មហិច្ឆិតាគណិតវិទ្យា

Maths Ambition

រៀបរៀងដោយ ឃន វ៉ាន់នី

៨២ លំហាត់និងដំណោះស្រាយ

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 7^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 8^2$$

....

....

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

2011 Khon Vanny

សមាគម៍សាមគ្គីភាពបារាំង

ASSOCIATION FRANCAISE DE SOLIDARITE

(A F S)

រៀបរៀងដោយ

យន វ៉ាន់នី

ត្រួតពិនិត្យដោយ

លោក យ៉ង់ ឆារី (អនុបណ្ឌិត គណិតវិទ្យា)

លោក លឹម ផល្គុន (បរិញ្ញាប័ត្រ គណិតវិទ្យា)

ខ្ញុំសូមអរគុណដល់ ÷

+ អ្នកមានគុណទាំងពីរ ដែលបាន ផ្តល់កំលាំងចិត្ត និង ឧបត្ថម្ភដល់ការសិក្សា

+សមាគមន៍សាមគ្គីភាពបារាំង **(AFS)** ដែលបានផ្តល់លទ្ធភាពឲ្យខ្ញុំបានបន្តការសិក្សាថ្នាក់វិទ្យាល័យ

+លោកគ្រូ លឹម ផល្គុន និង លោកគ្រូ ឡូវ ហុង និង លោកគ្រូ យិន និល ដែលបាន បង្ហាត់បង្រៀនខ្ញុំបាទឲ្យមានសមត្ថភាពអាចរៀបរៀងសៀវភៅនេះបាន

+លោក ចេង អឿន (ប្រធានគ្រប់គ្រងមណ្ឌល AFS)និង លោក ទឹម កាន (អនុប្រធានគ្រប់គ្រងមណ្ឌល AFS) ដែលលើកទឹកចិត្តនិង គាំទ្រការសិក្សារបស់ខ្ញុំ

+មិត្ត អ៊ាង ចិត្រា ដែលជួយត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

មហិទ្ធិគណិតវិទ្យា Maths Ambition

អារម្ភកថា

សួស្តីមិត្តអ្នកស្រលាញ់វិស័យគណិតវិទ្យា!

សៀវភៅ"**៨២លំហាត់និងដំណោះស្រាយ**"នេះស្នាដៃរ ដំបូងរបស់ខ្ញុំសំរាប់បំរើដល់មហាជនក្នុងវិស័យគណិត វិទ្យា។ ខ្ញុំបាទមានចិត្តរីករាយជាខ្លាំងដែលបានរៀបរៀង សៀវភៅនេះឡើង។ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយខ្ញុំគិតថា កំហុសលើផ្នែកអក្ខរាវិរុទ្ធ ផ្នែកបំណកស្រាយអាចកើត មានដោយអចេតនា។ ក្នុងនាមខ្ញុំជាអ្នកជាអ្នករៀបរៀង មានចិត្តរីករាយសោមនស្សចំពោះការិះគន់បែបស្ថាបនាពី សំណាក់មិត្តអ្នកអានដើម្បីកែលំអសៀវភៅនេះអោយ កាន់តែប្រសើរឡើងជាងមុន។

ជាចុងក្រោយនេះខ្ញុំសូមជូនពរដល់មិត្តអ្នកអានអោយមាន សុខភាពល្អប្រាជ្ញាឆ្លាតវ័យនិង សំរេចរាល់បំណង ប្រកប ដោយគតិបណ្ឌិតគ្រប់ប្រការ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី២៧ ខែកក្កដា ឆ្នាំ២០១១

ឃន វ៉ាន់នី

Email : khonvanny@gmail.com

លំហាត់

1. គេអោយ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។បង្ហាញថា

$$\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)}+\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)} \geq ab+bc+ca$$

(Greece National Olympaid 2007)

2.គេអោយត្រីកោណABCកែងត្រង់C។បង្ហាញថាអង្កត់ផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង

ត្រីកោណនេះស្មើa+b-cដែលAC=b,BC=a,AB=c។

(Indonesia National Science Olympaid 2004)

3. រង្វង់ពីរប្រសព្វគ្នាត្រង់A,B បន្ទាត់គូសតាមAកាត់រង្វង់ទាំងពីរ ត្រង់ P,Q ។

ស្រាយថាBP/BQមិនអាស្រ័យនិង ការប្រែប្រួលនៃបន្ទាត់(PQ)។(កម្ពុជា2007)

4. អោយបួនចំនុច A,B,C,D រត់ត្រង់គ្នាតាមលំដាប់នេះ។គេគូសរង្វង់(Γ)

កាត់តាម ចំនុច A,B។ គូសរង្វង់កាត់តាមចំនុច B,C ប៉ះរង្វង់ (Γ)។

(Cambodia IMO team Select Test 2011)

5. AD ជាកំពស់គូសពីកំពូល A នៃត្រីកោណកែងABC។ស្រាយបញ្ជាក់ថា

AD ស្មើផលបូកនៃកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ $\Delta ABC, \Delta ABD, \Delta ACD$ ។

(Olympic Turkey 1997)

6. AD ជាកំពស់គូសពីកំពូល A នៃត្រីកោណកែងABC ។បន្ទាត់គូស

កាត់តាមផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណABD,ACDប្រសព្វអង្កត់AB,ACត្រង់ K,L

រៀងគ្នា។ តាង E, E ជាក្រលាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC,AKLរៀងគ្នា។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{E}{E_1} \ge 2$ (IMO Shortlist 1988)

7. អោយត្រីកោណ ABC មួយ ។ គេដៅចំនុចN,Mលើជ្រុងAB,AC ដែល NB=BC=CM។គណនាផលធៀប $\frac{MN}{BC}$ជាអនុគមន៍នៃ R,r ដែលR,r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនិងចារឹកក្នុងត្រីកោណABC ។(APMO 2005)

A

8. តាងw,x,y,zជាចំនួនមិនអវិជ្ជមានដែលwx+xy+yz+zw=1 ។ស្រាយថា

$$\frac{w^3}{x+y+z}+\frac{x^3}{w+y+z}+\frac{y^3}{w+x+z}+\frac{z^3}{w+x+y} \ge \frac{1}{3}$$

(IMO Shortlist 1990)

9. អង្កត់ធ្នូAB,CD ប្រសព្វគ្នាត្រង់E។Mជាចំនុចលើអង្កត់BE ។បន្ទាត់ប៉ះត្រង់Eលើរង្វង់កាត់តាមចំនុចD,E,Mប្រសព្វបន្ទាត់BC.ACរៀងគ្នាត្រង់F,Gរៀងគ្នា។បើ $t=\frac{AM}{AB}$ គណនា $\frac{EG}{EF}$ ជាអនុគមន៍នៃt។(IMO 1990)

10.កំណត់4ចំនួនពិតx_1, x_2, x_3, x_4 ដែលផលបូកចំនួនមួយនិង ផលគុណបីចំនួនផ្សេងទៀតស្មើ2។ (IMO 1965)

11. គេអោយបីចំនួនពិតវិជ្ជមានa,b,c ដែលផលបូកស្មើ6។រកតម្លៃធំបំផុតនៃ $\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}$ ។

(Greece Nation Mathematic Olympaid 2011)

12. យកMជាចំនុចកណ្ដាលBCនៃត្រីកោណABC។Hជាអ័រតូសង់នៃត្រីកោណABC។បន្ទាត់គូសកាត់តាមHកែងនឹងAMត្រង់P។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$BM^2 = AM.PM$ (Japan Mathematical Olympaid finals 2011)

13. អោយa,b,c,dជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geq\frac{2}{3}$$

(IMO Shortlist 1993)

14. តាងO ជាចំនុចប្រសព្វរវាងអង្កត់ទ្រូងAC,BDនៃចតុកោណប៉ោងABCD។ រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ OAD, OBC ប្រសព្វគ្នាត្រង់ M ។បន្ទាត់កាត់តាមចំនុច O,M កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណAOB, COD រៀងគ្នាត្រង់ S,T ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា M ជាចំនុចកណ្តាលអង្កត់ ST ។

(China Girls' Mathematical Olympaid 2006)

15. កំណត់គូចំនួនពិត(x,y)ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{cases} x^3-y^3=4(x-y) & (1) \\ x^3+y^3=2(x+y) & (2) \end{cases}$$

(Indonesia National Science Olympaid 2006)

16. រកចំនួនគត់ $n\in\{1,2,3........,2009\}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $4n^6+n^3+5$ ចែកដាច់នឹង7។ (Indonesia National Science Olympaid 2009)

17. កំណត់គ្រប់គូចំនួនគត់(x,y)ដែល

$$x^2-y^4=2009$$

(Spain Mathematical Olympaid 2009)

18. គេអោយa,b,cជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។បើ $30|a+b+c$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $30|a^5+b^5+c^5$

(Indonesia National Science Olympaid 2006)

19. កំណត់គូចំនួនគត់វិជ្ជមាន(x,y)ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\frac{3}{7}$ ។

(Taiwan National Olympaid 2005)

20. កំណត់ចំនួនពិត(x,y,z)ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x = y^3 + y - 8 \\ y = z^3 + z - 8 \\ z = x^3 + x - 8 \end{cases}$$

(Indonesia National Science Olympaid 2007)

21.គេអោយចំនួនកុំផ្លិច z_1 , z_2 ដែល $z_1 = -1+i, z_2 = 2+4i$

រកចំនួនកុំផ្លិច z_3 ដែលអានិចនៃ z_1 , z_2 , z_3 ជាកំពូលទាំង3នៃត្រីកោណសម័ង្ស ។(Kosovo National Mathematical Olympaid 2011)

22. បង្ហាញថា $\sum_{n=1}^{9999} \frac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}\right)} = 9$

(Proposted by Dr Dorin Andrica)

23. តាងa,b,cជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលab+bc+ca=1 ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{c}\right)^2 + \left(c+\frac{1}{a}\right)^2 \geq 16$$

(Proposted By Mircea Becheanu,Bucharest,Romanai)

24.មេដ្យានAMនិងកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំBNប្រសព្វគ្នាត្រង់P ។បន្ទាត់CPប្រសព្វបន្ទាត់ABត្រង់Q ។ស្រាយបញ្ជាក់ថាត្រីកោណBNQជាត្រីកោណសមបាត ។

(Proposted by Dr Dorin Andrica)

25. កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន(x,y,z)ដែល

$$x^2+2xy+y^2-z^2=9$$

(Malaysia National Olympaid 2010)

26. តាង a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល abc=1។ស្រាយថា

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\geq\frac{3}{4}$$

(France Team Selection Test 2006)

27.តាងa,b,cជាជ្រុងនៃត្រីកោណមួយដែល a+b+c=3។ កំណត់តំលៃតូចបំផុតនៃ

$$a^2+b^2+c^2+\frac{4abc}{3}$$

(China Norther olympaid 2007)

28. គេអោយ x,y,z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ បង្ហាញថា

$$\frac{1+zx+zy}{(1+x+y)^2}+\frac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}+\frac{1+yz+yx}{(1+z+x)^2}\geq 1$$

(Japan Mathematical Olympaid finals 2010)

29. តាង a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a+b+3c}{3a+3b+2b}+\frac{b+c+3a}{3b+3c+2a}+\frac{c+a+3b}{3c+3a+2b}\geq\frac{15}{8}$$

(Spain Mathematical Olympaid 2010)

30. គេអោយABC ជាត្រីកោណមាន Γ ជារង្វង់ចារឹកក្រៅ។M ជាចំនុចនៅក្នុងត្រីកោណABC និងលើបន្ទាត់ពុះមុំA ផងដែរ។ បន្ទាត់AM,BM,CM ជួបរង្វង់ត្រង់ A_1,B_1,C_1 រៀងគ្នា។ ឧបមាថាP ជាចំនុចប្រសព្វនៃ A_1C_1 និងAB។ Qជាចំនុចប្រសព្វនៃ A_1B_1 និងAC។ ស្រាយថាបន្ទាត់PQ ស្របបន្ទាត់BC។

(India National Olympaid 2010)

31. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមានa,b,c,d ចូរបង្ហាញថា

$$\sqrt{a^4+c^4}+\sqrt{a^4+d^4}+\sqrt{b^4+c^2}+\sqrt{b^4+d^4}\geq 2\sqrt{2}(ad+bc)$$

(Turkey National Olympiad 2005)

32. អោយa,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន និង a+b+c=1 ។ បង្ហាញថា

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}+\sqrt{\frac{ca}{ca+b}}\leq\frac{3}{2}$$

(Kyrgyzstan National Olympaid 2010)

33. បីចំនុចខុសគ្នា A, B, C ស្ថិតក្នុងរង្វង់ (O) មួយ។ បន្ទាត់ប៉ះ (O)

ត្រង់ A និង B ប្រសព្វគ្នាត្រង់ P។បន្ទាត់ប៉ះ (o) ត្រង់Cកាត់បន្ទាត់ AB ត្រង់Q។

បង្ហាញថា $PQ^2=PB^2+QC^2$

(Mathematical Olympaid In Poland 2002)

34.គេអោយត្រីកោណកែងពីរ ដែលរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណាមួយស្មើរង្វង់ចារឹកក្រៅ

ត្រីកោណាមួយទៀត។តាងS,S_1 ជាក្រលាផ្ទៃត្រីកោណា ទាំងពីរខាងលើរៀងគ្នា។

បង្ហាញថា $\dfrac{S}{S_1}\geq 3+2\sqrt{2}$

(France Team Selection Test 2005)

35. គេអោយx,y,z ជាចំនួនពិតដែល $0\leq x.y.z\leq 1$។

បង្ហាញថា $xyz+(1-x)(1-y)(1-z)\leq 1$

(Slovania National Olympaid 2010)

36.ឧបមាថា a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល (a+b)(b+c)(c+a)=1

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $ab+bc+ca \le \frac{3}{4}$

(Croatia Team Selection Tests 2006)

37. អង្កត់ទ្រូងនៃចតុកោណព្នាយ ABCD ចែកចតុកោណព្នាយជាត្រីកោណ4។ s_1និងs_2ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណដែលមានជ្រុងមួយជាបាទចតុកោណព្នាយ។ រកផ្ទៃក្រឡាSនៃចតុកោណព្នាយអនុគមន៍នឹង s_1និងs_2។

(ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេសកម្ពុជាថ្នាក់ទី៩ ឆ្នាំ ២០១១)

38. គេអោយត្រីកោណសមបាតABC កំពូលA ផ្ទៃក្រលា S។MNជាបាតមធ្យម ត្រូវនឹងបាត BC ហើយ O ជាប្រសព្វនៃ MN និងកំពស់គូសចេញពីកំពូល A ។ គេបន្លាយ[CO) កាត់AB ត្រង់D និងបន្លាយ[BO) កាត់AC ត្រង់E ។ ចូររកក្រលាផ្ទៃនៃចតុកោណ ADOE អនុគមន៍ទៅនឹង S។

(ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេសកម្ពុជាថ្នាក់ទី៩ ឆ្នាំ ២០១១)

39. តាងa,b,cជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។បង្ហាញថា

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\ge 1\ge \frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}$$

(Romania 1997)

40. តាង a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល abc=1។ស្រាយថា

$$\frac{1+ab^2}{c^3}+\frac{1+bc^2}{a^3}+\frac{1+ca^2}{b^3}\ge \frac{18}{a^3+b^3+c^3}$$

(Hong Kong 2000)

41-គេអោយត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង AB, BC, CA បង្កើតបាន

ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ។

ក-បង្ហាញថា SinA,SinB,SinC បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ។

ខ- បង្ហាញថាផលគុណ $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$មានតំលៃថេរ។

(ប្រឡងជ្រើសរើសបេក្ខជនចូលរួមប្រឡង APMO របស់កម្ពុជាឆ្នាំ 2009)

42-ត្រីកោណសមបាត ABC មួយមានមុំ $\angle A=90$ ។យក M ជាចំនុចកណ្តាល

នៃAB។បន្ទាត់មួយគូសចេញពីAហើយកែងនឹងCMកាត់ជ្រុងBCត្រង់P។

បង្ហាញថា $\angle AMC=\angle BMP$ ។

(Baltic Way 2000)

43 កំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$(y+1)f(x+y)=f(xf(y))$$

គ្រប់ចំនួនពិត មិនអវិជ្ជមានx,y

(Slovenia National Olympaid 2010)

44. ចំពោះចំនួនពិត t និងចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b យើងមាន

$$2a^2-3abt+b^2=2a^2+abt-b^2=0$$

ចូរកំណត់ t ។

(Slovenia National Olympaid 2010)

45. កំណត់ចំនួនពិត x នៅចន្លោះ $[0,2\pi)$ ដែល

$$27.3^{3\sin x}=9^{\cos^2 x}$$

(Slovenia National Olympaid 2010)

46.រង្វង់ចារឹកក្រៅ ABC ត្រីកោណប៉ះជ្រុង BC និង AC ត្រង់D និងE រៀងគ្នា។ បង្ហាញថាបើ AD=BE នោះ ABC ជាត្រីកោណសមបាត។

(Austraian Mathematical Olympaid 2006)

47.ចតុកោណប៉ោង ABCD មួយ យកEជាប្រសព្វរវាងអង្កត់ទ្រូងហើយ S_1, S_2 S ជាក្រលាផ្ទៃនៃ ABE, CDE និង ABCD រៀងគ្នា។

ចូរស្រាយថា $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\le\sqrt{S}$

(Austraian Mathematical Olympaid 1990)

48. ចំនុច D និង E ស្ថិតនៅលើជ្រុងBCនិងACនៃត្រីកោណABCបន្ទាត់ ADនិងBEប្រសព្វគ្នាត្រង់P។KនិងLជាចំនុចនៅលើជ្រុងBCនិងACរៀងគ្នា ដែលCLPKជាប្រលេឡូក្រាម។ បង្ហាញថា $\frac{AE}{EL}=\frac{BD}{DK}$

(Mathematical Olympaid In Poland 2000)

49. គេឲ្យr,s,tជាឫសនៃពហុធាដឺក្រេទីបី

$$P(x)=x^3-2007x+2002$$

គណនាតំលៃនៃ $\frac{r-1}{r+1}+\frac{s-1}{s+1}+\frac{t-1}{t+1}$

(Irish Mathematical Olympaid 2007)

50. គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណដែល $\angle BAC \neq 90$ ។ យក O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC និង Γ ជា ផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ OBC ។ ឧបមាថា Γ ប្រសព្វនឹងអង្កត់ AB ត្រង់ P ខុសពី B និង Γ ប្រសព្វនឹងអង្កត់ AC ត្រង់ Q ខុសពី C ។ តាង ON ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់ Γ ។ បង្ហាញថាចតុកោណ APNQ ជាប្រលេឡូក្រាម។ (APMO 2010)

51. ក- កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដោយដឹងថា 2^n-1 ចែកដាច់នឹង 7 ។

ខ-ចូរបង្ហាញថាគ្មានចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ណាដែល 2^n+1 ចែកដាច់នឹង 7 ។

(IMO 1964)

52.គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល (a+b)(b+c)(c+a)=8

បង្ហាញថា $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[27]{\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}}$

(Macedonia National Olympaid 2008)

53.គេឲ្យa,b,cជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលa+b+c=1 ។បង្ហាញថា

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b} \leq 1$$

(Bosnia Herzegovina Team Selection Test 2011)

54. គេឲ្យa,b,cជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល ។បង្ហាញថា

$$\sqrt{a^4+b^4+c^4}+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \geq \sqrt{a^3b+b^3c+c^3b}+\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3}$$

(KMO Summer Program Test 2001)

55. កំណត់តំលៃធំបំផុតនិងតូចបំផុតនៃx+y ដែលx,y ជាចំនួន

ពិតដែលx≥-2,y≥-3 និង $x-2\sqrt{x+2}=y-2\sqrt{y+3}$

(Irish Mathematical Olympaid 2006)

56. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងលុះត្រាតែ

$\text{Sin}^2A+\text{Sin}^2B+\text{Sin}^2C=2$

(Irish Mathematical Olympaid 2007)

57.កំណត់គ្រប់អនុគមន៍f ដែលកំណត់ពីសំណុំចំនួនពិត$\Re$ចូលក្នុងសំណុំចំនួនពិត

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់ x, y, z$\in\Re$ មានសមភាព

$$f(f(x)+f(y)+f(z))=f(f(x)-f(y))+f(2xy+f(z))+2f(xz-yz)$$

(APMO 2010)

58.ឲ្យត្រីកោណ ABC មួយតាងរង្វាស់ជ្រុង BC, AC, AB រៀងគ្នាដោយ

a, b, c កន្លះពុះមុំក្នុងនៃមុំ$\angle$BAC, $\angle$ABC, $\angle$ACB ជួបជ្រុងBC, AC, AB

រៀងគ្នាត្រង់D, E, F តាង AD, BE, CF ដោយd, e, f រៀងគ្នា។

បង្ហាញថា

$$def=\frac{4abc(a+b+c)\Delta}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

ដែលΔជាក្រលាផ្ទៃនៃត្រីកោណABC។

(Irish Mathematical Olympaid 2007)

59-ចំនួនគត់វិជ្ជមានហៅថា *" good number "* បើវាស្មើបួនដងនៃ

ផលបូកលេខលំដាប់ក្នុងប្រពន្ធ័ដេស៊ីម៉ាលរបស់វា។

កំណត់ផលបូកគ្រប់ចំនួន*" good number "* ។

(China Northern mathematical Olympaid 2002)

60.គេឲ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។បង្ហាញថា

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\ge\sqrt{a^2+ac+c^2}$$

(Baltic Way 2000)

61.កំណត់គ្រប់គូចំនួនគត់ (x,y) ដែល $x^2-2xy+126y^2=2009$ ។

(China South East Mathematical Olympaid 2009)

62.តាង x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។កំណត់តំលៃតូចបំផុតនៃ

a) $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+zy}$ b) $\dfrac{x^2+y^2+2z^2}{xy+zy}$

(Croatia Team Selection Tests 2008)

63.គេឲ្យ a, b, c, d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។ បង្ហាញថា

$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b}\ge 0$$

(Croatia Team Selection Tests 2009)

64-កំណត់អនុគមន៍ទាំអស់ពីសំនុំចំនួនគត់វិជ្ជមានទៅសំនុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល

ផ្ទៀងផ្ទាត់: ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានa និងb មានត្រីកោណាមួយដែលមានជ្រុង

របស់វាមានប្រវែង $a, f(b)$ និង $f(a+f(b)-1)$

(IMO 2009)

1. គេអោយ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយៗបង្ហាញថា

$$\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)}+\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}\geq ab+bc+ca$$

(Greece National Olympaid 2007)

សម្រាយ

តាមវិសមភាព **AM-GM** យើងពិនិត្យឃើញថា

$$\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}+b(b+c-a)\geq 2(a+b-c)^2$$

វិសមភាពសមមូល

$$\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}\geq 2a^2+2c^2+b^2+5ab-5bc-4ac$$

យើងបាន

$$\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}\geq b^2+5ab-5bc \quad (1)$$

ដូចគ្នាដែរ

$$\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)}\geq c^2+5bc-5ac \quad (2)$$

$$\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}\geq a^2+5ac-5ab \quad (3)$$

បូកអង្គនិងអង្គនៃវិសមភាព(1),(2)និង(3)យើងបាន

$$\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)}+\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}\geq a^2+b^2+c^2 \quad (4)$$

ម្យ៉ាងទៀតតាមវិសមភាព **C-S** យើងមាន

$$(ab+bc+ca)^2 \le (a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)$$

យើងបាន

$$(ab+bc+ca)\le (a^2+b^2+c^2) \quad (5)$$

តាម(4)និង(5)

$$\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)}+\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}\ge ab+bc+ca$$

វិសមភាពខាងលើត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

2.គេអោយត្រីកោណABCកែងត្រង់C ។បង្ហាញថាអង្កត់ផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណនេះស្មើa+b-cដែលAC=b,BC=a,AB=c ។

(Indonesia National Science Olympaid 2004)

សម្រាយ

តាង k,r ជាកន្លះបរិមាត្រ កាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា ។

តាមរូបមន្តក្រលាផ្ទៃយើងបាន

$$S_{ABC}=kr=\frac{bc}{2}=\frac{(b+c)^2-(b^2+c^2)}{4}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4}$$

$$=\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4}=\frac{k(b+c-a)}{2}$$

$$\Rightarrow r=\frac{b+c-a}{2}$$

3. រង្វង់ពីរប្រសព្វគ្នាត្រង់A,Bបន្ទាត់គូសតាម Aកាត់រង្វង់ទាំងពីរ ត្រង់ P,Q ។ ស្រាយថាBP/BQមិនអាស្រ័យនឹងការប្រែប្រួលនៃបន្ទាត់(PQ)។(កម្ពុជា2007)

សម្រាយ

យើងមាន

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AO_1B$$

$$\angle AQB = \frac{1}{2}\angle AO_2B$$

សុទ្ធតែថេរ (O_1,O_2ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ទាំពីរ)។តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសយើងមាន

$$\frac{PB}{Sin\angle PAB} = \frac{AB}{Sin\angle APB}$$

$$\Rightarrow PB = \frac{ABSin\angle PAB}{Sin\angle APB}$$

$$\frac{QB}{Sin\angle QAB} = \frac{AB}{Sin\angle AQB} = \frac{QB}{Sin(180-\angle PAB)}$$

$$\Rightarrow QB = \frac{ABSin\angle PAB}{Sin\angle AQB}$$

$$\Rightarrow \frac{BP}{BQ} = \frac{Sin\angle AQB}{Sin\angle APB}$$ ថេរ

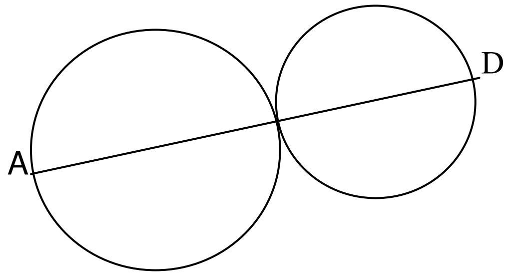
4. អោយបួនចំនុច A,B,C,D រត់ត្រង់គ្នាតាមលំដាប់នេះ។គេគូសរង្វង់(Γ) កាត់តាម ចំនុច A,B។ គូសរង្វង់កាត់តាមចំនុច B,C ប៉ះរង្វង់ (Γ)។

(Cambodia IMO team Select Test 2011)

សម្រាយ

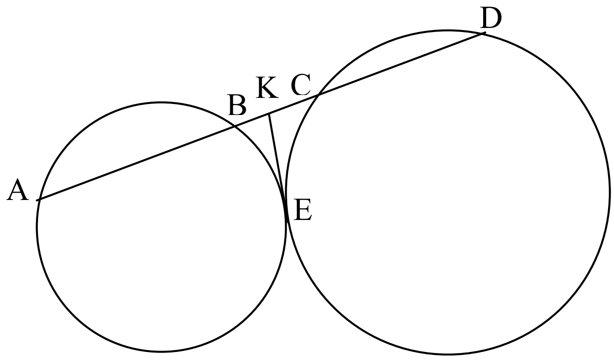
តាង (ϖ) ជារង្វង់ដែលត្រូវគូស ។ យក E, K ជាចំនុចប៉ះនៃរង្វង់ទាំងពីរនិងជាចំនុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ E ជាមួយបន្ទាត់ (AD) រៀងគ្នា ។ យក I ជាជាផ្ចិតរង្វង់(ϖ) ។ដើម្បីគូសរង្វង់នេះគ្រាន់តែរកទីតាំង I ។

+បើ AB ជាអង្កត់ផ្ចិតរង្វង់ (Γ) នោះI ត្រូវជាចំនុចកណ្តាល CB ។ ដែលB,C ត្រួតលើគ្នា ។



-ករណីABមិនមែនជាអង្កត់ផ្ចិត

តាមទ្រឹស្តីបទស្វ័យគុណចំនុច K ធៀបនឹងរង្វង់ (ϖ) និង (Γ) យើងបាន



$$EK^2 = KC.KD = KB.KA$$

$$\Leftrightarrow \frac{KC}{KB} = \frac{KA}{KD} = \frac{AC}{BD} = \frac{BC - KB}{KB}$$

$$\Leftrightarrow KB = \frac{BC.BD}{BD + AC}$$

នោះkជាចំនុចប្រសព្វនៃអង្កត់ [BC] ជាមួយរង្វង់ផ្ចិតBកាំ $r = \frac{BC.BD}{BD + AC}$

បន្ទាប់មកតាម k គូសបន្ទាត់ប៉ះលើរង្វង់(Γ)យើងបានសង់ចំនុច E ។

ចំនុចប្រសព្វនៃមេដ្យាទ័អង្កត់[CE] និង [ED] ជាចំនុច Iគូសរង្វង់ផ្ចិតI កាំ ID ។

រង្វង់(ϖ) ត្រូវបានសង់ ។

5. AD ជាកំពស់គូសពីកំពូល A នៃត្រីកោណកែងABC។ស្រាយបញ្ជាក់ថា AD ស្មើផលបូកនៃកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ $\Delta ABC, \Delta ABD, \Delta ACD$ ។

(Olympic Turkey 1997)

សម្រាយ

តាង r, r_1និង r_2ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណABC, ABD និង ACDរៀងគ្នា

តាមលំហាត់ទី2យើងបាន

$$r = \frac{AC + AB - AC}{2}, r_1 = \frac{AD + DB - AB}{2}, r_2 = \frac{AD + CD - AC}{2}$$

បូកអង្គនិងអង្គនៃសមភាពខាងលើយើងបាន

$$r + r_1 + r_2 = \frac{AC + AB - AC}{2} + \frac{AD + DB - AB}{2} + \frac{AD + CD - AC}{2}$$

$$= AD$$

ព្រោះ CD+DB=BC

ដូចនេះ AD ស្មើផលបូកនៃកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណABC, ABD,ACD។

6. AD ជាកំពស់គូសពីកំពូល A នៃត្រីកោណកែងABC ។បន្ទាត់គូស កាត់តាមផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណABD,ACDប្រសព្វអង្កត់AB,ACត្រង់ K,L រៀងគ្នា។ តាង E, E_1ជាក្រលាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC,AKLរៀងគ្នា។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{E}{E_1} \geq 2$ (IMO Shortlist 1988)

សម្រាយ

យក r_1,r_2 ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ADC.ADC រៀងគ្នា។យក O_1,O_2 ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ADB , ADC រៀងគ្នា។

យកM, N (M∈AD) ជាចំនុចប៉ះនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណADB យើងបាន

$$\left.\begin{array}{l}\angle O_1MD=\angle O_1ND=\angle MDN=90^\circ\\ O_1M=O_1N=MD=ND\end{array}\right|\Rightarrow$$ ចតុកោណ O_1MDN ជាការេ

$$\Rightarrow \angle O_1DA=45^\circ$$

ដូចគ្នាដែរ

$$\angle O_2DA=45^\circ \Rightarrow \angle O_1DO_2=90^\circ=\angle BAC \quad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀតDO$_1$ជាអង្កត់ទ្រូងការេ O_1KDL មានជ្រុងO$_1$Kជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ADB យោងតាមសំរាយលំហាត់ទី 2 យើងទាញបាន

$$O_1D=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(AD+DB-AB\right)$$

$$\Rightarrow \frac{O_1D}{AB}=\frac{\sqrt{2}\left(AD+DB\right)}{2AB}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{DB.DC}+DB\right)}{2\sqrt{BC.DB}}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{O_1D}{AB}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{DB}+\sqrt{DC}\right)}{2\sqrt{BC}}-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

ស្រាយតាមលំនាំដូចគ្នាដែរ

$$\frac{O_2D}{AC}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{DB}+\sqrt{DC}\right)}{2\sqrt{BC}}-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

តាម(2)និង(3)យើងបាន

$$\frac{DO_1}{AB}=\frac{DO_2}{AC} \quad (4)$$

តាម(1)និង(4)យើងបាន

$$\Delta ABC \approx DO_1O_2$$

យកTជាចំនុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់ស្របBCកាត់តាមA ។Mជាប្រសព្វACនិង

DO_2 ។យើងបាន

$$\left.\begin{array}{l}\angle O_1O_2D = \angle MO_2L = \angle C \\ \angle AMT = \angle DMC\end{array}\right| \Rightarrow \angle ATM = \angle MLK = \angle TDC = 45^\circ$$

$$\Rightarrow AK = AL$$

ម្យ៉ាងទៀត

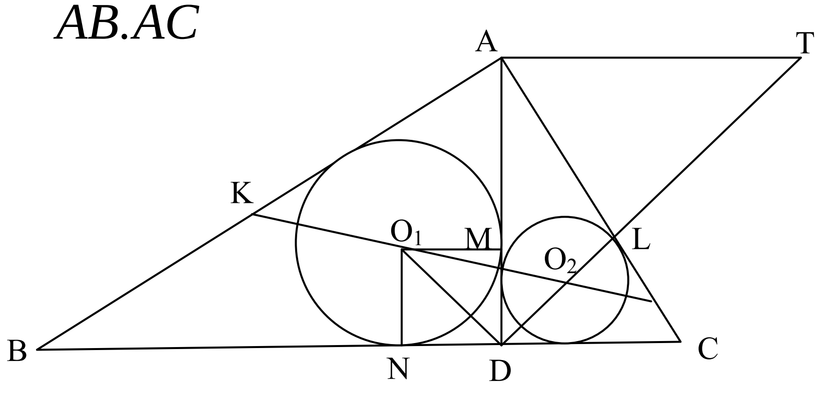
$$\left.\begin{array}{l}\angle ADM = \angle ALK \\ \angle DAO_2 = \angle O_2AL\end{array}\right| \Rightarrow AD = AL = AK$$

យើងបាន

$$\left.\begin{array}{l}E = AD.BC \\ E_1 = AD.AD\end{array}\right| \Rightarrow \frac{E}{E_1} = \frac{BC}{AD}$$

$$\frac{E}{E_1} = \frac{BC^2}{AD.BC} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB.AC}$$

$$\frac{E}{E_1} \geq \frac{2AB.AC}{AB.AC} = 2$$



7. អោយត្រីកោណ ABC មួយ ។គេដៅចំនុចN,Mលើជ្រុងAB,AC ដែល NB=BC=CM ។គណនាផលធៀប $\frac{MN}{BC}$ជាអនុគមន៍នៃ R,r ដែលR,r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនិងចារឹកក្នុងត្រីកោណABC ។(APMO 2005)

សម្រាយ

ដើម្បីអោយមានចំនុចN, Mលើជ្រុងAB, AC ដែល NB=BC=CM លុះត្រាតែ AB>BC & AC>BC យើងបាន

AM= AC-BC , AN= AB-BCតាងpជាកន្លះបរិមាត្រនិង a=BC, b=AC, c=AB

យើងមាន

$$S_{ABC} = pr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow (p-a)(p-b)(p-c) = pr^2, abc = 4prR \quad (1)$$

តាមទ្រឹស្តីបទ កូស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណABC យើងមាន

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \Leftrightarrow 1-\cos A = 1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$1-\cos A = \frac{a^2-(b-c)^2}{2} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2} = 2(p-b)(p-c)$$

ម្យ៉ាងទៀតតាមទ្រឹស្តីបទ កូស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណANM យើងមាន

$$MN^2 = (b-a)^2 + (c-a)^2 - 2(b-a)(c-a)Cos\angle A$$

$$= b^2 - 2ab + a^2 + c^2 - 2ac + a^2 - 2\left(a^2 - a(b+c) + bc\right)Cos\angle A$$

$$MN^2 = b^2 + c^2 - 2bcCos\angle A - 2a(b+c) + 2a(b+c)Cos\angle A$$

$$+2a^2 - 2a^2Cos\angle 2$$

$$MN^2 = a^2 - 2a(b+c)(1 - Cos\angle A) + 2a^2(1 - Cos\angle A)$$

$$= a^2 - 2a(1 - Cos\angle A)(b + c - a)$$

តែ $1 - \cos A = 2(p-b)(p-c)$ យើងបាន

$$MN^2 = a^2 - 2a^2\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \quad (2)$$

តាម(1)និង(2) យើងបាន

$$MN^2 = a^2 - 2a^2\frac{r^2p}{4Rrp} = a^2 - 2a^2\frac{r}{2R}$$

$$\Rightarrow \frac{MN^2}{BC^2} = 1 - \frac{r}{2R}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{BC} = \sqrt{1 - \frac{r}{2R}}$$

ដូចនេះ $\frac{MN}{BC} = \sqrt{1 - \frac{r}{2R}}$

8. តាង w,x,y,z ជាចំនួនមិនអវិជ្ជមានដែល wx+xy+yz+zw=1 ។ស្រាយថា

$$\frac{w^3}{x+y+z}+\frac{x^3}{w+y+z}+\frac{y^3}{w+x+z}+\frac{z^3}{w+x+y}\ge\frac{1}{3}$$

(IMO Shortlist 1990)

សម្រាយ

យើងមាន

$$1=wx+xy+yz+zw=(z+x)(w+y)\le\frac{(x+y+z+w)^2}{2^2}$$

$$\Rightarrow 4\le(w+x+y+z)^2\le 4\left(w^2+x^2+y^2+z^2\right)$$

យើងមាន

$$\sum_{cyc}\frac{w^3}{x+y+z}=\sum_{cyc}\frac{w^4}{wx+wy+wz}\ge\frac{\left(\sum_{cyc}w^2\right)^2}{2(wx+xy+yz+zw+wy+xz)}$$

តែ

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-w)^2+(w-z)^2+(z-x)^2+(w-y)^2\ge 0$$

$$\Rightarrow 3\sum_{cyc}w^2\ge 2\sum_{cyc}wx$$

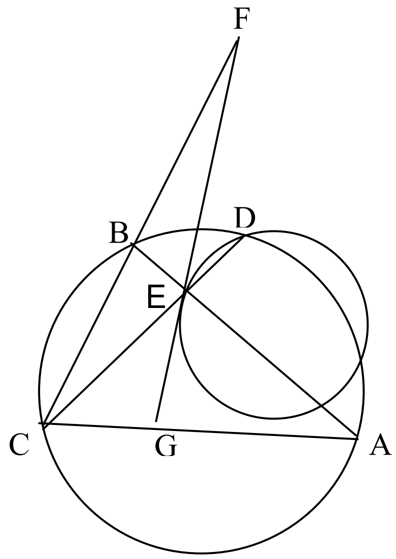
យើងបាន

$$\sum_{cyc}\frac{w^3}{x+y+z}\ge\frac{\sum_{cyc}w^2}{3}\ge\frac{1}{3}$$

ដូចនេះវិសមភាពខាងលើពិត

9. អង្កត់ធ្នូAB,CD ប្រសព្វគ្នាត្រង់E។Mជាចំនុចលើអង្កត់BE ។បន្ទាត់ប៉ះត្រង់Eលើរង្វង់កាត់តាមចំនុចD,E,Mប្រសព្វបន្ទាត់BC.ACរៀងគ្នាត្រង់F,Gរៀងគ្នា។បើ $t=\dfrac{AM}{AB}$ គណនា $\dfrac{EG}{EF}$ ជាអនុគមន៍នៃt។(IMO 1990)

សម្រាយ



យើងមាន

$$\angle CEG=\angle FED=180-\angle GED$$

$$=180-\angle DME=\angle DMB$$

$$\angle ABD=\angle ACD=\angle ACE$$

$$\Rightarrow \Delta MBD\approx\Delta ECG$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{EC}=\frac{DM}{EG}\Rightarrow EG=\frac{MD.EC}{MB}\quad(1)$$

ម្យ៉ាងទៀត

$$\angle BAD=\angle MAD=\angle DCB=\angle FCE$$

$$\angle CEF=\angle GED=\angle EMD$$

$$\Rightarrow \Delta CEF\approx\Delta AMD$$

$$\Rightarrow \frac{CE}{EF}=\frac{AM}{MD}\Rightarrow EF=\frac{CE.MD}{AM}\quad(2)$$

ធ្វើផលធៀប(1)និង(2)យើងបាន

$$\frac{EG}{EF}=\frac{\dfrac{MD.EC}{MB}}{\dfrac{EC.MD}{AM}}=\frac{AM}{BM}=\frac{AM}{AB-AM}=\frac{1}{\dfrac{AB-AM}{AM}}=\frac{1}{\dfrac{AB}{AM}-1}=\frac{1}{\dfrac{1}{t}-1}=\frac{t}{1-t}$$

ដូចនេះ $\dfrac{EG}{EF}=\dfrac{t}{1-t}$

10.កំណត់4ចំនួនពិត x_1, x_2, x_3, x_4 ដែលផលបូកចំនួនមួយនិងផលគុណាបីចំនួនផ្សេងទៀតស្មើ2ៗ (IMO 1965)

សម្រាយ

តាមសម្មតិកម្មយើងបាន

$$\begin{cases} x_1 + x_2x_3x_4 = 2(1) \\ x_2 + x_3x_4x_1 = 2(2) \\ x_3 + x_4x_1x_2 = 2(3) \\ x_4 + x_1x_2x_3 = 2(4) \end{cases}$$

ដកអង្គនិងអង្គ(1)និង(2)យើងបាន

$$(x_1 - x_2)(1 - x_3x_4) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ 1 - x_3x_4 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_3x_4 = 1 \end{array}\right.$$

បើ $x_1=x_2$ ដកអង្គនិងអង្គ(3)និង(4)យើងបាន

$$(x_3 - x_4)(1 - x_2x_1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 - x_4 = 0 \\ 1 - x_2x_1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_4 = x_3 \\ x_2x_1 = 1 \end{array}\right.$$

-ករណី $x_3=x_4$ ដកអង្គនិងអង្គ(2)និង(3)យើងបាន

$$(x_2 - x_3)(1 - x_4x_1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 - x_3 = 0 \\ 1 - x_4x_1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 = x_3 \\ x_4x_1 = 1 \end{array}\right.$$

+ចំពោះ

$$x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4$$

$$(1) \Rightarrow x_1 + x_1^3 = 2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_1^2 + x_1 + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_1^2 + x_1 + 2 = 0 \quad (\Delta = 1 - 4 \times 2 = -7 < 0) \end{array}\right.$$

នោះសមីការមានចំលើយ $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$

+ចំពោះ$x_1x_4=1$តាម(2)

$x_2+x_3=2=x_1+x_4$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_4=2\\x_1x_4=1\end{cases}\Rightarrow x_1=x_4=1=x_3=x_2$$

នោះសមីការមានចំលើយ$x_1=x_2=x_3=x_4=1$

-ករណី $x_1=x_2=1$

តាម(2)និង(4)យើងបាន

$$\begin{cases}x_3+x_4=2\\x_3x_4=1\end{cases}\Rightarrow x_3=x_4=1=x_1=x_2$$

នោះសមីការមានចំលើយ$x_1=x_2=x_3=x_4=1$

+ចំពោះ$x_1=x_2=-1$ តាម(2)និង(3)

$$\begin{cases}x_3x_4=-3\\x_3+x_4=2\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_3=-1,x_4=3\\x_3=3,x_4=-1\end{array}\right.$$

នោះសមីការមានចំលើយ

$(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\{(-1,-1,-1,3),(-1,-1,3.-1)\}$

បើ $x_3x_4=1$ នោះ $x_1+x_2=2$

តាម(3)និង(4)សមីការអាចសរសេរ

$$\begin{cases} x_3^2 + x_1x_2 = 2x_3 \\ x_4^2 + x_1x_2 = 2x_4 \end{cases} \Rightarrow (x_3 - x_4)(x_3 + x_4 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 - 2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 = x_4 \\ x_3 + x_4 = 2 \end{array}\right.$$

-ករណី $x_3 = x_4 \Rightarrow x_3 = x_4 = \pm 1$

+បើ $x_3 = x_4 = 1$ តាម(1)និង(4)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$$

នោះសមីការមានចំលើយ$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$

+បើ $x_3 = x_4 = -1$ តាម(1)និង(4)យើងបាន

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1, x_2 = -3 \\ x_1 = -3, x_2 = 1 \end{array}\right.$$

នោះសមីការមានចំលើយ

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \{(-1,3,-1,-1), (3,-1,-1.-1)\}$$

ករណី $x_3 + x_4 = 2$ នោះ

$$x_3 = x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$$

នោះសមីការមានចំលើយ $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$

សរុបមកសមីការមានចំលើយ

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \begin{Bmatrix} (1,1,1,1), (-1,-1,-1,3), (-1,-1,3.-1), \\ (-1,3,-1,-1), (3,-1,-1,-1) \end{Bmatrix}$$

11. គេអោយបីចំនួនពិតវិជ្ជមានa,b,c ដែលផលបូកស្មើ6។រកតម្លៃធំបំផុតនៃ $\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}$ ។

(Greece Nation Mathematic Olympaid 2011)

សម្រាយ

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwart យើងមាន

$$(x+y+z)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2)$$

$$(x^2+y^2+z^2)^2 =$$

$$\left(\sqrt{x^3}.\sqrt{x}+\sqrt{y^3}.\sqrt{y}+\sqrt{z^3}.\sqrt{z}\right)^2 \le (x+y+z)(x^3+y^3+z^3)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{(x+y+z)^2}{3}\right)^2 \le (x+y+z)(x^3+y^3+z^3)$$

$$\Rightarrow (x+y+z)^3 \le 9(x^3+y^3+z^3)$$

នោះយើងបាន $x+y+z \le \sqrt[3]{9(x^3+y^3+z^3)}$

យក $x=\sqrt[3]{a^2+2bc}, y=\sqrt[3]{b^2+2ca}, z=\sqrt[3]{c^2+2ab}$

យើងបាន

$$\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}$$

$$\le \sqrt[3]{9(a+b+c)^2} = \sqrt[3]{9\times 6^2} = 3\sqrt[3]{12}$$

ដូចនេះតំលៃធំបំផុតនៃ $\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}$ គឺ $3\sqrt[3]{12}$

12. យកMជាចំនុចកណ្តាលBCនៃត្រីកោណABC។Hជាអ័រតូសង់នៃត្រីកោណABC។បន្ទាត់គូសកាត់តាមHកែងនឹងAMត្រង់P។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$BM^2 = AM.PM$$

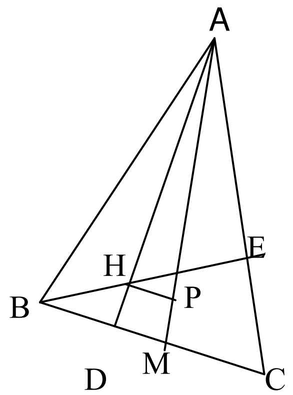
(Japan Mathematical Olympaid finals 2011)

សម្រាយ

-បើ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A នោះ A, H និង P ត្រួវស៊ីគ្នាយើងបាន

$$AM = PM = \frac{BC}{2} = BM \Rightarrow BM^2 = AM.PM$$

-បើ ABC មានមុំ A ជាមុំស្រួចយក AD, BE ជាកំពស់នៃត្រីកោណនេះក្នុងត្រីកោណ AHP និងត្រីកោណ AMD មាន



$$\left.\begin{array}{l}\angle HAP = \angle DAM \\ \angle APH = \angle ADM = 90^\circ\end{array}\right| \Rightarrow \Delta APH \approx \Delta ADM$$

រឺបាន $\frac{AP}{AD} = \frac{AH}{AM} \Leftrightarrow AP.AM = AD.AH = AM(AM - PM)$

$$\Rightarrow AM.PM = AM^2 - AD.AH \quad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀតក្នុងត្រីកោណAHE និងត្រីកោណ ACDមាន

$$\left.\begin{array}{l}\angle HAE = \angle DAC \\ \angle HEA = \angle ADC = 90^\circ\end{array}\right| \Rightarrow \Delta AHE \approx \Delta ACD \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AE}{AD}$$

$$\Leftrightarrow AH.AD = AC.AE$$

តែតាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស

$$AH.AD = AC.AE = AC.ABCos\angle A = \frac{AB^2 + AC^2 - CB^2}{2} \quad (2)$$

ព្រោះ $AE = ABCos\angle A$

ម្យ៉ាងទៀតតាមទ្រឹស្តីបទមេដ្យានយើងមាន

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \quad (3)$$

តាម(1),(2)និង(3)យើងទាញបាន

$$AM.PM = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} - \left(\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}\right)$$

$$= \frac{BC^2}{4} = BM^2$$

-បើ ABC មានមុំ A ជាមុំទាល យក AD,BE ជាកំពស់នៃត្រីកោណៗ

ក្នុត្រីកោណ APH និងត្រីកោណ ADM យើងមាន

$$\left.\begin{array}{l}\angle HAP = \angle DAM \\ \angle ADM = \angle APH\end{array}\right| \Rightarrow \Delta APH \approx \Delta ADM$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{AD} = \frac{AH}{AM} \Leftrightarrow AM.AP = AH.AD$$

$$\Rightarrow AM(AM - PM) = AH.AD$$

$$\Leftrightarrow AM.PM = AM^2 - AH.AD \quad (4)$$

ម្យ៉ាងទៀតក្នុងត្រីកោណ AEH និងត្រីកោណ ADB

$$\left.\begin{array}{l}\angle HAE = \angle BAD \\ \angle AEH = \angle ADB\end{array}\right| \Rightarrow \Delta AEH \approx \Delta ADB$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AE}{AD} \Leftrightarrow AH.AD = AB.AE = AB.ACCos(180 - \angle A)$$

នោះ $AH.AD = AB.ACCos\angle A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} \quad (5)$

ព្រោះ $AE = ABCos\angle A$

ម្យ៉ាងទៀតតាមទ្រឹស្តីបទមេដ្យានយើងមាន

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \quad (6)$$

តាម(4),(5)និង(6)យើងបាន

$$AM.PM = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} - \left(\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} \right)$$

$$= \frac{BC^2}{4} = BM^2$$

ដូចនេះ $BM^2 = AM.PM$

---

13. អោយ a, b, c, d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានៗស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}$$

(IMO Shortlist 1993)

សម្រាយ

យើងមាន

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b+2c+3d} = \sum_{cyc} \frac{a^2}{ab+2ac+3ad} \geq \frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}$$

ពិនិត្យ

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right) \geq 2 \sum_{a,b,c,d} ab$$

យើងមានសមតាព

$$(a+b+c+d)^2 = \sum_{cyc} a^2 + 2\sum_{cyc} ab \geq \frac{8}{3}\sum_{cyc} ab$$

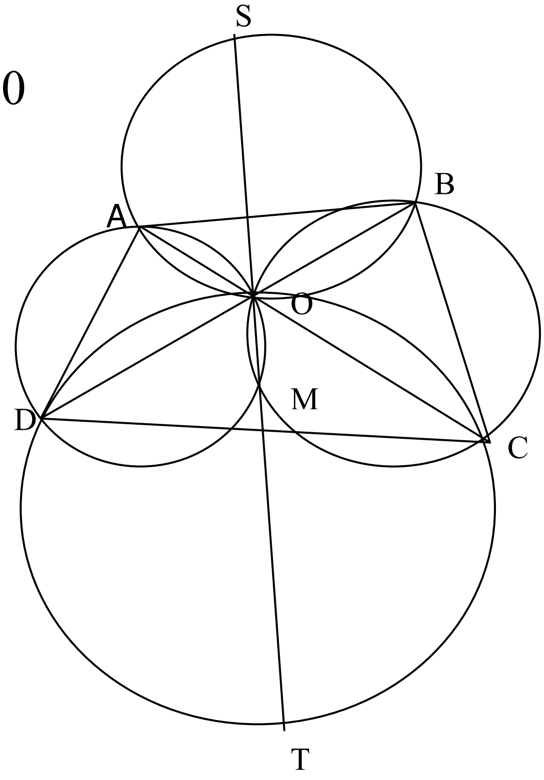
$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc} ab \leq \frac{3}{2}(a+b+c+d)^2$$

នោះ $$\sum_{cyc} \frac{a}{b+2c+3d} \geq \frac{(a+b+c+d)^2}{\frac{3}{2}(a+b+c+d)^2} = \frac{2}{3}$$

14. តាងOជាចំនុចប្រសព្វរវាងអង្កត់ទ្រូងAC,BDនៃចតុកោណប៉ោង ABCD។ រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ OAD, OBC ប្រសព្វគ្នាត្រង់ M ។បន្ទាត់កាត់តាម ចំនុច O,M កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណAOB, COD រៀងគ្នាត្រង់ S,T ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា M ជាចំនុចកណ្តាលអង្កត់ ST ។

(China Girls' Mathematical Olympaid 2006)

សម្រាយ



$\angle DMT + \angle DMO = \angle DMO + \angle DAO = 180$

(ផលបូកមុំក្នុងចតុកោណ ADMO ចារឹកក្នុងរង្វង់)

យើងបាន $\angle DMT = \angle DAO \quad (1)$

ម្យ៉ាងទៀត $\angle DTM = \angle DTO = \angle DCO \quad (2)$

(មុំស្កាត់ធ្នូ DO រួម)

តាម(1)និង(2)យើងបាន $\Delta DMT \approx \Delta DAC$

រំឭក $\dfrac{DM}{MT} = \dfrac{DA}{AC} \Leftrightarrow MT = \dfrac{AC.DM}{AD} \quad (3)$

ម្យ៉ាងទៀត $\angle ADB = \angle ADO = \angle OMA = \angle SMA \quad (4)$ (មុំស្កាត់ធ្នូ រួមAO)

តែ $\angle ASM = \angle ASO = \angle ABO = \angle ABD \quad (5)$

តាម(4)និង(5)យើងបាន $\Delta AMS \approx \Delta ADB$

រំឭក $\dfrac{AM}{MS} = \dfrac{AD}{DB} \Leftrightarrow MS = \dfrac{AM.DB}{AD} \quad (6)$

ធ្វើផលធៀប(3)និង(6)យើងបាន

$$\frac{MT}{MS}=\frac{AC.DM}{AM.BD} \qquad (7)$$

ម្យ៉ាងទៀត

$\angle CAM = \angle OAM = \angle ODM = \angle BOM$ (មុំស្កាត់ធ្នូរួម MO) (8)

តែ

$\angle DBM = \angle ODM = \angle OCM = \angle ACM$ (មុំស្កាត់ធ្នូរួម MO)(9)

តាម(8)និង(9)យើងបាន $\Delta AMC \approx \Delta DMB$

រឿបាក $\frac{AM}{DM}=\frac{AC}{BD}$ (10)

តាម (9) និង (10) យើងបាន

$$\frac{MS}{MT}=\frac{AC.BD}{BD.AC}=1 \Leftrightarrow MS = MT$$

សមភាពនេះបញ្ជាក់ថា M ជាចំនុចកណ្តាលអង្កត់ ST។

15. កំណត់គូចំនួនពិត(x,y)ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 4(x-y) & (1) \\ x^3 + y^3 = 2(x+y) & (2) \end{cases}$$

(Indonesia National Science Olympaid 2006)

សំរាយ

-បើ x=y តាម(1)សមីការផ្ទៀងផ្ទាត់តាម(2)យើងបាន

$$2x^3 = 4x \Leftrightarrow x(x^2-2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

នោះសមីការមានរឹស

$$(x,y) \in \{(0,0), (\sqrt{2},\sqrt{2}), (-\sqrt{2},-\sqrt{2})\}$$

-បើx=-yតាម(2) សមីការផ្ទៀងផ្ទាត់តាម(1)យើងបាន

$$2x^3 = 8x \Leftrightarrow x(x^2-4) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$$

សមីការមានរឹស$(x,y) \in \{(0,0), (2,-2), (-2,2)\}$

-បើ$x \neq y$ & $x \neq -y$ ប្រព័ន្ធសមីការអាចសរសេរ

$$\begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 2(x+y) \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 4(x-y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x^2 - xy + y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ xy = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 = 3 + 2 = 5 \Rightarrow x + y = \pm\sqrt{5}$$

+ករណី $x+y=\sqrt{5}$ យើងបាន

$$\begin{cases} xy=1 \\ x+y=\sqrt{5} \end{cases}$$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត x, y ជាឫសសមីការ

$$X^2-\sqrt{5}X+1=0$$
$$\Delta=5-4=4$$
$$\Rightarrow X_1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}, X_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

សមីការមានឫស

$$(x,y)\in\left\{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\right\}$$

បើ $x+y=-\sqrt{5}$ យើងបាន

$$\begin{cases} xy=1 \\ x+y=-\sqrt{5} \end{cases}$$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត x, y ជាឫសសមីការ

$$X^2+\sqrt{5}X+1=0$$
$$\Delta=5-4=1$$
$$\Rightarrow X_1=\frac{-\sqrt{5}+1}{2}, X_2=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$$

សមីការមានរឹស

$$(x,y)\in\left\{\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2},\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right),\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2},\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)\right\}$$

សរុបមកសមីការមានចំលើយ

$$(x,y)\in\left\{\begin{array}{l}(0,0),(2,-2),(-2,2),\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)\\ \left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2},\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right),\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2},\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)\\ \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\end{array}\right\}$$

16. រកចំនួនគត់ $n\in\{1,2,3........,2009\}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $4n^6+n^3+5$ ចែកដាច់នឹង7ៗ (Indonesia National Science Olympaid 2009)

សម្រាយ

-ករណី n ចែកដាច់នឹង7យើងបាន

$n\equiv 0 \pmod 7$

$4n^6\equiv 0 \pmod 7$

$n^3\equiv 0 \pmod 7$

$\Rightarrow 4n^6+n^3+5\equiv 5 \pmod 7$

ដូចនេះ n ចែកដាច់នឹង7មិនយក

-ករណីn ចែក នឹង7អោយសំណល់1 យើងបាន

$$n \equiv 1 \pmod 7$$
$$4n^6 \equiv 4 \pmod 7$$
$$n^3 \equiv 1 \pmod 7$$
$$\Rightarrow 4n^6 + n^3 + 5 \equiv 10 \equiv 3 \pmod 7$$

ដូចនេះ n ចែក នឹង7អោយសំណល់1 មិនយក

- ករណីn ចែក នឹង7អោយសំណល់2 យើងបាន

$$n \equiv 2 \pmod 7$$
$$4n^6 \equiv 4.2^6 \equiv 4 \pmod 7$$
$$n^3 \equiv 2^3 \equiv 1 \pmod 7$$
$$\Rightarrow 4n^6 + n^3 + 5 \equiv 10 \equiv 3 \pmod 7$$

ដូចនេះ n ចែក នឹង7អោយសំណល់ មិនយក

- ករណីn ចែក នឹង7អោយសំណល់3 យើងបាន

$$n \equiv 3 \pmod 7$$
$$4n^6 \equiv 4.3^6 \equiv 4 \pmod 7$$
$$n^3 \equiv 3^3 \equiv -1 \pmod 7$$
$$\Rightarrow 4n^6 + n^3 + 5 \equiv 9 \equiv 2 \pmod 7$$

ដូចនេះ n ចែក នឹង7អោយសំណល់3 មិនយក

- ករណីn ចែក នឹង7អោយសំណល់4 យើងបាន

$$n \equiv 4 \equiv -3 \pmod 7$$

$$4n^6 \equiv 4.(-3)^6 \equiv 4 \pmod 7$$

$$n^3 \equiv (-3)^3 \equiv -1 \pmod 7$$

$$\Rightarrow 4n^6 + n^3 + 5 \equiv 9 \equiv 2 \pmod 7$$

ដូចនេះ n ចែក នឹង7អោយសំណល់4 មិនយក

- ករណីn ចែក នឹង7អោយសំណល់5 យើងបាន

$$n \equiv 5 \equiv -2 \pmod 7$$

$$4n^6 \equiv 4.(-2)^6 \equiv 4 \pmod 7$$

$$n^3 \equiv (-2)^3 \equiv -1 \pmod 7$$

$$\Rightarrow 4n^6 + n^3 + 5 \equiv 9 \equiv 2 \pmod 7$$

ដូចនេះ n ចែក នឹង7អោយសំណល់5 មិនយក

- ករណីn ចែក នឹង7អោយសំណល់6 យើងបាន

$$n \equiv 6 \equiv -1 \pmod 7$$

$$4n^6 \equiv 4.(-1)^6 \equiv 4 \pmod 7$$

$$n^3 \equiv (-1)^3 \equiv -1 \pmod 7$$

$$\Rightarrow 4n^6 + n^3 + 5 \equiv 9 \equiv 2 \pmod 7$$

ដូចនេះ n ចែក នឹង7អោយសំណល់6 មិនយក

ដូចនេះគ្មាន $n \in \{1,2,3....2009\}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $4n^6 + n^3 + 5$

ចែកដាច់នឹង7ៗ

17. កំណត់គ្រប់គូចំនួនគត់(x,y)ដែល

$$x^2 - y^4 = 2009$$

(Indonesia National Science Olympaid 2009)

សម្រាយ

សមីការអាចសរសេរ

$$(x-y^2)(x+y^2) = 1\times 2009 = 7\times 287 = 49\times 41 = -1\times -2009$$
$$= -7\times -287 = -49\times -41$$

ដោយ $x - y^2 < x + y^2$ យើងបាន

$$\begin{cases} x-y^2 = 1 \\ x+y^2 = 2009 \end{cases}(I) \quad \begin{cases} x-y^2 = 7 \\ x+y^2 = 287 \end{cases}(II) \quad \begin{cases} x-y^2 = 41 \\ x+y^2 = 49 \end{cases}(III)$$

$$\begin{cases} x-y^2 = -2009 \\ x+y^2 = -1 \end{cases}(IV) \quad \begin{cases} x-y^2 = -287 \\ x+y^2 = -7 \end{cases}(V) \quad \begin{cases} x-y^2 = -49 \\ x+y^2 = -41 \end{cases}(VI)$$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងលើយើងបានគូចំលើយជា

ចំនួនគត់គឺ $(x, y) \in \{(45,2), (45,-2), (-45,2), (-45,-2)\}$

18. គេអោយa,b,cជាចំនួនគត់វិជ្ជមានៗបើ $30|a+b+c$
ស្រាយបញ្ជាក់ថា $30|a^5+b^5+c^5$
(Indonesia National Science Olympaid 2006)

សម្រាយ

ដំបូងយើងនឹងស្រាយថា $5|x^5-x$

-បើxចែកដាច់នឹង5សំណើរខាងលើពិត

- បើxចែកនឹង5អោយសំណល់1យើងបាន

$x \equiv 1 \pmod 5$

$\Rightarrow x^5 \equiv 1 \pmod 5$

$\Rightarrow x^5 - x \equiv 0 \pmod 5$

សំណើរខាងលើពិត

- បើxចែកនឹង5អោយសំណល់2យើងបាន

$x \equiv 2 \pmod 5$

$\Rightarrow x^5 \equiv 2^5 \equiv 2 \pmod 5$

$\Rightarrow x^5 - x \equiv 0 \pmod 5$

សំណើរខាងលើពិត

- បើxចែកនឹងអោយសំណល់3យើងបាន

$$x \equiv 3 \pmod 5$$

$$\Rightarrow x^5 \equiv 3^5 \equiv 3 \pmod 5$$

$$\Rightarrow x^5 - x \equiv 0 \pmod 5$$

សំណើរពិត

- បើxចែកនឹង5អោយសំណល់3យើងបាន

$$x \equiv 4 \pmod 5$$

$$\Rightarrow x^5 \equiv 4^5 \equiv 3 \pmod 5$$

$$\Rightarrow x^5 - x \equiv 0 \pmod 5$$

សំណើរខាងលើពិត

បន្តមកទៀតយើងនឹងស្រាយ $3 | x^5 - x$

-បើxចែកដាច់នឹង3សំណើរនេះពិត

- បើxចែកនឹង3អោយសំណល់1យើងបាន

$$x \equiv 1 \pmod 3$$

$$\Rightarrow x^5 \equiv 1 \pmod 3$$

$$\Rightarrow x^5 - x \equiv 0 \pmod 3$$

សំណើរនេះពិត

- បើxចែកនឹង3អោយសំណល់ 2 យើងបាន

$$x \equiv 2 \pmod 3$$

$$\Rightarrow x^5 \equiv 32 \equiv 2 \pmod 3$$

$$\Rightarrow x^5 - x \equiv 0 \pmod 3$$

ម្យ៉ាងទៀត x^5 និង x មានភាពគូសេសដូចគ្នានោះ $2|x^5-x$

ដោយ GCD(2,3,5)=1 នោះ $30|x^5-x$ គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x ។

យើងបាន

$$\left.\begin{array}{l} 30|a^5-a \\ 30|b^5-b \\ 30|c^5-c \end{array}\right| \Rightarrow 30|a^5+b^5+c^5-(a+b+c)$$

ដោយ a+b+c ចែកដាច់នឹង 30 នោះយើងបាន $30|a^5+b^5+c^5$

19. កំណត់គូចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x,y) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\frac{3}{7}$ ។

(Taiwan National Olympaid 2005)

សម្រាយ

Lemma បើ a,b,c,d,e,f ជាចំនួនគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a-\frac{b}{c}=\frac{d}{e}$ ដែល GCD(d,e)=1 នោះមានចំនួនគត់ r ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{b}{c}=\frac{r}{e}$

សម្រាយ Lemma

តាង d= GCD(b,c) នោះមានចំនួនគត់ n, m ដែល b=nd, c=md និង GCD(n,m)=1 យើងបាន

$$a-\frac{b}{c}=a-\frac{n}{m}=\frac{am-n}{m}=\frac{d}{e}$$

ដោយ GCD(d,e)=1 និងម្យ៉ាងទៀតតាមអាល់កូរីតអឺក្លីតយើងបាន

GCD(am-n,m)=GCD(m,n)=1 នោះ m=e, am-n=d

ដូចនេះ $\frac{b}{c}=\frac{r}{m} \quad (n=r)$

ដូចនេះ **Lemma** នេះពិត

សមីការអាចសរសេរ

$$\frac{x^2-xy+y^2}{x+y}=\frac{7}{3}=x+y-3\frac{xy}{x+y}$$

ដោយ 3 និង 7 ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នានោះយើងអាចតាង

$x+y=k, \frac{xy}{x+y}=\frac{l}{9}$ ដែល k និង l ជាចំនួនគត់

សមីការសមមូល

$3k-l=7 \Rightarrow k=2+\frac{l+1}{3} \Rightarrow 3|l+1$ នោះមានចំនួនគត់ v ដែល

$l=3v-1$ យើងបាន

$$k=2+v \Rightarrow \begin{cases} x+y=2+v \\ xy=\frac{(3v-1)(v+2)}{9} \end{cases}$$

នោះមានចំនួនគត់ u ដែល $v+2=9u \Rightarrow v=9u-2$

ព្រោះ 3v-1 ចែកមិនដាច់នឹង 9ៗនោះយើងបាន

$$\begin{cases} x+y=9u \\ xy=27u^2-7u \end{cases}$$

តាមទ្រឹស្តីបទវៀែត x, y ជាឫសសមីការ

$$X^2-9uX+27u^2-7u=0$$

$$\Delta=81u^2-108u^2+28u=-27u^2+28u\geq 0 \Rightarrow u\in\left[0,\frac{28}{27}\right]$$

$$\Rightarrow u=1 \quad (u\in \mathrm{N})$$

ដូចនេះ $(x,y)\in\{\quad(5,4),(4,5)\}$

20. កំណត់ចំនួនពិត(x,y,z)ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x = y^3 + y - 8 \\ y = z^3 + z - 8 \\ z = x^3 + x - 8 \end{cases}$$

(Indonesia National Science Olympaid 2007)

សម្រាយ

យើងមាន

$$\begin{cases} x = y^3 + y - 8 & (1) \\ y = z^3 + z - 8 & (2) \\ z = x^3 + x - 8 & (3) \end{cases}$$

ដកអង្គនិងអង្គ(1)និង(2), (2)និង(3), (3)និង(1)យើងបាន

$$\begin{cases} y - z = (z - x)(z^2 + xz + x^2 + 1) \\ z - x = (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 1) \\ x - y = (y - z)(y^2 + yz + y^2 + 1) \end{cases}$$

គុណអង្គនិងអង្គយើងបាន

$$(x-y)(y-z)(z-x)\left[1 - (x^2 + xy + y^2 + 1)(y^2 + yz + z^2 + 1)(z^2 + zx + x^2 + 1)\right] = 0$$

តែ $x^2 + xy + y^2$

$\Delta = -3y^2 \le 0 \forall y \in \Re$

$\Rightarrow x^2 + xy + y^2 + 1 \ge 1 \forall x.y \in \Re$

នោះ $\left[1 - (x^2 + xy + y^2 + 1)(y^2 + yz + z^2 + 1)(z^2 + zx + x^2 + 1)\right] \le 0$

-បើ x-y=0 នោះសមីការមានឫស x=y=z=2

-បើ y-z=0 នោះសមីការមានឫស x=y=z=2

-បើ z-x=0 នោះសមីការមានឫស x=y=z=2

សរុបមកសមីការមានចំលើយ (x=2, y=2, z=2)

21.គេអោយចំនួនកុំផ្លិច z_1និង z_2 ដែល $z_1=-1+i$ និង $z_2=2+4i$

រកចំនួនកុំផ្លិចz_3 ដែលអាទិចនៃ z_1 ,z_2 ,z_3 ជាកំពូលទាំង3នៃត្រីសម័ង្សមួយៗ

សម្រាយ

តាង A, B, C ជា អាទិចនៃ z_1 ,z_2 ,z_3 រៀងគ្នាៗយើងបាន

A(-1,1),B(2,4),តាងC(x,y)ៗយើងបាន $AB = 3\sqrt{2}$ និង

$\overrightarrow{AB}(3,3), \overrightarrow{AC}(x+1, y-1)$ នោះ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3(x+1)+3(y-1)$

តែតាមនិយមន័យ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.ABCos60 = 9$ ព្រោះ$AB = AC = 3\sqrt{2}$

តាមទំនាក់ទំនង់ខាងលើយើងបាន $x + y = 3 \quad (1)$

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{BC}(x-2, y-4)$ នោះយើងបាន

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = (x-2)(x+1)+(y-1)(y-4) = CA.CB\cos\angle C = 9$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - 5y = 7 \quad (2)$

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ(1)និង(2)បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះយើងបាន

ចំលើយ

$$(x,y)\in\left\{\left(\frac{1+3\sqrt{3}}{2},\frac{5-3\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{1-3\sqrt{3}}{2},\frac{5+3\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

22. បង្ហាញថា

$$\sum_{n=1}^{9999}\frac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}\right)}=9$$

(Proposted by Dr Dorin Andrica)

សម្រាយ

យើងមាន $\frac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n+1}+\sqrt[4]{n}}=\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}$

នោះ

$$\sum_{n=1}^{9999}\frac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}\right)}=\sqrt[4]{10000}-\sqrt[4]{1}=9$$

23. តាងa,b,cជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលab+bc+ca=1។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2\geq 16$$

(Proposted By Mircea Becheanu,Bucharest,Romanai)

សម្រាយ

តាមវិសមភាព **AM-GM** និងវិសមភាព **Cauchy-Schwart** យើងមាន

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+b^2+c^2$$

$$+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

$$\geq ab+bc+ca+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+6\sqrt[3]{\frac{acb}{abc}}$$

$$\geq 7+\frac{3^2}{ab+bc+ca}=16$$

24.មេដ្យានAMនិងកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំBNប្រសព្វគ្នាត្រង់P។បន្ទាត់CPប្រសព្វបន្ទាត់ABត្រង់Q។ស្រាយបញ្ជាក់ថាត្រីកោណBNQជាត្រីកោណសមបាត។
(Proposted by Dr Dorin Andrica)

សម្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទ សេវ៉ាយើងមាន

$\frac{AQ}{QB}.\frac{BM}{MC}.\frac{CN}{NA}=1$ តែ $MB=MC$ យើងមាននោះយើងបាន

$$\frac{AQ}{QB}.\frac{CN}{NA}=1\Leftrightarrow\frac{AQ}{QB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow(QN)\parallel(BC)$$

$$\Rightarrow\angle QNB=\angle NBC=\angle QBN$$

ដូចនេះ BNQ ជាត្រីកោណសមបាត។

25. កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន(x,y,z)ដែល

$$x^2+2xy+y^2-z^2=9$$

(Malaysia National Olympaid 2010)

សម្រាយ

សមីការសមមូល

$$(x+y-z)(x+y+z)=1\times 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ x+y+z=5 \end{cases} \Rightarrow x+y=5, z=4$$

$$\Rightarrow (x,y,z)=(1,4,4),(2,3,4),(3,2,4),(4,1,4)$$

26. តាង a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល abc=1។ស្រាយថា

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\geq\frac{3}{4}$$

(France Team Selection Test 2006)

សម្រាយ

តាមវិសមភាព**AM-GM** យើងមាន

$$a+b+c+ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=6=3+3abc$$

ថែមអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនិង$(a+b+c+ab+bc+ca)$ យើងបាន

$$4(a+b+c+ab+bc+ca)\geq 3+3(a+b+c)+3(ab+bc+ca)+3abc$$

$$\Leftrightarrow 4(a(c+1)+b(a+1)+c(a+1))\geq 3(1+a+b+c+ab+bc+ca+abc)$$

$$=3(1+a)(1+b)(1+c)$$

ចែកអង្គទាំងពីរនិង$4(1+a)(1+b)(1+c)$ យើងបានវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយ

27.តាងa,b,cជាជ្រុងនៃត្រីកោណមួយដែល a+b+c=3។ កំណត់តំលៃតូចបំផុតនៃ

$$a^2+b^2+c^2+\frac{4abc}{3}$$

(China Norther olympaid 2007)

សម្រាយ

តាង sជាក្រលាផ្ទៃនៃត្រីកោណមាន a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុង។

p,rនិងRជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណមាន a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុង។

តាមរូបមន្តហេរុងនិងរូបមន្តក្រលាផ្ទៃយើងបាន

$$s = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R}$$

យើងទាញបាន $\frac{4abc}{3} = \frac{16prR}{3} = 8rR$ (1) និង

$$r^2p = (p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Leftrightarrow r^2p = p^2 - (a+b+c)p^2 + (ab+bc+ca)p - abc$$

$$\Leftrightarrow r^2p = -p^3 + (ab+bc+ca)p - 4prR$$

(ព្រោះ a+b+c= 2p =3 និង តាម(1) abc=4prR)

យើងទាញបាន $ab+bc+ca = p^2+r^2+4rR$ (2)

តាមសមភាព $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ យើងទាញបាន

$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-(2ab+2bc+2ca)=2p^2-2r^2-8rR$ (3)

តាម(1)និង(2)យើងបាន

$$a^2+b^2+c^2+\frac{4abc}{3} = 2p^2-2r^2 \quad (4)$$

តាមវិសមភាព **Cauchy-Schwart** យើងមាន

$(ab+bc+ca)^2 \le (a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)$

យើងទាញបាន $ab+bc+ca \le a^2+b^2+c^2$ (5)

តាម (2), (3) និង (5) យើងបាន

$p^2+r^2+4rR \le 2p^2-2r^2-8rR$ យើងទាញបាន $3r^2+12rR \le p^2$ (6)

តាមវិសមភាពអឺលែរយើងមាន $2r \le R$ គុណអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនិង $12r$

យើងទាញបាន $24r^2 \le 12rR$ (7)

តាម(6)និង(7)យើងបាន

$27r^2 \le p^2$ (8)

តាម(4)និង(7)យើងបាន

$$a^2+b^2+c^2+\frac{4abc}{3} \ge 2p^2-\frac{2p^2}{27}=\frac{52p^2}{27}=\frac{52}{27}\times\frac{3^3}{2^2}=\frac{13}{3}$$

ដូចនេះតំលៃតូចបំផុតដែលអាចនៃ $a^2+b^2+c^2+\frac{4abc}{3}$ គឺ $\frac{13}{3}$

28. គេអោយ x,y,z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានៗ បង្ហាញថា

$$\frac{1+zx+zy}{(1+x+y)^2}+\frac{1+xy+xz}{(1+y+z)^2}+\frac{1+yz+yx}{(1+z+x)^2} \ge 1$$

(Japan Mathematical Olympaid finals 2010)

សម្រាយ

យើងនឹងស្រាយអោយឃើញថា

$$\frac{1+zx+zy}{(1+x+y)^2} \ge \frac{z}{x+y+z}$$

ខូបមាថាពិតយើងបាន

$$\frac{1+zx+zy}{(1+x+y)^2} \ge \frac{z}{x+y+z}$$

$$\Leftrightarrow x+y+z+zx^2+zy^2+xyz+xyz+z^2x+z^2y$$

$$\ge z+x^2z+y^2z+2xyz+2zx+2zy$$

$$\Leftrightarrow x+y+z^2(x+y) \ge 2z(x+y)$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(1-z)^2 \ge 0$$

ពិតយើងបាន

$$\sum_{cyc} \frac{1+xz+zy}{(1+x+y)^2} \ge \sum_{cyc} \frac{z}{x+y+z} = 1$$

វិសមភាពនេះត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់

29. តាង a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានៗ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a+b+3c}{3a+3b+2b} + \frac{b+c+3a}{3b+3c+2a} + \frac{c+a+3b}{3c+3a+2b} \ge \frac{15}{8}$$

(Spain Mathematical Olympaid 2010)

សម្រាយ

តាង $T = a+b+c$ វិសមភាពអាចសរសេរ

$$\sum_{cyc} \frac{a+b+3c}{3a+3b+2c} = \sum_{cyc} \frac{T+2c}{3T-c} = \sum \left(\frac{7T}{3T-c} - 2 \right) = 7T \sum \frac{1}{3T-c} - 6$$

តាមវិសមភាព **C-S-I** យើងបាន

$$\sum_{cyc} \frac{a+b+3c}{3a+3b+2c} \ge 7T \frac{9}{9T-a-b-c} - 6 = \frac{15}{8}$$

30. គេអោយABC ជាត្រីកោណមាន Γជារង្វង់ចារឹកក្រៅ។M ជាចំនុចនៅក្នុងត្រីកោណABC និងលើបន្ទាត់ពុះមុំA ផងដែរ។ បន្ទាត់AM,BM,CM ជួបរង្វង់ត្រង់ A_1, B_1, C_1 រៀងគ្នា។ឧបមាថា Pជាចំនុចប្រសព្វនៃ A_1CនិងAB។ Qជាចំនុចប្រសព្វនៃ A_1B_1 និងAC។ ស្រាយថាបន្ទាត់PQ ស្របបន្ទាត់BC។

(India National Olympaid 2010)

សម្រាយ

យក $A_2 = AA_1 \cap BC$

យើងមាន

$$\left.\begin{array}{l}\angle AA_1P = \angle AA_1C_1 = \angle C_1CA \\ \angle PAA_1 = \dfrac{\angle A}{2} = \angle MAC\end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Delta AA_1P \approx \Delta ACM$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{AM} = \frac{AA_1}{AC} \Rightarrow AP = \frac{AA_1.AM}{AC}$$

ស្រាយតាមលំនាំនេះយើងបាន

$$AQ = \frac{AA_1AM}{AB} \Rightarrow \frac{AP}{AQ} = \frac{AB}{AC}$$

$$\angle PAQ = \angle BAC \Rightarrow \Delta PAQ \approx \Delta BAC$$

ដោយ P, Q នៅលើ AB, AC នេះបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ PQ ស្របបន្ទាត់BC។

31. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមានa,b,c,d ចូរបង្ហាញថា

$$\sqrt{a^4+c^4}+\sqrt{a^4+d^4}+\sqrt{b^4+c^2}+\sqrt{b^4+d^4}\geq 2\sqrt{2}(ad+bc)$$

(Turkey National Olympiad 2005)

សម្រាយ

តាមវិសមតាព **Minkosky**

$$\sqrt{a^4+c^4}+\sqrt{a^4+d^4}+\sqrt{b^4+c^2}+\sqrt{b^4+d^4}\geq$$

$$\sqrt{(a^2+b^2)^2+(c^2+d^2)^2}+\sqrt{(a^2+b^2)^2+(c^2+d^2)^2}$$

$$\geq\sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2+(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}$$

$$=\sqrt{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)\quad(1)$$

តែតាមវិសមតាពវិសមតាព AM-GM យើងមាន

$$\sqrt{2}(a^2++d^2)\geq 2\sqrt{2}ad\qquad(2)$$

$$\sqrt{2}(b^2+c^2)\geq 2\sqrt{2}bc\qquad(3)$$

បូកអង្គនិងអង្គវិសមតាព(2)និង(3)យើងបាន

$$\sqrt{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)\geq 2\sqrt{2}(ad+bc)\ (4)$$

តាម(1)និង(4)យើងបាន

$$\sqrt{a^4+c^4}+\sqrt{a^4+d^4}+\sqrt{b^4+c^2}+\sqrt{b^4+d^4}\geq 2\sqrt{2}(ad+bc)$$

fhgnbthybnhyhn

32. អោយa,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាននិង a+b+c=1 ។បង្ហាញថា

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}+\sqrt{\frac{ca}{ca+b}}\le\frac{3}{2}$$

(Kyrgyzstan National Olympaid 2010)

សម្រាយ

ពិនិត្យ $ab+c=ab+1-b-a=(1-b)-a(1-b)=(1-a)(1-b)$
$=(a+c)(b+c)$

យើងបាន $\sum_{cyc}\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}=\sum_{cyc}\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}$

តាង $x=a+b.y=b+c,z=c+a,p=\frac{a+b+c}{2}$

យើងទាញបាន $a=p-y,b=p-z,c=p-x$

ម្យ៉ាងយើងទាញបាន $x+y>z,y+z>x,z+y>x$

(ព្រោះ $x+y=a+c+2b>a+c=z$)

នោះ x, y, z ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណាមួយ

យក A, B, C ជាមុំឈមនឹងជ្រុង x, y, z (A+B+C=180)

យើងបាន

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}=\sum_{cyc}\sqrt{\frac{(p-y)(p-z)}{yz}}=Sin\frac{A}{2}+Sin\frac{B}{2}+Sin\frac{C}{2}$$

ព្រោះ $\sqrt{\frac{(p-y)(p-z)}{yz}}=Sin\frac{A}{2}$

តាង f(x)=Sinx យើងបាន

$$f(x)=Sinx \Rightarrow f'(x)=Cosx \Rightarrow f''(x)=-Sinx<0 \qquad \forall x\in(o,180)$$

តាមវិសមភាព **Jensen** យើងបាន

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}=Sin\frac{A}{2}+Sin\frac{B}{2}+Sin\frac{C}{2}\le 3Sin\left(\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{3}\right)=\frac{3}{2}$$

33. បីចំនុចខុសគ្នា A, B, C ស្ថិតក្នុងរង្វង់ (O) មួយៗ បន្ទាត់ប៉ះ (O) ត្រង់ A និង B ប្រសព្វគ្នាត្រង់ Pៗបន្ទាត់ប៉ះ (o) ត្រង់Cកាត់បន្ទាត់ AB ត្រង់Qៗ បង្ហាញថា $PQ^2=PB^2+QC^2$

(Mathematical Olympaid In Poland 2002)

សំរាយ

ដោយ P ជាចំនុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A និង B នោះPA=PBនោះ

AB=2PACos∠PAB

យើងមាន

$$AB=2PACos\angle PAB$$

$$\Leftrightarrow AB.AQ=2PA.AQCos\angle PAB$$

$$\Leftrightarrow AQ^2+AB.AQ=AQ^2-2PA.AQCos(180-\angle PAB)$$

$$=AQ^2-2AP.AQCos\angle APQ$$

ម្យ៉ាងទៀតតាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ APQ យើងបាន

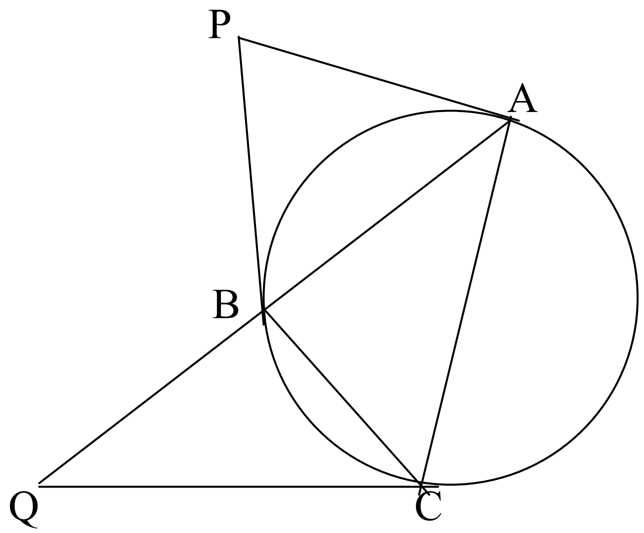
$$PQ^2=AP^2+AQ^2-2AP.AQCos\angle PAQ=AP^2+AQ^2+AB.AQ(1)$$

តាមទ្រឹស្តីបទស្វ័យគុណចំនុចរង្វង់(O)ធៀបនឹងបន្ទាត់ CQ យើងមាន

$$CQ^2 = QA.QB = AQ(AQ + AB) = AQ^2 + AQ.AB \quad (2)$$

តាម(1)និង(2)យើងបាន

$$PQ^2 = AP^2 + CQ^2$$



34. គេអោយត្រីកោណកែងពីរដែលរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណមួយស្មើរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណមួយទៀតៗតាង S, S_1 ជាក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ ទាំងពីរខាងលើរៀងគ្នាៗ បង្ហាញថា $\frac{S}{S_1} \geq 3 + 2\sqrt{2}$

(France Team Selection Test 2005)

សម្រាយ

តាង a, b, c ជាជ្រុងនៃត្រីកោណមានក្រលាផ្ទៃ S (a ជាអ៊ីប៉ូតេនុស)

និង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងៗ តាង x, y, z ជាជ្រុងនៃត្រីកោណមាន

ក្រលាផ្ទៃ S_1(x ជាអ៊ីប៉ូតេនុស) និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅៗ

តាមសម្រាយលំហាត់ទី2យើងមាន

$r=\frac{b+c-a}{2}$ ម្យ៉ាងទៀត $R=\frac{x}{2}$ (កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណកែងមាន x

ជាអ៊ីប៉ូតេនុសៗតែតាមបំរាប់ r=R យើងបាន

$$r=R\Leftrightarrow\frac{b+c-a}{2}=\frac{x}{2}\Leftrightarrow b+c=a+x$$

ម្យ៉ាងទៀតតាមរូបមន្តក្រលាផ្ទៃក្នុងត្រីកោណទាំងពីរនេះយើងមាន

$S_1=\frac{yz}{2}$ និង $S=\frac{(a+b+c)}{2}r=\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4}$ តែ $b+c=a+x$

និង $r=R=\frac{b+c-a}{2}=\frac{x}{2}$ យើងទាញបាន $S=\frac{(a+a+x)}{4}x$

ធ្វើផលធៀបក្រលាផ្ទៃត្រីកោណទាំងពីរយើងបាន

$$\frac{S}{S_1}=\frac{(2a+x)x}{2yz}$$

តាមវិសមភាព **AM-GM**យើងមាន

$x^2=y^2+z^2\geq 2yx$ យើងទាញបាន

$$\frac{S}{S_1}\geq\frac{2a+x}{x}=\frac{2a}{x}+1 \qquad (1)$$

តាមវិសមភាព **Cauchy-Schwart** យើងមាន

$$(b+c)^2\leq 2(b^2+c^2)=2a^2\Rightarrow b+c\leq\sqrt{2}a$$

ដកអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនិង a យើងបាន

$$b+c-a\leq a(\sqrt{2}-1)\Leftrightarrow\frac{b+c-a}{2}\leq\frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$$

ដោយ $r=R=\frac{b+c-a}{2}=\frac{x}{2}$ យើងបាន

$$\frac{(\sqrt{2}-1)a}{2} \geq \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{x} \geq \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 \quad (2)$$

តាមទំនាក់ទំនង(1)និង(2)យើងទាញបាន

$$\frac{S}{S_1} \geq 3 + 2\sqrt{2}$$

35. គេអោយx,y,z ជាចំនួនពិតដែល $0 \leq x.y.z \leq 1$ ។

បង្ហាញថា $xyz + (1-x)(1-y)(1-z) \leq 1$

(Slovania National Olympaid 2010)

សម្រាយ

តាមសម្មតិកម្មយើងមាន 0≤ x,y,z ≤1 យើងបាន

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq 1 \\ z \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy \leq y \\ yz \leq z \\ zx \leq x \end{cases}$$

បូកអង្គនិងអង្គនៃវិសមភាពយើងបាន

$$xy + yz + zx \leq x + y + z$$

យើងទាញបាន $zy + yz + zx - x - y - z \leq 0$

វិសមភាពសមមូល

$$xyz + 1 - (x + y + z) + (xy + yz + zx) - xyz \leq 1$$

យើងបំលែងបាន $xyz + (1-x)(1-y)(1-z) \leq 1$

36.ឧបមាថា a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល (a+b)(b+c)(c+a)=1

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $ab+bc+ca \le \frac{3}{4}$

(Croatia Team Selection Tests 2006)

សម្រាយ

តាង x = a+b, y = b+c, z=c+a, p = a+b+c, xyz = 1

យើងបាន a = p-y, b = p-z ,c = p-x

យើងសង្កេតឃើញថា x+y=z+2b>z

នោះ x, y,z ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយៗ

តាង r, R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនិងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណមាន

រង្វាស់ជ្រុង x, y, z ៗយើងបាន

ab +bc +ca = (p-x)(p-y)+(p-y)(p-z)+(p-c)(p-a)
$= 3p^2-4p^2+xy+yz+zx$

ដូចមានស្រាយក្នុងលំហាត់ទី 27 យើងមានទំនាក់ទំនង

$xy+yz+zx= p^2 +r^2 +4rR$ នោះយើងបាន

$ab +bc +ca =-p^2 +p^2 +r^2 +4rR=r^2+4rR$

តាមរូបមន្តក្រលាផ្ទៃនិងវិសមភាព AM-GM យើងបាន

$$pr = \frac{xyz}{4R} = \frac{1}{4R} = \frac{x+y+z}{2} r \ge \frac{3}{2} r\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2} r$$

យើងទាញបាន $4Rr \le \frac{2}{3} \quad (1)$

តាមរូបមន្ត **Euler** យើងមាន

$$r \le \frac{R}{2} \Leftrightarrow r^2 \le \frac{Rr}{2} \le \frac{1}{12} \qquad (2)$$

តាមទំនាក់ទំនង(1)និង(2)យើងបាន

$$ab + bc + ca = r^2 + 4Rr \le \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

វិសមភាពនេះពិត ។

37. អង្កត់ទ្រូងនៃចតុកោណព្នាយABCD ចែកចតុកោណព្នាយជា ត្រីកោណ4 ។ s_1និងs_2ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណដែលមានជ្រុងមួយជាបាទចតុកោណព្នាយ ។ រកផ្ទៃក្រឡាSនៃចតុកោណព្នាយអនុគមន៍នឹង s_1និងs_2 ។

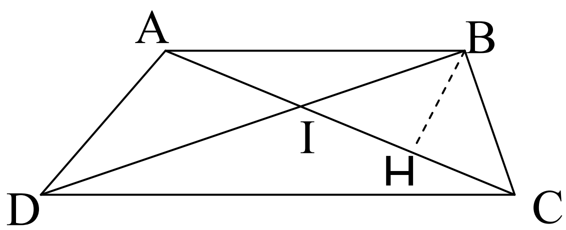
(ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេសកម្ពុជាថ្នាក់ទី៩ ឆ្នាំ ២០១១)

សម្រាយ

យក $AC \cap DB = I$ & H ជាចំនោលកែង B លើ AC

ត្រីកោណ AIB និង CID ដូចគ្នាយើងបាន

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AB^2}{CD^2} \Leftrightarrow \frac{AB}{CD} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$$



ម្យ៉ាងទៀត

$$\frac{S_{ACB}}{S_{BIC}} = \frac{\frac{1}{2}AC.BH}{\frac{1}{2}IC.BH} = \frac{AC}{CI} = \frac{S_1 + S_{IBC}}{S_{IBC}} = 1 + \frac{S_1}{S_{IBC}}$$

យើងបាន

$$1+\frac{S_1}{S_{IBC}}=1+\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} \Leftrightarrow S_{IBC}=\sqrt{S_1S_2}$$

ដូចគ្នាដែរ

$$S_{IAD}=\sqrt{S_1S_2}$$

តែ

$$S=S_1+S_2+S_{AID}+S_{BIC}=S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2}$$

$$S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$$

ដូចនេះ $S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$

38. គេអោយត្រីកោណសមបាតABC កំពូលA ផ្ទៃក្រលា S។MNជាបាតមធ្យម ត្រូវនឹងបាត BC ហើយ O ជាប្រសព្វនៃ MN និងកំពស់គូសចេញពីកំពូល A ។ គេបន្លាយ[CO) កាត់AB ត្រង់D និងបន្លាយ[BO) កាត់AC ត្រង់E ។ ចូររកក្រលាផ្ទៃនៃចតុកោណ ADOE អនុគមន៍ទៅនឹង S។

(ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងប្រទេសកម្ពុជាថ្នាក់ទី៩ ឆ្នាំ ២០១១)

សម្រាយ

តាង H, K ជាចំនោលកែងនៃ A, D លើ BC រៀងគ្នា

យើងមាន

M ជាចំនុចកណ្តាល AB និង OM ស្រប BC នោះ OM ជាប្បាត

មធ្យមនៃត្រីកោណ ABH នោះ OM=1/2HB=1/4BC

នោះ $S_{MOD} = \frac{1}{16} S_{DCB}$

ដោយ OM=1/4BC នោះ

DM=1/4DB នោះ 3/2DB=AB នោះ

$$S_{AOM} = \frac{1}{4} S_{AHB} = \frac{1}{8} S = S_{OAD} + S_{ODM} = S_{OAD} + \frac{1}{24} S$$

$$\Rightarrow S_{AOD} = \frac{1}{12} S$$

ដូចគ្នាដែរ

$$S_{AOE} = \frac{1}{12} S$$

យើងទាញបាន $S_{AEOD} = \frac{S}{6}$

39. តាងa,b,cជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន។បង្ហាញថា

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\ge 1\ge \frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}$$

(Romania 1997)

សម្រាយ

តាមវិសមភាព **Cauchy-Schwart Englel Form** យើងបាន

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\ge \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}=1$$

ថែមអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពដោយ $\frac{2bc}{a^2+2bc}+\frac{2ca}{b^2+2ca}+\frac{2ab}{c^2+2ab}$ យើងបាន

$3\ge 1+\frac{2bc}{a^2+2bc}+\frac{2ca}{b^2+2ca}+\frac{2ab}{c^2+2ab}$ យើងទាញបាន

$1\ge \frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}$

សំណើរវិសមភាពខាងលើពិត

40. តាង a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល abc=1។ស្រាយថា

$$\frac{1+ab^2}{c^3}+\frac{1+bc^2}{a^3}+\frac{1+ca^2}{b^3}\ge \frac{18}{a^3+b^3+c^3}$$

(Hong Kong 2000)

សម្រាយ

តាង $T=\frac{1+ab^2}{c^3}+\frac{1+bc^2}{a^3}+\frac{1+ca^2}{b^3}$

យើងមាន $T=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{ab^2}{c^3}+\frac{bc^2}{a^3}+\frac{ca^2}{b^3}$

តាមវិសមភាព **Cauchy-Schwart** និងវិសមភាព **AM-GM** យើងបាន

$$T\geq\frac{9}{a^3+b^3+c^3}+3\sqrt[3]{\frac{(abc)^3}{(abc)^3}}=\frac{3+3(a^3+b^3+c^3)}{a^3+b^3+c^3}\geq\frac{9+9}{a^3+b^3+c^3}$$

$$T\geq\frac{18}{a^3+b^3+c^3}$$

41-គេអោយត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង AB, BC, CA បង្កើតបាន ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ។

ក-បង្ហាញថា SinA,SinB,SinC បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ។

ខ- បង្ហាញថាផលគុណ $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$ មានតំលៃថេរ។

(ប្រឡងជ្រើសរើសបេក្ខជនចូលរួមប្រឡង APMO របស់កម្ពុជាឆ្នាំ 2009)

សម្រាយ

យក P ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC តាមសម្មតិកម្មយើងបាន

BC-AB =CA-BC

ដោយAB, BC, CA បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយនោះ SinA,SinB,SinC

មិនអាចស្មើគ្នាទេ។

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសយើងបាន

$$\frac{AB}{SinC}=\frac{BC}{SinA}=\frac{CA}{SinB}=\frac{BC-AB}{SinA-SinC}=\frac{CA-BC}{SinB-SinA}$$

$$\Leftrightarrow 2SinA=SinB+SinC$$

សមតាពនោះបញ្ជាក់ថា SinA, SinB, SinC ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ

ដោយប្រើសមតាព

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

គុណអង្គទាំពីរនៃសមតាពយើងបាន

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{p-c}{p}=1-\frac{c}{p}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

ព្រោះ $p=\dfrac{a+b+c}{2},2c=a+b$

ដូចនេះសំនើរទាំងពីរពិត ។

42-ត្រីកោណសមបាត ABC មួយមានមុំ ∠A=90 ។យក M ជាចំនុចកណ្តាលនៃAB។បន្ទាត់មួយគូសចេញពីAហើយកែងនឹងCMកាត់ជ្រុងBCត្រង់P។ បង្ហាញថា ∠AMC=∠BMP ។

(Baltic Way 2000)

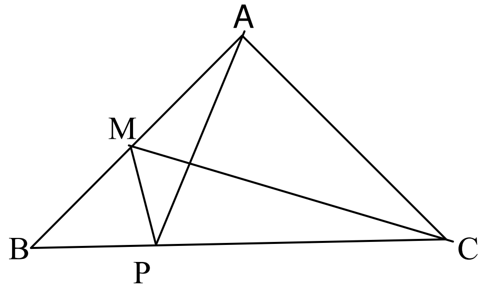
សម្រាយ

យក AB=AC = a តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ

ក្នុងត្រីកោណកែង AMC យើងបាន

$$CM^2 = AC^2 + AM^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{\sqrt{5}a}{2}$$



ម្យ៉ាងទៀត

∠CMA=∠PAC&∠PAB=∠MCA នោះយើងបាន

$$\sin\angle PAC = \sin\angle AMC = \frac{a}{a\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\angle PAB = \sin\angle ACM = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ ABP, ACP យើងបាន

$$\frac{BP}{\sin\angle BAP} = \frac{AP}{\sin 45^\circ} = \frac{CP}{\sin\angle CAP}$$

$$\frac{BP}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{CP}{\frac{2}{\sqrt{5}}} \Leftrightarrow \frac{BP}{CP} = \frac{1}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{BM}{AC}$$

$$\Leftrightarrow \Delta BMP \approx \Delta CMA$$

$$\Rightarrow \angle BMP = \angle PAC = \angle AMC$$

សំណើរនេះពិតៗ

43 កំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$(y+1)f(x+y)=f(xf(y))$$

គ្រប់ចំនួនពិត មិនអវិជ្ជមានx,y

(Slovenia National Olympaid 2010)

សម្រាយ

មាន $(y+1)f(x+y)=f(xf(y))$ (1)

យក x = 0 ជួសក្នុង (1) យើងបាន

$$f(x)=\frac{a}{x+1} \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន

$$\frac{(y+1)a}{x+y+1}=\frac{a}{xf(y)+1}\Leftrightarrow\frac{y+1}{x+y+1}=\frac{1}{xf(y)+1}=\frac{1}{\frac{ax}{y+1}+1}=\frac{y+1}{ax+y+1}$$

$$\Leftrightarrow x+y+1=ax+y+1\Leftrightarrow a=1$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x+1}$$

ដូចនេះ $f(x)=\frac{1}{x+1}$

44. ចំពោះចំនួនពិត t និងចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b យើងមាន

$$2a^2 - 3abt + b^2 = 2a^2 + abt - b^2 = 0$$

ចូរកំណត់ t ។

(Slovenia National Olympaid 2010)

សម្រាយ

តាមសម្មតិកម្មយើងបាន

$$2a^2 - 3abt + b^2 = 2a^2 + abt - b^2$$

$$\Leftrightarrow 2b^2 = 4abt \Leftrightarrow b = 2at \Rightarrow t > 0 \quad (a, b > 0)$$

យើងបាន

$$2a^2 - 3abt + b^2 = 2a^2 - 6a^2t^2 + 4a^2t^2 = 0$$

$\Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = 1 \quad (1)$ ព្រោះ $t > 0$

ម្យ៉ាងទៀត

$$2a^2 + abt - b^2 = 2a^2 + 2a^2t^2 - 4t^2a^2 = 0$$

$\Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = 1 \quad (2)$ ព្រោះ $t > 0$

តាម (1) និង (2) យើងបាន $t = 1$

45. កំណត់ចំនួនពិត x នៅចន្លោះ $[0,2\pi)$ ដែល

$$27.3^{3\sin x} = 9^{\cos^2 x}$$

(Slovenia National Olympaid 2010)

សម្រាយ

មាន

$$27.3^{3\sin x} = 9^{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 3^{3\sin x+3} = 3^{2\cos^2 x} \Leftrightarrow 3\sin x + 3 = 2\cos^2 x$$

$$3\sin x + 3 = 2\left(1-\sin^2 x\right) \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = -1 \vee \sin x = -\frac{1}{2}$$

បើ $\sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \quad \left(x \in [0,2\pi)\right)$

បើ $\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6} \quad \left(x \in [0,2\pi)\right)$

ដូចនេះ $x \in \left\{\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}\right\}$

46.រង្វង់ចារឹកក្រៅ ABC ត្រីកោណប៉ះជ្រុង BC និង AC ត្រង់D និងE រៀងគ្នា។ បង្ហាញថាបើ AD=BE នោះ ABC ជាត្រីកោណសមបាត។

(Austraian Mathematical Olympaid 2006)

សម្រាយ

តាង a, b, c ជាជ្រុងឈមនឹងមុំ A, B, C រៀងគ្នា p ជាកន្លះបរិមាត្រ

តាមទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំយើងបាន

$$AD = \frac{2bcCos\frac{A}{2}}{b+c}, BE = \frac{2acCos\frac{B}{2}}{a+c}$$

តែ $Cos^2\frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}, Cos^2\frac{B}{2} = \frac{p(p-b)}{ac}$

ដោយ AD=BE នោះ $AD^2=BE^2$ នោះយើងបាន

$$\left(\frac{2bcCos\frac{A}{2}}{b+c}\right)^2 = \left(\frac{2acCos\frac{B}{2}}{a+c}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{b^2\frac{p(p-a)}{cb}}{(b+c)^2} = \frac{a^2\frac{p(p-b)}{ac}}{(a+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow b(p-a)(a+c)^2 = a(p-b)(b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow bp(a+c)^2 - ab(a+c)^2 = ap(b+c)^2 - ab(b+c)^2$$

យើងទាញបាន

$$\Leftrightarrow p\left(b(a+c)^2 - a(b+c)^2\right) + ab\left((b+c)^2 - (a+c)^2\right) = 0$$

$$p\left(ba^2 + 2abc + bc^2 - b^2a - 2abc - c^2a\right) + ab(b+c-a-c)(a+b+c+c) = 0$$

$$\Leftrightarrow p\left(c^2(b-a) - ab(b-a)\right) + ab(b-a)(2p+c) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-a)\left(pc^2 - pab + 2pab + abc\right) = 0$$

$$\Rightarrow b - a = 0 \quad \left(pc^2 - pab + 2abp + abc = pc^2 + abp + abc > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow b = a$$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសមបាតៗ

47.ចតុកោណ ABCD មួយកែងយកEជាប្រសព្វរវាងអង្កត់ទ្រូងហើយ S_1, S_2 S ជាក្រលាផ្ទៃនៃ ABE, CDE និង ABCD រៀងគ្នាៗ

ចូរស្រាយថា $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \le \sqrt{S}$

(Austraian Mathematical Olympaid 1990)

សម្រាយ

តាង S_3, S_4 ជាក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ AED, BDE រៀងគ្នា

ហើយបាន

$$S_1.S_2 = AI.BI.CI.DI.Sin^2\angle AIB$$
$$= AI.BI.CI.DI.Sin^2(180-\angle DIA) = S_3S_4$$

តាមវិសមភាព **AM - GM** យើងបាន

$$S = S_1+S_2+S_3+S_4 \ge S_1+S_2+2\sqrt{S_3S_4}$$
$$= S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2}$$
$$= \left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{S} \ge \sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$$

ដូចនេះសំណើរខាងលើពិតៗ

48. ចំនុច D និង E ស្ថិតនៅលើជ្រុងBCនិងACនៃត្រីកោណABCបន្ទាត់ ADនិងBEប្រសព្វគ្នាត្រង់PៗKនិងLជាចំនុចនៅលើជ្រុងBCនិងACរៀងគ្នា ដែលCLPKជាប្រលេឡូក្រាមៗ បង្ហាញថា $\frac{AE}{EL}=\frac{BD}{DK}$

(Mathematical Olympaid In Poland 2000)

សម្រាយ

ក្នុងត្រីកោណ BPK និង PEL មាន KP || ELនិងPL || KB និងP, E, Kនៅលើបន្ទាត់តែមួយយើងបាន $\Delta LPE \approx \Delta KPB$ នោះ

$$\frac{BP}{PE}=\frac{PK}{EL} \qquad (1)$$

ដូចគ្នាដែរ $\Delta DPK \approx \Delta APL$ យើងបាន

$$\frac{PK}{DK}=\frac{AL}{PL}\Rightarrow PK=\frac{AL.DK}{PL} \quad (2)$$

តាម(1)និង(2)យើងបាន

$$\frac{BP}{PE}=\frac{AL.DK}{PL.EL} \quad (3)$$

តាមទ្រឹស្តីបទតាលែសក្នុងត្រីកោណBCE

$$\frac{BP}{PE}=\frac{BK}{KC} \quad (4)$$

តាម(3)និង(4)

$$\frac{Al.DK}{PL.EL}=\frac{BK}{KC}$$

$$\Leftrightarrow AL.DK=BK.EL \quad (KC=PL)$$

$$\Leftrightarrow DK(AE+EL)=EL(BD+DK)$$

$$\Leftrightarrow AE.DK=BD.EL$$

$$\Leftrightarrow \frac{AE}{EL}=\frac{BD}{DK}$$

សំណើរខាងលើពិត

49. គេឲ្យr,s,tជាឬសនៃពហុធាដឺក្រេទីបី

$$P(x) = x^3 - 2007x + 2002$$

គណនាតំលៃនៃ $\frac{r-1}{r+1} + \frac{s-1}{s+1} + \frac{t-1}{t+1}$

(Irish Mathematical Olympaid 2007)

សម្រាយ

ដោយr,s,tជាឬសនៃពហុធាដឺក្រេទីបី $P(x) = x^3 - 2007x + 2002$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតយើងបាន

r + t + s = 0, rs + st + tr =-2007, rst = -2002

យើងមាន

$$\frac{r-1}{r+1} + \frac{s-1}{s+1} + \frac{t-1}{t+1} = \frac{\sum_{cyc}(r-1)(s+1)(t+1)}{(r+1)(s+1)(t+1)}$$

$$= \frac{\sum_{cyc}(r - s - t + rs + rt - st + rst - 1)}{1 + r + s + t + rs + rt + st + rst}$$

$$= \frac{rs + st + tr - r - s - t + 3rst - 3}{1 + r + s + t + rs + st + tr + rst}$$

$$= \frac{-2007 + 3 \times (-2002) - 3}{1 - 2007 - 2002} = \frac{8015}{4008}$$

ដូចនេះ $\frac{r-1}{r+1} + \frac{s-1}{s+1} + \frac{t-1}{t+1} = \frac{8015}{4008}$

50. គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណដែល $\angle BAC \neq 90$ ។ យក O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC និង Γ ជា ផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ OBC ។ ឧបមាថា Γ ប្រសព្វនឹងអង្កត់ AB ត្រង់ P ខុសពី B និង Γ ប្រសព្វនឹងអង្កត់ AC ត្រង់ Q ខុសពី C ។ តាង ON ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់ Γ ។ បង្ហាញថាចតុកោណ APNQ ជាប្រលេឡូក្រាម។ (APMO 2010)

សម្រាយ

តាង (C) ជារង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ OBC យើងមាន

$\angle APN=180 -\angle BPN$ ($N\in[AB]$)

ដោយ $P\in(C)$ និង $B\in(c)$ នោះ

$\angle BPN = \angle BON$ (មុំស្កាត់ធ្នូ រួម BN)

តែ $\angle A=1/2\angle BOC$ (មុំផ្ចិតនិងមុំស្កាត់ធ្នូ រួម)

តែ $\angle BOC=2\angle NOB$ នោះ

$\angle BPN=\angle A$ នោះ$\angle APN = 180^\circ -\angle A$ ឬ $\angle A+\angle APN=180^\circ$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\angle AQN=180-\angle A$ (2) នោះ $\angle APN=\angle AQN$ (3)

តាម (1), (2)និង (3)យើងបាន

$\angle APN=\angle AQN(4)$

តាម (3) និង (4) យើងបាន ចតុកោណ APNQ ជាប្រលេឡូក្រាម។

51. ក- កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដោយដឹងថា 2^n-1ចែកដាច់នឹង 7 ។

ខ-ចូបង្ហាញថាគ្មានចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ណាដែល 2^n+1 ចែកដាច់នឹង 7 ។

(IMO 1964)

សម្រាយ

ក-យើងដឹងថាគ្រប់ចំនួនគត់អាចចែកនឹង3អោយសំណល់ 0, សំណល់1 ឬ សំណល់ 2

-បើ$n \equiv 2 \pmod 3$

នោះមានq_1ដែល$n=3q_1+2$នោះ

$$2^n = 2^{3q_1+2} = 4\times 8^{q_1} \equiv 4 \pmod 7 \quad (8 \equiv 1 \pmod 7)$$
$$\Rightarrow 2^n - 1 \equiv 3 \pmod 7$$

នោះ $n \equiv 2 \pmod 3$ជាករណីមិនអាច

-បើ$n \equiv 1 \pmod 3$

នោះមាន q_2 ដែល $n=3q_2+1$ នោះ

$$2^n = 2^{3q_2+1} = 2\times 8^{q_2} \equiv 2 \pmod 7 \quad (8 \equiv 1 \pmod 7)$$
$$\Rightarrow 2^n - 1 \equiv 1 \pmod 7$$

នោះ $n \equiv 1 \pmod 3$ជាករណីមិនអាច

- បើ$n \equiv 0 \pmod 3$

នោះមាន q_3 ដែល $n=3q_3$ នោះ

$$2^n = 2^{3q_3} = 8^{q_3} \equiv 1 \pmod 7 \quad (8 \equiv 1 \pmod 7)$$
$$\Rightarrow 2^n - 1 \equiv 0 \pmod 7$$

ដូចនេះ $\forall n$ ជាពហុគុណនៃ 3 យើងបាន 2^n-1ចែកដាច់នឹង 7

ម្យ៉ាងទៀតចំពោះសំនួរ(ខ)យើងបង្ហាញដូចខាងក្រោម

-បើ $n \equiv 2 \pmod 3$

នោះមាន q_1 ដែល $n=3q_1+2$នោះ

$$2^n = 2^{3q_1+2} = 4 \times 8^{q_1} \equiv 4 \pmod 7 \quad (8 \equiv 1 \pmod 7)$$
$$\Rightarrow 2^n + 1 \equiv 5 \pmod 7$$

នោះ $n \equiv 2 \pmod 3$ជាករណីដែល 2^n+1 ចែកមិនដាច់នឹង7

-បើ $n \equiv 1 \pmod 3$

នោះមាន q_2ដែល $n=3q_2+1$នោះ

$$2^n = 2^{3q_2+1} = 2 \times 8^{q_2} \equiv 2 \pmod 7 \quad (8 \equiv 1 \pmod 7)$$
$$\Rightarrow 2^n + 1 \equiv 3 \pmod 7$$

នោះ $n \equiv 1 \pmod 3$ ជាករណី ដែល 2^n+1 ចែកមិនដាច់នឹង7

- បើ$n \equiv 0 \pmod 3$

នោះមាន q_3 ដែល $n=3q_3$ នោះ

$$2^n = 2^{3q_3} = 8^{q_3} \equiv 1 \pmod 7 \quad (8 \equiv 1 \pmod 7)$$

$$\Rightarrow 2^n + 1 \equiv 2 \pmod 7$$

នោះ $n \equiv 0 \pmod 3$ ជាករណី ដែល 2^n+1 ចែកមិនដាច់នឹង 7

សរុបមក គ្មានចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ណាដែល 2^n+1 ចែកដាច់នឹង 7 ទេ ។

52. គេឲ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $(a+b)(b+c)(c+a)=8$

បង្ហាញថា $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[27]{\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}}$

(Macedonia National Olympaid 2008)

សម្រាយ

តាមសមភាព

$$a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3+b^3+c^3}{3} = \frac{(a+b+c)^3}{3} - 8$$

តាង $v = \dfrac{a+b+c}{3}$ នោះ $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3} = 9v^3 - 8$

វិសមភាពសម្មូល $v \geq \sqrt[27]{9v^3-8} \Leftrightarrow v^{27} \geq 9v^3 - 8$

ពិតព្រោះតាមវិសមភាព **AM-GM** ចំពោះគ្រប់ $v>0$ យើងមាន

$$v^{27} + 1+1+1+1+1+1+1+1 \geq 9\sqrt[9]{v^{27}} = 9v^3$$

$$\Leftrightarrow v^{27} \geq 9v^3 - 8$$

53.គេឲ្យa,b,cជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលa+b+c=1។បង្ហាញថា

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\le 1$$

(Bosnia Herzegovina Team Selection Test 2011)

សម្រាយ

តាមវិសមភាព **Holder** ចំពោះចំនួនពិតវិជ្ជមាន a_i, b_i, c_i (i=1,2,3)

យើងមាន

$$\left(a_1^3+b_1^3+c_1^3\right)\left(a_2^3+b_2^3+c_2^3\right)\left(a_3^3+b_3^3+c_3^3\right)\ge\left(a_1a_2a_3+b_1b_2b_3+c_1c_2c_3\right)^3$$

យើងយក
$$a_1=\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{1+b-c},a_2=a_3=\sqrt[3]{a}$$
$$b_1=\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{1+c-a},b_2=b_3=\sqrt[3]{b}$$
$$c_1=\sqrt[3]{c}\sqrt[3]{1+a-b},c_2=c_3=\sqrt[3]{c}$$

យើងបាន

$$\left(a_1^3+b_1^3+c_1^3\right)=\left(a+b+c\right)$$
$$\left(a_2^3+b_2^3+c_2^3\right)=\left(a+b+c\right)$$
$$\left(a_3^3+b_3^3+c_3^3\right)=a+b+c$$
$$\left(a_1a_2a_3+b_1b_2b_3+c_1c_2c_3\right)=a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}$$

នោះវិសមភាព**Holder**ខាងលើទៅជា

$$1=\left(a+b+c\right)^3\ge\left(a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\right)^3$$

ដូចនេះ $a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\le 1$

54. គេឲ្យa,b,cជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល ។បង្ហាញថា

$$\sqrt{a^4+b^4+c^4}+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\geq\sqrt{a^3b+b^3c+c^3b}+\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3}$$

(KMO Summer Program Test 2001)

សម្រាយ

តាង $T=\sqrt{a^4+b^4+c^4}+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

តាមវិសមភាព **Minkosky** និងវិសមភាព **AM-GM** យើងបាន

$$T\geq\sqrt{\left(a^2+ab\right)^2+\left(b^2+bc\right)^2+\left(c^2+ca\right)^2}$$

$$\geq\sqrt{4a^3b+4b^3c+4c^3b}=2\sqrt{a^3b+b^3c+c^3b}\qquad(1)$$

ម្យ៉ាងទៀត តាមវិសមភាព **Minkosky** និងវិសមភាព **AM-GM** យើងបាន

$$T\geq\sqrt{\left(b^2+ab\right)^2+\left(c^2+bc\right)^2+\left(a^2+ca\right)^2}$$

$$\geq\sqrt{4ab^3+4bc^3+4ca^3}=2\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3}\qquad(2)$$

បូកអង្គនិងអង្គនៃវិសមភាព (1) និង (2) យើងបាន

$$2T\geq2\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3}+2\sqrt{a^3b+b^3c+c^3b}$$

សំរួលអង្គទាំងពីរនឹង 2 យើងបានវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយគឺពិត

55. កំណត់តំលៃធំបំផុតនិងតូចបំផុតនៃx+y ដែលx,y ជាចំនួនពិតដែល$x\geq -2, y\geq -3$ និង $x-2\sqrt{x+2}=y-2\sqrt{y+3}$

(Irish Mathematical Olympaid 2006)

សម្រាយ

តាង t=x+y តាមសមភាពខាងលើយើងបាន

$$x+y=2\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{y+3}\right)\Leftrightarrow t^2=4\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{y+3}\right)^2 \quad (1)$$

តែតាមវិសមភាព **Cauchy-Schwart** យើងមាន

$$t^2=4\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{y+3}\right)^2\leq 8(x+y+5)=8t+40$$

$$\Rightarrow t^2-8t+40\leq 0$$

$$\Rightarrow t\in\left[4-\sqrt{56},4+\sqrt{56}\right] \quad (2)$$

ហេតុនេះ $Min(x+y)=4-\sqrt{56}$ និង $Max(x+y)=4+\sqrt{56}$

56. បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងលុះត្រាតែ

$\text{Sin}^2A+\text{Sin}^2B+\text{Sin}^2C=2$

(Irish Mathematical Olympaid 2007)

សម្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសយើងមាន

$$a^2=b^2+c^2-2bcCosA \quad (1)$$

តែតាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

$$a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C \quad (2)$$

តាមទំនាក់ទំនង(1)និង(2)យើងបាន

$$Sin^2 A = Sin^2 B + Sin^2 C - 2SinBSinCCosA$$

តែ $Sin^2A+ Sin^2B+ Sin^2C=2$ នោះ

$$Sin^2 A = 2 - Sin^2 A - 2SinBSinCCosA$$

$$\Leftrightarrow Sin^2 A + SinBSinCCosA - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow Sin^2 A + SinBSinCCosA - Sin^2 A - Cos^2 A = 0$$

$$\Leftrightarrow CosA(SinBSinC - CosA) = 0$$

$\Rightarrow CosA = 0 \Rightarrow A = 90$ ឬ $SinBSinC = CosA$

-បើ $SinBSinC = CosA$ តែ

CosA=Cos(180-B-C)=-Cos(B+C)=SinBSinC-CosBCosC

នោះ CosBCosC=0 យើងបាន CosB=0ឬCosC=0

នោះ B=90 ឬ C=90

ដូចនេះបើ $Sin^2A+ Sin^2B+ Sin^2C=2$នោះត្រីកោណ ABC

ជាត្រីកោណកែងៗ(*)

+បើ ABC ជាត្រីកោណកែងនោះ R=C/2 (R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង)

តែតាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R=c$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{\sin^2 A}=\frac{b^2}{\sin^2 B}=\frac{c^2}{\sin^2 C}=c^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}$$

$$=\frac{2c^2}{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}$$

$\Leftrightarrow$ $\text{Sin}^2\text{A}+\text{Sin}^2\text{B}+\text{Sin}^2\text{C}=2(**)$

តាម (*) និង (**) ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងលុះត្រាតែ

$\text{Sin}^2\text{A}+\text{Sin}^2\text{B}+\text{Sin}^2\text{C}=2$ ។

57.កំណត់គ្រប់អនុគមន៍f ដែលកំណត់ពីសំណុំចំនួនពិត$\Re$ចូលក្នុងសំណុំចំនួនពិត ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់ x, y, z$\in\Re$ មានសមភាព

$$f\left(f(x)+f(y)+f(z)\right)=f\left(f(x)-f(y)\right)+f\left(2xy+f(z)\right)+2f(xz-yz)$$

(APMO 2010)

សម្រាយ

មាន

$$f\left(f(x)+f(y)+f(z)\right)=f\left(f(x)-f(y)\right)+f\left(2xy+f(z)\right)+2f(xz-yz) \quad (*)$$

យក x = y ជួសក្នុង(*)យើងបាន

$$f\left(2f(x)+f(z)\right)=3f(0)+f\left(2x^2+f(z)\right) \quad (1)$$

យក f(z)=-2f(x) ទៅជួសក្នុង (1) យើងបាន

$f\left(2x^2-2f(x)\right)=-2f(0)$ ថេរ

នោះយើងបាន f ជាអនុគមន៍ថេរឬ $2x^2-2f(x)$ ថេរ

+បើ f ជាអនុគមន៍ថេរ $\forall x\in\Re$ តាង f(x)=c តាម(*)យើងបាន

c = c+c+2c នោះ c=0 យើងបាន f(x)=0 $\forall x\in\Re$

+បើ $2x^2-2f(x)$ ថេរ $\forall x\in\Re$ តាង $2x^2-2f(x)=C$ យើងបាន

$$f(f(x)+f(y)+f(z))=f\left(x^2+y^2+z^2-3C\right)=$$

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-C\left(6\left(x^2+y^2+z^2\right)+9c-1\right)$$

$$f(f(x)-f(y))+f(2xy+f(z))+2f(xz-yz)=f\left(x^2-y^2\right)+f\left(2xy+z^2-C\right)$$

$$+2f(xz-yz)$$

$$=\left(x^2-y^2\right)^2+\left(2xy+z^2-C\right)^2+2(xz-yz)^2-3C$$

$$=\left(x^2+y^2+z^2\right)^2+C\left(C-4xy-2z^2-3\right)$$

តាមសម្រាយនេះដើម្បីឲ្យសមភាព(*)ពិត $\forall x\in\Re$ នោះ

$$C\left(-6\left(x^2+y^2+z^2\right)+9C-1\right)=C\left(C-4xy-2z^2-3\right)$$

ដើម្បីឲ្យសមភាពពិត គ្រប់ $x,y,z\in\Re$ យើងបាន C=0

ដូចនេះ f(x)=0 ឬ $f(x)=x^2$ ។

58.ឲ្យត្រីកោណ ABC មួយគាងរង្វាស់ជ្រុង BC, AC, AB រៀងគ្នាដោយ a, b, c កន្លះពុះមុំក្នុងនៃមុំ$\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle ACB$ ជួបជ្រុងBC, AC, AB រៀងគ្នាត្រង់D, E, F តាង AD, BE, CF ដោយd, e, f រៀងគ្នា។

បង្ហាញថា

$$def = \frac{4abc(a+b+c)\Delta}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

ដែលΔជាក្រលាផ្ទៃនៃត្រីកោណABC។

(Irish Mathematical Olympaid 2007)

សម្រាយ

ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះយើងបាន

$$AD = d = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} \qquad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀតតាមសមភាព

$$\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1 \qquad \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{A}{2} = \cos A + 1$$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសយើងបាន

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + 1 = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = 2\frac{p(p-a)}{bc}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \qquad (2)$$

តាម(1)និង(2)យើងបាន $d = \frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

ដូចគ្នាដែរ

$$e=\frac{2ac}{a+c}\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\ ,\ f=\frac{2ab}{a+b}\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

គុណអង្គនឹងអង្គនៃសមភាពយើងបាន

$$def=\frac{4abc(a+b+c)\Delta}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

ព្រោះ $\Delta=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

59-ចំនួនគត់វិជ្ជមានហៅថា " *good number* " បើវាស្មើបួនដងនៃផលបូកលេខលំដាប់ក្នុងប្រព័ន្ធដេស៊ីម៉ាល់របស់វា។
កំណត់ផលបូកគ្រប់ចំនួន " *good number* " ។

(China Northern mathematical Olympaid 2002)

សម្រាយ

+ដំបូងយើងស្រាយថា *good number* មិនអាចមានលេខច្រើនជាងបីខ្ទង់ទេ។ឧបមាថាមានតាង N ជា *good number*

បើ $N=\overline{a_na_{n-1}...a_2a_1a_0}$ នោះ $N=4(a_0+a_1+a_2+...+a_n)$

តែ $N=\sum_{i=1}^{n}a_i10^i$ យើងបាន

$$4\sum_{i=1}^{n}a_i+4a_0=\sum_{i=1}^{n}a_i10^i+a_0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}a_i\left(10^i-4\right)=3a_0$$

តែគ្រប់ $n\geq 2$ យើងបាន $a_n(10^n-4)\geq 96>9\times 3\geq 3a_0$

ដូចនេះ *good number* មិនអាចមានលេខច្រើនជាងបីខ្ទង់ទេ។

តាង $N=\overline{a_1a_0}$ យើងបាន

$$10a_1+a_0=4(a_1+a_0)\Leftrightarrow 2a_1=a_0$$
$$\Rightarrow a_1\in\{1,2,3,4\}$$

-បើ $a_1=1$ នោះ $a_0=2$ យើងបាន $N=12$

-បើ $a_1=2$ នោះ $a_0=4$ យើងបាន $N=24$

-បើ $a_1=3$ នោះ $a_0=6$ យើងបាន $N=36$

dfhfdgjdvxcvjhg

-បើ $a_1=4$ នោះ $a_0=8$ យើងបាន $N=48$

ម្យ៉ាងទៀតបើ N មានលេខមួយខ្ទង់នោះ $N=0$ យើងបានផលបូក

គ្រប់លេខ *good number* គឺ$12+24+36+48+0=120$

60.គេឲ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។បង្ហាញថា

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geq\sqrt{a^2+ac+c^2}$$

(Baltic Way 2000)

សម្រាយ

តាមវិសមភាព **Minkosky** យើងបាន

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}-b\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}b}{2}\right)^2+\left(b-\frac{c}{2}\right)^2}$$

$$\geq\sqrt{\frac{3}{4}(a+c)^2+\frac{1}{4}(a-c)^2}=\sqrt{a^2+ac+c^2}$$

61.កំណត់គ្រប់គូចំនួនគត់ (x,y) ដែល x^2-2xy+126y^2=2009 ។

(China South East Mathematical Olympaid 2009)

សម្រាយ

-បើ y=1ឬy=-1សមីការទៅជា

x^2-2x+126=2009 ឬ x^2+2x+126=2009

$\Leftrightarrow$ x^2-2x-1883=0 ឬ x^2+2x-1883=0

គេបានΔ'=1+1883=1884 មិនយកព្រោះឌីសគ្រីមីណង់មិនមែនជាការេប្រាកដ

-បើ y=2 ឬ y=-2 សមីការទៅជា

x^2-4x+504=2009 ឬ x^2+4x+504=2009

$\Leftrightarrow$ x^2-2x-1505=0 ឬ x^2+2x-1505=0

គេបាន Δ'=4+1505=1509 មិនយកព្រោះឌីសគ្រីមីណង់មិនមែនជាការេប្រាកដ

-បើ y=3 ឬ y=-3 សមីការទៅជា

x^2-6x+1134=2009 ឬ x^2+6x+1134=2009

$\Leftrightarrow$ x^2-6x-875=0 ឬ x^2+6x-875=0

គេបាន Δ'=9+875=884 មិនយកព្រោះឌីសគ្រីមីណង់មិនមែនជាការេប្រាកដ

-បើ y=4 ឬ y=-4 សមីការទៅជា

x^2-8x+2016=2009 ឬ x^2+8x+2016=2009

$\Leftrightarrow$ x^2-8x-7=0 (គ្មានឬសជាចំនួនគត់)ឬ x^2+8x-7=0

គេបាន x=-1ឬx=7

-បើ $y \in (-\infty,-5] \cup [5,+\infty)$

សមីការអាចសរសេរ$(x-y)^2+125y^2=2009$

តែ$(x-y)^2+125y^2 \geq (x-y)^2+125\times 25 \geq 3125 > 2009$

នោះ $y \notin (-\infty,-5] \cup [5,+\infty)$

ដូចនេះសមីការមានឬសជាចំនួនគត់គឺ

(x,y) $\in$ {(-1,4),(7,4)}

62.តាង x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ កំណត់តំលៃតូចបំផុតនៃ

a) $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+zy}$ b) $\dfrac{x^2+y^2+2z^2}{xy+zy}$

(Croatia Team Selection Tests 2008)

សម្រាយ

a)តាមវិសមភាព **AM - GM** យើងមាន

$$x^2+y^2+z^2=x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y^2+z^2\geq\frac{2}{\sqrt{2}}(xy+yz)$$

$$\Rightarrow\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz}\geq\sqrt{2}$$

ដូចនេះតំលៃតូចបំផុតនៃ $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+zy}$ គឺ $\sqrt{2}$

b) ចំលើយគឺ $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

យើងនឹងបង្ហាញថាសំណើរនេះពិតយើងបាន

$$\frac{x^2+y^2+2z^2}{xy+zy}\geq\frac{2\sqrt{6}}{3}\Leftrightarrow x^2+y^2+2z^2\geq\frac{2\sqrt{6}}{3}(xy+yz)$$

តាង x=ay, z=by ដែល a, b>0 វិសមភាពសមមូល

$$a^2+1+2b^2\geq\frac{2\sqrt{6}}{3}(a+b)$$

$$\Leftrightarrow a^2-\frac{2\sqrt{6}}{3}a+1+2b^2-\frac{2\sqrt{6}}{3}b\geq 0$$

$$\Delta'=\frac{4\times6}{9}-1-2b^2+\frac{2\sqrt{6}}{3}b=-\left(\sqrt{2}b-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\leq 0\forall b\in\Re$$

ពិតសមតាពកើតឡើងពេល $a=\frac{\sqrt{6}}{3}, b=\frac{\sqrt{6}}{6}$ គឺ

$$(x,y,z)=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}y, y, \frac{\sqrt{6}}{6}y\right)$$

63.គេឲ្យ a, b, c, d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានៗ បង្ហាញថា

$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b}\geq 0$$

(Croatia Team Selection Tests 2009)

សម្រាយ

ដំបូងយើងនឹងស្រាយថា

$$\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{c+a}{d+a}+\frac{d+b}{a+b}\geq 4$$

យើងមាន

$$\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{c+a}{d+a}+\frac{d+b}{a+b}$$

$$=(a+b+c+d)\left(\frac{a+c}{(c+b)(a+d)}+\frac{b+d}{(a+b)(c+d)}\right)$$

តាមវិសមតាព**AM-GM** យើងមាន

$$\frac{((b+c)+(a+d))^2}{4}\geq (b+c)(a+d)$$

$$\Leftrightarrow (a+d)(b+c)\leq \frac{(a+d+c+d)^2}{4}$$

ម្យ៉ាងទៀត

$$\frac{((d+c)+(a+b))^2}{4} \ge (b+c)(a+d)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(d+c) \le \frac{(a+d+c+d)^2}{4}$$

យើងបាន

$$\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{c+a}{d+a}+\frac{d+b}{a+b}$$

$$\ge (a+b+c+d)\left(\frac{4(a+c)}{(a+b+c+d)^2}+\frac{4(b+d)}{(a+b+c+d)^2}\right)=4$$

យើងមាន

$$\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{c+a}{d+a}+\frac{d+b}{a+b} \ge 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+c}{b+c}-1+\frac{b+d}{c+d}-1+\frac{c+a}{d+a}-1+\frac{d+b}{a+b}-1 \ge 0$$

យើងទាញបាន

$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b} \ge 0$$

64កំណត់អនុគមន៍ទាំងអស់ពីសំនុំចំនួនគត់វិជ្ជមានទៅសំនុំចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល ផ្ទៀងផ្ទាត់: ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានa និងb មានត្រីកោណមួយដែលមានជ្រុងរបស់វាមានប្រវែង $a, f(b)$ និង $f(a+f(b)-1)$

(IMO 2009)

សម្រាយ

តាមសម្មតិកម្មយើងបាន

$$a + f(b) > f(a+f(b)-1) \quad (1)$$

$$a + f(a+f(b)-1) > f(b) \quad (2)$$

$$f(b) + f(a+f(b)-1) > a \quad (3)$$

ហើយ $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$

យើងទាញបាន ∀a∈Nនោះ f(a)∈N ជំនួស b ដោយa ក្នុង(1)យើងបាន

$$a+f(a)>f(a+f(a)-1) \quad (4)$$

ជំនួស a+f(a)-1 ដោយ a ក្នុង(4)យើងបាន

$$a+1>f(a)\Rightarrow f(a)\le a \quad (*) \quad (f(a)\in\mathrm{N})$$

យកa=1ជំនួសក្នុង(∗)យើបាន f(1)=1ព្រោះ $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$

យកb=1ជំនួសក្នុង(1)យើងបាន

$$a+1>f(f(a))\Rightarrow f(f(a))\le a \quad (5)$$

យកb=1ជំនួសក្នុង(3)យើងបាន $1+f(f(a))>a\Rightarrow f(f(a))\ge a \quad (6)$

តាម(5)និង(6)យើងបាន

$f(f(a))=a$ (7)

តាម(7)និង(*)យើងបាន

$f(f(a))\geq f(a)$ (8)

ជួស$f(a)$ដោយaក្នុង(8)យើងបាន

$f(a)\geq a$ (**)

តាម(*)និង(**)យើងបាន

$f(a)=a$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ក្នុង (1), (2) និង (3) យើងបាន

$a+b > a+b-1$ ពិត

$2a+b-1 > b \ \forall\ a\in N$ ពិត

$2b+a-1 > a \ \forall\ b\in N$ ពិត

ដូចនេះ $f(a)=a$

លំហាត់អនុវត្តន៍

1-គេឲ្យ a, b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល a+b=1បង្ហាញថា

$$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}\geq\frac{1}{3}$$

(Hungary 1996)

2-គេឲ្យa, b, c, dជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបង្ហាញថា៖

$$\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{c+a}{d+a}+\frac{d+b}{a+b}\geq 4$$

(Baltic Way 1995)

3-គេឲ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានបង្ហាញថា៖

$$\frac{x^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3}{z^2+zx+x^2}\geq\frac{x+y+z}{3}$$

(Lihuania 1987)

4-គេឲ្យa,b,cជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល a+b+c=1 ។ បង្ហាញថា៖

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\leq\frac{9}{10}$$

(Poland 1997)

5-គេឲ្យa,b,cជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a^4+b^4+c^4=3$ ។ បង្ហាញថា៖

$$\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\leq 1$$

(Moldova 2005)

6-គេឲ្យa,b,cជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល ab+bc+ca=1 ។ បង្ហាញថា៖

$$a+b+c-abc\geq\frac{8\sqrt{3}}{9}$$

(Khon Vanny 2011)

7 រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ប៉ះជ្រុង BC ត្រង់ D និងប៉ះជ្រុង AB ត្រង់ F ហើយរង្វង់នេះកាត់ADត្រង់HនិងCFត្រង់Kបង្ហាញថា $\frac{FD\times HK}{FH\times DK}=3$

(China South East Mathematical Olympaid 2010)

8 គេឲ្យ ABCD ជាប្រលេឡូក្រាមគេជ្រើសរើសចំនុច E មួយដែលចំនុច D ឬ B ស្ថិតក្នុងត្រីកោណ ACE ។ បង្ហាញថា៖ $\mathbf{S_{ACE}=S_{ABE}+S_{ADE}}$

(Post by Khon Vanny for IMO 2011)

9 ក្នុងចតុកោណប៉ោង ABCD គេដៅចំនុចK, L, M, Nលើជ្រុងAB, BC, CD DAរៀងគ្នាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $\frac{AK}{KB}=\frac{BL}{LC}=\frac{CM}{MD}=\frac{DN}{NA}=t$ ។បង្ហាញថា

$$AC^2+BD^2=\frac{(t+1)^2}{t^2+1}\left(KM^2+LN^2\right)$$

(Post by Khon Vanny for IMO 2011)

10 កំណត់ចំនួនគត់តូចបំផុត a > 5ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណ មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន m_1, m_2, n_1, n_2 ដែល $a=m_1^2+m_2^2$ & $a^2=n_1^2+n_1^2$

និង $m_1 - n_1 = m_2 - n_2$ ។

(China Girls Math Olympaid 2010)

ឯកសារយោង

1.គេហទំព័រ www.artofproblemsolving.com

2. សៀវភៅគណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោករបស់លោកគ្រូ លឹម ផល្គុន

3. Topic inequality របស់ Hojoo Lee