រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន
បរិញ្ញាបត្រផ្នែកគណិតវិទ្យា

ទ្រឹស្តីពហុធា

Polynomials

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$$

រួមមាន ៖

មេរៀនសង្ខេប

លំហាត់គំរូ

លំហាត់អនុវត្តន៍

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លឹម ផល្គុន និង អ៊ឹង សំណាង

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក យ៉ង់ ឆារី
លោក លឹម ឆុន
លោក សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិត្តសិរ

ការិយកុំព្យូទរ័

លោក អ៊ឹង សំណាង

អារម្ភកថា

សួស្តីមិត្តអ្នកសិក្សាជាទីស្រឡាញ់រាប់អាន !
សៀវភៅ **ពហុធា** *ដែលលោកអ្នកកំពុងតែកាន់អាននេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបចំឡើងសម្រាប់ទុកជាឯកសារសម្រាប់អ្នកសិក្សាដែលមាន បំណងចង់យល់ដឹងអំពីមេរៀននេះឲ្យកាន់តែច្បាស់លាស់។*
នៅក្នុងសៀវភៅនេះ យើងខ្ញុំបានសង្ខេបមេរៀន អមជាមួយឧទាហរណ៍គំរូ ដែលអាចឲ្យអ្នកសិក្សាងាយយល់ និង ឆាប់ចងចាំ ហើយព្រមទាំងមានលំហាត់ អនុវត្តន៍សម្រាប់អ្នកសិក្សាហ្វឹកហាត់ដោះស្រាយដោយខ្លួនឯង។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅមួយក្បាលនេះ នឹងអាចចូលរួមផ្តល់នូវ គំនិត និង វិធីសាស្ត្រថ្មីៗក្នុងការដោះស្រាយលំហាត់លើផ្នែកស្វ៊ីតចំនួនពិត ចំពោះលោកអ្នកសិក្សាជាពុំខានឡើយ ។

ជាទីបញ្ចប់ខ្ញុំបាទសូមជូនពរចំពោះលោកអ្នក សូមមានសុខភាពល្អ មានប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និង ទទួលបានជោគជ័យក្នុងគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី24 មិថុនា ឆ្នាំ2012
អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាវជ្រាវ

លឹម ផល្គុន

Tel :017 768 246
Email: lim_phalkun@ymail.com
Website: www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី១

ពហុធា

១-និយមន័យ

អនុគមន៍មួយដែលមានទម្រង់ $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n$

ហៅថាពហុធាដឺក្រេទី n នៃមួយអថេរ x ។

ដែលចំនួន $a_0,a_1,a_2,....,a_n$ ជាមេគុណនៃពហុធា និង $a_n\neq 0$ ។

a_k ជាមេគុណមុខតួ x^k នៃពហុធា ($0\leq k\leq n$) ។

ឧទាហរណ៍ $P(x)=x^4+4x^3+3x^2+2x+1$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួន ។

២-ពហុធាពីរស្មើគ្នា

និយមន័យ ៖ ពហុធាពីរស្មើគ្នាលុះត្រាតែលេខមេគុណត្រូវគ្នាស្មើគ្នា ។

ឧបមាថា $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n$ ដែល $a_n\neq 0$

និង $Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+....+b_nx^n$ ដែល $b_n\neq 0$ ។

គេបាន $P(x)=Q(x)\Leftrightarrow a_k=b_k$ ដែល $k=0,1,2,....,n$ ។

ឧទាហរណ៍១ គេមានពហុធាពីរ

$$P(x) = x^4 + (2a-1)x^3 + bx^2 + (3c+1)x + d - 1$$

$$Q(x) = x^4 + bx^3 + (a-5)x^2 + (c-d)x + c + 7$$

ចូរកំណត់ចំនួនពិត a, b, c និង d ដើម្បីឲ្យ $P(x) = Q(x)$ គ្រប់ x ។

គេបាន $P(x) = Q(x)$ សមមូល $\begin{cases} 2a-1=b \\ b=a-5 \\ 3c+1=c-d \\ d-1=c+7 \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} 2a-b=1 \\ -a+b=-5 \\ -2c-d=1 \\ -c+d=8 \end{cases}$ នាំឲ្យ $a=-4$, $b=-9$, $c=-3$, $d=5$

ដូចនេះ $a=-4$, $b=-9$, $c=-3$, $d=5$ ។

ឧទាហរណ៍២ គេឲ្យពហុធា $P(x) = x^2 + px + q$

កំណត់ចំនួនពិត p និង q ដើម្បីឲ្យ $P^2(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$

គេមាន $P^2(x) = (x^2 + px + q)^2$

$$= x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2$$

គេទាញបាន $\begin{cases} 2p = 6 & (1) \\ p^2 + 2q = 11 & (2) \\ 2pq = 6 & (3) \\ q^2 = 1 & (4) \end{cases}$

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន $p = 3\ ;\ q = 1$

យក $p = 3\ ;\ q = 1$ ជួសក្នុង (3) និង (4) នោះសមីការផ្ទៀងផ្ទាត់ ។

ដូចនេះ $p = 3$ និង $q = 1$ ។

៣-វិធីបូក និង វិធីដកពហុធា

គេមានពហុធា $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_kx^k + ... + a_nx^n$

និង $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_kx^k + ... + b_mx^m$

គេបាន $P(x) + Q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_k + b_k)x^k + ...$

និង $P(x) - Q(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + ... + (a_k - b_k)x^k + ...$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យ $P(x) = 2x^2 + x - 7$ និង $Q(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$

គេបាន $P(x) + Q(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 4$

និង $P(x) - Q(x) = -x^3 + 6x^2 - 4x - 10$ ។

៤-វិធីគុណនៃពហុធា

គេមានពហុធា $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_kx^k + ... + a_nx^n$

និង $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_kx^k + ... + b_mx^m$ ។

គេបាន $P(x).Q(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + ... + a_nb_mx^{m+n}$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យពហុធា $P(x) = x^2 - 2x + 2$ និង $Q(x) = 2x^2 + 4x + 4$

$$\begin{aligned} P(x).Q(x) &= (x^2 - 2x + 2)(2x^2 + 4x + 4) \\ &= 2x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4x^3 - 8x^2 - 8x + 4x^2 + 8x + 8 \\ &= 2x^4 + 8 \end{aligned}$$

៥-អាល់កូរីតវិធីចែក

ឧបមាថាគេមានពហុធាពីរ $A(x)$ និង $B(x)$ ដែល $B(x) \neq 0$ ។

វិធីចែករវាងពហុធា $A(x)$ និង $B(x)$ គឺរកគូពហុធា $Q(x)$ និង $R(x)$ តែមួយគត់ដែល $A(x) = B(x).Q(x) + R(x)$ និង $\deg(R) < \deg(B)$ ។

ពហុធា $Q(x)$ ហៅថាផលចែក និង $R(x)$ ហៅថាសំណល់ ។

តាង $\deg(A)$ និង $\deg(B)$ ជាដឺក្រេនៃពហុធា $A(x)$ និង $B(x)$ រៀងគ្នា ។

-បើ $\deg(A) < \deg(B)$ នោះ $Q(x) = 0$ និង $R(x) = B(x)$ ។

-បើ $R(x) \equiv 0$ នោះ $A(x) = B(x)Q(x)$ ក្នុងករណីនេះគេថា $B(x)$ជាកត្តា

នៃ $B(x)$ ឬ $A(x)$ ជាពហុគុណនៃ $B(x)$ ឬ $B(x)$ចែកដាច់ $A(x)$

គេកំណត់សរសេរ $B(x) | A(x)$ ។

ឧទាហរណ៍១

វិធីចែករវាងពហុធា $A(x) = x^3 + x^2 - 1$ នឹង $B(x) = x^2 - x - 3$

ឲ្យផលចែក $Q(x) = x + 2$ និង សំណល់ $R(x) = 5x + 5$ ព្រោះ

$$\frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - x - 3} = x + 2 + \frac{5x + 5}{x^2 - x - 3}$$ ។

ឧទាហរណ៍២

គេឲ្យពហុធា $A(x) = x^4 + 4$ និង $B(x) = x^2 + 2x + 2$

ដោយ $A(x) = x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$

នោះគេបាន $B(x) | A(x)$ ។

៦-ទ្រឹស្តីបទសំណល់ (Remainder Theorem)

សំណល់នៃវិធីចែកនៃគ្រប់ពហុធា $P(x)$ នឹង $x-\alpha$ គឺ $P(\alpha)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ ៖

តាមអាល់កូរីតនៃវិធីចែកយើងបាន $P(x)=(x-\alpha)Q(x)+r$

យក $x=\alpha$ គេបាន $P(\alpha)=0\times Q(a)+r=r$ នោះ $r=P(\alpha)$ ។

ឧទាហរណ៍១

ចូររកសំណល់នៃវិធីចែករវាងពហុធា $P(x)=(x^3+3x^2-11x+4)^4$

នឹង $x-2$ ។

តាង r ជាសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង $x-2$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទសំណល់គេបាន $r=P(2)=(8+12-22+4)^4=16$

ដូចនេះសំណល់នៃវិធីចែកគឺ $r=4$ ។

ឧទាហរណ៍២ កំណត់ចំនួនពិត λ ដើម្បីឲ្យ $P(x)=x^5+\lambda x^3+2x^2+9$

ចែកនឹង $x-2$ ឲ្យសំណល់ 1 ។

គេបាន $P(2)=32+8\lambda+8+9=1$ នាំឲ្យ $\lambda=-6$ ។

៧-ទ្រឹស្តីបទ BEZOUT

ពហុធា $P(x)$ ចែកដាច់នឹងទ្វេធា $x-\alpha$ លុះត្រាតែ $P(\alpha)=0$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

មានពហុធា $Q(x)$ និងចំនួនថេរ r ដែល $P(x)=(x-\alpha)Q(x)+r$

បើ $x=\alpha$ នោះ $P(\alpha)=r$ ។

ដោយ $(x-a)|P(x)$ នោះ $r=0$ ។ ហេតុនេះ $P(\alpha)=0$ ។

ឧទាហរណ៍១ កំណត់ចំនួនពិត λ ដើម្បីឲ្យ $P(x)=x^3+\lambda x+16$

ចែកដាច់នឹង $x+4$ ។ គេបាន $x+4|P(x)\Leftrightarrow P(-4)=0$

$$-64-4\lambda+16=0 \text{ នាំឲ្យ } \lambda=-12 \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍២ កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដើម្បីឲ្យ $P(x)=x^n-12x-16$

ចែកដាច់នឹង $x-4$ ។

គេបាន $x-4|P(x)\Leftrightarrow P(4)=0$

$$4^n-48-16=0 \text{ នាំឲ្យ } n=3 \text{ ។}$$

៨-ទ្រឹស្តីបទ

បើពហុធា $\mathbf{P(x)}$ ចែកដាច់នឹងពហុធា $\mathbf{Q(x)}$ នោះគ្រប់ឫសនៃ $\mathbf{Q(x)}$

ជាឫសរបស់ $\mathbf{P(x)}$ ។

ឧទាហរណ៍ កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{n}$ និងចំនួនពិត λ ដើម្បីឲ្យពហុធា

$\mathbf{P(x) = x^n + \lambda x^3 + 48x - 64}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{Q(x) = x^2 - 6x + 8}$ ។

គេមាន $\mathbf{Q(x) = x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4) = 0}$

នោះ $\mathbf{x_1 = 2}$ ឬ $\mathbf{x_2 = 4}$ ។

គេបាន $\mathbf{Q(x) | P(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(2) = 0 \\ P(4) = 0 \end{cases}}$ ឬ $\mathbf{\begin{cases} 2^n + 8\lambda + 32 = 0 & (1) \\ 4^n + 64\lambda + 128 = 0 & (2) \end{cases}}$

គុណសមីការ (1) នឹង $\mathbf{8}$ គេបាន $\mathbf{8 \times 2^n + 64\lambda + 256 = 0 \ \ (3)}$

ដកសមីការ (2) និង (3) គេបាន $\mathbf{4^n - 8 \times 2^n - 128 = 0}$

ឬ $\mathbf{(2^n - 4)^2 - 144 = 0}$ នាំឲ្យ $\mathbf{2^n - 4 = 12}$ គេទាញ $\mathbf{n = 4}$

តាម (1) គេបាន $\mathbf{2^4 + 8\lambda + 32 = 0}$ នាំឲ្យ $\mathbf{\lambda = -6}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{n = 4}$ និង $\mathbf{\lambda = -6}$ ។

៩-ទ្រឹស្តីបទ

បើពហុធា $\mathbf{P(x)}$ ចែកដាច់នឹងពហុធាពីរ $\mathbf{R(x)}$ និង $\mathbf{Q(x)}$ ដែល $\mathbf{R(x)}$ និង $\mathbf{Q(x)}$ ជាពហុធាបឋមរវាងគ្នានោះ $\mathbf{P(x)}$ចែកដាច់នឹង $\mathbf{P(x).Q(x)}$ ។

ឧទាហរណ៍

រកពហុធា $\mathbf{P(x)}$ មានដឺក្រេទីបួនបើគេដឹងថា $\mathbf{(x^2-4x+8)\,|\,P(x)}$ និង $\mathbf{(x^2+4x+8)\,|\,P(x)}$ ហើយ $\mathbf{P(x)}$ ចែកនឹង $\mathbf{x-1}$ ឲ្យសំណល់ $\mathbf{65}$ ។

ដោយ $\mathbf{P(x)}$ ជាពហុធាមានដឺក្រេទីបួន ហើយ $\mathbf{P(x)}$ ចែកដាច់នឹងពហុធា $\mathbf{x^2-4x+8}$ និង $\mathbf{x^2+4x+8}$ ដែល $\mathbf{GCD(x^2-4x+8,\ x^2+4x+8)=1}$

នោះ $\mathbf{P(x)=a\,(x^2-4x+8)(x^2+4x+8)}$ ដែល $\mathbf{a\neq 0}$

ដោយ$\mathbf{P(x)}$ ចែកនឹង $\mathbf{x-1}$ ឲ្យសំណល់ $\mathbf{65}$ នោះ $\mathbf{P(1)=65}$

គេបាន $\mathbf{a\,(1-4+8)(1+4+8)=65}$ នាំឲ្យ $\mathbf{a=1}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{P(x)=(x^2-4x+8)(x^2+4x+8)=x^4+64}$ ។

១០-ទ្រឹស្តីបទ

បើ $P(x)$ និង $Q(x)$ ជាពហុធាពីរមានដឺក្រេតូចជាង ឬ ស្មើ n ហើយ

ដោយដឹងថា $P(x_k) = Q(x_k)$, $k = 1, 2, 3, 4, ..., m$

ដែល $x_1, x_2, ..., x_m$ ជាចំនួនខុសគ្នា និង $m > n$ នោះ $P(x) = Q(x)$

ចំពោះគ្រប់ x ។

ឧទាហរណ៍ ចូររកពហុធាដឺក្រេទីបួន $P(x)$ មួយដោយដឹងថា ៖

$P(0) = 1$, $P(-1) = P(1) = 2$, $P(2) = 17$ និង $P(3) = 82$

យើងពិនិត្យពហុធា $Q(x) = x^4 + 1$ ។

គេមាន $P(x_k) = Q(x_k)$ គ្រប់ $k = 1, 2, 3, 4, 5$

ដែល $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $x_5 = 3$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទខាងលើគេទាញបាន $P(x) = Q(x) = x^4 + 1$

ពីព្រោះ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួន គឺ $n = 4 < m = 5$ ។

១១-ទ្រឹស្តីបទ

បើ $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n$ ដែល $a_n\neq 0$ ជាពហុធាដឺក្រេទី $n>0$ មាន n ឬស $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,....,\alpha_n$ នោះគេអាចដាក់វាជាផលគុណកត្តាបានតែមួយបែបគត់គឺ ៖

$P(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)....(x-\alpha_n)$ ។

ឧទាហរណ៍១ គេឲ្យពហុធា $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ ។

ចូររកលេខមេគុណ a,b,c,d ដោយដឹងថា

និង $f(4)=33$ ។

តាងពហុធា $P(x)=f(x)-(2x+1)$

ចំពោះ $k=1,2,3$ គេបាន $P(k)=f(k)-(2k+1)=0$

(ព្រោះតាមសម្មតិកម្ម $f(k)=2k+1$ ចំពោះតម្លៃ $k=1,2,3$)

គេទាញបាន $x=1\ ,\ 2\ ,\ 3$ ជាឫសនៃពហុធា $P(x)$ ។

ដោយ $f(x)$ជាពហុធាដឺក្រេទីបួនមានលេខមេគុណមុខតួx^4ស្មើ 1 នោះ

គេទាញ$P(x)$ជាពហុធាដឺក្រេទីបួនមានលេខមេគុណមុខតួx^4ស្មើ 1ដែរ

ហេតុនេះពហុធា $P(x)$ អាចសរសេរ ៖

$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-\alpha)$ ដែលαជាឫសមួយទៀតនៃ $P(x)$

គេបាន $f(x)=P(x)+2x+1=(x-1)(x-2)(x-3)(x-\alpha)+2x+1$

ចំពោះ $x=4$ គេបាន $f(4)=6(4-\alpha)+9=33$ នោះ $\alpha=0$

គេបាន $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)+2x+1$

ឬ $f(x)=x^4-6x^3+11x^2-4x+1$

ដូចនេះ $a=-6$, $b=11$, $c=-4$, $d=1$ ។

ឧទាហរណ៍២ គេឲ្យពហុធា $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

គេដឹងថា $f(k)=k^2$ គ្រប់ $k=1,3,5$ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $f(-4)+f(10)$ និង $f(-9)+f(15)$?

តាងពហុធា $P(x)=f(x)-x^2$

ចំពោះ $k=1,3,5$ គេបាន $P(k)=f(k)-k^2=0$

(ព្រោះតាមសម្មតិកម្ម $f(k)=k^2$ ចំពោះតម្លៃ $k=1,3,5$)

គេទាញបាន $x=1$, 3 , 5 ជាឫសនៃពហុធា $P(x)$ ។

ដោយ $f(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួនមានលេខមេគុណមុខតួ x^4 ស្មើ 1 នោះ

គេទាញ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួនមានលេខមេគុណមុខតួ x^4 ស្មើ 1 ដែរ

ហេតុនេះពហុធា $P(x)$ អាចសរសេរ ៖

$P(x)=(x-1)(x-3)(x-5)(x-\alpha)$ ដែល α ជាឫសមួយទៀតនៃ $P(x)$

គេបាន $f(x)=P(x)+x^2=(x-1)(x-3)(x-5)(x-\alpha)+x^2$

ចំពោះ $x=-4$ គេបាន $f(-4)=315(4+\alpha)+16$

ចំពោះ $x=10$ គេបាន $f(10)=315(10-\alpha)+100$

នោះ $f(-4)+f(10)=315(4+\alpha)+16+315(10-\alpha)+100=4526$

ចំពោះ $x=-9$ គេបាន $f(-9)=1680(9+\alpha)+81$

ចំពោះ $x=15$ គេបាន $f(15)=1680(15-\alpha)+225$

នោះ $f(-6)+f(15)=1680(9+\alpha)+81+1680(15-\alpha)+225=40626$

ដូចនេះ $f(-4)+f(10)=4526$ និង $f(-6)+f(15)=40626$ ។

១២-ទ្រឹស្តីបទវ្យែត

បើ $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n$ ដែល $a_n\neq 0$ ជាពហុធា

ដឺក្រេទី $n>0$ មាន n ឬស $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,....,\alpha_n$ នោះគេបាន ៖

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=-\frac{a_{n-1}}{a_n}\ ,\ \sum_{1\le i<j\le n}\alpha_i\alpha_j=\frac{a_{n-2}}{a_n},....,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3.....\alpha_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

ឧទាហរណ៍១ បើ α និង β ជាឬសនៃ $P(x)=ax^2+bx+c\ ,\ a\neq 0$

នោះគេបាន $\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}\\[2ex] \alpha\beta=\dfrac{c}{a}\end{cases}$

ឧទាហរណ៍២ បើ α , β និង γ ជាឬសនៃពហុធា

$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ ,\ a\neq 0$ នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}\\[2ex] \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=\dfrac{c}{a}\\[2ex] \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}\end{cases}$$

១៣-អាំងទែប៉ូឡាស្យុងឡាក្រង់

គេឲ្យ n ចំណុច $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots\ldots, (x_n, y_n)$ នោះមានពហុធា $P(x)$ តែមួយគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $P(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ហើយរូបមន្តអ៊ិចព្លីស៊ីតរបស់វាគឺ $P(x) = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i \prod_{1\le j\le n\,,\, j\ne i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right]$ ។

ឧទាហរណ៍ រកពហុធា $P(x)$ តែមួយគត់ដែលកាត់តាមបីចំណុច

$M_1(1,3)$, $M_2(2\,,\,4)$ និង $M_3(4,12)$ ។

តាមរូបមន្តគេបាន ៖

$$P(x) = \sum_{i=1}^{3}\left[y_i \prod_{\substack{1\le j\le 3\\ j\ne i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right]$$

$$= y_1 . \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} . \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} + y_2 . \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} . \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} + y_3 . \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} . \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

$$= 3 . \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} + 4 . \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} + 12 . \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)}$$

$$= (x^2 - 6x + 8) - 2(x^2 - 5x + 4) + 2(x^2 - 3x + 2)$$

$$= x^2 - 2x + 4$$

១៤-ការអនុវត្តន៍នៃការគណនា

ឧបមាថាគេមានពហុធាដឺក្រេទី n ៖

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$$ ដែល $a_n\neq 0$ ។

ក/ដេរីវេនៃពហុធា ៖

ដេរីវេនៃពហុធានេះកំណត់ដោយ ៖

$$P'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+...+2a_2x+a_1$$

ខ/អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ ៖

អាំងតេក្រាលមិនកំណត់នៃពហុធានេះគឺ ៖

$$\int P(x).dx=\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+...+\frac{a_1}{2}x^2+a_0x+C$$

គ/ករណីដែលពហុធា $P(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$ នោះ

គេបាន $P'(x)=P(x)\times\left(\frac{1}{x-\alpha_1}+\frac{1}{x-\alpha_2}+...+\frac{1}{x-\alpha_n}\right)$ ។

ឃ/ករណីដែលពហុធា $P(x)=a_n(x-\alpha_1)^{m1}(x-\alpha_2)^{m2}...(x-\alpha_k)^{mk}$

ដែល $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=n$ នោះគេបាន ៖

$$P'(x)=P(x)\times\left(\frac{m_1}{x-\alpha_1}+\frac{m_2}{x-\alpha_2}+...+\frac{m_k}{x-\alpha_k}\right)$$ ។

ឃ/ឫសត្រួត ៖

បើមាន $m\in IN$ ដែល $P(x)=(x-\alpha)^m Q(x)$ និង $Q(\alpha)\neq 0$

នោះ α ជាឫសត្រួត m ដងនៃ $P(x)$ ។

ចំនួន α ជាឫសត្រួត m ដងនៃ $P(x)$ លុះត្រាតែ ៖

$$P(\alpha)=0\,,P'(\alpha)=0\,,P''(\alpha)=0\,,....,P^{(m-1)}(\alpha)=0$$

និង $P^{(m)}(\alpha)\neq 0$ ។

១៥-ទ្រឹស្តីបទ

ឧបមាថាគេមានពហុធា $P(x)$ មួយ ។

បើ $(x-\alpha)^k\,|\,P(x)$ នោះ $(x-\alpha)^{k-1}\,|\,P'(x)$ ដែល $k\in IN$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ ៖

ដោយ $(x-\alpha)^k\,|\,P(x)$ នាំឲ្យមានពហុធា $Q(x)$ ដែល ៖

$$P(x)=(x-\alpha)^k Q(x)$$

គេបាន $P'(x)=k(x-\alpha)^{k-1}Q(x)+(x-\alpha)^{k}Q'(x)$

ទំនាក់ទំនងនេះគេទាញបាន $(x-\alpha)^{k-1}\,|\,P'(x)$ ។

ឧទាហរណ៍១ គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^4+2x^3+3x^2+5x-1$

តាង a,b,c,d ជាឫសរបស់ $P(x)$ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $S=\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{b+2}+\dfrac{1}{c+2}+\dfrac{1}{d+2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ a,b,c,d ជាឫសរបស់ $P(x)$នោះគេអាចសរសេរ ៖

$$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

គេបាន $\dfrac{P'(x)}{P(x)}=\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}+\dfrac{1}{x-d}$

យក $x=-2$ នោះ $\dfrac{P'(-2)}{P(-2)}=-(\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{b+2}+\dfrac{1}{c+2}+\dfrac{1}{d+2})=-S$

គេទាញ $S=-\dfrac{P'(-2)}{P(-2)}$ តែ $P(-2)=16-16+12-10-1=1$

$P'(x)=4x^3+6x^2+6x+5$ នោះ $P'(-2)=-15$ ។

ដូចនេះ $S=15$ ។

ឧទាហរណ៍២ ចូររកពហុធា $P(x)$ មួយមានដឺក្រេទីប្រាំដោយដឹងថា $P(x)$ ចែកនឹង $(x-1)^3$ ឲ្យសំណល់ -1 ហើយ $P(x)$ ចែកនឹង $(x+1)^3$ ឲ្យសំណល់ 1 ។

តាមបម្រាប់គេបាន $(x-1)^3 \mid P(x)+1$ នោះ $(x-1)^2 \mid P'(x) \quad (1)$

ហើយ $(x+1)^3 \mid P(x)-1$ នោះ $(x+1)^2 \mid P'(x) \quad (2)$

តាម(1) និង (2) គេទាញ $(x+1)^2(x-1)^2 \mid P'(x)$

ដោយ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីប្រាំនោះ $P'(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួន

ហេតុនេះ $P'(x)=a(x+1)^2(x-1)^2 = a(x^4-2x^2+1)$

គេទាញ $P(x)=a\int (x^4-2x^2+1).dx = a(\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x)+C$

គេមាន $P(1)=-1$ និង $P(1)=1$ នោះ $\begin{cases} \frac{8}{15}a+C=-1 \\ -\frac{8}{15}a+C=1 \end{cases}$

គេទាញបាន $a=-\frac{15}{8}$; $C=0$

ដូចនេះ $P(x)=-\frac{15}{8}(\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x)=-\frac{3}{8}x^5+\frac{5}{4}x^3-\frac{15}{8}x$ ។

១៦-ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម

ឧបមាថា $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n$ ដែល $a_n\neq 0$

និង $a_k\in IR, k=0,1,2,...,n$ ។

បើមានពីរចំនួនពិត α និង β ដែល $P(\alpha)$ និង $P(\beta)$ មានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា

នោះយ៉ាងហោចណាស់មានចំនួនពិត c នៃចន្លោះចំនួនពិត α និង β

ដែល $P(c)=0$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

ដែល a,b,c,d ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ $|a+c|>|1+b+d|$ ។

ចូរស្រាយថាសមីការ $P(x)$ មានឬសមួយយ៉ាងតិចជាចំនួនពិតនៅក្នុង

ចន្លោះ -1 និង 1 ។

គេមាន $P(-1)=1-a+b-c+d=(1+b+d)-(a+c)$

និង $P(1)=1+a+b+c+d=(1+b+d)+(a+c)$

គេបាន $P(-1).P(1)=(1+b+d)^2-(a+c)^2<0$

ដូចនេះសមីការមានឬសយ៉ាងតិចមួយនៅចន្លោះ -1 និង 1 ។

១៧-ទ្រឹស្តីបទរ៉ូល

ឧបមាថាគេមានពហុធា $P(x)$ មួយ ។ចំពោះគ្រប់ចំនួន $\alpha \neq \beta$ ដែល $P(\alpha) = P(\beta) = 0$ នោះមានចំនួន c នៅចន្លោះ α និង β ដែល $P'(c) = 0$ ។

ឧទាហរណ៍ គេតាង r និង R ជាកាំនៃរង្វង់ចារឹកក្នុង និងចារឹកក្រៅត្រីកោណមួយ ហើយ p ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយថា $9r(4R+r) \leq 3p^2 \leq (4R+r)^2$ ។

តាង a , b ,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណនោះគេមានទំនាក់ទំនងឆ្លុះ

$$\begin{cases} a+b+c = 2p \\ ab+bc+ca = p^2+r^2+4rR \\ abc = 4pRr \end{cases}$$ នោះ a , b , c ជាឬសពហុធា ៖

$$x^3 - 2px^2 + (p^2+r^2+4rR)x - 4pRr = 0 \quad (1)$$

តាង r_a , r_b , r_c ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំ A, B, C នៃត្រីកោណ ABC

គេមាន $a = \dfrac{p(r_a - r)}{r_a}$, $b = \dfrac{p(r_b - r)}{r_b}$, $c = \dfrac{p(r_c - r)}{r_c}$

យក $x=\dfrac{p(y-r)}{y}$ ជួសក្នុងសមីការ (1) គេបាន ៖

$$y^3-(4R+r)y^2+p^2y-p^2r=0 \quad (2)$$

មានន័យថា r_a , r_b , r_c ជាឬសមីការ (2) ។

តាងពហុធា $P(x)=x^3-2px^2+(p^2+r^2+4rR)x-4pRr$

និង $Q(y)=y^3-(4R+r)y^2+p^2y-p^2r$ ។

គេបាន $P'(x)=3x^2-4px+p^2+r^2+4rR$

និង $Q'(y)=3y^2-2(4R+r)y+p^2$

តាមទ្រឹស្តីបទរ៉ូលគេទាញបានសមីការ $P'(x)=0$ និង $Q'(y)=0$

សុទ្ធតែជាសមីការមានឬស ។

ដោយឌីសគ្រីមីណង់សមីការគឺ ៖

$$\Delta'_1=p^2-3r(4R+r) \quad \text{និង} \quad \Delta'_2=2(4R+r)^2-3p^2$$

ដោយ $\Delta'_1\geq 0$ និង $\Delta'_2\geq 0$ នោះគេទាញបានវិសមភាព ៖

$$9r(4R+r)\leq 3p^2\leq (4R+r)^2$$ ពិត ។

១៨-ទ្រឹស្តីបទ

បើ $P(x)$ ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនពិត និង មានដឺក្រេជាចំនួនសេសនោះយ៉ាងតិចវាមានឬសមួយជាចំនួនពិត ។

១៩-ទ្រឹស្តីបទ

ឧបមាថា $P(x)$ ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនពិត ។

បើចំនួនកុំផ្លិច $x = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in IR$ ជាឬសនៃ $P(x)$ នោះចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ $\bar{x} = \alpha - i\beta$ ក៏ជាឬសនៃ $P(x)$ ដែរ ។

២០-ទ្រឹស្តីបទ

ឧបមាថា $P(x)$ ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនសនិទាន ។

បើចំនួនកុំផ្លិច $a + b\sqrt{c}$ ជាឬសនៃ $P(x)$ នោះចំនួន $a - b\sqrt{c}$ ក៏ជាឬសនៃ $P(x)$ ដែរ ។

a និង b ជាចំនួនសនិទាន និង $\sqrt{c}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

២១-ទ្រឹស្តីបទ

ឧបមាថា $\mathbf{P(x)}$ ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ និង $\alpha \in \mathbf{Z}$

$\mathbf{P(\alpha) = 0}$ នោះ $\alpha \,|\, \mathbf{P(0)}$ ។

២២-ឧបមាថា $\mathbf{P(x)}$ ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ និង $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ ដែល $\alpha \neq \beta$ នោះគេបាន $\alpha - \beta \,|\, \mathbf{P(\alpha) - P(\beta)}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

តាង $\mathbf{P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k}$

គេបាន $\mathbf{P(\alpha) - P(\beta) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\alpha^k - \beta^k)}$

ដោយ $\alpha^k - \beta^k = (\alpha - \beta)(\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}\beta + ... + \beta^{k-1})$

នោះគេទាញបាន $(\alpha - \beta) \,|\, \sum_{k=0}^{n} \mathbf{a_k}(\alpha^k - \beta^k)$ ។

ឧទាហរណ៍ តើមានពហុធា $\mathbf{P(x)}$ មានមេគុណជាចំនួនគត់ដែល $\mathbf{P(2) = 7}$ និង $\mathbf{P(5) = 15}$ ឬទេ ? ដោយ $\mathbf{P(5) - P(2) = 8}$ ចែកមិនដាច់នឹង $\mathbf{5 - 2 = 3}$ នោះគ្មានពហុធាបំពេញលក្ខខណ្ឌនេះទេ ។

២៣-សមភាពញូតុន

យក $\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n$ ជាអថេរ ។ ចំពោះ $k\geq 1$យើងតាង

$p_k(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_k)$ ជាផលបូកស្វ័យគុណ k កំណត់ដោយ ៖

$$p_k(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^k=\alpha_1^k+\alpha_2^k+...+\alpha_n^k$$

ហើយចំពោះគ្រប់ $k\geq 0$ តាង $e_k(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ ជាធាតុឆ្លុះពហុធាដែលជាផលបូកនៃគ្រប់ផលគុណខុសៗគ្នានៃអថេរខុសគ្នាៗ ដែលកំណត់ដោយ

$$e_0(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=1$$

$$e_1(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$$

$$e_2(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=\sum_{1\leq i<j\leq n}\alpha_i\alpha_j$$

$$e_n(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=\alpha_1.\alpha_2...\alpha_n$$

$$-----------------$$

$e_k(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=0$ ចំពោះ $k>n$ នោះសមភាពញូតុនកំណត់ដោយ៖

$$ke_k(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}e_{k-i}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n).p_i(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$$

២៤-ស៊េរីម៉ាក់ឡូរាំងចំពោះអនុគមន៍ពហុធា

ឧបមាថាគេមានពហុធា $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$

អនុគមន៍ពហុធានេះអាចសរសេរជាស៊េរីម៉ាក់ឡូរាំងដូចខាងក្រោម ៖

$$P(x)=P(0)+\frac{x}{1!}P'(0)+\frac{x^2}{2!}P''(0)+....+\frac{x^n}{n!}P^{(n)}(0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.P^{(k)}(0)$$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

តាង $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$

គេមាន $P'(0)=a_1$, $P''(0)=2a_2$, $P^{(3)}(0)=6a_3, ..., P^{(k)}(0)=k!a_k$

គេទាញ $a_1=\frac{P'(0)}{1!}$, $a_2=\frac{P''(0)}{2!},...,\ a_k=\frac{P^{(k)}(0)}{k!}$

ដូចនេះ $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ អាចសរសេរជា ៖

$$P(x)=P(0)+\frac{x}{1!}P'(0)+\frac{x^2}{2!}P''(0)+....+\frac{x^n}{n!}P^{(n)}(0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.P^{(k)}(0)$$

២៥-ស៊េរីតៃល័រចំពោះអនុគមន៍ពហុធា

ឧបមាថាគេមានពហុធា $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$

អនុគមន៍ពហុធានេះអាចសរសេរជាស៊េរីតៃល័រដូចខាងក្រោម ៖

$$P(x)=P(\alpha)+\frac{x-\alpha}{1!}P'(\alpha)+\frac{(x-\alpha)^2}{2!}P''(\alpha)+...+\frac{(x-\alpha)^n}{n!}P^{(n)}(\alpha)$$

ឬ $P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-\alpha)^k}{k!}P^{(k)}(\alpha)$ ។

តាងពហុធា $Q(x)=P(x+\alpha)$ គេបាន

$$Q(0)=P(\alpha)\ ,\ Q'(0)=P'(\alpha),Q''(0)=P''(\alpha),....,Q^{(n)}(0)=P^{(n)}(\alpha)$$

តាមស៊េរីម៉ាក់ឡូរ៉ាំងគេបាន ៖

$$Q(x)=Q(0)+\frac{x}{1!}Q'(0)+\frac{x^2}{2!}Q''(0)+...+\frac{x^n}{n!}Q^{(n)}(0)\quad (*)$$

ជំនួស x ដោយ $x-\alpha$ និង $Q(x-\alpha)=P(x)$ ក្នុង $(*)$ គេបាន ៖

$$P(x)=P(\alpha)+\frac{x-\alpha}{1!}P'(\alpha)+\frac{(x-\alpha)^2}{2!}P''(\alpha)+...+\frac{(x-\alpha)^n}{n!}P^{(n)}(\alpha)$$

ឬ $P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-\alpha)^k}{k!}P^{(k)}(\alpha)$ ។

ឧទាហរណ៍ គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^7-3x^6+5x+2$ ។

ចូររកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង $(x-1)^3$ ។

គេមាន $P(x)=x^7-3x^6+5x+2$ នោះ $P(1)=5$

$P'(x)=7x^6-18x^5+5$ នោះ $P'(1)=-6$

$P''(x)=42x^5-90x^4$ នោះ $P''(1)=-48$

$P^{(3)}(x)=210x^4-360x^3$ នោះ $P^{(3)}(1)=210-360=-150$

តាមស៊េរីតៃល័រគេអាចសរសេរ ៖

$$P(x)=P(1)+\frac{x-1}{1!}P'(1)+\frac{(x-1)^2}{2!}P''(1)+\frac{(x-1)^3}{3!}P^{(3)}(1)+...+\frac{(x-1)^7}{7!}P^{(7)}(1)$$

សមភាពនេះបញ្ជាក់ថា $P(x)$ ចែកនឹង $(x-1)^3$ ឲ្យអនុគមន៍សំណល់

$$R(x)=P(1)+\frac{x-1}{1!}P'(1)+\frac{(x-1)^2}{2!}P''(1)$$

$$=5-6(x-1)-24(x-1)^2$$

$$=-24x^2+42x-13$$

ដូចនេះអនុគមន៍សំណល់ដែលត្រូវរកគឺ $R(x)=-24x^2+42x-13$ ។

ជំពូកទី២

លំហាត់មានដំណោះស្រាយ

(Problems with Solutions)

លំហាត់ទី១

កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{n}$ និងចំនួនពិត λ ដើម្បីឲ្យពហុធា

$\mathbf{P(x) = x^n - 12x^3 + \lambda x - (2\lambda + 81)}$ ចែកដាច់នឹងពហុធា

$\mathbf{Q(x) = x^2 - 12x + 27}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{n}$ និងចំនួនពិត λ

គេមាន $\mathbf{Q(x) = x^2 - 12x + 27 = (x-3)(x-9) = 0}$

នោះ $\mathbf{x_1 = 3}$ ឬ $\mathbf{x_2 = 9}$ ។

គេបាន $\mathbf{Q(x) \mid P(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(3) = 0 \\ P(9) = 0 \end{cases}}$ ឬ $\mathbf{\begin{cases} 3^n + \lambda - 405 = 0 & (1) \\ 9^n + 7\lambda - 8829 = 0 & (2) \end{cases}}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះគេបាន $\mathbf{n = 4}$, $\mathbf{\lambda = 324}$ ។

លំហាត់ទី២

កំណត់ចំនួនពិត a និងចំនួនពិត b ដើម្បីឲ្យពហុធា

$P(x)=x^6-3x^4+ax^3+bx^2-ax+1$ ចែកដាច់នឹងពហុធា $(x-1)^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនពិត a និងចំនួនពិត b

បើ $(x-1)^2 \mid P(x)$ នោះ $(x-1) \mid P'(x)$ គេទាញបាន $\begin{cases} P(1)=0 \\ P'(1)=0 \end{cases}$

ដោយ $P(1)=1-3+a+b-a+1=b-1=0$ នោះ $b=1$

ហើយ $P'(x)=6x^5-12x^3+3ax^2+2bx-a$

នោះ $P'(1)=6-12+3a+2b-a=2a+2b-6=0$

គេទាញ $a=3-b=3-1=2$ ។

ដូចនេះ $a=2$ និង $b=1$ ។

លំហាត់ទី៣

កំណត់ចំនួនពិត a និងចំនួនពិត b ដើម្បីឲ្យពហុធា

$P(x) = ax^5 + bx + 1$ ចែកដាច់នឹងពហុធា $Q(x) = x^2 - 2x - 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនពិត a និងចំនួនពិត b

តាង α និង β ជាឬសនៃពហុធា $Q(x) = x^2 - 2x - 1$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេមាន $\alpha + \beta = 2$ និង $\alpha\beta = -1$ ។

ដើម្បីឲ្យ $Q(x) | P(x)$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} P(\alpha) = 0 \\ P(\beta) = 0 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} a\alpha^5 + b\alpha + 1 = 0 & (1) \\ a\beta^5 + b\beta + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

គុណសមីការ (1) នឹង β ហើយសមីការ (2) នឹង $-\alpha$ រួចបូកគ្នាគេបាន

$a(\alpha^5\beta - \alpha\beta^5) - (\alpha - \beta) = 0$ នាំឲ្យ $a = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha\beta(\alpha^4 - \beta^4)}$

ឬ $a = \dfrac{1}{\alpha\beta(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)} = \dfrac{1}{\alpha\beta(\alpha + \beta)[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta]}$

ដោយ $\alpha+\beta=2$ និង $\alpha\beta=-1$ នោះ $a=\frac{1}{(-1)(2)(2^2+2)}=-\frac{1}{12}$

ម្យ៉ាងទៀតដកសមីការ (1) និង (2) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$a(\alpha^5-\beta^5)+b(\alpha-\beta)=0$ នោះ $b=-\frac{\alpha^5-\beta^5}{\alpha-\beta}\times a$

ឬ $b=-(\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4)a$

ឬ $b=\frac{[(\alpha^4+\beta^4)+\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^2\beta^2]}{12}$ ព្រោះ $a=-\frac{1}{12}$

ដោយ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4+2=6$

ហើយ $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=36-2=34$

គេបាន $b=\frac{34-6+1}{12}=\frac{29}{12}$ ។

ដូចនេះ $a=-\frac{1}{12}$, $b=\frac{29}{12}$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឲ្យពហុធាដឺក្រេទីបី $P(x)$ មួយ ។ គេដឹងថា $P(x)$ ចែកនឹង $x-2$

ឲ្យសំណល់ 2 និង $P(x)$ ចែកនឹង $x+2$ ឲ្យសំណល់ -2 ។

ក/រកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង x^2-4 ។

ខ/គេដឹងថា $P(0)=P(1)=-8$ ។ រក $P(x)$?

ដំណោះស្រាយ

ក/រកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង x^2-4

តាមបំរាប់គេបាន $\begin{cases} \dfrac{P(x)}{x-2} = Q_1(x) + \dfrac{2}{x-2} & (1) \\ \dfrac{P(x)}{x+2} = Q_2(x) + \dfrac{-2}{x+2} & (2) \end{cases}$

ធ្វើផលសងរវាងសមីការ (1) និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2})P(x) = Q_1(x) - Q_2(x) + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}$$

ឬ $\dfrac{4}{x^2-4}P(x) = Q_1(x) - Q_2(x) + \dfrac{4x}{x^2-4}$

ឬ $\dfrac{P(x)}{x^2-4} = Q(x) + \dfrac{x}{x^2-4}$ (3) ដែល $Q(x) = \dfrac{Q_1(x)-Q_2(x)}{4}$ ។

តាមទំនាក់ទំនង (3) គេទាញបានថាសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$

នឹង x^2-4 គឺ $R(x)=x$ ។

ខ-រកពហុធា $P(x)$ ៖

តាម (3) គេសរសេរ $P(x)=(x^2-4)Q(x)+x$

ដោយ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបីនោះ $Q(x)$ ត្រូវតែជាពហុធាដឺក្រេទី១

ហេតុនេះគេអាចតាង $R(x)=ax+b$

គេសរសេរ $P(x)=(x^2-4)(ax+b)+x$

ចំពោះ $x=0$ គេបាន $P(0)=-4b=-8$ នោះ $b=2$ ។

ចំពោះ $x=1$ គេបាន $P(1)=-3(a+b)+1=-8$

គេទាញ $a=3-b=3-2=1$ ។

ដូចនេះ $P(x)=(x^2-4)(x+2)+x=x^3+2x^2-3x-8$ ។

លំហាត់ទី៥

គេឲ្យពហុធាដឺក្រេទីបី $P(x)$ មួយ ។

គេដឹងថា $P(x+1)-P(x)=x^2$ និង $P(0)=0$ ។

ក/ចូររកពហុធា $P(x)$ ។

ខ/ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរស្រាយថា ៖

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ដំណោះស្រាយ

ក/ រកពហុធា $P(x)$ ៖

តាង $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

គេបាន $P(x+1)=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

$$P(x+1)=P(x)+3ax^2+(3a+2b)x+a+b+c$$

ឬ $P(x+1)-P(x)=3ax^2+(3a+2b)x+a+b+c \quad (1)$

តាមសម្មតិកម្ម $P(x+1)-P(x)=x^2 \quad (2)$

ដោយប្រៀបធៀបសមភាព (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$ នាំឲ្យ $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$

គេបាន $P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + d$ ដោយ $P(0) = 0$ នោះ $d = 0$

ដូចនេះ $P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x = \frac{x(x-1)(2x-1)}{6}$ ។

ខ/ ស្រាយថា $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

គេមាន $P(x+1) - P(x) = x^2$ នោះ $\sum_{k=1}^{n} \left[P(k+1) - P(k)\right] = \sum_{k=1}^{n} k^2$

គេទាញ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = P(n+1) - P(1)$ ដោយ $P(x) = \frac{x(x-1)(2x-1)}{6}$

នោះ $P(1) = 0$ និង $P(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ។

លំហាត់ទី៦

គេឲ្យពហុធាដឺក្រេទីបី $P(x)$ មួយ ។ គេដឹងថា $2P(x)-P(x+1)=x^3$

ក/ចូររកពហុធា $P(x)$ ។

ខ/ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរគណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{1^3}{2}+\frac{2^3}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+....+\frac{n^3}{2^n}$$

ដំណោះស្រាយ

ក/រកពហុធា $P(x)$ ៖

តាង $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

នោះ $P(x+1)=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

គេបាន ៖

$$2P(x)-P(x+1)=ax^3+(b-3a)x^2+(c-2b-3a)x+d-a-b-c$$

ដោយ $2P(x)-P(x+1)=x^3$ នោះ $\begin{cases} a=1 \\ b-3a=0 \\ c-2b-3a=0 \\ d-a-b-c=0 \end{cases}$

គេទាញបាន $a=1$, $b=3$, $c=9$, $d=13$

ដូចនេះ $P(x)=x^3+3x^2+9x+13$ ។

ខ/ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរគណនាផលបូក ៖

$$S_n=\frac{1^3}{2}+\frac{2^3}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+....+\frac{n^3}{2^n}$$

គេមាន $2P(x)-P(x+1)=x^3$

យក $x=k$ នោះ $2P(k)-P(k+1)=k^3$ ដែល $k=1,2,3,...$

ចែកសមភាពនឹង 2^{k+1} នោះ $\frac{P(k)}{2^k}-\frac{P(k+1)}{2^{k+1}}=\frac{k^3}{2^{k+1}}$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{P(k)}{2^k}-\frac{P(k+1)}{2^{k+1}}\right]=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{2^k}=\frac{1}{2}S_n$

ហេតុនេះ $S_n=2\left[\frac{P(1)}{2}-\frac{P(n+1)}{2^{n+1}}\right]=P(1)-\frac{P(n+1)}{2^n}$

តែ $P(1)=26$, $P(n+1)=(n+1)^3+3(n+1)^2+9(n+1)+13$

$$=n^3+6n^2+18n+26$$

ដូចនេះ $S_n=26-\frac{n^3+6n^2+18n+26}{2^n}$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឲ្យពហុធាដឺក្រេទីបី $P(x)$ មួយ ។

គេដឹងថា $P(x)-3$ ចែកដាច់នឹង $(x-3)^2$ និង $P(x)+3$ ចែកដាច់នឹង

$(x+3)^2$ ។ ចូរកំណត់រកពហុធា $P(x)$?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់រកពហុធា $P(x)$ ៖

គេមាន $(x-3)^2 \mid P(x)-3$ នោះ $(x-3) \mid P'(x)$

ហើយ $(x+3)^2 \mid P(x)+3$ នោះ $(x+3) \mid P'(x)$

ដោយ $GCD(x-3, x+3)=1$ នោះ $(x-3)(x+3) \mid P'(x)$

នាំឲ្យមាន $a \in IR$ ដែល $P'(x)=a(x-3)(x+3)=a(x^2-9)$

គេបាន $P(x)=a\int (x^2-9).dx = a(\frac{x^3}{3}-9x)+C$

ម្យ៉ាងទៀតមាន $P(3)=3$ និង $P(-3)=-$ នោះ $\begin{cases} -18a+C=3 \\ 18a+C=-3 \end{cases}$

គេទាញបាន $a=-\frac{1}{6}$, $C=0$ ។ ដូចនេះ $P(x)=-\frac{1}{18}x^3+\frac{3x}{2}$ ។

លំហាត់ទី៨

កំណត់រកពហុធា $P(x)$ មួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ៖

$P(x^2)=x^2(x^2+1)P(x)$ និង $P(2)=2$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់រកពហុធា $P(x)$

តាង n ជាដឺក្រេនៃពហុធា $P(x)$ ហើយដោយគេមានសមភាព

$P(x^2)=x^2(x^2+1)P(x)$ (1)

នោះ $2n=2+2+n=n+4$ ឬ $n=4$ ។

ជំនួស x ដោយ $-x$ ក្នុង (1) នោះ $P(x^2)=x^2(x^2+1)P(-x)$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $P(x)=P(-x)$ នោះ $P(x)$ ជាអនុគមន៍គូ។

យក $x=0$ គេបាន $P(0)=0$

យក $x=i$ គេបាន $P(-1)=0$

យក $x=-1$ គេបាន $P(1)=2P(-1)=0$

គេបាន $P(0)=P(-1)=P(1)=0$ នោះ $0,-1,1$ ជាឫសនៃ $P(x)$

គេបាន $P(x)=x(x-1)(x+1)(ax+b)$ ដែល $a\neq 0$

ដោយ $P(x)$ ជាអនុគមន៍គូនោះគេទាញបាន $b=0$ ។

ហេតុនេះ $P(x)=ax^2(x^2-1)$

ដោយ $P(2)=2$ នោះគេបាន $12a=2$ នាំឲ្យ $a=\dfrac{1}{6}$

ដូចនេះ $P(x)=\dfrac{1}{6}x^2(x^2-1)=\dfrac{x^4}{6}-\dfrac{x^2}{6}$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឲ្យ a និង b ជាឫសនៃ $P(x)=x^4+x^3-1$ ។

ចូរបង្ហាញថា ab ជាឫសនៃ $Q(x)=x^6+x^4+x^3-x^2-1$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ab ជាឫសនៃ $Q(x)$

តាង $S=a+b$ និង $P=ab$ នោះ a និង b ជាឫសនៃ $x^2-Sx+P=0$

ដោយ a និង b ជាឫសនៃ $P(x)=x^4+x^3-1$ នោះគេអាចដាក់

x^2-Sx+P ជាកត្តារួមក្នុង $P(x)$ ។ គេអាចសរសេរ ៖

$$\begin{aligned}
x^4+x^3-1 &= (x^2-Sx+P)(x^2+cx+d)\\
&= P(\frac{1}{P}x^2-\frac{S}{P}x+1)(x^2+cx+d)\\
&= (\frac{1}{p}x^2-\frac{S}{P}x+1)(Px^2+Pcx+Pd)\\
&= (\frac{1}{p}x^2-ux+1)(px^2+vx+w)
\end{aligned}$$

ដែល $u=\frac{S}{P}$, $v=Pc$, $w=Pd$ ។

តាមសមភាពខាងលើនេះគេទាញបាន $w=-1$ ។

គេទាញបាន $x^4+x^3-1=(\frac{1}{p}x^2-ux+1)(px^2+vx-1)$

ឬ $x^4+x^3-1=x^4+(\frac{v}{p}-up)x^3+(p-\frac{1}{p}-uv)x^2+(u+v)x-1$

គេទាញ $\begin{cases} \frac{v}{P}-uP=1 & (1) \\ P-\frac{1}{P}-uv=0 & (2) \\ u+v=0 & (3) \end{cases}$

តាម (1) និង (3) គេទាញបាន $v=-u\ ,\ u=-\frac{P}{1+P^2}$

ទំនាក់ទំនង (2) ទៅជា $P-\frac{1}{P}+\frac{P^2}{(1+P^2)^2}=0$

នាំឲ្យ $P^6+P^4+P^3+P^2-1=0$ មានន័យថា $P=ab$ ជាឬសរបស់

ពហុធា $Q(x)=x^6+x^4+x^3+x^2-1$ ។

ដូចនេះបើ a និង b ជាឬសនៃ $P(x)$ នោះ ab ជាឬសនៃ $Q(x)$ ។

លំហាត់ទី១០

គេឲ្យពហុធា $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ។

គេដឹងថា $P(1) = 1$, $P(2) = 8$ និង $P(3) = 27$ ។

ចូរស្រាយថា $f(2+\lambda) + f(2-\lambda) = 2\lambda^4 + 10\lambda^2 + 16$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $f(2+\lambda) + f(2-\lambda) = 2\lambda^4 + 10\lambda^2 + 16$

តាងពហុធា $P(x) = f(x) - x^3$

ចំពោះ $k = 1, 2, 3$ គេបាន $P(k) = f(k) - k^3 = 0$

គេទាញបាន $x = 1$, 2 , 3 ជាឫសនៃពហុធា $P(x)$ ។

ដោយ $f(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួនមានលេខមេគុណមុខតួ x^4 ស្មើ 1 នោះ

គេទាញ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួនមានលេខមេគុណមុខតួ x^4 ស្មើ 1 ដែរ

ហេតុនេះពហុធា $P(x)$ អាចសរសេរ ៖

$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-\alpha)$ ដែល α ជាឫសមួយទៀតនៃ $P(x)$

គេបាន $f(x) = P(x) + x^3 = (x-1)(x-2)(x-3)(x-\alpha) + x^3$

-ចំពោះ $x = 2 + \lambda$ គេបាន ៖

$$f(2+\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 1)(2 + \lambda - \alpha) + (2+\lambda)^3 \quad (1)$$

-ចំពោះ $x = 2 - \lambda$ គេបាន ៖

$$f(2-\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 1)(2 - \lambda - \alpha) + (2-\lambda)^3 \quad (2)$$

បូកទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន ៖

$$f(2+\lambda) + f(2-\lambda) = 2\lambda^4 + 10\lambda^2 + 16$$ ។

លំហាត់ទី១១

បើ $P(x),Q(x),R(x)$ និង $S(x)$ ជាពហុធាដោយដឹងថា ៖

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)$$

នោះចូរស្រាយថា $x-1$ ជាកត្តានៃ $P(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $x-1$ ជាកត្តានៃ $P(x)$ ៖

គេមាន $P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)\quad (*)$

យក $\alpha=e^{\frac{2\pi i}{5}}$ នោះ $\alpha^5=1$

ហើយ $\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=\dfrac{\alpha^5-1}{\alpha-1}=0$

ជំនួស x ដោយ $\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\alpha^4$ ក្នុង (*) នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases} P(1)+\alpha Q(1)+\alpha^2R(1)=0 & (1)\\ P(1)+\alpha^2Q(1)+\alpha^4R(1)=0 & (2)\\ P(1)+\alpha^3Q(1)+\alpha R(1)=0 & (3)\\ P(1)+\alpha^4Q(1)+\alpha^3R(1)=0 & (4)\end{cases}$$

គុណសមីការ (1),(2),(3) និង (4) នឹងចំនួនរៀងគ្នា $-\alpha, -\alpha^2, -\alpha^3, -\alpha^4$

គេបាន $\begin{cases} -\alpha P(1) - \alpha^2 Q(1) - \alpha^3 R(1) = 0 & (5) \\ -\alpha^2 P(1) - \alpha^4 Q(1) - \alpha R(1) = 0 & (6) \\ -\alpha^3 P(1) - \alpha\ Q(1) - \alpha^4 R(1) = 0 & (7) \\ -\alpha^4 P(1) - \alpha^3 Q(1) - \alpha^2 R(1) = 0 & (8) \end{cases}$

បូកសមីការទាំង(8)ខាងលើគេបាន $5P(1) = 0$ នោះ $P(1) = 0$

ដូចនេះ $x - 1$ ជាកត្តានៃ $P(x)$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n ។

គេដឹងថា $P(k)=\dfrac{k}{k+1}$ ចំពោះ $k=0,1,2,....,n$ ។

ចូរកំណត់ $P(n+1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $Q(x)=(x+1)P(x)-x$ នោះ $Q(k)=0$ គ្រប់ $k=0,1,2,....,n$ ។

នោះគេអាចសរសេរ $Q(x)=ax(x-1)(x-2)(x-3)...(x-n)$

គេទាញបាន $(x+1)P(x)-x=ax(x-1)(x-2)(x-3)....(x-n)$

យក $x=-1$ គេបាន $1=a(-1)^{n+1}.(n+1)!$ នោះ $a=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$

គេបាន $$P(x)=\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x(x-1)(x-2)(x-3)...(x-n)+x}{x+1}$$

ដូចនេះ $$P(n+1)=\begin{cases}1 & \text{បើ } n \text{ គូ}\\ \dfrac{n}{n+2} & \text{បើ } n \text{ សេស}\end{cases}$$

លំហាត់ទី១៣

គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនគត់ខុសគ្នា ។ យក $P(x)$ ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនគត់ ។ ចូរបង្ហាញថាលក្ខខណ្ឌ $P(a)=b, P(b)=c, P(c)=a$ មិនអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ព្រមគ្នាបានទេ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $P(a)=b, P(b)=c, P(c)=a$ នោះគេបាន ៖

$$\begin{cases} P(x)-b=(x-a)\,Q_1(x) & (1) \\ P(x)-c=(x-b)\,Q_2(x) & (2) \\ P(x)-a=(x-c)\,Q_3(x) & (3) \end{cases}$$

ក្នុងចំណោមបីចំនួនគត់ខុសគ្នា a,b,c យើងអាចជ្រើសរើសយកតម្លៃដាច់នៃផលដកធំជាងគេមួយ ។ សន្មតថា $|a-c|$ ជាចំនួនធំជាងគេក្នុងចំណោមចំនួន $|a-b|, |b-c|, |a-c|$ គេបាន $|a-c|>|a-b|$ ។

ដោយយក $x=c$ ជួសក្នុង (1) នោះ $P(c)-b=a-b=(c-a).Q_1(c)$

គេបាន $|a-b|=|a-c|.|Q_1(c)|$ ដោយ $Q_1(c)$ ជាចំនួនគត់នោះ $|a-b|\geq|a-c|$ ដែលផ្ទុយពីការឧបមាខាងលើ។

លំហាត់ទី១៤

គេឲ្យត្រីធា $f(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a\neq 0$, $a,b,c\in IR$

ក/ចូរស្រាយថា $f(x)-x$ ជាកត្តានៃ $f[f(x)]-x$ ។

ខ/ចូរស្រាយថាបើសមីការ $f(x)=x$ គ្មានឫសជាចំនួនពិតនោះសមីការ

$f[f(x)]=x$ ក៏គ្មានឫសជាចំនួនពិតដែរ ។

ដំណោះស្រាយ

ក/ស្រាយថា $f(x)-x$ ជាកត្តានៃ $f[f(x)]-x$ ៖

គេមាន $f(x)=ax^2+bx+c$

គេបាន $f[f(x)]=a\,f^2(x)+b\,f(x)+c$

$$
\begin{aligned}
&=a[f^2(x)-x^2]+b[f(x)-x]+ax^2+bx+c\\
&=a[f^2(x)-x^2]+b[f(x)-x]+[f(x)-x]+x\\
&=[f(x)-x][af(x)+ax+b+1]+x
\end{aligned}
$$

នោះ $f[f(x)]-x=[f(x)-x][af(x)+ax+b+1]$

គេទាញ $f(x)-x$ ជាកត្តានៃ $f[f(x)]-x$ ។

ខ/សមីការ $f(x) = x$

ឬ $ax^2 + bx + c = x$

ឬ $ax^2 + (b-1)x + c = 0$ មាន $\Delta_1 = (b-1)^2 - 4ac$

ដោយ $f(x) = x$ ជាសមីការគ្មានឬសនោះ $\Delta_1 = (b-1)^2 - 4ac < 0$

សមីការ $f[f(x)] = x$ សមមូល $[f(x) - x][af(x) + ax + b + 1] = 0$

យើងនឹងស្រាយថា $af(x) + ax + b + 1 = 0$ ជាសមីការគ្មានឬស ។

គេមាន $a(ax^2 + bx + c) + ax + b + 1 = 0$

$$a^2x^2 + a(b+1)x + ac + b + 1 = 0$$

មាន $\Delta_2 = a^2(b+1)^2 - 4a^2(ac + b + 1)$

$$= a^2[(b+1)^2 - 4ac - 4b - 4]$$
$$= a^2(b^2 + 2b + 1 - 4ac - 4b - 4)$$
$$= a^2[(b-1)^2 - 4ac - 4] = a^2[\Delta_1 - 4]$$

ដោយ $\Delta_1 < 0$ គេទាញបាន $\Delta_2 < 0$ ។ ដូចនេះបើសមីការ $f(x) = x$ គ្មានឬសជាចំនួនពិតនោះសមីការ $f[f(x)] = x$ ក៏គ្មានឬសជាចំនួនពិតដែរ ។

លំហាត់ទី១៥

គេតាង α និង β ជាឬសនៃសមីការ $x^2-x-1=0$ ។

ចូរគណនា $S=5\alpha^8+21\beta^5$ និង $P=(5\alpha^8-1)(21\beta^5+1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $S=5\alpha^8+21\beta^5$

ដោយ α និង β ជាឬសនៃសមីការ $x^2-x-1=0$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទ

វៀតគេមាន $\alpha+\beta=1$ និង $\alpha\beta=-1$

គេមាន $\begin{cases}\alpha^2-\alpha-1=0\\ \beta^2-\beta-1=0\end{cases}$ នោះ $\begin{cases}\alpha^2=\alpha+1 & (1)\\ \beta^2=\beta+1 & (2)\end{cases}$

តាម(1)គេបាន $(\alpha^2)^2=(\alpha+1)^2=\alpha^2+2\alpha+1$

$$\alpha^4=(\alpha+1)+2\alpha+1=3\alpha+2$$

លើកជាការេ $\alpha^8=(3\alpha+2)^2=9\alpha^2+12\alpha+4$

$$\alpha^8=9(\alpha+1)+12\alpha+4=21\alpha+13$$

នោះគេទាញ $5\alpha^8=105\alpha+65 \quad (1)$

តាម(2)គេបាន $(\beta^2)^2 = (\beta+1)^2 = \beta^2 + 2\beta + 1$

$$\beta^4 = (\beta+1) + 2\beta + 1 = 3\beta + 2$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង β គេបាន ៖

$\beta^5 = 3\beta^2 + 2\beta = 3(\beta+1) + 2\beta = 5\beta + 3$

នោះគេទាញ $21\beta^5 = 105\beta + 63$ (2)

បូក (1) និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$S = 5\alpha^8 + 21\beta^5 = 105(\alpha+\beta) + 128$ ដោយ $\alpha + \beta = 1$

ដូចនេះ $S = 105 + 128 = 233$ ។

គណនា $P = (5\alpha^8 - 1)(21\beta^5 + 1)$ ៖

គេមាន $5\alpha^8 = 105\alpha + 65$ និង $21\beta^5 = 105\beta + 63$

គេបាន $P = (105\alpha + 64)(105\beta + 64)$

$$= 11025\alpha\beta + 6720(\alpha+\beta) + 4096$$
$$= -11025 + 6720 + 4096$$
$$= -209$$

ដូចនេះ $P = (5\alpha^8 - 1)(21\beta^5 + 1) = -209$ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឲ្យត្រីធា $P(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a\neq 0$ និង a,b,c ចំនួនថេរ

ចូរស្រាយថា $P(1)+P(4)+P(6)+P(7)=P(2)+P(3)+P(5)+P(8)$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $P(1)+P(4)+P(6)+P(7)=P(2)+P(3)+P(5)+P(8)$

គេមាន $P(1)=a+b+c$

$$P(4)=16a+4b+c$$
$$P(6)=36a+6b+c$$
$$P(7)=49a+7b+c$$

គេបាន $P(1)+P(4)+P(6)+P(7)=102a+18b+4c \quad (1)$

ហើយ $P(2)=4a+2b+c$

$$P(3)=9a+3b+c$$
$$P(5)=25a+5b+c$$
$$P(8)=64a+8b+c$$

គេបាន $P(2)+P(3)+P(5)+P(8)=102a+18b+4c \quad (2)$

ដូចនេះ $P(1)+P(4)+P(6)+P(7)=P(2)+P(3)+P(5)+P(8)$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឲ្យ a, b, c, d ជាបួនចំនួនខុសគ្នា និង ខុសពីសូន្យ ។

ចូរដោះស្រាយប្រព័ន្ធ $\begin{cases} ax_1 + a^2x_2 + a^3x_3 + a^4x_4 = 1 \\ bx_1 + b^2x_2 + b^3x_3 + b^4x_4 = 1 \\ cx_1 + c^2x_2 + c^3x_3 + c^4x_4 = 1 \\ dx_1 + d^2x_2 + d^3x_3 + d^4x_4 = 1 \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ $\begin{cases} ax_1 + a^2x_2 + a^3x_3 + a^4x_4 = 1 \\ bx_1 + b^2x_2 + b^3x_3 + b^4x_4 = 1 \\ cx_1 + c^2x_2 + c^3x_3 + c^4x_4 = 1 \\ dx_1 + d^2x_2 + d^3x_3 + d^4x_4 = 1 \end{cases}$

តាងពហុធា $P(t) = x_1t + x_2t^2 + x_3t^3 + x_4t^4$ និង $P(0) = 0$

ដែល $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 1$ នោះពហុធា $P(t)$ អាចសរសេរ

$P(t) = A(t-a)(t-b)(t-c)(t-d) + 1$ ។

យក $t = 0$ គេបាន $P(0) = A.(abcd) + 1 = 0$ នោះ $A = -\dfrac{1}{abcd}$

ហេតុនេះ $P(t)=1-\frac{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}{abcd}$

ដោយ $P(t)=x_1t+x_2t^2+x_3t^3+x_4t^4$ នោះគេបានសមភាព

$$x_1t+x_2t^2+x_3t^3+x_4t^4=1-\frac{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}{abcd}$$

បន្ទាប់ពីពន្លាតរួចផ្ទឹមលេខមេគុណគេទទួលបានលទ្ធផលដូចតទៅ ៖

$$x_1=\frac{abc+abd+acd+bcd}{abcd}$$

$$x_2=-\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{abcd}$$

$$x_3=\frac{a+b+c+d}{abcd} \quad ; \quad x_4=-\frac{1}{abcd}$$

លំហាត់ទី១៨

គេឲ្យពហុធា $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ ដែល $a_n\neq 0$

មានឫស $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ។

តាង $S_m=x_1^m+x_2^m+x_3^m+....+x_n^m$ ដែល m ជាចំនួនគត់រឺឡាទីហ្វ។

ចូរស្រាយថា $a_0S_m+a_1S_{m+1}+a_2S_{m+2}+....+a_nS_{m+n}=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$

ដោយ x_i , $i=1,2,3,...,n$ ជាឫសនៃ $P(x)$ នោះ $P(x_i)=0$

គេបាន $\sum_{k=0}^{n}a_kx_i^k=0$ (*)

គុណអង្គទាំងពីរនៃ (*) នឹង x_i^m នោះគេបាន $\sum_{k=0}^{n}a_kx_i^{m+k}=0$

នោះគេទាញ $\sum_{k=0}^{n}a_kS_{m+k}=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{n}a_kx_i^{m+k}\right]=0$ ពិត

ដូចនេះ $a_0S_m+a_1S_{m+1}+a_2S_{m+2}+....+a_nS_{m+n}=0$ ។

ជំពូកទី៣

លំហាត់អនុវត្តន៍

១-គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^5+ax^3-7x+6$ ដែល a ជាចំនួនពិត ។

កំណត់តម្លៃ a ដើម្បីឲ្យ $P(x)$ចែកដាច់នឹង $x-2$ ។

២-គេមានពហុធា $P(x)=x^n-6x^{n-1}+7x^3+5x-2$ ដែល $n\in N$

កំណត់តម្លៃ n ដើម្បីឲ្យ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-2$ ។

៣-គេមានពហុធា $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

គេដឹងថា $P(2)=4$, $P(4)=16$, $P(8)=64$ និង $P(10)=4$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃនៃ a,b,c,d ។

៤-គេមានពហុធា $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

គេដឹងថា $P(1)=20$, $P(2)=40$ និង $P(3)=60$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃនៃ $P(-6)+P(10)$ ។

៥-គេមានពហុធា $P(x)$ មានដឺក្រេទីប្រាំ ។ គេដឹងថា $(x^2+1)|P(x)$

និង $(x^3+1)|P(x)$ ។ រក $P(x)$ បើ $P(1)=8$ ។

៦-គេឲ្យ $P(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a\neq 0$ និង $a,b,c\in IR$ ។

កំណត់ a,b,c ដោយដឹងថា $a+b+c=4$ ហើយពហុធា

$P^2(x)+2P(x)$ ចែកដាច់នឹង $x(x+1)(x+2)(x+3)$ ។

៧-កំណត់ពហុធា $P(x)$ មួយមានដឺក្រេទីប្រាំដោយដឹងថា ៖

$P(x)+2$ ចែកដាច់នឹង $(x+2)^3$ និង $P(x)-2$ ចែកដាច់នឹង $(x-2)^3$

៨-គេមានពហុធា $P(x)=(2x^2-7x+4)^5$

ក/រកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង $x-2$

ខ/ឧបមាថា $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{10}x^{10}$ ។

ចូរគណនាតម្លៃ $S=a_0+a_1+a_2+...+a_{10}$ ។

៩-រកសំណល់នៃវិធីចែករវាងពហុធា $P(x)=(x+1)^n$, $n\geq 2$

នឹងពហុធា $Q(x)=x^2+1$ ។

១០-គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^4+ax^2+b$ ដែល $a,b\in IR$ ។

កំណត់ a និង b ដើម្បីឲ្យ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង x^2-2x+4 ។

១១-គេឲ្យពហុធា $P(x)=ax^5+bx^3+1$ ដែល $a,b\in IR$ ។

កំណត់ a និង b ដើម្បីឲ្យ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង x^2-x-1 ។

១២-គេឲ្យ $P(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ និង a,b,c ជាចំនួនថេរ ។

គេតាង $u_k=(-1)^{\frac{(k-1)k}{2}}[P(k+1)-P(k)]$ ។

ចូរស្រាយថា $u_1+u_3+u_5+u_7=0$ ។

១៣-គេឲ្យពហុធា $P(x)=1+x+x^2+x^3+....+x^{2^{n-1}}$ ។

ចូរស្រាយថា $P(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)...(1+x^{2^{n-1}})$ ។

១៤-គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេទី n ដែល $P(k)=2^k$ ចំពោះតម្លៃ

$k=0\ ,1\ ,2,3\ ,....,n$ ។ ចូរគណនា $P(n+1)$?

១៥-គេឲ្យពហុធា ៖

$$P(x)=x(x-2)(x-4)(x-6)+(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$

ចូរស្រាយថាពហុធានេះមានឫសបួនសុទ្ធតែជាចំនួនពិត ។

១៦-គេឲ្យពហុធា $\mathbf{P}$ មួយមានមេគុណជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\mathbf{P(\cos x) = P(\sin x)}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x}$ ។ ចូរស្រាយថាមានពហុធា $\mathbf{Q}$ មួយដោយដឹងថា $\mathbf{P(x) = Q(x^4 - x^2)}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x}$ ។

១៧-បង្ហាញថាប្រសិនបើពហុធា $\mathbf{Q(x) = ax^2 + (c-b)x + (e-d)}$មាន ឬសទាំងអស់ជាចំនួនពិតធំជាង $\mathbf{1}$ នោះពហុធា ៖

$\mathbf{P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$ មានយ៉ាងតិចឬសមួយជាចំនួនពិត (ដែល $\mathbf{a, b, c, d, e \in IR}$)។

១៨-ចូរកំណត់លក្ខខណ្ឌលើលេខមេគុណដើម្បីឲ្យ $\mathbf{x^3 + px + q}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{x^2 + mx - 1}$ ។

១៩-ចូរកំណត់លក្ខខណ្ឌលើលេខមេគុណដើម្បីឲ្យ $\mathbf{x^4 + px^2 + q}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{x^2 + mx + 1}$ ។

២០-កំណត់ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ដើម្បីឲ្យ $\mathbf{ax^4 + bx^3 + 1}$ ចែកដាច់នឹង$\mathbf{(x-1)^2}$។

២១-កំណត់ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ដើម្បីឲ្យ $\mathbf{ax^{n+1} + bx^n + 1}$ ចែកដាច់នឹង$\mathbf{(x-1)^2}$។

២២-បើ m,n,p ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននោះចូរស្រាយថា៖

$x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ ចែកដាច់នឹង x^2+x+1 ។

២៣-កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m ដើម្បីឲ្យ $(x+1)^m-x^m-1$

ចែកដាច់នឹង x^2+x+1 ។

២៤-គេតាង α,β,γ ជាឬសនៃពហុធា $P(x)=x^3+x^2+2x+4$

រក $S=\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}$ និង $T=\frac{1}{(1+\alpha)^3}+\frac{1}{(1+\beta)^3}+\frac{1}{(1+\gamma)^3}$

២៥-គេតាង α,β,γ និង δ ជាឬសនៃពហុធា $P(x)=x^4-x^3+x+4$

ចូរគណនា $S=\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}+\frac{1}{\delta^3}$

និង $T=\frac{1}{(1-\alpha)^3}+\frac{1}{(1-\beta)^3}+\frac{1}{(1-\gamma)^3}+\frac{1}{(1-\delta)^3}$

២៦-ឬសនៃសមីការ $x^4-x^3-x^2-1=0$ គឺ a,b,c និង d ។

ចូរគណនា $p(a)+p(b)+P(c)+p(d)$ ដោយដឹងថា ៖

$P(x)=x^6-x^5-x^3-x^2-x$ ។

២៧-គេឲ្យសមីការ $x^2-3x+1=0$ មានឫសតាងដោយ x_1 និង x_2 ។

ចូរគណនាតម្លៃ $S=(x_1{}^5+21)(x_2{}^6+55)+144x_1{}^5+55x_2{}^6$ ។

២៨-គេឲ្យសមីការ $x^2-x-3=0$ មានឫសតាងដោយ x_1 និង x_2 ។

ចូរគណនាតម្លៃ $A=\dfrac{1}{2x_1^5+1}+\dfrac{2}{19x_2^3-7}$ ។

២៩-គេឲ្យសមីការ $x^2-2x-1=0$ មានឫសតាងដោយ x_1 និង x_2 ។

ចូរគណនាតម្លៃ $P=(x_1{}^3+3)(x_2{}^7+x_2+100)$

៣០-គេឲ្យពហុធា $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$ ដែល $n>1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $f(x)$ មិនអាចដាក់ជាផលគុណនៃពីរពហុធាមិនថេរដែល

មានមេគុណជាចំនួនគត់ ។

៣១-គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាមានដឺក្រេទី $3n$ ហើយគេដឹងថា ៖

$$P(0)=P(3)=...=P(3n)=2\ ,\ P(1)=P(4)=...=P(3n-2)=1$$

និង $P(2)=P(5)=...=P(3n-1)=0$ ។

សន្មតថា $P(3n+1)=730$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃ n ។

៣២-គេឲ្យពហុធា $P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)-9$

ដែល a,b,c,d ជាចំនួនគត់ខុសគ្នា។ បើ $P(x)$ មានឫសជាចំនួនគត់នោះ

បង្ហាញថា $a+b+c+d$ ចែកដាច់នឹង 4។

៣៣-គេឲ្យពហុធា $P(x)=(x^2+x+1)^n$ ដែល $n\in IN$

ក/ចូរស្រាយថា $P(x^2)=P(x).P(x-1)$

ខ/ចូររកសំណល់នៃវិធីចែករវាង $P(x)$ នឹង x^2+1 ។

គ/ឧបមាថា $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{2n} a_k x^k = a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2n}x^{2n}$

ចូរគណនា $S_n=a_0+a_2+a_4+....+a_{2n}$

និង $T_n=a_1+a_3+a_5+...+a_{2n-1}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៣៤-គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n ដែល $P(0)=0$ និង $P(k)=1$

ចំពោះ $k=1,2,3,....,n$ ។ ចូរកំណត់រក $P(x)$?

៣៥-គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីប្រាំដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $P(k)=k$

ចំពោះ $k=0,1,2,3,4$ និង $P(5)=245$ ។ ចូរកំណត់ $P(x)$ ។

ឯកសារយោង

1. A Few Elementary Properties of Polynomials.
(Adeel Khan , June 21, 2006)

2. Polynomials
(Yufei Zhao July 2, 2008)

3. Some Polynomial Theorems
(By John Kennedy)

4. Problems in Higher Algebra

(D. K. Faddeev, I. S. Sominskii)

5. Polynomial Equations
(Duˇsan Djuki´c)

6. **Polynomials in One Variable**
(Duˇsan Djuki´c)