ជំពូក ១

លីមីតនៃអនុគមន៍

Ioeur SOVANNRA 7/25/20 Grade 12

ជំពូក ២

លីមីតនៃអនុគមន៍

១. លីមីតនៃអនុគមន៍

១.១ អត្ថន័យនៃ $x \to a$

$x \to a$ គឺអានថា x ខិតទៅរក a ដែល x ជាអថេរ។

១.២ លីមីត

យើងនិយាយថា $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ បើចំពោះគ្រប់ $\varepsilon > 0$ មាន $\delta > 0$ ដែល $|f(x) - l| < \varepsilon$ ។មានន័យថា ផលដករវាង x និង a គឺកាន់តែតូច នោះផលដករវាង $f(x)$ និង l កាន់តែតូចដែរ។

១.៣ រាងមិនកំណត់

បើអនុគមន៍ $f(x)$ មានរាងដូចខាងក្រោមពេល $x = a$ នោះយើងថា $f(x)$ មានរាងមិនកំណត់ត្រង់ $x = a$ ។

1. $\frac{0}{0}$
2. $\frac{\infty}{\infty}$
3. $\infty - \infty$
4. $0 \times \infty$
5. 1^{∞}
6. 0^0
7. ∞^0 ។

១.៤ ពិជគណិតនៃលីមីត

1. $\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$

2. $\lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)$ 3. $\lim_{x\to a}\left[kf(x)\right]=k\lim_{x\to a}f(x)$

4. $\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to a}g(x)\right]$

5. $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$, ពេល $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$ ។

6. $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]^n$ 7. $\lim_{x\to a}e^{f(x)}=e^{\lim_{x\to a}f(x)}$

8. $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{\left[\lim_{x\to a}g(x)\log_e f(x)\right]}$

9. $\log\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]=\lim_{x\to a}\left[\log f(x)\right]$, ពេល $\lim_{x\to a}f(x)>0$ ។

១.៥ លីមីតឆ្វេង-ស្តាំ

គេកំណត់សរសេរ $\lim_{x\to a^-}f(x)$ ហៅថា លីមីតឆ្វេង និង $\lim_{x\to a^+}f(x)$ ហៅថា លីមីតស្តាំ ។

១.៦ ភាពមានលីមីត

អនុគមន៍មួយមានលីមីត កាលណាវាមានលីមីតឆ្វេង និងលីមីតស្តាំស្មើគ្នា ។

i.e. $\lim_{x\to a}f(x)=l\Leftrightarrow\begin{cases}\lim_{x\to a^-}f(x)=l\\ \lim_{x\to a^+}f(x)=l\end{cases}$ ។ ដែល $l\in\mathbb{R}$ ។

១.៧ លីមីតមិនកំណត់

❑ **លីមីតរាងសូន្យលើសូន្យ** $0/0$

វិធាន
ដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំណត់សូន្យលើសូន្យបាន យើងត្រូវ៖ ✐ សរសេរកន្សោមភាគបែង និងភាគយកជាកត្តា។ ✐ សម្រួលកត្តាដែលដូចគ្នាចោល។ ✐ គណនាលីមីតកន្សោមថ្មី។

❑ **លីមីតរាងអនន្តលើអនន្ត**

វិធាន
ដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំណត់អនន្តលើអនន្តបាន យើងត្រូវ ✐ ទាញអថេរណាដែលមាននិទស្សន្តធំជាងគេ ទាំងភាគយក និងភាគបែង ✐ រួចសម្រួលចោល ✐ បន្ទាប់មកគណនាលីមីតកន្សោមថ្មី។

❑ **លីមីតរាង** $\infty - \infty$

វិធាន
ដើម្បីគណនាលីមីតរាងមិនកំណត់អនន្តដកអនន្តបាន យើងត្រូវ ✐ គុណកន្សោមឆ្លាស់ ✐ ទាញអថេរដែលមាននិទស្សន្តដែលធំជាងគេជាកត្តា ✐ រួចសម្រួលជាមួយភាគបែង ✐ បន្ទាប់មកគណនាលីមីតកន្សោមថ្មី។

១.៨ លីមីតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

រូបមន្ត៖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\cos x}{x}=0$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\tan x}{x}=1$ ។

១.៩ លីមីតនៃអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

រូបមន្ត៖ $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

បើ $n>0$ នោះ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ និង $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ ។

១.១០ លីមីតនៃអនុគមន៍លោការីតនេពែ

រូបមន្ត៖ $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ $\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x\to0^+} x\ln x = 0$ $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

បើ $n>0$ នោះ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ $\lim_{x\to0^+} x^n \ln x = 0$ ។

១.១១ វិធានឡូពីតាល់ (មិនសម្រាប់ប្រើដើម្បីប្រឡងបាក់ឌុប)

បើ $\frac{f(x)}{g(x)}$ មានរាង $\frac{0}{0}$ ឬ $\frac{\infty}{\infty}$ ពេល $x=a$ នោះ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

នេះគឺជា **វិធានឡូពីតាល់** ។

១.១២ លីមីតលោការីត

យើងប្រើស៊េរី $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots\infty$ ដែល $-1 \le x \le 1$ យើងបាន

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e; a>0, \neq 1$$ ។

១.១៣ គោលលើកទ 1^{∞}

ដើម្បីគណនាអ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលរាង 1^{∞} យើងប្រើលទ្ធផលលីមីតខាងក្រោម

បើ $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ នោះ $\lim_{x\to a}\left[1+f(x)\right]^{1/g(x)} = e^{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}}$ ឬ

ពេល $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ និង $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ នោះ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)} &= \lim_{x\to a}\left[1+f(x)-1\right]^{g(x)}\\ &= \lim_{x\to a}\left\{\left[1+f(x)-1\right]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{g(x)\left[f(x)-1\right]}\\ &= e^{\lim_{x\to a} g(x)\left[f(x)-1\right]}\end{aligned}$$

1. $\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{1/x} = e$
2. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$
3. $\lim_{x\to 0}\left(1+ax\right)^{1/x} = e^{a}$
4. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = e^{a}$
5. $\lim_{x\to\infty} a^{x} = \begin{cases}\infty, if\, a>1\\ 0, if\, a<1\end{cases}$ ។

១.១៤ ដើម្បីរក $\lim_{x\to\infty} f(x)$

ជំនួស x ដោយ $1/y$ និងយកលីមីត $y\to 0$ ។

លីមីត

1. បើ $|x|<1$ នោះ $\lim_{n\to\infty} x^{n} = \infty$
2. បើ $x>1$ នោះ $\lim_{n\to\infty} x^{n} = \infty$

3. $\lim_{x\to\infty} e^{x} = \infty$ 4. $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ 5. $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$

6. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ និង $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ 7. $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$

8. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x}$ 9. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin 1/x}{1/x} = 1$ ។

១.១៥ រូបមន្តត្រីកោណមាត្រ

1. $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$
2. $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$
3. $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$
4. $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$
5. $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$
6. $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$
7. $\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$
8. $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$
9. $\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$
10. $\cos C - \cos D = -2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$ ។

២ ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

២.១ ភាពជាប់ត្រង់មួយចំនុច

អនុគមន៍ $y = f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចំនុច $x = a$ កាលណា f បំពេញលក្ខខណ្ឌលីមីតខាងក្រោម៖

- f កំណត់ ចំពោះ $x = a$
- f មានលីមីតកាលណា x ខិតជិត a
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ។

២.២ ភាពជាប់លើចន្លោះ

- អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបើក $(a\,,b)$ លុះត្រាតែ f ជាប់ចំពោះ គ្រប់តម្លៃ x នៃចន្លោះបើកនោះ ។
- អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ លុះត្រាតែ f ជាប់លើ $(a\,,b)$ និងមានលីមីត $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ និង $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ ។

២.៣ ប្រភេទជាច្រើននៃអនុគមន៍ជាប់

✐ ខាងក្រោមសុទ្ធតែជាអនុគមន៍ជាប់ លើដែនកំណត់របស់ពួកវា៖

1. គ្រប់អនុគមន៍ពហុធា ;
2. គ្រប់អនុគមន៍សនិទាន ;
3. គ្រប់អនុគមន៍សនិទានមានស្វ័តគុណ $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$;

4. អនុគមន៍ស៊ីនុស, កូស៊ីនុស, តង់សង់, secant , cosecant និង cotangent

5. អនុគមន៍តម្លៃដាច់ខាត $|x|$ ។

✐ បើអនុគមន៍ f និង g ទាំងពីរសុទ្ធតែកំណត់លើចន្លោះផ្ទុក c និងជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ c នោះអនុគមន៍ខាងក្រោមនឹងនៅតែជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ c :

1. ប្រមាណវិធីបូក $f+g$ និងប្រមាណវិធីដក $f-g$;

2. ប្រមាណវិធីគុណ fg;

3. ការគុណជាមួយចំនួនថេរ kf ដែល k ជាតម្លៃណាមួយ;

4. ប្រមាណវិធីចែក f/g (ឲ្យ $g(x)\neq 0$); និង

5. ឫសទី n $\left(f(x)\right)^{1/n}$ ឲ្យ $f(c)>0$ បើ n គូ ។

✐ បើអនុគមន៍ $f\big(g(x)\big)$ កំណត់បានលើចន្លោះផ្ទុក c និងបើ f ជាប់ត្រង់ L និង $\lim_{x\to c} g(x)=L,$ នោះ

$$\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big)=f(L)=f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) \text{ ។}$$

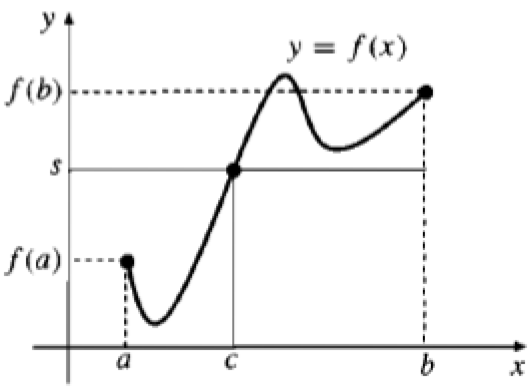
ត្រង់នេះ បើ g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ c $\big($ដូច្នេះ $L=g(c)\big)$ នោះបណ្ដាក់ $f\circ g$ គឺជាប់ត្រង់ c :

$$\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big)=f\big(g(c)\big)$$

២.៤ ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល

ទ្រឹស្តីបទ. បើអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ និង s ជាចំនួនមួយនៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ នោះមានចំនួនពិត c មួយយ៉ាងតិចក្នុងចន្លោះបិទ $[a,b]$ ដែល $f(c)=s$ ។

វិបាក. បើអនុគមន៍ f ជាប់ ហើយកើនដាច់ខាត ឬចុះដាច់ខាតលើចន្លោះបិទ $[a,b]$ នោះចំពោះគ្រប់តម្លៃ s នៅចន្លោះ $f(a)$ និង $f(b)$ សមីការ $f(x)=s$ មានចម្លើយតែមួយគត់ក្នុងចន្លោះ $[a,b]$ ។



****

លំហាត់ និងដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី០១ លីមីតរាង 0/0
គណនាលីមីត 1. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$ 2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sqrt[3]{z^2-(z-x)^2}}{\left(\sqrt[3]{8xz-4x^2}+\sqrt[3]{8xz}\right)^4}$
3. $\lim\limits_{x\to1}\frac{1+\log x-x}{1-2x+x^2}$ 4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\left(\pi\cos^2 x\right)}{x^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ. គណនាលីមីត

1. $$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x+2x+2}{x^2+x+3x+3}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x(x+1)+2(x+1)}{x(x+1)+3(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+3)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x+2}{x+3}=\frac{-1+2}{-1+3}=\frac{1}{2}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}=\frac{1}{2}}$ ។

2. $$\lim_{x\to0}\frac{x\sqrt[3]{z^2-(z-x)^2}}{\left(\sqrt[3]{8xz-4x^2}+\sqrt[3]{8xz}\right)^4}=\lim_{x\to0}\frac{x\sqrt[3]{z^2-z^2+2xz-x^2}}{\left(\sqrt[3]{8xz-4x^2}+\sqrt[3]{8xz}\right)^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\sqrt[3]{2xz-x^2}}{\left(\sqrt[3]{8xz-4x^2}+\sqrt[3]{8xz}\right)^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot x^{1/3}\sqrt[3]{2z-x}}{x^{4/3}\left(\sqrt[3]{8z-4x}+\sqrt[3]{8z}\right)^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{2z-x}}{x^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{8z-4x}+\sqrt[3]{8z}\right)^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{2z-x}}{\left(\sqrt[3]{8z-4x}+\sqrt[3]{8z}\right)^4}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2z}}{2^4\left(\sqrt[3]{8z}\right)^4}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt[3]{z^2-(z-x)^2}}{\left(\sqrt[3]{8xz-4x^2}+\sqrt[3]{8xz}\right)^4} = \frac{\sqrt[3]{2z}}{\left[2\sqrt[3]{8z}\right]^4}}$ ។

3. $\lim_{x\to 1} \frac{1+\ln x - x}{1-2x+x^2} \quad = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{-2+2x}$ ប្រើវិធានឡូពីតាល់

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1-x}{x}}{-2+2x}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{-2x(1-x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{-2x} = -\frac{1}{2}$$ ។

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{1+\ln x - x}{1-2x+x^2} = -\frac{1}{2}}$ ។

4. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\pi \cos^2 x\right)}{x^2} \quad = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\pi\left(1-\sin^2 x\right)\right)}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\pi - \pi\sin^2 x\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\pi\cos\left(\pi\sin^2 x\right)-\cos\pi\sin\left(\pi\sin^2 x\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\pi\sin^2 x\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\pi\sin^2 x\right)}{\pi\sin^2 x}\times\frac{\pi\sin^2 x}{x^2} = \pi$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\pi\cos^2 x\right)}{x^2} = \pi}$ ។

លំហាត់ទី០២ លីមីតរាង 0/0

គណនាលីមីត 1. $\lim_{x\to 0}\frac{4x(\tan x-\sin x)}{(1-\cos 2x)^2}$ 2. $\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{3^x-1}$

*3.*បើ t ជាឫសនៃសមីការ $ax^2+bx+c=0$ ចូរគណនា

$\lim_{x\to t}\frac{\sin\left(ax^2+bx+c\right)}{(x-t)^2}$ ។

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)}}{x}$ ។

ដំណោះស្រាយ. គណនាលីមីត

1. $\lim_{x\to 0}\frac{4x(\tan x-\sin x)}{(1-\cos 2x)^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4x\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{\left(1-\left(1-2\sin^2 x\right)\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{4x\sin x(1-\cos x)}{\cos x}}{4\sin^4 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4x\sin x(1-\cos x)}{4\sin^4 x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{\sin^2 x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x\cos x}$$

រូបមន្ត $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=1\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}$$ ។

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{4x(\tan x-\sin x)}{(1-\cos 2x)^2}=\frac{1}{2}}$ ។

2. $$\lim_{x\to0}\frac{4^x-1}{3^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{4^x-1}{x}\cdot\frac{x}{3^x-1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4^x-1}{x}\cdot\frac{1}{\frac{3^x-1}{x}}$$

ប្រើរូបមន្ត $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\log_e a, a>0$

$$=\left[\lim_{x\to0}\frac{4^x-1}{x}\right]\cdot\left[\frac{1}{\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}}\right]$$

$$=\frac{\log_e 4}{\log_e 3}=\log_3 4$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{4^x-1}{3^x-1}=\log_3 4}$ ។

3. ដោយ t គឺជាឫសនៃសមីការ $ax^2+bx+c=0$ នោះយើងមាន

$$ax^2+bx+c=a(x-t)^2$$

ឥឡូវ, $$\lim_{x\to t}\frac{\sin(ax^2+bx+c)}{a(x-t)^2}=\lim_{x\to t}\frac{a\sin\left[a(x-t)^2\right]}{a(x-t)^2}$$

$$=a\lim_{x\to t}\frac{\sin\left[a(x-t)^2\right]}{a(x-t)^2}=a\times 1=a$$ ។

[ពេល $x\to t$ នោះ $a(x-t)^2\to 0$]

4. យក $f(x)=\dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)}}{x}=\dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}(2\sin^2 x)}}{x}=\dfrac{|\sin x|}{x}$ ។

យើងបាន $$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{h\to 0}f(0-h)=\lim_{h\to 0}f(-h)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|\sin(-h)|}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{|-\sin(h)|}{-h}$$

$$=-\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=-1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{h\to 0}f(0+h)=\lim_{h\to 0}f(h)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|\sin(\mathrm{h})|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1,$$

$\therefore$ $\lim_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim_{x\to 0^+}f(x)$ ។

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)}}{x}\ \text{គ្មានលីមីត ។}}$

លំហាត់ទី០៣ លីមីតធ្លាប់ចេញប្រឡងបាក់ឌុបឆ្នាំ ២០១៩ (ថ្នាក់សង្គម)

គណនាលីមីត 1. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2(x^2-1)}$ 2. $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+x+1}{2x^2-x+1}$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2e^x}$ 4. $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$

ដំណោះស្រាយ គណនាលីមីត

1. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2(x^2-1)}$ រាង $0/0$

ប្រើរូបមន្ត $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{2(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2(x+1)}=\frac{1}{2(1+1)}=\frac{1}{4}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2(x^2-1)}=\frac{1}{4}}$ ។

2. $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+x+1}{2x^2-x+1}$ រាង $0/0$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$$ (ព្រោះពេល $x\to +\infty$, នោះ $\frac{1}{x},\frac{1}{x^2}\to 0$)

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+x+1}{2x^2-x+1}=\frac{1}{2}}$ ។

3. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{2e^x} = \frac{0}{2} = 0$ ។

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{2e^x} = 0}$ ។

4. $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$ រាង $0/0$

គុណកន្សោមឆ្លាស់

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(x-1)(1+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(x-1)(1+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{(x-1)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1}\frac{-1}{1+\sqrt{x}} = \frac{-1}{2}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{x-1} = -\frac{1}{2}}$ ។

លំហាត់ទី០៤ លីមីតធ្លាប់ចេញប្រឡងបាក់ឌុបឆ្នាំ ២០១៥ (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
គណនាលីមីត $A = \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{\sqrt{x+2}-2}$; $B = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$; $C = \lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{x}$

ដំណោះស្រាយ.គណនាលីមីត

$$A = \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{\sqrt{x+2}-2} \quad \text{រាង } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{\sqrt{x+2}-2}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{x+2}+2)}{x+2-4}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)(\sqrt{x+2}+2) = (2^2+2\times 2+4)(\sqrt{2+2}+2)$$

$$= (4+4+4)(2+2) = 12\times 4 = 48$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{\sqrt{x+2}-2} = 48}$ ។

ប្រើរូបមន្ត $1-\cos a = 2\sin^2\frac{a}{2}$

$$B = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}$$

$$= -2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\times\frac{x^2}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{2}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(x/2)^2}\times\frac{x^2}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}=-\frac{1}{2}}$ ។

$$C=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{1}{3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=1$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{x}=1}$ ។

លំហាត់ទី០៥ លីមីតធ្លាប់ចេញប្រឡងបាក់ឌុបឆ្នាំ ២០១៩ (ថ្នាក់វិទ្យាសាស្ត្រ)
គណនាលីមីត *1.* $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+2x+3}-(x+1)\right]$ *2.* $\lim_{x\to 0}\frac{-2x\sin x}{1-\cos^2 x}$ *3.* $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{\sin^4 x-1}$

ដំណោះស្រាយ. គណនា

1. $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+2x+3}-(x+1)\right]$ រាង $\infty-\infty$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+2x+3}-(x+1)\right]\left[\sqrt{x^2+2x+3}+(x+1)\right]}{\left[\sqrt{x^2+2x+3}+(x+1)\right]}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+2x+3)-(x+1)^2}{\left[\sqrt{x^2+2x+3}+(x+1)\right]}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+3-(x^2+2x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}+x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+3-x^2-2x-1}{\sqrt{x^2+2x+3}+x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+2x+3}+x+1} = 0$$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+2x+3}-(x+1)\right]=0$ ។

2. $\lim_{x\to 0} \frac{-2x\sin x}{1-\cos^2 x}$ រាង $\frac{0}{0}$

ប្រើរូបមន្ត $1-\cos^2 x = \sin^2 x$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2x\sin x}{\sin^2 x}$$

$$= -2\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^2}\times\frac{x^2}{\sin^2 x}$$

$$= -2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\right)^2$$

$$= -2\times 1\times 1^2 = -2$$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to 0}\frac{-2x\sin x}{1-\cos^2 x} = -2$ ។

3. $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{\sin^4 x-1}$ រាង $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{(\sin^2 x-1)(\sin^2 x+1)}$$

$$= \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{(\sin x-1)(1+\sin x)(\sin^2 x+1)}$$

$$= \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\sin x-1)(\sin^2 x+1)}$$

$$= \frac{1}{(-1-1)\left((-1)^2+1\right)} = \frac{1}{-2\times 2} = -\frac{1}{4}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{\sin^4 x-1}=-\frac{1}{4}}$ ។

លំហាត់ទី០៦ លីមីតរាងមិនកំណត់

គណនាលីមីតខាងក្រោម.

$(a).\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{2(2x-3)}{x^3-3x^2+2x}\right)$ $(b).\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

$(c).\ \lim_{x\to0}\frac{\sin(2+x)-\sin(2-x)}{x}$ $(d).\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

$(f).\lim_{x\to0}\frac{\cos ax-\cos bx}{\cos cx-1}$

ដំណោះស្រាយ. គណនាលីមីត៖

$$(a).\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{2(2x-3)}{x^3-3x^2+2x}\right)=\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{2(2x-3)}{x(x-1)(x-2)}\right)$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x(x-1)-2(2x-3)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x(x-1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-3)}{x(x-1)(x-2)}\quad ;x-2\neq0$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-3}{x(x-1)}=-\frac{1}{2}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{2(2x-3)}{x^3-3x^2+2x}\right)=-\frac{1}{2}}$ ។

$$(b).\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2+x-2}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}=\frac{1}{2\sqrt{2}}}$ ។

(c). $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2+x)-\sin(2-x)}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos\frac{2+x+2-x}{2}\sin\frac{2+x-2+x}{2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2\sin x}{x}$$

$$= 2\cos 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 2\cos 2$$

ដែល $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2+x)-\sin(2-x)}{x}=2\cos 2}$ ។

(d). $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{\sin^3 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x\,4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\frac{1}{2}}$ ។

(e). $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}} = \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{a+2x}+\sqrt{3x}}{\sqrt{a+2x}+\sqrt{3x}}$

$$= \lim_{x\to a}\frac{a+2x-3x}{\left(\sqrt{3a}+x-2\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{a+2x}+\sqrt{3x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{(a-x)\left(\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{3a}+x-2\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{a+2x}+\sqrt{3x}\right)\left(\sqrt{3a+x}+2\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{(a-x)\left(\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{a+2x}+\sqrt{3x}\right)(3a+x-4x)}$$

$$= \frac{4\sqrt{a}}{3\times 2\sqrt{3a}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}}$ ។

(f). $\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{\cos cx-1} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)x\sin\frac{(a-b)x}{2}}{2\left(\frac{\sin^2\frac{cx}{2}}{2}\right)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{(a+b)x}{2}\sin\frac{(a-b)x}{2}}{x^2}\times\frac{x^2}{\sin^2\frac{cx}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{(a+b)x}{2}}{\frac{(a+b)x}{2}\times\frac{2}{a+b}}\times\frac{\sin\frac{(a-b)x}{2}}{\frac{(a-b)x}{2}\times\frac{2}{a-b}}\times\frac{\frac{cx^2}{2}\times\frac{4}{c^2}}{\sin^2\frac{cx}{2}}$$

$$= \frac{a+b}{2}\times\frac{a-b}{2}\times\frac{4}{c^2} = \frac{a^2-b^2}{c^2}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{\cos cx-1} = \frac{a^2-b^2}{c^2}}$ ។

លំហាត់ទី០៧ លីមីតរាងមិនកំណត់

រកចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^n-3^n}{x-3} = 108$$ ។

ដំណោះស្រាយ. រកចំនួនគត់វិជ្ជមាន n

ដោយប្រើរូបមន្ត $(a^n-b^n) = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

យើងបាន $\lim_{x\to 3}\frac{x^n-3^n}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(x^{n-1}+3x^{n-2}+\cdots+x3^{n-2}+3^{n-1}\right)}{(x-3)}$

$$= \underbrace{3^{n-1}+3^{n-1}+\cdots+3^{n-1}+3^{n-1}}_{n\text{ តួរ}}$$

$$= n3^{n-1}$$

ដោយ $\lim_{x\to 3}\frac{x^n-3^n}{x-3} = 108$

$\Leftrightarrow \quad n(3)^{n-1} = 108 = 4(27) = 4(3)^{4-1}$

$\Longrightarrow \quad n = 4$

ដូច្នេះ $n = 4$ ។

លំហាត់ទី០៨

គណនាលីមីត (ក) $\lim_{\alpha\to\beta}\left[\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}\right]$

(ខ) $\lim_{x\to\pi/2}\dfrac{\left[1-\tan(x/2)\right]\left[1-\sin x\right]}{\left[1+\tan(x/2)\right]\left[\pi-2x\right]^3}$ ។

ដំណោះស្រាយ. គណនាលីមីត

(ក) $\lim_{\alpha\to\beta}\left[\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}\right]$ រាង $\dfrac{0}{0}$

$$=\lim_{\alpha\to\beta}\left[\frac{(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}\right]$$

$$=\lim_{\alpha\to\beta}\frac{2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\alpha-\beta}\times\lim_{\alpha\to\beta}\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\alpha+\beta}$$

$$=\cos\beta\cdot\frac{2\sin\beta}{2\beta}\lim_{\alpha-\beta\to0}\frac{2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{2\sin\beta\cos\beta}{2\beta}\times1=\frac{\sin2\beta}{2\beta}$$

ដូច្នេះ $\lim_{\alpha\to\beta}\left[\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}\right]=\dfrac{\sin2\beta}{2\beta}$ ។

(ខ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left[1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right][1-\sin x]}{\left[1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right][\pi-2x]^3}$ រាង $\frac{0}{0}$

កន្សោមដែលឲ្យ អាចសរសេរបានជា

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\times\frac{1-\sin x}{(\pi-2x)^3}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\times\frac{1-\sin x}{(\pi-2x)^3}$$

តាង $h=x-\frac{\pi}{2}$ នាំឲ្យ $x=h+\frac{\pi}{2}$ យើងបាន

$$=\lim_{h\to 0}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left(h+\frac{\pi}{2}\right)\right)\times\frac{1-\sin\left(h+\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\pi-2\left(h+\frac{\pi}{2}\right)\right)^3}$$

$$=\lim_{h\to 0}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{h}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\times\frac{1-\left(\sin h\cos\frac{\pi}{2}+\cos h\sin\frac{\pi}{2}\right)}{(\pi-2h-\pi)^3}$$

$$=\lim_{h\to 0}\tan\left(-\frac{h}{2}\right)\times\frac{1-\cos h}{(2h)^3}$$

$$=\frac{1}{2^3}\lim_{h\to 0}\frac{\tan\left(-\frac{h}{2}\right)}{h}\times\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h^2}=\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}\lim_{h\to 0}\frac{\tan\left(-\frac{h}{2}\right)}{\left(-\frac{h}{2}\right)}\times\frac{\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{32} \text{ ។}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x \to \pi/2} \frac{\left[1 - \tan(x/2)\right]\left[1 - \sin x\right]}{\left[1 + \tan(x/2)\right]\left[\pi - 2x\right]^3} = \frac{1}{32} \text{ ។}}$

លំហាត់ទី០៩

គណនាលីមីត (ក) $\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} \right]$

(ខ) $\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{1-n^2} + \frac{2}{1-n^2} + \frac{3}{1-n^2} + \cdots + \frac{n}{1-n^2} \right]$

ដំណោះស្រាយ. គណនា

(ក) $I = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} \right]$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left\{ \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1 + \frac{2n}{n}} \right] \right\}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{1 + \frac{i}{n}}$$

តាង $x = \frac{i}{n}$ និង $\frac{1}{n} = dx$ ពេល $i = 0$ នោះ $x = 0$ និងពេល $i = 2n$ នោះ $x = 2$ ។

ដូច្នេះតាមនិយមន័យអាំងតេក្រាល

$$I = \int_0^2 \frac{1}{1+x} dx = \left[\ln(1+x) \right]_0^2 = \ln 3 - \ln 1$$

$$= \ln 3$$

ដូច្នេះ $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n}\right]=\ln 3$ ។

(ខ) $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{1-n^2}+\frac{2}{1-n^2}+\frac{3}{1-n^2}+\cdots+\frac{n}{1-n^2}\right]$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1+2+3+\cdots+n}{1-n^2}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\frac{n(1+n)}{2}}{1-n^2}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n(1+n)}{2(1-n^2)}\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(1+n)}{2(1-n)(1+n)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2(1-n)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n\left(\frac{1}{n}-1\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\left(\frac{1}{n}-1\right)}=-\frac{1}{2}$$

ដូច្នេះ $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{1-n^2}+\frac{2}{1-n^2}+\frac{3}{1-n^2}+\cdots+\frac{n}{1-n^2}\right]=-\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី០១០

គណនាលីមីត (ក) $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right]$

(ខ) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1^x+2^x+3^x+\cdots+n^x}{n}\right)^{a/x}$

(គ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1^{\cos^2 x}+2^{\cos^2 x}+\cdots+n^{\cos^2 x}}{n}\right\}^{\frac{1}{\cos^2 x}}$

(ឃ) $\lim_{x\to+\infty} x^2\sqrt{\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\sqrt{\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\sqrt{1-\cos\frac{1}{x}\sqrt{\cdots}}}}$

ដំណោះស្រាយ. គណនាលីមីត

(ក) $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]=\frac{1}{2}}$ ។

(ខ) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1^x+2^x+3^x+\cdots+n^x}{n}\right)^{a/x}$ រាង 1^∞

ប្រើរូបមន្ត $\lim_{x\to 0}\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{\lim_{x\to 0} g(x)[f(x)-1]}$ យើងបាន

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1^x+2^x+3^x+\cdots+n^x}{n}\right)^{a/x}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{a}{x}\left[\frac{1^x+2^x+3^x+\cdots+n^x}{n}-1\right]}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1^x+2^x+3^x+\cdots+n^x-n}{x}\right]\cdot\frac{a}{n}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left\{\frac{1^x-1}{x}+\frac{2^x-1}{x}+\frac{3^x-1}{x}+\cdots+\frac{n^x-1}{x}\right\}\frac{a}{n}}$$

$$= e^{\frac{a}{n}\{\ln 1+\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln n\}} = e^{\frac{a}{n}\{\ln(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)\}}$$

$$= e^{\frac{a}{n}\ln n!} = \ln(n!)^{\frac{a}{n}}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1^x+2^x+3^x+\cdots+n^x}{n}\right) = \ln(n!)^{\frac{a}{n}}}$ ។

(គ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1^{\cos^2 x}+2^{\cos^2 x}+\cdots+n^{\cos^2 x}}{n}\right\}^{\frac{1}{\cos^2 x}}$ រាង 1^∞

យើងប្រើរូបមន្ត $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[f(x)\right]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x)\left[f(x)-1\right]}$ ដោយ

យក $f(x) = \frac{1^{\cos^2 x}+2^{\cos^2 x}+\cdots+n^{\cos^2 x}}{n}$ និង $g(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ យើងបាន

$$\lim_{x\to\pi/2}\left\{\frac{1^{\cos^2 x}+2^{\cos^2 x}+\cdots+n^{\cos^2 x}}{n}\right\}^{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2 x}\left\{\frac{1^{\cos^2 x}+2^{\cos^2 x}+\cdots+n^{\cos^2 x}}{n}-1\right\}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1^{\cos^2 x}+2^{\cos^2 x}+\cdots+n^{\cos^2 x}-n}{\cos^2 x}\right\}\cdot\frac{1}{n}}$$

$$= e^{\frac{1}{n}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1^{\cos^2 x}-1}{\cos^2 x}+\frac{2^{\cos^2 x}-1}{\cos^2 x}+\cdots+\frac{n^{\cos^2 x}-1}{\cos^2 x}\right\}}$$

$$= e^{\frac{1}{n}\{\ln 1+\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln n\}} = \mathrm{e}^{\ln(n!)^{1/n}}$$

$$= \ln(n!)^{\frac{1}{n}}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1^{\cos^2 x}+2^{\cos^2 x}+\cdots+n^{\cos^2 x}}{n}\right\}^{\frac{1}{\cos^2 x}} = \ln(n!)^{1/n} \text{ ។}}$

(ឃ) យក $L = \lim_{x\to+\infty} x^2\sqrt{\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\sqrt{\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\sqrt{\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\sqrt{\cdots}}}}$

យក $y = \sqrt{\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\sqrt{\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\sqrt{\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\sqrt{\cdots}}}}$

$$\Rightarrow y = \sqrt{\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)y} \Rightarrow y^2 = \left(1-\cos\frac{1}{x}\right)y \Rightarrow y^2 - \left(1-\cos\frac{1}{x}\right)y = 0$$

$$\Rightarrow y = 0 \quad \text{ឬ} \quad y = 1-\cos\frac{1}{x}$$

យើងបាន

$$L = \lim_{x\to+\infty} x^2 y$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) \quad \text{តាង } t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t}$$

យើងបាន

$$L=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\right)^2(1-\cos t)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}=2\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{2}$$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to+\infty}x^2\sqrt{\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\sqrt{\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\sqrt{\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\sqrt{\cdots}}}}=\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី១១

បើ $a=\lim_{n\to+\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(r+2)r!}$ និង $b=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}$ ចូរស្រាយថា $2a=b$ ។

ដំណោះស្រាយ. ស្រាយថា $2a=b$

តាង $t_r=\frac{1}{(r+2)r!}=\frac{(r+1)}{(r+2)(r+1)r!}=\frac{r+1}{(r+2)!}$

$$=\frac{(r+2)-1}{(r+2)!}=\frac{r+2}{(r+2)!}-\frac{1}{(r+2)!}$$

$$=\frac{1}{(r+1)!}-\frac{1}{(r+2)!}$$

យើងបាន $\sum_{r=1}^{n}r_t=\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{(r+1)!}-\frac{1}{(r+2)!}\right)$

$$=\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!}$$

យើងបាន $a=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{r=1}^{n}\frac{1}{(r+2)r!}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!}\right)=\frac{1}{2}$

ហើយ $b=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^{x}}{\sin x-x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{x}\left(\frac{e^{\sin x-x}-1}{\sin x-x}\right)=1$

ដូច្នេះ $\boxed{2a=b}$ ។

លំហាត់ទី១២ ការគណនាលីមីត
ចូរគណនាលីមីត: (ក) $\lim\limits_{x\to 2a}\frac{\sqrt{x-2a}+\sqrt{x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{x^2-4a^2}}$ (ខ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin x\cos x}$ (គ) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\tan\theta+\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{\theta}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}\right)$

ដំណោះស្រាយ. គណនាលីមីត

(ក) $\lim\limits_{x\to 2a}\frac{\sqrt{x-2a}+\sqrt{x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{x^2-4a^2}}$ រាង $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 2a}\frac{\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x^2-4a^2}}+\lim_{x\to 2a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{x^2-4a^2}}$$

$$=\lim_{x\to 2a}\frac{1}{\sqrt{x+2a}}+\lim_{x\to 2a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{(x-2a)(x+2a)}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{a}}+\lim_{x\to 2a}\frac{x-2a}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2a}\right)\sqrt{(x-2a)(x+2a)}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{a}}+\lim_{x\to 2a}\frac{(x-2a)\sqrt{(x-2a)(x+2a)}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2a}\right)(x-2a)(x+2a)}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{a}}+\lim_{x\to 2a}\frac{\sqrt{\left(x^2-4a^2\right)}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2a}\right)(x+2a)}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{a}}+0$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to 2a}\frac{\sqrt{x-2a}+\sqrt{x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{x^2-4a^2}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}}$ ។

(ខ) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin x\cos x}$ រាង $\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)}{x\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)}{x\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\times\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x\sin x}\times\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos x}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{x}{\sin x}$$

$$=\frac{3}{2}\times 1^2\times 1=\frac{3}{2}$$ ។

ដូច្នេះ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin x\cos x}=\frac{3}{2}$ ។

(គ) $\lim_{n\to+\infty}\left(\tan\theta+\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{\theta}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}\right)$

យើងមាន $\tan 2\theta=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$

$$\frac{1}{\cot 2\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$

$$\cot 2\theta=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$2\cot 2\theta=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$2\cot 2\theta=\cot\theta-\tan\theta\Rightarrow\tan\theta=\cot\theta-2\cot 2\theta$$

យើងបាន

$$\tan\theta=\cot\theta-2\cot 2\theta$$

$$\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}-\cot\theta$$

$$\frac{1}{2^2}\tan\frac{\theta}{2^2}=\frac{1}{2^2}\cot\frac{\theta}{2^2}-\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}$$

....

$$\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{\theta}{2^{n-1}}$$

យើងបាន $S=\tan\theta+\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{\theta}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}$

$$=\frac{1}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n}-2\cot 2\theta$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n}-2\cot 2\theta\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2^n}}{\tan\frac{\theta}{2^n}}-2\cot 2\theta$$

$$=-2\cot 2\theta+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\theta}\left[\frac{\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\theta}{2}}\right]$$

$$=-2\cot 2\theta+\frac{1}{\theta}$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\tan\theta+\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{\theta}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{\theta}{2^n}\right)=\frac{1}{\theta}-2\cot 2\theta}$ ។

លំហាត់ទី១២ ការគណនាលីមីត

ចូរគណនាលីមីត: (ក) $\lim_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sec^2 t\,dt}{x\sin x}$

(ខ) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+5x+3}{x^2+x+2}\right)^x$

(គ) ចំពោះ $x\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^x$

ដំណោះស្រាយ គណនា

(ក) $\lim_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sec^2 t\,dt}{x\sin x}$ រូបមន្ត $\int\sec^2 x\,dx=\tan x+c$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{[\tan x]_0^{x^2}}{x\sin x}$

យើងអាចគណនាផ្ទាល់តែម្តង ដោយមិនចាំបាច់ប្រើវិធានឡូពីតាល់

$=\lim_{x\to0}\dfrac{\tan x^2}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\dfrac{2x\left(1+\tan^2 x^2\right)}{\sin x+x\cos x}$ (ប្រើវិធានឡូពីតាល់)

$=\lim_{x\to0}\dfrac{2\left(1+\tan^2 x^2\right)}{\dfrac{\sin x}{x}+\cos x}$

$=\dfrac{2}{1+1}=1$

ដូច្នេះ $\lim_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sec^2 t\,dt}{x\sin x}=1$ ។

(ខ) $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+5x+3}{x^2+x+2}\right)^x$ រាង 1^∞

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+2+4x+1}{x^2+x+2}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4x+1}{x^2+x+2}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{4x+1}{x^2+x+2}\right)^{\frac{x^2+x+2}{4x+1}}\right]^{\frac{x(4x+1)}{x^2+x+2}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(4x+1)}{x^2+x+2}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(4+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x}\right)}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}} = e^4$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+5x+3}{x^2+x+2}\right)^x = e^4}$ ។

(គ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^x$ រាង 1^∞

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2-5}{x+2}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{x+2}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{5}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{5}}\right]^{\frac{5x}{x+2}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x}{x+2}} = e^5$$

ដូច្នេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{x}=e^{5}}$ ។

លំហាត់ទី១៣ ការគណនាលីមីត
បើ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right)^{2x}=e^{2}$ ចូររកតម្លៃ a និង b ។

ដំណោះស្រាយ. រកតម្លៃ a និង b

យើងបាន $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}+\frac{a}{x^2}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a+ax}{x^2}\right)^{2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{a(1+x)}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{a(1+x)}}\right]^{2x\times\frac{a(1+x)}{x^2}}$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2a(1+x)}{x}}=e^{\lim_{x\to\infty}2a\left(\frac{1}{x}+1\right)}$$

$$=e^{2a}$$

ដោយ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}+\frac{a}{x^2}\right)^{2x}=e^{2}$ យើងបាន $e^{2a}=e^{a}\Rightarrow a=1$

ដូច្នេះ $\boxed{a=1 \text{ និង } b\in\mathbb{R}}$ ។

លំហាត់ទី១៤ ភាពជាប់នៃអនុគមន៍
យក α និង β ជាឫសពីរផ្សេងគ្នានៃ $ax^2+bx+c=0$, ចូរគណនាលីមីត $\lim_{x\to\alpha}\frac{1-\cos(ax^2+bx+c)}{(x-\alpha)^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ. គណនាលីមីត

យើងមាន ឫសសមីការ $ax^2+bx+c=0$ គឺ α និង β នោះមានន័យថា

$$a\cdot(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{1-\cos a\cdot(x-\alpha)(x-\beta)}{(x-\alpha)^2}$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{2\sin^2\left(\dfrac{a(x-\alpha)(x-\beta)}{2}\right)}{\dfrac{a^2(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{4}}\times\frac{a^2(x-\beta)^2}{4}$$

$$=\frac{a^2}{2}(\alpha-\beta)^2$$ ។

ដូច្នេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{1-\cos a\cdot(x-\alpha)(x-\beta)}{(x-\alpha)^2}=\dfrac{a^2}{2}(\alpha-\beta)^2}$ ។

លំហាត់ទី១៥ ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

បើ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^5-32}{x-2}, & where \quad x\neq 2\\ k, & where \quad x=2\end{cases}$ គឺជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=2$ ។

ចូរគណនាតម្លៃ k ។

ដំណោះស្រាយ. អនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^5-32}{x-2}, & where \quad x\neq 2\\ k, & where \quad x=2\end{cases}$ គឺជាប់ត្រង់

$x=2$ ។ យើងដឹងថា

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^5-32}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^5-2^5}{x-2}\right)$$

តែយើងដឹងថា $\lim_{x\to a}\left(\frac{x^n-a^n}{x-a}\right) = na^{n-1}$ ។

ដូច្នេះ $\lim_{x\to 2} f(x) = 5\times 2^4 = 80$ ។

ដោយ $f(2)=k$ និង $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=2$ នោះយើងបាន

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \Rightarrow k = 80$$

ដូច្នេះ $\boxed{\text{តម្លៃ } k=80}$ ។

លំហាត់ទី១៦ ភាពជាប់នៃអនុគមន៍
បើ $f(x)=\begin{cases} x+\lambda, & -1>x>3 \\ 4, & x=3 \\ 3x-5, & x>3 \end{cases}$ គឺជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=3$ ។ ចូរគណនាតម្លៃ λ ។

ដំណោះស្រាយ. អនុគមន៍ $f(x)=\begin{cases} x+\lambda, & -1>x>3 \\ 4, & x=3 \\ 3x-5, & x>3 \end{cases}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=3$ នោះយើងបាន

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow \lim_{x\to 3}(x+\lambda) = 4$$

$$\Rightarrow \lambda = 1$$ ។

ដូច្នេះ $\boxed{\lambda = 1}$ ។

លំហាត់ទី១៧ ភាពជាប់នៃអនុគមន៍
អនុគមន៍ $f: \mathbb{R}-\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ឲ្យដោយ $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{e^{2x}-1}$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃ $f(0)$ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។

ដំណោះស្រាយ. យើងមាន

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{e^{2x}-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-2x}{x(e^{2x}-1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left[1+(2x)+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\cdots\right]-1-2x}{x\left[1+(2x)+\frac{(2x)^2}{2!}+\cdots-1\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\cdots}{x\left[(2x)+\frac{(2x)^2}{2!}+\cdots\right]} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}x+\cdots}{2+\frac{(2)^2}{2!}x+\cdots}$$

$$= \frac{2+0+\cdots}{2+0+\cdots} = \frac{2}{2} = 1$$

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x=0$ កាលណា

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow f(0) = 1 \text{ ។}$$

ដូច្នេះ $\boxed{f(0)=1}$ ។

លំហាត់ទី១៨ ភាពជាប់នៃអនុគមន៍
បើ $f(x)=(x+1)^{\cot x}$ គឺជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x=0$ ។ ចូរគណនា $f(0)$ ។

ដំណោះស្រាយ. យើងមាន

$$f(x)=(x+1)^{\cot x}$$

នោះ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^{\cot x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{x\cot x}=e^{\lim\limits_{x\to 0} x\cot x}$$

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\dfrac{\sin x}{x}}=1$ (ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$)

យើងបាន $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=e$ ។

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់ត្រង់ $x=0$ កាលណា

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=e \text{ ។}$$

ដូច្នេះ $\boxed{f(0)=e \text{ ។}}$

លំហាត់ទី១៩ ការគណនាលីមីត

តាង α និង a ជាចំនួនថេរ ហើយ $f(x)$ និង $g(x)$ ជាអនុគមន៍។ បង្ហាញថាបើ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ និង $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ នោះ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ ។

ដំណោះស្រាយ. ឧបមាថា $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ និង $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ ។

នោះគេបាន

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\times g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\times\lim_{x\to a}g(x)$$

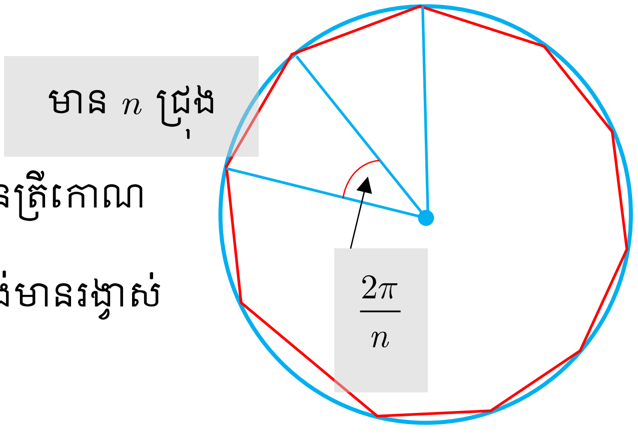
$$=\alpha\times 0=0 \text{ ពិត}$$

ដូច្នេះ បើ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ និង $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ នោះ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ ។

លំហាត់ទី២០ ការគណនាលីមីត

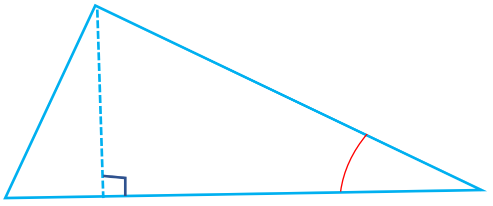
តាង S_n ជាក្រឡាផ្ទៃនៃពហុកោណដែលមាន n ជ្រុងចារឹកក្នុងរង្វង់ដែលមានកាំ a ។ គណនា S_n រួចកំណត់តម្លៃ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ. គណនា S_n



ដោយពហុកោណនោះមានជ្រុងចំនួន n ជ្រុង នោះគេទទួលបានត្រីកោណចំនួន n ដែលមានមុំជាប់ផ្ចិតរង្វង់មានរង្វាស់ស្មើនឹង $\frac{2\pi}{n}$ ។

សង្កេតលើត្រីកោណតែមួយសិន។ យើងមាន



រូបមន្តផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណគឺ

$$S_{\Delta} = \frac{bh}{2} \text{ (} b = \text{បាត, } h = \text{កំពស់)}$$

ដោយ $b = a$ (កាំរង្វង់) និង $h = a\sin\frac{2\pi}{n}$ (ព្រោះ $\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{a}{h}$)

យើងបាន $S_{\Delta} = \frac{1}{2}a^2\sin\frac{2\pi}{n}$ នោះគេទាញបាន

$$S_n = nS_{\Delta} = \frac{1}{2}a^2 n\sin\frac{2\pi}{n} \text{ ។}$$

គណនា $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^2 n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$

$$\text{(តាង } t = \frac{2\pi}{n} \text{ , } when \ \ n\to\infty, \ \ then \ \ t\to 0\text{)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{a^2}{2}\cdot\frac{2\pi}{t}\cdot\sin t = \lim_{t\to 0} a^2\pi\frac{\sin t}{t} = a^2\pi \text{ ។}$$

ដូច្នេះ $\boxed{S_n = \frac{a^2 n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} \text{ និង } \lim\limits_{n\to\infty} S_n = a^2\pi \text{ ។}}$