រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ
Tel 017 250 290

វិញ្ញាសាគណិតវិទ្យា

សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិ

រួមមាន ៖

- សង្ខេបមេរៀនសំខាន់។
- វិញ្ញាសាជ្រើសរើស និង អត្រាកំណែ
- វិញ្ញាសាអនុវត្តន៍

Vol.01

រក្សាសិទ្ធ

វិញ្ញាសាទី០១

រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន**

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិ និង អាហារូបករណ៍

I- គេមានចំនួនកុំផ្លិច $z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ និង $z_2=1-i$ ។

១-សរសេរ $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

២-សរសេរ $z_1\,;\,z_2$ និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

៣-ទាញបញ្ជាក់ថា $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

II- ក្នុងថង់មួយមានប៊ូលពណ៌ស 4 គ្រាប់ និងប៊ូលពណ៌ខៀវ 5 គ្រាប់ ។ គេចាប់យកប៊ូល 2 គ្រាប់ដោយចៃដន្យចេញពីក្នុងថង់នោះដោយចាប់យកម្តងមួយគ្រាប់ ។ តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានប៊ូលសទាំងពីរ និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់បានប៊ូលខៀវទាំងពីរ ។ គណនាប្រូបាប P(A) និង P(B) ក្នុងករណីនីមួយៗខាងក្រោម ៖

១)ចាប់យកហើយមិនដាក់ចូលវិញ ។

២)ចាប់យកហើយដាក់ចូលវិញ ។

III- ១-កំណត់ចំនួនពិត m,n និង p ដើម្បីឲ្យ

$$\frac{x^2+11x+12}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{m}{x+1}+\frac{n}{x+2}+\frac{p}{(x+2)^2}$$ ដែល $x\neq-1\,;\,x\neq-2$ ។

២-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1\frac{x^2+11x+12}{(x+1)(x+2)^2}.dx$ ។

IV- គេអោយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E_1): y''-5y'+6y=6x^2-10x+2$ ។

១-ដោះស្រាយសមីការ $(E_2): y''-5y'+6y=0$ ។

២-រកពហុធា $p(x)=ax^2+bx+c$ ដែលជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E_1) ។
ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E_1) ។

V- នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេអោយចំណុច $A(3,0,0);B(-1,0,2);C(1,2,3)$ និង $D(-4,1,0)$ ។

១-គណនាផលគុណវ៉ិចទរ័ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំណុច A;B;C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

២-គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

៣-សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ។

៤-សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) កាត់តាម D ហើយកែងនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ចំណុច M រួចគណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M ។

៥-គណនាមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត ABCD រួចទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) ។

VI- អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ដោយ $y=f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$
ហើយមានខ្សែកោង (C) ។

១-គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃ (C) ។

២-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

៣-កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (c) ជាមួយអាស៊ីមតូតដេករបស់វា ។ចូរសង់ (c) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

៤-គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង (c) ជាមួយអក្ស័អាប់ស៊ីស និងបន្ទាត់ឈរ $x=1$; $x=\sqrt{e}$ ។ ($e=2.72$; $\sqrt{e}=1.65$)

អត្រាកំណែគំរូ

I- ១-សរសេរ $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

គេបាន $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}=\frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{2(1-i)(1+i)}=\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{6}-i\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4}$

ដូចនេះ $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

២-សរសេរ z_1 ; z_2 និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គេមាន $z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}-i.\frac{1}{2})=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6})$

ដូចនេះ $z_1=\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})\right]$ ។

និង $z_2=1-i=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$

ដូចនេះ $z_2=\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4})+\sin(-\frac{\pi}{4})\right]$ ។

ហើយ $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i.\sin(\theta_1-\theta_2)]$ ដោយ $\begin{cases} r_1=\sqrt{2};r_2=\sqrt{2} \\ \theta_1=-\frac{\pi}{6};\theta_2=-\frac{\pi}{4} \end{cases}$

គេបាន $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[\cos(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})\right]=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$

ដូចនេះ $\frac{z_1}{z_2}=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$ ។

៣-ទាញបញ្ជាក់ថា $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

តាមសម្រាយខាងលើ $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}(1)$ និង $\frac{z_1}{z_2}=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}(2)$

ដោយប្រៀបធៀប (1) និង (2) គេបាន $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

II- ១)គណនាប្រូបាប $P(A)$ និង $P(B)$ក្នុងករណីចាប់យកហើយមិនដាក់ចូលវិញ ៖

តាងព្រឹត្តិការណ៍ A_1 ចាប់លើកទី១បានប៊ូលស , A_2 ចាប់លើកទី២បានប៊ូលស

B_1 ចាប់លើកទី១បានប៊ូលខៀវ , B_2 ចាប់លើកទី២បានប៊ូលខៀវ

គេបាន $P(A)=P(A_1\cap A_2)=P(A_1).P(A_2)=\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{6}$

ហើយ $P(B)=P(B_1\cap B_2)=P(B_1).P(B_2)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{5}{18}$

ដូចនេះ $P(A)=\frac{1}{6}\ ;\ P(B)=\frac{5}{18}$ ។

២)គណនាប្រូបាប $P(A)$ និង $P(B)$ក្នុងករណីចាប់យកហើយដាក់ចូលវិញ ៖

តាងព្រឹត្តិការណ៍ A_1 ចាប់លើកទី១បានប៊ូលស , A_2 ចាប់លើកទី២បានប៊ូលស

B_1 ចាប់លើកទី១បានប៊ូលខៀវ , B_2 ចាប់លើកទី២បានប៊ូលខៀវ

គេបាន $P(A)=P(A_1\cap A_2)=P(A_1).P(A_2/A_1)=\frac{4}{9}.\frac{4}{9}=\frac{16}{81}$

ហើយ $P(B)=P(B_1\cap B_2)=P(B_1).P(B_2/B_1)=\frac{5}{9}.\frac{5}{9}=\frac{25}{81}$

ដូចនេះ $P(A)=\frac{16}{81}\ ;\ P(B)=\frac{25}{81}$ ។

III- ១-កំណត់ចំនួនពិត m,n និង p

គេមាន $\frac{x^2+11x+12}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{m}{x+1}+\frac{n}{x+2}+\frac{p}{(x+2)^2}$

$$\frac{x^2+11x+12}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{m(x+2)^2+n(x+1)(x+2)+p(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}$$

$$x^2+11x+12=m(x+2)^2+n(x+1)(x+2)+p(x+1)$$

$$x^2+11x+12=m(x^2+4x+4)+n(x^2+3x+2)+p(x+1)$$

$$x^2+11x+12=(m+n)x^2+(4m+3n+p)x+(4m+2n+p)$$

គេទាញ $\begin{cases} m+n=1 & (1)\\ 4m+3n+p=11 & (2)\\ 4m+2n+p=12 & (3)\end{cases}$

យកសមីការ (2) ដកសមីការ (3) គេបាន $n=-1$ ហើយតាម (1) គេបាន $m=2$

យក $m=2\,,\,n=-1$ ជួសក្នុង (3) គេបាន $8-2+p=12$ ឬ $p=6$ ។

ដូចនេះ $m=2\,,\,n=-1\,,\,p=6$ ។

២-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 \frac{x^2+11x+12}{(x+1)(x+2)^2}.dx$

ចំពោះ $m=2\,,\,n=-1\,,\,p=6$ គេបាន $\frac{x^2+11x+12}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{6}{(x+2)^2}$

ហើយ $I=\int_0^1 \frac{x^2+11x+12}{(x+1)(x+2)^2}.dx=\int_0^1\left[\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{6}{(x+2)^2}\right].dx$

$$I=\left[2\ln|x+1|-\ln|x+2|-\frac{6}{x+2}\right]_0^1=\left(2\ln 2-\ln 3-2\right)-(0-\ln 2-3)$$

$$=2\ln 2-\ln 3-2+\ln 2+3=1+3\ln 2-\ln 3=1+\ln\frac{8}{3}$$ ។

ដូចនេះ $I=\int_0^1 \frac{x^2+11x+12}{(x+1)(x+2)^2}.dx=1+\ln\frac{8}{3}$ ។

IV- ១-ដោះស្រាយសមីការ $(E_2): y''-5y'+6y=0$

សមីការសម្គាល់ $r^2-5r+6=0$, $\Delta=25-4(1)(6)=1>0$

មានឫស $r_1=\frac{5-1}{2}=2\,;\,r_2=\frac{5+1}{2}=3$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E_2) គឺ $y=Ae^{2x}+Be^{3x}$ $,A;B\in\Re$ ។

២-រកពហុធា $p(x)$ ៖

$(E_1): y''-5y'+6y=6x^2-10x+2$

$p(x)=ax^2+bx+c$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E_1) លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់នឹង

សមីការ (E_1) ពោលគឺ $p''(x)-5p'(x)+6p(x)=6x^2-10x+2$ (1)

ដោយ $p(x)=ax^2+bx+c$ នោះ $p'(x)=2ax+b$ និង $p''(x)=2a$

តាម(1)គេបាន $2a-5(2ax+b)+6(ax^2+bx+c)=6x^2-10x+2$

$$6ax^2+(6b-10a)x+(2a-5b+6c)=6x^2-10x+2$$

គេទាញ $\begin{cases} 6a = 6 \\ 6b - 10a = -10 \\ 2a - 5b + 6c = 2 \end{cases}$ ឬ $a = 1, b = 0, c = 0$

ដូចនេះ $p(x) = x^2$ ។

ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E_1) ៖

$y = y_c + y_p$ ដោយ $y_c = Ae^{2x} + Be^{3x}$ និង $y_p = p(x) = x^2$

ដូចនេះ $y = Ae^{2x} + Be^{3x} + x^2$; $A, B \in \Re$ ។

V- ១-គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ៖

គេមាន $A(3,0,0); B(-1,0,2); C(1,2,3)$

គេបាន $\overrightarrow{AB} = (-4, 0, 2)$; $\overrightarrow{AC} = (-2, 2, 3)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -4\,\vec{i} + 8\,\vec{j} - 8\,\vec{k}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-4, 8, -8)$ ។

ទាញថាបីចំណុច $A;B;C$ មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ៖

ដោយ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-4, 8, -8) \neq \vec{O}$ នោះ $\overrightarrow{AB}$ & $\overrightarrow{AC}$ មិនកូលីនេអ៊ែគ្នា ។

ដូចនេះបីចំណុច $A;B;C$ មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

២-គណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ៖

គេមាន $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$ ដោយ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-4, 8, -8)$

គេបាន $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 64 + 64} = 6$ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា)

៣-សរសេរសមីការប្លង់ (ABC) ៖

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) គឺ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-4,8,-8)$

ដោយប្លង់ (ABC) កាត់តាមចំណុច $A(3,0,0)$ នោះគេបាន ៖

$$(ABC): a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$-4(x-3) + 8(y-0) - 8(z-0) = 0$$

$$-4x + 12 + 8y - 8z = 0$$

$$-4x + 8y - 8z + 12 = 0$$

ដូចនេះ $(ABC): -x + 2y - 2z + 3 = 0$ ។

៤-សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) កាត់តាម D ហើយកែងនឹងប្លង់ (ABC) ៖

តាមរូបមន្ត $(L): \begin{cases} x = x_D + at \\ y = y_D + bt \\ z = z_D + ct \ ; t \in \Re \end{cases}$

ដោយ $(L) \perp (ABC)$ នោះ $\vec{n} = (-1, 2, -2)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ ហើយ

ចំណុច $D(-4,1,0)$ ដូចនេះ $(L): \begin{cases} x = -4 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = \quad -2t \ ; t \in \Re \end{cases}$ ។

គណនាកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វ M ៖

គេមាន $(L): \begin{cases} x = -4 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = \quad -2t \ ; t \in \Re \end{cases}$ និង $(ABC): -x + 2y - 2z + 3 = 0$

យកសមីការ (L) ជួសក្នុងសមីការ (ABC) គេបាន

$$-(-4 - t) + 2(1 + 2t) - 2(-2t) + 3 = 0$$

$$4 + t + 2 + 4t + 4t + 3 = 0$$

$$9t + 9 = 0$$

គេទាញ $t = -1$ យកជួសក្នុងសមីការ (L) គេបាន $\begin{cases} x = -4 + 1 = -3 \\ y = 1 - 2 = -1 \\ z = -2(-1) = 2 \end{cases}$

ដូចនេះ $M(-3, -1, 2)$ ។

៥-គណនាមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត ABCD រួចទាញរកចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) ៖

តាមរូបមន្ត $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}\right|$ ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (-4,8,-8)$

ហើយ $A(3,0,0); D(-4,1,0)$ នោះ $\overrightarrow{AD} = (-7,1,0)$

គេបាន $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|(-4)(-7)+(8)(1)+(-8)(0)\right| = \frac{36}{3} = 12$ ។

ដូចនេះ $V_{ABCD} = 12$ (ឯកតាមាឌ) ។

តាង d ជាចម្ងាយពីចំណុច D ទៅប្លង់ (ABC) នោះ d ជាកម្ពស់គូសចេញពីកំពូល D ទៅប្លង់បាត (ABC) ។ គេបាន $V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC}\times d$

គេទាញបាន $d = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{3\times 12}{6} = 6$ (ឯកតាប្រវែង) ។

VI-1)គណនាលីមីត

គេមាន $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

គេបាន $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x^2}) = 0$ ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} = 0$

ហើយ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right) = -\infty$ ព្រោះ $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^2} = -\infty$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ ។

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប ៖

ដោយ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

ដូចនេះបន្ទាត់ $y = 0$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតដេក និង $x = 0$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

2)គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ៖

គេមាន $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ គ្រប់ $x > 0$

គេបាន $f'(x) = (\frac{\ln x}{x^2})'$

$$= \frac{(\ln x)' x^2 - (x^2)' \ln x}{x^4}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}.x^2 - 2x.\ln x}{x^4} = \frac{x(1-2\ln x)}{x^3} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

ដូចនេះ $f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$ ។

សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ៖

គេមាន $f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$ ដោយ $x^3 > 0\ \forall x > 0$ នោះ f' មានសញ្ញាដូចភាគយក

$1-2\ln x$ ។

-បើ $1-2\ln x = 0$ នោះ $\ln x = \frac{1}{2}$ គេទាញ $x = e^{\frac{1}{2}}$ ឬ $x = \sqrt{e}$ ។

-បើ $1-2\ln x > 0$ នោះ $0 < x < \sqrt{e}$

-បើ$1-2\ln x < 0$ នោះ $x > \sqrt{e}$

ចំពោះ $x = \sqrt{e}$ គេបាន $f(\sqrt{e}) = 2 + \frac{\ln\sqrt{e}}{e} = 2 + \frac{1}{2e} = 2.184$

តារាងអថេរភាព ៖

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2.184	↘	2

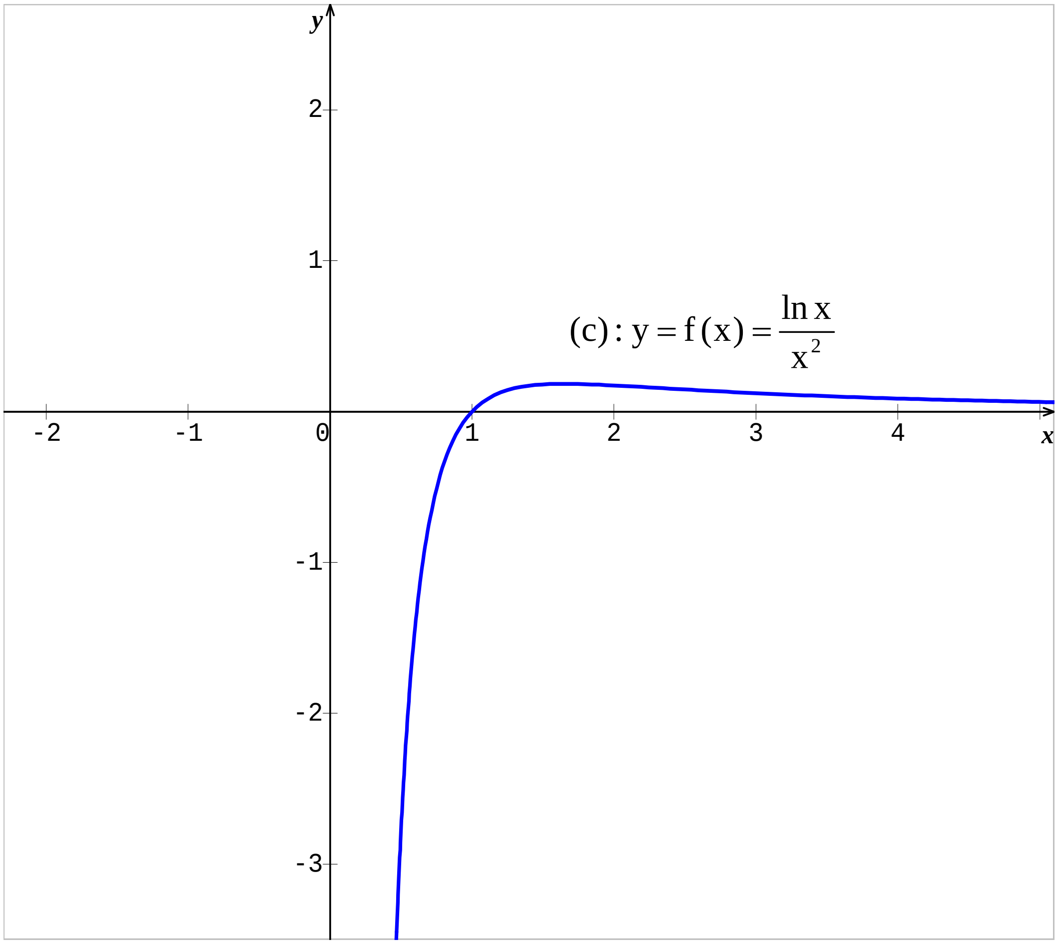
3)រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប និងអាស៊ីមតូតដេក និងសង់ក្រាប $(c): y = \frac{\ln x}{x^2}$

ប្រសព្វរវាងក្រាប និងអាស៊ីមតូតដេកជាចម្លើយនៃប្រពន្ធ័សមីការ $\begin{cases} y = \frac{\ln x}{x^2} \\ y = 0 \end{cases}$

សមីការអាប់ស៊ីស $\frac{\ln x}{x^2} = 0$ ដោយ $x > 0$នោះសមីការសមមូល

$\ln x = 0$ នោះ $x = 1$ ហើយ $y = 2$ ។

ដូចនេះ $A(1, 2)$ ។



គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប (c) និងអក្សរអាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ $[1,\sqrt{e}]$ ៖

$$S=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\ln x}{x^2}.dx=\int_1^{\sqrt{e}}\ln x.\frac{dx}{x^2}$$ តាង $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=\dfrac{dx}{x^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{x}.dx\\ v=-\dfrac{1}{x}\end{cases}$

គេបាន $S=\left[-\dfrac{\ln x}{x}\right]_1^{\sqrt{e}}+\int_1^{\sqrt{e}}\dfrac{dx}{x^2}=\left[-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}\right]_1^{\sqrt{e}}$

$$=\left[-\frac{1}{2\sqrt{e}}-\frac{1}{\sqrt{e}}\right]-[0-1]=-\frac{3}{2\sqrt{e}}+1=\frac{2\sqrt{e}-3}{2\sqrt{e}}$$

ដូចនេះ $S=\dfrac{2\sqrt{e}-3}{2\sqrt{e}}=\dfrac{2(1.65)-3}{2(1.65)}=0.08$ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា) ។

វិញ្ញាសាទី០២

រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន**

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិ និង អាហារូបករណ៍

I-គេឲ្យខ្សែកោង $(C_1): y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3\ln x$ និង $(C_2): y = g(x) = (x+c)e^{x-1}$

កំណត់លេខមេគុណ a, b, c ដោយដឹងថាខ្សែកោងពីរនេះប៉ះគ្នាត្រង់ចំណុច $M(1,0)$ ។

II-កំណត់ពីរចំនួនពិត m និង n ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $y = \dfrac{mx^2 + nx}{x^2 + 2}$ មានបរមាតែមួយគត់

និងខ្សែកោងតាងអនុគមន៍នេះមានបន្ទាត់ $y = 3$ ជាអាស៊ីមតូតដេក ។

III-ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 2y' + 5y = 0$ បើគេដឹងថា $y(0) = 1$

និង $y'(0) = 5$ ។

IV- គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 2}{(x+1)(x+2)^2}$

ក)កំណត់បីចំនួនពិត A, B, C ដើម្បីបាន $f(x) = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{(x+2)^2}$ ។

ខ)គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ $I = \displaystyle\int_0^2 f(x).dx$ ដោយសរសេរជារាង $a + \ln b$ ។

V- ក្នុងប្រអប់មួយមានប៊ូល10គ្រាប់ដែលក្នុងនោះមានប៊ូលពណ៌ស4គ្រាប់ និង ប៊ូលខ្មៅ6គ្រាប់ ។ គេចាប់យកប៊ូលពីរព្រមគ្នា ។

ចូរគណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍នីមួយៗខាងក្រោម ៖

ក) A : ចាប់បានប៊ូលពណ៌សមួយ និង ពណ៌ខ្មៅមួយ ។

ខ) B : ចាប់បានប៊ូលមានពណ៌ដូចគ្នា ។

VI-១) គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z = 1 + \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ ។

ចូរសរសេរ Z និង Z^{2014} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

២)កំណត់កូអរដោនេកំពូល និង កំណុំនៃប៉ារ៉ាបូល $(P): x^2-4x-12y+16=0$ ។

VII-ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យបួនចំណុច

$S(1,1,1)$; $A(\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3})$; $B(\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3})$ និង $C(\frac{5}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3})$ ។

ក)ចូរបង្ហាញថាត្រីធាតុ $(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC})$ ជាគោលអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន

ខ)គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ (ABC) ។

គ)គណនាមាឌពីរ៉ាមីត SABC រួចទាញរកចម្ងាយពីកំពូល S ទៅប្លង់បាត (ABC) ។

ឃ)កំណត់សមីការប្លង់បាត (ABC) ។

VIII-គេមានអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2+2\ln x}{x^2}$ មានក្រាប (C) ។

ក)រកលីមីត $\lim_{x\to0^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ រួចទាញបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង សមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃខ្សែកោង (C) ។

ខ)គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា ។ កំណត់តម្លៃអតិបរមាធៀបនៃ f ។

គ)កំណត់សមីការនៃបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x=1$

ឃ)គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។ សង់ក្រាប (C) ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់។

ង)គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយ (C) និងអក្ស័អាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ $x=1$, $x=\sqrt{e}$ ។

អត្រាកំណែគំរូ

I- កំណត់លេខមេគុណ a,b,c

គេឲ្យខ្សែកោង $(C_1): y=f(x)=x^3+ax^2+bx-3\ln x$ និង $(C_2): y=g(x)=(x+c)e^{x-1}$

ដើម្បីឲ្យខ្សែកោងពីរនេះប៉ះគ្នាត្រង់ចំណុច $M(1,0)$ លុះត្រាតែ $\begin{cases} f'(1)=g'(1) \\ f(1)=0 \\ g(1)=0 \end{cases}$

មាន $f'(x)=3x^2+2ax+b-\dfrac{3}{x}$ នោះ $f'(1)=2a+b$

ហើយ $g'(x)=e^{x-1}+(x+c)e^{x-1}$ នោះ $g'(1)=2+c$

ដោយ $f'(1)=g'(1)$ គេទាញ $2a+b=c+2$ (1)

មាន $f(1)=1+a+b-\ln 1=0$ នោះ $a+b=-1$ (2)

ហើយ $g(1)=1+c=0$ គេទាញ $c=-1$ យកជួសក្នុង (1) គេបាន $2a+b=1$ (3)

ដកសមីការ (3) និង (1) អង្គនិងអង្គគេបាន $a=2$ ហើយតាម(2)គេបាន $b=-3$ ។

ដូចនេះ $a=2\,,\,b=-3\,,\,c=-1$ ។

II- កំណត់ពីរចំនួនពិត m និង n

គេមាន $y=\dfrac{mx^2+nx}{x^2+2}$

គេបាន $y'=\dfrac{(2mx+n)(x^2+1)-2x(mx^2+nx)}{(x^2+1)^2}$

$$=\frac{2mx^3+2mx+nx^2+n-2mx^3-2nx^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-nx^2+2mx+n}{(x^2+1)^2}$$

បើ $y'=0$ សមមូល $-nx^2+2mx+n=0$ (1)

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ មានបរមាតែមួយគត់លុះត្រាតែសមីការ(1)មានឫសតែមួយគត់ពេលគឺពេលវាក្លាយជាសមីការដឺក្រេទី១ ។ គេត្រូវឲ្យលេខមេគុណមុខតួ x^2 ស្មើសូន្យ គេបាន $n=0$ ។ម្យ៉ាងទៀតដោយខ្សែកោងតាងអនុគមន៍នេះមានបន្ទាត់ $y=3$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនោះគេត្រូវឲ្យ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3$ ។

ដោយ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{mx^2+nx}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{mx^2}{x^2}=m$ នោះគេទាញបាន $m=3$ ។

ដូចនេះ $m=3\,,\,n=0$ ។

III- ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ៖

$(E): y''-2y'+5y=0$ បើគេដឹងថា $y(0)=1$ និង $y'(0)=5$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2-2\lambda+5=0$

$\Delta'-1-5=-4=4i^2$ មានឫស $\lambda_1=1-2i\ ;\ \lambda_1=1+2i$ នោះ $\alpha=1;\beta=2$

គេបាន $y=(A\cos\beta x+B\sin\beta x)e^{\alpha x}=(A\cos 2x+B\sin 2x)e^x$

ចំពោះ $x=0$ នោះ $y(0)=(A.1+B.0)e^0=A=1$ (ព្រោះ $y(0)=1$)

ហើយ $y' = (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)e^x + (A\cos 2x + B\sin 2x)e^x$

ចំពោះ $x = 0$ នោះ $y'(0) = (0 + 2B)e^0 + (A + 0)e^0 = 2B + A = 5$ ដោយ $A = 1$

គេទាញ $B = 2$ ។

ដូចនេះចម្លើយសមីការគឺ $y = (\cos 2x + 2\sin 2x)e^x$ ។

IV- ក)កំណត់បីចំនួនពិត A, B, C ដើម្បីបាន $f(x) = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{(x+2)^2}$

គេបាន $\dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^2 + 3x + 2}{(x+1)(x+2)^2}$

នាំឲ្យ $A(x+2)^2 + B(x+1)(x+2) + C(x+1) = 2x^2 + 3x + 2$

បើ $x = -2$ នោះ $0 + 0 - C = 8 - 6 + 2 = 4$ ឬ $C = -4$ ។

បើ $x = -1$ នោះ $A = 2 - 3 + 2 = 1$ ។

បើ $x = 0$ នោះ $4A + 2B + C = 2$ គេទាញ $B = 1$ ។

ដូចនេះ $A = 1 ; B = 1 ; C = -4$ ។

ខ)គណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ $I = \int_0^2 f(x).dx$ ៖

ចំពោះ $A = 1 ; B = 1 ; C = -4$ នោះ $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{4}{(x+2)^2}$

$$\text{គេបាន } I = \int_0^2 \frac{dx}{x+1} + \int_0^2 \frac{dx}{x+2} - 4\int_0^2 \frac{dx}{(x+2)^2}$$

$$= \int_0^2 \frac{(x+1)'}{(x+1)}.dx + \int_0^2 \frac{(x+2)'}{(x+2)}.dx - 4\int_0^2 \frac{(x+2)'}{(x+2)^2}.dx$$

$$= \left[\ln|x+1|\right]_0^2 + \left[\ln|x+2|\right]_0^2 + 4\left[\frac{1}{x+2}\right]_0^2$$

$$= \ln 3 - \ln 1 + \ln 4 - \ln 2 + 4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = -1 + \ln 6$$

ដូចនេះ $I = -1 + \ln 6$ រាង $a + \ln b$ ដែល $a = -1 , b = 6$ ។

V- ក) $A:$ ចាប់បានប៊ូលពណ៌សមួយ និង ពណ៌ខ្មៅមួយ ៖

តាមរូបមន្តគោលនៃប្រូបាប $P(A)=\frac{\text{ចំនួនករណីស្រប}}{\text{ចំនួនករណីអាច}}=\frac{n(A)}{n(S)}$

ចំនួនករណីអាច $n(S)=C(10,2)=\frac{10!}{2!.8!}=\frac{8!.9\times 10}{2\times 8!}=45$

ចំនួនករណីស្រប $n(A)=C(4,1).C(6,1)=4\times 6=24$

ដូចនេះ $P(A)=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}=0.53$ ។

ខ) $B:$ ចាប់បានប៊ូលមានពណ៌ដូចគ្នា ៖

ព្រឹត្តិការណ៍ A និង B ជាព្រឹត្តិការណ៍ផ្ទុយគ្នា ។

គេបាន $P(B)=1-P(A)=1-\frac{8}{15}=\frac{7}{15}=0.47$ ។

VI-១) សរសេរ Z និង Z^{2014} ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

គេមានចំនួនកុំផ្លិច $Z=1+\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

តាមរូបមន្ត $1+\cos 2a=2\cos^2 a$ និង $\sin 2a=2\sin a\cos a$ គេបាន ៖

$Z=2\cos^2\frac{\pi}{3}+2i\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}=2\cos\frac{\pi}{3}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ ដោយ $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $Z=\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}$ ។

តាមរូបមន្តដឺម័រគេបាន $Z^{2014}=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{2014}$

$=\cos\frac{2014\pi}{3}+i\sin\frac{2014\pi}{3}$

ដោយ $\cos\frac{2014\pi}{3}=\cos(670\pi+\frac{4\pi}{3})=\cos\frac{4\pi}{3}$

និង $\sin\frac{2014\pi}{3}=\sin(670\pi+\frac{4\pi}{3})=\sin\frac{4\pi}{3}$

ដូចនេះ $Z^{2014}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$ ។

២)កំណត់កូអរដោនេកំពូល និង កំណុំនៃប៉ារ៉ាបូល (P) :

សមីការ $(P): x^2-4x-12y+16=0$ អាចបម្លែងជា ៖

$(P): (x^2-4x+4)=12y-12$

$(P): (x-2)^2=12(y-1)$

មានរាងស្តង់ដា $(x-h)^2=4p(y-k)$ ដែល $h=2$, $p=3$, $k=1$ ។

ដូចនេះកូអរដោនេកំពូល $S(h,k)=S(2,1)$ និងកំណុំ $F(h,k+p)=F(2,4)$ ។

VII-ក)បង្ហាញថាត្រីធាតុ $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC})$ ជាគោលអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន ៖

គេមាន $S(1,1,1)$; $A(\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3})$; $B(\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3})$ និង $C(\frac{5}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3})$

នោះ $\overrightarrow{SA}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$; $\overrightarrow{SB}=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$; $\overrightarrow{SC}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$ ។

គេមាន $|\overrightarrow{SA}|=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=1$; $\overrightarrow{SB}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}=1$

និង $|\overrightarrow{SC}|=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}=1$ ។

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}=(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})+(\frac{2}{3})(-\frac{2}{3})+(\frac{2}{3})(\frac{1}{3})=\frac{2}{9}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{SA}\perp\overrightarrow{SB}$

$\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}=(\frac{2}{3})(\frac{2}{3})+(-\frac{2}{3})(\frac{1}{3})+(\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})=\frac{4}{9}-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{SB}\perp\overrightarrow{SC}$

និង $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}=(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})+(\frac{2}{3})(\frac{1}{3})+(\frac{2}{3})(-\frac{2}{3})=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}-\frac{4}{9}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{SA}\perp\overrightarrow{SC}$

នោះ $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ ជាវ៉ិចទ័រឯកតា និងអរតូកូណាល់គ្នាពីរៗ ។

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{SA}\times\overrightarrow{SB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=(\frac{2}{9}+\frac{4}{9})\vec{i}-(\frac{1}{9}-\frac{4}{9})\vec{j}+(-\frac{2}{9}-\frac{4}{9})\vec{k}$

$$=\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k}=\overrightarrow{SC}$$ ។

ដូចនេះ($\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$) ជាគោលអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន ។

ខ)គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចគណនាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ (ABC) ៖

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(\frac{1}{3},-\frac{4}{3},-\frac{1}{3})$; $\overrightarrow{AC}=(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{4}{3})$

គេបាន $$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3}\end{vmatrix}=(\frac{16}{9}-\frac{1}{9})\vec{i}-(-\frac{4}{9}+\frac{1}{9})\vec{j}+(-\frac{1}{9}+\frac{4}{9})\vec{k}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ ។

ហើយផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC គឺ

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{25+1+1}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ដូចនេះ $S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

គ)គណនាមាឌពីរ៉ាមីត SABC រួចទាញរកចម្ងាយពីកំពូល S ទៅប្លង់បាត(ABC) ៖

តាមរូបមន្ត $V_{SABC}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AS}\right|$ ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

និង $\overrightarrow{AS}=(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$ នោះ $V_{SABC}=\frac{1}{6}\left|-\frac{5}{9}-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}\right|=\frac{1}{6}$

ដូចនេះ $V_{SABC}=\frac{1}{6}$ (ឯកតាមាឌ) ។

តាង d ជាចម្ងាយពីកំពូល S ទៅប្លង់បាត(ABC)នោះ d ជាកម្ពស់របស់ពីរ៉ាមីត

SABC តាមទំនាក់ទំនង $V_{SABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times d$

គេទាញ $d=\frac{3\times V_{SABC}}{S_{ABC}}=\frac{3\times\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ។

ដូចនេះ $d=\frac{\sqrt{3}}{3}$ (ឯកតាប្រវែង) ។

ឃ)កំណត់សមីការប្លង់បាត (ABC) ៖

វ៉ិចទ័រណ៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) គឺ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

ដោយប្លង់កាត់តាមចំណុច $A(\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3})$ នោះសមីការប្លង់អាចសរសេរ ៖

$(ABC): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$\frac{5}{3}(x-\frac{4}{3})+\frac{1}{3}(y-\frac{5}{3})+\frac{1}{3}(z-\frac{5}{3})=0$

$5x-\frac{20}{3}+y-\frac{5}{3}+z-\frac{5}{3}=0$

$5x+y+z-10=0$

ដូចនេះ $(ABC): 5x+y+z-10=0$ ។

VIII-ក)រកលីមីត $\lim_{x\to0^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ៖

គេមាន $f(x)=\frac{x^2+2\ln x}{x^2}$

គេបាន $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+2\ln x}{x^2}=\lim_{x\to0^+}(1+\frac{2\ln x}{x^2})=-\infty$

ព្រោះ $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{2\ln x}{x^2})=1$

ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$ ។

ដូចនេះ $\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ ។

បញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃខ្សែកោង (C) ៖

ដោយ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ និង $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$ នោះ $x = 0$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរ

និងបន្ទាត់ $y = 1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃខ្សែកោង (C) ។

ខ)គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា ៖

គេមាន $f(x) = \dfrac{x^2 + 2\ln x}{x^2} = 1 + 2\dfrac{\ln x}{x^2}$ កំណត់គ្រប់ $x \in D_f = (0, +\infty)$ ។

គេបាន $f'(x) = 2\dfrac{(\ln x)'x^2 - (x^2)'\ln x}{(x^2)^2} = \dfrac{2(1-2\ln x)}{x^3}$

ចំពោះ $x \in D_f = (0, +\infty)$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូចភាគយក $1 - 2\ln x$ ។

-បើ $1 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{e}$ នោះ $f'(x) > 0$ ។

-បើ $1 - 2\ln x = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$ នោះ $f'(x) = 0$ ។

-បើ $1 - 2\ln x < 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{e}$ នោះ $f'(x) < 0$ ។

កំណត់តម្លៃអតិបរមាធៀបនៃ f ៖

ដោយត្រង់ $x = \sqrt{e}$ គេមាន $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី (+) ទៅ (–) នោះអនុគមន៍ f

មានតម្លៃអតិបរមាធៀបមួយត្រង់ចំណុច $x = \sqrt{e}$ គឺ $f(\sqrt{e}) = 1 + 2\dfrac{\ln\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} = 1.36$

ដូចនេះតម្លៃអតិបរមាធៀបនៃ f គឺ $f(\sqrt{e}) = 1.36$ ។

គ)កំណត់សមីការនៃបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x = 1$

ចំពោះ $x = 1$ គេបាន $y = f(1) = 1 + 2\dfrac{\ln 1}{1^2} = 1$

នោះ $M_0(1,1)$ ជាចំណុចប៉ះ ។

តាមរូបមន្តសមីការបន្ទាត់ប៉ះ $(T): y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

ដោយ $f'(x) = \dfrac{2(1-2\ln x)}{x^3}$ នោះ $f'(1) = \dfrac{2(1-2\ln 1)}{1^3} = 2$

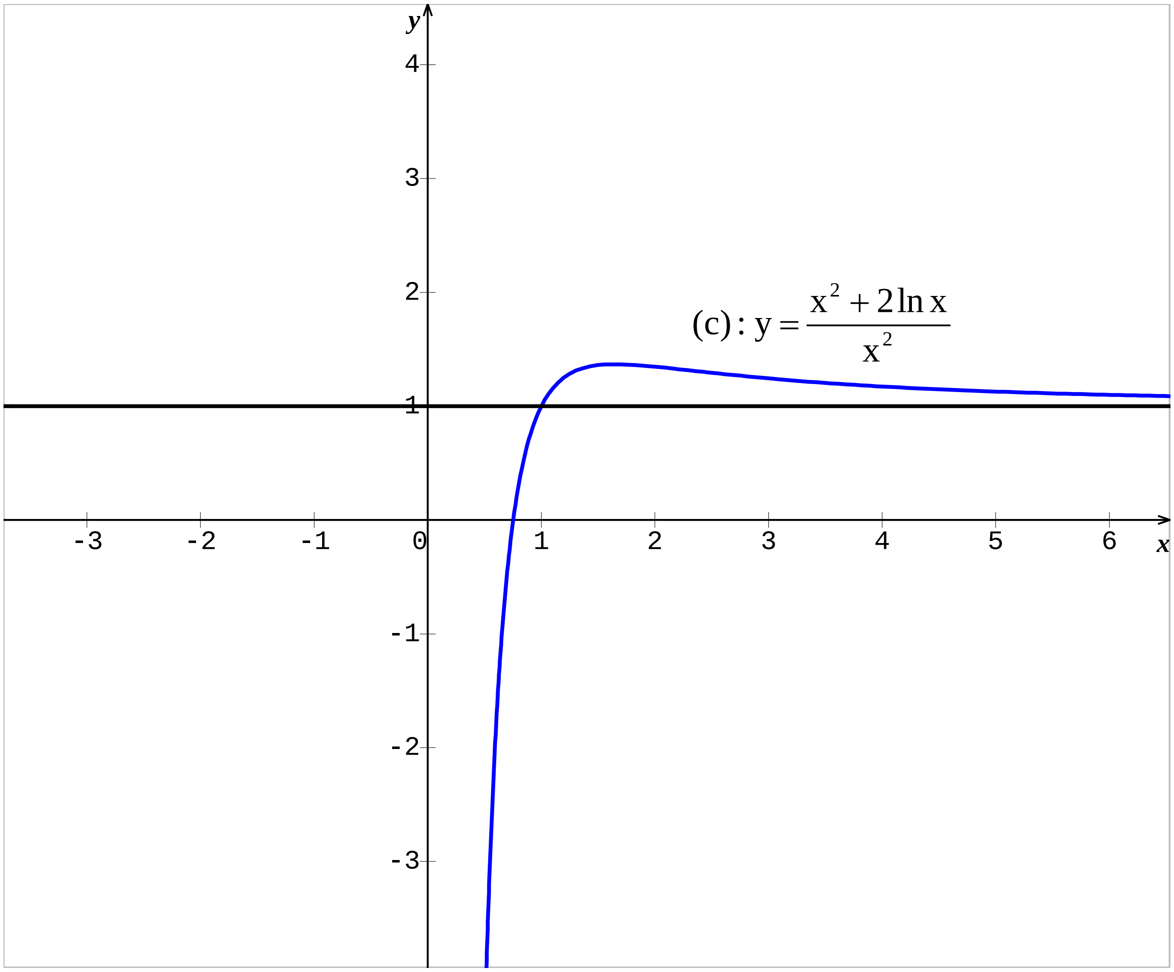
គេបាន $(T): y - 1 = 2(x-1)$ ឬ $y = 2x - 1$ ។

ដូចនេះ $(T): y = 2x - 1$ ។

ឃ)គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ៖

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1.36	↘	1

សង់ក្រាប $(C): y = \dfrac{x^2 + 2\ln x}{x^2} = 1 + 2\dfrac{\ln x}{x^2}$ ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់៖



ង)គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយ (C) និងអក្សរអាប់ស៊ីសក្នុងចន្លោះ $x=1\,,\,x=\sqrt{e}$ ៖

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡាដែលត្រូវរក

គេបាន $S=\int_1^{\sqrt{e}} f(x).dx=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{x^2+2\ln x}{x^2}.dx=\int_1^{\sqrt{e}} dx+2\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\ln x}{x^2}dx$

ដោយ $A=\int_1^{\sqrt{e}} dx=[x]_1^{\sqrt{e}}=\sqrt{e}-1$

ហើយ $B=2\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\ln x}{x^2}dx$ តាង $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=\frac{dx}{x^2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{x}.dx \\ v=-\frac{1}{x}\end{cases}$

គេបាន $B=2\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^{\sqrt{e}}+2\int_1^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x^2}=2\left[-\frac{1}{2\sqrt{e}}\right]+2\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\sqrt{e}}$

$$=-\frac{1}{\sqrt{e}}-\frac{2}{\sqrt{e}}+2=2-\frac{3}{\sqrt{e}}$$

ដូចនេះ $S=A+B=\sqrt{e}+1-\frac{3}{\sqrt{e}}=1+\frac{e-3}{\sqrt{e}}$ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា) ។

វិញ្ញាសាទី០៣

រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន**

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិ និង អាហារូបករណ៍

I-(១៥ពិន្ទុ) នៅក្នុងប្រអប់ A មានសៀវភៅពីជគណិត 3ក្បាល និង ធរណីមាត្រ 4ក្បាល ហើយប្រអប់ B មានសៀវភៅពីជគណិត 5ក្បាល និង ធរណីមាត្រ3ក្បាល ។ គេចាប់យកសៀវភៅមួយពីប្រអប់ A ដាក់ចូល ប្រអប់ B ហើយចាប់យកសៀបភៅមួយពីប្រអប់ B ដាក់ចូលប្រអប់ A វិញ រកប្រូបាប ដែលចំនួនសៀវភៅទាំងពីជគណិត និង ធរណីមាត្រនៅក្នុងប្រអប់ទាំងពីរមិនប្រែប្រួល ។

II-(១៥ពិន្ទុ)អេលីប (E) មួយមានផ្ចិត $A(1,-2)$, កំណុំ $F_1(1-\sqrt{5},-2)$; $F_2(1+\sqrt{5},-2)$ និងអក្ស័ធំប្រវែង 6ឯកតា។

១)រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីប E

២)រកកូអរដោនេកំពូល ហើយសង់អេលីប E ។

III-(១៥ពិន្ទុ)អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x\neq 1$ ដោយ $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+3x-1}{x-1}$

១)កំណត់ចំនួនពិត a,b,c,d ដើម្បីឲ្យ $f(x)=ax^2+bx+c+\dfrac{d}{x-1}$ ។

២)គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{-1}^{0} f(x).dx$

IV-(២០ពិន្ទុ) ១)រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y''+4y=0 \quad (E)$ ។

២)រកអនុគមន៍ g ដែលជាចម្លើយមួយនៃ (E) បើគេដឹងថា $g(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{2}{3}$ និង $g'(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{3}$ ។

V-(២៥ពិន្ទុ)ចំណុច $A(-2,3,0)$ និងវ៉ិចទ័រ $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$

នៅក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ។

១)រកសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ L ដែលកាត់តាម $A(-2,3,0)$ ហើយស្របនឹង $\vec{u}$

២)រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=\overrightarrow{OA}\times\vec{u}$ ។

រកសមីការប្លង់ P ដែលកាត់តាម A និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}$ ។

៣)រកចម្ងាយពីចំណុច $B(1,1,1)$ ទៅប្លង់ P ។

រកសមីការស្វ៊ែ S ដែលមានផ្ចិត B ហើយប៉ះនឹងប្លង់ P ។

VI-(៣៥ពិន្ទុ)គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=e^{x}(-x^{2}+2x-1)$

ហើយមានក្រាប C ។

១)គណនា $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ។

២)គណនាដេរីវេ $f'(x)$ សិក្សាសញ្ញាដេរីវេ រួចសង់តារាងអថេរភាព

នៃអនុគមន៍ f ។

៣)គណនា $f(-2), f(0)$ និង $f(2)$ ។

សង់ក្រាប C ក្នុងតម្រុយ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

៤)គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយក្រាប C , អក្ស័អាប់ស៊ីស

និងអក្ស័អរដោនេ ។

អត្រាកំណែគំរូ

I- រកប្រូបាបដែលចំនួនសៀវភៅទាំងពីជគណិត និង ធរណីមាត្រនៅក្នុងប្រអប់ទាំងពីរមិនប្រែប្រួល ៖

តាង A_1 ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់យកសៀវភៅមួយក្បាលពីប្រអប់ A បានសៀវភៅពីជគណិតហើយដាក់ចូលប្រអប់ B និង A_2 ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់យកសៀវភៅមួយក្បាលពីប្រអប់ B បានសៀវភៅពីជគណិតហើយដាក់ចូលប្រអប់ A ។

តាង G_1 ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់យកសៀវភៅមួយក្បាលពីប្រអប់ A បានសៀវភៅធរណីមាត្រហើយដាក់ចូលប្រអប់ B និង G_2 ជាព្រឹត្តិការណ៍ចាប់យកសៀវភៅមួយក្បាលពីប្រអប់ B បានសៀវភៅធរណីមាត្រហើយដាក់ចូលប្រអប់ A ។

នោះ $E=(A_1\cap A_2)\cup(G_1\cap G_2)$ ជាព្រឹត្តិការណ៍ដែលចំនួនសៀវភៅទាំងពីជគណិត និង ធរណីមាត្រនៅក្នុងប្រអប់ទាំងពីរមិនប្រែប្រួល ។

គេបាន ៖

$$P(E)=P\big((A_1\cap A_2)\cup(G_1\cap G_2)\big)=P(A_1\cap A_2)+P(G_1\cap G_2)$$

តាមរូបមន្តផលគុណនៃប្រូបាប $P(A_1\cap A_2)=P(A_2/A_1).P(A_1)$ និង

$$P(G_1\cap G_2)=P(G_2/G_1).P(G_1)$$

គេទាញ $P(E)=P(A_2/A_1)P(A_1)+P(G_2/G_1)P(G_1)$ ដោយ

$$P(A_1)=\frac{n(A_1)}{n(S_A)}=\frac{C_3^1}{C_7^1}=\frac{3}{7}$$

$$P(A_2/A_1)=\frac{n(A_2/A_1)}{n(S_B)}=\frac{C_6^1}{C_9^1}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

$$P(G_1)=\frac{n(G_1)}{n(S_A)}=\frac{C_4^1}{C_7^1}=\frac{4}{7}\ ;\ P(G_2/G_1)=\frac{n(G_2/G_1)}{n(S_B)}=\frac{C_4^1}{C_9^1}=\frac{4}{9}$$

ដូចនេះ $P(E)=\frac{3}{7}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\times\frac{4}{9}=\frac{18+16}{63}=\frac{34}{63}$ ។

II-១)រកសមីការស្តង់ដានៃអេលីប (E):

ដោយអរដោនេផ្ចិត $A(1;-2)$ និងអរដោនេកំណុំទាំងពីរ

$F_1(1-\sqrt{5},-2)$; $F_2(1+\sqrt{5},-2)$

ស្មើគ្នានោះ (E)ជាអេលីបដេកដែលមានអក្សធំប្រវែង $2a=6$ នោះ $a=3$ ។

គេមាន $A(h,k)$ និង $A(1;-2)$ នោះ $h=1$, $k=-2$ ហើយ $F_1(h-c,k)$

និង $(1-\sqrt{5},-2)$ នោះគេទាញ

$h-c=1-\sqrt{5}$ ឬ $c=h-1+\sqrt{5}=1-1+\sqrt{5}=\sqrt{5}$ និង $c^2=a^2-b^2$

នោះ $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3^2-\sqrt{5}^2}=2$

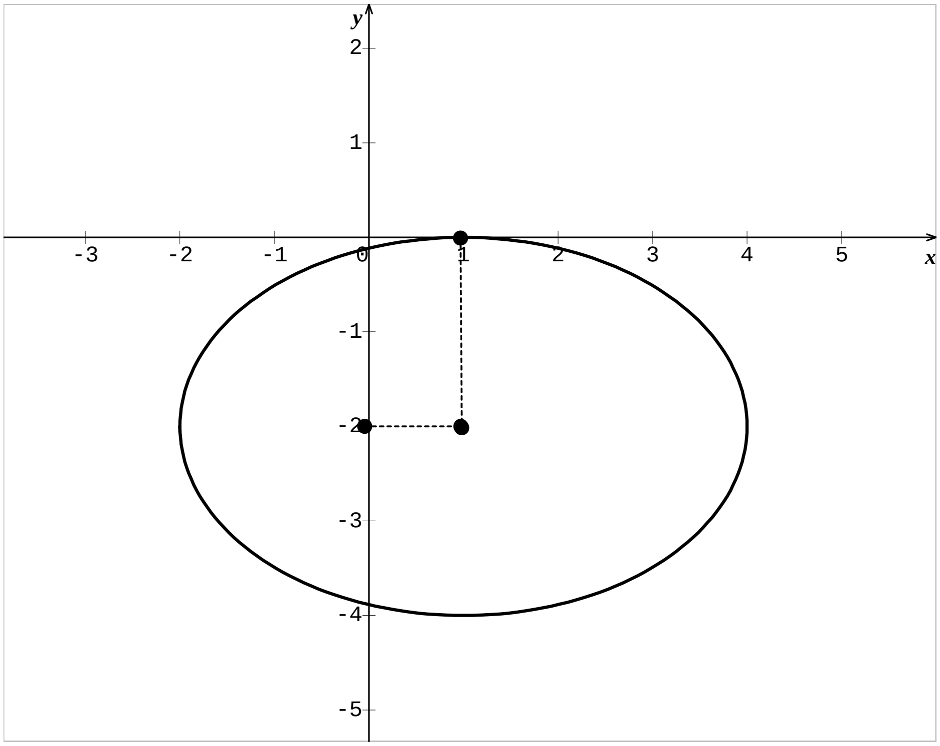
សមីការស្តង់ដានៃ (E) មានទម្រង់ $(E):\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ។

ដូចនេះ $(E):\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$ ។

២)រកកូអរដោនេកំណពូល និង សង់(E):

តាមរូបមន្ត $S_1(h-a,k)=S(-2,-2)$ និង $S_2(h+a,k)=S_2(4,-2)$ ។

ដូចនេះ $S_1(-2,-2)$ និង $S_2(4,-2)$ ។



III-១)រកចំនួនពិត a,b,c និង d :ដើម្បីបាន $f(x)=ax^2+bx+c+\dfrac{d}{x-1}$

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2-2x^2+3x-1}{x-1}\ \forall x\neq 1$

គេអាចសរសេរ $f(x)=\dfrac{(x^3-1)-(2x^2-2x)+(x-1)+1}{x-1}$

$$=\frac{(x-1)(x^2+x+1)-2x(x-1)+(x-1)+1}{x-1}$$

$$=x^2+x+1-2x+1+\frac{1}{x-1}$$

$$=x^2-x+2+\frac{1}{x-1}$$

ដើម្បីបាន $f(x)=ax^2+bx+c+\dfrac{d}{x-1}$

លុះត្រាតែ $a=1\,,b=-1\,,c=2\,,d=1$ ។

ដូចនេះ $a=1\,,b=-1\,,c=2\,,d=1$ ។

២)គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{-1}^{0} f(x).dx$

ដោយ $f(x)=x^2-x+2+\dfrac{1}{x-1}$

$$I=\int_{-1}^{0}\left(x^2-x+2+\frac{1}{x-1}\right).dx=\int_{-1}^{0}x^2.dx-\int_{-1}^{0}x.dx+2\int_{-1}^{0}dx+\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x-1}$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+2\left[x\right]_{-1}^{0}+\left[\ln|x-1|\right]_{-1}^{0}$$

$$=(0+\frac{1}{3})-(0-\frac{1}{2})+2(0+1)+(\ln 1-\ln 2)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+2-\ln 2=\frac{17}{6}-\ln 2$$

ដូចនេះ $I=\dfrac{17}{6}-\ln 2$ ។

IV-១)រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E):

$(E): y''+4y=0$ មានសមីការសម្គាល់ $r^2+4=0$ មានឫស

$r_1=-2i\ ;\ r_2=2i$ នោះ $\alpha=0$, $\beta=2$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺជាអនុគមន៍

$y=A\cos 2x+B\sin 2x\ ;\ A,B\in\Re$ ។

២)រកអនុគមន៍ g ជាចម្លើយមួយនៃ (E):

គេមាន $g(x)=A\cos 2x+B\sin 2x$

នោះ $g'(x)=-2A\sin 2x+2B\cos 2x$

ដោយ $\begin{cases} g(\frac{\pi}{4})=\frac{2}{3} \\ g'(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{3} \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} A\cos\frac{\pi}{2}+B\sin\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3} \\ -2A\sin\frac{\pi}{2}+2B\cos\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3} \end{cases}$

នាំឲ្យ $B=\frac{2}{3}$, $A=-\frac{1}{6}$

ដូចនេះ $g(x)=-\frac{1}{6}\cos 2x+\frac{2}{3}\sin 2x$ ។

V-១)រកសមីការឆ្លុះនៃបន្ទាត់ (L):

តាមរូបមន្តសមីការឆ្លុះ $(L): \frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$

ដោយ $A(-2,3,0)$ និង $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$

ដូចនេះ $(L): \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{-1}$ ។

២)រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រ $\vec{n}=\overrightarrow{OA}\times\vec{u}$

គេមាន $\overrightarrow{OA}=(-2,3,0)$ និង $\vec{u}=(1,-2,-1)$

គេបាន $\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 3 & 0\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}\vec{k}$

$$=(-3-0)\vec{i}-(2-0)\vec{j}+(4-3)\vec{k}=-3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$$

ដូចនេះ $\vec{n}=-3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ ។

រកសមីការនៃប្លង់ (P):

តាមរូបមន្តសមីការប្លង់ $(P): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

ដោយប្លង់ (P) កាត់តាម $A(-2,3,0)$ និងមានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់

$\vec{n}=-3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$

គេបាន $(P): -3(x+2)-2(y-3)+(z-0)=0$

ដូចនេះ $(P): -3x-2y+z=0$ ។

៣)រកចម្ងាយពីចំណុច $B(1,1,1)$ ទៅប្លង់ (P):

តាមរូបមន្ត $d(B;(P))=\dfrac{|ax_B+by_B+cz_B+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

គេបាន $d(B,(P))=\dfrac{|-3-2+1|}{\sqrt{9+4+1}}=\dfrac{4}{\sqrt{14}}=\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$

ដូចនេះ $d(B,(P))=\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$ (ឯកតាប្រវែង) ។

រកសមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានផ្ចិត B ប៉ះនឹងប្លង់ (P):

តាមរូបមន្តសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ

$(S): (x-x_B)^2+(y-y_B)^2+(z-z_B)^2=R^2$ ដោយ $B(1,1,1)$

ហើយស្វ៊ែ (S) ប៉ះនឹងប្លង់ (P) :នោះ $R=d(B,(P))=\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$

ដូចនេះ $(S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\dfrac{8}{7}$ ។

VI-១)គណនាលីមីត រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេក ៖

គេមាន $f(x)=e^x(-x^2+2x-1)=-(x-1)^2e^x$

គេបាន $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-(x-1)e^x\right]=0$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ ។

ហើយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-(x-1)^2e^x\right]=-\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ហើយបន្ទាត់ $y=0$

ជាសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (c) ។

២)គណនាដេរីវេ និងសិក្សាសញ្ញារបស់វា ៖

គេមាន $f(x)=-(x-1)^2e^x$ ដោយប្រើរូបមន្ត $(uv)'=u'v+uv'$

គេបាន $f'(x)=-2(x-1)e^x-(x-1)^2e^x=-(x-1)e^x[2+(x-1)]$

ដូចនេះ $f'(x)=-(x-1)(x+1)e^x$ ។

ដោយគ្រប់ $x\in\Re : e^x>0$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច

$g(x)=-(x-1)(x+1)$

បើ $g(x)=0\Leftrightarrow-(x-1)(x+1)=0$ គេទាញ $x_1=-1\,,\,x_2=1$ ។

តារាងសញ្ញានៃ $g(x)=-(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	

តាមតារាងខាងលើយើងអាចសន្និដ្ឋានសញ្ញានៃ $f'(x)=-(x-1)(x+1)e^x$

បានដូចតទៅ ៖

-ចំពោះ $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ គេបាន $f'(x)<0$

-ចំពោះ $x\in\{-1\,,1\}$ គេបាន $f'(x)=0$

-ចំពោះ $x\in(-1,1)$ គេបាន $f'(x)>0$

តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)=-(x-1)^2e^x$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{e}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$$f(-1)=-(-1-1)^2e^{-1}=-\frac{4}{e}\ ;\ f(1)=0$$ ។

៣)គណនា $f(-2)$, $f(0)$ និង $f(2)$

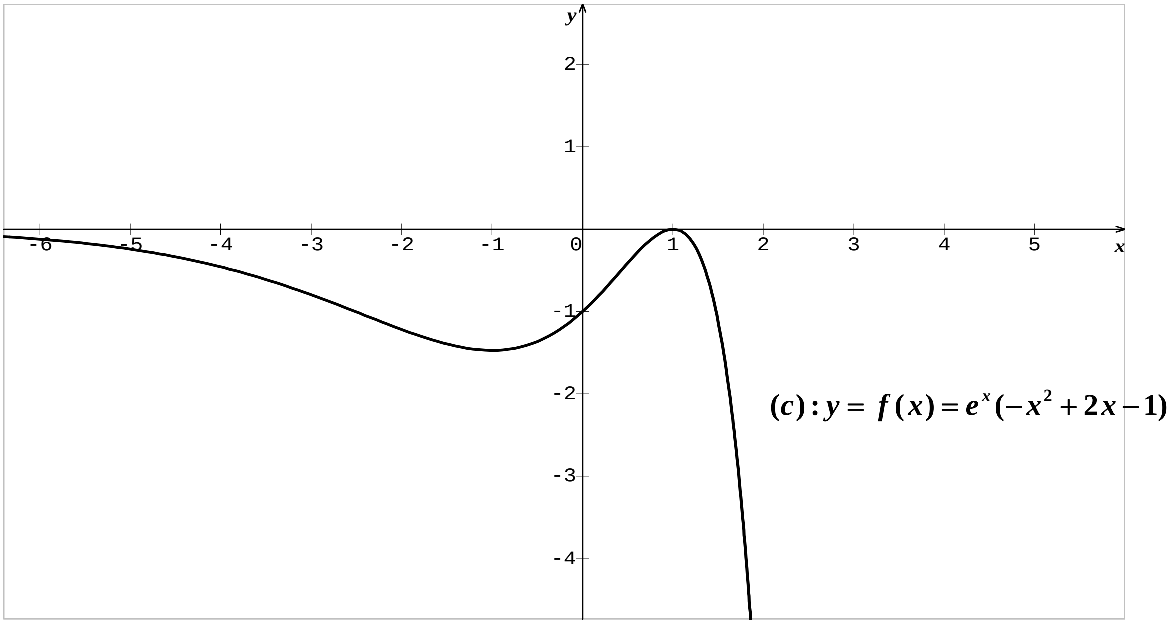
បើ $x=-2$ នោះ $f(-2)=-(-2-1)^2e^{-2}=-\frac{9}{e^2}=-9(0.13)=-1.17$

បើ $x=0$ នោះ $f(0)=-(0-1)^2e^0=-1$

បើ $x=2$ នោះ $f(2)=-(2-1)^2e^2=-e^2=-7.4$

ដូចនេះ $f(-2)=-\frac{9}{e}=-1.17,\ f(0)=-1$ និង $f(2)=-e^2=-7.4$ ។

សង់ក្រាប $(c): y=f(x)=e^x(-x^2+2x-1)=-(x-1)^2e^x$ ៖



៤)គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយ(c) ជាមួយអក្ស័អាប់ស៊ីស និង អក្ស័អរដោនេ ៖

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡានៃមណ្ឌលប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប (c) , អក្ស័អាប់ស៊ីស និង អក្ស័អរដោនេ ៖

គេបាន $S=\int_0^1 (x-1)^2 e^x .dx$

តាង $\begin{cases} u=(x-1)^2 \\ dv=e^x dx \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du=2(x-1)dx \\ v=e^x \end{cases}$

គេបាន $S=\left[(x-1)^2 e^x\right]_0^1-\int_0^1 2(x-1)e^x = 0-1-2\int_0^1 (x-1)e^x .dx$

តាង $\begin{cases} u=x-1 \\ dv=e^x dx \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} du=dx \\ v=e^x \end{cases}$

គេបាន ៖

$$S=-1-2\left(\left[(x-1)e^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx\right)$$

$$=-1-2\left(0+1-\left[e^x\right]_0^1\right)$$

$$=-1-2+2(e-1)$$

$$=2e-5=2(2.718)-5=0.436$$ (ឯកតាផ្ទៃ) ។

ដូចនេះ $S=0.436$ (ឯកតាផ្ទៃ) ។

វិញ្ញាសាទី០៤

រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន**

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិ និង អាហារូបករណ៍

I- គេមានចំនួនកុំផ្លិច $a = 2\sqrt{3} - 2i$ និង $b = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ។

១-សរសេរ $Z = a^2 + b^2 + 4ai + \sqrt{2}b$ ជាទម្រង់ពីជគណិត ។

២-សរសេរ $a\,;b$ និង ab ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

II- ក្នុងប្រអប់មួយមានឃ្លីពណ៌ស 2គ្រាប់ដែលមានចុះលេខ 1 , 2 និងឃ្លីពណ៌ខៀវ 3គ្រាប់ដែលមានចុះលេខ 1 , 2 , 3 ។ គេចាប់យកឃ្លី2គ្រាប់ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យពីក្នុងប្រអប់នោះ ។

១-រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A: គេចាប់បានឃ្លីពណ៌ដូចគ្នា ។

២-រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B: គេចាប់បានឃ្លីមានផលបូកលេខស្មើ 3 ។

៣-រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ C: គេចាប់បានឃ្លីមានផលបូកលេខស្មើ 3 ដោយបានដឹងថាវាមានពណ៌ដូចគ្នា ។

III- ១-កំណត់ចំនួនពិត m, n និង p ដើម្បីឲ្យ

$$\frac{x^2+6x+5}{(x-2)(x^2+x+1)} = \frac{m}{x-2} + \frac{nx+p}{x^2+x+1}$$ ដែល $x \neq 2$ ។

២-គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^1 \frac{x^2+6x+5}{(x-2)(x^2+x+1)}.dx$ ។

IV- គេអោយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E_1): -y'' - y' + 6y = 6x^2 - 2x + 4$ ។

១-ដោះស្រាយសមីការ $(E_2): -y'' - y' + 6y = 0$ ។

២-រកពហុធា $p(x) = ax^2 + bx + c$ ដែលជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E_1) ។ ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E_1) ។

V- នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេអោយបីចំណុច $A(1,0,1), B(0,2,2)$ និងC (2,1,0) ។

១- បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល A ។

២-គណនា $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចរកសមីការប្លង់ ABC ។

៣-រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ d ដែលកាត់តាម D(1,-1,3) ហើយកែងនឹងប្លង់ (ABC) ត្រង់ M។រកកូអរដោនេចំណុច M ។

VI- អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ដោយ y= $f(x)=2+\frac{\ln x}{x^2}$ ហើយមានខ្សែកោង (C) ។

១-គណនា $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to 0} f(x)$ ។ កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតដេកនៃ (C) ។

២-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

៣-កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (c) ជាមួយអាស៊ីមតូតដេករបស់វា ។ចូរសង់ (c) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

៤-គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង (c) ជាមួយអាស៊ីមតូតដេករបស់វា និងបន្ទាត់ឈរ $x=1$; $x=e^{0.5}$ ។($e=2.72$; $e^{0.5}=1.65$)

អត្រាកំណែគំរូ

I-១)សរសេរ $Z=a^2+b^2+4ai+\sqrt{2}b$ ជាទម្រង់ពីជគណិត

គេមាន $a=2\sqrt{3}-2i$, $b=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ នោះគេបាន ៖

$$Z=(2\sqrt{3}-2i)^2+(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})^2+4i(2\sqrt{3}-2i)+\sqrt{2}(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})$$

$$=12-8i\sqrt{3}-4+2-4i-2+8i\sqrt{3}+8-2+2i=14-2i$$

ដូចនេះ $Z=14-2i$ ។

២)សរសេរ a ,b និង ab ជារាងត្រីកោណមាត្រ ៖

$$a = 2\sqrt{3} - 2i = 4(\frac{\sqrt{3}}{2} - i.\frac{1}{2})$$

$$= 4(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$$

$$b = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$= 2(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 2\left[\cos(\pi - \frac{\pi}{4}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{4})\right]$$

$$= 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$a.b = 8\left[\cos(-\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4})\right] = 8(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})$$

ដូចនេះ $a = 4\left[\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right]$

$b = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$; $ab = 8(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12})$ ។

II-១)រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ A ចាប់បានឃ្លីពណ៌ដូចគ្នា៖

តាង a_1, a_2 ជាឃ្លីពណ៌ស ចុះលេខ1 និង 2 ហើយ b_1, b_2, b_3 ជាឃ្លីពណ៌ខ្មៅចុះលេខ 1, 2 និង 3 ។លំហសំណាក ៖

$$S = \{(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3),(b_1,b_2),(b_1,b_3),(b_2,b_3)\}$$

សំណុំព្រឹត្តិការណ៍ A, B និង $A \cap B$៖

$A = \{(a_1,a_2),(b_1,b_2),(b_2,b_3),(b_1,b_3)\}$, $B = \{(a_1,a_2),(a_1,b_2),(a_2,b_1),(b_1,b_2)\}$

និង $A \cap B = \{(a_1,a_2) \ ,(b_1,b_2)\}$ ។

តាមរូបមន្ត $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ដោយ $n(S) = 10$, $n(A) = 4$

ដូចនេះ $P(A) = \frac{4}{10} = 0.4$ ។

២)រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ B ចាប់បានឃ្លីមានផលបូកលេខស្មើ3

រូបមន្ត $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$ ដោយ $n(B) = 4$

ដូចនេះ $P(B)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}=0.4$ ។

៣)គណនាប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ C

គេបាន $P(C)=P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$ ដោយ $n(A\cap B)=2$

ដូចនេះ $P(C)=\frac{2}{4}=0.5$ ។

III-1)កំណត់ចំនួនពិត m,n និង p

គេបាន $\frac{x^2+6x+5}{(x-2)(x^2+x+1)}=\frac{m}{x-2}+\frac{nx+p}{x^2+x+1}$

ដោយគុណអង្គទាំងពីរនឹង $(x-2)(x^2+x+1)$ គេបាន ៖

$$x^2+6x+5=m(x^2+x+1)+(x-2)(nx+p)$$

$$x^2+6x+5=mx^2+mx+m+nx^2+px-2nx-2p$$

$$x^2+6x+5=(m+n)x^2+(m+p-2n)x+(m-2p)$$

គេទាញ $\begin{cases} m+n=1 & (1) \\ m+p-2n=6 & (2) \\ m-2p=5 & (3) \end{cases}$

តាម(2)គេទាញ $p=6-m+2n$ (4) យកជួសក្នុង(3)គេបាន ៖

$$m-2(6-m+2n)=5$$

$$m-12+2m-4n=5$$

$$3m-4n=17 \quad (5)$$

តាម(1)គេទាញ $n=1-m$ (6) យកជួសក្នុង(5)គេបាន ៖

$$3m-4(1-m)=17$$

$$3m-4+4m=17$$

$$7m=21\Rightarrow m=3$$

តាម(6)គេបាន $n=1-3=-2$ ហើយតាម(4) គេបាន $p=6-3+2(-2)=-1$

ដូចនេះ $m=3\,,\,n=-2\,,\,p=-1$ ។

2)គណនាអាំងតេក្រាល I

ចំពោះ $m=3\,,\,n=-2\,,\,p=-1$ គេបាន ៖

$$\frac{x^2+6x+5}{(x-2)(x^2+x+1)}=\frac{3}{x-2}+\frac{-2x-1}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{3}{x-2}-\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

គេបាន $I=\int_0^1\left(\frac{3}{x-2}-\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right).dx$

$$=3\int_0^1\frac{dx}{x-2}-\int_{0.}^1\frac{(2x+1)}{x^2+x+1}.dx$$
$$=3\int_0^1\frac{(x-2)'}{x-2}.dx-\int_0^1\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}.dx$$
$$=\left[3\ln|x-2|\right]_0^1-\left[\ln|x^2+x+1|\right]_0^1$$
$$=\left[3\ln|(-1)|-3\ln|(-2)|\right]-\left[\ln(3)-\ln(1)\right]$$
$$=-3\ln 2-\ln 3=-(\ln 2^3+\ln 3)=-\ln 24$$

ដូចនេះ $I=-\ln(24)$ ។

IV.1)ដោះស្រាយសមីការ (E_2) ៖

$(E_2):-y''-y'+6y=0$

មានសមីការសម្គាល់ $-r^2-r+6=0$

$\Delta=(-1)^2-4(-1)(6)=1+24=5^2$ គេទាញឫស $r_1=\frac{1-5}{2(-1)}=2$, $r_2=\frac{1+5}{2(-1)}=-3$

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E_2) គឺជាអនុគមន៍ $y=Ae^{-3x}+Be^{2x}$, $A,B\in\Re$ ។

2)រកពហុធា $P(x)=ax^2+bx+c$

ដើម្បីឲ្យ $P(x)=ax^2+bx+c$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E_1) លុះត្រាតែ

$P(x),P'(x),P''(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (E_1) ។

គេបាន $-P''(x)-P'(x)+6P(x)=6x^2-2x+4$ (1)

ដោយ $P(x)=ax^2+bx+c$ នោះ $P'(x)=2ax+b$, $P''(x)=2a$

(1)ទៅជា $-2a-2ax-b+6ax^2+6bx+6c=6x^2-2x+4$

ឬ $6ax^2+(-2a+6b)x+(-2a-b+6c)=6x^2-2x+4$

គេទាញ $\begin{cases} 6a = 6 \\ -2a + 6b = -2 \\ -2a - b + 6c = 4 \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$

ដូចនេះ $P(x) = x^2 + 1$ ជាពហុធាត្រូវរក ។

ទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E_1) ៖

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E_1) គឺ $y = y_C + y_h$ ដែល $y_h = Ae^{-3x} + Be^{2x}$ និង $y_C = P(x) = x^2 + 1$

ដូចនេះ $y = Ae^{-3x} + Be^{2x} + x^2 + 1$, $A, B \in \Re$ ។

V-1)បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ៖

គេមាន $A(1,0,1)$; $B(0,2,2), C(2,1,0)$

គេបាន $\overrightarrow{AB} = (0-1, 2-0, 2-1) = (-1,2,1)$ និង $\overrightarrow{AC} = (2-1, 1-0, 0-1) = (1,1,-1)$

តាមកន្សោមវិភាគផលគុណស្កាលែរវាងពីរវ៉ិចទ័រ

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-1)(1) + (2)(1) + (1)(-1)$$
$$= -1 + 2 - 1 = 0$$

គេទាញបាន $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ ។ ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល A ។

2)គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

ដោយ $\overrightarrow{AB} = (-1,2,1)$; $\overrightarrow{AC} = (1,1,-1)$ គេបាន $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.\vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.\vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.\vec{k}$$
$$= (-2-1)\vec{i} - (1-1)\vec{j} + (-1-2)\vec{k}$$
$$= -3\vec{i} - 0.\vec{j} - 3\vec{k}$$

ដូចនេះ $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-3, 0, -3)$ ។

កំណត់សមីការប្លង់ (ABC):

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) គឺ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-3,0,-3)$

តាមរូបមន្ត $(ABC): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$(ABC): -3(x-1)+0(y-0)-3(z-1)=0$

$-3x+3-3z+3=0$

$-3x-3z+6=0$

ដោយសម្រួលនឹង -3 គេបាន $x+z-2=0$

ដូចនេះ $(ABC): x+z-2=0$ ។

3)រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ d ៖

ដោយបន្ទាត់ d កាត់តាម $D(1,-1,3)$ ហើយកែងនឹងប្លង់ (ABC) នោះវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (ABC) ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ d ។

គេបាន $\vec{u}_d=\vec{n}=(-3,0,-3)$ ។

តាមរូបមន្ត $(d): \begin{cases} x=x_D+at \\ y=y_D+bt \\ z=z_D+ct \ , t\in\Re \end{cases}$

ដូចនេះ $(d): \begin{cases} x=1-3t \\ y=-1 \\ z=3-3t \ , t\in\Re \end{cases}$

រកកូអរដោនេចំណុច M ជាប្រសព្វរវាង (d) និង (ABC):

គេមាន $(d): \begin{cases} x=1-3t \\ y=-1 \\ z=3-3t \ , t\in\Re \end{cases}$ និង $(ABC): x+z-2=0$

យកសមីការ d ជួសក្នុងសមីការ (ABC) គេបាន ៖

$1-3t+3-3t-2=0$

$-6t+2=0 \Rightarrow t=\dfrac{1}{3}$

យកជួសក្នុងសមីការ (d) នោះគេបាន $x=0\ , y=-1\ , z=2$

ដូចនេះ $M(0,-1,2)$ ។

VI-1)គណនាលីមីត

គេមាន $f(x)=2+\frac{\ln x}{x^2}$

គេបាន $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2+\frac{\ln x}{x^2})=2$ ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$

ហើយ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2+\frac{\ln x}{x^2}\right)=-\infty$ ព្រោះ $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^2}=-\infty$

ដូចនេះ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ ។

ទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃក្រាប ៖

ដោយ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

ដូចនេះបន្ទាត់ $y=2$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតដេក និង $x=0$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប ។

2)គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ៖

គេមាន $f(x)=2+\frac{\ln x}{x^2}$ គ្រប់ $x>0$

គេបាន $f'(x)=(2+\frac{\ln x}{x^2})'$

$$=\frac{(\ln x)'x^2-(x^2)'\ln x}{x^4}$$

$$=\frac{\frac{1}{x}.x^2-2x.\ln x}{x^4}=\frac{x(1-2\ln x)}{x^3}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$ ។

សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ៖

គេមាន $f'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$ ដោយ $x^3>0\ \forall x>0$ នោះ f'មានសញ្ញាដូចភាគយក $1-2\ln x$ ។

-បើ $1-2\ln x=0$ នោះ $\ln x=\frac{1}{2}$ គេទាញ $x=e^{\frac{1}{2}}$ ឬ $x=\sqrt{e}$ ។

-បើ $1-2\ln x>0$ នោះ $0<x<\sqrt{e}$

-បើ $1-2\ln x<0$ នោះ $x>\sqrt{e}$

ចំពោះ $x=\sqrt{e}$ គេបាន $f(\sqrt{e})=2+\frac{\ln\sqrt{e}}{e}=2+\frac{1}{2e}=2.184$

តារាងអថេរភាព ៖

x	0 $+\infty$	$\sqrt{e}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	2.184	↘ 2

3)រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាប និងអាស៊ីមតូតដេក ៖

ប្រសព្វរវាងក្រាប និងអាស៊ីមតូតដេកជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases} y=2+\frac{\ln x}{x^2} \\ y=2 \end{cases}$$

សមីការអាប់ស៊ីស $2+\frac{\ln x}{x^2}=2$ ដោយ $x>0$ នោះសមីការសមមូល

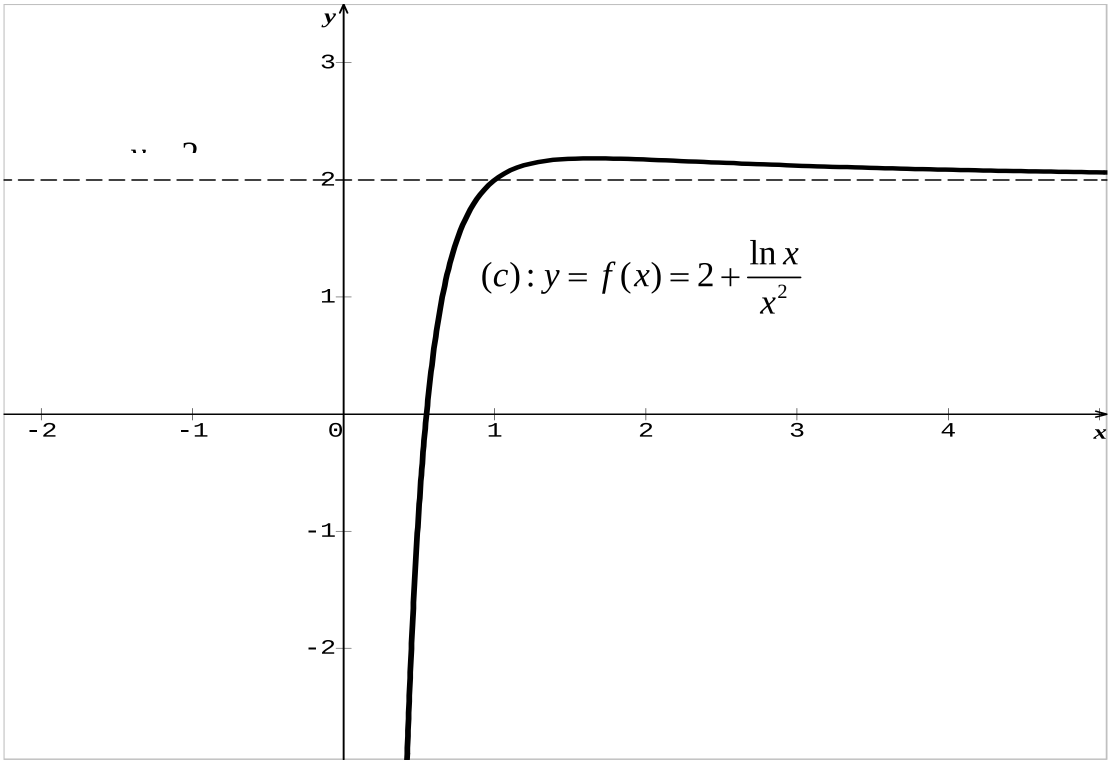
$\ln x=0$ នោះ $x=1$ ហើយ $y=2$ ។

ដូចនេះ $A(1\,,2)$ ។

សង់ក្រាប $(c):y=2+\frac{\ln x}{x^2}$

តារាងជំនួយ

x	0.5	1	$\sqrt{e}$	2
y	0,77	2	2,18	2,17



គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយក្រាប (c) និងអាស៊ីមតូតដេកក្នុង $[1, \sqrt{e}]$ ៖

$$S = \int_1^{\sqrt{e}} \left[(2 + \frac{\ln x}{x^2}) - 2 \right] . dx = \int_1^{\sqrt{e}} \ln x . \frac{dx}{x^2}$$

តាង $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}.dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$

គេបាន $S = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^{\sqrt{e}} + \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^{\sqrt{e}}$

$$= \left[-\frac{1}{2\sqrt{e}} - \frac{1}{\sqrt{e}} \right] - [0 - 1] = -\frac{3}{2\sqrt{e}} + 1 = \frac{2\sqrt{e} - 3}{2\sqrt{e}}$$

ដូចនេះ $S = \frac{2\sqrt{e} - 3}{2\sqrt{e}} = \frac{2(1.65) - 3}{2(1.65)} = 0.08$ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា) ។

វិញ្ញាសាទី០៥

រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន**

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិ និង អាហារូបករណ៍

I- (១០ពិន្ទុ) គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $x=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $y=-\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

១-គណនា $A=x-y^2$ និង $B=x^2+x+1$ ។

២-សរសេរ x និង y ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ហើយបង្ហាញថា $C=x^{2013}+y^{2013}$ ជាចំនួនពិត ។

II-(១៥ពិន្ទុ) គេចង់បង្កើតចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់ ដែលខ្ទង់ទាំងបីមានលេខខុសគ្នា ដោយយកចេញពីលេខ 1,2,3,4,5, 6,7,8,9 ។

១-រកចំនួនករណីអាច ។

២-រកប្រូបាប ដែលចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់នោះជាពហុគុណនៃ 5 ។

៣-រកប្រូបាប ដែលចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់នោះ ជាចំនួនគូ ។

III-(១៥ពិន្ទុ) គេឲ្យអនុគមន៍ $y=g(x)=xe^{2x}$ ។

១-រកដេរីវេ $g'(x)$ និង $g''(x)$ ។ ទាញបញ្ជាក់ថា អនុគមន៍ g មានអប្បបរមាត្រង់ $x=-0.5$ ។

២-រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាង $y=g(x)$ ត្រង់ $x=1$ ។

IV-(២០ពិន្ទុ) គេឲ្យសមីការ $y''-4y'+5y=0 \quad (E)$ ។

១-រកចម្លើយទូទៅ y_h នៃសមីការ (E) ។

២-គេដឹងថា $y_p=a\cos x+b\sin x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y''-4y'+5y=4\cos x-12\sin x \ (F)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ រកចំនួនពិត a និង b ហើយទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (F) ។

V-(៣០ពិន្ទុ)១-អេលីប E មួយមានសមីការ $25x^2+16y^2-150x+64y=111$ ។

ក/រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល និង កំណុំរបស់អេលីប E ។

ខ/សង់អេលីប E ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ ។

២-ចំណុច $M(-1,0,1)$; $N(0,1,2)$ និង $P(1,2,-1)$ ស្ថិតនៅក្នុងតម្រុយ

អរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយ ។

ប្លង់ α មួយមានសមីការ $x-2y+z-4=0$ ។

ក/រកកូអរដោនេនៃ $\vec{n}=\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}$ ហើយទាញរកសមីការប្លង់ β ដែលកាត់

តាមចំណុច M,N និង P ។

ខ/រកសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ S មួយដែលមានផ្ចិត M ហើយកាត់តាម N ។

តើប្លង់ α ជួបស្វ៊ែ S ឬទេ ?

VI-(៣៥ពិន្ទុ)អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះ $x>0$ ដោយ $y=f(x)=1-\dfrac{2\ln x}{x}$

ហើយមានក្រាប C ។

១-រក $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ។

២-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

៣-សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ ។ គេឲ្យ $e=2.7$, $\dfrac{2}{e}=0.7$ ។

៤-គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់កំណត់ដោយក្រាប C អាស៊ីមតូតដេក បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=e$ ។

អត្រាកំណែគំរូ

I- (១០ពិន្ទុ)គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $x=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $y=-\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

១-គណនា $A=x-y^2$ និង $B=x^2+x+1$

យើងបាន $A=(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})-(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^2$

$$=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}=0$$

ហើយ $B=(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})+1$

$$=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+1=0$$

ដូចនេះ $A=x-y^2=0$ និង $B=x^2+x+1=0$ ។

២-សរសេរ x និង y ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ហើយបង្ហាញថា

$C=x^{2013}+y^{2013}$ ជាចំនួនពិត

គេមាន $x=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$

$$=\cos(\pi-\frac{\pi}{3})-i\sin(\pi-\frac{\pi}{3})$$

$$=\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$=\cos(-\frac{2\pi}{3})+i\sin(-\frac{2\pi}{3})$$

និង $y=-\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}=\bar{x}=\cos(-\frac{2\pi}{3})-i\sin(-\frac{2\pi}{3})=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

ដូចនេះ $x=\cos(-\frac{2\pi}{3})+i\sin(-\frac{2\pi}{3})$ និង $y=\cos\frac{2\pi}{3}+i.\sin\frac{2\pi}{3}$ ។

ហើយ $C=x^{2013}+y^{2013}=(\bar{y})^{2013}+(y)^{2013}=2\operatorname{Re}(y^{2013})$

ដោយ $y^{2013}=\cos 1342\pi + i\sin 1342\pi$ (ដឹមវ័)

គេបាន $C=2\cos 1342\pi = 2$ (ព្រោះ $\cos 1342\pi = 1$) ។

II-(១៥ពិន្ទុ) ១-រកចំនួនករណីអាច ៖

ចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់ ដែលខ្ទង់ទាំងបីមានលេខខុសគ្នា ដោយយកចេញពីលេខ $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ ជាតម្រៀបគិតលំដាប់ដែលកំណត់ដោយ

$$n(S)=A(9,3)=\frac{9!}{(9-3)!}=\frac{6!.7.8.9}{6!}=504$$ ។

ដូចនេះចំនួនករណីអាចគឺ $n(S)=504$ ។

២-រកប្រូបាប ដែលចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់នោះជាពហុគុណនៃ 5

តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍នេះ នោះគេបាន $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$

ចំនួនមានលេខ3ខ្ទង់ជាពហុគុណនៃ5ជាចំនួនដែលមានលេខចុងក្រោយជាលេខ5 ហើយលេខ2ខ្ទង់ខាងមុខជាលេខដែលយកចេញពីលេខ 1,2,3,4,6,7,8,9 ។

គេបានចំនួនករណីស្រប $n(A)=A(8,2)=\frac{8!}{(8-2)!}=\frac{6!.7.8}{6!}=56$

ដូចនេះ $P(A)=\frac{56}{504}=\frac{1}{9}$ ។

៣-រកប្រូបាប ដែលចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់នោះ ជាចំនួនគូ

តាង B ជាព្រឹត្តិការណ៍នេះ នោះគេបាន $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}$

ចំនួនមានលេខ3ខ្ទង់ជាចំនួគូ ជាចំនួនដែលមានលេខចុងក្រោយជាចំនួនគូ ។

ក្នុងចំណោម9ចំនួន 1,2,3,4,5,6,7,8,9 មានចំនួនគូបួនគឺ 2,4,6,8 ។

គេបានចំនួនករណីស្រប $n(B)=A(8,2)\times 4=\frac{8!}{(8-2)!}\times 4=\frac{6!.7.8}{6!}\times 4=224$

ដូចនេះ $P(B)=\frac{224}{504}=\frac{4}{9}$ ។

III-(១៥ពិន្ទុ)១-រកដេរីវេ $g'(x)$ និង $g''(x)$

ដោយប្រើរូបមន្ត $(uv)' = u'v + uv'$ គេបាន ៖

$g'(x) = (xe^{2x})' = e^{2x} + 2xe^{2x} = (2x+1)e^{2x}$

និង $g''(x) = (2x+1)'e^{2x} + (2x+1)(e^{2x})' = 2e^{2x} + 2(2x+1)e^{2x} = 4(x+1)e^{2x}$

ដូចនេះ $g'(x) = (2x+1)e^{2x}$ និង $g''(x) = 4(x+1)e^{2x}$ ។

ទាញបញ្ជាក់ថា អនុគមន៍ g មានអប្បបរមាត្រង់ $x = -0.5$ ៖

ចំពោះ $x = -0.5$ គេមាន $g'(-0.5) = [2(-0.5)+1]e^{2(-0.5)} = (-1+1)e^{-1} = 0$

ហើយ $g''(0.5) = 4(-0.5+1)e^{2(-0.5)} = 2e^{-1} > 0$ ។

ដោយ $g'(-0.5) = 0$ និង $g''(-0.5) > 0$ នោះ អនុគមន៍ g មានអប្បបរមាត្រង់ $x = -0.5$ ។

២-រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបតាង $y = g(x)$ ត្រង់ $x = 1$

តាមរូបមន្ត $(T): y - y_0 = y'_0(x - x_0)$

បើ $x_0 = 1$ នោះ $y_0 = 1.e^2 = e^2$ ហើយ $y'_0 = g'(1) = 3e^2$

គេបាន $(T): y - e^2 = 3e^2(x-1)$ ឬ $(T): y = e^2(3x-2)$ ។

IV-(២០ពិន្ទុ) គេឲ្យសមីការ $y'' - 4y' + 5y = 0 \quad (E)$ ។

១-រកចម្លើយទូទៅ y_h នៃសមីការ (E)

សមីការសម្គាល់នៃ (E) គឺ $r^2 - 4r + 5 = 0$

$\Delta' = 4 - 5 = -1 = i^2$ មានឫស $r_1 = 2 - i$, $r_2 = 2 + i$ នោះ $\alpha = 2$, $\beta = 1$

តាមរូបមន្ត $y_h = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}$

ដូចនេះ $y_h = (A\cos x + B\sin x)e^{2x}$, $A, B \in IR$ ។

២-រកចំនួនពិត a និង b

គេដឹងថា $y_p = a\cos x + b\sin x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ

$y'' - 4y' + 5y = 4\cos x - 12\sin x \ (F)$

នោះគេបាន $y''_p - 4y'_p + 5y_p = 4\cos x - 12\sin x$ (1)

ដោយ $y'_p=-a\sin x+b\cos x$ និង $y''_p=-a\cos x-b\sin x$ គេបាន

$(1):-a\cos x-b\sin x+4a\sin x-4b\cos x+5a\cos x+5b\sin x=4\cos x-12\sin x$

$$(4a-4b)\cos x+(4a+4b)\sin x=4\cos x-12\sin x$$

គេទាញ $\begin{cases}4a-4b=4\\4a+4b=-12\end{cases}$ នាំឲ្យ $a=-1\,,b=-2$ ។

ដូចនេះ $a=-1\,,b=-2$ ។

ហើយទាញរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (F)

តាមលទ្ធផលខាងលើគេបាន ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (F)

$y=y_h+y_p=(A\cos x+B\sin x)e^{2x}-\cos x-2\sin x$ ដែ $A,B\in IR$ ។

V-(៣០ពិន្ទុ) ១-អេលីប E មួយមានសមីការ $25x^2+16y^2-150x+64y=111$ ។

ក/រកកូអរដោនេនៃផ្ចិត កំពូល និង កំណុំរបស់អេលីប E

សមីការ E អាចសរសេរដូចតទៅ ៖

$$25x^2+16y^2-150x+64y=111$$

$$25(x^2-6x+9)+16(y^2+4y+4)-225-64=111$$

$$25(x-3)^2+16(y+2)^2=400$$

$$\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$$

មានរាង $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$ ដែល $h=3\,,k=-2\,,a=5\,,b=4$

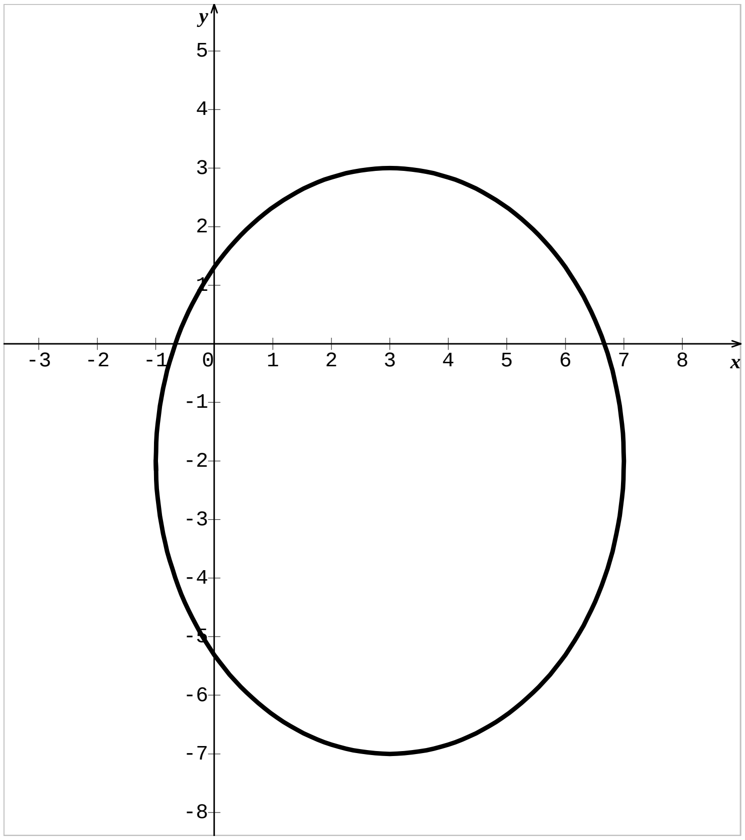
និង $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=3$

ដូចនេះកូអរដោនេផ្ចិត $(h,k)=(3,-2)$,

កំពូល $(h,k-a)=(3,-7)\,;(h,k+a)=(3,3)$

និងកំណុំ $(h,k-c)=(3,-5)\,;(h,k+c)=(3,1)$ ។

ខ/សង់អេលីប E ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ ៖



២-ក/រកកូអរដោនេនៃ $\vec{n} = \overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MP}$ ហើយទាញរកសមីការប្លង់ β ដែលកាត់តាមចំណុច M, N និង P

គេមាន $\overrightarrow{MN} = (1\,,1\,,1)$; $\overrightarrow{MP} = (2\,,2\,,-2)$

គេបាន $\vec{n} = \overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 0.\vec{k}$ ។

ដូចនេះ $\vec{n} = (-4,4,0)$ ។

ប្លង់ β ដែលកាត់តាមចំណុច M,N និង P មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=(4,4,0)$

តាមរូបមន្ត $\beta : a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$$-4(x+1)+4(y-0)+0(z-1)=0 \text{ ឬ } -x+y-1=0$$

ដូចនេះ $\beta : -x+y-1=0$ ។

ខ/រកសមីការស្តង់ដានៃស្វ៊ែ S មួយដែលមានផ្ចិត M ហើយកាត់តាម N ៖

តាមរូបមន្ត $S:(x-x_M)^2+(y-y_M)^2+(z-z_M)^2=R^2$

$$S:(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=R^2$$

ដោយ $N\in S$ នោះ $(0+1)^2+1^2+(2-1)^2=R^2$ ឬ $R^2=3$

ដូចនេះ $S:(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=3$ ។

តើប្លង់ α ជួបស្វ៊ែ S ឬទេ ?

យើងគណនាចម្ងាយពីផ្ចិត $M(-1,0,1)$ ទៅប្លង់ $\alpha : x-2y+z-4=0$

$d=\dfrac{|-1-2(0)+1-4|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{4}{\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ ដោយកាំរបស់ស្វ៊ែ S គឺ $R=\sqrt{3}$

គេបាន $d=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}<R=\sqrt{3}$ ។

ដោយចម្ងាយពីផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែ S ទៅប្លង់ α ខ្លីជាងរង្វាស់កាំនោះមានន័យថាប្លង់ α ជួបស្វ៊ែ S បានមុខកាត់ជារង្វង់មួយ ។

VI-(៣៥ពិន្ទុ) ១-រក $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ៖

គេបាន $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\dfrac{2\ln x}{x})=+\infty$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ ។

និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{2\ln x}{x})=1$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ ។

រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង អាស៊ីតតូតដេកនៃក្រាប C ៖

ដោយ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ នោះគេទាញថាបន្ទាត់ $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ និង $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប C ។

២-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

គេមាន $f(x)=1-\dfrac{2\ln x}{x}$, $x>0$

យើងបាន $f'(x)=-2.\dfrac{(\ln x)'x-(x)'\ln x}{x^2}=-2.\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{2(\ln x-1)}{x^2}$ ។

ចំពោះគ្រប់ $x>0$ គេបាន $f'(x)=\dfrac{2(\ln x-1)}{x^2}$ មានសញ្ញាដូចភាគយក $\ln x-1$ ។

-បើ $f'(x)>0$ គេបាន $\ln x-1>0$ ឬ $x>e$

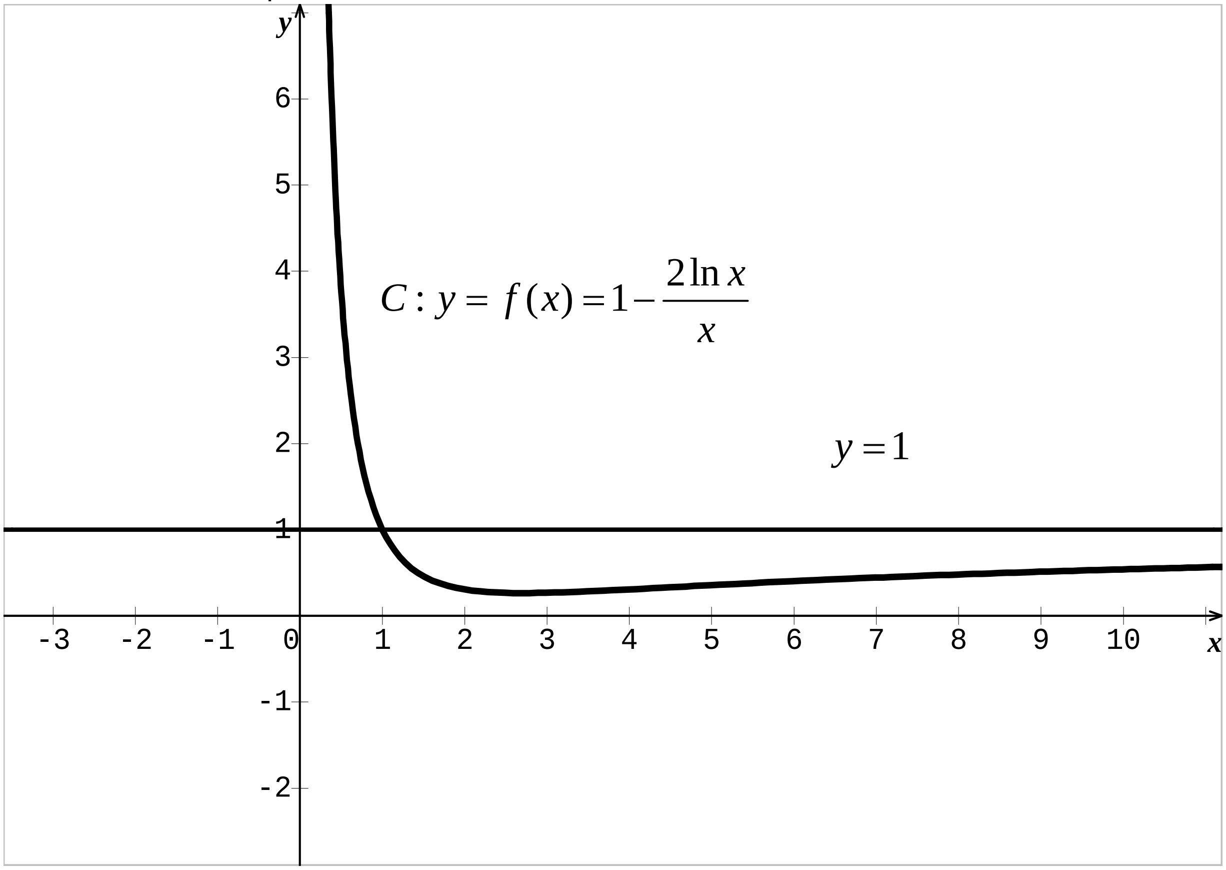
-បើ $f'(x)=0$ គេបាន $\ln x-1=0$ ឬ $x=e$

-បើ $f'(x)<0$ គេបាន $\ln x-1<0$ ឬ $x<e$

ចំពោះ $x=e$ គេបាន $f(e)=1-\dfrac{2\ln e}{e}=1-\dfrac{2}{e}=1-(0.7)=0.3$ ។

x	0		e		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0.3	↗	1

៣-សង់ក្រាប C នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេមួយ ៖



៤-គណនាផ្ទៃក្រឡា កំណត់ដោយក្រាប C អាស៊ីមតូតដេក បន្ទាត់ឈរ $x=1$ និង $x=e$

តាង S ផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ ដែលត្រូវរក ។

យើងបាន $S = \int_1^e \left[1-(1-\frac{2\ln x}{x})\right].dx = \int_1^e \frac{2\ln x}{x}.dx = \int_1^e 2\ln x.\frac{dx}{x}$

តាង $u = \ln x$ នោះ $du = \frac{dx}{x}$

ចំពោះ $x=1$ នោះ $u=0$ ហើយ $x=e$ នោះ $u=1$

គេបាន $S = \int_0^1 2u.du = \left[u^2\right]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$

ដូចនេះ $S=1$ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា)៕

វិញ្ញាសាទី០៦

រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន**

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិ និង អាហារូបករណ៍

I-គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z = x + i.y$ និង $W = \cos\alpha + i\sin\alpha$ ដែល x និង y ជាចំនួនពិតខុសពី 0 ហើយ α ជាចំនួនពិត ។

១)កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង x និង y ដើម្បីឲ្យ $|Z| = |W|$ ។

២)ក្នុងលក្ខខណ្ឌ $|Z| = |W|$ ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{1}{Z} = \overline{Z}$ ។

៣)រក x និង y រួច α ដើម្បីឲ្យ $Z = 1 , W = 1$ ។

II-នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ គេឲ្យខ្សែកោង $(E): \dfrac{(x-4)^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ ។

១)បញ្ជាក់ប្រភេទនៃខ្សែកោង (E) រួចបញ្ជាក់កូអរដោនេនៃផ្ចិត កំណុំ កំពូល និងចំណុចប្រសព្វរវាង (E) និងអក្ស័តូច ។

២)សង់ (E) ។

III-១)កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឲ្យបាន

$$\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+2}$$

ចំពោះគ្រប់ x ដែល $x \neq -2 , x \neq 1$ ។

២)គណនាអាំងតេក្រាល $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} \left(\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)} \right).dx$ ។

IV-ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មួយគេដៅចំណុច $A(2;2;0)$; $B(0;2;2)$ និង $C(1;0;1)$ ។

១)រកសមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$ ។រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វទាំងពីររវាងស្វ៊ែ(S) និងបន្ទាត់(d) ដែលមានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ៖

$x = 1 + t$; $y = 2$ និង $z = 1 + t$ ដែល $t \in \Re$

២)រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រផលគុណ $\vec{n} = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}$ ។ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC ។ រកសមីការប្លង់ (ABC) ។

៣)ប្លង់ (ABC) ជួប (ox) ត្រង់ M និង (oz) ត្រង់ N ។

រកកូអរដោនេនៃចំណុច M និង N ។ បង្ហាញថា $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ និង $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MN} = 0$ ទាញបញ្ជាក់ថា $ABNM$ ជាចតុកោណកែង។

៤)រកចម្ងាយពីចំណុច $D(0,2,0)$ ទៅប្លង់ (ABC) ។ទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $DBCA$

V- f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $x > 0$ ដោយ $y = f(x) = \dfrac{x^2 + \ln x}{x^2}$ ហើយមានខ្សែកោង (C) ។

១)គណនា $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ ។រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនិងដេកនៃ (C) ។

២)បង្ហាញថា f មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x = \sqrt{e}$ ហើយគណនា $f(\sqrt{e})$ ។ សង់តារាងអថេរភាពនៃ f ។

៣)កំណត់កូអរដោណេចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) និងអាស៊ីមតូតដេក ។

គណនា $f(\frac{1}{2})$ រួចសង់ខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ។

(គេនឹងយក $e = 2.7$, $\sqrt{e} = 1.7$; $\ln 2 = 0.7$)

អត្រាកំណែគំរូ

I-១)កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង x និង y ដើម្បីឲ្យ $|Z| = |W|$

គេមាន $Z = x + i.y$ និង $W = \cos\alpha + i\sin\alpha$

គេបាន $|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ និង $|W| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$

ដោយ $|Z| = |W| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1$

ដូចនេះ $x^2 + y^2 = 1$ ជាទំនាក់ទំនងដែលត្រូវរក ។

២)ក្នុងលក្ខខណ្ឌ $|Z|=|W|$ បង្ហាញថា $\frac{1}{Z}=\overline{Z}$

គេមាន $Z.\overline{Z}=|Z|^2=|W|^2=1$ (តាមលក្ខណៈនៃម៉ូឌុល)។

ដូចនេះ $\frac{1}{Z}=\overline{Z}$ ។

៣)រក x និង y រួច α ដើម្បីឲ្យ $Z=1\,,W=1$

គេបាន $Z=1\Leftrightarrow x+iy=1\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$

ហើយ $W=1\Leftrightarrow \cos\alpha+i\sin\alpha=1\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\alpha=1\\\sin\alpha=0\end{cases}$

គេទាញ $\alpha=2k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}$ ។ ដូចនេះ $x=1\,,y=0$ និង $\alpha=2k\pi\ ;k\in\mathbb{Z}$ ។

II-១)បញ្ជាក់ប្រភេទនៃខ្សែកោង $(E):\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

សមីការនៃខ្សែកោង (E) មានរាង $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

ដែល $\begin{cases}h=4\,,k=0\\a=5\,,b=3\end{cases}$

ដោយ $a>b$ នោះប្រភេទនៃខ្សែកោង (E) គឺជាអេលីបដេក។

តាមរូបមន្តគេបាន $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

កូអរដោនេផ្ចិត $I(h,k)=I(4;0)$, កូអរដោនេកំណុំ $F_1(h-c\,,k)=F_1(0,0)$

$F_2(h+c\,,k)=F_2(8,0)$, កូអរដោនេកំពូល $V_1(h-a,k)=V_1(-1,0)$

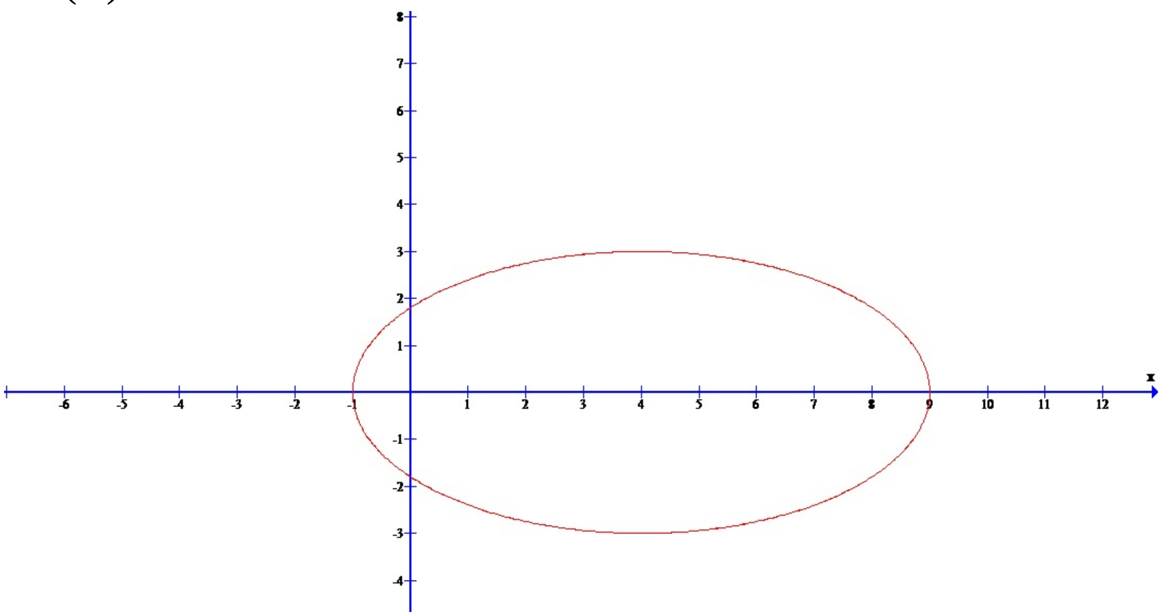
$V_2(h+a\,,k)=V_2(9\,,0)$ ។

កូអរដោនេចំណុចប្រសព្វរវាង (E) និងអក្ស័តូចគឺជាគូចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$\begin{cases}\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\\x=4\end{cases}$ គេទាញ $\frac{y^2}{9}=1$ ឬ $y=\pm3$ ។

ដូចនេះ $A(4,-3)$ និង $B(4,3)$

២)សង់ (E) ៖



III-១)កំណត់ចំនួនពិត a,b និងc ៖

$$\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x+2}$$

$$\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{a(x-1)(x+2)+\mathrm{b}(\mathrm{x}+2)+\mathrm{c}(\mathrm{x}-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

គេទាញ $x^2-2x-2=a(x-1)(x+2)+b(x+2)+c(x-1)^2 \quad (1)$

តាម(1)ចំពោះ $x=1$ គេបាន $-3=3b$ នោះ $b=-1$

ចំពោះ $x=-2$ គេបាន $6=9c$ នោះ $c=\frac{2}{3}$

ចំពោះ $x=0$ គេបាន $-2=-2a+2b+c$

គេទាញ $a=1+b+\frac{c}{2}=1-1+\frac{1}{2}.\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ ។

ដូចនេះ $a=\frac{1}{3}\,;b=-1\,,c=\frac{2}{3}$ ។

២)គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{-1}^{0}\left(\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)}\right).dx$

ចំពោះ $a=\frac{1}{3}\,;b=-1\,,c=\frac{2}{3}$

គេមាន $\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{3(x+2)}$

គេបាន $I=\frac{1}{3}\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x-1}-\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{2}{3}\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x+2}$

$$=\frac{1}{3}\int_{-1}^{0}\frac{(x-1)'}{x-1}.dx-\int_{-1}^{0}\frac{(x-1)'}{(x-1)^2}.dx+\frac{2}{3}\int_{-1}^{0}\frac{(x+2)'}{x+2}.dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\ln|x-1|\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{x-1}\right]_{-1}^{0}+\frac{2}{3}\left[\ln|x+2|\right]_{-1}^{0}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\ln 1-\ln 2\right]+\left[-1+\frac{1}{2}\right]+\frac{2}{3}\left[\ln 2-\ln 1\right]$$

$$=-\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\ln 2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln 2$$

ដូចនេះ $I=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln 2$ ។

IV-១)រកសមីការស្វ៊ែ (S) ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$ ៖

គេមាន $A(2;2;0)$; $B(0;2;2)$ និង $C(1;0;1)$

តាង I ជាផ្ចិតរបស់ស្វ៊ែនោះ I ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[AB]$

គេបាន $I(\frac{2+0}{2};\frac{2+2}{2};\frac{0+2}{2})$ ឬ $I(1,2,1)$ហើយ $\overrightarrow{AB}=(-2;0;2)$

នោះ $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4+0+4}=2\sqrt{2}$ និង $R=\frac{AB}{2}=\sqrt{2}$ (កាំរបស់ស្វ៊ែ)

តាមរូបមន្ត $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

ដូចនេះ $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2$ ។

រកកូអរដោនេនៃចំណុចប្រសព្វទាំងពីររវាងស្វ៊ែ(S) និងបន្ទាត់(d)

គេមាន $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2 \\ z = 1+t \end{cases}$ (1) និង $(S) : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$ (2)

យក(1)ជំនួសក្នុង(2)គេបាន $(1+t-1)^2 + (2-2)^2 + (1+t-1)^2 = 2$

សមមូល $2t^2 = 2$ គេទាញ $t_1 = -1$; $t_2 = 1$ ។

ចំពោះ $t_1 = -1$ យកជួសក្នុង (1) គេបាន $x = 0 , y = 2 , z = 0$ ។

ចំពោះ $t_2 = 1$ យកជួសក្នុង (1) គេបាន $x = 2 , y = 2 , z = 2$ ។

ដូចនេះចំណុចប្រសព្វទាំងពីររវាងស្វ៊ែ(S) និងបន្ទាត់(d)គឺ $(0,2,0);(2,2,2)$ ។

២)រកកូអរដោនេនៃវ៉ិចទ័រផលគុណ $\vec{n} = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}$ ៖

គេមាន $\overrightarrow{CA} = (1, 2, -1)$; $\overrightarrow{CB} = (-1, 2, 1)$

គេបាន $\vec{n} = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 0.\vec{j} + 4\vec{k}$

ដូចនេះ $\vec{n} = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = (4,0,4)$ ។

គណនាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔABC ៖

គេបាន $S_{ABC} = \frac{1}{2} | \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} | = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 0^2 + 4^2} = 2\sqrt{2}$ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា)

រកសមីការប្លង់ (ABC) ៖

វ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់(ABC) គឺ $\vec{n} = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = (4,0,4)$

គេបាន $(ABC) : a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$$4(x-2) + 0(y-2) + 4(z-0) = 0$$

$$4x - 8 + 4z = 0$$

ដូចនេះ $(ABC) : x + z - 2 = 0$ ។

៣)រកកូអរដោនេនៃចំណុច M និង N ៖

ប្លង់ (ABC) ជួប (ox) ត្រង់ M នោះ $y_M = z_M = 0$ តាម $(ABC): x+z-2=0$

គេទាញបាន $x_M - 2 = 0$ ឬ $x_M = 2$ ។

ប្លង់ (ABC) ជួប (oz) ត្រង់ N នោះ $x_N = y_N = 0$ $(ABC): x+z-2=0$

គេទាញបាន $z_N - 2 = 0$ ឬ $z_N = 2$ ។

ដូចនេះ $M(2\,,0\,,0)$ និង $N(0,0,2)$ ។

បង្ហាញថា $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ និង $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MN} = 0$ ៖

គេមាន $\overrightarrow{AB} = (-2,0,2)$ & $\overrightarrow{MN} = (-2\,,0\,,2)$ នោះ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ ។

ហើយ $\overrightarrow{MA} = (0,2,0)$ & $\overrightarrow{MN} = (-2,0,2)$

នោះ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MN} = (0)(-2)+(2)(0)+(0)(2) = 0$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ និង $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MN} = 0$ ។

ទាញបញ្ជាក់ថា $ABNM$ ជាចតុកោណកែង៖

ដោយគេមាន $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MN} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MN}$ និង $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$

នោះ $ABNM$ ជាចតុកោណកែង។

៤)រកចម្ងាយពីចំណុច $D(0,2,0)$ ទៅប្លង់ (ABC) ៖

តាង d ជាចម្ងាយ ពីចំណុច $D(0,2,0)$ ទៅប្លង់ $(ABC): \mathrm{x}+\mathrm{z}-2=0$

គេបាន $d = \dfrac{|x_D + z_D - 2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{|0+0-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

ដូចនេះ $d = \sqrt{2}$ (ឯកតាប្រវែង)។

ទាញរកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែត $DBCA$ ៖

តាមរូបមន្ត $V_{DBCA} = \dfrac{1}{3} S_{ABC} \times d = \dfrac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \dfrac{4}{3}$

ដូចនេះ $V_{DBCA} = \dfrac{4}{3}$ (ឯកតាមាឌ)។

V-១)គណនា $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to0^+} f(x)$ ៖

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2+\ln x}{x^2}$

គេបាន $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\dfrac{x^2+\ln x}{x^2}=\lim_{x\to0^+}(1+\dfrac{\ln x}{x^2})=-\infty$

ព្រោះ $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}(1+\dfrac{\ln x}{x^2})=1$

ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$ ។

ដូចនេះ $\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ ។

កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃខ្សែកោង (C) ៖

ដោយ $\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ នោះ $x=0$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរ

និងបន្ទាត់ $y=1$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃខ្សែកោង (C)។

២)បង្ហាញថា f មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $x=\sqrt{e}$ ហើយគណនា $f(\sqrt{e})$ ៖

គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ៖

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2+\ln x}{x^2}=1+\dfrac{\ln x}{x^2}$ កំណត់គ្រប់ $x\in D_f=(0,+\infty)$ ។

គេបាន $f'(x)=\dfrac{(\ln x)'x^2-(x^2)'\ln x}{(x^2)^2}=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

ចំពោះ $x\in D_f=(0,+\infty)$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូចភាគយក $1-2\ln x$ ។

-បើ $1-2\ln x>0\Leftrightarrow 0<x<\sqrt{e}$ នោះ $f'(x)>0$ ។

-បើ $1-2\ln x=0\Leftrightarrow x=\sqrt{e}$ នោះ $f'(x)=0$ ។

-បើ $1-2\ln x<0\Leftrightarrow x>\sqrt{e}$ នោះ $f'(x)<0$ ។

ដោយត្រង់ $x=\sqrt{e}$ គេមាន $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី (+) ទៅ (–) នោះអនុគមន៍ f

មានតម្លៃ អតិបរមាធៀបមួយត្រង់ចំណុច $x=\sqrt{e}$ គឺ ៖

$f(\sqrt{e})=1+\dfrac{\ln\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2}=1+\dfrac{1}{2e}=1.18$ ។ ដូចនេះ $f(\sqrt{e})=1.18$ ។

គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ៖

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	1.18	↘	1

៣)កំណត់កូអរដោណេចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) និងអាស៊ីមតូតដេក ៖

គេមាន $\begin{cases} y = \dfrac{x^2 + \ln x}{x^2} \\ y = 1 \end{cases}$

គេបាន $\dfrac{x^2 + \ln x}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \ln x = 0$ ឬ $x = 1$ ។

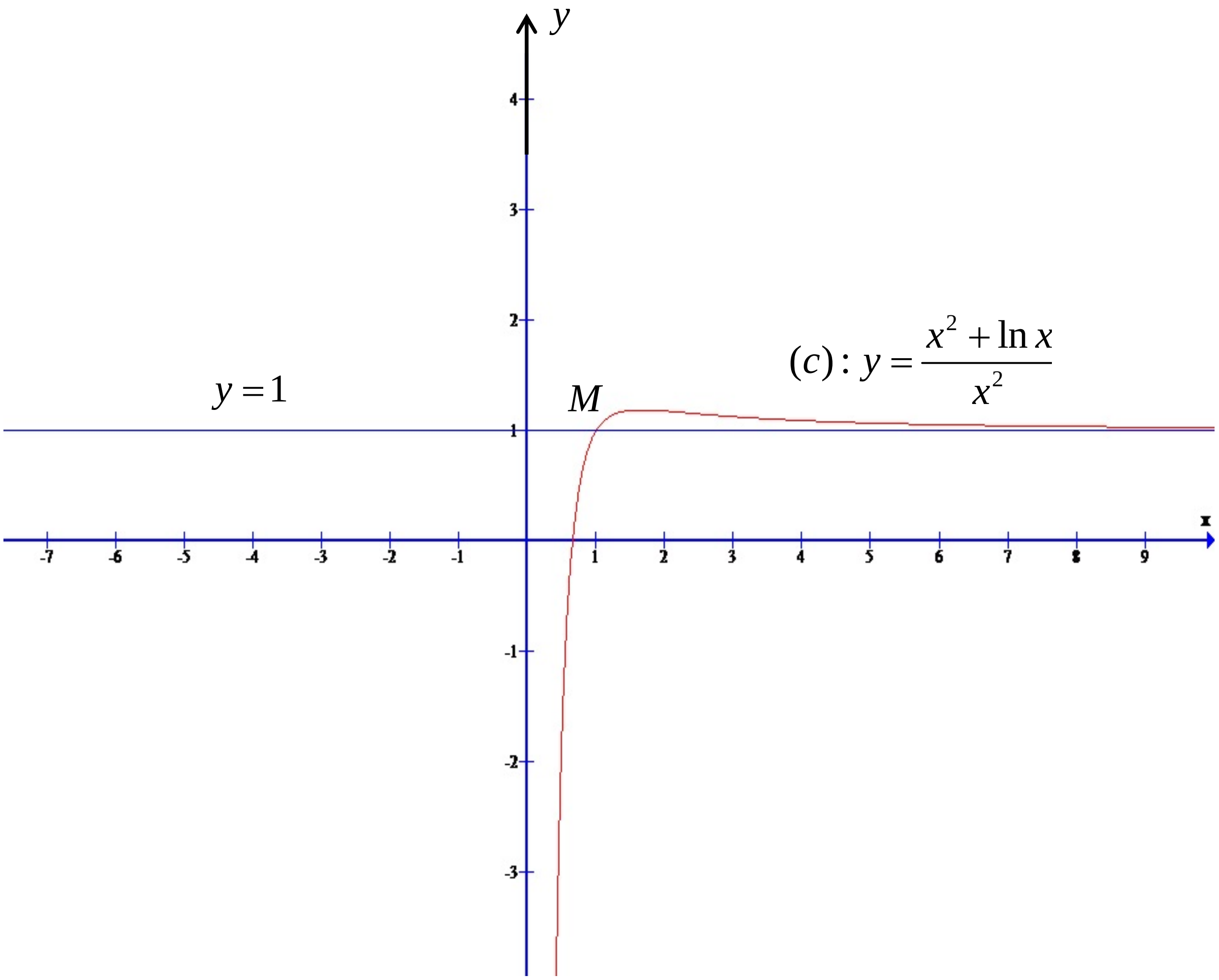
ដូចនេះ ចំណុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (C) និងអាស៊ីមតូតដេកគឺ $M(1,1)$ ។

គណនា $f(\frac{1}{2})$ ៖

គេមាន $f(x) = \dfrac{x^2 + \ln x}{x^2}$ នោះ $f(\frac{1}{2}) = 1 + \dfrac{\ln \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 1 - 4\ln 2 = 1 - 4(0.7) = -1.8$

ដូចនេះ $f(\frac{1}{2}) = -1.8$ ។

សង់ខ្សែកោង (C) ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ៖



វិញ្ញាសាទី០៧

រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន**

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិ និង អាហារូបករណ៍

I-អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos 2x}}{x\sin x+x^2}$ ចំពោះ $x\neq 0$ និង $f(0)=\frac{1}{8}\ln(\sqrt{a})$

កំណត់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់នៅត្រង់ $x=0$ ។

II-គេមានក្រាប $(c_1):\ y=f(x)=ax+b+e^{x-1}$

និង $(c_2):\ y=g(x)=1-x\ln x$ ។

កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ (c_1) និង (c_2) ប៉ះគ្នានៅត្រង់ចំណុច $M(1\ ,1)$

III-គេឲ្យប៉ារ៉ាបូល $(p):\ y=f(x)=x^2-2x+2$ ហើយ A និង B

ជាចំណុចពីរផ្សេងគ្នាមានអាប់ស៊ីស a និង b រៀងគ្នាស្ថិតនៅលើ (p) ។

ក)ចូរសង់ប៉ារ៉ាបូល (p) ខាងលើក្នុងតម្រុយ $(o,\vec{i}\ ,\vec{j})$ ។

ខ)ចូរបង្ហាញថា $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\frac{a+b}{2})$ ។

គ)ស្រាយតាមបែបធរណីមាត្រនូវសមភាព $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\frac{a+b}{2})$ ។

IV-គេឲ្យ $y=\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$ ដែល $x>0$ និង $x\neq e$

គណនាឌីផេរ៉ង់ស្យែល dy រួចទាញ បញ្ជាក់ថា $2x\frac{dy}{dx}=(1+y)^2$ ។

V-កោណបរិវត្តន៍មួយមានកម្ពស់ **12*m*** និង កាំថាសបាត **6*m*** ។

គេសង់ស៊ីឡាំងមួយចារឹកក្នុងកោណនេះ ។

កំណត់កម្ពស់ និង កាំថាសបាតរបស់ស៊ីឡាំងដោយដឹងថាវាមានមាឌអតិបរមា ។

VI-អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{x^2-6x+1}{x^2+1}$

មានក្រាប តម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

ក)កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងអស៊ីមតូតដេកជាមួយក្រាប (C) ។

ខ)គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា ។ កំណត់តម្លៃអតិបរមាធៀប និង អប្បបរមាធៀបនៃ f ។

គ)ស្រាយបញ្ជាក់ថា $I(0,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។

កំណត់សមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះក្រាប (C) ត្រង់ I ។

ឃ)សង់តារាងអថេរភាពនៃ f រួចគូសក្រាប (C) និង បន្ទាត់ (T) ។

ង)ដោយប្រើក្រាប (C) កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឲ្យសមីការ

$(k-1)x^2+6x+k-1=0$ មានឫសពីរ x_1 និង x_2

ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $0<x_1\le x_2$ ។

VII-ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យចំណុច $A(1,2,3);B(2,3,-6);\ C(-2,1,-2)$ និង $D(0,4,0)$ ។

១)គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}$ រួចទាញថាបីចំណុច B,C,D មិនរត់ត្រង់គ្នា

គណនាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ BCD រួចកំណត់សមីការប្លង់ (BCD) ។

២)គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ រួចទាញរកចម្ងាយពីចំណុច A ទៅប្លង់ (BCD) ។

៣) H ជាចំណោលកែងនៃ A លើប្លង់បាត (BCD) ។

កំណត់សមីការបន្ទាត់ (AH) រួចរកកូអរដោនេ H ។

អត្រាកំណែគំរូ

I- កំណត់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់នៅត្រង់ $x=0$

គេមាន $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos 2x}}{x\sin x+x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-1-\cos 2x}{(x\sin x+x^2)(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos 2x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x(\sin x+x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos 2x})}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin^2 x}{x}}{(\dfrac{\sin x}{x}+1)(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos 2x})}=\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់នៅត្រង់ $x=0$ លុះត្រាតែ $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

សមមូល $\dfrac{1}{8}\ln(\sqrt{a})=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ នាំឲ្យ $\sqrt{a}=e^{\sqrt{2}}$ ឬ $a=e^{2\sqrt{2}}$ ដែល

e ជាគោលលោការីតនេពែ ។ ដូចនេះ $a=e^{2\sqrt{2}}$ ជាតម្លៃដែលត្រូវរក ។

II-កំណត់ចំនួនពិត a និង b ៖

ដើម្បីឲ្យ (c_1) និង (c_2) ប៉ះគ្នានៅត្រង់ចំណុច $M(1\,,\,1)$ លុះត្រាតែ

$$\begin{cases} f'(1)=g'(1) \\ f(1)=g(1)=1 \end{cases}$$

គេមាន $f'(x)=(ax+b+e^{x-1})'=a+e^{x-1}$ នោះ $f'(1)=a+1$

ហើយ $g'(x)=(1-x\ln x)'=-\ln x-1$ នោះ $g'(1)=-1$

គេបាន $f'(1)=g'(1)\Leftrightarrow a+1=-1\Rightarrow a=-2$ ហើយ

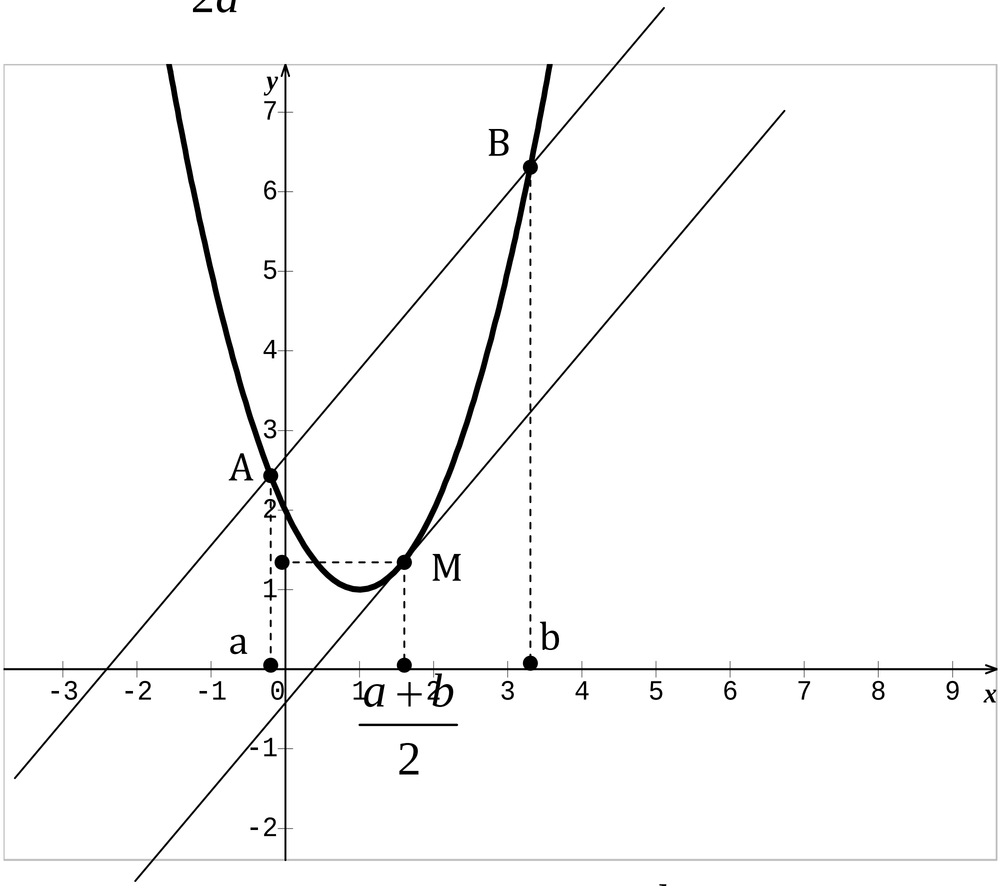
$f(1)=a+b+1=1\Leftrightarrow b=-a=-(-2)=2$

ដូចនេះ $a=-2$, $b=2$ ។

III-ក) សង់ប៉ារ៉ាបូល (p)

ប៉ារ៉ាបូល (p): $y = f(x) = x^2 - 2x + 2$

មានបន្ទាត់ $x = -\dfrac{b}{2a} = 1$ ជាអក្សឆ្លុះ និងចំណុច $S(1,1)$ ជាកំពូល ។



M

ខ) បង្ហាញថា $f(b) - f(a) = (b-a)\, f'(\dfrac{a+b}{2})$

គេមាន $f(x) = x^2 - 2x + 2$ នោះ $f'(x) = 2x - 2$

គេបាន

$$f(b) - f(a) = (b^2 - 2b + 2) - (a^2 - 2a + 2) = (b^2 - a^2) - 2(b-a)$$
$$= (b-a)(b+a) - 2(b-a)$$
$$= (b-a)(b+a-2) \quad (1)$$

ហើយ $f'(\dfrac{a+b}{2}) = 2(\dfrac{a+b}{2}) - 2 = a + b - 2$

នោះ $(b-a)f'(\frac{a+b}{2})=(b-a)(a+b-2)$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\frac{a+b}{2})$ ពិត ។

គ)ស្រាយតាមបែបធរណីមាត្រនូវសមភាព $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\frac{a+b}{2})$

យក M ជាចំណុចមានអាប់ស៊ីស $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{a+b}{2}$ ស្ថិតនៅលើ (p) ។

យើងសង់បន្ទាត់ (AB) និងបន្ទាត់ (T) ដែលប៉ះនឹង (p) ត្រង់ចំណុច M ។

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (AB) គឺ $m_1=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ហើយមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (T)គឺ$m_2=f'(\frac{a+b}{2})$ ។

តាមក្រាហ្វិកយើងពិនិត្យឃើញថា$(AB)//(T)\Leftrightarrow m_1=m_2$

គេទាញ $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\frac{a+b}{2})$

នោះ $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\frac{a+b}{2})$ ពិត ។

IV- គណនាឌីផរ៉ង់ស្យែល dy រួចទាញ បញ្ជាក់ថា $2x\frac{dy}{dx}=(1+y)^2$

គេបាន $dy=y'.dx=\frac{(1+\ln x)'(1-\ln x)-(1-\ln x)'(1+\ln x)}{(1-\ln x)^2}.dx$

$$=\frac{\frac{1}{x}(1-\ln x)+\frac{1}{x}(1+\ln x)}{(1-\ln x)^2}=\frac{2}{x(1-\ln x)^2}.dx$$

ដូចនេះ $dy=\frac{2}{x(1-\ln x)^2}.dx$ ។

តាម $dy = \frac{2}{x(1-\ln x)^2}.dx$ គេទាញ $2x\frac{dy}{dx} = \frac{4}{(1-\ln x)^2}$ (1)

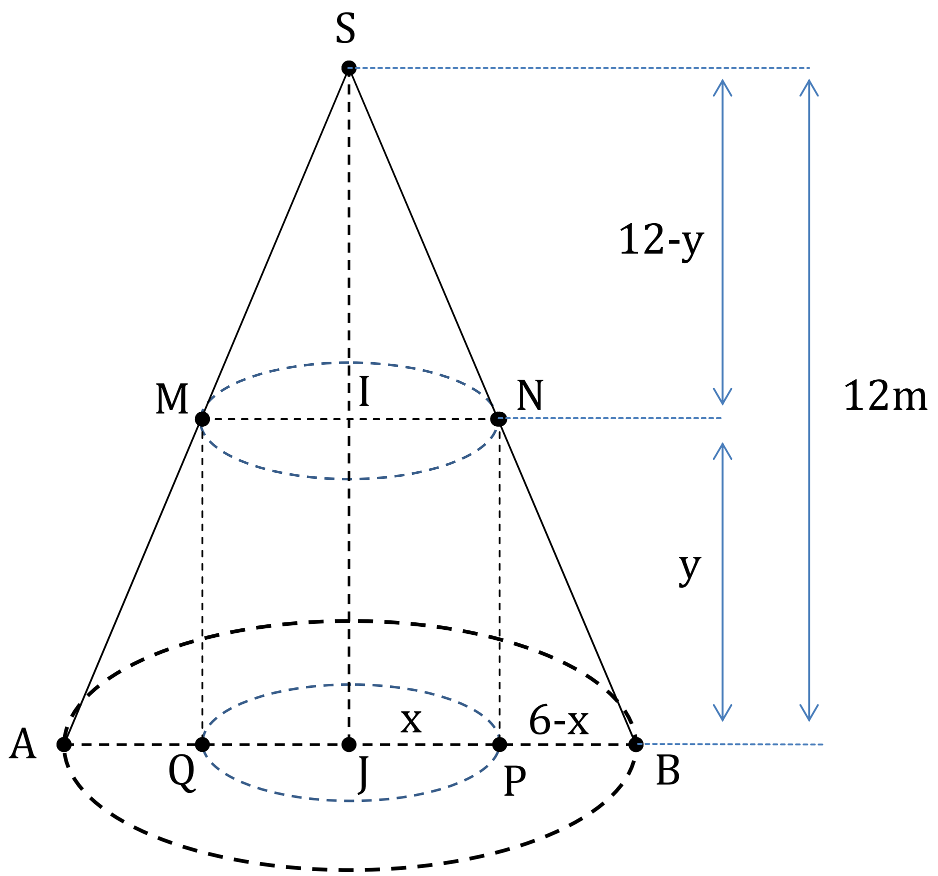
ហើយដោយ $(1+y)^2 = (1+\frac{1+\ln x}{1-\ln x})^2 = \frac{4}{(1-\ln x)^2}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន $2x\frac{dy}{dx} = (1+y)^2$ ពិត ។

V-កំណត់រង្វាស់កម្ពស់ និង កាំបាតរបស់ស៊ីឡាំង ៖

តាង x ជាកាំបាត និង y ជាកម្ពស់របស់ស៊ីឡាំង (គិតជាម៉ែត្រ)

យក V ជាមាឌរបស់ស៊ីឡាំងនោះគេបាន $V = \pi x^2 y$ **(1)**



ត្រីកោណកែង SIN ដូចត្រីកោណកែង SJB ព្រោះ $\angle SIN = \angle SJP$

គេបាន $\frac{SI}{SJ} = \frac{IN}{JB}$ ឬ $\frac{12-y}{12} = \frac{x}{6}$ នោះ $y = 2(6-x)$ (2)

យក (2) ជំនួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$V = 2\pi x^2(6-x) = 2\pi(6x^2 - x^3)$ ដែល $0 < x < 6$ ។

ដេរីវេ $V' = 2\pi\left(12x - 3x^2\right)$

បើ $V' = 0$ នោះ $12x - 3x^2 = 3x(4-x) = 0$ ឬ $x = 4$ ព្រោះ $x > 0$ ។

ដេរីវេទីពីរ $V'' = 2\pi(12-6x)$ នោះ $V''(4) = -24\pi < 0$ នាំឲ្យ V

មានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ចំណុច $x = 4$ ហើយ $y = 4$ ។

ដូចនេះ $x = 4\ m$, $y = 4m$ ។

VI-ក)កំណត់សមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ៖

ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ $D_f = \mathbb{R}$ ។

គេបាន $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-6x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1$

ដូចនេះបន្ទាត់ $(\Delta): y = 1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកជាមួយក្រាប (C) ។

សិក្សាទីតាំងធៀបរវាងអាស៊ីមតូតដេកជាមួយក្រាប (C) ៖

គេមាន $f(x) = y = \frac{x^2-6x+1}{x^2+1} - 1 = \frac{-6x}{x^2+1}$ មានសញ្ញាដូច $-6x$ ព្រោះ $x^2+1 > 0\ \forall x \in \Re$ ។

- បើ $-6x > 0$ ឬ $x \in (-\infty, 0)$ នោះ $f(x) - y > 0$ ។

ដូចនេះខ្សែកោង (C) នៅខាងលើអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

-បើ $-6x < 0$ ឬ $x \in (0, +\infty)$ នោះ $f(x) - y < 0$ ។

ដូចនេះខ្សែកោង (C) នៅខាងក្រោមអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (C) ។

-បើ $-6x = 0$ ឬ $x = 0$ នោះ $f(x) - y = 0$ ។

ដូចនេះខ្សែកោង (C) នៅប្រសព្វអាស៊ីមតូតដេកត្រង់ចំណុច $I\ (0,1)$ ។

ខ)គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2-6x+1}{x^2+1}=1-\dfrac{6x}{x^2+1}$

គេបាន $f'(x)=-\dfrac{6(x^2+1)-12x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{6(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{6(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$ ។

ចំពោះគ្រប់ $x\in D_f$ គេមាន $(x^2+1)^2>0$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $6(x-1)(x+1)$ ។

តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)=\dfrac{6(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

តាមតារាងខាលើអនុគមន៍ $f'(x)>0$ ចំពោះ $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ និង $f'(x)<0$ ចំពោះ $x\in(-1\,,1\;)$ ។

កំណត់តម្លៃអតិបរមាធៀប និង អប្បបរមាធៀបនៃ f ៖

ដោយត្រង់ $x=-1$ អនុគមន៍ f' ប្តូរសញ្ញាពី $(+)$ ទៅ $(-)$ នោះវាមានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=-1$ គឺ $f(-1)=\dfrac{1+6+1}{1+1}=4$ និង ត្រង់ $x=1$ អនុគមន៍ f' ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$ នោះវាមានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=1$ គឺ $f(1)=\dfrac{1-6+1}{1+1}=-2$ ។

គ)ស្រាយបញ្ជាក់ថា $I(0,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប(C) ៖

តាមរូបមន្ត $f(2a-x)+f(x)=2b$ ហើយ $a=0$, $b=1$

នោះ $f(-x)+f(x)=2$

ដោយ $f(x)=\dfrac{x^2-6x+1}{x^2+1}$ និង $f(-x)=\dfrac{x^2+6x+1}{x^2+1}$

គេបាន $f(-x)+f(x)=\dfrac{x^2+6x+1}{x^2+1}+\dfrac{x^2-6x+1}{x^2+1}=\dfrac{2(x^2+1)}{x^2+1}=2$ ពិត

ដូចនេះ$I(0,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប(C) ។

កំណត់សមីការបន្ទាត់(T)ប៉ះក្រាប(C)ត្រង់I ៖

តាមរូបមន្ត $(T):\ y-y_I=y'_I\ (x-x_I)$

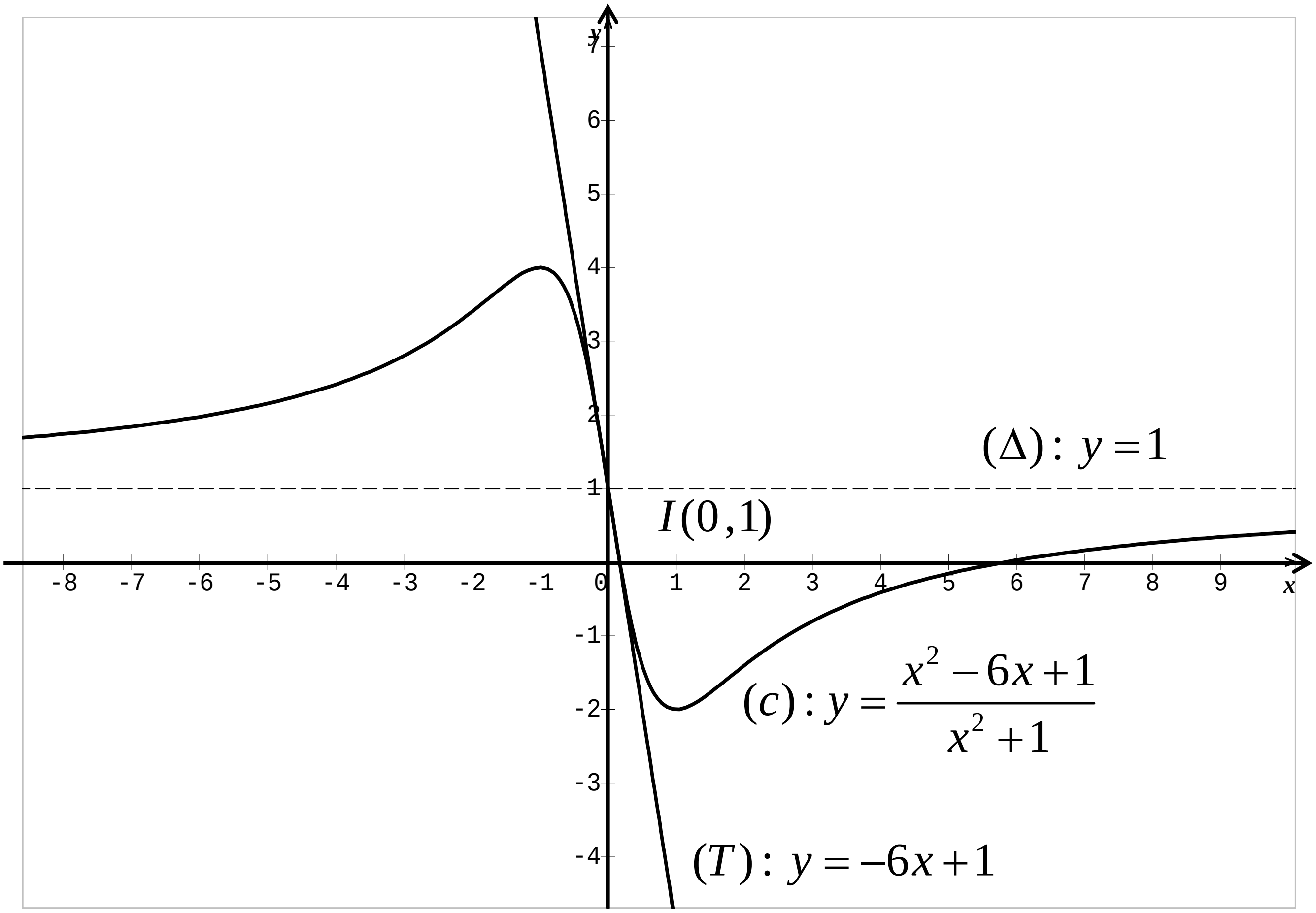
ដោយ $y'_I=f'(0)=\dfrac{6(-1)(1)}{1^2}=-6$

គេបាន $y-1=-6x$ នោះ $(T): y=-6x+1$ ។

ដូចនេះ$(T): y=-6x+1$ ។

ឃ)សង់តារាងអថេរភាពនៃ f រួចគូសក្រាប (C) និង បន្ទាត់ (T) ៖

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	1	↗	4	↘	-2	↗	1



ង) កំណត់តម្លៃ k ដើម្បីឲ្យសមីការ មានឫសពីរ x_1 និង x_2 ផ្ទៀងផ្ទាត់ $0<x_1\le x_2$

សមីការ $(k-1)x^2+6x+k-1=0$ អាចសរសេរ ៖

$$kx^2-x^2+6x+k-1=0$$

$$k(x^2+1)=x^2-6x+1$$

$$k = \frac{x^2+6x+1}{x^2+1}$$

ជាសមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $(d): y=k$

និង ក្រាប $(c): y=\frac{x^2-6x+1}{x^2+1}$ ។

តាមក្រាបដើម្បីឲ្យសមីការ មានឬសពីរ x_1 និង x_2 ផ្ទៀងផ្ទាត់ $0 < x_1 \le x_2$
លុះត្រាតែ $m \in [-2\ ,1\ )$ ។

VII-១)គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}$ រួចទាញថាបីចំណុច B, C, D
មិនរត់ត្រង់គ្នា៖

គេមាន $\overrightarrow{BC} = (-4\ ,-2\ ,4)$; $\overrightarrow{BD} = (-2\ ,1\ ,6)$
គេបាន

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -16\,\vec{i} + 16\,\vec{j} - 8\,\vec{k}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = (-16\ ,16\ ,-8)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = (-16\ ,16\ ,-8) \ne \vec{O} = (0,0,0)$ នោះវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}$
និង $\overrightarrow{BD}$ មិនកូលីនេអ៊ែគ្នា ។
ដូចនេះ B, C, D មិនរត់ត្រង់គ្នា ។
គណនាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណ BCD ៖

តាមរូបមន្ត $S_{BCD} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-16)^2 + 16^2 + (-8)^2} = 12$ (ឯកតាផ្ទៃ)

កំណត់សមីការប្លង់ (BCD) ៖

ប្លង់ (BCD) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{N} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = (-16\ ,16\ ,-8)$
ហើយកាត់តាម $B(2,3,-6)$
តាមរូបមន្ត $(BCD): a(x - x_D) + b(y - y_D) + c(z - z_D) = 0$

$$-16(x-2)+16(y-3)-8(z+6)=0$$
$$-16x+32+16y-48-8z-48=0$$
$$-16x+16y-8z-64=0$$

ដោយសម្រួលនឹង -8 គេបាន $(BCD):2x-2y+z+8=0$ ។

២)គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ៖

តាមរូបមន្ត $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{BA}\right|$

ដោយ $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=(-16\ ,16\ ,-8)$ និង $\overrightarrow{BA}=(-1,-1,9)$

នោះ $V_{BCDA}=\frac{1}{6}|16-16+72|=12$(ឯកតាមាឌ)

ទាញរកចម្ងាយពីចំណុច A ទៅប្លង់(BCD) ៖

តាមរូបមន្ត $V_{BCD}=\frac{1}{3}S_{BCD}\times d(A,(BCD))$

គេទាញ $d(A,(BCD))=\frac{3V_{ABCD}}{S_{BCD}}=\frac{3\times 12}{12}=3$(ឯកតាប្រវែង)។

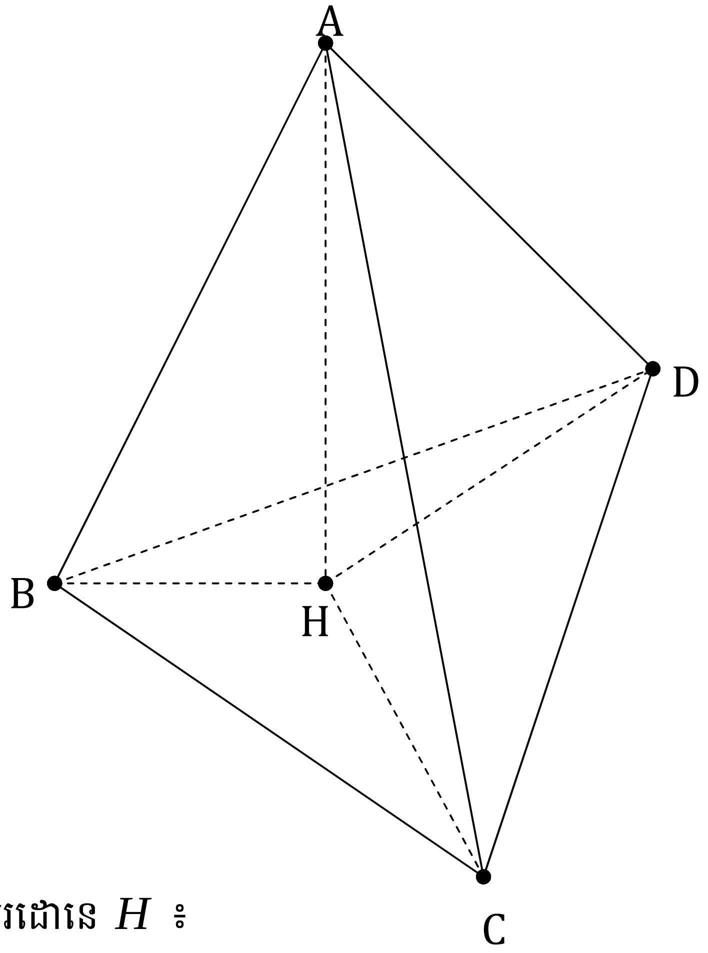
៣) កំណត់សមីការបន្ទាត់(AH)រួចរកកូអរដោនេ H ៖

វ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ (AH) គឺ $\vec{u}=(2,-2,1)$ ដែល $\vec{n}=(2,-2,1)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ $(BCD):2x-2y+z+8=0$ ព្រោះ $(AH)\perp(BCD)$ ។

តាមរូបមន្តសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រ $(AH):\begin{cases}x=x_A+at\\ y=y_A+bt\\ z=z_A+ct\quad ,t\in IR\end{cases}$

ដោយ $A(1,2,3)$ និង $\vec{u}=(2,-2,1)$

ដូចនេះ $(AH): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \quad , t \in IR \end{cases}$ ។



រកកូអរដោនេ H ៖

យកសមីការ (AH) ជួសក្នុងសមីការប្លង់ (BCD) គេបាន

$2(1+2t) - 2(2-2t) + 3 + t + 8 = 0$

សមមូល $2 + 4t - 4 + 4t + 3 + t + 8 = 0$

គេទាញ $t = -1$ យកជួសក្នុង (AH) គេបាន $x = -1$, $y = 4$, $z = 2$ ។

ដូចនេះ $H(-1 , 4 , 2)$ ។

វិញ្ញាសាទី០៨

រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន**

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិ និង អាហារូបករណ៍

I- គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $a = -\sqrt{3} + i$ និង $b = \sqrt{2}(1+i)$

ក)គណនា $z = a^2 + b^2 + 3a\sqrt{3} + \sqrt{2}(1-3i)b$

រួចកំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ z ។

ខ)ចូរសរសេរ $u = a.b$ និង $v = \dfrac{a}{b}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

II- គេមាន $\vec{a}$ និង $\vec{b}$ ជាវ៉ិចទ័រពីក្នុងលំហ ។

ក) ចូរស្រាយថា $\vec{a} \times \vec{b} = \dfrac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$

ខ) ចូរស្រាយថា $\left(\vec{a} \,.\, \vec{b}\right)^2 + \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 . \left|\vec{b}\right|^2$ ។

III- គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{បើ } x \le 0 \\ x^2 + bx + c & \text{បើ } 0 < x < 2 \\ 2x - 2 & \text{បើ } x \ge 2 \end{cases}$

ក)ចូរកំណត់តម្លៃ b និង c ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\Re$ ។

ខ)ចូរសង់ក្រាប (c) តាង f ចំពោះតម្លៃ b និង c ទើបនឹងរកឃើញខាងលើ ។

គ)គណនាផ្ទៃក្រឡានៃមណ្ឌលប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប (c) និងអក្ស $(0x)$ ក្នុងចន្លោះ $x = -2$, $x = 3$ ។

IV- គេមានអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x)=\frac{e^{x^2-1}-bx+c}{\ln x}$ ដែល $x>0$
និង $x\neq 1$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃ b និង c ដើម្បីឲ្យ $\lim_{x\to 1} g(x)=-1$ ។

V- គេឲ្យចតុមុខនិយត័ ABCD មួយមានទ្រនុងស្មើ a ។
ក-ស្រាយថា $[AB]\perp[CD]$ ។
ខ-យក H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃចំណុច D លើប្លង់បាត (ABC) ហើយ K និង L ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ [AD] និង [BC] រៀងគ្នា ។
គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{HL}$ និង $\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{HD}$ ជាអនុគមន៍នៃ a ។

VI- គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\frac{x^2+6x}{2x^2-4x+4}$ មានក្រាប (c) ។
ក-គណនា $\lim_{x\to\infty} f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (c) ។
ខ-គណនា $f'(x)$ រួចកំណត់តម្លៃអតិបរមាធៀប និង អប្បបរមាធៀបនៃ f ។
គ-គូសតារាងអថេរភាពនៃ f រួចសង់ក្រាប (c) ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$

អត្រាកំណែគំរូ

I- ក)គណនា z រួចកំណត់ម៉ូឌុល និង អាគុយម៉ង់នៃ z

គេមាន $z=a^2+b^2+3a\sqrt{3}+\sqrt{2}(1-3i)b$

$$=a^2+b^2+3a\sqrt{3}+\sqrt{2}b-3\sqrt{2}ib$$

$$=(a+\sqrt{3})^2+(b-i\sqrt{2})^2+a\sqrt{3}+\sqrt{2}(1-i)b-1$$

ដោយ $a=-\sqrt{3}+i$ និង $b=\sqrt{2}(1+i)$

គេបាន

$$z=(-\sqrt{3}+i+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}+i\sqrt{2}-i\sqrt{2})^2+(-\sqrt{3}+i)\sqrt{3}+2(1-i)(1+i)-1$$
$$=-1+2-3+i\sqrt{3}+4-1$$
$$=1+i\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $z=1+i\sqrt{3}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $z=1+i\sqrt{3}=2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

ដូចនេះ z មានម៉ូឌុល $r=2$ និង អាគុយម៉ង់ $\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$ ។

ខ)សរសេរ $u=a.b$ និង $v=\frac{a}{b}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

គេមាន $a=-\sqrt{3}+i=2(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i.\frac{1}{2})=2(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

$$=2[\cos(\pi-\frac{\pi}{6})+i\sin(\pi-\frac{\pi}{6})]=2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$$

ហើយ $b=\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

គេបាន

$$u=a.b=4[\cos(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4})]=4(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12})$$

ហើយ $v=\frac{a}{b}=\frac{2}{2}[\cos(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4})]=\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}$

ដូចនេះ $u=4(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12})$ និង $v=\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}$ ។

II- ស្រាយថា $\vec{a}\times\vec{b}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})$

គេមាន $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{b}$

ដោយ $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}\ ,\ -\vec{b}\times\vec{a}=\vec{a}\times\vec{b}\ ,\ \vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}$

គេបាន $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2\,\vec{a}\times\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})$

ដូចនេះ $\vec{a}\times\vec{b}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})$ ។

ខ) ស្រាយថា $\left(\vec{a}\,.\,\vec{b}\right)^2+\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2.\left|\vec{b}\right|^2$

គេមាន $\vec{a}\,.\,\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos\theta$ និង $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|.|\vec{b}|\sin\theta$

គេបាន $\left(\vec{a}\,.\,\vec{b}\right)^2+\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2.\left|\vec{b}\right|^2\cos^2\theta+\left|\vec{a}\right|^2.\left|\vec{b}\right|^2\sin^2\theta$

$$=|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2$$

ដូចនេះ $\left(\vec{a}\,.\,\vec{b}\right)^2+\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2.\left|\vec{b}\right|^2$ ។

III-ក) កំណត់តម្លៃ b និង c ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\Re$ ៖

អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}x+2 & \text{បើ } x\le 0\\ x^2+bx+c & \text{បើ } 0<x<2\\ 2x-2 & \text{បើ } x\ge 2\end{cases}$

ដើម្បីឲ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $\Re$ លុះត្រាតែ និង គ្រាន់តែឲ្យ f ជាប់ត្រង់ចំណុច

$x=0$ និង $x=2$ នោះគេបាន $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\\ \lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)\end{cases}$

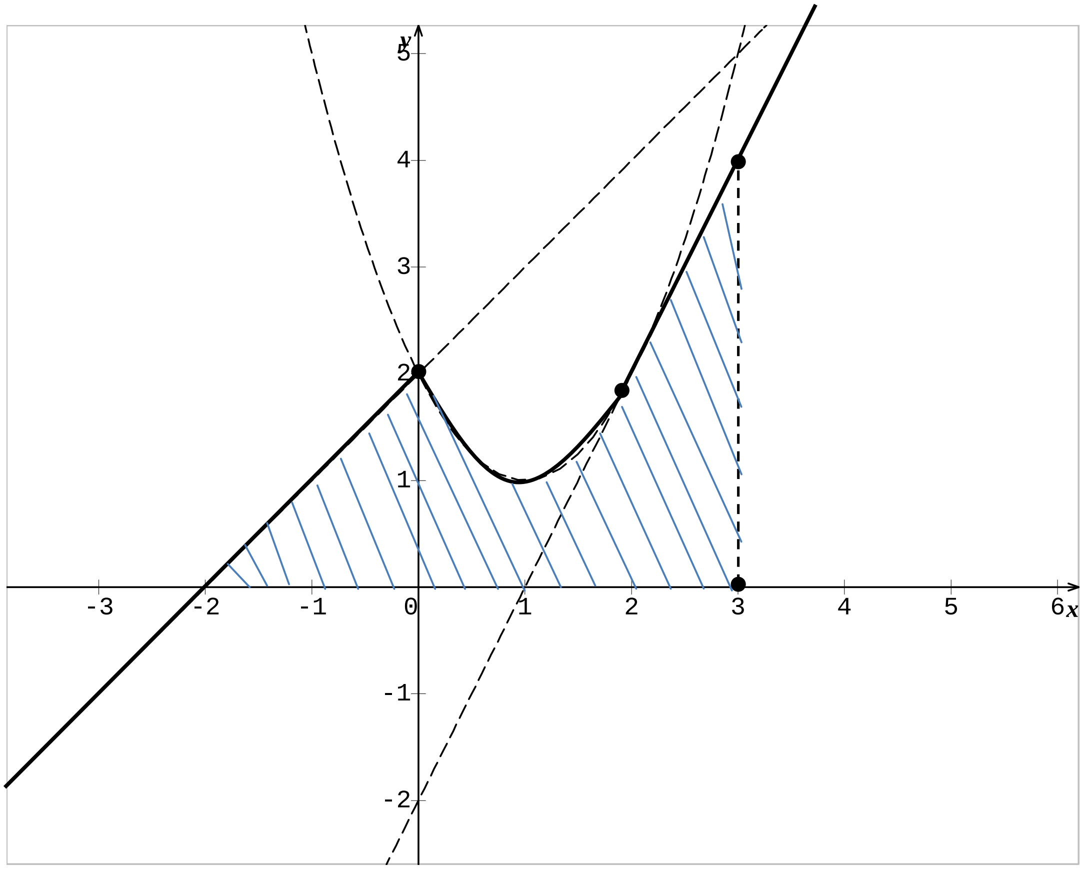
សមមូល $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}(x+2) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+bx+c) \\ \lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+bx+c) = \lim\limits_{x\to 2^+}(2x-2) \end{cases}$

សមមូល $\begin{cases} 2 = c \\ 4+2b+c = 2 \end{cases}$ សមមូល $\begin{cases} c = 2 \\ b = -2 \end{cases}$

ដូចនេះ $b = -2$, $c = 2$ ។

ខ) សង់ក្រាប (c) តាង f ចំពោះតម្លៃ b និង c ទើបនឹងរកឃើញខាងលើ

ចំពោះ $b = -2$, $c = 2$ គេបាន $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{បើ } x \le 0 \\ x^2-2x+2 & \text{បើ } 0 < x < 2 \\ 2x-2 & \text{បើ } x \ge 2 \end{cases}$



គ)គណនាផ្ទៃក្រឡានៃមណ្ឌលប្លង់ខណ្ឌដោយក្រាប (c) និងអក្ស (0x) ក្នុងចន្លោះ $x=-2$, $x=3$

គេបាន $S=\int_{-2}^{0}(x+2).dx+\int_{0}^{2}(x^2-2x+2).dx+\int_{2}^{3}(2x-2).dx$

$$S=\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right]_{0}^{2}+\left[x^2-2x\right]_{2}^{3}$$

$$=[0-(2-4)]+[(\frac{8}{3}-4+4)-0]+[(9-6)-(4-4)]$$

$$=2+\frac{8}{3}+3=\frac{23}{3}$$

ដូចនេះ $S=\frac{28}{3}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

IV- កំណត់តម្លៃ b និង c ដើម្បីឲ្យ $\lim_{x\to1}g(x)=-1$

គេមាន $\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}\frac{e^{x^2-1}-bx+c}{\ln x}$ (1)

ដើម្បីឲ្យ $\lim_{x\to1}g(x)=-1$ លុះត្រាតែ (1) មានរាង $\frac{0}{0}$ ព្រោះ $\ln x=0$

ចំពោះ $x=1$ហេតុនេះត្រូវឲ្យ $x=1$ ជាឫសនៃ $e^{x^2-1}-bx+c=0$

នោះ $1-b+c=0\Leftrightarrow c=b-1$ (2)

យក (2)ជំនួសក្នុង(1)គេបាន $\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}\frac{e^{x^2-1}-bx+b-1}{\ln x}$

តាង $x-1=t$ ឬ $x=1+t$ ហើយបើ $x\to1$ នោះ $t\to0$

គេបាន $\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{t\to0}\frac{e^{(1+t)^2-1}-b(1+t)+b-1}{\ln(1+t)}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{e^{t(2+t)}-1-bt}{\ln(1+t)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{e^{t(2+t)}-1}{t(2+t)}\times(2+t)-b}{\frac{\ln(1+t)}{t}}=2-b$$

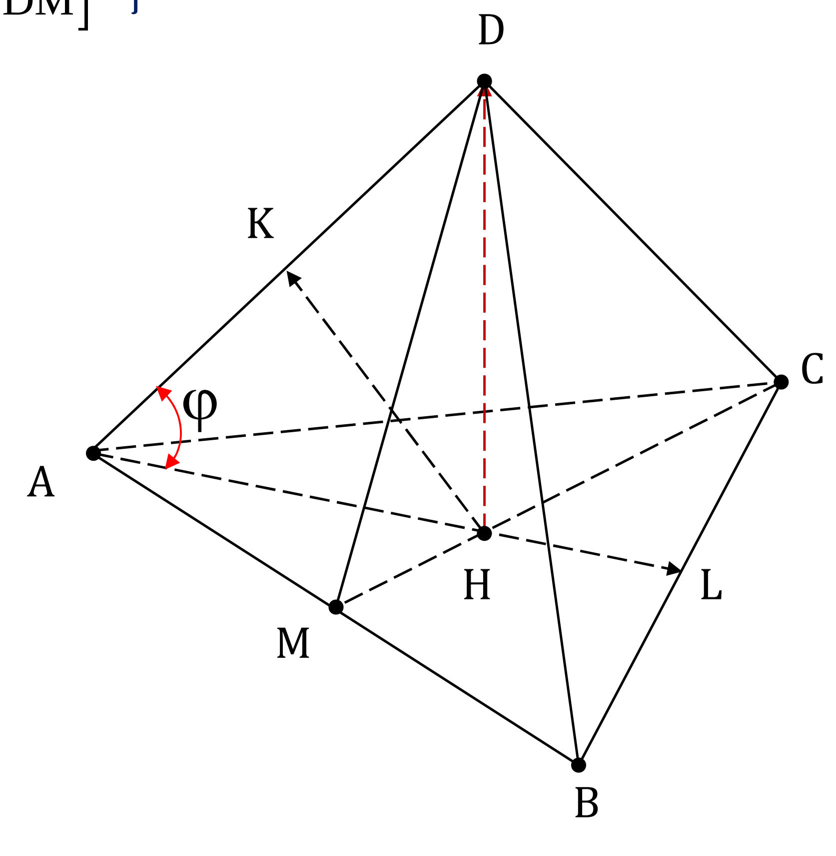
ដោយ $\lim_{x\to 1} g(x)=-1$ នោះគេទាញ $2-b=-1\Leftrightarrow b=3$

ហើយតាម(2)គេបាន $c=3-1=2$ ។

ដូចនេះ $b=3\,,\,c=2$ ។

V-ក-ស្រាយថា $[AB]\perp[CD]$ ៖

យក M ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $[AB]$ ដោយ ABC និង ABD សុទ្ធតែជាត្រីកោណសមង្ស័នោះ $[CM]$ និង $[DM]$ ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណ។ គេបាន $[AB]\perp[CM]$ និង $[AB]\perp[DM]$ ។



គេទាញបាន $(AB)\perp(CDM)$ ដោយ $(CD)\subset(CDM)$
នោះ $(AB)\perp(CD)$, ដូចនេះ $[AB]\perp[CD]$ ។

ខ-គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{HK}\,.\,\overrightarrow{HL}$ និង $\overrightarrow{HK}\,.\,\overrightarrow{HD}$ ជាអនុគមន៍នៃ a ៖

គេមាន $\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AK}$ នោះ $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{HL}=\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HL}+\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{HL}$

ដោយ $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HL}=-HA.HL$, $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{HL}=AK.HL\cos\varphi$
ដែល $\varphi=\angle DAL$

គេមាន $AL=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (កម្ពស់នៃត្រីកោណសមង្ស)

ហើយ $HA=\dfrac{2}{3}AL=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $HL=\dfrac{1}{3}AL=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $AK=\dfrac{a}{2}$

គេមាន $[DH]\perp(ABC)$ និង $(HA)\subset(ABC)$ នោះ $[DH]\perp[HA]$

នោះ DHA ជាត្រីកោណកែង ។ គេបាន $\cos\varphi=\dfrac{HA}{AD}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

ហេតុនេះ $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{HL}=-\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{6}+\dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\dfrac{\sqrt{3}}{3}=-\dfrac{a^2}{6}+\dfrac{a^2}{12}=-\dfrac{a^2}{12}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{HK}\,.\,\overrightarrow{HL}=-\dfrac{a^2}{12}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{HK}\,.\,\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{HA}\,.\,\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{AK}\,.\,\overrightarrow{HD}$

ដោយ $\overrightarrow{HA}\perp\overrightarrow{HD}\Leftrightarrow\overrightarrow{HA}\,.\,\overrightarrow{HD}=0$

ហើយ $\overrightarrow{AK}\,.\,\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{KA}\,.\,\overrightarrow{DH}$ តែ $\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{DK}$

(ព្រោះ K ជាចំណុចកណ្ដាល[AD])

គេបាន $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{DH}=DK.DH\cos\beta$

ដែល $\beta=\angle ADH=\frac{\pi}{2}-\varphi$

ហេតុនេះ $\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{HD}=DK.DH\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)=DK.DH\sin\varphi$

តាមទ្រឹស្ដីបទពីតាគរ័ក្នុងត្រីកោណកែង ADH គេមាន $AD^2=DH^2+HA^2$

គេបាន $DH^2=AD^2-HA^2=a^2-(\frac{a\sqrt{3}}{3})^2=\frac{6a^2}{9}$

គេទាញ $DH=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

ហើយក្នុងត្រីកោណកែង ADH គេមាន $\sin\varphi=\frac{DH}{AD}=\frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

គេបាន $\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{HD}=DK.DH\sin\varphi=\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{a^2}{3}$

ដូចនេះ: $\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{HD}=\frac{a^2}{3}$ ។

VI- ក-គណនា $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ រួចទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (c)

គេមាន $f(x)=\frac{x^2+6x}{2x^2-4x+4}$ មានក្រាប (c)

គេបាន $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+6x}{2x^2-4x+4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{2}$ ហើយបន្ទាត់ $y=\frac{1}{2}$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (c)

ខ-គណនា $f'(x)$ រួចកំណត់តម្លៃអតិបរមាធៀប និង អប្បបរមាធៀបនៃ f ៖

គេបាន

$$f'(x)=\frac{(2x+6)(2x^2-4x+4)-(4x-4)(x^2+6x)}{(2x^2-4x+4)^2}$$

$$=\frac{4x^3-8x^2+8x+12x^2-24x+24-4x^3-24x^2+4x^2+24x}{4(x^2-2x+2)^2}$$

$$=\frac{-16x^2+8x+24}{4(x^2-2x+2)^2}=\frac{2(-2x^2+x+3)}{(x^2-2x+2)^2}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{2(-2x^2+x+3)}{(x^2-2x+2)^2}$ ។

បើ $f'(x)=\dfrac{2(-2x^2+x+3)}{(x^2-2x+2)^2}=0 \Leftrightarrow -2x^2+x+3=0$

ដោយ $b=a+c$ គេទាញឫស $x_1=-1\,,\ x_2=-\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{2}$

តារាងសញ្ញានៃ $f'(x)=\dfrac{2(-2x^2+x+3)}{(x^2-2x+2)^2}$

ដោយចំពោះគ្រប់ $x\in\Re:\ (x^2-2x+2)^2>0$

នោះ $f'(x)=\dfrac{2(-2x^2+x+3)}{(x^2-2x+2)^2}$ មានសញ្ញាដូចភាគយក $-2x^2+x+3$ ។

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

តាមតារាងគេឃើញថាត្រង់ $x=-1$ គេមាន $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

និងត្រង់ $x=\dfrac{3}{2}$ គេមាន $f'(x)$ ប្តូរសញ្ញាពី$(+)$ ទៅ $(-)$ នោះបញ្ជាក់ថា f

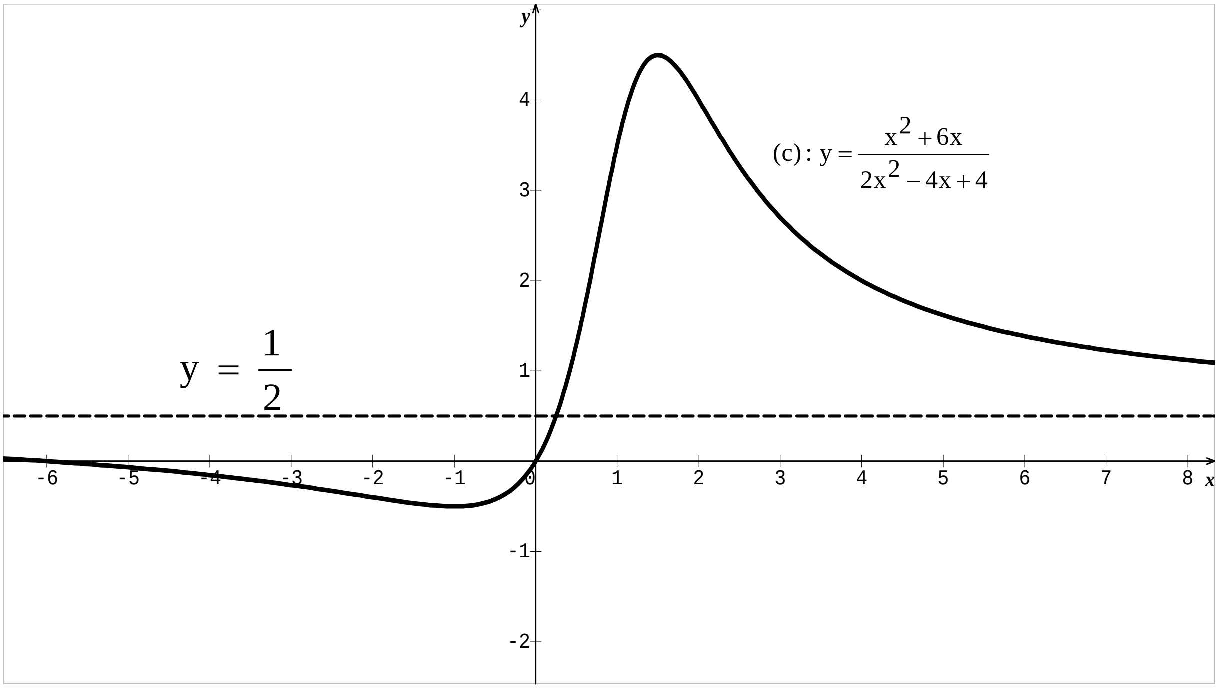
មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=-1$ គឺ $f(-1)=-\frac{1}{2}$

និងមានអតិបរមាធៀបត្រង់ $x=\frac{3}{2}$ គឺ $f(\frac{3}{2})=\frac{9}{2}$ ។

គ-គូសតារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{9}{2}$	↘	$\frac{1}{2}$

សង់ក្រាប (c) ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ៖



វិញ្ញាសាទី០៩

រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន**

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិ និង អាហារូបករណ៍

I. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = x + i.y$ ដែល x និង y ជាពីរចំនួនពិត ។

ចូរកំនត់តម្លៃ x និង y បើគេដឹងថា៖

$$(3+2i)z + (1+3i)\overline{z} = \frac{10}{2-i}$$ ($\overline{z}$ ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់នៃ z) ។

II. ចូរគណនាលីមីត ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2} - \cos x}{x^2}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{\sin x}$

III. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{e^x}{ax+b}$ ដែល $a \neq 0, a, b \in IR$

ក-ចូរគណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$

ខ-កំនត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ e ចំពោះ $x = 1$ ។

IV. គេឲ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{2}{1-x^2}$

ក.សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និង សង់ក្រាប (c) តាងអនុគមន៍ $y = f(x)$ ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់មួយ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

ខ.ចូរស្រាយថារង្វង់ $(\Gamma): x^2 + y^2 = 4$ ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) ត្រង់បីចំនុច A ,B,C ដែលគេនឹងបញ្ជាក់កូអរដោនេ។

គ.ចូរបង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

V. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}$ ដែល $x\neq 0$ និង $x\neq -1$

ក-កំនត់ចំនួនពិត A, B, C ដើម្បីឲ្យ $f(x)=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x+1}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$ ។

VI. គេឲ្យបន្ទាត់ពីរ $(L_1):\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-6}{4}=\dfrac{z+2}{3}$

និង $(L_2):\dfrac{x-3}{9}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-2}{-1}$ ។

ក-ចូរសរសេរសមីការបន្ទាត់កែងរួម (Δ) រវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) ។

ខ-គណនាចំងាយរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2) ។

អត្រាកំណែគំរូ

I. កំនត់តម្លៃ x និង y

គេមាន $(3+2i)z+(1+3i)\overline{z}=\dfrac{10}{2-i}$

ដោយ $z=x+i.y$ នាំឲ្យ $\overline{z}=x-i.y$

គេបាន $(3+2i)(x+iy)+(1+3i)(x-iy)=\dfrac{10}{2-i}$

$$3x+3iy+2ix-2y+x-iy+3ix+3y=\frac{10(2+i)}{5}$$

$$(4x+y)+i.(5x+2y)=4+2i$$

គេទាញបាន $\begin{cases}4x+y=4\\5x+2y=2\end{cases}$

គេមាន $D=\begin{vmatrix}4&1\\5&2\end{vmatrix}=8-5=3$, $D_x=\begin{vmatrix}4&1\\2&2\end{vmatrix}=8-2=6$

និង $D_y=\begin{vmatrix}4&4\\5&2\end{vmatrix}=8-20=-12$

គេបាន $x=\frac{D_x}{D}=\frac{6}{3}=2 \;,\; y=\frac{D_y}{D}=-\frac{12}{3}=-4$

ដូចនេះ $\boxed{x=2\,,\,y=-4}$ ។

II. គណនាលីមីត ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-\cos x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{-x^2}-1)+(1-\cos x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1+2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-\cos x}{x^2}=-\frac{1}{2}}$

ខ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x}-1)-(e^{-x}-1)}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{\sin x}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}.\frac{x}{\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x}.\frac{x}{\sin x}=1+1=2$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=2}$ ។

III.ក.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{(e^x)'(ax+b)-(ax+b)'e^x}{(ax+b)^2}$

$$=\frac{e^x(ax+b)-ae^x}{(ax+b)^2}=\frac{(ax+b-a).e^x}{(ax+b)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=\dfrac{(ax+b-a).e^x}{(ax+b)^2}}$ ។

$f''(x)=[f'(x)]'$

$$=\frac{[(ax+b-a)e^x]'(ax+b)^2-[(ax+b)^2]'(ax+b-a)e^x}{(ax+b)^4}$$

$$=\frac{[ae^x+e^x(ax+b-a)](ax+b)^2-2a(ax+b)(ax+b-a)e^x}{(ax+b)^4}$$

$$=\frac{(ax+b)^2.e^x-2a(ax+b-a)e^x}{(ax+b)^3}$$

$$=\frac{\left[(ax+b)^2-2a(ax+b-a)\right].e^x}{(ax+b)^3}$$

ដូចនេះ $\boxed{f''(x)=\dfrac{\left[(ax+b)^2-2a(ax+b-a)\right].e^x}{(ax+b)^3}}$ ។

ខ-កំនត់ចំនួនពិត a និង b

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ f មានតម្លៃអប្បបរមាស្មើ e ចំពោះ $x=1$ លុះត្រាតែ

គេបាន $\begin{cases} f'(1)=0 \\ f(1)=e \\ f''(1)>0 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយគេបាន $\boxed{a=1\ ,b=0}$ ។

IV. ក.សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និង សង់ក្រាប (c) ៖

ដែនកំនត់ $D_f = IR - \{-1, +1\}$

ទិសដៅអថេរភាព

យើងមាន $f'(x) = -\frac{2(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$

បើ $f'(x) = 0$ សមមូល $\frac{4x}{(1-x^2)^2} = 0$ គេទាញ $x = 0$ ។

ចំនុចបរមា

ចំពោះ $x = 0$ អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមា $f(0) = 2$ ។

គណនាលីមីត និង អាស៊ីមតូត

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{2}{1-x^2} = \lim_{x \to -1^-} \frac{2}{(1+x)(1-x)} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{2}{1-x^2} = \lim_{x \to -1^+} \frac{2}{(1+x)(1-x)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{2}{1-x^2} = \lim_{x \to 1^-} \frac{2}{(1+x)(1-x)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{1-x^2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{(1+x)(1-x)} = -\infty$$

និង $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{1-x^2} = 0$

ដោយ $\lim_{x \to -1} f(x) = \pm\infty$ និង $\lim_{x \to 1} f(x) = \pm\infty$ នាំឲ្យបន្ទាត់ $x = -1$ និង $x = 1$

ជាអាស៊ីមតូតឈររបស់ខ្សែកោង (c) ហើយ $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{1-x^2} = 0$

នាំឲ្យបន្ទាត់ $y = 0$ ឬអក្ស័ អាប់ស៊ីស $x'0x$ ជាអាស៊ីមតូតដេករបស់ខ្សែកោង ។

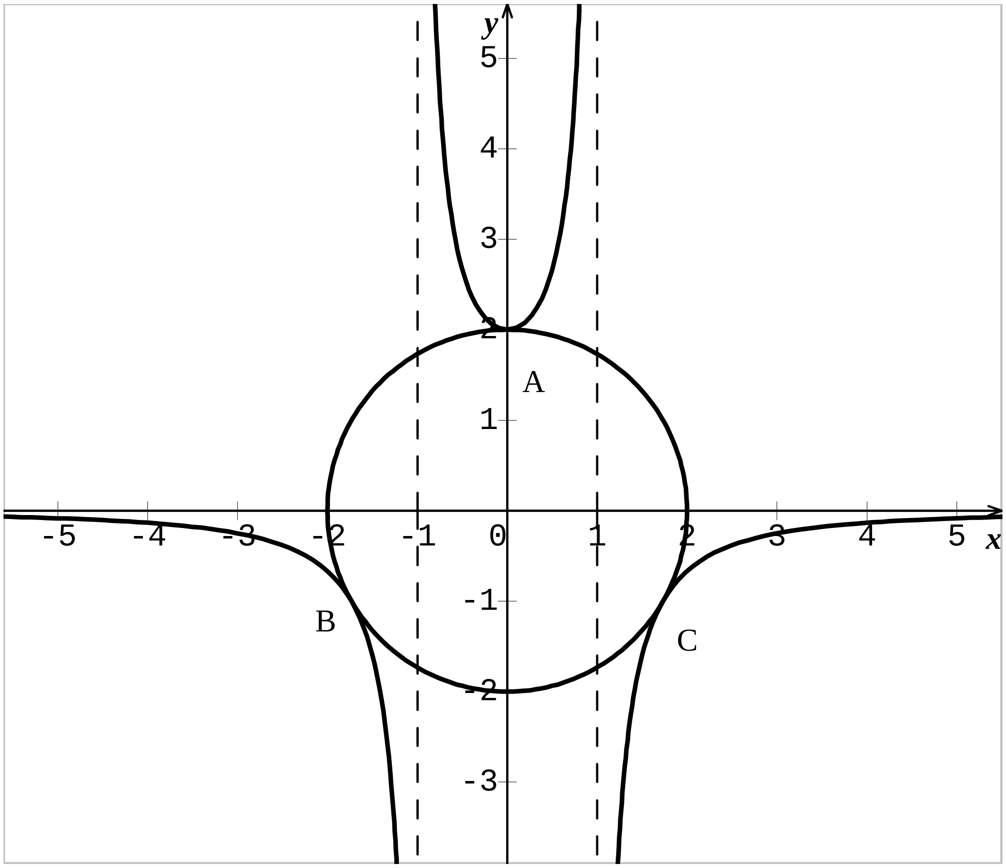
តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$			‖		0		‖		
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0

សង់ក្រាប

$f(x)=\dfrac{2}{1-x^2}$ ជាអនុគមន៍គូព្រោះ $f(-x)=\dfrac{2}{1-(-x)^2}=f(x)\ ,\ \forall x\in D_f$

នាំឲ្យអ័ក្សអរដោនេ (Oy) ជាអ័ក្សឆ្លុះនៃក្រាប (c) ។



ខ-ស្រាយថារង្វង់ (Γ) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) ត្រង់បីចំនុច A, B, C

យើងមាន $(c): y=\dfrac{2}{1-x^2}$ និង $(\Gamma): x^2+y^2=4$

សមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វរវាងខ្សែកោង (c) និង រង្វង់ (Γ) សរសេរ៖

$$x^2+\left(\frac{2}{1-x^2}\right)^2=4$$

$$x^2(1-x^2)^2+4=4(1-x^2)^2$$

$$x^2-2x^4+x^6+4=4-8x^2+4x^4$$

$$x^6-6x^4+9x^2=0$$

$$x^2(x^2-3)^2=0$$

$$x^2(x-\sqrt{3})^2(x+\sqrt{3})^2=0$$

គេទាញឫស $x_1=0$, $x_2=-\sqrt{3}$, $x_3=\sqrt{3}$ ជាឫសឌុប ។

ដូចនេះរង្វង់ (Γ) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) ត្រង់បីចំនុច A, B, C

ដែលមានកូអរដោនេ $A(0,2)$, $B(-\sqrt{3},-1)$ និង $C(\sqrt{3},-1)$ ។

គ-បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសមង្ស័

គេមាន $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-\sqrt{3}-0)^2+(-1-2)^2}=2\sqrt{3}$

$$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(\sqrt{3}-0)^2+(-1-2)^2}=2\sqrt{3}$$

$$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{3})^2+(-1+1)^2}=2\sqrt{3}$$

ដោយ $AB=AC=BC=2\sqrt{3}$ នាំឲ្យ ABC ជាត្រីកោណសមង្ស័

V.ក.កំនត់ចំនួនពិត A, B, C

គេបាន $\dfrac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x+1}$

$$\frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)}=\frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}$$

$$2x^2+2x+1=(A+C)x^2+(A+B)x+B$$

គេទាញបាន $\begin{cases} A+C=2 \\ A+B=2 \\ B=1 \end{cases}$ នាំឲ្យ $A=1\,,B=1\,,C=1$ ។

ដូចនេះ: $\boxed{A=1\,,B=1\,,C=1}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int f(x).dx$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះ $A=1\,,B=1\,,C=1$ គេបាន ៖

$$f(x)=\frac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}$$

យើងបាន $I=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}\right).dx=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x+1}$

ដូចនេះ: $\boxed{I=\ln|x|-\frac{1}{x}+\ln|x+1|+C}$ ។

VI.កសរសេរសមីការបន្ទាត់កែងរួម (Δ) រវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2)

តាង $A(x_A,y_A,z_A)\in(L_1)$ នាំឲ្យកូអរដោនេ A ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការបន្ទាត់(L_1) ។

គេបាន $\frac{x_A+2}{-3}=\frac{y_A-6}{4}=\frac{z_A+2}{3}=p$ នាំឲ្យ $\begin{cases} x_A=-3p-2 \\ y_A=4p+6 \quad (1) \\ z_A=3p-2 \end{cases}$

តាង $B(x_B,y_B,z_B)\in(L_2)$ នាំឲ្យកូអរដោនេ B ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការបន្ទាត់(L_2) ។

គេបាន $\frac{x_B+6}{9}=\frac{y_B+5}{4}=\frac{z_B-2}{-1}=q$ នាំឲ្យ $\begin{cases} x_B=9q-6 \\ y_B=4q-5 \quad (2) \\ z_B=-q+2 \end{cases}$

បើ (AB) ជាបន្ទាត់កែងរួមរវាងបន្ទាត់(L_1) និង (L_2) នោះគេបាន

$\begin{cases} \overrightarrow{AB}\perp\vec{U}_1 \\ \overrightarrow{AB}\perp\vec{U}_2 \end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{U}_1=0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{U}_2=0 \end{cases}$

ដែល $\vec{U}_1$ និង $\vec{U}_2$ ជាវ៉ិចទរ័ប្រាប់ទិសបន្ទាត់(L_1) និង (L_2)

ដោយគេមាន $\overrightarrow{AB}(\,9q+3p-4\,,\;4q-4p-11\,,\;-q-3p+4\,)$
និង $\vec{U}_1(-3,4,3)\quad,\vec{U}_2(9,4,-1)$ ។
គេបាន $\overrightarrow{AB}.\vec{U}_1=-3(9q+3p-4)+4(4q-4p-11)-(-q-3p+4)=0$
នាំឲ្យ $-14q-34p-20=0\;\;(3)$
និង $\overrightarrow{AB}.\vec{U}_2=9(9q+3p-4)+4(4q-4p-11)-(-q-3p+4)=0$
នាំឲ្យ $98q+14p-84=0\;\;(4)$ ។
តាម (3) និង (4) គេបានប្រពន្ធ័សមីការ $\begin{cases}-14q-34p-20=0\\98q+14p-84=0\end{cases}$ នាំឲ្យ $\begin{cases}p=-1\\q=1\end{cases}$
យកតម្លៃ $p=-1$ និង $q=1$ ជួសក្នុងសមីការ (1) និង (2) គេបាន ៖
$A(1\,,2\,,-5)$ និង $B(3\,,-1\,,1)$ ។
សមីការបន្ទាត់ (AB) អាចសរសេរ៖
$$(AB):\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}\text{ ឬ }(AB):\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+5}{6}$$
ដូចនេះ $(\Delta):\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+5}{6}$ ជាបន្ទាត់កែងរួមដែលត្រូវរក ។
ខ-គណនាចំងាយរវាងបន្ទាត់ (L_1) និង (L_2)
ដោយ A និង B ជាចំនុចប្រសព្វនៃបន្ទាត់កែងរួមរវាង (L_1) និង (L_2) គេបាន ៖
$$d\big((L_1),(L_2)\big)=d(AB)=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$
$$d\big((L_1),(L_2)\big)=\sqrt{(3-1)^2+(-1-2)^2+(1+5)^2}=7$$
ដូចនេះ $d\big((L_1),(L_2)\big)=7$ (ឯកតាប្រវែង) ។

វិញ្ញាសាទី១០

រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន**

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិ និង អាហារូបករណ៍

I. គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z = 2(1+i)$

ក. ចូរសរសេរចំនួនកុំផ្លិច Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចគណនាតម្លៃនៃ Z^{2014} ។

ខ. ចូរគណនាឬសទីបីនៃចំនួនកុំផ្លិច Z ។

គ. គេតាង $W = Z^2 - 5Z + 12$ ។ ចូរសរសេរ W ជាទម្រង់ពីជគណិត រួចទាញថា W និង Z ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា ។

II. គេឲ្យប៉ារ៉ាបូល $(P): y^2 - 2y - 4x + 9 = 0$

ក. ចូរកំនត់កូអរដោនេកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសរបស់ (P) ។

ខ. ចូរសង់ (P) ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ។

III. ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោមនេះ

ក. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - e^{x^2} \cos 2x}{x^2}$ ខ. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n+2}{n} \right)^{2n+1}$

IV. គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{2x^2 - 9x + 1}{x^3 + 2x^2 + x}$ ដែល $x \neq 0$ និង $x \neq -1$ ។

ក. កំនត់ចំនួនពិត A, B, C ដើម្បីឲ្យ $f(x) = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$

ខ. ចូរគណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_1^2 f(x).dx$ ។

V. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 2x - 2$

ក. កំនត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យពហុធា $P(x) = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E) ។

ខ. ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍ $y = f(x) + P(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E)

បើអនុគមន៍ f ជាចម្លើយសមីការ $(F): y''-3y'+2y=0$ ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ (F) រួចទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ។

VI. គេឲ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=x+2-x\ln x$ ដែល $x>0$ ។

ក. ចូររកលីមីត $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ ។ គូសតារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

គ. គណនាតម្លៃ $f(4)$ និង $f(5)$ រួចទាញថាខ្សែកោង (c) កាត់អក្ស័ $(x'ox)$ ត្រង់ចំនុចមួយមានអាប់ស៊ីស x_0 ដែល $4<x_0<5$ ។

ឃ. ចូរសង់ក្រាប (c) ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ។

(គេឲ្យ $\ln 2=0.69$, $\ln 3=1.10$, $\ln 5=1.61$)

VII. ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ គេឲ្យចំនុច ៖ $A(4,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(2,0,1)$ និង $D(0,12)$ ។

ក. ចូរដៅចំនុច A , B , C និង D ។

ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំនុច A,B,C មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។ គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។

គ. កំនត់សមីការប្លង់ (ABC) និង សមីការស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត C កាត់តាម B ។

ឃ. គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ។

ង. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) កាត់តាមចំនុច D ហើយកែងទៅនឹងប្លង់ (ABC) ។

គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ M រវាងបន្ទាត់ (L) នឹង (ABC) ។

អត្រាកំណែគំរូ

I. សរសេរចំនួនកុំផ្លិច Z ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

យើងមាន $Z = 2(1+i) = 2+2i$

ដោយ $r = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

គេបាន $Z = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{Z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)}$ ។

គណនាតម្លៃនៃ Z^{2014} ៖

តាមរូបមន្តដឺម័រ $(\cos\theta + i.\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i.\sin(n\theta)$

យើងបាន $Z^{2014} = \left[2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2014}$

$$= \left(2\sqrt{2}\right)^{2014}\left(\cos\frac{1007\pi}{2} + i.\sin\frac{1007\pi}{2}\right)$$

$$= 8^{1007}\left[\cos\left(504\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(504\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 8^{1007}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

ដូចនេះ $\boxed{Z^{2014} = 8^{1007}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]}$ ។

ខ. គណនាឫសទីបីនៃចំនួនកុំផ្លិច Z ៖

តាង W_k ជាឫសទីបីនៃចំនួនកុំផ្លិច z

តាមរូបមន្ត $W_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i.\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$

ដោយ $n = 3$, $r = 2\sqrt{2} = (\sqrt{2})^3$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

គេបាន $W_k = \sqrt{2}\left[\ \cos(\dfrac{\pi+8k\pi}{12}) + i.\sin(\dfrac{\pi+8k\pi}{12})\ \right]$, $k = 0 , 1 , 2$

-បើ $k = 0$ គេបាន $W_0 = \sqrt{2}\ (\cos\dfrac{\pi}{12} + i.\sin\dfrac{\pi}{12})$

-បើ $k = 1$ គេបាន $W_1 = \sqrt{2}\ (\cos\dfrac{3\pi}{4} + i.\sin\dfrac{3\pi}{4})$

-បើ $k = 2$ គេបាន $W_2 = \sqrt{2}\ (\cos\dfrac{17\pi}{12} + i.\sin\dfrac{17\pi}{12})$

គ. សរសេរ W ជាទម្រង់ពីជគណិត ៖

យើងមាន $W = Z^2 - 5Z + 12$ ដោយ $Z = 2(1+i) = 2 + 2i$

យើងបាន $W = (2+2i)^2 - 5(2+2i) + 12$

$W = 4 + 8i - 4 - 10 - 10i + 12$

$W = 2 - 2i$

ដូចនេះ $\boxed{W = Z^2 - 5Z + 12 = 2 - 2i}$ ។

ម៉្យាងទៀត $W = 2 - 2.i$ នាំឲ្យ $\overline{W} = 2 + 2i = Z$

ដូចនេះ W និង Z ជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់គ្នា ។

II. ក.កំនត់កូអរដោនេកំពូល កំណុំ និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិសរបស់ (P) ៖

យើងមាន $(P) : y^2 - 2y - 4x + 9 = 0$

$(P) : (y^2 - 2y + 1) - 4x + 8 = 0$

$(P) : (y-1)^2 = 4\,(x-2)$

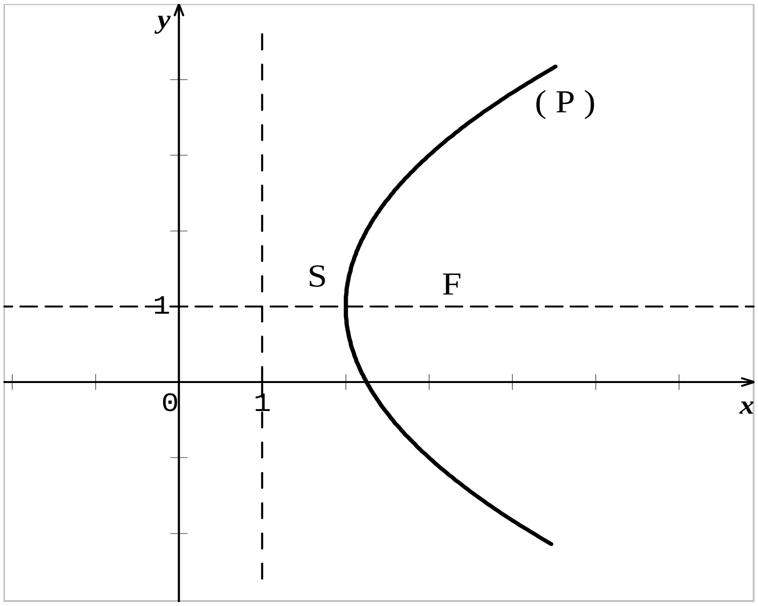
ដោយប្រៀបធៀបជាមួយទម្រង់ស្តង់ដា $(y-k)^2 = 4p\,(x-h)$

គេទាញបាន $k = 1$, $h = 2$, $p = 1$ ។

ដូចនេះ កំពូល $S\,(h\,,k\,) = S\,(\,2\,,1\,)$ ហើយ កំនុំ $F(h+p\,,k) = F(3\,,1\,)$

និងសមីការបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $x = h - p = 1$ ។

ខ.សង់ (P) ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o, \vec{i}\,, \vec{j}\,)$ ៖



III. គណនាលីមីតខាងក្រោមនេះ

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{x^2}\cos 2x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-e^{x^2})+e^{x^2}(1-\cos 2x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-e^{x^2})+2e^{x^2}\sin^2 x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-e^{x^2}}{x^2}\right)+2\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 .e^{x^2}\right]=1+2=3$$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{x^2}\cos 2x}{x^2}=3}$ ។

ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{2n+1}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n}.\left(1+\frac{2}{n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{0.5n}\right)^{(0.5n).4}\times\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)=e^4\times 1=e^4$$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{2n+1}=e^4}$ ។

IV. ក. កំនត់ចំនួនពិត A, B, C ដើម្បីឲ្យ $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$

គេមាន $f(x)=\frac{2x^2-9x+1}{x^3+2x^2+x}$ ដែល $x\neq 0$ និង $x\neq -1$

គេបាន $\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{2x^2-9x+1}{x^3+2x^2+x}$

$$\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}=\frac{2x^2-9x+1}{x(x+1)^2}$$

ដោយផ្ទឹមភាគយក នឹង ភាគយកគេបាន ៖

$$A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx=2x^2-9x+1$$

-ចំពោះ $x=0$ គេបាន $A=1$

-ចំពោះ $x=-1$ គេបាន $-C=12$ នាំឲ្យ $C=-12$

-ចំពោះ $x=1$ គេបាន $4A+2B+C=-6$ នាំឲ្យ $B=1$

ដូចនេះ $\boxed{A=1\ ,\ B=1\ ,\ C=-12}$ ។

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_1^2 f(x).dx$

ចំពោះ $A=1, B=1, C=-12$ គេមាន $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{12}{(x+1)^2}$

គេបាន $I=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{12}{(x+1)^2}\right).dx$

$$I=\int_1^2\frac{dx}{x}+\int_1^2\frac{dx}{x+1}-\int_1^2\frac{12dx}{(x+1)^2}=\left[\ln|x|\right]_1^2+\left[\ln|x+1|\right]_1^2+\left[\frac{12}{x+1}\right]_1^2$$

$$I=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+(4-6)=-2+\ln 3$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_1^2 f(x).dx=-2+\ln 3}$ ។

V. ក.កំនត់បីចំនួនពិត a , b , c

គេមាន $(E): y''-3y'+2y=2x^2-2x-2$

ដើម្បីឲ្យពហុធា $P(x)=ax^2+bx+c$ ជាចម្លើយមួយរបស់សមីការ (E)

លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ (E) ។

គេបាន $P''(x)-3P'(x)+2P(x)=2x^2-2x-2 \quad (1)$

ដោយ $P(x)=ax^2+bx+c$ ហើយ $P'(x)=2ax+b$, $P''(x)=2a$

តាម (1) គេបាន $2a-3(2ax+b)+2(ax^2+bx+c)=2x^2-2x-2$

$$2ax^2+(2b-6a)x+(2a-3b+2c)=2x^2-2x-2$$

គេទាញបាន $\begin{cases} 2a=2 \\ 2b-6a=-2 \\ 2a-3b+2c=-2 \end{cases}$ នាំឲ្យ $a=1 , b=2 , c=1$ ។

ដូចនេះ $\boxed{a=1 , b=2 , c=1}$ ។

ខ. ការបង្ហាញថា

បើអនុគមន៍ $f(x)$ ជាចម្លើយសមីការ $(F): y''-3y'+2y=0$ នោះវាត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់

នឹងសមីការ (F) ។

គេបាន $f''(x)-3f'(x)+2f(x)=0 \quad (2)$

បូកសមីការ (1) និង (2) អង្គ នឹង អង្គគេបាន ៖

$$[f''(x)+P''(x)]-3[f'(x)+P'(x)]+2[f(x)+P(x)]=2x^2-2x-2$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថាអនុគមន៍

$y=f(x)+P(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ(E) ។

ដូចនេះអនុគមន៍ $y=f(x)+P(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E) បើអនុគមន៍ f

ជាចម្លើយសមីការ $(F): y''-3y'+2y=0$ ។

គ.ដោះស្រាយសមីការ (F) ៖

$(F): y''-3y'+2y=0$

មានសមីការសំគាល់ $r^2-3r+2=0$ នាំឲ្យ $r_1=1 , r_2=2$

ដូចនេះអនុគមន៍ $f(x)=A e^{x}+B.e^{2x}$

$(A , B\in IR)$ ជាចម្លើយសមីការ (F) ។

ទាញរកចម្លើយទូទៅរបស់សមីការ (E) ៖

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $y=f(x)+P(x)$ ជាចម្លើយរបស់សមីការ (E) ។

ដោយ $f(x)=A.e^{x}+B.e^{2x}$

និង $P(x)=ax^2+bx+c=x^2+2x+1=(x+1)^2$

ដូចនេះ $y=A.e^{x}+B.e^{2x}+(x+1)^2$

$(A , B\in IR)$ ជាចម្លើយសមីការ (E) ។

VI. ក.រកលីមីត $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ៖

មានអនុគមន៍ $y=f(x)=x+2-x\ln x$ ដែល $x>0$

យើងបាន $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ x+2-x\ln x\ )=2$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$

ហើយ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(\ x+2-x\ln x\ )=\lim\limits_{n\to +\infty}\left[x\,(1+\frac{2}{x}-\ln x)\right]=-\infty$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to +\infty}(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\ln x\right)=-\infty$ ។

ខ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញា $f'(x)$ ៖

យើងបាន $f'(x)=(\ x+2-x\ln x)'$

$f'(x)=1-(\ln x+1)=-\ln x$

ដូចនេះ $f'(x)=-\ln x$ ។

-បើ $f'(x)<0$ គេបាន $-\ln x<0$ សមមូល $x>1$

-បើ $f'(x)=0$ គេបាន $-\ln x=0$ សមមូល $x=1$

-បើ $f'(x)>0$ គេបាន $-\ln x>0$ សមមូល $0<x<1$ ។

គូសតារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ៖

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

គ. គណនាតម្លៃ $f(4)$ និង $f(5)$ ៖

យើងមាន $f(x) = x + 2 - x\ln x$

យើងបាន $f(4) = 4 + 2 - 4\ln 4 = 6 - 8\ln 2 = 6 - 8\times 0.69 = 0.48$

ហើយនឹង $f(5) = 5 + 2 - 5\ln 5 = 7 - 5\times 1.61 = -1,05$ ។

ដូចនេះ $\boxed{f(4) = 0.48 \ , \ f(5) = -1,05}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $f(4)\times f(5) = (0.48)\,(-1.05) < 0$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល

យ៉ាងហោចណាស់មាន x_0 ស្ថិតនៅចន្លោះចំនួន 4 និង 5 ដែល $f(x_0) = 0$ ។

ដោយចំពោះគ្រប់ $x \in [4\,,5\,] : f'(x) < 0$ (តាមតារាងអថេរភាពខាងលើ)

នាំឲ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះលើ $[4\,,5\,]$ ។

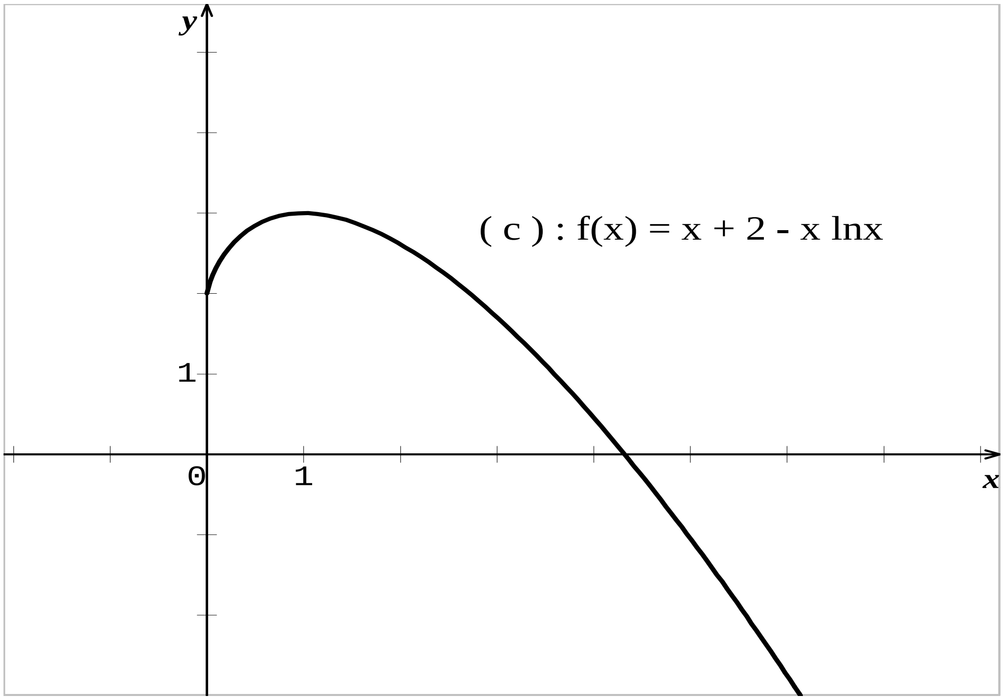
ដូចនេះខ្សែកោង (c) កាត់អក្ស (x'ox) ត្រង់ចំនុចមួយមានអាប់ស៊ីស x_0

ដែល $4 < x_0 < 5$ ។

ឃ.សង់ក្រាប $(c) : y = f(x) = x + 2 - x\ln x$ ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(o, \vec{i}\,, \vec{j})$

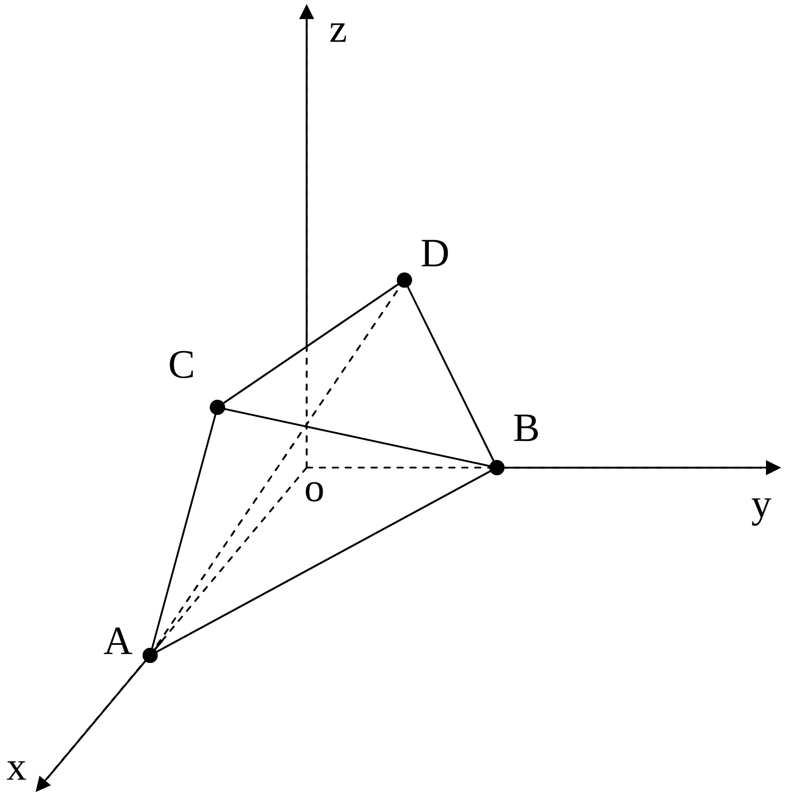
គេមាន $f(1) = 1 + 2 - 0 = 3$, $f(2) = 2 + 2 - 2\ln 2 = 2.61$

និង $f(4) = 0.48$, $f(5) = -1.05$ ។



VII. ក. ដៅចំនុច A , B , C និង D

គេមាន A(4 , 0 , 0) , B(0 , 2 ,0) , C (2 , 0 ,1) និង D (0 , 1 2)



ខ. គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ ៖

គេមាន $\overrightarrow{AB}=(-4\,,2\,,0\,)$; $\overrightarrow{AC}=(-2\,,0\,,1)$

យើងបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}$

ដូចនេះ $\boxed{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(\;2\;,\;4\;,\;4\;)}$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\neq\vec{O}$ នាំឲ្យបីចំនុច $A\,,B\,,C$ មិនស្ថិតនៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។

គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ៖

យើងបាន $S_{ABC}=\frac{1}{2}|\,\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\,|=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+4^2+4^2}=3$ ។

ដូចនេះ $S_{ABC}=3$ (ឯកតាផ្ទៃក្រឡា) ។

គ. កំនត់សមីការប្លង់ (ABC) ៖

ប្លង់ (ABC) មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\;(2\,,4\,,4\,)$

តាមរូបមន្ត $(ABC):\;a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

$(ABC):2(x-4)+4(y-0)+4(z-0)=0$

$(ABC):2x-8+4y+4z=0$

$(ABC):x+2y+2z-4=0$

ដូចនេះ $\boxed{(ABC):\;x+2y+2z-4=0}$ ។

កំនត់សមីការស្វ៊ែ (S) មានផ្ចិត C កាត់តាម B ៖

តាង R ជាកាំរបស់ស្វ៊ែ (S)

តាមរូបមន្ត $(S):(x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2=R^2$

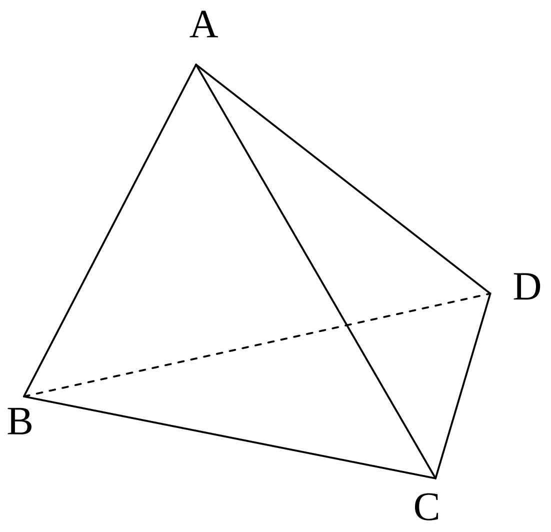
$(S):(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=R^2$ ។

ដោយ $B\in(S)$ គេបាន $(0-2)^2+2^2+(0-1)^2=R^2$ នាំឲ្យ $R=3$

ដូចនេះ $\boxed{(S):(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=9}$ ។

ឃ. គណនាមាឌតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ៖

តាមរូបមន្ត $V_{ABCD}=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}|$



ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(2,4,4)$ នឹង $\overrightarrow{AD}=(-4,1,2)$

គេបាន $V_{ABCD}=\frac{1}{6}|-8+4+8|=\frac{2}{3}$ (ឯកតាមាឌ) ។

ង.សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) ៖

តាមរូបមន្ត $(L):\begin{cases}x=x_D+at\\ y=y_D+bt\\ z=z_D+ct \quad , t\in IR\end{cases}$

ដោយ $(L)\perp(ABC)$ នាំឲ្យ $\vec{n}=(1,2,2)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ ។

ដូចនេះ $\boxed{(L):\begin{cases}x=t\\ y=1+2t\\ z=2+2t \quad , t\in IR\end{cases}}$ ។

វិញ្ញាសាទី១១

រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន**

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិ និង អាហារូបករណ៍

I. គេឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{x^2+mx+4}{x^2+1}$

ដែល x ជាចំនួនពិត និង m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ក. ចូរកំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃបរមាត្រង់ចំនុច $x=2$ ។

ខ. ចូរកំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃបរមាតែមួយគត់ ។

II. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\cos\dfrac{4\pi}{7}+i.\sin\dfrac{4\pi}{7}$ ។

ចូរសរសេរ $(1+z)^4$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

III. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{3x+1}$ កំនត់លើ $[-\dfrac{1}{3},+\infty)$

ក. ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{3}{8}\le f'(x)\le\dfrac{3}{4}$ ។

ខ. ដោយប្រើវិសមភាពកំណើនមានកំនត់ទៅនឹងអនុគមន៍ f ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{3}{8}x+\dfrac{13}{8}\le\sqrt{3x+1}\le\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$ ។

IV. គេឱ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$

ក. ចូរកំនត់បីចំនួនពិត a,b និង b ដើម្បីឱ្យ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\ne2$

ខ. ចូរកំនត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (c) តំនាងអនុគមន៍ f

គ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចគូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ឃ. ស្រាយថាចំនុច $I(2\ ,\ 1)$ ជាផ្ចិតបំលែងឆ្លុះនៃក្រាប (c) ។

ង. ចូរសង់ក្រាប (c) តាងអនុគមន៍ $f(x)$ ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(0,\vec{i},\vec{j})$ មួយ ។

V.នៅក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ មានឯកត្តា 1cm
នៅលើអក្សរគេអោយពីរចំនុច $A(2,-3,1)$ និង $B(4,1,5)$ ។

ក. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ និងកូស៊ីនូសនៃមុំផ្គុំដោយ វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OA}$ និង $\overrightarrow{OB}$ ។
ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (AB) ។
គ. សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទ័រ (P) នៃអង្កត់ $[AB]$ ។

អត្រាកំណែគំរូ

I. ក. កំនត់តម្លៃ m

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃបរមាត្រង់ចំនុច $x=2$ លុះត្រាតែ $f'(2)=0$

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2+mx+4}{x^2+1}$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{(x^2+mx+4)'(x^2+1)-(x^2+1)'(x^2+mx+4)}{(x^2+1)^2}$

$$=\frac{(2x+m)(x^2+1)-2x(x^2+mx+4)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x^3+2x+mx^2+m-2x^3-2mx^2-8x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-mx^2-6x+m}{(x^2+1)^2}$$

ចំពោះ $x=2$ គេបាន $f'(2)=\dfrac{-4m+12+m}{(4+1)^2}=\dfrac{12-3m}{25}=0$

ដូចនេះ $m=4$ ។

ខ. កំនត់តម្លៃ m

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃបរមាតែមួយគត់លុះត្រាតែសមីការ $f'(x)=0$
សមមូល $-mx^2+6x+m=0$ មាឫសតែមួយគត់ពោលគឺត្រូវឱ្យ $m=0$ ។

II.សរសេរ $(1+z)^4$ ជារាងត្រីកោណមាត្រៈ

គេមាន $z=\cos\frac{4\pi}{7}+i.\sin\frac{4\pi}{7}$

គេបាន $1+z=1+\cos\frac{4\pi}{7}+i.\sin\frac{4\pi}{7}$ ដោយ $\begin{cases}1+\cos\frac{4\pi}{7}=2\cos^2\frac{2\pi}{7}\\ \sin\frac{4\pi}{7}=2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\end{cases}$

គេទាញ

$$1+z=2\cos^2\frac{2\pi}{7}+2i.\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}=2\cos\frac{2\pi}{7}(\cos\frac{2\pi}{7}+i.\sin\frac{2\pi}{7})$$

តាមរូបមន្តដឺមរ័គេអាចសរសេរ ៖

$$(1+z)^4=\left[2\cos\frac{2\pi}{7}(\cos\frac{2\pi}{7}+i.\sin\frac{2\pi}{7})\right]^4=16\cos^4\frac{2\pi}{7}\left(\cos\frac{8\pi}{7}+i.\sin\frac{8\pi}{7}\right)$$

ដូចនេះ $(1+z)^4=16\cos^4\frac{2\pi}{7}\left(\cos\frac{8\pi}{7}+i.\sin\frac{8\pi}{7}\right)$ ។

III.ក. ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ បង្ហាញថា $\frac{3}{8}\le f'(x)\le\frac{3}{4}$

គេមាន $f(x)=\sqrt{3x+1}$ នាំឱ្យ $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ គេមាន $1\le x\le 5$ ឬ $4\le 3x+1\le 16$

$$\frac{1}{4}\le\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\le\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{8}\le\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}\le\frac{3}{4}$$

ដូចនេះ $\frac{3}{8}\le f'(x)\le\frac{3}{4}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[1,5]$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\frac{3}{8}x+\frac{13}{8}\le\sqrt{3x+1}\le\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$

ចំពោះគ្រប់ $x\in[1;5]$ គេមាន $\frac{3}{8}\le f'(x)\le\frac{3}{4}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទវិសមភាពកំណើនមានកំនត់

ចំពោះ $x\ge 1$ គេមាន $\frac{3}{8}(x-1)\le f(x)-f(1)\le\frac{3}{4}(x-1)$ ដោយ $f(x)=\sqrt{3x+1}$

គេបាន $\frac{3}{8}x-\frac{3}{8}\le\sqrt{3x+1}-2\le\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$

នាំឱ្យ $\frac{3}{8}x+\frac{13}{8}\le\sqrt{3x+1}\le\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$ ។

ដូចនេះ $\frac{3}{8}x+\frac{13}{8}\le\sqrt{3x+1}\le\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$ ។

IV.ក.កំនត់បីចំនួនពិត a,b និង b ដើម្បីឱ្យ $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\ne 2$

គេមាន $y=f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-2}$

$$=\frac{(x^2-2x)-(x-2)+1}{x-2}$$

$$=\frac{x(x-2)-(x-2)+1}{x-2}=x-1+\frac{1}{x-2}$$

គេបាន $y=f(x)=x-1+\frac{1}{x-2}$ ដោយ $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$

ដូចនេះ $a=1,b=-1,c=1$ ។

ខ. កំនត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និងអាស៊ីមតូតទ្រេត ៖

គេមាន $f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-2}$ ជាអនុគមន៍កំនត់លើ $D_f=IR-\{2\}$ ។

ដោយ $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2-3x+3}{x-2}=-\infty$ និង $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2-3x+3}{x-2}=+\infty$

នាំឱ្យបន្ទាត់ $x=2$ សមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (c) ។

ម៉្យាងទៀតគេមាន $f(x)=x-1+\frac{1}{x-2}$ ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-1}=0$

នាំឱ្យបន្ទាត់ $y=x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (c) ។

គ. គណនាដេរីវេ $f'(x)$

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$ ជាអនុគមន៍កំនត់លើ $D_f=IR-\{2\}$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{(2x-3)(x-2)-(x^2-3x+3)}{(x-2)^2}$

$$=\frac{2x^2-4x-3x+6-x^2+3x-3}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$ ។

គូសតារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $f(x)$:

បើ $f'(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=0$ គេបាន $x^2-4x+3=0$ នាំឱ្យ $x_1=1$, $x_2=\dfrac{c}{a}=3$

ចំពោះ $x_1=1$ គេបាន $f(1)=\dfrac{1^2-3+3}{1-2}=-1$

ចំពោះ $x_2=3$ គេបាន $f(3)=\dfrac{9-9+3}{3-2}=3$

ដោយ $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x-2}$ គេបាន $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x-1+\dfrac{1}{x-2})=\pm\infty$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$			0		‖		0		
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$

ឃ.ស្រាយថាចំនុច I(2 ; 1) ជាផ្ចិតបំលែងឆ្លុះនៃក្រាប (c)

គេមាន $f(x)=x-1+\frac{1}{x-2}$

តាមរូបមន្ត $f(2a-x_0)+f(x_0)=2b$ ដើម្បីស្រាយថាចំនុច I(2 , 1) ជាផ្ចិតបំលែងឆ្លុះនៃក្រាប (c)គេត្រូវស្រាយឱ្យឃើញថា $f(4-x_0)+f(x_0)=2$ ។

គេមាន $f(4-x_0)=(4-x_0)-1+\frac{1}{(4-x_0)-2}=3-x_0-\frac{1}{x_0-2}$

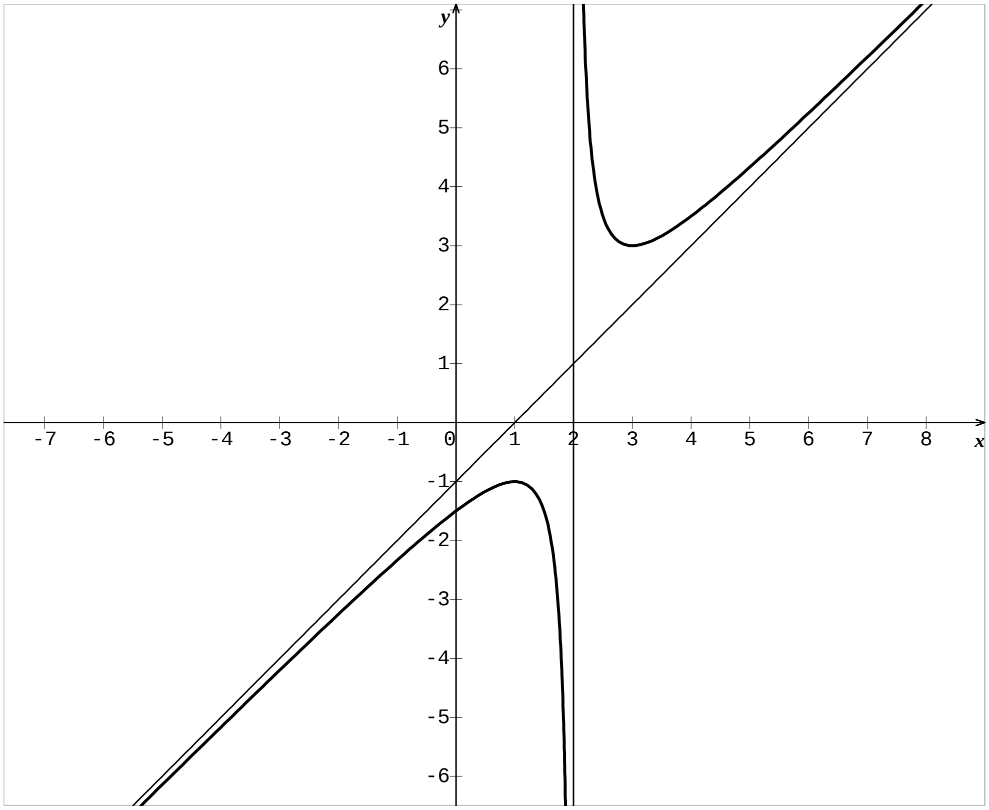
និង $f(x_0)=x_0-1+\frac{1}{x_0-2}$ ។

គេបាន $f(4-x_0)+f(x_0)=\left(3-x_0-\frac{1}{x_0-2}\right)+\left(x_0-1+\frac{1}{x_0-2}\right)$

$f(4-x_0)+f(x_0)=2$ ពិត ។

ដូចនេះ ចំនុច I(2 , 1) ជាផ្ចិតបំលែងឆ្លុះនៃក្រាប (c) ។

ង. សង់ក្រាប (c) តាងអនុគមន៍ $f(x)$ ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់ $(0,\vec{i},\vec{j})$



V. ក. គណនាផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$

គេមាន $\overrightarrow{OA}(2,-3,1)$,$\overrightarrow{OB}(4,1,5)$

គេបាន $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=(2)(4)+(-3)(1)+(1)(5) \quad =8-3+5=10$

ដូចនេះ $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=10$ ។

តាមនិយមនយ័ $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|.|\overrightarrow{OB}|.\cos\left(\hat{AOB}\right)$

នាំអោយ $\cos\left(\hat{AOB}\right)=\dfrac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|.|\overrightarrow{OB}|}$

ដោយ $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$ និង $|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{16+1+25}=\sqrt{42}$

គេបាន $\cos\left(\hat{AOB}\right)=\dfrac{10}{\sqrt{14}.\sqrt{42}}=\dfrac{10}{14\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{21}$ ។

ខ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតនៃបន្ទាត់ (AB)

តាមរូបមន្ត $(AB):\begin{cases} x=x_A+at \\ y=y_A+bt \\ z=z_A+ct \quad ,t\in IR \end{cases}$

វ៉ិចទរ័ប្រាប់ទិស $\overrightarrow{AB}(2,4,4)$។

ដូចនេះ $(AB):x=2+2t, y=-3+4t, z=1+4t \quad ,t\in IR$ ។

គ. សរសេរសមីការប្លង់មេដ្យាទរ័ (P) នៃអង្កត់ $[AB]$

គេមាន $A(2,-3,1)$ និង $B(4,1,5)$

យក I ជាចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[AB]$ គេបាន $I\left(\dfrac{2+4}{2},\dfrac{-3+1}{2},\dfrac{1+5}{2}\right)$

ឬ $I(3,-1,3)$ ។

ប្លង់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[AB]$ គឺជាប្លង់កាត់តាមចំនុច I ហើយកែងនឹង $\overrightarrow{AB}$ ។
តាមរូបមន្តសមីការប្លង់អាចសរសេរ ៖

$$(P): a(x - x_I) + b(y - y_I) + c(z - z_I) = 0$$

$$(P): 2(x - 3) + 4(y + 1) + 4(z - 3) = 0$$

$$(P): 2x + 4y + 4z - 14 = 0$$

ដូចនេះ $(P): x + 2y + 2z - 7 = 0$ ។

✍✍✍✍✍✍✍

វិញ្ញាសាទី១២

រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន**

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិ និង អាហារូបករណ៍

I. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ កំនត់លើ IR ដោយ ៖

$$f(x)=\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)-\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)$$

ក-ចូរគណនាតម្លៃ $f(-\sqrt{2})$, $f(0)$ និង $f(\sqrt{2})$ ។

បង្ហាញថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស ។

ខ-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$ ។

II. គេឲ្យសមីការ $(E): z^2+iaz+a+ib=0$ ដែល $a, b\in IR$

ក-កំនត់ a និង b ដើម្បីឲ្យ $z_1=-1+i\sqrt{3}$ ជាឬសមួយរបស់ (E) រួចគណនាឬសមួយទៀត z_2 ។

ខ-ចូរសរសេរ z_1 , z_2 និង $\frac{z_1}{z_2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ-ទាញបញ្ជាក់តម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{5\pi}{12}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}$ ។

III. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+2\sin x-1}{x}$

ខ. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{n+1}$

IV. ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមានគេឲ្យបួនចំនុច $A(1,-1,2)$, $B(0,2,1)$, $C(2,0,2)$ និង $D(4,-1,5)$ ។

ក-កំនត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) កាត់តាម D ហើយស្របនឹង $\overrightarrow{BC}$ ។

ខ-កំនត់សមីការប្លង់ (P) កាត់តាម A ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}$ ។

គ-គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ E រវាងបន្ទាត់ (L) និង ប្លង់ (P) ។

ខ-ចូរបង្ហាញថាចតុកោណ BCDE ជាប្រលេឡូក្រាម ។

V. គេឲ្យអនុគមន៍ $g(x)=\dfrac{2x^2-5x-1}{x^3-x}$ ដែល $x\neq 0$, $x\neq \mp 1$ ។

ក. កំនត់ចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យ $g(x)=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}$ ។

ខ. ចូរគណនា $I=\int g(x).dx$ ។

VI. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=1+2e^x-2xe^x$ មានក្រាប (c) ។

គ.គណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ រួចបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតដេក ។

ខ.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា។គូសតារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ។

គ.គណនាកូអរដោនេរចំនុចប្រសព្វ A រវាងខ្សែកោង (c) ជាមួយអាស៊ីមតូតដេក រួចសរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) ត្រង់ចំនុច A ។

ឃ. គូសក្រាប (c) និងបន្ទាត់ (T) ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(0,\vec{i},\vec{j})$ ។

ង. គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយខ្សែកោង (c) និងអាស៊ីមតូតដេក និងបន្ទាត់ឈរ $x=0\,;\ x=2$ ។

អត្រាកំណែគំរូ

I. ក.គណនាតម្លៃ $f(-\sqrt{2})$, $f(0)$ និង $f(\sqrt{2})$

មាន $f(x)=\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)-\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)$

យើងបាន $f(-\sqrt{2})=\ln(2+2+1)-\ln(2-2+1)=\ln 5$

$f(0)=\ln(0-0+1)-\ln(0+0+1)=0$

$f(\sqrt{2})=\ln(2-2+1)-\ln(2+2+1)=-\ln 5$

ដូចនេះ $\boxed{f(-\sqrt{2})=\ln 5\ ,\ f(0)=0\ ,\ f(\sqrt{2})=\ln 5}$ ។

បង្ហាញថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស ៖

យើងមាន $x \in IR$ និង $-x \in IR$

យើងបាន $f(-x) = \ln(x^2 + x\sqrt{2} + 1) - \ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1) = -f(x)$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស ។

ខ-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ និង $f''(x)$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - x\sqrt{2} + 1)'}{(x^2 - x\sqrt{2} + 1)} - \frac{(x^2 + x\sqrt{2} + 1)'}{(x^2 + x\sqrt{2} + 1)}$$

$$= \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}$$

$$= \frac{(2x - \sqrt{2})(x^2 + x\sqrt{2} + 1) - (2x + \sqrt{2})(x^2 - x\sqrt{2} + 1)}{(x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\, x^2 - 2\sqrt{2}}{x^4 + 1} = \frac{2\sqrt{2}\,(x^2 - 1)}{x^4 + 1}$$

ដូចនេះ $\boxed{f'(x) = 2\sqrt{2}\ \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}}$ ។

ម៉្យាងទៀត $f''(x) = 2\sqrt{2}\ \frac{(x^2 - 1)'(x^4 + 1) - (x^4 + 1)'(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)^2}$

$$= 2\sqrt{2}\ \frac{2x(x^4 + 1) - 4x^3(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)^2}$$

$$= 2\sqrt{2}\ \frac{2x^5 + 2x - 4x^5 + 4x^3}{(x^4 + 1)^2} = -4\sqrt{2}\ \frac{x\,(x^4 - 2x^2 - 1)}{(x^4 + 1)^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{f''(x) = -4\sqrt{2}\ \frac{x\,(x^4 - 2x^2 - 1)}{(x^4 + 1)^2}}$ ។

II. គេឲ្យសមីការ $(E): z^2 + iaz + a + ib = 0$ ដែល $a, b \in IR$

ក-កំនត់ a និង b ៖

ដើម្បីឲ្យ $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ ជាឫសមួយរបស់ (E) លុះណាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការ

គេបាន $(-1 + i\sqrt{3})^2 + ia(-1 + i\sqrt{3}) + a + ib = 0$

$1-2\sqrt{3}\,i-3-ia-a\sqrt{3}+a+ib=0$

$(-2+a-a\sqrt{3})+i(-2\sqrt{3}-a+b)=0$

គេទាញ $\begin{cases}-2+a-a\sqrt{3}=0\\ -2\sqrt{3}-a+b=0\end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបាន $a=\dfrac{2}{1-\sqrt{3}}=-1-\sqrt{3}$ និង $b=-1+\sqrt{3}$

ដូចនេះ $a=\dfrac{2}{1-\sqrt{3}}=-1-\sqrt{3}$ និង $b=-1+\sqrt{3}$ ។

គណនាឫសមួយទៀត z_2 ៖

ដោយ z_1 និង z_2 ជាឫសរបស់សមីការ (E) នោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត

យើងបាន $z_1+z_2=-ia$

នាំឲ្យ $z_2=-ia-z_1=-i(-1-\sqrt{3})-(-1+i\sqrt{3})=1+i$

ដូចនេះ $z_2=1+i$ ។

ខ-សរសេរ z_1 , z_2 និង $\dfrac{z_2}{z_1}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ៖

យើងបាន $z_1=-1+i\sqrt{3}=2(-\dfrac{1}{2}+i.\dfrac{\sqrt{3}}{2})=2(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i.\sin\dfrac{2\pi}{3})$

$z_2=1+i=\sqrt{2}(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i.\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}+i.\sin\dfrac{\pi}{4})$

និង $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4})+i.\sin(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4})\right]=\sqrt{2}(\cos\dfrac{5\pi}{12}+i.\sin\dfrac{5\pi}{12})$ ។

គ-ទាញបញ្ជាក់តម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ និង $\sin\dfrac{5\pi}{12}$

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន $\dfrac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}(\cos\dfrac{5\pi}{12}+i.\sin\dfrac{5\pi}{12})$ (1)

ម៉្យាងទៀត $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}=\dfrac{(-1+i\sqrt{3})(1-i)}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ។

III. គណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+2\sin x-1}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}+2\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}+2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1+2=3$$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+2\sin x-1}{x}=3}$ ។

ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{n+1}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{n+1}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}\right)^{\frac{n+1}{2n-1}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

ដូចនេះ: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{n+1}=\sqrt{e}}$ ។

IV. គេមាន $A(1,-1,2)$, $B(0,2,1)$, $C(2,0,2)$ និង $D(4,-1,5)$

ក-កំនត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (L) កាត់តាម D ហើយស្របនឹង $\overrightarrow{BC}$

តាមរូបមន្ត (L) : $\begin{cases} x=x_D+at \\ y=y_D+bt \\ z=z_D+ct \quad , \ t\in IR \end{cases}$

យើងមាន $\overrightarrow{BC}(2,-2,1)$ ។

ដូចនេះ $(L):\begin{cases} x=4+2t \\ y=-1-2t \\ z=5+t \quad , t\in IR \end{cases}$

ខ-កំនត់សមីការប្លង់ (P) កាត់តាម A ហើយកែងនឹងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{BC}$

តាមរូបមន្ត $(P): a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

យើងមាន $\overrightarrow{BC}(2,-2,1)$ ។

ហេតុនេះ $(P): 2(x-1)-2(y+1)+(z-2)=0$

ដូចនេះ $(P): 2x-2y+z-6=0$ ។

គ-គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ E រវាងបន្ទាត់ (L) និង ប្លង់ (P) ៖

យកសមីការ (L) ជួសក្នុងសមីការ (P) គេបាន ៖

$2(4+2t)-2(-1-2t)+(5+t)-6=0$ នាំឲ្យ $t=-1$

យកតម្លៃ $t=-1$ ជួសក្នុងសមីការ (L) គេបាន $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=4 \end{cases}$

ដូចនេះ $E(2,1,4)$ ។

ឃ-បង្ហាញថាចតុកោណ BCDE ជាប្រលេឡូក្រាម ។

យើងមាន $B(0,2,1)$, $C(2,0,2)$, $D(4,-1,5)$ និង $E(2,1,4)$

យើងបាន $\overrightarrow{BC}(2,-2,1)$ និង $\overrightarrow{ED}(2,-2,1)$

ដោយ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{ED}$ នាំឲ្យ $BC // ED$ និង $BC=ED$ ។

ដូចនេះ ចតុកោណ BCDE ជាប្រលេឡូក្រាម ។

V. គេមានអនុគមន៍ $g(x)=\dfrac{2x^2-5x-1}{x^3-x}$ ដែល $x\neq 0$, $x\neq \mp 1$ ។

ក. កំនត់ចំនួនពិត A, B និង C ដើម្បីឲ្យ $g(x)=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}$

យើងបាន $\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}=\frac{2x^2-5x-1}{x^3-x}$

ឬ $A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)=2x^2-5x-1$

បើ $x=0$ នោះ $-A=-1$ ឬ $A=1$

បើ $x=-1$ នោះ $2C=6$ ឬ $C=3$

បើ $x=1$ នោះ $2B=-4$ ឬ $B=-2$

ដូចនេះ $\boxed{A=1\ ,\ B=-2\ ,C=3}$ ។

ខ. គណនា $I=\int g(x).dx$

ចំពោះ $A=1, B=-2\ , C=3$ គេមាន $g(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}$

គេបាន ៖

$$I=\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{dx}{x+1}=\ln|x|-2\ln|x-1|+3\ln|x+1|+C$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int g(x).dx=\ln|x|-2\ln|x-1|+3\ln|x+1|+C}$ ។

VI.គ.គណនាលីមីត $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ រួចបញ្ជាក់សមីការអាស៊ីមតូតដេក

យើងបាន $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(1+2e^x-2xe^x)=\lim_{x\to-\infty}\left[1+(2-x)\,e^x\right]=1$

ព្រោះ $\lim_{x\to-\infty}(2-x)\,e^x=0$ ។

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(1+2e^x-2xe^x)=\lim_{x\to+\infty}\left[1+(2-x)\,e^x\right]=-\infty$

ព្រោះ $\lim_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty$ និង $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ ។

ដោយ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ នាំឲ្យបន្ទាត់ $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃក្រាប (c) ។

ខ.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ រួចសិក្សាសញ្ញារបស់វា ៖

យើងមាន $f(x)=1+(2-x)\,e^x$ កំនត់ជានិច្ចលើ IR

យើងបាន $f'(x)=(2-x)'\,e^x+(e^x)'(2-x)$

$=-e^x+e^x(2-x)=(1-x)\,e^x$ ។

ដូចនេះ $\boxed{f'(x)=(1-x)\,e^x}$ ។

ដោយ $\forall x\in IR : e^x>0$ នាំឲ្យ $f'=(1-x)\,e^x$ មានសញ្ញាដូច $1-x$ ។

-បើ $1-x<0$ ឬ $x>1$ នោះ $f'(x)<0$

-បើ $1-x=0$ ឬ $x=1$ នោះ $f'(x)=0$

-បើ $1-x>0$ ឬ $x<1$ នោះ $f'(x)>0$ ។

គូសតារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$ ៖

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	$e+1$	↘	$-\infty$

ចំពោះ $x=1$ នោះ $f(1)=1+e=3,718$ ។

គ.គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ A រវាងខ្សែកោង (c) ជាមួយអាស៊ីមតូតដេក

យើងមាន $\begin{cases} y=1+2e^x-x\,e^x \\ y=1 \end{cases}$

យើងបាន $1+2e^x-xe^x=1$

$(2-x)\,e^x=0$ នាំឲ្យ $x=2$ ។

ដូចនេះ $A(2,1)$ ។

សរសេរសមីការបន្ទាត់ (T) ប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) ត្រង់ចំនុច A ៖

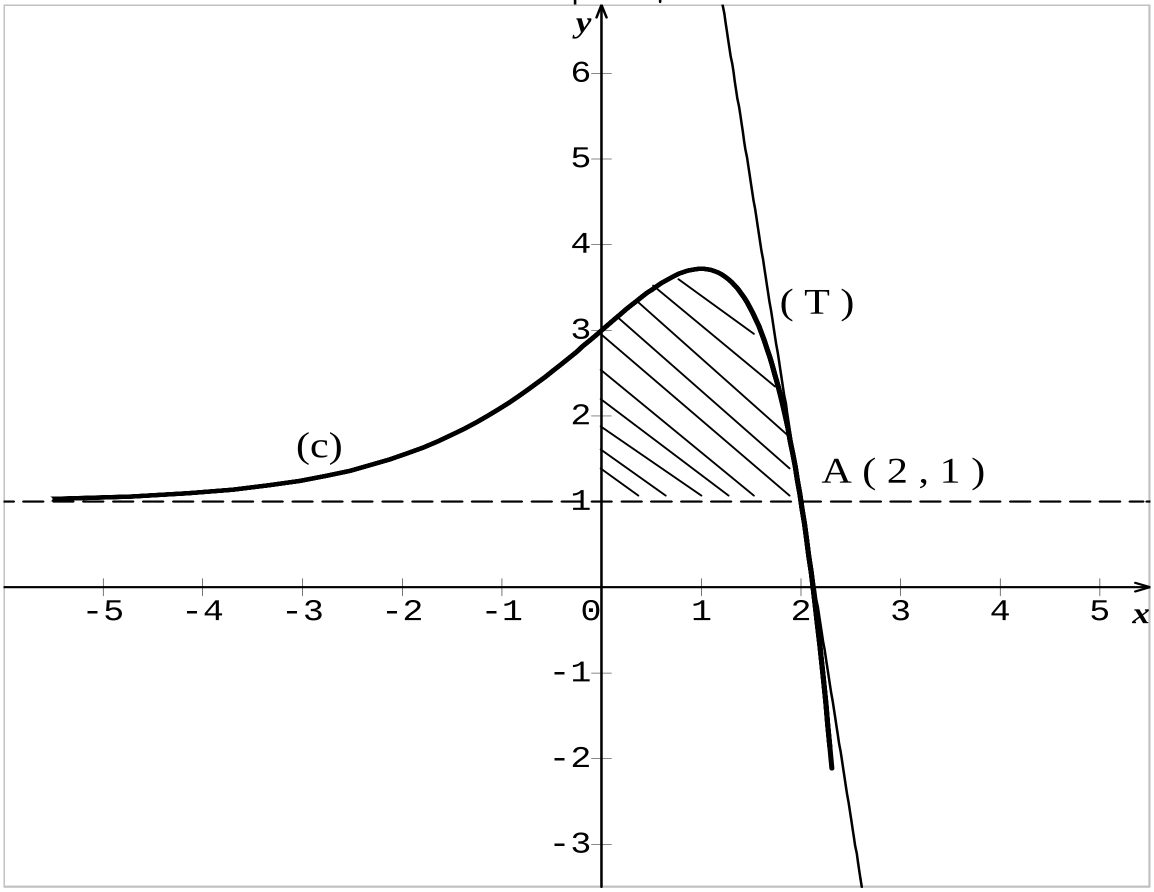
តាមរូបមន្ត $(T):\ y-y_A=f'(x_A)(x-x_A)$

ដោយ $f'(x_A)=(1-2)\,e^2=-e^2$

យើងបាន $y-1=-e^2\,(x-2)$ ឬ $y=-e^2x+2e^2+1$ ។

ដូចនេះ $(T): y=-e^2x+2e^2+1$ ។

ឃ. គូសក្រាប (c) និងបន្ទាត់ (T) ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ $(0, \vec{i}, \vec{j})$ ៖



ង. គណនាផ្ទៃក្រឡាខណ្ឌដោយ (c) និងអាស៊ីមតូតដេក និងបន្ទាត់ឈរ $x = 0$; $x = 2$

យើងបាន $S = \int_0^2 (1 + 2e^x - xe^x - 1).dx = \int_0^2 (2 - x)e^x.dx$

តាង $\begin{cases} u = 2 - x \\ dv = e^x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$S = \left[(2 - x)e^x\right]_0^2 + \int_0^2 e^x dx = (0 - 2) + \left[e^x\right]_0^2 = -2 + e^2 - 1 = e^2 - 3$$

ដូចនេះ $S = e^2 - 3$ (ឯកតាផ្ទៃ) ។

វិញ្ញាសាទី១៣

រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន**

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិ និង អាហារូបករណ៍

I. គេអោយចំនួនកុំផ្លិច $z=\cos\frac{4\pi}{7}+i.\sin\frac{4\pi}{7}$ ។

ចូរសរសេរ $(1+z)^4$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ ។

II. ចូរគណនាលីមីតខាងក្រោម ៖

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$ ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$

III. គេឲ្យអនុគមន៍ $y=f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x^2+1}$

មានក្រាបតំនាង (c) ក្នុងតម្រុយអរតូនរមេមួយ។

ក.ខ្សែកោង (c) កាត់អក្ស័អាប់ស៊ីស $(x'0x)$ ត្រង់ចំនុចមានអាប់ស៊ីស $x=\alpha$

បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ (c) ត្រង់ $x=\alpha$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $k=\frac{2\alpha+a}{\alpha^2+1}$ ។

ខ.ចូរកំនត់តម្លៃ a និង b ដើម្បីឲ្យខ្សែកោង (c) កាត់អក្ស័អាប់ស៊ីស $(x'0x)$ បាន ពីរចំនុច M និង N ដែលបន្ទាត់ប៉ះ (c) ត្រង់ M និង N កែងនឹងគ្នា ។

IV. គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\frac{3x^2-7x+6}{(x-3)^2(x+1)}$ ដែល $x\neq-1$ និង $x\neq3$ ។

ក-កំនត់បីចំនួនពិត a, b, c ដើម្បីឲ្យ $f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{(x-3)^2}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 f(x).dx$ ។

V. គេឲ្យអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 3}{4x - 8}$

ក-សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និង សង់ក្រាប (c) តាងអនុគមន៍ $y = f(x)$ ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់មួយ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ។

ខ-ចូរកំនត់សមីការរង្វង់ (Γ) មានផ្ចិត $I(2, \frac{3}{2})$ ហើយប៉ះនឹងខ្សែកោង (c) រួចសង់រង្វង់នោះក្នុងតំរុយតែមួយជាមួយ (c) ។

VI. ក្នុងតំរុយអរតូនរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

(គេយកឯកតា 1cm នៅលើអក្ស)។

គេឲ្យបីចំនុច $A(1,-2,3)$, $B(3,-1,3)$, $C(5,1,4)$ ។

ក-កំនត់កូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ រួចកំនត់តំលៃកូស៊ីនូសនៃមុំរវាងវ៉ិចទ័រពីរនេះ ។

ខ-គណនាផលគុណវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំនុច A, B, C មិនរត់ត្រង់គ្នា ។

គ-គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។

ឃ-កំនត់សមីការប្លង់ (ABC) ។

ង-គណនាមាឌតេត្រាអែត ABCD រួចទាញរកចំងាយពីចំនុច D ទៅប្លង់(ABC)

អត្រាកំណែគំរូ

I. សរសេរ $(1+z)^4$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ៖

គេបាន $1 + z = 1 + \cos\frac{4\pi}{7} + i.\sin\frac{4\pi}{7}$ ដោយ $\begin{cases} 1 + \cos\frac{4\pi}{7} = 2\cos^2\frac{2\pi}{7} \\ \sin\frac{4\pi}{7} = 2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} \end{cases}$

គេទាញ $1 + z = 2\cos^2\frac{2\pi}{7} + 2i.\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} = 2\cos\frac{2\pi}{7}(\cos\frac{2\pi}{7} + i.\sin\frac{2\pi}{7})$

តាមរូបមន្តដឹមរ័គេអាចសរសេរ ៖

$$(1+z)^4 = \left[2\cos\frac{2\pi}{7}(\cos\frac{2\pi}{7}+i.\sin\frac{2\pi}{7})\right]^4$$

$$(1+z)^4 = 16\cos^4\frac{2\pi}{7}\left(\cos\frac{8\pi}{7}+i.\sin\frac{8\pi}{7}\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{(1+z)^4 = 16\cos^4\frac{2\pi}{7}\left(\cos\frac{8\pi}{7}+i.\sin\frac{8\pi}{7}\right)}$ ។

II. គណនាលីមីត ៖

ក. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$

តាង $x=\frac{1}{n}$ កាលណា $n\to+\infty$ នោះ $x\to 0$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}+5} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}.(1+x)^5 = e$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5} = e}$ ។

ខ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$

តាង $1+x=\frac{n-1}{n+1}$ នាំឲ្យ $x=-\frac{2}{n+1}$ និង $n=-\frac{2+x}{x}$

កាលណា $n\to+\infty$ នោះ $x\to 0$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{2+x}{x}+2} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{2}{x}+1}$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{-2}.(1+x) = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2} = \frac{1}{e^2}}$ ។

III.បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះ (c) ត្រង់ $x=\alpha$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $k=\dfrac{2\alpha+a}{\alpha^2+1}$

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+1}$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{(x^2+ax+b)'(x^2+1)-(x^2+1)'(x^2+ax+b)}{(x^2+1)^2}$

$$=\frac{(2x+a)(x^2+1)-2x(x^2+ax+b)}{(x^2+1)^2}$$

បើ k ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃ បន្ទាត់ប៉ះ (c) ត្រង់ $x=\alpha$ គេបាន $k=f'(\alpha)$

គេបាន $k=\dfrac{(2\alpha+a)(x^2+1)-2\alpha.(\alpha^2+a\alpha+b)}{(\alpha^2+1)^2}$ (1)

ម៉្យាងទៀតខ្សែកោង (c) កាត់អក្សអាប់ស៊ីសស៊ីស $(x'0x)$ ត្រង់ចំនុច $x=\alpha$

គេបាន $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^2+a\alpha+b}{\alpha^2+1}=0$ នាំឲ្យ $\alpha^2+a\alpha+b=0$ (2)

យកសមីការ (2) ជួសក្នុង (1) គេបាន $k=\dfrac{(2\alpha+a)(\alpha^2+1)}{(\alpha^2+1)^2}=\dfrac{2\alpha+a}{\alpha^2+1}$

ដូចនេះ $\boxed{k=\dfrac{2\alpha+a}{\alpha^2+1}}$ ។

ខ-កំនត់តម្លៃ a និង b

សមីការអាប់ស៊ីសចំនុចប្រសព្វ M និង N រវាងខ្សែកោង (c) ជាមួយអក្ស $(x'0x)$

$f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+1}=0$ ឬ $x^2+ax+b=0$ (E)

តាង k_1 និង k_2 ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ (c) ត្រង់ M និង N

$k_1=f'(x_M)=\dfrac{2x_M+a}{x_M^2+1}$ និង $k_2=f'(x_N)=\dfrac{2x_N+a}{x_N^2+1}$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

ដើម្បីឲ្យបន្ទាត់ប៉ះនេះកែងគ្នាលុះត្រាតែ $k_1.k_2=\left(\dfrac{2x_M+a}{x_M^2+1}\right).\left(\dfrac{2x_N+a}{x_N^2+1}\right)=-1$

នាំឲ្យ $(2x_M + a)(2x_N + a) = -(x_M^2 + 1)(x_N^2 + 1)$

$$(2x_M + a).(2x_N + a) + (x_M^2 + 1)(x_N^2 + 1) = 0$$
$$4x_Mx_N + 2a(x_M + x_N) + a^2 + x_M^2x_N^2 + \left(x_M^2 + x_N^2\right) + 1 = 0$$
$$4x_Mx_N + 2a(x_M + x_N) + a^2 + x_M^2x_N^2 + \left[(x_M + x_N)^2 - 2x_Mx_N\right] + 1 = 0$$
$$(x_M + x_N)^2 + x_M^2x_N^2 + 2a(x_M + x_N) + 2x_Mx_N + a^2 + 1 = 0 \quad (3)$$

ដោយ x_M និង x_N ជាឫសសមីការ (E) នោះគមាន $\begin{cases} x_M + x_N = -a \\ x_Mx_N = b \end{cases}$

ទំនាក់ទំនង (3)អាចសរសេរ ៖

$$a^2 + b^2 - 2a^2 + 2b + a^2 + 1 = 0$$
$$b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2 = 0$$

គេទាញ $b = -1$ ។

ម្យ៉ាងទៀតដើម្បីឲ្យ (c) កាត់$(x'0x)$ បានពីរចំនុច M និង N លុះត្រាតែសមីការ មានឫសពីរផ្សេងគ្នា ពោលគឺគេត្រូវឲ្យ $\Delta = a^2 - 4b > 0$

ដោយ $b = -1$ គេទាញបាន $\Delta = a^2 + 4 > 0$ ពិតជានិច្ចគ្រប់ចំនួនពិត a ។

ដូចនេះ $\boxed{a \in IR \;, b = -1}$ ។

IV.កំនត់បីចំនួនពិត a, b, c

គេបាន $\dfrac{3x^2 - 7x + 6}{(x-3)^2(x+1)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-3} + \dfrac{c}{(x-3)^2}$

ឬ $3x^2 - 7x + 6 = a(x-3)^2 + b(x+1)(x-3) + c(x+1)$

ចំពោះ $x = -1$ គេបាន $16 = 16a$ នាំឲ្យ $a = 1$

ចំពោះ $x = 3$ គេបាន $12 = 4c$ នាំឲ្យ $c = 3$

ចំពោះ $x = 0$ គេបាន $6 = 9a - 3b + c$ នាំឲ្យ $b = \dfrac{9a + c - 6}{3} = 2$

ដូចនេះ $\boxed{a=4\ ,\ b=2, c=3}$ ។

ខ-គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 f(x).dx$

$$f(x)=\frac{3x^2-7x+6}{(x-3)^2(x+1)}=\frac{4}{x+1}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{(x-3)^2}$$

គេបាន $I=\int_0^1\left[\frac{4}{x+1}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{(x-3)^2}\right].dx$

$$=\left[4\ln|x+1|+2\ln|x-3|-\frac{3}{x-3}\right]_0^1$$

$$=\left[4\ln 2+2\ln 2+\frac{3}{2}\right]-\left[4\ln 1+2\ln 3+1\right]$$

$$=6\ln 2+\frac{3}{2}-2\ln 3-1=\frac{1}{2}+2\ln\frac{8}{3}$$

V.ក-សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និង សង់ក្រាប (c) ៖

. ដែនកំនត់ ៖ $D_f=IR-\{\ 2\ \}$

. ទិសដៅអថេរភាព

យើងមាន $f'(x)=\frac{(6x-6)(4x-8)-4(3x^2-6x+3)}{(4x-8)^2}$

$$=\frac{24x^2-48x-24x+48-12x^2+24x-12}{16(x-2)^2}$$

$$=\frac{12x^2-48x+36}{16(x-2)^2}=\frac{3(x^2-4x+3)}{4(x-2)^2}$$

បើ $f'(x)=0$ សមមូល $\frac{3(x^2-4x+3)}{4(x-2)^2}=0$ គេទាញ $x_1=1\ ,\ x_2=\frac{c}{a}=3$

. ចំនុចបរមា

ចំពោះ $x=1$ អនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមា $f(1)=0$ ។

ចំពោះ $x=3$ អនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមា $f(3)=3$ ។

. គណនាលីមីត និង អាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{3x^2-6x+3}{4x-8}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{3x^2-6x+3}{4x-8}=+\infty \text{ និង } \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-6x+3}{4x-8}=\pm\infty$$

ដោយ $\lim_{x\to2} f(x)=\pm\infty$ នាំឱ្យបន្ទាត់ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈររបស់ខ្សែកោង (c)

ម៉្យាងទៀត សរសេរ $f(x)$ ជារាងកាណូនិចដោយយកភាគយកចែកនឹងភាគបែង

គេបាន $f(x)=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4x-8}$ ដោយ $\lim_{x\to\infty}\frac{3}{4x-8}=0$

នាំឱ្យបន្ទាត់ $(d):\ y=\frac{3}{4}x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតរបស់ខ្សែកោង ។

តារាងអថេរភាព ៖

X	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$					‖				
$f(x)$		↗		↘	‖	↘		↗	

. សង់ក្រាប

ចំនុចប្រសព្វរវាងក្រាប (c) ជាមួយអក្ស័កូអរដោនេ

-បើ $y=\frac{3x^2-6x+3}{4x-8}=\frac{3(x-1)^2}{4x-8}=0$ នាំឱ្យ $x=1$ ។

-បើ $x=0$ នាំឱ្យ $y=f(0)=-\frac{3}{8}$

. ផ្ចិតឆ្លុះ

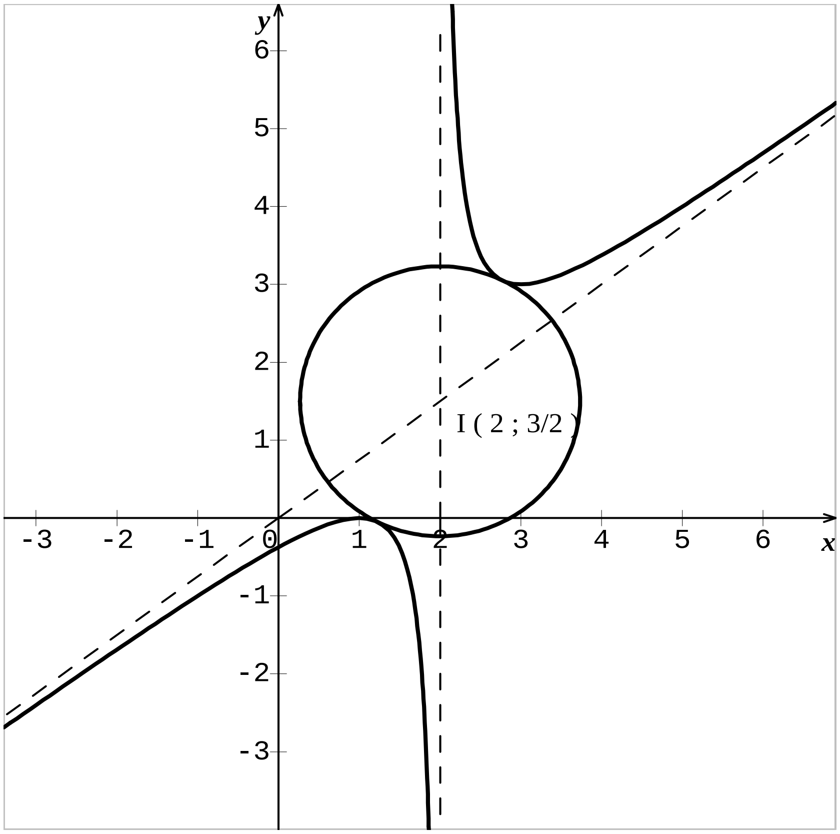
អាស៊ីមតូតឈរ $x=2$ និង អាស៊ីមតូតទ្រេត $y=\frac{3}{4}x$ ត្រង់ចំនុច $I(2,\frac{3}{2})$ ។

តាមរូបមន្តប្តូរតំរុយគេបាន $\begin{cases} x=2+X \\ y=\frac{3}{2}+Y \end{cases}$ ដោយ $y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{4x-8}$

គេបាន $\frac{3}{2}+Y=\frac{3}{4}(2+X)+\frac{3}{4(2+X)-8}$ ឬ $Y=F(X)=\frac{3}{2}X+\frac{3}{4X}$

ដោយ $F(-X)=-\frac{3}{2}X-\frac{3}{4X}=-F(X)$ នាំឱ្យ F ជាអនុគមន៍សេស ។

ដូចនេះចំនុច $I(2,\frac{3}{2})$ ជាផ្ចិតឆ្លុះរបស់ក្រាប (c) ។



ខ-កំនត់សមីការរង្វង់ (Γ)

តាង R ជាកាំរបស់រង្វង់ (Γ) មានផ្ចិត $I(2,\frac{3}{2})$

តាមរូបមន្តគេបាន $(\Gamma):(x-2)^2+(y-\frac{3}{2})^2=R^2$

សមីការអាប់ស៊ីសចំនុចរួមរវាង (c) និង (Γ) សរសេរ ៖

$$(x-2)^2+\left(\frac{3x^2-6x+3}{4x-8}-\frac{3}{2}\right)^2=R^2$$

$$(x-2)^2+\left(\frac{3x^2-6x+3-6x+12}{4(x-2)}\right)^2=R^2$$

$$(x-2)^2+\left(\frac{3x^2-6x+3}{4x-8}-\frac{3}{2}\right)^2=R^2$$

$$(x-2)^2+\left(\frac{3x^2-6x+3-6x+12}{4(x-2)}\right)^2=R^2$$

$$(x-2)^2+\left[\frac{3(x-2)^2+3}{4(x-2)}\right]^2=R^2 \quad \text{តាង } X=(x-2)^2$$

$$X+\frac{(3X+3)^2}{16X}=R^2$$

$$25X^2+2(9-8R^2)X+9=0 \quad (E)$$

ដើម្បីឱ្យរង្វង់ (Γ) ប៉ះនឹងខ្សែកោង(c) លុះត្រាតែសមីការ (E) មានឬសឌុបពោលគឺ

គេត្រូវឱ្យ $\Delta'=(9-8R^2)^2-225=0$ នាំឱ្យគេទាញ $R=\sqrt{3}$ ។

ដូចនេះសមីការរង្វង់សរសេរ $(\Gamma):\ (x-2)^2+(y-\frac{3}{2})^2=3$ ។

VI.ក-កំនត់កូអរដោនេវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$

គេមាន $A(1,-2,3)$,$B(3,-1,3)$,$C(5,1,4)$

គេបាន $\overrightarrow{AB}(2,1,0)$ និង $\overrightarrow{AC}(4,3,1)$ ។

កំនត់តំលៃកូស៊ីនូសនៃមុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ ៖

តាមរូបមន្ត $\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

$$\cos\theta = \frac{8+3+0}{\sqrt{5}.\sqrt{26}} = \frac{11}{\sqrt{130}} = \frac{11\sqrt{130}}{130}$$

ខ-គណនាផលគុណនៃវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ រួចទាញថាបីចំនុច A,B,C មិនរត់ត្រង់គ្នា

គេបាន $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2.\vec{j} + 2.\vec{k}$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (1,-2,2)$ ។

ដោយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ នាំឱ្យវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និង $\overrightarrow{AC}$ មិនកូលីនេអ៊ែ គ្នា

នាំឱ្យ A,B,C មិនរត់ត្រង់គ្នា។

គ-គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}.|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{1+4+4} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ (ឯកតាផ្ទៃ) ។}$$

ឃ-កំនត់សមីការប្លង់ (ABC)

តាង $\vec{n}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់របស់ប្លង់ (ABC)

គេបាន $\vec{n} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\,(1\,,-2\,,2)$

តាមរូបមន្ត $(ABC): a(x-x_A) + b(y-y_A) + c(z-z_A) = 0$

$$1.(x-1) - 2(y+2) + 2(z-3) = 0$$

$$x - 2y + 2z - 11 = 0$$

ដូចនេះ $(ABC): x - 2y + 2z - 11 = 0$ ។

ង-គណនាមាឌតេត្រាអែត $ABCD$

តាមរូបមន្ត $V_{ABCD} = \frac{1}{6}.\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}\right|$

ដោយ $A(1,-2,3), D(2,1,1)$ នាំឱ្យ $\overrightarrow{AD}(1,3,-2)$

ហើយ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,-2,2)$

គេបាន $V_{ABCD}=\frac{1}{6}.|1-6-4|=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}=1,5$ (ឯកតាមាឌ)។

ទាញរកចំងាយពីចំនុច D ទៅប្លង់ (ABC)

តាង h ជាកំពស់របស់តេត្រាអែត ABCD ដែលគូសចេញពីកំពូល D ទៅប្លង់បាត

នាំឱ្យ $h=d(D,(ABC))$ ជាចំងាយពីចំនុច D ទៅប្លង់ (ABC) ។

តាមរូបមន្ត $V_{ABCD}=\frac{1}{3}.S_{ABC}\times h=\frac{1}{3}.S_{ABC}\times d(D,(ABC))$

នាំឱ្យ $d(D,(ABC))=\frac{3.V_{ABC}}{S_{ABC}}=\frac{3.1,5}{1,5}=3$ (ឯកតាប្រវែង) ។

វិញ្ញាសាទី១៤

រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន**

គ្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិ និង អាហារូបករណ៍

I. គេអោយចំនួនកុំផ្លិច $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i.\sqrt{2}}{2}$ និង $z_2 = 1 - i$

ក.ចូរសរសេរ z_1 , z_2 និង $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ។

ខ.ចូរសរសេរ $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$ ជារាងពិជគណិត។

គ.ទាញអោយបានថា $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

II. កំនត់ចំនួនពិត x និង y ដើម្បីអោយ $(x+1)+(3+2y).i = \dfrac{7+9i}{3+2i}$

III. គេអោយ $f(z) = z^3 - 2\left(\sqrt{3}+i\right).z^2 + 4\left(1+i\sqrt{3}\right).z - 8i$

ក.ចូរបង្ហាញថា $f(z) = (z-2i)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right)$

ខ.ដោះស្រាយសមីការ $f(z) = 0$ ក្នុងសំណុំកុំផ្លិច ។

IV. ចូរគណនាលីមីត ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x + x\sin 2005x}{x^2}$ ខ. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3 - 3x^2 + (a-1)x + 3 - 3a}{x^2 - 4x + 3}$

V. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y = \sin\left(2005\cos\sqrt{x}\right)$

VI. គេអោយអនុគមន៍ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

ក.បង្ហាញថាមានតំលៃ x_0 ដែល $1 < x_0 < 2$ ហើយ $f(x_0) = 0$ ។

ខ.គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$ ។

សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$.

VII. g ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $g(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-2}$ មានក្រាប (C) ។

ក.កំនត់ចំនួនពិត a,b,c ដើម្បីអោយបាន $g(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$ ចំពោះ $x\neq 2$

ខ.កំនត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង ទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

គ. បង្ហាញថាចំនុច $I(2,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។

VIII. ក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់ $(o,\vec{i},\vec{j})$ មួយគេមានចំនុច ៖

$A(1,2,5)$,$B(2,2,1)$,$C(2,-1,1)$,$D(3,1,-1)$ ។

ក.កំនត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) កាត់តាមចំនុច A ហើយមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{CD}$ ។

ខ.កំនត់សមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាម B ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (CD) ។

គ.គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វ M រវាង (d) និង (P) ។

ឃ.រកសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (OM) ។

អត្រាកំណែគំរូ

I. គេមាន $z_1=\frac{\sqrt{6}-i.\sqrt{2}}{2}$ និង $z_2=1-i$

ក.សរសេរ z_1 ,z_2 និង $Z=\frac{z_1}{z_2}$ ជារាងត្រីកោណមាត្រ:

គេមាន $z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i.\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i.\sin\frac{\pi}{6}\right)$

ដូចនេះ $\boxed{z_1=\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{6})+i.\sin(-\frac{\pi}{6})\right]}$ ។

គេមាន $z_2=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ដូចនេះ $z_2=\sqrt{2}\left[\cos(-\frac{\pi}{4})+i.\sin(-\frac{\pi}{4})\right]$ ។

គេមាន $Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[\cos(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})+i.\sin(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})\right]$

ដូចនេះ $Z=\cos\frac{\pi}{12}+i.\sin\frac{\pi}{12}$ ។

ខ. សរសេរ $Z=\frac{z_1}{z_2}$ ជារាងពិជគណិត

គេបាន $Z=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}=\frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{2(1-i)(1+i)}=\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{6}-i\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4}$

ដូចនេះ $Z=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

គ. ទាញអោយបានថា $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

គេមាន $Z=\cos\frac{\pi}{12}+i.\sin\frac{\pi}{12}$ (1) និង $Z=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2)

ដោយផ្ទឹម (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ និង $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ។

II. កំនត់ចំនួនពិត x និង y

គេមាន $(x+1)+(3+2y).i=\frac{7+9i}{3+2i}$

ដោយ $\frac{7+9i}{3+2i}=\frac{(7+9i)(3+2i)}{(3+2i)(3-2i)}$

$$=\frac{21-14i+27i-18i^2}{9-4i^2}=\frac{39+13i}{13}=3+i$$

គេបាន $\begin{cases}x+1=3\\3+2y=1\end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$ ។ ដូចនេះ $x=2, y=-1$ ។

III. ក. បង្ហាញថា $f(z)=(z-2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)$

យើងមាន $f(z)=(z-2i).\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)$

ដោយពន្លាតអនុគមន៍នេះយើងបាន ៖

$$f(z)=z^3-2\sqrt{3}z+4z-2i(z^2-2\sqrt{3}z+4)$$
$$=z^3-2\sqrt{3}.z^2+4z-2iz^2+4\sqrt{3}iz-8i$$
$$=z^3-2\left(\sqrt{3}+i\right).z^2+4\left(1+i\sqrt{3}\right).z-8i$$ ពិត

ដូចនេះ $f(z)=(z-2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការ

បើ $f(z)=0$ នាំអោយ $(z-2i).\left(z^2-2\sqrt{3}.z+4\right)=0$

គេទាញឫស $z=2i$ ហើយ $,z^2-2\sqrt{3}.z+4=0$ $,\Delta'=3-4=-1=i^2$

នាំអោយ $z_1=\sqrt{3}+i$ $,z_2=\sqrt{3}-i$ ។

IV. គណនាលីមីត ៖

ក. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+x\sin 2005x}{x^2}$ ដោយ $1-\cos 2x=2\sin^2 x$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x+x\sin 2005x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(2.\frac{\sin^2 x}{x^2}+\frac{\sin 2005x}{2005x}.2005\right)$$
$$=2+2005=2007.$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+x\sin 2005x}{x^2}=2007$ ។

ខ. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2+(a-1)x+3-3a}{x^2-4x+3}$

$$=\lim_{x\to3}\frac{\left(x^3-3x^2\right)+(a-1)x-3(a-1)}{\left(x^2-x\right)-(3x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{x^2(x-3)+(a-1)(x-3)}{x(x-1)-3(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)\left(x^2+a-1\right)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{x^2+a-1}{x-1}=\frac{a+8}{2}.$$

V. គណនាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=\sin\left(2005\cos\sqrt{x}\right)$

យើងបាន $y'=\left(2005\cos\sqrt{x}\right)'.\cos\left(2005\cos\sqrt{x}\right)$

$$=-2005\left(\sqrt{x}\right)'.\sin\sqrt{x}.\cos\left(2005.\cos\sqrt{x}\right)$$

$$=-\frac{2005}{2\sqrt{x}}.\sin\sqrt{x}.\cos\left(2005.\cos\sqrt{x}\right)$$

ដូចនេះ: $\boxed{y'=-\frac{2005}{2\sqrt{x}}.\sin\sqrt{x}.\cos(2005.\cos\sqrt{x})}$

VI. $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$

ក-បង្ហាញថាមានតំលៃ x_0 ដែល $1<x_0<2$ ហើយ $f(x_0)=0$

$f(x)$ ជាអនុគមន៍កំនត់ជាប់លើ IR ។

គេមាន $f(1)=1^3-6.1^2+9.1-3=1$ និង $f(2)=2^3-6.2^2+9.2-3=-1$

ដោយ $f(1).f(2)=-1<0$ តាមទ្រឹស្តីបទតំលៃកណ្តាលមានតំលៃ x_0 ដែល

$1<x_0<2$ ហើយ $f(x_0)=0$ ។

ខ-គណនាដេរីវេ $f'(x)$ ហើយសិក្សាសញ្ញានៃ $f'(x)$

យើងបាន $f'(x)=3x^2-12x+9$

សមីការ $f'(x)=3x^2-12x+9=0$ មានឫស $x_1=1\ ,x_2=3$ ។

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

តាមតារាងខាងលើគេបាន

$f'(x) > 0$ ចំពោះ $x \in (-\infty;1) \cup (3;+\infty)$.

$f'(x) < 0$ ចំពោះ $x \in (1;3)$ ។

សង់តារាងអថេរភាពនៃ $f(x)$

គេមាន $f(1) = 1$ និង $f(3) = -3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'(x)			|		0		
f(x)	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

VII. $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$ មានក្រាប (C)

ក.កំនត់ចំនួនពិត a, b, c

ដើម្បីអោយបាន $g(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$ ចំពោះ $x \neq 2$ លុះត្រាតែ ៖

$$ax + b + \frac{c}{x-2} = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$$

$$(ax + b)(x - 2) + c = x^2 - 3x + 3$$

$$ax^2 + (b - 2a)x + (c - 2b) = x^2 - 3x + 3$$

គេទាញបាន $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -3 \\ c - 2b = 3 \end{cases}$ នាំអោយ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$

ដូចនេះ $a = 1, b = -1, c = 1$ និង $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-2}$ ។

ខ.កំនត់សមីការអាស៊ីមតូតឈរ និង ទ្រេតនៃក្រាប (C)

គេមាន $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 2} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

និង $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2-3x+3}{x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

ដូចនេះបន្ទាត់ $x=2$ ជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (C) ។

គេមាន $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$ ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x-2} = 0$

ដូចនេះបន្ទាត់ $y = x-1$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាប (C) ។

គ. បង្ហាញថាចំនុច $I(2,1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C)

រូបមន្តប្តូរតំរុយ $\begin{cases} x = X+2 \\ y = Y+1 \end{cases}$

គេបានសមីការបង្រួម $Y+1 = (X+2) - 1 + \frac{1}{(X+2)-2}$

ឬ $Y = F(X) = X + \frac{1}{X}$

គេមាន $F(-X) = -X + \frac{1}{-X} = -\left(X + \frac{1}{X}\right) = -F(X)$

នាំអោយ $F(X)$ ជាអនុគមន៍សេស។

ដូចនេះ ចំនុច $I(2;1)$ ជាផ្ចិតឆ្លុះនៃក្រាប (C) ។

VIII.ក. សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (d) កាត់តាមចំនុច A មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{CD}$

តាមរូបមន្ត $(d): \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \quad ,t \in IR \end{cases}$

ដោយគេមាន $\overrightarrow{CD}(1,2,-2)$ ជាវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស។

ដូចនេះ $(d): \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = 5-2t \quad ,t \in IR \end{cases}$

ខ-កំនត់សមីការប្លង់ (P) ដែលកាត់តាម B ហើយកែងនឹងបន្ទាត់ (CD)

វ៉ិចទ័រនៃប្លង់ (P) កែងនឹងបន្ទាត់ (CD) គឺ $\vec{n}_p = \overrightarrow{CD}(1,2,-2)$

តាមរូបមន្ត $(P): a(x-x_B)+b(y-y_B)+c(z-z_B)=0$

$$1.(x-2)+2(y-2)-2(z-1)=0$$

$$x-2+2y-4-2z+2=0$$

ដូចនេះ $\boxed{(P): x+2y-2z-4=0}$ ។

គ. គណនាកូអរដោនេចំនុចប្រសព្វរវាង (d) និង (P):

យកសមីការ (d) ជួសក្នុង (P) គេបាន ៖

$$(1+t)+2(2+2t)-2(5-2t)-4=0$$

$$1+t+4+4t-10+4t-4=0$$

$9t-9=0$ នាំអោយ $t=1$ ។

យកតំលៃ $t=1$ ជំនួសក្នុង (L) គេបាន $\begin{cases} x=1+1=2 \\ y=2+2=4 \\ z=5-2=3 \end{cases}$

ដូចនេះចំនុចប្រសព្វគឺ $M(2,4,3)$ ។

ឃ. សរសេរសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (OM) ៖

បន្ទាត់ (OM) មានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{OM}(2,4,3)$

តាមរូបមន្ត $(OM): \begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \quad ,t\in IR \end{cases}$ ដូចនេះ $(OM): \begin{cases} x=2t \\ y=4t \\ z=3t \quad ,t\in IR \end{cases}$ ។

វិញ្ញាសាទី១៥

រៀបរៀងដោយ **លឹម ផល្គុន**

ត្រៀមប្រឡងសញ្ញាបត្រទុតិយភូមិ និង អាហារូបករណ៍

I-(25ពិន្ទុ)1-រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x$ ។

2-គេឲ្យអនុគមន៍ $y=\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$ ។ បង្ហាញថា $xy'+1=e^y$ ។

3-គេឲ្យអនុគមន៍ $y=(-x^2+mx+m)e^{-x}+2012$ ។ចំពោះគ្រប់ $m\neq -2$ បង្ហាញថាអនុគមន៍នេះមានអតិបរមាមួយនិងអប្បបរមាមួយជានិច្ច

II-(25ពិន្ទុ) 1-រកសមីការស្តង់ដាប៉ារ៉ាបូលដែលមានអក្ស័ឆ្លុះជាបន្ទាត់ដេក ហើយប៉ារ៉ាបូលនេះកាត់តាមគល់តម្រុយ O ហើយកាត់តាមចំណុច $(1,2)$ និង $(-3,-2)$ ។

2-សង់ប៉ារ៉ាបូលនេះ ។

III-(25ពិន្ទុ) f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ដោយ $y=f(x)=\frac{x^2+\ln x+1}{x}$ មានក្រាប (c) ។

1-គណនា $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ។រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (c) ។

2-គណនា $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា $f'(x)>0$ ។សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ។

3-បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d): y=x$ ជាអស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (c) ខាង $+\infty$ ។

គណna $f(2)$ រួចសង់ខ្សែកោង (c) និងបន្ទាត់ (d) ។ គេយក $\ln 2=0.7$ ។

IV-(25ពិន្ទុ)គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+2y'+y=x^2+2x-2$ ។

1-រកចម្លើយ y_h នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+2y'+y=0$ ។

2-កំណត់ A,B,C ដើម្បីឲ្យ $y_p=Ax^2+Bx+C$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

3-បង្ហាញថា $y=y_h+y_p$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

អត្រាកំណែគំរូ

I-(25ពិន្ទុ) 1-រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x$

គេមាន $(\sin^2 x+\cos^2 x)^3=1^3$

សមមូល $\sin^6 x+3\sin^4 x\cos^2 x+3\sin^2 x\cos^4 x+\cos^6 x=1$

$$\sin^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{1}+\cos^6 x=1$$

$$\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x=1$$ គ្រប់ $x\in\Re$

គេបាន $y=1$ នោះ $y'=0$ ។

ដូចនេះដេរីវេនៃអនុគមន៍ $y=\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x$ គឺ $y'=0$ ។

2-បង្ហាញថា $xy'+1=e^y$ ៖

គេមាន $y=\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$ សមមូល $e^y=\frac{1}{1+x}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $y=\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)=\ln(1+x)^{-1}=-\ln(1+x)$

គេបាន $y'=-\frac{(1+x)'}{1+x}=-\frac{1}{1+x}$ គេទាញ $xy'+1=-\frac{x}{1+x}+1=\frac{1}{1+x}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន $xy'+1=e^y$ ពិត ។

3-បង្ហាញថាអនុគមន៍នេះមានអតិបរមាមួយនិងអប្បបរមាមួយជានិច្ច

មាន $y=(-x^2+mx+m)e^{-x}+2012$ ចំពោះគ្រប់ $m\neq-2$

គេបាន $y'=(-2x+m)e^{-x}-e^{-x}(-x^2+mx+m)$

$$=[(-2x+m)-(-x^2+mx+m)]e^{-x}$$

$$=[x^2+(m+2)x]e^{-x}$$

បើ $y'=0\Leftrightarrow x^2+(m+2)x=x[x+(m+2)]=0$ (1)

ចំពោះគ្រប់ $m\neq-2$ សមីការ (1) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជានិច្ចគឺ

$x_1=0\,;\,x_2=-(m+2)$ ។

ដូចនេះអនុគមន៍នេះមានអតិបរមាមួយនិងអប្បបរមាមួយជានិច្ចចំពោះគ្រប់ $m\neq-2$

II-(25ពិន្ទុ) 1-រកសមីការស្តង់ដាប៉ារ៉ាបូល

ដោយប៉ារ៉ាបូលមានអ័ក្សឆ្លុះជាបន្ទាត់ដេកនោះវាជាប៉ារ៉ាបូលដេកដែលមានសមីការ
ស្តង់ដាទម្រង់ $(p):(y-k)^2=4p(x-h)$ ។

តាមសម្មតិកម្មប៉ារ៉ាបូលនេះកាត់តាមគល់តម្រុយ $O(0,0)$ ហើយកាត់តាមចំណុច
$(1,2)$ និង $(-3,-2)$ នោះគេបាន

$$\begin{cases}(0-k)^2=4p(0-h)\\(2-k)^2=4p(1-h)\\(-2-k)^2=4p(-3-h)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k^2=-4ph & (1)\\(2-k)^2=4p(1-h) & (2)\\(-2-k)^2=4p(-3-h) & (3)\end{cases}$$

យកសមីការ(1) ដក (2)គេបាន $k^2-(2-k)^2=-4p$ ឬ $k+p=1$ (4)

យកសមីការ (1) ដក (3) គេបាន $k^2-(-2-k)^2=12p$ ឬ $-k-3p=1$ (5)

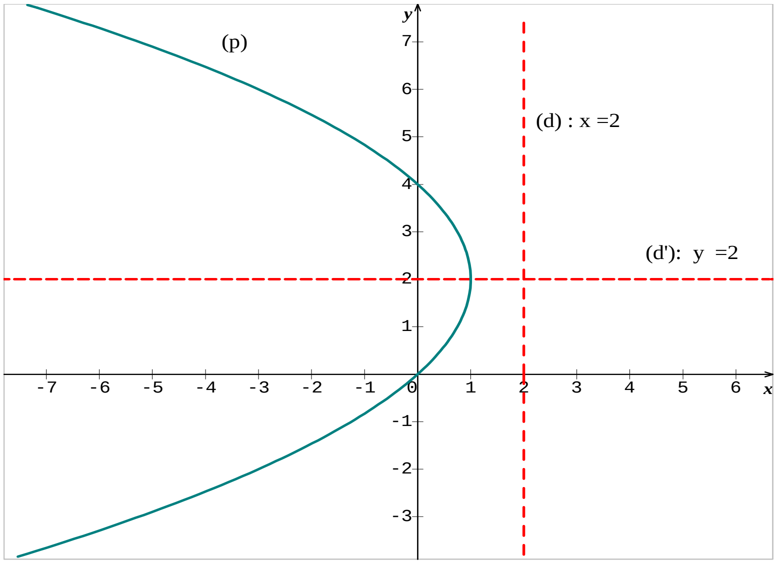
បូកសមីការ (4)និង(5)បាន $-2p=2$ នោះ $p=-1$ ហើយ $k=1-p=2$

យក $k=2$, $p=-1$ ជួសក្នុង(1)គេបាន $4=4h$ ឬ $h=1$ ។

ដូចនេះ $(p):(y-2)^2=-4(x-1)$ ជាប៉ារ៉ាបូលដែលត្រូវរក ។

2-សង់ប៉ារ៉ាបូល $(p):(y-2)^2=-4(x-1)$

ដោយ $k=2$, $h=1$, $p=-1$ នោះកូអរដោនេកំពូលគឺ $S(h,k)=(1,2)$,
កំណុំ $F(h+p,k)=F(0,2)$ និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស $(d):x=h-p=2$ ។



III-(25ពិន្ទុ)1-គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ ៖

គេបាន $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\ln x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x})=+\infty$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x})=0$ ។

ហើយ $\lim\limits_{x\to0^+}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{x^2+\ln x+1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+\dfrac{\ln x+1}{x})=-\infty$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x+1)=-\infty\ ;\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ ។

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ និង $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ ។

រកសមីការអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាប (c) ៖

ដោយ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ នោះបន្ទាត់ $x=0$ ជាសមីការអាស៊ីមតូតឈរ

នៃក្រាប (c) ។

2-គណនា $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា $f'(x)>0$ ៖

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2+\ln x+1}{x}$

គេបាន $f'(x)=\dfrac{(2x+\frac{1}{x})x-(x^2+\ln x+1)}{x^2}=\dfrac{2x^2+1-x^2-\ln x-1}{x^2}$

ដូចនេះ $f'(x)=\dfrac{x^2-\ln x}{x^2}$ ។

តាង $g(x)=x^2-\ln x\ ,\ x>0$

គេបាន $g'(x)=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-1}{x}=\dfrac{(x\sqrt{2}+1)(x\sqrt{2}-1)}{x}$

គ្រប់ $x>0$ គេមាន $\dfrac{x\sqrt{2}+1}{x}>0$ នោះ $g'(x)$ មានសញ្ញាដូច $x\sqrt{2}-1$ ។

បើ $g'(x)=0 \Leftrightarrow x\sqrt{2}-1=0$ ឬ $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ។

តារាងសញ្ញានៃ $g'(x)$:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

ដោយត្រង់ $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ អនុគមន៍ g' ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

នោះ g មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ គឺ

$$g(\frac{\sqrt{2}}{2})=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2>0$$

ដោយ $f'(x)=\frac{x^2-\ln x}{x}=\frac{g(x)}{x}$ នោះ $f'(x)>0$ គ្រប់ $x>0$ ។

សង់តារាងអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f ៖

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3-បង្ហាញថាបន្ទាត់ $(d): y=x$ ជាអាសីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (c) ខាង $+\infty$ ៖

$$(c): y=f(x)=\frac{x^2+\ln x+1}{x} \ ; \ (d): y=x$$

គេបាន $f(x)-y=\frac{x^2+\ln x+1}{x}-x=\frac{\ln x+1}{x}$

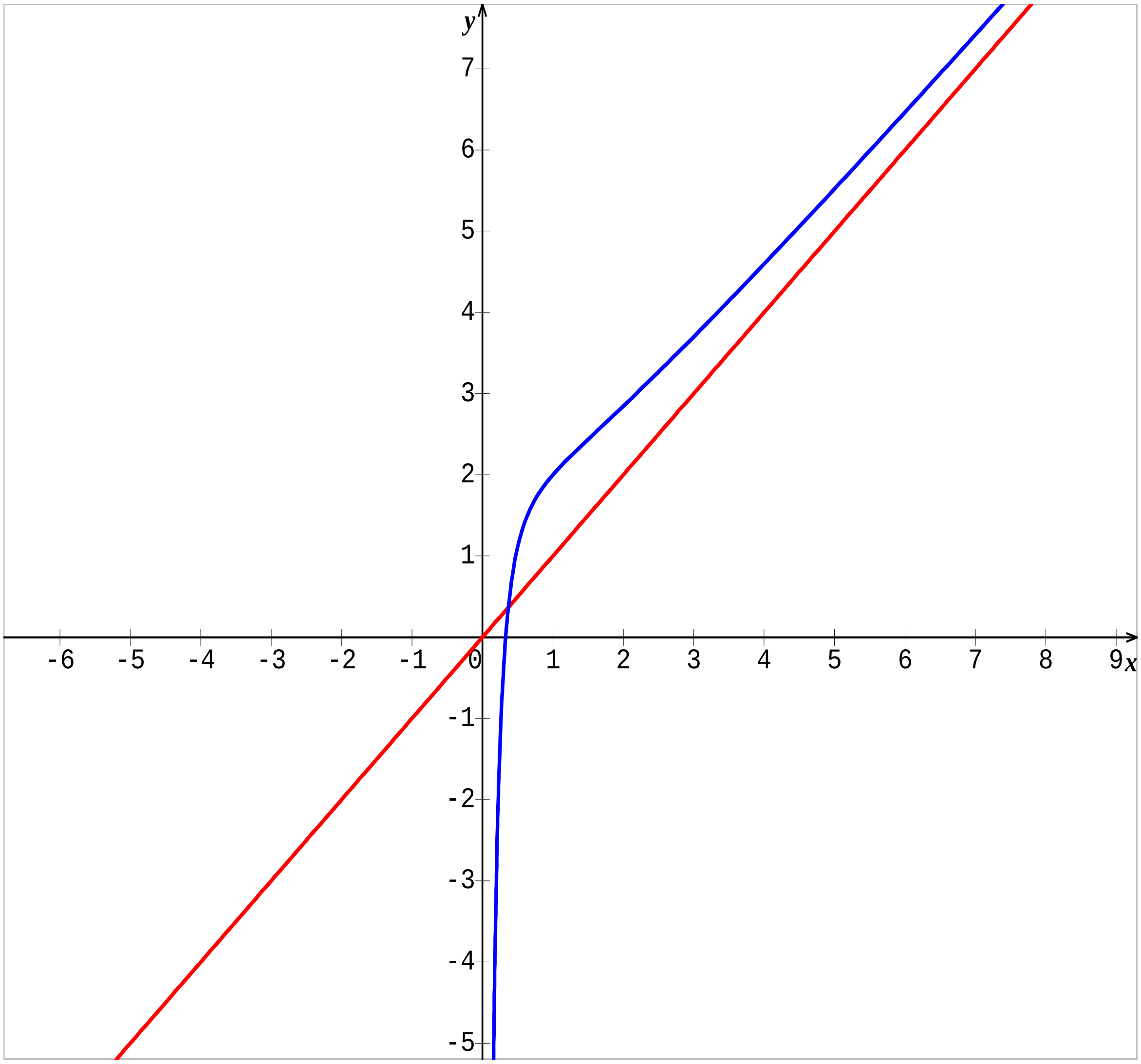
ដោយ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-y\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x+1}{x}=0$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

ដូចនេះបន្ទាត់ $(d): y=x$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃខ្សែកោង (c) ខាង $+\infty$ ។

គណនា $f(2)$ រួចសង់ខ្សែកោង (c) និងបន្ទាត់ (d) ៖

ចំពោះ $x=2$ នោះ $f(2)=\frac{4+\ln 2+1}{2}=\frac{4+0.7+1}{2}=\frac{5.7}{2}=2.85$

ដូចនេះ $f(2)=2.85$ ។



IV-(25ពិន្ទុ)1-រកចម្លើយ y_h នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+2y'+y=0$

មានសមីការសម្គាល់ $r^2+2r+1=(r+1)^2=0$

មានឫសឌុបមួយ $r_1=r_2=-1$

ដូច្នេះ $y_h=(ax+b)e^{-x}$; $a,b\in\Re$ ។

2-កំណត់ A,B,C ៖

ដើម្បីឲ្យ $y_p=Ax^2+Bx+C$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) លុះត្រាតែវាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (E) ។ គេបាន $y_p''+2y_p'+y_p=x^2+2x-2$ (*)

ដោយ $y_p=Ax^2+Bx+C$ នោះ $y_p'=2Ax+B$ និង $y_p''=2A$

សមីការ (*) អាចសរសេរ $2A+2(2Ax+B)+Ax^2+Bx+C=x^2+2x-2$

ឬ $Ax^2+(4A+B)x+(2A+2B+C)=x^2+2x-2$

គេទាញបាន $\begin{cases}A=1\\4A+B=2\\2A+2B+C=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=1\\B=2-4A=-2\\C=-2-2A-2B=-2-2+4=0\end{cases}$

ដូចនេះ $A=1$, $B=-2$, $C=0$ ។

3-បង្ហាញថា $y=y_h+y_p$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ៖

គេមាន y_h នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''+2y'+y=0$

នោះគេបាន $y_h''+2y_h'+y_h=0$ (1)

ហើយ y_p ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ $y_p''+2y_p'+y_p=x^2+2x-2$ (2)

បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន

$(y_h''+y_p'')+2(y_h'+y_p')+(y_h+y_p)=x^2+2x-2$

ឬ $(y_h+y_p)''+2(y_h+y_p)'+(y_h+y_p)=x^2+2x-2$ (3)

តាមទំនាក់ទំនង (3) បញ្ជាក់ថា $y=y_h+y_p$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

✍✍✍✍✍✍✍