left[-x^{n-1}\sqrt{1-x^2} \right]_0^1 + (n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}.dx \right\} - \frac{1}{n+1} I_n$

គេទាញ $(n+1)I_n = (n-1)I_{n-2} - I_n$ នាំឱ្យ $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$

ដូចនេះ ទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2}

គឺ $\boxed{I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}\,,\ \forall n \geq 2}$ ។

ខ. គណនាផលគុណ $P_n = I_n.I_{n-1}\,,\ \forall n \geq 1$ ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $P_n = I_n.I_{n-1}$ នាំឱ្យ $P_{n+1} = I_{n+1}.I_n$

ដោយ $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$ នាំឱ្យ $I_{n+1} = \frac{n}{n+3}.I_{n-1}$

គេទាញ $P_{n+1} = \frac{n}{n+3} I_{n-1}.I_n = \frac{n}{n+3} P_n$ (ព្រោះ $P_n = I_n.I_{n-1}$)

នាំអោយ $\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{n}{n+3} = \frac{n}{n+1}.\frac{n+1}{n+2}.\frac{n+2}{n+3}$ ។

យើងបាន $\prod_{k=1}^{(n-1)} \left(\frac{P_{k+1}}{P_k} \right) = \prod_{k=1}^{(n-1)} \left(\frac{k}{k+1}.\frac{k+1}{k+2}.\frac{k+2}{k+3} \right)$

$$\prod_{k=1}^{(n-1)}\left(\frac{P_{k+1}}{P_k}\right)=\prod_{k=1}^{(n-1)}\left(\frac{k}{k+1}\right)\times\prod_{k=1}^{(n-1)}\left(\frac{k+1}{k+2}\right)\times\prod_{k=1}^{(n-1)}\left(\frac{k+2}{k+3}\right)$$

$$\frac{P_2}{P_1}.\frac{P_3}{P_2}....\frac{P_n}{P_{n-1}}=\left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}....\frac{n-1}{n}\right)\times\left(\frac{2}{3}.\frac{3}{4}....\frac{n}{n+1}\right)\times\left(\frac{3}{4}.\frac{4}{5}....\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$\frac{P_n}{P_1}=\frac{1}{n}.\frac{2}{n+1}.\frac{3}{n+2}$$

នាំឱ្យគេទាញ $P_n=\frac{6}{n(n+1)(n+2)}.P_1=\frac{6}{n(n+1)(n+2)}.I_0.I_1$

ដោយ $I_0=\int_0^1\sqrt{1-x^2}.dx=\left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right]_0^1=\frac{\pi}{4}$

និង $I_1=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}.dx=\left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}$

គេបាន $P_n=\frac{6}{n(n+1)(n+2)}.\frac{\pi}{4}.\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}.\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ដូចនេះ $\boxed{P_n=\frac{\pi}{2}.\frac{1}{n(n+1)(n+2)}}$ ។

គ. គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(P_k\right)=P_1+P_2+.........+P_n$

យើងមាន៖

$$P_n=\frac{\pi}{2}.\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

យើងបាន $S_n=\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$

$$=\frac{\pi}{4}\left[(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3})+(\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4})+.....+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{\pi}{8}.\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n=\frac{\pi}{8}.\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}}$ និង $\boxed{\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{\pi}{8}}$ ។

ឃ. រករូបមន្តគណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន $I_n=\frac{n-1}{n+2}I_{n-2},\forall n\geq 2$

-ករណី $n=2p+1$ (ចំនួនសេស)

យើងបាន $I_{2p+1}=\frac{2p}{2p+3}.I_{2p-1}$ ឬ $\frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}}=\frac{2p}{2p+3}$

គេទាញ $\frac{I_3}{I_1}.\frac{I_5}{I_3}.\frac{I_7}{I_5}.....\frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}}=\frac{2}{5}.\frac{4}{7}.\frac{6}{9}.....\frac{2p}{2p+3}$

$$\frac{I_{2p+1}}{I_1}=\frac{2}{5}.\frac{4}{7}.\frac{6}{9}.....\frac{2p}{2p+3}$$

នាំឱ្យ $I_{2p+1}=\frac{2.4.6....2p}{5.7.9....(2p+3)}.I_1$ ដោយ $I_1=\frac{1}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{I_{2p+1}=\frac{2.4.6....2p}{5.7.9....(2p+3)}.\frac{1}{3}}$ ។

-ករណី $n=2p$ (ចំនួនគូ)

យើងបាន $I_{2p}=\frac{2p-1}{2p+2}.I_{2p-2}$ ឬ $\frac{I_{2p}}{I_{2p-2}}=\frac{2p-1}{2p+2}$

គេទាញ $\frac{I_2}{I_0}.\frac{I_4}{I_2}.\frac{I_6}{I_4}.....\frac{I_{2p}}{I_{2p-2}}=\frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{5}{8}.....\frac{2p-1}{2p+2}$

$$\frac{I_{2p}}{I_0}=\frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{5}{8}.....\frac{2p-1}{2p+2}$$

នាំឱ្យ $I_{2p+1}=\frac{1.3.5....(2p-1)}{4.6.8....(2p+2)}.I_0$ ដោយ $I_0=\frac{\pi}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{I_{2p+1}=\frac{1.3.5....(2p-1)}{4.6.8....(2p+2)}.\frac{\pi}{4}}$ ។

វិញ្ញាសាទី០៥

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$1+\log^2_{(3-x)^3}(9x^2-x^3)=\frac{1}{3}\log_{\sqrt{3-x}}(9x^2-x^3)\ .$$

II-ចូរបង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx=\int_a^b f(a+b-x).dx$

អនុវត្តន៍ ៖ ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

III-គេឲ្យសមីការ $(E):\ x^3-mx^2+7(m-5)x-14m+90=0$

ក. ដោះស្រាយសមីការនេះចំពោះ $m=6$ ។

ខ. កំនត់ m ដើម្បីឲ្យសមីការមានឬសបី x_1 , x_2 , x_3

ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $x_1{}^3+x_2{}^3+x_3{}^3=73$

រួចគណនាឬសទាំងបីនោះ ។

IV-គេអោយអាំងតេក្រាល៖

$$I_n = \int_{na}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x} \quad \text{និង} \quad J_n = \int_{a}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x} \;, n \in IN, a > 0$$ ។

ក-បង្ហាញថា $I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n = J_n$ ។

ខ-គណនា I_n និង J_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ-ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរបង្រួមផលបូក៖

$$S_n = \frac{1}{\cos a \cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a \cos 3a} + ... + \frac{1}{\cos(na)\cos(n+1)a}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ដោះស្រាយសមីការ ៖

. $$1 + \log^2_{(3-x)^3}(9x^2 - x^3) = \frac{1}{3}\log_{\sqrt{3-x}}(9x^2 - x^3) \quad (1)$$

លក្ខខ័ណ្ឌ $\begin{cases} 9x^2 - x^3 > 0 \\ 3 - x > 0 \\ 3 - x \neq 1 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} x \neq 0 \;\;,\; x < 9 \\ x < 3 \\ x \neq 2 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x < 3 \\ x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

សមីការ(1)អាចសរសេរ ៖

$$1+\frac{1}{9}\log^2_{3-x}(9x^2-x^3)=\frac{2}{3}\log_{3-x}(9x^2-x^3)$$

$$\log^2_{3-x}(9x^2-x^3)-6\log_{3-x}(9x^2-x^3)+9=0$$

$$\left[\log_{3-x}(9x^2-x^3)\ -3\ \right]^2=0$$

$$\log_{3-x}(9x^2-x^3)=3$$

$$9x^2-x^3=(3-x)^3$$

$$9x^2-x^3=27-27x+9x^2-x^3$$

$$27x-27=0$$

ដូចនេះសមីការមានឫស $x=1$ ។

II-បង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx=\int_a^b f(a+b-x).dx$

តាង $t=a+b-x \Rightarrow dt=-dx$

បើ $x=a\Rightarrow t=b$ និង $x=b\Rightarrow t=a$

យើងបាន $\int_a^b f(x).dx=\int_b^a f(a+b-t)(-dt)=-\int_b^a f(a+b-t).dt=\int_a^b f(a+b-t).dt$

ដូចនេះ $\int_a^b f(x).dx=\int_a^b f(a+b-x).dx$ ។

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

តាមរូបមន្តខាងលើយើងអាចសរសេរ៖

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln\left[1+\sqrt{3}\tan(\frac{\pi}{3}-x)\right].dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln\left(1+\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}-\tan x}{1+\sqrt{3}\tan x}\right).dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln\left(\frac{4}{1+\sqrt{3}\tan x}\right).dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\ln 4-\ln(1+\sqrt{3}\tan x)\right].dx$$

$$I=\ln 4\int_0^{\frac{\pi}{3}}dx-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx=\frac{2\pi}{3}\ln 2-I$$

$2I=\frac{2\pi}{3}\ln 2$ នាំឱ្យ $I=\frac{\pi}{3}\ln 2$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\ln(1+\sqrt{3}\tan x).dx=\frac{\pi}{3}\ln 2}$ ។

III-ក. ដោះស្រាយសមីការ

ចំពោះ $m=6$ សមីការអាចសរសេរ ៖

$$x^3 - 6x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$x^3 - 3x^2 - 3x^2 + 9x - 2x + 6 = 0$$

$$x^2(x-3) - 3x(x-3) - 2(x-3) = 0$$

$$(x-3)(x^2 - 3x - 2) = 0$$

គេទាញឫស $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$; $x_3 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ ។

ខ. កំនត់តម្លៃរបស់ m

គេមាន $(E): x^3 - mx^2 + 7(m-5)x - 14m + 90 = 0$

ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

បើ x_1 , x_2 , x_3 ជាឫសរបស់សមីការនោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេមាន ៖

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = m & (1) \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 7(m-5) & (2) \\ x_1x_2x_3 = 14m - 19 & (3) \end{cases}$$

តាមបំរាប់គេមាន $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 73$ (4)

ដោយគេមាន ៖

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)^3 - 3(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

គេអាចសរសេរ $73-3(14m-90)=m^3-3m\left[7(m-5)\right]$

$$73-42m+270=m^3-21m^2+105m$$

$$m^3-21m^2+147m-343=0$$

$$(m-7)^3=0$$

ដូចនេះគេទាញបាន $m=7$ ។

ចំពោះ $m=7$ សមីការសរសេរ ៖

$$x^3-7x^2+14x-8=0$$

$$x^3-x^2-6x^2+6x+8x-8=0$$

$$x^2(x-1)-6x(x-1)+8(x-1)=0$$

$$(x-1)(x^2-6x+8)=0$$

$$(x-1)(x-2)(x-4)=0$$

គេទាញឫស $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=4$ ។

IV-ក-បង្ហាញថា $I_1+I_2+I_3+....+I_n=J_n$

$$I_1+I_2+I_3+....+I_n=\int_a^{2a}\frac{dx}{\cos^2 x}+\int_{2a}^{3a}\frac{dx}{\cos^2 x}+...+\int_{na}^{(n+1)a}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int_a^{(n+1)a}\frac{dx}{\cos^2 x}$$

ដូចនេះ $I_1+I_2+I_3+....+I_n=J_n$ ។

ខ-គណនា I_n និង J_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងបាន៖

$$I_n = \int_{na}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x} = \left[\tan x \right]_{na}^{(n+1)a} = \tan(n+1)a - \tan(na) = \frac{\sin a}{\cos(na).\cos(n+1)a}$$

និង $J_n = \int_{a}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x} = \left[\tan x \right]_{a}^{(n+1)a} = \tan(n+1)a - \tan a = \frac{\sin(na)}{\cos a.\cos(n+1)a}$

ដូចនេះ $\boxed{I_n = \frac{\sin a}{\cos(na)\cos(n+1)a} \ , \ J_n = \frac{\sin(na)}{\cos a.\cos(n+1)a}}$ ។

គ-គណនាផលបូក

$$S_n = \frac{1}{\cos a \cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a \cos 3a} + ... + \frac{1}{\cos(na)\cos(n+1)a}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{\cos ka.\cos(k+1)a} \right] = \frac{1}{\sin a} \sum_{k=1}^{n} [I_k] = \frac{1}{\sin a}.J_n = \frac{\sin(na)}{\sin a \cos a \cos(n+1)a}$$

ដូចនេះ៖ $S_n = \frac{\sin na}{\sin a \cos a \cos(n+1)a}$

វិញ្ញាសាទី០៦

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឱ្យខ្សែកោង $(H): y=\dfrac{2(x-1)}{x-2}$ និងចំនុច $I(2\,;2)$ ។

ចូរកំនត់រកសមីការរង្វង់ (C) មានផ្ចិត I ហើយប៉ះនឹងខ្សែកោង (H) ។

II-គេឧបមាថា S_m និង S_n ជាផលបូក m តួដំបូង និង n តួដំបូង

រៀងគ្នានៃស្វីតនព្វន្តមួយដែល $\dfrac{S_m}{S_n}=\dfrac{m^2}{n^2}; (m\neq n)$ ។

តាង U_m ជាតួទី m និង U_n ជាតួទី n ។បង្ហាញថា $\dfrac{U_m}{U_n}=\dfrac{2m-1}{2n-1}$

III-គេមានអាំងតេក្រាល $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$ និង $J=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}$

ក-កំនត់ពីរចំនួនពិត a, b ដើម្បីឱ្យ $\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{a\sin x}{1+\cos x}+\dfrac{b\sin x}{1-\cos x}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល I រួចទាញរកតម្លៃ J ។

IV-គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$$u_0 = 1 \text{ និង } u_{n+1} = \frac{u_n^4}{4u_n^3 + 6u_n^2 + 4u_n + 1} \text{ គ្រប់ } n \in IN$$

ចូរបង្ហាញថា $1 + \frac{1}{u_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^4$ គ្រប់ $n \in IN$

រួចគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

I-កំនត់រកសមីការរង្វង់ (C)

គេមាន $(H): y = \frac{2(x-1)}{x-2}$ និងចំនុច $I(2\,;2)$

តាមរូបមន្តសមីការរង្វង់ (C) មានផ្ចិត $I(2\,;2)$ សរសេរ៖

$(C): (x-2)^2 + (y-2)^2 = R^2$ ដែល R ជាកាំនៃរង្វង់ ។

សមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាង (H) និង (C) សរសេរ៖

$$(x-2)^2+\left[\frac{2(x-1)}{x-2}-2\right]^2=R^2$$

$$(x-2)^2+\left(\frac{2x-2-2x+4}{x-2}\right)^2=R^2$$

$$(x-2)^2+\frac{4}{(x-2)^2}=R^2 \quad , \quad X=(x-2)^2$$

$X+\dfrac{4}{X}=R^2$ នាំឱ្យ $X^2-R^2X+4=0$ (1)

ដើម្បីឱ្យរង្វង់ (C) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (H) លុះត្រាតែសមីការ (1)

មានឫសឌុបពោលគឺគេត្រូវឱ្យ $\Delta=R^4-16=0$ នាំឱ្យ

$R=\sqrt[4]{16}=2$ ។

សមីការរង្វង់ (C) អាចសរសេរ៖

$$(x-2)^2+(y-2)^2=4$$

$$x^2-4x+4+y^2-4y+4-4=0$$

ដូចនេះ $(C):\ x^2+y^2-4x-4y+4=0$ ។

II-បង្ហាញថា $\frac{U_m}{U_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$

យើងមាន $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$ ដោយ $S_m=\frac{m(U_1+U_m)}{2}$; $S_n=\frac{n(U_1+U_n)}{2}$

គេបាន $\frac{m(U_1+U_m)}{2}\times\frac{2}{n(U_1+U_n)}=\frac{m^2}{n^2}$ នាំឱ្យ $\frac{U_1+U_m}{U_1+U_n}=\frac{m}{n}$ (1)

ដោយ $U_m=U_1+(m-1).d$, $U_n=U_1+(n-1).d$

ដែល d ជាផលសងរួមនៃស្វីត។

យក $U_m=U_1+(m-1).d$, $U_n=U_1+(n-1).d$ ជួសក្នុង (1) គេបាន

$\frac{2U_1+(m-1).d}{2U_1+(n-1)d}=\frac{m}{n}$ ឬ $2U_1n+n(m-1)d=2U_1m+m(n-1)d$

គេទាញ $U_1=\frac{n(m-1)d-m(n-1)d}{2(m-n)}=\frac{d(mn-n-mn+m)}{2(m-n)}=\frac{d}{2}$

ព្រោះ $m\neq n$ ។

យើងបាន $U_m=\frac{d}{2}+(m-1)d=\frac{2m-1}{2}.d.$;$U_n=\frac{d}{2}+(n-1).d=\frac{2n-1}{2}.d$

គេបាន $\frac{U_m}{U_n}=\frac{\frac{2m-1}{2}.d}{\frac{2n-1}{2}.d}=\frac{2m-1}{2n-1}$ បើ $d\neq 0$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\frac{U_m}{U_n}=\frac{2m-1}{2n-1}}$ ។

III-ក-/កំនត់បីចំនួនពិត a, b

យើងបាន $\frac{1}{\sin x}=\frac{a\sin x}{1+\cos x}+\frac{b\sin x}{1-\cos x}$

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{a\sin x(1-\cos x)+b\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{\sin x(a-a\cos x+b+b\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{(a+b)-(a-b)\cos x}{\sin x}$$

គេទាញបាន $\begin{cases}a+b=1\\a-b=0\end{cases}$ នាំឱ្យ $a=b=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល I រួចទាញរកតម្លៃ J

ចំពោះ $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$ គេមាន $\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1}{2}\frac{\sin x}{1+\cos x}$

គេបាន $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1}{2}\frac{\sin x}{1+\cos x}\right).dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1-\cos x}.dx+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}.dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\cos x)'}{(1-\cos x)}.dx-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\cos x)'}{(1+\cos x)}.dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|1-\cos x|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\left[\ln|1+\cos x|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln 1-\ln(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\right]-\frac{1}{2}\left[\ln 1-\ln(1+\frac{1}{\sqrt{2}})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\ln(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}})+\ln(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}})\right]=\frac{1}{2}\ln(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1})=\ln(\sqrt{2}+1)$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\ln(1+\sqrt{2})}$ ។

ម៉្យាងទៀត $J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}.\frac{dx}{\sin^2 x}$

តាង $\begin{cases} u=\frac{1}{\sin x} \\ dv=\frac{dx}{\sin^2 x}\end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du=-\frac{\cos x}{\sin^2 x} \\ v=\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x=-\frac{\cos x}{\sin x}\end{cases}$

គេបាន $J=\left[-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}.dx$

$$J=\sqrt{2}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}.dx=\sqrt{2}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^3 x}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$$

$J=\sqrt{2}-J+I$ នាំឱ្យ $J=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{I}{2}$ ដោយ $I=\ln(1+\sqrt{2})$

ដូចនេះ $\boxed{J=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})}$ ។

IV-បង្ហាញថា $1+\frac{1}{u_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^4$

យើងមាន $1+\frac{1}{u_{n+1}}=1+\frac{4u_n^3+6u_n^2+4u_n+1}{u_n^4}$

$$=\frac{u_n^4+4u_n^3+6u_n^2+4u_n+1}{u_n^4}$$

$$=\frac{(u_n+1)^4}{u_n^4}=\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^4$$

ដូចនេះ $1+\frac{1}{u_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^4$ ។

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $1+\frac{1}{u_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^4$

គេបាន $\ln\left(1+\frac{1}{u_{n+1}}\right)=4\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$

តាង $v_n=\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$ នាំឲ្យ $v_{n+1}=\ln\left(1+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$

គេបាន $v_{n+1}=4v_n$ ។

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (v_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រមាន

រេសុង $q=4$ និងតួ $v_0=\ln\left(1+\frac{1}{u_0}\right)=\ln 2$ (ព្រោះ $u_0=1$) ។

តាមរូបមន្ត $v_n=v_0.q^n=4^n\ln 2$ ។

ដោយ $v_n=\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$

គេទាញ $\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)=4^n\ln 2$ នាំឲ្យ $1+\frac{1}{u_n}=2^{4^n}$

ដូចនេះ $u_n=\frac{1}{2^{4^n}-1}$ ។

វិញ្ញាសាទី០៧

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-ក-កំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $\frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1-\sin x} + \frac{b\cos x}{1+\sin x}$

ចំពោះគ្រប់ $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$ ។

II-គេដឹងថា $\int_0^{x^2} f(2t-1).dt = 4x^6$ ។ ចូររកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

III គណនា $P_n = (1 - x + x^2)(1 - x^2 + x^4) \ldots (1 - x^{2^n} + x^{2^{n+1}})$

IV-គេឲ្យស្វីតនៃចំនួនពិត(U_n)កំនត់ដោយ $U_n = \sqrt{2}^n . \sin\frac{n\pi}{4}$

ដែល $n \in IN$ ។

ក-ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}$

ខ-ទាញឲ្យបានថា $U_n = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

គ-គណនាផលបូក ៖

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

I-ក/កំនត់ចំនួនពិត a និង b

គេបាន $\frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1-\sin x} + \frac{b\cos x}{1+\sin x}$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x(1+\sin x) + b\cos x(1-\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x(a + a\sin x + b - b\sin x)}{1-\sin^2 x}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x\left[(a+b)+(a-b)\sin x\right]}{\cos^2 x}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{(a+b)+(a-b).\sin x}{\cos x}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$

ដូចនេះ $a=\frac{1}{2}\ ,b=\frac{1}{2}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}$

តាមសំរាយខាងលើ ចំពោះ $a=\frac{1}{2}$ និង $b=\frac{1}{2}$ គេមាន៖

$\frac{1}{\cos x}=\frac{a\cos x}{1-\sin x}+\frac{b\cos x}{1+\sin x}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ។

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}.dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\cos x}{2(1-\sin x)}+\frac{\cos x}{2(1+\sin x)}\right].dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1-\sin x}.dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1+\sin x}.dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[-\frac{(1-\sin x)'}{(1-\sin x)}.dx\right]+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\sin x)'}{(1+\sin x)}.dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\ln|1-\sin x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\left[\ln|1+\sin x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\ln 1\right]+\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\ln 1\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=\ln(\sqrt{2}+1)$$

II-រកអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $\int_0^{x^2} f(2t-1).dt = 4x^6$

តាង $g(t)=f(2t-1)$ និង $G(t)$ ជាព្រីមីទីវនៃ $g(t)$ ។

គេបាន $\int_0^{x^2} g(t).dt = 4x^6$

$$\left[G(t)\right]_0^{x^2} = 4x^6$$

$$G(x^2) - G(0) = 4x^6$$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃទំនាក់ទំនងនេះគេបាន៖

$2x.G'(x^2) = 24x^5$ នាំឱ្យ $G'(x^2) = 12x^4$ ដោយ $G'(t) = g(t)$

គេទាញ $g(x^2) = 12x^4$ តែ $g(t) = f(2t-1)$

គេបាន $f(2x^2-1) = 12x^4$ តាង $2x^2 - 1 = y$ នាំឱ្យ $x^2 = \frac{y+1}{2}$

នាំឱ្យ $f(y) = 12\left(\frac{y+1}{2}\right)^2 = 3(y+1)^2$ ដូចនេះ $\boxed{f(x) = 3(x+1)^2}$

III-គណនា

$$P_n = (1 - x + x^2)(1 - x^2 + x^4)\ldots(1 - x^{2^n} + x^{2^{n+1}})$$

គេមាន $1 + a^2 + a^4 = (1 + a^2)^2 - a^2 = (1 - a + a^2)(1 + a + a^2)$

គេទាញ $1 - a + a^2 = \dfrac{1 + a^2 + a^4}{1 + a + a^2}$ យក $a = x^{2^k}$

គេបាន $1 - x^{2^k} + x^{2^{k+1}} = \dfrac{1 + x^{2^{k+1}} + x^{2^{k+2}}}{1 + x^{2^k} + x^{2^{k+1}}}$

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1 + x^{2^{k+1}} + x^{2^{k+2}}}{1 + x^{2^k} + x^{2^{k+1}}}\right) = \frac{1 + x^{2^{n+1}} + x^{2^{n+2}}}{1 + x + x^2}$$

ដូចនេះ $P_n = \dfrac{1 + x^{2^{n+1}} + x^{2^{n+2}}}{1 + x + x^2}$ ។

IV-ក/បង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\dfrac{(n+1)\pi}{4} = \cos\dfrac{n\pi}{4} - \sin\dfrac{n\pi}{4}$

តាមរូបមន្ត $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

យើងបាន ៖

$$\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{n\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{n\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{n\pi}{4}\right) = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}}$ ។

ខ-ទាញឲ្យបានថា $U_n = (\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

យើងមាន $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}$

នាំឲ្យ $\sin\frac{n\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(\sqrt{2})^n$

គេបាន $(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4} = (\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{U_n = (\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}$ ។

គ-គណនាផលបូក $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$

យើងបាន

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[(\sqrt{2})^k \cos\frac{k\pi}{4} - (\sqrt{2})^{k+1}\cos\frac{(k+1)\pi}{4}\right]$$

$$= \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 1 - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}$ ។

វិញ្ញាសាទី០៨

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យ (x_n) និង (y_n) ជាស្វីតចំនួនពិតកំនត់លើ IN

ដោយ $x_0 = 5 , y_0 = 1$ និងទំនាក់ទំនងកំនើន ៖

$x_{n+1} = x_n^3 + 3x_n y_n^2$ និង $y_{n+1} = 3x_n^2 y_n + y_n^3$ គ្រប់ $n \in IN$

ចូរគណនា x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

II-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0,1]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$?

អនុវត្តន៍: ចូរគណនា $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}$ ។

III-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=9 \\ (\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})(1+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})=1 \end{cases}$

IV-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $x\in I$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\frac{a+b}{1+a+b}) < f(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b})$

ចំពោះគ្រប់ $a>0,b>0$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនា x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $x_{n+1}=x_n^{\ 3}+3x_ny_n^{\ 2}$ (1)

និង $y_{n+1}=3x_n^{\ 2}y_n+y_n^{\ 3}$ (2)

បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន ៖

$$x_{n+1}+y_{n+1}=(x_n+y_n)^3$$
$$\ln(x_{n+1}+y_{n+1})=3.\ln(x_n+y_n)$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $\{\ln(x_n+y_n)\}$ ជាស្វីតធរណីមាត្រមាន

រេសុង $q=3$ និងតួដំបូង $\ln(x_0+y_0)=\ln 6$ ។

គេបាន $\ln(x_n+y_n)=3^n\ln 6$

គេទាញ $x_n + y_n = 6^{3^n}$ (3)

ដកកសមីការ (1) និង (2) គេបាន ៖

$$x_{n+1} - y_{n+1} = (x_n - y_n)^3$$
$$\ln(x_{n+1} - y_{n+1}) = 3.\ln(x_n - y_n)$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $\{\ln(x_n - y_n)\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន

រេសុង $q = 3$ និងតួដំបូង $\ln(x_0 - y_0) = \ln 4$ ។

គេបាន $\ln(x_n - y_n) = 3^n \ln 4$ នាំឲ្យ $x_n - y_n = 4^{3^n}$ (4)

បូកសមីការ (3) និង (4) គេបាន $2x_n = 6^{3^n} + 4^{3^n}$

គេទាញ $x_n = \dfrac{6^{3^n} + 4^{3^n}}{2}$ ។

ដកសមីការ (3) និង (4) គេបាន $2y_n = 6^{3^n} - 4^{3^n}$

គេទាញ $y_n = \dfrac{6^{3^n} - 4^{3^n}}{2}$ ។

ដូចនេះ $x_n = \dfrac{6^{3^n} + 4^{3^n}}{2}$ និង $y_n = \dfrac{6^{3^n} - 4^{3^n}}{2}$ ។

II-បង្ហាញថា $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$

តាង $x = \pi - t$ នាំឱ្យ $dx = -dt$

និង ចំពោះ $x \in [0,\pi]$ នាំឱ្យ $t \in [\pi, 0]$

គេបាន $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t).f[\sin(\pi - t)].dt$

$$\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \int_0^{\pi} (\pi - t).f(\sin t).dt = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t).dt - \int_0^{\pi} t.f(\sin t).dt$$

$$\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x).dx - \int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx$$

នាំឱ្យគេទាញបាន $\int_0^{\pi} x.f(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$ ។

អនុវត្តន៍: គណនា $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}$

គេមាន $I = \int_0^{\pi} \frac{x.\sin x.dx}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\pi} x.\frac{\sin x.dx}{2-\sin^2 x} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x.dx}{2-\sin^2 x}$

តាង $z=\cos x$ នាំឱ្យ $dz=-\sin x.dx$

ហើយចំពោះ $x\in[0,\pi]$ នោះ $z\in[1,-1]$

គេបាន $I=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{-1}\frac{-dz}{1+z^2}=\frac{\pi}{2}[\arctan z]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x.dx}{1+\cos^2 x}=\frac{\pi^2}{4}}$ ។

III-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=9\\(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})(1+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})=1\end{cases}$$

ដោយប្រើឯកលក្ខណះភាព

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)\ b+c)\ c(+a)$$

$$(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})^3=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+3(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})(1+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})$$

$$(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})^3=1+9+3(18)=64$$

គេទាញ $1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}=4$ ឬ $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}=3$

គេបាន $(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})^3=27$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{y}}(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})=27$$

$$9+\frac{3}{\sqrt[3]{xy}}(3)=27$$

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{xy}}=3$$

$$xy=\frac{1}{8}$$

គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=9\\ xy=\frac{1}{8}\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x+y=\frac{9}{8}\\ xy=\frac{1}{8}\end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយសមីការវៀ្រត $z^2-\frac{9}{8}z+\frac{1}{8}=0$

គេទទួលបានគូចម្លើយ ($x=1$, $y=\frac{1}{8}$) ឬ ($x=\frac{1}{8}$, $y=1$) ។

IV-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\frac{a+b}{1+a+b})<f(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b})$

យើងមាន $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $x\in I$

យើងបាន $f'(x)=\frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ដោយ $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0\ ,\ \forall x\in I$

ដូចនេះអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ IR ។

ម៉្យាងទៀតចំពោះគ្រប់ $a>0, b>0$ គេមាន ៖

$\frac{a}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}$ និង $\frac{b}{1+a+b}<\frac{b}{1+b}$

គេទាញ $\frac{a}{1+a+b}+\frac{b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$

ឬ $\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$

ដោយសារតែអនុគមន៍ f(x) ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ IR

ហេតុនេះតាមលក្ខណះអនុគមន៍កើនគេបាន៖

$$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$$

នាំឲ្យ $f\left(\frac{a+b}{1+a+b}\right) < f\left(\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}\right)$

ដូចនេះ $f\left(\frac{a+b}{1+a+b}\right) < f\left(\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}\right)$

ចំពោះគ្រប់ $a > 0, b > 0$ ។

វិញ្ញាសាទី០៩

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យសមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, $a\neq c$ ។

តាង $\tan\alpha$ និង $\tan\beta$ ជាឫសរបស់សមីការខាងលើ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃកន្សោម ៖

$$A=a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta)$$

II-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍គូលើ $[-a,a]$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}f(x).dx$, $q>0$, $q\neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+3^x}.dx$

III-ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចែកនឹង **8** ឱ្យសំណល់ **1** ។

ចំនួន n នោះចែកនឹង **5** ឱ្យសំណល់ **2** ។

ក-បើចំនួន n នោះចែកនឹង 40 ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ខ-រកចំនួន n នោះដោយដឹងថា $3\;9 < n < 4\;0\;0$ ។

IV-ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ បើគេដឹងថា៖

$$f(2x-1)+2g(3x+1)=x^2$$

និង $f(4x-3)-g(6x-2)=-2x^2+2x+1$ ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនាតម្លៃនៃកន្សោម ៖

$$A = a\sin^2(\alpha+\beta) + b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + c\cos^2(\alpha+\beta)$$

ដោយ $\tan\alpha$ និង $\tan\beta$ ជាឫសរបស់សមីការគេបាន ៖

$$\begin{cases} \tan\alpha+\tan\beta=-\dfrac{b}{a} \\ \tan\alpha.\tan\beta=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

យើងបាន $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-\frac{b}{a}}{1-\frac{c}{a}}=-\dfrac{b}{a-c}=\dfrac{b}{c-a}$

យើងបាន $A=a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta)$

$$A=\cos^2(\alpha+\beta)\left[a\tan^2(\alpha+\beta)+b\tan(\alpha+\beta)+c\right]$$

$$=\frac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}\left[a\tan^2(\alpha+\beta)+b\tan(\alpha+\beta)+c\right]$$

$$=\left[\frac{(c-a)^2}{(c-a)^2+b^2}\right]\left(\frac{ab^2}{(c-a)^2}+\frac{b^2}{c-a}+c\right)$$

$$=\frac{(c-a)^2}{(c-a)^2+b^2}\times\frac{ab^2+b^2(c-a)+c(c-a)^2}{(c-a)^2}=c$$

ដូចនេះ៖ $A=a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta)=c$

II-ក.បង្ហាញថា $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a f(x).dx\ ,\ q>0\ ,q\neq 1$ ។

គេមាន $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}+\int_0^a\frac{f(x).dx}{1+q^x}\ (1)$

តាង $x=-t$ នាំឱ្យ $dx=-dt$ និងចំពោះ $x\in[-a,0]$ នាំឱ្យ $t\in[a,0]$

គេបាន $\displaystyle\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=-\int_a^0\frac{f(-t).dt}{1+q^{-t}}=\int_0^a\frac{q^t.f(-t)dt}{1+q^t}=\int_0^a\frac{q^x f(-x).dx}{1+q^x}$

ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូនោះ $f(-x)=f(x)\ ,\forall x\in[-a,a]$

គេទាញបាន $\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}\frac{q^x.f(x)}{1+q^x}.dx\ (2)$

យក (2) ទៅជួសក្នុង (1) គេបាន៖

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}\frac{q^x.f(x).dx}{1+q^x}+\int_{0}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}\frac{(q^x+1)f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}f(x).dx$$

ដូចនេះ $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}f(x).dx\ ,\ q>0\ ,q\neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ ៖ គណនា $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+3^x}.dx$

ដោយ $\cos x$ ជាអនុគមន៍គូនោះគេបាន៖

$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.dx=[\sin x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=1-0=1$ ។ ដូចនេះ $\boxed{I=1}$ ។

III-ក. បើចំនួន n នោះចែកនឹង 40 ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ឧបមាថា n ចែកនឹង 8 ឱ្យផលចែក $q_1\in IN$ និងសំណល់ 1

និង ចំនួន **n** នោះចែកនឹង 5 ឱ្យផលចែក $q_2 \in IN$ និងសំណល់ 2

តាមអឺគ្លីត យើងបាន $\begin{cases} n = 8q_1 + 1 & (-1\ \ ) \\ n = 5q_2 + 2 & (1\ \ )6 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} -1\ n = -1\ \ q_1 - 10\ \ (1) \\ \ \ 1\ n = 8\ q_2 + 3\ \ \ 2(2) \end{cases}$

បូកសមីការ (1) និង (2)

យើងបាន $n = 8\ q_2 - 1\ \ q_1 + 1 = 4\ q + 10$

ដែល $q = 2q_2 - 3q_1$ ។តាមទំនាក់ទំនង $n = 4\ q + 1$ បញ្ជាក់ថា

បើចំនួន n នោះចែកនឹង 40 ឱ្យសំណល់ $r = 17$

ខ. រកចំនួន n នោះដោយដឹងថា $3\ \ 9 < n < 4\ \ 0$

យើងមាន $n = 4\ q + 1$ ដោយ $3\ \ 9 < n < 4\ \ 0$

គេទាញ $3\ \ \ 4\ q + 1\ \ 4$

ឬ $9 + \frac{3}{4} < n < 1\ \ 0 + \frac{1}{4}$

ដោយ $q \in IN$ នាំឱ្យគេទាញបាន $q = \{9\ ,\ 1\ 0\}$

ហើយ $n = \{3 \quad 9, 4\,7 \;\; 0\}$ ។

IV-កំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$

គេមាន $f(2x-1) + 2g(3x+1) = x^2 \qquad (1)$

និង $f(4x-3) - g(6x-2) = -2x^2 + 2x + 1 \quad (2)$

យើងតាង $2x - 1 = 4t - 3$ នាំឱ្យ $x = 2t - 1$

យក $x = 2t - 1$ ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$f[2(2t-1)-1] + 2g[3(2t-1)+1] = (2t-1)^2$$

$$f(4t-3) + 2g(6t-2) = 4t^2 - 4t + 1 \quad (3)$$

បើគេយក $x = t$ ជួសក្នុង(2) គេបាន

$$f(4t-3) - g(6t-2) = -2t^2 + 2t + 1 \quad (4)$$

តាម (3) និង (4) គេបានប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases} f(4t-3) + 2g(6t-2) = 4t^2 - 4t + 1 & (3) \\ f(4t-3) - g(6t-2) = -2t^2 + 2t + 1 & (4) \end{cases}$$

ដកសមីការ(3)និង(4)គេបាន

$3g(6t-2)=6t^2-6t$ នាំឱ្យ $g(6t-2)=2t^2-2$

យក $x=6t-2$ នាំឱ្យ $t=\frac{x+2}{6}$

ហើយ $g(x)=2(\frac{x+2}{6})^2-2=\frac{(x-4)(x+8)}{18}$

តាម (4)នាំឱ្យ $f(4t-3)-(2t^2-2)=-2t^2+2t+1$

នាំឱ្យ $f(4t-3)=2t-1$ យក $x=4t-3$ នាំឱ្យ $t=\frac{x+3}{4}$

គេទាញ $f(x)=2(\frac{x+3}{4})-1=\frac{x+1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=\frac{x+1}{2}\ ,\ g(x)=\frac{(x-4)(x+8)}{18}}$ ។

វិញ្ញាសាទី១០

សម្រាប់រយះពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យខ្សែកោង $(C_m):\ y=f_m(x)=\dfrac{x^2+4m\quad-4m^2+1x}{m-x}$

ចូរបង្ហាញថាមានខ្សែកោងពីរនៃគ្រួសារខ្សែកោង (C_m)

ដែលកាត់តាមចំនុច$M_0(x_0\,;y_0\,)$ចំពោះគ្រប់$(x_0;y_0)\in \mathbb{R}^2$ ។

m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

II-ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(O,\vec{i}\,,\vec{j})$ គេឱ្យបួនចំនុច $A\,,B\,,C\,,D$

ដែលមានអាហ្វិករៀងគ្នា

$Z_A=1+6i\ ,Z_B=4+5i\ ,Z_C=5+4i$ និង $Z_D=-2-3i$ ។

ចូរស្រាយថាចតុកោណ ABC ចារិកក្នុងរង្វង់មួយដែលគេនឹង

បញ្ជាក់ផ្ចិតនិង កាំរបស់វា ។

III-ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ $\begin{cases} 4^x . 5^y = \frac{1}{400} \\ 5^x . 6^y = \frac{1}{900} \end{cases}$

IV-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 3x + 1}$

កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$f\left(\frac{1+a+b}{2}\right) \geq f\left(\frac{1+a+b+a}{2+a+b}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ការបង្ហាញ ៖

បើ $M_0 \in (C_m)$ គេបាន $y_0 = \frac{x_0{}^2 + 4mx_0 - 4m^2 + 1}{m - x_0}$

សមមូល $y_0(m - x_0) = x_0{}^2 + 4mx_0 - 4m^2 + 1$

$$my_0 - x_0y_0 = x_0^2 + 4mx_0 - 4m^2 + 1$$

$$4m^2 + (y_0 - 4x_0)m - x_0^2 - x_0y_0 - 1 = 0 \quad (1)$$

ឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការ (1) សរសេរ ៖

$$\Delta = (y_0 - 4x_0)^2 - 16(-x_0^2 - x_0y_0 - 1)$$

$$= y_0^2 - 8x_0y_0 + 16x_0^2 + 16x_0^2 + 16x_0y_0 + 16$$

$$= (y_0^2 + 8x_0y_0 + 16x_0^2) + 16(x_0^2 + 1)$$

$$= (y_0 + 4x_0)^2 + 16(x_0^2 + 1) > 0 \ ; \forall x_0, y_0 \in \mathbb{R}$$

ដោយ $\Delta > 0$ នាំឲ្យសមីការ (1) មានឬសពីរផ្សេងគ្នាជានិច្ច ។

ដូចនេះមានខ្សែកោងពីរនៃគ្រួសារខ្សែកោង (C_m)ដែលកាត់តាម

ចំនុច $M_0(x_0\,;y_0)$ ចំពោះគ្រប់ $(x_0;y_0) \in \mathbb{R}^2$ ។

II-ស្រាយថាចតុកោណ ABC ចារិកក្នុងរង្វង់

យើងតាង $(c): x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

ជាសមីការរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC ។

យើងបាន $A \in (c)$ នាំឱ្យ $1^2 + 6^2 + a + 6b + c = 0$

ឬ $a + 6b + c = -37 \quad (1)$

$B \in (c)$ នាំឱ្យ $4^2 + 5^2 + 4a + 5b + c = 0$

ឬ $4a + 5b + c = -41 \quad (2)$

$C \in (c)$ នាំឱ្យ $(-2)^2 + (-3)^2 - 2a - 3b + c = 0$

ឬ $-2a - 3b + c = -13 \quad (3)$

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} a + 6b + c = -37 \\ 4a + 5b + c = -41 \\ -2a - 3b + c = -13 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបានចម្លើយ

$a = -2$, $b = -2$, $c = -2$ ។

សមីការរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABCអាចសរសេរ ៖

$(c): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

ឬ $(c): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

ម៉្យាងទៀតដោយយកកូអរដោនេ Dជួសក្នុងសមីការ

$(c): (-2-1)^2 + (-3-1)^2 = 2$

វាផ្ទៀងផ្ទាត់នោះនាំឱ្យ $D\in(c)$ ។

ដោយបួនចំនុច A, B, C, D ស្ថិតនៅលើរង្វង់មានសមីការ

$(c):(x-1)^2+(y-1)^2=2$ តែមួយនោះនាំឱ្យចតុកោណ ABC

ចារិកក្នុងរង្វង់ (c) មានផ្ចិត $I(1,1)$ និង កាំ $R=5$ ។

III-ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ ៖

$$\begin{cases} 4^x.5^y = \dfrac{1}{400} \\ 5^x.6^y = \dfrac{1}{900} \end{cases}$$

យើងមាន $\ln(4^x.5^y)=\ln\dfrac{1}{400}$

ឬ $x\ln 4+y\ln 5=-2\ln 4-2\ln 5$ (1)

ហើយ $\ln(5^x.6^y)=\ln\dfrac{1}{900}$

ឬ $x\ln 5+y\ln 6=-2\ln 6-2\ln 5$ (2)

តាម (1)&(2) គេបានប្រពន្ធ័ ខាងក្រោម

$$\begin{cases} x\ln 4 + y\ln 5 = -2\ln 4 - 2\ln 5 & \times(-\ln 6) \\ x\ln 5 + y\ln 6 = -2\ln 6 - 2\ln 5 & \times(\ln 5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x\ln 4.\ln 6 - y\ln 5.\ln 6 = 2\ln 4.\ln 6 + 2\ln 5.\ln 6 & (3) \\ x\ln^2 5 + y\ln 5.\ln 6 = -2\ln 6.\ln 5 - 2\ln^2 5 & (4) \end{cases}$$

បូកសមីការ (3) & (4) គេបាន

$(\ln^2 5 - \ln 4\ln 6)x = 2(\ln 4.\ln 6 - \ln^2 5)$ នាំឱ្យ $x = -2$

តាមសមីការ $4^x.5^y = \dfrac{1}{400}$ គេទាញ $4^{-2}.5^y = \dfrac{1}{400}$

នាំឱ្យគេទាញ $y = -2$ ។ដូចនេះ $x = -2\,,\, y = -2$ ។

IV-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f\left(\dfrac{1+a+b}{2}\right) \ge f\left(\dfrac{1+a+b+a}{2+a+b}\right)$

យើងមាន $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 3x + 1}$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x - 3)(3x^2 - 3x + 1) - (6x - 3)(x^3 + 3x^2 - 3x + 1)}{(3x^2 - 3x + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 - 6x^3 + 3x^2}{(3x^2 - 3x + 1)^2} = \frac{3x^2(x-1)^2}{(3x^2 - 3x + 1)^2} \ge 0\,,\, \forall x \in IR$$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនលើ IR ។

ម្យ៉ាងទៀតយើងសន្មតថា $\frac{1+a+b}{2} \geq \frac{1+a+b+a}{2+a+b}$

គេបាន $\frac{2}{1+a+b} \leq \frac{2+a+b}{1+a+b+a}$

$$\frac{2}{1+a+b} \leq \frac{(1+a)+(1+b)}{(1+a)(1+b)}$$

$$\frac{2}{1+a+b} \leq \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}$$

ដោយ $\frac{1}{1+a+b} \leq \frac{1}{1+a}$ និង $\frac{1}{1+a+b} \leq \frac{1}{1+b}$ គ្រប់ a និង b ។

គេទាញ $\frac{2}{1+a+b} \leq \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}$

នាំឲ្យ $\frac{1+a+b}{2} \geq \frac{1+a+b+a}{2+a+b}$ ពិត។

ដូចនេះតាមលក្ខណៈអនុគមន៍កើនគេទាញបាន ៖

$$f\left(\frac{1+a+b}{2}\right) \geq f\left(\frac{1+a+b+a}{2+a+b}\right)$$ ។

វិញ្ញាសាទី១១

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបី ។

គេដឹងថា $P(x)+2$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)^2$ ហើយ $P(x)-2$ ចែកដាច់

នឹង $(x-1)^2$ ។ចូរកំនត់រកពហុធា $P(x)$ ។

II-ចូរដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} 4^x.3^{y+1}+2^{\ y}7=1\quad 7 \\ 8^x+2^x.3^{1+2y}=1\quad 7 \end{cases}$

III-គេឲ្យ $a_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ និង $a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^2-5}{2(a_n+2)}$

ចំពោះគ្រប់ $n\ge 0$ ។

ចូរស្រាយថា $a_n = c\quad o\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{t\,3}\right)-2$ ចំពោះគ្រប់ $n\in I\,N$។

ដំណោះស្រាយ

I-កំនត់រកពហុធា $P(x)$ ៖

តាមបំរាប់គេអាចសរសេរ $\begin{cases} P(x)+2=(x+1)^2(ax+b) & (1) \\ P(x)-2=(x-1)^2(cx+d) & (2) \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} P(-1)+2=0 \\ P(1)-2=0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} P(-1)=-2 \\ P(1)=2 \end{cases}$

ដោយធ្វើដេរីវេលើ (1) និង (2) គេបាន ៖

$$\begin{cases} P'(x)=2(x+1)(ax+b)+a(x+1)^2 \\ P'(x)=2(x-1)(cx+d)+c(x-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P'(x)=(x+1)[2(ax+b)+a(x+1)] & (3) \\ P'(x)=(x-1)[2(cx+d)+c(x-1)] & (4) \end{cases}$$

តាម (3) នឹង (4) បញ្ជាក់ថា $P'(x)$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)(x-1)$

គេទាញ $P'(x)=k(x+1)(x-1)$

(ព្រោះ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី៣)

គេបាន $P(x)=k\int (x^2-1)\,dx=k\left(\frac{x^3}{3}-x\right)+r$

ចំពោះ $x=\pm 1$ គេបាន $\begin{cases} P(-1)=\frac{2}{3}k+r=-2 \\ P(1)=-\frac{2}{3}k+r=2 \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបាន $k=3$, $r=0$

ដូចនេះ $P(x)=3\,(\frac{x^3}{3}-x)=x^3-3x$ ។

II-ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ ៖

$$\begin{cases} 4^x.3^{y+1}+2\ \ ^y \neq 1 \quad 7\,(1) \\ 8^x+2^x.3^{1+2y}=1 \quad 7\ (2) \end{cases}$$

ដោយបូកសមីការ (1) និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$8^x+4^x.3^{y+1}+2^x.3^{1+2y}+27^y=343$$

$$(2^x)^3+3(2^x)^2(3^y)+3(2^x)(3^y)^2+(3^y)^3=343$$

$$(2^x+3^y)^3=343$$

$$2^x+3^y=7 \quad (3)$$

ម៉្យាងទៀតដកសមីការ(1) និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$27^y - 2^x.3^{1+2y} + 4^x.3^{y+1} - 8^x = -1$$

$$(3^y)^3 - 3(3^y)^2(2^x) + 3(3^y)(2^x)^2 - (2^x)^3 = -1$$

$$(3^y - 2^x)^3 = -1$$

$$2^x - 3^y = 1 \quad (4)$$

តាម (3) និង (4) យើងបានប្រព័ន្ធ ៖

$$\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 & (3) \\ 2^x - 3^y = 1 & (4) \end{cases}$$

បូកសមីការ(3) និង (4) គេបាន $2.2^x = 8$ នាំឲ្យ

ដកសមីការ(3) និង (4) គេបាន $2.3^y = 6$ នាំឲ្យ $y = 1$ ។

ដូចនេះ $x = 2$, $y = 1$ ។

III-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n = \cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right) - 2$

ចំពោះ $n = 0$ គេបាន $a_0 = \cot\frac{\pi}{24} - 2$

$$\cot\frac{\pi}{24}=\frac{\cos\frac{\pi}{24}}{\sin\frac{\pi}{24}}=\frac{2\cos^2\frac{\pi}{24}}{2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}$$

$$=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$\cot\frac{\pi}{24}=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4}$$

$$=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})+8+4\sqrt{3}}{4}$$

$$=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

គេទាញ $a_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$

ហេតុនេះ $a_n=\cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ពិតចំពោះ $n=0$ ។

សន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $a_k=\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ ៖

$a_{k+1} = \cot\left(\frac{2^{k-2}\pi}{3}\right) - 2$ ពិត ។

យើងមាន $a_{k+1} = \frac{a_k^{\ 2} - 5}{2(a_k + 2)}$ ដោយ $a_k = \cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right) - 2$

នោះ $a_{k+1} = \dfrac{\left[\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right) - 2\right]^2 - 5}{2\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)}$

$$a_{k+1} = \frac{\cot^2\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right) - 4\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right) - 1}{2\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{\cot^2\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right) - 1}{2\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{2}\right)} - 2$$

ដោយប្រើរូបមន្ត $\cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$

គេបាន $a_{k+1} = \cot\left(\frac{2^{k-2}\pi}{3}\right) - 2$ ពិត ។

ដូចនេះ $a_n = \cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right) - 2$ ។

វិញ្ញាសាទី១២

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឱ្យ $A=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+i\right)^{n}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-i\right)^{n}$, $n\in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា $A=i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^{n}}.\sin\frac{n\pi}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

II-គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

គេដឹងថា n ចែកនឹង 7 ឱ្យសំណល់ 5 ហើយ n ចែកនឹង 8 ឱ្យសំណល់ 3 ។

ក. តើចំនួន n នោះចែកនឹង 56 ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ខ. រកចំនួន n នោះដោយដឹងថា $5616 < n < 5626$ ។

III-គេឱ្យអាំងតេក្រាល

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2} \quad \text{និង} \quad I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2}.dt \ , \ (n \in IN)$$

ក. ចូរគណនាតម្លៃនៃ I_0 រួច ស្រាយថា (I_n) ជាស្វីតចុះ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ ។

គ. ទាញឱ្យបានថា $\frac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{3(n-1)} \ , \forall n \ge 2$ ។

ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(n I_n)$ ។

IV-គេឲ្យ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$$\frac{a_1}{k^2+1} + \frac{a_2}{k^2+2} + \frac{a_3}{k^2+3} + \frac{a_4}{k^2+4} + \frac{a_5}{k^2+5} = \frac{1}{k^2}$$

ចំពោះ $k = 1,2,3,4,5$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃ $\frac{a_1}{37} + \frac{a_2}{38} + \frac{a_3}{39} + \frac{a_4}{40} + \frac{a_5}{41}$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-បង្ហាញថា $A = i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

យើងមាន $A = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + i\right)^n - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - i\right)^n$, $n \in IN$

តាង $Z = \frac{1}{\sqrt{3}} + i = \frac{1 + i.\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$

តាមរូបមន្តដឺមរ័គេបាន $Z^n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + i\right)^n = \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

ហើយ $\bar{Z}^n = \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

គេទាញ $A = \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

$$= \frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3}\right) = i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{A = i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}}$ ។

II-ក. តើចំនួន n នោះចែកនឹង 56 ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

តាមសម្មតិកម្មគេដឹងថា n ចែកនឹង 7 ឱ្យសំណល់ 5 នាំឱ្យមាន

$q_1 \in IN$ ដែល $n = 7q_1 + 5 \quad (1)$

ហើយម្យ៉ាងទៀត n ចែកនឹង 8 ឱ្យសំណល់ 3 នោះនាំឱ្យមាន

$q_2 \in IN$ ដែល $n = 8q_2 + 3 \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} n = 7q_1 + 5 \ (1) \\ n = 8q_2 + 3 \ (2) \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} 8n = 56q_1 + 40 \ (3) \\ 7n = 56q_2 + 21 \ (4) \end{cases}$

ដកសមីការ (3) និង (4) គេបាន $n = 56(q_1 - q_2) + 19$

តាង $q = q_1 - q_2 \ , q \in IN$

គេបាន $n = 56q + 19$ ។

ទំនាក់ទំនងនេះមានន័យថាចំនួន n នោះចែកនឹង 56 ឱ្យសំណល់ 19

ខ. រកចំនួន n នោះដោយដឹងថា $5616 < n < 5626$

គេមាន $n = 56q + 19$ នាំឱ្យ $5616 < 56q + 19 < 5626$

ឬ $\frac{5597}{56} < q < \frac{5607}{56}$ ឬ $99 + \frac{53}{56} < q < 100 + \frac{7}{56}$

នាំឱ្យ $q = 100$ ។

ចំពោះ $q = 100$ គេបាន $n = 5600 + 19 = 5619$ ។

III-ក. គណនាតម្លៃនៃ I_0 រួច ស្រាយថា (I_n) ជាស្វីតចុះ

យើងបាន $I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t + t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{\frac{3}{4} + (\frac{1}{2} + t)^2}$

តាង $U = \frac{1}{2} + t$ នាំឱ្យ $dU = dt$

ហើយចំពោះ $\forall t \in [0,1]$ នោះ $U \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

គេបាន $I_0 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dU}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + U^2} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2U}{\sqrt{3}}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$ ។

ដូចនេះ $I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ ។

ម៉្យាងទៀតគេមាន $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2}.dt$ និង $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t+t^2}.dt$

ចំពោះគ្រប់ $t \in [0,1]$ គេមាន $t^{n+1} \le t^n$ នាំឱ្យ $\frac{t^{n+1}}{1+t+t^2} \le \frac{t^n}{1+t+t^2}$

គេទាញ $\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t+t^2}.dt \le \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2}.dt$ ឬ $I_{n+1} \le I_n \ , \forall n \in IN$ ។

ដូចនេះ (I_n) ជាស្វីតចុះ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

យើងបាន $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t+t^2} + \int_0^1 \frac{t^{n+1}dt}{1+t+t^2} + \int_0^1 \frac{t^{n+2}dt}{1+t+t^2}$

$$= \int_0^1 \frac{(t^n + t^{n+1} + t^{n+2})dt}{1+t+t^2} = \int_0^1 \frac{t^n(1+t+t^2).dt}{1+t+t^2}$$

$$= \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ ។

គ. ទាញឱ្យបានថា $\dfrac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \dfrac{1}{3(n-1)}$, $\forall n \ge 2$

យើងមាន (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។ តាមលក្ខណៈនៃស្វ៊ីតចុះយើងមាន៖

$$I_n + I_{n+1} + I_{n+2} \le 3I_n \le I_{n-2} + I_{n-1} + I_n$$

ដោយ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ នាំឱ្យ $I_{n-2} + I_{n-1} + I_n = \dfrac{1}{n-1}$

គេទាញ $\dfrac{1}{n+1} \le 3I_n \le \dfrac{1}{n-1}$ នាំឱ្យ $\dfrac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \dfrac{1}{3(n-1)}$, $\forall n \ge 2$ ។

ដូចនេះ $\dfrac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \dfrac{1}{3(n-1)}$, $\forall n \ge 2$ ។

ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n)$:

មាន $\dfrac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \dfrac{1}{3(n-1)}$, $\forall n \ge 2$

នាំឱ្យ $\dfrac{n}{3(n+1)} \le nI_n \le \dfrac{n}{3(n-1)}$ ។ ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(nI_n\right) = \dfrac{1}{3}$ ។

IV-កំនត់តម្លៃ $\frac{a_1}{37}+\frac{a_2}{38}+\frac{a_3}{39}+\frac{a_4}{40}+\frac{a_5}{41}$

តាងអនុគមន៍

$$f(x)=\left(\frac{a_1}{x+1}+\frac{a_2}{x+2}+\frac{a_3}{x+3}+\frac{a_4}{x+4}+\frac{a_5}{x+5}-\frac{1}{x}\right)\prod_{p=0}^{5}(x+p) \quad (1)$$

ដែល $x=x=1 , 4 , 9 , 16 , 25$

គេបាន $f(1)=f(4)=f(9)=f(16)=f(25)=0$

នាំឲ្យអនុគមន៍ f អាចសរសេរមួយបែបទៀតជារាង

$$f(x)=c(x-1)(x-4)(x-9)(x-16)(x-25) \quad (2)$$

តាម (1) គេទាញបាន៖ $\lim_{x\to 0} f(x)=1\times 2\times 3\times 4\times 5\times(0-1)=-120$

តាម (2) គេទាញបាន៖

$$\lim_{x\to 0} f(x)=c.(-1)(-4)(-9)(-16)(-25)=-(120)^2c$$

គេបានសមីការ $-(120)^2.c=-120 \Rightarrow c=\frac{1}{120}$

គេបាន $\mathbf{f(x)=\frac{1}{120}(x-1)(x-4)(x-9)(x-16)(x-25)}$

បើ $\mathbf{x=36 \Rightarrow f(36)=\frac{35.32.27.20.11}{120}}$ **(3)**

តាម **(1)**បើ $\mathbf{x=36}$ គេបាន

$$\mathbf{f(36)=36.37.38.39.40.41(\frac{a_1}{37}+\frac{a_2}{38}+...+\frac{a_5}{41}-\frac{1}{36})}\ \mathbf{(4)}$$

តាម (3) និង (4) គេទាញបាន

$$\mathbf{\frac{a_1}{37}+\frac{a_2}{38}+...+\frac{a_5}{41}=\frac{1}{36}+\frac{35.32.27.20.11}{120.36.37.38.39.40.41}}$$

ដូចនេះ $\mathbf{\frac{a_1}{37}+\frac{a_2}{38}+\frac{a_3}{39}+\frac{a_4}{40}+\frac{a_5}{41}=\frac{187465}{6744582}}$ ។

វិញ្ញាសាទី១៣

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គណនាផលបូក

$S_n = 1.1! + 2.2! + 3.3! + \dots + n.n!$

ដែល $n! = n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1$ ។

II-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x + y = \sqrt[3]{a+b} \\ x^4 - y^4 = a - b \end{cases}$

ដែល a និង b ជាចំនួនពិតដែល $a + b \neq 0$ ។

III-គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំនត់ដោយ ៖

$a_0 = 1$ និង $a_{n+1} = a_0.a_1.\dots a_n + 4$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $a_n - \sqrt{a_{n+1}} = 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

IV-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x.dx$ ដែល $n = 0 , 1 , 2,...$

ក/ស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ រួចគណនា $I_n + I_{n+2}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ/បង្ហាញថា $\frac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{2(n-1)}$ គ្រប់ $n \ge 2$ ។

គ/គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(nI_n)$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនាផលបូក

$S_n = 1.1! + 2.2! + 3.3! + ... + n.n!$

គេមាន $k.k! = [\,(k+1) - 1].k!$

$k.k! = (k+1)k! - k!$

$k.k! = (k+1)! - k!$

គេបាន $S_n = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + ... + (n+1)! - n!$

ដូចនេះ $S_n = (n+1)! - 1$ ។

II-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x + y = \sqrt[3]{a+b} \\ x^4 - y^4 = a \quad x\, b \end{cases}$$ សមមូល $$\begin{cases} a + b = (x+y)^3 \\ a \quad x b \quad y\, x^4 - y^4 \end{cases} \left| \begin{matrix} y \\ 1 \end{matrix} \right.$$

$$\begin{cases} a \quad y\, b \quad y\, y(x+y)^3 \\ a \quad x\, b \quad y\, x^4 - y^4 \end{cases} +$$

$$a(x+y) = y(x+y)^3 + x^4 - y^4$$

ដោយ $a + b \neq 0$ នោះ $x + y \neq 0$

គេទាញ $a = \dfrac{y(x+y)^3 + x^4 - y^4}{x+y} = x^3 + 3x \quad ^2$

ហើយ $b = (x+y)^3 - a = 3x^2 y + y^3$

គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} x^3 + 3x \; \overset{2}{y} = a \\ 3x^2 y + y^3 = b \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} x + y = \sqrt[3]{a+b} \\ x - y = \sqrt[3]{a-b} \end{cases}$

ដូចនេះ $x = \dfrac{\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}}{2}$; $y = \dfrac{\sqrt[3]{a+b} - \sqrt[3]{a-b}}{2}$ ។

III-បង្ហាញថា $a_n - \sqrt{a_{n+1}} = 2$

យើងសង្កេតឃើញថាគ្រប់ $k \in IN$ គេមាន $a_k > 0$ ។

គេមាន $a_{n+1} = a_0.a_1.\ldots.a_n + 4$

គេបាន $a_{n+2} = a_0.a_1.\ldots.a_{n+1} + 4$

$$a_{n+2} = (a_0.a_1.\ldots.a_n).(a_0.a_1.\ldots.a_n + 4) + 4$$
$$a_{n+2} = (a_0a_1.\ldots.a_n)^2 + 4(a_0.a_1.\ldots.a_n) + 4$$
$$a_{n+2} = (a_0a_1.\ldots.a_n + 2)^2$$

គេទាញ $\sqrt{a_{n+2}} = a_0a_1.\ldots.a_n + 2$

$\sqrt{a_{n+2}} = (a_{n+1} - 4) + 2$ ឬ $a_{n+1} - \sqrt{a_{n+2}} = 2$

ដូចនេះ $a_n - \sqrt{a_{n+1}} = 2$ ។

IV- ក/ស្រាយថា (I_n) ជាស៊ីតចុះ

គ្រប់ $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ គេមាន $0 \le \tan x \le 1$

គេបាន $\forall n \in IN : \cot^{n+1} x \le \cot^n x$ នាំឲ្យ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1} x \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x.dx$

ដូចនេះ (I_n) ជាស៊ីតចុះ ។

គណនា $I_n + I_{n+2}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេបាន $I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) \tan^n x.dx$

តាង $u = \tan x \Rightarrow du = (1 + \tan^2 x).dx$

ចំពោះ $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ នោះ $u \in [0 , 1]$

គេបាន $I_n + I_{n+2} = \int_0^1 u^n du = \left[\frac{1}{n+1} u^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

ដូចនេះ $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ ។

ខ/បង្ហាញថា $\frac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{2(n-1)}$ គ្រប់ $n \ge 2$ ៖

មាន $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ នោះ $I_{n-2} + I_n = \frac{1}{n-1}$ គ្រប់ $n \geq 2$ ។

ដោយ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះនោះគេបាន $I_{n+2} \leq I_n \leq I_{n-2}$

គេទាញ $\frac{I_n + I_{n+2}}{2} \leq I_n \leq \frac{I_{n-2} + I_n}{2}$

ដូចនេះ $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$ គ្រប់ $n \geq 2$ ។

គ/គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n)$ ៖

ដោយ $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$ គ្រប់ $n \geq 2$

គុណអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនឹង n គេបាន ៖

$\frac{n}{2(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{n}{2(n-1)}$ ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2(n-1)} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n) = \frac{1}{2}$ ។

វិញ្ញាសាទី១៤

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេមានសមីការ $z^3-(4+3i)z^2+2(1+5i)z+4(1-2i)=0$

ក/កំណត់ចំនួនពិត α ដើម្បីឲ្យ $z=\alpha$ ជាឫសមួយរបស់(E)។

ខ/ចូរសរសេរសមីការ(E)ជារាង $(z-\alpha)(z^2+pz+q)=0$

ដែល p និង q ជាចំនួនកុំផ្លិចត្រូវកំណត់ ។

គ/ដោះស្រាយសមីការ(E)ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ។

II-គេមានអនុគមន៍ $f(n)=\dfrac{an^2+bn+c}{2^n}$ ដែល $n\in IN$

ក/កំណត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យបាន

$f(n+1)-f(n)=\dfrac{n^2}{2^n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

ខ/ទាញរកផលបូក $S_n=\dfrac{1^2}{2}+\dfrac{2^2}{2^2}+\dfrac{3^2}{2^3}+....+\dfrac{n^2}{2^n}$

រួចគណនាលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$ ។

III-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}}.dx$

IV-គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): xy' + 3y = 4x + 9$

ក/កំណត់ពីរចំនួនពិត α និង β ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $y_1 = \alpha x + \beta$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ/រកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

I-គេមានសមីការ $z^3 - (4+3i)z^2 + 2(1+5i)z + 4(1-2i) = 0$

ក/កំណត់ចំនួនពិត α ៖

ដើម្បីឲ្យ $z = \alpha$ ជាឬសមួយរបស់(E)លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

គេបាន $\alpha^3 - (4+3i)\alpha^2 + 2(1+5i)\alpha + 4(1-2i) = 0$

$$(\alpha^3 - 4\alpha^2 + 2\alpha + 4) + i(-3\alpha^2 + 10\alpha - 8) = 0$$

គេទាញ $\begin{cases}\alpha^3 - 4\alpha^2 + 2\alpha + 4 = 0 \\ -3\alpha^2 + 10\alpha - 8 = 0\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}(\alpha - 2)(\alpha^2 - 2\alpha - 2) = 0 \\ (\alpha - 2)(-3\alpha + 4) = 0\end{cases}$

គេទាញបាន $\alpha = 2$ ជាឬសតែមួយគត់របស់ប្រពន្ធ័សមីការខាងលើ

ដូចនេះ $\alpha = 2$ ជាចំនួនពិតដែលត្រូវរក ។

ខ/សរសេរសមីការ (E) ជារាង $(z - \alpha)(z^2 + pz + q) = 0$

សមីការ $(z - \alpha)(z^2 + pz + q) = 0$ អាចសរសេរជា ៖

$$z^3 + (p - \alpha)z^2 + (q - \alpha p)z - \alpha q = 0 \quad (1)$$

ដោយ $z^3 - (4 + 3i)z^2 + 2(1 + 5i)z + 4(1 - 2i) = 0 \quad (2)$

ធ្វើការប្រៀបធៀបសមីការ(1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$\begin{cases}p - \alpha = -4 - 3i \\ q - \alpha p = 2 + 10i \\ -\alpha q = 4 - 8i\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}p - 2 = -4 - 3i \\ q - 2p = 2 + 10i \\ -2q = 4 - 8i\end{cases}$ (ព្រោះ $\alpha = 2$)

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $p = -2 - 3i$; $q = -2 + 4i$

ដូចនេះ $(E):(z-2)[z^2-(2+3i)z-2+4i]=0$ ។

គ/ដោះស្រាយសមីការ (E) ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ៖

គេមាន $(E):(z-2)[z^2-(2+3i)z-2+4i]=0$

គេទាញ $z-2=0$ នាំឲ្យ $z=2$

ហើយ $z^2-(2+3i)z-2+4i=0$

$$\Delta=(2+3i)^2-4(-2+4i)=3-4i=(2-i)^2$$

គេទាញឫស $\left[\begin{array}{l} z_1=\dfrac{2+3i-2+i}{2}=2i \\ z_2=\dfrac{2+3i+2-i}{2}=2+i \end{array}\right.$

ដូចនេះសំណុំឫសសមីការ $z\in\{2\ ,\ 2i\ ,\ 2+i\}$ ។

II-គេមានអនុគមន៍ $f(n)=\dfrac{an^2+bn+c}{2^n}$ ដែល $n\in IN$

ក/កំណត់បីចំនួនពិត a,b,c ៖

$$f(n+1)-f(n)=\frac{n^2}{2^n}\quad(1)$$

មាន $f(n+1)=\dfrac{a(n+1)^2+b(n+1)+c}{2^{n+1}}=\dfrac{an^2+(2a+b)n+a+b+c}{2^{n+1}}$

គេបាន $f(n+1)-f(n)=\dfrac{-an^2+(2a-b)n+a+b-c}{2^{n+1}}$ (2)

ដោយប្រៀបធៀបសមីការ (1) និង (2) គេបាន ៖

$\begin{cases}-a=2\\ 2a-b=0\\ a+b-c=0\end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases}a=-2\\ b=-4\\ c=-6\end{cases}$ ។ដូចនេះ $a=-2$, $b=-4$, $c=-6$

ខ/ទាញរកផលបូក $S_n=\dfrac{1^2}{2}+\dfrac{2^2}{2^2}+\dfrac{3^2}{2^3}+....+\dfrac{n^2}{2^n}$

ចំពោះ $a=-2$, $b=-4$, $c=-6$ គេបាន $f(n)=-\dfrac{2n^2+4n+6}{2^n}$

និង $f(n+1)-f(n)=\dfrac{n^2}{2^n}$ (តាមសម្រាយខាងលើ) ។

គេបាន $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{2^k}=\sum\limits_{k=1}^{n}[f(k+1)-f(k)]=f(n+1)-f(1)$

តែ $f(1)=-\dfrac{2+4+6}{2}=-6$ និង $f(n+1)=-\dfrac{n^2+4n+6}{2^n}$

ដូចនេះ $S_n = 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n}$ និង $\lim_{n\to\infty} S_n = 6$ ។

III-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}}.dx$

គេអាចសរសេរ $I = \int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{2}}.dx}{\sqrt{x^3+1}}$ តាង $t = x^{\frac{3}{2}}$ នោះ $dt = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.dx$

បើ $x=0$ នោះ $t=0$ និង $x=1$ នោះ $t=1$ ។

គេបាន $I = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$ តាង $t = \tan\varphi$ នោះ $dt = (1+\tan^2\varphi)d\varphi$

បើ $t=0$ នោះ $\varphi = 0$ និង $t=1$ នោះ $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ។

គេបាន $I = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan^2\varphi)d\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\varphi.d\varphi}{1-\sin^2\varphi}$

តាង $u = \sin\varphi$ នោះ $du = \cos\varphi.d\varphi$

បើ $\varphi = 0$ នោះ $u = 0$ និង $\varphi = \frac{\pi}{4}$ នោះ $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$

គេបាន $I=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{du}{1-u^2}=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u})du$

$I=\frac{1}{3}\left[-\ln|1-u|+\ln|1+u|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{3}\ln(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1})$

ដោយ $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2$ នោះ $I=\frac{1}{3}\ln(\sqrt{2}+1)^2$

ដូចនេះ $I=\frac{2}{3}\ln(\sqrt{2}+1)$ ។

IV-គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $xy'+3y=4x+9$

ក/កំណត់ពីរចំនួនពិត α និង β

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $y_1=\alpha x+\beta$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E)

លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (E) ។

គេបាន $xy'_1+3y_1=4x+9$ (1)

ដោយ $y_1=\alpha x+\beta$ នោះ $y'_1=\alpha$ ។

សមីការ (1) អាចសរសេរ ៖

$$\alpha x+3(\alpha x+\beta)=4x+9$$

$$4\alpha x+3\beta=4x+9$$

គេទាញ $\alpha=1\ ;\beta=3$ ។

ខ/រកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

គេមាន $xy'_1+3y_1=4x+9$ (1)

$$xy'+3y=4x+9\quad(2)$$

ដកសមីការ (2) និង (1) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$x(y'-y_1')+3(y-y_1)=0\ (3)$$

តាង $u=y-y_1$ នោះ $u'=y'-y_1'$

តាមសមីការ (3) គេបាន $xu'+3u=0$ នាំឲ្យ $\frac{u'}{u}=-\frac{3}{x}$

ឬ $(\ln u)'=-\frac{3}{x}$ នាំឲ្យ $\ln u=-\int\frac{3}{x}dx=-3\ln|x|+c_1$

គេទាញ $u=e^{-3\ln|x|+c_1}=\frac{1}{|x|^3}.e^{c_1}=\frac{k}{x^3}\ ;k\in IR$

ដោយ $u = y - y_1$ នោះ $y = u + y_1 = \frac{k}{x^3} + x + 3$

ដូចនេះ $y = x + 3 + \frac{k}{x^3}$ $, k \in IR$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ(E)។

វិញ្ញាសាទី១៥

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^a\sqrt{\frac{x}{x^n+a^n}}.dx$ ដែល $a>0$ ។

ក/កំណត់តម្លៃ **n** ដើម្បីឲ្យ I_n មានតម្លៃមិនអាស្រ័យនឹង **a** ។

ខ/គណនា I_n ចំពោះតម្លៃ **n** ដែលបានរកឃើញខាងលើ ។

II-គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីបី $(E):z^3-(3+4i)z^2-(1-6i)z+3-2i=0$

ក/កំណត់ចំនួនពិត **b** ដើម្បីឲ្យ $z=ib$ ជាឫសមួយរបស់**(E)** ។

ខ/បង្ហាញថាសមីការ **(E)** មានឫសមួយជាចំនួនពិត ហើយឫសពីរទៀតជាចំនួនកុំផ្លិចរួចរកឫសទាំងនោះ ។

គ/ក្នុងប្លង់កុំផ្លិចប្រកបដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ គេមានបីចំនុច **A,B,C** មានអាហ្វិក z_1,z_2,z_3 ជាឫសនៃ **(E)** ។ ចូរដៅចំនុច **A,B,C** រួចរកប្រភេទនៃត្រីកោណ **ABC** ។

III-គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ ៖

$u_1 = -1$ និង $u_{n+1} = \sqrt{1+\frac{1}{n}}\, u_n + \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$ គ្រប់ $n \in IN$ ។

ក/រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត $v_n = \frac{u_{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{u_n}{\sqrt{n}}$ រួចគណនា $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ ។

ខ/ទាញរកតួទូទៅ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

IV-គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$$(E): x^2y'' + (4x - 2x^2)y' + 2(x-1)^2 y = 0$$

$$(F): y'' - 2y' + 2y = 0$$

ក/ចូរបង្ហាញថាបើ $y = x^2 f(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (F)

នោះអនុគមន៍ f ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E) ។

ខ/ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយរបស់សមីការ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

I-ក/កំណត់តម្លៃ n ដើម្បីឲ្យ I_n មានតម្លៃមិនអាស្រ័យនឹង a

គេមាន $I_n = \int_0^a \sqrt{\frac{x}{x^n + a^n}} .dx$ ដែល $a > 0$

តាង $x = at$ នោះ $dx = a.dt$

បើ $x = 0$ នោះ $t = 0$ ហើយ $x = a$ នោះ $t = 1$

គេបាន $I_n = \int_0^1 \sqrt{\frac{at}{a^n t^n + a^n}} a.dt = (a)^{\frac{3-n}{2}} \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2}} dt}{\sqrt{t^3 + 1}}$

ដើម្បីឲ្យ I_n មានតម្លៃមិនអាស្រ័យនឹង a លុះត្រាតែ $\frac{3-n}{2} = 0$

គេទាញបាន $n = 3$ ។

ខ/គណនា I_n ចំពោះតម្លៃ n ដែលបានរកឃើញខាងលើ

បើ $n = 3$ គេបាន $I_3 = \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2}} dt}{\sqrt{t^3 + 1}}$ តាង $u = t^{\frac{3}{2}}$ នោះ $du = \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} .dt$

បើ $t = 0$ នោះ $u = 0$ និង $t = 1$ នោះ $u = 1$ ។

គេបាន $I_3 = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{2}{3}\left[\ln|u+\sqrt{u^2+1}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\ln(1+\sqrt{2})$

ដូចនេះ $I_3 = \frac{2}{3}\ln(1+\sqrt{2})$ ។

II-គេឲ្យសមីការដឺក្រេទីបី $(E): z^3-(3+4i)z^2-(1-6i)z+3-2i=0$

ក/កំណត់ចំនួនពិត b

ដើម្បីឲ្យ $z=ib$ ជាឫសមួយរបស់(E)លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់(E)

គេបាន $i^3b^3-(3+4i)i^2b^2-(1-6i)ib+3-2i=0$

$$-ib^3+3b^2+4ib^2-ib-6b+3-2i=0$$

$$(3b^2-6b+3)+i(-b^3+4b^2-b-2)=0$$

គេទាញ $\begin{cases} 3b^2-6b+3=0 & (1) \\ -b^3+4b^2-b-2=0 & (2) \end{cases}$

តាម (1) គេបាន $3(b-1)^2=0$ នាំឲ្យ $b=1$ ។

យក $b=1$ជួសក្នុង (2)គេបាន $-1+4-1-2=0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់។

ដូចនេះ $b=1$ ។

ខ/បង្ហាញថាសមីការ (E) មានឫសមួយជាចំនួនពិត ៖

តាង $z = a$ ជាឫសពិតរបស់សមីការ (E) គេបាន ៖

$$a^3 - (3+4i)a^2 - (1-6i)a + 3 - 2i = 0$$
$$a^3 - 3a^2 - 4ia^2 - a + 6ia + 3 - 2i = 0$$
$$(a^3 - 3a^2 - a + 3) + i(-4a^2 + 6a - 2) = 0$$

គេទាញបាន $\begin{cases} a^3 - 3a^2 - a + 3 = 0 \\ -4a^2 + 6a - 2 = 0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} (a-3)(a-1)(a+1) = 0 \\ (a-1)(-4a+2) = 0 \end{cases}$

ប្រពន្ធ័សមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ $a = 1$ ។

ដោះស្រាយសមីការ (E) :

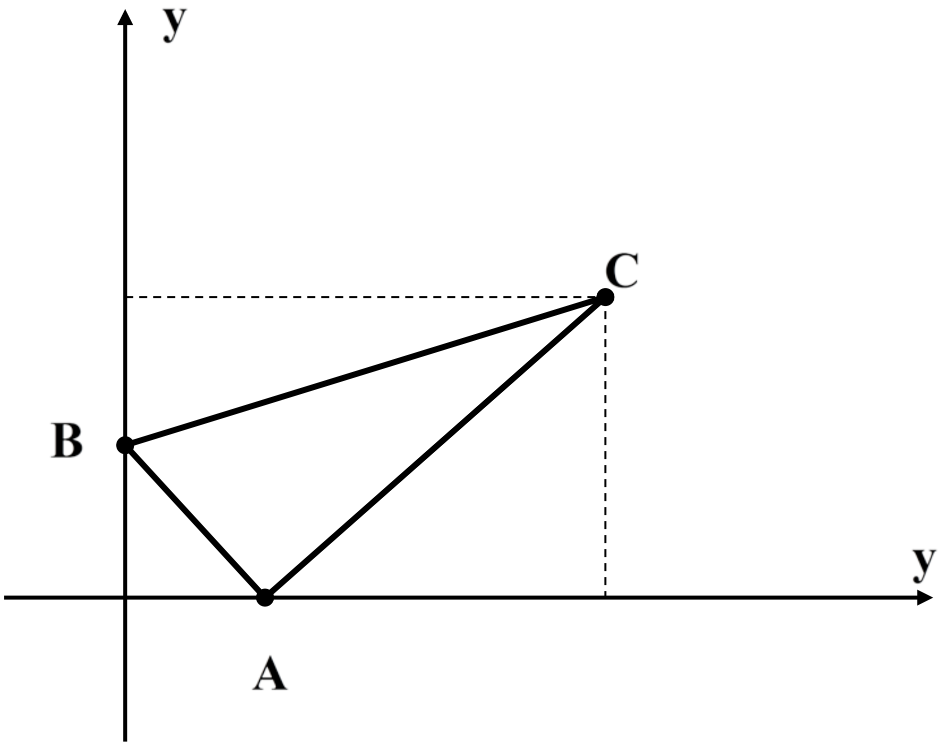
តាមសម្រាយខាងលើគេទាញបាន $z_1 = i$; $z_2 = 1$ ជាឫសនៃ (E)

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត $z_1 + z_2 + z_3 = 3 + 4i$

គេទាញ $z_3 = 3 + 4i - i - 1 = 2 + 3i$ ។

ដូចនេះ $z_1 = i$; $z_2 = 1$, $z_3 = 3 + 2i$ ។

គ/ ដៅចំនុច A,B,C រួចរកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC



គេមាន $A(1);B(i)\ ;\ C(3+2i)$

អាហ្វិកនៃ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ គឺ $z_B - z_A = -1+i$ និង $z_C - z_A = 2+2i$

គេមាន $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2+2i}{-1+i} = -2i$ នាំឲ្យ $Arg(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}) = \frac{\pi}{2}$

នាំឲ្យ $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ ។ ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។

III-ក/រកប្រភេទនៃស៊ីត $v_n = \frac{u_{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{u_n}{\sqrt{n}}$

មាន $u_1 = -1$ និង $u_{n+1} = \sqrt{1+\frac{1}{n}}\, u_n + \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$ គ្រប់ $n \in IN$

គេបាន $u_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} u_n + \frac{\sqrt{n+1}}{2^n} = \sqrt{n+1}(\frac{u_n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n})$

នាំឲ្យ $\frac{u_{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{u_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2^n}$ ឬ $v_n = \frac{1}{2^n}$

គេបាន $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$ ថេរ

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{1}{2}$ ។

គណនា$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$

គេបាន $S_n = v_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$ តែ $v_1 = \frac{u_2}{\sqrt{2}} - u_1$

និង$u_2 = \sqrt{2}u_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ នោះ $v_1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

គេបាន $S_n = \frac{1}{2} . \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$

ដូចនេះ $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ ។

ខ/ទាញរកតួទូទៅ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $v_n = \frac{u_{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{u_n}{\sqrt{n}}$

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{u_{k+1}}{\sqrt{k+1}} - \frac{u_k}{\sqrt{k}}\right)$$

$$S_{n-1} = \frac{u_n}{\sqrt{n}} - u_1$$

គេទាញ $u_n = \sqrt{n}(S_{n-1} + u_1)$

ដោយ $S_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ និង $u_1 = -1$

ដូចនេះ $u_n = -\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$ ។

IV-គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$(E): x^2y''+(4x-2x^2)y'+2(x-1)^2y=0$

$(F): y''-2y'+2y=0$

ក/ការបង្ហាញ

បើ $y=x^2f(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (F)នោះ y,y',y''

ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (F) ។

គេមាន $y'=2xf(x)+x^2f'(x)$

$$y''=2f(x)+2xf'(x)+2xf'(x)+x^2f''(x)$$

$$y''=2f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)$$

យក y,y',y'' ជួសក្នុងសមីការ (F) គេបាន ៖

$$2f(x)+4xf'(x)+x^2f''(x)-4xf(x)-2x^2f'(x)+2x^2f(x)=0$$

$$x^2f''(x)+(4x-2x^2)f'(x)+2(x-1)^2f(x)=0$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ f ជាចម្លើយរបស់(E) ។

ខ/ដោះស្រាយសមីការ (F)

គេមាន $(F): y''-2y'+2y=0$

សមីការសម្គាល់ $r^2-2r+2=0$

$\Delta'=1-2=-1=i^2$

គេទាញឫស $r_1=1-i$; $r_2=1+i$ នាំឲ្យ $\alpha=1$, $\beta=1$

ដូចនេះ $y=(A\cos x+B\sin x)e^x$; $A,B\in IR$ ។

ទាញរកចម្លើយរបស់សមីការ (E)៖

គេមាន $y=x^2f(x)$ នាំឲ្យ $f(x)=\dfrac{y}{x^2}=(A\cos x+B\sin x)\dfrac{e^x}{x^2}$

ដូចនេះ $f(x)=(A\cos x+B\sin x)\dfrac{e^x}{x^2}$; $A,B\in IR$ ។

វិញ្ញាសាទី១៦

សម្រាប់រយះពេល២ម៉ោង

I-គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{a^{2x}}{1+a^{2x-1}}$ ដែល $a>0$ និង $a\neq 1$ ។

ចូរស្រាយថាគ្រប់ $\varphi\in IR$ គេបាន $f(\sin^2\varphi)+f(\cos^2\varphi)=a$ ។

II-គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{\sqrt[3]{1+na_n^3}} \end{cases}$

ដែល $n=1\,,\,2\,,\,3\,,...$ ។

ចូរគណនាកន្សោម a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

III-គេឲ្យសមីការ $(E): z^2-(4+3i)z+a+9i=0$

ក/កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យសមីការ(E)មានឫសមួយជាចំនួនពិត

ហើយឫសមួយទៀតជាចំនួនកុំផ្លិច។

ខ/ដោះស្រាយសមីការ(E)ចំពោះតម្លៃaដែលបានរកឃើញខាងលើ

IV-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^{\pi} x\sin^n x.dx$ ដែល $n = 0,1,2,...$ ។

ក/ចូរស្រាយថា $I_n = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$ ។

ខ/ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ ស្រាយថា $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ស្រាយថាគ្រប់ $\varphi \in IR$ គេបាន $f(\sin^2\varphi) + f(\cos^2\varphi) = a$

គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \frac{a^{2x}}{1+a^{2x-1}}$ ដែល $a > 0$ និង $a \neq 1$

យក $u = \sin^2\varphi$ និង $v = \cos^2\varphi$ នោះ $u + v = 1$ ។

យើងនឹងស្រាយថាបើ $u + v = 1$ នោះ $f(u) + f(v) = a$ ។

គេបាន $f(u) + f(v) = \frac{a^{2u}}{1+a^{2u-1}} + \frac{a^{2v}}{1+a^{2v-1}}$

$$= \frac{a^{2u}(1+a^{2v-1}) + a^{2v}(1+a^{2u-1})}{(1+a^{2u-1})(1+a^{2v-1})}$$

$$f(u)+f(v)=\frac{a^{2u}+a^{2u+2v-1}+a^{2v}+a^{2u+2v-1}}{1+a^{2v-1}+a^{2u-1}+a^{2u+2v-2}}$$ ដោយ $u+v=1$

$$=\frac{a^{2u}+a^{2-1}+a^{2v}+a^{2-1}}{1+a^{2v-1}+a^{2u-1}+a^{2-2}}$$

$$=\frac{a^{2u}+a^{2v}+2a}{a^{2u-1}+a^{2v-1}+2}$$

$$=\frac{a(a^{2u-1}+a^{2v-1}+2)}{a^{2u-1}+a^{2v-1}+2}=a$$

ដូចនេះ $f(\sin^2\varphi)+f(\cos^2\varphi)=a$ ។

II-គណនាកន្សោម a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេមាន $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{\sqrt[3]{1+n a_n^3}}$ ដែល $n=1 , 2 , 3 ,...$ ។

លើកអង្គទាំងពីរជាគូបគេបាន $a_{n+1}^3=\frac{a_n^3}{1+na_n^3}$

គេទាញ $\frac{1}{a_{n+1}^3}=\frac{1+na_n^3}{a_n^3}=\frac{1}{a_n^3}+n$ ឬ $\frac{1}{a_{n+1}^3}-\frac{1}{a_n^3}=n$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}^3}-\frac{1}{a_k^3}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}(k)$

នាំឲ្យ $(\frac{1}{a_2^3}-\frac{1}{a_1^3})+(\frac{1}{a_3^3}-\frac{1}{a_2^3})+...+(\frac{1}{a_n^3}-\frac{1}{a_{n-1}^3})=\frac{(n-1)n}{2}$

ឬ $\frac{1}{a_n^3}-\frac{1}{a_1^3}=\frac{n^2-n}{2}$ ដោយ $a_1=1$

ដូចនេះ $a_n=\sqrt[3]{\frac{2}{n^2-n+2}}$ ។

III-គេឲ្យសមីការ $(E): z^2-(4+3i)z+a+9i=0$

ក/កំណត់តម្លៃ a ៖

តាង $z=\alpha$ ជាឬសពិតមួយរបស់សមីការ (E) នោះវាផ្ទៀងផ្ទាត់

នឹងសមីការ (E) គឺ $\alpha^2-(4+3i)\alpha+a+9i=0$

ឬ $(\alpha^2-4\alpha+a)+i(3\alpha-9)=0$ នាំឲ្យ $\begin{cases}\alpha^2-4\alpha+a=0\\3\alpha-9=0\end{cases}$

គេទាញ $\alpha=3$ ហើយ $9-4(3)+a=0$ នោះ $a=3$ ។

ដូចនេះ $a=3$ ។

ខ/ដោះស្រាយសមីការ(E)៖

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត បើ α , β ជាឫសរបស់សមីការ (E) នោះគេបាន

$\alpha+\beta=4+3i$ តែតាមសម្រាយខាងលើ $\alpha=3$ នោះ $\beta=1+3i$ ។

ដូចនេះឫសសមីការគឺ $\alpha=3\,;\beta=1+3i$ ។

IV-ក/ស្រាយថា $I_n=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x.dx$

គេមាន $I_n=\int_0^{\pi}x\sin^n x.dx$ ដែល $n=0,1,2,...$

តាង $x=\pi-t$ នោះ $dx=-dt$

បើ $x=0$ នោះ $t=\pi$ និង $x=\pi$ នោះ $t=0$

គេបាន $I_n=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)\sin^n(\pi-t)(-dt)$

$$I_n=\int_0^{\pi}(\pi-t)\sin^n t.dt=\pi\int_0^{\pi}\sin^n tdt-\int_0^{\pi}t\sin^n t.dt$$

$$I_n = \pi \int_0^{\pi} \sin^n x.dx - I_n$$ នាំឲ្យ $$I_n = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \sin^n x.dx \quad (1)$$

គេមាន $$\int_0^{\pi} \sin^n x.dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n x.dx \quad (2)$$

តាង $x = \pi - t$ នោះ $dx = -dt$

បើ $x = \frac{\pi}{2}$ នោះ $t = \frac{\pi}{2}$ និង $x = \pi$ នោះ $t = 0$

គេបាន $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n x.dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n(\pi - t)(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t.dt \quad (3)$$

តាម (2) និង (3) គេបាន $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n x.dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx \quad (4)$$

យក (4)ជំនួសក្នុង (1) គេបាន $$I_n = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$$ ពិត ។

ខ/ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ ស្រាយថា $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

គេមាន $I_n = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x . \sin x dx$

តាង $\begin{cases} u = \sin^{n-1} x \\ dv = \sin x.dx \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} du = (n-1)\cos x \sin^{n-2} x.dx \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{cases}$

$$I_n = \pi\left[-\sin^{n-1} x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x.dx$$

$$I_n = (n-1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x.dx$$

$$I_n = (n-1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x.dx - (n-1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x.dx$$

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

គេទាញ $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ ឬ $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ។

ដូចនេះ $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ ។

វិញ្ញាសាទី១៧

សម្រាប់រយះពេល២ម៉ោង

✿✿✿❁✿✿✿

I-គេឲ្យអនុគមន៍ **f** កំណត់ដោយ ៖

$f_m(x) = x^3 - (m+4)x^2 + 2(2m+3)x - 4m + 3$ មានក្រាប (c_m)

(**m** ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រពិត) ។

ចូរកំណត់សមីការបន្ទាត់ថេរ (Δ) មួយដែលប៉ះនឹងខ្សែកោង (c_m)

ជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ **m** ។

II-គេឲ្យស្ទីត (a_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{2^n}) \end{cases}$

ដែល $n = 1, 2, 3, ...$ ។

ក/រកប្រភេទនៃស្ទីត $b_n = a_n - \frac{n}{2^n}$ ។

ខ/គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ **n** ។

III-គេឲ្យអាំងតេក្រាល ៖

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx \quad \text{និង} \quad J_n = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx$$

ក/ចូរស្រាយថា $I_n = J_n$ ។

ខ/គណនា I_n និង J_n ។

IV-គេឲ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់ពីសំណុំ IR ទៅ IR ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

សមីការ $f(x+1) + x^2 f(x^3+1) = x^3 + \sqrt[3]{x}$ គ្រប់ $x \in IR$ ។

ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_1^2 f(x).dx$ ។

V-ចូរកំណត់ចំនួនកុំផ្លិច z ដែលមានម៉ូឌុល $|z|$ ដោយដឹងថា ៖

$|z| + (1+i)z = 4 + 7i$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-កំណត់សមីការបន្ទាត់ថេរ (Δ)

គេមាន $f_m(x) = x^3 - (m+4)x^2 + 2(2m+3)x - 4m + 3$

តាង $(\Delta): y = \alpha x + \beta$ ជាបន្ទាត់ថេរដែលប៉ះនឹង (c_m) ត្រង់ចំនុច

$M_o(x_0, y_0)$ ចំពោះគ្រប់ $m \in IR$ ។

សមមូលគេបាន $\begin{cases} f(x_0) = \alpha x_0 + \beta \\ f'(x_0) = \alpha \end{cases}$

ដោយ $f'(x) = 3x^2 - 2(m+4)x + 2(2m+3)$

គេបាន $\begin{cases} x_0^3 - (m+4)x_0^2 + 2(2m+3)x_0 - 4m + 3 = \alpha x_0 + \beta \\ 3x_0^2 - 2(m+4)x_0 + 2(2m+3) = \alpha \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} x_0^3 - 4x_0^2 + 6x_0 - \alpha x_0 - \beta + 3 = m(x_0^2 - 4x_0 + 4) \\ 3x_0^2 - 8x_0 + 6 - \alpha = m(2x_0 - 4) \end{cases}$

ប្រពន្ធ័នេះពិត $\forall m \in IR$ លុះត្រាតែ ៖

$$\begin{cases} x_0^3 - 4x_0^2 + 6x_0 - \alpha x_0 - \beta + 3 = 0 & (1) \\ x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0 & (2) \\ 3x_0^2 - 8x_0 + 6 - \alpha = 0 & (3) \\ 2x_0 - 4 = 0 & (4) \end{cases}$$

តាមសមីការ (2)និង(4) គេទាញបាន $x_0 = 2$ ។

តាមសមីការ (3) គេបាន $3(2)^2 - 8(2) + 6 - \alpha = 0$ នាំឲ្យ $\alpha = 2$

តាម **(1)** គេបាន $8 - 16 + 12 - 4 - \beta + 3 = 0$ នាំឲ្យ $\beta = 3$ ។

ដូចនេះ $(\Delta): y = 2x + 3$ ។

II-ក/រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត $b_n = a_n - \frac{n}{2^n}$

គេបាន $b_n = a_n - \frac{n}{2^n}$ នាំឲ្យ $b_{n+1} = a_{n+1} - \frac{n+1}{2^{n+1}}$

ដោយ $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{2^n})$

គេបាន $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{2^n}) - \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}(a_n - \frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2}b_n$

ដូចនេះ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{1}{2}$ ។

ខ/គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

ដោយ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=\frac{1}{2}$ និងតួទីមួយ

$b_1=a_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ នោះ $b_n=b_1\times q^{n-1}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1}{2^n}$

តាម $b_n=a_n-\frac{n}{2^n}$ នោះ $a_n=b_n+\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2^n}+\frac{n}{2^n}=\frac{n+1}{2^n}$

ដូចនេះ $a_n=\frac{n+1}{2^n}$ ។

III- /ចូរស្រាយថា $I_n=J_n$

មាន $I_n=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx$ និង $J_n=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx$

ចំពោះ $I_n=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx$ តាង $x=\frac{\pi}{2}-t$ នោះ $dx=-dt$

បើ $x=\frac{\pi}{6}$ នោះ $t=\frac{\pi}{3}$ និង $x=\frac{\pi}{3}$ នោះ $t=\frac{\pi}{6}$

គេបាន $$I_n=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^n(\frac{\pi}{2}-t)}{\sin^n(\frac{\pi}{2}-t)+\cos^n(\frac{\pi}{2}-t)}.(-dt)$$

$$I_n=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^n t}{\cos^n t+\sin^n t}.dt=J_n$$

ដូចនេះ $I_n=J_n$ ។

ខ/គណនា I_n និង J_n ៖

គេបាន $$I_n+J_n=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx$$

$$I_n+J_n=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}dx=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$ តែ $I_n=J_n$

នោះ $2I_n=2J_n=\frac{\pi}{6}$ នាំឲ្យ $I_n=J_n=\frac{\pi}{12}$ ។

ដូចនេះ $I_n=\frac{\pi}{12}$ និង $J_n=\frac{\pi}{12}$ ។

IV-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^2 f(x).dx$

-បើគេតាង $x=t+1$ នោះ $dx=dt$

ចំពោះ $x=1$ នោះ $t=0$ និង $x=2$ នោះ $t=1$ ។

គេបាន $I=\int_1^2 f(x).dx=\int_0^1 f(t+1).dt \quad (1)$

-បើគេតាង $x=t^3+1$ នោះ $dx=3t^2dt$

ចំពោះ $x=1$ នោះ $t=0$ និង $x=2$ នោះ $t=1$ ។

គេបាន $I=\int_1^2 f(x).dx=3\int_0^1 t^2 f(t+1).dt$

ឬ $\frac{1}{3}I=\int_0^1 t^2 f(t^3+1).dt \quad (2)$

បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន ៖

$$I+\frac{1}{3}I=\int_0^1 [f(t+1)+t^2 f(t^3+1)].dt$$

ដោយ $f(x+1)+x^2 f(x^3+1)=x^3+\sqrt[3]{x}$ គ្រប់ $x\in IR$ ។

គេបាន $\frac{4}{3}I=\int_0^1(t^3+\sqrt[3]{t}).dt=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}\right]_0^1=1$

ដូចនេះ $I=\frac{3}{4}$ ។

V- កំណត់ចំនួនកុំផ្លិច z ដែលមានម៉ូឌុល $|z|$

គេមាន $|z|+(1+i)z=4+7i$ (1)

តាង $z=x+iy$ ដែល $x,y\in IR$ ។

សមីការ (1) អាចសរសេរ ៖

$$\sqrt{x^2+y^2}+(1+i)(x+iy)=4+7i$$
$$\sqrt{x^2+y^2}+x+iy+ix-y=4+7i$$
$$(\sqrt{x^2+y^2}+x-y)+i(x+y)=4+7i$$

គេទាញបាន $\begin{cases} x+y=7 & (2) \\ \sqrt{x^2+y^2}+x-y=4 & (3) \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបានគូចម្លើយ $x=3$, $y=4$

ដូចនេះចំនួនកុំផ្លិចដែលត្រូវរកគឺ $z = 3 + 4i$ ។

វិញ្ញាសាទី១៨

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{(3m+1)x + m - m^2}{x + m}$

ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង $m \neq 0$ ។ (H_m) ជាក្រាបតាង f ។

ក/ចូរស្រាយថា f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែនកំណត់របស់វា។

ខ/កំណត់សមីការបន្ទាត់នឹងមួយដែលប៉ះ (H_m) ជានិច្ចគ្រប់ m។

II-គេមានអនុគមន៍ $g(x) = 2\cos^2 x - \cos x + 1$ ដែល $x \in IR$

ក/ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $g(x)$ ។

ខ/តាង $S_n = \sum_{k=0}^{n} g(\frac{x}{2^k})$ ។ ចូរគណនា $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

III-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 \frac{t^{3n}}{1+t^3}.dt$ ដែល $n = 0, 1, 2, ...$ ។

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(n I_n)$ ។

IV-ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ៖

ក/ $z^2-4z+7-4i=0$

ខ/ $(1+i)z^2-2(1+3i)z+1+5i=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ក/ស្រាយថា f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើដែនកំណត់របស់វា

គេមាន $f(x)=\dfrac{(3m+1)x+m-m^2}{x+m}$

ដែនកំណត់ $D_f=IR-\{-m\}$

ដេរីវេ ៖

$$f'(x)=\frac{(3m+1)(x+m)-(3m+1)x-m+m^2}{(x+m)^2}$$

$$=\frac{(3m+1)x+3m^2+m-(3m+1)x-m+m^2}{(x+m)^2}$$

$$=\frac{4m^2}{(x+m)^2}>0\ \forall x\in D_f\ ;\ m\neq 0$$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍កើនលើដែនកំណត់ D_f ។

ខ/កំណត់សមីការបន្ទាត់នឹងមួយដែលប៉ះ (H_m) ជានិច្ចគ្រប់ m ៖

តាង $(d): y = ax + b$ ជាបន្ទាត់ដែលត្រូវរក ។

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង (d) និង (H_m)

$$\frac{(3m+1)x + m - m^2}{x+m} = ax + b$$

$$(x+m)(ax+b) = (3m+1)x + m - m^2$$

$$ax^2 + (am+b)x + bm = (3m+1)x + m - m^2$$

$$ax^2 + (am - 3m + b - 1)x + (bm - m + m^2) = 0 \quad (1)$$

ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ (d) ប៉ះនឹង (H_m) លុះត្រាតែសមីការ(1)មានឫស

ឌុបចំពោះគ្រប់តម្លៃ m ពោលគឺ $\Delta = 0$ គ្រប់ m ។

$$\Delta = (am - 3m + b - 1)^2 - 4a(bm - m + m^2)$$

$$= (a^2 - 10a + 9)m^2 - 2(a+3)(b-1)m + (b-1)^2$$

$\forall m \in IR : \Delta = 0$ សមមូល $\begin{cases} a^2 - 10a + 9 = 0 \\ (a+3)(b-1) = 0 \\ (b-1)^2 = 0 \end{cases}$

គេទាញបាន $a=1, b=1$ ឬ $a=9 , b=1$ ។

ដូចនេះ $(d_1): y=x+1$ និង $(d_2): y=9x+1$ ។

II-គេមានអនុគមន៍ $g(x)=2\cos^2 x-\cos x+1$ ដែល $x\in IR$

ក/កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $g(x)$

គេមាន $g(x)=2\cos^2 x-\cos x+1$

$$=(\sqrt{2}\cos x-\frac{1}{2\sqrt{2}})^2+\frac{7}{8}$$

ដើម្បីឲ្យ $g(x)$ មានតម្លៃតូចបំផុតលុះត្រាតែ ៖

$\sqrt{2}\cos x-\frac{1}{2\sqrt{2}}=0$ ឬ $\cos x=\frac{1}{4}$ ។

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃ $g(x)$គឺ $g_{min}(x)=\frac{7}{8}$,

ខ/គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

គេមាន $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} g(\frac{x}{2^k})$ ដោយ $2\cos^2 x-1=\cos 2x$

នោះ $g(x)=2\cos^2 x-1-\cos x=\cos 2x-\cos x$

គេបាន $S_n = \sum_{k=0}^{n} (\cos\frac{x}{2^{k-1}} - \cos\frac{x}{2^k}) = \cos 2x - \cos\frac{x}{2^n}$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (\cos 2x - \cos\frac{x}{2^n}) = \cos 2x - 1 = -2\sin^2 x$

III-គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty} (n I_n)$

គេមាន $I_n = \int_0^1 \frac{t^{3n}}{1+t^3}.dt$ ដែល $n = 0, 1, 2, ...$

គេបាន $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}.dt$

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{3n} + t^{3n+3}}{1+t^3}.dt = \int_0^1 t^{3n}.dt = \left[\frac{t^{3n+1}}{3n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{3n+1}$$

$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{3n+1}$ (1) និង $I_{n-1} + I_n = \frac{1}{3n-2}$ (2)

គ្រប់ $t \in [0, 1]$ គេមាន $t^{3n} \ge t^{3n+3}$ នាំឲ្យ $\frac{t^{3n}}{1+t^3} \ge \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}$

គេទាញ $\int_0^1 \frac{t^{3n}}{1+t^3}dt \geq \int_0^1 \frac{t^{3n+3}}{1+t^3}.dt$ ឬ $I_n \geq I_{n+1}$ គ្រប់ $n = 0,1,2,...$

នាំឲ្យ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។ តាមលក្ខណះនៃស្វ៊ីតចុះគេបាន ៖

$I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$ នាំឲ្យ $\frac{I_{n+1}+I_n}{2} \leq I_n \leq \frac{I_n + I_{n-1}}{2}$ (3)

យកទំនាក់ទំនង(1)និង(2)ជំនួសក្នុង(3)គេបាន ៖

$\frac{1}{6n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{6n-4}$ នាំឲ្យ $\frac{n}{6n+2} \leq nI_n \leq \frac{n}{6n-4}$

ដោយ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{6n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{6n-4} = \frac{1}{6}$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} (n I_n) = \frac{1}{6}$ ។

IV-ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ៖

ក/ $z^2 - 4z + 7 - 4i = 0$

$(z-2)^2 - (1+2i)^2 = 0$ នាំឲ្យ $z_1 = 3+2i$, $z_2 = 1-2i$ ។

ខ/ $(1+i)z^2 - 2(1+3i)z + 1 + 5i = 0$

ដោយ $a+b+c=0$ គេទាញឫស $z_1=1$, $z_2=\frac{1+5i}{1+i}=3+2i$

ដូចនេះ $z_1=1$; $z_2=3+2i$ ។

វិញ្ញាសាទី១៩

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^n\frac{dx}{8x^2+6x+1}$ ដែល $n>0$

គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកលីមីត $\lim_{n\to+\infty} I_n$ ។

II-គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{\tan\frac{x}{2}}{\cos x}$ ដែល $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ ។

ក/ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីបាន ៖

$f(x)=\frac{a}{\sin 2x}+\frac{b}{\sin x}$ គ្រប់ $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ ។

ខ/តាង $S_n=\sum_{k=0}^{n}2^k f(\frac{x}{2^k})$ ។ គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

III-គេឲ្យសមីការ $(E): x^3+px+q=0$

ក/កំណត់ពីរចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឲ្យ $x=1+2i$ ជាឫសនៃ (E) ។

ខ/ចំពោះតម្លៃ p និង q ដែលបានរកឃើញខាងលើចូរដោះស្រាយ (E)

IV-គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ ៖

$$f(x)=\frac{(2m+1)x^2-(m^2-1)x+4}{x}$$ មានក្រាបតំនាង (c_m)

(m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ និង $m\neq-\frac{1}{2}$) ។

ក/កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (c_m) ។

ខ/កំណត់សមីការប៉ារ៉ាបូលនឹង (P) មួយដែលប៉ះនឹងអាស៊ីមតូត

ទ្រេតនៃក្រាប (c_m) ជានិច្ចគ្រប់ m ។ ចូរសង់ (P) ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

គេមាន $I_n=\int_0^n \frac{dx}{8x^2+6x+1}$ ដែល $n>0$

តាង $f(x)=\frac{1}{8x^2+6x+1}=\frac{1}{(2x+1)(4x+1)}$

សរសេរ $f(x)$ ជារាងកាណូនិច $f(x)=\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{4x+1}$

គេបាន $\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{4x+1}=\frac{1}{8x^2+6x+1}$

នាំឲ្យ $a(4x+1)+b(2x+1)=1$

ឬ $(4a+2b)x+(a+b)=1$

គេទាញ $\begin{cases}4a+2b=0\\ a+b=1\end{cases}$ នាំឲ្យ $a=-1\ ,\ b=2$

គេបាន $f(x)=-\frac{1}{2x+1}+\frac{2}{4x+1}$

$$I_n=\int_0^n f(x).dx=\int_0^n\left(\frac{2}{4x+1}-\frac{1}{2x+1}\right).dx$$

$$=\int_0^n \frac{2dx}{4x+1}-\int_0^n \frac{dx}{2x+1}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|4x+1|\right]_0^n-\frac{1}{2}\left[\ln|2x+1|\right]_0^n$$

$$=\frac{1}{2}\ln(4n+1)-\frac{1}{2}\ln(2n+1)=\ln\sqrt{\frac{4n+1}{2n+1}}$$

ដូចនេះ $I_n=\ln\sqrt{\frac{4n+1}{2n+1}}$ និង $\lim_{n\to\infty} I_n=\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt{\frac{4n+1}{2n+1}}=\ln\sqrt{2}$ ។

II-គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{\tan\frac{x}{2}}{\cos x}$ ដែល $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ ។

ក/កំណត់ពីរចំនួនពិត **a** និង **b** ៖

គេមាន $f(x)=\frac{a}{\sin 2x}+\frac{b}{\sin x}$ គ្រប់ $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

គេបាន $\frac{a}{\sin 2x}+\frac{b}{\sin x}=\frac{\tan\frac{x}{2}}{\cos x}$

$$\frac{a+2b\cos x}{2\sin x\cos x}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}=\frac{4\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin x\cos x}=\frac{2(1-\cos x)}{2\sin x\cos x}$$

គេទាញបាន $a+b\cos x=2-2\cos x$ នាំឲ្យ $a=2\ ,\ b=-1$ ។

ដូចនេះ $a=2\ ,\ b=-1$ ។

ខ/ គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

គេមាន $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}f(\frac{x}{2^k})$ ដោយ $f(x)=\frac{2}{\sin 2x}-\frac{1}{\sin x}$

គេបាន $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(\frac{1}{2^{k-1}\sin\frac{x}{2^{k-1}}}-\frac{1}{2^k\sin\frac{x}{2^k}})$

$$=\frac{2}{\sin 2x}-\frac{1}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{\sin 2x}-\frac{1}{2^n\sin\frac{x}{2^n}})=\frac{2}{\sin 2x}-\frac{1}{x}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{2x-\sin 2x}{x\sin 2x}$ ។

III-គេឲ្យសមីការ $(E):x^3+px+q=0$

ក/កំណត់ពីរចំនួនពិត p និង q

ដើម្បីឲ្យ $x=1+2i$ ជាឬសនៃ (E) លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

គេបាន $(1+2i)^3+p(1+2i)+q=0$

$$1+6i-12-8i+p+2ip+q=0$$
$$(-11+p+q)+i(2p-2)=0$$

គេទាញ $\begin{cases}2p-2=0\\-11+p+q=0\end{cases}$ នាំឲ្យ $p=1\ ,\ q=10$

ដូចនេះ $p=1\ ,\ q=10$ ។

ខ/ ដោះស្រាយសមីការ (E)

ចំពោះ $p=1\ ,\ q=10$ គេបាន $x^3+x+10=0$

គេអាចសរសេរ $x^3+2x^2-2x^2-4x+5x+10=0$

$$x^2(x+2)-2x(x+2)+5(x+2)=0$$
$$(x+2)(x^2-2x+5)=0$$

-បើ $x+2=0$ នោះ $x=-2$

-បើ $x^2-2x+5=0$, $\Delta'=1-5=-4=(2i)^2$

គេទាញឬស $x_1=1-2i$; $x_2=1+2i$ ។

សរុបមកសមីការមានឬសបី $x \in \{-2 , 1-2i , 1+2i \}$ ។

IV-ក/កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (c_m)

គេមាន $f(x) = \dfrac{(2m+1)x^2 - (m^2-1)x + 4}{x}$

គេបាន $f(x) = (2m+1)x - m^2 + 1 + \dfrac{4}{x}$ ដោយ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{x} = 0$

ដូចនេះបន្ទាត់ $(d): y = (2m+1)x - m^2 + 1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

របស់ខ្សែកោង (c_m) តាង f ។

ខ/កំណត់សមីការប៉ារ៉ាបូលនឹង (P) ៖

តាង $(p): y = ax^2 + bx + c$ ជាប៉ារ៉ាបូលនឹងដែលត្រូវរក ។

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង (P) និង (d) ៖

$$ax^2 + bx + c = (2m+1)x - m^2 + 1$$
$$ax^2 + (b-2m-1)x + m^2 + c - 1 = 0 \quad (1)$$

ដើម្បីឲ្យ (d) ប៉ះនឹង (P) ជានិច្ចគ្រប់ m លុះត្រាតែសមីការ (1)

មានឬសឌុបជានិច្ចគ្រប់ m ពោលគឺគេត្រូវឲ្យ $\Delta = 0$ គ្រប់ m ។

គេមាន $\Delta = (b-2m-1)^2 - 4a(m^2+c-1)$

$$\Delta = (b-1)^2 - 4m(b-1) + 4m^2 - 4am^2 - 4ac + 4a$$

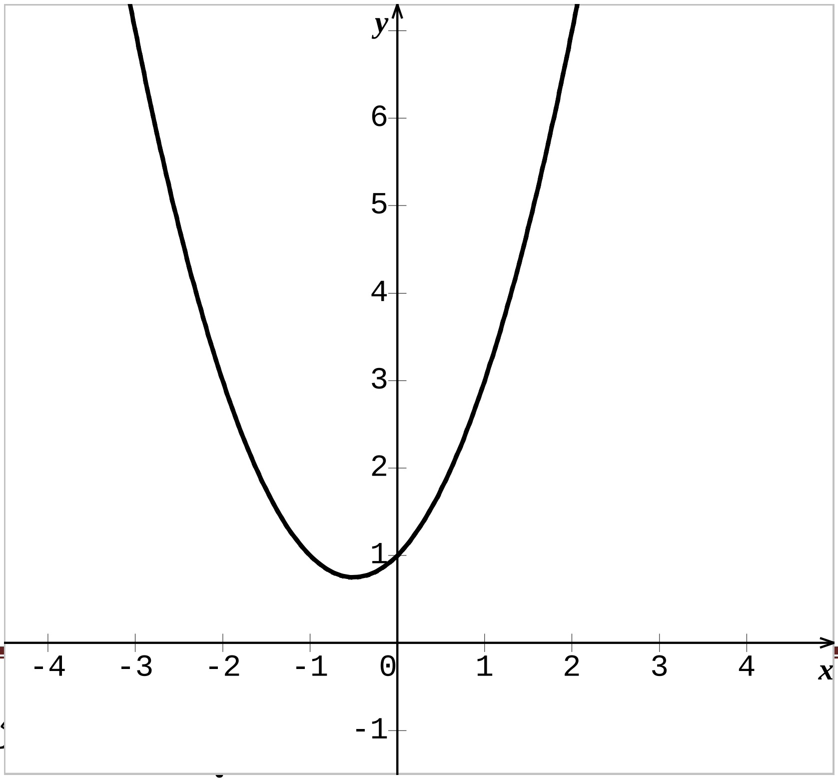
$$\Delta = (4-4a)m^2 - 4(b-1)m + [(b-1)^2 - 4ac + 4a]$$

ដើម្បីឲ្យ $\Delta = 0$ គ្រប់ m លុះត្រាតែ $\begin{cases} 4-4a=0 \\ b-1=0 \\ (b-1)^2-4ac+4a=0 \end{cases}$

គេទាញបាន $a=1$, $b=1$, $c=1$ ។

ដូចនេះ $(P): y = x^2 + x + 1$ ជាប៉ារ៉ាបូលដែលត្រូវរក ។

សង់ប៉ារ៉ាបូល $(P): y = x^2 + x + 1$



វិញ្ញាសាទី២០

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឲ្យអាំងតេក្រាល $I_{\alpha}=\int_{0}^{\sqrt{\alpha}} x^3e^{-x^2}.dx$ ដែល $\alpha>0$ ។

គណនា I_{α} ជាអនុគមន៍នៃ α រួចគណនា $\lim_{\alpha\to+\infty} I_{\alpha}$ ។

II-គេឲ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (t_n) កំណត់ដោយ ៖

$t_0=\frac{1}{7}$ និងទំនាក់ទំនងកំណើន $t_{n+1}=\frac{\sqrt[3]{t_n}}{\sqrt[3]{1+t_n}-\sqrt[3]{t_n}}$

ដែល $n=0\,,1\,,2,...$ ។

ក/តាង $u_n=\ln(1+\frac{1}{t_n})$ ។ ស្រាយថា (u_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រ ។

ខ/គណនាតួ u_n និង t_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

III-រកតម្លៃ x ដើម្បីឲ្យ $y = \cos 2x - 4\cos^2\frac{x}{2} + 1$ មានតម្លៃអប្បបរមា

រួចកំណត់តម្លៃអប្បបរមានោះ ។

IV-គេឲ្យប៉ារ៉ាបូល $(P): y = x^2 - 4x + 5$

ក/កំណត់កូអរដោនេនៃកំពូល និង កំណុំរបស់ (P) រួចសង់ (P)

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ។

ខ/គេគូសបន្ទាត់ (d) មួយមានមេគុណប្រាប់ទិស m ចេញពី

ចំណុចនឹង I មួយ ។ បន្ទាត់(d)កាត់ (P) បានពីរចំណុច A និង B ។

កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចនឹង I ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ប៉ះ (P) ត្រង់

ចំណុច A និង B កែងនឹងគ្នាជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ m ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនា I_α ជាអនុគមន៍នៃ α រួចគណនា $\lim_{\alpha \to +\infty} I_\alpha$

គេមាន $I_\alpha = \int_0^{\sqrt{\alpha}} x^3 e^{-x^2}.dx$ ដែល $\alpha > 0$

តាង $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = xe^{-x^2}dx \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} du = 2x.dx \\ v = -\frac{1}{2}e^{-x^2} \end{cases}$

គេបាន $I_\alpha = \left[-\frac{x^2}{2}e^{-x^2}\right]_0^{\sqrt{\alpha}} + \int_0^{\sqrt{\alpha}} xe^{-x^2}.dx$

$$= -\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha} - \left[\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{\sqrt{\alpha}}$$

$$= -\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha} - (\frac{1}{2}e^{-\alpha} - \frac{1}{2})$$

ដូចនេះ $I_\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\alpha+1}{2}e^{-\alpha}$ និង $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I_\alpha = \frac{1}{2}$ ។

II-ក/ស្រាយថា (u_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រ

សម្មតិកម្ម $t_0 = \frac{1}{7}$ និង $t_{n+1} = \frac{\sqrt[3]{t_n}}{\sqrt[3]{1+t_n} - \sqrt[3]{t_n}}$

គេមាន $u_n = \ln(1 + \frac{1}{t_n})$ នាំឲ្យ $u_{n+1} = \ln(1 + \frac{1}{t_{n+1}})$

ដោយ $t_{n+1}=\dfrac{\sqrt[3]{t_n}}{\sqrt[3]{1+t_n}-\sqrt[3]{t_n}}$ នោះគេបាន ៖

$$u_{n+1}=\ln\left(1+\frac{\sqrt[3]{1+t_n}-\sqrt[3]{t_n}}{\sqrt[3]{t_n}}\right)=\ln\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{t_n}}\right)=\frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{t_n}\right)$$

គេបាន $u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n$ នាំឲ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង

$q=\dfrac{1}{3}$ និងតួ $u_0=\ln\left(1+\dfrac{1}{t_0}\right)=\ln 8$ ។

ខ/គណនាតួ u_n និង t_n ជាអនុគមន៍នៃn ៖

តាមរូបមន្ត $u_n=u_0\times q^n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\ln 8$

ហើយ $u_n=\ln\left(1+\dfrac{1}{t_n}\right)=\dfrac{1}{3^n}\ln 8$

គេទាញ $1+\dfrac{1}{t_n}=8^{\frac{1}{3^n}}$ នាំឲ្យ $t_n=\dfrac{1}{8^{\frac{1}{3^n}}-1}$ ។

ដូចនេះ $u_n=\dfrac{1}{3^n}\ln 8$ និង $t_n=\dfrac{1}{8^{\frac{1}{3^n}}-1}$ ។

III-រកតម្លៃ x

គេមាន $y = \cos 2x - 4\cos^2 \frac{x}{2} + 1$

$= 2\cos^2 x - 1 - 2(1 + \cos x) + 1$

$y = 2\cos^2 x - 2\cos x - 2$

$y = \frac{1}{2}(2\cos x - 1)^2 - \frac{3}{2}$

ដើម្បីឲ្យ y មានតម្លៃតូចបំផុតលុះត្រាតែ $2\cos x - 1 = 0$

គេបាន $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ នាំឲ្យ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \; ; k \in Z$

ដូចនេះ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \; ; k \in Z$ និង $y_{min} = -\frac{3}{2}$ ។

IV-គេឲ្យប៉ារ៉ាបូល $(P) : y = x^2 - 4x + 5$

ក/កំណត់កូអរដោនេនៃកំពូល និង កំណុំរបស់ (P) ៖

គេមាន $y = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$ ឬ $(x-2)^2 = y - 1$ ។

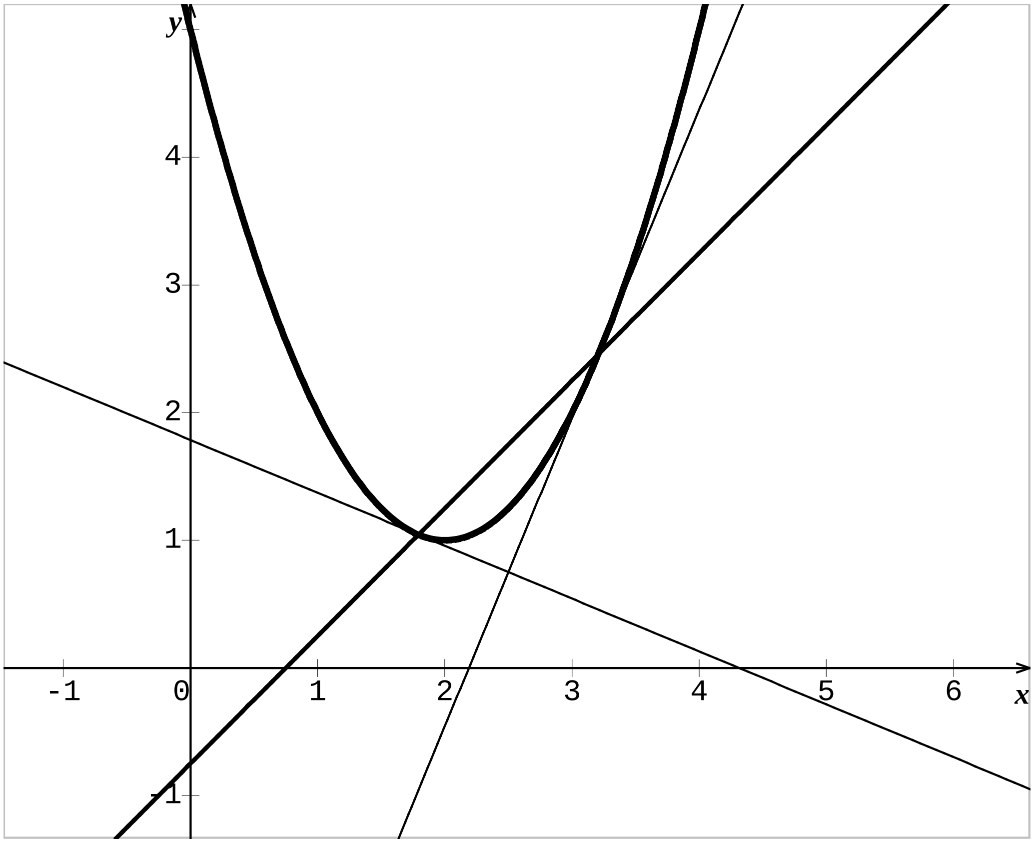
ដោយប្រៀបធៀបជាមួយសមីការ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

គេទាញ $h = 2$, $p = \frac{1}{4}$, $k = 1$ ។

ដូចនេះកូអរដោនេកំពូល $S(h,k) = S(2,1)$

និងកំណុំ $F(h,k+p) = F(2;\frac{5}{4})$ ។

ខ/កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចនឹង I ៖



តាង $I(\alpha,\beta)$ ជាចំណុចនឹងដែលត្រូវរក ។

សមីការបន្ទាត់ $(d): y = m(x-\alpha)+\beta$

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង (d) និង (P) ៖

$x^2 - 4x + 5 = mx - m\alpha + \beta$ ឬ $x^2 - (m+4)x + m\alpha - \beta + 5 = 0$ (1)

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ (P) ត្រង់ A និង B គឺ ៖

$y'_A = 2x_A - 4$ និង $y'_B = 2x_B - 4$ ។

ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ប៉ះ (P) ត្រង់ចំណុច A និង B កែងនឹងគ្នាជានិច្ច

គ្រប់តម្លៃ m លុះត្រាតែ $y'_A . y'_B = -1$ គ្រប់ m ។

គេបាន $(2x_A - 4)(2x_B - 4) = -1$

$$4x_A x_B - 8(x_A + x_B) + 17 = 0 \quad (1)$$

ដោយ x_A និង x_B ជាឫសនៃសមីការ (1) នោះតាមទ្រឹស្តីបទវៀែត

គេបាន $\begin{cases} x_A + x_B = m + 4 & (2) \\ x_A x_B = m\alpha - \beta + 5 & (3) \end{cases}$

យក (2) និង (3) ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$4(m\alpha-\beta+5)-8(m+4)+7=0$$

$$(4\alpha-8)m=4\beta+5$$

សមីការនេះផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់ m លុះត្រាតែ $\begin{cases}4\alpha-8=0\\4\beta+5=0\end{cases}$

គេទាញ $\alpha=2\ ;\ \beta=-\frac{5}{4}$ ។ ដូចនេះ $I(2\ ,-\frac{5}{4})$ ។

វិញ្ញាសាទី២១

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2}\tan\frac{\pi x}{2x+1}$

II-គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos 3x}$ ដែល $0<x<\frac{\pi}{6}$

ក/ចូរស្រាយថា $f(x)=\frac{1}{4}(\frac{1}{\cos 3x}-\frac{1}{\cos x})$ គ្រប់ $0<x<\frac{\pi}{6}$ ។

ខ/គណនា $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}f(\frac{x}{3^k})$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ។

III-គេមានអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+x+1}.dx$ ដែល $n=0,1,2,...$

ក/ស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ រួចគណនា $I_n + I_{n+1} + I_{n+2}$ ។

ខ/គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(nI_n)$ ។

IV-គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$(E): y'' + y = (4x^2 + 8x + 2)e^{2x}$ និង $(F): y'' + y = 0$

ក/កំណត់ចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឲ្យ $y_1 = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ/ស្រាយថា $y = y_1 + y_2$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

លុះត្រាតែ y_2 ជាចម្លើយរបស់សមីការ (F) ។

គ/ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយរបស់ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

I-គណនាលីមីត ៖

តាង $L=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2}\tan\frac{\pi x}{2x+1}$

គេមាន $\frac{\pi x}{2x+1}=a+\frac{b}{2x+1}=\frac{2ax+a+b}{2x+1}$

គេទាញ $\begin{cases}2a=\pi\\ a+b=0\end{cases}$ នាំឲ្យ $a=\frac{\pi}{2}\ ;b=-\frac{\pi}{2}$

គេបាន $\frac{\pi x}{2x+1}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2(2x+1)}$ នោះ $\tan\frac{\pi x}{2x+1}=\cot\frac{\pi}{2(2x+1)}$

$L=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2}\cot\frac{\pi}{2(2x+1)}$ តាង $u=\frac{1}{2x+1}$ នោះ $x=\frac{1-u}{2u}$ ។

កាលណា $x\to\infty$ នោះ $u\to 0$ ។

គេបាន $L=\lim\limits_{u\to0}\frac{4u^2}{(1-u)^2u}\cot\frac{\pi u}{2}=\lim\limits_{u\to0}\frac{4u\cos\frac{\pi u}{2}}{(1-u)^2\sin\frac{\pi u}{2}}$

$$=\lim_{u\to0}\frac{4\cos\frac{\pi u}{2}}{(1-u)^2}\times\frac{\frac{\pi u}{2}}{\sin\frac{\pi u}{2}}\times\frac{2}{\pi}=\frac{8}{\pi}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2}\tan\frac{\pi x}{2x+1}=\frac{8}{\pi}$ ។

II-ក/ ស្រាយថា $f(x)=\frac{1}{4}(\frac{1}{\cos 3x}-\frac{1}{\cos x})$ គ្រប់ $0<x<\frac{\pi}{6}$

គេមាន $f(x)=\frac{\sin^2 x}{\cos 3x}$ ដែល $0<x<\frac{\pi}{6}$

គេបាន $f(x)=\frac{1-\cos^2 x}{\cos 3x}=\frac{1}{4}.\frac{1-(4\cos^2 x-3)}{\cos 3x}$

ដោយ $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x=\cos x(4\cos^2 x-3)$

គេបាន $f(x)=\frac{1}{4}(\frac{1}{\cos 3x}-\frac{4\cos^2 x-3}{\cos 3x})=\frac{1}{4}(\frac{1}{\cos 3x}-\frac{1}{\cos x})$

ដូចនេះ $f(x)=\frac{1}{4}(\frac{1}{\cos 3x}-\frac{1}{\cos x})$ គ្រប់ $0<x<\frac{\pi}{6}$ ។

ខ/គណនា $S_n=\sum_{k=0}^{n} f(\frac{x}{3^k})$ និង $\lim_{n\to+\infty} S_n$

គេបាន $S_n=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{\cos\frac{x}{3^{k-1}}}-\frac{1}{\cos\frac{x}{3^k}})=\frac{1}{4}(\frac{1}{\cos 3x}-\frac{1}{\cos\frac{x}{3^n}})$

ហើយ $\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{1}{4}(\frac{1}{\cos 3x}-1)=\frac{\sin^2\frac{3x}{2}}{2\cos 3x}$ ។

III-ក/ស្រាយថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ

គេមាន $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+x+1}.dx$ និង $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+x+1}.dx$

ចំពោះគ្រប់ $x \in [0,1]$ និង $n \in IN$ គេមាន $x^n \ge x^{n+1}$

នាំឲ្យ $\frac{x^n}{x^2+x+1} \ge \frac{x^{n+1}}{x^2+x+1}$ នោះ $I_n \ge I_{n+1}$ ។

ដូចនេះ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

គណនា $I_n + I_{n+1} + I_{n+2}$ ៖

គេបាន $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1} + x^{n+2}}{x^2+x+1}.dx$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(1+x+x^2)}{x^2+x+1}.dx$$

$$= \int_0^1 x^n.dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ ។

ខ/គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(nI_n)$ ៖

គេមាន $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ (1)

គេបាន $I_{n-2} + I_{n-1} + I_n = \dfrac{1}{n-1}$ (2) គ្រប់ $n \ge 2$ ។

ដោយ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះនោះចំពោះគ្រប់ $n \ge 2$ គេមាន

$$I_{n+2} \le I_{n+1} \le I_n \le I_{n-1} \le I_{n-2}$$

នាំឲ្យ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} \le 3I_n \le I_{n-2} + I_{n-1} + I_n$ (3)

តាម (1) , (2) និង (3) គេទាញបាន ៖

$\dfrac{1}{n+1} \le 3I_n \le \dfrac{1}{n-1}$ នាំឲ្យ $\dfrac{n}{3(n+1)} \le n I_n \le \dfrac{n}{3(n-1)}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{3(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{3(n-1)} = \dfrac{1}{3}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty}(nI_n) = \dfrac{1}{3}$ ។

IV-គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$(E): y''+y=(4x^2+8x+2)e^{2x}$ និង $(F): y''+y=0$

ក/កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឲ្យ $y_1=(ax^2+bx+c)e^{2x}$

ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ/ស្រាយថា $y=y_1+y_2$ ជាចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E)

លុះត្រាតែ y_2 ជាចម្លើយរបស់សមីការ (F) ។

គ/ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយរបស់ (E) ។

វិញ្ញាសាទី២២

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំណត់ដោយ៖

$$\begin{cases} u_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ v_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{និង} \quad \begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{u_n-v_n}{\sqrt{2}} \\ v_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{ដែល } n\geq 1$$

ក. គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_n=u_n+i.v_n$ ។

ចូរស្រាយថា (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច រួចគណនា z_n

ជាអនុគមន៍នៃ n ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

II-គណនាផលបូក $S=\sum_{i=0}^{101}\frac{x_i^3}{1-3x_i+3x_i^2}$

ដែល $x_i=\frac{i}{101}\ ; i=1,2,3,\dots 101$ ។

III-គេឲ្យ $a\ge 1$ និង $b\ge 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\le 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}$

IV-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^3+3x^2-3x+1}{3x^2-3x+1}$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$f\left(\frac{1+a+b}{2}\right)\ \ge\ f\left(\frac{1+a+b+a}{2+a+b}\right)$$ ។

V-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ និង មានដេរីវេលើ IR ដែលចំពោះគ្រប់

$x, y \in IR$ គេមានទំនាក់ទំនង $f(\frac{x+y}{2}) = \sqrt{f(x)f(y)}$ និង $f(x) > 0$ ។

ចូរកំណត់អនុគមន៍ $y = f(x)$.

ដំណោះស្រាយ

I-ក. ស្រាយថា (z_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចៈ

គេមាន $z_n = u_n + i.v_n$

គេបាន $z_{n+1} = u_{n+1} + i.v_{n+1}$

$$= \frac{u_n - v_n}{\sqrt{2}} + i.\frac{u_n + v_n}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}(u_n + i v_n) = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{1} z_n$$

ដូចនេះ (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច ។

គណនា z_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

គេបាន $z_n = z_1 \times q^{n-1}$

តែ $z_1 = u_1 + i v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$

និង $q=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4}$

គេបាន $z_n=(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^n$

ដូចនេះ $z_n=\cos\frac{n\pi}{4}+i.\sin\frac{n\pi}{4}$ (រូបមន្តដឺម័រ)

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $z_n=u_n+i.v_n$

ដោយ $z_n=\cos\frac{n\pi}{4}+i.\sin\frac{n\pi}{4}$

ដូចនេះ $u_n=\cos\frac{n\pi}{4}$ និង $v_n=\sin\frac{n\pi}{4}$ ។

II-គណនាផលបូក $S=\sum_{i=0}^{101}\frac{x_i^{\,3}}{1-3x_i+3x_i^{\,2}}$

យើងមាន $1-3x+3x^2=x^3+(1-x)^3=x^3-(x-1)^3$

តាង $f(x)=\frac{x^3}{1-3x+3x^2}=\frac{x^3}{x^3+(1-x)^3}$

គេបាន $f(x_i)=\dfrac{x_i^{\,3}}{x_i^{\,3}+(1-x_i)^3}$

ហើយ $f(1-x_i)=\dfrac{(1-x_i)^3}{(1-x_i)^3+x_i^{\,3}}$

គេបាន $f(x_i)+f(1-x_i)=\dfrac{x_i^{\,3}}{x_i^{\,3}+(1-x_i)^3}+\dfrac{(1-x_i)^3}{(1-x_i)^3+x_i^{\,3}}=1$

គេទាញ $f(x_i)=1-f(1-x_i)$

ដោយ $x_i=\dfrac{i}{10}$ នោះ $1-x_i=1-\dfrac{i}{10}=\dfrac{10-i}{10}$

គេបាន $S=\sum_{i=0}^{10} f(x_i)=\sum_{i=0}^{10} f\left(\dfrac{i}{10}\right)=\sum_{i=0}^{10}\left[1-f\left(\dfrac{10-i}{10}\right)\right]$

$$S=11-\sum_{i=0}^{10} f\left(\dfrac{10-i}{10}\right)=11-S$$

គេទាញ $S=\dfrac{102}{2}=5$ (ព្រោះ $\sum_{i=0}^{10} f\left(\dfrac{i}{10}\right)=\sum_{i=0}^{10} f\left(\dfrac{10-i}{10}\right)$)

III-បង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\le 2\sqrt{\log_2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}$

យើងមាន $a+b\ge 2\sqrt{a.b}$ (វិសមភាព AM-GM)

ឬ $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{a.b}$

នាំឲ្យ $\log_2(\frac{a+b}{2}) \ge \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$

ឬ $\log_2 a + \log_2 b \le 2\log_2(\frac{a+b}{2}) \quad (1)$

ម៉្យាងទៀតគេមាន ៖

$$\log_2 a + \log_2 b \ge 2\sqrt{\log_2 a}.\sqrt{\log_2 b}$$

$$2(\log_2 a + \log_2 b) \ge \log_2 a + 2\sqrt{\log_2 a}.\sqrt{\log_2 b} + \log_2 b$$

$$2(\log_2 a + \log_2 b) \ge (\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b})^2$$

$$\log_2 a + \log_2 b \ge \frac{1}{2}(\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b})^2 \quad (2)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) យើងទាញ៖

$$\frac{1}{2}(\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b})^2 \le 2\log_2(\frac{a+b}{2})$$

$$(\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b})^2 \le 4\log_2(\frac{a+b}{2})$$

$$\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \le 2\sqrt{\log_2(\frac{a+b}{2})}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\le 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}}$ ។

IV-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f\left(\frac{1+a+b}{2}\right)\ \ge\ f\left(\frac{1+a+b+a}{2+a+b}\right)$

យើងមាន $f(x)=\frac{x^3+3x^2-3x+1}{3x^2-3x+1}$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x-3)(3x^2-3x+1)-(6x-3)(x^3+3x^2-3x+1)}{(3x^2-3x+1)^2}$$

$$=\frac{3x^4-6x^3+3x^2}{(3x^2-3x+1)^2}=\frac{3x^2(x-1)^2}{(3x^2-3x+1)^2}\ \ge 0\ ,\ \forall x\in IR$$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនលើ IR ។

ម៉្យាងទៀតយើងសន្មតថា $\frac{1+a+b}{2}\ge\frac{1+a+b+a}{2+a+b}$

គេបាន $\frac{2}{1+a+b}\le\frac{2+a+b}{1+a+b+a}$

$$\frac{2}{1+a+b}\ \le\frac{(1+a)+(1+b)}{(1+a)(1+b)}$$

$$\frac{2}{1+a+b}\le\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$$

ដោយ $\dfrac{1}{1+a+b} \le \dfrac{1}{1+a}$ និង $\dfrac{1}{1+a+b} \le \dfrac{1}{1+b}$

គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ។

គេទាញ $\dfrac{2}{1+a+b} \le \dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b}$

នាំឲ្យការសន្មត $\dfrac{1+a+b}{2} \ge \dfrac{1+a+b+a}{2+a+b}$ ពិត។

ដូចនេះតាមលក្ខណៈអនុគមន៍កើនគេទាញបាន ៖

$f\left(\dfrac{1+a+b}{2}\right) \ge f\left(\dfrac{1+a+b+a}{2+a+b}\right)$ ។

V-កំណត់អនុគមន៍ $y=f(x)$

គេមានទំនាក់ទំនង $f(\frac{x+y}{2})=\sqrt{f(x)f(y)}$

ដោយ $f(x)>0$ នោះ $f(y)>0$ និង $f(\frac{x+y}{2})>0$

តាងអនុគមន៍ $g(x)=\ln f(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$

គេបាន $g(\frac{x+y}{2})=\ln\left[f(\frac{x+y}{2})\right]$ ដោយ $f(\frac{x+y}{2})=\sqrt{f(x)f(y)}$

ហេតុនេះ $g(\frac{x+y}{2}) = \ln\left[\sqrt{f(x)f(y)}\right] = \frac{1}{2}\left[\ln f(x) + \ln f(y)\right]$

ឬ $g(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}\left[g(x) + g(y)\right]$

ធ្វើដេរីវេធៀបនឹង x ក្នុងសមភាព $g(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}\left[g(x) + g(y)\right]$

ដោយចាត់ទុក y ជាអថេរមិនអាស្រ័យនឹង x គេបាន ៈ

$\frac{1}{2}g'(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}g'(x)$ ឬ $g'(\frac{x+y}{2}) = g'(x)$

យក $x = 0$ គេបាន $g'(\frac{y}{2}) = g'(0)$

ធ្វើអាំងតេក្រាល $\int g'(\frac{y}{2})dy = \int g'(0)dy = g'(0)y + k$

តាង $z = \frac{y}{2}$ នោះ $dy = 2dz$

គេបាន $2\int g'(z)dz = g'(0)y + k$

$$2g(z) = g'(0)y + k \text{ ឬ } g(z) = \frac{1}{2}g'(0)y + \frac{k}{2} = g'(0)z + \frac{k}{2}$$

យក $a = g'(0)$ និង $b = \frac{k}{2}$ គេបាន $g(z) = az + b$

ឬ $g(x)=ax+b$ ដោយ $g(x)=\ln f(x)$

គេបាន $\ln f(x)=ax+b$ នាំឱ្យ $f(x)=e^{ax+b}$

ដូចនេះ $f(x)=e^{ax+b}$ ដែល $a,b\in IR$ ។

វិញ្ញាសាទី២៣

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-គេកំណត់ចំនួន $a_0,a_1,a_2,...a_n$ ដូចខាងក្រោម៖

$$a_0=\frac{1}{2};a_{k+1}=a_k+\frac{{a_k}^2}{n}\quad (n>1,k=0,1,2,...n-1)$$

ចូរបង្ហាញថា $1-\frac{1}{n}<a_n<1$ ។

II-គណនាផលគុណខាងក្រោម៖

$$P_n=\prod_{k=0}^{n}\left(\tan^{2^k}\frac{x}{2^k}\right)=\tan x\cdot\tan^2\frac{x}{2}\cdot\tan^4\frac{x}{4}\ldots\tan^{2^n}\frac{x}{2^n}$$

III-ដោះស្រាយសមីការ

$$\log_3(2^x+1)+\frac{6}{\log_3(2^x+1)}=1+2\sqrt{\log_3(2^x+1)+\frac{8}{\log_3^2(2^x+1)}}$$

IV-គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើចន្លោះ $[0,1]$ ដោយដឹងថា៖

$f(0)=f(1)=1$ និង $|f(a)-f(b)|<|a-b|$ ចំពោះគ្រប់ $a\neq b$

ក្នុងចន្លោះ $[0,1]$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-បង្ហាញថា $1-\frac{1}{n}<a_n<1$

គេមាន $a_{k+1}=a_k+\frac{{a_k}^2}{n}=\frac{a_k(n+a_k)}{n}$

គេបាន $\frac{1}{a_{k+1}}=\frac{n}{a_k(a_k+n)}=\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_k+n}$

ឬ $\frac{1}{a_k+n}=\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}$

ហេតុនេះ $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a_k+n}=\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}})=\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}=2-\frac{1}{a_n}$ (

គេមាន $a_0=\frac{1}{2}>0$ ពិត ។ ឧបមាថា $a_k>0$ ពិត

តាម $a_{k+1}=a_k+\frac{{a_k}^2}{n}$ គេទាញបាន $a_{k+1}>0$ ពិត

ដូចនេះ $a_k>0$ នោះ $a_k+n>n$ ឬ $\frac{1}{a_k+n}<\frac{1}{n}$ $,\forall n>1$

គេបាន $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a_k+n}<\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n}}_{(n)}=\frac{n}{n}=1$

តាម (*) គេទាញបាន $2-\frac{1}{a_n}<1$ នាំឱ្យ $a_n<1$ (i)

ម៉្យាងទៀតដោយ $a_n<1$ នោះ $a_k<1$ ឬ $a_k+n<n+1$

ឬ $\frac{1}{a_k + n} > \frac{1}{n+1}$ គ្រប់ $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ ។

គេបាន $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k + n} > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

ដោយពិនិត្យឃើញថាគ្រប់ $n > 1$ គេមាន $\frac{n}{n+1} - \frac{n-2}{n-1} = \frac{2}{n^2 - 1} > 0$

នោះគេទាញបាន $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k + n} > \frac{n}{n+1} > \frac{n-2}{n-1}$

តាម (*) គេទាញបាន $2 - \frac{1}{a_n} > \frac{n-2}{n-1}$

ឬ $\frac{1}{a_n} < 2 - \frac{n-2}{n-1} = \frac{n}{n-1}$ នោះ $a_n > \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ (ii)

តាម (i) & (ii) គេទាញបាន $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$ ។

ដូចនេះ $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$ ។

II-គណនាផលគុណ $P_n = \prod_{k=0}^{n} \left(\tan^{2^k} \frac{x}{2^k} \right)$

គេមាន $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{2\sin^2 a}{2\sin a \cos a} = \frac{2\sin^2 a}{\sin 2a}$

យក $a=\frac{x}{2^k}$ គេបាន $\tan\frac{x}{2^k}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2^k}}{\sin\frac{2x}{2^k}}$

គេទាញ $P_n=\prod_{k=0}^{n}\left(2^{2^k}.\frac{\sin^{2^{k+1}}\frac{x}{2^k}}{\sin^{2^k}\frac{2x}{2^k}}\right)=2^{2^{n+1}-1}.\frac{\sin^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}{\sin 2x}$

ដូចនេះ $P_n=2^{(2^{n+1}-1)}.\frac{\sin^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}{\sin 2x}$ ។

III-ដោះស្រាយសមីការ

$$\log_3(2^x+1)+\frac{6}{\log_3(2^x+1)}=1+2\sqrt{\log_3(2^x+1)+\frac{8}{\log_3^2(2^x+1)}}$$

តាង $t=\log_3(2^x+1)$ សមីការអាចសរសេរ ៖

$t+\frac{6}{t}=1+2\sqrt{t+\frac{8}{t^2}}$ ឬ $\frac{t^2-t+6}{t}=2\sqrt{\frac{(t+2)(t^2-2t+4)}{t^2}}$

ឬ $\frac{t^2-t+6}{t}=2\sqrt{\frac{t+2}{t}.\frac{t^2-2t+4}{t}}$ (1)

តាង $u=\frac{t+2}{t}$ និង $v=\frac{t^2-2t+4}{t}$ គេបាន $u+v=\frac{t^2-t+6}{t}$

សមីការ អាចសរសេរ (1)$u+v=2\sqrt{uv}\Leftrightarrow(\sqrt{u}-\sqrt{v})^2=0$

គេទាញ $u=v$ ឬ $\frac{t+2}{t}=\frac{t^2-2t+4}{t}$) $t\neq 0$)

ឬ $t+2=t^2-2t+4$

ឬ $t^2-3t+2=0$ មានឬស $t_1=1\,;\,t_2=2$ ។

ចំពោះ-$t=1\Rightarrow \log_3(2^x+1)=1$

$$\Rightarrow 2^x+1=3$$
$$\Rightarrow \quad 2^x=2$$
$$\Rightarrow \quad x=1$$

ចំពោះ-$t=2\Rightarrow \log_3(2^x+1)=2$

$$\Rightarrow 2^x+1=9$$
$$\Rightarrow \quad 2^x=8$$
$$\Rightarrow \quad x=3$$

ដូចនេះសមីការមានឬស $x_1=1\,,\,x_2=3$ ។

បង្ហាញថា $|f(a)-f(b)|<\frac{1}{2}$

-ករណីទី១៖

ចំពោះ $|a-b|\le\frac{1}{2}$ នោះគេបាន $|f(a)-f(b)|<|a-b|\le\frac{1}{2}$ ពិត

-ករណីទី២ ៖

ចំពោះ $|a-b|>\frac{1}{2}$នោះតាមលក្ខណៈឆ្លុះគេអាចសន្មតថា $a>b$

គេមាន $|f(a)-f(b)|=|f(a)-f(1)+f(0)-f(b)|$

តាមវិសមភាពត្រីកោណគេបាន៖

$|f(a)-f(b)|\le|f(a)-f(1)|+|f(0)-f(b)|$

$|f(a)-f(b)|<|a-1|+|0-b|=1-a+b=1-(a-b)<\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $|f(a)-f(b)|<\frac{1}{2}$ ។

វិញ្ញាសាទី២៤

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases} xy + x + y = 11 \\ x^2y^2 + x^2 + y^2 = 49 \end{cases}$$ ដែល $x \in IR$, $y \in IR$ ។

II-ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(a_n)_{n\geq 1}$ កំណត់ដោយ $a_1 = 1$, $a_2 = 3$

និង $a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n \ ,\forall n\in I$

ចូរកំណត់គ្រប់តម្លៃ n ដើម្បីឱ្យ a_n ចែកដាច់នឹង 11 ។

III-ក. ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

ខ. ចូរស្រាយថា $x^2+(x-y)^2 \le 4(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គ្រប់ចំនួន $x,y \in I R$ ។

IV-គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\ln(1+2e^x)$ ដែល x ជាចំនួនពិត ។

គេពិនិត្យស្វ៊ីតពីរ (a_n) និង (b_n) កំណត់ ដោយទំនាក់ទំនង

$a_0=f(0)$, $a_{n+1}=f(a_n)$ និង $b_n=1+e^{a_n}$ គ្រប់ $n=0,1,2,...$

ក/ចូរស្រាយថា (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ/គណនា b_n និង a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

V-គេឱ្យ x,y,z ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2y^2+2y^2+x1=0$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃអនុគមន៍ ៖

$$f(x,y)=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+y(y+\frac{1}{x}+2)$$ ។

ដំណោះស្រាយ

I-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

របៀបទី១

$$\begin{cases} xy+x+y=11 & (1) \\ x^2y^2+x^2+y^2=49 & (2) \end{cases}$$

តាង $s=x+y$ និង $p=xy$

សមីការ (1) ក្លាយជា $p+s=11$ ឬ $s=11-p$ (3)

សមីការ (2) អាចសរសេរ $x^2y^2+(x+y)^2-2xy=49$

ឬ $p^2+s^2-2p=49$ (4)

យកសមីការ (3) ជំនួសក្នុង (4) គេបាន ៖

$$p^2+(11-p)^2-2p=49$$

$$p^2+121-22p+p^2-2p=49$$

$$2p^2-24p+72=0$$

$$2(p-6)^2=0$$

គេទាញឫស $p=6$ ហើយតាម (3) គេបាន $s=11-6=5$

គេបាន $s=5$, $p=6$ នោះ x និង y ជាឫសសមីការ ៖

$X^2-5X+6=0$ នាំឲ្យ $X_1=2$, $X_2=3$

ដូចនេះ $x=2, y=3$ ឬ $x=3$, $y=2$ ។

របៀបទី២

$$\begin{cases} xy + x + y = 11 & (1) \\ x^2y^2 + x^2 + y^2 = 49 & (2) \end{cases}$$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (1) នឹង 10 គេបាន ៖

$$\begin{cases} 10xy + 10x + 10y = 110 & (1) \\ x^2y^2 + x^2 + y^2 = 49 & (2) \end{cases}$$

ធ្វើផលដកសមីការ (2) និង (1) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 - 10xy - 10x - 10y = -61$$
$$(x^2y^2 - 12xy + 36) + (x^2 + y^2 + 25 + 2xy - 10x - 10y) = 0$$
$$(xy - 6)^2 + (x + y - 5)^2 = 0$$

គេទាញ $\begin{cases} (x + y - 5)^2 = 0 \\ (xy - 6)^2 = 0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$

នោះ x និង y ជាឫសសមីការ $X^2 - 5X + 6 = 0$

នាំឲ្យ $X_1 = 2$, $X_2 = 3$ ។

ដូចនេះ $x = 2, y = 3$ ឬ $x = 3$, $y = 2$ ។

II-កំណត់គ្រប់តម្លៃ n ដើម្បីឱ្យ a_n ចែកដាច់នឹង 11

គេមាន $a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n \ ,\forall n \in I$

ឬ $a_{n+2} - a_{n+1} = (n+2)(a_{n+1} - a_n)$

ឬ $\dfrac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = n+2$

គេបាន $\prod_{k=1}^{(n-2)} \left(\dfrac{a_{k+2} - a_{k+1}}{a_{k+1} - a_k} \right) = \prod_{k=1}^{(n-2)} (k+2)$

$$\frac{a_n - a_{n-1}}{a_2 - a_1} = 3.4.5.\ldots n$$ ដោយ $a_2 - a_1 = 2$

គេទាញបាន $a_n - a_{n-1} = n!$

ហើយ $\sum_{k=2}^{n} (a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n} (k!)$

$$a_n - a_1 = 2! + 3! + \ldots + n!$$ ដោយ $a_1 = 1 = 1!$

គេបាន $a_n = 1! + 2! + 3! + \ldots + n!$ ។

-ករណីទី១ ៖ ចំពោះ $n < 11$ គេមាន

$a_1 = 1$

$a_2 = 3$

$a_3 = 1! + 2! + 3! = 9$

$a_4 = 1! + 2! + 3! + 4! = 33 = 3 \times 11$

$a_5 = a_4 + 5! = 153$

$a_6 = a_5 + 6! = 873$

$a_7 = a_6 + 7! = 5913$

$a_8 = a_7 + 8! = 46233 = 4203 \times 11$

$a_9 = a_8 + 9! = 409113$

$a_{10} = a_9 + 10! = 4037913$

គេបាន $n = 4$, $n = 8$ ។

-ករណីទី២ ចំពោះ $n \geq 11$

គេបាន $a_n = a_{10} + \sum_{k=11}^{n}(k!)$

ដោយ $\sum_{k=11}^{n}(k!)$ ចែកដាច់នឹង 11 ហើយ a_{10} ចែកមិនដាច់នឹង 11

នោះចំពោះ $n \geq 11$ គេបាន a_n ចែកមិនដាច់នឹង 11 ។

ដូចនេះតម្លៃ n ដែលធ្វើឱ្យ a_n ចែកដាច់នឹង 11 មានតែពីរគត់គឺ ៗ

$n = 4$ ឬ $n = 8$ ។

III-ក. គណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\frac{\pi}{10}$ និង $\cos\frac{\pi}{10}$

គេមាន $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}$

គេបាន $\sin\frac{2\pi}{10} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

តាមរូបមន្តត្រីកោណមាត្រ ៖

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$ និង $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10} = \cos\frac{3\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10} = 3\cos\frac{\pi}{10} - 4\cos^3\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10} = 3 - 4\cos^2\frac{\pi}{10}$$

$$2\sin\frac{\pi}{10} = 3 - 4\left(1 - \sin^2\frac{\pi}{10}\right)$$

ឬ $4\sin^2\frac{\pi}{10} + 2\sin\frac{\pi}{10} - 1 = 0$ តាង $t = \sin\frac{\pi}{10} > 0$

គេបាន $4t^2 - 2t - 1 = 0$, $\Delta' = 1 + 4 = 5 > 0$

គេទាញឫស $t_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$ (មិនយក) , $t_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

ដូចនេះ $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ។

ដោយ $\sin^2\frac{\pi}{10} + \cos^2\frac{\pi}{10} = 1$

នាំឲ្យ $\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{1 - (\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$ ។

ខ. ស្រាយថា $x^2 + (x-y)^2 \le 4(x^2 + y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

តាងអនុគមន៍ $f(x;y) = x^2 + (x-y)^2 - 4(x^2 + y^2)\sin^2\frac{\pi}{10}$

គេបាន ៖

$$f(x;y) = x^2 + x^2 - 2xy + y^2 - 4(x^2 + y^2)(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2$$

$$= 2x^2 - 2xy + y^2 - 4(x^2+y^2)\frac{6+2\sqrt{5}}{16}$$

$$= 2x^2 - 2xy + y^2 - (x^2+y^2)\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{1-\sqrt{5}}{2}x^2 - 2xy - \frac{1+\sqrt{5}}{2}y^2$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}x^2 + 2xy + \frac{\sqrt{5}+1}{2}y^2\right)$$

$$= -\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\,x + \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\,y\right)^2 \le 0 \ , \forall x,y \in IR$$

ដូចនេះ $x^2 + (x-y)^2 \le 4(x^2+y^2)s\ {}^2\frac{\pi}{1}$ ។

IV-ក/ស្រាយថា (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

គេមាន $a_0 = f(0) = \ln 3$ និង $a_{n+1} = \ln(1+2e^{a_n})$

ហើយ $b_n = 1 + e^{a_n}$ នោះ $b_{n+1} = 1 + e^{a_{n+1}}$

$$b_{n+1} = 1 + e^{\ln(1+2e^{a_n})} = 1 + 1 + 2e^{a_n}$$

$$b_{n+1} = 2(1+e^{a_n}) = 2b_n$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង 2 ។

ខ/គណនា b_n និង a_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ដោយ (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$ និងតួទីមួយ

$b_0 = 1 + e^{a_0} = 1 + e^{\ln 3} = 4$ នោះគេបាន ៖

$b_n = b_0 \times q^n = 4 \times 2^n = 2^{n+2}$ ហើយតាម $b_n = 1 + e^{a_n}$

គេទាញ $a_n = \ln(b_n - 1) = \ln(2^{n+2} - 1)$ ។

ដូចនេះ $b_n = 2^{n+2}$, $a_n = \ln(2^{n+2} - 1)$ ។

V-កំណត់តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុត ៖

គេមាន $x^2y^2 + 2y\ ^2 + x1 = 0$

គេបាន $y^2 + 2y + \frac{1}{x^2} = 0$ ឬ $(y+1)^2 + \frac{1}{x^2} = 1$ ដែល $x \neq 0$

តាង $y + 1 = c\ \omega\varphi$ និង $\frac{1}{x} = s\,i\,n\varphi$

នោះ $(y+1)^2+\frac{1}{x^2}=1$ ពិតគ្រប់ φ

គេមាន $f(x,y)=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+y(y+\frac{1}{x}+2)$

$$=2\sin^2\varphi+\sin\varphi+(\cos\varphi-1)(\cos\varphi-1+\sin\varphi+2)$$

$$=2\sin^2\varphi+\sin\varphi+\cos^2\varphi-1+\sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi$$

$$=\sin^2\varphi+\sin\varphi\cos\varphi=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\varphi\right)$$

ដូចនេះ $\min f(x,y)=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ និង $\max=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ។

វិញ្ញាសាទី២៥

សម្រាប់រយៈពេល២ម៉ោង

I-ចូរដោះស្រាយសមីការ $\log_{12}(\sqrt[4]{x}+\sqrt{x})=\frac{1}{2}\log_9 x$

II-គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $x\in IR$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\frac{a+b}{1+a+b}) < f(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b})$

ចំពោះគ្រប់ $a>0, b>0$ ។

III-គេឲ្យ m និង n ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ ជាចំនួនគត់ ។

IV-គេឱ្យ $a\,;b\,;c\,;d$ និង x ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$\frac{\sin x}{a}=\frac{\sin 2x}{b}=\frac{\sin 3x}{c}=\frac{\sin 4x}{d}$$ ដែល $x \neq k\pi \;;\; k \in Z$

ចូរបង្ហាញថា $a^3(4b^2-d^2)=b^4(3a-c)$

ដំណោះស្រាយ

I-ចូរដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\log_{12}(\sqrt[4]{x}+\sqrt{x})=\frac{1}{2}\log_9 x \quad (1)$$

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} x>0 \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt{x}>0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $x>0$

តាង $t=\frac{1}{2}\log_9 x$ នោះ $x=9^{2t}$ (2)

តាម (1) គេបាន $\log_{12}(\sqrt[4]{x}+\sqrt{x})=t$

នាំឲ្យ $\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}=12^t$ (3)

យកសមីការ (2) ជំនួសក្នុង (3) គេបាន $3^t+9^t=12^t$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 12^t គេបាន $(\frac{1}{4})^t+(\frac{3}{4})^t=1$ (4)

-ចំពោះ $t=1$ យកជំនួសក្នុងសមីការ (4) គេបាន $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

នោះ $t=1$ ជាឫសនៃសមីការ (4) ។

-ចំពោះ $t>1$ គេបាន $(\frac{1}{4})^t+(\frac{3}{4})^t<\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

នោះ (4) គ្មានឫសចំពោះ $t>1$ ។

-ចំពោះ $t<1$ គេបាន $(\frac{1}{4})^t+(\frac{3}{4})^t>\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

នោះ (4) គ្មានឫសចំពោះ $t>1$ ។

សរុបមកសមីការ (4) មានឫសតែមួយគត់គឺ $t=1$ ។

ចំពោះ $t=1$ តាម (2) គេបាន $x=9^2=81$ ។

យក $x=81$ ទៅជំនួសក្នុងសមីការ (1) គេបាន ៖

$$\log_{12}(\sqrt[4]{81}+\sqrt{81})=\frac{1}{2}\log_9 81$$

$\log_{12}12=\log_9 9$ ពិត

ដូចនេះសមីការមានឫស $x=81$ ។

II-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\frac{a+b}{1+a+b})<f(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b})$

យើងមាន $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $x\in IR$

យើងបាន $f'(x)=\frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2})}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ដោយ $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0\ ,\ \forall x\in IR$

ដូចនេះអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ IR ។

ម្យ៉ាងទៀតចំពោះគ្រប់ $a>0,b>0$ គេមាន ៖

$\frac{a}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}$ និង $\frac{b}{1+a+b}<\frac{b}{1+b}$

គេទាញ $\frac{a}{1+a+b}+\frac{b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$

ឬ $\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$

ដោយសារតែអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ IR

ហេតុនេះតាមលក្ខណះអនុគមន៍កើនគេបាន ៖

$\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$ នោះ $f(\frac{a+b}{1+a+b})<f(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b})$

ដូចនេះ $f(\frac{a+b}{1+a+b})<f(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b})$

ចំពោះគ្រប់ $a>0,b>0$ ។

III-តាង $f(m,n)=\dfrac{(2m)!\,(2n)!}{m!n!(m+n)!}$

-ចំពោះ $n=0$ គេបាន $f(m,0)=\dfrac{(2m)!}{(m!)^2}=C_{2m}^{m}$ ជាចំនួនគត់គ្រប់

ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន m ។

-យើងមាន $f(m+1,n)=\dfrac{(2m+2)!(2n)!}{(m+1)!n!(m+n+1)!}$

$$=\frac{(2m)!(2n)!(2m+1)(2m+2)}{(m!)(m+1).n!(m+n)!(m+n+1)}$$

$$=\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}\cdot\frac{4m+2}{m+n+1}$$

$$=\frac{4m+2}{m+n+1}f(m,n)$$

ស្រាយដូចគ្នា $f(m,n+1)=\dfrac{4n+2}{m+n+1}f(m,n)$

គេបាន $f(m+1,n)+f(m,n+1)=4f(m,n)$

គេទាញ $f(m,n+1)=4f(m,n)-f(m+1,n)\ \ (*)$,

យើងនឹងស្រាយតាមកំណើនតាមn ថា$f(m,n)$ ជាចំនួនគត់ ។

ចំពោះ $\mathbf{n=0}$ គេបាន $\mathbf{f(m,0)=C_{2m}^{m}}$ ជាចំនួនគត់

ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{m\in IN\cup\{0\}}$ (សម្រាយខាងលើ)។

ឧបមាថា $\mathbf{f(m,n)}$ ជាចំនួនគត់គ្រប់ $\mathbf{n\in IN\cup\{0\}}$

យើងនឹងស្រាយថា$\mathbf{f(m+1,n)}$ ជាចំនួនគត់ដែរ ។

តាម **(*)** គេទាញបាន $\mathbf{f(m,n+1)}$ ជាចំនួនគត់ដែរព្រោះ $\mathbf{f(m,n)}$

និង $\mathbf{f(m+1,n)}$ ជាចំនួនគត់ ។

ដូចនេះ $\mathbf{\dfrac{(2m)!\,(2n)!}{m!n!(m+n)!}}$ ជាចំនួនគត់ ។

IV-បង្ហាញថា $\mathbf{a^3(4b^2-d^2)=b^4(3a-c)}$

តាង $\mathbf{\dfrac{\sin x}{a}=\dfrac{\sin 2x}{b}=\dfrac{\sin 3x}{c}=\dfrac{\sin 4x}{d}=t}$

គេទាញ $\begin{cases} \sin x = at \\ \sin 2x = bt \\ \sin 3x = ct \\ \sin 4x = dt \end{cases}$

គេមាន $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$

$$\sin^2 4x = 4\sin^2 2x\cos^2 2x$$

$$\sin^2 4x = 4\sin^2 2x(1-\sin^2 2x)$$

$$d^2t^2 \quad = 4b^2t^2(1-b^2t^2)$$

គេទាញ $t^2 = \frac{1}{b^2}\left(1-\frac{d^2}{4b^2}\right) \quad (1)$

ម៉្យាងទៀត $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$$\sin 3x = \sin x(3-4\sin^2 x)$$

$$ct = at(3-4a^2t^2)$$

គេទាញ $t^2 = \frac{1}{4a^2}(3-\frac{c}{a}) \quad (2)$

ផ្ទឹម (1) និង (2) គេបាន ៖

$$\frac{1}{b^2}\left(1-\frac{d^2}{4b^2}\right)=\frac{1}{4a^2}\left(3-\frac{c}{a}\right)$$

$$\frac{4b^2-d^2}{4b^4}=\frac{3a-c}{4a^3}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង a^3b^4 គេបាន $a^3(4b^2-d^2)=b^4(3a-c)$

ដូចនេះ $a^3(4b^2-d^2)=b^4(3a-c)$ ។

ꕥꕥꕥ❄ꕤꕤꕤ