រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន

បរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា និង ពាណិជ្ជកម្ម

ពិភពស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត

សម្រាប់ថ្នាក់ទី ១១ និង សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា

$$\sin u_1 + \sin u_2 + \ldots + \sin u_n = \frac{\sin \frac{nd}{2} . \sin \frac{u_1 + u_n}{2}}{\sin \frac{d}{2}}$$

អ្នកសហការណ៍ត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក **លឹម ឆុន**

លោក **សែន ពិសិដ្ឋ**

លោក **និត្យ ម៉េង**

លោកស្រី **ឱុយ រីណា**

លោក **ព្រឹម សុខនិត**

លោក **ផល ប៊ុនឆាយ**

អ្នករចនាក្រប និង បច្ចេកទេសកំព្យូទ័រ

កញ្ញា **លី គុណ្ណាកា**

អ្នកត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក **លឹម មិត្តសិរ**

អារម្ភកថា

សៀវភៅ **ពិតពស្មឺតចំនួនពិត** ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់នៅក្នុងដៃនេះ ខ្ញុំបាទបានខិតខំស្រាវជ្រាវ និង និពន្ធឡើងក្នុងគោលបំណងទុកជាឯកសារស្រាវជ្រាវសម្រាប់អ្នកសិក្សាដែលមានបំណងចង់ចេះ ចង់ដឹងអំពីស្មុីតនៃចំនួនពិតឱ្យកាន់តែច្បាស់ ។ នៅក្នុងសៀវភៅ នេះបានប្រមូលផ្តុំនូវប្រធានលំហាត់ស្មុីតចំនួនពិតយ៉ាងច្រើន និងមានលក្ខណះខុសប្លែកៗគ្នា ។ ប្រធានលំហាត់នីមួយៗខ្ញុំបាទបានខិតខំជ្រើសរើសយ៉ាងសម្រិតសម្រាំងបំផុតព្រមទាំងធ្វើដំណោះស្រាយយ៉ាងក្បោះក្បាយដែលអាចឱ្យអ្នកសិក្សាងាយយល់និងឆាប់ចងចាំអំពីវិធីសាស្ត្រធ្វើដំណោះស្រាយលំហាត់នីមួយៗ ។ ប៉ុន្តែទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ កង្វះខាតបច្ចេកទេស គរុកោសល្យ និងកំហុសអក្ខរាវិរុទ្ធ ប្រាកដជាកើតមានឡើងដោយអចេតនាជាពុំខានឡើយ ។ អាស្រ័យហេតុនេះ ខ្ញុំបាទជាអ្នកនិពន្ធ រង់ចាំទទួលនូវមតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីសំណាក់អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដោយក្តីសោមនស្សរីករាយជានិច្ចដើម្បីកែលំអសៀវភៅនេះឱ្យកាន់តែមានសុក្រិត្យភាពថែមទៀត ។

ខ្ញុំបាទជាអ្នកនិពន្ធសង្ឃឹមថាសៀវភៅ **ពិតពស្មឺតចំនួនពិត** នឹងនាំលោកអ្នកឆ្ពោះទៅរកជ័យជំនះក្នុងការសិក្សា និង ការប្រឡងប្រជែងនានាជាពុំខានឡើយ

សូមឱ្យអ្នកសិក្សាទាំងអស់មានសុខភាពល្អមានប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និងមានសំណាងល្អក្នុងឆាកជីវិត និង ការសិក្សា !

បាត់ដំបងថ្ងៃទី ១៨ ខែ កុម្ភះ ឆ្នាំ ២០០៨

អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាវជ្រាវ លឹម ផល្គុន

សង្ខេបមេរៀនស្វីតចំនួនពិត

I. ស្វីតនៃចំនួនពិត

១.សញ្ញាណស្វីត

ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតគឺជាអនុគមន៍លេខដែលកំនត់ពីសំណុំ IN ទៅសំណុំ IR ។

គេកំនត់សរសេរស្វ៊ីតមួយដោយ (U_n) ឬ $(U_n)_{n\in IN}$ ដែល $U_n = f(n)$ ។

២.អថេរភាពនៃស្វីត

ក-ស្វ៊ីតកើន

គេថាស្វ៊ីត (U_n) ជាស្វ៊ីតកើនលើ IN កាលណាគ្រប់ $n \in IN$ គេមាន $U_{n+1} > U_n$

ខ-ស្វ៊ីតចុះ

គេថាស្វ៊ីត (U_n) ជាស្វ៊ីតចុះលើ IN កាលណាគ្រប់ $n \in IN$ គេមាន $U_{n+1} < U_n$

គ-ស្វ៊ីតម៉ូណូតូន

គេថាស្វ៊ីត (U_n) ជាស្វ៊ីតម៉ូណូតូនកាលណាវាជាស្វ៊ីតកើនជានិច្ច ឬ ជាស្វ៊ីតចុះជានិច្ច ។

៣.ស្វ៊ីតទាល់

ក-ស្វ៊ីតទាល់លើ

គេថាស្វ៊ីត(U_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើកាលណាមានចំនួនពិត M ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $\forall n \in IN : U_n \le M$ ។

ខ-ស្វ៊ីតទាល់ក្រោម

គេថាស្វ៊ីត (U_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោមកាលណាមានចំនួនពិត m ដែល

ចំពោះ $\forall n \in IN : U_n \ge m$ ។

គ-ស្វ៊ីតទាល់

គេថាស្វ៊ីត (U_n) ជាស្វ៊ីតទាល់កាលណាវាជាស្វ៊ីត ទាល់លើផង និងទាល់ក្រោមផង

៤.ស្វ៊ីតខួប

គេថាស្វ៊ីត (U_n) ជាស្វ៊ីតខួបដែលមានខួបស្មើ p កាលណា

ចំពោះ $\forall n \in IN : U_{n+p} = U_n \, , p \in IN^*$ ។

II. ស្វ៊ីតនព្វន្ត

១.និយមន័យ

ស្វ៊ីតនព្វន្តគឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលមានតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទីមួយ) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់បូកនឹងចំនួនថេរមួយ ហៅថាផលសងរួម ។ បើ (U_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម d និងតួទីមួយ U_0 នោះគេបាន : $U_{n+1} = U_n + d \, , \forall n \in IN$ ។

២.តួទី n នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត :

ក. ក្នុងសំណុំ IN តួទី n កំនត់ដោយ $U_n = U_0 + n.d$ ។

ខ. ក្នុងសំណុំ IN* តួទី n កំនត់ដោយ $U_n = U_1 + (n-1).d$ ។

៣.ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

ក. ក្នុងសំណុំ IN ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតកំនត់ដោយ :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = \frac{(n+1)(U_0 + U_n)}{2}$$ ។

ខ. ក្នុងសំណុំ IN* ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតកំនត់ដោយ :

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n = \frac{n(U_1 + U_2)}{2}$$ ។

III. ស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

១.និយមន័យ

ស្វ៊ីតធរណីមាត្រគឺជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលមានតួនីមួយៗ (ក្រៅពីតួទីមួយ) ស្មើនឹងតួមុនបន្ទាប់គុណនឹងចំនួនថេរមួយខុសពីសូន្យ ហៅថារេសុងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។ បើ(U_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ មានរេសុង $q \neq 0$ និងតួទីមួយ U_0 នោះគេបាន :

$U_{n+1} = q.U_n \ , \forall n \in IN$ ។

២.តួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ :

ក. ក្នុងសំណុំ IN តួទី n កំនត់ដោយ $U_n = U_0.q^n$ ។

ខ. ក្នុងសំណុំ IN* តួទី n កំនត់ដោយ $U_n = U_1.q^{n-1}$ ។

៧.ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ក. ក្នុងសំណុំ IN ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតកំនត់ដោយ :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n = U_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \; , q \neq 1 \text{ ។}$$

ខ. ក្នុងសំណុំ IN* ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតកំនត់ដោយ :

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n = U_1 . \frac{1-q^{n}}{1-q} \; , q \neq 1 \text{ ។}$$

កំនត់សំគាល់ និង លក្ខណះ

☞ ក្នុងការគណនាផលបូក ឬ ផលគុណនៃស្វ៊ីតគេអាចកំនត់សញ្ញាមួយសម្រាប់តាងដូចខាងក្រោម :

-ចំពោះផលបូក $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots . + U_n = \sum_{k=o}^{n} (U_k)$ ។

-ចំពោះផលគុណ $P_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times \ldots\ldots \times U_n = \prod_{k-0}^{n} (U_k)$ ។

☞ លក្ខណះនៃផលបូក និង ផលគុណស្វ៊ីត :

ក. $\sum_{k=0}^{n} (\lambda . U_k) = \lambda . \sum_{k=0}^{n} (U_k)$ ខ. $\sum_{k=0}^{n} (U_k + V_k) = \sum_{k=0}^{n} (U_k) + \sum_{k=0}^{n} (V_k)$

គ. $\prod_{k=0}^{n} (\lambda . U_k) = \lambda^{n+1} . \prod_{k=0}^{n} (U_k)$ ឃ. $\prod_{k=0}^{n} (U_k . V_k) = \prod_{k=0}^{n} (U_k) \times \prod_{k=0}^{n} (V_k)$

ង. $\prod_{k=0}^{n} \left(\frac{U_k}{V_k} \right) = \frac{\prod_{k=0}^{n} (U_k)}{\prod_{k=0}^{n} (V_k)} \; , \prod_{k=0}^{n} (V_k) \neq 0$ ។

ប្រធានលំហាត់

១_គេឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតកំនត់លើ IN កំនត់ដោយ ទំនាក់ទំនង ៖

$u_0 = a + \frac{1}{a}$ និង $u_{n+1} = u_n^{\ 2} - 2$ ដែល $a > 1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_n = a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}}$?

២_ គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n)កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 1 + \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} u_n + \frac{1}{1+\sqrt{2}} \end{cases}$

ក_តាង $v_n = u_n - \sqrt{2}$ ។ បង្ហាញថា (v_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ_គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៣_ គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n)កំនត់ដោយ ÷

$u_0 = 5$ និង $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + n + 5$ ($n \in IN$)

ចូរគណនា u_n នៃស្វ៊ីត (u_n)ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៤_ គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n)កំនត់ដោយ ÷

$u_0 = 10$ និង $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + \frac{2}{3} n^2 - 2n + 1$ ($n \in IN$)

ចូរគណនា u_n នៃស្វ៊ីត (u_n)ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៥_ គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n)កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 1$ និង $u_{n+1} = 2u_n + (n+3)3^n$ ($n \in IN$)

ចូរគណនា u_n នៃស្វ៊ីត (u_n)ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៦_ គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n)កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 1$ និង $u_{n+1} = \frac{1}{8}(\frac{1}{4} + 2u_n + \sqrt{1+8u_n})$

ក. តាង $v_n = \sqrt{1+8u_n}$ ។ បង្ហាញថា $v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + 2)$

ខ. បង្ហាញថាស្វ៊ីត $w_n = v_n - 2$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា w_n និង v_nជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. ទាញរកតួ u_n នៃ n រួចគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

៧_ គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n)កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 3$ និង $u_{n+1} = u_n^{\ 3} - 3u_n^{\ 2} + 3u_n$

តាង $v_n = u_n - 1$ ។

បង្ហាញថា $v_{n+1} = v_n^{\ 3}$ រួចគណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៨_ គេមានស្វ៊ីត (u_n)កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{2(2n-1)}{3n(n+1)} \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN^* : v_n = u_n + \frac{2}{n}$ ។ បង្ហាញថា (v_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៩_ គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = \dfrac{11}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{(7n-2).3^{n-1}}{n(n+1)} \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN^* : v_n = u_n - \dfrac{3^n}{n}$ ។ បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១០_ គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \ln(e^{u_n} + 1) \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN^* : v_n = e^{u_n}$ ។ រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (v_n) ។

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១១_ គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2 + u_n}{4 - u_n} \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN^* : v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 2}$ ។ បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១២_ គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{{u_n}^3 - 9u_n + 12}{3{u_n}^2 - 12u_n + 13} \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN : v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 3}$ ។ បង្ហាញថា $v_{n+1} = {v_n}^3$

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១៣_ គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយ ÷

$$\begin{cases} Z_0 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ Z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\,Z_n + |\,Z_n\,|\,)\,;\, n \in IN \end{cases}$$

($|Z_n|$ ជាម៉ូឌុលនៃ Z_n) ។

សន្មតថា $Z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i.\sin\theta_n)$, $\forall n \in IN$

ដែល $\rho_n > 0$, ρ_n ; $\theta_n \in IR$

ក_ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង θ_n និង θ_{n+1} ហើយ ρ_n និង ρ_{n+1} ។

ខ_រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (θ_n) រួចគណនា θ_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ_ចូរបង្ហាញថា $\rho_n = \rho_0 \cos\theta_0 \cos\dfrac{\theta_1}{2}\cos\dfrac{\theta_2}{2}....\cos\dfrac{\theta_{n-1}}{2}$

រួចបញ្ចោក់ ρ_n អនុគមន៍នៃ n ។

១៤_ គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 1\ ,\ u_1 = \dfrac{4}{3} \\ u_{n+2} = \dfrac{4}{3}u_{n+1} - \dfrac{2}{3}u_n \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN : v_n = u_{n+1} - u_n$ ។ បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

រួចគណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. គណនា $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n

រួចគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

គ. ទាញរកតម្លៃនៃ u_n និង $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

១៥_ ក_គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$L_n = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}}-2}{x-2}$$ (មាន n រ៉ាឌីកាល់)

ខ_តាង $S_n = L_1 + L_2 + L_3 + ... + L_n$ ។ ចូរគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

១៦_ គេឲ្យអនុគមន៍ $f_n(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+.....+\sqrt{x+\sqrt{x+2}}}}$

មាន n ឫសការេ ។

ចូរគណនាលីមីត $L_n = \lim\limits_{x\to 2}\frac{f_n(x)-2}{x-2}$

១៧_ គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 2 \\ 2u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n(n+1).2^n} \end{cases}$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១៨_ គេមានស្វ៊ីត (u_n) និង (v_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 3 \ ; \ v_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN : w_n = u_n - v_n$ ។ បង្ហាញថា (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា w_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. បង្ហាញថា $C_n = u_n + v_n$ ជាស្វ៊ីតថេរដែលត្រូវកំនត់។

គ. ទាញរក u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

១៩_ គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(U_n)_{n\in IN}$ ដោយ ៖

$$\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{5U_n^3 - 6U_n^2 + 2}{2U_n^3 - 6U_n + 5} \end{cases}, \forall n \in IN^*$$

ក_គេតាង $V_n = \dfrac{U_n - 2}{2U_n - 1}, \forall n \in IN^*$ ។ ចូរបង្ហាញថា $V_{n+1} = V_n^3$

ខ_គេយក $W_n = \ln V_n \ ,\forall n \in IN^*$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(W_n)_{,n\in IN}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា W_n

ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ_ចូរទាញរក V_n និង U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

២០_ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំនត់លើ IR ដោយ $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x + 6}{3x^2 - 9x + 7}$

ក_ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចបង្ហាញថាគេអាចសរសេរ

$f'(x) = \dfrac{3(x^2 - 3x + 2)^2}{(3x^2 - 9x + 7)^2}$ ។

ខ_តាង α និង β ជាឬសរបស់សមីការ $f'(x) = 0$ ។

គេយក $U_{n+1} = f(U_n)$ និង $V_n = \dfrac{U_n - \alpha}{U_n - \beta}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $V_{n+1} = V_n^3$ រួចទាញរក V_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង x ។

គ_ចូរគណនា $F_n(x) = f_n\left[f\left[........f\left[f(x) \right] ....\right]\right]$

២១_គេឲ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ n ដោយ÷

$U_0 = 1$ និង $\forall n \in IN : U_{n+1} = U_n \cos a + \sin a$ ដែល $0 < a < \frac{\pi}{2}$ ។

ក. តាង $V_n = U_n - \cot\frac{a}{2}$ ។ ចូរបង្ហាញថា (V_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រមួយ

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_0 + V_1 + ... + V_n)$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

២២_ គេឲ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ ÷

$U_0 = 0$; $U_1 = 1$ និង $\forall n \in IN : U_{n+2} = 2U_{n+1}\cos a - U_n$ ដែល $a \in IR$ ។

ក. តាង $Z_n = U_{n+1} - (\cos a - i\sin a)\, U_n \ , \forall n \in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា $Z_{n+1} = (\cos a + i\sin a)\, Z_n$ រួចទាញរក Z_n ជាអនុគមន៍ n និង a ។

ខ. ទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{a\to 0} U_n$ ។

២៣_ គេឲ្យស៊ីត (u_n) នៃចំនួនពិតកំនត់លើ IN^* ដោយ ÷

$u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ។

ក.កំនត់ចំនួនពិត A, B, C ដែល $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{A}{n} + \dfrac{B}{n+1} + \dfrac{C}{n+2}$

ខ. តាង $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

គ. ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ គេតាង $V_n = u_n - \int_n^{n+1} g(x).dx$ ដែល g

ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $g(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$

និងគេតាង $S'_n = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n$ ។

ចូរបង្ហាញថា $S'_n = S_n - \int_1^{n+1} g(x).dx$ ហើយទាញរក S'_n និង $\lim_{n\to+\infty} S'_n$

២៤_ គេឲ្យចំនួន $A = \underbrace{444......444}_{(2n)}$

$B = \underbrace{222.....222}_{(n+1)}$ និង $C = \underbrace{888......888}_{(n)}$

ចូរបង្ហាញថា $S = A + B + C + 7$ ជាការេប្រាកដ ។

២៥_ គេឲ្យចំនួន $A = \underbrace{111.....111}_{(2n \text{ លេខ})}$ និង $B = \underbrace{444.....444}_{(n \text{ លេខ})}$

ចូរបង្ហាញថា $A + B + 1$ ជាការេប្រាកដ ។

២៦_ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំនត់ក្នុងសំណុំ IR ដោយ

$$f(x) = \frac{x^3}{3(x^2 + 3x + 3)}$$

ក_គេពិនិត្យស្វ៊ីត (U_n) កំនត់ដោយ $U_{n+1} = f(U_n)$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $1 + \frac{3}{U_{n+1}} = \left(1 + \frac{3}{U_n}\right)^3$ ។

ខ_គេតាង $F_n(x) = f_n[f\,[......f[f(x)]......]]$

(អនុគមន៍បណ្តាក់លំដាប់ n)

ចូរគណនា $F_n(x)$ ។

គ_សន្មតថា $U_1 = \frac{3}{7}$ និង $V_n = \ln(3 + U_n) - \ln U_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

បង្ហាញថា (V_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្ររួចគណនា V_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ឃ-ទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចបញ្ជាក់តម្លៃ $\lim_{n\to+\infty} U_n$ ។

២៧- គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = x^2 - 2$ ដែល $x \in IR$

ក-គេយក $U_1 = f(x)$ និង $U_{n+1} = f(U_n)$ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ចូរបង្ហាញថា $U_n = f_n[\,f[\ldots\ldots f[f(x)]\ldots\ldots]\,]$ ។

ខ-ស្រាយថាបើ $x > 2$ គេបាន $U_n > 2$ គ្រប់ $n \in IN^*$ ។

គ-គេតាង $V_n = U_n - \sqrt{U_n^{\,2} - 4}$ គ្រប់ $n \in IN^*$ និង $x > 2$ ។

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ចូរបង្ហាញថា $2V_{n+1} = V_n^{\,2}$ ។

ឃ-សន្មតថា $W_n = \ln V_n - \ln 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ចូររកប្រភេទនៃស្វ៊ីត W_n ។

ង-ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកអនុគមន៍ ៖

$F_n(x) = f_n[\,f[\ldots\ldots f[\,f(x)\,]\ldots\ldots]\,]$ ។

២៨- ក-ប្រសិនបើ $p \geq -1$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ចូរបង្ហាញថា ៖

$(1+p)^n \geq 1 + np \quad (1)$ ។

ខ-គេឲ្យ $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ ជា nចំនួនមិនអវិជ្ជមាន ។

គេតាង $A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots. + a_n}{n}$ និង $G_n = \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3\ldots\ldots a_n}$ ។

បង្ហាញថាប្រសិនបើ $G_k \leq A_k$ ហើយ $A_k \neq 0$

គេបាន $G_k^{\ k}.a_{k+1} \le A_k^{\ k+1}(1+p)$ ដែល $p = \dfrac{a_{k+1}}{A_k} - 1$ ។

គ_ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \ge n\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 .... a_n} \text{ ។}$$

២៩_ គេឲ្យ $\dfrac{1-\dfrac{1}{2^3}}{1+\dfrac{1}{2^3}} = \dfrac{2}{3}\left(1+\dfrac{1}{2\times 3}\right)$

$$\frac{1-\dfrac{1}{2^3}}{1+\dfrac{1}{2^3}} \times \frac{1-\dfrac{1}{3^3}}{1+\dfrac{1}{3^3}} = \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3\times 4}\right)$$

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅនិងស្រាយរូបមន្តនោះផង ។

៣០_ គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n)កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - \dfrac{2}{3} \ ; \ n \in IN \end{cases}$

ក. គេតាង $v_n = 1 + u_n$ ។ បង្ហាញថា (v_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n

និង $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

គ. ចូរគណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង

៣១_ គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n)កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{3}{2} \ ; \ n \in IN \end{cases}$

ក. កំនត់ចំនួនពិត k ដើម្បីឲ្យ $v_n = u_n + k$ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។

ខ. ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

៣២_ គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n)កំនត់ដោយ ÷

$u_0 = 5$ និង $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2n + 3$ ($n \in IN$)

ចូរគណនា u_n នៃស្វ៊ីត (u_n)ជាអនុគមន៏នៃ n ។

៣៣_f ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង ÷

$f(0) = f(1) = 1$ និង $f(n+2) = 2f(n+1) - f(n) + 2n + 1$, $\forall n \in IN$

ចូរកំនត់រក $f(n)$ជាអនុគមន៏នៃ n ។

៣៤_ គេឲ្យ $\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{2^2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}} = 2\cos\frac{\pi}{2^3}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^4}$

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅនិងស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនោះផង

៣៥_ គេឲ្យស្វ៊ីត (x_n) កំនត់ដោយ ÷

$x_1 = \frac{4}{3}$ និង $(2n+1)x_n = 2^n + 2nx_{n-1}$, $n = 2;3;4;....$

ចូរស្រាយតាមវិចារដោយកំណើនថា $x_n = \sum_{i=0}^{n}\left[\frac{C(n;i)}{2i+1}\right]$, $n = 1;2;3;...$

៣៦_ ចូរគណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៏ $y = e^x \sin x$

៣៧_ គេឱ្យស្វ៊ីតនៃមួយចំនួន $U_1, U_2, U_3, ..., U_n$ ដែលកំនត់ដោយ :

$U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n = an^2 + bn$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

និង $a \neq 0$, $a, b \in IR$ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

ខ. ចូរគណនាតួទីមួយ U_1 និង ផលសងរួម d ជាអនុគមន៏នៃ a និង b ។

៣៨- គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត $U_1, U_2, U_3, ..., U_n$ ដែលមានផលសងរួម d ហើយ $d \neq 0$ គេពិនិត្យស្វ៊ីត (V_n) មួយកំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ដោយ $V_n = a^{U_n}$, $a > 0$, $a \neq 1$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា V_n ជាអនុគមន៍នៃ a, U_1, d និង n ។

ខ. ចូរស្រាយថា $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n = a^{U_1} . \frac{1-a^{nd}}{1-a^d}$ ។

គ. ចូរគណនាផលគុណ $P_n = V_1 \times V_2 \times V_3 \times ..... \times V_n$ ជាអនុគមន៍នៃ a, U_1 និង n ។

៣៩- គេឱ្យ (U_n) ជាស្វ៊ីតកំនត់ដោយ $U_{n+1} = aU_n + b$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ និង $a \neq 0, a, b \in IR$ ។

ក. ចំពោះ $a = 1$ ចូររកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (U_n) ។

ខ. ចំពោះ $a \neq 1$ គេឧបមាថា $U_n = V_n + k$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

គ. ឧបមាថា $a \neq 1$ ។ ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ a, b និង n និងតួ U_1 ។

៤០- គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n) កំនត់ដោយ

$a_1 = 4$ និង $\forall n \in IN^* : a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2}$

ក. ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ចូរបង្ហាញថា $a_n \neq 3$ ។

ខ. គេយក $b_n = \frac{1}{a_n - 3}$ ។ ចូររកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (b_n) ?

គ. ចូរកំនត់រត្ត b_n និង a_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ឃ. គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k . b_k)$ ។

៤១- គេឱ្យស្វ៊ីត (U_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} U_1 = 5 \\ U_n = 2U_{n-1} - n \quad , \forall n \in IN^* \end{cases}$

ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៏នៃ n រួចទាញរកលីមីត $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{U_n}{2^n}\right)$ ។

៤២- គេឱ្យស្វ៊ីត (U_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n^2 - n + 1 \ , \ \forall n \in IN \end{cases}$

ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៏នៃ n រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{U_n}{n^2}\right)$ ។

៤៣- គេឱ្យស្វ៊ីត (U_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + (n+1)2^n \quad , \forall n \in IN^* \end{cases}$

ក. ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{U_n}{U_{n+1} - U_n}\right]$

៤៤- គេឧបមាថា S_m និង S_n ជាផលបូក m តួដំបូង និង n តួដំបូងរៀងគ្នា

នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ដែល $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}; (m \neq n)$ ។

គេតាង U_m ជាតួទី m និង U_n ជាតួទី n ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{U_m}{U_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$?

៤៥- គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(U_n)_{n\in IN}$ កំនត់ដោយ $\begin{cases} U_0 = \sqrt{5} \\ U_{n+1} = U_n{}^2 - 2 \ , \forall n \in IN \end{cases}$

ក. ចូរស្រាយថា $U_n > 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ខ. គេពិនិត្យស្វ៊ីត $(V_n)_{n\in IN}$ កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង $V_n = U_n + \sqrt{U_n^{\ 2} - 4}$ ។

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង V_{n+1} និង V_n ។

គ. ចូរគណនា V_n រួចទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៤៦- គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត (U) មានតួ $2,7,12,........$ និងស្វ៊ីតនព្វន្ត (V) មានតួ $2,5,8,.....$

តើក្នុងចំណោម 151 តួនៃស្វ៊ីតទាំងពីរនេះ មានប៉ុន្មានតួដែលមានតម្លៃស្មើគ្នា ?

៤៧- គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ :

$U_0 = 2$ និង គ្រប់ $n \in IN : U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 2n - \frac{7}{2}$

ក. បង្ហាញថាគេអាចកំនត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យស្វ៊ីត $(V_n), n \in IN$ កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង $V_n = U_n + an + b$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៤៨- គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ $U_0 = 1$ និង គ្រប់

$n \in IN : 3U_{n+1} = 2U_n + n^2 + 4n + 1$

ក. បង្ហាញថាគេអាចកំនត់បីចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឱ្យស្វ៊ីត $(V_n), n \in IN$ កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង $V_n = U_n + an^2 + bn + c$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៤៩- គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត (U) មានតួ $5 , 9 , 13 , 17......$ និងស្វ៊ីតនព្វន្ត (V) មានតួ $7 , 13 , 19 , 25,....$ ។

ក. តើក្នុងចំណោម 49 តួនៃស៊ីត U មានប៉ុន្មានតួដែលជាការេប្រាកដ ?

ចូរកំនត់រកតម្លៃនៃតួទាំងនោះ ។

ខ. តើក្នុងចំណោម 49 តួនៃស៊ីត V មានប៉ុន្មានតួដែជាការេប្រាកដ ?

ចូរកំនត់រកតម្លៃនៃតួទាំងនោះ ។

គ. តើក្នុងចំណោម 49តួនៃស៊ីតទាំងពីរនេះមានប៉ុន្មានតួដែលមានតម្លៃស្មើគ្នា ?

៥០- គេឱ្យស៊ីត $S_n = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$ ដែល $n \in IN^*$ ។

ក-ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ចូរបង្ហាញថា $S_n = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ ។

ខ-គណនាផលបូក $\Sigma_n = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+.....+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$

៥១- គេឱ្យស៊ីត $U_n = \frac{4n^2+1}{4n^2-1}$ ដែល $n \in IN^*$ ។

ក-ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ចូរបង្ហាញថា $U_n = 1+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$

ខ-ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n}(U_k) = U_1+U_2+U_3+....+U_n$ ។

៥២- គេឱ្យស៊ីត $U_n = \sqrt{1+\frac{1}{(n+\frac{1}{3})^2}+\frac{1}{(n-\frac{2}{3})^2}}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n}(U_k) = U_1+U_2+U_3+....+U_n$ ។

៥៣-គេឱ្យ $(U_n)_{,n\in IN^*}$ ជាស៊ីតនព្វន្តមួយដែលមានតួទាំងអស់វិជ្ជមាន

និងផលសងរួម $d>0$ ។ គេតាង $S_n = \sqrt{\frac{1}{d^2}+\frac{1}{U_n^2}+\frac{1}{U_{n+1}^2}}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $S_1+S_2+S_3+...+S_n = \frac{n}{d}+\frac{1}{U_1}-\frac{1}{U_{n+1}}$ ។

៥៤- គេឱ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (x_n) កំនត់ដោយ ៖

$x_1 = 1$ និង $x_{n+1} - x_n = \dfrac{2}{x_n + \sqrt{2n+1}}$

ក-ចូរស្រាយថាចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ គេមាន $x_n = \sqrt{2n-1}$ ។

ខ-គណនា $S_n = \dfrac{1}{x_1 + \sqrt{3}} + \dfrac{1}{x_2 + \sqrt{5}} + ... + \dfrac{1}{x_n + \sqrt{2n+1}}$ ។

គ. ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\right]$ ។

៥៥- គេមានអនុគមន៍ $f(x) = (x+1).e^{2x}$ ដែល x ជាចំនួនពិត ។

ក. ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ $,f''(x)$ $,f'''(x)$ និង $f^{(4)}(x)$ ។

ខ. ចូរបង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f មានទម្រង់ $f^{(n)}(x) = (a_n x + b_n).e^{2x}$

ដែល (a_n) និង (b_n) ជាស្វីតចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \quad ,\forall n \in IN^* \end{cases}$$

គ. ចូរកំនត់ a_n និង b_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកកន្សោម $f^{(n)}(x)$ ។

៥៦- គេមានអនុគមន៍ $f(x) = e^x.\sin x$

ក. ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ $,f''(x)$ $,f'''(x)$ និង $f^{(4)}(x)$ ។

ខ. ចូរបង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f មានទម្រង់ ៖

$f^{(n)}(x) = (a_n \sin x + b_n \cos x).e^x$ ដែល (a_n) និង (b_n) ជាស្វីតចំនួនពិត

ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \quad , \forall n \in IN^* \end{cases}$

គ. គេតាង $z_n = a_n + i.b_n$ ។

ចូរបង្ហាញថា $z_{n+1} = (1+i).z_n$ រួចសរសេរ z_n ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ឃ. ចូរកំនត់ a_n និង b_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកកន្សោម $f^{(n)}(x)$ ។

៥៧- គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$, $x \neq -1$

ចូរគណនា $F_n(x) = f\left[\ f\ [.....f\ [f(x)].....]\ \right]$ ។

៥៨-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(U_n)_{n\in IN}$ ដោយ ៖

$$U_{n+1} = \frac{7U_n^{\ 3} - 9U_n^{\ 2} + 3U_n}{6U_n^{\ 3} - 6U_n^{\ 2} + 1} \quad \text{និង} \quad U_1 = 2$$

ក_ គេតាង $V_n = \dfrac{U_n - 1}{2U_n - 1}, \forall n \in IN^*$ ។ ចូរបង្ហាញថា $V_{n+1} = V_n^{\ 3}$

ខ_ គេយក $W_n = \ln V_n \ , \forall n \in IN^*$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(W_n)_{,n\in IN}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា W_n

ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ_ ចូរទាញរក V_n និង U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

៥៩- គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} Z_0 = i \\ Z_{n+1} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} Z_n + \dfrac{1-\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}} \ , \ n \in IN \end{cases}$$

ក. គេតាង $\forall n \in IN : U_n = Z_n + 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $U_{n+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} U_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ខ. ចូរសរសេរ U_n ជារាងត្រីកោណមាត្ររួចទាញរក Z_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៦០- គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} U_0 = 0 \ , \ U_1 = 1 \\ U_{n+2} = \sqrt{3}.U_{n+1} - U_n \ , \ \forall n \in IN \end{cases}$

ក. គេតាង $Z_n = U_{n+1} - \frac{\sqrt{3} - i}{2} U_n \ , \forall n \in IN$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $Z_{n+1} = \frac{\sqrt{3} + i}{2} Z_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ខ. ចូរកំនត់រកទំរង់ត្រីកោណមាត្រនៃ Z_n ។

គ. រួចទាញរកតួ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកតម្លៃ U_{2007} ។

៦១- គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយទំនាក់ទំនងខាងក្រោម :

$Z_0 = 0 \ , \ Z_1 = 1$ និង $Z_{n+2} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} Z_{n+1} - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} Z_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ក. គេតាង $\forall n \in IN : U_n = Z_{n+1} - Z_n$ ។ បង្ហាញថា $U_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} U_n$

ខ. គណនា U_n និង $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. ទាញរកចំនួនកុំផ្លិច Z_n ។

៦២- គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{2 - 2U_n + 5U_n^2}{1 + 8U_n - 2U_n^2} \ , \ \forall n \in IN \end{cases}$$

ក. គេតាង $\forall n \in IN : V_n = \dfrac{2U_n - 1}{U_n + 1}$ ។ ចូរបង្ហាញថា $V_{n+1} = V_n^{\,2}$

ខ. គណនា V_n និង U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៦៣- គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង :

$$U_0 = 2 \text{ និង } \forall n \in IN : U_{n+1} = \frac{U_n^3}{4 + 6U_n + 3U_n^2}$$

ក. គេតាង $\forall n \in IN : V_n = \dfrac{U_n}{2 + U_n}$ ។ បង្ហាញថា $V_{n+1} = V_n^3$

ខ.គណនា V_n និង U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៦៤- គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $U_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \ldots.. + \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}$

ក. ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{n \to +\infty}(U_n - \sqrt{n})$ ។

ខ. គេតាង $\forall n \in IN: V_n = \dfrac{1}{(U_{n+2}^2 - U_{n+1})(U_{n+1}^2 - U_n)}$ និង $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(V_k)$ ។

គណនា $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ ។

៦៥- គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ $U_n = \sqrt{2}^{\,n}.\sin\dfrac{n\pi}{4}$ ដែល $n \in IN^*$

ក.ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\dfrac{(n+1)\pi}{4} = \cos\dfrac{n\pi}{4} - \sin\dfrac{n\pi}{4}$

ខ. ទាញឱ្យបានថា $U_n = (\sqrt{2})^n \cos\dfrac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\dfrac{(n+1)\pi}{4}$

គ. គណនាផលបូក $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ldots.. + U_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n

៦៦- ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ គេមាន $x_n + i.y_n = (2 + \sqrt{3} + i)^n$ ដែល $x_n, y_n \in IR$

ក. ចូរកំនត់រក x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. ចូរបង្ហាញថា $x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n = 2^n(\sqrt{3}+1)^{2n}$

និង $x_n x_{n+1} + y_n y_{n+1} = 2^{n-1}(\sqrt{3}+1)^{2n+2}$

៦៧- គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត $U_1, U_2, U_3, ..., U_n$ ដែលមានផលសងរួម d ហើយ $d \neq 0$ ។ គេពិនិត្យស្វ៊ីត (V_n) មួយកំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ដោយ $V_n = a^{U_n}$, $a > 0$, $a \neq 1$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា V_n ជាអនុគមន៍នៃ a, U_1, d និង n ។

ខ. ចូរស្រាយថា $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n = a^{U_1} . \frac{1-a^{nd}}{1-a^d}$ ។

គ. ចូរគណនាផលគុណ $P_n = V_1 \times V_2 \times V_3 \times ..... \times V_n$ ជាអនុគមន៍នៃ a, U_1 និង n

៦៨- គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{31x^2 - 12x - 2}{12x^2 + 8x - 15}$

ក_ ចូររកដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ខ_ គេពិនិត្យស្វ៊ីត (U_n) និង (V_n) កំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ដោយ ៖

$U_1 = f(x), U_{n+1} = f(U_n)$ និង $V_n = \frac{U_n - 2}{4U_n - 1}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $V_{n+1} = V_n^2$ រួចទាញឱ្យបានថា $V_n = V_1^{2^{n-1}}$ ។

គ_ ចូរគណនា $F_n(x) = f_n[f[.......f[f(x)].......]]$

រួចទាញរក $\lim_{n \to +\infty} F_n(1)$ ។

៦៩- គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+.....+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}}}}$

ក_ ចូរកំនត់បណ្តាតម្លៃ $x\in IN$ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃលេខជាចំនួនគត់ ។

ខ_ បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $p\in IN^*$ តម្លៃ $f\left(p^2(p^2-1)\right)$ ជាការប្រាកដ ។

៧០- គេឱ្យសមីការដឺក្រេទីបីអញ្ញាតពិត ៖

$$(E): x^3-mx^2+(m^2-9m-14)x-m^3+30m^2-300m+1000=0$$

ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ក_ ចូរកំនត់តម្លៃរបស់ m ដើម្បីឱ្យសមីការនេះមានឫសបីបង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។

ខ_ ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ចំពោះតម្លៃ m ដែលបានរកឃើញខាងលើ ។

៧១- គេឱ្យសមីការអញ្ញាតពិត ៖

$$(E): x^3-3mx^2+2(3m+4)x+2m^3-6m^2-9m+3=0$$

ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ក_ ចូរកំនត់តម្លៃរបស់ m ដើម្បីឱ្យសមីការនេះមានឫសបីបង្កើត

បានជាស៊ីតនព្វន្តមួយ ។

ខ-ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ចំពោះតម្លៃ m ដែលបានរកឃើញខាងលើ ។

៧២- គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង ៖

$U_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ក-ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ គេមាន $\frac{\sqrt{2}}{2} \le U_n \le 1$ ។

ខ-ចូរបង្ហាញថា $U_n = \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$, $\forall n \in IN^*$ រួចទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

៧៣-គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = -\frac{1}{4} + \sqrt{1+U_n(1+U_n)(2+U_n)(3+U_n)} \end{cases} , \forall n \in IN^*$$

ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៧៤-គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត(U_n) កំនត់លើIN ដោយ ៖

$$\begin{cases} U_0 = \sqrt{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \end{cases} , n \in IN$$

ក,ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ,គណនាផលគុណ $P_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times .... \times U_n$ ។

៧៥_ គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ ៖

$$U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ និង } U_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_n^{\ 2}}}{2}} \ , \forall n \in IN$$

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៧៦_ ក, ចូរស្រាយថា $\dfrac{\tan^3 x}{1-3\tan^2 x} = \dfrac{1}{8}(\tan 3x - 3\tan x)$

ខ, ចូរគណនាផលបូក $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[\frac{3^k \tan^3 \frac{a}{3^k}}{1-3\tan^2 \frac{a}{3^k}} \right]$ ។

✍ ✍ ✍ ✍ ✍

លំហាត់ទី១

គេឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតកំនត់លើ IN កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង

$u_0 = a + \frac{1}{a}$ និង $u_{n+1} = u_n^{\ 2} - 2$ ដែល $a > 1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_n = a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}}$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $u_n = a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}}$

គេមាន $u_0 = a + \frac{1}{a}$ ពិត

$$u_1 = u_0^{\ 2} - 2 = (a + \frac{1}{a})^2 - 2 = a^2 + \frac{1}{a^2} \quad \text{ពិត}$$

$$u_2 = u_1^{\ 2} - 2 = (a^2 + \frac{1}{a^2})^2 - 2 = a^4 + \frac{1}{a^4} \quad \text{ពិត}$$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី p គឺ $u_p = a^{2^p} + \frac{1}{a^{2^p}}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $p+1$ គឺ $u_{p+1} = a^{2^{p+1}} + \frac{1}{a^{2^{p+1}}}$ ពិត

យើងមាន $u_{p+1} = u_p^{\ 2} - 2$ តែតាមការឧបមា $u_p = a^{2^p} + \frac{1}{a^{2^p}}$

យើងបាន $u_{p+1} = (a^{2^p} + \frac{1}{a^{2^p}})^2 - 2$

$$u_{p+1} = a^{2^{p+1}} + 2 + \frac{1}{a^{2^{p+1}}} - 2$$

$u_{p+1} = a^{2^{p+1}} + \frac{1}{a^{2^{p+1}}}$ ពិត។ ដូចនេះ $u_n = a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}}$ ។

លំហាត់ទី២

គេឲ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 1+\sqrt{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}u_n + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} \end{cases}$

ក_តាង $v_n = u_n - \sqrt{2}$ ។ បង្ហាញថា (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ_គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក_បង្ហាញថា (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ៖

យើងមាន $v_n = u_n - \sqrt{2}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \sqrt{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}u_n + \frac{1}{1+\sqrt{2}} - \sqrt{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}u_n + \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_n - \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ។

ខ_គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n$ ដោយ $v_0 = u_0 - \sqrt{2} = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 1$

ដូចនេះ $v_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ ហើយ $v_n = u_n - \sqrt{2}$ នាំឲ្យ $u_n = \sqrt{2} + v_n$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = \sqrt{2} + (\dfrac{\sqrt{2}}{2})^n}$ ។

លំហាត់ទី៣

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 5$ និង $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n + 5 \quad (n \in IN)$

ចូរគណនា u_n នៃស្វ៊ីត (u_n) ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n នៃស្វ៊ីត (u_n) ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងតាង $u_n = v_n + an + b$ ដែល $a , b \in IR$

យើងបាន $u_{n+1} = v_{n+1} + an + a + b$ ដោយ $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n + 5$

គេបាន $v_{n+1} + an + a + b = \frac{1}{2}(v_n + an + b) + n + 5$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \left[(-\frac{1}{2}a + 1)n + (5 - a - \frac{1}{2}b) \right] \quad (*)$$

បើ $\begin{cases} -\frac{1}{2}a + 1 - 0 \\ 5 - a - \frac{1}{2}b = 0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $a = 2 \ ; b = 3$

ទំនាក់ទំនង $(*)$ ទៅជា $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ នាំឲ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន

រេសុង $q = \frac{1}{2}$ តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n$ ដោយ $u_n = v_n + an + b = v_n + 2n + 6$

ចំពោះ $n = 0$ គេបាន $u_0 = v_0 + 6$ នាំឲ្យ $v_0 = u_0 - 6 = 5 - 6 = -1$ ។

គេបាន $v_n = -1 \times \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2^n}$ ។ ដូចនេះ $\boxed{u_n = -\frac{1}{2^n} + 2n + 6}$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0=10$ និង $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{2}{3}n^2-2n+1$ ($n\in IN$)

ចូរគណនា u_n នៃស្វ៊ីត (u_n) ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n នៃស្វ៊ីត (u_n) ជាអនុគមន៏នៃ n

យើងតាង $u_n=v_n+an^2+bn+c$ ដែល $a\,,\,b,c\in IR$

យើងបាន $u_{n+1}=v_{n+1}+an^2+(2a+b)n+a+b+c$

ដោយ $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+\frac{2}{3}n^2-2n+1$ គេបាន

$$v_{n+1}+an^2+(2a+b)n+a+b+c=\frac{1}{3}(v_n+an^2+bn+c)+\frac{2}{3}n^2-2n+1$$

$$v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n+\left[(-\frac{2}{3}a+\frac{2}{3})n^2+(-2-2a-\frac{2}{3}b)n+1-a+b-\frac{2}{3}c\right]\ (*)$$

បើ $\begin{cases}-\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}=0\\ -2-2a-\frac{2}{3}b=0\\ 1-a+b-\frac{2}{3}c=0\end{cases}$ នាំឲ្យ $a=1\ ;\ b=-6\ ;\ c=9$

ទំនាក់ទំនង (*) ទៅជា $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$

នាំឲ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=\frac{1}{3}$

តាមរូបមន្ត $v_n=v_0\times q^n$ ដោយ $u_n=v_n+an^2+bn+c=v_n+n^2-6n+9$

ចំពោះ $n=0$ គេបាន $u_0=v_0+9$ នាំឲ្យ $v_0=u_0-9=10-9=1$

គេបាន $v_n=\frac{1}{3^n}$ ។ ដូចនេះ $\boxed{u_n=\frac{1}{3^n}+(n-3)^2}$ ។

លំហាត់ទី៥

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0=1$ និង $u_{n+1}=2u_n+(n+3)3^n$ ($n\in IN$)

ចូរគណនា u_n នៃស្វ៊ីត (u_n) ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n នៃស្វ៊ីត (u_n) ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងតាង $u_n=v_n+(an+b).3^n$ ដែល $a\,,\,b\in IR$

យើងបាន $u_{n+1}=v_{n+1}+(an+a+b)3^{n+1}$ ដោយ $u_{n+1}=2u_n+(n+3)3^n$

គេបាន $v_{n+1}+(an+a+b)3^{n+1}=2\left[v_n+(an+b)3^n\right]+(n+3)3^n$

$$v_{n+1}=2v_n+\left[(1-a)n+(3-3a-b)\right].3^n \quad (*)$$

បើ $\begin{cases} a-1=0 \\ 3-3a-b=0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $a=1\,;\,b=0$

ទំនាក់ទំនង $(*)$ ទៅជា $v_{n+1}=2v_n$

នាំឲ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=2$

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n$ ដោយ $u_n = v_n + (an+b)3^n = v_n + n.3^n$

ចំពោះ $n=0$ គេបាន $u_0 = v_0 = 1$ គេបាន $v_n = 2^n$ ។

ដូចនេះ $\boxed{u_n = 2^n + n.3^n}$ ។

លំហាត់ទី៦

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 1$ និង $u_{n+1} = \frac{1}{8}(\frac{1}{4} + 2u_n + \sqrt{1+8u_n})$

ក. តាង $v_n = \sqrt{1+8u_n}$ ។ បង្ហាញថា $v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + 2)$

ខ. បង្ហាញថាស្វ៊ីត $w_n = v_n - 2$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា w_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. ទាញរកតួ u_n នៃ n រួចគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + 2)$

គេមាន $v_n = \sqrt{1+8u_n}$ នាំឲ្យ $v_{n+1} = \sqrt{1+8u_{n+1}}$

តែ $u_{n+1} = \frac{1}{8}(\frac{1}{4} + 2u_n + \sqrt{1+8u_n})$

គេបានជាបន្តបន្ទាប់ដូចខាងក្រោម

$$v_{n+1}=\sqrt{1+\frac{1}{4}+2u_n+\sqrt{1+8u_n}}$$

$$v_{n+1}=\sqrt{1+2.\frac{\sqrt{1+8u_n}}{2}+\frac{1+8u_n}{4}}$$

$$v_{n+1}=\sqrt{(1+\frac{\sqrt{1+8u_n}}{2})^2}=1+\frac{\sqrt{1+8u_n}}{2}=1+\frac{1}{2}v_n$$

ដូចនេះ $\boxed{v_{n+1}=\frac{1}{2}(v_n+2)}$ ។

ខ. បង្ហាញថាស្វ៊ីត $w_n=v_n-2$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

យើងមាន $w_n=v_n-2$ នាំឲ្យ $w_{n+1}=v_{n+1}-2$ តែ $v_{n+1}=\frac{1}{2}(v_n+2)$

គេបាន $w_{n+1}=\frac{1}{2}(v_n+2)-2=\frac{1}{2}(v_n-2)=\frac{1}{2}w_n$ ។

ដូចនេះ (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=\frac{1}{2}$ ។

តាមរូបមន្ត $w_n=w_0\times q^n$ តែ $w_0=v_0-2=\sqrt{1+8u_0}-2=1$

ដូចនេះ $\boxed{w_n=\frac{1}{2^n}}$ និង $\boxed{v_n=2+\frac{1}{2^n}}$ ។

គ. ទាញរកតួ u_n នៃស្វ៊ីត

យើងមាន $v_n=\sqrt{1+8u_n}$ នាំឲ្យ $u_n=\frac{{v_n}^2-1}{8}$

$$u_n=\frac{(2+\frac{1}{2^n})^2-1}{8}$$

$$=\frac{4+4.\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}-1}{8}$$

$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{2n+3}}$$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = \frac{3}{8} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{2n+3}}}$ ។

គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty} u_n$

យើងបាន $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}[\frac{3}{8} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{2n+3}}]$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{2n+3}}\right) = 0$

ដូចនេ $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{8}$ ។

លំហាត់ទី៧

គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 3$ និង $u_{n+1} = u_n^{\,3} - 3u_n^{\,2} + 3u_n$

តាង $v_n = u_n - 1$ ។

បង្ហាញថា $v_{n+1} = v_n^{\,3}$ រួចគណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $v_{n+1} = v_n^{\,3}$

មាន $v_n = u_n - 1$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1$$
$$= u_n^{\,3} - 3u_n^{\,2} + 3u_n - 1$$
$$= (u_n - 1)^3$$

ដូចនេះ $\boxed{v_{n+1} = v_n^{\ 3}}$

គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $v_{n+1} = v_n^{\ 3}$

តាង $w_n = \ln v_n$ នាំឲ្យ $w_{n+1} = \ln v_{n+1} = 3\ln v_n = 3w_n$

គេបាន (w_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 3$

និងតួដំបូង $w_0 = \ln v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln 2$

តាមរូបមន្ត $w_n = w_0 \times q^n = 3^n \ln 2 = \ln(2^{3^n})$ ដោយ $w_n = \ln v_n$

ដូចនេះ $\boxed{v_n = 2^{3^n} \quad \text{និង} \quad u_n = 1 + 2^{3^n} \quad ។}$

លំហាត់ទី៨

គេមានស្វ៊ីត (u_n)កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - \dfrac{2(2n-1)}{3n(n+1)} \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN^* : v_n = u_n + \dfrac{2}{n}$ ។ បង្ហាញថា (v_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (v_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន $v_n = u_n + \dfrac{2}{n}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{2}{n+1}$$ តែ $$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{2(2n-1)}{3n(n+1)}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{2(2n-1)}{3n(n+1)} + \frac{2}{n+1}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{-4n+2+6n}{3n(n+1)}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2(n+1)}{3n(n+1)}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + \frac{2}{n}) = \frac{1}{3}v_n$$

ដូចនេះ (v_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{1}{3}$ និងតួ $v_1 = u_1 + 2 = 4$

ខ. គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងបាន $v_n = v_1.q^{n-1} = \frac{4}{3^{n-1}}$ ហើយ $u_n = v_n - \frac{2}{n} = \frac{4}{3^{n-1}} - \frac{2}{n}$

ដូចនេះ $\boxed{v_n = \frac{4}{3^{n-1}}\ ;\ u_n = \frac{4}{3^{n-1}} - \frac{2}{n}}$ ។

លំហាត់ទី៩

គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = \frac{11}{3} \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{(7n-2).3^{n-1}}{n(n+1)} \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN^* : v_n = u_n - \frac{3^n}{n}$ ។ បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន $v_n = u_n - \frac{3^n}{n}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{3^{n+1}}{n+1} \quad \text{តែ} \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{(7n-2).3^{n-1}}{n(n+1)}$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{(7n-2)3^{n-1}}{n(n+1)} - \frac{3^{n+1}}{n+1}$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{(7n-2)3^{n-1} - n.3^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{(7n-2-9n).3^{n-1}}{n(n+1)} = \frac{2}{3}(u_n - \frac{3^n}{n}) = \frac{2}{3}v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{2}{3}$ និងតួ $v_1 = \frac{11}{3} - 3 = \frac{2}{3}$

ខ. គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងបាន $v_n = v_1.q^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ហើយ $u_n = v_n - \frac{3^n}{n} = (\frac{2}{3})^n - \frac{3^n}{n}$

ដូចនេះ $\boxed{v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \; ; \; u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{3^n}{n}}$ ។

លំហាត់ទី១០

គេមានស្វ៊ីត (u_n)កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \ln(e^{u_n} + 1) \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN^* : v_n = e^{u_n}$ ។ រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (v_n) ។

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ប្រភេទនៃស្វ៊ីត (v_n) ៖

យើងមាន $v_n = e^{u_n}$

យើងបាន $v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{\ln(e^{u_n}+1)}$

$$v_{n+1} = e^{u_n} + 1$$
$$v_{n+1} = v_n + 1$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (v_n)ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d = 1$ ។

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៏នៃ n

តាមរូបមន្ត $v_n = v_1 + (n-1)d$ ដោយ $v_1 = e^{u_1} = e^0 = 1$ និង $d = 1$

គេបាន $v_n = 1 + (n-1).1 = n$ ។

ហើយ $v_n = e^{u_n}$ នាំឲ្យ $u_n = \ln v_n = \ln(n)$

ដូចនេះ $\boxed{v_n = n \ ; \ u_n = \ln(n)}$ ។

លំហាត់ទី១១

គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2+u_n}{4-u_n} \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN^* : v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 2}$ ។ បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 2}$ នាំឲ្យ $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} - 2}$ ដោយ $u_{n+1} = \dfrac{2+u_n}{4-u_n}$

គេបាន $v_{n+1} = \dfrac{\dfrac{2+u_n}{4-u_n} - 1}{\dfrac{2+u_n}{4-u_n} - 2} = \dfrac{2u_n - 2}{3u_n - 6} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{u_n - 1}{u_n - 2} = \dfrac{2}{3} v_n$

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \dfrac{2}{3}$ ។

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមរូបមន្ត $v_n = v_1 \times q^{n-1}$ ដោយ $v_1 = \dfrac{u_1 - 1}{u_1 - 2} = \dfrac{-1-1}{-1-2} = \dfrac{2}{3}$, $q = \dfrac{2}{3}$

ដូចនេះ $v_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 2}$ នាំឲ្យ $u_n = \dfrac{2v_n - 1}{v_n - 1} = \dfrac{2(\frac{2}{3})^n - 1}{(\frac{2}{3})^n - 1} = \dfrac{2^{n+1} - 3^n}{2^n - 3^n}$ ។

លំហាត់ទី១២

គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 - 9u_n + 12}{3u_n^2 - 12u_n + 13} \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN : v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 3}$ ។ បង្ហាញថា $v_{n+1} = v_n^3$

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $v_{n+1} = v_n^3$

យើងមាន $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 3}$ នាំឲ្យ $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} - 3}$

$$v_{n+1} = \frac{\dfrac{u_n^3 - 9u_n + 12}{3u_n^2 - 12u_n + 13} - 1}{\dfrac{u_n^3 - 9u_n + 12}{3u_n^2 - 12u_n + 13} - 3} = \frac{u_n^3 - 3u_n^2 + 3u_n - 1}{u_n^3 - 9u_n^2 + 27u_n - 27} = \left(\frac{u_n - 1}{u_n - 3}\right)^3$$

ដូចនេះ $v_{n+1} = v_n^3$ ។

ខ. គណនា v_n រួចទាញរកតម្លៃនៃ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាង $w_n = \ln v_n$ គេបាន $w_{n+1} = \ln v_{n+1} = \ln v_n^3 = 3\ln v_n = 3w_n$

នាំឲ្យ (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 3$ និង $w_0 = \ln v_0 = \ln 3$

គេបាន $w_n = w_0 \times q^n = 3^n \ln 3 = \ln(3^{3^n})$ តែ $w_n = \ln v_n$ គេបាន $v_n = 3^{3^n}$ ។

ហើយ $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - 3}$ នាំឲ្យ $u_n = \dfrac{3v - 1}{v - 1} = \dfrac{3^{1+3^n} - 1}{3^{3^n} - 3}$ ។

<u>លំហាត់ទី១៣</u>

គេឲ្យស៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} Z_0 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ Z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\, Z_n + |\, Z_n \,|\,) \, ; \, n \in IN \end{cases}$

($|Z_n|$ ជាម៉ូឌុលនៃ Z_n) ។

សន្មតថា $Z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i.\sin\theta_n)$, $\forall n \in IN$ ដែល $\rho_n > 0$, $\rho_n \, ; \theta_n \in IR$

ក_ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង θ_n និង θ_{n+1} ហើយ ρ_n និង ρ_{n+1} ។

ខ_រកប្រភេទនៃស៊ីត (θ_n)រួចគណនា θ_nជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ_ចូរបង្ហាញថា $\rho_n = \rho_0 \cos\theta_0 \cos\dfrac{\theta_1}{2}\cos\dfrac{\theta_2}{2}....\cos\dfrac{\theta_{n-1}}{2}$ រួចទាញរក ρ_n

អនុគមន៍នៃ n ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក_រកទំនាក់ទំនងរវាង θ_n និង θ_{n+1} ហើយ ρ_n និង ρ_{n+1}

យើងមាន $Z_n = \rho_n(\cos\theta_n + i.\sin\theta_n)$ នាំឲ្យ $Z_{n+1} = \rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i\sin\theta_{n+1})$

ដោយ $Z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\, Z_n + |\, Z_n \,|\,)$ ហើយ $|\, Z_n \,| = \rho_n$

គេបាន $\rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i\sin\theta_{n+1}) = \dfrac{1}{2}[\rho_n(\cos\theta_n + i.\sin\theta_n) + \rho_n]$

$$\rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i.\sin\theta_{n+1}) = \frac{1}{2}\rho_n(1 + \cos\theta_n + i.\sin\theta_n)$$

$$\rho_{n+1}(\cos\theta_{n+1} + i.\sin\theta_{n+1}) = \rho_n \cos\frac{\theta_n}{2}(\cos\frac{\theta_n}{2} + i.\sin\frac{\theta_n}{2})$$

គេទាញបាន $\rho_{n+1} = \rho_n \cos\dfrac{\theta_n}{2}$ និង $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\theta_{n+1}=\frac{\theta_n}{2} \quad \text{និង} \quad \rho_{n+1}=\rho_n\cos\frac{\theta_n}{2}}$ ។

ខ_ប្រភេទនៃស្វ៊ីត (θ_n)និង គណនា θ_nជាអនុគមន៍នៃ n ៖

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន $\theta_{n+1}=\frac{1}{2}\theta_n$ នាំឲ្យ (θ_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

មានរេសុងស្មើ $q=\frac{1}{2}$ ។

តាមរូបមន្ត $\theta_n=\theta_0\times q^n$

ដោយ $Z_0=\rho_0(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}$

គេទាញបាន $\rho_0=1\,;\,\theta_0=\frac{\pi}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{\theta_n=\frac{\pi}{3}.\frac{1}{2^n}}$ ។

គ_បង្ហាញថា $\rho_n=\rho_0\cos\theta_0\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}....\cos\frac{\theta_n}{2}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\rho_{n+1}=\rho_n\cos\frac{\theta_n}{2}$ ឬ $\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}=\cos\frac{\theta_n}{2}$

គេបាន $\prod_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}\right)=\prod_{k=0}^{k=n-1}\left[\cos(\frac{\theta_k}{2})\right]$

$$\frac{\rho_n}{\rho_0}=\cos\theta_0.\cos\frac{\theta_1}{2}.\cos\frac{\theta_2}{2}.........\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\rho_n=\rho_0\cos\theta_0\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}....\cos\frac{\theta_{n-1}}{2}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតយើងមាន $\sin\theta_n=2\sin\frac{\theta_n}{2}\cos\frac{\theta_n}{2}=2\sin\theta_{n+1}\cos\frac{\theta_n}{2}$

(ព្រោះ $\theta_{n+1}=\frac{\theta_n}{2}$) ។

គេទាញ $\cos\frac{\theta_n}{2}=\frac{1}{2}.\frac{\sin\theta_n}{\sin\theta_{n+1}}$

ហេតុនេះ $\rho_n = \frac{1}{2^n}.\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_1}.\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}.....\frac{\sin\theta_{n-1}}{\sin\theta_n} = \frac{1}{2^n}.\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_n}$

ដូចនេះ $\boxed{\rho_n = \frac{1}{2^n}\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin(\frac{\pi}{3}.\frac{1}{2^n})} = \frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}.\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{3}.\frac{1}{2^n})}}$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេមានស្វ៊ីត (u_n)កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ u_1 = \frac{4}{3} \\ u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN : v_n = u_{n+1} - u_n$ ។ បង្ហាញថា (v_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

រួចគណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. គណនា $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n

រួចគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

គ. ទាញរកតម្លៃនៃ u_n និង $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (v_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

យើងមាន $v_n = u_{n+1} - u_n$

$$v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}$$

$$v_{n+1}=\frac{4}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n-u_{n+1}$$

$$v_{n+1}=\frac{1}{3}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n$$

$$v_{n+1}=\frac{1}{3}(u_{n+1}-u_n)$$

$$v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$$

ដូចនេះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=\frac{1}{3}$ និងតួ

$v_0=u_1-u_0=\frac{1}{3}$ ។

តាមរូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $v_n=v_0\times q^n$

ដូចនេះ $\boxed{v_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$ ។

ខ. គណនា $S_n=v_0+v_1+v_2+...+v_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

តាមរូបមន្ត $S_n=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$$S_n=1.\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right) \text{ និង } \lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{3}{2}}$ ។

គ. ទាញរកតម្លៃនៃ u_n និង $\lim_{n\to+\infty}u_n$

យើងមាន $v_n=u_{n+1}-u_n$

យើងទាញបាន
$$\begin{cases} v_0 = u_1 - u_0 \\ v_1 = u_2 - u_1 \\ v_2 = u_3 - u_2 \\ ---------- \\ v_n = u_{n+1} - u_n \end{cases} +$$
$$S_n = u_{n+1} - u_0$$

គេបាន $u_n = u_0 + S_{n-1}$ ដោយ $S_n = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$ និង $u_0 = 1$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = \frac{5}{3} - \frac{1}{2.3^{n-1}}}$ និង $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{5}{3}}$

លំហាត់ទី១៥

ក_គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

$$L_n = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}} - 2}{x-2}$$ (មាន n រ៉ាឌីកាល់)

ខ_តាង $S_n = L_1 + L_2 + L_3 + ... + L_n$ ។ ចូរគណនា $\lim_{n\to+\infty} S_n$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

យើងមាន $L_n = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}} - 2}{x-2}$

យើងបាន $L_1 = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2+x} - 2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(2+x) - 4}{(x-2)(\sqrt{2+x}+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{2+x}+2} = \frac{1}{4}$

$$L_2=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+x}}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-2}{(x-2)(\sqrt{2+\sqrt{2+x}}+2)}$$

$$L_2=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+x}}+2}\times\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}=\frac{1}{4}L_1=\frac{1}{4^2}$$

យើងសន្មតថាវាពិតដល់លំដាប់ទី k គឺ $L_k=\dfrac{1}{4^k}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់លំដាប់ទី $(k+1)$ គឺ $L_{k+1}=\dfrac{1}{4^{k+1}}$

យើងមាន $L_{k+1}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+x}}}}}-2}{x-2}$

គុណភាគយកនិងភាគបែងនឹង $M(x)=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+x}}}}}+2$

គេបាន $L_{k+1}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+....+\sqrt{2+x}}}}-4}{(x-2).M(x)}$

$$L_{k+1}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{M(x)}\times\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+....+\sqrt{2+x}}}}-2}{x-2}$$

$$L_{k+1}=\frac{1}{M(2)}\times L_k=\frac{1}{4}L_k=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4^k}=\frac{1}{4^{k+1}} \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ $\boxed{L_n=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}}-2}{x-2}=\dfrac{1}{4^n}}$

ខ_គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

គេមាន $S_n=L_1+L_2+L_3+....+L_n$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+....+\frac{1}{4^n}$$

$$=\frac{1}{4}.\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

កាលណា $n \to +\infty$ នោះ $\frac{1}{4^n} \to 0$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}}$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឲ្យអនុគមន៍ $f_n(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+.....+\sqrt{x+\sqrt{x+2}}}}$ មាន n ឫសការេ ។

ចូរគណនាលីមីត $L_n = \lim_{x\to2} \frac{f_n(x)-2}{x-2}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត $L_n = \lim_{x\to2} \frac{f_n(x)-2}{x-2}$

យើងបាន $L_{n+1} = \lim_{x\to2} \frac{f_{n+1}(x)-2}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{[\ f_{n+1}(x)\ ]^2-4}{(x-2)[f_{n+1}(x)+2]}$

ដោយ $[f_{n+1}(x)]^2 - 4 = x+\sqrt{x+\sqrt{x+.....+\sqrt{x+\sqrt{x+2}}}} - 4 = (x-2)+[f_n(x)-2]$

គេបាន $L_{n+1} = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)+[f_n(x)-2]}{(x-2)[f_{n+1}(x)+2]}$

$$L_{n+1} = \lim_{x\to2}\frac{1}{f_{n+1}(x)+2} + \lim_{x\to2}\frac{1}{f_{n+1}(x)+2} \times \lim_{x\to2}\frac{f_n(x)-2}{x-2}$$

$$L_{n+1} = \frac{1}{f_{n+1}(2)+2} + \frac{1}{f_{n+1}(2)+2}.L_n$$

ដោយគេមាន $f_{n+1}(2) = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+....+\sqrt{2+\sqrt{2+2}}}}} = 2$

គេទាញ $L_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}L_n$ ឬ $4L_{n+1} - L_n = 1 \quad (*)$

គុណអង្គទាំងពីរនៃ (*) នឹង 4^n គេបាន $4^{n+1}L_{n+1} - 4^n L_n = 4^n$

យើងបាន $\sum_{k=1}^{k=n-1}\left(4^{k+1}L_{k+1}-4^{k}L_{k}\right)=\sum_{l=1}^{k=n-1}\left(4^{k}\right)$

$$4^{n}L_{n}-4L_{1}=4+4^{2}+4^{3}+\dots+4^{n-1}=4.\frac{4^{n-1}-1}{3}$$

គេទាញ $L_{n}=\frac{L_{1}}{4^{n-1}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3.4^{n-1}}$ តែ $L_{1}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\frac{1}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{L_{n}=\frac{7}{12}-\frac{1}{3.4^{n-1}}}$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេមានស្វ៊ីត (u_{n}) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_{1}=2 \\ 2u_{n+1}=u_{n}+\frac{1}{n(n+1).2^{n}} \end{cases}$

ចូរគណនា u_{n} ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_{n} ជាអនុគមន៏នៃ n

យើងមាន $2u_{n+1}=u_{n}+\frac{1}{n(n+1).2^{n}}$

$$2u_{n+1}-u_{n}=\frac{1}{n(n+1).2^{n}}$$

$$2^{n+1}u_{n+1}-2^{n}u_{n}=\frac{1}{n(n+1)}$$

$$2^{n+1}u_{n+1}-2^{n}u_{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{k=(n-1)}\left(2^{k+1}u_{k+1}-2^{k}u_{k}\right)=\sum_{k=1}^{k=(n-1)}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$2^{n}u_{n}-2u_{1}=1-\frac{1}{n}$$

គេទាញ $u_n = \frac{1}{2^n}(1 - \frac{1}{n} + 2u_1) = \frac{1}{2^n}(5 - \frac{1}{n})$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = \frac{5n-1}{n.2^n}}$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេមានស្វ៊ីត (u_n) និង (v_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 3 \ ; \ v_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n \end{cases}$

ក. តាង $\forall n \in IN : w_n = u_n - v_n$ ។ បង្ហាញថា (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា w_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. បង្ហាញថា $C_n = u_n + v_n$ ជាស្វ៊ីតថេរដែលត្រូវកំនត់។

គ. ទាញរក u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

យើងមាន $w_n = u_n - v_n$

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$$

$$w_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n - \frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4}v_n$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - v_n) = \frac{1}{2}w_n$$

ដូចនេះ (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=\frac{1}{2}$

និងតួ $w_0=u_0-v_0=2$ ។

តាមរូបមន្ត $w_n=w_0\times q^n=2\times\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $C_n=u_n+v_n$ ជាស្វ៊ីតថេរ ៖

យើងបាន $C_{n+1}=u_{n+1}+v_{n+1}$

$$C_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+\frac{1}{4}v_n+\frac{1}{4}u_n+\frac{3}{4}v_n=u_n+v_n=C_n$$

ដូចនេះ (C_n) ជាស្វ៊ីតថេរហើយ $C_n=C_0=u_0+v_0=4$ ។

គ. ទាញរក u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

តាមសម្រាយខាងលើគេទាញបាន $\begin{cases} u_n+v_n=\frac{1}{2^{n-1}} & (1) \\ u_n-v_n=4 & (2) \end{cases}$

បូកសមីការពីរនេះគេបាន $2u_n=4+\frac{1}{2^{n-1}}$ នាំឲ្យ $u_n=2+\frac{1}{2^n}$

ដកសមីការពីរនេះគេបាន $2v_n=-4+\frac{1}{2^{n-1}}$ នាំឲ្យ $v_n=-2+\frac{1}{2^n}$

ដូចនេះ $\boxed{u_n=2+\frac{1}{2^n} \quad \text{និង} \quad v_n=-2+\frac{1}{2^n}}$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(U_n)_{n\in IN}$ ដោយ $\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{5U_n^3 - 6U_n^2 + 2}{2U_n^3 - 6U_n + 5}, \forall n \in IN^* \end{cases}$

ក_គេតាង $V_n = \dfrac{U_n - 2}{2U_n - 1}, \forall n \in IN^*$ ។ ចូរបង្ហាញថា $V_{n+1} = V_n^3$

ខ_គេយក $W_n = \ln V_n \ , \forall n \in IN^*$ ។ ចូរបង្ហាញថា $(W_n)_{,n\in IN}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្ររួចគណនា W_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ_ចូរទាញរក V_n និង U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក_ បង្ហាញថា ៖ $V_{n+1} = V_n^3$

យើងមាន $V_n = \dfrac{U_n - 2}{2U_n - 1}, \forall n \in IN^*$

យើងបាន $V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1} - 2}{2U_{n+1} - 1}$ ដោយ $U_{n+1} = \dfrac{5U_n^3 - 6U_n^2 + 2}{2U_n^3 - 6U_n + 5}$

$$V_{n+1} = \frac{\dfrac{5U_n^3 - 6U_n^2 + 2}{2U_n^3 - 6U_n + 5} - 2}{2\left(\dfrac{5U_n^3 - 6U_n + 2}{2U_n^3 - 6U_n + 5}\right) - 1}$$

$$V_{n+1} = \frac{5U_n^3 - 6U_n^2 + 2 - 4U_n^3 + 12U_n - 10}{10U_n^3 - 12U_n^2 + 4 - 2U_n^3 + 6U_n - 5}$$

$$V_{n+1} = \frac{U_n^3 - 6U_n^2 + 12U_n - 8}{8U_n^3 - 12U_n^2 + 6U_n - 1} = \frac{(U_n - 2)^3}{(2U_n - 1)^3} = \left(\frac{U_n - 2}{2U_n - 1}\right)^3$$

ដូចនេះ $V_{n+1} = V_n^3$ ។

ខ_បង្ហាញថា $(W_n)_{,n\in IN}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

យើងមាន $W_n = \ln V_n$ នាំឲ្យ $W_{n+1} = \ln V_{n+1}$ ដោយ $V_{n+1} = V_n{}^3$

យើងបាន $W_{n+1} = \ln V_n{}^3 = 3\ln V_n = 3W_n$

ដូចនេះ $(W_n)_{,n\in IN}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុង $q=3$ ។

_គណនា W_n ជាអនុគមន៏នៃ n ៖

តាមរូបមន្ត $W_n = W_1 \times q^{n-1}$

ដោយ $W_1 = \ln V_1 = \ln\left(\frac{U_1-2}{2U_1-1}\right) = \ln(\frac{3-2}{6-1}) = \ln(\frac{1}{5})$ និង $q=3$

យើងបាន $W_n = \ln(\frac{1}{5})\times(3)^{n-1} = 3^{n-1}\ln(\frac{1}{5})$ ។

គ_ទាញរក V_n និង U_n ជាអនុគមន៏នៃ n ៖

យើងមាន $W_n = \ln V_n$ ដោយ $W_n = 3^{n-1}\ln(\frac{1}{5})$

យើងបាន $\ln V_n = 3^{n-1}\ln(\frac{1}{5})$ នាំឲ្យ $V_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{3^{n-1}}$

ម្យ៉ាងទៀត $V_n = \frac{U_n-2}{2U_n-1}$ នាំឲ្យ $U_n = \frac{2-V_n}{1-2V_n} = \frac{2-(\frac{1}{5})^{3^{n-1}}}{1-2(\frac{1}{5})^{3^{n-1}}} = \frac{2.5^{3^{n-1}}-1}{5^{3^{n-1}}-2}$

ដូចនេះ $V_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{3^{n-1}}$ និង $U_n = \frac{2.5^{3^{n-1}}-1}{5^{3^{n-1}}-2}$ ។

យើងមាន $U_n = \frac{2.5^{3^{n-1}}-1}{5^{3^{n-1}}-2}$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$

លំហាត់ទី២០

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំនត់លើ IR ដោយ $f(x)=\dfrac{x^3-6x+6}{3x^2-9x+7}$

ក_ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចបង្ហាញថាគេអាចសរសេរ ៖

$$f'(x)=\frac{3(x^2-3x+2)^2}{(3x^2-9x+7)^2}$$ ។

ខ_តាង α និង β ជាឬសរបស់សមីការ $f'(x)=0$ ។

គេយក $U_{n+1}=f(U_n)$ និង $V_n=\dfrac{U_n-\alpha}{U_n-\beta}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $V_{n+1}=V_n^{\ 3}$ រួចទាញរក V_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង x ។

គ_ចូរគណនា $F_n(x)=f_n\left[f\left[........f\left[f(x)\right]........\right]\right]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក_គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ៖

$$f'(x)=\frac{(3x^2-6)(3x^2-9x+7)-(6x-9)(x^3-6x+6)}{(3x^2-9x+7)^2}$$

$$=\frac{9x^4-27x^3+21x^2-18x^2+54x-42-6x^4+36x^2-36x+9x^3-54x+54}{(3x^2-9x+7)^2}$$

$$=\frac{3x^4-18x^3+39x^2-36x+12}{(3x^2-9x+7)^2}=\frac{3(x^4-6x^3+13x^2-12x+4)}{(3x^2-9x+7)^2}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{3(x^4-6x^3+13x^2-12x+4)}{(3x^2-9x+7)^2}$ ។

បង្ហាញថាគេអាចសរសេរ $f'(x)=\dfrac{3(x^2-3x+2)^2}{(3x^2-9x+7)^2}$

តាមរូបមន្ត $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

គេបាន $(x^2-3x+2)^2 = x^4+9x^2+4-6x^3+4x^2-12x$

ឬ $(x^2-3x+2)^2 = x^4-6x^3+13x^2-12x+4$

ដូចនេះ $f'(x) = \dfrac{3(x^2-3x+2)^2}{(3x^2-9x+7)^2}$ ។

ខ-ស្រាយបញ្ជាក់ថា $V_{n+1} = V_n^{\ 3}$

បើ $f'(x)=0$ សមមូល $(x^2-3x+2)^2=0$ នាំឲ្យ $x_1=1\,,\ x_2=\dfrac{c}{a}=2$

គេបាន $\alpha=1\ ,\ \beta=2$ ។

ដោយ $V_n = \dfrac{U_n-\alpha}{U_n-\beta}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ នោះ $V_n = \dfrac{U_n-1}{U_n-2}$

គេបាន $V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}-2}$ តែ $U_{n+1} = f(U_n) = \dfrac{U_n^{\ 3}-6U_n+6}{3U_n^{\ 2}-9U_n+7}$

យើងបាន $V_{n+1} = \dfrac{\dfrac{U_n^{\ 3}-6U_n+6}{3U_n^{\ 2}-9U_n+7}-1}{\dfrac{U_n^{\ 3}-6U_n+6}{3U_n^{\ 2}-9U_n+7}-2} = \dfrac{U_n^{\ 3}-3U_n^{\ 2}+3U_n-1}{U_n^{\ 3}-6U_n^{\ 2}+12U_n-8} = \left(\dfrac{U_n-1}{U_n-2}\right)^3$

ដូចនេះ $V_{n+1} = V_n^{\ 3}$ ។

- ទាញរក V_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង x

យើងតាង $W_n = \ln V_n$ នាំឲ្យ $W_{n+1} = \ln V_{n+1} = \ln V_n^{\ 3} = 3\ln V_n = 3W_n$

នាំឲ្យ (W_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=3$ និងតួ $W_1 = \ln V_1$

ដោយ $V_1=\dfrac{U_1-1}{U_1-2}=\dfrac{\dfrac{x^3-6x+6}{3x^2-9x+7}-1}{\dfrac{x^3-6x+6}{3x^2-9x+7}-2}=\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^3$

គេទាញ $W_1=\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^3$

តាមរូបមន្ត $W_n=W_1\times q^{n-1}=3^{n-1}\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^3=\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^{3^n}$

តែ $W_n=\ln V_n$ គេទាញ $\ln V_n=\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^{3^n}$

ដូចនេះ $V_n=\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^{3^n}$ ។

គ_គណនា $F_n(x)=f_n\left[f\left[........f\left[f(x)\right]........\right]\right]$

តាង $U_1=f(x)$

$U_2=f\left[f(x)\right]=f(U_1)$

$U_3=f\left[f\left[f(x)\right]\right]=f(U_2)$

$-----------------$

$U_n=f_n\left[f\left[.........f\left[f(x)\right]........\right]\right]=f(U_{n-1})$

$U_{n+1}=f(U_n)$

គេទាញ $F_n(x)=f_n\left[f\left[........f\left[f(x)\right]........\right]\right]=U_n$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $V_n=\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^{3^n}$

ដោយ $V_n=\dfrac{U_n-1}{U_n-2}$ នាំឲ្យ $U_n=\dfrac{2V_n-1}{V_n-1}$

គេបាន $U_n = \dfrac{2\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^{3^n} - 1}{\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^{3^n} - 1} = \dfrac{2(x-1)^{3^n} - (x-2)^{3^n}}{(x-1)^{3^n} - (x-2)^{n}}$

ដូចនេះ $F_n(x) = \dfrac{2(x-1)^{3^n} - (x-2)^{3^n}}{(x-1)^{3^n} - (x-2)^{3^n}}$ ។

លំហាត់ទី២១

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ n ដោយ ៖

$U_0 = 1$ និង $\forall n \in IN : U_{n+1} = U_n \cos a + \sin a$ ដែល $0 < a < \frac{\pi}{2}$ ។

ក. តាង $V_n = U_n - \cot\frac{a}{2}$ ។ ចូរបង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_0 + V_1 + ... + V_n)$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ៖

មាន $V_n = U_n - \cot\frac{a}{2}$ នាំឲ្យ $V_{n+1} = U_{n+1} - \cot\frac{a}{2}$ តែ $U_{n+1} = U_n \cos a + \sin a$

គេបាន $V_{n+1} = U_n \cos a + \sin a - \cot\frac{a}{2}$

$$= U_n \cos a + 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} - \cot\frac{a}{2}$$

$$= U_n \cos a + \cot\frac{a}{2}(2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\tan\frac{a}{2} - 1)$$

$$= U_n \cos a + \cot\frac{a}{2}(2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} - 1)$$

$$= U_n \cos a + \cot\frac{a}{2}(2\sin^2\frac{a}{2} - 1) \quad ; \quad \cos a = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2}$$

$$= U_n \cos a - \cot\frac{a}{2}\cos a = (U_n - \cot\frac{a}{2})\cos a$$

$$= V_n \cos a$$

ដោយ $V_{n+1} = V_n \cos a$ នាំឲ្យ (V_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយមានរេសុង $\cos a$ និង តួ $V_0 = U_0 - \cot\frac{a}{2} = 1 - \cot\frac{a}{2}$ ។

ខ. គណនាលីមីត ៖ $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_0 + V_1 + ... + V_n)$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

យើងមាន $V_0 + V_1 + ... + V_n = V_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = (1-\cot\frac{a}{2}).\frac{1-\cos^{n+1} a}{1-\cos a}$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_0 + V_1 + ... + V_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[(1-\cot\frac{a}{2})\frac{1-\cos^{n+1} a}{1-\cos a}\right]$

ដោយ $0 < a < \frac{\pi}{2}$ នោះ $0 < \cos a < 1$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^{n+1} a = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(V_0 + V_1 + ... + V_n) = \frac{1-\cot\frac{a}{2}}{1-\cos a}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $V_n = U_n - \cot\frac{a}{2}$ នាំឲ្យ $U_n = V_n + \cot\frac{a}{2}$

ដោយ $V_n = V_0 \times q^n = (1-\cot\frac{a}{2})\cos^n a$

គេបាន $U_n = (1-\cot\frac{a}{2})\cos^n a + \cot\frac{a}{2}$

និង $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left[(1-\cot\frac{a}{2})\cos^n a + \cot\frac{a}{2}\right] = \cot\frac{a}{2}$ ព្រោះ $\lim_{n\to+\infty}\cos^n a = 0$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} U_n = \cot\frac{a}{2}$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ ៖

$U_0 = 0$; $U_1 = 1$ និង $\forall n \in IN: U_{n+2} = 2U_{n+1}\cos a - U_n$ ដែល $a \in IR$ ។

ក. តាង $Z_n = U_{n+1} - (\cos a - i\sin a)\, U_n$, $\forall n \in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា $Z_{n+1} = (\cos a + i\sin a)\, Z_n$ រួចទាញរក Z_n ជាអនុគមន៍

នៃ n និង a ។

ខ. ទាញរក U_n ជាអនុគមន៏នៃ n រួចទាញរក $\lim_{a\to 0} U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $Z_{n+1} = (\cos a + i\sin a)\, Z_n$

យើងមាន $Z_n = U_{n+1} - (\cos a - i\sin a)U_n$

យើងបាន $Z_{n+1} = U_{n+2} - (\cos a - i\sin a)U_{n+1}$

$$= 2U_{n+1}\cos a - U_n - (\cos a - i\sin a)U_{n+1}$$
$$= (\cos a + i\sin a)U_{n+1} - U_n$$
$$= (\cos a + i\sin a)(U_{n+1} - \frac{U_n}{\cos a + i\sin a})$$
$$= (\cos a + i\sin a)\left[U_{n+1} - (\cos a - i\sin a)U_n\right]$$
$$= (\cos a + i\sin a)\ U_n$$

ដូចនេះ $Z_{n+1} = (\cos a + i\sin a)\ Z_n$ ។

គណនា Z_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ៖

ដោយ $Z_{n+1} = (\cos a + i\sin a)\ Z_n$ នាំឲ្យ (Z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច

ដែលមានរេសុង $q = \cos a + i\sin a$ និងតួ $Z_0 = U_1 - (\cos a - i\sin a)U_0 = 1$ ។

តាមរូបមន្ត $Z_n = Z_0 \times q^n = (\cos a + i\sin a)^n = \cos(na) + i\sin(na)$

ដូចនេះ $\boxed{Z_n = \cos(na) + i.\sin(na)}$ ។

ខ. ទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $Z_n = U_{n+1} - (\cos a - i\sin a)U_n \quad (1)$

និង $\overline{Z}_n = U_{n+1} - (\cos a + i\sin a)U_n \quad (2)$

ដកសមីការ (1) និង (2) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$Z_n - \overline{Z}_n = 2i\sin a\ U_n$ នាំឲ្យ $U_n = \dfrac{Z_n - \overline{Z}_n}{2i\sin a}$ ដែល $\sin a \neq 0$ ។

ដោយ $Z_n = \cos(na) + i\sin(na)$ និង $\overline{Z}_n = \cos(na) - i\sin(na)$

គេបាន $U_n=\dfrac{\cos(na)+i\sin(na)-\cos(na)+i\sin(na)}{2i\sin a}=\dfrac{\sin(na)}{\sin a}$

ហើយ $\lim\limits_{a\to 0}U_n=\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\sin(na)}{\sin a}=n\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\sin(na)}{(na)}\times\dfrac{a}{\sin a}=n$

ដូចនេះ $\lim\limits_{a\to 0}U_n=n$ ។

លំហាត់ទី២៣

គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) នៃចំនួនពិតកំនត់លើ IN^* ដោយ $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ក. កំនត់ចំនួនពិត A, B, C ដែល $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{A}{n}+\dfrac{B}{n+1}+\dfrac{C}{n+2}$ ។

ខ. តាង $S_n=u_1+u_2+u_3+....+u_n$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ។

គ. ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ គេតាង $V_n=u_n-\int_n^{n+1}g(x).dx$ ដែល g ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $g(x)=\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$

និង $S'_n=V_1+V_2+V_3+...+V_n$ ។

ចូរបង្ហាញថា $S'_n=S_n-\int_1^{n+1}g(x).dx$ ហើយទាញរក S'_n និង $\lim\limits_{n\to+\infty}S'_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំនត់ចំនួនពិត A, B, C ដែល $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{A}{n}+\dfrac{B}{n+1}+\dfrac{C}{n+2}$

យើងបាន $1=A(n+1)(n+2)+B(n+2)n+C(n+1)n$

សមមូល $1=(A+B+C)n^2+(3A+2B+C)n+2A$

គេទាញ $\begin{cases} 2A = 1 \\ A + B + C = 0 \\ 3A + 2B + C = 0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = \frac{1}{2}$ ។

ខ. គណនា $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

មាន $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (u_k)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)} \right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2(k+2)} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \right] = \frac{1}{4}$ ។

គ. បង្ហាញថា $S'_n = S_n - \int_1^{n+1} g(x).dx$ ហើយទាញរក S'_n និង $\lim\limits_{n \to +\infty} S'_n$

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ យើងមាន $V_n = u_n - \int_n^{n+1} g(x).dx$ ដែល g

ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $g(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$

និង $S'_n = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n$

យើងបាន $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (V_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left[u_n - \int_n^{n+1} g(x).dx \right]$

$$= \sum_{k=1}^{n} (u_n) - \left[\int_1^2 g(x).dx + \int_2^3 g(x).dx + ... + \int_n^{n+1} g(x).dx \right]$$

ដូចនេះ $S'_n = S_n - \int_1^{n+1} g(x).dx$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $g(x)=\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$

មានលំនាំដូច $u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

គេបាន $g(x)=\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+2)}$

ដោយ $S_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

យើងបាន $S'_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}-\int_1^{n+1}\left[\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+2)}\right].dx$

$$=\frac{1}{4}-\frac{n+2-n-1}{2(n+1)(n+2)}-\left[\frac{1}{2}\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x+2|\right]_1^{n+1}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}-\frac{1}{2}\ln(n+1)+\ln(n+2)-\frac{1}{2}\ln(n+3)+\frac{1}{2}\ln 3-\ln 2$$

$$=\frac{1}{4}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}+\ln\left[\frac{n+2}{\sqrt{(n+1)(n+3)}}\right]$$

ដូចនេះ $S'_n=\frac{1}{4}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}+\ln\left[\frac{n+2}{\sqrt{(n+1)(n+3)}}\right]$ ។

និង $\lim_{n\to+\infty}S'_n=\frac{1}{4}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

លំហាត់ទី២៤

គេឲ្យចំនួន $A = \underbrace{444......444}_{(2n)}$

$B = \underbrace{222.....222}_{(n+1)}$ និង $C = \underbrace{888......888}_{(n)}$

ចូរបង្ហាញថា $S = A + B + C + 7$ ជាការេប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $S = A + B + C + 7$ ជាការេប្រាកដ

យើងមាន $A = \underbrace{444......444}_{(2n)} = \frac{4}{9}(10^{2n} - 1)$

$B = \underbrace{222.....222}_{(n+1)} = \frac{2}{9}(10^{n+1} - 1)$

និង $C = \underbrace{888......888}_{(n)} = \frac{8}{9}(10^{n} - 1)$

យើងបាន $S = \frac{4}{9}(10^{2n} - 1) + \frac{2}{9}(10^{n+1} - 1) + \frac{8}{9}(10^{n} - 1) + 7$

$$S = \frac{4.10^{2n} - 4 + 2.10^{n+1} - 2 + 8.10^{n} - 8 + 63}{9}$$

$$S = \frac{4.10^{2n} + 2.10^{n+1} + 8.10^{n} + 49}{8}$$

$$S = \frac{4.10^{2n} + 28.10^{n} + 49}{9}$$

$$S = \left(\frac{2.10^{n} + 7}{3}\right)^2$$

ដូចនេះ $S = A + B + C + 7$ ជាការេប្រាកដ ។

លំហាត់ទី២៥

គេឲ្យចំនួន $A=\underbrace{111.....111}_{(2n\text{ លេខ })}$ និង $B=\underbrace{444.....444}_{(n\text{ លេខ })}$

ចូរបង្ហាញថា $A+B+1$ ជាការេប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $A+B+1$ ជាការេប្រាកដ ៖

យើងមាន $A=\underbrace{111.....111}_{(2n\text{ លេខ })}=\dfrac{10^{2n}-1}{9}$

$$B=\underbrace{444.....444}_{(n\text{ លេខ })}=\frac{4(10^{n}-1)}{9}$$

យើងបាន $A+B+1=\dfrac{10^{2n}-1}{9}+\dfrac{4(10^{n}-1)}{9}+1$

$$A+B+1=\frac{10^{2n}-1+4.10^{n}-4+9}{9}$$

$$A+B+1=\frac{10^{2n}+4.10^{n}+4}{9}$$

$$A+B+1=\left(\frac{10^{n}+2}{3}\right)^{2}$$

ដូចនេះ $A+B+1$ ជាការេប្រាកដ ។

លំហាត់ទី២៦

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំនត់ក្នុងសំណុំ IR ដោយ $f(x)=\dfrac{x^3}{3(x^2+3x+3)}$

ក_គេពិនិត្យស្វ៊ីត (U_n) កំនត់ដោយ $U_{n+1}=f(U_n)$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $1+\dfrac{3}{U_{n+1}}=\left(1+\dfrac{3}{U_n}\right)^3$ ។

ខ_គេតាង $F_n(x)=f_n[f\,[......f[f(x)]......]]$(អនុគមន៍បណ្ដាក់លំដាប់ n)

ចូរគណនា $F_n(x)$ ។

គ_គេសន្មតថា $U_1=\dfrac{3}{7}$ និង $V_n=\ln(3+U_n)-\ln U_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$

ចូរបង្ហាញថា (V_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា V_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ឃ_ទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចបញ្ជាក់តម្លៃ $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក_ស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $1+\dfrac{3}{U_{n+1}}=\left(1+\dfrac{3}{U_n}\right)^3$

យើងមាន $U_{n+1}=f(U_n)$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x^3}{3(x^2+3x+3)}$

យើងបាន $U_{n+1}=\dfrac{U_n{}^3}{3(U_n{}^2+3U_n+3)}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $U_{n+1}+3=\frac{U_n^{\ 3}}{3(U_n^{\ 2}+3U_n+3)}+3$

$$U_{n+1}+3=\frac{U_n^{\ 3}+9U_n^{\ 2}+27U_n+27}{3(U_n^{\ 2}+3U_n+3)}$$

$$U_{n+1}+3=\frac{(U_n+3)^3}{3(U_n^{\ 2}+3U_n+3)} \qquad (2)$$

ចែកទំនាក់ទំនង (2) និង (1) អង្គនិងអង្គយើងបាន ៖

$\frac{U_{n+1}+3}{U_{n+1}}=\frac{(U_n+3)^3}{U_n^{\ 3}}$ ឬ $1+\frac{3}{U_{n+1}}=\left(1+\frac{3}{U_n}\right)^3$ ។

ខ_គណនា $F_n(x)$ ៖

យើងមាន $F_n(x)=f_n[f[......f[f(x)]......]]$(អនុគមន៍បណ្ដាក់លំដាប់ n)

ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ យើងយក $U_1=f(x)=\frac{x^3}{3(x^2+3x+3)}$

$$U_2=f[f(x)]=f(U_1)$$

$$U_3=f[f[f(x)]]=f(U_2)$$

$$-----------------$$

$$U_n=f[f[........f[f(x)]......]]=f(U_{n-1})$$

$$U_{n+1}=f(U_n)=\frac{U_n^{\ 3}}{3(U_n^{\ 2}+3U_n+3)}$$

ដូចនេះគេទាញ $F_n(x)=f[f[........f[f(x)]........]]=U_n$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $1+\frac{3}{U_{n+1}}=\left(1+\frac{3}{U_n}\right)^3$

គេបាន $\ln\left(1+\frac{3}{U_{n+1}}\right)=3\ln\left(1+\frac{3}{U_n}\right)$ ដោយតាង $T_n=\ln\left(1+\frac{3}{U_n}\right)$

គេបាន $T_{n+1} = 3T_n$ នាំឲ្យ (T_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 3$

និងតួ $T_1 = \ln\left(1+\frac{3}{U_1}\right) = \ln\left(1+\frac{3}{f(x)}\right) = \ln\left(1+\frac{9x^2+27x+27}{x^3}\right) = \ln\left(\frac{x+3}{x}\right)^3$

តាមរូបមន្ត $T_n = T_1 \times q^{n-1} = 3^{n-1}.\ln\left(\frac{x+3}{x}\right)^3 = \ln\left(\frac{x+3}{x}\right)^{3^n}$

តែ $T_n = \ln\left(1+\frac{3}{U_n}\right)$ គេទាញ $1+\frac{3}{U_n} = \left(\frac{x+3}{x}\right)^{3^n}$

នាំឲ្យ $U_n = \dfrac{3}{\left(\frac{x+3}{x}\right)^{3^n} - 1} = \dfrac{3x^{3^n}}{(x+3)^{3^n} - x^{3^n}}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{F_n(x) = f[f[........f[f(x)]........]] = \dfrac{3x^{3^n}}{(x+3)^{3^n} - x^{3^n}}}$ ។

គ_បង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

គេមាន $U_1 = 3$ និង $V_n = \ln(3+U_n) - \ln U_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

យើងបាន $V_n = \ln\left(\frac{3+U_n}{U_n}\right) = \ln\left(1+\frac{3}{U_n}\right)$

នាំឲ្យ $V_{n+1} = \ln\left(1+\frac{3}{U_{n+1}}\right)$ ដោយ $1+\frac{3}{U_{n+1}} = \left(1+\frac{3}{U_n}\right)^3$

គេបាន $V_{n+1} = \ln\left(1+\frac{3}{U_n}\right)^3 = 3\ln\left(1+\frac{3}{U_n}\right) = 3V_n$

ដូចនេះ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 3$

និងតួ $V_1 = \ln\left(1+\dfrac{3}{U_1}\right) = \ln 8$ ។

-គណនា V_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

តាមរូបមន្ត $V_n = V_1 \times q^{n-1} = 3^{n-1}.\ln 8 = 3^n \ln 2$ ។

ឃ-ទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចបញ្ជាក់តម្លៃ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ៖

គេមាន $V_n = \ln\left(1+\dfrac{3}{U_n}\right)$ ដោយ $V_n = 3^n \ln 2 = \ln(2)^{3^n}$

គេទាញ $1+\dfrac{3}{U_n} = (2)^{3^n}$ នាំឲ្យ $U_n = \dfrac{3}{2^{3^n}-1}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{U_n = \dfrac{3}{2^{3^n}-1}}$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ ។

លំហាត់ទី២៧

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = x^2 - 2$ ដែល $x \in IR$

ក-គេយក $U_1 = f(x)$ និង $U_{n+1} = f(U_n)$ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ចូរបង្ហាញថា $U_n = f_n[\, f[.......f[f(x)]......]\,]$ ។

ខ-ស្រាយថាបើ $x > 2$ គេបាន $U_n > 2$ គ្រប់ $n \in IN^*$ ។

គ-គេតាង $V_n = U_n - \sqrt{U_n^{\;2} - 4}$ គ្រប់ $n \in IN^*$ និង $x > 2$ ។

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ចូរបង្ហាញថា $2V_{n+1} = V_n^{\;2}$ ។

ឃ-សន្មតថា $W_n = \ln V_n - \ln 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ចូររកប្រភេទនៃស្វ៊ីត W_n ។

ង_ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកអនុគមន៍ ៖

$$F_n(x) = f_n[f[........f[f(x)].........]]$$

ដំណោះស្រាយ

ក_បង្ហាញថា $U_n = f_n[f[.......f[f(x)].......]]$

យើងមាន $U_1 = f(x)$ ពិត (តាមសម្មតិកម្ម)

$U_2 = f(U_1) = f[f(x)]$ ពិត (ព្រោះ $U_{n+1} = f(U_n)$)

$U_3 = f(U_2) = f[f[f(x)]]$ ពិត

យើងសន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $U_k = f_k[f[.......f[f(x)].......]]$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$

គឺ $U_{k+1} = f_{k+1}[f[.......f[f(x)].......]]$ ពិត

យើងមាន $U_{k+1} = f(U_k) = f[f_k[f[........f[f(x)]......]]] = f_{k+1}[f[.......f[f(x)].......]]$ ពិត

ដូចនេះ $U_n = f_n[f[.......f[f(x)].......]]$ ។

ខ_ស្រាយថាបើ $x > 2$ គេបាន $U_n > 2$ គ្រប់ $n \in IN^*$

យើងមាន $U_{n+1} = f(U_n) = U_n^{\ 2} - 2$

បើ $x > 2$ នោះ $U_1 = f(x) = x^2 - 2 > 2$ ឬ $U_1 > 2$ ពិត

យើងសន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $U_k > 2$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $U_{k+1} > 2$ពិត

យើងមាន $U_{k+1} = U_k^2 - 2$

ដោយ $U_k > 2$ នាំឲ្យ $U_k^2 > 4$ ឬ $U_k^2 - 2 > 4 - 2 = 2$

គេទាញ $U_{k+1} = U_k^2 - 2 > 2$ ពិត ។

ដូចនេះ បើ $x > 2$ គេបាន $U_n > 2$ ។

គ_បង្ហាញថា $2V_{n+1} = V_n^2$

យើងមាន $V_n = U_n - \sqrt{U_n^2 - 4}$

យើងបាន $V_{n+1} = U_{n+1} - \sqrt{U_{n+1}^2 - 4}$ តែ $U_{n+1} = U_n^2 - 2$

$$V_{n+1} = U_n^2 - \sqrt{(U_n^2 - 2)^2 - 4}$$

$$V_{n+1} = U_n^2 - \sqrt{U_n^4 - 4U_n^2}$$

$$V_{n+1} = U_n^2 - U_n\sqrt{U_n^2 - 4}$$

$$2V_{n+1} = 2U_n^2 - 2U_n\sqrt{U_n^2 - 4}$$

$$2V_{n+1} = U_n^2 - 2U_n\sqrt{U_n^2 - 4} + (\sqrt{U_n^2 - 4})^2$$

$$2V_{n+1} = \left(U_n - \sqrt{U_n^2 - 4} \right)^2 = V_n^2$$

ដូចនេះ $2V_{n+1} = V_n^2$ ។

ឃ_រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត w_n ។

គេមាន $W_n = \ln V_n - \ln 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

គេបាន $W_{n+1} = \ln V_{n+1} - \ln 2$ ដោយ $2V_{n+1} = V_n^2$ ឬ $V_{n+1} = \frac{V_n^2}{2}$

$$W_{n+1} = \ln\frac{V_n^2}{2} - \ln 2 = 2\ln V_n - 2\ln 2 = 2W_n$$

ដូចនេះ (W_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$ ។

ង_រកអនុគមន៍ $F_n(x) = f_n[f[.......f[f(x)]........]]$

ដោយ $U_n = f_n[f[.......f[f(x)].......]]$គេទាញបាន $F_n(x) = U_n$ ។

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន (W_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង

$q = 2$ ។

តាមរូបមន្ត $W_n = W_1 \times q^{n-1} = 2^{n-1}.W_1$

ដោយ $W_1 = \ln V_1 - \ln 2 = \ln\left(\frac{V_1}{2}\right)$

តែ $V_1 = U_1 - \sqrt{U_1^2 - 4} = f(x) - \sqrt{f^2(x) - 4}$

$$V_1 = x^2 - 2 + \sqrt{(x^2-2)^2 - 4}$$

$$V_1 = x^2 - 2 - \sqrt{x^4 - 4x^2} = x^2 - 2 - x\sqrt{x^2-4} = \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2-4})^2$$

គេបាន $W_1 = \ln\left[\frac{(x-\sqrt{x^2-4})^2}{4}\right] = \ln\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^2$

ហេតុនេះ $W_n = 2^{n-1}.\ln\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^2 = \ln\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

ដោយ $W^n = \ln V^n - \ln 2 = \ln\left(\frac{V_n}{2}\right)$

គេទាញ $\ln\left(\frac{V_n}{2}\right) = \ln\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

ឬ $V_n = 2\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $V_n = U_n - \sqrt{U_n^{\ 2}-4}$

គេទាញ $U_n = \frac{V_n^{\ 2}+4}{2V_n} = \frac{1}{2}V_n + \frac{2}{V_n}$

ដោយ $V_n = 2\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

គេបាន $U_n = \left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n} + \frac{1}{\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}}$

$$U_n = \left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n} + \frac{\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}}{\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}}$$

$$U_n = \left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n} + \frac{\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}}{\left(\frac{x^2-x^2+4}{4}\right)^{2^n}} = \left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$$

ដូចនេះ $F_n(x) = \left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$ ។

លំហាត់ទី២៨

ក_ប្រសិនបើ $p \geq -1$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ចូរបង្ហាញថា ៖

$(1+p)^n \geq 1+np \quad (1)$ ។

ខ_គេឲ្យ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ជា n ចំនួនមិនអវិជ្ជមាន ។

គេតាង $A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$ និង $G_n = \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3......a_n}$ ។

បង្ហាញថាប្រសិនបើ $G_k \leq A_k$ ហើយ $A_k \neq 0$

គេបាន $G_k{}^k.a_{k+1} \leq A_k{}^{k+1}(1+p)$ ដែល $p = \dfrac{a_{k+1}}{A_k} - 1$ ។

គ_ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 ....a_n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក_បង្ហាញថា ៖ $(1+p)^n \geq 1+np \quad (1)$

តាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុនគេមាន ៖

$(1+p)^n = C_n^0 + C_n^1 p + C_n^2 p^2 + ... + C_n^n p^n$ ដោយ $C_n^0 = 1, C_n^1 = n, C_n^2 = \dfrac{(n-1)n}{2}$

គេបាន $(1+p)^n = 1 + np + \dfrac{(n-1)n}{2} p^2 + ... + p^n$

ដោយចំពោះគ្រប់ $p \geq -1$ គេមាន $\dfrac{(n-1)n}{2} p^2 + ... + p^n \geq 0$

ដូចនេះ $(1+p)^n \geq 1+np \quad (1)$ ។

ខ_បង្ហាញថា $G_k^{\ k}.a_{k+1} \le A_k^{\ k+1}(1+p)$

ប្រសិនបើ $G_k \le A_k$ នោះ $G_k^k a_{k+1} \le A_k^k a_{k+1}$

ដោយ $A_k^k a_{k+1} = A_k^k[\,A_k + (a_{k+1} - A_k)] = A_k^{k+1}\,[\,1 + (\frac{a_{k+1}}{A_k} - 1)] = A_k^{k+1}(1+p)$

ព្រោះ $p = \frac{a_{k+1}}{A_k} - 1$ ។ ដូចនេះ $G_k^{\ k}.a_{k+1} \le A_k^{\ k+1}(1+p)$ ។

គ_ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots.. + a_n \ge n\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots. a_n}$

យើងមាន $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 = a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 \ge 0$

នាំឲ្យ $a_1 + a_2 \ge 2\sqrt{a_1 a_2}$ ពិត ។

សន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $a_1 + a_2 + \ldots.. + a_k \ge k\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots.. a_k}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $a_1 + a_2 + \ldots.. + a_{k+1} \ge k\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots.. a_{k+1}}$

តាមការសន្មតយើងមាន $a_1 + a_2 + \ldots.. + a_k \ge k\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots.. a_k}$

សមមូល $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k}{k} \ge \sqrt[k]{a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_k}$ ឬ $A_k \ge G_k$

ដែល $A_k = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots. + a_k}{k}$ និង $G_k = \sqrt[k]{a_1.a_2.a_3 \ldots\ldots a_k}$ ។

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $G_k^{\ k}.a_{k+1} \le A_k^{\ k+1}(1+p)$

ដោយ $G_k^k a_{k+1} = a_1.a_2 \ldots.. a_k a_{k+1} = G_{k+1}^{\ k+1}$ គេទាញ $G_{k+1}^{k+1} \le A_k^{\ k+1}(1+p)$

ដែល $p = \frac{a_{k+1}}{A_k} - 1 \ge -1\,,\ A_k \ne 0$ ។

តាមរូបមន្ត (1) គេបាន $(1+p) \le (1 + \frac{p}{k+1})^{k+1}$

នាំឲ្យ $A_k^{k+1}(1+p) \le A_k^{k+1}(1+\frac{p}{k+1})^{k+1}$ ។

គេទាញ $G_{k+1}^{k+1} \le A_k^{k+1}(1+\frac{p}{k+1})^{k+1}$ ឬ $G_{k+1} \le A_k(1+\frac{p}{k+1})$

ដោយ $A_k(1+\frac{p}{k+1}) = A_k\left[1+\frac{1}{k+1}(\frac{a_{k+1}}{A_k}-1)\right] = A_k + \frac{a_{k+1}-A_k}{k+1}$

$$= \frac{A_k k + A_k + a_{k+1} - A_k}{k+1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1}}{k+1} = A_{k+1}$$

គេទាញ $G_{k+1} \le A_k^{k+1}(1+p) \le A_{k+1}$

ឬ $a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1} \ge k\sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_{k+1}}$ ពិត

ដូចនេះ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \ge n\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$ ។

✍✍✍✍✍

លំហាត់ទី២៩

គេឲ្យ $$\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2\times 3}\right)$$

$$\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}\times\frac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3\times 4}\right)$$

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅនិងស្រាយរូបមន្តនោះផង ។

ដំណោះស្រាយ

រករូបមន្តទូទៅ៖

គេមាន $\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2\times 3}\right)$ និង $\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}\times\frac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3\times 4}\right)$

តាមឧទាហរណ៍ខាងលើនេះយើងបានរូបមន្តទូទៅដូចខាងក្រោម ៖

$$\boxed{\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}\times\frac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}}\times......\times\frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n\times(n+1)}\right)}$$ ។

ការស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត ៖

តាង $$P_n=\frac{1-\frac{1}{2^3}}{1+\frac{1}{2^3}}\times\frac{1-\frac{1}{3^3}}{1+\frac{1}{3^3}}\times......\times\frac{1-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{1-\frac{1}{k^3}}{1+\frac{1}{k^3}}\right)$$

យើងមាន $\dfrac{1-\dfrac{1}{k^3}}{1+\dfrac{1}{k^3}}=\dfrac{k^3-1}{k^3+1}=\dfrac{k-1}{k+1}\times\dfrac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\dfrac{k-1}{k}\times\dfrac{k}{k+1}\times\dfrac{k(k+1)+1}{(k-1)k+1}$

គេបាន
$$P_n=\prod_{k=2}^{n}\left[\frac{k-1}{k}\times\frac{k}{k+1}\times\frac{k(k+1)+1}{(k-1)k+1}\right]$$
$$=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right)\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\right)\prod_{k=2}^{n}\left[\frac{k(k+1)+1}{(k-1)k+1}\right]$$
$$=\frac{1}{n}.\frac{2}{n+1}.\frac{n(n+1)+1}{1.2+1}$$
$$=\frac{2}{3}\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}$$
$$=\frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{n\times(n+1)}\right]$$

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{1-\dfrac{1}{2^3}}{1+\dfrac{1}{2^3}}\times\dfrac{1-\dfrac{1}{3^3}}{1+\dfrac{1}{3^3}}\times......\times\dfrac{1-\dfrac{1}{n^3}}{1+\dfrac{1}{n^3}}=\dfrac{2}{3}\left(1+\dfrac{1}{n\times(n+1)}\right)}$ ។

លំហាត់ទី៣០

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0=4 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n-\dfrac{2}{3}\ ;\ n\in IN \end{cases}$

ក. គេតាង $v_n=1+u_n$ ។ បង្ហាញថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n=v_0+v_1+v_2+....+v_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n និង $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ។

គ. ចូរគណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (v_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ៖

យើងមាន $v_n = 1 + u_n$

$$v_{n+1} = 1 + u_{n+1}$$

$$v_{n+1} = 1 + \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3}$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}(1 + u_n) = \frac{2}{3}v_n$$

ដូចនេះ (v_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = \frac{1}{3}$ និងតួ $v_0 = 1 + u_0 = 5$

ខ. គណនាផលបូក S_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ៖

យើងបាន $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n = v_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ដោយ $\begin{cases} v_0 = 5 \\ q = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \dfrac{15}{2}\left[1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\right]}$ និង $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{15}{2}}$ ។

គ. គណនា v_n និង u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n$ ដោយ $\begin{cases} v_0 = 5 \\ q = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{v_n = 5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $v_n = 1 + u_n$ នាំឲ្យ $u_n = -1 + v_n$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = -1 + 5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$ និង $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1}$ ។

<u>លំហាត់ទី៣១</u>

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n)កំនត់ដោយ $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{3}{2} \ ; \ n \in IN \end{cases}$

ក. កំនត់ចំនួនពិត k ដើម្បីឲ្យ $v_n = u_n + k$ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។

ខ. ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. កំនត់ចំនួនពិត k ដើម្បីឲ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

យើងមាន $v_n = u_n + k$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + k$$

$$v_{n+1} = (\frac{1}{2}u_n - \frac{3}{2}) + k$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + k) + \frac{1}{2}k - \frac{3}{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}k - \frac{3}{2} \quad (1)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) ដើម្បីឲ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រលុះត្រាតែ

$\frac{1}{2}k - \frac{3}{2} = 0$ ដូចនេះ $\boxed{k = 3}$ ។

ខ. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ៖

ចំពោះ $k = 3$ គេមាន $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ នាំឲ្យ (v_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

មានរេសុង $q = \frac{1}{2}$និងតួ $v_0 = u_0 + k = 2 + 3 = 5$ ។

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ។ ដោយ $v_n = u_n + k$

នាំឲ្យ $u_n = -k + v_n$

ដូចនេះ $\boxed{u_n = -3 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ និង $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -3}$ ។

លំហាត់ទី៣២

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 5$ និង $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2n + 3$ ($n \in IN$)

ចូរគណនា u_n នៃស្វ៊ីត (u_n) ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n នៃស្វ៊ីត (u_n) ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងតាង $u_n = v_n + an + b$ ដែល $a , b \in IR$

យើងបាន $u_{n+1} = v_{n+1} + an + a + b$ ដោយ $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2n + 3$

គេបាន $v_{n+1} + an + a + b = \frac{1}{2}(v_n + an + b) - 2n + 3$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \left[(-\frac{1}{2}a - 2)n + (3 - a - \frac{1}{2}b)\right] \quad (*)$$

បើ $\begin{cases} -\frac{1}{2}a - 2 = 0 \\ 3 - a - \frac{1}{2}b = 0 \end{cases}$ នាំឲ្យ $a = -4$; $b = 14$

ទំនាក់ទំនង (*) ទៅជា $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ នាំឲ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

មានរេសុង $q=\frac{1}{2}$ តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n$

ដោយ $u_n = v_n + an + b = v_n - 4n + 14$

ចំពោះ $n = 0$ គេបាន $u_0 = v_0 + 14$ នាំឲ្យ $v_0 = u_0 - 14 = 5 - 14 = -9$

គេបាន $v_n = -9 \times \frac{1}{2^n} = -\frac{9}{2^n}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{u_n = -\frac{9}{2^n} - 4n + 14}$ ។

លំហាត់ទី៣៣

f ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង ៖

$f(0) = f(1) = 1$ និង $f(n+2) = 2f(n+1) - f(n) + 2n + 1 \ , \forall n \in IN$

ចូរកំនត់រក $f(n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រក $f(n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

តាង $g(n) = f(n+1) - f(n)$

នាំឲ្យ $g(n+1) = f(n+2) - f(n+1)$

$$g(n+1) = 2f(n+1) - f(n) + 2n + 1 - f(n+1)$$
$$g(n+1) = f(n+1) - f(n) + 2n + 1 = g(n) + 2n + 1$$
$$g(n+1) - g(n) = 2n + 1$$

យើងបាន $\sum_{k=0}^{(n-1)} [g(k+1) - g(k)] = \sum_{k=0}^{(n-1)} (2k+1)$

$g(n) - g(0) = 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$ តែ $g(0) = 0$

គេបាន $g(n)=n^2$ ដោយ $g(n)=f(n+1)-f(n)$

គេទាញ $f(n+1)-f(n)=n^2$

យើងបាន $\sum_{k=0}^{(n-1)}[f(k+1)-f(k)]=\sum_{k=0}^{(n-1)}(k^2)$

$$f(n)-f(0)=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$ ដោយ $f(0)=1$

ដូចនេះ $f(n)=1+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{(n+1)(2n^2-5n+6)}{6}$ ។

លំហាត់ទី៣៤

គេឲ្យ $\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{2^2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}=2\cos\frac{\pi}{2^3}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^4}$

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅ និង ស្រាយបញ្ជាក់

រូបមន្តនោះផង ។

ដំណោះស្រាយ

រករូបមន្តទូទៅ ៖

គេមាន $\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{2^2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}=2\cos\frac{\pi}{2^3}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^4}$

តាមលំនាំឧទាហរណ៍យើងអាចទាញរករូបមន្តទូទៅដូចខាងក្រោម ៖

$$\boxed{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots\dots\dots+\sqrt{2}}}}}_{(n)}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនេះ ៖

យើងតាង $A_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots\dots+\sqrt{2}}}}}_{(n)}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$

យើងមាន $A_1=\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{2^2}$ ពិត

យើងឧបមាថាវាពិតដល់តួទី p គឺ $A_p=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+......+\sqrt{2}}}}}_{(p)}=2\cos\frac{\pi}{2^{p+1}}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $p+1$ គឺ $A_{p+1}=2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$ ពិត

យើងមាន $A_{p+1}=\sqrt{2+A_p}$ ដោយតាមការឧបមា $A_p=2\cos\frac{\pi}{2^{p+1}}$

យើងបាន $A_{p+1}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{p+1}}}=\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{p+2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.........+\sqrt{2}}}}}_{(n)}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$ ។

លំហាត់ទី៣៥

គេឲ្យស្វ៊ីត (x_n) កំនត់ដោយ $x_1=\frac{4}{3}$

និង $(2n+1)x_n=2^n+2nx_{n-1}$, $n=2;3;4;....$

ចូរស្រាយតាមវិចារដោយកំណើនថា $x_n=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{C(n;i)}{2i+1}\right]$, $n=1;2;3;...$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយតាមវិចារដោយកំណើនថា $x_n=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{C(n;i)}{2i+1}\right]$, $n=1;2;3;...$

បើ $n=1$ គេមាន $x_1=\sum_{i=0}^{1}\left[\frac{C(1;i)}{2i+1}\right]=\frac{C(1;0)}{1}+\frac{C(1;1)}{3}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ ពិត

(ព្រោះ $C(1;0)=\frac{1!}{0!(1-0)!}=1$, $C(1;1)=\frac{1!}{1!(1-1)!}=1$)

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី n គឺ $x_n=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{C(n;i)}{2i+1}\right]$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $(n+1)$ គឺ $x_{n+1}=\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{C(n+1;i)}{2i+1}\right]$ ពិត

យើងមាន $(2n+1)x_n=2^n+2nx_{n-1}$, $n=2;3;4;....$

គេបាន $x_n=\frac{2^n}{2n+1}+\frac{2n}{2n+1}x_{n-1}$ នាំឲ្យ $x_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{2n+3}+\frac{2n+2}{2n+3}x_n$

$$x_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{2n+3}+\frac{2n+2}{2n+3}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{C(n;i)}{2i+1}\right]$$

ដោយ $C(n,i)=\frac{n!}{i!(n-i)!}$

ហើយ $C(n+1,i)=\frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!}=\frac{n!(n+1)}{i!(n-i)!(n+1-i)}=\frac{n+1}{n+1-i}C(n,i)$

គេទាញ $C(n;i)=\frac{n+1-i}{n+1}C(n+1;i)$

គេបាន $x_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{2n+3}+\frac{2(n+1)}{2n+3}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{n+1-i}{(n+1)(2i+1)}C(n+1;i)\right]$

$$x_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{2n+3}+\frac{2}{2n+3}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{n+1-i}{2i+1}C(n+1;i)\right]\quad(1)$$

យើងពិនិត្យ $\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{C(n+1;i)}{2i+1}\right]=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{C(n+1,i)}{2i+1}\right]+\frac{C(n+1;n+1)}{2(n+1)+1}$

$$\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{C(n+1;i)}{2i+1}\right]=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{C(n+1,i)}{2i+1}\right]+\frac{1}{2n+3}$$

(ព្រោះ $C(n+1;n+1)=1$)

$$\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{C(n+1;i)}{2i+1}\right]=\frac{2}{2n+3}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{(2n+3)}{2(2i+1)}C(n+1;i)\right]+\frac{1}{2n+3}$$

ដោយ $\frac{2n+3}{2(2i+1)}=\frac{2(n+1-i)+(1+2i)}{2(2i+1)}=\frac{n+1-i}{2i+1}+\frac{1}{2}$

$$\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{C(n+1;i)}{2i+1}\right]=\frac{2}{2n+3}\sum_{i=0}^{n}\left[\left(\frac{n+1-i}{2i+1}+\frac{1}{2}\right)C(n+1;i)\right]+\frac{1}{2n+3}$$

$$\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{C(n+1;i)}{2i+1}\right]=\frac{2}{2n+3}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{n+1-i}{2i+1}C(n+1;i)\right]+\frac{1}{2n+3}\sum_{i=0}^{n}\left[C(n+1;i)\right]+\frac{1}{2n+3}$$

តាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុនគេមាន ៖

$$(1+x)^{n+1}=\sum_{i=0}^{n+1}\left[C(n+1;i)\,x^{i}\right]=\sum_{i=0}^{n}\left[C(n+1;i)x^{i}\right]+C(n+1,n+1)\,x^{n+1}$$

យក $x=1$ គេបាន $2^{n+1}=\sum_{i=0}^{n}\left[C(n+1;i)\right]+1$ (ព្រោះ $C(n+1;n+1)=1$)

គេទាញ $\sum_{i=0}^{n}\left[C(n+1;i)\right]=2^{n+1}-1$

គេបាន $\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{C(n+1;i)}{2i+1}\right]=\frac{2}{2n+3}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{n+1-i}{2i+1}C(n+1;i)\right]+\frac{1}{2n+3}(2^{n+1}-1)+\frac{1}{2n+3}$

$$\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{C(n+1;i)}{2i+1}\right]=\frac{2}{2n+3}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{n+1-i}{2i+1}C(n+1;i)\right]+\frac{2^{n+1}}{2n+3}\quad(2)$$

តាម (1) និង (2) គេទាញ $x_{n+1}=\sum_{i=0}^{n+1}\left[\frac{C(n+1;i)}{2i+1}\right]$ ពិត

ដូចនេះ $x_{n}=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{C(n;i)}{2i+1}\right]$ ។

លំហាត់ទី៣៦

ចូរគណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=e^{x}\sin x$

ដំណោះស្រាយ

គណនាដេរីវេទី n ៖

តាង $u=e^{x}$ និង $v=\sin x$

យើងបាន $u'=e^{x}$, $u''=e^{x}$; $u'''=e^{x}$;....; $u^{(n)}=e^{x}$

ហើយ $v'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$$v''=\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+\frac{2\pi}{2})$$

$$v'''=\cos(x+\frac{2\pi}{2})=\sin(x+\frac{3\pi}{2})$$

$$-------------------$$

$$v^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$$

តាមរូបមន្តឡិបនិចគេមាន $(u.v)^{(n)}=\sum_{p=0}^{n}\left(C_n^p\, u^{(n-p)}\, v^p\right)$

យើងបាន $y^{(n)}=\sum_{p=0}^{n}\left[C_n^p\, e^x \sin(x+\frac{p\pi}{2})\right]=e^x \sum_{p=0}^{n}\left[C_n^p \sin(x+\frac{p\pi}{2})\right]$

តាង $A=\sum_{p=0}^{n}\left[C_n^p \cos(x+\frac{p\pi}{2})\right]$; $B=\sum_{p=0}^{n}\left[C_n^p \sin(x+\frac{p\pi}{2})\right]$

គេបាន $A+i.B=\sum_{p=0}^{n}\left[C_n^p \cos(x+\frac{p\pi}{2})\right]+i\sum_{p=0}^{n}\left[C_n^p \sin(x+\frac{p\pi}{2})\right]$

$$=\sum_{p=0}^{n}\left[C_n^p\left(\cos(x+\frac{p\pi}{2})+i.\sin(x+\frac{p\pi}{2})\right)\right]=e^{ix}\ .\sum_{p=0}^{n}\left[C_n^p\, e^{i.\frac{p\pi}{2}}\right] \quad (1)$$

តាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុនគេបាន $(1+e^{i.\frac{\pi}{2}})^n=\sum_{p=0}^{n}\left[C_n^p\, e^{i\frac{p\pi}{2}}\right] \quad (2)$

តាម (1) និង (2) យើងទាញបាន $A+i.B=e^{i.x}\left(1+e^{i.\frac{\pi}{2}}\right)^n$

ដោយ $1+e^{i\frac{\pi}{2}}=1+i=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i.\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}e^{i.\frac{\pi}{4}}$

គេបាន $A+i.B=e^{i.x}\ \sqrt{2}^n\ e^{i.\frac{n\pi}{4}}=(\sqrt{2})^n\ e^{i(x+\frac{n\pi}{4})}$ គេទាញ

$A=(\sqrt{2})^n\cos(x+\frac{n\pi}{4})$; $B=(\sqrt{2})^n\ \sin(x+\frac{n\pi}{4})$ ។

ដូចនេះ $\boxed{y^{(n)}=(\sqrt{2})^n e^x \sin(x+\frac{n\pi}{4})}$ ។

លំហាត់ទី៣៧

គេឱ្យស្វីតនៃមួយចំនួន $U_1, U_2, U_3, ..., U_n$ ដែលកំនត់ដោយ :

$U_1+U_2+U_3+.....+U_n = an^2+bn$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ និង $a\neq 0$ $, a, b\in IR$ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាស្វីតនេះជាស្វីតនព្វន្ត ។

ខ. ចូរគណនាតួទីមួយ U_1 និង ផលសងរួម d ជាអនុគមន៍នៃ a និង b ។

ដំណោះស្រាយ

ក. តាង $S_n = U_1+U_2+U_3+....+U_n = an^2+bn$

យើងបាន $S_{n+1} = U_1+U_2+U_3+....+U_n+U_{n+1} = S_n+U_{n+1} = a(n+1)^2+b(n+1)$

គេទាញ $U_{n+1} = a(n+1)^2+b(n+1)-S_n = an^2+2an+a+bn+b-an^2-bn$

ឬ $U_{n+1} = 2an+a+b$

និង $U_n = 2a(n-1)+a+b = 2an-2a+a+b = 2an-a+b$

ដោយ $U_{n+1}-U_n = (2an+a+b)-(2an-a+b) = 2a$ ថេរ

ទំនាក់ទនងនេះបញ្ជាក់ថា (U_n) ជាស្វីតនព្វន្ត ។

ខ.គណនាតួទីមួយ U_1 និង ផលសងរួម d ជាអនុគមន៍នៃ a និង b

យើងមាន $U_n = 2an-a+b$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

ចំពោះ $n=1$ គេបាន $U_1 = 2a-a+b = a+b$ ហើយ $d = U_{n+1}-U_n = 2a$

ដូចនេះ $\boxed{U_1 = a+b \quad , \quad d = 2a}$ ។

លំហាត់ទី៣៨

គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត $U_1, U_2, U_3, ..., U_n$ ដែលមានផលសងរួម d ហើយ $d \neq 0$ ។

គេពិនិត្យស្វ៊ីត (V_n) មួយកំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ដោយ ទំនាក់ទំនង :

$V_n = a^{U_n}$, $a > 0$, $a \neq 1$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា V_n ជាអនុគមន៍នៃ a, U_1, d និង n ។

ខ. ចូរស្រាយថា $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n = a^{U_1} . \dfrac{1 - a^{nd}}{1 - a^d}$ ។

គ. ចូរគណនាផលគុណ $P_n = V_1 \times V_2 \times V_3 \times ..... \times V_n$ ជាអនុគមន៍នៃ a, U_1 និង n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន $V_n = a^{U_n}$ នាំឱ្យ $V_{n+1} = a^{U_{n+1}}$

យើងបាន $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{a^{U_{n+1}}}{a^{U_n}} = a^{U_{n+1} - U_n} = a^d$ ថេរ (ព្រោះ $U_{n+1} - U_n = d$)

ដូចនេះ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = a^d$ ។

គណនា V_n ជាអនុគមន៍នៃ a, U_1, d និង n

តាមរូបមន្ត $V_n = V_1 \times q^{n-1}$ ដោយ $V_1 = a^{U_1}$ និង $q = a^d$

គេបាន $\boxed{V_n = a^{U_1} . a^{(n-1)d} = a^{U_1 + (n-1)d}}$ ។

ខ.ស្រាយថា $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n = a^{U_1} . \frac{1 - a^{nd}}{1 - a^d}$

តាមរូបមន្ត $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n = V_1 . \frac{1 - q^n}{1 - q}$

ដោយ $V_1 = a^{U_1}$ និង $q = a^d$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n = a^{U_1} . \frac{1 - a^{nd}}{1 - a^d}}$ ។

គ.គណនាផលគុណ $P_n = V_1 \times V_2 \times V_3 \times ..... \times V_n$ ជាអនុគមន៍នៃ a, U_1 និង n

យើងបាន $P_n = V_1 \times V_2 \times V_3 \times ..... \times V_n$

$$= a^{U_1} . a^{U_2} . a^{U_3} .... a^{U_n}$$

$$= a^{U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n} = a^{\frac{n(U_1 + U_n)}{2}}$$

ដូចនេះ $\boxed{P_n = a^{\frac{n(U_1 + U_n)}{2}}}$ ។

លំហាត់ទី៣៩

គេឱ្យ (U_n) ជាស្វ៊ីតកំនត់ដោយ $U_{n+1} = aU_n + b$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

និង $a \neq 0, a, b \in IR$

ក. ចំពោះ $a = 1$ ចូររកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (U_n) ។

ខ. ចំពោះ $a \neq 1$ គេឧបមាថា $U_n = V_n + k$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

គ. ឧបមាថា $a \neq 1$ ។ ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ a, b និង n និងតួ U_1 ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ចំពោះ $a=1$ រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (U_n)

ចំពោះ $a=1$ គេមានទំនាក់ទំនង $U_{n+1}=U_n+b$

-បើ $b=0$ នោះ $U_{n+1}=U_n \ ,\forall n\in IN^*$ នាំឱ្យ(U_n) ជាស្វ៊ីតថេរ ។

-បើ $b\neq 0$ នោះ $U_{n+1}=U_n+b$ នាំឱ្យ(U_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម b

ខ. កំនត់តម្លៃ k ដើម្បីឱ្យ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ចំពោះ $a\neq 1$ គេមាន $U_{n+1}=aU_n+b$

គេមាន $U_n=V_n+k$ នាំឱ្យ $U_{n+1}=V_{n+1}+k$ ដោយ $U_{n+1}=aU_n+b$

គេបាន $V_{n+1}+k=a(V_n+k)+b$ ឬ $V_{n+1}=aV_n+(a-1)k+b$

ដើម្បីឱ្យ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រលុះត្រាតែ $(a-1)k+b=0$ គេទាញបាន

$k=-\dfrac{b}{a-1}=\dfrac{b}{1-a}$ ។

គ. គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ a, b និង n និងតួ U_1

តាមដំណោះស្រាយខាងលើយើងឃើញថាចំពោះ $a\neq 1$ ពេលដែល $k=\dfrac{b}{1-a}$

នោះស្វ៊ីត (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=a$ និងតួ $V_1=U_1-k=U_1-\dfrac{b}{1-a}$

តាមរូបមន្ត $V_n=V_1\times q^{n-1}=(U_1-\dfrac{b}{1-a}).a^{n-1}$ ដោយ $U_n=V_n+k$

ដូចនេះ $\boxed{U_n=(U_1-\dfrac{b}{1-a}).a^{n-1}+\dfrac{b}{1-a}}$ ។

លំហាត់ទី៤០

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n) កំនត់ដោយ $a_1 = 4$

និង $\forall n \in IN^* : a_{n+1} = \dfrac{4a_n - 9}{a_n - 2}$

ក. ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ចូរបង្ហាញថា $a_n \neq 3$ ។

ខ. គេយក $b_n = \dfrac{1}{a_n - 3}$ ។ ចូររកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (b_n) ?

គ. ចូរកំនត់រត្ត b_n និង a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ឃ. គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k . b_k)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ បង្ហាញថា $a_n \neq 3$

យើងមាន $a_1 = 4 \neq 3$ ពិត

$$a_2 = \frac{4a_1 - 9}{a_1 - 2} = \frac{16 - 9}{4 - 2} = \frac{7}{2} \neq 3 \text{ ពិត}$$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $a_k \neq 3$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $a_{k+1} \neq 3$ ពិត ។

យើងមាន $a_k \neq 3$ និង $a_{k+1} = \dfrac{4a_k - 9}{a_k - 2}$

យើងបាន $a_{k+1} - 3 = \dfrac{4a_k - 9}{a_k - 2} - 3 = \dfrac{a_k - 3}{a_k - 2} \neq 0$ ព្រោះ $a_k \neq 3$

គេទាញបាន $a_{k+1} \neq 3$ ពិត ។

ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ គេបាន $a_n \neq 3$ ។

ខ.រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (b_n)

គេមាន $b_n = \dfrac{1}{a_n - 3}$ នាំឱ្យ $b_{n+1} = \dfrac{1}{a_{n+1} - 3} = \dfrac{1}{\dfrac{4a_n - 9}{a_n - 2} - 3} = \dfrac{a_n - 2}{a_n - 3}$

យើងបាន $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n - 2}{a_n - 3} - \dfrac{1}{a_n - 3} = \dfrac{a_n - 3}{a_n - 3} = 1$

ដោយ $b_{n+1} - b_n = 1$ ថេរនោះ (b_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d = 1$ ។

គ.កំនត់រត្ត b_n និង a_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមរូបមន្ត $b_n = b_1 + (n-1).d$ ដូចនេះ $\boxed{b_n = n}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $b_n = \dfrac{1}{a_n - 3}$ នាំឱ្យ $a_n = \dfrac{1}{b_n} + 3$

ដូចនេះ $\boxed{a_n = \dfrac{1}{n} + 3}$ ។

គណនាលីមីត

យើងមាន $a_n = \dfrac{1}{n} + 3$ កាលណា $n \to +\infty$ នោះ $\dfrac{1}{n} \to 0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 3}$ ។

ឃ. គណនាផលបូក $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k . b_k)$

យើងមាន $a_k = \dfrac{1}{k} + 3$ និង $b_k = k$ នាំឱ្យ $a_k . b_k = k(\dfrac{1}{k} + 3) = 3k + 1$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}(3k+1) = 4+7+10+........+(3n+1) = \frac{n(4+3n+1)}{2} = \frac{n(3n+5)}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \frac{n(3n+5)}{2}}$ ។

លំហាត់ទី៤១

គេឱ្យស្វ៊ីត (U_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} U_1 = 5 \\ U_n = 2U_{n-1} - n \quad , \forall n \in IN^* \end{cases}$

ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៏នៃ n រួចទាញរកលីមីត $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{U_n}{2^n}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាU_n ជាអនុគមន៏នៃ n

យើងមាន $U_n = 2U_{n-1} - n \quad (1)$

តាង $U_n = V_n + an + b$ នាំឱ្យ $U_{n-1} = V_{n-1} + a(n-1) + b$ ដែល $a, b \in IR$

ទំនាក់ទំនង (1) អាចសរសេរ $V_n + an + b = 2[V_{n-1} + a(n-1) + b] - n$

$$V_n + an + b = 2V_{n-1} + 2an - 2a + 2b - n$$

$$V_n = 2V_{n-1} + (a-1)n - 2a + b \quad (2)$$

តាមទំនាក់ទំនង (2) បើ $\begin{cases} a-1=0 \\ -2a+b=0 \end{cases}$ ឬ $a=1 , b=2$

នោះគេបាន $V_n = 2V_{n-1}$ នាំឱ្យ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=2$ ។

តាមរូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រយើងបាន $V_n = V_1 \times q^{n-1}$

ដោយ $U_n = V_n + an + b = V_n + n + 2$ ព្រោះ $a=1 , b=2$

នាំឱ្យគេទាញ $U_1 = V_1 + 1 + 2 = 5$ ឬ $V_1 = 2$ ។

គេបាន $V_n = 2\times 2^{n-1} = 2^n$ តែ $U_n = V_n + n + 2$ នាំឱ្យ $U_n = 2^n + n + 2$

ដូចនេះតួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $\boxed{U_n = 2^n + n + 2}$ ។

ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{U_n}{2^n}\right)$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{U_n}{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2^n + n + 2}{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{n+2}{2^n}\right) = 1$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{U_n}{2^n}\right) = 1}$ ។

លំហាត់ទី៤២

គេឱ្យស្វ៊ីត (U_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n + n^2 - n + 1 \ , \ \forall n \in IN \end{cases}$

ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៏នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{U_n}{n^2}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា U_n ជាអនុគមន៏នៃ n

យើងមាន $U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n + n^2 - n + 1 \quad (1)$

បើសិនជាយើងបង្កើតស្វ៊ីត (V_n) មួយដែល កំនត់ដោយ :

$V_n = U_n + an^2 + bn + c \ \ (2) \quad , \forall n \in IN$

ហើយ a, b, c ជាបីចំនួនពិត ។

យើងបាន $V_{n+1} = U_{n+1} + a(n+1)^2 + b(n+1) + c$

$$V_{n+1}=U_{n+1}+an^2+(2a+b)n+(a+b+c)\ (3)$$

ដោយយក (1) ជំនួសក្នុង (3) គេបានទំនាក់ទំនង :

$$V_{n+1}=\frac{1}{3}U_n+n^2-n+1+an^2+(2a+b)n+(a+b+c)$$

$$V_{n+1}=\frac{1}{3}U_n+(a+1)n^2+(2a+b-1)n+(a+b+c+1)$$

$$3V_{n+1}=U_n+3(a+1)n^2+3(2a+b-1)n+3(a+b+c+1)\ (4)$$

ដកសមីការ (4) និង (2) អង្គ និង អង្គយើងបាន :

$$3V_{n+1}-V_n=3(a+1)n^2+3(2a+b-1)n+3(a+b+c+1)-an^2-bn-c$$

$$3V_{n+1}-V_n=(2a+3)n^2+(6a+2b-3)n+(3a+3b+2c+3)\ \ (5)$$

បើ $\begin{cases}2a+3=0\\6a+2b-3=0\\3a+3b+2c+3=0\end{cases}$ នាំឱ្យ $a=-\frac{3}{2}$, $b=6$, $c=-\frac{33}{4}$

ទំនាក់ទំនង (5) ក្លាយទៅជា $3V_{n+1}-V_n=0$ ឬ $V_{n+1}=\frac{1}{3}V_n$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=\frac{1}{3}$ ។

តាមរូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រយើងបាន $V_n=V_0\times q^n$ ។

ចំពោះ $a=-\frac{3}{2}$, $b=6$, $c=-\frac{33}{4}$ គេមាន $V_n=U_n-\frac{3}{2}n^2+6n-\frac{33}{4}$

បើ $n=0$ គេបាន $V_0=U_0-\frac{33}{4}=1-\frac{33}{4}=-\frac{29}{4}$ នាំឱ្យ $V_n=-\frac{29}{4}(\frac{1}{3})^n$ ។

ដោយហេតុថា $V_n=U_n-\frac{3}{2}n^2+6n-\frac{33}{4}$ នាំឱ្យ $U_n=V_n+\frac{3}{2}n^2-6n+\frac{33}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{U_n=-\frac{29}{4}.\frac{1}{3^n}+\frac{3}{2}n^2-6n+\frac{33}{4}}$ ។

ទាញរកលីមីត $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{U_n}{n^2}\right)$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $U_n = -\frac{29}{4}\frac{1}{3^n}+\frac{3}{2}n^2-6n+\frac{33}{4}$

យើងបាន $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{U_n}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{29}{4n^2}.\frac{1}{3^n}+\frac{3}{2}-\frac{6}{n}+\frac{33}{4n^2}\right)=\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{U_n}{n^2}\right)=\frac{3}{2}}$ ។

លំហាត់ទី៤៣

គេឱ្យស្វ៊ីត (U_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + (n+1)2^n \end{cases}$, $\forall n \in IN^*$

ក. ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{U_n}{U_{n+1}-U_n}\right]$

ដំណោះស្រាយ

ក.គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $U_{n+1} = U_n + (n+1).2^n$ នាំឱ្យ $U_{n+1} - U_n = (n+1)2^n$

ដោយ $(n+1)2^n = [2n-(n-1)].2^n = n.2^{n+1} - (n-1).2^n$

គេទាញ $U_{n+1} - U_n = n.2^{n+1} - (n-1)2^n$

យើងបាន $\begin{cases} U_2 - U_1 = 2^2 - 0 \\ U_3 - U_2 = 2.2^3 - 2^2 \\ U_4 - U_3 = 3.2^4 - 2.2^3 \\ ------------- \\ U_n - U_{n-1} = (n-1)2^n - (n-2)2^{n-1} \end{cases}$ +

បូកទំនាក់ទំនងនេះគេបាន $U_n - U_1 = (n-1)2^n$ នាំឱ្យ $U_n = 1 + (n-1).2^n$

ដូចនេះ $\boxed{U_n = 1 + (n-1).2^n}$ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{U_n}{U_{n+1}-U_n}\right]$

យើងមាន $U_n = 1 + (n-1).2^n$ និង $U_{n+1} - U_n = (n+1).2^n$

យើងបាន $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{U_n}{U_{n+1}-U_n}\right]=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1+(n-1).2^n}{(n+1).2^n}\right]=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{(n+1).2^n}+\frac{n-1}{n+1}\right]=1$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{U_n}{U_{n+1}-U_n}\right]=1}$ ។

លំហាត់ទី៤៤

គេឧបមាថា S_m និង S_n ជាផលបូក m តួដំបូង និង n តួដំបូងរៀងគ្នា

នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ដែល $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}; (m\neq n)$ ។

គេតាង U_m ជាតួទី m និង U_n ជាតួទី n ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{U_m}{U_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$?

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{U_m}{U_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$?

យើងមាន $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$ ដោយ $S_m=\frac{m(U_1+U_m)}{2}$; $S_n=\frac{n(U_1+U_n)}{2}$

គេបាន $\frac{m(U_1+U_m)}{2}\times\frac{2}{n(U_1+U_n)}=\frac{m^2}{n^2}$ នាំឱ្យ $\frac{U_1+U_m}{U_1+U_n}=\frac{m}{n}$ (1)

ដោយ $U_m=U_1+(m-1).d$, $U_n=U_1+(n-1).d$

ដែល d ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីត ។

យក $U_m=U_1+(m-1).d$, $U_n=U_1+(n-1).d$ ជួសក្នុង (1) គេបាន

$\frac{2U_1+(m-1).d}{2U_1+(n-1)d}=\frac{m}{n}$ ឬ $2U_1n+n(m-1)d=2U_1m+m(n-1)d$

គេទាញ $U_1 = \frac{n(m-1)d - m(n-1)d}{2(m-n)} = \frac{d(mn-n-mn+m)}{2(m-n)} = \frac{d}{2}$

ព្រោះ $m \neq n$ ។

យើងបាន $U_m = \frac{d}{2} + (m-1)d = \frac{2m-1}{2}.d.\ ; U_n = \frac{d}{2} + (n-1).d = \frac{2n-1}{2}.d$

គេបាន $\frac{U_m}{U_n} = \frac{\frac{2m-1}{2}.d}{\frac{2n-1}{2}.d} = \frac{2m-1}{2n-1}$ បើ $d \neq 0$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\frac{U_m}{U_n} = \frac{2m-1}{2n-1}}$ ។

លំហាត់ទី៤៥

គេឱ្យស្ទីតនៃចំនួនពិត $(U_n)_{n\in IN}$ កំនត់ដោយ $\begin{cases} U_0 = \sqrt{5} \\ U_{n+1} = U_n{}^2 - 2\ ,\ \forall n \in IN \end{cases}$

ក. ចូរស្រាយថា $U_n > 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ខ. គេពិនិត្យស្ទីត $(V_n)_{n\in IN}$ កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង $V_n = U_n + \sqrt{U_n{}^2 - 4}$ ។

ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង V_{n+1} និង V_n ។

គ. ចូរគណនា V_n រួចទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $U_n > 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$

យើងមាន $U_0 = \sqrt{5} > 2$ ពិត

$$U_1 = U_0{}^2 - 2 = 5 - 2 = 3 > 2$$ ពិត

យើងឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $U_k > 2$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $U_{k+1} > 2$ ពិត ។

យើងមាន $U_k > 2$ នាំឱ្យ $U_k{}^2 > 4$ ឬ $U_k{}^2 - 2 > 2$

ដោយ $U_{k+1} = U_k{}^2 - 2$ នោះគេទាញបាន $U_{k+1} > 2$ ពិត ។

ដូចនេះ $U_n > 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ខ. រកទំនាក់ទំនងរវាង V_{n+1} និង V_n

យើងមាន $V_n = U_n + \sqrt{U_n{}^2 - 4}$ នាំឱ្យ $V_{n+1} = U_{n+1} + \sqrt{U_{n+1}^2 - 4}$

តែ $U_{n+1} = U_n{}^2 - 2$ គេបាន $V_{n+1} = U_n{}^2 - 2 + \sqrt{(U_n{}^2 - 2)^2 - 4}$

$$V_{n+1} = U_n{}^2 - 2 + \sqrt{U_n{}^4 - 4U_n{}^2 + 4 - 4} = U_n{}^2 - 2 + \sqrt{U_n{}^2(U_n{}^2 - 4)}$$

$$= U_n^2 - 2 + U_n\sqrt{U_n{}^2 - 4} = \frac{2U_n{}^2 - 4 + 2U_n\sqrt{U_n{}^2 - 4}}{2} = \frac{(U_n + \sqrt{U_n{}^2 - 4})^2}{2}$$

ដូចនេះគេបាន $\boxed{V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n{}^2}$ ជាទំនាក់ទំនងដែលត្រូវរក ។

គ. គណនា V_n រួចទាញរក U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n{}^2$ នាំឱ្យ $\log_{\frac{1}{2}} V_{n+1} = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}V_n{}^2)$

$\log_{\frac{1}{2}} V_{n+1} = 1 + 2\log_{\frac{1}{2}} V_n$ តាង $W_n = \log_{\frac{1}{2}} V_n$ នាំឱ្យ $W_{n+1} = \log_{\frac{1}{2}} V_{n+1}$

គេបាន $\mathbf{W_{n+1} = 1 + 2W_n}$ ឬ $(1 + W_{n+1}) = 2(1 + W_n)$

នាំឱ្យ $(1 + W_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$ និងតួទីមួយ $1 + W_0$

តែ $V_0 = U_0 + \sqrt{U_0^{\ 2} - 4} = \sqrt{5} + \sqrt{5-4} = \sqrt{5} + 1$

ព្រោះ $V_n = U_n + \sqrt{U_n^{\ 2} - 4}$

គេបាន $1 + W_0 = 1 + \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{5}+1) = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{\sqrt{5}+1}{2})$ ។

តាមរូបមន្ត $1 + W_n = (1 + W_0).q^n = 2^n \log_{\frac{1}{2}}(\frac{\sqrt{5}+1}{2}) = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{2^n}$

ដោយ $W_n = \log_{\frac{1}{2}} V_n$ នោះ $1 + W_n = 1 + \log_{\frac{1}{2}} V_n = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{V_n}{2})$

គេទាញ $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{V_n}{2}) = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{2^n}$ នាំឱ្យ $V_n = 2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n}$

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $V_n = U_n + \sqrt{U_n^{\ 2} - 4}$ នាំឱ្យ $(V_n - U_n)^2 = U_n^{\ 2} - 4$

ឬ $V_n^{\ 2} - 2V_nU_n + U_n^{\ 2} = U_n^{\ 2} - 4$ គេទាញ $U_n = \frac{V_n^{\ 2} + 4}{2V_n} = \frac{1}{2}V_n + \frac{2}{V_n}$

នាំឱ្យ $U_n = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n} + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n}} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^n}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{U_n = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2^n} \ , \ V_n = 2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2^n}}$

លំហាត់ទី៤៦

គេឱ្យស្ទីតនព្វន្ត (U) មានតួ $2,7,12,........$ និងស្ទីតនព្វន្ត (V) មានតួ $2,5,8,.....$ តើក្នុងចំណោម 151 តួនៃស្ទីតទាំងពីរនេះ មានប៉ុន្មានតួដែលមានតម្លៃស្មើគ្នា ?

ដំណោះស្រាយ

យើងមានតួទី p នៃ ស្ទីតនព្វន្ត (U) មានតួ $2,7,12,........$

គឺ $U_p = 2+5(p-1)\ ,\ \forall p \in IN^*$

និងតួទី r នៃស្ទីត នព្វន្ត (V) មានតួ $2,5,8,.....$ គឺ $V_r = 2+3(r-1)\ ,\ \forall r \in IN^*$

បើ $U_p = V_r$ នោះគេបាន $2+5(p-1) = 2+3(r-1)$

ឬ $5(p-1) = 3(r-1)\ (1)$

ដោយ $p, r \in IN^*$ នោះសមីការ (1) មានចម្លើយកាលណាមាន $n \in IN$ ដែល :

$r-1=5n$ និង $p-1=3n$ នាំឱ្យគេទាញបាន $\begin{cases} p = 3n+1 \\ r = 5n+1 \end{cases}$

យើងសិក្សាក្នុងចំណោម 151 តួនៃស្ទីតទាំងពីរនេះដែលមានតម្លៃស្មើគ្នា

មានន័យថា គេត្រូវឱ្យ $1 \le p \le 151$ និង $1 \le r \le 151$ នាំឱ្យគេទាញ

$$\begin{cases} 1 \le 3n+1 \le 151 \\ 1 \le 5n+1 \le 151 \end{cases}$$

ឬ $\begin{cases} 0 \le n \le 50 \\ 0 \le n \le 30 \end{cases}$ នាំឱ្យ $0 \le n \le 30$ ឬ $n = \{0,1,2,3,....,30\}$ ។

ដូចនេះយើងសន្និដ្ឋានថាក្នុងចំណោម 151 តួនៃស្ទីតទាំងពីរនេះគឺតួដែលមានតម្លៃស្មើគ្នាមានចំនួន 31 តួ ។

លំហាត់ទី៤៧

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ :

$U_0 = 2$ និង គ្រប់ $n \in IN : U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 2n - \frac{7}{2}$

ក. បង្ហាញថាគេអាចកំនត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យស្វ៊ីត $(V_n), n \in IN$

កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង $V_n = U_n + an + b$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំនត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យស្វ៊ីត $(V_n), n \in IN$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ :

យើងមាន $V_n = U_n + an + b$ នាំឱ្យ $V_{n+1} = U_{n+1} + a(n+1) + b = U_{n+1} + an + a + b$

ដោយ $n \in IN : U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 2n - \frac{7}{2}$

គេបាន $V_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 2n - \frac{7}{2} + an + a + b$ តែ $V_n = U_n + an + b$

ឬ $U_n = V_n - an - b$

នាំឱ្យ $V_{n+1} = \frac{1}{2}(V_n - an - b) - 2n - \frac{7}{2} + an + a + b$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n - \frac{1}{2}an - \frac{1}{2}b - 2n - \frac{7}{2} + an + a + b$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n + (\frac{1}{2}a - 2)n + (a + \frac{b}{2} - \frac{7}{2}) \ (1)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) ដើម្បីឱ្យ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រលុះត្រាតែ $\begin{cases} \frac{1}{2}a - 2 = 0 \\ a + \frac{b}{2} - \frac{7}{2} = 0 \end{cases}$

គេទាញបាន $a=4$ និង $b=-1$ ។ ដូចនេះ $\boxed{a=4\ ,\ b=-1}$ ។

ខ. គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $a=4$ និង $b=-1$ នោះតាម (1) នាំឱ្យ

$V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n$

នាំឱ្យ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=\frac{1}{2}$ និងតួ $V_0=U_0+b=2-1=1$

គេបាន $V_n=V_0.q^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ។

ដូចនេះ $\boxed{U_n=\frac{1}{2^n}-4n+1}$

លំហាត់ទី៤៨

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ :

$U_0=1$ និង គ្រប់ $n\in IN : 3U_{n+1}=2U_n+n^2+4n+1$

ក. បង្ហាញថាគេអាចកំនត់បីចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឱ្យស្វ៊ីត $(V_n),n\in IN$ កំនត់ដោយ ទំនាក់ទំនង $V_n=U_n+an^2+bn+c$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំនត់បីចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឱ្យស្វ៊ីត $(V_n),n\in IN$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន $V_n=U_n+an^2+bn+c$ នាំឱ្យ $V_{n+1}=U_{n+1}+an^2+(2a+b)n+a+b+c$

ដោយ $n\in IN : 3U_{n+1}=2U_n+n^2+4n+1$ នាំឱ្យ $U_{n+1}=\frac{2}{3}U_n+\frac{n^2}{3}+\frac{4n}{3}+\frac{1}{3}$

គេបាន $V_{n+1}=\frac{2}{3}U_n+\frac{n^2}{3}+\frac{4n}{3}+\frac{1}{3}+an^2+(2a+b)n+a+b+c$

តែ $V_n=U_n+an^2+bn+c$ នាំឱ្យ $U_n=V_n-an^2-bn-c$

គេបាន $V_{n+1}=\frac{2}{3}(V_n-an^2-bn-c)+\frac{n^2}{3}+\frac{4n}{3}+\frac{1}{3}+an^2+(2a+b)n+a+b+c$

$$V_{n+1}=\frac{2}{3}V_n+\frac{1}{3}(a+1)n^2+(2a+\frac{1}{3}b+\frac{4}{3})n+a+b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3} \qquad (1)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) ដើម្បីឱ្យ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រលុះត្រាតែ

$$\begin{cases} a+1=0 \\ 2a+\frac{1}{3}b+\frac{4}{3}=0 \\ a+b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}=0 \end{cases}$$

នាំឱ្យគេទាញបាន $a=-1 , b=2 \; , c=-4$ ។

ដូចនេះ $\boxed{a=-1 , b=2 \; , c=-4}$ ។

ខ. គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ចម្លើយ $\boxed{U_n=5\,(\frac{2}{3})^n+n^2-2n+4}$ (សិស្សដោះស្រាយខ្លួនឯង) ។

លំហាត់ទី៤៩

គេឱ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត (U) មានតួ $5, 9, 13, 17......$ និងស្វ៊ីតនព្វន្ត (V) មានតួ $7, 13, 19, 25, ...$ ។

ក. តើក្នុងចំណោម 49 តួនៃស្វ៊ីត U មានប៉ុន្មានតួដែលជាការេប្រាកដ ? ចូរកំនត់រកតម្លៃនៃតួទាំងនោះ ។

ខ. តើក្នុងចំណោម 49 តួនៃស្វ៊ីត V មានប៉ុន្មានតួដែជាការេប្រាកដ ? ចូរកំនត់រកតម្លៃនៃតួទាំងនោះ ។

គ. តើក្នុងចំណោម 49តួនៃស្វ៊ីតទាំងពីរនេះមានប៉ុន្មានតួដែលមានតម្លៃស្មើគ្នា ?

ដំណោះស្រាយ

ក. តើក្នុងចំណោម 49 តួនៃស្វ៊ីត U មានប៉ុន្មានតួដែលជាការេប្រាកដ ?

តួទី p នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត (U) ដែលមានតួទីមួយ $U_1 = 5$

និងផលសងរួម $d = 9 - 5 = 4$ ។

កំនត់ដោយ $U_p = 5 + 4(p-1) = 4p + 1$ ចំពោះគ្រប់ $p \in IN^*$ ។

ចំពោះគ្រប់ $1 \le p \le 49$ ឧបមាថា $U_p = N^2$, $N \in IN^*$

គេបាន $4p + 1 = N^2$ នាំឱ្យ $p = \frac{N^2 - 1}{4}$ (1)

តាមទំនាក់ទំនង (1) ដើម្បីឱ្យ p ជាចំនួនគត់លុះត្រាតែ k ជាចំនួនសេស ។

បើ $N = 2r + 1$, $r \in IN^*$ (ចំនួនសេស) នោះ $p = \frac{(2r+1)^2 - 1}{4} = r^2 + r$

តែ $1 \le p \le 49$ នាំឱ្យ $1 \le r^2 + r \le 49$ ដោយ $\forall r \in IN^*$ គេបាន $1 \le r \le 6$

ឬ $r = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ហើយ $p = \{2, 6, 12, 20, 30, 42\}$

ដូចនេះក្នុងចំណោម 49 តួនៃស្វ៊ីត U មាន6តួដែលជាការេប្រាកដ ។

តួទាំងនោះគឺ $U_2 = 4(2) + 1 = 9 = 3^2$

$U_6 = 4(6) + 1 = 25 = 5^2$

$U_{12} = 4(12) + 1 = 49 = 7^2$

$U_{20} = 4(20) + 1 = 81 = 9^2$

$U_{30} = 4(30) + 1 = 121 = 11^2$

$U_{42} = 4(42) + 2 = 169 = 13^2$

ខ. តើក្នុងចំណោម 49 តួនៃស្វ៊ីត V មានប៉ុន្មានតួដែជាការេប្រាកដ ?

តួទី k នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត (V) ដែលមានតួទីមួយ $V_1 = 7$ និងផលសងរួម $d = 13 - 7 = 6$

កំនត់ដោយ $V_k = 7 + 6(k-1) = 6k + 1$ ចំពោះគ្រប់ $k \in IN^*$ ។

ចំពោះគ្រប់ $1 \le k \le 49$ ឧបមាថា $V_k = t^2$, $t \in IN^*$

គេទាញបាន $6k + 1 = t^2$ នាំឱ្យ $k = \dfrac{t^2 - 1}{6}$ (2)

តាម (2) ដើម្បីឱ្យ k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានលុះត្រាតែ $t^2 - 1$ ចែកដាច់នឹង 6 ។

យើងយក $t = 6m + r$ ដែល $m \in IN^*$, $r \in Z$, $-5 \le r \le 5$

គេបាន $t^2 - 1 = (6m + r)^2 - 1 = 36m^2 + 12mr + r^2 - 1 = 6(6mr^2 + 2mr) + r^2 - 1$

ដើម្បីឱ្យ $t^2 - 1$ ចែកដាច់នឹង 6លុះត្រា $r^2 - 1$ ចែកដាច់នឹង 6 ។

ដោយ $-5 \le r \le 5$ នោះគេបាន $r = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$

-ចំពោះ $r=\pm 1$ នោះ $r^2-1=1^2-1=0$ យក

-ចំពោះ $r=\pm 2$ នោះ $r^2-1=2^2-1=3$ (មិនយក)

-ចំពោះ $r=\pm 3$ នោះ $r^2-1=3^2-1=8$ (មិនយក)

-ចំពោះ $r=\pm 4$ នោះ $r^2-1=4^2-1=15$ (មិនយក)

-ចំពោះ $r=\pm 5$ នោះ $r^2-1=5^2-1=24$ យក

ដូចនេះគេបាន $t=6m-5,\ t=6m-1,\ t=6m+1,\ t=6m+5$

ដោយ $6m+1=6(m+1)-5=6m'-5$, $6m+5=6(m+1)-1=6m'-1$

ដូចនេះតម្លៃ t ដែលត្រូវយកមានតែ $t=6m-5$, $t=6m-1$

-បើ $t=6m-5$ គេបាន $k=\dfrac{(6m-5)^2-1}{6}=6m^2-10m+4$

ដោយ $1\le k\le 49$ នាំឱ្យ $1\le 6m^2-10m+4\le 49$ ឬ $2\le m\le 3$

ក្នុងករណីនេះគេទាញបានតម្លៃ $k=\{\ 8\ ,\ 28\ \}$

-បើ $t=6m-1$ គេបាន $k=\dfrac{(6m-1)^2-1}{6}=6m^2-2m$

ដោយ $1\le k\le 49$ នាំឱ្យ $1\le 6m^2-2m\le 49$ ឬ $1\le m\le 3$

ក្នុងករណីនេះគេទាញបានតម្លៃ $k=\{\ 4,\ 20\ ,\ 48\}$

ដូចនេះគេទទួលបានតម្លៃ $k=\{\ 4,8,20,28,48\}$

ដូចនេះក្នុងចំណោម 49 តួនៃស្វ៊ីត V មាន5តួដែលជាការេប្រាកដ ។

តួទាំងនោះគឺ $V_4=6(4)+1=25=5^2$

$$V_8 = 6(8)+1 = 49 = 7^2$$

$$V_{20} = 6(20)+1 = 121 = 11^2$$

$$V_{28} = 6(28)+1 = 169 = 13^2$$

$$V_{48} = 6(48)+1 = 289 = 17^2$$

គ. តើក្នុងចំណោម 49តួនៃស្វ៊ីតទាំងពីរនេះមានប៉ុន្មានតួដែលមានតម្លៃស្មើគ្នា ?

-តួទី p នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត (U) ដែលមានតួទីមួយ $U_1 = 5$ និងផលសងរួម $d = 9 - 5 = 4$

កំនត់ដោយ $U_p = 5 + 4(p-1) = 4p+1$ ចំពោះគ្រប់ $p \in IN^*$ ។

-តួទី k នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត (V) ដែលមានតួទីមួយ $V_1 = 7$ និងផលសងរួម

$d = 13 - 7 = 6$ កំនត់ដោយ $V_k = 7 + 6(k-1) = 6k+1$ ចំពោះគ្រប់ $k \in IN^*$ ។

ចំពោះ $1 \le p \le 49$ និង $1 \le k \le 49$ បើ $U_p = V_k$ នោះគេបាន :

$4p+1 = 6k+1$ ឬ $2p = 3k$ នាំឱ្យ $\begin{cases} p = 3r \\ k = 2r \quad , r \in IN^* \end{cases}$

ដោយ $1 \le p \le 49$ និង $1 \le k \le 49$ គេបាន $\begin{cases} 1 \le 3r \le 49 \\ 1 \le 2r \le 49 \end{cases}$ គេទាញ $1 \le r \le 16$

ដូចនេះក្នុងចំណោម 49តួនៃស្វ៊ីតទាំងពីរនេះមាន16 តួដែលមានតម្លៃស្មើគ្នា ។

លំហាត់ទី៥០

គេឱ្យស៊ីត $S_n=\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$ ដែល $n\in IN^*$ ។

ក-ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ ចូរបង្ហាញថា $S_n=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ ។

ខ-គណនាផលបូក $\Sigma_n=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+.....+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$

ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថា $S_n=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

យើងមាន $S_n=\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$ (ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$)

$$=\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+n^2+2n+1+n^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+2n(n+1)+1}{n^2(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{[n(n+1)+1]^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$=\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}$ ។

ខ-គណនាផលបូក ៖

គេបាន $\Sigma_n=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+.....+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sum_{k=1}^{n}(S_k)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=n+1-\frac{1}{n+1}=\frac{(n+1)^2-1}{n(n+1)}=\frac{n(n+2)}{n+1}$$

លំហាត់ទី៥១

គេឱ្យស្វ៊ីត $U_n = \dfrac{4n^2+1}{4n^2-1}$ ដែល $n \in IN^*$ ។

ក-ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ចូរបង្ហាញថា $U_n = 1 + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}$

ខ-ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n}(U_k) = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថា $U_n = 1 + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}$

គេមាន $U_n = \dfrac{4n^2+1}{4n^2-1}$ (ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$)

$$= \frac{(4n^2-1)+2}{4n^2-1} = 1 + \frac{2}{4n^2-1}$$

$$= 1 + \frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n+1)(2n-1)} = 1 + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{U_n = 1 + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}}$ ។

ខ-គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n}(U_k) = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1 + \dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k+1}\right)$

$$= (1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + (1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + (1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}) + ... + (1 + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$$

$$= n + 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n^2+3n+1-1}{2n+1} = \frac{n(2n+3)}{2n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \dfrac{n(2n+3)}{2n+1}}$ ។

លំហាត់ទី៥២

គេឱ្យស្វ៊ីត $U_n = \sqrt{1 + \frac{1}{(n+\frac{1}{3})^2} + \frac{1}{(n-\frac{2}{3})^2}}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n}(U_k) = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n}(U_k) = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$

$$U_n = \sqrt{1 + \frac{1}{(n+\frac{1}{3})^2} + \frac{1}{(n-\frac{2}{3})^2}}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{9}{(3n+1)^2} + \frac{9}{(3n-2)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(3n-2)^2(3n+1)^2 + 9(3n-2)^2 + 9(3n+1)^2}}{(3n+1)(3n-2)}$$

$$= \frac{\sqrt{(9n^2+3n-6n-2)^2 + 9[9n^2-12n+4+9n^2+6n+1]}}{(3n+1)(3n-2)}$$

$$= \frac{\sqrt{(9n^2-3n-2)^2 + 9[18n^2-6n+5]}}{(3n+1)(3n-2)} = \frac{\sqrt{(9n^2-3n-2)^2 + 9[2(9n^2-3n-2)+9]}}{(3n+1)(3n-2)}$$

$$= \frac{\sqrt{(9n^2-3n-2)^2 + 18(9n^2-3n-2)+81}}{(3n+1)(3n-2)} = \frac{\sqrt{[(9n^2-3n-2)+9]^2}}{(3n+1)(3n-2)}$$

$$= \frac{(9n^2-3n-2)+9}{(3n+1)(3n-2)} = \frac{(3n+1)(3n-2)+3[(3n+1)-(3n-2)]}{(3n+1)(3n-2)}$$

$$= 1 + \frac{3}{3n-2} - \frac{3}{3n+1}$$

យើងបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}[1 + \frac{3}{3k-2} - \frac{3}{3k+1}] = n + 3 - \frac{3}{3n+1} = \frac{3n^2+10n}{3n+1}$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \frac{n(3n+10)}{3n+1}}$ ។

លំហាត់ទី៥៣

គេឱ្យ $(U_n)_{,n\in IN^*}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែលមានតួទាំងអស់វិជ្ជមាននិងផលសងរួម $d>0$ ។ គេតាង $S_n=\sqrt{\frac{1}{d^2}+\frac{1}{U_n^2}+\frac{1}{U_{n+1}^2}}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n=\frac{n}{d}+\frac{1}{U_1}-\frac{1}{U_{n+1}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $S_n=\sqrt{\frac{1}{d^2}+\frac{1}{U_n^2}+\frac{1}{U_{n+1}^2}}$

ដោយ $(U_n)_{,n\in IN^*}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែលមានផលសងរួម $d>0$ នោះ

$U_{n+1}=U_n+d$ ។ យើងមាន $S_n=\sqrt{\frac{1}{d^2}+\frac{1}{U_n^2}+\frac{1}{(U_n+d)^2}}$

$$=\sqrt{\frac{U_n^2(U_n+d)^2+d^2[(U_n+d)^2+U_n^2]}{d^2.U_n^2.(U_n+d)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{U_n^2(U_n+d)^2+d^2[U_n^2+2U_nd+d^2+U_n^2]}}{d.U_n(U_n+d)}$$

$$=\frac{\sqrt{U_n^2(U_n+d)^2+2U_n(U_n+d).d^2+d^4}}{d.U_n(U_n+d)}$$

$$=\frac{\sqrt{[U_n(U_n+d)+d^2]^2}}{d\,U_n(U_n+d)}=\frac{U_n(U_n+d)+d^2}{d.U_n(U_n+d)}=\frac{1}{d}+\frac{d}{U_n(U_n+d)}$$

$$=\frac{1}{d}+\frac{(U_n+d)-U_n}{U_n(U_n+d)}=\frac{1}{d}+\frac{1}{U_n}-\frac{1}{U_n+d}=\frac{1}{d}+\frac{1}{U_n}-\frac{1}{U_{n+1}}$$

យើងបាន $S_1+S_2+\ldots+S_n=\sum_{k=1}^{n}(S_k)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{U_n}-\frac{1}{U_{n+1}}\right)=\frac{n}{d}+\frac{1}{U_1}-\frac{1}{U_{n+1}}$

ដូចនេះ $\boxed{S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n=\frac{n}{d}+\frac{1}{U_1}-\frac{1}{U_{n+1}}}$

លំហាត់ទី៥៤

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (x_n) កំនត់ដោយ $x_1 = 1$ និង $x_{n+1} - x_n = \dfrac{2}{x_n + \sqrt{2n+1}}$

ក-ចូរស្រាយថាចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ គេមាន $x_n = \sqrt{2n-1}$ ។

ខ-គណនា $S_n = \dfrac{1}{x_1 + \sqrt{3}} + \dfrac{1}{x_2 + \sqrt{5}} + ... + \dfrac{1}{x_n + \sqrt{2n+1}}$ ។

គ. ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \right]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-ស្រាយថាចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$: $x_n = \sqrt{2n-1}$

គេមាន $x_1 = 1 = \sqrt{2.1-1}$ ពិត

បើ $n = 1$ នោះ $x_2 - x_1 = \dfrac{2}{x_1 + \sqrt{3}}$ នាំឱ្យ $x_2 = 1 + \dfrac{2}{1+\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3}$

គេបាន $x_2 = \sqrt{3} = \sqrt{2.2-1}$ ពិត ។

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $x_k = \sqrt{2k-1}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $x_{k+1} = \sqrt{2(k+1)-1} = \sqrt{2k+1}$

យើងមាន $x_{k+1} - x_k = \dfrac{2}{x_k + \sqrt{2k+1}}$ នាំឱ្យ $x_{k+1} = x_k + \dfrac{2}{x_k + \sqrt{2k+1}}$

ដោយ $x_k = \sqrt{2k-1}$

នោះ $x_{k+1} = \sqrt{2k-1} + \dfrac{2}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}}$

$$= \sqrt{2k-1} + \frac{2(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1})}{(2k+1)-(2k-1)}$$

$$= \sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}$$

$x_{k+1}=\sqrt{2k+1}$ ពិត ។

ដូចនេះ $\boxed{x_n=\sqrt{2n-1}}$ ។

ខ-គណនា $S_n=\dfrac{1}{x_1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{x_2+\sqrt{5}}+.....+\dfrac{1}{x_n+\sqrt{2n+1}}$

យើងបាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{x_k+\sqrt{2k+1}}\right)$ ដោយ $x_{n+1}-x_n=\dfrac{2}{x_n+\sqrt{2n+1}}$

គេទាញ $\dfrac{1}{x_n+\sqrt{2n+1}}=\dfrac{1}{2}(x_{n+1}-x_n)$

គេបាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\dfrac{1}{2}(x_{k+1}-x_k)\right]=\dfrac{1}{2}(x_{n+1}-x_1)$

ដោយ $x_1=1$ ហើយ $x_n=\sqrt{2n-1}$ នោះ $x_{n+1}=\sqrt{2n+1}$

ដូចនេះ $\boxed{S_n=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)}$ ។

គ. ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\right]$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{2n+1}-1}{\sqrt{n}}\right]$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\right]=\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ ។

លំហាត់ទី៥៥

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=(x+1).e^{2x}$ ដែល x ជាចំនួនពិត ។

ក. ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)\ ,f''(x)\ ,f'''(x)$ និង $f^{(4)}(x)$ ។

ខ. ចូរបង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f មានទម្រង់ $f^{(n)}(x)=(a_n x+b_n).e^{2x}$

ដែល (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n \\ b_{n+1}=a_n+2b_n \quad ,\forall n\in IN^* \end{cases}$$

គ. ចូរកំនត់ a_n និង b_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកកន្សោម $f^{(n)}(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាដេរីវេ $f'(x)\ ,f''(x)\ ,f'''(x)$ និង $f^{(4)}(x)$

គេមាន $f(x)=(x+1).e^{2x}$

$$f'(x)=(x+1)'e^{2x}+(e^{2x})'(x+1)$$

$$=e^{2x}+2e^{2x}(x+1)=e^{2x}(1+2x+2)=(2x+3)e^{2x}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=(2x+3)e^{2x}}$

គេបាន $f''(x)=(2x+3)'e^{2x}+(e^{2x})'(2x+3)$

$$=2e^{2x}+2e^{2x}(2x+3)=e^{2x}(2+4x+6)=(4x+8)e^{2x}$$

ដូចនេះ $\boxed{f''(x)=(4x+8)e^{2x}}$

គេបាន $f'''(x)=(4x+8)'e^{2x}+(e^{2x})'(4x+8)$

$$=4e^{2x}+2e^{2x}(4x+8)=e^{2x}(4+8x+16)=(8x+20).e^{2x}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'''(x)=(8x+20)e^{2x}}$

គេបាន $f^{(4)}(x)=(8x+20)'e^{2x}+(e^{2x})'(8x+20)$

$$=8e^{2x}+2e^{2x}(8x+20)=e^{2x}(8+16x+40)=(16x+48)e^{2x}$$

ដូចនេះ $\boxed{f^{(4)}(x)=(16x+48)e^{2x}}$ ។

ខ.បង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៏ f មានទម្រង់ $f^{(n)}(x)=(a_n x+b_n).e^{2x}$

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន :

$f'(x)=(2x+3)e^{2x}=(a_1x+b_1)e^{2x}$ ដែល $a_1=2\ ,b_1=3$

$f''(x)=(4x+8)e^{2x}=(a_2x+b_2)e^{2x}$ ដែល $a_2=4\ ,b_2=8$

$f'''(x)=(8x+20)e^{2x}=(a_3x+b_3)e^{2x}$ ដែល $a_3=8\ ,b_3=20$

$f^{(4)}(x)=(16x+48)e^{2x}=(a_4x+b_4)e^{2x}$ ដែល $a_4=16\ ,b_4=48$

....

ឧបមាថាវាពិតដល់ដេរីវេលំដាប់ទី n គឺ : $f^{(n)}(x)=(a_nx+b_n)e^{2x}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយឱ្យឃើញថាវាពិតដល់ដេរីវេលំដាប់ទី $(n+1)$ គឺ :

$f^{(n+1)}(x)=(a_{n+1}x+b_{n+1})e^{2x}$

យើងមាន $f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)}(x))'$ ដោយ $f^{(n)}(x)=(a_nx+b_n)e^{2x}$

គេបាន $f^{(n+1)}(x)=(a_nx+b_n)'e^{2x}+(e^{2x})'(a_nx+b_n)$

$f^{(n+1)}(x)=a_ne^{2x}+2e^{2x}(a_nx+b_n)$

$f^{(n+1)}(x)=e^{2x}(a_n+2a_nx+2b_n)$

$f^{(n+1)}(x)=(2a_nx+a_n+2b_n)e^{2x}$

គេទាញ $f^{(n+1)}(x)=(a_{n+1}x+b_{n+1})e^{2x}$ ពិត ដែល $a_{n+1}=2a_n$ និង $b_{n+1}=a_n+2b_n$ ។

ដូចនេះ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f មានទម្រង់ $f^{(n)}(x)=(a_nx+b_n).e^{2x}$ ដែល (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $a_{n+1}=2a_n$ និង $b_{n+1}=a_n+2b_n$ ។

គ.កំនត់ a_n និង b_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $a_{n+1}=2a_n$ និង $b_{n+1}=a_n+2b_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ ។

តាមទំនាក់ទំនង $a_{n+1}=2a_n$ នាំឱ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=2$ និងតួ $a_1=2$ ។

តាមរូបមន្ត $a_n=a_1.q^{n-1}=2.2^{n-1}=2^n$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $b_{n+1}=a_n+2b_n$

នាំឱ្យគេទាញ $b_{n+1}-2b_n=a_n=2^n$ ឬ $\frac{1}{2^n}b_{n+1}-\frac{1}{2^{n-1}}b_n=1$ បើគេតាង $c_n=\frac{1}{2^{n-1}}b_n$

គេបាន $c_{n+1}-c_n=1$ ថេរ

នាំឱ្យ (c_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d=2$ និងតួ $c_1=b_1=3$

តាមរូបមន្ត $c_n=c_1+(n-1)d=3+2(n-1)=2n+1$

ដោយ $c_n=\frac{1}{2^{n-1}}b_n$ នាំឱ្យ $b_n=2^{n-1}.c_n=(2n+1).2^{n-1}$

ដូចនេះ $\boxed{a_n=2^n \quad ,b_n=(2n+1).2^{n-1}}$ ។

ទាញរកកន្សោម $f^{(n)}(x)$:

គេមាន $f^{(n)}(x)=(a_n x+b_n).e^{2x}$ ដោយ $a_n=2^n$ និង $b_n=(2n+1)2^{n-1}$

គេបាន $f^{(n)}(x)=[2^n x+(2n+1)2^{n-1}].e^{2x}=2^n(x+\frac{2n+1}{2}).e^{2x}$

ដូចនេះ $\boxed{f^{(n)}(x)=2^n(x+\frac{2n+1}{2}).e^{2x}}$ ។

លំហាត់ទី៥៦

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=e^x.\sin x$

ក. ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)\ ,f''(x)\ ,f'''(x)$ និង $f^{(4)}(x)$ ។

ខ. ចូរបង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f មានទម្រង់

$f^{(n)}(x)=(a_n\sin x+b_n\cos x).e^x$

ដែល (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n-b_n \\ b_{n+1}=a_n+b_n \quad ,\forall n\in IN^* \end{cases}$$

គ. គេតាង $z_n = a_n + i.b_n$ ។

ចូរបង្ហាញថា $z_{n+1} = (1+i).z_n$ រួចសរសេរ z_n ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ឃ. ចូរកំនត់ a_n និង b_n ជាអនុគមន៏នៃ n រួចទាញរកកន្សោម $f^{(n)}(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនាដេរីវេ $f'(x)$,$f''(x)$,$f'''(x)$ និង $f^{(4)}(x)$

គេមាន $f(x) = e^x.\sin x$

គេបាន $f'(x) = (e^x)'\sin x + (\sin x)'e^x$

$$= e^x \sin x + \cos x.e^x = e^x(\sin x + \cos x)$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = e^x(\sin x + \cos x)}$ ។

គេបាន $f''(x) = (e^x)'(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x)'e^x$

$$= e^x(\sin x + \cos x) + (\cos x - \sin x)e^x$$

$$= e^x(\sin x + \cos x + \cos x - \sin x) = 2e^x \cos x$$

ដូចនេះ $\boxed{f''(x) = 2e^x \cos x}$ ។

គេបាន $f'''(x) = 2(e^x)'\cos x + 2(\cos x)'e^x$

$$= 2e^x \cos x - 2\sin x.e^x = 2e^x(\cos x - \sin x)$$

ដូចនេះ $\boxed{f'''(x) = 2e^x(\cos x - \sin x)}$ ។

គេបាន $f^{(4)}(x) = 2(e^x)'(\cos x - \sin x) + 2(\cos x - \sin x)'e^x$

$$= 2e^x(\cos x - \sin x) + 2(-\sin x - \cos x)e^x$$
$$= 2e^x(\cos x - \sin x - \sin x - \cos x) = -4e^x \sin x$$

ដូចនេះ $\boxed{f^{(4)}(x) = -4e^x \sin x}$ ។

ខ. បង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f មានទម្រង់

$$f^{(n)}(x) = (a_n \sin x + b_n \cos x).e^x$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន :

$$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)e^x = (a_1 \sin x + b_1 \cos x)e^x$$

ដែល $\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 1 \end{cases}$

$$f''(x) = 2e^x \cos x = (0.\sin x + 2\cos x)e^x = (a_2 \sin x + b_2 \cos x)e^x$$

ដែល $\begin{cases} a_2 = 0 \\ b_2 = 2 \end{cases}$

$$f'''(x) = 2e^x(\cos x - \sin x) = (-2\sin x + 2\cos x)e^x = (a_3 \sin x + b_3 \cos x)e^x$$

ដែល $\begin{cases} a_3 = -2 \\ b_3 = 2 \end{cases}$

$$f^{(4)}(x) = -4e^x \sin x = (-4\sin x + 0.\cos x)e^x = (a_4 \sin x + b_4 \cos x)e^x$$

ដែល $\begin{cases} a_4 = -4 \\ b_4 = 0 \end{cases}$

....

ឧបមាថាវាពិតដល់ដេរីវេលំដាប់ទី n គឺ $f^{(n)}(x) = (a_n \sin x + b_n \cos x).e^x$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ដេរីវេលំដាប់ទី $(n+1)$ គឺ

$f^{(n+1)}(x) = (a_{n+1}\sin x + b_{n+1}\cos x)e^x$ ពិត

យើងមាន $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$

$$= (a_n\sin x + b_n\cos x)'e^x + (e^x)'(a_n\sin x + b_n\cos x)$$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (a_n\cos x - b_n\sin x)e^x + e^x(a_n\sin x + b_n\cos x) \\ &= (a_n\cos x - b_n\sin x + a_n\sin x + b_n\cos x)e^x \\ &= \left[(a_n - b_n)\sin x + (a_n + b_n)\cos x\right].e^x \end{aligned}$$

$f^{(n+1)}(x) = (a_{n+1}\sin x + b_{n+1}\cos x).e^x$ ពិត

(ព្រោះ $a_{n+1} = a_n - b_n$ និង $b_{n+1} = a_n + b_n$)

ដូចនេះ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ f មានទម្រង់ $f^{(n)}(x) = (a_n\sin x + b_n\cos x).e^x$

ដែល (a_n) និង (b_n) ជាស៊ីតចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \quad , \forall n \in IN^* \end{cases}$$

គ. បង្ហាញថា $z_{n+1} = (1+i).z_n$

គេមាន $z_n = a_n + i.b_n$ នាំឱ្យ $z_{n+1} = a_{n+1} + i.b_{n+1}$

ដោយ $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \quad , \forall n \in IN^* \end{cases}$

គេបាន $z_{n+1} = (a_n - b_n) + i.(a_n + b_n)$

$$= a_n - b_n + i.a_n + i.b_n$$
$$= (1+i)a_n - (1-i)b_n$$
$$= (1+i)(a_n - \frac{1-i}{1+i}b_n)$$
$$= (1+i)(a_n + i.b_n) = (1+i)z_n$$

ដូចនេះ $\boxed{z_{n+1} = (1+i)z_n}$ ។

សរសេរ z_n ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

ដោយគេមាន $z_{n+1} = (1+i).z_n$ នាំឱ្យ (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច

ដែលមានរេសុង ៖

$q = 1 + i = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i.\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4})$ និងតួ $z_1 = a_1 + ib_1$

តែ $a_1 = 1, b_1 = 1$ នាំឱ្យ $z_1 = 1 + i = q = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4})$ ។

តាមរូបមន្តតួទី n នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រគេអាចសរសេរ ៖

$$z_n = z_1 \times q^{n-1} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}).\left[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4})\right]^{n-1}$$

$$= (\sqrt{2})^n(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4})^n$$

ដូចនេះ $\boxed{z_n = \sqrt{2^n}(\cos\frac{n\pi}{4} + i.\sin\frac{n\pi}{4})}$ (តាមរូបមន្តដឺម័រ) ។

ឃ. កំនត់ a_n និង b_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $z_n = a_n + i.b_n$ ដោយ $z_n = \sqrt{2^n}(\cos\frac{n\pi}{4} + i.\sin\frac{n\pi}{4})$

គេទាញ $a_n + i.b_n = \sqrt{2^n}(\cos\frac{n\pi}{4} + i.\sin\frac{n\pi}{4})$ នាំឱ្យ $\begin{cases} a_n = \sqrt{2^n}.\cos\frac{n\pi}{4} \\ b_n = \sqrt{2^n}.\sin\frac{n\pi}{4} \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{a_n = \sqrt{2^n}.\cos\frac{n\pi}{4} \ ,b_n = \sqrt{2^n}.\sin\frac{n\pi}{4}}$ ។

ទាញរកកន្សោម $f^{(n)}(x)$ ៖

គេមាន $f^{(n)}(x) = (a_n \sin x + b_n \cos x)e^x$

ដោយ $a_n = \sqrt{2^n}.\cos\frac{n\pi}{4} \ ,b_n = \sqrt{2^n}.\sin\frac{n\pi}{4}$

គេបាន $f^{(n)}(x) = (\sqrt{2^n}.\cos\frac{n\pi}{4}.\sin x + \sqrt{2^n}\cos x.\sin\frac{n\pi}{4}).e^x$

ដូចនេះ $\boxed{f^{(n)}(x) = \sqrt{2^n}.e^x\sin(x + \frac{n\pi}{4})}$ ។

លំហាត់ទី៥៧

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$, $x \neq -1$

ចូរគណនា $F_n(x) = f\left[\ f\ [.....f\ [\ f(x)\ ].....]\ \right]$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $F_n(x) = f\left[\ f\ [.....f\ [\ f(x)\ ].....]\ \right]$

យើងមាន $F_1(x) = f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

$$F_2(x)=f[f(x)]=f[F_1(x)]$$
$$F_3(x)=f[f[f(x)]]=f[F_2(x)]$$

$$F_n(x)=f[F_{n-1}(x)]=\frac{F_{n-1}(x)}{\sqrt[3]{1+F_{n-1}^3(x)}}$$

យើងបាន $F_n^3(x)=\frac{F_{n-1}^3(x)}{1+F_{n-1}^3(x)}$ នាំឱ្យ $\frac{1}{F_n^3(x)}=\frac{1+F_{n-1}^3(x)}{F_{n-1}^3(x)}=\frac{1}{F_{n-1}^3(x)}+1$

គេទាញ $\frac{1}{F_n^3(x)}-\frac{1}{F_{n-1}^3(x)}=1$ ថេរ នាំឱ្យគេទាញបានថា $\left(\frac{1}{F_n^3(x)}\right)$

ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d=1$ និងតួទីមួយ $U_1=\frac{1}{F_1^3(x)}=\frac{1+x^3}{x^3}$ ។

តាមរូបមន្ត $U_n=U_1+(n-1).d$ គេបាន $\frac{1}{F_n^3(x)}=\frac{1+x^3}{x^3}+n-1=\frac{1+nx^3}{x^3}$

គេទាញ $F_n^3(x)=\sqrt[3]{\frac{x^3}{1+nx^3}}=\frac{x}{\sqrt[3]{1+nx^3}}$

ដូចនេះ $\boxed{F_n(x)=f[f[.....f[f(x)].....]]=\frac{x}{\sqrt[3]{1+nx^3}}}$ ។

លំហាត់ទី៥៨

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(U_n)_{n\in IN}$ ដោយ $U_{n+1}=\frac{7U_n^3-9U_n^2+3U_n}{6U_n^3-6U_n^2+1}$

និង $U_1=2$ ។

ក_ គេតាង $V_n=\frac{U_n-1}{2U_n-1}, \forall n\in IN^*$ ។ ចូរបង្ហាញថា $V_{n+1}=V_n^3$

ខ_ គេយក $W_n=\ln V_n \ ,\forall n\in IN^*$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(W_n)_{,n\in IN}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា W_n

ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ_ ចូរទាញរក V_n និង U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក_ បង្ហាញថា ៖ $V_{n+1} = V_n^{\ 3}$

យើងមាន $V_n = \dfrac{U_n - 1}{2U_n - 1}, \forall n \in IN^*$

យើងបាន $V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1} - 1}{2U_{n+1} - 1}$ ដោយ $U_{n+1} = \dfrac{7U_n^{\ 3} - 9U_n^{\ 2} + 3U_n}{6U_n^{\ 3} - 6U_n^{\ 2} + 1}$

$$V_{n+1} = \frac{\dfrac{7U_n^{\ 3} - 9U_n^{\ 2} + 3U_n}{6U_n^{\ 3} - 6U_n^{\ 2} + 1} - 1}{2\left(\dfrac{7U_n^{\ 3} - 9U_n^{\ 2} + 3U_n}{6U_n^{\ 3} - 6U_n^{\ 2} + 1}\right) - 1}$$

$$V_{n+1} = \frac{7U_n^{\ 3} - 9U_n^{\ 2} + 3U_n - 6U_n^{\ 3} + 6U_n^{\ 2} - 1}{14U_n^{\ 3} - 18U_n^{\ 2} + 6U_n - 6U_n^{\ 3} + 6U_n^{\ 2} - 1}$$

$$V_{n+1} = \frac{U_n^{\ 3} - 3U_n^{\ 2} + 3U_n - 1}{8U_n^{\ 3} - 12U_n^{\ 2} + 6U_n - 1} = \frac{(U_n - 1)^3}{(2U_n - 1)^3} = \left(\frac{U_n - 1}{2U_n - 1}\right)^3$$

ដូចនេះ $V_{n+1} = V_n^{\ 3}$ ។

ខ_ បង្ហាញថា $(W_n)_{,n\in IN}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ៖

យើងមាន $W_n = \ln V_n$ នាំឱ្យ $W_{n+1} = \ln V_{n+1}$ ដោយ $V_{n+1} = V_n^{\ 3}$

យើងបាន $W_{n+1} = \ln V_n^{\ 3} = 3\ln V_n = 3W_n$

ដូចនេះ $(W_n)_{,n\in IN}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុង $q = 3$ ។

_គណនា W_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

តាមរូបមន្ត $W_n = W_1 \times q^{n-1}$

ដោយ $W_1 = \ln V_1 = \ln\left(\dfrac{U_1 - 1}{2U_1 - 1}\right) = \ln(\dfrac{2-1}{4-1}) = \ln(\dfrac{1}{3})$ និង $q = 3$

យើងបាន $W_n = \ln(\dfrac{1}{3}) \times (3)^n = 3^n \ln(\dfrac{1}{3})$ ។

គ_ទាញរក V_n និង U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $W_n = \ln V_n$ ដោយ $W_n = 3^n \ln(\dfrac{1}{3})$

យើងបាន $\ln V_n = 3^n \ln(\dfrac{1}{3})$ នាំឱ្យ $V_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3^n}$

ម្យ៉ាងទៀត $V_n = \dfrac{U_n - 1}{2U_n - 1}$ នាំឱ្យ $U_n = \dfrac{1 - V_n}{1 - 2V_n} = \dfrac{1 - (\frac{1}{3})^{3^n}}{1 - 2(\frac{1}{3})^{3^n}} = \dfrac{3^{3^n} - 1}{3^{3^n} - 2}$

ដូចនេះ $V_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3^n}$ និង $U_n = \dfrac{3^{3^n} - 1}{3^{3^n} - 2}$ ។

_គណនាលីមីត ៖ $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

យើងមាន $U_n = \dfrac{3^{3^n} - 1}{3^{3^n} - 2}$

យើងបាន $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty}\left(\dfrac{3^{3^n} - 1}{3^{3^n} - 2}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - \dfrac{1}{3^{3^n}}}{1 - \dfrac{2}{3^{3^n}}} = 1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$ ។

លំហាត់ទី៥៩

គេឱ្យស្ទីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases} Z_0 = i \\ Z_{n+1} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} Z_n + \dfrac{1-\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}} \end{cases}, n \in IN$

ក. គេតាង $\forall n \in IN : U_n = Z_n + 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $U_{n+1} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} U_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ខ. ចូរសរសេរ U_n ជារាងត្រីកោណមាត្ររួចទាញរក Z_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $U_{n+1} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} U_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$

យើងមាន $\forall n \in IN : U_n = Z_n + 1$ នាំឱ្យ $U_{n+1} = Z_{n+1} + 1$

ដោយ $Z_{n+1} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} Z_n + \dfrac{1-\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}}$

យើងបាន $U_{n+1} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} Z_n + \dfrac{1-\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}} + 1$

$$U_{n+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} Z_n + \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$U_{n+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} (Z_n + 1) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} U_n$$

ដូចនេះ $\boxed{U_{n+1} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} U_n}$ ។

ខ. សរសេរ U_n ជារាងត្រីកោណមាត្ររួចទាញរក Z_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $U_{n+1} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} U_n$ នាំឱ្យ (U_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចមានរេសុង

$$q=\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4}$$ និងតួ $$U_0=Z_0+1=i+1=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})$$

តាមរូបមន្ត

$$U_n=U_0\times q^n=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4}).(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})^n=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})^{n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{U_n=\sqrt{2}\left[\cos\frac{(n+1)\pi}{4}+i.\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\right]}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $U_n=Z_n+1$ នាំឱ្យ $Z_n=U_n-1=\sqrt{2}[\cos\frac{(n+1)\pi}{4}+i.\sin\frac{(n+1)\pi}{4}]-1$

ដូចនេះ $\boxed{Z_n=\left[-1+\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}\right]+i.\sqrt{2}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}$ ។

លំហាត់ទី៦០

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases}U_0=0\ ,\ U_1=1\\ U_{n+2}=\sqrt{3}.U_{n+1}-U_n\ ,\ \forall n\in IN\end{cases}$

ក. គេតាង $Z_n=U_{n+1}-\frac{\sqrt{3}-i}{2}U_n\ ,\forall n\in IN$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $Z_{n+1}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}Z_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

ខ. ចូរកំនត់រកទំរង់ត្រីកោណមាត្រនៃ Z_n ។

គ. រួចទាញរកតួ U_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកតម្លៃ U_{2007} ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $Z_{n+1}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}Z_n$

យើងមាន $Z_n=U_{n+1}-\frac{\sqrt{3}-i}{2}U_n\ ,\forall n\in IN$ នាំឱ្យ $Z_{n+1}=U_{n+2}-\frac{\sqrt{3}-i}{2}U_{n+1}$

ដោយគេមាន $U_{n+2} = \sqrt{3}.U_{n+1} - U_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$

គេបាន $Z_{n+1} = \sqrt{3}.U_{n+1} - U_n - \frac{\sqrt{3}-i}{2}U_{n+1}$

$$Z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}U_{n+1} - U_n = \frac{\sqrt{3}+i}{2}(U_{n+1} - \frac{2}{\sqrt{3}+i}U_n)$$

$$Z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}(U_{n+1} - \frac{\sqrt{3}-i}{2}U_n) = \frac{\sqrt{3}+i}{2}Z_n$$

ដូចនេះ $\boxed{Z_n = U_{n+1} - \frac{\sqrt{3}-i}{2}U_n \ , \forall n \in IN}$ ។

ខ.កំនត់រកទំរង់ត្រីកោណមាត្រនៃ Z_n រួចទាញរកតួ U_n ជាអនុគមន៏នៃ n

ដោយយើងមាន $Z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}Z_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

នាំឱ្យ (Z_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចដែលមានរេសុង :

$$q = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = (\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6})$$

និងតួ $Z_0 = U_1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2}U_0 = 1$ (ព្រោះ $U_0 = 0 \ , U_1 = 1$)

គេបាន $Z_n = Z_0 \times q^n = (\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6})^n = \cos\frac{n\pi}{6} + i.\sin\frac{n\pi}{6}$

ដូចនេះ $\boxed{Z_n = \cos\frac{n\pi}{6} + i.\sin\frac{n\pi}{6}}$ ។

គ. ទាញរកតួ U_n ជាអនុគមន៏នៃ n រួចទាញរកតម្លៃ U_{2007} :

យើងមាន $Z_n = U_{n+1} - \frac{\sqrt{3}-i}{2}U_n$

ឬ $Z_n = (U_{n+1} - \frac{\sqrt{3}}{2}U_n) + \frac{i}{2}U_n$ (ព្រោះ $U_n \in IR$)

យើងបាន $\overline{Z}_n = (U_{n+1} - \frac{\sqrt{3}}{2}U_n) - \frac{i}{2}U_n$ (ចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ Z_n) ។

គេទាញ $Z_n - \overline{Z}_n = i.U_n$ នាំឱ្យ $U_n = \frac{Z_n - \overline{Z}_n}{i}$

ដោយយើងមាន $Z_n = \cos\frac{n\pi}{6} + i.\sin\frac{n\pi}{6}$ និង $\overline{Z}_n = \cos\frac{n\pi}{6} - i.\sin\frac{n\pi}{6}$

យើងបាន $U_n = \frac{(\cos\frac{n\pi}{6} + i.\sin\frac{n\pi}{6}) - (\cos\frac{n\pi}{6} - i.\sin\frac{n\pi}{6})}{i} = 2\sin\frac{n\pi}{6}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{U_n = 2\sin\frac{n\pi}{6}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតចំពោះ $n = 2007$ យើងបាន :

$$U_{2007} = 2\sin\frac{2007\pi}{6} = 2\sin\frac{663\pi}{2} = 2\sin(-\frac{\pi}{2} + 332\pi) = 2\sin(-\frac{\pi}{2}) = -2$$ ។

ដូចនេះ $\boxed{U_{2007} = -2}$ ។

លំហាត់ទី៦១

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (Z_n) កំនត់ដោយទំនាក់ទំនងខាងក្រោម :

$Z_0 = 0$, $Z_1 = 1$ និង $Z_{n+2} = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}Z_{n+1} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}Z_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ក. គេតាង $\forall n \in IN : U_n = Z_{n+1} - Z_n$ ។ បង្ហាញថា $U_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}U_n$

ខ. គណនា U_n និង $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. ទាញរកចំនួនកុំផ្លិច Z_n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $U_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}U_n$

យើងមាន $U_n=Z_{n+1}-Z_n$ នាំឱ្យ $U_{n+1}=Z_{n+2}-Z_{n+1}$

ដោយចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ មាន $Z_{n+2}=\frac{3+i\sqrt{3}}{2}Z_{n+1}-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}Z_n$

យើងបាន $U_{n+1}=\frac{3+i\sqrt{3}}{2}Z_{n+1}-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}Z_n-Z_{n+1}$

$$U_{n+1}=(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}-1)Z_{n+1}-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}Z_n$$

$$U_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}Z_{n+1}-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}Z_n$$

$$U_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(Z_{n+1}-Z_n)=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}.U_n$$

ដូចនេះ $\boxed{U_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}U_n}$ ។

ខ. គណនា U_n ជាអនុគមន៏នៃ n

យើងមាន $U_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}U_n$ នាំឱ្យ (U_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

នៃចំនួនកុំផ្លិចដែលមានរេសុង $q=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}$

និងតួ $U_0=Z_1-Z_0=1$ ។

តាមរូបមន្ត $U_n=U_0\times q^n=(\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3})^n=\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{U_n=\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}}$ ។

គណនា $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

ដោយ (U_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិចនោះតាមរូបមន្តយើងបាន ៖

$S_n = U_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ដោយ $U_0 = 1$, $q = \cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}$

គេបាន $S_n = \frac{1-\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1-\cos\frac{(n+1)\pi}{3} - i.\sin\frac{(n+1)\pi}{3}}{1-\cos\frac{\pi}{3} - i.\sin\frac{\pi}{3}}$

$$= \frac{2\sin^2\frac{(n+1)\pi}{6} - 2i.\sin\frac{(n+1)\pi}{6}.\cos\frac{(n+1)\pi}{6}}{2\sin^2\frac{\pi}{6} - 2i\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{(n+1)\pi}{6}.\left[\sin\frac{(n+1)\pi}{6} - i.\cos\frac{(n+1)\pi}{6}\right]}{2\sin\frac{\pi}{6}.\left(\sin\frac{\pi}{6} - i.\cos\frac{\pi}{6}\right)} \times \frac{i}{i}$$

$$= \frac{2\sin\frac{(n+1)\pi}{6}\left[\cos\frac{(n+1)\pi}{6} + i.\sin\frac{(n+1)\pi}{6}\right]}{2(\frac{1}{2})\left(\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= 2\sin\frac{(n+1)\pi}{6}\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i.\sin\frac{n\pi}{6}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 2\sin\frac{(n+1)\pi}{6}\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i.\sin\frac{n\pi}{6}\right)}$ ។

គ. ទាញរកចំនួនកុំផ្លិច Z_n

យើងមាន $\forall n \in IN : U_n = Z_{n+1} - Z_n$

យើងបាន $S_n=\sum_{k=0}^{n}(U_k)=\sum_{k=0}^{n}(Z_{k+1}-Z_k)=Z_{n+1}-Z_0$

នាំឱ្យ $Z_{n+1}=Z_0+S_n$

ដោយ $Z_0=0$ និង $S_n=2\sin\frac{(n+1)\pi}{6}\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i.\sin\frac{n\pi}{6}\right)$

គេបាន $Z_{n+1}=2\sin\frac{(n+1)\pi}{6}\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i.\sin\frac{n\pi}{6}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{Z_n=2\sin\frac{n\pi}{6}\left[\cos\frac{(n-1)\pi}{6}+i.\sin\frac{(n-1)\pi}{6}\right]}$ ។

លំហាត់ទី៦២

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ $\begin{cases}U_0=1\\ U_{n+1}=\frac{2-2U_n+5U_n^2}{1+8U_n-2U_n^2}\end{cases}$, $\forall n\in IN$

ក. គេតាង $\forall n\in IN: V_n=\frac{2U_n-1}{U_n+1}$ ។ ចូរបង្ហាញថា $V_{n+1}=V_n{}^2$

ខ. គណនា V_n និង U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក .បង្ហាញថា $V_{n+1}=V_n{}^2$

យើងមាន $\forall n\in IN: V_n=\frac{2U_n-1}{U_n+1}$ នាំឱ្យ $V_{n+1}=\frac{2U_{n+1}-1}{U_{n+1}+1}$

ដោយ $U_{n+1}=\frac{2-2U_n+5U_n^2}{1+8U_n-2U_n^2}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$

គេបាន $V_{n+1} = \dfrac{2\left(\dfrac{2-2U_n+5U_n^2}{1+8U_n-2U_n^2}\right)-1}{\dfrac{2-2U_n+5U_n^2}{1+8U_n-2U_n^2}+1} = \dfrac{4-4U_n+10U_n^2-1-8U_n+2U_n^2}{2-2U_n+5U_n^2+1+8U_n-2U_n^2}$

$$V_{n+1} = \frac{12U_n^2-12U_n+3}{3U_n^2+6U_n+3} = \frac{3(4U_n^2-4U_n+1)}{3(U_n^2+2U_n+1)} = \left(\frac{2U_n-1}{U_n+1}\right)^2 = V_n^2$$ ពិត

ខ. គណនា V_n និង U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ដោយគេមាន $V_{n+1} = V_n{}^2$ គេទាញ $\ln V_{n+1} = 2\ln V_n$ នាំឱ្យ $(\ln V_n)$

ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=2$ និងតួដំបូង $\ln V_0 = \ln(\frac{2U_0-1}{U_0+1}) = \ln(\frac{1}{2})$ ។

តាមរូបមន្តគេបាន $\ln V_n = 2^n.\ln(\frac{1}{2}) = \ln(\frac{1}{2})^{2^n}$ នាំឱ្យ $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} = (0.5)^{2^n}$

ហើយដោយ t $V_n = \dfrac{2U_n-1}{U_n+1}$ នាំឱ្យ $U_n = \dfrac{1+V_n}{2-V_n} = \dfrac{1+(0.5)^{2^n}}{2-(0.5)^{2^n}}$

ដូចនេះ $\boxed{V_n = (0.5)^{2^n}\ ,\ U_n = \dfrac{1+(0.5)^{2^n}}{2-(0.5)^{2^n}}}$ ។

លំហាត់ទី៦៣

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង :

$U_0 = 2$ និង $\forall n \in IN : U_{n+1} = \dfrac{U_n^3}{4+6U_n+3U_n^2}$

ក. គេតាង $\forall n \in IN : V_n = \dfrac{U_n}{2+U_n}$ ។ បង្ហាញថា $V_{n+1} = V_n^3$

ខ.គណនា V_n និង U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $V_{n+1}=V_n^3$

យើងមាន $\forall n\in IN : V_n=\frac{U_n}{2+U_n}$

នាំឱ្យ $V_{n+1}=\frac{U_{n+1}}{2+U_{n+1}}$ តែ $U_{n+1}=\frac{U_n^3}{4+6U_n+3U_n^2}$

គេបាន $V_{n+1}=\frac{\frac{U_n^3}{4+6U_n+3U_n^2}}{2+\frac{U_n^3}{4+6U_n+3U_n^2}}=\frac{U_n^3}{8+12U_n+6U_n+U_n^3}=\left(\frac{U_n}{2+U_n}\right)^3=V_n^3$

ដូចនេះ $\boxed{V_{n+1}=V_n^3}$ ។

ខ.គណនា V_n និង U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $V_{n+1}=V_n^3$ គេទាញ $\ln V_{n+1}=3\ln V_n$

នាំឱ្យ $(\ln V_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=3$ និងតួដំបូង

$\ln V_0=\ln(\frac{U_0}{2+U_0})=\ln(\frac{1}{2})$ ។

តាមរូបមន្តគេបាន $\ln V_n=3^n.\ln(\frac{1}{2})=\ln(\frac{1}{2})^{3^n}$ នាំឱ្យ $V_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{3^n}=(0.5)^{3^n}$

ហើយដោយ $V_n=\frac{U_n}{2+U_n}$ នាំឱ្យ $U_n=\frac{2V_n}{1-V_n}=\frac{2(0.5)^{3^n}}{1-(0.5)^{3^n}}$

ដូចនេះ $\boxed{V_n=(0.5)^{3^n}\ ,\ U_n=\frac{2\,.(0.5)^{3^n}}{1-(0.5)^{3^n}}}$ ។

លំហាត់ទី៦៤

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $U_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + ... + \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}$

ក. ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - \sqrt{n})$ ។

ខ. គេតាង $\forall n \in IN:\ V_n = \dfrac{1}{(U_{n+2}^2 - U_{n+1})(U_{n+1}^2 - U_n)}$ និង $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (V_k)$ ។

គណនា $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - \sqrt{n})$

យើងមាន $U_n - \sqrt{n} = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + ... + \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} - \sqrt{n}$

ឬ $$U_n - \sqrt{n} = \frac{\sqrt{(n-1) + ... + \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}{\sqrt{n + \sqrt{(n-1) + ... + \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} + \sqrt{n}}$$

យើងបាន $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - \sqrt{n}) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left[\dfrac{\sqrt{(n-1) + ... + \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}{\sqrt{n + \sqrt{(n-1) + ... + \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} + \sqrt{n}} \right] = \dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - \sqrt{n}) = \dfrac{1}{2}}$ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

គេមាន $U_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + ... + \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}$

គេបាន $U_{n+1}=\sqrt{(n+1)+\sqrt{n+....+\sqrt{3+\sqrt{2}+\sqrt{1}}}}$

ឬ $U_{n+1}^2=(n+1)+\sqrt{n+....+\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}=n+1+U_n$

នាំឱ្យ $U_{n+1}^2-U_n=(n+1)$ និង $U_{n+2}^2-U_{n+1}=(n+2)$

គេបាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{2}}$ ។

លំហាត់ទី៦៥

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ $U_n=\sqrt{2}^n.\sin\frac{n\pi}{4}$ ដែល $n\in IN^*$

ក.ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}$

ខ. ទាញឱ្យបានថា $U_n=(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}-(\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

គ. គណនាផលបូក $S_n=U_1+U_2+U_3+.........+U_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}$

តាមរូបមន្ត $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

យើងបាន $\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\sqrt{2}\cos(\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}(\cos\frac{n\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4})$

$$\sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{n\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{n\pi}{4})=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=\cos\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}}$ ។

ខ. ទាញឱ្យបានថា $U_n = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

យើងមាន $\sqrt{2}.\cos\frac{(n+1)\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}$

នាំឱ្យ $\sin\frac{n\pi}{4} = \cos\frac{n\pi}{4} - \sqrt{2}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $(\sqrt{2})^n$ គេបាន :

$$(\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4} = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{U_n = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}$ ។

គ. គណនាផលបូក $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots\dots\dots + U_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងបាន $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots\dots\dots\dots + U_n = \sum_{k=1}^{n}(U_k)$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[(\sqrt{2})^k \cos\frac{k\pi}{4} - (\sqrt{2})^{k+1}\cos\frac{(k+1)\pi}{4}\right] = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = 1 - (\sqrt{2})^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}}$ ។

លំហាត់ទី៦៦

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ គេមាន $x_n + i.y_n = (2+\sqrt{3}+i)^n$ ដែល $x_n , y_n \in IR$

ក. ចូរកំនត់រក x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. ចូរបង្ហាញថា $x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n = 2^n(\sqrt{3}+1)^{2n}$

និង $x_n x_{n+1} + y_n y_{n+1} = 2^{n-1}(\sqrt{3}+1)^{2n+2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. ចូរកំនត់រក x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $x_n + i.y_n = (2+\sqrt{3}+i)^n$ ដែល $x_n , y_n \in IR$

តាង $Z = 2+\sqrt{3}+i = 2(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+i.\frac{1}{2}) = 2\ (1+\cos\frac{\pi}{6}+i.\sin\frac{\pi}{6})$

$$Z = 2(2\cos^2\frac{\pi}{12}+.i.2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}) = 4\cos\frac{\pi}{12}(\ \cos\frac{\pi}{12}+i.\sin\frac{\pi}{12})$$

យើងបាន $x_n + i.y_n = Z^n = 4^n\cos^n\frac{\pi}{12}(\cos\frac{n\pi}{12}+i.\sin\frac{n\pi}{12})$

ដូចនេះ $\boxed{x_n = 4^n\cos^n\frac{\pi}{12}\cos\frac{n\pi}{12}\ ,\ y_n = 4^n\cos^n\frac{\pi}{12}\sin\frac{n\pi}{12}}$ ។

ខ.បង្ហាញថា $x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n = 2^n(\sqrt{3}+1)^{2n}$

និង $x_n x_{n+1} + y_n y_{n+1} = 2^{n-1}(\sqrt{3}+1)^{2n+2}$

យើងមាន $x_n + i.y_n = (2+\sqrt{3}+i)^n$ នាំឱ្យ $x_n - i.y_n = (2+\sqrt{3}-i)^n$

យើងបាន $(x_n + i.y_n)(x_{n+1} - i.y_{n+1}) = (2+\sqrt{3}+i)^n(2+\sqrt{3}-i)^{n+1}$

ឬ $(x_n x_{n+1} + y_n y_{n+1}) - i(x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n) = \left[(2+\sqrt{3})^2+1\right]^n(2+\sqrt{3}-i)$

ដោយ $(2+\sqrt{3})^2+1 = 8+4\sqrt{3} = 2(\sqrt{3}+1)^2$ និង $2+\sqrt{3} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)^2$

គេបាន $(x_n x_{n+1} + y_n y_{n+1}) - i(x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n) = 2^n(\sqrt{3}+1)^{2n}\left[\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)^2 - i\right]$

គេទាញ $x_n x_{n+1} + y_n y_{n+1} = 2^{n-1}(\sqrt{3}+1)^{2n+2}$

និង $x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n = 2^n(\sqrt{3}+1)^{2n}$ ។

លំហាត់ទី៦៧

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{31x^2-12x-2}{12x^2+8x-15}$

ក- ចូររកដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ខ- គេពិនិត្យស្វ៊ីត (U_n) និង (V_n) កំនត់ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$

ដោយ $U_1=f(x),\ U_{n+1}=f(U_n)$ និង $V_n=\dfrac{U_n-2}{4U_n-1}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $V_{n+1}=V_n^{\ 2}$ រួចទាញឱ្យបានថា $V_n=V_1^{\ 2^{n-1}}$ ។

គ- ចូរគណនា $F_n(x)=f_n\left[f\left[........f\left[f(x)\right]........\right]\right]$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(1)$

ដំណោះស្រាយ

ក- រកដែនកំនត់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ៖

គេមាន $f(x)=\dfrac{31x^2-12x-2}{12x^2+8x-15}$

អនុគមន៍នេះមានន័យកាលណា $12x^2+8x-15\neq 0$

បើ $12x^2+8x-15=0$ $\quad\Delta'=16+180=196$

គេទាញឫស $x_1=\dfrac{-4-14}{12}=-\dfrac{3}{2}$, $x_2=\dfrac{-4+14}{12}=\dfrac{5}{6}$ ។

ដូចនេះ $D=IR-\{-\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{6}\}$ ។

ខ- បង្ហាញថា $V_{n+1}=V_n^{\ 2}$

យើងមាន $V_n=\dfrac{U_n-2}{4U_n-1}$ នាំឱ្យ $V_{n+1}=\dfrac{U_{n+1}-2}{4U_{n+1}-1}$

ដោយ $U_{n+1} = f(U_n) = \dfrac{31U_n^2 - 12U_n - 2}{12U_n^2 + 8U_n - 15}$

គេបាន $V_{n+1} = \dfrac{\dfrac{31U_n^2 - 12U_n - 2}{12U_n^2 + 8U_n - 15} - 2}{4\left(\dfrac{31U_n^2 - 12U_n - 2}{12U_n^2 + 8U_n - 15}\right) - 1}$

$$V_{n+1} = \frac{31U_n^2 - 12U_n - 2 - 24U_n^2 - 16U_n + 30}{124U_n^2 - 48U_n - 8 - 12U_n^2 - 8U_n + 15}$$

$$V_{n+1} = \frac{7U_n^2 - 28U_n + 28}{112U_n^2 - 56U_n + 7} = \frac{7(U_n^2 - 4U_n + 4)}{7(16U_n^2 - 8U_n + 1)} = \left(\frac{U_n - 2}{4U_n - 1}\right)^2$$

ដូចនេះ $V_{n+1} = V_n^2$ ។

- ទាញឱ្យបានថា ៖ $V_n = V_1^{2^{n-1}}$

គេមាន $V_{n+1} = V_n^2$

បើ $n = 1$ គេបាន $V_2 = V_1^2$ ពិត

បើ $n = 2$ គេបាន $V_3 = V_2^2 = V_1^{2^2}$ ពិត

បើ $n = 3$ គេបាន $V_4 = V_3^2 = V_1^{2^3}$ ពិត

សន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $V_k = V_1^{2^{k-1}}$

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $V_{k+1} = V_1^{2^k}$

យើងមាន $V_{k+1} = V_k^2 = \left(V_1^{2^{k-1}}\right)^2 = V_1^{2^k}$ ពិត ។

ដូចនេះ $V_n = V_1^{2^{n-1}}$ ។

គ_ គណនា $F_n(x) = f_n\left[f\left[........f\left[f(x)\right]........\right]\right]$ ៖

តាង $U_1 = f(x)$

$$U_2 = f\left[f(x)\right] = f(U_1)$$
$$U_3 = f\left[f\left[f(x)\right]\right] = f(U_2)$$
$$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$$
$$U_n = f_n\left[f\left[........f\left[f(x)\right]........\right]\right] = f(U_{n-1})$$
$$U_{n+1} = f(U_n)$$

គេទាញ $F_n(x) = f_n\left[f\left[........f\left[f(x)\right]........\right]\right] = U_n$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $V_n = \dfrac{U_n - 2}{4U_n - 1}$

នាំឱ្យ $V_n(4U_n - 1) = U_n - 2$

ឬ $U_n = \dfrac{V_n - 2}{4V_n - 1}$ ដោយ $V_n = V_1^{\,2^{n-1}}$

និង $$V_1 = \frac{U_1 - 2}{4U_1 - 2} = \frac{\dfrac{31x^2 - 12x - 2}{12x^2 + 8x - 15} - 2}{4\left(\dfrac{31x^2 - 12x - 2}{12x^2 + 8x - 15}\right) - 1} = \left(\frac{x - 2}{4x - 1}\right)^2$$

គេបាន $$V_n = \left[\left(\frac{x - 2}{4x - 1}\right)^2\right]^{2^{n-1}} = \left(\frac{x - 2}{4x - 1}\right)^{2^n}$$

ហេតុនេះ $$U_n = \frac{V_n - 2}{4V_n - 1} = \frac{\left(\dfrac{x - 2}{4x - 1}\right)^{2^n} - 2}{4\left(\dfrac{x - 2}{4x - 1}\right)^{2^n} - 1} = \frac{(x - 2)^{2^n} - 2(4x - 1)^{2^n}}{4(x - 2)^{2^n} - (4x - 1)^{2^n}}$$

ដូចនេះ $$F_n(x) = \frac{(x - 2)^{2^n} - 2(4x - 1)^{2^n}}{4(x - 2)^{2^n} - (4x - 1)^{2^n}}$$ ។

_ទាញរកលីមីត ៖ $\lim_{n\to+\infty} F_n(1)$

ចំពោះ $x=1$ គេបាន $F_n(1)=\dfrac{1-2.3^{2^n}}{4-3^{2^n}}$

យើងបាន $\lim_{n\to+\infty} F_n(1)=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1-2.3^{2^n}}{4-3^{2^n}}=2$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} F_n(1)=2}$ ។

លំហាត់ទី៦៩

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+.....+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}}}}$

ក_ ចូរកំនត់បណ្តាតម្លៃ $x\in IN$ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃលេខជាចំនួនគត់ ។

ខ_ បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $p\in IN^*$ តម្លៃ $f\left(p^2(p^2-1)\right)$ ជាការប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃ $x\in IN$ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃលេខជាចំនួនគត់

យើងមាន $x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}+2.\frac{1}{2}\sqrt{x+\frac{1}{4}}.+(x+\frac{1}{4})=(\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}})^2$

គេទាញបាន $f(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}$ ។

សម្មតថាមានចំនួនគត់ $k\in IN^*$ ដែល $f(x)=k$

គេបាន $\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}=k$

ឬ $x+\frac{1}{4}=(k-\frac{1}{2})^2=k^2-k+\frac{1}{4}$

គេទាញ $x=k(k-1)$ ដោយ $k\in IN^*$

នោះ $x=k(k-1)\in IN$

ដូចនេះបណ្តាតម្លៃ x ដែលត្រូវរកនោះគឺ $x=k(k-1)$, $\forall k\in IN^*$

ខ_ បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $p\in IN^*$ តម្លៃ $f\left(p^2(p^2-1)\right)$ ជាការេប្រាកដ

យើងមាន $f(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}$

យើងបាន $f\left(p^2(p^2-1)\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{p^2(p^2-1)+\frac{1}{4}}$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{4p^4-4p^2+1}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2p^2-1}{2}=p^2$$

ដូចនេះ $f\left(p^2(p^2-1)\right)=p^2$ ជាការេប្រាកដ ។

លំហាត់ទី៧០

គេឱ្យសមីការដឺក្រេទីបីអញ្ញាតពិត ៖

$(E): x^3 - mx^2 + (m^2 - 9m - 14)x - m^3 + 30m^2 - 300m + 1000 = 0$

ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ក-ចូរកំនត់តម្លៃរបស់ m ដើម្បីឱ្យសមីការនេះមានឫសបីបង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។

ខ-ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ចំពោះតម្លៃ m ដែលបានរកឃើញខាងលើ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់តម្លៃរបស់ m

តាង x_1, x_2, x_3 ជាឫសរបស់សមីការ (E) ។

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតយើងមាន ៖

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = m & (1) \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = m^2 - 9m - 14 & (2) \\ x_1x_2x_3 = (m-10)^3 & (3) \end{cases}$$

បើសមីការនេះមានឫសបី x_1, x_2, x_3 បង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

នោះគេមាន៖ $x_1.x_3 = x_2^{\ 2}$ (4) ។

តាម (3) និង (4) គេបាន $x_2^{\ 3} = (m-10)^3$ នាំឱ្យ $x_2 = m - 10$

តាម $(1): x_1 + m - 10 + x_3 = m$ នាំឱ្យ $x_1 + x_3 = 10$

តាម $(2): x_2(x_1 + x_3) + x_1x_3 = m^2 - 9m - 14$

$$(m-10)(10) + (m-10)^2 = m^2 - 9m - 14$$

$$10m - 100 + m^2 - 20m + 100 - m^2 + 9m + 14 = 0$$

$$-m + 14 = 0 \Rightarrow m = 14$$

ដូចនេះ $m = 14$ ។

ខ_ដោះស្រាយសមីការ (E) ចំពោះតម្លៃ m ដែលបាន

រកឃើញខាងលើ ៖

ចំពោះ $m = 14$ សមីការអាចសរសេរ

$$x^3 - 14x^2 + 56x - 64 = (x-2)(x-4)(x-8) = 0$$

គេទាញឬស $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 8$ ។

លំហាត់ទី៧១

គេឱ្យសមីការអញ្ញាតពិត

$$(E): x^3 - 3m\,x^2 + 2(3m+4)\,x + 2m^3 - 6m^2 - 9m + 3 = 0$$

ដែល m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ក_ចូរកំនត់តម្លៃរបស់ m ដើម្បីឱ្យសមីការនេះមានឬសបីបង្កើតបាន

ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ។

ខ_ចូរដោះស្រាយសមីការ (E) ចំពោះតម្លៃ m ដែលបាន។

ដំណោះស្រាយ

ក_ កំនត់តម្លៃរបស់ m

តាង x_1, x_2, x_3 ជាឬសរបស់សមីការ (E) ។

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតយើងមាន ៖

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3m & (1) \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 6m + 8 & (2) \\ x_1x_2x_3 = -2m^3 + 6m^2 + 9m - 3 & (3) \end{cases}$$

បើសមីការនេះមានឬសបី x_1, x_2, x_3 បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

នោះ $x_1 + x_3 = 2x_2$ (4)

តាម (1) និង (4) គេបាន $3x_2 = 3m$ នាំឱ្យ $x_2 = m$

តាម (2): $x_2(x_1 + x_3) + x_1x_3 = 6m + 8$

$2m^2 + x_1x_3 = 6m + 8$ នាំឱ្យ $x_1x_3 = -2m^2 + 6m + 8$ (5)

តាម (3) និង (5) គេបាន $m(-2m^2 + 6m + 8) = -2m^3 + 6m^2 + 9m - 3$

ឬ $m = 3$ ។

ខ_ ដោះស្រាយសមីការ (E)

ចំពោះ $m = 3$ សមីការអាចសរសេរ ៖

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$$

$$x^3-9x^2+26x-24=0$$
$$(x^3-3x^2)-(6x^2-18x)+(8x-24)=0$$
$$x^2(x-3)-6x(x-3)+8(x-3)=0$$
$$(x-3)(x^2-2x-4x+8)=0$$
$$(x-2)(x-3)(x-4)=0$$

គេទាញឫស $x_1=2\ ,\ x_2=3\ ,\ x_3=4$ ។

លំហាត់ទី៧២

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង ៖

$U_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ និង $U_{n+1}=\sqrt{\frac{1+U_n}{2}}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ ។

ក_ ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ គេមាន $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_n\le 1$ ។

ខ_ ចូរបង្ហាញថា $U_n=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\ ,\ \forall n\in IN^*$ រួចទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

ដំណោះស្រាយ

ក_ បង្ហាញថា $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_n\le 1$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$

គេមាន $U_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ នាំឱ្យ $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_1\le 1$ ពិត

សន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_k\le 1$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_{k+1}\le 1$ ពិត

យើងមាន $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $U_k\le 1$

$$1+\frac{\sqrt{2}}{2}\le 1+U_k\le 2$$

$$\frac{2+\sqrt{2}}{4}\le\frac{1+U_k}{2}\le 1$$

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\le\sqrt{\frac{1+U_k}{2}}\le 1$$

ដោយ $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}>\frac{\sqrt{2}}{2}$ នោះគេទាញ $\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sqrt{\frac{1+U_k}{2}}\le 1$

ឬ $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_{k+1}\le 1$ ពិត (ព្រោះ $U_{k+1}=\sqrt{\frac{1+U_k}{2}}$) ។

ដូចនេះ $\frac{\sqrt{2}}{2}\le U_n\le 1$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ ។

ខ_ បង្ហាញថា $U_n=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\ ,\ \forall n\in IN^*$

យើងមាន $U_1=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{2^{1+1}}$ ពិត ។

សន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $U_k=\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $U_{k+1}=\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$ ពិត

យើងមាន $U_{k+1}=\sqrt{\frac{1+U_k}{2}}$ តែតាមការសន្មត $U_k=\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$

គេបាន $U_{k+1}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}{2}}=\sqrt{\frac{2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}}{2}}=\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$ ពិត ។

ដូចនេះ $U_n=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\ ,\ \forall n\in IN^*$ ។

ទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \cos 0 = 1$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$ ។

លំហាត់ទី៧៣

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ ៖

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = -\frac{1}{4} + \sqrt{1+U_n(1+U_n)(2+U_n)(3+U_n)} \end{cases}, \ \forall n \in IN^*$$

ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $U_{n+1} = -\frac{1}{4} + \sqrt{1+U_n(1+U_n)(2+U_n)(3+U_n)}$

$$U_{n+1} = -\frac{1}{4} + \sqrt{[U_n(U_n+3)][(U_n+1)(U_n+2)]+1}$$

$$U_{n+1} = -\frac{1}{4} + \sqrt{(U_n^2+3U_n)(U_n^2+3U_n+2)+1}$$

$$U_{n+1} = -\frac{1}{4} + \sqrt{(U_n^2+3U_n)^2+2(U_n^2+3U_n)+1} = -\frac{1}{4} + \sqrt{(U_n^2+3U_n+1)^2}$$

$$U_{n+1} = -\frac{1}{4} + U_n^2+3U_n+1 = U_n^2+3U_n+\frac{3}{4} = (U_n+\frac{3}{2})^2 - \frac{3}{2}$$

$$U_{n+1} + \frac{3}{2} = (U_n+\frac{3}{2})^2 \quad (1)$$

តាង $V_n = \ln(U_n + \frac{3}{2})$ នាំឱ្យ $V_{n+1} = \ln(U_{n+1} + \frac{3}{2})$ (2)

យក (1) ជួសក្នុង (2) គេបាន $V_{n+1} = \ln(U_n + \frac{3}{2})^2 = 2\ln(U_n + \frac{3}{2}) = 2V_n$

នាំឱ្យ (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$

និងតួ $V_1 = \ln(U_1 + \frac{3}{2}) = \ln\frac{5}{2}$

តាមរូបមន្តុ$V_n = V_1.q^{n-1} = 2^{n-1}\ln\frac{5}{2} = \ln(\frac{5}{2})^{2^{n-1}}$ ដោយ $V_n = \ln(U_n + \frac{3}{2})$

គេទាញបាន $U_n + \frac{3}{2} = (\frac{5}{2})^{2^{n-1}}$ ឬ $U_n = -\frac{3}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^{2^{n-1}}$ ។

ដូចនេះ $\boxed{U_n = -\frac{3}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^{2^{n-1}}}$ ។

លំហាត់ទី៧៤

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ ៖

$$\begin{cases} U_0 = \sqrt{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} \quad , n \in IN \end{cases}$$

ក, ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ, គណនាផលគុណ $P_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times .... \times U_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $U_0 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}$

$$U_1=\sqrt{2+U_0}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}=2\cos\frac{\pi}{8}$$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី p គឺ $U_p=2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $(p+1)$ គឺ $U_{p+1}=2\cos\frac{\pi}{2^{p+3}}$ ពិត

យើងមាន $U_{p+1}=\sqrt{2+U_p}$ តែតាមការឧបមា $U_p=2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងបាន $U_{p+1}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}}=\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{p+3}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{p+3}}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{U_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}$ ។

ខ, គណនាផលគុណ $P_n=U_0\times U_1\times U_2\times....\times U_n$

តាមរូបមន្ត $\sin 2a=2\sin a\cos a$ នាំឱ្យ $2\cos a=\frac{\sin 2a}{\sin a}$

$$P_n=\prod_{k=0}^{n}(U_k)=\prod_{k=0}^{n}(2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}})=\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{k+2}}}\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

លំហាត់ទី៧៥

គេឱ្យស្វីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ ៖

$$U_0=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ និង } U_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_n^{\,2}}}{2}}\ ,\ \forall n\in IN$$

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ៖

យើងមាន $U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$

$$U_1 = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_0^{\ 2}}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{4}}}{2}} = \sin\frac{\pi}{8}$$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី p គឺ $U_p = \sin\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $(p+1)$ គឺ $U_{p+1} = \sin\frac{\pi}{2^{p+3}}$ ពិត

យើងមាន $U_{p+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-U_p^{\ 2}}}{2}}$ តែតាមការឧបមា $U_p = \sin\frac{\pi}{2^{p+2}}$

យើងបាន $U_{p+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^{p+2}}}}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{2^{p+2}}}{2}} = \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\pi}{2^{p+3}}}{2}} = \sin\frac{\pi}{2^{p+3}}$$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{U_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}$ ។

<u>លំហាត់ទី៧៦</u>

ក, ចូរស្រាយថា $\frac{\tan^3 x}{1-3\tan^2 x} = \frac{1}{8}(\tan 3x - 3\tan x)$

ខ, ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{3^k\tan^3\frac{a}{3^k}}{1-3\tan^2\frac{a}{3^k}}\right]$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក, ស្រាយថា $\frac{\tan^3 x}{1-3\tan^2 x} = \frac{1}{8}(\tan 3x - 3\tan x)$

តាមរូបមន្ត $\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

យើងបាន $\tan 3x - 3\tan x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x} - 3\tan x = \frac{8\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

ដូចនេះ $\frac{\tan^3 x}{1-3\tan^2 x} = \frac{1}{8}(\tan 3x - 3\tan x)$ ។

ខ, គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{3^k \tan^3 \frac{a}{3^k}}{1-3\tan^2 \frac{a}{3^k}}\right]$

យើងមាន $\frac{\tan^3 x}{1-3\tan^2 x} = \frac{1}{8}(\tan 3x - 3\tan x)$

ដោយយក $x = \frac{a}{3^k}$

គេបាន $\frac{\tan^3 \frac{a}{3^k}}{1-3\tan^2 \frac{a}{3^k}} = \frac{1}{8}(\tan\frac{a}{3^{k-1}} - 3\tan\frac{a}{3^k})$

យើងបាន $S_n = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{n}(3^k \tan\frac{a}{3^{k-1}} - 3^{k+1}\tan\frac{a}{3^k}) = \frac{1}{8}\left(\tan 3a - 3^{n+1}\tan\frac{a}{3^n}\right)$

ដូចនេះ $S_n = \frac{\tan 3a}{8} - \frac{3^{n+1}}{8}\tan\frac{a}{3^n}$ ។

លំហាត់ទី៧៧

ក, ចូរស្រាយថា $\dfrac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x} = \dfrac{1}{2}\tan 2x - \tan x$

ខ, ចូរគណនាផលបូក $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{2^k \tan^3 \dfrac{a}{2^n}}{1-\tan^2 \dfrac{a}{2^n}}\right)$

ដំណោះស្រាយ

ក, ស្រាយថា $\dfrac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x} = \dfrac{1}{2}\tan 2x - \tan x$

តាមរូបមន្ត $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

យើងបាន $\dfrac{1}{2}\tan 2x - \tan x = \dfrac{\tan x}{1-\tan^2 x} - \tan x = \dfrac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}$

ដូចនេះ $\dfrac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x} = \dfrac{1}{2}\tan 2x - \tan x$ ។

ខ, គណនាផលបូក $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{2^k \tan^3 \dfrac{a}{2^k}}{1-\tan^2 \dfrac{a}{2^k}}\right)$

គេមាន $\dfrac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x} = \dfrac{1}{2}\tan 2x - \tan x$ យក $x = \dfrac{a}{2^k}$

គេបាន $\dfrac{\tan^3 \dfrac{a}{2^k}}{1-\tan^2 \dfrac{a}{2^k}} = \dfrac{1}{2}\tan \dfrac{a}{2^{k-1}} - \tan \dfrac{a}{2^k}$

យើងបាន $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(2^{k-1}\tan \dfrac{a}{2^{k-1}} - 2^k \tan \dfrac{a}{2^k}\right) = \dfrac{1}{2}\tan 2a - 2^n \tan \dfrac{a}{2^n}$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{1}{2}\tan 2a - 2^n \tan \dfrac{a}{2^n}$ ។