វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ

គិតច្រើន ចេះច្រើន

ឆ្នាំ២០១៨

រៀបរៀងដោយ

លឹម សីហា

គ្រូគណិតវិទ្យាវិទ្យាល័យសម្តេចឪ

ខេត្ត សៀមរាប

អារម្ភកថា

ការបង្កើតសៀវភៅវិញ្ញាសា និងដំណោះស្រាយ នេះឡើងក្នុងគោលបំណងទុកជាឯកសារ សម្រាប់សិស្សានុសិស្ស កម្រិតវិទ្យាល័យសិក្សា អនុវត្តន៍ លំហាត់វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា ដើម្បីត្រៀមសម្រាប់ការប្រឡងយកសញ្ញាបត្រ មធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ។

ចំពោះសៀវភៅវិញ្ញាសានេះផងដែរ បើមាននូវចំណុចខ្វះខាត ឬខុសឆ្គងត្រង់ចំណុចណា សូមបងប្អូន សិស្សានុសិស្ស មិត្តអ្នកអាន មេត្តាអធ្យាស្រ័យ ដោយកំហុសអចេតនារបស់ខ្ញុំបាទ។

សៀមរាប ១៥ សីហា ២០១៨

លីម សីហា .

លីម សីហា

មាតិកា

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិឆ្នាំ២០១៨ 2

វិញ្ញាសាទី១ 2

វិញ្ញាសាទី២ 15

វិញ្ញាសាទី៣ 26

វិញ្ញាសាទី៤ 38

វិញ្ញាសាទី៥ 49

វិញ្ញាសាទី៦ 59

វិញ្ញាសាទី៧ 71

វិញ្ញាសាទី៨ 82

វិញ្ញាសាទី៩ 93

វិញ្ញាសាទី១០ 104

វិញ្ញាសាទី១១ 115

វិញ្ញាសាទី១២ 128

វិញ្ញាសាទី១៣ 139

វិញ្ញាសាទី១៤ 151

វិញ្ញាសាទី១៥ 162

វិញ្ញាសាទី១៦ 172

វិញ្ញាសាទី១៧ 184

វិញ្ញាសាទី១៨ 195

វិញ្ញាសាទី១៩ 206

វិញ្ញាសាទី២០ 217

លីម សីហា

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាត្រៀមប្រឡង
សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិឆ្នាំ២០១៨

[វិញ្ញាសាទី១]

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

១. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + e^x - 1}{x^2 + x}$ ២. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x + 2}{x+1}$

II. (១៥ពិន្ទុ)

១. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យ $2xi - y = \dfrac{(3-2i)(1+i)}{i(1+2i)}$ ។

២. គេឲ្យ $Z = \cos\dfrac{2\pi}{9} + i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ ។ សរសេរ $(1+Z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

III. (១៥ពិន្ទុ)

១. កំណត់ចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឲ្យបាន $\dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{(x-1)^2} + \dfrac{c}{x+2}$ ចំពោះ $x \neq -2,\ x \neq 1$ ។

២. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} \left(\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)}\right)dx$ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ)

១. ដោះស្រាយសមីការ $y'' - 6y' + 8y = 0 \ \ (\alpha)$ ។

២. រកអនុគមន៍ g ដែលជាចម្លើយមួយនៃ (α) ដោយដឹងថាក្រាប G របស់វាប៉ះនឹងបន្ទាត់ដេកមួយនៅត្រង់ $E(0,-1)$។

V. (១៥ពិន្ទុ)

១. រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល និងកំណុំនៃអេលីប (E) : $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$ ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$។

២. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាង (E) និងអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយហើយសង់អេលីប (E)។ ដោយយក $\dfrac{4\sqrt{2}}{3} = 1.9$ ។

VI. (២០ពិន្ទុ) នៅក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ គេឲ្យចំណុច $A(0,2,2)$ និង បន្ទាត់D ដែលមានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត $x = 1+t,\ y = 1-t,\ z = 2-t,\ t \in \mathbb{R}$ ។

១. បង្ហាញថាប្លង់ $P:\ x-y-z+4=0$ កាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ D ។

២. ប្លង់ (P) កាត់អ័ក្ស Ox ត្រង់ M, Oy ត្រង់ N និង Oz ត្រង់ P ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច M, N និង P រួចសង់ចំណុច A, M, N, P នៅក្នុងតម្រុយ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ ។

៣. បង្ហាញថាត្រីកោណ MNP ជាត្រីកោណសម័ង្ស។

៤. គណនា $\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MN}$ រួចទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ MNP ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ)

១. f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = (1-x)e^x - 1$ ។ គណនា $f'(x)$ ។
សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f (ដោយមិនចាំបាច់គណនាលីមីតត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$) ។
ទាញរកសញ្ញានៃ $f(x)$ ។

២. g ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x) = (2-x)e^x + 2 - x$ ។

ក. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ។ គណនា $g'(x)$ ។ ដោយប្រើលទ្ធផលដែលបាននៅសំណួរ១. ចូរសិក្សាសញ្ញានៃ $g'(x)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g ។

ខ. បង្ហាញថាខ្សែកោង C តាងអនុគមន៍ g មានបន្ទាត់ $D:\ y = 2-x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត កាលណា x ខិតជិត $-\infty$ ។ បញ្ជាក់ទីតាំងនៃខ្សែកោង C ធៀបនឹងបន្ទាត់ D ។

គ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង C ដែលស្របនឹងបន្ទាត់ D ។

ឃ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចរបត់របស់ខ្សែកោង C ។

ង. សង់ខ្សែកោង C ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ។ (ឯកតាលើអ័ក្សស្មើនឹង 1cm)។

[ដំណោះស្រាយ]

I. គណនាលីមីត៖

១. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + e^x - 1}{x^2 + x}$ មានរាងមិនកំណត់ $\dfrac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x + e^x - 1}{x}}{\frac{x^2+x}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x} + \frac{e^x-1}{x}}{x+1} = \frac{1+1}{0+1} = 2$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + e^x - 1}{x^2 + x} = 2}$

២. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x + 2}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\cdot\left(\frac{1+\frac{2}{\ln x}}{1+\frac{1}{x}}\right) = 0\left(\frac{1+0}{1+0}\right) = 0(1) = 0$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x + 2}{x+1} = 0}$

II. ១. កំណត់ចំនួនពិត x និង y

$$2xi - y = \frac{(3-2i)(1+i)}{i(1+2i)} \quad\Leftrightarrow\quad 2xi - y = \frac{3+3i-2i-2i^2}{i+2i^2}$$

$$2xi - y = \frac{(5+i)(i+2)}{(i-2)(i+2)}$$

$$2xi - y = \frac{5i+10+i^2+2i}{i^2-4}$$

$$2xi - y = -\frac{7}{5}i - \frac{9}{5}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{7}{5} \Rightarrow x = -\frac{7}{10} \\ -y = -\frac{9}{5} \Rightarrow y = \frac{9}{5} \end{cases}$$

លឹម សីហា

ដូចនេះ $\boxed{x = -\dfrac{7}{10};\ y = \dfrac{9}{5}}$

២. សរសេរ $(1+Z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

យើងមាន $Z = \cos\dfrac{2\pi}{9} + i\sin\dfrac{2\pi}{9}$

$$(1+Z)^4 = \left(1+\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right)^4 = \left(2\cos^2\frac{\pi}{9} + i2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\right)^4$$

$$= \left(2\cos\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)\right)^4 = 2^4\cos^4\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{(1+Z)^4 = 16\cos^4\frac{\pi}{9}\left(\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}\right)}$

III. ១. ដោះស្រាយសមីការ $y'' - 6y' + 8y = 0 \ (\alpha)$

(α) មានសមីការសម្គាល់ $r^2 - 6r + 8 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(8) = 36 - 32 = \quad \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2$

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) - 2}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) + 2}{2(1)} = \frac{8}{2} = 4$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ } (\alpha) \text{ គឺ } y = Ae^{2x} + Be^{4x} \quad ; A, B \in \mathbb{R}}$

២. រកអនុគមន៍ g ដែលជាចម្លើយមួយនៃ (α) បើក្រាប G របស់វាប៉ះនឹងបន្ទាត់ដេកមួយនៅត្រង់ $E(0,-1)$

យើងមាន ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (α) គឺ $y = Ae^{2x} + Be^{4x} \quad ; A, B \in \mathbb{R}$

ដោយក្រាប G របស់វាប៉ះនឹងបន្ទាត់ដេកមួយនៅត្រង់ $E(0,-1)$ យើងបាន

- $y(0) = -1 \quad \Rightarrow Ae^0 + Be^0 = -1 \quad \Rightarrow \quad A + B = -1 \ (1)$
- បន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេក នាំឲ្យ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច $(0,-1)$ ស្មើសូន្យ
  $y'(0) = 0$ ដោយ $y' = 2Ae^{2x} + 4Be^{4x} \Rightarrow 2Ae^0 + 4Be^0 = 0 \Rightarrow 2A + 4B = 0 \ (2)$

$(2): \ A + B = -1 \ \Rightarrow \ A = -1 - B$ ជួសក្នុង $(2) \ \Rightarrow \ 2(-1-B) + 4B = 0 \Rightarrow B = 3$

$B = 3 \quad \Rightarrow A = -1 - 3 = -4$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចម្លើយពិសេសមួយនៃ } (\alpha) \text{ គឺ } y = -4e^{2x} + 3e^{3x}}$

IV. ១. រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល និងកំណុំនៃអេលីប $(E): \ 4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$

$(E): 4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4\left(x^2 - 2x + 1\right) - 4 + 9\left(y^2 + 4y + 4\right) - 9(4) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 36$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x-1)^2}{36} + \frac{9(y+2)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y+2)^2}{2^2} = 1$$

យើងបាន

- អ័ក្សធំនៃអេលីប ជាអ័ក្សដេក
- $h = 1,\ k = -2 \quad ;\ a = 3,\ b = 2 \quad ;\ c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \qquad \Rightarrow c = \sqrt{5}$
- ផ្ចិត(h, k) $\Rightarrow$ ផ្ចិត$(1, -2)$
- កំពូល $V_1(h-a, k);\ V_2(h-a, k)$ $\Rightarrow$ កំពូល $V_1(-2, -2);\ V_2(4, -2)$
- កំណុំ $F_1(h-c, k);\ F_2(h+c, k)$ $\Rightarrow$ កំណុំ $F_1(1-\sqrt{5}, -2);\ F_2(1+\sqrt{5}, -2)$

២. រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាង (E) និងអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយហើយសង់អេលីប (E)

- $(E) \cap (x'ox) \Leftrightarrow y = o \quad \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(0+2)^2}{4} = 1$

$$\frac{(x-1)^2}{9} = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$(x-1)(x-1) = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$$

ដូចនេះ (E) កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x = 1$

$(E) \cap (y'oy) \Leftrightarrow x = 0 \quad \Rightarrow \frac{(0-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

$$\frac{1}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

$$\frac{(y+2)^2}{4} = \frac{8}{9}$$

$$(y+2)^2 = \frac{32}{9}$$

$$y + 2 = \pm\sqrt{\frac{32}{9}}$$

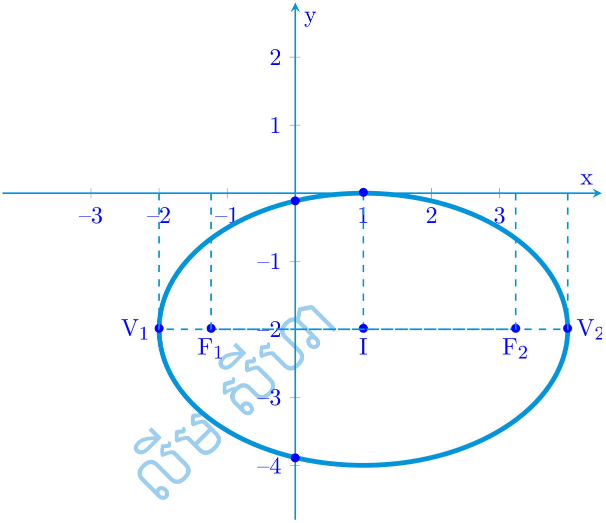
$$y = -2 \pm \frac{4\sqrt{2}}{3} = -2 \pm 1.9$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = -2 + 1.9 = -0.1$$

$$y_2 = -2 - 1.9 = -3.9$$

ដូចនេះ (E) កាត់អ័ក្សអរដោនេត្រង់ $y = -0.1$ និង $y = -3.9$

សង់អេលីប



V. ១. កំណត់ចំនួនពិត a, b និង c ដើម្បីឲ្យបាន $\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+2}$

$$\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+2}$$

$$= \frac{a(x-1)(x+2) + b(x+2) + c(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$= \frac{ax^2 + 2ax - ax - 2a + bx + 2b + cx^2 - 2cx + c}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$= \frac{(a+c)x^2 + (a+b-2c) + (-2a+2b+c)}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a + c = 1 & (1) \\ a + b - 2c = -2 & (2) \\ -2a + 2b + c = -2 & (3) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow a = 1 - c$ ជំនួសក្នុង (2) $\Rightarrow 1 - c + b - 2c = -2 \Rightarrow b = 3c - 3$

យក $a = 1 - c$ និង $b = 3c - 3$ ជំនួសក្នុង (3) យើងបាន

$$\begin{aligned}
-2(1-c) + 2(3c-3) + c = -2 \quad &\Leftrightarrow \quad -2 + 2c + 6c - 6 + c = -2 \\
&\Rightarrow \quad c = \frac{2}{3} \\
&\Rightarrow \quad a = 1 - c = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\
&\Rightarrow \quad b = 3c - 3 = 3\frac{2}{3} - 3 = -1
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{a = \frac{1}{3},\ b = -1,\ c = \frac{2}{3}}$

២. គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_{-1}^{0} \left(\frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2(x+2)} \right) dx$

$$\frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+2} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{\frac{2}{3}}{x+2}$$

$$\begin{aligned}
I = \int_{-1}^{0} \left(\frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2(x+2)} \right) dx &= \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{\frac{2}{3}}{x+2} \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{3} \ln|x+2| \right]_{-1}^{0} \\
&= \frac{1}{3} \ln 1 - 1 + \frac{2}{3} \ln 2 - \left(\frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 1 \right) \\
&= -1 + \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{2} \\
&= \frac{\ln 2}{3} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\boxed{I = \frac{\ln 2}{3} - \frac{1}{2}}$

VI. ១. បង្ហាញថាប្លង់ P កាត់តាមចំណុច A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ D

- P កាត់តាមចំណុច A លុះត្រាតែ ចំណុច A ផ្ទៀងផ្ទាត់ នឹងប្លង់ P
- P កែងនឹងបន្ទាត់ D លុះត្រាតែ វិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ ស្របនឹងវិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}$ នៃបន្ទាត់ D

យើងមាន $A(0,2,2)$

$P:\ x-y-z+4=0 \quad \Rightarrow$ វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់P គឺ $\vec{n}\,(1,-1,-1)$

$D: x=1+t,\ y=1-t,\ z=2-t \quad \Rightarrow$ វ៉ិចប្រាប់ទិសនៃ បន្ទាត់D គឺ $\vec{u}\,(1,-1,-1)$

យក $A(0,2,2)$ ជួសក្នុង ប្លង់P យើងបាន $0-2-2+4=0$ ពិត $\Rightarrow$ P កាត់តាម A

$\vec{n}=\vec{u} \Rightarrow \vec{n} \mathbin{/\mkern-5mu/} \vec{u} \quad \Rightarrow$ P កែងនឹងបន្ទាត់ D

ដូចនេះ **ប្លង់P កាត់តាមចំនុច A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ D**

២. រកកូអរដោនេនៃចំណុច M, N និង P

- ប្លង់ (P) កាត់អ័ក្ស Ox ត្រង់ M យើងបាន $y=0; z=0 \Rightarrow x-0-0+4=0 \Rightarrow x=-4$

  ដូចនេះ **$M(-4,0,0)$**

- ប្លង់ (P) កាត់អ័ក្ស Oy ត្រង់ N យើងបាន $x=0, z=0 \Rightarrow 0-y-0+4=0 \Rightarrow y=4$

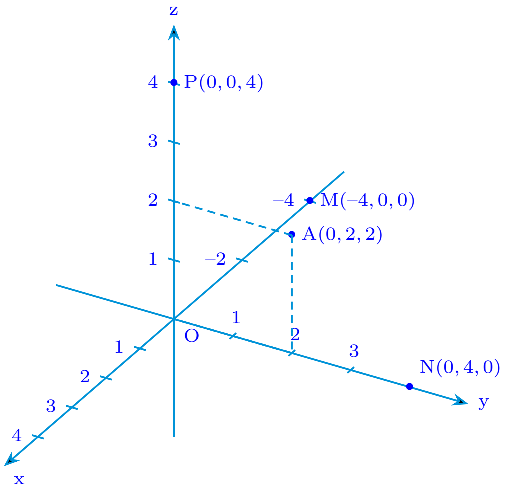
  ដូចនេះ **$N(0,4,0)$**

- ប្លង់ (P) កាត់អ័ក្ស Oz ត្រង់ P យើងបាន $x=0, y=0 \Rightarrow 0-0-z+4=0 \Rightarrow z=4$

  ដូចនេះ **$P(0,0,4)$**

លឹម សីហា

សង់ចំណុច A, M, N, P



៣. បង្ហាញថាត្រីកោណ MNP ជាត្រីកោណសម័ង្ស

$M(-4,0,0)$; $N(0,4,0)$; $P(0,0,4)$

- $MN = \sqrt{(0+4)^2+(4-0)^2+(0-0)^2} = 4\sqrt{2}$
- $MP = \sqrt{(0+4)^2+(0-0)^2+(4-0)^2} = 4\sqrt{2}$
- $NP = \sqrt{(0-0)^2+(0-4)^2+(4-0)^2} = 4\sqrt{2}$

ដោយ ប្រវែង $MN = MP = NP = 4\sqrt{2}$ ដូចនេះ $\boxed{\Delta MNP \text{ ជាត្រីកោណសម័ង្ស}}$

៤. គណនា $\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MN}$

- $\overrightarrow{MP}(0+4, 0-0, 4-0) \quad \Rightarrow \overrightarrow{MP}(4,0,4)$
- $\overrightarrow{MN}(0+4, 4-0, 0) \quad \Rightarrow \overrightarrow{MN}(4,4,0)$

$$\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MN} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (0-16)\,\vec{i} - (0-16)\,\vec{j} + (16-0)\,\vec{k}$$

$$= -16\,\vec{i} + 16\,\vec{j} + 16\,\vec{k}$$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MN} = -16\,\vec{i} + 16\,\vec{j} + 16\,\vec{k}}$

ទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ MNP

$$S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MN}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-16)^2+(16)^2+(16)^2} = \frac{16}{2}\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_{\Delta MNP} = 8\sqrt{3} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$

VII. ១. គណនា $f'(x)$

$f(x) = (1-x)e^x - 1$

$$f'(x) = ((1-x)\,e^x - 1)' = (1-x)'\,e^x + (e^x)'\,(1-x) = -e^x + e^x - xe^x = -xe^x$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = -xe^x}$

លីម សីហា

សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

- $f'(x) = -xe^x$ ដោយ $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x)$ មានសញ្ញាតាម $-x$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \quad \Rightarrow x = 0$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \quad \Rightarrow x < 0$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -x < 0 \quad \Rightarrow x > 0$
- $f(0) = (1-0)e^0 - 1 = 0$

តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	0	↘	

លឹម សីហា

ទាញរកសញ្ញានៃ $f(x)$

តាមតារាងអថេរភាព f មានតម្លៃអតិបរមាធៀបមួយ ដែលមានតម្លៃស្មើ 0

ដូចនេះ $\boxed{f(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

២. ក. គណនា $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

$g(x) = (2-x)e^x + 2 - x$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ((2-x)e^x + 2 - x) = 0 + 2 - (-\infty) = +\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} ((2-x)e^x + 2 - x) = -\infty + 2 - (+\infty) = -\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

គណនា $g'(x)$

$$g'(x) = ((2-x)e^x + 2 - x)' = (2-x)' \, e^x + (e^x)' \, (2-x) - 1 = -e^x + 2e^x - xe^x - 1$$

$$= e^x - xe^x - 1 = (1-x) \, e^x - 1$$

ដូចនេះ $\boxed{g'(x) = (1-x)\,e^{x} - 1}$

សិក្សាសញ្ញានៃ $g'(x)$

ដោយ $g'(x) = (1-x)\,e^{x} - 1 = f(x)$ តាមលទ្ធផលដែលបាននៅសំណួរ១.

$f(x) \leq 0 \quad \Rightarrow g'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(0) = 0 \quad \Rightarrow g'(0) = 0$

សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ g

- $g(0) = (2-0)e^{0} + 2 - 0 \quad \Rightarrow g(0) = 4$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	4	↘	$-\infty$

២. បង្ហាញថា $D:\ y = 2 - x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត កាលណា x ខិតជិត $-\infty$

$g(x) = (2-x)\,e^{x} + 2 - x$ ដោយ $\lim\limits_{x \to -\infty} (2-x)\,e^{x} = 0$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $(D):\ y = 2 - x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត (boxed)

បញ្ជាក់ទីតាំងនៃខ្សែកោង C ធៀបនឹងបន្ទាត់ D

- $(C):\ g(x) = (2-x)e^{x} + (2-x)$
- $(D):\ y = 2 - x$

$\Rightarrow \quad g(x) - y = (2-x)e^{x}$

- $g(x) - y = 0 \quad \Leftrightarrow (2-x)e^{x} = 0 \Rightarrow 2 - x = 0 \Rightarrow -x = -2 \Rightarrow x = 2$

  ដូចនេះ ពេល $x = 2$ ក្រាប C កាត់បន្ទាត់ D (boxed)

- $g(x) - y > 0 \quad \Leftrightarrow (2-x)e^{x} > 0 \Rightarrow 2 - x > 0 \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow x < 2$

  ដូចនេះ ពេល $x < 2$ ក្រាប C ស្ថិតលើបន្ទាត់ D (boxed)

- $g(x) - y < 0 \quad \Leftrightarrow (2-x)e^{x} < 0 \Rightarrow 2 - x < 0 \Rightarrow -x < -2 \Rightarrow x < 2$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ត្រង់ } x < 2 \text{ ក្រាប } C \text{ ស្ថិតក្រោមបន្ទាត់ } D}$

គ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង C ដែលស្របនឹងបន្ទាត់ D

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(T): \; y = g'(x_o)(x - x_o) + g(x_o)$

- $(T) // D: \; y = 2 - x \Rightarrow \; g'(x_o) = -1$
- $g'(x_o) = -1 \quad \Leftrightarrow (1 - x_o)e^{x_o} - 1 = -1 \quad \Rightarrow 1 - x_o = 0 \quad \Rightarrow x_o = 1$

  $g(x_o) = g(1) = (2 - 1)e^1 + 2 - 1 = e + 1$

$\Rightarrow (T): \; y = -(x - 1) + e + 1 = -x + e + 2$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ប៉ះ គឺ } (T): \; y = -x + e + 2}$

ឃ. រកកូអរដោនេនៃចំណុចរបត់របស់ខ្សែកោង C

$$g''(x) = ((1 - x)e^x - 1)' = (1 - x)' e^x + (e^x)(1 - x) = -e^x + e^x - xe^x = -xe^x$$

- $g''(x) = -xe^x$ ដោយ $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g''(x)$ មានសញ្ញាតាម $-x$
- $g''(x) = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \quad \Rightarrow x = 0$
- $g''(x) > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \quad \Rightarrow x < 0$
- $g''(x) < 0 \Leftrightarrow -x < 0 \quad \Rightarrow x > 0$

លឹម សីហា

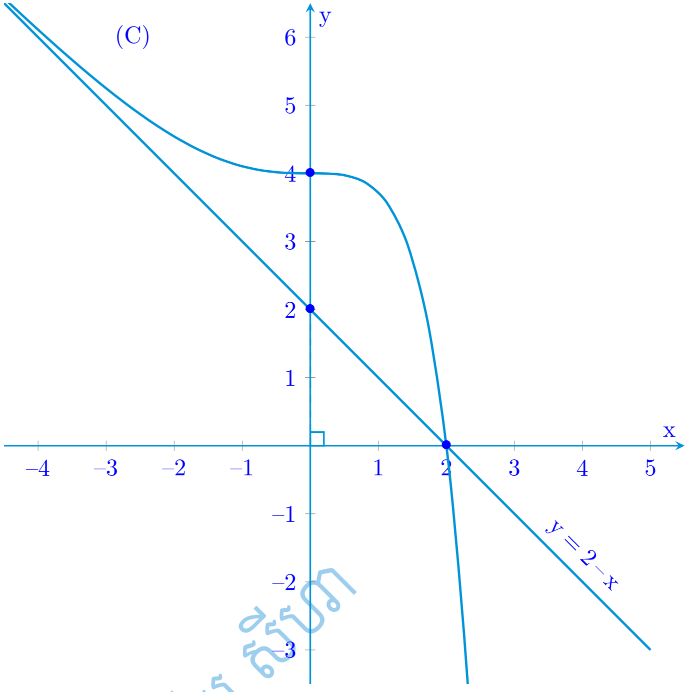
តារាងសញ្ញានៃ $g''(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	

- ត្រង់ $x = 0, f''(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញា យើងបាន g មានចំណុចរបត់មួយ ត្រង់ $x = 0, \; g(0) = 2 + 2 = 4$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំណុចរបត់គឺ } (0, 4)}$

៦. សង់ខ្សែកោង C



លឹម សីហា

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាត្រៀមប្រឡង
សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិឆ្នាំ២០១៨

[វិញ្ញាសាទី២]

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+4x+3}$

គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$

ខ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{-3x}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2e^x+2x-2)$

II. (១៥ពិន្ទុ) ក្រូចត្លុង 20 ផ្លែដែលដាក់លក់មាន 16 ផ្លែមានរសជាតិផ្អែម និង 4 ផ្លែទៀតមានរសជាតិជូរ។ អ្នកទិញម្នាក់ជ្រើសរើសយកក្រូច 3 ផ្លែដោយចៃដន្យ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម៖

១. A : ក្រូចទាំង 3 ផ្លែសុទ្ធតែជូរ។

២. B : ក្រូចទាំង 3 ផ្លែសុទ្ធតែផ្អែម។

៣. C : យ៉ាងតិចមានក្រូច 1 ផ្លែមានរសជាតិផ្អែម។

លឹម សីហា

III. (២០ពិន្ទុ) គេឲ្យសមីការ $y''-4y'+5y=0$ (E) ។

១. រកចម្លើយទូទៅ y_c នៃសមីការ (E) ។

២. គេដឹងថា $y_p=a\cos x+b\sin x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ
$y''-4y'+5y=4\cos x-12\sin x$ (F) ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។
រកចំនួនពិត a និង b ហើយទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (F) ។

IV. (១០ពិន្ទុ) គេមានសមីការ $18x^2+10y^2=90$

ក. បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអេលីប។
រកប្រវែងអ័ក្សធំ, ប្រវែងអ័ក្សតូច និងកូអរដោនេនៃកំពូលទាំងពីរ។

ខ. សង់អេលីបនេះ។

V. (៣០ពិន្ទុ) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេឲ្យចំណុច $A(1,0,1)$ និងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}=(-1,2,1)$ ។

១. រកកូអរដោនេចំណុច B។ រកសមីការប្លង់ P ដែលកាត់តាមចំណុច A និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{AB}$ ។

២. គេឲ្យចំណុច $C(2,1,0)$ និង $D(1,3,1)$ ។
រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{CD}$ ។ គណនា $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ រួចបង្ហាញថា ABDC ជាចតុកោណកែង។

៣. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ ABDC ។

៤. រកមាឌចតុមុខ OABC ។ ទាញរកចម្ងាយពីគល់ O ទៅប្លង់ ABC ។

VI. (៣៥ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ $y=f(x)=-x-2+\dfrac{4e^x}{e^x+1}$ ហើយមានខ្សែកោង C នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ មួយដែលមានឯកតា 1cm ។

១. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ។
រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង C កាលណា $x\to-\infty$ ។

២. គណនា $f'(x)$ ហើយបង្ហាញថា $f'(x)\leq 0,\ x\in\mathbb{R}$ ។
គណនា $f'(0)$, $f(0)$ រួចសង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

៣. បង្ហាញថាគល់កូអរដោនេ O ជាចំណុចរបត់ និងជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង C ។

៤. រក $f(3)$ រួចសង់ខ្សែកោង C (គេយក $e^3=20$) ។ ដោះស្រាយវិសមីការ $\dfrac{4e^x}{e^x+1}\geq x+2$ ដោយប្រើខ្សែកោង C ។

លីម សីហា

[ដំណោះស្រាយ]

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+4x+3}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x+3)}{(x+1)(x+3)}=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x+1}=\frac{-3+3}{-3+1}=\frac{0}{-2}=0$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+4x+3}=0}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{-3x}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{-3}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x=\frac{1}{-3}(1)(0)=0$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{-3x}=0}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$ (មានរាងមិនកំណត់$\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)}{x}\times\frac{\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}{\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2+x-(2-x)}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\frac{2}{\sqrt{2+0}+\sqrt{2-0}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)}{x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

ឃ. $\lim\limits_{x\to +\infty}(2e^x+2x-2)=2(+\infty)+2(+\infty)-2=+\infty$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty}(2e^x+2x-2)=+\infty}$

II. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

១. A : ក្រូចទាំង 3 ផ្លែសុទ្ធតែជូរ

តាមរូបមន្ត $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$ ដោយ $n(A)=C(4,3)=\dfrac{4!}{1!3!}=4$

$$n(S)=C(20,3)=\frac{20!}{17!3!}=\frac{20\times 19\times 18}{3\times 2\times 1}$$

$$=20\times 19\times 3=1140$$

យើងបាន $P(A)=\dfrac{4}{1140}=\dfrac{1}{285}$ ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\dfrac{1}{285}}$

២. B : ក្រូចទាំង 3 ផ្លែសុទ្ធតែផ្អែម

តាមរូបមន្ត $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}$ ដោយ $n(B)=C(16,3)=\dfrac{16!}{13!3!}=\dfrac{16\times15\times14}{3\times2\times1}$

$$=8\times5\times14=560$$

$$n(S)=1140$$

យើងបាន $P(B)=\dfrac{560}{1140}=\dfrac{8\times5\times14}{20\times19\times3}=\dfrac{28}{57}$ ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\dfrac{28}{57}}$

៣. C : យ៉ាងតិចមានក្រូច 1 ផ្លែមានរសជាតិផ្អែម

តាមរូបមន្ត $P(C)=1-P(A)=1-\dfrac{1}{285}=\dfrac{284}{285}$

ដូចនេះ $\boxed{P(C)=\dfrac{284}{285}}$

III. ១. រកចម្លើយទូទៅ y_c នៃសមីការ (E) : $y''-4y'+5y=0$

(E) មានសមីការសម្គាល់ $r^2-4r+5=0$

$\Delta=b^2-4ac=16-4(1)(5)=-4 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=2i$

$\Rightarrow r_1=\dfrac{4-2i}{2}=2-i \quad ; \quad r_2=\dfrac{4+2i}{2}=2+i$

ដូចនេះ $\boxed{y_c=e^{2x}(A\cos x+B\sin x) \quad ; \quad A,B\in\mathbb{R}}$

២. រកចំនួនពិត a និង b

យើងមាន $y_p=a\cos x+b\sin x \quad ; \quad y''-4y'+5y=4\cos x-12\sin x \ \ (F)$

y_p ជាចម្លើយនៃ (F) លុះត្រាតែ $y_p''-4y_p'+5y_p=4\cos x-12\sin x$

ដោយ $y_p'=(a\cos x+b\sin x)'=-a\sin x+b\cos x$

$y_p''=(-a\sin x+b\cos x)'=-a\cos x-b\sin x$

គេបាន

$$-a\cos x-b\sin x-4(-a\sin x+b\cos x)+5(a\cos x+b\sin x)=4\cos x-12\sin x$$

$$(-4b+4a)\cos x+(4a+4b)\sin x=4\cos x-12\sin x$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} -4b + 4a = 4 \\ \underline{4a + 4b = -12} \end{cases} \; +$$

$$8a = -8 \quad \Rightarrow \quad a = -1 \; ; \quad \Rightarrow \; b = -2$$

ដូចនេះ $\boxed{y_p = -\cos x - 2\sin x}$

ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (F)

$\boxed{\text{ចម្លើយទូទៅនៃ(F)គឺ } y = y_c + y_p = e^{2x}(A\cos x + B\sin x) - \cos x - 2\sin x \; ; \quad A, B \in \mathbb{R}}$

IV. ក. បង្ហាញថាសមីការ $18x^2 + 10y^2 = 90$ ជាសមីការអេលីប

$$18x^2 + 10y^2 = 90 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{18x^2}{90} + \frac{10y^2}{90} = \frac{90}{90}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

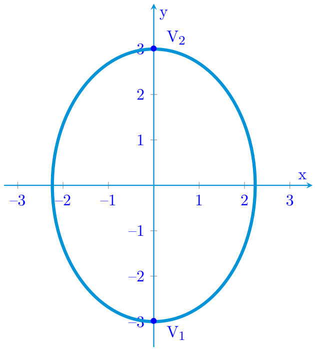
$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-0)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2} + \frac{(y-0)^2}{3^2} = 1$$ ជាសមីការអេលីប

លីម សីហា

គេបាន

- អ័ក្សធំជាអ័ក្សឈរ
- $h = 0, \; k = 0; \quad a = 3; \; b = \sqrt{5}$
- រកប្រវែងអ័ក្សធំគឺ $2a = 2(3) = 6$ ឯកតាប្រវែង
- ប្រវែងអ័ក្សតូចគឺ $2b = 2(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$ ឯកតាប្រវែង
- កំពូលគឺ $V_1(h, k-a); \; V_2(h, k+a)$ **ដូចនេះ** $\boxed{V_1(0,-3); \; V_2(0,3)}$

ខ. សង់អេលីបនេះ



V. ១. គណនាកូអរដោនេនៃចំណុច B

យើងមាន $A(1,0,1)$; $\overrightarrow{AB}=(-1,2,1)$

ដោយ $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)\Rightarrow\overrightarrow{AB}(x_B-1,y_B-0,z_B-1)$

តែ $\overrightarrow{AB}(-1,2,1)$

$$\Longrightarrow\begin{cases}x_B-1=-1\\ y_B=2\\ z_B-1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_B=0\\ y_B=2\\ z_B=2\end{cases}$$

ដូចនេះ **កូអរដោនេះចំណុចB គឺ $B(0,2,2)$**

រកសមីការប្លង់ P ដែលកាត់តាមចំណុច A និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{AB}$

សមីការប្លង់ P : $a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o)=0$

- P ដែលកាត់តាមចំណុច $A(1,0,1)$
- P មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{AB}(-1,2,1)$

នាំឲ្យ $(P):-1(x-1)+2(y-0)+1(z-1)=0$

$-x+2y+z=0$

លឹម សីហា

ដូចនេះ **សមីការប្លង់$(P):\ -x+2y+z=0$**

២. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AC}$ និង $\overrightarrow{CD}$

យើងមាន $A(1,0,1)$; $C(2,1,0)$ និង $D(1,3,1)$

យើងបាន $\overrightarrow{AC}(2-1,1-0,0-1)\Rightarrow$ **$\overrightarrow{AC}(1,1,-1)$**

$\overrightarrow{CD}(1-2,3-1,1-0)\Rightarrow$ **$\overrightarrow{CD}(-1,2,1)$**

គណនា $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

យើងមាន $\overrightarrow{AB}(-1,2,1)$; $\overrightarrow{AC}(1,1,-1)$

យើងបាន $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)(1)+(2)(1)+1(-1)=0$ ដូចនេះ **$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$**

បង្ហាញថា ABDC ជាចតុកោណកែង

ដោយ

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC} \quad (1)$
- $\overrightarrow{AB}(-1,2,1)=\overrightarrow{CD}(-1,2,1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right| \quad (2)$

តាម (1) និង (2) ដូចនេះ $\boxed{\text{ABDC ជាចតុកោណកែង}}$

៣. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

យើងមាន $\overrightarrow{AB}(-1,2,1)\ ;\ \overrightarrow{AC}(1,1,-1)$

យើងបាន
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=(-2-1)\vec{i}-(1-1)\vec{j}+(-1-2)\vec{k}$$
$$=-3\vec{i}+0\vec{j}-3\vec{k}$$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-3\vec{i}+0\vec{j}-3\vec{k}}$

លឹម សីហា

ទាញរកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ ABDC

$$S_{ABCD}=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-3)^2+0^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_{ABCD}=3\sqrt{2}\ \text{ឯកតាផ្ទៃ}}$

៤. រកមាឌចតុមុខ OABC

$$V_{\text{ចតុមុខ}OABC}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|\cdot AO \qquad ;\ AO=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=1$$

ដូចនេះ $\boxed{V=1\ \text{ឯកតាមាឌ}}$

ទាញរកចម្ងាយពីគល់ O ទៅប្លង់ ABC

តាមរូបមន្ត $V_{\text{តេត្រាអ៊ែត}OABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot h$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{3V}{S}$$

$$h = \frac{3V}{\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|} \quad ; \ h = d\,(O, (ABC))$$

$$\Rightarrow \quad d(o, (ABC)) = \frac{6V}{3\sqrt{2}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{d\,(O, (ABC)) = \sqrt{2} \text{ ឯកតាប្រវែង}}$

VI. ១. គណនា $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$y = f(x) = -x - 2 + \frac{4e^x}{e^x + 1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(-x - 2 + \frac{4e^x}{e^x + 1}\right) = -(-\infty) - 2 + \frac{0}{0 + 1} = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x - 2 + \frac{4e^x}{e^x + 1}\right) = -(+\infty) - 2 + \frac{4}{1 + 0} = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$$

លឹម សីហា

រកសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង C កាលណា $x \to -\infty$

$$y = f(x) = -x - 2 + \frac{4e^x}{e^x + 1} \text{ ដោយ } \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{4(0)}{0 + 1} = 0$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់} y = -x - 2 \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត}}$

២. គណនា $f'(x)$

$$f'(x) = \left(-x - 2 + \frac{4e^x}{e^x + 1}\right)' = -1 + \frac{(4e^x)'(e^x + 1) - (4e^x)(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2}$$

$$= -1 + \frac{4e^{2x} + 4e^x - 4e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{-e^{2x} - 2e^x - 1}{(e^x + 1)^2} + \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{-\left(e^{2x} - 2e^{x} + 1\right)}{(e^{x}+1)^2} = -\frac{(e^{x}-1)^2}{(e^{x}+1)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = -\dfrac{(e^{x}-1)^2}{(e^{x}+1)^2}}$

បង្ហាញថា $f'(x) \leq 0,\ x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = -\dfrac{(e^{x}-1)^2}{(e^{x}+1)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ព្រោះ $\dfrac{(e^{x}-1)^2}{(e^{x}+1)^2} > 0$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

គណនា $f'(0)$, $f(0)$

- $f'(0) = -\dfrac{\left(e^{0}-1\right)^2}{\left(e^{0}+1\right)^2} = -\dfrac{0}{4} = 0 \quad \boxed{f'(0) = 0}$
- $f(0) = -0 - 2 + \dfrac{4e^{0}}{e^{0}+1} = -2 + 2 = 0 \quad \boxed{f(0) = 0}$

លីម សីហា

តារាងអថេរភាពនៃf

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

៣. បង្ហាញថាគល់កូអរដោនេ O ជាចំណុចរបត់ និងជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ខ្សែកោង C

$$f''(x) = \left(-\frac{(e^{x}-1)^2}{(e^{x}+1)^2}\right)' = \frac{-2e^{x}(e^{x}-1)(e^{x}+1)^2 + 2e^{x}(e^{x}+1)(e^{x}-1)^2}{(e^{x}+1)^4}$$

$$= \frac{-2e^{x}(e^{x}-1)(e^{x}+1) + 2e^{x}(e^{x}-1)^2}{(e^{x}+1)^2}$$

$$= \frac{-2e^{3x} - 2e^{2x} + 2e^{2x} + 2e^{x} + 2e^{3x} - 4e^{2x} + 2e^{x}}{(e^{x}+1)^3} = \frac{4e^{x} - 4e^{2x}}{(e^{x}+1)^3}$$

$$= \frac{4e^{x}(1-e^{x})}{(e^{x}+1)^3}$$

$f''(x)$ មានសញ្ញាតាម $1-e^x$

- $f''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-e^x=0 \Rightarrow 1=e^x \Rightarrow x=0$
- $f''(x)<0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-e^x<0 \Rightarrow 1<e^x \Rightarrow x>0$
- $f''(x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-e^x>0 \Rightarrow 1>e^x \Rightarrow x<0$

តារាងសញ្ញា$f''(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

- ត្រង់$x=0,\ f''(0)=0$ ហើយវាប្តូរសញ្ញាពីរ $+$ ទៅ $-$ ដូចនេះ យើងបាន f មានចំនុចរបត់មួយ ត្រង់ $x=0, f(0)=0$

ដូចនេះ **គល់ $O(0,0)$ ជាចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង**

លឹម សីហា

បង្ហាញថាគល់$O(0,0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ

$O(0,0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ លុះត្រាតែ $f(2\times 0-x)+f(x)=2\times 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(-x)+f(x)=0$

- $f(x)=-x-2+\dfrac{4e^x}{e^x+1}$
- $f(-x)=x-2+\dfrac{4e^{-x}}{e^{-x}+1}=x-2+\dfrac{4}{1+e^x}$

$\Rightarrow f(-x)+f(x)=-4+\dfrac{4e^x}{e^x+1}+\dfrac{4}{e^x+1}=-4+4\left(\dfrac{e^x+1}{e^x+1}\right)=0$ ពិត

ដូចនេះ **គល់$O(0,0)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះ**

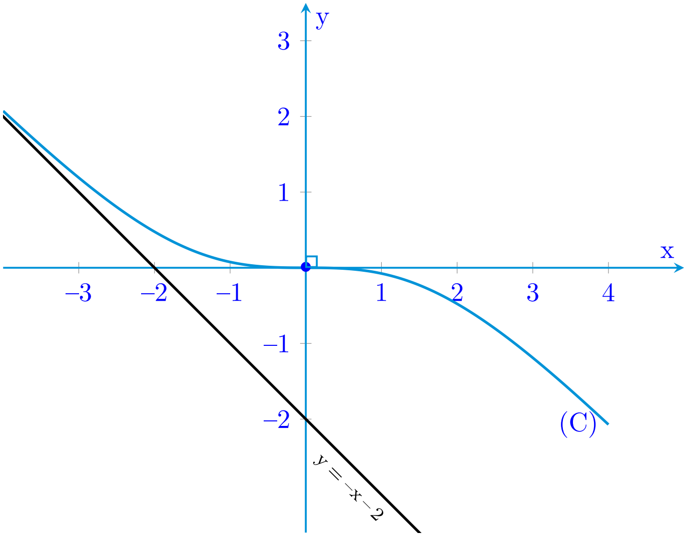
៤. រក $f(3)$

$f(3)=-3-2+\dfrac{4e^3}{e^3+1}=-5+\dfrac{4e^3}{e^3+1}=-1.19$ **$f(3)=-1.19$**

សង់ខ្សែកោង C

- $y=-x-2$

x	0	-2
y	-2	0



ដោះស្រាយវិសមីការ $\frac{4e^x}{e^x+1} \geq x+2$ ដោយប្រើខ្សែកោង C

$$\frac{4e^x}{e^x+1} \geq x+2 \quad \Leftrightarrow \quad -x-2+\frac{4e^x}{e^x+1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geq 0$$

តាមក្រាប $f(x) \geq 0$ លុះត្រាតែ $x \in (-\infty, 0]$

លីម សីហា

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាត្រៀមប្រឡង
សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិឆ្នាំ២០១៨

[វិញ្ញាសាទី៣]

I. (១០ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិចពីរ $Z_1=\dfrac{2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^2}{1+i\sqrt{3}}$ និង $Z_2=(1-i)x+(1-y)(1+i)$។

១. សរសេរ Z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ហើយសរសេរជាទម្រង់ពីជគណិត។

២. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យបាន $2\overline{Z}_1-(Z_2+y-1)=0$ ($\overline{Z}_1$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ Z_1) ។

II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4}-x}$

ខ. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x}{\sqrt{5}-\sqrt{x+5}}$

គ. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{-2x^2}$

ឃ. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{|x|}$

III. (១៥ពិន្ទុ) ក្នុងធុងមួយគេមានប៊ូលក្រហម៤ ប៊ូលស៣ និងប៊ូលខៀវ១។ គេចាប់យកប៊ូល៣ក្នុងពេលតែមួយចេញពីធុងដោយចៃដន្យ។

ក. រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានប៊ូលក្រហមពីរ និងមួយទៀតមិនក្រហម»

ខ. រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានប៊ូលក្រហមទាំងបី»

គ. រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានយ៉ាងតិចប៊ូលក្រហមពីរ»

IV. (១៥ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}$។

១. សរសេរ $f(x)$ ជារាង $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$ ដែល A ,B និង C ជាចំនួនថេរដែលត្រូវកំណត់។

២. គណនា $\displaystyle\int\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx$ ។

V. (១០ពិន្ទុ) គេមានប៉ារ៉ាបូលមួយមានកំពូលនៅត្រង់ចំណុច $o(0,0)$ និង កំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ។

ក. រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលនេះ បើគេដឹងថាវាកាត់តាមចំណុច $A(2,6)$។

ខ. រកតម្លៃនៃ x បើ $B\left(x_1,\dfrac{3}{2}\right)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូលនេះ។ ចូរសង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ។

VI. (២៥ពិន្ទុ) ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់វិជ្ជមាន $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ គេឲ្យចំណុច $A(3,2,0)$ និង $K(0,-1,3)$ ។

១. រកសមីការប្លង់ P ដែលកាត់តាម A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ AK ។

២. គេឲ្យចំណុច $B(5,0,0)$; $C(0,5,0)$ និង $D(0,0,-5)$ ។ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំណុច B, C និង D ជាចំណុចរបស់ប្លង់ P ។

៣. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ BCD ។

៤. គណនាប្រវែង AK រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $KBCD$ ។

VII. (៣៥ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x ដោយ $y = f(x) = -x - \dfrac{4\ln x}{x}$ ហើយមានខ្សែកោង C នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ មួយ។

១. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។ ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C ។

២. បង្ហាញថាបន្ទាត់$L : y = -x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបC។ សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាបC និងបន្ទាត់L។

៣. បង្ហាញថាដេរីវេ $f'(x) < 0$ បើគេដឹងថា $x^2 + 4 - 4\ln x > 0$ ចំពោះ $x > 0$ ។
សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។ បន្ទាត់ D ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច A ហើយស្របនឹងបន្ទាត់ L ។
រកកូអរដោនេនៃចំណុច A និងសមីការនៃបន្ទាត់ D ។

៤. សង់ L, D និងក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយ $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ដោយយក $e = 2.7$, $\dfrac{4}{e} = 1.5$ ។
គេយក $S(a)$ ជាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាបC និងអាស៊ីមតូតទ្រេតL ដែលត្រូវនឹង $1 \le x \le a$។
រកតម្លៃ a ដើម្បីឲ្យ $S(a) = 2$ ឯកតាផ្ទៃ។

ខេមរៈ

[ដំណោះស្រាយ]

I. ១. សរសេរ Z_1 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ហើយសរសេរជាទម្រង់ពីជគណិត

$$Z_1=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^2}{1+i\sqrt{3}}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រគឺ } Z_1=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$$Z_1=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ទម្រង់ពិជគណិត គឺ } Z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$

២. កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីឲ្យបាន $2\overline{Z}_1-(Z_2+y-1)=0$

- $Z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i \quad\Rightarrow \overline{Z_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$
- $Z_2=(1-i)x+(1-y)(1+i)=x-xi+1+i-y-yi$

$$2\overline{Z}_1-(Z_2+y-1)=0 \quad\Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)-(x-xi+1+i-y-yi+y-1)=0$$

$$\sqrt{3}+i-x+xi-i+yi=0$$

$$\left(\sqrt{3}-x\right)+(x+y)i=0+0i$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\sqrt{3}-x=0 & \Rightarrow x=\sqrt{3}\\ x+y=0 & \Rightarrow y=-x=-\sqrt{3}\end{cases}$$

ដូចនេះ $\boxed{x=\sqrt{3}\ ;\ y=-\sqrt{3}}$

II. គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4}-x}$ (មានរាងមិនកំណត់$\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}2\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2}{-1}\times 1=-2 \qquad \boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4}-x}=-2}$$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 5x}{\sqrt{5}-\sqrt{x+5}}$ (មានរាងមិនកំណត់$\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{x+5}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)}{5-(x+5)}$$

$$=\lim_{x\to 0}2\times 5\frac{\sin 5x}{5x}\left(\sqrt{5}+\sqrt{x+5}\right)=10\times 1\times 2\sqrt{5}=20\sqrt{5}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x}{\sqrt{5}-\sqrt{x+5}}=20\sqrt{5}}$$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 3x}{-2x^2}$ (មានរាងមិនកំណត់$\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{(3x)^2}\left(\frac{3^2}{-2}\right)=1\times\left(-\frac{9}{2}\right)=-\frac{9}{2}\qquad\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{-2x^2}=-\frac{9}{2}}$$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{|x|}$ (មានរាងមិនកំណត់$\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{|x|}=\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(x-1)}{-x}=\dfrac{0-1}{-1}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(x-1)}{x}=\dfrac{0-1}{1}=-1\end{array}\right.\qquad\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{|x|}=\pm 1}$$

III. ក. រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានប៊ូលក្រហមពីរ និងមួយទៀតមិនក្រហម»

តាង A : «គេចាប់បានប៊ូលក្រហមពីរ និងមួយទៀតមិនក្រហម»

តាមរូបមន្ត $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$ ដោយ $n(A)=C(4,2)\times C(3,1)+C(4,2)\times C(1,1)$

$$=\frac{4!}{2!2!}\times\frac{3!}{2!1!}+\frac{4!}{2!2!}\times\frac{1!}{0!1!}$$

$$=6\times 3+6=24$$

$$n(S)=C(8,3)=\frac{8!}{5!3!}=\frac{8\times 7\times 6\times 5!}{5!3\times 2\times 1}=56$$

គេបាន $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{24}{56}=\dfrac{3}{7}$ ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\dfrac{3}{7}}$

ខ. រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានប៊ូលក្រហមទាំងបី»   តាង B : «គេចាប់បានប៊ូលក្រហមទាំងបី»

តាមរូបមន្ត $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)}$ ដោយ $n(B) = C(4,3) = \dfrac{4!}{1!3!} = \dfrac{4\times 3!}{3!} = 4$

$$n(S) = 56$$

គេបាន $P(B) = \dfrac{4}{56} = \dfrac{1}{14}$ ដូចនេះ $\boxed{P(B) = \dfrac{1}{14}}$

គ. រកប្រូបាបដែល «គេចាប់បានយ៉ាងតិចប៊ូលក្រហមពីរ»

តាង C : «គេចាប់បានយ៉ាងតិចប៊ូលក្រហមពីរ»

តាមរូបមន្ត $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)}$

ដោយ $n(C) = C(4,2)\times C(3,1) + C(4,2)\times C(1,1) + C(4,3) = 24 + 4 = 28$

$n(S) = 56$

គេបាន $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{28}{56} = \dfrac{1}{2}$ ដូចនេះ $\boxed{P(C) = \dfrac{1}{2}}$

លឹម សីហា

IV. ១. សរសេរ f(x) ជារាង $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$

$$f(x) = \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}$$

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x\left(x^2+2x+1\right)}$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A}{x^3+2x^2+x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 5 & (1) \\ 2A + B + C = 20 & (2) \\ A = 6 & (3) \end{cases}$$

$(3):\ A = 6 \quad \Rightarrow (1):\ 6 + B = 5 \quad \Rightarrow B = -1$

$(2):\ 2A + B + C = 20 \quad \Rightarrow 2(6) - 1 + C = 20 \quad \Rightarrow C = 9$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=\frac{6}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}}$

២. គណនា $\int\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx=\int\left(\frac{6}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}\right)dx$

$$=6\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{-9}{x+1}+C \quad ;\ C\in\mathbb{R}$$

$$=\ln\left|\frac{x^6}{x+1}\right|-\frac{9}{x+1}+C \quad ;\ C\in\mathbb{R}$$

ដូចនេះ $\boxed{\int\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx=\ln\left|\frac{x^6}{x+1}\right|-\frac{9}{x+1}+C \quad ;\ C\in\mathbb{R}}$

V. ក. រកសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល

ដោយ កំពូល $o(0,0)$ និង កំណុំ F ស្ថិតនៅលើអ័ក្សអរដោនេ គេបាន អ័ក្សឆ្លុះជាអ័ក្សឈរ

គេបាន សមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូលគឺ $(x-h)^2=4p(y-k)$

- កំពូល(h,k) គឺ កំពូល $o(0,0)$ $\Rightarrow h=0, k=0$
- ប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច $A(2,6)$

គេបាន $(2-0)^2=4p(6-0)$ $\Leftrightarrow$ $4=24p$ $\Rightarrow$ $p=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$

គេបាន សមីការប៉ារ៉ាបូលគឺ $x^2=\frac{4}{6}y$ $\Leftrightarrow$ $x^2=\frac{2}{3}y$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប៉ារ៉ាបូលមានសមីការ } x^2=\frac{2}{3}y}$

ខ. រកតម្លៃនៃ x_1

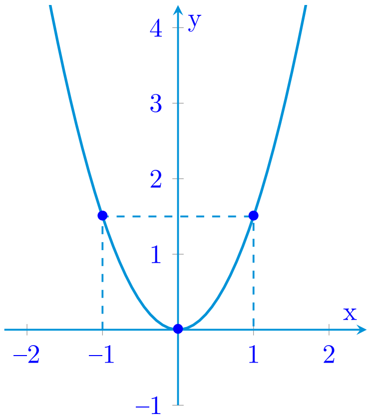
បើ $B\left(x_1,\frac{3}{2}\right)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូលនេ

គេបាន $x_1^2=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)$ $\Leftrightarrow$ $x_1=\pm1$

ដូចនេះ $\boxed{x_1=\pm1}$

លឹម សីហា

សង់ប៉ារ៉ាបូល



VI. ១. រកសមីការប្លង់ P ដែលកាត់តាម A ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ AK

$A(3,2,0)$; $K(0,-1,3)$ $\quad \Rightarrow \overrightarrow{AK}(0-3,-1-2,3-0) \Rightarrow \overrightarrow{AK}(-3,-3,3)$

សមីការប្លង់ (P) កំណត់ដោយ $a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o)=0$

- (P) កាត់តាម $A(3,2,0)$ $\quad \Rightarrow x_o=3,\ y_o=2,\ z_o=0$

- $(p)\perp(AK) \Rightarrow (P)\perp\overrightarrow{AK}(-3,-3,3) \Rightarrow a=-3, b=-3, c=3$

$\Rightarrow (P):\ -3(x-3)-3(y-2)+3(z-0) \quad \Leftrightarrow (P):\ -3x-3y+3z+15=0$

ដូចនេះ សមីការប្លង់$(P):\ -3x-3y+3z+15=0$

លឹម សីហា

២. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាចំណុច B, C និង D ជាចំណុចរបស់ប្លង់ P

- $B(5,0,0)$; $C(0,5,0)$; $D(0,0,-5)$

- $(P):\ -3x-3y+3z+15=0$

យើងបាន

- $B\in(P) \Leftrightarrow -3(5)-3(0)+3(0)+15=0 \Rightarrow 0=0$ ពិត

- $C\in(P) \Leftrightarrow -3(0)-3(5)+3(0)+15=0 \Rightarrow 0=0$ ពិត

- $D\in(P) \Leftrightarrow -3(0)-3(0)+3(-5)+15=0 \Rightarrow 0=0$ ពិត

ដូចនេះ ចំណុច B, C និង D ជាចំណុចរបស់ប្លង់ P

៣. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ BCD

$S_{\Delta BCD} = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right|$

- $B(5,0,0)$; $C(0,5,0)$; $D(0,0,-5)$
- $\Rightarrow \overrightarrow{BC}(-5,5,0)$
- $\Rightarrow \overrightarrow{BD}(-5,0,-5)$

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = (-25-0)\,\vec{i} - (25-0)\,\vec{k} + (0-25)\,\vec{k}$$

$$= -25\,\vec{i} - 25\,\vec{j} - 25\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{(-25)^2+(-25)^2+(-25)^2} = \sqrt{3\cdot 25^2} = 25\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}\cdot 25\sqrt{3} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_{\Delta BCD} = \dfrac{25\sqrt{3}}{2} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$

លឹម សីហា

៤. គណនាប្រវែង AK

$\overrightarrow{AK}(-3,-3,3) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AK}\right| = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2+3^2} = 3\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\boxed{AK = 3\sqrt{3} \text{ ឯកតាប្រវែង}}$

ទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត KBCD

$\overrightarrow{AK}\perp(P) \Rightarrow AK$ ជាកម្ពស់នៃតេត្រាអ៊ែតKBCD

$$V_{\text{តេត្រាអ៊ែត}} = \frac{1}{3}\cdot AK\cdot S_{\Delta BCD}$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3}\cdot\frac{25\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{75}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{V_{KBCD} = \dfrac{75}{2} \text{ ឯកតាមាឌ}}$

VII. ១. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

យើងមាន $y = f(x) = -x - \dfrac{4\ln x}{x}$ យើងបាន

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(-x - \frac{4\ln x}{x}\right) = -0 - (-\infty) = +\infty$$ ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(-x - \frac{4\ln x}{x}\right) = -(+\infty) - 0 = -\infty$$ ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty}$

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប C

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } x = 0 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$

២. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $L : y = -x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបC

យើងមាន $f(x) = -x - \dfrac{4\ln x}{x}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - (-x)] = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\dfrac{4\ln x}{x}\right) = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } L : \ y = -x \text{ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត}}$

លីម សីហា

សិក្សាទីតាំងរវាងក្រាបC និងបន្ទាត់ L

$(C) : \ y_c = f(x) = -x - \dfrac{4\ln x}{x}$; $(L) : \ y_L = -x$

$\Rightarrow y_c - y_L = -\dfrac{4\ln x}{x}$ ដោយ $x > 0$ $\Rightarrow y_c - y_L$ មានសញ្ញាតាមភាគយក $-4\ln x$

- $y_c - y_L = 0 \Leftrightarrow -4\ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$
- $y_c - y_L < 0 \Leftrightarrow -4\ln x < 0 \quad \Leftrightarrow \ln x > 0 \Rightarrow x > 1$
- $y_c - y_L > 0 \Leftrightarrow -4\ln x > 0 \quad \Leftrightarrow \ln x < 0 \Rightarrow x < 1$

ដូចនេះ

ពេល $x = 1$ ក្រាប C កាត់បន្ទាត់ L
ពេល $x \in (1, +\infty)$ ក្រាប C ស្ថិតនៅក្រោមបន្ទាត់ L
ពេល $x \in (0, 1)$ ក្រាប C ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ L

៣. បង្ហាញថាដេរីវេ $f'(x) < 0$ បើគេដឹងថា $x^2 + 4 - 4\ln x > 0$ ចំពោះ $x > 0$

$$f'(x) = \left(-x - \frac{4\ln x}{x}\right)' = -1 - \frac{(4\ln x)'x - (x')4\ln x}{x^2} = -1 - \frac{4 - 4\ln x}{x^2}$$
$$= \frac{-x^2 - 4 + 4\ln x}{x^2} = -\frac{x^2 + 4 - 4\ln x}{x^2}$$

ដោយ $x^2 + 4 - 4\ln x > 0$ ចំពោះ $x > 0$ យើងបាន $\dfrac{x^2 + 4 - 4\ln x}{x^2} > 0$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = -\dfrac{x^2 + 4 - 4\ln x}{x^2} < 0}$

សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

លឹម សីហា

រកកូអរដោនេនៃចំណុច A និងសមីការនៃបន្ទាត់ D

ដោយ បន្ទាត់ D ប៉ះនឹងក្រាប C យើងបាន D កំណត់ដោយ

$(D): \; y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$

បម្រាប់

- D ប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច $A(x_A, y_A)$ $\Rightarrow f'(x_o) = f'(x_A) = -\dfrac{x_A^2 + 4 - 4\ln x_A}{x_A^2}$

  $f(x_o) = f(x_A) = y_A$

- D ស្របនឹងបន្ទាត់ $L: \; y = -x \Rightarrow f'(x_A) = -1$

យើងបាន

$$-\frac{x_A^2 + 4 - 4\ln x_A}{x_A^2} = -1 \quad \Leftrightarrow -x_A^2 - 4 + 4\ln x_A = -x_A^2$$

$$4\ln x_A = 4$$

$$\ln x_A = 1 \quad \Rightarrow x_A = e$$

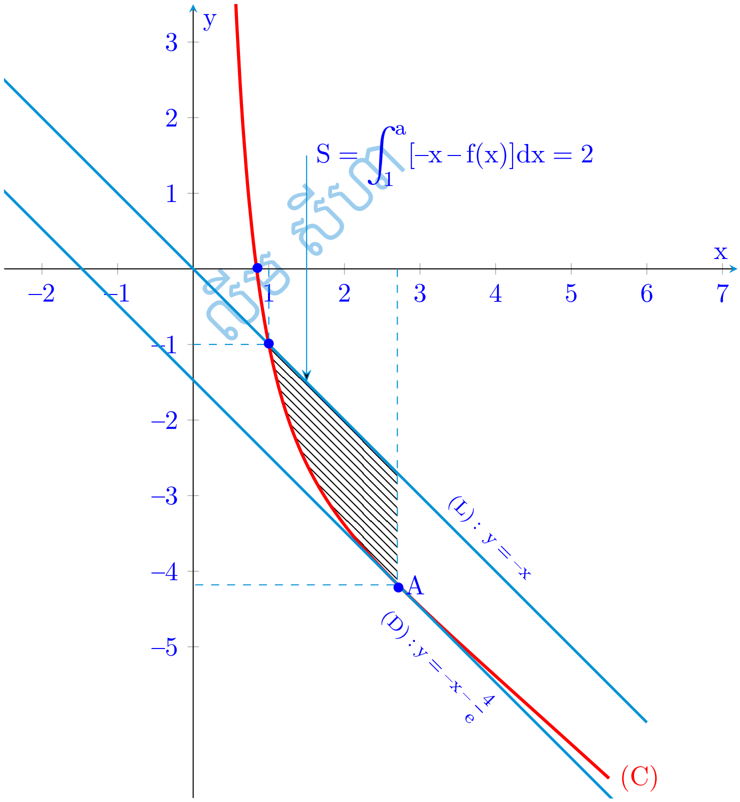
$$\Longrightarrow y_A = f(x_A) = f(e) = -e - \frac{4}{e}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំណុច } A\left(e, -e - \frac{4}{e}\right)}$

$$D:\ y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A) = -(x - e) + \left(-e - \frac{4}{e}\right) = -x - \frac{4}{e}$$

ដូចនេះ $\boxed{(D):\ y = -x - \frac{4}{e}}$

៤. សង់ L, D និងក្រាប C



រកតម្លៃ a ដើម្បីឲ្យ $S(a) = 2$ ឯកតាផ្ទៃ

ដោយ $S(a)$ ជាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាបC និងអាស៊ីមតូតទ្រេតL ដែលត្រូវនឹង $1 \le x \le a$

យើងបាន $S(a) = \int_1^a [-x - f(x)]\, dx = \int_1^a \frac{4\ln x}{x} dx = \int_1^a 4 \cdot \ln x (\ln x)' dx$

$$= \left[\frac{4\ln^2 x}{2}\right]_1^a = 2\ln^2 a - 2\ln^2 1 = 2\ln^2 a$$

$$S(a) = 2 \quad \Rightarrow 2\ln^2 a = 2 \Rightarrow \ln^2 a = 1 \Rightarrow \ln a = \pm 1 \Rightarrow a = e^{\pm 1}$$

តែ $a = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$ មិនយក ដូចនេះ $\boxed{a = e}$

លីម សីហា

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាត្រៀមប្រឡង
សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិឆ្នាំ២០១៨

វិញ្ញាសាទី៨

I. (១០ពិន្ទុ) ក្នុងប្រអប់មួយមានខ្មៅដៃពណ៌ខៀវ 5 ដើម និង ខ្មៅដៃពណ៌ក្រហម 4 ដើម។ សិស្សម្នាក់បានចាប់យកខ្មៅដៃ 3 ព្រមគ្នាចេញពីប្រអប់ដោយចៃដន្យ។

១. រកប្រូបាបដែល «សិស្សយកបានខ្មៅដៃពណ៌ខៀវ 2 ដើម និង ខ្មៅដៃពណ៌ក្រហម 1 ដើម»

២. រកប្រូបាបដែល «សិស្សយកបានខ្មៅដៃពណ៌ដូចគ្នា»

II. (២០ពិន្ទុ) គណនាលីមីតខាងក្រោម៖

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

ខ. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2 x-1}{1+\sin x}$

គ. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

ឃ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{-x}+e^{x})\sin^2 x}{2x^2}$

ង. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln(x+2)-\ln x-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{4}\right)$

III. (១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=\dfrac{2\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{1+i\sqrt{3}}$ ។

១. សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត រួចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

២. សរសេរ $Z'=1+i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ រួចទាញរកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\dfrac{Z'}{Z}$ ។

IV. (១៥ពិន្ទុ)

១. ដោះស្រាយសមីការ $(E):\ y''+5y'+6y=0$ ។

២. កំណត់ចម្លើយមួយនៃសមីការ(E) បើគេដឹងថាបន្ទាត់ $D: y=x-1$ ប៉ះក្រាបនៃចម្លើយត្រង់ $x=0$។

V. (៣០ពិន្ទុ) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មួយគេមានចំណុច $A(-1,1,0)$; $B(2,0,1)$; $C(1,2,2)$; $D(0,1,-2)$ និង $M(x,y,z)$ ។

១. រកទំនាក់ទំនងរវាង x,y និង z ដើម្បីឲ្យ $\overrightarrow{AM}$ កែងនឹង $\overrightarrow{BM}$ ។ តើសំណុំចំណុចនៃចំណុច M ជាអ្វី?

២. គណនា $\vec{n}=\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}$ ។ រកចំនួនពិត m ដើម្បីឲ្យផ្ទៃក្រឡា S នៃ ΔBCD ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $S=\sqrt[3]{e^m}$ ។

៣. រកសមីការប្លង់ BCD ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ N រវាងប្លង់ BCD និងបន្ទាត់ $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ ។

៤. គណនាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅប្លង់ BCD ។ រួចទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត ABCD ។

VI. (៣៥ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x \in D = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ ដោយ $y = f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ ហើយមានខ្សែកោង C នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មួយ។

១. គណនា $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ និង $\lim_{x\to 1^+} f(x)$។
រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរនៃក្រាប C ។

២. គណនា និងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ បើដឹងថា $x(x-1) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ ។
គណនាតម្លៃអប្បបរមា និងអតិបរមានៃអនុគមន៍ f ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f។

៣. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $L: \ y = -\frac{x}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង C ។

៤. សង់អាស៊ីមតូតទាំងអស់ និងក្រាប C (គេយក $\ln 2 = 0.7$, $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 = -0.7$)
ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មួយ។ រកតម្លៃ a ដើម្បីឲ្យសមីការ $-\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = a$ មានឫសអវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នា ដោយប្រើខ្សែកោង C។

លឹម សុីហា

[ដំណោះស្រាយ]

I. ១. រកប្រូបាប A : «សិស្សយកបានខ្មៅដៃពណ៌ខៀវ 2 ដើម និង ខ្មៅដៃពណ៌ក្រហម 1 ដើម»

តាមរូបមន្ត $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$ ដោយ $n(A)=C(5,2)C(4,1)=\dfrac{5!}{3!2!}\cdot\dfrac{4!}{3!1!}=\dfrac{5\times 4}{2}\cdot\dfrac{4}{1}=40$

$$n(S)=C(9,3)=\frac{9!}{6!3!}=\frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1}=84$$

គេបាន $P(A)=\dfrac{40}{84}=\dfrac{10}{21}$ ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\dfrac{10}{21}}$

២. រកប្រូបាប B : «សិស្សយកបានខ្មៅដៃពណ៌ដូចគ្នា»

តាមរូបមន្ត $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}$ ដោយ $n(B)=C(5,3)+C(4,3)=\dfrac{5!}{2!3!}+\dfrac{4!}{1!3!}=14$

$$n(S)=84$$

គេបាន $P(B)=\dfrac{14}{84}=\dfrac{1}{6}$ ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\dfrac{1}{6}}$

II. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$ (មានរាងមិនកំណត់$\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)x^2+(x-1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x^2+1)=1^2+1=2$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}=2}$$

ខ. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2 x-1}{1+\sin x}$ (មានរាងមិនកំណត់$\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-1)(\sin x+1)}{\sin x+1}=\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}(\sin x-1)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-1=-1-1=-2$$

$$\boxed{\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x-1}{1+\sin x}=-2}$$

លឹម សីហា

គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ (មានរាងមិនកំណត់ $+\infty-\infty$)

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\frac{1}{2}}$$

ឃ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^{-x}+e^{x})\sin^2x}{2x^2}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}\cdot\frac{\sin^2x}{x^2}=\frac{e^0+e^0}{2}\times1=\frac{2}{2}=1\qquad\boxed{\lim_{x\to0}\frac{(e^{-x}+e^{x})\sin^2x}{2x^2}=1}$$

ង. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x+2)-\ln x-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{4}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{4}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\ln1-0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x+2)-\ln x-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}}$$

លីម សីហា

III. ១. សរសេរ Z ជាទម្រង់ពីជគណិត រួចជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$Z=\frac{2\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{1+i\sqrt{3}}=\frac{-2+i2\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\times\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\frac{-2+i2\sqrt{3}+i2\sqrt{3}-i^22\sqrt{3}^2}{1-i^2\sqrt{3}^2}$$

$$=\frac{4+i4\sqrt{3}}{4}=1+i\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ទម្រង់ពិជគណិតគឺ } Z=1+i\sqrt{3}}$

$$Z=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រគឺ } Z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

២. សរសេរ $Z' = 1 + i$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$Z' = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{Z' = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

ទាញរកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃចំនួនកុំផ្លិច $\frac{Z'}{Z}$

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{-\pi}{12} + i\sin\frac{-\pi}{12}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ម៉ូឌុល } r = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{អាគុយម៉ង់ } \theta = -\frac{\pi}{12} \text{ ឬ } \theta = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \quad ; k \in \mathbb{Z}}$

IV. ១. ដោះស្រាយសមីការ (E) : $y'' + 5y' + 6y = 0$

(E) មានសមីការសម្គាល់ $r^2 + 5r + 6 = 0$ មានឫស $r_1 = -2$; $r_2 = -3$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចម្លើយនៃសមីការ (E) គឺ } y = Ae^{-2x} + Be^{-3x} \quad ; A, B \in \mathbb{R}}$

២. កំណត់ចម្លើយមួយនៃសមីការ(E) បើគេដឹងថាបន្ទាត់ $D : y = x - 1$ ប៉ះក្រាបនៃចម្លើយត្រង់ $x = 0$

យើងមាន ចម្លើយនៃសមីការ (E) គឺ $y = f(x) = Ae^{-2x} + Be^{-3x} \quad ; A, B \in \mathbb{R}$

- ដោយ $D : y = x - 1$ ប៉ះ (E) ត្រង់ $x = 0 \Rightarrow \quad f'(0) = 1$ ហើយ $f(0) = -1$
- $f'(x) = \left(Ae^{-2x} + Be^{-3x}\right)' = -2Ae^{2x} - 3Be^{2x} \Rightarrow f'(0) = -1 \quad \Leftrightarrow -2A - 3B = 1 \; (1)$
- $f(0) = -1 \quad \Leftrightarrow A + B = -1 \quad \Rightarrow A = -1 - B$

យក $A = -1 - B$ ជំនួសក្នុងសមីការ (1) យើងបាន $-2(-1 - B) - 3B = 1 \Rightarrow B = 1$

$\Rightarrow \quad A = -1 - 1 = -2$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចម្លើយមួយនៃ (E) គឺ } y = -2e^{-2x} + e^{-3x}}$

លីម សីហា

V. ១. រកទំនាក់ទំនងរវាង x, y និង z ដើម្បីឲ្យ $\overrightarrow{AM}$ កែងនឹង $\overrightarrow{BM}$

$$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BM} \iff \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$$

$A(-1,1,0);\ B(2,0,1);\ M(x,y,z)$

- $\overrightarrow{AM}(x+1, y-1, z-0) \Rightarrow \overrightarrow{AM}(x+1, y-1, z)$
- $\overrightarrow{BM}(x-2, y-0, z-1) \Rightarrow \overrightarrow{BM}(x-2, y, z-1)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} &= (x+1)(x-2)+(y-1)y+z(z-1)\\ &= x^2-2x+x-2+y^2-y+z^2-z\\ &= x^2-x+y^2-y+z^2-z-2\\ &= \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\tfrac{1}{2}\right)^2-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-2\\ &= \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\tfrac{1}{2}\right)^2-2-\tfrac{3}{4}\\ &= \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{11}{4}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0 \Leftrightarrow \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{11}{4}=0$$

ដូចនេះ ទំនាក់ទំនងរវាង x, y និង z ដើម្បីឲ្យ $\overrightarrow{AM}$ កែងនឹង $\overrightarrow{BM}$ គឺ

$$\boxed{\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{11}{4}}$$

តើសំណុំចំណុចនៃចំណុច M ជាអ្វី?

តាមទំនាក់ទំនង $\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{11}{4}$

យើងបាន | សំណុំចំនុច $M(x,y,z)$ គឺជារង្វង់ដែលមានផ្ចិត $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ និងកាំ $r=\sqrt{\frac{11}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$ |

២. គណនា $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}$

$B(2,0,1);\ C(1,2,2);\ D(0,1,-2)$

- $\overrightarrow{BC}(1-2, 2-0, 2-1) \Rightarrow \overrightarrow{BC}(-1,2,1)$
- $\overrightarrow{BD}(0-2, 1-0, -2-1) \Rightarrow \overrightarrow{BD}(-2,1,-3)$

$$\vec{n} = \left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}\right| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-6-1)\,\vec{i} - (3+2)\,\vec{j} + (-1+4)\,\vec{k}$$

$$= -7\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{n}\,(-7,-5,3)}$

រកចំនួនពិត m ដើម្បីឲ្យផ្ទៃក្រឡា S នៃ ΔBCD ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $S = \sqrt[3]{e^m}$

$$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-7)^2 + (-5)^2 + 3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{83}$$

$$S_{\Delta BCD} = \sqrt[3]{e^m} \Rightarrow \sqrt[3]{e^m} = \frac{\sqrt{83}}{2} \Leftrightarrow e^{\frac{m}{3}} = \left(\frac{83}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{3} = \ln\left(\frac{83}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow m = \frac{3}{2}\ln\frac{83}{4}$$

លឹម សីហា

ដូចនេះ $\boxed{m = \frac{3}{2}\ln\frac{83}{4}}$

៣. រកសមីការប្លង់ BCD

ប្លង់BCD : $a(x-x_o) + b(y-y_o) + c(z-z_o) = 0$

- ប្លង់BCD កាត់តាមចំណុច $B(2,0,1)$
- វ៉ិចទ័រ $\vec{n}\,(-7,-5,3)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃ ប្លង់BCD

នាំឲ្យសមីការប្លង់ BCD : $-7(x-2) - 5(y-0) + 3(z-1) = 0$

$$-7x - 5y + 3z + 11 = 0$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការប្លង់BCD} : -7x - 5y + 3z + 11 = 0}$

រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ N រវាងប្លង់ BCD និងបន្ទាត់ L

- BCD : $-7x - 5y + 3z + 11 = 0 \quad (1)$
- L : $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$

☞ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{z}{1} \quad \Rightarrow \quad x=z+1 \quad (2)$

☞ $\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{1} \quad \Rightarrow \quad y=-z-1 \quad (3)$

យក $(2),(3)$ ជួសក្នុងសមីការ (1) យើងបាន $-7(z+1)-5(-z-1)+3z+11=0 \Rightarrow z=-9$

$\Rightarrow x=-9+1=-8 \quad ; \quad y=-(-9)-1=8$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំណុច} N(-8,7,-9)}$

៤. គណនាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅប្លង់ BCD

- $A(-1,1,0)$
- $BCD:\ -7x-5y+3z+11=0$

$$D(A,(BCD))=\frac{|-7(-1)-5(1)+3(0)+11|}{\sqrt{(-7)^2+(-5)^2+3^2}}=\frac{13}{\sqrt{83}}\times\frac{\sqrt{83}}{\sqrt{83}}=\frac{13\sqrt{83}}{83}$$

ដូចនេះ $\boxed{D(A,(BCD))=\dfrac{13\sqrt{83}}{83}\ \text{ឯកតាប្រវែង}}$

លឹម សីហា

ទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត ABCD

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta BCD}\cdot h \qquad ; h=D(A,(BCD))$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{83}}{2}\times\frac{13\sqrt{83}}{83}=\frac{13}{6}$$

ដូចនេះ $\boxed{V_{ABCD}=\dfrac{13}{6}\ \text{ឯកតាមាឌ}}$

VI. ១. គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$

$$y=f(x)=-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x}{2}+\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)=-\frac{-\infty}{2}+\ln 1=+\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{2}+\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right) = -\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right) = 0+\ln(+\infty) = +\infty \qquad \boxed{\lim_{x\to0^-} f(x) = +\infty}$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\left(-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right) = -\frac{1}{2}+\ln\left(0^+\right) = -\infty \qquad \boxed{\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty}$$

រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរទាំងពីរនៃក្រាប C

- ដោយ $\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to0^-} f(x) = +\infty$

ដូចនេះ បន្ទាត់ $x = 1, x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

២. គណនា និងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ បើដឹងថា $x(x-1) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$

$$f'(x) = \left(-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)' = -\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)'}{\left(\frac{x-1}{x}\right)} = -\frac{1}{2}+\frac{\frac{x-(x-1)}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{x(x-1)}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{x(x-1)}}$

លឹម សីហា

$$f'(x) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-x(x-1)+2}{x(x-1)} = \frac{-x^2+x+2}{x(x-1)}$$

ដោយ $x(x-1) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $x \in D$ យើងបាន $f'(x)$ មានសញ្ញាដូចភាគយក $-x^2+x+2$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \quad -x^2+x+2 = 0$$

$$\Delta = b^2-4ac = 1^2-4(-1)2 = 9 \quad \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-3}{2(-1)} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+3}{2(-1)} = -1$$

តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	//////	‖	$+$	0	$-$	

- $f'(x) < 0$ ពេល $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$
- $f'(x) > 0$ ពេល $x \in (-1, 0) \cup (1, 2)$

គណនាតម្លៃអប្បបរមា និងអតិបរមានៃអនុគមន៍ f

- ត្រង់ $x = -1; f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ យើងបាន f មានអប្បបរមាធៀបមួយ គឺ
  $f(-1) = \frac{1}{2} + \ln 2 = 0.5 + 0.7 = 1.2$ **តម្លៃអប្បបរមាគឺ $f(-1) = 1.2$**
- ត្រង់ $x = 2; f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ យើងបាន f មានអប្បបរមាធៀបមួយ គឺ
  $f(2) = -1 + \ln\frac{1}{2} = -1 - \ln 2 = -1 - 0.7$ **តម្លៃអតិបរមាគឺ $f(2) = -1.7$**

សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖		‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1.2	↗	$+\infty$ ‖		‖ $-\infty$	↗	-1.7	↘	$-\infty$

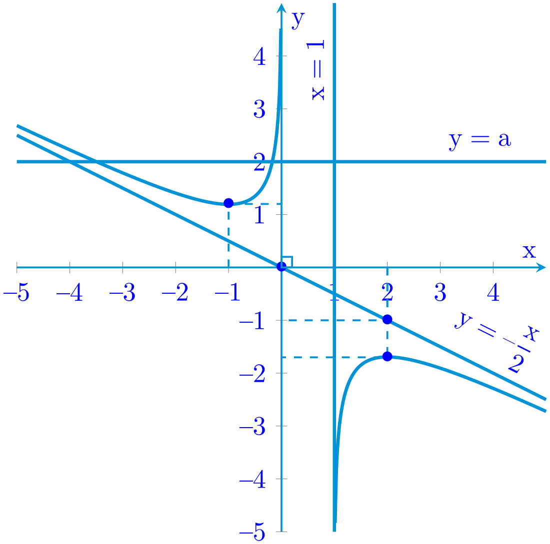
៣. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $L:\ y = -\frac{x}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង C

$$y = f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

ដោយ $\lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0$

ដូចនេះ **បន្ទាត់ $y = -\frac{x}{2}$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប**

៤. សង់អាស៊ីមតូតទាំងអស់ និងក្រាប C



រកតម្លៃ a ដើម្បីឲ្យសមីការ $-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=a$ មានឫសអវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នា

$-\frac{x}{2}+\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)=a$ គឺជាសមីការអាប់ស៊ីសរវាងក្រាប C និងបន្ទាត់ $y=a$

តាមក្រាបយើងបាន

- សមីការមានឫសអវិជ្ជមានពីរផ្សេងគ្នាលុះត្រាតែ $a \in (1.2, +\infty)$

ដូចនេះ $\boxed{a \in (1.2, +\infty)}$

លីម សីហា

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាត្រៀមប្រឡង
សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិឆ្នាំ២០១៨

វិញ្ញាសាទី៨

I. (១០ពិន្ទុ)

១. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $x_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ជាឫសមួយនៃសមីការ $x^2 + ax + b = 0$ ។

២. រកឫស x_2 មួយទៀតនៃសមីការ។ សរសេរ $Z = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

II. (១៥ពិន្ទុ) គេចង់បង្កើតចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់ដែលខ្ទង់ទាំងបីមានលេខខុសៗគ្នា ដោយយកចេញពីលេខ $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ ។

១. រកចំនួនករណីអាច ។

២. រកប្រូបាប ដែលចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់នោះ ជាពហុគុណនៃ 5 ។

៣. រកប្រូបាប ដែលចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់នោះ ជាចំនួនគូ។

III. (១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E) : \; y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$ ។

១. ដោះស្រាយសមីការ$(E_1) : \; y'' - 3y' + 2y = 0$ ។កំណត់ចម្លើយ f នៃ (E_1) ដែល $f(0) = 3$ និង $f'(0) = 4$ ។

២. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $g(x) = ax + b$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) អេលីប E មួយមានសមីការទូទៅ៖ $9x^2 + 4y^2 + 18x - 24y + 9 = 0$ ។

១. រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីប E ។

២. រកប្រវែងអ័ក្សធំ និង អ័ក្សតូច ហើយរកកូអរដោនេនៃ ផ្ចិត កំពូល និង កំណុំនៃអេលីប E ។

V. (៣០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = \frac{1}{1 + e^x} + \frac{2}{9}x$ និង C តាងក្រាបរបស់ f ។

1. អនុគមន៍ g កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$ ។

ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $g(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2)$ ។

ខ. ទាញយកតាមតម្លៃនៃ x ចំពោះសញ្ញានៃ $g(x)$ ។

លីម ស៊ីហា

2. ក. រក $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ។

ខ. អនុគមន៍ f មានដេរីវេ f' ។
បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f'(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា។

គ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $\mathbb{R}$ ។

VI. (៤០ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = 4 - x - 2e^{-x}$ ។គេតាងដោយ C ជាក្រាបរបស់វា ។

១. ក. រក $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ។

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ D មានសមីការ $y = -x + 4$ ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង C ។

គ. តើខ្សែកោង C នៅលើឬក្រោមបន្ទាត់ D ចូរបញ្ជាក់។

ឃ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាគ្រប់ចំនួនពិត x ; $f(x) = \dfrac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}$ ។

ង. រក $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ (ប្រើលទ្ធផល $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$)។

២. ក. គណនា $f'(x)$ ។ សិក្សាអថេរភាពនៃ f ។ កំណត់តម្លៃពិតនៃអតិបរមារបស់ f ។

ខ. A ជាចំណុចនៅលើខ្សែកោង C ដែលមានអាប់ស៊ីស 0 ។ កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង C ត្រង់ចំណុច A ។

គ. បង្ហាញថាសមីការ $f(x) = 0$ មានចម្លើយតែមួយគត់ដែលគេតាងដោយ β នៅក្នុងចន្លោះ$[-1, 0]$។

លឹម សីហា

[ដំណោះស្រាយ]

I. ១. កំណត់ចំនួនពិត a និង b

ដើម្បីឲ្យ $x_1 = 1 + i\sqrt{3}$ ជាឫសមួយនៃសមីការ $x^2 + ax + b = 0$

លុះត្រាតែ $x_1^2 + ax_1 + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 + i\sqrt{3}\right)^2 + a\left(1 + i\sqrt{3}\right) + b = 0$

$$1 + 2i\sqrt{3} - 3 + a + ai\sqrt{3} + b = 0$$

$$(-2 + a + b) + \left(2\sqrt{3} + a\sqrt{3}\right)i = 0 + 0i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 + a + b = 0 & (1) \\ 2\sqrt{3} + a\sqrt{3} = 0 & (2) \end{cases}$$

$(2): \ 2\sqrt{3} + a\sqrt{3} = 0 \Rightarrow a = -2$

$(1): \ -2 + a + b = 0 \Rightarrow -2 - 2 + b = 0 \quad \Rightarrow b = 4$

ដូចនេះ $\boxed{a = -2, b = 4}$

២. រកឫស x_2 មួយទៀតនៃសមីការ

សមីការ $x^2 + ax + b = 0 \quad \Rightarrow x^2 - 2x + 4 = 0$

មាន ឫសជាចំនួនកុំផ្លិច $x_1 = 1 + i\sqrt{3} \quad \Rightarrow x_2 = 1 - i\sqrt{3}$

ដូចនេះ $\boxed{x_2 = 1 - i\sqrt{3}}$

សរសេរ $Z = \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

- $x_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$
- $x_2 = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{-\pi}{3} + i\sin\dfrac{-\pi}{3}\right)$

$$Z = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 = \left(\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)}\right)^2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{-\pi}{3}\right)\right)^2$$

$$= \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{Z = \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}}$

II. ១. រកចំនួនករណីអាច

ដោយ ការបង្កើតចំនួនមានលេខ3ខ្ទង់ (គិតលំដាប់) ដែលខ្ទង់ទាំងបីមានលេខខុសៗគ្នា (គឺមិនច្រំដែល) ហើយយកចេញពីលេខ $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

គេបាន ចំនួនករណីអាចគឺ $n(S) = P(9,3) = \dfrac{9!}{(9-3)!} = \dfrac{9\times8\times7\times6!}{6!} = 504$

ដូចនេះ ចំនួនករណីអាចគឺ $n(S) = 504$ ករណី

២. រកប្រូបាប A : « ចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់នោះ ជាពហុគុណនៃ 5 »

តាមរូបមន្ត $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$

ដោយ A : « ចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់នោះ ជាពហុគុណនៃ 5 »

គេបាន លេខបីខ្ទង់ទាំងនោះត្រូវមានលេខខាងចុងគឺ លេខ 5

$\Rightarrow n(A) = P(8,2)\times P(1,1) = P(8,2) = \dfrac{8!}{6!} = 56$

គេបាន $P(A) = \dfrac{56}{504} = \dfrac{1}{9}$ ដូចនេះ $P(A) = \dfrac{1}{9}$

៣. រកប្រូបាប B : «ចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់នោះ ជាចំនួនគូ»

តាមរូបមន្ត $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)}$

ដោយ B : «ចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់នោះ ជាចំនួនគូ»

គេបាន លេខបីខ្ទង់ទាំងនោះត្រូវមានលេខខាងចុង ជាលេខគូ គឺ 2 ឬ 4 ឬ 6 ឬ 8

$\Rightarrow P(B) = P(8,2)P(1,1) + P(8,2)P(1,1) + P(8,2)P(1,1) = 4\times8\times7 = 224$

គេបាន $P(B) = \dfrac{224}{504} = \dfrac{4}{9}$ ដូចនេះ $P(B) = \dfrac{4}{9}$

III. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E) : $y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$

១. ដោះស្រាយសមីការ(E_1) : $y'' - 3y' + 2y = 0$

(E_1) មានសមីការសម្គាល់ $r^2 - 3r + 2 = 0$ មានឫស $r_1 = 1,\ r_2 = 2$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការ (E_1) គឺ $y = Ae^x + Be^{2x}$; $A, B \in \mathbb{R}$

កំណត់ចម្លើយ f នៃ (E_1) ដែល $f(0) = 3$ និង $f'(0) = 4$

ចម្លើយនៃ(E_1) គឺ $y = f(x) = Ae^x + Be^{2x}$ $\Rightarrow f'(x) = Ae^x + 2Be^{2x}$

- $f(0) = 3 \quad \Rightarrow Ae^0 + Be^0 = 3 \quad \Rightarrow A + B = 3\ (1)$

- $f'(0) = 4 \quad \Rightarrow Ae^0 + 2Be^0 = 4 \quad \Rightarrow A + 2B = 4 \ (2)$

$(1): \ A + B = 3 \quad \Rightarrow A = 3 - B$ ជំនួសក្នុង (2)

យើងបាន $3 - B + 2B = 4 \quad \Rightarrow B = 1 \quad ; \ A + B = 3 \quad \Rightarrow A = 2$

ដូចនេះ ចម្លើយ f នៃ(E_1) គឺ $y = f(x) = 2e^x + e^{2x}$

២. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $g(x) = ax + b$ ជាចម្លើយនៃ (E)

$g(x)$ ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) = 2x + 1$

$g(x) = ax + b \quad \Rightarrow g'(x) = a$

$\Rightarrow g''(x) = 0$

យើងបាន $0 - 3a + 2(ax + b) = 2x + 1$

$-3a + 2ax + 2b = 2x + 1$

$2ax + (2b - 3a) = 2x + 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 2 & \Rightarrow a = 1 \\ 2b - 3a = 1 & \Rightarrow 2b - 3 = 1 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

ដូចនេះ $a = 1, b = 2$

លីម សីហា

IV. ១. រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីប E

$(E): \ 9x^2 + 4y^2 + 18x - 24y + 9 = 0$

$$\Leftrightarrow \ 9\left(x^2 + 2x + 1\right) - 9 + 4\left(y^2 - 6y + 9\right) - 4(9) + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ 9(x+1)^2 + 4(y-3)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{9(x+1)^2}{36} + \frac{4(y-3)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{3^2} = 1$$

ដូចនេះ សមីការស្តង់ដានៃ(E) គឺ $\dfrac{(x+1)^2}{2^2} + \dfrac{(y-3)^2}{3^2} = 1$

២. រកប្រវែងអ័ក្សធំ និង អ័ក្សតូច ហើយរកកូអរដោនេនៃ ផ្ចិត កំពូល និង កំណុំនៃអេលីប E

ដោយ សមីការស្តង់ដានៃ(E) គឺ $\frac{(x+1)^2}{2^2}+\frac{(y-3)^2}{3^2}=1$ គេបាន

- អ័ក្សធំជាអ័ក្សឈរ
- $h=-1, k=3; \quad a=3, b=2; \quad c^2=a^2-b^2=9-4=5 \quad \Rightarrow \quad c=\sqrt{5}$

ដូចនេះ យើងបាន

- ប្រវែងអ័ក្សធំគឺ $2a=2(3)=6 \quad \Rightarrow$ [ប្រវែងអក្សធំស្មើ 6 ឯកតាប្រវែង]
- ប្រវែងអ័ក្សតូចគឺ $2b=2(2)=4 \quad \Rightarrow$ [ប្រវែងអ័ក្សតូចស្មើ 4 ឯកតាប្រវែង]
- ផ្ចិត$(h,k) \quad \Rightarrow$ [ផ្ចិត$(-1,3)$]
- កំពូល $V_1(h,k-a);\ V_2(h,k+a) \quad \Rightarrow$ [$V_1(-1,0);\ V_2(-1,6)$]
- កំណុំ $F_1(h,k-c);\ F_2(h,k+c) \quad \Rightarrow$ [$F_1(-1,3-\sqrt{5});\ F_2(-1,3+\sqrt{5})$]

V. 1. ក. $g(x)=2e^{2x}-5e^x+2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $g(x)=(2e^x-1)(e^x-2)$

ដោយ $(2e^x-1)(e^x-2)=2e^x\cdot e^x-4e^x-e^x+2=2e^{2x}-5e^x+2=g(x)$

ដូចនេះ [$g(x)=(2e^x-1)(e^x-2)$]

លឹម សីហា

ខ. ទាញយកតាមតម្លៃនៃ x ចំពោះសញ្ញានៃ g(x)

បើ $g(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (2e^x-1)(e^x-2)=0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{lll} 2e^x-1=0 & \Leftrightarrow\ e^x=\frac{1}{2} & \Leftrightarrow\ x=-\ln 2 \\ e^x-2=0 & \Leftrightarrow\ e^x=2 & \Leftrightarrow\ x=\ln 2 \end{array}\right.$$

តារាងសញ្ញា g(x)

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$\ln 2$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

[$g(x)>0$ ពេល $x\in(-\infty,-\ln 2)\cup(\ln 2,+\infty)$; $\quad g(x)<0$ ពេល $x\in(-\ln 2,\ln 2)$]

2. ក. រក $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+e^x}+\frac{2}{9}x\right)=0+\frac{2}{9}(+\infty)$$ ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{1+e^x}+\frac{2}{9}x\right)=\frac{1}{1+0}+\frac{2}{9}(-\infty)=-\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$

ខ. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f'(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា

$$f'(x)=\left(\frac{1}{1+e^x}+\frac{2}{9}x\right)'=-\frac{e^x}{(1+e^x)^2}+\frac{2}{9}=\frac{-9e^x+2(1+e^x)^2}{9(1+e^x)^2}$$
$$=\frac{-9e^x+2+4e^x+2e^{2x}}{9(1+e^x)^2}=\frac{2e^{2x}-5e^x+2}{9(1+e^x)^2}=\frac{g(x)}{9(1+e^x)^2}$$

ដោយ $9(1+e^x)^2>0;\ \forall x\in\mathbb{R}$ គេបាន $f'(x)$មានសញ្ញាតាម $g(x)$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) \text{ និង } g(x) \text{ មានសញ្ញាដូចគ្នា}}$

លឹម សីហា

គ. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ $\mathbb{R}$

ដោយ $f'(x)$ និង $g(x)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា គេបាន តារាងសញ្ញា $f'(x)$ គឺ

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

• ត្រង់ $x=-\ln 2;\ f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $+$ ទៅ $-$ គេបាន f មានអតិបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(-\ln 2)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}-\frac{2\ln 2}{9}=\frac{2}{3}-\frac{2\ln 2}{9}=\frac{6-\ln 4}{9}$$

• ត្រង់ $x=\ln 2;\ f'(x)=0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ គេបាន f មានអប្បបរមាធៀបមួយគឺ

$$f(\ln 2)=\frac{1}{1+2}+\frac{2\ln 2}{9}=\frac{1}{3}+\frac{2\ln 2}{9}=\frac{3+\ln 4}{9}$$

គេបាន តារាងអថេរភាពនៃ f គឺ

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{6-\ln 4}{9}$	$\searrow$	$\frac{3+\ln 4}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$

តាមតារាងអថេរភាពគេបាន

- អនុគមន៍ f កើនលើចន្លោះ $x \in (-\infty, -\ln 2) \cup (\ln 2, +\infty)$
- អនុគមន៍ f ចុះលើចន្លោះ $x \in (-\ln 2, \ln 2)$

VI. អនុគមន៍ $f(x) = 4 - x - 2e^{-x}$

១. ក. រក $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (4 - x - 2e^{-x}) = 4 - (+\infty) - 0 = -\infty \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

លីម សីហា

ខ. បង្ហាញថាបន្ទាត់ D មានសមីការ $y = -x + 4$ ជាអាស៊ីមតូតនៃខ្សែកោង C

យើងមាន $f(x) = 4 - x - 2e^{-x}$

ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (-x + 4)] = \lim\limits_{x\to+\infty} -2e^{-x} = 0$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } D : \ y = -x + 4 \text{ ជាអាស៊ីមតូតនៃ} C}$

គ. សិក្សាទីតាំងរវាងខ្សែកោង C និងបន្ទាត់ D

យើងមាន $(C): \ y_c = 4 - x - 2e^{-x}; \quad (D): \ y_d = -x + 4$

គេបាន $y_c - y_d = -2e^{-x} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ក្រាប } C \text{ ស្ថិតក្រោមបន្ទាត់} D \text{ គ្រប់តម្លៃ} x \in \mathbb{R}}$

ឃ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាគ្រប់ចំនួនពិត x ; $f(x) = \dfrac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}$

យើងមាន $f(x) = 4 - x - 2e^{-x} = 4 - x - \dfrac{2}{e^x} = \dfrac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{f(x) = \dfrac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}}$

ឃ. រក $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (ប្រើលទ្ធផល $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4e^x - xe^x - 2}{e^x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4e^x}{e^x} - \frac{2}{e^x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(4 - \frac{2}{e^x}\right) = -\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

២. ក. គណនា $f'(x)$

$f'(x) = (4 - x - 2e^{-x})' = -1 + 2e^{-x}$ $\boxed{f'(x) = 2e^{-x} - 1}$

សិក្សាអថេរភាពនៃ f

- $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \; 2e^{-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \; e^{-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \; -x = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$
- $f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \; 2e^{-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \; e^{-x} > \frac{1}{2} \Rightarrow \; -x > \ln\frac{1}{2} \Rightarrow x < \ln 2$
- $f'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \; 2e^{-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \; e^{-x} < \frac{1}{2} \Rightarrow \; -x < \ln\frac{1}{2} \Rightarrow x > \ln 2$

យើងបានតារាងអថេរភាពនៃ f(x) គឺ

លឹម សីហា

ចំពោះ $x = \ln 2$ គេបាន $f(\ln 2) = 4 - \ln 2 - 2e^{-\ln 2} = 4 - \ln 2 - 2(2^{-1}) = 3 - \ln 2$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$3 - \ln 2$	↘	$-\infty$

- f កើនលើចន្លោះ $x \in (0, \ln 2)$
- f ចុះលើចន្លោះ $x \in (\ln 2, +\infty)$

កំណត់តម្លៃពិតនៃអតិបរមារបស់ f

តាមតារាងអថេរភាព

f មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ចំណុច $x = \ln 2$ ហើយតម្លៃអតិបរមានៃf គឺ $3 - \ln 2$

ខ. កំណត់សមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង C ត្រង់ A

រូបមន្ត សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$

ដោយ A មានអាប់ស៊ីសសូន្យ គេបាន $x_o = 0$

គេបាន $f(x_o) = f(0) = 4 - 0 - 2 = 2$; $f'(x_o) = f'(0) = 2 - 1 = 1$

នាំឲ្យ $y = 1(x - 0) + 2$

ដូចនេះ | សមីការបន្ទាត់ប៉ះគឺ $y = x + 2$ |

គ. បង្ហាញថាសមីការ $f(x) = 0$ មានចម្លើយតែមួយគត់ដែលគេតាងដោយ β នៅក្នុងចន្លោះ $[-1, 0]$

យើងមាន

- $f(-1) = 4 - (-1) - 2e^{-(-1)} = 5 - 2e < 0$
- $f(0) = 2 > 0$
- គេបាន $f(-1) \times f(0) = 2(5 - 2e) < 0$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល មានឫស β មួយយ៉ាងតិចនៅចន្លោះ $[-1, 0]$ ដែល $f(\beta) = 0$

តែ f កើន លើចន្លោះ $[-1, 0]$

ដូចនេះ | មានឫស β តែមួយគត់ដែលនៅចន្លោះ $[-1, 0]$ ធ្វើឲ្យ $f(x) = 0$ |

លឹម សីហា

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាត្រៀមប្រឡង
សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិឆ្នាំ២០១៨

[វិញ្ញាសាទី៦]

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{x+2}-2}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\sin^2 x}$ គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x}{x}$

II. (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $A=\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)$ និង $B=\dfrac{x+iy}{1+i}$ ដែល x, y ជាចំនួនពិត។

១. សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ពិជគណិត ហើយជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

២. សរសេរ B ជាទម្រង់ពីជគណិត។ រក x និង y ដោយដឹងថា $2\overline{B}-A^2=0$

($\overline{B}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ B)។

III. (២០ពិន្ទុ) គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E_1):\ -y''-y'+6y=6x^2-2x+4$ ។

១. ដោះស្រាយសមីការ $(E_2):\ -y''-y'+6y=0$ ។

២. រកពហុធា $p(x)=ax^2+bx+c$ ដែលជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E_1)។

ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃ (E_1) ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យអនុគមន៍ $y=g(x)=\dfrac{2x-3}{(x-3)^2}$ ។

១. រកចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $g(x)=\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b}{(x-3)^2}$ ។

២. គណនា $F(x)=\displaystyle\int g(x)dx$ ដោយដឹងថា $F(4)=0$ ។

V. (៣០ពិន្ទុ)

១. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន (ឯកតាលើអ័ក្សស្មើនឹង1cm)

ចូរដៅចំណុច $A(2,\ 0,\ 2);\ B(1,\ 2,\ 0)$ និង $C(0,\ 2,\ 3)$ ។

២. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ D ដែលកាត់តាម A ហើយស្របនឹង $\overrightarrow{BC}$ ។

៣. គណនា $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ និង $\left|\overrightarrow{AC}\right|$ ។ ប្រាប់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC ។

៤. គណនា $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$។ ទាញថាចំណុច A, B, C មិនឋិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ។ រកសមីការប្លង់ABC។

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

លឹម សីហា

៥. រកមាឌតេត្រាអ៊ែត OABC ។ ទាញរកចម្ងាយពី O ទៅប្លង់ ABC ។

VI. (៣៥ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x > 0$ ដោយ $f(x) = 2\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប C ។

១. គណនា $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ និង $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ។
កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ។

២. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ ។ កំណត់តម្លៃបរមានៃ f ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

៣. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M រវាងក្រាប C និងអាស៊ីមតូតដេករបស់វា ។
កំណត់សមីការបន្ទាត់ L ដែលប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច M ។

៤. សង់បន្ទាត់ L និងក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ (គេយក $e = 2.7,\ \frac{2}{e} = 0.7$)។

៥. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត k ដោយប្រើក្រាប C ដើម្បីឲ្យសមីការ $2\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = k$ មានឬស។
គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃកប្លង់ដែលកំណត់ដោយក្រាប C អ័ក្ស $x'Ox$ បន្ទាត់ឈរ $x = 1$ និង $x = e$ ។

លឹម សីហា

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{x+2}-2}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^3-8\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x+2-4}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(x^2+2x+4\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)=12\times 4=48$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{x+2}-2}=48}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\sin^2 x}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\sin^2\frac{x}{2}-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)}{x^2\cdot\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}=\frac{-2\times\frac{1}{4}\times 1}{1}=-\frac{1}{2}$$

លីម សីហា

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\sin^2 x}=-\dfrac{1}{2}}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x}{x}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to 0}9\cdot\frac{\sin 3x}{3x}=9\times 1=9$$ ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x}{x}=9}$

II. ១. សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ពិជគណិត

យើងមាន $A=\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)$ យើងបាន

$$A^2=\left(\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+2\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)i+i^2\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$

$$=3-2\sqrt{3}+1+2(3)i-2(1)i-\left(3+2\sqrt{3}+1\right)$$

$$=-4\sqrt{3}+4i$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ទម្រង់ពិជគណិតនៃ}A^2 \text{ គឺ } A^2=-4\sqrt{3}+4i}$

សរសេរ A^2 ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$A^2=-4\sqrt{3}+4i=8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=8\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ } A^2 \text{ គឺ } A^2=8\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}$

២. សរសេរ B ជាទម្រង់ពីជគណិត

យើងមាន $B=\dfrac{x+iy}{1+i}$ យើងបាន

$$B=\frac{x+iy}{1+i}=\frac{(x+iy)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{x-xi+iy-i^2y}{1^2-i^2}=\frac{x+y+(y-x)i}{1+1}$$

$$=\frac{x+y}{2}+\frac{y-x}{2}i$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ទម្រង់ពីជគណិតនៃ}B \text{ គឺ } B=\frac{x+y}{2}+\frac{y-x}{2}i}$

រក x និង y ដោយដឹងថា $2\overline{B}-A^2=0$ ($\overline{B}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ B)

$$B=\frac{x+y}{2}+\frac{y-x}{2}i \quad\Rightarrow\quad \overline{B}=\frac{x+y}{2}-\frac{y-x}{2}i$$ យើងបាន

$$2\overline{B}-A^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2\left(\frac{x+y}{2}-\frac{y-x}{2}i\right)-\left(-4\sqrt{3}+4i\right)=0$$

$$x+y-yi+xi+4\sqrt{3}=0$$

$$(x+y)+(-y+x)i=-4\sqrt{3}+4i$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x+y=-4\sqrt{3} & (1) \\ -y+x=4 & \Rightarrow x=y+4\text{ជំនួសក្នុង}(1) \end{cases}$$

យើងបាន $y+4+y=-4\sqrt{3} \quad\Rightarrow y=-2\sqrt{3}-2 \Rightarrow x=-2\sqrt{3}+2$

ដូចនេះ $\boxed{x=-2\sqrt{3}+2,\ y=-2\sqrt{3}-2}$

III. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E_1): \; -y'' - y' + 6y = 6x^2 - 2x + 4$

១. ដោះស្រាយសមីការ $(E_2): \; -y'' - y' + 6y = 0$

(E_2) មានសមីការសម្គាល់ $-r^2 - r + 6 = 0$ មានឫស $r_1 = -3, \;\; r_2 = 2$

ដូចនេះ | ចម្លើយនៃ (E_2) គឺ $y = Ae^{-3x} + Be^{2x} \quad ; \; A, B \in \mathbb{R}$ |

២. រកពហុធា $p(x) = ax^2 + bx + c$ ដែលជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E_1)

$p(x) = ax^2 + bx + c$ ដែលជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E_1) លុះត្រាតែ

$-p''(x) - p'(x) + 6p(x) = 6x^2 - 2x + 4$

ដោយ $p(x) = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow p'(x) = 2ax + b$

$$\Rightarrow P''(x) = 2a$$

គេបាន $\quad -(2a) - (2ax + b) + 6\left(ax^2 + bx + c\right) = 6x^2 - 2x + 4$

$$\Leftrightarrow \quad -2a - 2ax - b + 6ax^2 + 6bx + 6c = 6x^2 - 2x + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 6ax^2 + (-2a + 6b)x + (-2a - b + 6c) = 6x^2 - 2x + 4$$

ដោយផ្ទឹមមេគុណយើងបាន $\begin{cases} 6a = 6 & (1) \\ -2a + 6b = -2 & (2) \\ -2a - b + 6c = 4 & (3) \end{cases}$

$(1): \; 6a = 6 \quad \Rightarrow a = 1$ ជំនួសក្នុង (2) គេបាន $-2(1) + 6b = -2 \quad \Rightarrow b = 0$

យក $a = 1, b = 0$ ជួសក្នុង (3) គេបាន $-2(1) - 0 + 6c = 4 \quad \Rightarrow c = 1$

ដូចនេះ | $p(x) = x^2 + 1$ |

ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃ (E_1)

ចម្លើយទូទៅនៃ (E_1) គឺ $y = y_c + y_p = Ae^{-3x} + Be^{2x} + x^2 + 1 \quad ; \; A, B \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ | ចម្លើយទូទៅនៃ (E_1) គឺ $y = Ae^{-3x} + Be^{2x} + x^2 + 1 \quad ; \; A, B \in \mathbb{R}$ |

IV. ១. រកចំនួនពិត a និង b

យើងមាន $y = g(x) = \dfrac{2x - 3}{(x - 3)^2}$ គេបាន $g(x) = \dfrac{a}{x - 3} + \dfrac{b}{(x - 3)^2}$ លុះត្រាតែ

$$\frac{2x - 3}{(x - 3)^2} = \frac{a}{x - 3} + \frac{b}{(x - 3)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x - 3}{(x - 3)^2} = \frac{a(x - 3) + b}{(x - 3)^2}$$

លឹម សីហា

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x-3}{(x-3)^2} = \frac{ax-3a+b}{(x-3)^2}$$

ផ្ទឹមមេគុណយើងបាន $a = 2$; $\quad -3a+b = -3 \Rightarrow -3(2)+b = -3 \quad \Rightarrow \; b = 3$

ដូចនេះ $\boxed{a = 2 \;;\; b = 3}$

២. គណនា $F(x) = \int g(x)dx$ ដោយដឹងថា $F(4) = 0$

ដោយ $g(x) = \dfrac{a}{x-3} + \dfrac{b}{(x-3)^2} = \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{3}{(x-3)^2}$ គេបាន

$$F(x) = \int g(x)dx = \int \left(\frac{2}{x-3} + \frac{3}{(x-3)^2}\right)dx$$

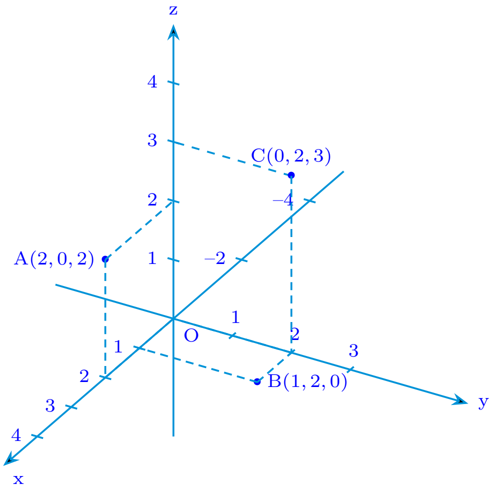
$$= \int \left(\frac{2(x-3)'}{x-3} + \frac{3(x-3)'}{(x-3)^2}\right)dx$$

$$= 2\ln|x-3| + \frac{-3}{x-3} + C \quad ; \quad C \in \mathbb{R}$$

ដោយ $F(4) = 0$ គេបាន $2\ln|4-3| - \dfrac{3}{4-3} + C = 0 \quad \Rightarrow \; C = 3$

ដូចនេះ $\boxed{F(x) = 2\ln|x-3| - \dfrac{3}{x-3} + 3}$

V. ១. ដៅចំណុច $A(2,\ 0,\ 2)$; $B(1,\ 2,\ 0)$ និង $C(0,\ 2,\ 3)$



២. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ D

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ D គឺ $\begin{cases} x = x_o + at \\ y = x_o + bt \\ z = z_o + ct \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$

- (D) កាត់តាម $A(2, 0, 2)$
- $(D) // \overrightarrow{BC}(-1, 0, 3)$

ដូចនេះ **សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់D គឺ $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 0 \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$**

៣. គណនា $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ និង $\left|\overrightarrow{AC}\right|$

$A(2,\ 0,\ 2);\ B(1,\ 2,\ 0)\ ;\ C(0,\ 2,\ 3)$

- $\overrightarrow{AB}(-1, 2, -2) \quad \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3 \quad \boxed{\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3cm}$
- $\overrightarrow{AC}(-2, 2, 1) \quad \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (1)^2} = 3 \quad \boxed{\left|\overrightarrow{AC}\right| = 3cm}$

ប្រាប់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC

ដោយ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = 3cm$

ដូចនេះ **ΔABC ជាត្រីកោណសមបាត**

៤. គណនា $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2+4)\,\vec{i} - (-1-4)\,\vec{j} + (-2+4)\,\vec{k}$$

$$= 6\,\vec{i} + 5\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 6\,\vec{i} + 5\,\vec{j} + 2\,\vec{k}}$

ទាញថាចំណុច A, B, C មិនឋិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ

ដោយ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \neq 0 \quad \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ មិនកូលីនេអ៊ែរគ្នា

ដូចនេះ | ចំណុច A, B, C មិនស្ថិតក្នុងប្លង់តែមួយ |

រកសមីការប្លង់ABC

ប្លង់ (ABC) : $a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0$

- ប្លង់ (ABC) កាត់តាម A(2, 0, 2)
- $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 6\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃ ប្លង់(ABC)

$\Rightarrow$ (ABC) : $6(x-2) + 5(y-0) + 2(z-2) = 0$

$$6x + 5y + 2z - 16 = 0$$

ដូចនេះ | (ABC) : $6x + 5y + 2z - 16 = 0$ |

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 5^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{65}$$

ដូចនេះ | $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{65}}{2} cm^2$ |

លឹម សីហា

៥. រកមាឌតេត្រាអ៊ែត OABC

$$V_{OABC} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right) \cdot \overrightarrow{OC}\right|$$

O(0, 0, 0) ; A(2, 0, 2); B(1, 2, 0) ; C(0, 2, 3)

- $\overrightarrow{OA}(2, 0, 2)$
- $\overrightarrow{OB}(1, 2, 0)$
- $\overrightarrow{OC}(0, 2, 3)$

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0-4)\vec{i} - (0-2)\vec{j} + (4-0)\vec{k}$$

$$= -4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right) \cdot \overrightarrow{OC} = -4(0) + 2(2) + 4(3) = 16$$

$V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot 16 = \frac{8}{3}$ ដូចនេះ $\boxed{V_{OABC} = \frac{8}{3}\text{cm}^3}$

ទាញរកចម្ងាយពី O ទៅប្លង់ ABC

$$V_{OABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot h \quad \Rightarrow h = \frac{3V_{OABC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3 \cdot \frac{8}{3}}{\frac{\sqrt{65}}{2}} = \frac{16}{\sqrt{65}} = \frac{16\sqrt{65}}{65}$$

ដូចនេះ $\boxed{d(O, (ABC)) = h = \frac{16\sqrt{65}}{65}\text{cm}}$

VI. ១. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

យើងមាន $f(x) = 2\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 2(1 - (-\infty)) = +\infty$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} 2\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 2(1 - (0)) = 2$ $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2}$

កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C

- ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ ដូចនេះ បន្ទាត់ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ
- ដោយ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ ដូចនេះ បន្ទាត់ $y = 2$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

២. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

$$f'(x) = \left(2\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)\right)' = \left(2 - 2\frac{\ln x}{x}\right)' = 0 - 2\left(\frac{(\ln x)' x - x' \ln x}{x^2}\right)$$

$$= -2\left(\frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2}\right) = \frac{-2 + 2\ln x}{x^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = \frac{-2 + 2\ln x}{x^2}}$

សិក្សាសញ្ញា $f'(x)$

ដោយ $x^2 > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty) \quad \Rightarrow f'(x)$ មានសញ្ញាដូចភាគយក $-2 + 2\ln x$

- $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow -2 + 2\ln x = 0 \quad \Rightarrow \ln x = 1 \quad \Rightarrow x = e$
- $f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow -2 + 2\ln x > 0 \quad \Rightarrow \ln x > 1 \quad \Rightarrow x > e$
- $f'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow -2 + 2\ln x < 0 \quad \Rightarrow \ln x < 1 \quad \Rightarrow x < e$

យើងបាន តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

កំណត់តម្លៃបរមានៃ f

- ត្រង់ $x = e$; $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី $-$ ទៅ $+$ យើងបាន f មានអប្បបរមាធៀបមួយ គឺ $f(e) = 2\left(1 - \frac{\ln e}{e}\right) = 2 - \frac{2}{e} = 2 - 0.7 = 1.3$

ដូចនេះ តម្លៃអប្បបរមាគឺ $f(e) = 1.3$

លឹម សីហា

សង់តារាងអថេរភាពនៃ f

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1.3	↗	2

៣. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M រវាងក្រាប C និងអាស៊ីមតូតដេករបស់វា

- $(C): \ y = 2\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$
- $(T): \ y = 2$

$$(C)\cap(T) \quad \Leftrightarrow \quad 2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=2$$
$$\Leftrightarrow \quad -2\ln x = 0$$
$$\Rightarrow \quad \ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

ដូចនេះ ចំណុចប្រសព្វ M គឺ $M(1,2)$

កំណត់សមីការបន្ទាត់ L ដែលប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច M

សមីការបន្ទាត់ L កំណត់ដោយ $(L):\ y = f'(x_o)(x-x_o)+f(x_o)$

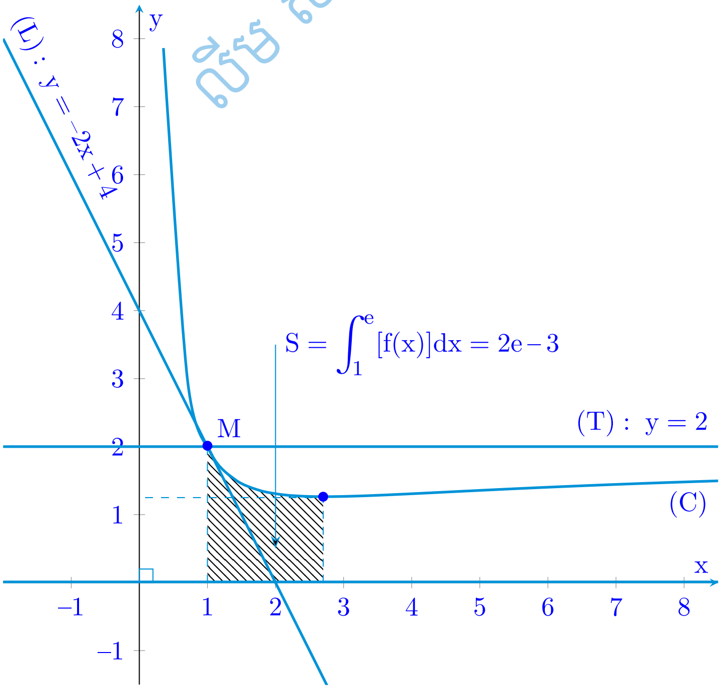
- L ដែលប៉ះនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុច $M(1,2)$ $\Rightarrow x_o = 1,\ \ f(x_o)=2$
- $f'(x_o) = f'(1) = \dfrac{-2+2\ln 1}{1^2} = -2$

$\Rightarrow \quad (L):\ y = -2(x-1)+2 = -2x+4$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ប៉ះ គឺ $(L):\ y=-2x+4$

លីម សីហា

៤. សង់បន្ទាត់ L និងក្រាប C



៥. កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត k

សមីការ $2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=k$ ជាសមីការអាប់ស៊ីសនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប (C)

និងបន្ទាត់ $(D): y=k$

តាមក្រាប សមីការ $2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=k$ មានឫស លុះត្រាតែ $k\geq 1.3$

ដូចនេះ $\boxed{k\geq 1.3}$

គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃកប្លង់ដែលកំណត់ដោយក្រាប C អ័ក្ស $x'Ox$ បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=e$

$$S=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e 2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)dx=\int_1^e\left(2-2(\ln x)'\ln x\right)dx=\left[2x-\frac{2\ln^2 x}{2}\right]_1^e$$

$$=2e-\ln^2 e-\left(2-\ln^2 1\right)=2e-3$$

ដូចនេះ $\boxed{S=2e-3 \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$

លឹម សីហា

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាត្រៀមប្រឡង
សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិឆ្នាំ២០១៨

[វិញ្ញាសាទី៧]

I. (១០ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(2x^2-3\right)(1-x)}{(5+2x)\left(2-x^2\right)}$ ខ. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$ គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$

II. (១៥ពិន្ទុ) ក្នុងប្រអប់មួយមានឃ្លីពណ៌ស 2 គ្រាប់ដែលមានចុះលេខ $1, 2$ និងឃ្លីពណ៌ខ្មៅ 3 គ្រាប់ ដែលមានចុះលេខ $1, 2, 3$ គេចាប់យកឃ្លី 2 គ្រាប់ ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យពីក្នុងប្រអប់នោះ។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

១. A : «គេចាប់បានឃ្លីពណ៌ដូចគ្នា»។

២. B : «គេចាប់បានឃ្លីមានផលបូកលេខស្មើ 3 »។

៣. C : «គេចាប់បានឃ្លីមានផលបូកលេខស្មើ 3 ដោយបានដឹងថា វាមានពណ៌ដូចគ្នា»។

III. (១៥ពិន្ទុ) គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\sqrt{3}-i$; $z_2=\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)i$ និង $z_3=-\dfrac{1}{2}$ ។

គណនា z_1+z_2 , $(z_1+z_2)\times z_3$ ។ សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច $Z=(z_1+z_2)\times z_3$ ។ ទាញរកតម្លៃនៃ Z^3 ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យ $g(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$ ។

១. កំណត់ចំនួនពិត m, n និង p ដើម្បីឲ្យបាន $g(x)=m+\dfrac{n}{x+1}+\dfrac{p}{x-3}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in(-1,3)$។

២. គណនា $I=\displaystyle\int_0^2 g(x)dx$ ។

V. (៣៥ពិន្ទុ) នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មានចំណុច $A(-1,2,1)$; $B(1,-6,-1)$ និង $C(2,2,2)$ ។

១. គណនា $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$។ កំណត់សមីការប្លង់ P ដែលកាត់តាមចំណុច A, B និង C ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$។ កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ d កាត់តាមចំណុច $J(-2,0,0)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u}=(3,0,1)$ ។

២. រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត I និងកាំ r នៃស្វ៊ែ S ដែលមានសមីការ $x^2+y^2+z^2-2y+2z-2=0$។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងស្វ៊ែ S និងបន្ទាត់ d។

៣. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC។ គណនាចម្ងាយពីចំណុច $D(0,1,-1)$ ទៅប្លង់ P។

VI. (៣៥ពិន្ទុ)

A គេមានអនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x) = x^2 + \ln x$ ។

១. ក. បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$ ។

ខ. គណនា $g(1)$ ។

២. ក. ទាញលទ្ធផលពីសំណួរទី១ បញ្ជាក់ថា ៖ បើ $x \geq 1$ នោះ $x^2 + \ln x \geq 1$ និងបើ $0 < x \leq 1$ នោះ $x^2 + \ln x \leq 1$ ។

ខ. កំណត់សញ្ញានៃកន្សោម $x^2 + \ln x - 1$ កាលណា x នៅលើចន្លោះ $(0,+\infty)$ ។

B គេមានអនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x) = x + 1 - \dfrac{\ln x}{x}$ និងតាងដោយ C ក្រាបរបស់វាក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

១. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$ (យើងដឹងថា $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$)។

២. បង្ហាញថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x) = \dfrac{x^2 + \ln x - 1}{x^2}$ ។

៣. ប្រើលទ្ធផលនៃសំណួរ A សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ និងសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ$(0,+\infty)$។

៤. ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់ Δ មានសមីការ $y = x + 1$ ជាអាសុីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$ ។

ខ. សិក្សាទីតាំង C ធៀបនឹង Δ និងបញ្ជាក់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ I រវាងក្រាប C និង Δ ។ សង់ Δ និងក្រាប C ។

[ដំណោះស្រាយ]

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(2x^2-3\right)(1-x)}{(5+2x)\left(2-x^2\right)}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$)

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\cdot x\left(2-\frac{3}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x}-1\right)}{x\cdot x^2\left(\frac{5}{x}+2\right)\left(\frac{2}{x^2}-1\right)}=\frac{(2-0)(0-1)}{(0+2)(0-1)}=\frac{-2}{-2}=1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(2x^2-3\right)(1-x)}{(5+2x)\left(2-x^2\right)}=1}$

ខ. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(2-\sqrt{x+3}\right)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}{\left(x^2-1\right)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{4-(x+3)}{\left(x^2-1\right)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}=\frac{-1}{(1+1)\left(2+\sqrt{1+3}\right)}=\frac{-1}{2(4)}=-\frac{1}{8}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}=-\dfrac{1}{8}}$

គ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)=\ln(1+0)=\ln 1=0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x+1}{x-1}=0}$

II. ១. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A : «គេចាប់បានឃ្លីពណ៌ដូចគ្នា»

តាមរូបមន្ត $p(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$

ដោយ គេចាប់បានពណ៌ដូចគ្នាមានន័យ ថា អាចជា ឃ្លីសទាំងពីរ ឬ ឃ្លីខៀវទាំងពីរ

គេបាន $n(A)=C(2,2)+C(3,2)=1+3=4$

$$n(S)=C(5,2)=\frac{5!}{3!2!}=10$$

នាំឲ្យ $P(A)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$ ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\dfrac{2}{5}}$

២. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B : «គេចាប់បានឃ្លីមានផលបូកលេខស្មើ 3 »

តាមរូបមន្ត $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}$

ដោយ ផលបូកលេខស្មើ 3 គឺមាន 4 ករណី

$$\left\{(1_{\text{ពណ៌ខ្មៅ}}, 2_{\text{ពណ៌ខ្មៅ}}); (1_{\text{ពណ៌ខ្មៅ}}, 2_{\text{ពណ៌ស}}); (1_{\text{ពណ៌ស}}, 2_{\text{ពណ៌ខ្មៅ}}); (1_{\text{ពណ៌ស}}, 2_{\text{ពណ៌ស}})\right\}$$

គេបាន $n(B)=4\ ;\quad n(S)=10$

គេបាន $P(B)=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$ ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\dfrac{2}{5}}$

៣. រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍

C : «គេចាប់បានឃ្លីមានផលបូកលេខស្មើ 3 ដោយបានដឹងថា វាមានពណ៌ដូចគ្នា»

តាមរូបមន្ត $P(C)=P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

ដោយ ផលបូកស្មើ3 ដែលមានលេខដូចគ្នា គឺ មាន 2 ករណី $\left\{(1_{\text{ពណ៌ខ្មៅ}}, 2_{\text{ពណ៌ខ្មៅ}}); (1_{\text{ពណ៌ស}}, 2_{\text{ពណ៌ស}})\right\}$

គេបាន $n(A\cap B)=2\ ;\quad n(S)=10 \quad\Rightarrow\quad P(A\cap B)=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$

នាំឲ្យ $P(C)=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}=\dfrac{1}{2}$ ដូចនេះ $\boxed{P(C)=\dfrac{1}{2}}$

III. គណនា z_1+z_2 , $(z_1+z_2)\times z_3$

យើងមាន $z_1=\sqrt{3}-i\ ;\quad z_2=\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)i\ ;\quad z_3=-\dfrac{1}{2}$

$z_1+z_2=\sqrt{3}-i+1-\sqrt{3}+i-\sqrt{3}i=1-\sqrt{3}i$ ដូចនេះ $\boxed{z_1+z_2=1-\sqrt{3}i}$

$(z_1+z_2)\times z_3=\left(1-\sqrt{3}i\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ដូចនេះ $\boxed{(z_1+z_2)\times z_3=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

សរសេរជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច $Z=(z_1+z_2)\times z_3$

$$Z=(z_1+z_2)\times z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃ } Z \text{ គឺ } Z=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}}$

ទាញរកតម្លៃនៃ Z^3

$$Z^3=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3=\cos\frac{3(2\pi)}{3}+i\sin\frac{3(2\pi)}{3}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1+0i=1$$

ដូចនេះ $\boxed{Z^3=1}$

IV. ១. កំណត់ចំនួនពិត m, n និង p

យើងមាន $g(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$

$$g(x)=m+\frac{n}{x+1}+\frac{p}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}=\frac{m(x+1)(x-3)+n(x-3)+p(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$

$$=\frac{mx^2-3mx+x-3+nx-3n+px+p}{x^2-3x+x-3}$$

$$=\frac{mx^2+(-3m+1+n+p)x+(p-3-3n)}{x^2-2x-3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=1 & (1)\\ -3m+1+n+p=1 & (2)\\ p-3-3n=-6 & (3)\end{cases}$$

$(1):\ m=1 \Rightarrow (2):\ -3+1+n+p=1 \Rightarrow n+p=3\ \ (4)$

$(3):\ p-3-3n=-6 \qquad \Rightarrow p-3n=-3\ \ (5)$

យក $(4)-(5)\Rightarrow n+3n=3+3 \quad \Rightarrow 4n=6 \quad \Rightarrow n=\dfrac{3}{2}$ ជំនួសក្នុង (4)

$\Rightarrow \dfrac{3}{2}+p=3 \qquad \Rightarrow p=\dfrac{3}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{m=1,\ n=\dfrac{3}{2},\ p=\dfrac{3}{2}}$

២. គណនា $I=\displaystyle\int_0^2 g(x)dx$

$$g(x)=m+\frac{n}{x+1}+\frac{p}{x-3}=1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-3}$$

$$I=\int_0^2 g(x)dx=\int_0^2\left(1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-3}\right)dx$$

$$= \left[x + \frac{3}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x-3|\right]_0^2 = 2 + \frac{3}{2}\ln 3 + \frac{3}{2}\ln 1 - \left(0 + \frac{3}{2}\ln 1 + \frac{3}{2}\ln 3\right)$$

$$= 2$$

ដូចនេះ $\boxed{I = 2}$

V. ១. គណនា $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

យើងមាន $A(-1, 2, 1)$; $B(1, -6, -1)$; $C(2, 2, 2)$ នាំឲ្យ

- $\overrightarrow{AB}(1-(-1), -6-2, -1-1) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}(2, -8, -2)$
- $\overrightarrow{AC}(2-(-1), 2-2, 2-1) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AC}(3, 0, 1)$

គេបាន $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -8 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$= (-8-0)\,\vec{i} - (2+6)\,\vec{j} + (0+24)\,\vec{k}$$

$$= -8\,\vec{i} - 8\,\vec{j} + 24\,\vec{k}$$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{n}(-8, -8, 24)}$

លីម សីហា

កំណត់សមីការប្លង់ P

សមីការប្លង់(P) កំណត់ដោយ $(P):\ a(x-x_o) + b(y-y_o) + c(z-z_o) = 0$

ដោយ

- (P) កាត់តាម $A(-1, 2, 1)$
- ហើយមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}(-8, -8, 24)$

យើងបាន $(P):\ -8(x+1) - 8(y-2) + 24(z-1) = 0$

$$-8x - 8 - 8y + 16 + 24z - 24 = 0$$

$$-8x - 8y + 24z - 16 = 0$$

$$-x - y + 3z - 2 = 0$$

ដូចនេះ $\boxed{(P):\ -x - y + 3z - 2 = 0}$

កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ d

សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ d កំណត់ដោយ $\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \\ z = z_o + ct \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$

ដោយ

- d កាត់តាមចំណុច $J(-2, 0, 0)$
- និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\vec{u} = (3, 0, 1)$

យើងបាន $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 0 + 0t \\ z = 0 + t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់d គឺ $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$

២. រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត I និងកាំ r នៃស្វ៊ែ S

ដោយ ស្វ៊ែ S ដែលមានសមីការ

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 + z^2 + 2z + 1 - 1 - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-0)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & (x-0)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 2^2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ ផ្ចិត$I(0, 1, -1)$, កាំ $r = 2$

រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងស្វ៊ែ S និងបន្ទាត់ d

ចំណុចប្រសព្វរវាងស្វ៊ែ S និងបន្ទាត់ d គឺជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ រវាង បន្ទាត់d និងស្វ៊ែS

$$\begin{cases} x = -2 + 3t & (1) \\ y = 0 & (2) \\ z = t & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 2 = 0 & (4) \end{cases}$$

យក (1), (2), (3) ជួសក្នុង (4) យើងបាន $(-2+3t)^2+0^2+t^2-2(0)+2t-2=0$

$$4-12t+9t^2+t^2+2t-2=0$$

$$10t^2-10t+2=0$$

$$5t^2-5t+1=0$$

$\Delta=b^2-4ac=25-20=5 \quad \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{5}$

$t=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{10}$ ជំនួសក្នុង (1), (2), (3) យើងបាន

- ចំពោះ $t=\dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \quad \Rightarrow x=-2+3\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\right)=\dfrac{-5+3\sqrt{5}}{10}$

$$y=0 \quad ; \; z=\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំណុចប្រសព្វ គឺ } \left(\dfrac{-5+3\sqrt{5}}{10},\; 0,\; \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\right)}$

- ចំពោះ $t=\dfrac{5-\sqrt{5}}{10} \quad \Rightarrow x=-2+3\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\right)=\dfrac{-5-3\sqrt{5}}{10}$

$$y=0 \quad ; \; z=\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំណុចប្រសព្វ គឺ } \left(\dfrac{-5-3\sqrt{5}}{10},\; 0,\; \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}$

លឹម សីហា

៣. គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-8\vec{i}-8\vec{j}+24\vec{k}$ យើងបាន

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-8)^2+(-8)^2+24^2}=\frac{1}{2}\sqrt{64+64+576}=\frac{1}{2}\sqrt{704}$$

$$=\frac{\sqrt{64\times 11}}{2}=\frac{8\sqrt{11}}{2}=4\sqrt{11}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_{ABC}=4\sqrt{11}\text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$

គណនាចម្ងាយពីចំណុច $D(0,1,-1)$ ទៅប្លង់ P

តាមរូបមន្ត $D_{(D,P)}=\dfrac{|ax_o+by_o+cz_o+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ដោយ $D(0,1,-1)$; $(P):\ -x-y+3z-2=0$ យើងបាន

$$D_{(D,P)}=\frac{\left|-(0)-(1)+3(-1)-2\right|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{|-6|}{\sqrt{11}}\times\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}=\frac{6\sqrt{11}}{11}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចម្ងាយពីចំណុច } D \text{ ទៅប្លង់ } P \text{ គឺ } D_{(D,P)}=\dfrac{6\sqrt{11}}{11} \text{ ឯកតាប្រវែង}}$

VI. A អនុគមន៍ g កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $g(x)=x^2+\ln x$

១. ក. បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$

ដោយ $g'(x)=\left(x^2+\ln x\right)'=2x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2+1}{x}>0 \quad \forall x\in(0,+\infty)$

ដូចនេះ $\boxed{g \text{ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ } (0,+\infty)}$

ខ. គណនា $g(1)$

$g(1)=1^2+\ln 1=1$ **ដូចនេះ** $\boxed{g(1)=1}$

២. ក. ទាញលទ្ធផលពីសំណួរទី១ បញ្ជាក់ថា ៖

- បើ $x\geq 1$ នោះ $x^2+\ln x\geq 1$
- និង បើ $0<x\leq 1$ នោះ $x^2+\ln x\leq 1$

ដោយ $g(1)=1$ ហើយ g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតលើ $(0,+\infty)$

នោះគេបាន

- បើ $x\geq 1$ នោះ $g(x)\geq 1 \Rightarrow x^2+\ln x\geq 1$
- បើ $0<x\leq 1$ នោះ $g(x)\leq 1 \Rightarrow x^2+\ln x\leq 1$

ខ. កំណត់សញ្ញានៃកន្សោម $x^2+\ln x-1$ កាលណា x នៅលើចន្លោះ $(0,+\infty)$

- ពេល $x>1;\quad x^2+\ln x>1 \Rightarrow x^2+\ln x-1>0$
- ពេល $0<x<1;\quad x^2+\ln x\leq 1 \Rightarrow x^2+\ln x-1<0$
- ពេល $x=1;\quad x^2+\ln x=1 \Rightarrow x^2+\ln x-1=0$

B អនុគមន៍ f កំណត់លើ $(0,+\infty)$ ដោយ $f(x)=x+1-\dfrac{\ln x}{x}$

១. សិក្សាលីមីតនៃអនុគមន៍ f ត្រង់ 0 និង $+\infty$ (យើងដឹងថា $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$)

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(x+1-\frac{\ln x}{x}\right)=0+1-(-\infty)=+\infty \qquad \boxed{\lim_{x\to0}f(x)=+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty+1-0=+\infty \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$$

២. បង្ហាញថាដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺ $f'(x)=\dfrac{x^2+\ln x-1}{x^2}$

$$f'(x)=\left(x+1-\frac{\ln x}{x}\right)'=1-\frac{(\ln x)'\,x-x'\ln x}{x^2}=1-\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}}$$

៣. ប្រើលទ្ធផលនៃសំណួរ A សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

ដោយ $f'(x)=\dfrac{x^2+\ln x-1}{x^2}$ មានសញ្ញាតាមភាគយក $x^2+\ln x-1$

គេបាន

- ពេល $x>1;\quad f'(x)>0$
- ពេល $0<x<1;\quad f'(x)<0$
- ពេល $x=1;\quad f'(x)=0$

សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f លើ$(0,+\infty)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

៤. ក. បង្ហាញថាបន្ទាត់ $\Delta:\ y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$

បន្ទាត់ $\Delta:\ y=x+1$ ជាអាស៊ីមតូតទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ $+\infty$ លុះត្រាតែ

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=0$ ដោយ $(C):\ f(x)=x+1-\dfrac{\ln x}{x}$

គេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\ln x}{x}\right)=0$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{\Delta:\ y=x+1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតនៃក្រាប} C}$

ខ. សិក្សាទីតាំង C ធៀបនឹង Δ

$(C):\ y_c=x+1-\dfrac{\ln x}{x};\quad (\Delta):\ y_\Delta=x+1 \quad\Rightarrow\ y_c-y_\Delta=-\dfrac{\ln x}{x}$

ដោយ $x\in(0,+\infty)$ គេបាន y_c-y_Δ មានសញ្ញាតាម $-\ln x$

- $y_c-y_\Delta=0 \quad\Leftrightarrow\ -\ln x=0\Leftrightarrow x=1$ គេបាន $(C)\cap(\Delta)$
- $y_c-y_\Delta>0 \quad\Leftrightarrow\ -\ln x>0\Leftrightarrow \ln x<0\Leftrightarrow x<1$ គេបាន (C) ស្ថិតនៅលើ (Δ)
- $y_c-y_\Delta<0 \quad\Leftrightarrow\ -\ln x<0\Leftrightarrow \ln x>0\Leftrightarrow x>1$ គេបាន (C) ស្ថិនៅក្រោម (Δ)

កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ I រវាងក្រាប C និង Δ គឺ $x=1 \quad\Rightarrow y=1+1=2$

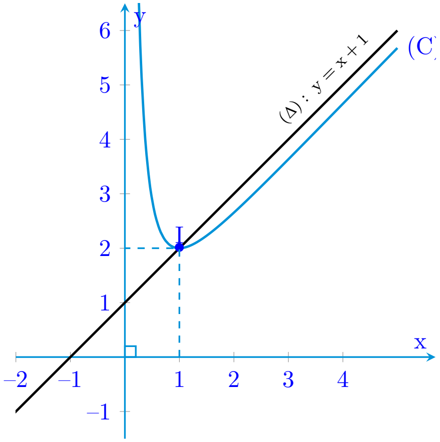
ដូចនេះ $\boxed{I(1,2)}$

លឹម សីហា

សង់ Δ និងក្រាប C

- $(\Delta):\ y=x+1$

x	0	−1
y	1	0



វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាត្រៀមប្រឡង
សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិឆ្នាំ២០១៨

[វិញ្ញាសាទី៨]

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{x^3-x^2+x-1}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{-x}$ គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sin x}$

II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល $I=\displaystyle\int_0^2\left(6x^2-3x-1\right)dx$, $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-2\sin^2 x\right)dx$ ។

គេមាន f កំណត់លើ $\mathbb{R}^*$ ដោយ $f(x)=-2\left(\dfrac{x+1}{x^2}\right)$ ។ បង្ហាញថា $f(x)=-\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}$ ។

គណនា $K=\displaystyle\int_1^e f(x)dx$ ។ $(\ln e=1)$

III. (១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $f''+2f'=0$ ។

១. គេតាង $g=f'$ ។ បង្ហាញថា g ជាចម្លើយនៃសមីការ $g'+2g=0$ ។

២. ដោះស្រាយសមីការ $g'+2g=0$ រួចទាញរកចម្លើយនៃសមីការ $f''+2f'=0$ ។

៣. ផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយនៅសំណួរ២ ដោយដោះស្រាយសមីការ $f''+2f'=0$ តាមសមីការសម្គាល់។

IV. (១០ពិន្ទុ) រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីបដែលមានកំពូលទាំងពីរជាចំណុច $(4,0)$ និង $(-4,0)$ និង មានកំណុំមួយនៅត្រង់ចំណុច $(3,0)$ រួចសង់អេលីបនេះ។

V. (៣៥ពិន្ទុ) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន$\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$មួយ គេដៅចំណុច$A(2,2,0)$, $B(0,2,2)$, $C(1,0,1)$។

១. រកសមីការស្វ៊ែ S ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត AB ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វទាំងពីររវាងស្វ៊ែ S និងបន្ទាត់ d សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត $x=1+t$, $y=2$ និង $z=1+t$ ដែល t ជាចំនួនពិត។

២. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រផលគុណ $\vec{n}=\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}$ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC ។
រកសមីការប្លង់ ABC ។

៣. ប្លង់ ABC ជួប (Ox) ត្រង់ M និងជួប Oz ត្រង់ N ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច M និង N ។
បង្ហាញថា $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}$ និង $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MN}=0$ ។ ទាញបញ្ជាក់ថា ABNM ជាចតុកោណកែង។

៤. រកចម្ងាយពីចំណុច $D(0,2,0)$ ទៅប្លង់ ABC ។ទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត DBCA ។

VI. (៣៥ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x > 0$ ដោយ $f(x) = 1 + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ ហើយមានក្រាប (C) ។

១. គណនា $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងដេកនៃក្រាប (C) ។

២. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និងសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

៣. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ (D) : $y = 1$ ។
កំណត់សមីការបន្ទាត់ (L) ដែលប៉ះនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច A ។

៤. គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ។ សង់បន្ទាត់ (L) អាស៊ីមតូត និងក្រាប (C) នៅក្នុងតម្រុយតែមួយ។
(គេយក $e = 2.7,\ \frac{2}{e} = 0.7,\ \ln 2 = 0.7$)

លឹម សីហា

[ដំណោះស្រាយ]

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{x^3-x^2+x-1}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x)}{(x-1)\left(x^2+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)(1+x)}{(x-1)\left(x^2+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(1+x)}{\left(x^2+1\right)}=\frac{-(1+1)}{1^2+1}=-1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{x^3-x^2+x-1}=-1}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{-x}$ (មានរាងមិនកំណត់$\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to 0}\left(-3\frac{\sin 3x}{3x}\right)=-3\times 1=-3$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{-x}=-3}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sin x}$ (មានរាងមិនកំណត់$\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}{\sin x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2+x-(2-x)}{\sin x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}$$

$$=1\times\frac{2}{\sqrt{2+0}+\sqrt{2-0}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sin x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

II. គណនាអាំងតេក្រាល

- $I=\displaystyle\int_0^2\left(6x^2-3x-1\right)dx=\left[\frac{6x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}-x\right]_0^2=2(2)^3-\frac{3(2)^2}{2}-2-0=8$ $\boxed{I=8}$
- $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-2\sin^2 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{4}-\frac{1}{2}\sin 0=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{J=\dfrac{1}{2}}$

បង្ហាញថា $f(x) = -\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}$

ដោយ $f(x) = -2\left(\frac{x+1}{x^2}\right) = \frac{-2x-2}{x^2} = \frac{-2x}{x^2} - \frac{2}{x^2} = -\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{f(x) = -\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}$

គណនា $K = \int_1^e f(x)dx \quad (\ln e = 1)$

$$K = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e \left(-\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right)dx = \left[-2\ln|x| + \frac{2}{x}\right]_1^e = -2\ln e + \frac{2}{e} - \left(-2\ln 1 + \frac{2}{1}\right)$$

$$= -2 + \frac{2}{e} + 0 - 2 = -4 + \frac{2}{e}$$ ដូចនេះ $\boxed{K = -4 + \frac{2}{e}}$

III. ១. គេតាង $g = f'$ បង្ហាញថា g ជាចម្លើយនៃសមីការ $g' + 2g = 0$

យើងមាន សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $f'' + 2f' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (f')' + 2f' = 0$

$$\Leftrightarrow \quad g' + 2g = 0$$

ដូចនេះ $\boxed{g = f' \text{ ជាចម្លើយនៃ } g' + 2g = 0}$

លឹម សីហា

២. ដោះស្រាយសមីការ $g' + 2g = 0$

$$g' + 2g = 0 \Rightarrow g' = -2g \Leftrightarrow \frac{dg}{dx} = -2g \Leftrightarrow \int \frac{1}{g}dg = \int -2dx \Rightarrow \ln|g| = -2$$

$$\Rightarrow g = Ae^{-2};\ A \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចម្លើយនៃសមីការ } g' + 2g = 0 \text{ គឺ } g(x) = Ae^{-2x} \quad ;\ A \in \mathbb{R}}$

ទាញរកចម្លើយនៃសមីការ $f'' + 2f' = 0$

ដោយ $f' = g \quad \Rightarrow f = \int g(x)dx = \int Ae^{-2x}dx$

$$= -\frac{A}{2}e^{-2x} + C$$

$$= -De^{-2x} + C \quad ;\ D = \frac{A}{2}, C \in \mathbb{R}$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចម្លើយនៃសមីការ } f'' + 2f' = 0 \text{ គឺ } f(x) = -De^{-2x} + C \quad ;\ A, C \in \mathbb{R}}$

៣. ផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយនៅសំណួរ២ ដោយដោះស្រាយសមីការ $f'' + 2f' = 0$ តាមសមីការសម្គាល់

សមីការសម្គាល់គឺ $r^2 + 2r = 0 \Leftrightarrow r(r+2) = 0 \Rightarrow r = 0, r = -2$

យើងបាន ចម្លើយនៃសមីការ គឺ

$f(x) = Ae^{0x} - Be^{-2x} = -Be^{-2x} + A = -De^{-2x} + C \quad ; \; D = B; \; C = A, C, D \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ **ចម្លើយនៅសំណួរទី២ ត្រឹមត្រូវ**

IV. រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីប

ដោយ កំពូល កំណុំមានអរដោនេថេរ គេបាន អ័ក្សទទឹងស្របអ័ក្សអាប់ស៊ីស

នោះ សមីការស្តង់ដា នៃអេលីបគឺ $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-h)^2}{b^2} = 1$

- កំពូល$V_1(h+a, k)$ គឺ $(4, 0) \;\Rightarrow\; h + a = 4 \; ; \quad k = 0$
- កំពូល $V_2(h-a, k)$ គឺ $(-4, 0) \;\Rightarrow\; h - a = -4; \quad k = 0$

$$\begin{cases} h + a = 4 \\ \underline{h - a = -4} \end{cases}$$

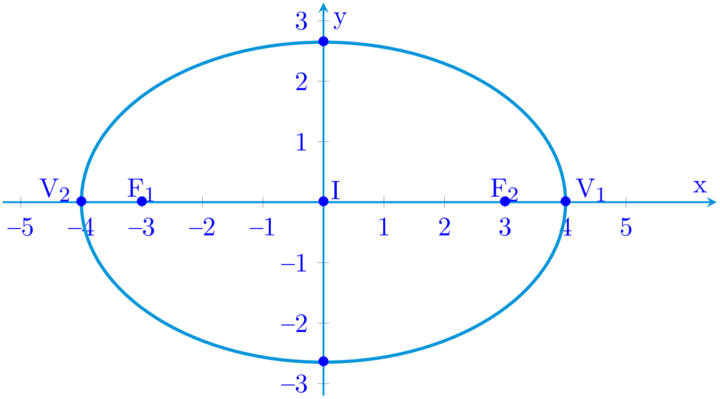
$2h \quad = 0 \quad \Rightarrow \; h = 0; \quad a = 4$

លីម សីហា

- កំណុំ $F(h+c, 0)$ គឺ $(3, 0) \;\Rightarrow h + c = 3 \quad \Rightarrow \; c = 3$
- $c^2 = a^2 - b^2 \;\Rightarrow\; b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$

ដូចនេះ **អេលីបមានសមីការ $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$**

- សង់អេលីប   ផ្ចិតនៃអេលីបគឺ $I(0, 0)$



V. ១. រកសមីការស្វ៊ែ S ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត AB

សមីការស្វ៊ែ S កំណត់ដោយ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

ដោយ ស្វ៊ែ S មានអង្កត់ផ្ចិត AB យើងបាន

- ចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ AB ជាផ្ចិតនៃស្វ៊ែ S
- កាំនៃស្វ៊ែគឺ $r=\frac{|AB|}{2}$

យើងមាន $A(2,2,0),\ B(0,2,2)$ យើងបាន

- ផ្ចិត $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)\quad\Rightarrow I\left(\frac{2+0}{2},\frac{2+2}{2},\frac{0+2}{2}\right)\quad\Rightarrow I(1,2,1)$
- កាំ $r=\frac{\sqrt{(0-2)^2+(2-2)^2+(2-0)^2}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

ដូចនេះ | សមីការស្វ៊ែS គឺ $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2$ |

រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វទាំងពីររវាងស្វ៊ែ S និងបន្ទាត់ d

$(S):\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2$

$(d): x=1+t,\ y=2\ ,z=1+t$

កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងស្វ៊ែ S និងបន្ទាត់ d គឺជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការរវាង S និង d

លីម សីហា

យក $x=1+t,\ y=2,\ z=1+t$ ជំនួសក្នុងសមីការស្វ៊ែS យើងបាន

$(1+t-1)^2+(2-2)^2+(1+t-1)^2=2$

$\Rightarrow\quad t^2+t^2=2\quad\Rightarrow 2t^2=2\quad\Rightarrow t^2=1\quad\Rightarrow t=\pm1$ ជំនួសក្នុងសមីការស្វ៊ែS

- ចំពោះ $t=1$ យើងបាន $x=2,\ y=2,\ z=2$
- ចំពោះ $t=-1$ យើងបាន $x=0,\ y=2,\ z=0$

ដូចនេះ | ចំណុចប្រសព្វទាំងពីររវាងស្វ៊ែS និងបន្ទាត់d គឺ $(2,2,2);\ (0,2,0)$ |

២. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រផលគុណ $\vec{n}=\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}$

យើងមាន $A(2,2,0),\ B(0,2,2),\ C(1,0,1)$ យើងបាន

$\overrightarrow{CA}(2-1,2-0,0-1)\quad\Rightarrow\overrightarrow{CA}(1,2,-1)$

$\overrightarrow{CB}(0-1,2-0,2-1)\quad\Rightarrow\overrightarrow{CB}(-1,2,1)$

នាំឲ្យ $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2+2)\overrightarrow{i} - (1-1)\overrightarrow{j} + (2+2)\overrightarrow{k}$

$$= 4\overrightarrow{i} - 0\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{n}\,(4,0,4)}$

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\left|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}\right|}{2} = \frac{\sqrt{4^2+0^2+4^2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_{\Delta ABC} = 2\sqrt{2} \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$

រកសមីការប្លង់ ABC

សមីការប្លង់ ABC កំណត់ដោយ $a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o)=0$

ដោយ ប្លង់ABC

- កាត់តាម $A(2,2,0)$
- ហើយ មានវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{n}\,(4,0,4)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ ព្រោះ $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}$

លីម សីហា

យើងបាន ប្លង់ABC : $4(x-2)+0(y-2)+4(z-0)=0$

$$\Leftrightarrow \quad 4x+4z-8=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x+z-2=0$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ប្លង់ABC :}\ x+z-2=0}$

៣. ប្លង់ ABC ជួប (Ox) ត្រង់ M និងជួប Oz ត្រង់ N រកកូអរដោនេនៃចំណុច M និង N

- ប្លង់ABC ជួប(Ox) $\Leftrightarrow y=0, z=0 \quad \Rightarrow x+0-2=0 \quad \Rightarrow x=2$

  ដូចនេះ $\boxed{M(2,0,0)}$

- ប្លង់ABC ជួប(Oz) $\Leftrightarrow x=0, y=0 \quad \Rightarrow 0+z-2=0 \quad \Rightarrow z=2$

  ដូចនេះ $\boxed{N(0,0,2)}$

បង្ហាញថា $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ និង $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$

$\overrightarrow{AB}\,(0-2, 2-2, 2-0) \quad \Rightarrow \overrightarrow{AB}\,(-2, 0, 2)$

$\overrightarrow{MN}\,(0-2, 0-0, 2-0) \quad \Rightarrow \overrightarrow{MN}\,(-2, 0, 2)$ ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}}$

$\overrightarrow{MA}\,(2-2, 2-0, 0-0) \quad \Rightarrow \overrightarrow{MA}\,(0, 2, 0)$

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MN} = -2(0) + 0(2) + 2(0) = 0$ ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MN} = 0}$

ទាញបញ្ជាក់ថា ABNM ជាចតុកោណកែង

ដោយ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} \quad \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{MN}\right| \quad (1)$

ហើយ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \quad \Rightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MN} \quad (2)$

តាម (1) និង (2) ដូចនេះ $\boxed{\text{ABNM ជាចតុកោណកែង}}$

៤. រកចម្ងាយពីចំណុច $D(0, 2, 0)$ ទៅប្លង់ ABC

លឹម សីហា

$$D_{(D,(ABC))} = \frac{|ax_o + by_o + cz_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- $D(0, 2, 0)$
- $(ABC):\ x + z - 2 = 0$

$$\Longrightarrow D_{(D,(ABC))} = \frac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{D_{(D,(ABC))} = \sqrt{2} \text{ ឯកតាប្រវែង}}$

ទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត DBCA

$$V_{DBCA} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \times h$$

ដោយ $S_{\Delta ABC} = 2\sqrt{2}$

$h = D_{(D,(ABC))} = \sqrt{2}$

យើងបាន $V_{DBCA} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \frac{4}{3}$ ដូចនេះ $\boxed{V_{DBCA} = \frac{4}{3} \text{ ឯកតាមាឌ}}$

VI. ១. គណនា $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

$$f(x) = 1 + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(1 + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right) = 1 + 2(-\infty) = -\infty$ ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(1 + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right) = 1 + 2(0) = 1$ ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1}$

កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងដេកនៃក្រាប (C)

- ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ ដូចនេះ បន្ទាត់ $x = 0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ
- ដោយ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$ ដូចនេះ បន្ទាត់ $y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក

២. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

$$f'(x) = \left(1 + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right)' = 2\left(\frac{(\ln x)'x - x'\ln x}{x^2}\right) = \frac{2 - 2\ln x}{x^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = \dfrac{2 - 2\ln x}{x^2}}$

លឹម សីហា

សិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

ដោយ $x^2 > 0 \Rightarrow f'(x)$ មានសញ្ញាតាមភាគយក $2 - 2\ln x$

- $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow 2 - 2\ln x = 0 \Leftrightarrow -2\ln x = -2 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$
- $f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow 2 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow -2\ln x > -2 \Rightarrow \ln x < 1 \Rightarrow x < e$
- $f'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow 2 - 2\ln x < 0 \Leftrightarrow -2\ln x < -2 \Rightarrow \ln x > 1 \Rightarrow x > e$

យើងបាន តារាងសញ្ញា $f'(x)$ គឺ

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

- $x \in (0, e);\ f'(x) > 0$
- $x \in (e, +\infty);\ f'(x) < 0$

សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

- $x = e;\ f(e) = 1 + 2\left(\frac{\ln e}{e}\right) = 1 + \frac{2}{e} = 1 + 0.7 = 1.7$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1.7	↘	1

៣. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A រវាងក្រាប (C) និងបន្ទាត់ $(D):\ y = 1$

- $(C):\ y = 1 + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$
- $(D):\ y = 1$

$$\Rightarrow (C)\cap(D) \Leftrightarrow 1 + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ln x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 1$$

លឹម សីហា

ដូចនេះ **កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ A គឺ $A(1,1)$**

កំណត់សមីការបន្ទាត់ (L) ដែលប៉ះនឹងក្រាប (C) ត្រង់ចំណុច A

$(L):\ y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$

- (L) ប៉ះក្រាប C ត្រង់ $A(1,1)$ $\quad \Rightarrow x_o = 1, y_o = 1$
- $f'(x_o) = f'(1) = \frac{2 - 2\ln 1}{1^2} = 2 \quad ;\ f(x_o) = y_o = 2$

$\Rightarrow (L):\ y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$

ដូចនេះ **$(L):\ y = 2x - 1$**

៩. គណនា $f\left(\frac{1}{2}\right)$

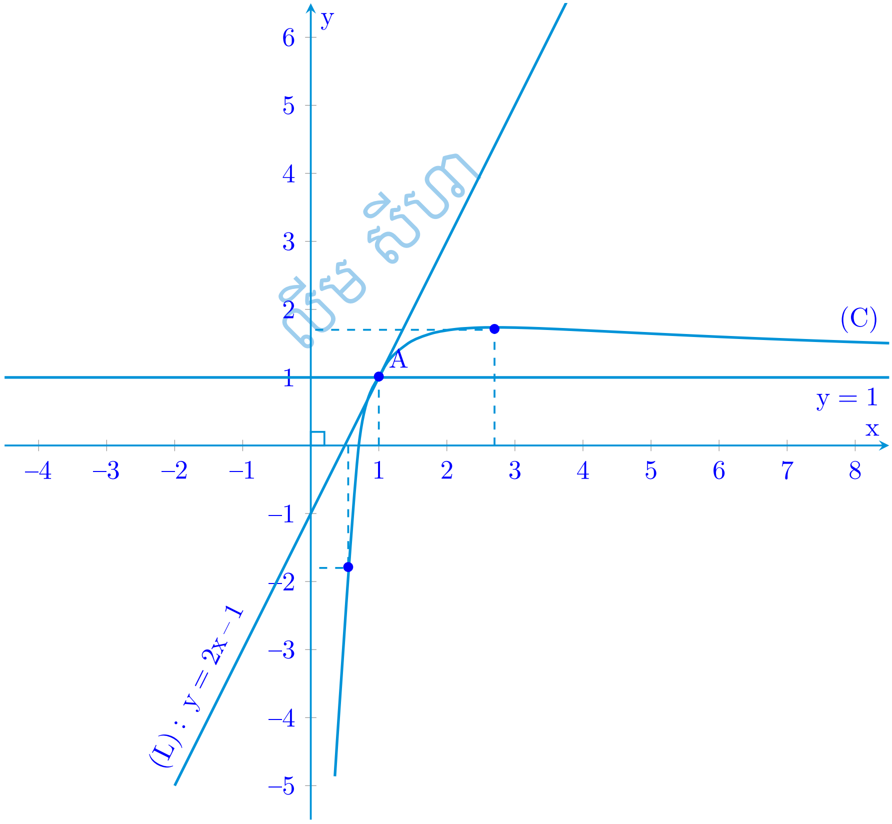
- $f(\frac{1}{2}) = 1 + 2\left(\dfrac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = 1 + 4\ln 2^{-1} = 1 - 4\ln 2 = 1 - 4(0.7) = -1.8$

ដូចនេះ $\boxed{f(\frac{1}{2}) = -1.8}$

សង់បន្ទាត់ (L) អាស៊ីមតូត និងក្រាប (C)

- $(L):\ y = 2x - 1$

x	0	$\frac{1}{2}$
y	-1	0



វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាត្រៀមប្រឡង
សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិឆ្នាំ២០១៨

[វិញ្ញាសាទី៩]

I. (១៥ពិន្ទុ)

១. ដោះស្រាយសមីការ $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$ (1) ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច។
រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃឫសនីមួយៗរបស់សមីការ (1)

២. សរសេរ $w = \left(\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

II. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ ខ. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^3-27}{\sqrt{x+6}-3}$ គ. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

III. (១៥ពិន្ទុ) គ្រូបន្ទុកថ្នាក់បានជ្រើសរើសប្រធានក្រុមរេនសំអាតថ្នាក់ថ្ងៃចំនួន 6 នាក់នៃថ្នាក់រៀនមួយដែលមានសិស្សប្រុសចំនួន20 នាក់ និងសិស្សស្រីចំនួន 15នាក់។ គណនាប្រូបាបខាងក្រោម៖

A «ប្រធានក្រុមសុទ្ធតែប្រុស»

B «ប្រធានក្រុមសុទ្ធតែស្រី»

C «ប្រធានក្រុមមានប្រុស 3 នាក់ និងស្រី 3 នាក់» ។

IV. (១៥ពិន្ទុ) គណនាអាំងតេក្រាល៖

$I = \int_1^3 \left(x-2+3x^2\right)dx$ $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x - \cos x)\,dx$ $K = \int_0^1 \dfrac{x^3+(x+1)^2}{x^2+1}dx$

ដើម្បីគណនា K យើងត្រូវបង្ហាញថា $\dfrac{x^3+(x+1)^2}{x^2+1} = x+1+\dfrac{x}{x^2+1}$ ។

V. (៣០ពិន្ទុ)

១. អេលីប E មួយមានសមីការ $25x^2+16y^2-150x+64y = 111$ ។

ក. រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល និងកំណុំរបស់អេលីប E ។

ខ. សង់អេលីប E ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ។

លឹម សីហា

២. ចំណុច $M(-1,0,1);\ N(0,1,2)$ និង $P(1,2,-1)$ ស្ថិតនៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មួយ។ ប្លង់ α មួយមានសមីការ $x-2y+z-4=0$ ។

ក. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}$ ហើយទាញរកសមីការប្លង់ β ដែលកាត់តាមចំណុច M,N និង P ។

ខ. រកសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ S មួយដែលមានផ្ចិត M ហើយកាត់តាមចំណុច N ។ តើប្លង់ α ជួបនឹងស្វ៊ែ S ឬទេ?

VI. (៣៥ពិន្ទុ) គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}$ ។ គេតាង C ជាក្រាបរបស់វានៅក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ។

១. a. គណនាលីមីត f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$ ។

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ d_1 ដែលមានសមីការ $y=x+2$ ។

២. a. ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x,\ f'(x)=\left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$ ។

b. សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$ និង សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

៣. a. តើគេអាចថាយ៉ាងណាចំពោះបន្ទាត់ប៉ះd_2 ទៅនឹងក្រាបC ត្រង់ចំណុចI ដែលមានអាប់ស៊ីស$\ln(3)$?

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ។

៤. a. បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ d_3 ទៅនឹងក្រាប C ត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីសសូន្យមានសមីការ $y=\dfrac{1}{4}x+1$ ។

b. ដោយសន្មត់ថាចំនុច I ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប C និងក្នុងតម្លៃប្រហែលនៃ $\ln(3)$ ។ ចូរសង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ប៉ះ $d_1,d_2,\ d_3$ ។ (នៅក្នុងតម្រុយនេះមួយឯកតាស្មើ 2cm)

[ដំណោះស្រាយ]

I. ១. ដោះស្រាយសមីការ $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$ (1) ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច

$z^2-2\sqrt{2}z+4=0 \qquad \Delta=b^2-4ac=\left(-2\sqrt{2}\right)^2-4(1)(4)=4(2)-16=-8$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{-8}=2i\sqrt{2}$$

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-\left(-2\sqrt{2}\right)-2i\sqrt{2}}{2(1)}=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$$

$$z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

ដូចនេះ $\boxed{z_1=\sqrt{2}-\sqrt{2}i \quad ; \quad z_2=\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$

រកម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃឫសនីមួយៗរបស់សមីការ (1)

- ដោយ $z_1=\sqrt{2}-\sqrt{2}i=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

ដូចនេះ z_1 មាន ម៉ូឌុល $r=2$ និងអាគុយម៉ង់ $\theta=\frac{7\pi}{4}$ ឬ $\theta=\frac{7\pi}{4}+2k\pi \quad ; k\in\mathbb{Z}$

- ដោយ $z_2=\sqrt{2}+\sqrt{2}i=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ដូចនេះ z_2 មាន ម៉ូឌុល $r=2$ និងអាគុយម៉ង់ $\theta=\frac{\pi}{4}$ ឬ $\theta=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad ; k\in\mathbb{Z}$

២. សរសេរ $w=\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^2$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

$$w=\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^2=\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2=\left(\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}\right)^2$$

$$=\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}\right)\right)^2=\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right)^2$$

$$=\cos(-3\pi)+i\sin(-3\pi)=\cos(-4\pi+\pi)+i\sin(-4\pi+\pi)=\cos\pi+i\sin\pi$$

ដូចនេះ $\boxed{w=\cos\pi+i\sin\pi}$

II. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{\infty}{\infty}$)

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1+0+0}{1+0}=1$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}=1}$

ខ. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{x+6}-3}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to3}\frac{\left(x^3-3^3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x+6)-9}$$

$$=\left(3^2+3\cdot3+9\right)\left(\sqrt{3+6}+3\right)=27\times6=162$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{x+6}-3}=162}$

គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\dfrac{e^0+e^{-0}}{2}=\dfrac{1+1}{2}=1$ ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=1}$

លីម សីហា

III. A «ប្រធានក្រុមសុទ្ធតែប្រុស»

តាមរូបមន្ត $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$ ដោយ $n(A)=C(20,6)=\dfrac{20!}{14!6!}$

$$=\frac{20\times19\times18\times17\times16\times15}{6\times5\times4\times3\times2\times1}$$

$$=19\times17\times8\times15=38760$$

$$n(S)=C(35,6)=\frac{35!}{29!6!}$$

$$=\frac{35\times34\times33\times32\times31\times30}{6\times5\times4\times3\times2\times1}$$

$$=35\times34\times11\times4\times31=1623160$$

យើងបាន $P(A)=\dfrac{38760}{1623160}=\dfrac{19\times17\times8\times15}{35\times34\times11\times4\times31}=\dfrac{19\times3}{7\times11\times31}=\dfrac{57}{2387}$

ដូចនេះ $\boxed{P(A)=\dfrac{57}{2387}}$

B «ប្រធានក្រុមសុទ្ធតែស្រី»

តាមរូបមន្ត $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}$ ដោយ $n(B)=C(15,6)=\dfrac{15!}{9!6!}$

$$=\frac{15\times14\times13\times12\times11\times10}{6\times5\times4\times3\times2\times1}$$

$$=7\times13\times11\times5=5005$$

$$n(S)=1623160$$

នាំឲ្យ $P(B)=\dfrac{5005}{1623160}=\dfrac{7\times13\times11\times5}{35\times34\times11\times4\times31}=\dfrac{13}{34\times4\times31}=\dfrac{13}{4216}$

ដូចនេះ $\boxed{P(B)=\dfrac{13}{4216}}$

C «ប្រធានក្រុមមានប្រុស3 នាក់ និងស្រី3 នាក់»

តាមរូបមន្ត $P(C)=\dfrac{n(C)}{n(S)}$ ដោយ $n(C)=C(20,3)C(15,3)$

$$=\frac{20!}{17!3!}\cdot\frac{15!}{12!3!}$$

$$=\frac{20\times19\times18}{3\times2}\cdot\frac{15\times14\times13}{3\times2}$$

$$=10\times19\times15\times14\times13=518700$$

លឹម ស៊ីហា

$$n(S)=1623160$$

យើងបាន $P(C)=\dfrac{518700}{1623160}=\dfrac{10\times19\times15\times14\times13}{35\times34\times11\times4\times31}=\dfrac{19\times15\times13}{34\times11\times31}=\dfrac{3705}{11594}$

ដូចនេះ $\boxed{P(C)=\dfrac{3705}{11594}}$

IV. គណនាអាំងតេក្រាល៖

$$I=\int_1^3\left(x-2+3x^2\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-2x+\frac{3x^3}{3}\right]_1^3=\frac{3^2}{2}-2(3)+3^3-\left(\frac{1^2}{2}-2(1)+1^3\right)$$

$$=\frac{9}{2}-6+27-\frac{1}{2}+2-1=\frac{8}{2}+22=\frac{8+44}{2}=26 \qquad \boxed{I=26}$$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin 2x-\cos x)\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{1}{2}\cos 0-\sin 0\right)=0-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1-\sqrt{2}}{2} \qquad \boxed{J=\frac{1-\sqrt{2}}{2}}$$

$$K=\int_0^1\frac{x^3+(x+1)^2}{x^2+1}dx$$

ដោយ $x+1+\frac{x}{x^2+1}=\frac{(x+1)\left(x^2+1\right)+x}{x^2+1}=\frac{x^3+x+x^2+1+x}{x^2+1}$

$$=\frac{x^3+x^2+2x+1}{x^2+1}=\frac{x^3+(x+1)^2}{x^2+1}$$

គេបាន $\int_0^1\frac{x^3+(x+1)^2}{x^2+1}dx=\int_0^1\left(x+1+\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\int_0^1\left(x+1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}\right)dx$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\cdot\ln\left|x^2+1\right|\right]_0^1=\frac{1^2}{2}+1+\frac{1}{2}\ln 2-0$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{\ln 2}{2}=\frac{3+\ln 2}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{K=\frac{3+\ln 2}{2}}$

V. ១. ក. រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល និងកំណុំរបស់អេលីប E

យើងមាន (E) : $25x^2+16y^2-150x+64y=111$

គេបាន $25x^2+16y^2-150x+64y=111$

$\Leftrightarrow 25x^2-150x+16y^2+64y=111$

$\Leftrightarrow 25\left(x^2-6x+9\right)-25(9)+16\left(y^2+4y+4\right)-16(4)=111$

$\Leftrightarrow 25(x-3)^2-225+16(y+2)^2-64=111$

$\Leftrightarrow 25(x-3)^2+16(y+2)^2=400$

$\Leftrightarrow \frac{25(x-3)^2}{400}+\frac{16(y+2)^2}{400}=\frac{400}{400}$

$\Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$

$\Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{4^2}+\frac{(y+2)^2}{5^2}=1$

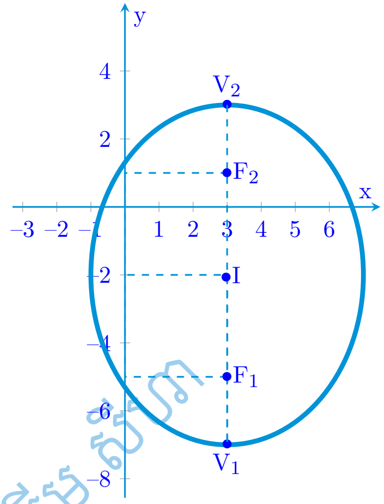
គេបាន

- អេលីបមានអ័ក្សធំជាអ័ក្សឈរ
- $h=3,\ k=-2$; $a=5,\ b=4$; $c^2=a^2-b^2=25-16=9 \quad \Rightarrow c=3$

លឹម សីហា

- ផ្ចិត(h,k) $\boxed{\text{ផ្ចិត}(3,-2)}$
- កំពូល $V_1(h,k-a);\ V_2(h,k+a)$ $\boxed{\text{កំពូល } V_1(3,-7);\ V_2(3,3)}$
- កំណុំ $F_1(h,k-c);\ F_2(h,k+c)$ $\boxed{\text{កំណុំ } F_1(3,-5);\ F_2(3,1)}$

ខ. សង់អេលីប E ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ



២. ក. រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{n} = \overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MP}$

យើងមាន ចំណុច $M(-1,0,1);\ N(0,1,2)\ ;\ P(1,2,-1)$

គេបាន $\overrightarrow{MN}\,(0-(-1),1-0,2-1) \quad \Rightarrow \overrightarrow{MN}\,(1,1,1)$

$\overrightarrow{MP}\,(1-(-1),2-0,-1-1) \quad \Rightarrow \overrightarrow{MP}\,(2,2,-2)$

$$\vec{n} = \overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-2-2)\,\vec{i} - (-2-2)\,\vec{j} + (2-2)\,\vec{k}$$

$$= -4\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

ដូចនេះ $\boxed{\vec{n}\,(-4,4,0)}$

រកសមីការប្លង់ (β)

សមីការប្លង់ (β) កំណត់ដោយ $(\beta):\ a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o)=0$

ដោយ ប្លង់ (β) កាត់តាមចំណុច M, N និង P

យើងបាន $\vec{n}(-4,4,0)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់(β) $\Rightarrow\ a=-4,\ b=4,\ c=0$

(β) កាត់តាម $M(-1,0,1)$ $\Rightarrow\ x_o=-1,\ y_o=0\ ,\ z_o=1$

$$\Longrightarrow\ (\beta):-4(x+1)+4(y-0)+0(z-1)=0$$

$$\Leftrightarrow\ -4x+4y-4=0$$

$$\Leftrightarrow x-y+1=0$$

ដូចនេះ **សមីការប្លង់គឺ $(\beta):\ x-y+1=0$**

ខ. រកសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ S

សមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ S កំណត់ដោយ $(S):\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

ដោយ ស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត $M(-1,0,1)$ $\Rightarrow\ a=-1,\ b=0,\ c=1$

ហើយ ស្វ៊ែ(S) កាត់តាមចំណុច N គេបាន $r=MN=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

ដូចនេះ **សមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ(S) គឺ $(x+4)^2+y^2+(z-1)^2=3$**

លឹម សីហា

ប្លង់ α ជួបនឹងស្វ៊ែ S ឬទេ

បើស្វ៊ែ S ជួបនឹងប្លង់ α លុះត្រាតែ

ចម្ងាយពីផ្ចិតនៃស្វ៊ែS ទៅប្លង់(α) គឺតូចជាងឬស្មើ កាំr នៃស្វ៊ែS

- ប្លង់ $(\alpha):\ x-2y+z-4=0$
- ផ្ចិតស្វ៊ែគឺ $M(-1,0,1)$

គេបាន

$$D(M,(\alpha))=\frac{|-1-2(0)+1-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{16}{6}}=\sqrt{\frac{8}{3}}<r$$

ដូចនេះ **ប្លង់α ជួបស្វ៊ែ S**

VI. ១. a. គណនាលីមីត f ត្រង់ $-\infty$ និង $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+2-\frac{4e^x}{e^x+3}\right) = -\infty + 2 - \frac{4(0)}{0+3} = -\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+2-\frac{4e^x}{e^x+3}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+2-\frac{4}{1+\frac{3}{e^x}}\right) = +\infty$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ $d_1 :\ y = x+2$

$(C):\ y_c = x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}\quad ;\quad (d_1):\ y_d = x+2$

គេបាន $y_c - y_d = x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3} - (x+2) = -\dfrac{4e^x}{e^x+3} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ $\boxed{\text{គ្រប់ } x \in (-\infty,+\infty) \text{ ក្រាប } (C) \text{ ស្ថិតនៅក្រោមបន្ទាត់ } (d_1)}$

២. a. ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, $f'(x) = \left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$

$$f'(x) = \left(x+2-\frac{4e^x}{e^x+3}\right)' = 1 - \frac{4e^x(e^x+3)-(e^x+3)'4e^x}{(e^x+3)^2}$$

$$= 1 - \frac{4e^{2x}+12e^x-4e^{2x}}{(e^x+3)^2} = 1 - \frac{12e^x}{(e^x+3)^2} = \frac{e^{2x}+6e^x+9-12e^x}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}-6e^x+9}{(e^x+3)^2} = \frac{(e^x-3)^2}{(e^x+3)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = \left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2}$

b. សិក្សាអថេរភាពនៃ f លើ $\mathbb{R}$

ដោយ $f'(x) = \left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2 \geq 0 \quad \forall \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \ln 3$$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

គេបាន អនុគមន៍f ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ $x \in \mathbb{R}$

តារាងអថេរភាពនៃf

$$x = \ln 3 \quad \Rightarrow \ f(\ln 3) = \ln 3 + 2 - \frac{4e^{\ln 3}}{e^{\ln 3}+3} = \ln 3 + 2 - \frac{4\times 3}{3+3} = \ln 3$$

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\ln 3$	↗	$+\infty$

៣. a. ចំពោះបន្ទាត់ប៉ះ d_2 ទៅនឹងក្រាបC ត្រង់ចំណុចI ដែលមានអាប់ស៊ីស $\ln(3)$

គេបាន $d_2 : \ y = f'(\ln 3)(x - \ln 3) + f(\ln 3)$

ដោយ $f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2 \quad \Rightarrow \ f'(\ln 3) = \left(\frac{e^{\ln 3} - 3}{e^{\ln 3} + 3}\right) = \frac{3-3}{3+3} = 0$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ d_2 គឺ ស្មើ 0

$\Rightarrow d_2 : \ y = f(\ln 3) = \ln 3$ ជាបន្ទាត់ដេកស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស

ដូចនេះ បន្ទាត់ $d_2 : \ y = \ln 3$

b. សិក្សាទីតាំងនៃក្រាប C ធៀបនឹងបន្ទាត់ប៉ះ d_2

$$(C) : \ y_c = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \quad ; \quad (d_2) : \ y_d = \ln 3$$

តាមតារាងអថេរភាព យើងបាន

- $x \in (-\infty, \ln 3)$ គឺ ក្រាប (C) ស្ថិតនៅក្រោមបន្ទាត់ d_2
- $x \in (\ln 3, +\infty)$ គឺ ក្រាប (C) ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ d_2

- $x = \ln 3$ គឺ ក្រាប (C) កាត់បន្ទាត់ (d_2)

៤. a. បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ d_3 មានរាង $y = \frac{1}{4}x + 1$

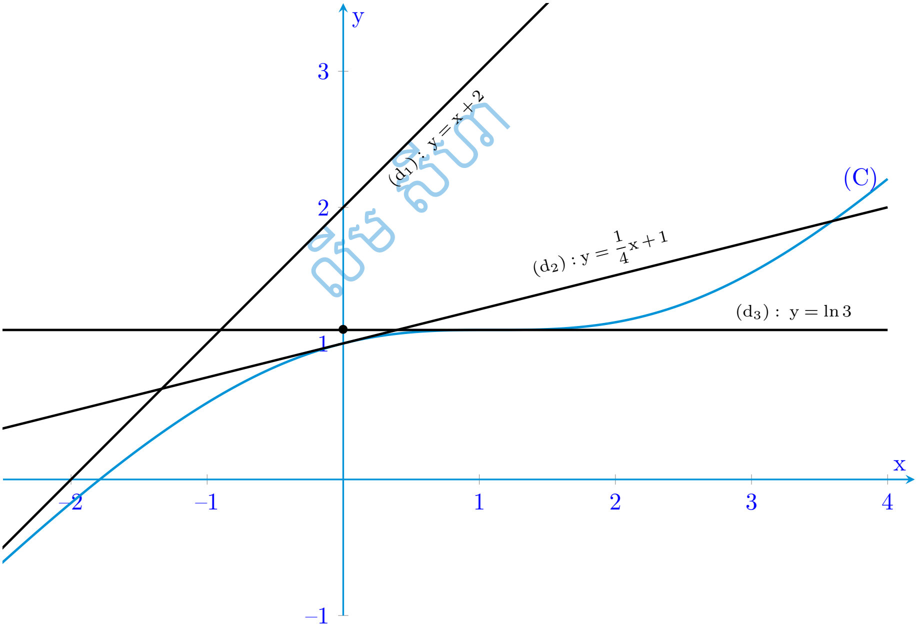
ដោយ d_3 ប៉ះ C ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីសសូន្យ គេបាន

$d_3 : \ y = f'(0)(x-0) + f(0)$

- $f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2 \quad \Rightarrow \ f'(0) = \left(\frac{1-3}{1+3}\right)^2 = \frac{1}{4}$
- $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \quad \Rightarrow \ f(0) = 2 - \frac{4}{1+3} = 1$

គេបាន $d_3 : \ y = \frac{1}{4}x + 1$ ពិត **ដូចនេះ** $\boxed{d_3 : \ y = \frac{1}{4}x + 1}$

b. សង់ក្រាប C និងបន្ទាត់ $d_1, d_2, \ d_3$



វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យាត្រៀមប្រឡង
សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិឆ្នាំ២០១៨

[វិញ្ញាសាទី១០]

I. (១៥ពិន្ទុ) គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{x^2+2-3x}$ ខ. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-27}$ គ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5\sin5x}{x}$

II. (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $a=2\sqrt{3}-2i$ និង $b=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ។

១. សរសេរ $Z=a^2+b^2+4ai+\sqrt{2}b$ ជាទម្រង់ពីជគណិត។

២. សរសេរ a, b និង ab ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

III. (១០ពិន្ទុ) គេប្រើលេខពី 0 ដល់ 9 ដើម្បីសរសេរចំនួនដែលមានលេខ 4 ខ្ទង់ ដោយខ្ទង់ដើមដំបូងមិនប្រើលេខ 0 ទេ។

១. តើគេអាចសរសេរបានប៉ុន្មានចំនួនខុសៗគ្នាតាមរបៀបខាងលើនេះ?

២. តើមានប៉ុន្មានចំនួនដែលមានលេខទាំង 4 ខ្ទង់ខុសៗគ្នា?

៣. តើមានប៉ុន្មានចំនួនដែលមានលេខទាំង 4 ខ្ទង់ដូចគ្នា?

IV. (១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{3x^2-5x-2}{x(x-1)^2}$ ចំពោះគ្រប់ x ដែល $x\neq0,\ x\neq1$។

១. កំណត់ចំនួនពិត $a, b\,;\,c$ ដើម្បីឲ្យបាន $f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq0, x\neq1$។

២. គណនា $I=\displaystyle\int_2^3 f(x)dx$ ។

V. (២៥ពិន្ទុ)

1. ក្នុងលំហប្រដាប់ដោយតម្រុយ $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ គេមានចំណុច $A(-2,1,0)$, $B(0,1,1)$, $C(1,2,2)$ និង $D(0,3,-4)$។

a. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CD}$ ។

b. គណនាប្រវែង AB, AC, AD, BD និង CD ។ ទាញបង្ហាញថាត្រីកោណ ABD និង ACD កែងត្រង់ A ។

2. គេមានសមីការ $9y^2 - 16x^2 = 144$ ។ បង្ហាញថាសមីការនេះជាសមីការអ៊ីពែបូល។ រកកូអរដោនេរបស់កំពូលទាំងពីរ និង កំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល។ រកសមីការអាស៊ីមតូតរបស់អ៊ីពែបូលនេះ និងសង់អ៊ីពែបូលនេះ។

VI. (២០ពិន្ទុ) គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x > 0$ ដោយ $y = f(x) = \dfrac{x + \ln x}{x}$ និងមានខ្សែកោង C ។

១. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ។ បង្ហាញថា f មានតម្លៃអតិបរមាមួយ ហើយគណនាតម្លៃអតិបរមានោះ។

២. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ។ កំណត់សមីការនៃអាស៊ីមតូតឈរ និងដេកនៃក្រាបC។ សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f។

VII. (៣០ពិន្ទុ) អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x > 0$ ដោយ $y = f(x) = 1 - \dfrac{2\ln x}{x}$ ហើយមានក្រាប C ។

១. រក $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ។ រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ។

២. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

៣. សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ។ គេឲ្យ $e = 2.7$, $\dfrac{2}{e} = 0.7$ ។

៤. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប C អាស៊ីមតូតដេក បន្ទាត់ឈរ $x = 1$ និង $x = e$ ។

លឹម សីហា

I. គណនាលីមីត៖

ក. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{x^2+2-3x}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)(1+x)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(1+x)}{x-2}=\frac{-(1+1)}{1-2}=2$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{x^2+2-3x}=2}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-27}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{\left(x^3-3^3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-9}{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\left(x^2+3x+9\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\frac{1}{(9+9+9)\left(\sqrt{9}+3\right)}=\frac{1}{162}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-27}=\dfrac{1}{162}}$

គ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 5x}{x}$ (មានរាងមិនកំណត់ $\frac{0}{0}$)

$$=\lim_{x\to 0}25\cdot\frac{\sin 5x}{5x}=25\times 1=25$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 5x}{x}=25}$

II. ១. សរសេរ $Z=a^2+b^2+4ai+\sqrt{2}b$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

ដោយ $a=2\sqrt{3}-2i$; $b=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

គេបាន $Z=a^2+b^2+4ai+\sqrt{2}b$

$$=\left(2\sqrt{3}-2i\right)^2+\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^2+4\left(2\sqrt{3}-2i\right)i+\sqrt{2}\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)$$

$$=4(3)-8\sqrt{3}i+4i^2+2-2(2)i+2i^2+8\sqrt{3}i-8i^2-2+2i$$

$$=14-2i$$

$\boxed{Z=14-2i}$

២. សរសេរ a, b និង ab ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

- ដោយ $a = 2\sqrt{3} - 2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

ដូចនេះ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃa គឺ $a = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

- ដោយ $b = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

ដូចនេះ ទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនៃb គឺ $b = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

- ដោយ $ab = \left(4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)\right)\left(2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$$= 8\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\cos\frac{31\pi}{12} + i\sin\frac{31\pi}{12}\right)$$

$$= 8\left(\cos\left(2\pi + \frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{7\pi}{12}\right)\right) = 8\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

ដូចនេះ ទម្រង់ធរណីមាត្រនៃab គឺ $ab = 8\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

III. ១. រកចំនួនរបៀបដែលគេអាចបង្កើតចំនួនដែលមានលេខ4 ខ្ទង់

លេខដែលយកមកប្រើមាន $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ មាន១០ករណី

ហើយខ្ទង់នីមួយៗអាចដូចគ្នា យើងបាន

- ខ្ទង់ដើមដំបូងមិនប្រើលេខ 0 $\Rightarrow$ ខ្ទង់ដើមដំបូងអាចមាន តែ 9 ករណី
- ខ្ទង់បន្ទាប់អាច មាន 10 ករណី
- ខ្ទង់បន្ទាប់ទៀតអាច មាន 10 ករណី
- ខ្ទង់ចុងក្រោយអាច មាន 10 ករណី

យើងបាន ចំនួនរបៀបដែលគេអាចបង្កើនចំនួនដែលមានលេខ4ខ្ទង់ គឺ $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$

ដូចនេះ ចំនួនសរុបគឺ 9000 ចំនួន

២. រកចំនួនដែលលេខទាំង4ខ្ទង់ខុសៗគ្នា

- ខ្ទង់ដំបូងមិនយក 0 អាចមាន 9 ករណី
- ខ្ទង់បន្ទាប់អាចមាន 9 ករណី
- ខ្ទង់បន្ទាប់ទៀតអាចមាន តែ 8 ករណី
- ខ្ទង់ចុងក្រោយអាចមាន តែ 7 ករណី

យើងបាន ចំនួនសរុបនៃចំនួនដែលខ្ទង់ទាំងអស់ខុសៗគ្នា គឺ $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$

ដូចនេះ **ចំនួនសរុបនៃចំនួនដែលខ្ទង់ទាំងអស់ខុសៗគ្នា គឺ 4536 ចំនួន**

៣. រកចំនួនដែលលេខទាំង4 ខ្ទង់ដូចៗគ្នា

ចំនួនដែលលេខទាំង4 ខ្ទង់ដូចៗគ្នា មាន $\{(1111);\ (2222);\ (3333);\ (4444);$

$(5555);\ (6666);\ (7777);\ (8888);\ (9999)\}$

សរុប មាន 9 ចំនួន

ដូចនេះ **ចំនួនដែលលេខទាំង 4 ខ្ទង់ដូចៗគ្នា មាន 9 ចំនួន**

IV. ១. កំណត់ចំនួនពិត a, b ; c ដើម្បីឲ្យបាន $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$

យើងមាន $f(x) = \dfrac{3x^2-5x-2}{x(x-1)^2}$

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x^2-5x-2}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{a(x-1)^2 + bx(x-1) + cx}{x(x-1)^2}$$

$$= \frac{ax^2 - 2ax + a + bx^2 - bx + cx}{x(x-1)^2}$$

$$= \frac{(a+b)x^2 + (-2a-b+c)x + a}{x(x-1)^2}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a + b = 3 & (1) \\ -2a - b + c = -5 & (2) \\ a = -2 \end{cases}$$

យក $a=-2$ ជំនួសក្នុងសមីការ (1) យើងបាន $-2+b=3 \Rightarrow b=5$

$$(2):\ -2(-2)-5+c=-5 \quad \Rightarrow c=-4$$

ដូចនេះ $\boxed{a=-2,\ b=5,\ c=-4}$

២. គណនា $I=\displaystyle\int_2^3 f(x)dx$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}=-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x-1}-\dfrac{4}{(x-1)^2}$

$$\Rightarrow I=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\left(-\frac{2}{x}+\frac{5}{x-1}-\frac{4}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$=\left[-2\ln|x|+5\ln|x-1|-4\frac{-1}{x-1}\right]_2^3$$

$$=-2\ln 3+5\ln 2+\frac{4}{2}-\left(-2\ln 2+5\ln 1+\frac{4}{1}\right)$$

$$=-2\ln 3+7\ln 2-2$$

ដូចនេះ $\boxed{I=7\ln 2-2\ln 3-2}$

លឹម សីហា

V. 1. a. រកវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{CD}$

យើងមាន $A(-2,1,0)$, $B(0,1,1)$, $C(1,2,2)$ និង $D(0,3,-4)$ គេបាន

$$\overrightarrow{AB}(0-(-2),1-1,1-0) \quad \Rightarrow \overrightarrow{AB}(2,0,1)$$

$$\overrightarrow{AC}(1-(-2),2-1,2-0) \quad \Rightarrow \overrightarrow{AC}(3,1,2)$$

$$\overrightarrow{AD}(0-(-2),3-1,-4-0) \quad \Rightarrow \overrightarrow{AD}(2,2,-4)$$

$$\overrightarrow{BC}(1-0,2-1,2-1) \quad \Rightarrow \overrightarrow{BC}(1,1,1)$$

$$\overrightarrow{BD}(0-0,3-1,-4-1) \quad \Rightarrow \overrightarrow{BD}(0,2,-5)$$

$$\overrightarrow{CD}(0-1,3-2,-4-2) \quad \Rightarrow \overrightarrow{CD}(-1,1,-6)$$

b. គណនាប្រវែង AB, AC, AD, BD និង CD

$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+0^2+1^2}=\sqrt{5}$ ឯកតាប្រវែង

$AC=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{3^2+1^2+2^2}=\sqrt{14}$ ឯកតាប្រវែង

$$AD = \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$ ឯកតាប្រវែង

$$BD = \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$ ឯកតាប្រវែង

$$CD = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-6)^2} = \sqrt{38}$$ ឯកតាប្រវែង

ទាញបង្ហាញថាត្រីកោណ ABD និង ACD កែងត្រង់ A

យើងមាន $\overrightarrow{AB}(2,0,1)$; $\overrightarrow{AD}(2,2,-4)$; $\overrightarrow{AC}(3,1,2)$

- ដោយ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 2(2)+0(2)+1(-4) = -4 = 0 \quad \Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ ត្រង់ A

  ដូចនេះ ABD ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A

- ដោយ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = 3(2)+1(2)+2(-4) = 8-8 = 0 \quad \Rightarrow \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AD}$ ត្រង់ A

  ដូចនេះ ACD ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A

2. បង្ហាញថាសមីការ $9y^2 - 16x^2 = 144$ ជាសមីការអ៊ីពែបូល

$$9y^2 - 16x^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{9y^2}{144} - \frac{16x^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

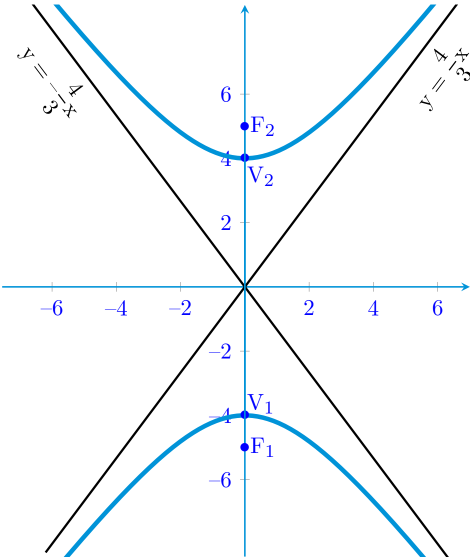
$$\Leftrightarrow \frac{(y-0)^2}{4^2} - \frac{(x-0)^2}{3^2} = 1$$ ជាសមីការអ៊ីពែប៉ូលមានផ្ចិត $(0,0)$

រកកូអរដោនេរបស់កំពូលទាំងពីរ កំណុំទាំងពីរនៃអ៊ីពែបូល និងរកសមីការអាស៊ីមតូតរបស់អ៊ីពែបូល

ដោយ អ៊ីពែបូលមានសមីការ $\frac{(y-0)^2}{4^2} - \frac{(x-0)^2}{3^2} = 1$ គេបាន

- អ័ក្សទទឹងជាអ័ក្សឈរ
- $h = 0;\ k = 0;\quad a = 4;\ b = 3;\quad c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow c = \sqrt{25} = 5$
- កំពូលគឺ $V_1(h, k-a);\ V(h, k+a) \quad \Rightarrow \boxed{V_1(0,-4);\ V_2(0,4)}$
- កំណុំគឺ $F_1(h, k-c);\ F_2(h, k+c) \quad \Rightarrow \boxed{F_1(0,-5);\ F_2(0,5)}$
- អាស៊ីមតូតគឺ $y = k - \frac{a}{b}(x-h)$ និង $y = k + \frac{a}{b}(x-h)$ $\boxed{y = -\frac{4}{3}x \text{ និង } y = \frac{4}{3}x}$

សង់អ៊ីពែបូលនេះ



VI. ១. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

$$y=f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$$

$$f'(x)=\left(\frac{x+\ln x}{x}\right)'=\frac{(x+\ln x)'\,x-x'\,(x+\ln x)}{x^2}=\frac{x+1-x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}}$

បង្ហាញថា f មានតម្លៃអតិបរមាមួយ ហើយគណនាតម្លៃអតិបរមានោះ

$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ ដោយ $x^2>0 \Rightarrow f'(x)$ មានសញ្ញាដូចភាគយក $1-\ln x$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \quad 1-\ln x=0 \quad \Rightarrow -\ln x=-1 \quad \Rightarrow \ln x=1 \Rightarrow x=e$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \quad 1-\ln x>0 \quad \Rightarrow -\ln x>-1 \quad \Rightarrow \ln x<1 \Rightarrow x<e$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow \quad 1-\ln x<0 \quad \Rightarrow -\ln x<-1 \quad \Rightarrow \ln x>1 \Rightarrow x>e$

លឹម សីហា

យើងបាន តារាងសញ្ញា $f'(x)$ គឺ

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

- ត្រង់ $x = e$; $f'(x) = 0$ ហើយប្តូរសញ្ញាពី$+$ ទៅ $-$ យើងបាន f មានតម្លៃអតិបរមាធៀបមួយ គឺ

$$\boxed{f(e) = \frac{e + \ln e}{e} = 1 + \frac{1}{e}}$$

២. គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

$$y = f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{x + \ln x}{x}\right) = -\infty$ ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x + \ln x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 1$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1}$

លីម សីហា

កំណត់សមីការនៃអាស៊ីមតូតឈរ និងដេកនៃក្រាបC

- ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់}x = 0 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$

- ដោយ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$ ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់}y = 1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេក}}$

តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$1 + \frac{1}{e}$	$\searrow$	1

VII. ១. រក $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ដោយ $y = f(x) = 1 - \dfrac{2\ln x}{x}$ គេបាន

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{2\ln x}{x}\right) = 1 - 0 = 1 \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{2\ln x}{x}\right) = 1 - (-\infty) + \infty \quad \boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty}$$

រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C

- ដោយ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ ដូចនេះ $\boxed{x = 0 \text{ ជាអាស៊ីមតូតឈរ}}$
- ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ ដូចនេះ $\boxed{y = 1 \text{ ជាអាស៊ីមតូតដេក}}$

២. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

ដោយ $y = f(x) = 1 - \dfrac{2\ln x}{x}$ គេបាន

$$f'(x) = \left(1 - \frac{2\ln x}{x}\right)^2 = \frac{-2(\ln x)'x - x'(-2\ln x)}{x^2} = \frac{-2 + 2\ln x}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-2 + 2\ln x}{x^2}}$$

សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

សញ្ញាf′(x)

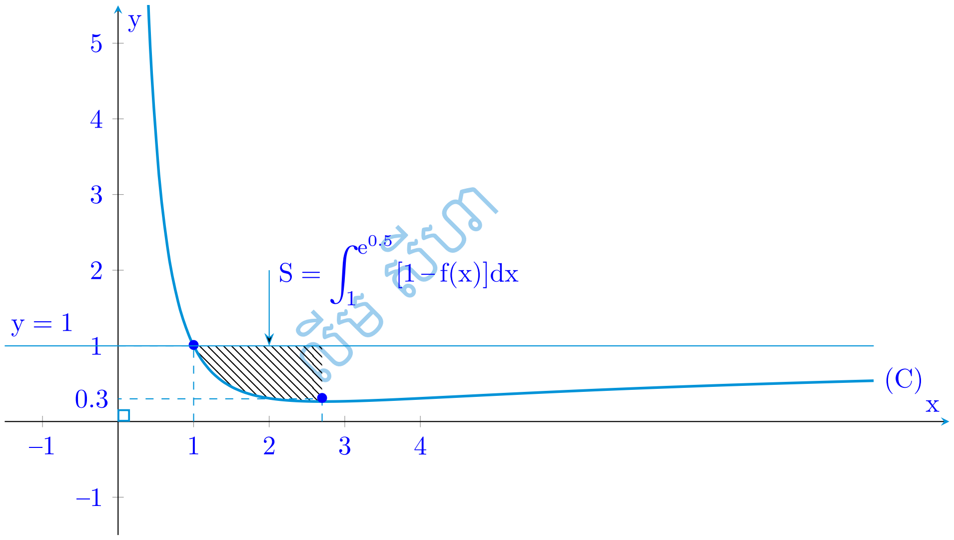
$f'(x) = \dfrac{-2 + 2\ln x}{x^2}$ មានសញ្ញាតាមភាគយក ព្រោះ $x^2 > 0; \quad \forall x \in (0, +\infty)$

- $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow -2 + 2\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e = 2.7$
- $f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow -2 + 2\ln x > 0 \Rightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > 2.7$
- $f'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow -2 + 2\ln x < 0 \Rightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < 2.7$
- $f(2.7) = f(e) = 1 - \dfrac{2\ln e}{e} = 1 - \dfrac{2}{e} = 1 - 0.7 = 0.3$

គេបាន តារាងអថេរភាពនៃf

x	0		2.7		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	0.3	↗ 1	

៣. សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ



៤. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប C អាស៊ីមតូតដេក បន្ទាត់ឈរ $x = 1$ និង $x = e$

ពេល $x \in [2, e]$ ក្រាប C ស្ថិតក្រោម បន្ទាត់ $y = 1$ គេបាន

$$S = \int_1^e [1 - f(x)]\, dx = \int_1^e \frac{2\ln x}{x} dx = \int_1^e 2\,(\ln x)' \ln x dx$$

$$= \left[2\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e = \ln^2 e - \ln^2 1 = 1^2 - 0^2 = 1$$

ដូចនេះ $\boxed{S = 1 \text{ ឯកតាផ្ទៃ}}$