លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

បរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា និង ពាណិជ្ជកម្ម

គណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោក

សម្រាប់សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geq 0$$

BMO 2010

ភាគ៦

អារម្ភកថា

សួស្តី ប្រិយមិត្តអ្នកសិក្សាជាទីគោរព រាប់អាន !

សៀវភៅគណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោក ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់នៅក្នុងដៃនេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបរៀងឡើងក្នុងគោលបំណងទុកជាឯកសារស្រាវជ្រាវសម្រាប់អ្នកសិក្សាដែលមានបំណងក្លាយជាសិស្សពូកែផ្នែកគណិតវិទ្យា និង ដើម្បីត្រៀមប្រឡងប្រជែងនានា ។ រាល់លំហាត់ទាំងអស់នៅក្នុងសៀវភៅនេះ សុទ្ធសឹងតែជាប្រធានលំហាត់ដែលធ្លាប់បានចេញប្រឡងសិស្សពូកែគណិតវិទ្យារួចហើយនៅជុំវិញពិភពលោក និង ធ្លាប់ចេញប្រឡងប្រកួតប្រជែងគណិតវិទ្យាអូឡាំពិចអន្តរជាតិ (International Mathematical Olympiad) ដែលយើងខ្ញុំបានខិតខំស្រាវជ្រាវតាមរយះ Internet យកមកធ្វើដំណោះស្រាយយ៉ាងផ្ចិតផ្ចង់ ហើយព្រមទាំងក្បោះក្បាយបំផុត ។

ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ សៀវភៅនេះពុំមែនជាសៀវភៅដែលល្អហួសគេហួសឯងនោះទេ កំហុសឆ្គងដោយអចេតនាប្រាកដជាកើតមាន ទាំងបច្ចេកទេស និង អក្ខរាវិរុទ្ធ ។ អាស្រយ័ហេតុនេះយើងខ្ញុំជាអ្នករៀបរៀង រងចាំជានិច្ចនូវរាល់មតិរិះគន់បែស្ថាបនាពីសំណាក់អ្នកអានក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដោយក្តីរីករាយបំផុត ដើម្បីកែលំអរសៀវនេះឱ្យកាន់តែមានសុក្រត្យភាពថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់ យើងខ្ញុំអ្នកនិពន្ធ សូមគោរពជូនពរចំពោះអ្នកសិក្សាទាំងអស់ជួបតែសំណាងល្អ និង ទទួលជោគជ័យជានិច្ចក្នុងឆាកជីវិត ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី ២៧ កក្កដា ឆ្នាំ២០១០

អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាវជ្រាវ ***លឹម ផល្គុន***

Tel : 017 768 246

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លោក លឹម ផល្គុន

លោក សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក លឹម ឆុន

លោក អ៊ឹង សំណាង

លោកស្រី ទុយ វីណា

លោក ទិត្យ ម៉េង

លោក នន់ សុខណា

លោក ព្រឹម សុនិត្យ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិត្តសិរ

ការិយកុំព្យូទ័រ

លោក អ៊ឹង សំណាង

កញ្ញា លី គុណ្ណាកា

រចនាជំព័រ និង ក្រប

លោក ព្រុំ ម៉ាឡា

PROBLEMS

ភាគ៦

1. គេឱ្យ x, y, z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $xyz = 1$ ។

ចូរបង្ហាញវិសមភាព :

$$\frac{(x+y-1)^2}{z} + \frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} \geq x+y+z$$

2. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ មេដ្យាននៃត្រីកោណដែលគូសចេញពីកំពូល A , B , C កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណរៀងគ្នាត្រង់ M , N , P ។

ចូរបង្ហាញថា $AM^2 + BN^2 + CP^2 \geq \frac{4}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$ ។

3.គេឱ្យអនុគមន៍ f ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 0$ គេមានទំនាក់ទំនង ។

$f(x) - 2xf(\frac{1}{x}) = x^2 - \frac{2}{x} - 3$ ។ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c

ចូរបង្ហាញថា $\frac{f(a)}{b} + \frac{f(b)}{c} + \frac{f(c)}{a} \geq 12$?

4.គេឱ្យអនុគមន៍ f ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $t \in IR$ គេមានទំនាក់ទំនង ។

$f\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) + t.f\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) = 1$ ។ ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $y = f(x)$?

5.គេឱ្យអនុគមន៍ $f(t) = (t)^{\ln^2 t + 3\ln t + 3}$ ដែល $t > 0$ និង $t \neq 1$ ។

គេពិនិត្យស្វីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1 = f(e)$ និងចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេមាន $u_{n+1} = f(u_n)$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចូរស្រាយថា $1 + \ln u_{n+1} = (1 + \ln u_n)^3$

រួចទាញរកតួ u_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

6.កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a , b , c ដើម្បីឱ្យបណ្តាសមីការខាងក្រោម

$$\begin{cases} x^2-2ax+b=0 \\ x^2-2bx+c=0 \\ x^2-2cx+a=0 \end{cases}$$ មានឬសជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

7.គេឱ្យ M ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ ABC ។

បើបន្ទាត់ AB ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ AMC នោះបង្ហាញថា

$\sin\angle CMA+\sin\angle\sin CBM\le\frac{2}{\sqrt{3}}$ ។

8.គេឱ្យត្រីកោណ ABC មានជ្រុង a , b , c និងមានមុំក្នុង α , β , γ

បើ $\alpha=3\beta$ ចូរបង្ហាញថា $(a-b)(a^2-b^2)=bc^2$?

9.គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a , b , c ។

D , E, F ជាជើងកម្ពស់គូសចេញពីកំពូល A , B , C រៀងគ្នា ។

តាង $AD=h_a$, $BE=h_b$, $CF=h_c$ ជារង្វាស់កម្ពស់នៃត្រីកោណ

និង $HA=q_A$, $HB=q_B$, $HC=q_c$ ដែល H ជាអរតូសង់ត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយថា $h_aq_a+h_bq_b+h_cq_c=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$ ។

10.ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x , y , z បើគេដឹងថា

$$\frac{13}{x^2}+\frac{1996}{y^2}=\frac{z}{1997}$$ ។

11.គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geq 0$$

(BMO 2010)

12.គេឱ្យ $a , b , c > 0$ ដែល $abc \geq 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\frac{a^2}{1+a})(1+\frac{b^2}{1+b})(1+\frac{c^2}{1+c}) \geq \frac{27}{8}$?

13.គេឱ្យត្រីកោណសមង្ស័ ABC មួយមាន G ជាទីប្រជុំទម្ងន់ ។

D ជាចំនុចមួយនៃ $[AB]$ ដែល $AD = AG$ ។

បន្ទាត់ DG កាត់ AC និង BC ត្រង់ E និង F រៀងគ្នា ។

ចូរបង្ហាញថា $ED = EF$ ។

14. គេឱ្យ a, b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3}\geq\frac{10}{9}(a+b+c)^2$$

15.គេឱ្យស្ទីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ ៖

$a_0 = 4$, $a_1 = 9$ និង $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n + 3$ ដែល $n = 0 , 1 , 2 , ...$

ចូរស្រាយថា a_n ជាការេប្រាកដចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

16.គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ ចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃ ៖

$$T = \frac{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}} + \frac{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}} + \frac{\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}}$$

(Vietnam Team Selection Tests 2007)

17.គណនាផលបូក $S_n = \frac{1^3}{2} + \frac{2^3}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + ... + \frac{n^3}{2^n}$

រួចទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$ ។

18.គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(n+1) - 2f(n) = \frac{n.2^{n+1}}{(n+1)!}$ គ្រប់ $n \in IN$

និង $f(o) = 1$ ។ គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} [\frac{f(n)}{2^n}]$?

19.ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \in (0 , \frac{\pi}{4})$

ចូរបង្ហាញថា $(\cos x)^{\cos x} > (\sin x)^{\sin x}$

20.គេឱ្យ D និង E ជាចំណុចនៅលើជ្រុង AB និង CA នៃត្រីកោណ ABC ដោយដឹងថា DE ស្របទៅនឹង BC ហើយ DE ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ។ ចូរបង្ហាញថា $DE \le \frac{AB+BC+CA}{8}$

(Italy 1999)

21. គេឱ្យ a , b , c , d ជាបីចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព :

$(a^2+b^2-1)(c^2+d^2-1) > (ac+bd-1)^2$

ចូរបង្ហាញថា $a^2+b^2>1$ និង $c^2+d^2>1$ ។

22.គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃអប្បបរមានៃកន្សោម $E=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}$ ។

23. ចូរគណនាផលបូក :

$$S_n=\frac{2}{3+1}+\frac{2^2}{3^2+1}+.....+\frac{2^{n+1}}{3^{2^n}+1}$$

24. គេឱ្យ $A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+....+\frac{1}{1997.1998}$

និង $B=\frac{1}{1000.1998}+\frac{1}{1001.1997}+\frac{1}{1002.1996}+....+\frac{1}{1998.1000}$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{A}{B}$ ជាចំនួនគត់ ?

25. គេឱ្យ x និង y ជាចំនួនគត់ដោយដឹងថា

$$x^3 + y^3 + (x+y)^3 + 30xy = 2000$$

ចូរបង្ហាញថា $x + y = 10$ ។

26.គេឱ្យ $x_1, x_2, ..., x_n$ (ដែល $n \geq 2$) ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$\frac{1}{x_1+1998} + \frac{1}{x_2+1998} + ... + \frac{1}{x_n+1998} = \frac{1}{1998}$$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}{n-1} \geq 1998$ ។

27.គេឱ្យ x, y, z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz = x + y + z$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{x+y}{1+z^2} + \frac{y+z}{1+x^2} + \frac{z+x}{1+y^2} \geq \frac{27}{2xyz}$ ។

28. ត្រីកោណមួយមានរង្វាស់ជ្រុងជាចំនួនគត់វិជ្ជមានហើយចារឹកក្រៅរង្វង់មួយមាន រង្វាស់កាំស្មើ 1 ។ ចូរកំណត់ជ្រុងនៃត្រីកោណនេះ រួចបង្ហាញថាវាមានមុំមួយស្មើ 90^o ។

29. ចូរបង្ហាញថាបើ $abc = 8$ និង $a, b, c > 0$ នោះគេបាន :

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4}{3}$$

30.គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ហើយ

មានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a+b}{\cos C} + \frac{b+c}{\cos A} + \frac{c+a}{\cos B} \geq 4(a+b+c)$

31.គេឱ្យ $x\,,\,y\,,\,z>0$ ដែល $x+y+z=1$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{x^3}{(1-x)^2}+\frac{y^3}{(1-y)^2}+\frac{z^3}{(1-z)^2}\ge\frac{1}{4}$

32. គេឱ្យ a,b,c,d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abcd=1$ ។

បើគេដឹងថា $a+b+c+d>\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$ នោះចូរបង្ហាញថា

$a+b+c+d<\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}$ ។

33.គេយក $a\,,\,b\,,\,c$ ជាចំនួនវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\ge\frac{3}{4}$

（Czech and Slovak Republics 2005 ）

34.គេយក $a\,,\,b\,,\,c$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\frac{a}{b})(1+\frac{b}{c})(1+\frac{c}{a})\ge 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$

（APMO 1998 ）

35.គេយក $a\,,\,b\,,\,c$ ជាចំនួនពិតនៃចន្លោះ $(0,1)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$

（Romania 2002 ）

36.ចូរគណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{2}{3+1}+\frac{2^2}{3^2+1}+.....+\frac{2^{n+1}}{3^{2^n}+1}$$

37.គេយក a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca=abc$

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\dfrac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\dfrac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)}\geq 1$

（Poland 2006 ）

38.គេយក x , y , z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz=1$

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{1}{yz+z}+\dfrac{1}{zx+x}+\dfrac{1}{xy+y}\geq\dfrac{3}{2}$

（Kazakhstan 2008 ）

39.ចំនួនពិត $a,$, b , c , x , y , z ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a\geq b\geq c>0$ និង $x\geq y\geq z>0$

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)}\geq\frac{3}{4}$$

（Korea 2000 ）

40.ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{y}{1-y}+\dfrac{z}{1-z}\geq\dfrac{3\sqrt[3]{xyz}}{1-\sqrt[3]{xyz}}$

ចំពោះគ្រប់ $0<x$, y , $z<1$ ។

（Ireland 2002 ）

41. ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានគេបាន :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$$

（IMO 2001 ）

42. ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានគេបាន :

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}+\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}+\frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1}\geq a+b+c+3$$

(Bulgaria 2007)

43.គេឱ្យ x , y , z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ ។

ចូរស្រាយថា :

$$\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\geq 1$$

(APMO 2007)

44. បើចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2+b^2+c^2=3$ នោះចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^2}{2+b+c^2}+\frac{b^2}{2+c+a^2}+\frac{c^2}{2+a+b^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{12}$$

(Baltic 2008)

45.គេមានចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{a-bc}{a+bc}+\dfrac{b-ca}{b+ca}+\dfrac{c-ab}{c+ab}\leq\dfrac{3}{2}$ ។

(Canada 2008)

46. បើ a , b , c ជា ចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $ab+bc+ca=3$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{1}{1+a^2(b+c)}+\dfrac{1}{1+b^2(c+a)}+\dfrac{1}{1+c^2(a+b)}\leq\dfrac{1}{abc}$ ។

(Romania 2008)

47.គេឱ្យ a, b, c ជា ចំនួនពិតវិជ្ជមាន។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca})$ ។

(Lithuania 2006)

48.ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a វិជ្ជមាន ឬសូន្យចូរបង្ហាញថា :

$(a+1)^{a+2}\ge e^{2a}$ ដែល $e = 2.7182$ ។

49.គេឱ្យផលបូក $S_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left[k\cos(\frac{k\pi}{n^2})\right]$

ក. បង្ហាញថា $\cos x\ge 1-\frac{x^2}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\ge 0$ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}S_n$ ។

50.គេឱ្យអនុគមន៍ $f(n)=(n^2+n+1)^2+1$

តាង $u_n=\frac{f(1)f(3)f(5)....f(2n-1)}{f(2)f(4)f(6)....f(2n)}$; $n\in IN^*$

ចូរគណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(n\sqrt{u_n})$

51. គេឱ្យស្វ៊ីត (x_n) មួយកំណត់ដោយ :

$x_1=3$; $x_{n+1}=x_n{}^2-3x_n+4$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $x_n\ge n+2$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$ ។

ខ. តាង $y_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_k-1}\right)$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$ ។ គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}y_n$ ។

52. គេឱ្យស្វ៊ីត (x_n) មួយកំណត់ដោយ ៖

$$x_1 = a \;;\; x_{n+1} = \frac{x_n{}^2}{b} + x_n \;,\; a > 0 \;,\; b > 0$$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$ ។

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{x_{k+1}} \right)$ ។

53. គេឱ្យស្វ៊ីត (x_n) មួយកំណត់ដោយ ៖

$$x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + ... + \sqrt{a}}}}$$ (មាន n រ៉ាឌីកាល់ និង $a > 0$)

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $x_n < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$

54. គេឱ្យស្វ៊ីត (x_n) មួយកំណត់ដោយ ៖

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^3}} \sum_{k=1}^{n} \left[k.\ln(1 + \frac{k}{\sqrt{n^3}}) \right]$$

ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1 + x) \le x$ ចំពោះគ្រប់ $x \ge 0$ ។

ខ.គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(x_n \right)$?

55. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ។

AA' , BB' , CC' ជាកំពស់ ហើយ H ជាអរតូសង់ នៃត្រីកោណ ABC ។

ចូរស្រាយថា $a + b + c \ge 2\sqrt{3}(HA' + HB' + HC')$

56. គេឱ្យa , b , c , d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

$$S = \frac{a^4}{(a+b)(a^2+b^2)} + \frac{b^4}{(b+c)(b^2+c^2)} + \frac{c^4}{(c+d)(c^2+d^2)} + \frac{d^4}{(d+a)(d^2+a^2)}$$

ចូរបង្ហាញថា $S \geq \frac{a+b+c+d}{4}$ ។

57.បង្ហាញថា $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ ជាពហុគុណនៃ 9 ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

58. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=2^x(ax^2+bx+c)$

រក a , b , c ដែល $f(x+1)-f(x)=2^x x^2$ រួចទាញរកផលបូក :

$$S_n = 2.1^2+2^2.2^2+2^3.3^2+....+2^n.n^2$$

59.គេឱ្យពហុធា $P(x)=2x^4+ax^2+bx+c$

កំណត់ a , b,c ជាចំនួនពិតដោយដឹងថា $P(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-2$ ហើយ $P(x)$ ចែកនឹង x^2-1 សល់ x ។

60. គេឱ្យស៊េរីអនន្ត $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{n^2}$

ចូរស្រាយថាស៊េរីខាងលើនេះជាស៊េរីបង្រួម ។

61. ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m និង n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $3.2^m+1=n^2$

62. គេឱ្យP ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ។បន្ទាត់ AP,BP និង CP កាត់រង្វង់(Γ) ដែលចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ម្តងទៀតត្រង់ K , L និង M រៀងគ្នា ។បន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ (Γ) ត្រង់ C កាត់បន្ទាត់ AB ត្រង់ S ។ ឧបមាថា $SC=SP$ ។ ចូរបង្ហាញថា $MK=ML$

(IMO 2010)

63. គេឱ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x_1, x_2, ..., x_n$ ហើយគេតាង

$S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$(1+x_1)(1+x_2)....(1+x_n) \le 1 + S + \frac{S^2}{2!} + ... + \frac{S^n}{n!}$$

(APMO 1989)

SOLUTION

ភាគ៦

លំហាត់ទី១

គេឱ្យ x, y, z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $xyz = 1$ ។

ចូរបង្ហាញវិសមភាព :

$$\frac{(x+y-1)^2}{z} + \frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} \geq x+y+z$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញវិសមភាព :

$$\frac{(x+y-1)^2}{z} + \frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} \geq x+y+z$$

របៀបទី១

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេបាន :

$$\frac{(x+y-1)^2}{z} + z \geq 2|x+y-1| \geq 2(x+y-1) \quad (1)$$

$$\frac{(y+z-1)^2}{x} + x \geq 2|y+z-1| \geq 2(y+z-1) \quad (2)$$

$$\frac{(z+x-1)^2}{y} + y \geq 2|z+x-1| \geq 2(z+x-1) \quad (3)$$

បូកវិសមភាព (1) , (2), (3) អង្គនឹងអង្គគេបាន :

$$\frac{(x+y-1)^2}{z} + \frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} \geq 3(x+y+z) - 6$$

ដោយ $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}=3$ ព្រោះ $xyz=1$

គេបាន $2(x+y+z)\geq 6$

ឬ $2(x+y+z)-6\geq 0$

ឬ $3(x+y+z)-6\geq x+y+z$

ដូចនេះ $\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}\geq x+y+z$

របៀបទី២

គេតាង

$$T=\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}-(x+y+z)$$

ដោយប្រើវិសមភាព $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\geq\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ គេបាន

$$T\geq\frac{\left[|x+y-1|+|y+z-1|+|z+x-1|\right]^2}{x+y+z}-(x+y+z)$$

$$T\geq\frac{(x+y-1+y+z-1+z+x-1)^2-(x+y+z)^2}{x+y+z}$$

$$T\geq\frac{(2x+2y+2z-3)^2-(x+y+z)^2}{x+y+z}$$

$$T\geq\frac{3(x+y+z-3)(x+y+z-1)}{x+y+z}$$

តាមវិសមភាព AM – GM គេមាន ៖

$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$ (ព្រោះ $xyz = 1$)

គេទាញបាន $x+y+z-3 \geq 0$ និង $x+y+z-1 \geq 2$

ហេតុនេះ $T = \frac{3(x+y+z-3)(x+y+z-1)}{x+y+z} \geq 0$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{(x+y-1)^2}{z} + \frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} \geq x+y+z$ ។

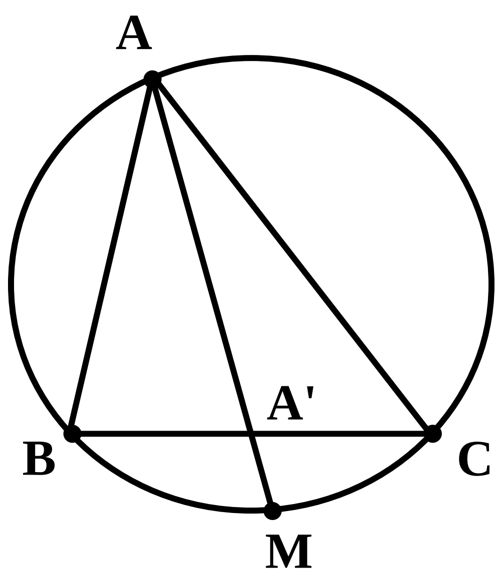
លំហាត់ទី២

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ មេដ្យាននៃត្រីកោណដែលគូសចេញពីកំពូល A , B , C កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណរៀងគ្នាត្រង់ M , N , P ។

ចូរបង្ហាញថា $AM^2 + BN^2 + CP^2 \geq \frac{4}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $AM^2 + BN^2 + CP^2 \geq \frac{4}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$



តាង a , b , c ជាជ្រុងត្រីកោណABC

ហើយ m_a , m_b , m_c ជារង្វាស់មេដ្យាន

គូសពីកំពូល A , B , C ។

យើងមាន $\angle ABC = \angle AMC$

(មុំស្កាត់ដោយធ្នូររួម AC)

ហើយ $\angle AA'B = \angle MA'C$ (មុំទល់កំពូល)

គេទាញបាន AA'B និង MA'C ជាត្រីកោណដូចគ្នា ។

គេបាន $\frac{AA'}{CA'} = \frac{A'B}{A'M} \Rightarrow A'M = \frac{A'B.CA'}{AA'} = \frac{a^2}{4m_a}$

ហើយ $AM = AA' + A'M = m_a + \frac{a^2}{4m_a}$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $BN = m_b + \frac{b^2}{4m_b}$ និង $CP = m_c + \frac{c^2}{4m_c}$ ។

តាង $T = AM^2 + BN^2 + CP^2$

$$T = (m_a + \frac{a^2}{4m_a})^2 + (m_b + \frac{b^2}{4m_b})^2 + (m_c + \frac{c^2}{4m_c})^2$$

$$= {m_a}^2 + {m_b}^2 + {m_c}^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{1}{16}\left(\frac{a^4}{{m_a}^2} + \frac{b^4}{{m_b}^2} + \frac{c^4}{{m_c}^2}\right)$$

ដោយ ${m_a}^2 + {m_b}^2 + {m_c}^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

គេបាន $T = \frac{5}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{16}\left(\frac{a^4}{{m_a}^2} + \frac{b^4}{{m_b}^2} + \frac{c^4}{{m_c}^2}\right)$

តាមវិសមភាព Cauchy – Schwart គេបាន

$$\frac{a^4}{{m_a}^2} + \frac{b^4}{{m_b}^2} + \frac{c^4}{{m_c}^2} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{{m_a}^2 + {m_b}^2 + {m_c}^2} = \frac{4}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

គេទាញបាន ៖

$$T \geq \frac{5}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{12}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{4}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

ដូចនេះ $AM^2 + BN^2 + CP^2 \geq \frac{4}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$ ។

លំហាត់ទី៣

គេឱ្យអនុគមន៍ f ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \neq 0$ គេមានទំនាក់ទំនង ។

$f(x) - 2x f(\frac{1}{x}) = x^2 - \frac{2}{x} - 3$ ។ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c

ចូរបង្ហាញថា $\frac{f(a)}{b} + \frac{f(b)}{c} + \frac{f(c)}{a} \geq 12$?

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{f(a)}{b} + \frac{f(b)}{c} + \frac{f(c)}{a} \geq 12$

គេមាន $f(x) - 2x f(\frac{1}{x}) = x^2 - \frac{2}{x} - 3$ ដែល $x \neq 0$

ជំនួស x ដោយ $\frac{1}{x}$ គេបាន $f(\frac{1}{x}) - \frac{2}{x} f(x) = \frac{1}{x^2} - 2x - 3$

គេបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} f(x) - 2x f(\frac{1}{x}) = x^2 - \frac{2}{x} - 3 \\ f(\frac{1}{x}) - \frac{2}{x} f(x) = \frac{1}{x^2} - 2x - 3 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} f(x) - 2x f(\frac{1}{x}) = x^2 - \frac{2}{x} - 3 \\ 2x f(\frac{1}{x}) - 4 f(x) = \frac{2}{x} - 4x^2 - 6x \end{cases}$

បូកសមីការពីរនេះគេបាន $-3 f(x) = -3x^2 - 6x - 3$

គេទាញបាន $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

គេមាន $\frac{f(a)}{b}=\frac{(a+1)^2}{b}\geq\frac{4a}{b}$ ព្រោះ $a+1\geq 2\sqrt{a}$ ។

ហើយ $\frac{f(b)}{c}=\frac{(b+1)^2}{c}\geq\frac{4b}{c}$ និង $\frac{f(c)}{a}=\frac{(c+1)^2}{a}\geq\frac{4c}{a}$

គេបាន $\frac{f(a)}{b}+\frac{f(b)}{c}+\frac{f(c)}{a}\geq 4(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}}=3$

ដូចនេះ $\frac{f(a)}{b}+\frac{f(b)}{c}+\frac{f(c)}{a}\geq 12$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឱ្យអនុគមន៍ f ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $t\in IR$ គេមានទំនាក់ទំនង ។

$f\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+t.f\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)=1$ ។ ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $y=f(x)$?

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រកអនុគមន៍ $y=f(x)$

គេមាន $f\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+t.f\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)=1 \quad (1)$

តាង $t=\tan\frac{x}{2}$ ដែល $x\neq(2k+1)\pi$, $k\in Z$

គេបាន $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$

ទំនាក់ទំនង (1) អាចសរសេរ $f(\cos x)+\tan\frac{x}{2}.f(\sin x)=1 \quad (i)$

ជំនួស x ដោយ $\frac{\pi}{2}-x$ ក្នុង (i) គេបាន :

$$f(\sin x)+\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})f(\cos x)=1$$

$$f(\sin x)+\frac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}f(\cos x)=1$$

$$\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}f(\sin x)+f(\cos x)=\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\quad \text{(ii)}$$

ធ្វើផលដកសមីការ (i) និង (ii) គេបាន :

$$(\tan\frac{x}{2}-\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}})f(\sin x)=1-\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}$$

$$-\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{x}}f(\sin x)=-\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}$$

គេទាញ $f(\sin x)=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\dfrac{2t}{1+t^2}=\sin x$

ដូចនេះ $f(x)=x$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(t)=(t)^{\ln^2 t+3\ln t+3}$ ដែល $t>0$ និង $t\neq 1$ ។

គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=f(e)$ និងចំពោះគ្រប់

ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេមាន $u_{n+1}=f(u_n)$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចូរស្រាយថា $1+\ln u_{n+1}=(1+\ln u_n)^3$

រួចទាញរកតួ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $1+\ln u_{n+1}=(1+\ln u_n)^3$

គេមាន $f(t)=(t)^{\ln^2 t+3\ln t+3}$

គេបាន $u_{n+1}=f(u_n)=(u_n)^{\ln^2 u_n+3\ln u_n+3}$

នាំឱ្យ $\ln u_{n+1}=\ln(u_n)^{\ln^2 u_n+3\ln u_n+3}$

$$\ln u_{n+1}=(\ln^2 u_n+3\ln u_n+3)\ln u_n$$

$$\ln u_{n+1}=\ln^3 u_n+3\ln^2 u_n+3\ln u_n$$

$$\ln u_{n+1}=(1+\ln u_n)^3-1$$

ដូចនេះ $1+\ln u_{n+1}=(1+\ln u_n)^3$ ។

ទាញរកតួ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេមាន $1+\ln u_{n+1}=(1+\ln u_n)^3$

គេបាន $\ln(1+\ln u_{n+1}) = \ln(1+\ln u_n)^3$

ឬ $\ln(1+\ln u_{n+1}) = 3\ln(1+\ln u_n)$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $v_n = \ln(1+\ln u_n)$

គេបាន $v_{n+1} = \ln(1+\ln u_{n+1})$

$v_{n+1} = 3\ln(1+\ln u_n)$

$v_{n+1} = 3\,v_n$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 3$

និងតួ $v_1 = \ln(1+\ln u_1)$ តែ $u_1 = f(e) = e^{\ln^2 e+3\ln e+3} = e^7$

នោះ $v_1 = \ln(1+\ln e^7) = \ln 8 = 3\ln 2$ ។

តាមរូបមន្តគេបាន $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3\ln 2\times 3^{n-1} = 3^n \ln 2$

ដោយ $v_n = \ln(1+\ln u_n)$ នោះគេទាញបាន :

$\ln(1+\ln u_n) = 3^n \ln 2$ ឬ $1+\ln u_n = 2^{3^n}$

គេទាញ $u_n = e^{2^{3^n}-1}$ ដែល $e = 2.7182...$ ។

ដូចនេះតួទី n នៃស្វ៊ីតគឺ $u_n = e^{2^{3^n}-1}$ ។

លំហាត់ទី៦

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ដើម្បីឱ្យបណ្តាសមីការខាងក្រោម

$$\begin{cases} x^2 - 2ax + b = 0 \\ x^2 - 2bx + c = 0 \\ x^2 - 2cx + a = 0 \end{cases}$$ មានឫសជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$

ដើម្បីឱ្យសមីការទាំងអស់មានឫសជាចំនួនគត់វិជ្ជមានលុះត្រាតែឌីសគ្រីមីណង់

ទាំងអស់ $a^2 - b$, $b^2 - c$, $c^2 - a$ សុទ្ធតែជាការេប្រាកដ ។

គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a , b , c គេមាន $a^2 - b \ge (a-1)^2$

គេទាញ $b \ge 2a - 1$ ។ ដូចគ្នាដែរគេទាញ $c \ge 2b - 1$ និង $a \ge 2c - 1$

គេបាន $\begin{cases} b \ge 2a - 1 \\ c \ge 2b - 1 \\ a \ge 2c - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b \ge 8a - 4 & (1) \\ 2c \ge 4b - 2 & (2) \\ a \ge 2c - 1 & (3) \end{cases}$

បូកវិសមភាព $(1),(2),(3)$ គេបាន $a \ge 8a - 7$ នាំឱ្យ $a \le 1$

ដោយ a ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននោះ $a = 1$ ហើយដូចគ្នាដែរ $b = 1$, $c = 1$ ។

ដូចនេះ $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ ជាចម្លើយតែមួយគត់ ។

លំហាត់ទី៧

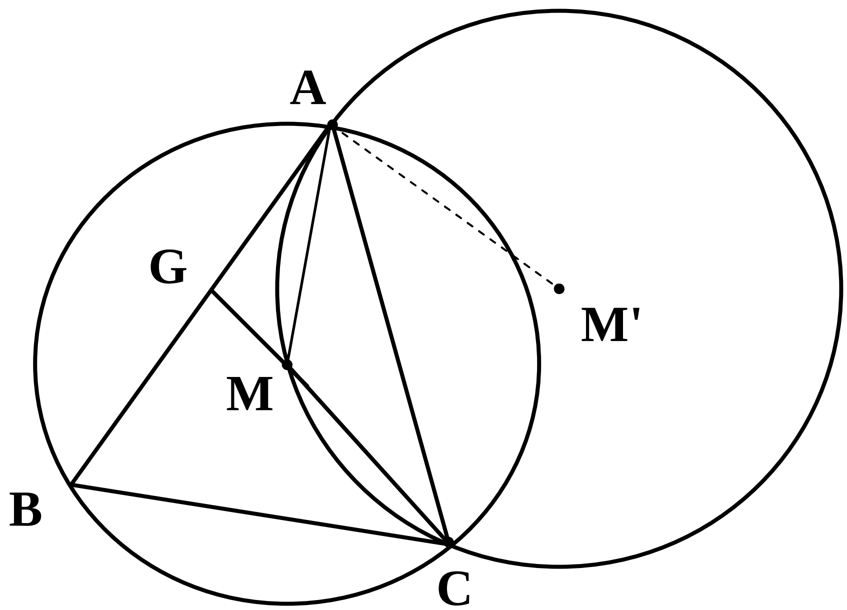
គេឱ្យ M ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ ABC ។

បើបន្ទាត់ AB ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ AMC នោះបង្ហាញថា

$$\sin\angle CMA + \sin\angle \sin CBM \le \frac{2}{\sqrt{3}}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា



យក G ជាចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុង [AB] ។

តាង a,b,c ជាប្រវែងជ្រុង BC , CA , AB ហើយ m_a, m_b, m_c

ជារង្វាស់មេដ្យានគូសពីកំពូល A,B,C រៀងគ្នា ។

ដោយ A ជាចំនុចប៉ះរវាងបន្ទាត់ (AB) ជាមួយរង្វង់ផ្ចិត M' នោះគេមាន

$GA^2 = GM.GC = \frac{1}{3}GC^2$ (ព្រោះ $GM = \frac{1}{3}GC$)

ដោយ $GA = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}$, $GC = m_c$ គេបាន $\frac{c^2}{4} = \frac{1}{3}{m_c}^2$

តាមទ្រឹស្តីបទមេដ្យានគេមាន ${m_c}^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$

គេទាញ $\frac{c^2}{4} = \frac{1}{3}(\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4})$ ឬ $a^2 + b^2 = 2c^2$ ។

ហេតុនេះ ${m_c}^2 = \frac{2c^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{3c^2}{4}$ ឬ $m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}c$

ហើយ ${m_a}^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4} = \frac{3b^2}{4}$

នាំឱ្យ $m_a = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ ហើយ $m_b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ។

តាង S ជាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC ហើយ AA' , BB' ជាមេដ្យាន

គេបាន $S_{CAM} = \frac{1}{2}AM.AC\sin\angle CAM = \frac{1}{4}AA'.AC\sin\angle CAM$

ឬ $S_{CAM} = \frac{1}{4}m_a b\sin\angle CAM = \frac{1}{2}S_{AA'C} = \frac{1}{4}S$

គេទាញបាន $\sin\angle CAM = \frac{S}{m_a b}$ ហើយ $\sin\angle CBM = \frac{S}{m_b a}$

គេបាន $\sin\angle CAM + \sin\angle CBM = \frac{S}{m_a b} + \frac{S}{m_b a}$

តែ $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ ហើយ $m_a=\frac{\sqrt{3}}{2}b$ និង $m_b=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

គេបាន $\sin\angle CAM+\sin\angle CBM=\frac{a^2+b^2}{\sqrt{3}ab}\sin C \quad (1)$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនួស $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

គេទាញ $\frac{a^2+b^2}{2}=a^2+b^2-2ab\cos C$ ព្រោះ $a^2+b^2=2c^2$

ហេតុនេះ $a^2+b^2=4bc\cos C \quad (2)$

យកទំនាក់ទំនង (2) ជំនួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$\sin\angle CAM+\sin\angle CBM=\frac{4\sin C\cos C}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin 2C\le\frac{2}{\sqrt{3}}$$

ដូចនេះ $\sin\angle CAM+\sin\angle CBM\le\frac{2}{\sqrt{3}}$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មានជ្រុង a , b , c និងមានមុំក្នុង α , β , γ ។

បើ $\alpha = 3\beta$ ចូរបង្ហាញថា $(a-b)(a^2-b^2) = bc^2$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(a-b)(a^2-b^2) = bc^2$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$

គេបាន $(a-b)(a^2-b^2) = (a-b)^2(a+b)$

ដោយ $a-b = 2R(\sin\alpha - \sin\beta)$

$$= 2R(\sin 3\beta - \sin\beta)$$

$$= 4R\sin\beta\cos 2\beta$$

ហើយ $a+b = 2R(\sin\alpha + \sin\beta)$

$$= 2R(\sin 3\beta + \sin\beta)$$

$$= 4R\sin 2\beta\cos\beta$$

$$= 8R\sin\beta\cos^2\beta$$

គេបាន $(a-b)(a^2-b^2) = 16R^2\sin^2\beta\cos^2 2\beta . 8R\sin\beta\cos^2\beta$

$$= 8R^3\sin^2 4\beta\sin\beta$$

$$= 8R^3\sin^2(\pi - 4\beta)\sin\beta$$

$$= 8R^3\sin^2\gamma\sin\beta$$

ដូចនេះ $(a-b)(a^2-b^2) = bc^2$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a , b , c ។

D , E, F ជាជើងកម្ពស់គូសចេញពីកំពូល A , B , C រៀងគ្នា ។

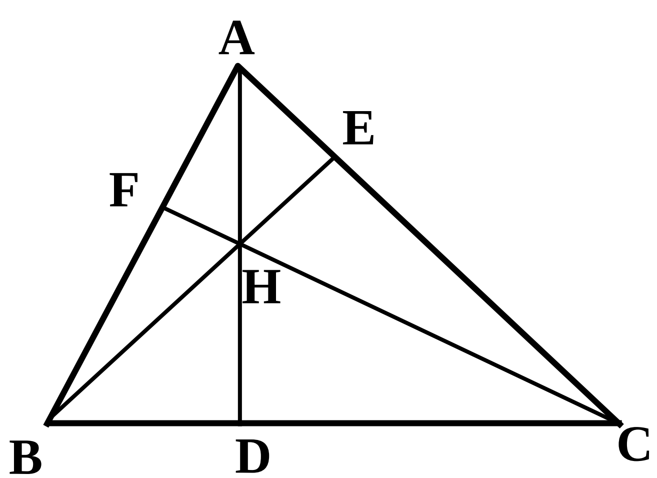
តាង $AD = h_a$, $BE = h_b$, $CF = h_c$ ជារង្វាស់កម្ពស់នៃត្រីកោណ

និង $HA = q_A$, $HB = q_B$, $HC = q_c$ ដែល H ជាអរតូសង់ត្រីកោណ។

ចូរស្រាយថា $h_a q_a + h_b q_b + h_c q_c = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $h_a q_a + h_b q_b + h_c q_c = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$



យើងមាន ΔACD ដូចត្រីកោណ ΔAHE

គេបាន $AD.AH = AC.AE$ ឬ $h_a q_a = b.AE$ (1)

ដូចគ្នាដែរ ΔABD ដូចត្រីកោណ ΔAHF

គេបាន $AD.AH = AB.AF$ ឬ $h_a q_a = c.AF$ (2)

បូកសមភាព (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន :

$2h_a q_a = b.AE + c.AF$ ឬ $h_a q_a = \dfrac{b.AE + c.AF}{2}$

ដូចគ្នាដែរ $h_b q_b = \dfrac{c.BF + a.BD}{2}$ និង $h_c q_c = \dfrac{a.CD + b.CE}{2}$

គេបាន $h_a q_a + h_b q_b + h_c q_c = \dfrac{a(CD + BD) + b(AE + CE) + c(AF + BF)}{2}$

ដោយ $CD + BD = a$, $AE + CE = b$, $AF + BF = c$

ដូចនេះ $h_a q_a + h_b q_b + h_c q_c = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$ ។

លំហាត់ទី១០

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x , y , z បើគេដឹងថា

$$\frac{13}{x^2}+\frac{1996}{y^2}=\frac{z}{1997}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x , y , z :

គេមាន $\frac{13}{x^2}+\frac{1996}{y^2}=\frac{z}{1997}$ (*)

តាង d ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ x និង y នោះ $x=md$ និង $y=nd$

ដែល m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នា ។

តាមសមីការ (*) គេអាចសរសេរ $\frac{13}{m^2d^2}+\frac{1996}{n^2d^2}=\frac{z}{1997}$

ឬ $13\times1997n^2+1996\times1997m^2=m^2n^2d^2z$

ដោយ m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នានោះយើងត្រូវមាន :

13×1997 ចែកដាច់នឹង m^2 និង 1996×1997 ចែកដាច់នឹងn^2 ។

ដោយគេមាន $1966=2^2\times449$ ហើយ 13 , 449 , 1997 ជាចំនួនបឋម

ដូចនេះតម្លៃ m និង n បំពេញលក្ខខណ្ឌខាងលើនេះគឺ $m=1$, $n=1$

ឬ $m=1$, $n=2$ ។

-ករណី $m=1$, $n=1$

គេបាន $d^2z=(13+1996).1997=7^2.41.1997$

ដោយ 1997 បឋមជាមួយ 41 និង 7 នោះគេទាញបាន $d=1$ ឬ $d=7$

ដូចនេះគេបានចម្លើយ $x=1$, $y=1$, $z=4011973$

ឬ $x=7$, $y=7$, $z=81877$ ។

-ករណី $m=1$, $n=2$

គេបាន $d^2z=(13+449).1997=2^9.1997$

គេទាញបាន $d=1$, 2 , 4 , 8 , 16 ។ ដូចនេះគេទាញបានចម្លើយ :

$(x,y,z)=(1\ ,\ 2\ ,\ 1022464);(2,4,255616);(4,8,63904)$

$(8,16,16976);(16,32,3994)$

លំហាត់ទី១១

គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geq 0$$

(BMO 2010)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា :

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geq 0$$

គេមាន

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}=\frac{a^2b^2-a^2bc}{a+b}=\frac{(a^2b^2+ab^2c)-(a^2bc+ab^2c)}{a+b}$$

$$=\frac{ab^2(a+c)-abc(a+b)}{a+b}=ab^2.\frac{a+c}{a+b}-abc$$

គេបាន $\frac{a^2b(b-c)}{a+b}=ab^2.\frac{a+c}{a+b}-abc \quad (1)$

ស្រាយបំភ្លឺដូចគ្នាដែរគេបាន $\frac{b^2c(c-a)}{b+c}=bc^2\frac{b+a}{b+c}-abc \quad (2)$

និង $\frac{c^2a(a-b)}{c+a}=ca^2\frac{c+b}{c+a} \quad (3)$

បូកសមភាព $(1),(2)$ និង (3) អង្គនិងអង្គគេបាន :

$$T = ab^2\frac{c+b}{a+b} + bc^2\frac{b+a}{b+c} + ca^2\frac{c+b}{c+a} - 3abc$$

ដែល $T = \frac{a^2b(b-c)}{a+b} + \frac{b^2c(c-a)}{b+c} + \frac{c^2a(a-b)}{c+a}$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន :

$$ab^2\frac{c+b}{a+b} + bc^2\frac{b+a}{b+c} + ca^2\frac{c+b}{c+a} \geq 3abc$$

ឬ $ab^2\frac{c+b}{a+b} + bc^2\frac{b+a}{b+c} + ca^2\frac{c+b}{c+a} - 3abc \geq 0$

ដូចនេះ $\frac{a^2b(b-c)}{a+b} + \frac{b^2c(c-a)}{b+c} + \frac{c^2a(a-b)}{c+a} \geq 0$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឱ្យ $a, b, c > 0$ ដែល $abc \geq 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\frac{a^2}{1+a})(1+\frac{b^2}{1+b})(1+\frac{c^2}{1+c}) \geq \frac{27}{8}$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(1+\frac{a^2}{1+a})(1+\frac{b^2}{1+b})(1+\frac{c^2}{1+c}) \geq \frac{27}{8}$

គេមាន $a^2+1 \geq 2a$ គ្រប់ $a > 0$

គេបាន $4a^2+4a+4 \geq 3a^2+6a+3 = 3(a+1)^2$

គេទាញ $a^2+a+1 \geq \frac{3(a+1)^2}{4}$

ឬ $\frac{a^2+a+1}{a+1} \geq \frac{3(a+1)}{4}$

ឬ $1+\frac{a^2}{1+a} \geq \frac{3\sqrt{a}}{2}$ ព្រោះ $a+1 \geq 2\sqrt{a}$

ដូចគ្នាដែរ $1+\frac{b^2}{1+b} \geq \frac{3\sqrt{b}}{2}$ និង $1+\frac{c^2}{1+c} \geq \frac{3\sqrt{c}}{2}$

គេបាន$(1+\frac{a^2}{1+a})(1+\frac{b^2}{1+b})(1+\frac{c^2}{1+c}) \geq \frac{27\sqrt{abc}}{8}$

ដោយសម្មតិកម្ម $abc \geq 1$ នោះ $\frac{27\sqrt{abc}}{8} \geq \frac{27}{8}$

ដូចនេះ $(1+\frac{a^2}{1+a})(1+\frac{b^2}{1+b})(1+\frac{c^2}{1+c}) \geq \frac{27}{8}$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេឱ្យត្រីកោណសមង្ស័ ABC មួយមាន G ជាទីប្រជុំទម្ងន់ ។

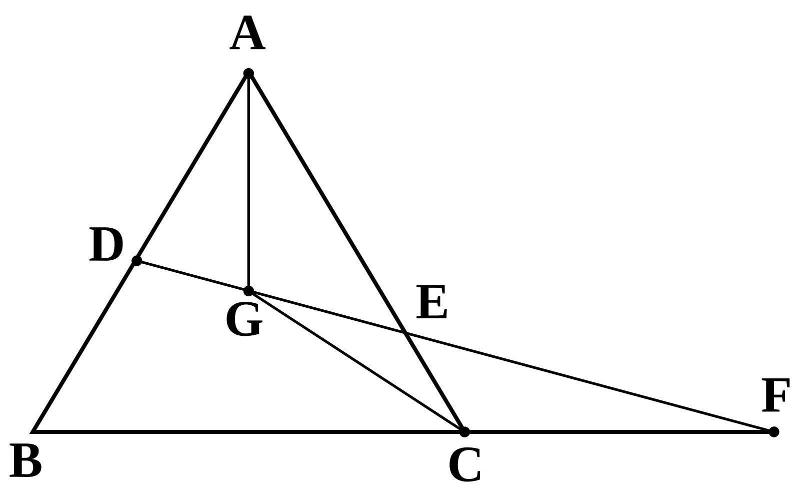
D ជាចំនុចមួយនៃ [AB] ដែល $AD = AG$ ។

បន្ទាត់ DG កាត់ AC និង BC ត្រង់ E និង F រៀងគ្នា ។

ចូរបង្ហាញថា $ED = EF$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $ED = EF$



ដោយ $AD = AG$ នោះ $\angle ADG = \angle AGD = \dfrac{180^o - 30^o}{2} = 75^o$

ហើយ $\angle AGE = 180^o - 75^o = 105^o$ និង $\angle CGE = 120^o - 105^o = 15^o$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $\angle GCF = 150^o$ នោះ $\angle CFG = 15^o$ ។

គេទាញបាន $CF = CG = AG = AD$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ ADE គេបាន :

$$\frac{DE}{\sin 60^o} = \frac{AD}{\sin \angle AED} \quad (1)$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ CEF គេបាន :

$$\frac{CF}{\sin \angle CEF} = \frac{EF}{\sin 120^o}$$

ដោយ $CF = AD$ និង $\angle AED = \angle CEF$ (មុំទល់កំពូល)

គេបាន $\frac{AD}{\sin \angle AED} = \frac{EF}{\sin 120^o} \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន $\frac{DE}{\sin 60^o} = \frac{EF}{\sin 120^o}$

ដោយ $\sin 120^o = \sin(180^o - 60^o) = \sin 60^o$

ដូចនេះ $DE = EF$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3} \geq \frac{10}{9}(a+b+c)^2$$

ដំណោះស្រាយ

គេមានសមភាព :

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$a^5+b^5+c^5=(a+b+c)^5-5(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

គេបាន :

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3}=\frac{5}{3}(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

យើងនឹងស្រាយថា $\frac{5}{3}(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) \geq \frac{10}{9}(a+b+c)^2$

ឬ $3(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) \geq 2(a+b+c)^2$

ឬ $$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$$ab+bc+ca \leq \frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}=a^2+b^2+c^2 \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3} \geq \frac{10}{9}(a+b+c)^2$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ :

$a_0 = 4$, $a_1 = 9$ និង $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n + 3$ ដែល $n = 0 , 1 , 2 , ...$

ចូរស្រាយថា a_n ជាការេប្រាកដចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា a_n ជាការេប្រាកដ

គេមាន $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n + 3 \quad (1)$

តាងស្វ៊ីតចំនួនពិត $b_n = a_n + k$ ដែល k ជាចំនួនពិតថេរ ។

គេទាញ $a_n = b_n - k$, $a_{n+1} = b_{n+1} - k$, $a_{n+2} = b_{n+2} - k$

ទំនាក់ទំនង (1) អាចសរសេរ :

$$b_{n+2} - k = 6(b_{n+1} - k) - 8(b_n - k) + 3$$

$$b_{n+2} = 6b_{n+1} - 8b_n + 3k + 3 \qquad (2)$$

បើ $3k + 3 = 0 \Rightarrow k = -1$ នោះទំនាក់ទំនង (2) ក្លាយទៅជា :

$b_{n+2} = 6b_{n+1} - 8b_n$ មានសមីការសម្គាល់ $x^2 - 6x + 8 = 0$

មានឬស $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ ។

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $\begin{cases} x_n = b_{n+1} - 2b_n \\ y_n = b_{n+1} - 4b_n \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} x_{n+1} = b_{n+2} - 2b_{n+1} \\ y_{n+1} = b_{n+2} - 4b_{n+1} \end{cases}$ ដោយ $b_{n+2} = 6b_{n+1} - 8b_n$

នោះ $\begin{cases} x_{n+1} = 4(b_{n+1} - 2b_n) \\ y_{n+1} = 2(b_{n+1} - 4b_n) \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n \\ y_{n+1} = 2y_n \end{cases}$

គេទាញបាន (x_n) និង (y_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង រៀងគ្នា

$q_1 = 4$, $q_2 = 2$ ។

តាមរូបមន្ត $x_n = x_0.q_1{}^n$ និង $y_n = y_0.q_2{}^n$

ដោយ $x_0 = b_1 - 2b_0 = (a_1 + k) - 2(a_0 + k) = 2$

និង $y_0 = b_1 - 4b_0 = (a_1 + k) - 4(a_0 + k) = -4$

គេបាន $x_n = 2.4^n$ និង $y_n = -4.2^n$ ។

ដោយ $\begin{cases} x_n = b_{n+1} - 2b_n \\ y_n = b_{n+1} - 4b_n \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} b_{n+1} - 2b_n = 2.4^n \\ b_{n+1} - 4b_n = -4.2^n \end{cases}$

ធ្វើផលសងគេបាន $2b_n = 2.4^n + 4.2^n \Rightarrow b_n = 4^n + 2.2^n$

ដោយ $a_n = b_n - k = 4^n + 2.2^n + 1$ (ព្រោះ $k = -1$)

ដូចនេះ $a_n = (2^n + 1)^2$ ជាការេប្រាកដគ្រប់ $n \in IN$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ ចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃ :

$$T=\frac{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}}$$

(Vietnam Team Selection Tests 2007)

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃ T

$$T=\frac{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}}$$

គេមាន $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\ ,\ \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}\ ,\ \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

គេបាន $T=\frac{p(p-a)(p-b)}{c^2(p-c)}+\frac{p(p-b)(p-c)}{a^2(p-a)}+\frac{p(p-a)(p-c)}{b^2(p-b)}$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

គេបាន $T=S^2\left[\frac{1}{c^2(p-c)^2}+\frac{1}{a^2(p-a)^2}+\frac{1}{b^2(p-b)^2}\right]$

លំហាត់ទី១៧

គណនាផលបូក $S_n = \frac{1^3}{2} + \frac{2^3}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + ... + \frac{n^3}{2^n}$

រួចទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក

គេមាន $S_n = \frac{1^3}{2} + \frac{2^3}{2^2} + \frac{3^3}{2^3} + ... + \frac{n^3}{2^n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^3}{2^k}\right)$

តាងអនុគមន៍ $f(k) = ak^3 + bk^2 + ck + d$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ :

$\frac{k^3}{2^k} = \frac{f(k)}{2^k} - \frac{f(k+1)}{2^{k+1}}$ ឬ $2k^3 = 2f(k) - f(k+1)$

$$2k^3 = 2(ak^3 + bk^2 + ck + d) - [a(k+1)^3 + b(k+1)^2 + c(k+1) + d]$$

$$2k^3 = ak^3 + (b-3a)k^2 + (c-3a-2b)k + d - a - b - c$$

គេទាញ $\begin{cases} a = 2 \\ b - 3a = 0 \\ c - 3a - 2b = 0 \\ d - a - b - c = 0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $a = 2, b = 6, c = 18, d = 26$

ហេតុនេះ $f(k) = 2k^3 + 6k^2 + 18k + 26$

គេបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{f(k)}{2^k} - \frac{f(k+1)}{2^{k+1}}\right] = \frac{f(1)}{2} - \frac{f(n+1)}{2^{n+1}}$

ដោយ $f(k) = 2k^3 + 6k^2 + 18k + 26$

គេបាន $f(1) = 2 + 6 + 18 + 26 = 52$

ហើយ $f(n+1) = 2(n+1)^3 + 6(n+1)^2 + 18(n+1) + 26$

$$= 2n^3 + 12n^2 + 36n + 50$$

គេបាន $S_n = \frac{52}{2} - \frac{2n^3 + 12n^2 + 36n + 52}{2^{n+1}}$

ដូចនេះ $S_n = 26 - \frac{n^3 + 6n^2 + 18n + 26}{2^n}$ និង $\lim_{n\to+\infty} S_n = 26$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(n+1)-2f(n)=\dfrac{n.2^{n+1}}{(n+1)!}$ គ្រប់ $n\in IN$

និង $f(o)=1$ ។ គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}[\dfrac{f(n)}{2^n}]$?

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}[\dfrac{f(n)}{2^n}]$

គេមាន $f(n+1)-2f(n)=\dfrac{n.2^{n+1}}{(n+1)!}$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 2^{n+1} គេបាន :

$$\frac{f(n+1)}{2^{n+1}}-\frac{f(n)}{2^n}=\frac{n}{(n+1)!}$$

ដោយ $\dfrac{n}{(n+1!}=\dfrac{(n+1)-1}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$

គេបាន $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left[\dfrac{f(k+1)}{2^{k+1}}-\dfrac{f(k)}{2^k}\right]=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left[\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}\right]$

$$\frac{f(n)}{2^n}-1=1-\frac{1}{n!} \text{ ឬ } \frac{f(n)}{2^n}=2-\frac{1}{n!}$$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f(n)}{2^n}\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{n!}\right)=2$ ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n!}\right)=0$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}[\dfrac{f(n)}{2^n}]=2$ ។

លំហាត់ទី១៩

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \in (0, \frac{\pi}{4})$

ចូរបង្ហាញថា $(\cos x)^{\cos x} > (\sin x)^{\sin x}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(\cos x)^{\cos x} > (\sin x)^{\sin x}$

តាមវិសមភាព Bernoulli ចំពោះគ្រប់ចំនួន x និង a ដែល $x > -1$ និង $a > 1$

យើងមាន $(1+x)^a \geq 1 + ax$ ។

ហេតុនេះចំពោះ $0 < x < \frac{\pi}{4}$ គេបាន :

$$(\cos^2 x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} = (1-\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}}.(1+\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}}$$

ដោយ $(1-\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > 1 - \cos x$ និង $(1+\sin x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > 1 + \cos x$

គេបាន $(\cos^2 x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > (1-\cos x)(1+\cos x) = \sin^2 x$

គេទាញ $(\cos x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > \sin x$

$$\ln(\cos x)^{\frac{\cos x}{\sin x}} > \ln(\sin x)$$

$$\frac{\cos x}{\sin x}\ln(\cos x) > \ln(\sin x)$$

$$\cos x \ln(\cos x) > \sin x \ln(\sin x)$$

$$\ln(\cos x)^{\cos x} > \ln(\sin x)^{\sin x}$$

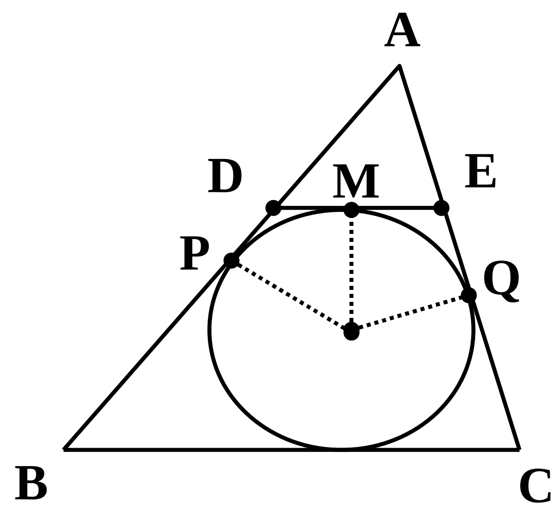
ដូចនេះ $(\cos x)^{\cos x} > (\sin x)^{\sin x}$ ។

លំហាត់ទី២០

គេឱ្យ D និង E ជាចំណុចនៅលើជ្រុង AB និង CA នៃត្រីកោណ ABC ដោយដឹងថា DE ស្របទៅនឹង BC ហើយ DE ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ។ ចូរបង្ហាញថា $DE \le \frac{AB+BC+CA}{8}$

(Italy 1999)

ដំណោះស្រាយ



បង្ហាញថា $DE \le \frac{AB+BC+CA}{8}$

តាង a , b , c ជាជ្រុងនៃ ΔABC

នឹង $p = \frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ ។

គេមាន $BC \,//\, DE$ តាមទ្រឹស្តីបទតាឡែស

គេបាន $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

ឬ $\frac{DE}{BC} = \frac{DE+AD+AE}{BC+AB+AC}$ ដោយ $\begin{cases} AD = AP - PD = AP - DM \\ AE = AQ - EQ = AP - ME \end{cases}$

គេបាន $\frac{DE}{BC} = \frac{DE+2AP-(DM+ME)}{BC+AB+AC} = \frac{2AP}{BC+AB+AC}$

ដោយ $AP = p - a$, $BC + AB + AC = a + b + c$

គេទាញ $\frac{DE}{a} = \frac{2(p-a)}{a+b+c}$ នាំឱ្យ $DE = \frac{2a(p-a)}{a+b+c} \le \frac{a+b+c}{8}$ ពិត

លំហាត់ទី២១

គេឱ្យ a , b , c , d ជាបីចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព :

$(a^2+b^2-1)(c^2+d^2-1)>(ac+bd-1)^2$

ចូរបង្ហាញថា $a^2+b^2>1$ និង $c^2+d^2>1$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $a^2+b^2>1$ និង $c^2+d^2>1$

តាង $x=1-a^2-b^2$ និង $y=1-c^2-d^2$

យើងឧបមាថា $x\geq 0$ និង $y\geq 0$

វិសមភាព $(a^2+b^2-1)(c^2+d^2-1)>(ac+bd-1)^2$

សមមូល $xy>(ac+bd-1)^2$

ឬ $4xy>(2ac+2bd-2)^2$

ដោយ $x+y=2-a^2-b^2-c^2-d^2$

នោះ $2ac+2bd-2=-a^2-b^2-c^2-d^2+2ac+2bd-x-y$

$$=-[(a-c)^2+(b-d)^2+x+y]$$

គេទាញ $4xy>[(a-c)^2+(b-d)^2+(x+y)]^2\geq(x+y)^2$

ឬ $4xy>x^2+2xy+y^2$

ឬ $(x-y)^2<0$ មិនពិត ។ នាំឱ្យការឧបមាខាងលើផ្ទុយពីការពិត ។

ដូចនេះគេទាញ $x<0$ និង $y<0$ នាំឱ្យ $a^2+b^2>1$ និង $c^2+d^2>1$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃអប្បបរមានៃកន្សោម $E=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃអប្បបរមានៃកន្សោម E

គេមាន $\frac{a^2}{a+b}=\frac{a^2+ab-ab}{a+b}=a-\frac{ab}{a+b}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $a+b\geq 2\sqrt{ab}$

គេបាន $\frac{1}{a+b}\leq\frac{1}{2\sqrt{ab}}$ ឬ $-\frac{ab}{a+b}\geq-\frac{\sqrt{ab}}{2}$

គេទាញ $\frac{a^2}{a+b}=a-\frac{ab}{a+b}\geq a-\frac{\sqrt{ab}}{2}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{b^2}{b+c}\geq b-\frac{\sqrt{bc}}{2}$ (2) ; $\frac{c^2}{c+a}\geq c-\frac{\sqrt{ca}}{2}$ (3)

បូកវិសមភាព (1); (2) & (3) គេទទួលបាន :

$$E\geq a+b+c-\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{2}=a+b+c-\frac{1}{2}$$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេមាន :

$$a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$$

គេទាញ $E\geq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ។ ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ E គឺ $E_{min}=\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី២៣

ចូរគណនាផលបូក :

$$S_n = \frac{2}{3+1} + \frac{2^2}{3^2+1} + \dots\dots + \frac{2^{n+1}}{3^{2^n}+1}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក :

គេមាន $S_n = \frac{2}{3+1} + \frac{2^2}{3^2+1} + \dots\dots + \frac{2^{n+1}}{3^{2^n}+1} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}\right)$

ចំពោះគ្រប់ $x \neq 1$ យើងមាន :

$$\frac{1}{x+1} = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{x^2-1}$$

គេទាញ $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$

យក $x = 3^{2^k}$ គេបាន $\frac{1}{3^{2^k}+1} = \frac{1}{3^{2^k}-1} - \frac{2}{3^{2^{k+1}}-1}$

គុណនឹង 2^{k+1} គេបាន $\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1} = \frac{2^{k+1}}{3^{2^k}-1} - \frac{2^{k+2}}{3^{2^{k+1}}-1}$

គេបាន :

$$S_n = \left(\frac{2}{3-1} - \frac{2^2}{3^2-1}\right) + \left(\frac{2^2}{3^2-1} - \frac{2^3}{3^{2^2}-1}\right) + \dots + \left(\frac{2^{n+1}}{3^{2^n}-1} - \frac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}}-1}\right)$$

ដូចនេះ $S_n = 1 - \frac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}}-1}$ ។

លំហាត់ទី២៤

គេឱ្យ $A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+....+\frac{1}{1997.1998}$

និង $B=\frac{1}{1000.1998}+\frac{1}{1001.1997}+\frac{1}{1002.1996}+....+\frac{1}{1998.1000}$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{A}{B}$ ជាចំនួនគត់ ?

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{A}{B}$ ជាចំនួនគត់ :

គេមាន $A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+....+\frac{1}{1997.1998}$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+...+\frac{1}{1997}-\frac{1}{1998}$$

$$=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{1998})-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+....+\frac{1}{1998})$$

$$=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{1998})-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{999})$$

$$=\frac{1}{1000}+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+.....+\frac{1}{1998}$$

ដោយ $A=\frac{1}{1000}+\frac{1}{1001}+....+\frac{1}{1998}\ (1)$

និង $A=\frac{1}{1998}+\frac{1}{1997}+....+\frac{1}{1000}\ (2)$

បូកទំនាក់ទំនង $(1)\,\&\,(2)$ គេបាន :

$$2A=2998(\frac{1}{1000.1998}+\frac{1}{1001.1997}+...+\frac{1}{1998.1000})=2998B$$

គេទាញបាន $\frac{A}{B}=1499$ ជាចំនួនគត់ ។

លំហាត់ទី២៩

គេឱ្យ x និង y ជាចំនួនគត់ដោយដឹងថា $x^3 + y^3 + (x+y)^3 + 30xy = 2000$

ចូរបង្ហាញថា $x + y = 10$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $x + y = 10$

គេមាន $x^3 + y^3 + (x+y)^3 + 30xy = 2000$

គេបាន $2(x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 + 30xy - 2000 = 0$

$$2[(x+y)^3 - 1000] - 3xy(x+y-10) = 0$$

$$(x+y-10)[\ 2(x+y)^2 + 20(x+y) + 200 - 3xy\,] = 0$$

ដោយ $f(x,y) = 2(x+y)^2 + 20(x+y) + 200 - 3xy$

$$= 2x^2 + 2y^2 + xy + 20x + 20y + 200$$

$$= x^2 + xy + y^2 + (x^2 + 20x + 100) + (y^2 + 20y + 100)$$

$$= (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4} + (x+10)^2 + (y+10)^2 > 0$$

គេទាញបាន $x + y - 10 = 0$ ឬ $x + y = 10$

ដូចនេះ $x + y = 10$ ។

លំហាត់ទី២៦

គេឱ្យ $x_1, x_2, ..., x_n$ (ដែល $n \ge 2$) ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$\frac{1}{x_1+1998}+\frac{1}{x_2+1998}+....+\frac{1}{x_n+1998}=\frac{1}{1998}$$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}{n-1} \ge 1998$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}{n-1} \ge 1998$

គេមាន $\frac{1}{x_1+1998}+\frac{1}{x_2+1998}+....+\frac{1}{x_n+1998}=\frac{1}{1998}$

ឬ $\frac{1998}{x_1+1998}+\frac{1998}{x_2+1998}+....+\frac{1998}{x_n+1998}=1$

តាង $y_i=\frac{1998}{x_i+1}$ គេបាន $y_1+y_2+....+y_n=1$

គេទាញ $1-y_i=\sum_{j\neq i}(y_i)$ ដែល $1\le i\le n$ និង $1\le j\le n$

តាម $AM-GM$ គេមាន $\sum_{j\neq i}(y_i)\ge (n-1)\sqrt[n-1]{\prod_{j\neq i}(y_i)}$

គេបាន $1-y_i\ge (n-1)\sqrt[n-1]{\prod_{j\neq i}(y_i)}$

គេទាញ $\prod_{i=1}^{n}(1-y_i)\ge (n-1)^n\prod_{i=1}^{n}(y_i)$ ឬ $\prod_{i=1}^{n}(\frac{1-y_i}{y_i})\ge (n-1)^n$

តែ $\frac{1-y_i}{y_i}=\frac{x_i}{1998}$ នោះ $\frac{x_1x_2...x_n}{1998^n}\ge (n-1)^n$ ឬ $\frac{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}{n-1}\ge 1998$ ។

លំហាត់ទី២៧

គេឱ្យ x, y, z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz = x + y + z$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{x+y}{1+z^2} + \frac{y+z}{1+x^2} + \frac{z+x}{1+y^2} \ge \frac{27}{2xyz}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{x+y}{1+z^2} + \frac{y+z}{1+x^2} + \frac{z+x}{1+y^2} \ge \frac{27}{2xyz}$

តាង $T = \frac{x+y}{1+z^2} + \frac{y+z}{1+x^2} + \frac{z+x}{1+y^2}$

ឬ $T = \frac{(x+y)^2}{x+y+z^2(x+y)} + \frac{(y+z)^2}{y+z+x^2(y+z)} + \frac{(z+x)^2}{z+x+y^2(z+x)}$

តាមវិសមភាព Cauchy – Schwarz គេមាន :

$$\frac{{a_1}^2}{b_1} + \frac{{a_2}^2}{b_2} + \frac{{a_3}^2}{b_3} + \dots + \frac{{a_n}^2}{b_n} \ge \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n}$$

គេបាន :

$$T \ge \frac{\left[(x+y)+(y+z)+(z+x)\right]^2}{2(x+y+z)+z^2(x+y)+x^2(y+z)+y^2(z+x)}$$

$$T \ge \frac{4(x+y+z)^2}{2xyz+z^2x+z^2y+x^2y+x^2z+y^2z+y^2x}$$

$$T \ge \frac{4(x+y+z)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$$(x+y)+(y+z)+(z+x)\geq 3\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$2(x+y+z)\geq 3\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$8(x+y+z)^3\geq 27(x+y)(y+z)(z+x)$$

គេទាញ $\dfrac{4(x+y+z)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)}\geq\dfrac{27}{2(x+y+z)}=\dfrac{27}{2xyz}$

នាំឱ្យ $T\geq\dfrac{27}{2xyz}$

ដូចនេះ $\dfrac{x+y}{1+z^2}+\dfrac{y+z}{1+x^2}+\dfrac{z+x}{1+y^2}\geq\dfrac{27}{2xyz}$ ។

លំហាត់ទី២៨

ត្រីកោណមួយមានរង្វាស់ជ្រុងជាចំនួនគត់វិជ្ជមានហើយចារឹកក្រៅរង្វង់មួយមានរង្វាស់កាំស្មើ 1 ។ ចូរកំណត់ជ្រុងនៃត្រីកោណនេះ រួចបង្ហាញថាវាមានមុំមួយស្មើ 90^o ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ជ្រុងនៃត្រីកោណ

តាង a , b , c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ ហើយ $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ

r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ និង S ជាផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ ។

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr$ ដោយ $r = 1$

គេទាញបាន $(p-a)(p-b)(p-c) = p \quad (1)$

តាង $x = p-a$, $y = p-b$, $z = p-c$ ។

ដោយ $a, b, c \in IN^*$ នោះ $x, y, z \in IN^*$

គេបាន $x + y + z = 3p - (a+b+c) = 3p - 2p = p$

សមីការ (1) អាចសរសេរ $x + y + z = xyz$

សន្មតថា $x > y > z$ នោះ $3x > x + y + z = xyz$ ឬ $y.z < 3$

គេទាញ $y = 2$, $z = 1$ និង $x = 3$ ។

ចំពោះ $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$ នោះ $p = x + y + z = 6$

ដូចនេះ $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ ។

ហើយដោយ $a^2 + b^2 = c^2$ នោះត្រីកោណនេះជាត្រីកោណកែង ។

លំហាត់ទី២៩

ចូរបង្ហាញថាបើ $abc = 8$ និង $a, b, c > 0$ នោះគេបាន :

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4}{3}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4}{3}$

តាង $T = \frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន

$$1 + a^3 = (1+a)(1-a+a^2) \leq \left(\frac{1+a+1-a+a^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{2+a^2}{2}\right)^2$$

គេទាញ $\sqrt{1+a^3} \leq \frac{a^2+2}{2}$ ។

ហេតុនេះ $\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} \geq \frac{4a^2}{(a^2+2)(b^2+2)}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន :

$$\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} \geq \frac{4b^2}{(b^2+2)(c^2+2)} \quad (2)$$

$$\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4c^2}{(c^2+2)(a^2+2)} \quad (3)$$

បូកវិសមភាព $(1),(2),(3)$ អង្គនឹងអង្គគេបាន :

$$T=\frac{4a^2}{(a^2+2)(b^2+2)}+\frac{4b^2}{(b^2+2)(c^2+2)}+\frac{4c^2}{(c^2+2)(a^2+2)}$$

$$=\frac{4[a^2(c^2+2)+b^2(a^2+2)+c^2(b^2+2)]}{(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)}$$

$$=\frac{4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2+2b^2+2c^2)}{a^2b^2c^2+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2+2b^2+2c^2)+8}$$

ដោយ $abc=8$ នោះគេបាន :

$$T\ge\frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2+2b^2+2c^2)}{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2+2b^2+2c^2)+36}=\frac{2t}{t+36}$$

ដែល $t=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2+2b^2+2c^2$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន :

$t\ge 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}+6\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=72$ (ព្រោះ $abc=8$)

គេបាន $1+\frac{36}{t}\le 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ ឬ $\frac{t+36}{t}\le\frac{3}{2}$ នាំឱ្យ $\frac{t}{t+36}\ge\frac{2}{3}$

ហេតុនេះ $T\ge\frac{2t}{t+36}\ge\frac{4}{3}$ ពិត

ដូចនេះ

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}\ge\frac{4}{3}$$

លំហាត់ទី៣៤

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ហើយ

មានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a+b}{\cos C}+\frac{b+c}{\cos A}+\frac{c+a}{\cos B}\ge 4(a+b+c)$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a+b}{\cos C}+\frac{b+c}{\cos A}+\frac{c+a}{\cos B}\ge 4(a+b+c)$

តាង $\sum=\frac{a+b}{\cos C}+\frac{b+c}{\cos A}+\frac{c+a}{\cos B}$

$$=\frac{(a+b)^2}{(a+b)\cos C}+\frac{(b+c)^2}{(b+c)\cos A}+\frac{(c+a)^2}{(c+a)\cos B}$$

តាមវិសមភាព $\frac{{x_1}^2}{y_1}+\frac{{x_2}^2}{y_2}+....+\frac{{x_n}^2}{y_n}\ge\frac{(x_1+x_2+...+x_n)^2}{y_1+y_2+...+y_n}$

គេបាន $\sum\ge\frac{[(a+b)+(b+c)+(c+a)]^2}{(a+b)\cos C+(b+c)\cos A+(c+a)\cos B}$

$$\sum\ge\frac{4(a+b+c)^2}{(b\cos C+c\cos B)+(c\cos A+a\cos C)+(a\cos B+b\cos A)}$$

$$\sum\ge\frac{4(a+b+c)^2}{a+b+c}=4(a+b+c)$$

ដូចនេះ $\frac{a+b}{\cos C}+\frac{b+c}{\cos A}+\frac{c+a}{\cos B}\ge 4(a+b+c)$ ។

លំហាត់ទី៣១

គេឱ្យ $x , y , z > 0$ ដែល $x + y + z = 1$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{x^3}{(1-x)^2}+\frac{y^3}{(1-y)^2}+\frac{z^3}{(1-z)^2}\ge\frac{1}{4}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{x^3}{(1-x)^2}+\frac{y^3}{(1-y)^2}+\frac{z^3}{(1-z)^2}\ge\frac{1}{4}$

គេពិនិត្យ $\frac{x^3}{(1-x)^2}=\frac{(x-2x^2+x^3)+(2x^2-x)}{(1-x)^2}$

$$=x+\frac{2x^2-x}{(1-x)^2}$$

$$=x+\frac{(9x^2-6x+1)-(1-2x+x^2)}{4(1-x)^2}$$

$$=x+\frac{(3x-1)^2-(1-x)^2}{4(1-x)^2}=x-\frac{1}{4}+\frac{(3x-1)^2}{4(1-x)^2}$$

ដោយ $\frac{(3x-1)^2}{4(1-x)^2}\ge 0$ នោះ $\frac{x^3}{(1-x)^2}\ge x-\frac{1}{4}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{y^3}{(1-y)^2}\ge y-\frac{1}{4}$ (2) និង $\frac{z^3}{(1-z)^2}\ge z-\frac{1}{4}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) , (2) , (3) អង្គ និង អង្គគេបាន :

$\frac{x^3}{(1-x)^2}+\frac{y^3}{(1-y)^2}+\frac{z^3}{(1-z)^2}\ge x+y+z-\frac{3}{4}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ ពិត ។

លំហាត់ទី៣២

គេឱ្យ a,b,c,d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abcd=1$ ។

បើគេដឹងថា $a+b+c+d>\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$ នោះចូរបង្ហាញថា

$a+b+c+d<\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $a+b+c+d<\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}$

គេមាន $a+b+c+d>\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{bc}+\frac{c^2}{cd}+\frac{d^2}{ad}$

$$a+b+c+d>\frac{(a+b+c+d)^2}{ab+bc+cd+da}$$

នាំឱ្យ $ab+bc+cd+da>a+b+c$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}=\frac{(bc)^2}{abc^2}+\frac{(cd)^2}{bcd^2}+\frac{(ad)^2}{a^2cd}+\frac{(ab)^2}{ab^2d}$

$$=\frac{(bc)^2}{\frac{c}{d}}+\frac{(cd)^2}{\frac{d}{a}}+\frac{(ad)^2}{\frac{a}{b}}+\frac{(ab)^2}{\frac{b}{c}}$$

$$\geq\frac{(bc+cd+da+ab)^2}{\frac{c}{d}+\frac{d}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}} \qquad (*)$$

តាម (1) គេបាន $(bc+cd+da+ab)^2>(a+b+c+d)^2$ (2)

តាមសម្មតិកម្ម $a+b+c+d > \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$

គេទាញ $\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}} > \frac{1}{a+b+c+d}$ (3)

គុណវិសមភាព (2) និង (3) អង្គនិងអង្គគេបាន

$$\frac{(bc+cd+da+ab)^2}{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}} > a+b+c+d \quad (**)$$

តាម (*) និង (**) គេបាន $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d} > a+b+c+d$

ដូចនេះ $a+b+c+d < \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}$ ។

លំហាត់ទី៣៣

គេឲ្យ a , b , c ជាចំនួនពិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\geq\frac{3}{4}$

(Czech and Slovak Republics 2005)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\geq\frac{3}{4}$

តាង $T=\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}$

$$=\frac{a(c+1)+b(a+1)+c(b+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

$$=\frac{a+b+c+ab+bc+ca}{1+a+b+c+ab+bc+ca+abc}$$

$$=\frac{a+b+c+ab+bc+ca}{2+a+b+c+ab+bc+ca}$$

$$=1-\frac{2}{2+a+b+c+ab+bc+ca}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន :

$$1+1+a+b+c+ab+bc+ca\geq 8\sqrt[8]{a^3b^3c^3}=8$$

គេទាញ $\frac{1}{2+a+b+c+ab+bc+ca}\leq\frac{1}{8}$ នាំឱ្យ $T\geq 1-\frac{2}{8}=\frac{3}{4}$

ដូចនេះ $\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\geq\frac{3}{4}$ ។

លំហាត់ទី៣៤

គេយក a , b , c ជាចំនួនវិជ្ជមាន។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\frac{a}{b})(1+\frac{b}{c})(1+\frac{c}{a}) \ge 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$

(APMO 1998)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(1+\frac{a}{b})(1+\frac{b}{c})(1+\frac{c}{a}) \ge 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$

វិសមភាពនេះសមមូល :

$$1+(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})+(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a})+\frac{abc}{abc} \ge 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a} \ge \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}$$

តាង $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$ គេបាន :

$$\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3} \ge \frac{2(x^3+y^3+z^3)}{xyz}$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេបាន :

$$\frac{x^3}{y^3}+\frac{x^3}{z^3}+1 \ge 3\frac{x^2}{yz} \quad (1)$$

$$\frac{y^3}{z^3}+\frac{y^3}{x^3}+1 \ge 3\frac{y^2}{zx} \quad (2)$$

$$\frac{z^3}{x^3}+\frac{z^3}{y^3}+1 \ge 3\frac{z^2}{xy} \quad (3)$$

$$\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}\ge 6\sqrt[6]{\frac{x^3}{y^3}\cdot\frac{y^3}{z^3}\cdot\frac{z^3}{x^3}\cdot\frac{x^3}{z^3}\cdot\frac{z^3}{y^3}\cdot\frac{y^3}{x^3}}=6$$

ឬ $\frac{1}{2}(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3})\ge 3\quad(4)$

បូកវិសមភាព (1) , (2) , (3) និង (4) គេបាន :

$$\frac{3}{2}(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3})\ge 3(\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy})=\frac{3(x^3+y^3+z^3)}{xyz}$$

គេទាញ $\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}\ge\frac{2(x^3+y^3+z^3)}{xyz}$ ពិត

ដូចនេះ $(1+\frac{a}{b})(1+\frac{b}{c})(1+\frac{c}{a})\ge 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$ ។

លំហាត់ទី៣៩

គេយក a , b , c ជាចំនួនពិតនៃចន្លោះ $(0,1)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$

(Romania 2002)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x , y , z នៃចន្លោះ $(0,\frac{\pi}{2})$

គេយក $a=\cos^2 x$, $b=\cos^2 y , c=\cos^2 z$

វិសមភាពសមមូល $\cos x\cos y\cos z+\sin x\sin y\sin z<1$

ដោយ $\forall z\in(0,\frac{\pi}{2})$ គេមាន $\cos z<1$ និង $\sin z<1$

គេទាញ $\cos x\cos y\cos z<\cos x\cos y$ និង $\sin x\sin y\sin z<\sin x\sin y$

(ព្រោះ $\cos x\cos y>0$; $\sin x\sin y>0$)

នាំឱ្យ $\cos x\cos y\cos z+\sin x\sin y\sin z<\cos x\cos y+\sin x\sin y$

$$\cos x\cos y\cos z+\sin x\sin y\sin z<\cos(x-y)$$

ដោយ $\cos(x-y)\le 1$ នោះ $\cos x\cos y\cos z+\sin x\sin y\sin z<1$ ពិត

ដូចនេះ $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$ ។

លំហាត់ទី៣៦

ចូរគណនាផលបូក :

$$S_n = \frac{2}{3+1} + \frac{2^2}{3^2+1} + \dots\dots + \frac{2^{n+1}}{3^{2^n}+1}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក :

គេមាន $S_n = \frac{2}{3+1} + \frac{2^2}{3^2+1} + \dots\dots + \frac{2^{n+1}}{3^{2^n}+1} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1}\right)$

ចំពោះគ្រប់ $x \neq 1$ យើងមាន :

$$\frac{1}{x+1} = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{x^2-1}$$

គេទាញ $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$

យក $x = 3^{2^k}$ គេបាន $\frac{1}{3^{2^k}+1} = \frac{1}{3^{2^k}-1} - \frac{2}{3^{2^{k+1}}-1}$

គុណនឹង 2^{k+1} គេបាន $\frac{2^{k+1}}{3^{2^k}+1} = \frac{2^{k+1}}{3^{2^k}-1} - \frac{2^{k+2}}{3^{2^{k+1}}-1}$

គេបាន :

$$S_n = \left(\frac{2}{3-1} - \frac{2^2}{3^2-1}\right) + \left(\frac{2^2}{3^2-1} - \frac{2^3}{3^{2^2}-1}\right) + \dots + \left(\frac{2^{n+1}}{3^{2^n}-1} - \frac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}}-1}\right)$$

ដូចនេះ $S_n = 1 - \frac{2^{n+2}}{3^{2^{n+1}}-1}$ ។

លំហាត់ទី៣៧

គេយក a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca=abc$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)}\ge 1$

(Poland 2006)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)}\ge 1$

គេមាន $ab+bc+ca=abc \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$

តាង $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{1}{c}$ នោះ $x+y+z=1$ ហើយវិសមភាពសមមូល

$\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}+\frac{y^4+z^4}{y^3+z^3}+\frac{z^4+x^4}{z^3+x^3}\ge 1$ ។

តាមវិសមភាព Tchebyshev គេមាន $\frac{x^4+y^4}{2}\ge\frac{x^3+y^3}{2}.\frac{x+y}{2}$

គេទាញ $\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}\ge\frac{x+y}{2}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $\frac{y^4+z^4}{y^3+z^3}\ge\frac{y+z}{2}$ (2) និង $\frac{z^4+x^4}{z^3+x^3}\ge\frac{z+x}{2}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) , (2) និង (3) គេបាន :

$\frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}+\frac{y^4+z^4}{y^3+z^3}+\frac{z^4+x^4}{z^3+x^3}\ge x+y+z=1$ ពិត ។

លំហាត់ទី៣៨

គេយក x , y , z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz = 1$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{yz+z}+\frac{1}{zx+x}+\frac{1}{xy+y}\ge\frac{3}{2}$

(Kazakhstan 2008)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{1}{yz+z}+\frac{1}{zx+x}+\frac{1}{xy+y}\ge\frac{3}{2}$

តាង $x=\frac{a}{b}$; $y=\frac{b}{c}$; $z=\frac{c}{a}$ នោះ $xyz=1$

វិសមភាពសមមូល $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$

តាង $T=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{c^2}{ac+bc}$

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy}-\text{Schwarz}$ គេបាន $T\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$

តាមវិសមភាព $\text{AM}-\text{GM}$ គេមាន

$$\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}\ge ab+bc+ca$$

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$$

$$(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$$

គេទាញបាន $T\ge\frac{3}{2}$ ពិត ។

ដូចនេះ $\frac{1}{yz+z}+\frac{1}{zx+x}+\frac{1}{xy+y}\ge\frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣៩

ចំនួនពិត a, , b , c , x , y , z ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a \ge b \ge c > 0$ និង $x \ge y \ge z > 0$

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \ge \frac{3}{4}$$

(Korea 2000)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \ge \frac{3}{4}$$

ដោយ $a \ge b \ge c > 0$ និង $x \ge y \ge z > 0$

គេបាន $(b-c)((z-y) = bz+cy-by-cz \le 0$ ឬ $bz+cy \le by+cz$

គេទាញ $(by+cz)(bz+cy) \le (by+cz)^2 \le 2(b^2y^2+c^2z^2)$

ហេតុនេះ $\dfrac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} \ge \dfrac{a^2x^2}{2(b^2y^2+c^2z^2)} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{X}{Y+Z}$ (1)

ដែល $X = a^2x^2$, $Y = b^2y^2$, $Z = c^2z^2$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន

$$\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)} \ge \frac{1}{2}.\frac{Y}{Z+X} \quad (2) \quad , \quad \frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \ge \frac{1}{2}.\frac{Z}{X+Y} \quad (3)$$

តាង$T=\dfrac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\dfrac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\dfrac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)}$

គេបាន $T\ge\dfrac{1}{2}(\dfrac{X}{Y+Z}+\dfrac{Y}{Z+X}+\dfrac{Z}{X+Y})$ ។

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$$(X+Y)+(Y+Z)+(Z+X)\ge 3\sqrt[3]{(X+Y)(Y+Z)(Z+X)}$$

ឬ $X+Y+Z\ge\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(X+Y)(Y+Z)(Z+X)}$ (i)

ហើយ $\dfrac{1}{Y+Z}+\dfrac{1}{Z+X}+\dfrac{1}{X+Y}\ge\dfrac{3}{\sqrt[3]{(X+Y)(Y+Z)(Z+X)}}$ (ii)

គុណវិសមភាព (i) និង (ii) អង្គ និង អង្គ គេបាន :

$$\frac{X+Y+Z}{Y+Z}+\frac{X+Y+Z}{Z+X}+\frac{X+Y+Z}{X+Y}\ge\frac{9}{2}$$

$$\frac{X}{Y+Z}+1+\frac{Y}{Z+X}+1+\frac{Z}{X+Y}+1\ge\frac{9}{2}$$

$$\frac{X}{Y+Z}+\frac{Y}{Z+X}+\frac{Z}{X+Y}\ge\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$$

គេទាញ $T\ge\dfrac{3}{4}$ ពិត

ដូចនេះ

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)}\ge\frac{3}{4}$$ ។

លំហាត់ទី៤

ចូរបង្ហាញថា $\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{z}{1-z}\geq\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{1-\sqrt[3]{xyz}}$

ចំពោះគ្រប់ $0<x\,,\,y\,,\,z<1$ ។

(Ireland 2002)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{z}{1-z}\geq\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{1-\sqrt[3]{xyz}}$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x}{1-x}=\frac{1}{1-x}-1$ ដែល $0<x<1$

គេបាន $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ ហើយ $f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}>0$ ចំពោះ $0<x<1$

នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ប៉ោង ។

តាមទ្រឹស្តីបទ Jensen ចំពោះគ្រប់ $0<x\,,\,y\,,\,z<1$ គេបាន

$f(x)+f(y)+f(z)\geq 3\,f(\frac{x+y+z}{3})$

ដោយ $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}>0$ នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើន ។

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}$

គេទាញ $f(\frac{x+y+z}{3})\geq f(\sqrt[3]{xyz})$ ហេតុនេះ $f(x)+f(y)+f(z)\geq 3f(\sqrt[3]{xyz})$

ដូចនេះ $\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{z}{1-z}\geq\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{1-\sqrt[3]{xyz}}$ ។

លំហាត់ទី៤១

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានគេបាន :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$$

(IMO 2001)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ដែល $x>0$

គេបាន $f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$ និង $f''(x)=\frac{3}{4\sqrt{x^5}}>0$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ប៉ោង ។

តាមវិសមភាព Jensen គ្រប់ a , b , $c>0$ គេបាន

$$\frac{af(x)+bf(y)+cf(z)}{a+b+c}\geq f\left(\frac{ax+by+cz}{a+b+c}\right)$$

ដោយ $x=a^2+8bc$, $y=b^2+8ca$, $z=c^2+8ab$ គេបាន :

$$\frac{\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}}{a+b+c}\geq\sqrt{\frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3+24abc}}$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq\sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3+24abc}}\quad (i)$$

គេមាន $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន

$$\begin{cases} a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ b+c \geq 2\sqrt{bc} \\ c+a \geq 2\sqrt{ca} \end{cases}$$

នាំឱ្យ $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca} = 8abc$

គេទាញបាន $(a+b+c)^3 \geq a^3+b^3+c^3+24abc$

ឬ $\dfrac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3+24abc} \geq 1$ (ii)

តាមទំនាក់ទំនង (i) និង (ii) គេទាញបាន :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$ ពិត ។

លំហាត់ទី៤២

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានគេបាន :

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}+\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}+\frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1}\geq a+b+c+3$$

(Bulgaria 2007)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}+\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}+\frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1}\geq a+b+c+3$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន

$$ca+c+a\geq 3\sqrt[3]{c^2a^2}\Rightarrow ca+c+a+1\geq 1+3\sqrt[3]{c^2a^2}$$

$$\Rightarrow (a+1)(c+1)\geq 1+3\sqrt[3]{c^2a^2}$$

គេទាញបាន $\dfrac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}\geq\dfrac{(b+1)^2}{c+1}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន

$$\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}\geq\frac{(c+1)^2}{a+1}\ (2)\quad ,\quad \frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1}\geq\frac{(a+1)^2}{b+1}\ (3)$$

បូកវិសមភាព (1) , (2) , (3) គេបាន :

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}+\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}+\frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1}\geq a+b+c+3$$

ព្រោះ $\dfrac{(b+1)^2}{c+1}+\dfrac{(c+1)^2}{a+1}+\dfrac{(a+1)^2}{b+1}\geq\dfrac{(a+b+c+3)^2}{a+b+c+3}=a+b+c+3$ ។

លំហាត់ទី៤៣

គេឱ្យ x , y , z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ ។

ចូរស្រាយថា :

$$\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\ge 1$$

(APMO 2007)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\dfrac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\dfrac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\dfrac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\ge 1$

គេមាន $\dfrac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}=\dfrac{x^2-(y+z)x+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\dfrac{(y+z)x}{\sqrt{2x^2(y+z)}}$

$$=\frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{\sqrt{y+z}}{\sqrt{2}}$$

ដោយ $(\sqrt{y}+\sqrt{z})^2\le 2(y+z)\Rightarrow \dfrac{\sqrt{y+z}}{\sqrt{2}}\ge\dfrac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2}$

គេទាញ $\dfrac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}\ge\dfrac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\dfrac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន :

$$\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}\ge\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{\sqrt{z}+\sqrt{x}}{2}\quad(2)$$

$$\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\ge\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\quad(3)$$

បូកវិសមភាព (1) , (2) , (3) គេបាន :

$$S \geq \frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}} + \frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}} + \frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

ដែល $S = \frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} + \frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}} + \frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}$ ។

ឧបមាថា $x \geq y \geq z$ គេបាន $\frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}} \geq 0$

ហើយ

$$\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}} + \frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}} = (y-z)\left[\frac{x-z}{\sqrt{2z^2(x+y)}} - \frac{x-y}{\sqrt{2y^2(z+x)}}\right]$$

ដោយ $x-z \geq x-y \geq 0$ គេទាញ :

$$\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}} + \frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \geq (y-z)\left[\frac{x-y}{\sqrt{2z^2(x+y)}} - \frac{x-y}{\sqrt{2y^2(z+x)}}\right]$$

$$\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}} + \frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}} = (y-z)(x-y)\left[\frac{1}{\sqrt{2z^2(x+y)}} - \frac{1}{\sqrt{2y^2(z+x)}}\right]$$

ដោយ $y^2(z+x) = y^2z + y^2z \geq yz^2 + z^2x = z^2(x+y)$

គេទាញ $\frac{1}{\sqrt{2z^2(x+y)}} - \frac{1}{\sqrt{2y^2(z+x)}} \geq 0$ ហើយ $(y-z)(x-y) \geq 0$

គេទាញ $\frac{(y-z)(y-x)}{\sqrt{2y^2(z+x)}} + \frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \geq 0$ នាំឱ្យ $S \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$

ដូចនេះ $\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} + \frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}} + \frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \geq 1$ ។

លំហាត់ទី៤៤

បើចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2+b^2+c^2=3$ នោះចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^2}{2+b+c^2}+\frac{b^2}{2+c+a^2}+\frac{c^2}{2+a+b^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{12}$$

(Baltic 2008)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា

$$\frac{a^2}{2+b+c^2}+\frac{b^2}{2+c+a^2}+\frac{c^2}{2+a+b^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{12}$$

តាមវិសមភាព Cauchy – Schwarz គេបាន :

$$\frac{a^2}{2+b+c^2}+\frac{b^2}{2+c+a^2}+\frac{c^2}{2+a+b^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{6+a+b+c+a^2+b^2+c^2}$$

$$\frac{a^2}{2+b+c^2}+\frac{b^2}{2+c+a^2}+\frac{c^2}{2+a+b^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{9+a+b+c}$$

ព្រោះ $a^2+b^2+c^2=3$ ។

គេមាន $(a+b+c)^2\leq 3(a^2+b^2+c^2)=9\Rightarrow a+b+c\leq 3$

ឬ $9+a+b+c\leq 12\Rightarrow\dfrac{(a+b+c)^2}{9+a+b+c}\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{12}$

ដូចនេះ $\dfrac{a^2}{2+b+c^2}+\dfrac{b^2}{2+c+a^2}+\dfrac{c^2}{2+a+b^2}\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{12}$ ។

លំហាត់ទី៤៩

គេមានចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\le\frac{3}{2}$ ។

(Canada 2008)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\le\frac{3}{2}$

គេមាន $1-\frac{a-bc}{a+bc}=\frac{2bc}{1-b-c+bc}=\frac{2bc}{(1-c)(1-b)}=\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $1-\frac{b-ca}{b+ca}=\frac{2ca}{(b+c)(b+a)}$ (2)

និង $1-\frac{c-ab}{c+ab}=\frac{2ab}{(c+a)(c+b)}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) , (2) , (3) គេបាន :

$$3-\left(\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\right)=\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{2ca}{(a+b)(b+c)}+\frac{2ab}{(c+a)(c+b)}$$

$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}=3-\left[\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{2ca}{(a+b)(b+c)}+\frac{2ab}{(c+a)(c+b)}\right]$$

ឧបមាថា $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\le\frac{3}{2}$ ពិត

គេទាញ $3-\left[\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{2ca}{(a+b)(b+c)}+\frac{2ab}{(c+a)(c+b)}\right]\le\frac{3}{2}$

ឬ $\left[\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{2ca}{(a+b)(b+c)}+\frac{2ab}{(c+a)(c+b)}\right]\ge\frac{3}{2}$

សមមូល $4[bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)] \geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$

សមមូល $ab+bc+ca \geq 9abc$ ។

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ និង $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$

គេទាញ $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \geq 9$

ឬ $(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc$

ដោយ $a+b+c=1$ នោះ $ab+bc+ca \geq 9abc$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី៤៦

បើ a , b , c ជា ចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $ab+bc+ca=3$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{abc}$ ។

(Romania 2008)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{abc}$

មាន $1+a^2(b+c)=1+a(ab+ac)$

ដោយ $ab+bc+ca=3\Rightarrow ab+ac=3-bc$

គេបាន $1+a^2(b+c)=1+a(3-bc)=1+3a-abc$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន :

$3=ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\Rightarrow abc\le 1$ ឬ $1-abc\ge 0$

គេទាញ $1+a^2(b+c)=1+3a-abc\ge 3a$ នាំឱ្យ $\frac{1}{1+a^2(b+c)}\le\frac{1}{3a}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\frac{1}{1+b^2(c+a)}\le\frac{1}{3b}$ (2) ; $\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{3c}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) , (2) , (3) គេបាន :

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}=\frac{ab+bc+ca}{3abc}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{abc}$

លំហាត់ទី៤៧

គេឱ្យ a , b , c ជា ចំនួនពិតវិជ្ជមាន។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca})$ ។

(Lithuania 2006)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca})$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេបាន :

$$a^2+bc\ge 2\sqrt{a^2bc}=2\sqrt{ab}.\sqrt{bc}\Rightarrow\frac{1}{a^2+bc}\le\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{ab}}.\frac{1}{\sqrt{bc}}\quad(1)$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន :

$$\frac{1}{b^2+ca}\le\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{bc}.}.\frac{1}{\sqrt{ca}}\quad(2)\ ;\quad\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{ca}}.\frac{1}{\sqrt{ab}}\quad(3)$$

បូកវិសមភាព (1) , (2) , (3) គេបាន :

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{ab}}.\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}.\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}.\frac{1}{\sqrt{ab}})$$

តាមវិសមភាព Cauchy – Schwarz គេបាន

$$(\frac{1}{\sqrt{ab}}.\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}.\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}.\frac{1}{\sqrt{ab}})^2\le(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca})(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab})$$

ឬ $\frac{1}{\sqrt{ab}}.\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}.\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}.\frac{1}{\sqrt{ab}}\le\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$

ដូចនេះ $\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca})$ ។

លំហាត់ទី៤៨

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a វិជ្ជមាន ឬសូន្យចូរបង្ហាញថា :

$(a+1)^{a+2} \geq e^{2a}$ ដែល $e = 2.7182$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(a+1)^{a+2} \geq e^{2a}$

គេបាន $\ln(a+1)^{a+2} \geq \ln e^{2a}$

$$(a+2)\ln(a+1) \geq 2a \quad \text{ឬ} \quad \ln(a+1) \geq \frac{2a}{a+2}$$

តាងអនុគមន៍ $f(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}$ គ្រប់ $x \geq 0$

គេបាន $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2}$

$$= \frac{(x+2)^2 - 4(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} \geq 0 \, , \, \forall x \geq 0$$

ដូចនេះ $f(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}$ ជាអនុគមន៍កើនគ្រប់ $x \geq 0$

គេបាន $a \geq 0 \Rightarrow f(a) \geq f(0) = 0$ ឬ $\ln(a+1) \geq \frac{2a}{a+2}$ ពិត

ដូចនេះ $(a+1)^{a+2} \geq e^{2a}$ ។

លំហាត់ទី៤៩

គេឱ្យផលបូក $S_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left[k\cos(\dfrac{k\pi}{n^2})\right]$

ក. បង្ហាញថា $\cos x \ge 1-\dfrac{x^2}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x \ge 0$ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $\cos x \ge 1-\dfrac{x^2}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x \ge 0$

តាងអនុគមន៍ $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ ចំពោះ $x \ge 0$

គេមាន $f'(x) = -\sin x + x = x - \sin x$

និង $f''(x) = 1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2} \ge 0$, $\forall x \ge 0$

គេបាន $f'(x)$ ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $[\,0\,,+\infty)$

គេទាញ $f'(x) \ge f'(0) = 0$ នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $[\,0\,,+\infty)$

ហេតុនេះ $f(x) \ge f(0) = 1-1 = 0$

ដូចនេះ $\cos x \ge 1-\dfrac{x^2}{2}$ ចំពោះគ្រប់ $x \ge 0$ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

ដោយគ្រប់ $x \in IR : \cos x \le 1$

ដូចនេះ $1-\dfrac{x^2}{2} \le \cos x \le 1$ គ្រប់ $x \ge 0$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $x \ge 0$ គេបាន $x - \frac{x^3}{2} \le x\cos x \le x$

ចំពោះ $n \in IN^*$, $k \in IN^*$ យក $x = \frac{k\pi}{n^2}$ គេបាន ៖

$$\frac{k\pi}{n^2} - \frac{k^3\pi^3}{n^6} \le \frac{k\pi}{n^2}\cos(\frac{k\pi}{n^2}) \le \frac{k\pi}{n^2}$$

ឬ $\frac{k}{n^2} - \frac{k^3\pi^2}{n^6} \le \frac{k}{n^2}\cos(\frac{k\pi}{n^2}) \le \frac{k}{n^2}$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{\pi^2}{n^6}\sum_{k=1}^{n}(k^3) \le \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left[k\cos(\frac{k\pi}{n^2})\right] \le \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{\pi^2}{n^4}.\frac{(n+1)^2}{4} \le S_n \le \frac{n+1}{2n}$$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}[\frac{n+1}{2n} - \frac{\pi^2}{n^4}.\frac{(n+1)^2}{4}] = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{n+1}{2n}) = \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៥៧

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(n)=(n^2+n+1)^2+1$

តាង $u_n=\dfrac{f(1)f(3)f(5)....f(2n-1)}{f(2)f(4)f(6)....f(2n)}$; $n\in IN^*$

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\sqrt{u_n})$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\sqrt{u_n})$

គេមាន $f(n)=(n^2+n+1)^2+1$

$$=[(n^2+1)+n]^2+1$$

$$=(n^2+1)^2+2n(n^2+1)+n^2+1$$

$$=(n^2+1)(n^2+1+2n+1)$$

$$=(n^2+1)[(n+1)^2+1]$$

គេមាន $u_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{f(2k-1)}{f(2k)}\right]=\prod\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{[(2k-1)^2+1]\left(4k^2+1\right)}{(4k^2+1)[(2k+1)^2+1]}\right]$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{(2k-1)^2+1}{(2k+1)^2+1}\right]=\frac{2}{(2n+1)^2+1}$$

$$=\frac{2}{2(2n^2+2n+1)}=\frac{1}{2n^2+2n+1}$$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\sqrt{u_n})=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\sqrt{2n^2+2n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\sqrt{u_n})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៨១

គេឱ្យស្វ៊ីត (x_n) មួយកំណត់ដោយ :

$x_1 = 3$; $x_{n+1} = x_n^{\ 2} - 3x_n + 4$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $x_n \ge n + 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$ ។

ខ. តាង $y_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_k - 1}\right)$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$ ។ គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty} y_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $x_n \ge n + 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$

គេមាន $x_1 = 3 \ge 1 + 2$ ពិត

$$x_2 = x_1^{\ 2} - 3x_1 + 4 = 4 \ge 2 + 2 \text{ ពិត}$$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $x_k \ge k + 2$

យើងនឹងស្រាយឱ្យឃើញថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $x_{k+1} \ge k + 3$

គេមាន $x_{k+1} = x_k^{\ 2} - 3x_k + 4 = x_k(x_k - 3) + 4$

ដោយ $x_k \ge k + 2$ និង $x_k - 3 \ge k - 1$

គេបាន $x_{k+1} \ge (k+2)(k-1) + 4 = k^2 + k + 2 \ge k + 3$ ពិត

ដូចនេះ $x_n \ge n + 2$ ។

ខ. គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty} y_n$

គេមាន $y_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_k - 1}\right)$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$

តាមទំនាក់ទំនង $x_{k+1} = x_k{}^2 - 3x_k + 4 = (x_k - 1)(x_k - 2) + 2$

ឬ $x_{k+1} - 2 = (x_k - 1)(x_k - 2)$

គេបាន $\dfrac{1}{x_{k+1} - 2} = \dfrac{1}{(x_k - 1)(x_k - 2)} = \dfrac{1}{x_k - 2} - \dfrac{1}{x_k - 1}$

ឬ $\dfrac{1}{x_k - 1} = \dfrac{1}{x_k - 2} - \dfrac{1}{x_{k+1} - 2}$

គេបាន $y_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{x_k - 2} - \dfrac{1}{x_{k+1} - 2}\right) = \dfrac{1}{x_1 - 2} - \dfrac{1}{x_{n+1} - 2} = 1 - \dfrac{1}{x_{n+1} - 2}$

ហេតុនេះ $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (1 - \dfrac{1}{x_{n+1} - 2}) = 1$

ព្រោះ $x_n \ge n + 2 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ នោះ $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{x_{n+1} - 2} = 0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 1$ ។

លំហាត់ទី៨២

គេឱ្យស្វ៊ីត (x_n) មួយកំណត់ដោយ :

$x_1 = a$; $x_{n+1} = \frac{{x_n}^2}{b} + x_n$, $a > 0$, $b > 0$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$ ។

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{x_{k+1}} \right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{x_{k+1}} \right)$

ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$, $b > 0$ គេមាន $x_{n+1} = \frac{{x_n}^2}{b} + x_n > x_n$ (1)

ឧបមាថាស្វ៊ីត (x_n) មានលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n) = L > a$

គេបាន $L = \frac{L^2}{b} + L \Rightarrow L = 0$ (មិនអាច)

នាំឱ្យ (x_n) ជាស្វ៊ីតរីក (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ ។

តាមសមីការ $x_{n+1} = \frac{{x_n}^2}{b} + x_n \Rightarrow {x_n}^2 = b(x_{n+1} - x_n)$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $x_n x_{n+1}$ គេបាន $\frac{x_n}{x_{n+1}} = b\left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} \right)$

គេបាន

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{x_{k+1}} \right) = b \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} \right) = b \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1}}\right) = \frac{b}{a}$$

លំហាត់ទី៤៣

គេឱ្យស្វ៊ីត (x_n) មួយកំណត់ដោយ :

$x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + ... + \sqrt{a}}}}$ (មាន n រ៉ាឌីកាល់ និង $a > 0$)

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $x_n < \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x_n < \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

បើ $n = 1$ នោះ $x_1 = \sqrt{a}$

ដោយ $\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2} - \sqrt{a} = \dfrac{1+\sqrt{1+4a} - 2\sqrt{a}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{1+4a} - \sqrt{4a}}{2} > 0$

គេទាញ $x_1 = \sqrt{a} < \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $x_k < \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $x_{k+1} < \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

គេមាន $x_{k+1} = \sqrt{a + x_k} < \sqrt{a + \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}} = \sqrt{\dfrac{2a+1+\sqrt{1+4a}}{2}}$

$$x_{k+1} < \frac{\sqrt{4a+2+2\sqrt{1+4a}}}{2} = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{1+4a})^2}}{2} = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$ ពិត

ដូចនេះ $x_n < \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៨៤

គេឱ្យស៊ីត (x_n) មួយកំណត់ដោយ :

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^3}}\sum_{k=1}^{n}\left[k.\ln(1+\frac{k}{\sqrt{n^3}})\right]$$

ក.ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $x-\frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$ ចំពោះគ្រប់ $x \ge 0$ ។

ខ.គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}(x_n)$?

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x-\frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$ ចំពោះគ្រប់ $x \ge 0$

តាងអនុគមន៍ $f(x) = \ln(1+x) - (x-\frac{x^2}{2})$ និង $g(x) = \ln(1+x) - x$

គេបាន $f'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{1-(1-x^2)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \ge 0 \ , \forall x \ge 0$

នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $[0,+\infty)$ ។

គេបាន $f(x) \ge f(0) = 0 \Rightarrow \ln(1+x) \ge x-\frac{x^2}{2}$ (1)

គេបាន $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} \le 0 \ , \forall x \ge 0$

នាំឱ្យ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះលើចន្លោះ $[0,+\infty)$ ។

គេបាន $g(x) \le g(0) = 0 \Rightarrow \ln(1+x) \le x$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $x-\frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$ ចំពោះគ្រប់ $x \ge 0$ ។

ខ.គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)$

គេមាន $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^3}}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[k.\ln(1+\dfrac{k}{\sqrt{n^3}})\right]$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $x-\dfrac{x^2}{2}\le \ln(1+x)\le x$ ចំពោះគ្រប់ $x\ge 0$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង x គេបាន $x^2-\dfrac{x^3}{2}\le x\ln(1+x)\le x^2$

យក $x=\dfrac{k}{\sqrt{n^3}}$ គេបាន $\dfrac{k^2}{n^3}-\dfrac{k^3}{2n^4\sqrt{n}}\le \dfrac{k}{\sqrt{n^3}}\ln(1+\dfrac{k}{\sqrt{n^3}})\le \dfrac{k^2}{n^3}$

គេទាញ $\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}(k^2)-\dfrac{1}{2n^4\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}(k^3)\le x_n\le \dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}(k^2)$

ឬ $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}-\dfrac{(n+1)^2}{8n^2\sqrt{n}}\le x_n\le \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}-\frac{(n+1)^2}{8n^2\sqrt{n}}\right]\le \lim_{n\to+\infty}x_n\le \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right]$$

$$\frac{1}{3}\le \lim_{n\to+\infty}x_n\le \frac{1}{3}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)=\dfrac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី៩៤

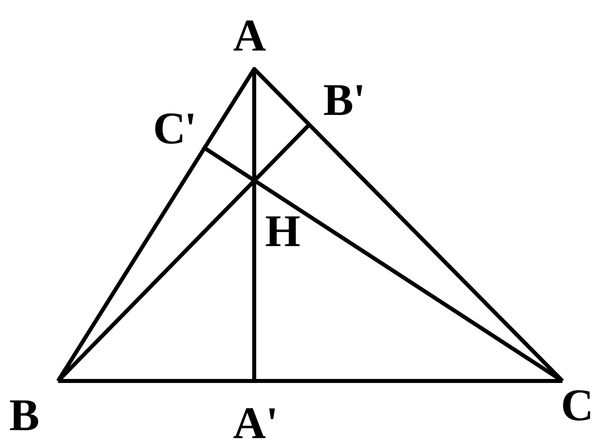
គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ។

AA' , BB' , CC' ជាកំពស់ ហើយ H ជាអរតូសង់ នៃត្រីកោណ ABC ។

ចូរស្រាយថា $a + b + c \geq 2\sqrt{3}(HA'+HB'+HC')$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $a + b + c \geq 2\sqrt{3}(HA'+HB'+HC')$



ត្រីកោណ$HA'C$ និង $AA'C$ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A' ។

យើងបាន $\cot\angle A'HC = \dfrac{HA'}{A'C} \Rightarrow HA' = A'C.\cot\angle A'HC$

ដោយ $\angle A'HC = \angle AHC' = \angle ABC$

គេបាន $HA' = A'C\cot B$

ហើយ $\cos C = \dfrac{A'C}{AC} \Rightarrow A'C = b\cos C$

គេទាញ $HA' = b\cos C\cot B$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $b = 2R\sin B$ (R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC)

គេបាន $HA' = 2R\sin B\cos C\cot B = 2R\cos B\cos C$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $HB' = 2R\cos C\cos A$ និង $HC' = 2R\cos A\cos B$

យើងពិនិត្យឃើញថាបើ $a \le b$ នោះ $\cos A \ge \cos B$

ឬ $2R\cos C\cos A \ge 2R\cos B\cos C$ នាំឱ្យ $HB' \ge HA'$

ដូចនេះយើងអាចឧបមាថា $a \le b \le c$ នោះ $HA' \le HB' \le HC'$

គេបាន $(a+b+c)(HA'+HB'+HC') \le 3(aHA'+bHB'+cHC')$

តាង S_{ABC} ជាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC នោះគេមាន :

$$S_{ABC} = S_{HBC} + S_{HCA} + S_{HAB} = \frac{1}{2}(a.HA'+b.HB'+c.HC')$$

គេបាន $(a+b+c)(HA'+HB'+HC') \le 6S_{ABC}$

យក $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC ។

គេបាន $2p(HA'+HB'+HC') \le 6\,S_{ABC}$ ឬ $HA'+HB'+HC' \le \dfrac{3S_{ABC}}{p}$ (i)

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន :

$$p = (p-a)+(p-b)+(p-c) \ge 3\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} = 3\sqrt[3]{\frac{S^2{}_{ABC}}{p}}$$

គេទាញ $S^2{}_{ABC} \le \dfrac{p^4}{27}$ ឬ $\dfrac{3S_{ABC}}{p} \le \dfrac{p}{\sqrt{3}} = \dfrac{a+b+c}{2\sqrt{3}}$ (ii)

តាម (i) & (ii) គេបាន $a+b+c \ge 2\sqrt{3}(HA'+HB'+HC')$ ពិត ។

លំហាត់ទី៩៦

គេឱ្យ a , b , c , d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

$$S = \frac{a^4}{(a+b)(a^2+b^2)} + \frac{b^4}{(b+c)(b^2+c^2)} + \frac{c^4}{(c+d)(c^2+d^2)} + \frac{d^4}{(d+a)(d^2+a^2)}$$

ចូរបង្ហាញថា $S \ge \dfrac{a+b+c+d}{4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $S \ge \dfrac{a+b+c+d}{4}$

តាមវិសមភាព Cauchy – Schwarz គេមាន $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$

គុណវិសមភាពនឹង a^2+b^2 គេបាន $(a+b)^2(a^2+b^2) \le 2(a^2+b^2)^2$

ដោយ $(a^2+b^2)^2 \le 2(a^4+b^4)$ នោះ $(a+b)^2(a^2+b^2) \le 4(a^4+b^4)$

គេទាញ $\dfrac{a^4+b^4}{(a+b)(a^2+b^2)} \ge \dfrac{a+b}{4}$

គេមាន $a^4+b^4 = 2a^4 - (a^4-b^4) = 2a^4 - (a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

គេបាន $\dfrac{2a^4}{(a+b)(a^2+b^2)} - (a-b) \ge \dfrac{a+b}{4}$

ឬ $\dfrac{a^4}{(a+b)(a^2+b^2)} \ge \dfrac{a+b}{8} + \dfrac{a-b}{2}$ (*)

តាម (*) គេទាញបាន $S \ge \dfrac{2(a+b+c+d)}{8} + \dfrac{(a-b)+(b-c)+(c-a)}{2}$

ដូចនេះ $S \ge \dfrac{a+b+c+d}{4}$ ។

លំហាត់ទី៥៧

បង្ហាញថា $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ ជាពហុគុណនៃ 9 ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ ជាពហុគុណនៃ 9

តាង $A_n = n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$

បើ $n=1$ គេបាន $A_1 = 1^3+2^3+3^3 = 36 = 4\times 9$ ពិត

ឧបមាថា $A_n = n^3+(n+1)^3+(n+2)^3 = 9\times k$ ពិត ($k \in IN^*$)

យើងនឹងស្រាយថា $A_{n+1} = (n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3$ ជាពហុគុណនៃ9 ពិត

គេមាន $A_{n+1} - A_n = (n+3)^3 - n^3 = 9n^2+27n+27$

គេទាញ $A_{n+1} = A_n + 9n^2+27n+27 = 9(k+n^2+3n+3)$ ពិត

ដូចនេះ $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ ជាពហុគុណនៃ 9 ។

លំហាត់ទី៩៨

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=2^x(ax^2+bx+c)$

រក a , b , c ដែល $f(x+1)-f(x)=2^x x^2$ រួចទាញរកផលបូក :

$S_n=2.1^2+2^2.2^2+2^3.3^2+....+2^n.n^2$

ដំណោះស្រាយ

រក a , b , c ដែល $f(x+1)-f(x)=2^x x^2$

គេមាន $f(x)=2^x(ax^2+bx+c)$

និង $f(x+1)=2^{x+1}[a(x+1)^2+b(x+1)+c]$

$$=2^x[2ax^2+(4a+2b)x+2a+2b+2c\ ]$$

គេបាន $f(x+1)-f(x)=2^x[ax^2+(4a+b)x+2a+2b+c]$

ដើម្បីឱ្យ $f(x+1)-f(x)=2^x x^2$ លុះត្រាតែ $\begin{cases}a=1\\4a+b=0\\2a+2b+c=0\end{cases}$

ដូចនេះ $a=1$, $b=-4$, $c=6$ ។

ទាញរកផលបូក :

$S_n=2.1^2+2^2.2^2+2^3.3^2+....+2^n.n^2$

គេមាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}(2^k k^2)=\sum_{k=1}^{n}\left[f(k+1)-f(k)\right]=f(n+1)-f(1)$

ដោយ $f(1)=2(1-4+6)=6$ និង $f(n+1)=2^{n+1}(n^2-2n+3)$

ដូចនេះ $S_n=2^{n+1}(n^2-2n+3)-6$ ។

លំហាត់ទី៩៩

គេឱ្យពហុធា $P(x)=2x^4+ax^2+bx+c$

កំណត់ $a\ ,\ b\ ,c$ ជាចំនួនពិតដោយដឹងថា $P(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-2$ ហើយ $P(x)$ ចែកនឹង x^2-1 សល់ x ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ $a\ ,\ b\ ,c$ ជាចំនួនពិត

ដោយ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-2$ នោះ $P(2)=32+4a+2b+c=0$

គេទាញ $4a+2b+c=-32\ \ (1)$

ម្យ៉ាងទៀត$P(x)$ចែកនឹង x^2-1 សល់ x នោះ $P(x)=(x^2-1)q(x)+x$

គេបាន $P(1)=1$ និង $P(-1)=-1$

គេទាញបាន $P(1)=2+a+b+c=1$ ឬ $a+b+c=-1\ \ (2)$

ហើយ $P(-1)=2+a-b+c=-1$ ឬ $a-b+c=-3\ \ (3)$

ដកសមីការ (2) និង (3) គេបាន $2b=2$ នាំឱ្យ $b=1$ ។

តាម (1) និង (2) គេបាន $\begin{cases}4a+c=-34\\ a+c=-2\end{cases}$ នាំឱ្យ $a=-\dfrac{32}{3}$ និង $c=\dfrac{26}{3}$

ដូចនេះ $a=-\dfrac{32}{3}\ ,\ b=1\ ,\ c=\dfrac{26}{3}$ ។

លំហាត់ទី៦០

គេឱ្យស៊េរីអនន្ត $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{n^2}$

ចូរស្រាយថាស៊េរីខាងលើនេះជាស៊េរីបង្រួម ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាជាស៊េរីបង្រួម

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{n^2}$$

គេមាន $4n^2-1<4n^2$ គ្រប់ $n\geq 1$

គេបាន $\frac{1}{n^2}<\frac{4}{4n^2-1}=\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}$

ហេតុនេះ $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2})<\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1})$

ផលបូកដោយផ្នែករបស់ស៊េរី $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1})$

គឺ $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{2k-1}-\frac{2}{2k+1}\right)=2-\frac{2}{2n+1}$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty}S_n=2$ នោះ $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1})$ ជាស៊េរីបង្រួម

ដោយ $0<\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2})<\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1})$

ដូចនេះ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{n^2}$ ជាស៊េរីបង្រួម ។

លំហាត់ទី៦១

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m និង n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $3.2^m + 1 = n^2$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m និង n :

សមីការ $3.2^m + 1 = n^2$ សមមូល $2^m = \frac{(n+1)(n-1)}{3}$ (*)

សមីការនេះមានចម្លើយក្នុង IN^* លុះត្រាតែ $\frac{n+1}{3}$ ឬ $\frac{n-1}{3}$ ជាចំនួនគត់ ។

-ករណី $\frac{n-1}{3}$ ជាចំនួនគត់ :

ដោយអង្គទីមួយនៃសមីការ (*) ជាកត្តាស្វ័យគុណនៃ 2 និង $\frac{n-1}{3} < n+1$

នោះគេត្រូវឱ្យ $n+1 = \frac{n-1}{3}.2^k$ ឬ $n = \frac{2^k+3}{2^k-3} = 1 + \frac{6}{2^k-3}$ ដែល $k \in IN$

ដើម្បីឱ្យ $n \in IN^*$ លុះត្រាតែ $\frac{6}{2^k-3} \in IN$ នោះគេទាញបាន $k = 2$ ហើយ

$n = 7$ ហើយតាម (*) គេបាន $2^m = \frac{8 \times 6}{3} = 2^4 \Rightarrow m = 4$ ។

-ករណី $\frac{n+1}{3}$ ជាចំនួនគត់ :

ដោយអង្គទីមួយនៃសមីការ (*) ជាកត្តាស្វ័យគុណនៃ 2 និង $n-1 > \frac{n+1}{3}$

គ្រប់ $n \geq 2$ នោះគេត្រូវឱ្យ $n-1 = \frac{n+1}{3}.2^k$ ឬ $n = -\frac{2^k+3}{2^k-3}$ ដែល $k \in IN$

ដើម្បីឱ្យ $n \in IN^*$ លុះត្រាតែ $-\frac{2^k+3}{2^k-3} \in IN^*$ នោះគេទាញបាន

$k = 0$, $k = 1$ ហើយ $n = 2$, $n = 5$ ។

. ចំពោះ $n=2$ តាម (*) គេបាន $2^m=1 \Rightarrow m=0$ មិនយកព្រោះ $m \in IN^*$ ។

. ចំពោះ $n=5$ តាម (*) គេបាន $2^m=2^3 \Rightarrow m=3$ ។

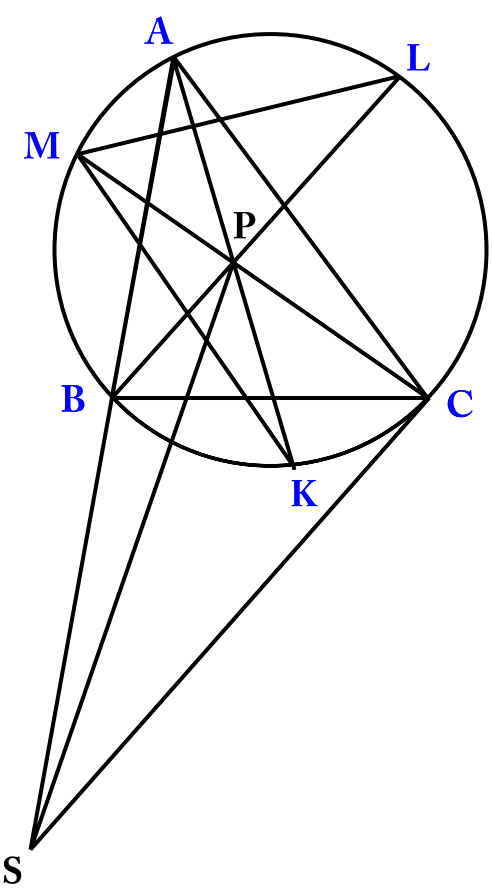
ដូចនេះ $m=3\ ,\ n=5$ ឬ $m=4\ ,\ n=7$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឱ្យ P ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ។ បន្ទាត់ AP, BP និង CP កាត់រង្វង់ (Γ) ដែលចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ម្ដងទៀតត្រង់ K , L និង M រៀងគ្នា ។បន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ (Γ) ត្រង់ C កាត់បន្ទាត់ AB ត្រង់ S ។

ឧបមាថា $SC=SP$ ។ ចូរបង្ហាញថា $MK=ML$

ដំណោះស្រាយ



បង្ហាញថា $MK=ML$

គេមាន $\angle PAC=\angle PMK$

$$\angle PCA=\angle PKM$$

នាំឱ្យ ΔAPC និង ΔMPK

គេបាន $\dfrac{MK}{AC}=\dfrac{MP}{AP}$

ឬ $\dfrac{MK}{MP}=\dfrac{AC}{AP}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\angle MLP=\angle BCP$

ឬ $\angle PML=\angle CBP$

នាំឱ្យ ΔMLP និង ΔBCP

គេបាន $\frac{ML}{BC}=\frac{MP}{BP}$ ឬ $\frac{ML}{MP}=\frac{BC}{BP}$ (2)

យើងនឹងស្រាយថា $\frac{AC}{AP}=\frac{BC}{BP}$

ដោយ SC ជាបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ (Γ) នោះតាមទ្រឹស្តីបទស្វ័យគុណចំណុច S

ធៀប(Γ) គេបាន $SC^2=SA.SB$ នាំឱ្យ $\frac{SC}{SA}=\frac{SB}{SC}$ តែ $SC=SP$

គេបាន $\frac{SP}{SA}=\frac{SB}{SP}$ ហើយដោយ $\angle ASP=\angle BSP$ (មុំរួម)

គេទាញបាន ΔSPA និង ΔSBP ជាត្រីកោណដូចគ្នា ។

គេបាន $\frac{AP}{BP}=\frac{SA}{SP}=\frac{SA}{SC}$ (3)

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $\angle ASC=\angle BSC$ និង $\angle BCS=\angle BAC$

នោះ ΔSCA និង ΔSBC ជាត្រីកោណដូចគ្នា ។

គេទាញបាន $\frac{SA}{SC}=\frac{AC}{BC}$ (4)

តាមទំនាក់ទំនង (3) និង (4) គេទាញបាន $\frac{AP}{BP}=\frac{AC}{BC}$ ឬ $\frac{AC}{AP}=\frac{BC}{BP}$ (5)

តាមទំនាក់ទំនង (1), (2) និង (5) គេទាញបាន $\frac{MK}{MP}=\frac{ML}{MP}$ ឬ $MK=ML$

ដូចនេះ $MK=ML$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេឱ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x_1, x_2, ..., x_n$ ហើយគេតាង

$S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$(1+x_1)(1+x_2)....(1+x_n) \le 1 + S + \frac{S^2}{2!} + ... + \frac{S^n}{n!}$$

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន :

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) \le \left(\frac{n+S}{n}\right)^n = \left(1+\frac{S}{n}\right)^n$$

តាមទ្វេធាញូតុនគេមាន :

$$\left(1+\frac{S}{n}\right)^n = 1 + S + C_n^2 . \frac{S^2}{n^2} + C_n^3 . \frac{S^3}{n^3} + ... + C_n^n \frac{S^n}{n^n} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{S^k}{n^k}$$

ដោយ :

$$\frac{C_n^k}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)....(n-1)n}{n^k} . \frac{1}{k!}$$

$$= (1 - \frac{k-1}{n})(1 - \frac{k-2}{n}).....(1 - \frac{1}{n}).1.\frac{1}{k!} \le \frac{1}{k!}$$

គេបាន $\left(1+\frac{S}{n}\right)^n \le \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{S^k}{k!}\right)$ ពិត

ដូចនេះ $(1+x_1)(1+x_2)....(1+x_n) \le 1 + S + \frac{S^2}{2!} + ... + \frac{S^n}{n!}$

លំហាត់អនុវត្តន៏

1-គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc = 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $a + b + c \le a^2 + b^2 + c^2$

2-ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c , d គេមានវិសមភាព

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \ge \frac{64}{a + b + c + d}$$

3-ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $a , b , c \le 1$ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a}{b + c + 1} + \frac{b}{c + a + 1} + \frac{c}{a + b + 1} + (1 - a)(1 - b)(1 - c) \le 1$$

(USAMO 1980)

4-គេឱ្យ a , b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a + b + c = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \ge \frac{1}{4}$$

5-គេឱ្យ a, b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{2}{(a + 1)^2 + b^2 + 1} + \frac{2}{(b + 1)^2 + c^2 + 1} + \frac{2}{(c + 1)^2 + a^2 + 1} \le 1$$

6-គេឱ្យ $a_0 , a_1 , a_2 , ..., a_n$ ជាចំនួនពិតក្នុងចន្លោះ $(0, \frac{\pi}{2})$ ដោយដឹងថា :

$$\tan(a_0 - \frac{\pi}{4}) + \tan(a_1 - \frac{\pi}{4}) + ... + \tan(a_n - \frac{\pi}{4}) \ge n - 1$$

ចូរបង្ហាញថា $\tan(a_0)\tan(a_1).....\tan(a_n) \ge n^{n+1}$

(USAMO 1998)

7-គេឱ្យ a , b , x , y , z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}\ge\frac{3}{a+b}$

8-គេឱ្យ $n\ge 2$ ជាចំនួនគត់ ហើយ $x_1 , x_2 , ... , x_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដោយដឹងថា

$x_1{}^2+x_2{}^2+....+x_n{}^2=1$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ :

$$\frac{x_1{}^5}{x_2+x_3+...+x_n}+\frac{x_2{}^5}{x_3+...+x_n+x_1}+...+\frac{x_n{}^5}{x_1+x_2+...+x_{n-1}}$$

9-គេឱ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃផលបូក :

$$S=x_1+\frac{x_2{}^2}{2}+\frac{x_3{}^3}{3}+.....+\frac{x_n{}^n}{n}$$ ។

(Poland 1995)

10-ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c , d គេមាន :

$$a^4b+b^4c+c^4d+d^4a\ge abcd(a+b+c+d)$$

11-គេឱ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}}\ge 3$$

(MOP 2002)

12-ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c គេមាន :

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]\ge\frac{9}{4}$$

(Iran 1996)

13-ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c គេមាន :

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}\ge\frac{3}{4}$$

14- ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c គេមាន :

$$\left(\frac{a+2b}{a+2c}\right)^3+\left(\frac{b+2c}{b+2a}\right)^3+\left(\frac{c+2a}{c+2b}\right)^3\ge 3$$

15-គេឱ្យ a , b , c , x , y , z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x+y+z=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា :

$$ax+by+cz+2\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}\le a+b+c$$

16-គេឱ្យ a ,b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $5+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge(1+a)(1+b)(1+c)$

17-គេឱ្យ a ,b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)}+\frac{b^3}{(2b^2+c^2)(2b^2+a^2)}+\frac{c^3}{(2c^2+a^2)(2c^2+b^2)}\le\frac{1}{a+b+c}$$

18-គេឱ្យ a ,b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3)\ge(a+b+c)^3$$

19-គ្រប់ $a,b,c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$

20-ចូរស្រាយថាគ្រប់ $a,b,c>0$ គេមាន :

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{a(b+c)}+\frac{c^2+a^2-b^2}{b(c+a)}+\frac{a^2+b^2-c^2}{c(a+b)}\ge\frac{3}{2}$$

21-គេឱ្យ $a\ ,\ b\ ,\ c > 0$ ដែល $a+b+c=1$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\sqrt{ab+c}+\sqrt{bc+a}+\sqrt{ca+b} \ge 1+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$$

22-គេឱ្យ $a\ ,\ b\ ,\ c > 0$ ដែល $abc = 8$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a^2}{\sqrt{(a^3+1)(b^3+1)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(b^3+1)(c^3+1)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(c^3+1)(a^3+1)}} \ge \frac{4}{3}$$

23-ចូរស្រាយថាគ្រប់ $a,b,c > 0$ គេមាន :

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2} \ge a+b+c$$

24-ចូរស្រាយថាគ្រប់ចំនួនពិត $0 < x_1 , x_2 , ..., x_n \le \frac{1}{2}$ គេមានវិសមភាព :

$$\left(\frac{n}{x_1+x_2+...+x_n}-1\right)^n \le \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}-1\right)$$

25-បង្ហាញថាគ្រប់ $a\ ,\ b\ ,\ c > 0$ គេបាន :

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}+\frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)}+\frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} \le \frac{1}{3}$$

26-បង្ហាញថាគ្រប់ $a\ ,\ b\ ,\ c > 0$ គេបាន :

$$\sqrt[3]{4a^3+4b^3}+\sqrt[3]{4b^3+4c^3}+\sqrt[3]{4c^3+4a^3} \le \frac{4a^2}{a+b}+\frac{4b^2}{b+c}+\frac{4c^2}{c+a}$$

27-គេមាន $a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ x\ ,\ y\ ,\ z \in IR$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព :

$(a+b+c)(x+y+z)=3$ និង $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=4$

ចូរបង្ហាញថា $ax+by+cz \ge 0$ ។

28-គេឱ្យ $a\ ,\ b\ ,\ c>1$ ដែល $\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{b^2-1}+\frac{1}{c^2-1}=1$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\le 1$ ។

29- បង្ហាញថាគ្រប់ $a\ ,\ b\ ,\ c>0$ គេមាន :

$$1<\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

30-គេឱ្យ $n\ge 2$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1\ ,a_2\ ,...,a_n$

ដែល $a_1.a_2....a_n=1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\sqrt{\frac{{a_1}^2+1}{2}}+\sqrt{\frac{{a_2}^2+1}{2}}+...+\sqrt{\frac{{a_n}^2+1}{2}}\le a_1+a_2+...+a_n$$

31-គេឱ្យ $a,b,c,x,y,z\in IR_+$ ដែល $xy+yz+zx=3$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a(y+z)}{b+c}+\frac{b(z+x)}{c+a}+\frac{c(x+y)}{a+b}\ge 3$ ។

32-គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $a+b+c=3$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a}{ab+1}+\frac{b}{bc+1}+\frac{c}{ca+1}\ge\frac{3}{2}$ ។

33-គេឱ្យ $a_1\ ,a_2\ ,....,a_n>0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a_1+\sqrt{a_1a_2}+\sqrt[3]{a_1a_2a_3}+...+\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}{n}\le\sqrt[n]{a_1.\frac{a_1+a_2}{2}...\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}}$$

34-ចូរស្រាយថាគ្រប់ $a\ ,b\ ,c>0$ គេមាន :

$$\frac{ab-bc+ca}{b^2+c^2}+\frac{bc-ca+ab}{c^2+a^2}+\frac{ca-ab+bc}{a^2+b^2}\ge\frac{3}{2}$$

35-គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^2+bc}{b^2+ca}+\frac{b^2+ca}{c^2+ab}+\frac{c^2+ab}{a^2+bc}\le\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$$

36-បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x , y , z ដែល $x+y+z=1$ គេមាន :

$$\sqrt{x+(y-z)^2}+\sqrt{y+(z-x)^2}+\sqrt{z+(x-y)^2}\ge\sqrt{3}$$

37-គេឱ្យ a ,b , c ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន និង គ្មានពីរចំនួនណាស្មើសូន្យព្រមគ្នា ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{ab+bc-ca}{c^2+a^2}+\dfrac{bc+ca-ab}{a^2+b^2}+\dfrac{ca+ab-bc}{b^2+c^2}\ge\dfrac{3}{2}$

38-ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\sqrt{1+\frac{2ab}{a^2+b^2}}\ge 2+\sqrt{2}$$

39-គេឱ្យ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{c}{3a-b+c}+\dfrac{a}{3b-c+a}+\dfrac{b}{3c-a+b}\ge 1$

40-គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$a^2.\frac{a+2c}{3b}+b^2.\frac{b+2a}{3c}+c^2.\frac{c+2b}{3a}\ge a^2+b^2+c^2$$

41-ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x , y , z ចូរស្រាយថា :

$$(x^2-yz)^2\ge\frac{27}{8}xy(xy-z^2)(zx-y^2)$$

42-គេឱ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc = 1$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a^3+b^3+c^3+3}{4} \geq \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$

43-គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=2$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a}{b(a+b)}+\frac{b}{c(b+c)}+\frac{c}{a(a+c)} \geq 2$

44-គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b , c ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a^2+ac}{2b+a+c}+\frac{b^2+ba}{2c+a+b}+\frac{c^2+cb}{2a+b+c} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

45-គេឱ្យ a , $b,c \in IR^+$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a^2+ab+b^2}{(a+b)^2}+\frac{b^2+bc+c^2}{(b+c)^2}+\frac{c^2+ca+a^2}{(c+a)^2} \geq \frac{9}{4}$$

46-គេឱ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ដែល $a+b+c=1$ ។

ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a}{4b+3bc+4c}+\frac{b}{4c+3ca+4a}+\frac{c}{4a+3ab+4b} \geq \frac{1}{3}$$

47-គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ដែល $a+b+c=3$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a}{b+c-1}+\frac{b}{c+a-1}+\frac{c}{a+b-1} \geq 3$

48-គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ដែល $a+b+c=3$ ។

ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a}{2b+3c-1}+\frac{b}{2c+3a-1}+\frac{c}{2a+3b-1} \geq \frac{3}{4}$$

49-គេឱ្យ $a , b , c > 0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{\sqrt{a^3+b^3}}{a^2+b^2}+\frac{\sqrt{b^3+c^3}}{b^2+c^2}+\frac{\sqrt{c^3+a^3}}{c^2+a^2} \geq \frac{6(ab+bc+ca)}{(a+b+c)\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

50-បើ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាននោះចូរស្រាយថា :

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{b^2(c+a)}{c^2+a^2}+\frac{c^2(a+b)}{a^2+b^2} \geq a+b+c$$

51- បើ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាននោះចូរស្រាយថា

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{9(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

52- បើ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca+abc \geq 4$

ចូរស្រាយថា :

$$\frac{1}{(a+1)^2(b+c)}+\frac{1}{(b+1)^2(c+a)}+\frac{1}{(c+1)^2(a+b)} \leq \frac{3}{8}$$

53- បើ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។ ចូរស្រាយថា

$$\frac{1}{(a+1)^2(b+c)}+\frac{1}{(b+1)^2(c+a)}+\frac{1}{(c+1)^2(a+b)} \leq \frac{3}{8}$$

54-គេមាន a , b , c , d ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា :

$$(a+b+c+d)^3 \geq 4\left[a(c+d)^2+b(d+a)^2+c(a+b)^2+d(b+c)^2\right]$$

55-បើ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ នោះចូរស្រាយថា :

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{b+c}}+\frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{c+a}}+\frac{\sqrt[3]{c^2}}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

56-គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}\geq 1$$

57-គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា

$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{b^2+c^2}+\frac{b+c}{c^2+a^2}+\frac{c+a}{a^2+b^2}\right)$$

58-បើ a , b , c ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន នោះចូរស្រាយថា :

$$2(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\geq (a+1)(b+1)(c+1)(abc+1)$$

59-គេឱ្យ $x , y , z > 0$ និង $n \in IN$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$(x^{n+3}-x^n+3)(y^{n+3}-y^n+3)(z^{n+3}-z^n+3)\geq (x+y+z)^3$$

60-បើ $a , b , c > -1$ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{1+a^2}{1+b+c^2}+\frac{1+b^2}{1+c+a^2}+\frac{1+c^2}{1+a+b^2}\geq 2$$

61-បើ $a , b , c \in IR$ បង្ហាញថា : $\sqrt[4]{a^4+b^4+c^4+1}\geq \sqrt[5]{a^5+b^5+c^5+1}$

62-បើ x , y , z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាននោះចូរស្រាយថា :

$$\frac{xy}{xy+x^2+y^2}+\frac{yz}{yz+y^2+z^2}+\frac{zx}{zx+z^2+x^2}\leq \frac{x}{2x+z}+\frac{y}{2y+x}+\frac{z}{2z+y}$$

63-គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\geq (ab+bc+ca)^3$$

64-គេឱ្យ $a,b,c>0$ ដែល $a+b+c=1$ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{a^2+b}{b+c}+\dfrac{b^2+c}{c+a}+\dfrac{c^2+a}{a+b}\geq 2$ ។

65-$(u_n)_{n\in IN^*}$ ជាស៊ីតចំនួនពិតកំណត់ដោយ $\forall n\in IN^*: u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

ក.បង្ហាញថា $\forall n\in IN^*: 0<u_n<1$ រួចសិក្សាអថេរភាពនៃស៊ីតនេះ ។

ខ. សន្មតថា $X_n = u_1.u_2.u_3...u_n$ ។

តាមកំណើនចូរស្រាយថា $X_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$ រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n$ ។

66-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = (x+\sqrt{x^2+1})^n$

ចូរស្រាយថា $(1+x^2)y''+xy'-n^2y=0$ ។

67-គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x>\dfrac{1}{2}$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$

ក. គ្រប់ $x\geq 1$ បង្ហាញថា $f(x)\geq 1$ ។

គេពិនិត្យស៊ីត (u_n) មួយកំណត់ដោយ $u_0=2$ និង $u_{n+1}=f(u_n)$ ហើយ (v_n) និង (w_n) ជាស៊ីតពីរផ្សេងទៀតកំណត់ដោយ $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n}$ និង $w_n=\ln v_n$ ។

ខ. ស្រាយថា (w_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា $(w_n),(v_n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $u_n=\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}}$ រួចគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ។

68-គេឱ្យ (a_n) ជាស៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទាំងអស់សុទ្ធតែវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+....+\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}=\dfrac{n-1}{a_na_1}$

69-គណនាផលគុណ $P=\prod\limits_{k=1}^{5}\left[\sin\left(\dfrac{(6k-5)\pi}{30}\right)\right]$ ។

70-គេឱ្យស្ទីត (w_n) មួយកំណត់ដោយ $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_n = a w_{n-1}^2 \quad , \; n \geq 1 \end{cases}$

ដែល $a \neq 1$ និង $w_n = a^{(V_n + b)}$ ។

ក. បង្ហាញថាគេអាចកំណត់ចំនួនពិត b បានដែលធ្វើឱ្យ (V_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនា w_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

71-គេឱ្យស្ទីតនៃចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ ៖

$a_0 = 2$ និង $a_{n+1} = \dfrac{2^{2^n} + 1}{2^{2^n}} . a_n - 2^{-2^n}$

ក. តាង $b_n = a_n - 1$ ។ រកទំនាក់ទំនងរវាង b_{n+1} និង b_n ។

ខ. គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញថាវាជាស្ទីតរួម ។

72-គេមានស្ទីតនៃចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ ៖

$a_0 = 1$ និង $a_{n+1} = 2\,[\, a_n + (2n+1)2^n \,]$ ដែល $n \in IN$

ក.បង្ហាញថាគេអាចកំនត់បីចំនួនពិត $a \, , b \, , c$ ដើម្បីឱ្យស្ទីតនៃចំនួនពិត (b_n)

កំណត់ដោយ $b_n = a_n + (an^2 + bn + c)2^{n+1}$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនា b_n និង a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

73-គេមានស្ទីត (z_n) កំណត់ដោយ ៖

$z_1 = \dfrac{1}{2}$ និង $z_{n+1} = \dfrac{z_n}{2} + \ln\left(\dfrac{(n+1)\sqrt{2n-1}}{(2n+1)\sqrt{n}} \right)$ ដែល $n = 1, 2, 3, ...$

ក.ស្រាយថាស្ទីត $\varepsilon_n = z_n - \ln\left(\dfrac{n}{2n-1} \right)$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គណនា z_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

74-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{\sqrt[3]{a_n^{\ 3} + 26n^3 + 81n^2 + 81n + 27}}{3} \end{cases}$

ដែល $n = 1 , 2, 3 , ...$ ។

ក.តាង $b_n = (a_n - n)(a_n^{\ 2} + na_n + n^2)$ ។ រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (b_n) ?

ខ.គណនា a_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

75-គេឱ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានតួ $a_0 = 4$ និង រេសុង $q = \dfrac{1}{2}$ ហើយ (b_n)

ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានតួទីមួយ $b_0 = \dfrac{\pi}{4}$ និងរេសុង $r = \dfrac{\pi}{2}$ ។

គេតាង $z_n = a_n(\cos b_n + i\sin b_n)$ គ្រប់ $n \in IN$ ។

ក. បង្ហាញថា (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គ្រប់ $n \in IN$ គេតាង $W_n = z_0.z_1.z_2...z_n$ ។ គណនាអាគុម៉ង់នៃ W_n ។

76-គណនាចំនួនពិត b , c , d ដើម្បីឱ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_n = \dfrac{n+b}{cn+d}$

ដែល $n = 1 ,2 , 3 , ...$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម :

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{3} \, ; \, a_2 = \dfrac{3}{8} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

77-គេមាន $S_n = 4 - a_n - \dfrac{1}{2^{n-2}}$ ($n = 1 , 2, 3 ...$) ជាផលបូក n តួដំបូងនៃ

ស្វ៊ីត(a_n) ។កំណត់ទំនាក់ទំនងកំណើនរវាង a_n & a_{n+1} រួចគណនា a_n ។

78-ស្រាយថាគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ចំនួន $A_n = 5^{5^{n+1}} + 5^{5^n} + 1$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

79-ចូរស្រាយថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចំនួន :

$$E_n = \frac{(17+12\sqrt{2})^n - (17-12\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}$$ ជាចំនួនគត់ និង មិនមែនជាការេពិត ។

80-ចូរបង្ហាញថា $\cot^2\frac{\pi}{7} + \cot^2\frac{2\pi}{7} + \cot^2\frac{3\pi}{7} = 5$ ។

81-ចូរស្រាយថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមង្ស័លុះត្រាតែ :

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$$

82-គណនា $P = \cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}$

83-ដោះស្រាយសមីការ $\log_{12}\left(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}\right) = \frac{1}{2}\log_9 x$

84-គេឱ្យ f ជាអនុវត្តន៍ពី IR ទៅ IR ដែល :

$\forall x \in IR$, $\forall y \in IR : f(x+y) = f(x) + f(y)$ និង f មានដេរីវេត្រង់ 0

ក. គណនា $f(0)$

ខ. បង្ហាញថា f មានដេរីវេត្រង់គ្រប់ $x_0 \in IR$ ហើយរក $f'(x_0)$

គ. តាមសំណួរ ខ ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ ។

85-រកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x;y) = \log_2(\cos^2 xy + \frac{1}{\cos^2 xy})$

រួចទាញបង្ហាញថាសមីការ $\log_2(\cos^2 xy + \frac{1}{\cos^2 xy}) = \frac{1}{2}$ គ្មានឫស ។

86-គេឱ្យសមីការ $(E): xy'+2y = 4x^2 + 9x$

ក. កំនត់អនុគមន៏ពហុធា $y = f_1(x)$ ដែលជាចម្លើយពិសេសមួយរបស់ (E) ។

ខ. កំនត់អនុគមន៏ $y = f(x)$ ដែលជាចម្លើយទូទៅរបស់ (E) ។

87-គេឲ្យខ្សែកោង $(c): y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{1 - x}$ និងបន្ទាត់ $y = -x + m$ ។

កំនត់ mដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ (d)កាត់ខ្សែកោង(c)បានពីរចំនុចឆ្លុះគ្នាធៀប

នឹងបន្ទាត់ពុះទីមួយនៃអក្ស័កូអរដោនេ ។

88_គេឲ្យ $\phi(x) = \dfrac{x^2 + 2ax + b}{x^2 + 1}$, $a \neq 0$, $a , b \in IR$ ។

ចូរបង្ហាញថាមានពីរចំនួនពិត λ_1 និង λ_2 $(\lambda_1 < \lambda_2)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ÷

$$\phi(x) - \lambda_r = \frac{[\,(1-\lambda_r)x + a\,]^2}{(1-\lambda_r)(x^2+1)} \quad , \; r = 1 , 2 \text{ ។}$$

ទាញបង្ហាញថា $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) = -a^2$

រួចបញ្ចាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $\lambda_1 \leq \phi(x) \leq \lambda_2$ ។

89_គេឲ្យអនុគមន៍លេខ $f(n) = n^2 + n + 6$, $n \in Z$ ។

ចូរកំនត់ n ដើម្បីឲ្យ $f(n)$ជាការេប្រាកដ?

90_គេឲ្យត្រីកោណ ABCមួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ក_ស្រាយបញ្ចាក់ទំនាក់ទំនង $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

រួចទាញថា $\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C > 3 + \dfrac{3n}{2}$ គ្រប់ $n \in IN^*$

ខ_ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$

រួចទាញថា $\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geq 1$ ។

91_គេឲ្យអនុគមន៍លេខ $g(n)=n^2-2n+4$, $n\in N$ ។

ចូរកំនត់ n ដើម្បីឲ្យ $g(n)$ចែកដាច់នឹង 7?

92_ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ដែលមានដេរីវេលើ IR ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

ទំនាក់ទំនង $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{f(x)f(y)}$, $\forall x,y\in IR$ ។

93_ចូរបង្ហាញថា $\forall n\in IN:\ E=n.3^{4n+1}+(n+1).5^{2n+1}+(3n+1).2^{n+1}$

ចែកដាច់នឹង 7 ជានិច្ច ។

94_ចូរកំនត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $n\in IN^*$ ដែលឲ្យ $n^4+(n+1)^4$

មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

95_ក. ចូរគណនា PGCD នៃចំនួនគត់ 5 145 ; 4410 ; 3 675 ។

ខ. ដោះស្រាយក្នុង Z នៃសមីការ $3675x-5145y=4410$ ។

(គេដឹងថា $x=4$, $y=2$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ)

96_ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ គេដាក់ $F_n=2^{2^n}+1$

(គេហៅចំនួននេះជាចំនួន Fermat)

ចូរបង្ហាញថា F_n ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នាពីៗ ។

97_ចូរកំនត់ x និង y ដើម្បីឲ្យចំនួន $a=\overline{4x3y}$ ចែកដាច់នឹង 2 និង 9

98_ចូរកំនត់លេខលំដាប់ x និង y នៃចំនួន $a=\overline{28x75y}$

ដើម្បីឲ្យវាចែកដាច់នឹង 3 និង 11 ។

99_ស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ $n\in IN$ ចំនួន $3^{2n+1}+2^{n+2}$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

100_ស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ $n\in IN$ ចំនួន $9^{n+1}+2^{6n+1}$ ចែកដាច់នឹង 11 ។

101_បង្ហាញថា $(n+1)^n-1$ ចែកដាច់នឹង n^2 ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ ។

102_គេឲ្យ $0<\alpha<1$ ។

ក.បង្ហាញថា $(1+x)^\alpha\le 1+\alpha x$

ខ. ទាញថា $\sqrt{2}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{4}{3}}+....+\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}}<n+1$ ។

103_គេឲ្យ $0<x<\frac{\pi}{2}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ÷

$$\left(1+\frac{1}{\sin^n x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^n x}\right)>\left(1+2^{\frac{n}{2}}\right)^2\ ,\ n\in IN^*$$ ។

104_រកតម្លៃទាំងអស់នៃ m ដើម្បីឲ្យសមីការ ÷

$\sqrt{(\sqrt{2}+x)^m}+\sqrt{(\sqrt{2}-x)^m}=2\sqrt{2}$ ជាវិបាកនៃសមីការ

$\frac{\log_2(9-x^3)}{\log_2(3-x)}=3$ ។

105_គេឲ្យ $\varphi(x) = -\int_0^x \ln(\cos y)\,.dy$

ក. បង្ហាញថា $\varphi(x) = 2\varphi\,(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}) - 2\varphi\,(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}) - x\ln 2$ ។

ខ. ប្រើទំនាក់ទំនងខាងលើចូរគណនា $\varphi(\frac{\pi}{2}) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos y)\,.dy$ ។

106_គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំនត់លើ IN ដោយ ÷

$$u_0 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \text{ និង } u_{n+1} = \sqrt[4]{\frac{u_n}{2}} \quad ,\forall n \in IN$$

ក. គណនា $u_1\,; u_2\,; u_3$ ។

ខ. គេពិនិត្យស្វ៊ីត (v_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងទំនាក់ទំនង $u_n = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{1+v_n}$

ចូររកប្រភេទនៃស្វ៊ីត (v_n)រួចគណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

107_គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a\,; b\,; c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$a < b+c \,,\, b < a+c \,,\, c < a+b$ ។

ចូរស្រាយថា $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$ ។

108_ក. ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \,,\forall k \in IN^*$

ខ. ទាញបញ្ជាក់វិសមភាព ÷

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2$$ ។

109_ត្រីកោណ ABC មួយចារិកក្រៅរង្វង់មួយមានកាំ $r = 2$ ហើយ

$\cot A = 3\tan B$ ។

រង្វង់អង្កត់ផ្ចិត $[AB]$ កាត់ជ្រុង $[BC]$ ត្រង់ H ។

ក. ចូរគណនា AH ។

ខ. បើ $HC = 4$ ចូរគណនាកាំរង្វង់ចារិកក្នុងត្រីកោណ AHC ។

110_គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានបរិមាត្រ 30 ហើយជ្រុងទាំងបីរៀងគ្នា AB , AC , BC បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានផលសងរួមស្មើ 2 ។

គេសង់រង្វង់បីមានផ្ចិតរៀងគ្នា A , B , C ហើយប៉ះខាងក្រៅពីរៗ ។

ចូរគណនាកាំរបស់រង្វង់ទាំងបីនេះ ។

111_គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយចារិកក្រៅរង្វង់មានកាំ $r = 2$ និងចារិកក្នុងរង្វង់មានកាំ $R = 5$ ។

ចូរគណនាក្រឡាផ្ទៃតូចបំផុតរបស់ត្រីកោណនេះ ។

112_ត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ $A = 120^0$ ។ ជ្រុង AB , AC, BC បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយដែលមានផលសងរួមស្មើ 2 ។

ចូរគណនាកាំរង្វង់ចារិកក្នុង និងកាំរង្វង់ចារិកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

113-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\alpha x+\beta-x^{\alpha}$ ដែល $\alpha>0$, $\beta>0$

និង $\alpha+\beta=1$ ។

ក. គ្រប់ $x\in[0,1]$ បង្ហាញថា $f(x)\geq 0$ ។

ខ. គ្រប់ u , $v>0$ ដែល $u\leq v$ បង្ហាញថា $u^{\alpha}.v^{\beta}\leq \alpha u+\beta v$ ។

114-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=x^4-2p^2x^2+q$

កំណត់តម្លៃ p និង q ដើម្បីឱ្យចំនុចបរមាទាំងបីនៃអនុគមន៍ f បង្កើតបានជាកំពូលត្រីកោណសមង្ស ។

115-កំនត់អនុគមន៍ f មួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$f(1)=\frac{2}{3}\ ,\ f'(1)=1 \text{ និង } \frac{1}{\sqrt{x}}f'(x)+2\sqrt{x}f''(x)=2 \text{ គ្រប់ } x>0$$

116-គេឱ្យ f មិនមែនជាអនុគមន៍សូន្យដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$\forall x\ ,\ y\in IR: f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

ក. រកតម្លៃ $f(0)$ រួចបង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍គូ ។

ខ-ឧបមាថា $a\in IR$ ដែល $f(a)=0$ ។ ស្រាយថា $f(2a)=-1$

និង $f(a+x)=-f(a-x)$ រួចគណនា $f(4a)$

117-គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=(x+\sqrt{x^2+1})^k$

ស្រាយថា $xy'+(1+x^2)y''=k^2y$ ។

118-គេឱ្យ $a , b , c , x_1 , x_2 , x_3 , ..., x_5$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល

$a+b+c=1$ និង $x_1.x_2.x_3.x_4.x_5=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា :

$(ax_1{}^2+bx_1+c)(ax_2{}^2+bx_2+c)...(ax_5{}^2+bx_5+c)\geq 1$ ។

119-គេឱ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន x & y ដែល $x^2+y^2=4$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{xy}{x+y+2}\geq\sqrt{2}-1$ ។

120.ចូរស្រាយថាចំនួន $A_n=3^{5n}+4^{5n+2}+5^{5n+1}$ ចែកដាច់នឹង 11 គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

121. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមេដ្យាន AM បន្ទាត់ពុះមុំ AL និង កំពស់ AH ចែកមុំ $\angle BAC$ ជាបួនផ្នែកស្មើគ្នា ។ ចូរកំនត់រង្វាស់នៃមុំ A ។

122. កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានដើម្បីឱ្យ $f(n)=n^3-18n^2+115n-391$ ជាគូបនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

123. គេឱ្យរង្វង់ពីរ (C_1) និង (C_2) មានកាំរៀងគ្នា R និង r ហើយកាត់គ្នាត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា S និង T ។ (Δ) ជាបន្ទាត់ប៉ះរួមទៅនឹង (C_1) និង (C_2) ដោយ M និង N ជាចំណុចប៉ះរៀងគ្នារវាង (Δ) ជាមួយ (C_1) និង (C_2) ។ បើ MS ប៉ះ (C_2) ហើយ φ ជាមុំរវាង MS និងបន្ទាត់ប៉ះ (C_1) ត្រង់ S នោះចូរស្រាយថា $\dfrac{r}{R}=\left(2\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)^2$ ។

124.សមីការ $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ មានឫសបីជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

(មិនចាំបាច់ខុសគ្នា) ។

ចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរមាដែលអាចនៃ $\frac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \frac{c}{b}$?

125. រង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ប៉ះជ្រុង BC , CA , AB រៀងគ្នាត្រង់

A_1 , B_1 , C_1 ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{\frac{AB_1}{AB}} + \sqrt{\frac{BC_1}{BC}} + \sqrt{\frac{CA_1}{CA}} \le \frac{3}{\sqrt{2}}$

វិះគន់បែបស្ថាបនាជាអាហាររបស់បណ្ឌិត

វិះគន់ខុះការពិតជាគំនិតជនល្ងង់ខ្លៅ

សូមរង់ចាំអានភាគទី ៧

រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន

Tel : 017 768 246

www.mathtoday.wordpress.com

សូមកុំភ្លេចអានសៀវភៅ

103 អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

របស់អ្នករៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន

ដែលនឹងចេញផ្សាយឆាប់ៗខាងមុខនេះ !

ខាងក្រោមនេះជាកម្រងលំហាត់ដែលត្រូវធ្វើដំណោះស្រាយ

1. ចូរស្រាយបញ្ជាក់សមភាពខាងក្រោម :

ក. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

ខ. $\dfrac{\sin^2\alpha - \tan^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cot^2\alpha} = \tan^6\alpha$

គ. $(a\sin\alpha + b\cos\alpha)^2 + (a\cos\alpha - b\sin\alpha)^2 = a^2 + b^2$

2. គេដឹងថា $\sin\alpha + \cos\alpha = a$ ដែល $-\sqrt{2} \le a \le \sqrt{2}$ ។

ចូរគណនាជាអនុគមន៍នៃ a នៃកន្សោម :

ក. $|\sin\alpha - \cos\alpha|$

ខ. $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$

3. គេដឹងថា $\tan\alpha + \cot\alpha = p$ ដែល $p \geq 2$ ។

ចូរគណនាជាអនុគមន៍នៃ p នៃកន្សោម :

ក. $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha$

ខ. $\tan^3\alpha + \cot^3\alpha$

4. គេដឹងថា $\tan^3\varphi = \dfrac{b}{a}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{\cos^4\varphi}{\sqrt[3]{a^2}} + \frac{\sin^4\varphi}{\sqrt[3]{b^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}$$

5. ចូរសម្រួលកន្សោម :

$$A = \sqrt{\sin^4 a + 4\cos^2 a} - \sqrt{\cos^4 a + 4\sin^2 a}$$

6. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

ក. $1 - \sin\varphi = 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right)$

ខ. $\dfrac{1 - 2\sin^2\alpha}{2\cot\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)} = 1$

គ. $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) = \dfrac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

7. គេដឹងថា :

$$\cos\alpha = \frac{a - b + c}{2b}\ ,\ \cos\beta = \frac{a + b - c}{2c}\ ,\ \cos\gamma = \frac{b + c - a}{2a}$$

ចូរគណនាតម្លៃ $S = \tan^2\dfrac{\alpha}{2} + \tan^2\dfrac{\beta}{2} + \tan^2\dfrac{\gamma}{2}$

៨. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក. $\frac{1-2\sin^2 a}{1+\sin 2a}=\frac{1-\tan a}{1+\tan a}$

ខ. $\frac{\sin^4 a+2\sin a\cos a-\cos^4 a}{\tan 2a-1}=\cos 2a$

គ. $\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{1-\tan^2\alpha\cot^2\beta}=-\cos^2\alpha\sin^2\beta$

៩. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក. $3-4\cos 2a+\cos 4a=8\sin^4 a$

ខ. $\cos^4 a=\frac{1}{8}\cos 4a+\frac{1}{2}\cos 2a+\frac{3}{8}$

១០. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក. $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos^2 2\alpha)$

ខ. $4(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)=1+3\cos^2 2\alpha$

គ. $8(\sin^8\frac{\alpha}{2}+\cos^8\frac{\alpha}{2})=1+6\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$

១១. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក. $\frac{2\sin 2a+\sin 4a}{2(\cos a+\cos 3a)}=\tan 2a\cos a$

ខ. $\cos^4 a-\sin^4 a+\sin 2a=\sqrt{2}\cos(2a-\frac{\pi}{4})$

គ. $\cos^2 a+\cos^2(\frac{\pi}{3}+a)+\cos^2(\frac{\pi}{3}-a)=\frac{3}{2}$

12. គណនាតម្លៃ $P=\sin 10^{o}\sin 30^{o}\sin 50^{o}\sin 70^{o}$

13. ចូរបង្ហាញថា ៖

ក. $\frac{\cot^2 2\alpha-1}{2\cot 2\alpha}-\cos 8\alpha\cot 4\alpha=\sin 8\alpha$

ខ. $\sin^2\alpha\cos^4\alpha=\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\cos 2\alpha-\frac{1}{16}\cos 4\alpha-\frac{1}{32}\cos 6\alpha$

គ. $\sin 9\alpha+3\sin 7\alpha+3\sin 5\alpha+\sin 3\alpha=8\sin 6\alpha\cos^3\alpha$

14. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\tan(x-y)+\tan(y-z)+\tan(z-x)=\tan(x-y)\tan(y-z)\tan(z-x)$$

15. គេឱ្យមុំស្រួចវិជ្ជមាន α ,β ,γ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង ៖

$\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}\cot\frac{\alpha}{2}$ និង $\cot\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}(3\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2})$

ចូរកំណត់តម្លៃនៃផលបូក $\alpha+\beta+\gamma$ ។

16. ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ ៖

$$y=2(1+\sin 3x\sin 2x)-\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 6x)$$

17. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍ ៖

$$f(x)=\cos^2 x+\cos^2(\frac{\pi}{3}+x)-\cos x\cos(\frac{\pi}{3}+x)$$

ជាអនុគមន៍ថេរជានិច្ចគ្រប់តម្លៃ $x\in IR$ ។

18. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\cos(a+b).\cos(a-b)=\cos^2 a-\sin^2 b$$

19. ចូរបង្ហាញថា :

ក. $(\cos a+\cos b)^2+(\sin a+\sin b)^2=4\cos^2\dfrac{a-b}{2}$

ខ. $(\cos a-\cos b)^2+(\sin a-\sin b)^2=4\sin^2\dfrac{a-b}{2}$

20. គេឱ្យ $(1+\sin a)(1+\sin b)(1+\sin c)=\cos a\cos b\cos c$

ចូរសម្រួល $P=(1-\sin a)(1-\sin b)(1-\sin c)$

21. ចូរសម្រួលផលគុណ :

$P=\cos a\cos 2a\cos 4a....\cos 2^{n-1}a$

22. ចូរបង្ហាញថា :

$$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\left(\frac{1}{2}\right)^7$$

23. គេឱ្យ $\sin B=\frac{1}{5}\sin(2A+B)$ ។

ចូរស្រាយថា $\tan(A+B)=\frac{3}{2}\tan A$

24.គេឱ្យ A និង B ជាមុំស្រួចវិជ្ជមានដែល $3\sin^2 A+2\sin^2 B=1$

និង $3\sin 2A-2\sin 2B=0$ ។

ចូរស្រាយថា $A+2B=\frac{\pi}{2}$?

25. ចូរស្រាយថាកន្សោម

$$E = \cos^2\varphi + \cos^2(a+\varphi) - 2\cos a\cos\varphi\cos(a+\varphi)$$

មានតម្លៃមិនអាស្រ័យនឹង φ ។

26. ចូរបង្ហាញថា :

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c) = 4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}$$

27. ចូរបង្ហាញថា :

$$\tan a + \tan b + \tan c - \frac{\sin(a+b+c)}{\cos a\cos b\cos c} = \tan a.\text{tnab}.\tan c$$

28. បង្ហាញថាបើ $A+B+C=\pi$ នោះគេមានទំនាក់ទំនងខាងក្រោម :

ក. $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

ខ. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

គ. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$

ឃ. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$

ង. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$

29. ចូរបង្ហាញថា $\tan 3\alpha = \tan\alpha\tan(\frac{\pi}{3}+\alpha)\tan(\frac{\pi}{3}-\alpha)$

30. ចូរស្រាយថា :

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma} + \frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha} = 0$$

31. ចូរបង្ហាញថាបើ $\frac{\sin^4\alpha}{a}+\frac{\cos^4\alpha}{b}=\frac{1}{a+b}$ នោះគេបាន :

$$\frac{\sin^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^3}$$

32. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{1}{\sin(a-b)\sin(a-c)}+\frac{1}{\sin(b-a)\sin(b-c)}+\frac{1}{\sin(c-a)\sin(c-b)}$$

ស្មើនឹង $\frac{1}{2\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a-c}{2}\cos\frac{b-c}{2}}$ ។

33. គេដឹងថា $\frac{x}{\tan(\theta+\alpha)}=\frac{y}{\tan(\theta+\beta)}=\frac{z}{\tan(\theta+\gamma)}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{x+y}{x-y}\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{y+z}{y-z}\sin^2(\beta-\gamma)+\frac{z+x}{z-x}\sin^2(\gamma-\alpha)=0$$

34. គេឱ្យ α និង β ជាចម្លើយខុសគ្នានៃសមីការ $a\cos x+b\sin x=c$ ។

ចូរស្រាយថា $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}$ ។

35. គេយក $\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}=\frac{a}{b}$ និង $\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{c}{d}$

ចូរស្រាយថា $\cos(\alpha-\beta)=\frac{ac+bd}{ad+bc}$ ។

36. គេឱ្យទំនាក់ទំនង :

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\varphi = \cos\gamma\cos\theta \text{ និង } \sin\alpha = 2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \tan^2\frac{\beta}{2}\tan^2\frac{\gamma}{2}$ ។

37. គេឱ្យ $\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$ ។

ចូរស្រាយថា $\tan\frac{\theta+\alpha}{2}.\tan\frac{\theta-\alpha}{2} = \tan^2\frac{\beta}{2}$

38. គេឱ្យ $\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos(x+\theta)}{b} = \frac{\cos(x+2\theta)}{c} = \frac{\cos(x+3\theta)}{d}$

ចូរស្រាយថា $\frac{a+c}{b} = \frac{b+d}{c}$ ។

39. គេដឹងថា $\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$, $\cos\varphi = \cos\delta \operatorname{cso}\beta$

និង $\tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\varphi}{2} = \tan\frac{\beta}{2}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\sin^2\beta = (\frac{1}{\cos\alpha} - 1)(\frac{1}{\cos\delta} - 1) \quad ?$$

40. បើ $\cos(\theta-\alpha) = a$ និង $\sin(\theta-\beta) = b$ នោះចូរស្រាយថា :

$$a^2 - 2ab\sin(\alpha-\beta) + b^2 = \cos^2(\alpha-\beta)$$

41. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}$$

42. គណនាផលបូក :

$$S=\frac{1}{\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)}+\frac{1}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+2\beta)}+....+$$

$$.....+\frac{1}{\cos[\alpha+(n-1)\beta].\cos(\alpha+n\beta)}$$

43. ចូរបង្ហាញថា :

$$\tan\alpha+\frac{1}{2}\tan\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\tan\frac{\alpha}{4}+....+\frac{1}{2^{n-1}}\tan\frac{\alpha}{2^{n-1}}=$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{\alpha}{2^{n-1}}-2\cot 2\alpha$$

43. គណនាផលបូក :

$$S=\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+.....+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

$$S'=\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+.....+\cos\frac{(n-1)\pi}{n}$$

44. ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+...+\sin(2n-1)\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+...+\cos(2n-1)\alpha}=\tan(n\alpha)$$

45. គណនាផលបូក :

$$S_n=\cos^2 x+\cos^2 2x+....+\cos^2 2nx$$

$$S'_n=\sin^2 x+\sin^2 2x+....+\sin^2 2nx$$

46. គេឱ្យ $\tan\theta = n\tan\varphi$ ដែល $n > 0$ ។

ចូរស្រាយថា $\tan^2(\theta-\varphi) \le \dfrac{(n-1)^2}{4n}$

47.ក_ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan 2x.\tan^2 x = \tan 2x - 2\tan x$

ខ_ ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\left[2^k \tan\dfrac{a}{2^k}\ \tan^2\dfrac{a}{2^{k+1}}\right]$

48.ក_ ចូរស្រាយថា $\sin^3 x = \dfrac{1}{4}(\ 3\sin x - \sin 3x)$

ខ_ ចូរគណនា

$$S_n = \sin^3\frac{a}{3} + 3\sin^3\frac{a}{3^2} + 3^2\sin^3\frac{a}{3^3} + \dots + 3^{n-1}\sin^3\frac{a}{3^n}$$

49.ក_ ចូរស្រាយថា $\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{4}{\sin^2 2x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$

ខ_ ចូរគណនា

$$S_n = \frac{1}{4\cos^2\frac{a}{2}} + \frac{1}{4^2\cos\frac{a}{2^2}} + \dots + \frac{1}{4^n\cos^2\frac{a}{2^n}}$$

50.ក_ ចូរស្រាយថា $\dfrac{1}{\sin 2x} = \cot x - \cot 2x$

ខ_ ចូរគណនា

$$S_n = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin\frac{a}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{a}{2^2}} + \dots + \frac{1}{\sin\frac{a}{2^n}}$$

51.ក_ ចូរស្រាយថា $1+\frac{1}{\cos x}=\frac{\cot\frac{x}{2}}{\cot x}$

ខ_ គណនាផលគុណ

$$P_n=(1+\frac{1}{\cos a})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2}})(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^2}}).....(1+\frac{1}{\cos\frac{a}{2^n}})$$

52.ក_ ចូរស្រាយថា $\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}=\left[\frac{\cos(n+1)x}{\cos^{n+1}x}-\frac{\cos(nx)}{\cos^n x}\right].\cot x$

ខ_ គណនា $S_n=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}+\frac{\sin 3x}{\cos^3 x}+....+\frac{\sin(nx)}{\cos^n x}$

53.ក_ ចូរស្រាយថា

$$\frac{1}{\cos(nx).\cos(n+1)x}=\frac{1}{\sin x}\left[\tan(n+1)x-\tan(nx)\right]$$

ខ_ គណនាផលបូក $S_n=\sum_{p=1}^{n}\left[\frac{1}{\cos(px)\ \cos(p+1)x}\right]$

54.ក_ ចូរស្រាយថា

$$\tan(n+1)x-\tan(nx)=\tan x\left[1+\tan(nx)\tan(n+1)x\right]$$

ខ_ គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\tan(kx)\tan(k+1)x\right]$

55.ក_ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $2\cos x\ -1=\frac{1+2\cos 2x}{1+2\cos x}$

ខ_ ចូរគណនាផលគុណ ៖

$$P_n=(2\cos a-1)(2\cos\frac{a}{2}-1)(2\cos\frac{a}{2^2}-1).....(2\cos\frac{a}{2^n}-1)$$

56.ក_ ចូរស្រាយថា $\dfrac{\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}=\dfrac{1}{8}(\tan 3x-3\tan x)$

ខ_ ចូរគណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left[\dfrac{3^k\tan^3\frac{a}{3^k}}{1-3\tan^2\frac{a}{3^k}}\right]$

57.ក_ ចូរស្រាយថា $\dfrac{\tan^3 x}{1-\tan^2 x}=\dfrac{1}{2}\tan 2x-\tan x$

ខ_ ចូរគណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{2^k\tan^3\frac{a}{2^n}}{1-\tan^2\frac{a}{2^n}}\right)$

58.ក_ ចូរស្រាយថា

$$\cos(2nx)=\frac{1}{2\sin x}[\ \sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x\ ]$$

ខ_ គណនាផលបូក

$$S_n=\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+.....+\cos(2nx)$$

គ_ ទាញរកផលបូក

$$T_n=\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+.....+\cos^2(nx)$$

ឃ_ គណនាផលបូក

$$U_n=\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x+.....+\sin^2(nx)$$

59.ក_ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{2+\sin(2n-1)x}-\frac{1}{2+\sin(2n+1)x}=\frac{2\sin x\cos(2nx)}{[2+\sin(2n-1)x\ ][2+\sin(2n+1)x\ ]}$$

ខ_ គណនា $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\cos(2kx)}{\left(2+\sin(2k-1)x\right)\left(2+\sin(2k+1)x\right)}\right]$ ។

60.ក_ ចូរបង្ហាញថា $1+\tan x\tan(nx)=\frac{\cos(n-1)x}{\cos x\cos(nx)}$

ខ_ គណនា $P_n=\prod_{k=1}^{n}\left[1+\tan x\tan(kx)\right]$ ។

61. គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ :

$a_0=\cos\theta$ និង $a_{n+1}=2a_n{}^2-1$ ដែល $\theta\in IR$ និង $n\in IN$

ចូរស្រាយថា $a_n=\cos 2^n\theta$ ។

62. គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ :

$a_1=\tan\frac{2\pi}{7}$ និង $a_{n+1}=\frac{2a_n}{1-a_n{}^2}$ ដែល $n\in IN^*$

ចូរស្រាយថា $a_n=\tan\frac{2^n\pi}{7}$ ។

63. គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ :

$a_0=2\cos\varphi$ និង $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ ដែល $n\in IN\ ,\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$

ចូរស្រាយថា $a_n=2\cos\frac{\varphi}{2^n}$

64. គេឱ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_0 = \tan\alpha + \cot\alpha$ និង ទំនាក់ទំនង

$a_{n+1} = a_n{}^2 - 2$ ដែល $n \in IN$ និង $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$ ។

ចូរស្រាយថា $a_n = (\tan\alpha)^{2^n} + (\cot\alpha)^{2^n}$

65. គេមានស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ :

$a_0 = \tan\alpha + \cot\alpha$ និង $a_{n+1} = a_n{}^3 - 3a_n$ ដែល $n \in IN$

ហើយ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n = (\tan\alpha)^{3^n} + (\cot\alpha)^{3^n}$

66. គេមានស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ :

$a_0 = \tan\varphi$ និងទំនាក់ទំនង $a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{1 + a_n{}^2} - 1}{a_n}$, $n \in IN$

ដែល $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ។ ចូរស្រាយថា $a_n = \tan\dfrac{\varphi}{2^n}$?

67. គេឱ្យ a_1 , a_2 , a_3 ,...., a_n ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម d ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\cos a_1 + \cos a_2 + ... + \cos a_n = \frac{\sin\frac{nd}{2} . \cos\frac{a_1 + a_n}{2}}{\sin\frac{d}{2}}$$

$$\sin a_1+\sin a_2+...+\sin a_n=\frac{\sin\frac{nd}{2}.\sin\frac{a_1+a_n}{2}}{\sin\frac{d}{2}}$$

68. គេឱ្យស្វ៊ីត $a_0=0$ និង $a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{1+a_n}$, $n=0,1,2,...$

ចូរស្រាយថា $a_n=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ ។

69. គេឱ្យ A , B , C ជាមុំស្រួចរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C-A}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}\ge\frac{3}{2}$

70.គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង

$BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ តាង S ជាក្រឡាផ្ទៃ

និង R ជាកាំរង្វង់ចារិកក្រៅនៃត្រីកោណនេះ ។

ក-ចូរស្រាយថា $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{2S}{R}$

ខ-ទាញថា $a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C=4S$

71.គេឱ្យត្រីកោណ ABC ដែល $\sin\frac{A}{2}=\frac{a}{2\sqrt{bc}}$ ។

រកប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC

72. គេឱ្យ A , B , C ជាមុំស្រួចរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពខាងក្រោមថាពិត :

$$\sqrt{\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}}+\sqrt{\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C-A}{2}}}+\sqrt{\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

73. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មានជ្រុងផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$a^2+b^2=2c^2$ ដែល $BC=a\ , AC=b\ , AB=c$ ។

ក_ ចូរបង្ហាញថា $\cos C=\dfrac{a^2+b^2}{4ab}$

ខ_ ទាញបញ្ជាក់ថា $\cos C\ \ge\dfrac{1}{2}$

74. ក_ ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\sin\dfrac{\pi}{10}$ និង $\cos\dfrac{\pi}{10}$

ខ_ ចូរស្រាយថា $x^2+(x-y)^2\le4(x^2+y^2)\sin^2\dfrac{\pi}{10}$

គ្រប់ចំនួនពិត $x,y\in IR$ ។

75. គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់លើ IN ដោយ ៖

$U_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ និង $U_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-U_n{}^2}}{2}}\ ,\ \forall n\in IN$

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

76. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\ >2$ ។

77.គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C > 1$

78.គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ក_ ចូរស្រាយថា

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$$

ខ_ ទាញបញ្ជាក់ថា $\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt{3}$

79.គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមាន a , b , c ជារង្វាស់ជ្រុងឈមរៀងគ្នានៃមុំ A , B , C ។

តាង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

ក_ ចូរស្រាយថា $\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$ រួចទាញរកទំនាក់ទំនងពីរទៀតដែលស្រដៀងគ្នានេះ ។

ខ_ ទាញបញ្ជាក់ថា

$$bc.\cos^2\frac{A}{2}+ac.\cos^2\frac{B}{2}+ab.\cos^2\frac{C}{2}=p^2$$

80. ចំពោះគ្រប់ $a>0\,,\,b>0\,,\,0<x<\dfrac{\pi}{2}$ ចូរបង្ហាញថា

$$\left(1+\frac{a}{\sin x}\right)\left(1+\frac{b}{\cos x}\right)\geq\left(1+\sqrt{2ab}\right)^2$$

81. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមាន a , b , c ជារង្វាស់ជ្រុងឈម
រៀងគ្នានៃមុំ A , B , C ។
តាង $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។
ក_ ចូរស្រាយថា $\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$
រួចទាញរកទំនាក់ទំនងពីរទៀតដែលស្រដៀងគ្នានេះ ។
ខ_ ចូរបង្ហាញថា $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{1}{8}$
និង $\cos A + \cos B + \cos C \le \dfrac{3}{2}$ ។

82. ចូរកំនត់គ្រប់តម្លៃ x ក្នុងចន្លោះ $]0;\dfrac{\pi}{2}[$ ដោយដឹងថា ៖
$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x} + \frac{\sqrt{3}+1}{\cos x} = 4\sqrt{2}$$

83. គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុងប្រវែង a , b , c ។
កន្លះបន្ទាត់ពុះនៃមុំ C កាត់ $[AB]$ ត្រង់ចំនុច D ។
ចូរស្រាយថា $CD = \dfrac{2ab}{a+b}\cos\dfrac{C}{2}$ ។

84. គេឲ្យ $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ និង $0 < b < \dfrac{\pi}{2}$ ។
ចូរបង្ហាញថា $\left(\dfrac{\sin^2 a}{\sin b}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos^2 a}{\cos b}\right)^2 = 1$ លុះត្រាតែ $a = b$

85. ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq 4\sqrt{\frac{R}{r}}$$

ដែល r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

86. គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

បន្ទាត់ពុះមុំ A , B , C កាត់ជ្រុង $[BC] , [AC] , [AB]$

រៀងគ្នាត្រង់ A' , B' , C' ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{\sin(\frac{B-C}{2})}{AA'}+\frac{\sin(\frac{C-A}{2})}{BB'}+\frac{\sin(\frac{A-B}{2})}{CC'}=0$$

87. គេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារិកក្នុង និងចារិកក្រៅ

នៃត្រីកោណ ABC មួយ ។

ក.ចូរស្រាយថា $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$

ខ.ចូរស្រាយថា $R\geq 2r$ ។

88. គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ

$\sin^2 B+\sin^2 C=1+\sin B\sin C\cos A$ ។

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង ។

89. គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ក_ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ។

ខ_បង្ហាញថា $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ។

90. គេឲ្យសមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\ne 0$, $a\ne c$ ។

តាង $\tan\alpha$ និង $\tan\beta$ ជាឫសរបស់សមីការខាងលើ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃកន្សោម ៖

$$A=a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta)$$

91. គេឲ្យ A , B , C ជារង្វាស់មុំក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ក_ចូរបង្ហាញថា $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

ខ_ចូរបង្ហាញថា $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{9}{4}$

គ_ចូរបង្ហាញថា $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\ge\frac{3}{4}$

ឃ_ចូរបង្ហាញថា $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$

92. គណនាតម្លៃនៃផលគុណ

$$P=(1-\cot 1^o)(1-\cot 2^o)(1-\cot 3^o).....(1-\cot 44^o)$$

93. ចូរបង្ហាញសមភាព ៖

$$(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20})=\frac{1}{16}$$

94.គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

95.ចូរគណនាតម្លៃផលគុណ ៖

$$P=(\sqrt{3}+\tan 1^{o})(\sqrt{3}+\tan 2^{o}).....(\sqrt{3}+\tan 29^{o})$$

96.គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n=\prod_{k=0}^{n}\left(\tan^{2^k}\frac{x}{2^k}\right)=\tan x.\tan^2\frac{x}{2}.\tan^4\frac{x}{4}.....\tan^{2^n}\frac{x}{2^n}$$

97.គណនាផលគុណខាងក្រោម ៖

$$P_n=\prod_{k=0}^{n}\left[(1-\tan^2\frac{x}{2^k})^{2^k}\right]$$

98.គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\ge 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$$

99.គណនាផលគុណ ៖

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1+\tan^2 2^k x}{\left(1-\tan^2 2^k\right)^2}\right] \text{ ដែល } |x|<\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

100. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ តាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា :

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$$

ខ. បើ ABC ជាត្រីកោណកែងនោះចូរស្រាយថា $R \geq (\sqrt{2}+1)r$

101. គេឱ្យ a ; b ; c ; d និង x ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$\frac{\sin x}{a} = \frac{\sin 2x}{b} = \frac{\sin 3x}{c} = \frac{\sin 4x}{d}$$ ដែល $x \neq k\pi$; $k \in Z$

ចូរបង្ហាញថា $a^3(4b^2 - d^2) = b^4(3a - c)$

102. គេឱ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a-b}{a+b} = \tan\frac{A-B}{2}.\tan\frac{C}{2}$$

103. ចូរបង្ហាញថា :

$$\cos^7 x + \cos^7(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos^7(x + \frac{4\pi}{3}) = \frac{63}{64}\cos 3x$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

△△△△△