វិទ្យាល័យហ៊ុនសែនកោះអណ្តែត

កម្រង លំហាត់ ចម្លើយ

១២ [illegible]

ត្រៀមប្រលង៖

សិស្សពូកែថ្នាក់កម្រង ទូទាំងខេត្ត និង ប្រទេស

អាហារូបករណ៍ក្នុងនិងក្រៅប្រទេស

គ្រូអនុ និង ចូល NIE

គយ ពេទ្យ...............................

ត្រួតពិនិត្យដោយលោកគ្រូ ម៉ាង់ ស្វង

រៀបរៀងដោយ ខៀវ សោភា

<u>អារម្ភកថា</u>

សៀវភៅកម្រងលំហាត់ ចម្លើយ ស៊ីតមួយក្បាលនេះ ត្រូវបានខ្ញុំបានចងក្រងឡើងក្នុងគោលបំណងជួយសម្រួល ដល់ការស្រាវជ្រាវរបស់អ្នកស្នេហាគណិតវិទ្យាឲ្យមាន ភាពជឿនលឿននៅមុខៗ។ សៀវភៅនេះផងដែរ មិនមែនល្អ ឥតខ្ចោះនោះទេគ្រាន់តែលំហាត់ ជាប្រភេទធ្លាប់ចេញ ប្រឡងជាបណ្តាប្រទេសមួយចំនួន។

ខ្ញុំសូមអភ័យទោសចំពោះកំហុសឆ្គងនៃការចងក្រង របស់ខ្ញុំទុកជាមុន ព្រោះអាចនឹងមានកន្លែងខ្វះខុសអក្ខរាវិរុតនិងបច្ចេកទេសកុំព្យូទ័រ ទោះបីខំព្យាយាមពិនិត្យយ៉ាងណាក៏ដោយ។

ជាចុងក្រោយ សូមឲ្យអ្នកទាំងអស់គ្នាជួបតែពុទ្ធពរ ទាំងបួនប្រការ គឺ អាយុះ វណ្ណះ សុខះ និង ពលះ កុំបីអាក់ខានឡើយ។

សាកលវិទ្យាល័យដាលី ថ្ងៃទី ៧ ឆ្នាំ ២០១៨

យូណាន ប្រទេសចិន

ផ្នែកប្រធានលំហាត់

១. គេឲ $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}, a_1=2$ ។

ក. បង្ហាញថា $\dfrac{1}{a_n}$ ជាស៊ីតនព្វន្ត ។

ខ. រកតួទូទៅនៃស៊ីត (a_n) ។

២. គេឲ a_n ជាចំនួនគត់នៃឫសសមីការ៖ $f(x)=x^2+x+\dfrac{1}{2}, x\in[n,n+1], n\in\mathbb{N}^*$ ។

ក. រកតួទូទៅនៃស៊ីត (a_n) ។

ខ. តាង $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$ ។ គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត $\{b_n\}$ ។

៣. គេឲស៊ីត (a_n) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖ $a_1=a_2=1$ និង $a_n+a_{n-1}+a_{n-2}=n^2, n\geq 3$ ។ គណនាតួទី 2017 ។

៤. បើស៊ីត (a_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់៖ $a_1=3, a_{n+1}=2a_n+1, \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ ។ គណនាតួទូទៅនៃស៊ីត (a_n) ។

៥. គេឲអនុគមន៍ $f(x)=\log_2 x-\log_x 2, (0<x<1)$ និងស៊ីត (a_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f\left(2^{a_n}\right)=2n$ ។ គណនា (a_n) ។

៦. គេឲ ស៊ីត (a_n) ដែល $a_n=2n^2-n$ ។ តើមានចំនួនមិនសូន្យ p,q ដែលធ្វើឲស៊ីត $\left\{\dfrac{a_n}{pn+q}\right\}$ ជាស៊ីតនព្វន្តដែរឬទេ?

៧. គេឲស៊ីត (a_n), $a_1=1, a_{n+1}=a_n+3n, \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ ។ គណនា a_{2018} ។

៨. គេឲស៊ីតនព្វន្តពីរដែល៖ $\{a_m\}:1,5,9...$ និង $\{b_n\}:3,10,17...$ ។ ពិភាក្សា 200 តួដំបូងនៃស៊ីតទាំងពីរ និង រកចំនួនតួដែលមានតម្លៃស្មើគ្នា?

៩. សន្មត់ឫសទាំងបួននៃសមីការ $x^2-x+a=0$ និង $x^2-x+b=0$ មានទម្រង់ជា

ស៊ីតនព្វន្ត ដែលតួទីមួយគឺ $\frac{1}{4}$ ។ បើ $a<b$ គណនាតម្លៃនៃ a,b ។

១០. គេឲ $f(x)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)^2, (x\geq 0)$ និង ស៊ីត (a_n) ដែល $a_1=2, n\geq 2, a_n>0$, $S_n=f(S_{n-1})$ ។ គណនាតួទូទៅ (a_n) ។

១១. គេឲតួនីមួយៗនៃស៊ីត (a_n) ខុសពីរសូន្យ បង្ហាញថា៖

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}$$ ។

១២. គណនាផលបូកនៃស៊ីត៖

ក. គេឲ $\frac{1}{2},2\frac{3}{4},4\frac{7}{8},6\frac{15}{16},\ldots$ គណនាផលបូក S_n តួដំបូង ។

ខ. $S=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+a^{n-r}b^r+\ldots+ab^{n-1}+b^n$ ដែល $a\neq 0, b\neq 0$ $, n\in\mathbb{N}^*$ ។ គណនា S ។

គ. គេឲ $1, 1+2, 1+2+2^2+\ldots, 1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}$ ។ គណនាផលបូក S_n តួដំបូង ។

១៣. គេឲស៊ីត (a_n), $a_1=1$ និង $(b_n), b_1=0$ ហើយមានទំនាក់ទំនង

$a_n=\frac{1}{3}(2a_{n-1}+b_{n-1})$ និង $b_n=\frac{1}{3}(a_{n-1}+2b_{n-1})$, $n\geq 2$ ។ រក a_n, b_n ។

១៤. បើផលបូកទី n តួដំបូងនៃស៊ីតនព្វន្តគឺ 30 ហើយផលបូកទី $2n$ គឺ 100 ។ គណនាផលបូកទី $3n$ ។

១៥. កូអរដោនេនៃអនុគមន៍ $f(x)=ax^2+bx+c$ គឺ $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$ និង $f(3)=2$ ។ សម្រាប់ចំនួនពិតមានន័យ x, ស៊ីត $\{a_n\},\{b_n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x)g(x)+a_nx+b_n=x^{n+1}, n\in\mathbb{N}^*$ ដែល $g(x)$ មានន័យនៅក្នុងសំណុំចំនួនពិត ។ រកតួទូទៅនៃស៊ីត $\{a_n\},\{b_n\}$ ។

១៦. គេឲស៊ីតនព្វន្ត (a_n) តាង $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{a_n}$ និង $b_1+b_2+b_3=\frac{21}{8}, b_1b_2b_3=\frac{1}{8}$ ។

គណនាតួទូទៅ (a_n) ។

១៧. គេឲស៊ីត(a_n)ដែលតួនីមួយៗជាចំនួនវិជ្ជមាន, តាង S_n ជាផលបូក n តួដំបូង និង $2\sqrt{S_n}=a_n+1,\ (n\in\mathbb{N}^*)$ ។ គណនាតួទូទៅ (a_n) ។

១៨. តាងផលបូកនៃស៊ីត (a_n) ដោយ S_n, $a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}S_n,\ (n=1,2,3...)$ ។ បង្ហាញថា

ក. ស៊ីត $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. $S_{n+1}=4a_n$ ។

១៩. តាងផលសងរួមនៃស៊ីតនព្វន្ត (a_n) និង ផៀបរួមនៃស៊ីតធរណីមាត្រ (b_n) ដោយ d ដូចគ្នា ដែល $d\neq 1, d\neq 0$, $a_1=b_1, a_4=b_4, a_{10}=b_{10}$ ។

ក. រក $a_1,\ d$

ខ. តើ b_{16} ជាតួនៃស៊ីត (a_n)ដែរឬទេ? បើជាតួនៃស៊ីត(a_n) ជាតួទីប៉ុន្មាន? បើមិនមែន, ចូរពន្យល់ហេតុផល ។

២០. គេឲស៊ីត $(a_n), a_1=1, a_{n+1}=S_n+(n+1),\ (n\in\mathbb{N}^*)$ ។

ក. បង្ហាញថា (a_n+1)ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. រក (a_n) និងគណនាផលបូក S_n ។

២១. តាងចំណុច $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2),...,P_n(x_n,y_n)\ (n\geq 3)$ជាចំណុចនៅលើក្រាបអនុគមន៍ដឺក្រេទីពីរ Cនិង $a_1=|OP_1|^2, a_2=|OP_2|^2,....,a_n=|OP_n|^2$ ជាទម្រង់នៃស៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម d ,$(d\neq 0)$និង $S_n=a_1+a_2+...+a_n$ ។

ក. បើក្រាប Cគឺ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad (a=10, b=5)$, $P_1(10,0), S_3=255$ ។

គណនាចំនុច P_3

ខ. បើក្រាប Cគឺ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad (a>b>0)$, $P_1(a,0)$ ។

រកតម្លៃអប្បបរមានៃ S_n ដែល d ខុសគ្នា ។

២២. គេមានស្វ៊ីតនព្វន្ត ១២ តួ ដែល $S_{even} : S_{odd} = 32 : 27$ និងផលបូកនៃស្វ៊ីតនេះគឺ 354 ។ រកផលសងទូទៅ d ។

២៣. គាងស្វ៊ីត $\{a_n\}, a_1 = 1, na_{n+1} = (n+1)a_n + 1 \ (n \geq 2)$ ។ គណនាផលបូក S_n ។

២៤. គេឲ្យអនុគមន៍ដឺក្រេទីពីរ៖ $f(x) = n(n+1)x^2 - (2n+1)x + 1$ និង n ត្រូវបានជ្រើសចេញពីគ្រប់ចំនួនពិតធម្មជាតិ ។ គណនាផលបូកប្រវែងនៃបន្ទាត់កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសដែលកាត់ក្រាប ។

២៥. ក. គេឲ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត (a_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់៖ $a_1 = -60, a_{17} = -12$ តាង $b_n = |a_n|$ ។
គណនាផលបូក ៣០ តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $\{b_n\}$ ។

ខ. បើតួទូទៅនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត (a_n) គឺ $a_n = 10 - 3n$ ។ គណនាតម្លៃនៃ
$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$ ។

២៦. គេឲ្យអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ $f(x)$ ដែល $f(8) = 5$ ។ $f(2), f(5), f(4)$ ជាទម្រង់នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។ បញ្ជាក់: $S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{S_n}{n^2}\right)$ ។

២៧. តាងគ្រប់តួទាំងអស់នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត (a_n) ជាចំនួនវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា៖

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$ ។

២៨. គណនាផលបូក S_n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត៖ $1, 3a, 5a^2, 7a^3, \ldots, (2n-1)a^{n-1}$ ។

២៩. តាង S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) ដោយ $S_n = 2n^2$, (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែល $a_1 = b_1, b_2(a_2 - a_1) = b_1$ ។

ក. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}, \{b_n\}$ ។

ខ. តាង $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត c_n តាងដោយ T_n ។

៣០. ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែល $a_1 = 8, b_n = \log_2 a_n$ ។ បើ ផលបូក ៧ តួដំបូងនៃ

ស៊ីត $\{b_n\}$ តាងដោយ S_7 មានតម្លៃអតិបរមា ហើយ $S_7 \neq S_8$ ។ រកសំណុំរូបភាពផលធៀប q នៃស៊ីត $\{a_n\}$ ។

៣១. សម្រាប់ចំនួនគត់មួយ ផ្នែកទសភាគរបស់វា ផ្នែកគត់ ហើយខ្លួនវាជាទម្រង់នៃស៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។ រកចំនួនមួយនោះ ។

៣២. ស៊ីត $\{a_n\}$ មាន k តួ (k ជាចំនួនថេរ) ។ ផលបូក S_n នៃស៊ីតនេះគឺ $S_n = 2n^2 + n$, $(n \leq k, n \in \mathbb{N}^*)$ ។ បើយើងប្តូរតួមួយ (មិនមែនតួទីមួយ ហើយក៏មិនមែនតួបញ្ចប់)ពី k តួ តម្លៃមធ្យមនៃតួដែលនៅសល់ $(k-1)$ គឺ 79 ។

ក. រកតួទូទៅនៃស៊ីត $\{a_n\}$ ។

ខ. រក k និងតួដែលគេប្តូរ ។

៣៣. គេឲ្យ៖ $f(x) = x^2 - (2n+1)x + n^2 + 5n - 7$ ។

ក. បើកូអរដោនេ y ប្រសព្វក្រាប $f(x)$ មានទម្រង់ជាស៊ីត $\{a_n\}$ ។ បង្ហាញថាស៊ីត $\{a_n\}$ ជាស៊ីតនព្វន្ត ។

ខ. បើចម្ងាយពីចំណុចប្រសព្វក្រាប $f(x)$ ទៅកាន់អ័ក្សអាប់ស៊ីស x មានទម្រង់ជាស៊ីត $\{b_n\}$ ។ គណនាផលបូក S_n នៃស៊ីត $\{b_n\}$ នេះ ។

៣៤. បើយើងបញ្ចូលលេខមួយខ្ទង់ចូលក្នុងចន្លោះលេខចំនួនគត់ពីរខ្ទង់, បីចំនួននោះបង្កើតបានជាស៊ីតនព្វន្តមួយ ។ បើយើងបញ្ចូលលេខពីរខ្ទង់ b,c, ចំនួនបួនខ្ទង់នោះបង្កើតបានជាស៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។ បង្ហាញថា៖

ក. $2a > b + c$

ខ. $(a+1)^2 \geq (b+1)(c+1)$

៣៥. សម្រាប់ចំនួនពិតប្រាកដ x, $[x]$ បញ្ជាក់ផ្នែកគត់នៃ x ។ មានន័យថា $[x]$ ជាចំនួនធំបំផុតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $[x] \leq x$ ។

ក. គណនា $[\log_2 1] + [\log_2 2] + \ldots + [\log_2 1024]$

ខ. ទាញរករូបមន្តទូទៅនៃ $[\log_2 1] + [\log_2 2] + \ldots + [\log_2 (2^n - 1)]$ ។

៣៦. តើមានប៉ុន្មានតួដែលដូចគ្នានៅក្នុង ១០០ តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត 5,8,11... និងស្វ៊ីតនព្វន្ត 3,7,11... ? គណនាផលបូកនៃចំនួនដែលដូចគ្នាទាំងអស់នោះ ។

៣៧. ក. ពិភាក្សាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $\{a_n\}, a_1 = 1$ ហើយតួជៀងទៀតមានចំនួនគូ ។ ផលបូកនៃតួសេសទាំងអស់ស្មើនឹង 85 ។ ផលបូកនៃចំនួនគូទាំងអស់ស្មើនឹង 170 ។ គណនាផលធៀប q និងរកចំនួនតួ n ។

ខ. គ្រប់តួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $\{a_n\}$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន ហើយស្វ៊ីតនេះមានតួជាចំនួនគូផងដែរ ។ ផលបូកនៃតួទាំងអស់ស្មើរនឹង ៤ ដងនៃផលបូកតួចំនួនគូទាំងអស់ ។ ផលគុណរវាងតួទី២ និងតួទី៤ ស្មើរនឹង ៩ដងនៃផលបូកតួទី៣ ជាមួយនឹងតួទី៤ ។ គណនា a_1, q និងតួទី n នៅពេលផលបូក n តួដំបូងនៃ $\{\lg a_n\}$ កើនដល់តម្លៃធំបំផុត ។

គ. ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $\{a_n\}$ ដែលគ្រប់តួជាចំនួនវិជ្ជមានស្មើនឹង 80 ។ តួដែលមានតម្លៃធំជាងគេនៃស្វ៊ីតនេះគឺលេខ 54 ។ ផលបូក $2n$ តួដំបូងគឺ 6560 ។ រកផលធៀបរួម q ។

៣៨. អនុគមន៍មួយត្រូវបានកំណត់លើចន្លោះ $(-1,1), f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ និងផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right), x, y \in (-1,1)$ ។

ក. បើស្វ៊ីត $\{f(x_n)\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \frac{2x_n}{1+x_n^2}$ ។ គណនា $f(x_n)$ ។

ខ. បង្ហាញថា៖ $\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} + \ldots + \frac{1}{f(x_n)} > -\frac{2n+5}{n+2}$ ។

៣៩. បើស្វ៊ីត $\{a_n\}, \{b_n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់៖ $b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n}{1+2+3+\ldots+n}$ ហើយ $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ក៏ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែរ ។

៤០. តាង S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) ដោយ $S_n = 1 - \frac{2}{3}a_n \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ ។

ក. គណនា S_n និង a_n ។

ខ. បើយើងតាង T_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត $\{S_n a_n\}$ ។ គណនា $\lim_{n\to\infty} T_n$ ។

៤១. តាងរេស៊ុងនៃស៊ីតធរណីមាត្រ $\{a_n\}$ ដោយ $q>1$ ។ ការេនៃតួទី១៧ ស្មើរនឹងតួទី២៤ ។ គណនាវ៉ែនៃចំនួនគត់ n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖ $a_1+a_2+...+a_n>\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}$ ។

៤២. គេឲ្យស៊ីតនព្វន្ត $\{a_n\}$និងសមីការអាស្រ័យ x គឺ $a_i x^2+2a_{i+1}x+a_{i+2}=0,\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ និង a_1, d ជាចំនួនពិតមិនសូន្យទាំងពីរ ។

ក. បង្ហាញថាសមីការខាងលើមានដំណោះស្រាយដូចគ្នា (ឫសតែមួយ) ។

ខ. បើមានដំណោះស្រាយផ្សេងគ្នា β_i នោះ

$\frac{1}{\beta_1+1},\frac{1}{\beta_2+1},....,\frac{1}{\beta_n+1}$ ជាទម្រង់នៃស៊ីតនព្វន្តមួយ ។

៤៣. គេឲ្យ $f(x)=\sqrt{x^2-4}\ (x\le -2)$ ។

ក. រកអនុគមន៍ប្រាស់ $f^{-1}(x)$ ។

ខ. តាង $a_1=1, a_n=-f^{-1}(a_{n-1})$ ។ គណនា a_n

គ. បើ $b_1=\frac{1}{a_1+a_2}, b_2=\frac{1}{a_2+a_3},...,b_n=\frac{1}{a_n+a_{n+1}},...$ ។

គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត $\{b_n\}$ ។

៤៤. សម្រាប់ស៊ីតនព្វន្ត $\{a_n\}, a_1=1$និងមានផលសងរួម d, ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនេះតាងដោយ A_n ។ សម្រាប់ស៊ីតធរណីមាត្រ $\{b_n\}, b_1=1$ ផលធៀបរួម q, $(|q|<1)$, ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនេះតាងដោយ B_n ។ តាង $S_n=B_1+B_2+...+B_n$ ។ បើ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{A_n}{n}-S_n\right)=1$ គណនា d និង q ។

៤៥. បើផលគុណនៃ ៣ តួដំបូងនៃស៊ីតធរណីមាត្រ $\{a_n\}$ កើនមួយស្មើរនឹង 512 ហើយបើគេដកចេញ 1,3,9 រៀងគ្នាពីចំនួនទាំង ៣ នោះបានក្លាយជាទម្រង់នៃស៊ីតនព្វន្តមួយ ។ បង្ហាញថា៖ $\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{3}{a_3}+....+\frac{n}{a_n}<1$ ។

៤៦. តាងផលសងរួមនៃស៊ីតនព្វន្ត $\{a_n\}$ ខុសពីសូន្យ ។ $\{b_n\}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។ បើ $a_1 = 3, b_1 = 1, a_2 = b_2, 3a_5 = b_3$ ។ សម្រាប់ចំនួនពិតប្រាកដ n មានចំនួនថេរ $\alpha,\ \beta$ ធ្វើឲ្យ $a_n = \log_\alpha b_n + \beta$ តែងតែពិត ។ គណនា $\alpha + \beta$ ។

៤៧. ស៊ីតនព្វន្ត $\{a_n\}$ លំដាប់ ៣ គឺ៖ $1,2,8,22,47,...$ ។ រកតួទី១០នៃស៊ីតនេះ ។

៤៨. ចំពោះស៊ីត $\{a_n\}, f_n(x) = a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ និង $a_1 = 3, f_n(1) = p\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ ។

ក. រក p

ខ. រកតួទូទៅនៃស៊ីត $\{a_n\}$

គ. រកតម្លៃអប្បបរមានៃចំនួនគត់ n ដែល $3f_n(2) \geq 2005 f_n(1)$ ។

៤៩. គេឲ្យ $a_0 = a_1 = 1,\ a_0a_n + a_1a_{n-1} + ... + a_na_0 = 2^n a_n$ ។ បង្ហាញថា $a_n = \frac{1}{n!}$ ពិតគ្រប់ចំពោះ $(n \in \mathbb{N}^*)$ ។

៥០. តាង A, B, C ជាមុំក្នុងនៃ ΔABC ។ $\log A, \log B, \log C$ មានទម្រង់ជាស៊ីតនព្វន្ត រករង្វាស់នៃ B ។

៥១. ចំពោះ ស៊ីត $\{a_n\}, a_1 = 1, 8a_{n+1}a_n - 16a_{n+1} + 2a_n + 5 = 0,\ (n \in \mathbb{N}^*), b_n = \dfrac{1}{a_n - \frac{1}{2}}$ ។

ក. រក b_1, b_2, b_3, b_4

ខ. រកតួទូទៅ $\{b_n\}$ និងផលបូក n តួនៃស៊ីត $\{a_nb_n\}$ តាងដោយ S_n ។

៥២. បើស៊ីតកើន $\{a_n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\ n \geq 1, a_7 = 120$ ។ គណនា a_8 ។

៥៣. ផលបូក n នៃស៊ីតនព្វន្ត $\{a_n\}$ ដែលមានផលសងរួមវិជ្ជមានតាងដោយ S_n ហើយ $a_3a_4 = 117, a_2 + a_5 = 22$ ។

ក. រកតួទូទៅ $\{a_n\}$ ។

ខ. បើស៊ីតនព្វន្ត $\{b_n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់៖ $b_n = \dfrac{S_n}{n+c}$ គណនាចំនួនថេរ c ។

គ. គណនាតម្លៃអតិបរមានៃអនុគមន៍ $f(n) = \dfrac{b_n}{(n+36)b_{n+1}}$, $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ ។

៥៤. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$, $(x < -2)$ ។

ក. តាង $a_1 = 1, \dfrac{1}{a_{n+1}} = -f^{-1}(a_n), \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ ។ គណនា a_n

ខ. តាង $S_n = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2, b_n = S_{n+1} - S_n$ ។ រកថាតើមានតម្លៃតូចបំផុតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន m ដែល $b_n < \dfrac{m}{25}$ ពិតចំពោះ $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$, បើមានរកតម្លៃ m នោះ បើយ៉ាងណាពន្យល់ហេតុផលផង ។

៥៥. ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតធរណីមាត្រ $\{a_n\}$ តាងដោយ S, ផលគុណតាងដោយ p ផលបូកច្រាស់នៃគ្រប់តួទាំងអស់តាងដោយ T ។ បង្ហាញថា $p = \left(\dfrac{S}{T}\right)^n, n \in \mathbb{N}^*$ ។

៥៦. មានលេខ n ខ្ទង់ដែលមានទម្រង់ជាស៊ីត ។ ភាគយកនៃចំនួននោះ បង្កើតបានជាស៊ីតនព្វន្តមួយ ដែលតួដំបូងតាងដោយ a ហើយផលសងរួមតាងដោយ d ។ ឯភាគបែងនៃចំនួនទាំងនោះបង្កើតបានជាស៊ីតធរណីមាត្រមួយ តួដំបូងតាងដោយ b ហើយមានរេសុងតាងដោយ q ។ បង្ហាញថាផលបូក n តួដំបូង S_n ផ្ទៀងផ្ទាត់៖

$$S_n = \frac{(a - aq - d)(1 - q^n) + nd(1-q)}{bq^{n-1}(1-q)^2}$$

៥៧. គេដាក់ $n^2 (n \geq 4)$ ចំនួនវិជ្ជមានជា n ជួរដេក និង n ជួរឈរ ។

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\ldots a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\ldots a_{4n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4}\ldots a_{nn} \end{matrix}$$

ដែលចំនួននៅតាមជួរដេកនីមួយៗជាស៊ីតនព្វន្ត និង ចំនួននៅតាមជួរឈរនីមួយៗជាស៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានរេសុងដូចគ្នា ។ គេឲ្យ $a_{24}=1, a_{42}=\frac{1}{8}, a_{43}=\frac{3}{16}$ ។

គណនា $a_{11}+a_{22}+a_{33}+\ldots+a_{nn}$

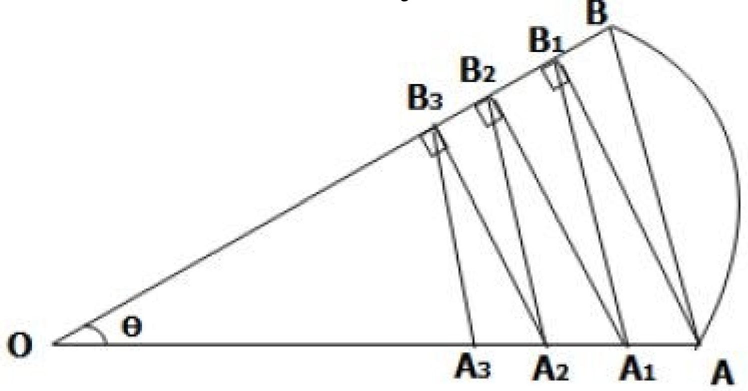
៥៨. តាង $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង៖

$b_n=a_n-a_{n+2}, c_n=a_n+2a_{n+1}+3a_{n+2}, \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ ។

បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស៊ីតនព្វន្តលុះត្រាតែបាន $\{c_n\}$ ក៏ជាស៊ីតនព្វន្តដែរ និង $b_n\le b_{n+1}$, $n\in\mathbb{N}^*$ ។

៥៩. តាម [រូបខាងក្រោម] តាងកាំនៃមុំ AOB ដោយ R, $\angle AOB=\theta, \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ ។

AB_1 កែងនឹង OB, B_1A_1 ស្របទៅនឹង AB, A_1B_2 កែងនឹង OB, B_2A_2 ស្របទៅនឹង AB ហើយនៅតែបែបនេះ បង្កើតបានស៊ីតពីរគឺ $\{A_n\}$ និង $\{B_n\}$ នៅលើ OA និង OB ។ តាងក្រឡាផ្ទៃនៃ $\Delta ABB_1, \Delta A_1B_1B_2, \ldots, \Delta A_nB_nB_{n+1}, \ldots$ ដោយ $S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}, \ldots$ ។ គណនាផលបូកផ្ទៃក្រឡាទាំងអស់តាងដោយ S ។



៦០. គេឲ្យ $a>0, a\neq 1$ ស៊ីត $\{a_n\}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។ តួដំបូងនៃស៊ីតនេះតាង a ហើយនឹងរេសុងតាងដោយ a ដូចគ្នា ។ បើ $b_n = a_n \log a_n$, $(n\in\mathbb{N}^*)$ ។ តើមាន a ដែលគ្រប់តួនៃ $\{B_n\}$ តូចជាងតួបន្ទាប់របស់វា? បើមាន រករ៉ង់នៃ a បើមិនមាន ពន្យល់ហេតុផល ។

៦១. គេឲ្យស៊ីត $\{a_n\}$, $a_1=0, a_n=\frac{1}{4}(a_{n-1}+3)$ $(n=2,3......)$ ។ រក a_n

៦២. គេមានស៊ីត $\{a_n\}$ ដែល $a_1=a_2=1, a_3=2, a_na_{n+1}a_{n+2}\neq 1$ ។ ចំនួនពិតធម្មជាតិមួយ n , $a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$ ។ គណនា

$a_1+a_2+a_3+...+a_{1014}$

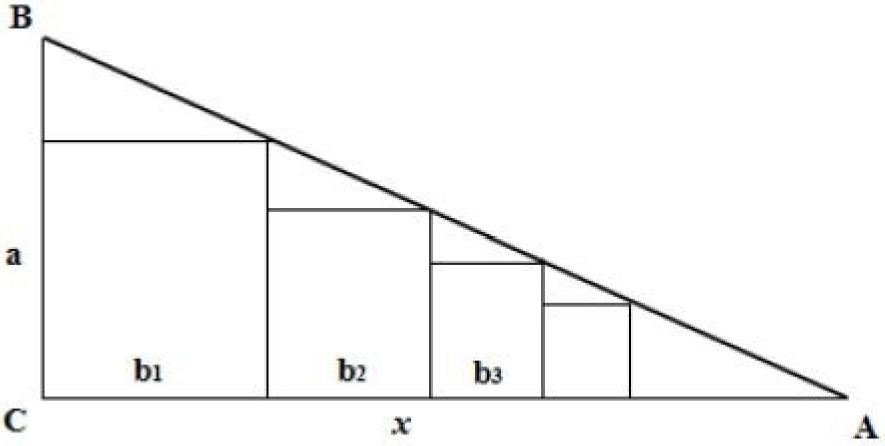
៦៣. បើស៊ីតពីរ $\{a_n\},\{b_n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1=1, a_2=r$ $(r>0), b_n=a_na_{n+1}$ និង $\{b_n\}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានផលធៀបរួម $q\,(q>0)$ ។ តាង $c_n=a_{2n-1}+a_{2n}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ ។

ក. រកតួទូទៅនៃស៊ីត $\{c_n\}$

ខ. បើ $d_n=\frac{\log c_{n+1}}{\log c_n}, r=2^{19.2}-1, q=\frac{1}{2}$ រកបរិមាធៀបនៃតួរបស់ស៊ីតនេះ ។

៦៤. គេឲ្យ $c_1=1, c_2=1, c_{n+2}=c_{n+1}+c_n$ ។ រកតួទូទៅ c_n ។

៦៥. តាម រូបខាងក្រោម ក្នុង $Rt\Delta ABC$ ($Rt\Delta$ តាងត្រីកោណកែង) មានផ្ទៃក្រឡាការេច្រើនរាប់មិនអស់ តាងដោយ $S_1, S_2, S_3,...$ ហើយ $BC=a$ ។ ផលបូកនៃផ្ទៃក្រឡាការេទាំងអស់នោះស្មើនឹងពាក់កណ្ដាលនៃផ្ទៃក្រឡា $Rt\Delta ABC$ ។ គណនាប្រវែងជ្រុង AC ។



៦៦. បើស៊ីត $\{a_n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង៖ $a_1 = 1, a_2 = r \quad (r > 0)$ ។ $\{a_n a_{n+1}\}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម $q \ (q > 0)$ ។តាង $b_n = a_{2n-1} + a_{2n} \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ ។

ក. រកសំណុំរូបភាពនៃ q ដែល $a_n a_{n+1} + a_{n+1} a_{n+2} > a_{n+2} a_{n+3}$ ។

ខ. រក b_n និងគណនា $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{S_n}$ ដែល $S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$ ។

៦៧. គេឲ្យស៊ីត $\{a_n\}$ ដែល $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{2a_n}$ ។ ស៊ីត $\{b_n\}$ ដែល $b_n = 3 - a_n^2, \ (n \in \mathbb{N})$ ។ បង្ហាញថា

ក. $b_n < 0$

ខ. $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| < \frac{1}{2}$

គ. $|b_n| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \ (n \geq 2)$ ។

៦៨. តាងផលបូក n ដំបូងនៃស៊ីត $\{a_n\}$ ដោយ S_n ហើយ $a_1 = 1, S_{n+1} = 4a_n + 2, \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ ។

ក. តាង $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ បង្ហាញថា $\{b_n\}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. តាង $c_n = \frac{a_n}{2^n}$ បង្ហាញថា $\{c_n\}$ ជាស៊ីតនព្វន្ត ។

គ. គណនា $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ ។

៦៩. តួដែលជាប់គ្នានៃស៊ីត $\{a_n\}$ គឺ a_n និង a_{n+1} ជាឫសនៃសមីការ $x^2 - c_n x + \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0, \ a_1 = 2$ គណនាផលបូកនៃស៊ីតមិនកំណត់ $c_1, c_2, c_3, ... c_n, ...$

៧០. គេឲ្យ $\{a_n\}$ ជាស៊ីតនព្វន្ត និង $\{b_n\}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ និង $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_1 \neq a_2, a_n > 0$ $n = 1,2,3.....$ ។ បង្ហាញថា $a_n < b_n$ ពេល $n > 2$ ។

៧១. ចំពោះចំនួនពិតប្រាកដ ស៊ីត $A = (a_1, a_2, ...)$ យើងកំណត់ ΔA ជាស៊ីតដែល $A = (a_2 - a_1, a_3 - a_2, ...)$ ហើយតួទី n របស់វាគឺ $a_{n+1} - a_n$ ។ សន្មត់ផលសងរួម

នៃតួជាប់គ្នាទាំងអស់គឺស្មើនឹង 1 និង $a_{19} = a_{92} = 0$ ។ រកតួទី១ a_1 ។

៧២. គេឲ្យស៊ីត $\{a_n\}$ ដែល $a_1 = 1, a_1 + a_2 + ... + a_n = n^2 a_n, \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ ។
រកតួទូទៅនៃស៊ីត $\{a_n\}$ និងគណនា S_{100} ។

៧៣. គេឲ្យផលបូក n នៃស៊ីត $\{a_n\}$ ដោយ $S_n = 1 + ka_n, k \neq 1, k$ ជាចំនួនថេរ ។
គណនា a_n, S_n ។

៧៤. ប្រវែងជ្រុងទាំងបីនៃ ΔABC មានទម្រង់ជាស៊ីតនព្វន្តមួយ ផលសងរវាងមុំដែលធំបំផុត និងមុំតូចបំផុតស្មើនឹង 90^0 ។ បង្ហាញថា សមាមាត្រនៃជ្រុងទាំង ៣ ស្មើនឹង
$\sqrt{7} + 1 : \sqrt{7} : \sqrt{7} - 1$ ។

៧៥. គេឲ្យស៊ីត $\{a_n\}, a_1 = 5, a_{n+1} = \dfrac{5a_n + 6}{a_n + 4}$ ។ រកតួទូទៅ a_n ។

៧៦. គេឲ្យស៊ីត $\{a_n\}, a_1 = 2, a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{a_n} \ \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ ។ បង្ហាញថា
$\sqrt{2} < a_n < \sqrt{2} + \dfrac{1}{n}$ ។

៧៧. គេឲ្យស៊ីត $\{a_n\}, 3a_{n+1} + a_n = 4 \ \ (n \geq 1), a_1 = 9$ ។ ផលបូក n នៃស៊ីតនេះដោយ S_n និង $|S_n - n - 6| < \dfrac{1}{125}$ ។ រកចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុត n ។

៧៨. គេឲ្យស៊ីត $\{a_n\}, a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n + 2$ ។ រកតួទូទៅ a_n ។

៧៩. តាងស៊ីត $\{a_n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $(2 - a_n) \cdot a_{n+1} = 1, n \geq 1$ ។ បង្ហាញថា $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$ ។

៨០. បើស៊ីត $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ជាស៊ីតវិជ្ជមានមិនកំណត់ដែល $a_1 = a, b_1 = b$ និង a_n, b_n, a_{n+1} ជាស៊ីតនព្វន្ត ហើយ b_n, a_{n+1}, b_{n+1} ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។
ក. បង្ហាញថា $\{b_n\}$ ជាស៊ីតនព្វន្ត ។
ខ. រកតួទូទៅនៃ $\{b_n\}$
គ. ប្រៀបធៀប a_n និង b_n ។

៨១. គេឲ្យស៊ីត $\{a_n\}$ ដែល $a_1>0, a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{3+a_n}{2}}$ ។

ក. រករូបភាពនៃ a_1 ដែល $a_{n+1}>a_n$ ចំពោះចំនួនវិជ្ជមាន n មួយចំនួន ។

ខ. បើ $a_1=4, b_n=|a_{n+1}-a_n|, \ (n\in\mathbb{N}^*)$ ។ តាងផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត $\{b_n\}$ ដោយ S_n បង្ហាញថា $S_n<\dfrac{5}{2}$ ។

៨២. តាងស៊ីតវិជ្ជមាន $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots\ldots$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ទំនាក់ទំនង $\sqrt{a_n a_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}=2a_{n-1} \ \ (n\geq 2), \ a_0=a_1=1$ ។ រកតួទូទៅ a_n ។

៨៣. គេឲ្យស៊ីត $\{a_n\}, a_1=2$, ផលបូក n នៃស៊ីតនេះដោយ S_n ។ a_n ជាមធ្យមនព្វន្តនៃ $3S_n-4$ និង $2-\dfrac{5}{2}S_{n-1}$ ចំពោះមួយចំនួននៃ $n\in\mathbb{N}^*$ ។

ក. បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ និង រកតួទូទៅ a_n ។

ខ. បង្ហាញថា $\dfrac{1}{2}(\log_2 S_n+\log_2 S_{n+2})<\log_2 S_{n+1}$ ។

គ. បើ $b_n=\dfrac{4}{a_n}-1, c_n=\log_2\left(\dfrac{4}{a_n}\right)^2$ ។ តាង T_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត $\{b_n\}$ និង R_n ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត $\{c_n\}$ ។ តើមានចំនួនគត់វិជ្ជមានណាដែលធ្វើឲ្យ $T_n>R_n$? បើមាន រករូបភាពរបស់ចំនួននោះ បើមិនមានពន្យល់ហេតុផល ។

៨៤. គេឲ្យស៊ីត $\{a_n\}, a_k>0 \ \ (k=\overline{1,n})$ និង $S_n=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$ ។ រក a_n និង S_n ។

៨៥. គេឲ្យស៊ីត $\{a_n\}, a_1=0, a_{n+1}=2a_n+n^2 \ \ (n\in\mathbb{N}^*)$ ។ គណនាផលបូកតួទី n តួដំបូងនៃស៊ីត $\{a_n\}$ តាងដោយ S_n ។

៨៦. តាងអនុគមន៍ $f_1(x)=\dfrac{2}{1+x}$ ។ កំណត់ $f_{n+1}(x)=f_1[f_n(x)], a_n=\dfrac{f_n(0)-1}{f_n(0)+2}, (n\in\mathbb{N}^*)$ ។

ក. រកតួទូទៅ a_n ។

ខ. បើ $T_{2n}=a_1+2a_2+\ldots+2na_{2n}, Q_n=\dfrac{4n^2+n}{4n^2+4n+1}, \ (n\in\mathbb{N}^*)$ ។

ប្រៀបធៀប $9T_{2n}$ និង Q_n ។

៨៧. តាង x_1 និង x_2 ជាឫសពិតនៃសមីការ៖ $x^2-6x+1=0$ ។ បង្ហាញថា $x_1^n+x_2^n$ តែងតែជាចំនួនគត់ ប៉ុន្តែមិនមែនជាពហុគុណនៃ 5 សម្រាប់ចំនួនធម្មជាតិ n មួយចំនួន ។

៨៨. តាងស្វ៊ីត $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_0=1, b_0=0$ និង

$$\begin{cases} a_{n+1}=7a_n+6b_n-3 & (1) \\ b_{n+1}=8a_n+7b_n-4 & (2) \end{cases} \quad (n=0,1,2......)$$

បង្ហាញថា a_n , $(n=0,1,2......)$ បំពេញការេ ។

៨៩. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$, $a_1=1, a_2=-1, b_1=2, b_2=-3$ និង $a_{n+1}=3a_n-2b_n, b_{n+1}=5a_n-4b_n$ ។ រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ។

៩០. តាង k ជាចំនួនគត់ធំជាង 1 ។ លក្ខខណ្ឌ $a_0>0$ និងកំនត់ $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{\sqrt[k]{a_n}}$ សម្រាប់ $n>0$ ។ គណនា $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{k+1}}{n^k}$ ។

៩១. រករូបមន្តតួទូទៅនៃស្វ៊ីត ៖ 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,.......... ។

៩២. រករូបមន្តសង្ខេបសម្រាប់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត ដែលត្រូវបានកំណត់ដោយ $x_1=1, x_n=x_{n-1}+n$ បើ n សេស $x_n=x_{n-1}+n-1$ បើ n គូ ។

៩៣. ស្វ៊ីត $(a_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ $a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=6$ និង $a_{n+4}=2a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n,\quad n\geq 0$ ។ បង្ហាញថា n ចែកដាច់ a_n គ្រប់ $n\geq 1$ ។

៩៤. ស្វ៊ីត $a_0, a_1, a_2, ...$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_{m+n}+a_{m-n}=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_{2n})$ ។ សម្រាប់គ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន m,n ដោយ $m\geq n$ ។ បើ $a_1=1$ គណនា a_n ។

៩៥. សង្កេតស្វ៊ីត $(a_n)_n$ និង $(b_n)_n$ កំណត់ដោយ:

$a_0=0,\quad a_1=2,\quad a_{n+1}=4a_n+a_{n-1},\quad n\ge 0$
$b_0=0, b_1=1,\quad b_{n+1}=a_n-b_n+b_{n-1},\quad n\ge 0$ ។

បង្ហាញថា $(a_n)^3=b_{3n}$ ចំពោះគ្រប់ n ។

៩៦. ស៊ីត u_n ត្រូវបានកំណត់ដោយ:

$u_0=2,\ u_1=\frac{5}{2},\ u_{n+1}=u_n\left(u_{n-1}^2-2\right)-u_1,\quad n\ge 1$ ។ បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់

វិជ្ជមាន n គេបាន : $\lfloor u_n\rfloor=2^{\left[\frac{2^n-(-1)^n}{3}\right]}$ ។

<u>*បញ្ជាក់*</u>៖ $\lfloor\cdot\rfloor$ សម្គាល់អនុគមន៍ចំនួនគត់ធំបំផុត ។

៩៧. សង្កេតស៊ីត $(a_n)_n$ និង $(b_n)_n$ កំណត់ដោយ: $a_1=3, b_1=100, a_{n+1}=3^{a_n}, b_{n+1}=100^{b_n}$ ។

រកចំនួនតូចបំផុត m ដែល $b_m>a_{100}$ ។

៩៨. តាង $p(x)=x^2-3x+2$ បង្ហាញថា ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n មួយចំនួន មានចំនួន a_n និង b_n មួយគត់ ដែលពហុធា $q_n(x)=x^n-a_nx-b_n$ គឺអាចចែកដាច់នឹង $p(x)$ ។

៩៩. រកតួទូទៅនៃស៊ីត ដែល $x_0=3,\ x_1=4$ និង

$(n+1)(n+2)x_n=4(n+1)(n+3)x_{n-1}-4(n+2)(n+3)x_{n-2},\quad n\ge 2$ ។

១០០. តាង $(x_n)_{n\ge 0}$ ត្រូវបានកំនត់ដោយទំនាក់ទំនងតួបន្តបន្ទាប់ $x_{n+1}=ax_n+bx_{n-1},\ x_0=0$ ។ បង្ហាញថាសមីការ $x_n^2-x_{n-1}x_{n+1}$ អាស្រ័យលើ b និង x_1 តែមិនអាស្រ័យ a ។

១០១. ស៊ីត $(a_n)_n$ កំនត់ដោយ $a_1=1$ និង $a_{n+1}=\frac{1+4a_n+\sqrt{1+24a_n}}{16},\quad n\ge 1$ ។

រករូបមន្តជាក់លាក់ a_n ក្នុងលក្ខខណ្ឌនៃ n ។

១០២. តាង $a=4k-1$ ដែល k ជាចំនួនគត់មួយ ។ បង្ហាញថាចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមានមួយចំនួន n ចំនួន: $1-\binom{n}{2}a+\binom{n}{4}a^2-\binom{n}{6}a^3+\cdots$ ចែកដាច់ 2^{n-1} ។

១០៣. តាង A និង E ជាចំនុចប្រសព្វផ្ទុយគ្នានៃអដ្ឋកោណមួយ ។ កង្កែបមួយក្បាលចាប់ផ្តើមលោតនៅពីមុខចំនុចប្រសព្វ A ។ ពីចំនុចប្រសព្វជៀងទៀតនៃអដ្ឋកោណ លើកលែងតែចំនុចប្រសព្វ E កង្កែបបានឈប់ និង នៅទីនោះ ។ តាង a_n ជាចំនួនផ្លូវជៀងគ្នាពិតប្រាកដ លោតបាន n ដង ហើយលោតបញ្ចប់នៅត្រង់ចំនុច E ។

បង្ហាញថា៖

$$a_{2n-1}=0,\ a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^{n-1}-y^{n-1}\right),\qquad n=1,2,3,\ldots$$

ដែល $x=2+\sqrt{2},\quad y=2-\sqrt{2}$ ។

១០៤. រកគ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង៖

$$f(f(f(n)))+6f(n)=3f(f(n))+4n+2001,\qquad n\in\mathbb{N}$$ ។

១០៥. ស្វ៊ីត $(x_n)_n$ កំនត់ដោយ $x_1=4,\ x_2=19$ និង ចំពោះ $n\ge 2,\ x_{n+1}=\left\lceil\frac{x_n^2}{x_{n-1}}\right\rceil$ ដែលមានន័យថាជាចំនួនតូចបំផុត ធំជាងឬស្មើនឹង $\frac{x_n^2}{x_{n-1}}$ ។ បង្ហាញថា x_n-1 តែងតែជាពហុគុណនៃ 3 ជានិច្ច ។

១០៦. សង្កេតស្វ៊ីតដែលឲ្យដោយ៖

$$a_0=1,\qquad a_{n+1}=\frac{3a_n+\sqrt{5a_n^2-4}}{2},\quad n\ge 1$$

$$b_0=0,\qquad b_{n+1}=a_n-b_n,\qquad n\ge 1$$

បង្ហាញថា $(a_n)^2=b_{2n+1}$ ចំពោះគ្រប់ n ។

១០៧. សង្កេតស្វ៊ីត $(a_n)_{n\ge 1}$ កំណត់ដោយ $a_1=a_2=1,\ a_3=199$ និង $a_{n+1}=\dfrac{1989+a_na_{n-1}}{a_{n-2}}$ ចំពោះ $n\ge 3$ ។ បង្ហាញថាគ្រប់តួនៃស្វ៊ីតនេះជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

១០៨. ចំពោះ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ស៊ីត $(a_n)_{n\geq 1}$ កំណត់ $a_1=a,\ a_2=b$ និង $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+c}{a_{n-1}}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$ ។ បង្ហាញថា តួទាំងអស់នៃស៊ីតនេះជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបាន លុះត្រាតែ a,b និង $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

១០៩. សង្កេតស៊ីត $(a_n)_{n\geq 0}$ ដែល $a_0=4,\ a_1=22$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$, $a_n=6a_{n-1}-a_{n-2}$ បង្ហាញថា មានស៊ីតចំនួនគត់វិជ្ជមាន $(x_n)_{n\geq 0},\ (y_n)_{n\geq 0}$ ដែល $a_n=\dfrac{y_n^2+7}{x_n-y_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ។

១១០.(Poland) ស៊ីតនៃចំនួនពិត $a_0,a_1,a_2,....$ កំណត់ដោយ:

$$a_0=-1,\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n-k}}{k+1}=0\ ,\ n\geq 1$$ ។

បង្ហាញថា $a_n>0,\ \ n\geq 1$ ។

១១១. (ប៉ូឡូញ) តាង $a_1,a_2,...,a_{100}$ ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ដែល $a_1^2+a_2^2+...+a_{100}^2=1$ ។ បង្ហាញថា៖

$$a_1^2a_2+a_2^2a_3+...+a_{100}^2a_1<\frac{12}{25}$$ ។

១១២. (សិស្សពូកែថ្នាក់ស្រុក២០១៨) គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត:

$$\ln\frac{1}{e},\ln\frac{1}{e^{-2}},\ln\frac{1}{e^{-7}},\ln\frac{1}{e^{-14}},\ln\frac{1}{e^{-23}},\ln\frac{1}{e^{-34}},\ln\frac{1}{e^{-47}},.....$$

១១៣. (សិស្សពូកែថ្នាក់ស្រុក២០១៨) ស៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1=2,\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2a_n$ ។

ក. កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង a_{n+1} និង a_n

ខ. គណនា a_{2018}

១១៤. (សិស្សពូកែថ្នាក់ស្រុក២០១៨) គេឲ្យស៊ីតចំនួនពិត (u_n) មួយដែលមានលំដាប់តួៈ

$u_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2},u_2=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},...,u_n=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$ (n រ៉ាឌីកាល់)

គណនា $S_n=\ln u_1+\ln u_2+...+\ln u_n$ ។

១១៥. (សិស្សពូកែខេត្តព្រៃវែង២០១៨) (U_n) ជាស្ទីតមួយកំណត់ដោយ $\forall n\in\mathbb{N}$

$U_{n+2}=18U_{n+1}-45U_n$ ។

ក. ចូរកំណត់តម្លៃ x ដែលនាំឲ្យ $V_n=U_{n+1}-xU_n$ ជាស្ទីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គេឲ្យ $V_1=a$ ជាតួទី១ នៃស្ទីត (V_n) ។ កំណត់តួទី n នៃស្ទីត (V_n) ចំពោះតម្លៃ x ដែលរកឃើញជាអនុគមន៍នៃ a និង n ។

១១៦. (a_n) ជាស្ទីតនៃចំនួនពិតកំណត់ដោយ $a_1=1$ និង $a_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+a_n}+a_n$ ។

កំណត់តួទី 2018 នៃស្ទីត (a_n) ។

១១៧. កំណត់តួទី n ដែលកំណត់ដោយ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ $a_1=5$ និង $a_n=2a_{n-1}-n$ ។

១១៨. គេឲ្យស្ទីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1=1$ និង $(1-4a_{n+1})(4a_n+3)=3, n\ge 1$ ។

គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ឯកសារយោង

១. សិស្សពូកែតាមស្រុក ខេត្ត ឆ្នាំ២០១៨ មួយចំនួន

២. Elementary Algebra

៣. Putnam and Beyond

៤. Internet និងឯកសារមួយចំនួនទៀត..................

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

១. គេឲ $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}, a_1=2$ ។

ក. បង្ហាញថា $\dfrac{1}{a_n}$ ជាស៊ីតនព្វន្ត ។

ខ. រកតួទូទៅនៃស៊ីត (a_n) ។

ក. បង្ហាញថា $\dfrac{1}{a_n}$ ជាស៊ីតនព្វន្ត

យើងមាន

$$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}\Rightarrow\frac{2}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{a_n}=1+\frac{2}{a_n}\Rightarrow\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}$$

គេបាន $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ ជាស៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{a_n}$ ជាស៊ីតនព្វន្ត ត្រូវបានបង្ហាញ

ខ. រកតួទូទៅនៃស៊ីត (a_n)

តាមសំនួរ (ក) យើងបាន:

$$+\begin{cases}\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{a_3}-\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{1}{2}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}=\frac{(n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a_n}-\frac{1}{2}=\frac{(n-1)}{2}$$

ដូចនេះ $a_n = \frac{2}{n}$

២. គេឲ a_n ជាចំនួនគត់នៃឫសសមីការ៖ $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}, x \in [n, n+1], n \in \mathbb{N}^*$ ។

ក. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (a_n) ។

ខ. តាង $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ ។ គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $\{b_n\}$ ។

ក. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត (a_n)

ដោយ អនុគមន៍ $f(x)$ កើននៅលើចន្លោះ $[n, n+1]$ នោះវ៉ង់គឺ $[f(n), f(n+1)]$

យើងបាន៖

$$a_n = f(n+1) - f(n)$$

$$= \left[(n+1)^2 + (n+1) + \frac{1}{2}\right] - \left[n^2 + n + \frac{1}{2}\right]$$

$$= 2n + 2, \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

ដូចនេះ $a_n = 2n + 2, \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

ខ.គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $\{b_n\}$

យើងមាន:

$$b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{[2n+2][2(n+1)+2]} = \frac{1}{4}\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right]$$

នោះ

$$+\begin{cases} b_1 = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right) \\ b_2 = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{n}{8n+16}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{n}{8n+16}, \qquad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

៣. គេឲស្វ៊ីត (a_n)ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖ $a_1 = a_2 = 1$និង $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = n^2, n \geq 3$ ។ គណនាតួទី 2017 ។

តាមសម្មតិកម្ម យើងមាន

$a_1 = a_2 = 1$ នោះ $a_1 + a_2 + a_3 = 9 \Rightarrow a_3 = 7$

និង $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = n^2 \Rightarrow a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} = (n-1)^2$

នោះ $a_n - a_{n-3} = 2n - 1 \Rightarrow a_{n-3} - a_{n-6} = 2(n-3) - 1, \ldots\ldots$

យើងបាន:

$$+\begin{cases} a_{2017}-a_{2014}=2\times 2017-1 \\ a_{2014}-a_{2011}=2\times 2014-1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_4-a_1=2\times 4-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow a_{2017}-a_1=2(2017+2014+\dots+4)-672$

$\Rightarrow a_{2017}=2\dfrac{672}{2}(4+2017)-672-1$

$=672(2020)-1$

$=1357439$

ដូចនេះ $a_{2017}=1357439$

៤. បើស៊ីត (a_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់៖ $a_1=3, a_{n+1}=2a_n+1, (n\in\mathbb{N}^*)$ ។ គណនាតួទូទៅនៃស៊ីត (a_n) ។

យើងមាន:

$a_{n+1}=2a_n+1\Leftrightarrow a_{n+1}+1=2a_n+2=2(a_n+1)$

$$\times\begin{cases} \Rightarrow a_n+1=2(a_{n-1}+1) \\ \Rightarrow a_{n-1}+1=2(a_{n-2}+1) \\ \quad\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Rightarrow a_2+1=2(a_1+1) \end{cases}$$

$\Rightarrow a_n+1=2^{n-1}(a_1+1)$

$\Rightarrow a_n=2^{n+1}-1, \qquad (n\in\mathbb{N}^*)$

ដូចនេះ $a_n=2^{n+1}-1, \qquad (n\in\mathbb{N}^*)$

៥. គេឲអនុគមន៍ $f(x)=\log_2 x-\log_x 2, (0<x<1)$ និងស៊ីត (a_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(2^{a_n})=2n$ ។ គណនា (a_n) ។

យើងមាន:

$$f(x)=\log_2 x-\log_x 2$$
$$=\log_2 x-\frac{1}{\log_2 x}$$

នោះ

$$f(2^{a_n})=\log_2 2^{a_n}-\frac{1}{\log_2 2^{a_n}}=2n$$
$$\Rightarrow a_n^2-2na_n-1=0$$

យើងបាន

$$a_n=n\pm\sqrt{n^2+1}$$

ដោយ $0<x<1\Rightarrow 0<2^{a_n}<1\Rightarrow a_n<0$

ដូចនេះ $a_n=n-\sqrt{n^2+1},\quad n\in\mathbb{N}^*$

៦. គេឲ ស៊ីត (a_n)ដែល $a_n=2n^2-n$ ។ តើមានចំនួនមិនសូន្យ p,q ដែលធ្វើឲស៊ីត $\left\{\frac{a_n}{pn+q}\right\}$ ជាស៊ីតនព្វន្តដែរឬទេ?

សន្មតមានចំនួនថេរមិនអវិជ្ជមាន p,q ដែល ស៊ីត $\left\{\frac{a_n}{pn+q}\right\}$ ជាស៊ីតនព្វន្ត នោះ

$\frac{a_1}{p+q},\frac{a_2}{2p+q},\frac{a_3}{3p+q}$ ជាទម្រង់នៃស៊ីតនព្វន្ត

តាមសម្មតិកម្ម យើងទាញបាន

$a_1=1,\ a_2=6,\ a_3=15$

នោះ

$$2\times\left(\frac{6}{2p+q}\right)=\frac{1}{p+q}+\frac{15}{3p+q}$$

យើងបាន:

$pq+2q^2=0 \Rightarrow p=-2q$ ព្រោះ $q\neq 0$

នោះ

$$\frac{a_n}{pn+q}=\frac{2n^2-n}{-2qn+q}=-\frac{n}{q}$$

ដូចនេះ $\left\{\dfrac{a_n}{pn+q}\right\}$ ជាស៊ីតនព្វន្ត ដែលមានផលសងរួម $d=-\dfrac{1}{q}$

៧. គេឲស៊ីត (a_n), $a_1=1, a_{n+1}=a_n+3n, \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ ។ គណនា a_{2018} ។

យើងមាន

$a_{n+1}=a_n+3n \Rightarrow a_{n+1}-a_n=3n$

នោះ

$$+\begin{cases} a_n-a_{n-1}=3(n-1) \\ a_{n-1}-a_{n-2}=3(n-2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_2-a_1=3(1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n-a_1=3(1+2+\dots+(n-1))$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{3(n-1)(n-1+1)}{2}+a_1$$

$$=\frac{3n^2-3n+2}{2}$$

$$\Rightarrow a_{2018}=\frac{3(2018^2)-3(2018)+2}{2}$$

$$=6105460$$

ដូចនេះ $a_{2018}=6105460$

៨. គេឲស៊ីតនព្វន្តពីរដែល៖ $\{a_m\}:1,5,9\dots$ និង $\{b_n\}:3,10,17\dots$ ។ ពិភាក្សា 200 តួដំបូងនៃស៊ីតទាំងពីរ និង រកចំនួនតួដែលមានតម្លៃស្មើរគ្នា?

យើងមាន

$\{a_m\}:1,5,9\ldots \Rightarrow a_m=4m-3,\ (m=1,2,\ldots.)$

និង $\{b_n\}:3,7,10,\ldots \Rightarrow b_n=7n+3,\ (n=0,1,2,\ldots)$ ហើយ $a_m<b_n$

យើងបាន

$n<\dfrac{4m-6}{7},\quad (m,n\in\mathbb{N}^*)\Leftrightarrow 4m-3=7n+3$ គេទាញបាន

$m_1=5, m_2=12,\ldots$

សន្មត់ $m_k=7k-2\le 200,\quad (k\in\mathbb{N}^*)\Rightarrow k=1,2,\ldots,28$

ដូចនេះ មាន ២៨ តួដែលដូចគ្នារវាងស៊ីតទាំងពីរនេះ

៩. សន្មត់ឫសទាំងបួននៃសមីការ $x^2-x+a=0$ និង $x^2-x+b=0$ មានទម្រង់ជាស៊ីតនព្វន្ត ដែលតួទីមួយគឺ $\frac{1}{4}$ ។ បើ $a<b$ គណនាតម្លៃនៃ a,b ។

តាមសម្មតិកម្ម គេបានរឺសទាំងបួននៃសមីការតាងដោយ

$\dfrac{1}{4}, d+\dfrac{1}{4}, 2d+\dfrac{1}{4}, 3d+\dfrac{1}{4}$

តាមផលបូករឺសរវាងសមីការទាំងពីរ យើងបាន

$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+3d=\dfrac{1}{4}+2d+\dfrac{1}{4}+d=1\Leftarrow d=\dfrac{1}{6}$

យើងបានរឺសរបស់សមីការ $x^2-x+a=0$ គឺ $\dfrac{1}{4}$ និង $\dfrac{3}{4}$ នោះ $a=\dfrac{3}{16}$ (ផលគុណរឺស)

និង រឺសរបស់សមីការ $x^2-x+b=0$ គឺ $\dfrac{5}{12}$ និង $\dfrac{7}{12}$ នោះ $b=\dfrac{35}{144}$ (ផលគុណរឺស)

ដូចនេះ $a=\dfrac{3}{16}$ និង $b=\dfrac{35}{144}$

១០. គេឲ $f(x)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)^2, (x\ge 0)$ និង ស៊ីត (a_n) ដែល $a_1=2, n\ge 2, a_n>0$, $S_n=f(S_{n-1})$ ។ គណនាតួទូទៅ (a_n) ។

តាមសម្មតិកម្ម

$f(x)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)^2$ និង $S_n=f(S_{n-1})$ យើងមាន $S_n=\left(\sqrt{S_{n-1}}+\sqrt{2}\right)^2$

ឬ $\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=\sqrt{2}$, $\sqrt{S_{n-1}}-\sqrt{S_{n-2}}=\sqrt{2},...,\sqrt{S_3}-\sqrt{S_2}=\sqrt{2},\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=\sqrt{2}$

ដោយបូកបញ្ជូលគ្នា យើងបាន:

$\sqrt{S_n}-\sqrt{S_1}=(n-1)\sqrt{2}$ តាមទំនាក់ទំនង $S_1=a_1=2$ យើងបាន

$\sqrt{S_n}=(n-1)\sqrt{2}+\sqrt{2}=n\sqrt{2}\Rightarrow S_n=2n^2,\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

នោះ $a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-2(n-1)^2=4n-2,\ n\geq 2$ និង $a_1=2, n=1$

ដូចនេះ $a_n=4n-2,\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

១១. គេឲតួនីមួយៗនៃស៊ីត (a_n)ខុសពីរសូន្យ បង្ហាញថា៖

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}$$ ។

តាងផលសងនៃស៊ីត (a_n)ដោយ d យើងបាន

$$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}}=\frac{d}{a_na_{n+1}}\Rightarrow\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

នោះ

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1a_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\frac{nd}{a_1a_{n+1}}$$

$$=\frac{n}{a_1a_{n+1}}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}$ ត្រូវបានបង្ហាញ

១២. គណនាផលបូកនៃស៊ីត៖

ក. គេឲ្យ $\frac{1}{2},2\frac{3}{4},4\frac{7}{8},6\frac{15}{16},\ldots$ គណនាផលបូក S_n តួដំបូង ។

ខ. $S=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+a^{n-r}b^r+\ldots+ab^{n-1}+b^n$ ដែល $a\neq 0,b\neq 0$ $,n\in\mathbb{N}^*$ ។ គណនា S ។

គ. គេឲ្យ $1,1+2,1+2+2^2+\ldots.+1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}$ ។ គណនាផលបូក S_n តួដំបូង ។

ក. គណនាផលបូក S_n តួដំបូង

តាង $M=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{15}{16}+\ldots+\frac{2^n-1}{2^n}$

យើងបាន

$$M=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$
$$=n-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$$
$$=n-\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=n-\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$
$$=\frac{1}{2^n}+n-1,\quad \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$$

តាង $N=2+4+6+\ldots+2(n-1)$ នោះ

$$N=(n-1)2+\frac{(n-1)(n-2)2}{2}$$
$$=n^2-n,\qquad \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$$

យើងបាន

$$S_n=M+N$$
$$=\frac{1}{2^n}+n-1+n^2-n$$
$$=\frac{1}{2^n}+n^2-1,\quad \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{2^n}+n^2-1,\quad \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

ខ. គណនា S

គុណសមីការ S នឹង a និង b យើងបាន:

$$\begin{cases} aS=a^{n+1}+a^nb+a^{n-1}b^2+\ldots+a^{n-r}b^r+\ldots+a^2b^{n-1}+ab^n & (1)\\ bS=a^nb+a^{n-1}b^2+a^{n-2}b^3+\ldots+a^{n-r}b^{r+1}+\ldots+ab^n+b^{n+1} & (2)\end{cases}$$

យក (1)ដក (2) យើងបាន

$$(a-b)S=a^{n+1}-b^{n+1}\Rightarrow S=\begin{cases}\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}, a\neq b\\(n+1)a^n, a=b\end{cases}$$

ដូចនេះ $S=\begin{cases}\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}, a\neq b\\(n+1)a^n, a=b\end{cases}$

គ. គណនាផលបូក S_n តួដំបូង

ដោយ $a_n=(1+2+2^2+\ldots+2^{n-2})(2-1)=(2^n-1)$

នោះ

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n$$
$$=2^{n+1}-n-2 \qquad (n\in\mathbb{N}^*)$$

ដូចនេះ $S_n=2^{n+1}-n-2 \qquad (n\in\mathbb{N}^*)$

១៣. គេឲស៊ីត (a_n), $a_1=1$និង $(b_n), b_1=0$ ហើយមានទំនាក់ទំនង

$a_n=\frac{1}{3}(2a_{n-1}+b_{n-1})$និង $b_n=\frac{1}{3}(a_{n-1}+2b_{n-1})$, $n\geq 2$ ។ រក a_n, b_n ។

យើងមាន

$a_n=\frac{1}{3}(2a_{n-1}+b_{n-1})$ និង $b_n=\frac{1}{3}(a_{n-1}+2b_{n-1})$

នោះ

$$a_n + b_n = \frac{1}{3}(2a_{n-1} + b_{n-1}) + \frac{1}{3}(a_{n-1} + 2b_{n-1})$$
$$= a_{n-1} + b_{n-1}$$
$$= a_{n-2} + b_{n-2}$$
$$= .... = a_1 - b_1 = 1 \quad (1)$$

និង

$$a_n - b_n = \frac{1}{3}(2a_{n-1} + b_{n-1}) - \frac{1}{3}(a_{n-1} + 2b_{n-1})$$
$$= \frac{1}{3}(a_{n-1} - b_{n-1})$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^2 (a_{n-2} - b_{n-2})$$
$$= .... = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (a_1 - b_1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន:

$$a_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3^{n-1}}\right),\ b_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

ដូចនេះ $a_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3^{n-1}}\right),\ b_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)$

១៤. បើផលបូកទី n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនព្វន្តគឺ 30 ហើយផលបូកទី $2n$ គឺ 100 ។ គណនាផលបូកទី $3n$ ។

របៀបទីមួយ

តាង តួទីមួយនៃស្វ៊ីតនេះដោយ a_1 និង d ផលសងរួមដោយ តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន

$$\begin{cases} na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 30 \\ 2na_1 + \frac{2n(2n-1)}{2}d = 100 \end{cases}$$

ដោយដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះ យើងបាន

$d = \frac{40}{n^2},\ a_1 = \frac{10}{n} + \frac{20}{n^2}$

នោះ

$$S_{3n} = 3na_1 + \frac{3n(3n-1)}{2}d = 3n\frac{10(n+2)}{n^2} + \frac{3n(3n-1)}{2}\frac{40}{n^2} = 210$$

ដូចនេះ $S_{3n} = 210$

របៀបទីពីរ

តាមលក្ខណៈនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត យើងមាន $S_n,\ S_{2n} - S_n,\ S_{3n} - S_{2n}$ ជាទម្រង់នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេបាន:

$$2(S_{2n} - S_n) = S_n + (S_{3n} - S_{2n}) \Rightarrow S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n) = 3(100 - 30) = 210$$

ដូចនេះ $S_{3n} = 210$

របៀបទីបី

រូបមន្តផលបូក n នៃស្វ៊ីតនព្វន្តតាងដោយ S_n ដែលជាអនុគមន៍ដឺក្រេទីពីរ យើងបាន:

$\begin{cases} An^2 + Bn = 30 \\ A(2n)^2 + B(2n) = 100 \end{cases}$ ដែល $A,\ B$ ជាចំនួនថេរ

ដោយដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការនេះ យើងបាន:

$A = \frac{20}{n^2},\ B = \frac{10}{n}$

នោះ

$$S_{3n}=A(3n)^2+B(3n)$$
$$=\frac{20(3n)^2}{n^2}+\frac{10(3n)}{n}$$
$$=210$$

ដូចនេះ $S_{3n}=210$

១៥. កូអរដោនេនៃអនុគមន៍ $f(x)=ax^2+bx+c$ គឺ $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$ និង $f(3)=2$ ។ សម្រាប់ចំនួនពិតមានន័យ x, ស្វ៊ីត $\{a_n\},\{b_n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x)g(x)+a_nx+b_n=x^{n+1}$, $n\in\mathbb{N}^*$ ដែល $g(x)$ មានន័យនៅក្នុងសំណុំចំនួនពិត ។ រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\},\{b_n\}$ ។

តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន:

$$f(x)=a\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4},\quad (a\neq 0)\text{ និង } f(3)=2 \text{ នោះ } a\left(3-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=2\Rightarrow a=1$$

យើងបាន:

$$f(x)=x^2-3x+2,\quad x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(1)=0,\ f(2)=0$$

ហើយ

$$f(x)g(x)+a_nx+b_n=x^{n+1}$$
$$\Rightarrow f(1)g(1)=a_n+b_n=1$$
$$\Rightarrow a_n+b_n=1 \qquad (1)$$

និង

$$f(x)g(x)+a_nx+b_n=x^{n+1}$$
$$\Rightarrow f(2)g(2)=2a_n+b_n=2^{n+1}$$
$$\Rightarrow 2a_n+b_n=2^{n+1} \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន:

$$a_n=2^{n+1}-1,\ b_n=2-2^{n+1},\quad n\in\mathbb{N}^*$$

ដូចនេះ $a_n = 2^{n+1} - 1,\ b_n = 2 - 2^{n+1},\quad n \in \mathbb{N}^*$

១៦. គេឲស្វ៊ីតនព្វន្ត (a_n) តាង $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{a_n}$ និង $b_1 + b_2 + b_3 = \frac{21}{8}, b_1 b_2 b_3 = \frac{1}{8}$ ។
គណនាតួទូទៅ (a_n) ។

តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន:

$$b_1 b_2 b_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{a_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{a_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{a_3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{a_1+a_2+a_3} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 3$$

ដោយ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត សន្មត់ $a_1 = a_2 - d,\ a_2,\ a_3 = a_2 + d$ ដែល d ជាផលសងរួម នោះ

$$a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 3 \Rightarrow a_2 = 1$$

យើងបាន:

$$b_1 + b_2 + b_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{a_1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{a_2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{a_3}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{1-d} + \left(\frac{1}{2}\right)^{1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{1+d} = \frac{21}{8}$$

$$\Rightarrow 2^d + 2^{-d} = \frac{17}{4} \Rightarrow d = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$$

- ករណី $d = 2$ នោះ $a_1 = -1$

  យើងបាន

  $$a_n = -1 + (n-1)2$$
  $$= 2n - 3 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

- ករណី $d = -2$ នោះ $a_1 = 3$

  យើងបាន

$a_n = 3 + (n-1)(-2)$

$= -2n + 5 \ (n \in \mathbb{N}^*)$

ដូចនេះ $a_n = 2n - 3 \quad (n \in \mathbb{N}^*), \quad a_n = -2n + 5 \ (n \in \mathbb{N}^*)$

១៧. គេឲស្ទីត (a_n) ដែលតួនីមួយៗជាចំនួនវិជ្ជមាន, តាង S_n ជាផលបូក n តួដំបូង និង $2\sqrt{S_n} = a_n + 1, \ (n \in \mathbb{N}^*)$ ។ គណនាតួទូទៅ (a_n) ។

យើងមាន

$2\sqrt{S_n} = a_n + 1$ នោះ $2\sqrt{a_1} = a_1 + 1$ ព្រោះទំនាក់ទំនង $S_1 = a_1$

យើងបាន:

$2\sqrt{a_1} = a_1 + 1 \Rightarrow \left(\sqrt{a_1} - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow a_1 = 1$

ដោយ $2\sqrt{S_n} = a_n + 1$ នោះ $4S_n = (a_n + 1)^2 \ (1), \ 4S_{n-1} = (a_{n-1} + 1)^2 \ (2), \ n \geq 2$

យក (1) ដក (2) គេបាន:

$4(S_n - S_{n-1}) = 4a_n = (a_n + 1)^2 - (a_{n-1} + 1)^2$

$\Rightarrow (a_n - 1)^2 - (a_{n-1} + 1)^2 = 0$

$\Rightarrow (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 2) = 0$

$\Rightarrow a_n - a_{n-1} - 2 = 0, \qquad (a_n + a_{n-1} > 0)$

$\Rightarrow a_n - a_{n-1} = 2$

នោះ (a_n) ជាស្ទីតនព្វន្តដែល $a_1 = 1$ និង $d = 2$

ដូចនេះ $a_n = 1 + (n-1)2 = 2n - 1, \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$

១៨. គាងផលបូកនៃស្វ៊ីត (a_n) ដោយ S_n , $a_1=1, a_{n+1}=\frac{n+2}{n}S_n,\ (n=1,2,3...)$ ។

បង្ហាញថា

ក. ស្វ៊ីត $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. $S_{n+1}=4a_n$ ។

បង្ហាញថា

ក. ស្វ៊ីត $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន:

$a_{n+1}=\frac{n+2}{n}S_n \Leftrightarrow na_{n+1}=(n+2)S_n,\qquad a_{n+1}=S_{n+1}-S_n,\ (n=1,2,3...)$

$\Rightarrow n(S_{n+1}-S_n)=(n+2)S_n$

$\Rightarrow nS_{n+1}=2(n+1)S_n$

$\Rightarrow \frac{S_{n+1}}{n+1}=2\frac{S_n}{n}$

ដូចនេះ $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ខ. $S_{n+1}=4a_n$

តាមសំនួរ (ក) យើងបាន:

$\frac{S_{n+1}}{n+1}=4\frac{S_{n-1}}{n-1},\quad n\ge 2$

$\Rightarrow S_{n+1}=4(n+1)\frac{S_{n-1}}{n-1}$

$=4a_n,\ (n\ge 2)$

ដោយ $a_{n+1}=\frac{n+2}{n}S_n$ នោះ $a_2=3S_1=3$ យើងបាន:

$S_2=a_1+a_2=4=4a_1$ ពិត

ដូចនេះ $S_{n+1} = 4a_n$ គ្រប់ចំនួន $n \geq 1$

១៩. តាងផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត (a_n) និង ផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ (b_n) ដោយ d ដូចគ្នា ដែល $d \neq 1, d \neq 0$, $a_1 = b_1, a_4 = b_4, a_{10} = b_{10}$ ។

ក. រក a_1, d

ខ. តើ b_{16} ជាតួនៃស្វ៊ីត (a_n)ដែរឬទេ? បើជាតួនៃស្វ៊ីត(a_n) ជាតួទីប៉ុន្មាន? បើមិនមែន, ចូរពន្យល់ហេតុផល ។

ក. រក a_1, d

តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន:

$a_n = a_1 + (n-1)d,\ b_n = nd^{n-1} = a_1 d^{n-1}$ និង $a_4 = b_4, a_{10} = b_{10}$

គេបាន

$$\begin{cases} a_1 + 3d = a_1 d^3 \\ a_1 + 9d = a_1 d^9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3d = a_1(d^3 - 1) & (1) \\ 9d = a_1(d^9 - 1) & (2) \end{cases}$$

យក (1) ចែកនឹង (2)យើងបាន:

$$d^6 + d^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow (d^3 - 1)(d^3 + 2) = 0$$

$$\Rightarrow d^3 = 1,\ d^3 = -2 \Rightarrow d = 1,\ d = \sqrt[3]{-2}$$

ដោយ $d \neq 1$ នោះ យើងយក $d = \sqrt[3]{-2}$ ជំនួសចូលសមីការយើងបាន

$$a_1 = \sqrt[3]{2}\ d = -\sqrt[3]{2}$$

ដូចនេះ $a_1 = \sqrt[3]{2}\ d = -\sqrt[3]{2}$

ខ. តើ b_{16} ជាតួនៃស្វ៊ីត (a_n)ដែរឬទេ? បើជាតួនៃស្វ៊ីត(a_n) ជាតួទីប៉ុន្មាន? បើមិនមែន, ចូរពន្យល់ហេតុផល

តាមសំនួរ (ក) យើងទាញបាន

$a_n = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}(n-1)$
$= \sqrt[3]{2}(2-n)$
$b_n = \sqrt[3]{2}\left(-\sqrt[3]{2}\right)^{n-1}$
$= -\left(-\sqrt[3]{2}\right)^n$

នោះ

$b_{16} = -32\sqrt[3]{2} \Rightarrow (2-n)\sqrt[3]{2} = -32\sqrt[3]{2} \Rightarrow n = 34$

ដូចនេះ b_{16} ជាតួទី ៣៤ នៃស្វ៊ីត (a_n)

២០. គេឲស្វ៊ីត $(a_n), a_1 = 1, a_{n+1} = S_n + (n+1), \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ ។
ក. បង្ហាញថា $(a_n + 1)$ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។
ខ. រក (a_n) និងគណនាផលបូក S_n ។

ក. បង្ហាញថា $(a_n + 1)$ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

យើងមាន

$a_{n+1} = S_n + (n+1) \Rightarrow S_n = a_{n+1} - (n+1), \quad S_{n-1} = a_n - n$
$a_n = S_n - S_{n-1}$
$= [a_{n+1} - (n+1)] - (a_n - n)$
$\Rightarrow a_{n+1} = 2a_n + 1$
$\Leftrightarrow a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$
$\Rightarrow \dfrac{a_{n+1} + 1}{a_n + 1} = 2$

ដូចនេះ $(a_n + 1)$ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ខ. រក (a_n) និង S_n

តាមសំនួរ (ក) យើងបាន:

$$a_1+1=2 \Rightarrow a_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n \Rightarrow a_n=2^n-1$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow S_n &= (2-1)+(2^2-1)+\ldots+(2^n-1)\\ &= (2+2^2+\ldots+2^n)-n\\ &= \frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\\ &= 2^{n+1}-n-2 \qquad (n\in\mathbb{N}^*)\end{aligned}$$

ដូចនេះ $a_n=2^n-1,\quad S_n=2^{n+1}-n-2\qquad (n\in\mathbb{N}^*)$

📖📖📖📖📖

២១. តាងចំណុច $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2),\ldots,P_n(x_n,y_n)$ $(n\geq 3)$ជាចំណុចនៅលើក្រាប អនុគមន៍ដឺក្រេទីពីរ Cនិង $a_1=|OP_1|^2, a_2=|OP_2|^2,\ldots,a_n=|OP_n|^2$ ជាតួទម្រង់នៃស្វ៊ីត នព្វន្តដែលមានផលសងរួម d ,$(d\neq 0)$និង $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$ ។

ក. បើក្រាប Cគឺ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a=10, b=5)$, $P_1(10,0), S_3=255$ ។

គណនាចំនុច P_3

ខ. បើក្រាប Cគឺ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$, $P_1(a,0)$ ។

រកតម្លៃអប្បបរមានៃ S_n ដែល d ខុសគ្នា ។

ក. គណនាចំនុច P_3

ជំនួសចំនុច $P_1(10,0)$យើងបាន $a_1=|OP_1|^2=10^2=100$ ហើយ

$$S_3=a_1+\frac{a_1+a_3}{2}+a_3$$
$$=\frac{3}{2}(a_1+a_3)$$
$$=255$$

នោះ $a_3=|OP_3|^2=70$ យើងបាន $x_3^2+y_3^2=70$ (1) និង

$$\frac{x_3^2}{100}+\frac{y_3^2}{25}=1 \qquad (2)$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន

$x=\pm 2\sqrt{15},\quad y=\pm\sqrt{10}$

យើងបាន កូអរដោនេនៃចំនុច P_3 គឺ $(2\sqrt{15},\ \sqrt{10}), (2\sqrt{15},\ -\sqrt{10})$, $(-2\sqrt{15},\ \sqrt{10})$ និង $(-2\sqrt{15},\ -\sqrt{10})$

ដូចនេះ ចំនុច P_3 មានកូអរដោនេ:

$(2\sqrt{15},\ \sqrt{10}), (2\sqrt{15},\ -\sqrt{10}), (-2\sqrt{15},\ \sqrt{10})$ និង $(-2\sqrt{15},\ -\sqrt{10})$

ខ. រកតម្លៃអប្បបរមានៃ S_n ដែល d ខុសគ្នា

ដោយ $a_1 = |OP_1|^2 = a^2$ នោះ $d < 0$ និង

$a_n = |OP_n|^2 = a^2 + (n-1)d \geq b^2$

មានន័យថា

$$\frac{b^2 - a^2}{n-1} \leq d < 0$$

បើ $n \geq 3$ នោះ $S_n = na^2 + \frac{n(n-1)}{2}d$ កើនឡើងនៅក្នុងចន្លោះ $\left[\frac{b^2-a^2}{n-1},\ 0\right]$

យើងបាន:

$$(S_n)_{\min} = na^2 + \frac{n(n-1)}{2}\frac{(b^2-a^2)}{n-1}$$

$$= \frac{n(a^2+b^2)}{2}$$

ដូចនេះ $(S_n)_{\min} = \frac{n(a^2+b^2)}{2}$

២២. គេមានស៊ីតនព្វន្ត ១២ តួ ដែល $S_{even} : S_{odd} = 32:27$ និងផលបូកនៃស៊ីតនេះគឺ 354 ។ រកផលសងទូទៅ d ។

រកផលសងទូទៅ d

របៀបទី១

តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន

$$S_{even} - S_{odd} = \frac{1}{2}nd \text{ និង } S_{even} : S_{odd} = 32:27$$

តាង $S_{even} = 32t,\ S_{odd} = 27t$ នោះ

$32t+27t=354 \Rightarrow t=6$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{even}=32\times 6=192 \\ S_{odd}=27\times 6=162 \end{cases}$$

$\Rightarrow S_{even}-S_{odd}=30=6d$

$\Rightarrow d=5$

ដូចនេះ $d=5$

របៀបទី២

យើងមាន

$S_{even}:S_{odd}=32:27$ បានន័យថា $\dfrac{S_{even}}{S_{odd}}=\dfrac{32}{27}$

នោះ

$$\frac{S_{even}}{S_{even}+S_{odd}}=\frac{32}{32+27}$$

$$\Rightarrow S_{even}=\frac{32}{59}\times 354$$

$$=192$$

$$\Rightarrow S_{odd}=354-192$$

$$=162$$

តាម

$$S_{even}-S_{odd}=\frac{1}{2}nd$$

$$=6d$$

$192-162 \quad =6d$

$\Rightarrow \quad d=5$

ដូចនេះ $d=5$

២៣. គាត់ស្វ៊ីត $\{a_n\}, a_1=1, na_{n+1}=(n+1)a_n+1 \ (n\geq 2)$ ។ គណនាផលបូក S_n ។

គណនាផលបូក S_n

យើងមាន

$na_{n+1} = (n+1)a_n + 1 \quad (n \geq 2)$

$\Rightarrow n(a_{n+1} + 1) = (n+1)(a_n + 1) \qquad (n \geq 2)$

តាង $b_n = a_{n+1} + 1$ នោះ $b_{n+1} = \dfrac{n+1}{n} b_n$ យើងបាន:

$b_1 = 2, b_2 = 2 \times 2, b_3 = 3 \times 2, \ldots, b_n = n \times 2$

នោះ

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n - n \\ &= 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) - n \\ &= n^2 \qquad (n \geq 2) \end{aligned}$$

ដូចនេះ $S_n = n^2 \qquad (n \geq 2)$

២៤. គេឲ្យអនុគមន៍ដឺក្រេទីពីរ៖ $f(x) = n(n+1)x^2 - (2n+1)x + 1$ និង n ត្រូវបានជ្រើសចេញពីគ្រប់ចំនួនពិតធម្មជាតិ ។ គណនាផលបូកប្រវែងនៃបន្ទាត់កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសដែលកាត់ក្រាប ។

យើងមាន

$f(x) = n(n+1)x^2 - (2n+1)x + 1$

នោះ $n(n+1)x^2 - (2n+1)x + 1 = 0$ បើ $f(x) = 0$

យើងបាន

$(nx - 1)[(n+1)x - 1] = 0$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{n}, \; x_2 = \dfrac{1}{n+1}$

តាងប៉ារ៉ាបូល កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំនុច A_n និង B_n នោះផលបូកប្រវែងនៃបន្ទាត់

កាត់គឺ

$$S_n = |A_1B_1| + |A_2B_2| + \dots + |A_nB_n|$$
$$= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1-\frac{1}{n+1}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

ដូចនេះ ផលបូកប្រវែងនៃបន្ទាត់កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសដែលកាត់ក្រាបស្មើនឹង 1

២៥. ក. គេឲ្យស៊ីតនព្វន្ត $\{a_n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់៖ $a_1 = -60, a_{17} = -12$ តាង $b_n = |a_n|$ ។ គណនាផលបូក ៣០ តួដំបូងនៃស៊ីត $\{b_n\}$ ។

ខ. បើតួទូទៅនៃស៊ីតនព្វន្ត $\{a_n\}$ គឺ $a_n = 10-3n$ ។ គណនាតម្លៃនៃ $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$ ។

ក. គណនាផលបូក ៣០ តួដំបូងនៃស៊ីត $\{b_n\}$

តាងផលសងរួមនៃស៊ីតនព្វន្ត $\{a_n\}$ ដោយ d

យើងមាន:

$a_1 = -60, a_{17} = -12$

នោះ

$-60+16d = -12$

$\Rightarrow d = 3$

$\Rightarrow a_n = -60+(n-1)3$

$= 3n-63$

យើងបាន:

$3n-63=0$ បើ $a_n = 0$

គេបាន:

$n = 21,\ a_{21} = 0,\quad a_{22} = 3$

របៀបទី១

$S_{21} = \frac{-60+0}{2} \times 20 = -600$

$S_{30} - S_{21} = (30-21+1) \times 3 + \frac{(30-21+1)(30-21)}{2} \times 3$

$= 165$

ដូចនេះផលបូក ៣០ តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $\{b_n\}$ គឺ $S_{30} = |S_{21}| + |S_{30} - S_{21}| = 765$

របៀបទី២

ដោយ $a_n = 3n - 63$

យើងបាន:

$S_{30} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{30} - 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{20})$

$= \frac{-60+27}{2} \times 30 - 2\frac{-60-3}{2} \times 20$

$= 765$

ដូចនេះផលបូក ៣០ តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $\{b_n\}$ គឺ $S_{30} = 765$

ខ. គណនាតម្លៃនៃ $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$

ដោយ $a_n = 10 - 3n$ នោះ $a_1, a_2, a_3 > 0,\ a_4, a_5, \ldots a_n < 0$

យើងបាន:

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| = \begin{cases} a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ (n \le 3) \\ a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - \ldots - a_n,\ (n \ge 4) \end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a_1+a_n}{2}n, & (n\le 3)\\ 2(a_1+a_2+a_3)-(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n), & (n\ge 4)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-3n^2+17n}{2}, & (n\le 3)\\ 24-\dfrac{-3n^2+17n}{2}, & (n\ge 4)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-3n^2+17n}{2}, & (n\le 3)\\ \dfrac{3n^2-17n+48}{2}, & (n\ge 4)\end{cases}$$

ដូចនេះ $|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|=\begin{cases}\dfrac{-3n^2+17n}{2}, & (n\le 3)\\ \dfrac{3n^2-17n+48}{2}, & (n\ge 4)\end{cases}$

២៦. គេឲ្យអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ $f(x)$ដែល $f(8)=5$ ។ $f(2), f(5), f(4)$ ជាទម្រង់នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។ បញ្ជាក់: $S_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$ ។ គណនា$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{S_n}{n^2}\right)$ ។

តាង $f(x)=kx+b$ តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន:

$$\begin{cases}8k+b=15\\ (5k+b)^2=(2k+b)(4k+b)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=4\\ b=-17\end{cases}$$

នោះ

$f(x)=4x-17$ គេបានស្វ៊ីត $-13, -9, -5, \ldots, (4n-17), \quad (x=\overline{1,n})$

យើងបាន:

$$S_n=\frac{(-13+4n-17)n}{2}$$
$$=2n^2-15$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-15}{n^2}=2$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{n^2}\right)=2$

២៧. តាងគ្រប់តួទាំងអស់នៃស៊ីតនព្វន្ត (a_n) ជាចំនួនវិជ្ជមាន ។ បង្ហាញថា៖

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$ ។

តាង $S=\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$ និង

ផលសងដោយ d

យើងមាន:

$$\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}}{a_{n-1}-a_n}$$
$$=-\frac{1}{d}\left(\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}\right)$$

យើងបាន:

$$S=-\frac{1}{d}\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}+\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}+\dots+\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}\right)$$
$$=-\frac{1}{d}\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}\right)$$
$$=-\frac{1}{d}\frac{a_1-a_n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$
$$=-\frac{1}{d}\frac{a_1-[a_1+(n-1)d]}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$
$$=-\frac{1}{d}\frac{-(n-1)d}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$
$$=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$

📖📖📖📖📖

២៨. គណនាផលបូក S_n តួដំបូងនៃស្វីត៖ $1,3a,5a^2,7a^3,\dots,(2n-1)a^{n-1}$ ។

☞ ពេល $a=1$ ស្វីតក្លាយទៅជា $1, 3, 5, 7,\dots,(2n-1)\Rightarrow S_n=\frac{[1+(2n-1)]n}{2}=n^2 \quad \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

☞ ពេល $a\neq 1$ គេបាន:

$$S_n=1+3a+5a^2+7a^3+\dots+(2n-1)a^{n-1} \qquad (1)$$
$$\Rightarrow \quad aS_n=a+3a^2+5a^3+7a^4+\dots+(2n-1)a^n \qquad (2)$$

នោះ $(1)-(2)$ យើងបាន:

$$(1-a)S_n = 1+2a+2a^2+2a^3+\ldots+2a^{n-1}-(2n-1)a^n$$
$$=1-(2n-1)a^n+2\left(a+a^2+a^3+\ldots+a^{n-1}\right)$$
$$=1-(2n-1)a^n+\frac{2\left(a-a^n\right)}{1-a}$$
$$\Rightarrow \quad S_n=\frac{1-(2n-1)a^n}{1-a}+\frac{2\left(a-a^n\right)}{(1-a)^2}, \quad (1-a\neq 0), \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$$

ដូចនេះ $S_n=\begin{cases}\dfrac{[1+(2n-1)]n}{2}=n^2, (a=1) & \left(n\in\mathbb{N}^*\right)\\ \dfrac{1-(2n-1)a^n}{1-a}+\dfrac{2\left(a-a^n\right)}{(1-a)^2}, & (1-a\neq 0), \left(n\in\mathbb{N}^*\right)\end{cases}$

២៩. តាង S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) ដោយ $S_n=2n^2$, (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែល $a_1=b_1, b_2(a_2-a_1)=b_1$ ។

ក. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $(a_n),(b_n)$ ។

ខ. តាង $c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$ គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត c_n តាងដោយ T_n ។

ក. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\},\{b_n\}$

តាមទំនាក់ទំនង $S_1=a_1$ និង $a_n=S_n-S_{n-1}$ គេបាន

$S_1=a_1=2$ និង $a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-2(n-1)^2=4n-2=2+4(n-1), \quad n\geq 2$

គេបាន (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត $a_n=2+4(n-1)$ ដែល $a_1=2$ និង $d=4$

តាងរេសុងនៃស្វ៊ីត (b_n) ដោយ q តាម $b_2(a_2-a_1)=b_1$, $b_2=b_1q$ នោះ

$b_1qd=b_1 \Rightarrow q=\dfrac{1}{d}=\dfrac{1}{4}$

ម្យ៉ាងទៀត $b_1=a_1$ គេបាន $b_n=2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}=\dfrac{2}{4^{n-1}}$

ដូចនេះ $a_n=2+4(n-1)$ និង $b_n=\dfrac{2}{4^{n-1}}$

ខ. គណនា T_n

ដោយ $c_n = \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow c_n = \frac{4n-2}{\frac{2}{4^{n-1}}} = (2n-1)4^{n-1}$ យើងបាន

$T_n = c_1 + c_2 + ... + c_n$

$= 1 + 3\times 4 + 5\times 4^2 + ... + (2n-1)4^{n-1}$ (1)

គុណសមីការ (1) នឹង 4 យើងបាន:

$4T_n = 4 + 3\times 4^2 + 5\times 4^3 + ... + (2n-1)4^n$ (2)

នោះ $(1)-(2)$ គេបាន:

$3T_n = -1 - 2\times\left(4 + 4^2 + 4^3 + ... + 4^{n-1}\right) + (2n-1)4^n$

$= -1 - 2\frac{4\left(1-4^{n-1}\right)}{1-4} + (2n-1)4^n$

$= \frac{5}{3} + \frac{1}{3}(6n-5)4^n$

$= \frac{1}{3}\left[(6n-5)4^n + 5\right]$

$\Rightarrow T_n = \frac{1}{9}\left[(6n-5)4^n + 5\right], \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

ដូចនេះ $T_n = \frac{1}{9}\left[(6n-5)4^n + 5\right], \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

៣០. ស៊ីត $\{a_n\}$ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ដែល $a_1 = 8, b_n = \log_2 a_n$ ។ បើ ផលបូក ៧ តួដំបូងនៃស៊ីត $\{b_n\}$តាងដោយ S_7 មានតម្លៃអតិបរមា ហើយ $S_7 \neq S_8$ ។ រកសំណុំរូបភាពផលធៀប q នៃស៊ីត$\{a_n\}$ ។

យើងមាន $b_n = \log_2 a_n$ នោះ $b_{n+1} = \log_2 a_{n+1}$

នាំឲ្យ

$$b_{n+1}-b_n=\log_2 a_{n+1}-\log_2 a_n$$
$$=\log_2\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$
$$=\log_2 q$$

នោះស្វ៊ីត $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ដែល $b_1=\log_2 a_1=\log_2 2^3=3$ និង មានផលសងរួមស្មើនឹង $\log_2 q$

តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន:

$$\begin{cases} b_7 \ge 0 \\ b_8 < 0 \end{cases}$$

នោះ:

$$\begin{cases} 3+6\log_2 q \ge 0 \\ 3+7\log_2 q < 0 \end{cases}$$

គេបាន:

$-\frac{1}{2} \le \log_2 q < -\frac{3}{7}$ ឬ $q \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 2^{-\frac{3}{7}}\right)$

ដូចនេះ សំណុំរូបភាពនៃ q គឺ $q \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 2^{-\frac{3}{7}}\right)$

៣១. សម្រាប់ចំនួនគត់មួយ ផ្នែកទសភាគរបស់វា ផ្នែកគត់ ហើយខ្លួនវាជាទម្រង់នៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។ រកចំនួនមួយនោះ ។

តាងចំនួនដែលត្រូវរកដោយ x នោះផ្នែកគត់គឺ $[x]$ និង ផ្នែកទសភាគគឺ $x-[x]$

តាមបម្រាប់ យើងបាន:

$x(x-[x])=[x]^2 \Rightarrow x^2-x[x]-[x]^2=0$ ដែល $[x]>0,\ 0<x-[x]<1$

ដោយដោះស្រាយសមីការ យើងបាន:

$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}[x]$ ដោយ $0<x-[x]<1$ នោះ $0<\frac{1+\sqrt{5}}{2}[x]-[x]<1$ គេបាន:

$0<\frac{1+\sqrt{5}}{2}[x]<1\Rightarrow 0<[x]<\frac{1+\sqrt{5}}{2}<2,\ [x]=1\Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

ដូចនេះ ចំនួនដែលត្រូវរកគឺ $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

៣២. ស្វ៊ីត $\{a_n\}$មាន k តួ (k ជាចំនួនថេរ) ។ ផលបូក S_n នៃស្វ៊ីតនេះគឺ $S_n=2n^2+n$, $(n\le k, n\in\mathbb{N}^*)$ ។ បើយើងប្តូរតួមួយ (មិនមែនតួទីមួយ ហើយក៏មិនមែនតួបញ្ចប់)ពី k តួ តម្លៃមធ្យមនៃតួដែលនៅសល់ $(k-1)$ គឺ 79 ។

ក. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ។

ខ. រក k និងតួដែលគេប្តូរ ។

ក. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$

តាមសម្មតិកម្ម យើងមាន:

$S_1=a_1=3,\ a_n=S_n-S_{n-1}$

នោះ:

$$a_n=(2n^2+n)-\left[2(n-1)^2+(n-1)\right]$$
$$=4n-1,\quad (n\ge 2)$$

ដោយ a_1 ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងខាងលើ នោះ $a_n=4n-1,\ (n\le k,\ n\in\mathbb{N}^*)$

ដូចនេះ $a_n=4n-1,\ (n\le k,\ n\in\mathbb{N}^*)$

ខ. រក k និងតួដែលគេប្តូរ

តាងតួទី t ជាតួដែលបានប្តូរ $1<t<k$

តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន:

$S_k - a_t = 79(k-1)$

$2k^2 + k - (4t-1) = 79k - 79$

$\Rightarrow 4t = 2k^2 - 78k + 80$

$\Rightarrow 4 < 2k^2 - 78k + 80 < 4k$

$\Rightarrow 38 < k < 40 \;\; , \;\; k \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow k = 39$

$\Rightarrow t = \dfrac{k^2 - 39k + 40}{2} = 20$

ដូចនេះ $k = 39$ និងតួដែលបានប្តូរគឺតួទី 20

៣៣. គេឲ្យ៖ $f(x) = x^2 - (2n+1)x + n^2 + 5n - 7$ ។

ក. បើកូអរដោនេ y ប្រសព្វក្រាប $f(x)$ មានទម្រង់ជាស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ។ បង្ហាញថាស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

ខ. បើចម្ងាយពីចំណុចប្រសព្វក្រាប $f(x)$ ទៅកាន់អ័ក្សអាប់ស៊ីស x មានទម្រង់ជាស្វ៊ីត $\{b_n\}$ ។ គណនាផលបូក S_n នៃស្វ៊ីត $\{b_n\}$ នេះ ។

ក. បង្ហាញថាស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

យើងមាន:

$f(x) = x^2 - (2n+1)x + n^2 + 5n - 7$

$\quad\;\; = [x - (n+1)]^2 + 3n - 8$

នោះ

$a_n = 3n - 8$

តែ

$a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 8 - (3n-8)$

$\quad\quad\quad\;\; = 3$

គេបាន $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d = 3$

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស៊ីតនព្វន្ត

ខ. គណនាផលបូក S_n នៃស៊ីត $\{b_n\}$

តាមសំនួរ (ក) យើងបាន:

$b_n = |3n-8|$

ពេលដែល $1 \le n \le 2$ នោះ $b_n = 8-3n, b_1 = 5$ និង

$$S_n = \frac{(5+8-3n)n}{2}$$
$$= \frac{13n-3n^2}{2}$$

ពេលដែល $n \ge 3$ នោះ $b_n = 3n-8$ និង

$$S_n = 5+2+1+4+7+\ldots+(3n-8)$$
$$= 7 + \frac{(1+3n-8)(n-2)}{2} = \frac{3n^2-13n+28}{2}$$

ដូចនេះ $S_n = \begin{cases} \dfrac{13n-3n^2}{2}, & 1 \le n \le 2 \\ \dfrac{3n^2-13n+28}{2}, & n \ge 3 \end{cases}$

៣៤. បើយើងបញ្ចូលលេខមួយខ្ទង់ចូលក្នុងចន្លោះលេខចំនួនគត់ពីរខ្ទង់, បីចំនួននោះបង្កើតបានជាស៊ីតនព្វន្តមួយ ។ បើយើងបញ្ចូលលេខពីរខ្ទង់ b,c, ចំនួនបួនខ្ទង់នោះបង្កើតបានជាស៊ីតធរណីមាត្រមួយ ។ បង្ហាញថា៖

ក. $2a > b+c$

ខ. $(a+1)^2 \ge (b+1)(c+1)$

បង្ហាញថា៖

ក. $2a > b+c$

តាង $m,n,\ (m,n>0)$ ជាពីរចំនួនដែលគេបានជំនួសលេខផ្សេងទៀតចូល នោះ

$$\begin{cases} m+n=2a & (1) \\ mc=b^2 & (2) \\ nb=c^2 & (3) \end{cases}$$

តាម (1) យើងបាន: $a>0$ តាម (2)និង (3)យើងបាន $b,c>0$ នោះ

$$\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{b}=m+n=2a$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2abc=b^3+c^3 &= (b+c)(b^2+c^2-bc) \\ &\geq (b+c)(2bc-bc) \\ &\geq (b+c)bc \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad 2a>(b+c)$$

ដូចនេះ $2a>(b+c)$ ត្រូវបានបង្ហាញ

ខ. $(a+1)^2 \geq (b+1)(c+1)$

តាមសំនួរ（ក）យើងមាន: តាមវិសមភាព Cauchy

$$a=\frac{m+n}{2}\geq\sqrt{mn}=\sqrt{bc}$$

$$\Rightarrow a^2 \geq bc$$

និង $2a>(b+c)$

យើងបាន:

$$\begin{cases} a^2 \geq bc \\ 2a \geq (b+c) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2+2a \geq bc+(b+c)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (a+1)^2 &\geq bc+b+c+1 \\ &\geq (b+1)(c+1) \end{aligned}$$

ដូចនេះ $(a+1)^2 \geq (b+1)(c+1)$ត្រូវបានបង្ហាញ

៣៥. សម្រាប់ចំនួនពិតប្រាកដ x, $[x]$បញ្ជាក់ផ្នែកគត់នៃ x ។ មានន័យថា $[x]$ ជាចំនួនធំបំផុតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $[x]\le x$ ។

ក. គណនា $[\log_2 1]+[\log_2 2]+\ldots+[\log_2 1024]$

ខ. ទាញរករូបមន្តទូទៅនៃ $[\log_2 1]+[\log_2 2]+\ldots+[\log_2(2^n-1)]$ ។

ក. គណនា $[\log_2 1]+[\log_2 2]+\ldots+[\log_2 1024]$

តាង $S=[\log_2 1]+[\log_2 2]+\ldots+[\log_2 1024]$

ពិនិត្យ:

$[\log_2 1]=0,\ [\log_2 2]=[\log_2 3]=1, [\log_2 4]=[\log_2 5]=[\log_2 6]=[\log_2 7]=2,$

$\ldots,[\log_2 512]=[\log_2 513]=\ldots=[\log_2 1023]=9, [\log_2 1024]=10$

នោះ

$$S=2+2\times 2^2+3\times 2^3+4\times 2^4+\ldots+9\times 2^9+10$$
$$=8204$$

ដូចនេះ $[\log_2 1]+[\log_2 2]+\ldots+[\log_2 1024]=8204$

ខ. ទាញរករូបមន្ត

តាង $S_n=[\log_2 1]+[\log_2 2]+\ldots+[\log_2(2^n-1)]$

តាម (ក) យើងបាន:

$$S_n=2+2\times 2^2+3\times 2^3+\ldots+(n-1)\times 2^{n-1} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow 2S_n=2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\ldots+(n-1)\times 2^n \qquad (2)$$

$(2)-(1)$:

$S_n=(n-1)2^n-\left(2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}\right)$

$=(n-1)2^n-\left(2^n-1\right)$

$=n2^n-2^{n+1}+1 \qquad \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

ដូចនេះ $S_n=n2^n-2^{n+1}+1 \qquad \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

៣៦. តើមានប៉ុន្មានតួដែលដូចគ្នានៅក្នុង ១០០ តួដំបូងនៃស៊ីតនព្វន្ត $5,8,11\ldots$ និងស៊ីតនព្វន្ត $3,7,11\ldots$? គណនាផលបូកនៃចំនួនដែលដូចគ្នាទាំងអស់នោះ ។

យើងឃើញថា តួទីn នៃស៊ីត $5,8,11\ldots$ គឺ $a_n=3n+2$ និងស៊ីត $3,7,11\ldots$គឺ

$b_n=4m-1, \quad \left(m,n\in\mathbb{N}^*\right)$

យើងបាន:

$3n+2=4m-1$

$\Rightarrow n=\frac{4}{3}m-1$

តាង $m=3k,\ k\in\mathbb{N}^*$ នោះ

$n=4k-1$

យើងបាន តួទូទៅដែលដូចគ្នាមានរវាងស៊ីតទាំងពីរខាងលើគឺ $c_k=12k-1$ ហើយ

$5\le 12k-1\le 302\Rightarrow \frac{1}{2}\le k\le 25\frac{1}{4}\Rightarrow k=25$

យើងបាន តួដែលដូចគ្នាមានចំនួន 25 តួ

ដោយ $\{c_k\}$ ជាស៊ីតនព្វន្តដែល $c_1=11$ នោះ

$d=c_2-c_1=12,\ S_{25}=\frac{\left[11+11+(25-1)\times 12\right]}{2}=3875$

ដូចនេះ តួដែលដូចគ្នាមានចំនួន 25 និង $S_{25}=3875$

៣៧. ក. ពិភាក្សាស៊ីតធរណីមាត្រ $\{a_n\}, a_1 = 1$ ហើយតួជៀងទៀតមានចំនួនគូ ។ ផលបូកនៃតួសេសទាំងអស់ស្មើនឹង 85 ។ ផលបូកនៃចំនួនគូទាំងអស់ស្មើនឹង 170 ។ គណនាផលធៀប q និងរកចំនួនតួ n ។

ខ. គ្រប់តួនៃស៊ីតធរណីមាត្រ $\{a_n\}$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន ហើយស៊ីតនេះមានតួជាចំនួនគូផងដែរ ។ ផលបូកនៃតួទាំងអស់ស្មើរនឹង ៤ ដងនៃផលបូកតួចំនួនគូទាំងអស់ ។ ផលគុណរវាងតួទី២ និងតួទី៤ ស្មើរនឹង ៩ដងនៃផលបូកតួទី៣ ជាមួយនឹងតួទី៤ ។ គណនា a_1, q និងតួទី n នៅពេលផលបូក n តួដំបូងនៃ $\{\lg a_n\}$ កើនដល់តម្លៃធំបំផុត ។

គ. ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតធរណីមាត្រ $\{a_n\}$ ដែលគ្រប់តួជាចំនួនវិជ្ជមានស្មើនឹង 80 ។ តួដែលមានតម្លៃធំជាងគេនៃស៊ីតនេះគឺលេខ 54 ។ ផលបូក $2n$ តួដំបូងគឺ 6560 ។ រកផលធៀបរួម q ។

ក. គណនាផលធៀប q និងរកចំនួនតួ n

ដោយតួជាចំនួនគូ នោះ

$$\frac{S_{even}}{S_{odd}} = q = \frac{170}{85} = 2$$

$$\Rightarrow S_{even} = \frac{1\times\left[1-\left(q^2\right)^{\frac{n}{2}}\right]}{1-q^2}$$

$$= 85$$

$$\Rightarrow \quad 2^n = 256 = 2^8$$

$$\Rightarrow \quad n = 8$$

ដូចនេះ $q = 2, n = 8$

ខ. គណនា a_1, q និងតួទី n

តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន:

$$S_n = 4S_{even} \Leftrightarrow S_{even} + S_{odd} = 4S_{even} \Rightarrow S_{odd} = 3S_{even} \Rightarrow \frac{S_{even}}{S_{odd}} = q = \frac{1}{3}$$

និង

$$a_2a_4 = 9(a_3 + a_4) \Leftrightarrow a_1^2q^4 = 9(a_1q^2 + a_1q^3) \Rightarrow a_1^2 - 108a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 108$$

ហើយ ផលបូក n តួដំបូងនៃ $\{\lg a_n\}$ កើនដល់តម្លៃធំបំផុត យើងបាន:

$$\lg a_n = \lg(a_1q^{n-1}) > 0$$

$$\Rightarrow 108\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} > 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} > \frac{1}{108}$$

$$\Rightarrow n - 1 < \lg_{\frac{1}{3}}\frac{1}{108} = \lg_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3^3} \times \frac{1}{4}\right) = 3 + \lg_3 4$$

$$\Rightarrow n < 4 + \lg_3 4 \le 4 + 1 = 5$$

ដូចនេះ $a_1 = 108$,$q = \frac{1}{3}$ និងតួទី $n = 5$

គ. រកផលធៀបរួម q

តាមសម្មតិកម្ម យើងដឹងថា ផលបូក n តួចុងនៃស្វ៊ីតវិជ្ជមាន $\{\lg a_n\}$ ធំជាង ផលបូក n តួដំបូង នោះ

$$q > 0, a_n = 54 \Leftrightarrow a_n = a_1q^{n-1} = 54 \qquad (1)$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = 80 \qquad (2)$$

$$q^n = \frac{S_{2n} - S_n}{S_n} = \frac{6560 - 80}{80} = 81$$

តាម (1) យើងបាន:

$\frac{a_1}{q} = \frac{54}{81} = \frac{2}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3}q$ ជំនួសចូល (2) យើងបាន:

$$\frac{\frac{2}{3}q(1-81)}{1-q}=80\Rightarrow q=3$$

ដូចនេះ $q=3$

៣៨. អនុគមន៍មួយត្រូវបានកំណត់លើចន្លោះ $(-1,1), f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$ និងផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right), x,y\in(-1,1)$ ។

ក. បើស៊ីត $\{f(x_n)\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1=\frac{1}{2}, x_{n+1}=\frac{2x_n}{1+x_n^2}$ ។ គណនា $f(x_n)$ ។

ខ. បង្ហាញថា៖ $\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}+\ldots+\frac{1}{f(x_n)}>-\frac{2n+5}{n+2}$ ។

ក. គណនា $f(x_n)$

ដោយ $f(x_1)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$

$$f(x_{n+1})=f\left(\frac{2x_n}{1+x_n^2}\right)$$
$$=f\left(\frac{x_n+x_n}{1+x_nx_n}\right)$$
$$=f(x_n)+f(x_n)$$
$$=2f(x_n)$$
$$\Rightarrow\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}=2$$

នោះ $\{f(x_n)\}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែល $a_1=-1$ និង $q=2$ យើងបាន:

$f(x_n)=-2^{n-1},\quad (n\in\mathbb{N}^*)$

ដូចនេះ $f(x_n)=-2^{n-1},\quad (n\in\mathbb{N}^*)$

ខ. បង្ហាញថា៖ $\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}+...+\frac{1}{f(x_n)}>-\frac{2n+5}{n+2}$

ដោយ $f(x_n)=-2^{n-1},\ (n\in\mathbb{N}^*)$ នោះ

$$\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}+...+\frac{1}{f(x_n)}=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$=-\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=-\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$=-2+\frac{1}{2^{n-1}}>-2$$

ម្យ៉ាងទៀត

$$-\frac{2n+5}{n+2}=-\frac{2(n+2)+1}{n+2}$$

$$=-2-\frac{1}{n+2}<-2$$

យើងបាន:

$$\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}+...+\frac{1}{f(x_n)}>-\frac{2n+5}{n+2}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}+...+\frac{1}{f(x_n)}>-\frac{2n+5}{n+2}$

៣៩. បើស៊ីត $\{a_n\},\{b_n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់៖ $b_n=\frac{a_1+2a_2+3a_3+...+na_n}{1+2+3+...+n}$ ហើយ $\{b_n\}$ ជាស៊ីតនព្វន្ត ។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ក៏ជាស៊ីតនព្វន្តដែរ ។

បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

យើងមាន

$b_n = \dfrac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n}{1 + 2 + 3 + \ldots + n}$ នោះ

$$(1 + 2 + \ldots + n)b_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n$$

$$\frac{n(n+1)}{2}b_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n \quad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(n-1)n}{2}b_{n-1} = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + (n-1)a_{n-1} \quad (2)$$

យក $(1)-(2)$ យើងបាន:

$$\frac{n(n+1)}{2}b_n - \frac{(n-1)n}{2}b_{n-1} = na_n, \qquad (n = 2,3,.....)$$

$$\Rightarrow \qquad a_n = \frac{1}{2}[(n+1)b_n - (n-1)b_{n-1}], \ (n = 2,3,.....) \ (*)$$

ដោយ $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត តាងផលសងរួមដោយ d នោះ $b_n = b_1 + (n-1)d$

យក $b_n = b_1 + (n-1)d$ ជំនួសចូល (*) យើងបាន:

$$a_n = \frac{1}{2}[(n+1)(b_1 + (n-1)d) - (n-1)(b_1 + (n-2)d)]$$

$$= b_1 + \frac{3}{2}(n-1)d, \quad (n = 2, 3,.....)$$

តែ $b_n = \dfrac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n}{1 + 2 + 3 + \ldots + n}$ នោះ $b_1 = \dfrac{a_1}{1} = a_1, \ (n = 1)$

យើងបាន:

$$\begin{cases} a_n = a_1 + \frac{3}{2}(n-1)d, \ (n = 2, 3, ...) \\ a_{n-1} = a_1 + \frac{3}{2}(n-2)d \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n - a_{n-1} = \left[a_1 + \frac{3}{2}(n-1)d\right] - \left[a_1 + \frac{3}{2}(n-2)d\right]$$

$$= \frac{3}{2}d$$

ដោយ $\frac{3}{2}d$ ជាចំនួនថេរ នោះ

$\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តត្រូវបានបង្ហាញ

៤០. តាង S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត (a_n) ដោយ $S_n = 1 - \frac{2}{3}a_n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ ។

ក. គណនា S_n និង a_n ។

ខ. បើយើងតាង T_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $\{S_n a_n\}$ ។ គណនា $\lim_{n\to\infty} T_n$ ។

ក. គណនា S_n និង a_n

យើងមាន:

$$S_n = 1 - \frac{2}{3}a_n$$

$$= 1 - \frac{2}{3}\left(S_n - S_{n-1}\right)$$

$$\frac{5}{3}S_n = 1 + \frac{2}{3}S_{n-1}$$

$$\frac{5}{3}\left(S_n - 1\right) = \frac{2}{3}\left(S_{n-1} - 1\right)$$

$$\frac{S_n - 1}{S_{n-1} - 1} = \frac{2}{5}$$

តែ $S_1 = 1 - \frac{2}{3}S_1 \Rightarrow S_1 = \frac{3}{5} \Rightarrow S_1 - 1 = -\frac{2}{5}$

នោះ $\{S_n - 1\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួដំបូងស្មើនឹង $-\frac{2}{5}$ និង ផលធៀបរួមស្មើនឹង $\frac{2}{5}$

យើងបាន:

$$S_n - 1 = \left(-\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

$$= -\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\Rightarrow S_n = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

តែ $a_n = S_n - S_{n-1}$

នោះ

$$a_n=\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]-\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right]$$

$$=\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}-\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$=\left(\frac{2}{5}\right)^n\left(\frac{2}{5}-1\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n,\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$$

ដូចនេះ $S_n=1-\left(\frac{2}{5}\right)^n,\ a_n=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n,\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

ខ. គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$

ដោយ $a_n=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n=\frac{3}{2}\frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}=\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

នោះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលតួដំបូងស្មើនឹង $\frac{3}{5}$ និងផលធៀបរួមស្មើនឹង $\frac{2}{5}$

យើងបាន:

$$a_nS_n=\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$$

$$=\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}-\frac{6}{25}\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^{n-1}$$

នោះ

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}a_nS_n=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{2}{5}}-\frac{\frac{6}{25}}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{5}{7}$

៤១. តាងរេស៊ុងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $\{a_n\}$ ដោយ $q>1$ ។ **ការេ**នៃតួទី១៧ ស្មើរនឹងតួទី២៤ ។ គណនារ៉ង់នៃចំនួនគត់ n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖ $a_1+a_2+\ldots+a_n > \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$ ។

គណនារ៉ង់នៃចំនួនគត់ n

តាមបម្រាប់យើងបាន:

$a_{17}^2 = a_{24} \Rightarrow \left(a_1 q^{16}\right)^2 = a_1 q^{23}$ តែ $q>1,\ a\neq 0$ នោះ

$a_1 = q^{-9}$

មួយវិញទៀត

$$a_1+a_2+\ldots+a_n > \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$$

នោះ

$$\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q} > \frac{\frac{1}{a_1}\left(1-\frac{1}{q^n}\right)}{1-\frac{1}{q}} \Rightarrow a_1 > \frac{1}{a_1 q^{n-1}} \quad (1)$$

យក $a_1 = q^{-9}$ ជំនួសក្នុង (1) យើងបាន:

$q^{-18} > q^{n-1} \Rightarrow -18 > n-1 \Rightarrow n > 19,\ q>1$

ដូចនេះ រ៉ង់នៃ n គឺ $n\in[20,+\infty)$

៤២. គេឲ្យស្វ៊ីតនព្វន្ត $\{a_n\}$និងសមីការអាស្រ័យ x គឺ $a_i x^2 + 2a_{i+1}x + a_{i+2} = 0,\ \left(i = \overline{1,n}\right)$ និង a_1, d ជាចំនួនពិតមិនសូន្យទាំងពីរ ។
ក. បង្ហាញថាសមីការខាងលើមានដំណោះស្រាយដូចគ្នា (ឬសតែមួយ) ។
ខ. បើមានដំណោះស្រាយផ្សេងគ្នា β_i នោះ
$\frac{1}{\beta_1+1}, \frac{1}{\beta_2+1}, \ldots, \frac{1}{\beta_n+1}$ ជាទម្រង់នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ។

ក. បង្ហាញថាសមីការមានឬសតែមួយ

យើងមានសមីការ:

$a_i x^2 + 2a_{i+1}x + a_{i+2} = 0$ និង $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ដែលមានធម្យមនព្វន្តស្មើនឹង

$2a_{i+1} = a_i + a_{i+2}$

យើងបាន:

$a_i x^2 + 2(a_i + a_{i+2})x + a_{i+2} = 0$

$(x^2 + x)a_i + (x+1)a_{i+2} = 0$

ដោយស្វ៊ីត $\{a_n\}$មានតួដំបូង a_1 និង ផលសងរួម d មិនសូន្យដូចគ្នា គេបាន:

$a_i \neq 0$ និង $a_{i+2} \neq 0$ នោះ

$x^2 + x = 0 \Rightarrow x = -1$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយតែមួយគត់គឺ $x = -1$

ខ. បង្ហាញថា $\frac{1}{\beta_1+1}, \frac{1}{\beta_2+1}, \ldots, \frac{1}{\beta_n+1}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

ជំនួសឬស និង ចំនួនថេរបូល យើងបាន:

$$\beta_i+(-1)=-\frac{2a_{i+1}}{a_i}$$
$$=-\frac{2(a_i+d)}{a_i}$$
$$=-2-\frac{2d}{a_i}$$
$$\Rightarrow \quad \beta_i=-1-\frac{2d}{a_i}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\beta_{i+1}+1}-\frac{1}{\beta_i+1}=\frac{1}{-1-\frac{2d}{a_{i+1}}+1}-\frac{1}{-1-\frac{2d}{a_i}+1}$$
$$=\frac{a_i-a_{i+1}}{2d}$$
$$=\frac{-d}{2d}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{\beta_1+1},\frac{1}{\beta_2+1},\ldots,\frac{1}{\beta_n+1}$ មានទម្រង់ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

៤៣. គេឲ្យ $f(x)=\sqrt{x^2-4}\ (x\le -2)$ ។

ក. រកអនុគមន៍ច្រាស់ $f^{-1}(x)$ ។

ខ. តាង $a_1=1, a_n=-f^{-1}(a_{n-1})$ ។ គណនា a_n

គ. បើ $b_1=\frac{1}{a_1+a_2}, b_2=\frac{1}{a_2+a_3},\ldots,b_n=\frac{1}{a_n+a_{n+1}},\ldots$ ។

គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $\{b_n\}$ ។

ក. រកអនុគមន៍ច្រាស់ $f^{-1}(x)$

តាង $y=f(x)=\sqrt{x^2-4},(x\le -2)$ នោះ

$x=-\sqrt{y^2+4}$ យើងបាន:

$f^{-1}(x)=-\sqrt{x^2+4},\ (x\ge 0)$

ដូចនេះ អនុគមន៍ច្រាស់គឺ $f^{-1}(x)=-\sqrt{x^2+4},\ (x\ge 0)$

ខ. គណនា a_n

តាមសម្មតិកម្ម និង ចម្លើយ (ក) យើងបាន:

$a_n=\sqrt{a_{n-1}^2+4}$

$a_n^2=a_{n-1}^2+4$

$a_n^2-a_{n-1}^2=4$

នោះ

$$+\begin{cases}a_2^2-a_1^2=4\\a_3^2-a_2^2=4\\\dots\dots\dots\dots\\a_n^2-a_{n-1}^2=4\end{cases}$$

$\Rightarrow a_n^2-a_1^2=4(n-1)$

$\Rightarrow a_n^2=4n-3$

$\Rightarrow a_n=\sqrt{4n-3},\ (n\in\mathbb{N}^*)$

ដូចនេះ $a_n=\sqrt{4n-3},\ (n\in\mathbb{N}^*)$

គ. គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត $\{b_n\}$

យើងមាន: $b_1=\dfrac{1}{a_1+a_2},b_2=\dfrac{1}{a_2+a_3},\dots,b_n=\dfrac{1}{a_n+a_{n+1}},\dots$

នោះ

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n + a_{n+1}}$$

$$= \frac{a_2 - a_1}{4} + \frac{a_3 - a_2}{4} + \ldots + \frac{a_{n+1} - a_n}{4}$$

$$= \frac{a_{n+1} - a_1}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{4(n+1)-3} - 1}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{4n+1} - 1}{4}, \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{\sqrt{4n+1} - 1}{4}, \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

៤៤. សម្រាប់ស៊ីតនព្វន្ត $\{a_n\}, a_1 = 1$ និងមានផលសងរួម d, ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនេះតាងដោយ A_n ។ សម្រាប់ស៊ីតធរណីមាត្រ $\{b_n\}, b_1 = 1$ ផលធៀបរួម q, $(|q| < 1)$, ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនេះតាងដោយ B_n ។ តាង $S_n = B_1 + B_2 + \ldots + B_n$ ។
បើ $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{A_n}{n} - S_n\right) = 1$ គណនា d និង q ។

គណនា d និង q

តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន:

$$A_n = n + \frac{n(n-1)}{2}d, \quad B_n = \frac{1\left(1 - q^n\right)}{1 - q}$$

$$S_n = \frac{(1-q) + \left(1 - q^2\right) + \ldots + \left(1 - q^n\right)}{1 - q}$$

$$= \frac{n - \dfrac{q\left(1 - q^n\right)}{1 - q}}{1 - q} = \frac{(1-q)n - q\left(1 - q^n\right)}{(1-q)^2}$$

នោះ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{A_n}{n}-S_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{n-1}{2}d-\frac{(1-q)n-q(1-q^n)}{(1-q)^2}\right]=1$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n-1}{2}d-\frac{(1-q)n-q(1-q^n)}{(1-q)^2}\right]=0$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{d}{2}-\frac{1}{1-q}\right)n-\frac{d}{2}+\frac{q}{(1-q)^2}\right]=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{d}{2}-\frac{1}{1-q}=0\\ -\frac{d}{2}+\frac{q}{(1-q)^2}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}d=4\\ q=\frac{1}{2}\end{cases}$$

ដូចនេះ $d=4,\ q=\frac{1}{2}$

៤៥. បើផលគុណនៃ ៣ តួដំបូងនៃស៊ីតធរណីមាត្រ $\{a_n\}$ កើនមួយស្មើនឹង 512 ហើយបើគេដកចេញ 1,3,9 រៀងគ្នាពីចំនួនទាំង ៣ នោះបានក្លាយជាទម្រង់នៃស៊ីតនព្វន្តមួយ ។ បង្ហាញថា៖ $\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{3}{a_3}+....+\frac{n}{a_n}<1$ ។

តាង បីតួដំបូងនៃស៊ីតធរណីមាត្រកើន $\{a_n\}$ ដោយ $\frac{a}{q}, a, aq$ តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន:

$$\left(\frac{a}{q}\right)(a)(aq)=a^3=512\Rightarrow a=8$$

ដូចគ្នាដែរ តាមសម្មតិកម្មមួយទៀត យើងបាន:

$$\left(\frac{a}{q}-1\right)+(aq-9)=2(a-3)$$

$$\left(\frac{8}{q}-1\right)+(8q-9)=10$$

$$\Rightarrow q=\frac{1}{2},\ q=2$$

តែ $\{a_n\}$ ជាស៊ីតកើន នោះ $q=2\Rightarrow a_1=\frac{8}{2}=4$ យើងបាន:

$$a_n=4\times 2^{n-1}$$
$$=2^{n+1}$$

តាង $S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{3}{a_3}+....+\frac{n}{a_n}$ នោះ

$$S_n=\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+...+\frac{n}{2^{n+1}} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{8}+\frac{2}{16}+\frac{3}{32}+...+\frac{n}{2^{n+2}} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow [(1)-(2)]\times 2$$

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$$

$$=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}<1$$

ដូចនេះ $\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{3}{a_3}+....+\frac{n}{a_n}<1$ ត្រូវបានបង្ហាញ

៤៦. តាងផលសងរួមនៃស៊ីតនព្វន្ត $\{a_n\}$ ខុសពីសូន្យ ។ $\{b_n\}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។ បើ $a_1=3, b_1=1, a_2=b_2, 3a_5=b_3$ ។ សម្រាប់ចំនួនពិតប្រាកដ n មានចំនួនថេរ $\alpha,\ \beta$ ធ្វើឲ្យ $a_n=\log_\alpha b_n+\beta$ តែងតែពិត ។ គណនា $\alpha+\beta$ ។

គណនា $\alpha+\beta$

តាង ផលសងរួមនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ដោយ d និង ផលធៀបរួមនៃស្វ៊ីត $\{b_n\}$ ដោយ q ហើយ

$a_1=3, b_1=1, a_2=b_2, 3a_5=b_3$ យើងបាន:

$$\begin{cases} 3+d=q \\ 3(3+4d)=q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=6 \\ q=9 \end{cases}$$

នោះ

$a_n=3+(n-1)6=6n-3,\ b_n=9^{n-1}$

តែ $a_n=\log_\alpha b_n+\beta$

យើងបាន:

$$\begin{aligned} 6n-3 &= \log_\alpha 9^{n-1}+\beta \\ &= n\log_\alpha 9-\log_\alpha 9+\beta \end{aligned}$$ តែងតែពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតជាក់លាក់ n

នោះ

$$\begin{cases} \log_\alpha 9=6 \\ \beta-\log_\alpha 9=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^6=9=3^2 \\ \beta=-3+\dfrac{\log_3 9}{\log_3\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha=3^{\frac{2}{6}}=3^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3},\quad \alpha>0 \\ \beta=-3+\dfrac{\log_3 9}{\log_3 3^{\frac{1}{3}}}=3 \end{cases}$$

ដូចនេះ $\alpha+\beta=3+\sqrt[3]{3}$

៤៧. ស៊ីតនព្វន្ត $\{a_n\}$ លំដាប់ ៣ គឺ៖ $1,2,8,22,47,...$ ។ រកតួទី១០នៃស៊ីតនេះ ។

រកតួទី១០

ដោយ $\{a_n\}$ ជាស៊ីតនព្វន្តលំដាប់ ៣ តាង $a_n = An^3 + Bn^2 + Cn + d$

ដែល A, B, C, D ជាមេគុណដែលត្រូវរក

ចំពោះ $n=1$ យើងបាន:

$A+B+C+D=1 \quad (1)$

ចំពោះ $n=2$ យើងបាន:

$8A+4B+2C+D=2 \quad (2)$

ចំពោះ $n=3$ យើងបាន:

$27A+9B+3C+D=8 \quad (3)$

ចំពោះ $n=4$ យើងបាន:

$64A+16B+4C+D=22 \,(4)$

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ:

$$\begin{cases} A+B+C+D=1 & (1) \\ 8A+4B+2C+D=2 & (2) \\ 27A+9B+3C+D=8 & (3) \\ 64A+16B+4C+D=22 & (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{2} \\ B=-\dfrac{1}{2} \\ C=-1 \\ D=2 \end{cases}$$

យើងបាន:

$$a_n=\frac{1}{2}n^3-\frac{1}{2}n^2-n+2$$

$\Downarrow$

$$a_{10}=\frac{1}{2}(10)^3-\frac{1}{2}(10)^2-10+2$$
$$=442$$

ដូចនេះ តួទី១០នៃស៊ីតគឺ $a_{10}=442$

៤៨. ចំពោះស៊ីត $\{a_n\}, f_n(x)=a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ និង $a_1=3, f_n(1)=p\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ ។

ក. រក p

ខ. រកតួទូទៅនៃស៊ីត $\{a_n\}$

គ. រកតម្លៃអប្បបរមានៃចំនួនគត់ n ដែល $3f_n(2)\geq 2005f_n(1)$ ។

ក. រក p

តាមសម្មតិកម្ម យើងមាន:

$$f_n(1)=a_1+a_2+\ldots+a_n=p\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

ដោយ $a_1=3\Rightarrow \frac{p}{2}=3\Rightarrow p=6$

ដូចនេះ $p=6$

ខ. រកតួទូទៅនៃស៊ីត $\{a_n\}$

ពេល $n\geq 2$ នាំឲ្យ $a_n=6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-6\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

ដូចនេះ $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

គ. រកតម្លៃអប្បបរមានៃចំនួនគត់ n

យើងមាន: $f_n(x) = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ នោះ

$f_n(2) = 2a_1 + 4a_2 + \ldots + 2^n a_n$

$= 2\times 3 + 4\times\frac{3}{2} + \ldots + 2^n \times \frac{3}{2^{n-1}}$

$= 6n$

តែ $3f_n(2) \geq 2005 f_n(1)$ នោះ

$3\times 6n \geq 2005 \times 6\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

$\Rightarrow 3n \geq 2005\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

ពេល $n \leq 10$ វាមិនផ្ទៀងផ្ទាត់

ពេល $n > 10,\ \frac{2005}{2^n} < 1$ នោះ $3n > 2004 \Rightarrow n > 668$

ដូចនេះ តម្លៃអប្បបរមាគឺ $n = 669,\ n \in \mathbb{N}^*$

៤៩. គេឲ្យ $a_0 = a_1 = 1,\ a_0a_n + a_1a_{n-1} + \ldots + a_na_0 = 2^n a_n$ ។ បង្ហាញថា $a_n = \frac{1}{n!}$ ពិតគ្រប់ចំពោះ $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ ។

បង្ហាញថា $a_n = \frac{1}{n!}$

បើ $n = 0,\ n = 1$ យើងបាន:

$a_0 = a_1 = \frac{1}{1!} = 1$

នោះ $p(0), p(1)$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k$ យើងបាន $p(k)$ ពិត នោះ

$a_k = \frac{1}{k!}$

យើងនឹងស្រាយវាពិតដល់ $n = k+1$ នោះ

$a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}$ ពិត

យើងមាន:

$a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \ldots + a_n a_0 = 2^n a_n$

ពេល $n = k+1$ យើងបាន:

$$a_{k+1} + \frac{1}{1!k!} + \frac{1}{2!(k-1)!} + \ldots + \frac{1}{k!1!} + a_{k+1} = 2^{k+1} a_{k+1}$$

$$\left(2^{k+1} - 2\right)a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}\left(C_{k+1}^1 + C_{k+1}^2 + \ldots + C_{k+1}^k\right)$$

$$= \left(2^{k+1} - 2\right)\frac{1}{(k+1)!}$$

$$\Rightarrow \qquad a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}$$

ដូចនេះ $a_n = \frac{1}{n!}$ ត្រូវបានបង្ហាញ

៥០. តាង A, B, C ជាមុំក្នុងនៃ ΔABC ។ $\log A, \log B, \log C$ មានទម្រង់ជាស៊ីតនព្វន្ត រករង្វាស់នៃ B ។

រករ៉ង់ (សំណុំរូបភាព) នៃ B

ដោយ $\log A, \log B, \log C$ ជាទម្រង់នៃស្វ៊ីតនព្វន្ត យើងបាន:

$\log A + \log C = 2\log B$

$\Rightarrow B^2 = AC$

នោះ $C > B > A, \quad B < \frac{\pi}{2}$ យើងបាន:

$$[\pi - (A + C)]^2 = AC \le \left(\frac{A + C}{2}\right)^2$$

នោះ

$$\frac{A + C}{2} \le B < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi - (A + C) \ge \frac{A + C}{2}$$

$$\Rightarrow A + C \le \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow B \ge \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

ដូចនេះ រូបភាពនៃ B គឺ $\frac{\pi}{3} \le B < \frac{\pi}{2}$

៥១. ចំពោះ ស្វ៊ីត $\{a_n\}$, $a_1 = 1, 8a_{n+1}a_n - 16a_{n+1} + 2a_n + 5 = 0, \ (n \in \mathbb{N}^*), b_n = \dfrac{1}{a_n - \frac{1}{2}}$ ។

ក. រក b_1, b_2, b_3, b_4

ខ. រកតួទូទៅ $\{b_n\}$ និងផលបូក n តួនៃស្វ៊ីត $\{a_n b_n\}$ តាងដោយ S_n ។

ក. រក b_1, b_2, b_3, b_4

យើងមាន:

$b_n = \dfrac{1}{a_n - \dfrac{1}{2}} \Rightarrow a_n = \dfrac{1}{b_n} + \dfrac{1}{2}$ ជំនួសចូលសមីការ:

$8a_{n+1}a_n - 16a_{n+1} + 2a_n + 5 = 0$ យើងបាន:

$\dfrac{4}{b_{n+1}b_n} - \dfrac{6}{b_{n+1}} + \dfrac{3}{b_n} = 0$

$b_{n+1} = 2b_n - \dfrac{4}{3}$

ដោយ $a_1 = 1$ នោះ

$1 = \dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_2 = 2b_1 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{3} \\ b_3 = 2b_2 - \dfrac{4}{3} = 4 \\ b_4 = 2b_3 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{20}{3} \end{cases}$$

ដូចនេះ $b_1 = 2, b_2 = \dfrac{8}{3}, b_3 = 4,\ b_4 = \dfrac{20}{3}$

ខ. រកតួទូទៅ $\{b_n\}$ និងផលបូក n តួនៃស្វ៊ីត $\{a_nb_n\}$

តាមចម្លើយ (ក) យើងមាន:

$b_{n+1} = 2b_n - \dfrac{4}{3}$ នោះ $b_{n+1} - \dfrac{4}{3} = 2\left(b_n - \dfrac{4}{3}\right)$ តែ $b_1 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{3} \neq 0$

នោះ ស្វ៊ីត $\left\{b_n - \dfrac{4}{3}\right\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួដំបូងស្មើនឹង $\dfrac{2}{3}$

និងផលធៀបរួមរបស់វាស្មើនឹង $q = 2$ យើងបាន:

$$b_n-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}2^{n-1}=\frac{1}{3}2^n$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{1}{3}2^n+\frac{4}{3},\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$$

ម្យ៉ាងទៀត

$$b_n=\frac{1}{a_n-\frac{1}{2}}$$

នោះ

$$a_nb_n=\frac{1}{2}b_n+1$$

យើងបាន:

$$\begin{aligned}S_n&=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\\&=\frac{1}{2}\left(b_1+b_2+\ldots+b_n\right)+n\\&=\frac{1}{2}\left[\left(b_1-\frac{4}{3}\right)+\left(b_2-\frac{4}{3}\right)+\ldots+\left(b_n-\frac{4}{3}\right)\right]+\frac{5}{3}n\\&=\frac{\frac{3}{2}\left(1-2^n\right)}{2(1-2)}+\frac{5}{3}n\\&=\frac{1}{3}\left(2^n+5n-1\right),\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right)\end{aligned}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{1}{3}\left(2^n+5n-1\right),\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

៥២. បើស៊ីតកើន $\{a_n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, $n\geq 1, a_7=120$ ។ គណនា a_8 ។

គណនា a_8

តាង $a_1=x,\ a_2=y,\ x,y\in\mathbb{N}^*$ តាមសម្មតិកម្ម ដោយ $\{a_n\}$ ជាស៊ីតកើន នោះ $x<y$ និង

$a_3=x+y,\ a_4=x+2y,\ a_5=2x+3y,\ a_6=3x+5y,\ a_7=5x+8y,\ a_8=8x+13y$

តែ $a_7=120$ នោះ $5x+8y=120$ យើងបាន:

$$\begin{cases} x=8t \\ y=15-5t \end{cases}$$

ដែល t ជាចំនួនគត់មួយ ដោយ $y>x>0$ នោះ $15-5t>8t>0\Rightarrow 0<t<\frac{15}{13}$

នោះ $t=1$ នាំឲ្យ $x=8,\ y=10$

ដូចនេះ $a_8=8\times 8+13\times 10=194$

៥៣. ផលបូក n នៃស៊ីតនព្វន្ត $\{a_n\}$ ដែលមានផលសងរួមវិជ្ជមានតាងដោយ S_n ហើយ $a_3a_4=117, a_2+a_5=22$ ។

ក. រកតួទូទៅ $\{a_n\}$ ។

ខ. បើស៊ីតនព្វន្ត $\{b_n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់៖ $b_n=\dfrac{S_n}{n+c}$ គណនាចំនួនថេរ c ។

គ. គណនាតម្លៃអតិបរមានៃអនុគមន៍ $f(n)=\dfrac{b_n}{(n+36)b_{n+1}},\quad \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ ។

ក. រកតួទូទៅ $\{a_n\}$

ដោយ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ $a_3 + a_4 = a_2 + a_5 = 22$ ម្យ៉ាងទៀត
$a_3 a_4 = 117$ នោះ a_3, a_4 ជាឫសនៃសមីការ $x^2 - 22x + 17 = 0$ ដោយ $d > 0$
នោះ $a_3 < a_4$ ដោយដោះស្រាយសមីការ យើងបាន:

$a_3 = 9,\ a_4 = 13$ នោះ

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 9 \\ a_1 + 3d = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 4 \end{cases} \Rightarrow a_n = 1 + (n-1)4 = 4n - 3,\ \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$$

ដូចនេះ $a_n = 4n - 3,\ \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

ខ. គណនាចំនួនថេរ c

តាមចម្លើយ (ក) យើងបាន:

$$S_n = n \times 1 + \frac{n(n-1)}{2}4$$
$$= 2n^2 - n$$

តែ $b_n = \dfrac{S_n}{n+c}$ យើងបាន:

$$b_n = \frac{2n^2 - n}{n+c},\ \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$$

នោះ

$$b_1 = \frac{1}{1+c}, b_2 = \frac{6}{2+c}, b_3 = \frac{15}{3+c}$$

ដោយ $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ

$$\frac{1}{1+c} + \frac{15}{3+c} = 2\frac{6}{2+c} \Rightarrow 2c^2 + c = 0 \Rightarrow c = \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

ដោយ c ជាចំនួនថេរខុសពី 0 នោះ $c = -\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ ចំនួនថេរដែលត្រូវរកគឺ $c = -\dfrac{1}{2}$

គ. គណនាតម្លៃអតិបរមា

តាមចម្លើយ (ខ) យើងមាន:

$$b_n = \frac{2n^2 - n}{n - \frac{1}{2}}$$
$$= 2n$$

នោះ

$$f(n) = \frac{2n}{2(n+1)(n+36)}$$
$$= \frac{n}{n^2 + 37n + 36}$$
$$= \frac{1}{n + \frac{36}{n} + 37} \le \frac{1}{2\sqrt{n\frac{36}{n}} + 37} = \frac{1}{49}$$
$$\Rightarrow f(n)_{\max} = \frac{1}{49},\ (n = 6)$$

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមាគឺ $f(n)_{\max} = \frac{1}{49}$

៥៤. គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}},\ (x < -2)$ ។

ក. តាង $a_1 = 1, \frac{1}{a_{n+1}} = -f^{-1}(a_n),\ (n \in \mathbb{N}^*)$ ។ គណនា a_n

ខ. តាង $S_n = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2,\ b_n = S_{n+1} - S_n$ ។ រកថាតើមានតម្លៃតូចបំផុតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន m ដែល $b_n < \frac{m}{25}$ ពិតចំពោះ $(n \in \mathbb{N}^*)$, បើមានរកតម្លៃ m នោះ បើយ៉ាងណាពន្យល់ហេតុផលផង ។

ក. គណនា a_n

តាង $y=f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-4}},\ (x<-2)$ នោះ $x=-\sqrt{4+\frac{1}{y^2}}$ គេបាន:

$$f^{-1}(x)=-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}},\ (x>0)$$

យើងមាន:

$$\frac{1}{a_{n+1}}=-f^{-1}(a_n)=\sqrt{4+\frac{1}{a_n^2}}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}=4$$

នោះ ស៊ីត $\left\{\frac{1}{a_n^2}\right\}$ ជាស៊ីតនព្វន្តដែល $a_1=1,\ d=4$ នោះ

$$\frac{1}{a_n^2}=\frac{1}{a_1^2}+(n-1)4$$
$$=4n-3$$

ដោយ $a_n>0$ នោះ

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{4n-3}},\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$$

ដូចនេះ $a_n=\frac{1}{\sqrt{4n-3}},\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

ខ. រក m

តាមសម្មតិកម្ម និង ចម្លើយ (ក) យើងមាន:

$$b_n = S_{n+1} - S_n$$
$$= a_{n+1}^2$$
$$= \frac{1}{4(n+1)-3}$$
$$= \frac{1}{4n+1}$$

តែ $b_n < \frac{m}{25}$ នោះ $\frac{1}{4n+1} < \frac{m}{25} \Rightarrow m > \frac{25}{4n+1}$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$

និង $\frac{25}{4n+1} \le 5 \Rightarrow m > 5$ នោះមានចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុត $m = 6$ ដែល

$b_n < \frac{m}{25}$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$

ដូចនេះ មានតម្លៃតូចបំផុត $m = 6$ ដែល $b_n < \frac{m}{25}$ ពិតចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}^*$

៥៥. ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ $\{a_n\}$ តាងដោយ S, ផលគុណតាងដោយ p ផលបូកច្រាស់នៃគ្រប់តួទាំងអស់តាងដោយ T ។ បង្ហាញថា $p = \left(\frac{S}{T}\right)^n, n \in \mathbb{N}^*$ ។

បង្ហាញថា $p = \left(\frac{S}{T}\right)^n, n \in \mathbb{N}^*$

បើ ផលធៀបរួម $q = 1$ នោះ

$$S = na_1, T = \frac{n}{a_1}, \quad p = a_1^n$$

និង

$$p^2 = a_1^{2n} \Rightarrow \left(\frac{S}{T}\right)^n = \left(a_1^2\right)^n = a_1^{2n}$$

$$\Rightarrow p^2 = \left(\frac{S}{T}\right)^n,\ \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$$

បើ ផលធៀបរួម $q \neq 1$ នោះ

$$S = \frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q},\ T = \frac{\frac{1}{a_1}\left(1-\frac{1}{q^n}\right)}{1-\frac{1}{q}} = \frac{q^n - 1}{a_1 q^{n-1}(q-1)},$$

$$p = a_1^n q^{1+2+\ldots+(n-1)}$$

$$= a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$p^2 = a_1^{2n} q^{n(n-1)}$$

$$\left(\frac{S}{T}\right)^n = \left[\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}\frac{a_1 q^{n-1}(q-1)}{q^n-1}\right]^n$$

$$= a_1^{2n} q^{n(n-1)} = p^2$$

ដូចនេះ $p = \left(\frac{S}{T}\right)^n, n \in \mathbb{N}^*$ ត្រូវបានបង្ហាញ

៥៦. មានលេខ n ខ្ទង់ដែលមានទម្រង់ជាស្វីត ។ ភាគយកនៃចំនួននោះ បង្កើតបានជាស្វីតនព្វន្ត មួយ ដែលតួដំបូងតាងដោយ a ហើយផលសងរួមតាងដោយ d ។ ឯភាគបែងនៃចំនួនទាំង នោះបង្កើតបានជាស្វីតធរណីមាត្រមួយ តួដំបូងតាងដោយ b ហើយមានរេសុងតាងដោយ q ។ បង្ហាញថាផលបូក n តួដំបូង S_n ផ្ទៀងផ្ទាត់៖

$$S_n = \frac{(a-aq-d)\left(1-q^n\right)+nd(1-q)}{bq^{n-1}(1-q)^2}$$

តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន:

$$S_n = \frac{a}{b} + \frac{a+d}{bq} + \frac{a+2d}{bq^2} + \ldots + \frac{a+(n-1)d}{bq^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{bq^{n-1}}\left\{\left(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}\right)a + \left[q^{n-2}+2q^{n-3}+\ldots+(n-2)q+(n-1)\right]d\right\} \ldots (*)$$

តាមសមីការ (*) យើងអាចរកមេគុណនៃ a គឺស្មើនឹង $\frac{1-q^n}{1-q}$ (1)

តាមសមីការ (*) យើងអាចរកមេគុណនៃ d ដោយ

តាង $A = q^{n-2} + 2q^{n-3} + \ldots + (n-2)q + (n-1)$ នោះ

$$\frac{A}{q} = q^{n-3} + 2q^{n-4} + \ldots + (n-2)q + \frac{(n-1)}{q}$$

$$\Rightarrow A - \frac{A}{q} = q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots + q + 1 - \frac{n-1}{q}$$

$$\Rightarrow A\left(1-\frac{1}{q}\right) = \frac{1-q^{n-1}}{1-q} - \frac{n-1}{q}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{q}{q-1}\,\frac{\left(1-q^{n-1}\right)q-(n-1)(1-q)}{(1-q)q}$$

$$= \frac{n(1-q)-\left(1-q^n\right)}{(1-q)^2} \; (2)$$

ជំនួស (1), (2) ចូល (*)យើងបាន:

$$S_n = \frac{1}{bq^{n-1}}\left[\frac{1-q^n}{1-q}a + \frac{n(1-q)-(1-q^n)}{(1-q)^2}d\right]$$

$$= \frac{(1-q^n)(1-q)a + [n(1-q)-(1-q^n)]d}{\frac{1}{bq^{n-1}}(1-q)^2}$$

$$= \frac{(a-aq-d)(1-q^n)+nd(1-q)}{\frac{1}{bq^{n-1}}(1-q)^2}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{(a-aq-d)(1-q^n)+nd(1-q)}{bq^{n-1}(1-q)^2}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

៥៧. គេដាក់ $n^2 (n \geq 4)$ ចំនួនវិជ្ជមានជា n ជួរដេក និង n ជួរឈរ ។

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\ldots a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\ldots a_{4n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4}\ldots a_{nn} \end{matrix}$$

ដែលចំនួននៅតាមជួរដេកនីមួយៗជាស្វ៊ីតនព្វន្ត និង ចំនួននៅតាមជួរឈរនីមួយៗជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានរេសុងដូចគ្នា ។ គេឲ្យ $a_{24} = 1, a_{42} = \frac{1}{8}, a_{43} = \frac{3}{16}$ ។

គណនា $a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}$

គណនា $a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}$

តាងផលសងរួមនៃជួរដេកដោយ d និង ផលធៀបរួមនៃជួរឈរដោយ q

ផលសងរួមនៃតួទី ៤ គឺ dq^3 យើងបាន:

$$\begin{cases} a_{24} = (a_{11} + 3d)q = 1 \\ a_{42} = (a_{11} + d)q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow a_{11} = d = q = \pm\frac{1}{2} \\ a_{43} = \frac{1}{8} + dq^3 = \frac{3}{16} \end{cases}$$

ដោយ n^2 ជាចំនួនវិជ្ជមាន នោះ

$a_{11} = d = q = \frac{1}{2}$ ចំពោះចំនួន $1 \le k \le n$ នោះ

$$\begin{aligned} a_{kk} &= a_{1k}q^{k-1} \\ &= [a_{11} + (k-1)d]q^{k-1} \\ &= k\frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

យើងបាន:

$$\begin{aligned} S &= a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn} \\ &= \frac{1}{2} + 2\frac{1}{2^2} + 3\frac{1}{2^3} + \ldots + n\frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2^2} + 2\frac{1}{2^3} + \ldots + n\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow S - \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} - n\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}S = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - n\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow S = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n},\ (n \ge 4)$$

ដូចនេះ $a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n},\ (n \ge 4)$

៥៨. តាង $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង៖

$b_n = a_n - a_{n+2}, c_n = a_n + 2a_{n+1} + 3a_{n+2}, \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ ។

បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត លុះត្រាតែបាន $\{c_n\}$ ក៏ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែរ និង $b_n \le b_{n+1}, n \in \mathbb{N}^*$ ។

"$\Rightarrow$" តាងផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $\{a_n\}$ ដោយ d_1 នោះ

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \left(a_{n+1} - a_{n+3}\right) - \left(a_n - a_{n+2}\right) \\ &= \left(a_{n+1} - a_n\right) - \left(a_{n+3} - a_{n+2}\right) = d_1 - d_1 = 0 \end{aligned}$$

គេបាន $b_n \le b_{n+1}, \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

ម្យ៉ាងទៀត៖

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \left(a_{n+1} - a_n\right) + 2\left(a_{n+2} - a_{n+1}\right) + 3\left(a_{n+3} - a_{n+2}\right) \\ &= d_1 + 2d_1 + 3d_1 \\ &= 6d_1 \end{aligned}$$

ដោយ $6d_1$ ជាចំនួនថេរ នោះ $\{c_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

"$\Leftarrow$" តាងផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្ត $\{c_n\}$ ដោយ d_2 ដោយ $b_n \le b_{n+1}$ $n \in \mathbb{N}^*$

និង $c_n = a_n + 2a_{n+1} + 3a_{n+2}$ (1) នោះ $c_{n+2} = a_{n+2} + 2a_{n+3} + 3a_{n+4}$ (2)

ធ្វើ $(1)-(2)$ យើងបាន៖

$$\begin{aligned} c_n - c_{n+2} &= \left(a_n - a_{n+2}\right) + 2\left(a_{n+1} - a_{n+3}\right) + 3\left(a_{n+2} - a_{n+4}\right) \\ &= b_n + 2b_{n+1} + 3b_{n+2} \end{aligned}$$

ម្យ៉ាងទៀត

$$\begin{aligned} c_n - c_{n+2} &= (c_n - c_{n+1}) + (c_{n+1} - c_{n+2}) \\ &= -d_2 + (-d_2) \\ &= -2d_2 \end{aligned}$$

នោះ

$b_n + 2b_{n+1} + 3b_{n+2} = -2d_2 \quad (3)$
$b_{n+1} + 2b_{n+2} + 3b_{n+3} = -d_2 \quad (4)$

ធ្វើ $(4)-(3)$ យើងបាន:

$(b_{n+1} - b_n) + 2(b_{n+2} - b_{n+1}) + 3(b_{n+3} - b_{n+2}) = 0 \quad (5)$

ដោយ $b_{n+1} - b_n \geq 0,\ b_{n+2} - b_{n+1} \geq 0,\ b_{n+3} - b_{n+2} \geq 0$

តាម (5) យើងបាន $b_{n+1} - b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$

សន្មត់ $b_n = d_3$ នោះ $a_n - a_{n+2} = d_3$ ជាចំនួនថេរ

ម្យ៉ាងទៀត:

$$\begin{aligned} c_n &= a_n + 2a_{n+1} + 3a_{n+2} \\ &= 4a_n + 2a_{n+1} - 3d_3 \\ c_{n+1} &= 4a_{n+1} + 2a_{n+2} - 3d_3 \\ &= 4a_{n+1} + 2a_n - 5d_3 \end{aligned}$$

នាំឲ្យ

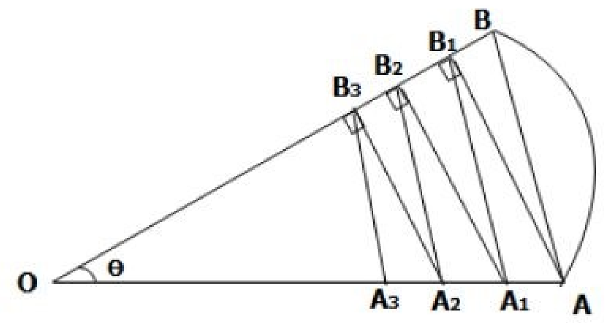
$$c_{n+1} - c_n = 2(a_{n+1} - a_n) - 2d_3$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{2}(c_{n+1} - c_n) + d_3 \\ &= \frac{1}{2}d_3 + d_3 \\ &= \frac{3}{2}d_3 \end{aligned}$$

ដោយ $\frac{3}{2}d_3$ ជាចំនួនថេរ នោះ ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

ដូចនេះ $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត លុះត្រាតែបាន $\{c_n\}$ក៏ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ត្រូវបានបង្ហាញ

៥៩. តាម [រូបខាងក្រោម] តាងកាំនៃមុំ AOB ដោយ R , $\angle AOB = \theta, \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ ។ AB_1 កែងនឹង OB, B_1A_1 ស្របទៅនឹង AB, A_1B_2 កែងនឹង OB , B_2A_2 ស្របទៅនឹង AB ហើយនៅតែបែបនេះ បង្កើតបានស្វ៊ីតពីរគឺ $\{A_n\}$ និង $\{B_n\}$នៅលើ OAនិង OB ។ តាងក្រឡាផ្ទៃនៃ $\Delta ABB_1, \Delta A_1B_1B_2, ..., \Delta A_nB_nB_{n+1}, ...$ ដោយ $S_1, S_2, ..., S_{n+1}, ...$ ។ គណនាផលបូកផ្ទៃក្រឡាទាំងអស់តាងដោយ S ។



គណនាផលបូកផ្ទៃក្រឡាទាំងអស់

តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន:

$$\angle ABO = \frac{\pi - \theta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

សង្កេតទៅលើអង្កត់ ដែលកែងនឹង OBស្កាត់ដោយចំណុច O យើងបាន:

$$AB = 2R\cos\angle ABO$$
$$= 2R\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$$
$$= 2R\sin\frac{\theta}{2}$$

ក្នុងត្រីកោណកែង ΔAB_1B មាន

$$BB_1 = AB\cos\angle ABO$$
$$= 2R\sin\frac{\theta}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$$
$$= 2R\sin^2\frac{\theta}{2}$$
$$= (1 - \cos\theta)R$$
$$AB_1 = 2R\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$$
$$= R\sin\theta$$
$$OB_1 = R - BB_1$$
$$= R\cos\theta$$
$$OB_2 = R\cos^2\theta$$
$$OB_3 = R\cos^3\theta.....$$

នោះ

$$S_{\Delta ABB_1} = \frac{1}{2}BB_1 \cdot AB_1$$
$$= \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)R \cdot R\sin\theta$$
$$= \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)R^2\sin\theta$$
$$= S_1$$

ដោយ $\Delta ABB_1 \sim \Delta A_1B_1B_2 \sim \Delta A_2B_2B_3 \sim \ldots \sim \Delta A_nB_nB_{n+1}$

ម្យ៉ាងទៀត:

$AB \| A_1B_1 \| A_2B_2$ យើងបាន:

$$q = \frac{S_2}{S_1} = \ldots = \frac{A_1B_1^2}{AB^2} = \frac{OB_1^2}{OB^2} = \frac{R^2\cos^2\theta}{R^2} = \cos^2\theta$$

នោះ

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{\frac{1}{2}(1-\cos\theta)R^2\sin\theta}{1-\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2}R^2\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{2}R^2\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}R^2\tan\frac{\theta}{2}$$

ដូចនេះ ផលបូកផ្ទៃក្រឡាទាំងអស់គឺ $S = \frac{1}{2}R^2\tan\frac{\theta}{2}$

៦០. គេឲ្យ $a>0, a\neq 1$ ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។ តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះតាង a ហើយនឹងរេសុងតាងដោយ a ដូចគ្នា ។ បើ $b_n = a_n \log a_n$, $(n\in\mathbb{N}^*)$ ។ តើមានa ដែលគ្រប់តួនៃ $\{B_n\}$តូចជាងតួបន្ទាប់របស់វា? បើមាន រកវ៉ង់នៃ a បើមិនមាន ពន្យល់ហេតុផល ។

រក a

សន្មត់ថាមាន a ដែល $b_n < b_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

តាមសម្មតិកម្ម យើងមាន:

$a_n = a \cdot a^{n-1} = a^n$ នោះ

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \log a_n \\ &= a^n \lg a^n \\ &= na^n \lg a \end{aligned}$$

គេបាន:

$na^n \lg a < (n+1)a^{n+1} \lg a,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

✍ ពេល $a > 1, \lg a > 0 \Rightarrow n < (n+1),\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a > \dfrac{n}{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ នោះ

$\dfrac{n}{n+1} < 1 < a$ តែងតែពិត នោះ $b_n < b_{n+1}$ តែងតែពិតចំពោះ $a > 1,\ n \in \mathbb{N}^*$

✍ ពេល $0 < a < 1,\ \lg a < 0 \Rightarrow n > (n+1)a, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a < \dfrac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

ដោយ $\dfrac{n}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ គឺកើននៅពេលដែល n កើន នោះតម្លៃតូចបំផុតនៃ $\dfrac{n}{n+1}$ គឺ $\dfrac{1}{2}$ ពេល $n = 1$ មានន័យថា $\dfrac{n}{n+1} \geq \dfrac{1}{2}$ តែងតែពិត ពេល $0 < a < \dfrac{1}{2}$

ទាញបាន $b_n < b_{n+1}$ ពិតជានិច្ចពេល $0 < a < \dfrac{1}{2}$ និង $\forall n \in \mathbb{N}^*$

តាមចំនុចទី ១ និង ទី ២ យើងបានសំណុំរូបភាពនៃ a គឺ $0<a<\frac{1}{2}$ ឬ $a>1$

ដូចនេះ សំណុំរូបភាពនៃ a គឺ $0<a<\frac{1}{2}$ ឬ $a>1$

៦១. គេឲ្យស៊ីត $\{a_n\}$, $a_1=0, a_n=\frac{1}{4}(a_{n-1}+3)$ $(n=2,3......)$ ។ រក a_n

រក a_n

តាមសម្មតិកម្ម យើងមាន:

$$a_n=\frac{1}{4}(a_{n-1}+3)$$

$$a_{n-1}=\frac{1}{4}(a_{n-2}+3)$$

នោះ:

$$\times\begin{cases} a_n-a_{n-1}=\frac{1}{4}(a_{n-1}-a_{n-2}) \\ a_{n-1}-a_{n-2}=\frac{1}{4}(a_{n-2}-a_{n-3}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_3-a_2=\frac{1}{4}(a_2-a_1) \end{cases}$$

$$a_n-a_{n-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}(a_2-a_1)$$

$$=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2},\ (n\geq 2)$$

នោះ

$$+\begin{cases} a_n - a_{n-1} = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-2} \\ a_{n-1} - a_{n-2} = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_2 - a_1 = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$a_n - a_1 = \frac{3}{4}\left[1 + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-3} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\right]$$

$$\Rightarrow\ a_n = \frac{3}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1},\quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$$

ដូចនេះ $a_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1},\quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

៦២. គេមានស៊ីត $\{a_n\}$ ដែល $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 2,\ a_n a_{n+1} a_{n+2} \neq 1$ ។ ចំនួនពិតធម្មជាតិមួយ n , $a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$ ។ គណនា

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{1014}$

យើងមាន:

$a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$ នោះ

$a_1 a_2 a_3 a_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ តែដោយ $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 2$ យើងបាន:

$a_4 = 4$

តាមសម្មតិកម្ម យើងមាន:

$$
\begin{aligned}
&a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} \quad (1)\\
&a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} a_{n+4} = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} \quad (2)\\
&(2)-(1):\\
&a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3}(a_n - a_{n+4}) = a_n - a_{n+4}\\
&(a_n - a_{n+4})(a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} - 1) = 0, \qquad a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \neq 1\\
&\Rightarrow a_n - a_{n+4} = 0\\
&\Rightarrow \quad a_n = a_{n+4}\\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{1014} a_i = \frac{1014}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)\\
&\qquad = \frac{1014}{4}(1+1+2+4)\\
&\qquad = 2018
\end{aligned}
$$

ដូចនេះ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{1014} = 2018$

៦៣. បើស្វ៊ីតពីរ $\{a_n\},\{b_n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1 = 1, a_2 = r\ (r>0), b_n = a_n a_{n+1}$ និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានផលធៀបរួម $q\ (q>0)$ ។ តាង $c_n = a_{2n-1} + a_{2n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ ។

ក. រកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{c_n\}$

ខ. បើ $d_n = \dfrac{\log c_{n+1}}{\log c_n}, r = 2^{19.2} - 1, q = \dfrac{1}{2}$ រកបរិមាធៀបនៃតួរបស់ស្វ៊ីតនេះ ។

ក. រក $\{c_n\}$

ដោយ ស៊ីត $\{b_n\}$ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានផលធៀបរួម q នោះ

$\frac{b_{n+1}}{b_n}=q$ តែ $b_n=a_na_{n+1}$ នោះ

$$\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=q$$

$$\frac{a_{n+2}}{a_n}=q, \qquad \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$$

យើងបាន ស៊ីត $a_1, a_3, a_5,...,a_{2n-1},....$និង $a_2,a_4,...,a_{2n},....$ទាំងពីរជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម q នោះ

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= a_1q^{n-1} \\ &= q^{n-1} \\ a_{2n} &= a_2q^{n-1} \\ &= rq^{n-1}, \ \left(n\in\mathbb{N}^*\right) \end{aligned}$$

តែ

$$\begin{aligned} c_n &= a_{2n-1}+a_{2n} \\ &= q^{n-1}+rq^{n-1} \\ &= (1+r)q^{n-1}, \ \left(n\in\mathbb{N}^*\right) \end{aligned}$$

ដូចនេះ $c_n=(1+r)q^{n-1}, \ \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

ខ. រកបរមាធៀបនៃតួរបស់ស៊ីត

ដោយ $c_n=(1+r)q^{n-1}=\left(1+2^{19.2}-1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^{20.2-n}$

នោះ

$$d_n=\frac{\log c_{n+1}}{\log c_n}$$
$$=\frac{\lg 2^{20.2-(n+1)}}{\lg 2^{20.2-n}}$$
$$=1+\frac{1}{n-20.2},\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$$

ពេល $n-20.2>0\Rightarrow n\geq 21\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ នោះ d_n ថយចុះ ពេល n កើនឡើង

នោះ $1<d_n\leq d_{21}=1+\frac{1}{21-20.2}=2.25$ (1)

ពេល $n-20.2<0\Rightarrow n\leq 20\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ នោះ d_n ថយចុះ ពេល n កើនឡើង

នោះ $1>d_n\geq d_{20}=1+\frac{1}{20-20.2}=-4$ (2)

តាម (1),(2) យើងបាន:

$d_{20}\leq d_n\leq d_{21}\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

យើងបាន តួដែលមានតម្លៃធំបំផុតនៃ $\{d_n\}$គឺ $d_{21}=2.25$ និងតួដែលមានតម្លៃតូចបំផុតគឺ $d_{20}=-4$

ដូចនេះ បរិមាធៀបនៃតួរបស់ស្វ៊ីតគឺ $d_{21}=2.25$ និង $d_{20}=-4$

៦៤. គេឲ្យ $c_1=1, c_2=1, c_{n+2}=c_{n+1}+c_n$ ។ រកតួទូទៅ c_n ។

រកតួទូទៅ c_n

តាមសម្មតិកម្ម យើងបានសមីការសម្គាល់គឺ $x^2-x-1=0$ សមីការនេះមានរឹសពីរគឺ

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

សន្មត់ថា $c_n=A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

ពេល $n=1$ នោះ $A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1$

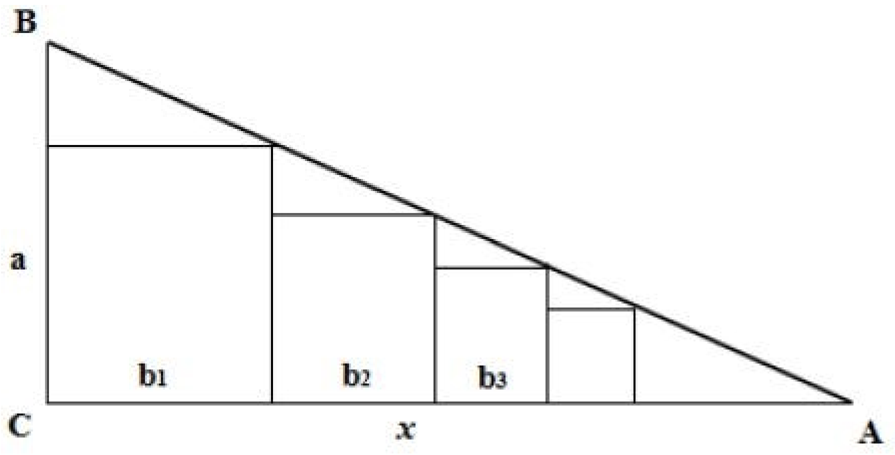
ពេល $n=2$ នោះ $A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=1$

ក្រោយពីដោះស្រាយសមីការទាំងពីរ ខាងលើ យើងបាន:

$A=\frac{1}{\sqrt{5}}, B=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

ដូចនេះ $c_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

៦៥. តាម រូបខាងក្រោម ក្នុង $Rt\Delta ABC$ ($Rt\Delta$ តាងត្រីកោណកែង) មានផ្ទៃក្រឡាការេច្រើនរាប់មិនអស់ តាងដោយ $S_1, S_2, S_3, \ldots$ ហើយ $BC = a$ ។ ផលបូកនៃផ្ទៃក្រឡាការេទាំងអស់នោះស្មើនឹងពាក់កណ្ដាលនៃផ្ទៃក្រឡា $Rt\Delta ABC$ ។ គណនាប្រវែងជ្រុង AC ។



គណនាប្រវែងជ្រុង AC

តាងជ្រុងនៃការេដំបូងដោយ b_1 និងជ្រុងនៃការេផ្សេងទៀតដោយ $b_2, b_3, b_4, \ldots.$ រៀងគ្នា តាង $AC = x$

តាមលក្ខណៈស្រដៀងគ្នា នៃត្រីកោណ យើងបាន:

$$\frac{a-b_1}{a} = \frac{b_1}{x} \Rightarrow b_1 = \frac{ax}{a+x}$$

$$= \frac{a}{\frac{a}{x}+1}$$

$$= \frac{a}{\cot B + 1}$$

$$= \frac{\tan B}{1+\tan B} a$$

ស្រដៀងគ្នាដែរ យើងបាន:

$$b_2 = \frac{\tan B}{1+\tan B} b_1$$

$$= \left(\frac{\tan B}{1+\tan B}\right)^2 a$$

$$b_3 = \left(\frac{\tan B}{1+\tan B}\right)^3 a$$

....

$$b_n = \left(\frac{\tan B}{1+\tan B}\right)^n a$$

នោះ

$$b_1^2 = \left(\frac{\tan B}{1+\tan B} a\right)^2$$

$$b_2^2 = \left[\left(\frac{\tan B}{1+\tan B}\right)^2 a\right]^2$$

$$b_3^2 = \left[\left(\frac{\tan B}{1+\tan B}\right)^3 a\right]^2$$

....

$$b_n^2 = \left[\left(\frac{\tan B}{1+\tan B}\right)^n a\right]^2$$

គេបាន $\{b_n^2\}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ដែល តួដំបូងគឺ $\left(\frac{\tan B}{1+\tan B} a\right)^2$ និងផលធៀបរួមគឺ $\left(\frac{\tan B}{1+\tan B}\right)^2$

តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន:

$\lim_{n\to\infty}\{b_n^2\}=\frac{1}{4}ax$

នោះ៖

$\frac{\left(\frac{\tan B}{1+\tan B}\right)^2 a^2}{1-\left(\frac{\tan B}{1+\tan B}\right)^2}=\frac{1}{4}ax$ តែ $x=a\tan B$ យើងបាន:

$\frac{a^2\cdot\tan^2 B}{1+2\tan B}=\frac{1}{4}a^2\tan B\Rightarrow\tan B=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $AC=\frac{1}{2}a$

៦៦. បើស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង៖ $a_1=1,a_2=r$ $(r>0)$ ។ $\{a_na_{n+1}\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម q $(q>0)$ ។តាង $b_n=a_{2n-1}+a_{2n}$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ ។

ក. រកសំណុំរូបភាពនៃ q ដែល $a_na_{n+1}+a_{n+1}a_{n+2}>a_{n+2}a_{n+3}$ ។

ខ. រក b_n និងគណនា $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}$ ដែល $S_n=b_1+b_2+....+b_n$ ។

ក. រកសំណុំរូបភាពនៃ q

យើងមាន:

$a_1=1,a_2=r\Rightarrow a_1a_2=r,\ \ n=1$

តែ $\{a_na_{n+1}\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានផលធៀបរួម q នោះ

$a_n a_{n+1} = r \cdot q^{n-1} \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

$\Downarrow$

$a_2 a_3 = rq,\ \ n = 2$

$a_3 = q$

$a_3 a_4 = rq^2,\ \ n = 3$

$a_4 = rq$

$a_4 a_5 = rq^3,\ \ n = 4$

$a_5 = q^2 ....$

នោះ $\{a_n\}$ មានតួ $1, r, q,\ rq,\ q^2,\ ,q^{n-1}, rq^{n-1},....$

ដោយ $a_n a_{n+1} + a_{n+1} a_{n+2} > a_{n+2} a_{n+3}$ នោះ

$rq^{n-1} + rq^n > rq^{n+1}$

ដូចនេះ $0 < q < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

ខ. រក b_n និងគណនា $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{S_n}$

ដោយ $b_n = a_{2n-1} + a_{2n}$ $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ និង តាម (ក) យើងបាន:

$b_1 = 1 + r$

$b_2 = (1+r)q$

$b_3 = (1+r)q^2$

....

$b_n = (1+r)q^{n-1}$

នោះ

$$S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$$
$$= (1+r)\left(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1}\right)$$
$$= (1+r)\frac{1-q^n}{1-q}$$

នាំឲ្យ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-q}{(1+r)(1-q^n)}=\begin{cases}(1+r)n, & q=1,\ n\in\mathbb{N}^*\\ \dfrac{1-q}{1+r}, & 0<q<1\\ 0, & q>1\end{cases}$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}=\begin{cases}(1+r)n, & q=1,\ n\in\mathbb{N}^*\\ \dfrac{1-q}{1+r}, & 0<q<1\\ 0, & q>1\end{cases}$

៦៧. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ដែល $a_1=2, a_{n+1}=\frac{a_n^2+3}{2a_n}$ ។ ស្វ៊ីត $\{b_n\}$ដែល $b_n=3-a_n^2,\ (n\in\mathbb{N})$ ។

បង្ហាញថា

ក. $b_n<0$

ខ. $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|<\frac{1}{2}$

គ. $|b_n|<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ (n\geq 2)$ ។

បង្ហាញថា

ក. $b_n<0$

តាមសម្មតិកម្ម យើងដឹងថា $\{a_n\}$ជាស្វ៊ីតវិជ្ជមាន និង

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2+3}{2a_n}$$

$$a_n=\frac{a_{n-1}^2+3}{2a_{n-1}}$$

$$=\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{3}{2a_{n-1}}$$

$$>2\sqrt{\frac{a_{n-1}}{2}\cdot\frac{3}{2a_{n-1}}}$$

$$=\sqrt{3}$$

នោះ

$$b_n=3-a_n^2$$

$$<3-\left(\sqrt{3}\right)=0$$

ដូចនេះ $b_n<0$ ត្រូវបានបង្ហាញ

ខ. $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|<\frac{1}{2}$

ពិនិត្យ:

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|-\frac{1}{2}=\left|\frac{3-a_{n+1}^2}{3-a_n^2}\right|-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3-\left(\frac{a_n^2+3}{2a_n}\right)^2}{3-a_n^2}-\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{a_n^2+3}{4a_n^2}<0$$

ដូចនេះ $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|<\frac{1}{2}$ ត្រូវបានបង្ហាញ

គ. $|b_n| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $(n \geq 2)$

ពិនិត្យ:

$|b_n| = |b_1| \cdot \left|\frac{b_2}{b_1}\right| \cdot \left|\frac{b_3}{b_2}\right| \ldots \left|\frac{b_n}{b_{n-1}}\right|$

$< |-1| \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ldots \cdot \frac{1}{2}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$

ដូចនេះ $|b_n| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $(n \geq 2)$ ត្រូវបានបង្ហាញ

៦៨. តាងផលបូក n ដំបូងនៃស៊ីត $\{a_n\}$ ដោយ S_n ហើយ $a_1 = 1, S_{n+1} = 4a_n + 2, (n \in \mathbb{N}^*)$ ។

ក. តាង $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ បង្ហាញថា $\{b_n\}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. តាង $c_n = \frac{a_n}{2^n}$ បង្ហាញថា $\{c_n\}$ ជាស៊ីតនព្វន្ត ។

គ. គណនា $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ ។

ក. បង្ហាញថា $\{b_n\}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ

ពិនិត្យទំនាក់ទំនង: $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ យើងបាន:

$a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}$ នោះ

$a_{n+1} - 2a_n = 2(a_n - 2a_{n-1})$

តែ $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ យើងបាន:

$b_{n+1} = 2b_n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$

ម្យ៉ាងទៀត:

$$b_1 = a_1 - 2a_1$$
$$= S_2 - 3a_1$$
$$= (4a_1 + 2) - 3a_1$$
$$= a_1 + 2$$
$$= 3$$

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2$$

ដូចនេះ $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែល តួដំបូងស្មើនឹង 3 និងរេសុងស្មើនឹង 2

ខ. បង្ហាញថា $\{c_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

តាម (ក) យើងបាន:

$b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ នោះ $a_{n+1} - 2a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ដោយ $c_n = \frac{a_n}{2^n}$ នោះ

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{2^{n+1}}(a_{n+1} - 2a_n)$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}}(3 \cdot 2^{n-1})$$
$$= \frac{3}{4}$$

តែ $c_1 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}$

យើងបាន $\{c_n\}$ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ដែលមានតួដំបូង $\frac{1}{2}$ និង ផលសងរួម $\frac{3}{4}$

ដូចនេះ $\{c_n\}$ជាស្វ៊ីតនព្វន្តត្រូវបានបង្ហាញ

គ. គណនា

តាម (ខ) យើងបាន:

$$c_n = \frac{1}{2} + (n-1)\frac{3}{4}$$
$$= \frac{3}{4}n - \frac{1}{4}$$

នោះ

$a_n = 2^n c_n$

$= 2^{n-2}(3n-1)$

ពេល $n \ge 2$ នោះ $S_n = 4a_{n-1} + 2 = 4\times 2^{n-3}(3n-4)+2 = 2^{n-1}(3n-4)+2$

ពេល $n=1$ នោះ $S_1 = a_1 = 1$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការខាងលើ

ដូចនេះ $S_n = 2^{n-1}(3n-4)+2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

៦៩. តួដែលជាប់គ្នានៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ គឺ a_n និង a_{n+1} ជាឫសនៃសមីការ $x^2 - c_n x + \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0,\ a_1 = 2$ គណនាផលបូកនៃស្វ៊ីតមិនកំណត់ $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n, \ldots$

គណនាផលបូកនៃស្វ៊ីតមិនកំណត់

ដោយ a_n និង a_{n+1} ជាឫសនៃសមីការនោះ តាមទ្រឹស្តីបទ វ្យែត យើងបាន:

$$\begin{cases} c_n = a_n + a_{n+1} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n = a_n a_{n+1} \end{cases} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow a_{n+1}a_{n+2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \qquad (2)$$

ធ្វើ $\frac{(2)}{(1)}$ យើងបាន:

$$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}+2\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k+1}$$

$$=2\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}+2\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}-a_1$$

ដោយ $a_1=2,\ a_1a_2=\frac{1}{3}\Rightarrow a_2=\frac{1}{6}$ និង $\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{1}{3}$ ហើយនឹងរូបមន្តផលបូកស៊េរីស៊ីតធរណីមាត្រចុះ យើងបាន:

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=2\cdot\frac{2}{1-\frac{1}{3}}+2\cdot\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{3}}-2$$

$$=\frac{9}{2}$$

ដូចនេះ ផលបូកនៃស៊ីតមិនកំណត់ស្មើនឹង $\frac{9}{2}$

៧០. គេឲ្យ $\{a_n\}$ ជាស៊ីតនព្វន្ត និង $\{b_n\}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ និង $a_1=b_1, a_2=b_2, a_1\neq a_2, a_n>0$ $n=1,2,3.....$ ។ បង្ហាញថា $a_n<b_n$ ពេល $n>2$ ។

បង្ហាញថា $a_n<b_n$ ពេល $n>2$

តាង d និង q ជាផលសងរួម និងផលធៀបរៀងគ្នា

ដោយ $a_2=a_1+d,\ b_2=b_1q=a_1q,\ \ a_2=b_2$ យើងបាន:

$$a_1+d=a_1q\Rightarrow q=1+\frac{d}{a_1}$$

ម្យ៉ាងទៀត:

$a_n > 0,\ n = 1,\ 2,.....$ នោះ $d > 0,\ q > 1$ គេបាន:

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= a_1 + (n-1)d - a_1 q^{n-1} \\ &= a_1\left(1 - q^{n-1}\right) + (n-1)d \\ &= a_1(1-q)\left(1 + q + \ldots + q^{n-2}\right) + (n-1)d \\ &< a_1(1-q)(n-1) + (n-1)d \\ &= (n-1)[a_1(1-q) + d] \\ &= (n-1)(a_2 - b_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $a_n < b_n$ ពេល $n > 2$ ត្រូវបានបង្ហាញ

៧១. ចំពោះចំនួនពិតប្រាកដ ស្វ៊ីត $A = (a_1, a_2, ...)$ យើងកំណត់ ΔA ជាស្វ៊ីតដែល $A = (a_2 - a_1, a_3 - a_2, ...)$ ហើយតួទី n របស់វាគឺ $a_{n+1} - a_n$ ។ សន្មត់ផលសងរួមនៃតួជាប់គ្នាទាំងអស់គឺស្មើនឹង 1 និង $a_{19} = a_{92} = 0$ ។ រកតួទី១ (a_1) ។

រកតួទី១ a_1

របៀបទីមួយ:

តាង $b_n = a_{n+1} - a_n$ នោះ $b_n - b_{n-1} = 1$ យើងបាន $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ដែលមានផលសងរួមស្មើនឹង 1 គេទាញបាន: $b_n = b_1 + n - 1 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = b_1 + n - 1$ យើងបាន:

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(b_1 + k - 1)$$
$$= a_1 + (n-1)b_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

តែ $b_1 = a_2 - a_1$ នោះ

$$a_n = (n-1)a_2 - (n-2)a_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

ដោយ $a_{19} = 0$ ពេល $n = 19$ នោះ $18a_2 - 17a_1 = -\frac{18 \times 17}{2}$ (1)

ដោយ $a_{92} = 0$ ពេល $n = 92$ នោះ $91a_2 - 90a_1 = -\frac{91 \times 90}{2}$ (2)

ដោយដោះស្រាយសមីការខាងលើ យើងបាន $a_1 = 819$

ដូចនេះ $a_1 = 819$

របៀបទីពីរ:

តាងតួដំបូងនៃស៊ីត ΔA ដោយ d នោះស៊ីត ΔA មានទម្រង់តួ $(d,\ d+1,\ d+2, \ldots\ldots)$ ដែលមានតួទី n គឺ $d+(n-1)$ នោះតួទី n នៃស៊ីត A គឺ

$$a_n = a_1 + \sum_{k=2}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)$$
$$= a_1 + d + (d+1) + (d+2) + \ldots + (d+n-2)$$
$$= a_1 + (n-1)d + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

នេះបង្ហាញស៊ីត a_n ជាពហុធាដឺក្រេទី២ដែល ត្រូវនឹង n និងមេគុណតួដំបូងរបស់វាគឺ $\frac{1}{2}$ តាម $a_{19} = a_{92} = 0$ យើងបាន:

$$a_n = \frac{1}{2}(n-19)(n-92)$$

នាំឲ្យ

$$a_1 = \frac{1}{2}(1-19)(1-92)$$
$$= 819$$

ដូចនេះ $a_1 = 819$

របៀបទីបី:

តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន $\{a_n\}$ ជាស៊ីតនព្វន្តលំដាប់ពីរ នោះតួទូទៅរបស់វាជាសមីការពហុធារដឺក្រេទីពីរ ត្រូវនឹង n តាម $a_{19} = a_{92} = 0$

យើងតាង: $a_n = A(n-19)(n-92)$ ដែល A ជាមេគុណដែលត្រូវនឹងរក

តាម $a_3 - 2a_2 + a_1 = 1$ នោះ

$$A[(3-19)(3-92) - 2(2-19)(2-92) + (1-19)(1-92)] = 1$$
$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

យើងបាន:

$$a_1 = \frac{1}{2}(1-19)(1-92)$$
$$= 819$$

ដូចនេះ $a_1 = 819$

៧២. គេឲ្យស៊ីត $\{a_n\}$ ដែល $a_1=1, a_1+a_2+\ldots+a_n=n^2a_n, \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ ។
រកតួទូទៅនៃស៊ីត $\{a_n\}$ និងគណនា S_{100} ។

រកតួទូទៅនៃស៊ីត $\{a_n\}$ និងគណនា S_{100}

តាមបម្រាប់ យើងមាន:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=n^2a_n \qquad (1)$$
$$a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}=(n-1)^2a_{n-1} \qquad (2)$$
$$\Rightarrow (1)-(2):$$
$$a_n+(n-1)^2a_{n-1}=n^2a_n$$
$$\Rightarrow a_n=\frac{n-1}{n+1}a_{n-1}=\frac{n-1}{n+1}\frac{n-2}{n}a_{n-2}=\frac{n-1}{n+1}\frac{n-2}{n}\frac{n-3}{n-1}a_{n-3}$$
$$=\ldots.=\frac{n-1}{n+1}\frac{n-2}{n}\frac{n-3}{n-1}\ldots\frac{1}{3}a_1$$
$$=\frac{2}{n(n+1)},\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$$
$$\Rightarrow S_{100}=a_1+a_2+\ldots+a_{100}$$
$$=100^2\frac{2}{100(100+1)}$$
$$=\frac{200}{101}$$

ដូចនេះ $a_n=\dfrac{2}{n(n+1)}, \left(n\in\mathbb{N}^*\right), S_{100}=\dfrac{200}{101}$

៧៣. គេឲ្យផលបូក n នៃស៊ីត $\{a_n\}$ ដោយ $S_n=1+ka_n, k\neq 1, k$ ជាចំនួនថេរ ។
គណនា a_n, S_n ។

គណនា a_n, S_n

ដោយ $S_n = 1 + ka_n$ តែ តាម $S_1 = a_1$ នោះ

$$S_1 = a_1 = 1 + ka_1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{1-k}$$

ហើយ

$$a_2 = S_2 - S_1$$

$$= 1 + ka_2 - a_1$$

$$(1-k)a_2 = 1 - \frac{1}{1-k}$$

$$= -\frac{k}{1-k}$$

$$\Rightarrow \quad a_2 = -\frac{k}{(1-k)^2}$$

ស្រដៀងគ្នាដែរ យើងបាន:

$$a_3 = \frac{k}{(1-k)^3}$$

....

$$a_{n-1} = (-1)^{n-2} \frac{k}{(1-k)^{n-1}}$$

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{k}{(1-k)^n}$$

នោះ

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{-\frac{k}{(1-k)^2}}{\frac{k}{1-k}}$$

$$=-\frac{1}{1-k}$$

$$\frac{a_3}{a_2}=\frac{\frac{k}{(1-k)^3}}{-\frac{k}{(1-k)^2}}$$

$$=-\frac{1}{1-k}$$

.......……..

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}\frac{k}{(1-k)^n}}{(-1)^{n-2}\frac{k}{(1-k)^{n-1}}}$$

$$=-\frac{k}{1-k}$$

នោះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលតួដំបូងស្មើនឹង $\frac{1}{1-k}$ និងរេសុង $-\frac{k}{1-k}$

គេបាន៖

$$a_n=\left(\frac{1}{1-k}\right)\left(-\frac{k}{1-k}\right)^{n-1}$$
$$=(-1)^{n-1}\frac{k^{n-1}}{(1-k)^n},\quad \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$$
$$S_n=1+ka_n$$
$$=1+k(-1)^{n-1}\frac{k^{n-1}}{(1-k)^n}$$
$$=1+(-1)^{n-1}\left(\frac{k}{1-k}\right)^n$$

ដូចនេះ $a_n=(-1)^{n-1}\dfrac{k^{n-1}}{(1-k)^n},\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right),\ S_n=1+(-1)^{n-1}\left(\dfrac{k}{1-k}\right)^n$

៧៤. ប្រវែងជ្រុងទាំងបីនៃ ΔABC មានទម្រង់ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ផលសងរវាងមុំដែលធំបំផុត និងមុំតូចបំផុតស្មើនឹង 90^0 ។ បង្ហាញថា សមាមាត្រនៃជ្រុងទាំង ៣ ស្មើនឹង $\sqrt{7}+1:\sqrt{7}:\sqrt{7}-1$ ។

បង្ហាញ

ដោយប្រវែងជ្រុងទាំងបីនៃ ΔABC មានទម្រង់ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះតាង $a-d,\ a,\ a+d$ និងមុំតូចបំផុតដោយ α មុំដែលធំបំផុតដោយ $90^0+\alpha$

តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន:

$$\frac{a-d}{\sin\alpha}=\frac{a+d}{\sin\left(90^0+\alpha\right)}=\frac{a}{\sin\left(90^0-2\alpha\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{a-d+a+d}{\sin\alpha+\sin\left(90^0+\alpha\right)}=\frac{a}{\sin\left(90^0-2\alpha\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{2a}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{a}{\cos 2\alpha}$$

$$\Rightarrow 2\cos 2\alpha=\sin\alpha+\cos\alpha$$

$$\Rightarrow 2\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=\sin\alpha+\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(45^0-\alpha\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\left(45^0-\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \cos\left(45^0-\alpha\right)=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{14}}{4}$$

តែ

$$\sin\alpha=\sin\left[45^0-\left(45^0-\alpha\right)\right]$$

$$=\sin 45^0\cos\left(45^0-\alpha\right)-\sin\left(45^0-\alpha\right)\cos 45^0$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{14}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{7}-1}{4}$$

$$\sin\left(90^0+\alpha\right)=\cos\alpha=\cos\left[45^0-\left(45^0-\alpha\right)\right]$$
$$=\cos 45^0\cos\left(45^0-\alpha\right)+\sin 45^0\sin\left(45^0-\alpha\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{14}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{7}+1}{4}$$

$$\sin\left(90^0-2\alpha\right)=\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$=\left(\frac{\sqrt{7}+1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{7}-1}{2}\right)^2$$
$$=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

ដូចនេះ សមាមាត្រនៃជ្រុងទាំងបីគឺ $\sqrt{7}+1:\sqrt{7}:\sqrt{7}-1$ ត្រូវបានបង្ហាញ

៧៥. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$, $a_1=5, a_{n+1}=\dfrac{5a_n+6}{a_n+4}$ ។ រកតួទូទៅ a_n ។

រកតួទូទៅ a_n

តាង $x=\dfrac{5x+6}{x+4}$ នោះ $x^2-x-6=0$ គេបាន ចំនុចថេរពីរនៃអនុគមន៍

$f(x)=\dfrac{5x+6}{x+4}$ គឺ $x=3, x=-2$ នោះ

$$a_{n+1}-3=\frac{5a_n+6}{a_n+4}-3$$
$$=\frac{2(a_n-3)}{a_n+4}\quad(1)$$
$$a_{n+1}+2=\frac{5a_n+6}{a_n+4}+2$$
$$=\frac{7(a_n+2)}{a_n+4}\quad(2)$$

ធ្វើ $\frac{(1)}{(2)}$ យើងបាន:

$$\frac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}+2}=\frac{2}{7}\left(\frac{a_n-3}{a_n+2}\right)$$

នោះ $\left\{\frac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}+2}\right\}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន តួដំបូងស្មើនឹង $\frac{a_1-3}{a_1+2}=\frac{2}{7}$ និង ផលធៀបរួមស្មើនឹង $\frac{2}{7}$ យើងបាន:

$$\frac{a_n-3}{a_n+2}=\frac{2}{7}\left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{7}\right)^n$$
$$\Rightarrow\ a_n=\frac{3\cdot 7^n+2^{n+1}}{7^n-2^n}$$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស៊ីតគឺ $a_n=\frac{3\cdot 7^n+2^{n+1}}{7^n-2^n}$

៧៦. គេឲ្យស៊ីត $\{a_n\}$, $a_1=2, a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ ។ បង្ហាញថា $\sqrt{2}<a_n<\sqrt{2}+\frac{1}{n}$ ។

បង្ហាញថា $\sqrt{2} < a_n < \sqrt{2} + \frac{1}{n}$

ដោយ

- $\sqrt{2} < a_1 = 2 < \sqrt{2} + \frac{1}{1}, \quad n = 1$ នោះ $p(1)$ ពិត
- សន្មត់ថា $p(k)$ ពេល $n = k$ នោះ

  $\sqrt{2} < a_k < \sqrt{2} + \frac{1}{k}$
- យើងនឹងបង្ហាញថា វាពិតដល់ $n = k + 1$ នោះ

  $a_{k+1} = \frac{a_k}{2} + \frac{1}{a_k} \geq 2\sqrt{\frac{a_k}{2} \cdot \frac{1}{a_k}} = \sqrt{2}$ ក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ $\frac{a_k}{2} = \frac{1}{a_k}$ យើងបាន

  $a_k = \sqrt{2}$ បើ $a_k > \sqrt{2}$ នោះសញ្ញាសមីការខាងលើមិនពិត នោះ $a_{k+1} > \sqrt{2}$

  ដោយ $a_{k+1} = \frac{a_k}{2} + \frac{1}{a_k} < \frac{\sqrt{2} + \frac{1}{k}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{1}{2k} \leq \sqrt{2} + \frac{1}{k+1}$ នោះ

  $p(k+1)$ ពិត ពេល $n = k + 1$

  ដូចនេះ $\sqrt{2} < a_n < \sqrt{2} + \frac{1}{n}$ ពិត $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

៧៧. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$, $3a_{n+1} + a_n = 4 \quad (n \geq 1), a_1 = 9$ ។ ផលបូក n នៃស្វ៊ីតនេះដោយ S_n និង $|S_n - n - 6| < \frac{1}{125}$ ។ រកចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុត n ។

រកចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុត n

យើងមាន:

$3a_{n+1} + a_n = 4$

$3(a_{n+1} - 1) = -(a_n - 1)$

ពេល $n=1$ យើងបានវាជាឫសនៃសមីការ $3n^2+n=4$

តាង $b_n=a_n-1$ នោះ $b_{n+1}=a_{n+1}-1$

យើងបាន៖

$$b_{n+1}=-\frac{1}{3}b_n,\ b_1=a_1-1=8$$

នោះ $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានតួដំបូង $b_1=8$ និង រេសុង $q=-\frac{1}{3}$

នោះ $b_n=8\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

តាមបម្រាប់ ពិនិត្យ៖

$$S_n-n=(a_1-1)+(a_2-1)+\ldots+(a_n-1)$$

$$=b_1+b_2+\ldots+b_n$$

$$=\frac{8\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$=6-6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

តាម $|S_n-n-6|<\frac{1}{125}$ យើងបាន៖

$$|S_n-n-6|<\frac{1}{125}\Rightarrow 2\cdot 3^{n-1}<\frac{1}{125}\Rightarrow 3^{n-1}>250$$

ដូចនេះ ចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាពគឺ $n=7$

៧៨. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$, $a_1=1, a_2=2, a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n+2$ ។ រកតួទូទៅ a_n ។

រកតួទូទៅ a_n

យើងមាន:

$a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n+2$

$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+2$

តាង $c_n=a_{n+1}-a_n$ នោះ $c_1=1$ និង $c_{n+1}=3c_n+2$ (*)

ចែកសមីការ (*) នឹង 3^n យើងបាន:

$$\frac{c_{n+1}}{3^n}=\frac{c_n}{3^{n-1}}+2\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=\frac{c_n}{3^{n-1}}+2\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

នោះ

$$\frac{c_n}{3^{n-1}}=c_1+\sum_{k}^{n-1}2\times\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$=1+2\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=2-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$\Rightarrow c_n=2\times 3^{n-1}-1$

នោះ

$a_{n+1}=a_n+2\times 3^{n-1}-1$

គេបាន:

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(2\cdot 3^{k-1}-1\right)$$

$$=1+2\times\frac{3^{n-1}-1}{2}-(n-1)$$

$$=3^{n-1}-n+1 \qquad \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$$

ដូចនេះ $a_n = 3^{n-1} - n + 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

៧៩. តាងស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $(2-a_n)\cdot a_{n+1} = 1, n \geq 1$ ។ បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ ។

បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$$

$$a_n = \frac{1}{2-a_{n-1}}$$

$$a_n - 1 = \frac{a_{n-1}-1}{2-a_{n-1}}$$

$$= -1 + \frac{1}{a_{n-1}-1}$$

$$= -2 + \frac{1}{a_{n-2}-1}$$

....

$$= -(n-1) + \frac{1}{a_1 - 1}$$

$$= \frac{1-(n-1)(a_1-1)}{a_1-1}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{a_1-1}{1-(n-1)(a_1-1)} + 1$$

នោះ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_1-1}{1-(n-1)(a_1-1)} + 1\right] = 1$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ ត្រូវបានបង្ហាញ

៨០. បើស៊ីត $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ជាស៊ីតវិជ្ជមានមិនកំណត់ដែល $a_1 = a, b_1 = b$ និង a_n, b_n, a_{n+1} ជាស៊ីតនព្វន្ត ហើយ b_n, a_{n+1}, b_{n+1} ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ក. បង្ហាញថា $\{\sqrt{b_n}\}$ ជាស៊ីតនព្វន្ត ។

ខ. រកតួទូទៅនៃ $\{b_n\}$

គ. ប្រៀបធៀប a_n និង b_n ។

ក. បង្ហាញថា $\{\sqrt{b_n}\}$ ជាស៊ីតនព្វន្ត

តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន:

$$\begin{cases} a_{n+1}^2 = b_n b_{n+1} \\ a_n^2 = b_n b_{n-1} \end{cases} \Rightarrow a_n + a_{n+1} = \sqrt{b_n b_{n-1}} + \sqrt{b_n b_{n+1}} = 2b_n$$

$$= \sqrt{b_{n-1}} + \sqrt{b_{n+1}} = 2\sqrt{b_n}$$

ចែកអង្គនឹងទាំងពីរដោយ $\sqrt{b_n}$

ដូចនេះ $\{\sqrt{b_n}\}$ ជាស៊ីតនព្វន្តត្រូវបានបង្ហាញ

ខ. រកតួទូទៅនៃ $\{b_n\}$

ដោយ

$$b_1 = b \Rightarrow \sqrt{b_1} = \sqrt{b},\ a_2^2 = b_1 b_2,\ a_1 + a_2 = 2b_1$$

$$\Rightarrow b_2 = \frac{(2b-a)^2}{b}$$

ម្យ៉ាងទៀត ដោយ $\{b_n\}$ ជាស៊ីតវិជ្ជមាន និង $a_n < b_n$ នោះ

$$\sqrt{b_2}=\frac{2b-a}{\sqrt{b}}$$

$$\Rightarrow d=\sqrt{b_2}-\sqrt{b_1}$$

$$=\frac{2b-a}{\sqrt{b}}-\sqrt{b}$$

$$=\frac{b-a}{\sqrt{b}}>0$$

$$\sqrt{b_3}=\sqrt{b_1}+(3-1)\frac{b-a}{\sqrt{b}}$$

$$=\frac{3b-2a}{\sqrt{b}}$$

ដោយគ្រប់តួជាចំនួនវិជ្ជមាននោះ

$$\sqrt{b_n}=\frac{nb-(n-1)a}{\sqrt{b}}$$

$$b_n=\frac{[nb-(n-1)a]^2}{b}$$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{b_n\}$ គឺ $b_n=\dfrac{[nb-(n-1)a]^2}{b}$

គ. ប្រៀបធៀប a_n និង b_n

ដោយ $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើន និង $a_n^2=b_nb_{n-1}$ នោះ $b_{n-1}<a_n<b_n$

ដូចនេះ $a_n<b_n$

៨១. គេឲ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ដែល $a_1>0, a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{3+a_n}{2}}$ ។

ក. រករូបភាពនៃ a_1 ដែល $a_{n+1}>a_n$ ចំពោះចំនួនវិជ្ជមាន n មួយចំនួន ។

ខ. បើ $a_1=4, b_n=|a_{n+1}-a_n|,\ (n\in\mathbb{N}^*)$ ។ តាងផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $\{b_n\}$ ដោយ S_n បង្ហាញថា $S_n<\dfrac{5}{2}$ ។

ក. រករូបភាពនៃ a_1

យើងមាន:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{3+a_n}{2}} \\ a_n \ = \sqrt{\dfrac{3+a_{n-1}}{2}} \end{cases} \Rightarrow a_{n+1} - a_n = \sqrt{\dfrac{3+a_n}{2}} - \sqrt{\dfrac{3+a_{n-1}}{2}}$$

$$= \frac{a_n - a_{n-1}}{2\left(\sqrt{\dfrac{3+a_n}{2}} + \sqrt{\dfrac{3+a_{n-1}}{2}}\right)},\ n \geq 2$$

ដោយ ភាគបែងជាចំនួនវិជ្ជមាន នោះ $a_n - a_{n-1} > 0$ យើងបាន:

$$a_n - a_{n-1} > 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow a_2 - a_1 = \sqrt{\frac{3+a_1}{2}} - a_1 > 0$$

តែ $a_1 > 0$ នោះ $0 < a_1 < \dfrac{3}{2}$

ដូចនេះ រូបភាពនៃ a_1 គឺ $a_1 \in \left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$

ខ. បង្ហាញថា $S_n < \dfrac{5}{2}$

តាម (ក) យើងបាន:

$a_n - a_{n-1} < 0$ ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ពេល $a_1 > \dfrac{3}{2}$

ដោយ $a_1 = 4$, $a_n - a_{n-1} < 0$ នោះ

$$\begin{aligned} b_n &= \left|a_{n+1} - a_n\right| \\ &= a_n - a_{n+1} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$
$$= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_n - a_{n+1})$$
$$= 4 - a_{n+1}$$

តែ $a_n - a_{n-1} < 0$ នោះ $a_{n+2} < a_{n+1}$ ដែលត្រូវនឹង $\sqrt{\dfrac{3 + a_{n+1}}{2}} < a_{n+1}$ នោះ

$a_{n+1} > \dfrac{3}{2}$ យើងបាន

$$S_n < 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

ដូចនេះ $S_n < \dfrac{5}{2}$ ត្រូវបានបង្ហាញ

៨២. តាងស៊ីតវិជ្ជមាន $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots\ldots$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ ទំនាក់ទំនង
$\sqrt{a_n a_{n-2}} - \sqrt{a_{n-1} a_{n-2}} = 2a_{n-1} \quad (n \geq 2),\ a_0 = a_1 = 1$ ។ រកតួទូទៅ a_n ។

រកតួទូទៅ a_n

តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន:

$$\sqrt{a_n a_{n-2}} - \sqrt{a_{n-1} a_{n-2}} = 2a_{n-1}$$
$$\sqrt{a_n a_{n-2}} - 2a_{n-1} = \sqrt{a_{n-1} a_{n-2}} \qquad (*)$$

ចែកសមីការ $(*)$នឹង $\sqrt{a_{n-1} a_{n-2}}$ យើងបាន:

$$\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}-2\sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}=1 \qquad (1)$$

$$\sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}-2\sqrt{\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}}=1 \qquad (2)$$

……………………….

$$\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}-2\sqrt{\frac{a_1}{a_0}}=1 \qquad (n-1)$$

យក

$(1)\times 1+(2)\times 2+(3)\times 2^2+\ldots+(n-1)\times 2^{n-2}$ យើងបាន:

$$\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}-2^{n-1}\sqrt{\frac{a_1}{a_0}}=1+2+2^2+\ldots+2^{n-2}$$

$$\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}=1+2+2^2+\ldots+2^{n-2}+2^{n-1}$$

$$=2^n-1$$

$$\Rightarrow\ a_n=\left(2^n-1\right)^2 a_{n-1}$$

$$=\left(2^n-1\right)^2\left(2^{n-1}-1\right)^2 a_{n-2}$$

$$=\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left(2^k-1\right)^2$$

ដូចនេះ $a_n=\begin{cases}1, & n=0\\ \prod_{k=1}^{n}\left(2^k-1\right)^2, & \left(n\in\mathbb{N}^*\right)\end{cases}$

៨៣. គេឲ្យស៊ីត $\{a_n\}$, $a_1 = 2$, ផលបូក n នៃស៊ីតនេះដោយ S_n ។ a_n ជាមធ្យមនព្វន្តនៃ $3S_n - 4$ និង $2 - \frac{5}{2}S_{n-1}$ ចំពោះមួយចំនួននៃ $n \in \mathbb{N}^*$ ។

ក. បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ និង រកតួទូទៅ a_n ។

ខ. បង្ហាញថា $\frac{1}{2}(\log_2 S_n + \log_2 S_{n+2}) < \log_2 S_{n+1}$ ។

គ. បើ $b_n = \frac{4}{a_n} - 1, c_n = \log_2\left(\frac{4}{a_n}\right)^2$ ។ តាង T_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត $\{b_n\}$ និង R_n ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត $\{c_n\}$ ។ តើមានចំនួនគត់វិជ្ជមានណាដែលធ្វើឲ្យ $T_n > R_n$? បើមាន រករូបភាពរបស់ចំនួននោះ បើមិនមានពន្យល់ហេតុផល ។

ក. បង្ហាញថា $\{a_n\}$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ និង រកតួទូទៅ a_n

តាមបម្រាប់ យើងបាន:

$$2a_n = 3S_n - 4 + 2 - \frac{5}{2}S_{n-1}, \quad n \geq 2$$

$$2(S_n - S_{n-1}) = 3S_n - 2 - \frac{5}{2}S_{n-1}$$

$$S_n = \frac{1}{2}S_{n-1} + 2$$

$$S_{n+1} = \frac{1}{2}S_n + 2$$

ដោយ $a_1 = 2$ នោះ:

$$a_2 + 2 = \frac{1}{2} \times 2 + 2$$

$$\Rightarrow a_2 = 1$$

យើងបាន:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{S_{n+1}-S_n}{S_n-S_{n-1}}=\frac{\left(\frac{1}{2}S_n+2\right)-\left(\frac{1}{2}S_{n-1}+2\right)}{S_n-S_{n-1}}=\frac{1}{2}$$

នោះ

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$$

សរុបមក យើងបាន $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុងស្មើនឹង $\frac{1}{2}$

នោះ $a_n=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែល $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$, $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

ខ. បង្ហាញថា $\frac{1}{2}\left(\log_2 S_n+\log_2 S_{n+2}\right)<\log_2 S_{n+1}$

តាម (ក) យើងបាន:

$$S_n=\frac{2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

ដើម្បីបង្ហាញថា $\frac{1}{2}\left(\log_2 S_n+\log_2 S_{n+2}\right)<\log_2 S_{n+1}$ យើងគ្រាន់តែបង្ហាញ

$S_nS_{n+2}<S_{n+1}^2$

ដោយ

$$S_nS_{n+2}=\left[4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]\left[4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]$$

$$=16-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}$$

$$S_{n+1}^2=\left[4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]^2$$

$$=16-4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}$$

នោះ $S_nS_{n+2}<S_{n+1}^2$

ដូចនេះ $\frac{1}{2}(\log_2 S_n+\log_2 S_{n+2})<\log_2 S_{n+1}$ ត្រូវបានបង្ហាញ

គ. រកចំនួន និងរូបភាពនៃចំនួននោះបើមាន

តាម (ក) និង សម្មតិកម្ម យើងបាន:

$$b_n=\frac{4}{a_n}-1$$

$$=\frac{4}{\frac{1}{2^{n-2}}}-1$$

$$=2^n-1$$

និងមាន

$$c_n=\log_2\left(\frac{4}{a_n}\right)^2$$

$$=\log_2(2^n)^2$$

$$=2^n$$

តែ

$$T_n = 2\left(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}\right)-n$$
$$= 2\left(2^n-1\right)-n$$
$$= 2^{n+1}-n-2$$
$$R_n = 2(1+2+3+\ldots+n)$$
$$= n^2+n$$
$$\Rightarrow T_n < R_n,\ \ n=1,\ 2,\ 3$$
$$\Rightarrow T_n > R_n,\ \ n=4,\ 5$$

ដែលមានន័យថា $2^{n+1} > n^2+2n+2$

ពេល $n \ge 6$ នោះ

$$2^{n+1} = (1+1)^{n+1} = c_{n+1}^0 + c_{n+1}^1 + \ldots + c_{n+1}^{n+1}$$
$$> 2\left(c_{n+1}^0 + c_{n+1}^1 + c_{n+1}^2\right)$$
$$= n^2+3n+4$$
$$> n^2+2n+2$$

ដូចនេះ $T_n < R_n,\ \ n=1,\ 2,\ 3$ និង $T_n \ge R_n,\ \ n \ge 4$

៨៤. គេឲ្យស្វីត $\{a_n\}$, $a_k > 0$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ និង $S_n = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right)$ ។ រក a_n និង S_n ។

a_n និង S_n

តាមទំនាក់ទំនង a_n និង S_n យើងបាន:

$a_1 = S_1 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)$

$\Rightarrow a_1 = 1$

$a_2 = S_2 - S_1$

$= \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right) - 1$

$\Rightarrow a_2 = -1 + \sqrt{2}$

$\Rightarrow S_2 = S_1 + a_2$

$= \sqrt{2}$

$\Rightarrow a_3 = S_3 - S_2$

$= \frac{1}{2}\left(a_3 + \frac{1}{a_3}\right) - \sqrt{2}$

$\Rightarrow a_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$

$\Rightarrow S_3 = S_2 + a_3$

$= \sqrt{3}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\Rightarrow a_n = -\sqrt{n-1} + \sqrt{n}$

$S_n = \sqrt{n}, \ (n \in \mathbb{N}^*)$

ដើម្បីកាន់តែច្បាស់ យើងនឹងបង្ហាញវាដោយប្រើអនុមានគណិតវិទ្យា

ពេល $n = 1$ នោះ $a_1 = \sqrt{1} = S_1$ នោះ $p(1)$ ពិត

ឧបមាថា $p(k)$ ពេល $n = k$ មានន័យថា $a_k = -\sqrt{k-1} + \sqrt{k}, \ S_k = \sqrt{k}$

យើងនឹងស្រាយថា វាពិតដល់ $n = k+1$ នោះ $a_{k+1} = -\sqrt{k} + \sqrt{k+1}, \ S_{k+1} = \sqrt{k+1}$

យើងដឹងថា:

$$a_{k+1} = S_{k+1} - S_k$$
$$= \frac{1}{2}\left(a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+1}}\right) - \sqrt{k}$$
$$\Rightarrow 2a_{k+1} = a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+1}} - 2\sqrt{k}$$
$$\Rightarrow a_{k+1}^2 + 2\sqrt{k}a_{k+1} - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \left(a_{k+1} + \sqrt{k}\right)^2 = k + 1$$
$$\Rightarrow a_{k+1} = -\sqrt{k} + \sqrt{k+1}, \quad (a_{k+1} > 0)$$
$$\Rightarrow S_{k+1} = a_{k+1} + S_k$$
$$= \left(-\sqrt{k} + \sqrt{k+1}\right) + \sqrt{k}$$
$$= \sqrt{k+1}$$

ដូចនេះ $a_n = -\sqrt{n} + \sqrt{n+1},\ S_n = \sqrt{n},\ \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

៨៥. គេឲ្យស៊ីត $\{a_n\}$, $a_1 = 0, a_{n+1} = 2a_n + n^2 \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ ។ គណនាផលបូកតួទី n តួដំបូងនៃស៊ីត $\{a_n\}$ តាងដោយ S_n ។

យើងមាន:

$$a_{n+1} = 2a_n + n^2$$
$$a_{n+1} - 2a_n = n^2$$

តែ

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \qquad (1)$

$2S_n = 2a_1 + 2a_2 + ... + 2a_n \qquad (2)$

$\Rightarrow (1) - (2):$

$-S_n = a_1 + (a_2 - 2a_1) + (a_3 - 2a_2) + ... + (a_n - 2a_{n-1}) - 2a_n$

$= 0 + 1^1 + 2^2 + ... + (n-1)^2 - 2a_n$

$\Rightarrow S_n = 2a_n - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}, \ (n \in \mathbb{N}^*)(*)$

តាង $a_n = an^2 + bn + c$

នោះ

$a(n+1)^2 + b(n+1) + c = 2(an^2 + bn + c) + n^2$

$(a+1)n^2 + (b-2a)n - [(a+b) - c] = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$

$\Rightarrow a_{n+1} + \left[(n+1)^2 + 2(n+1) + 3\right] = 2\left(a_n + n^2 + 2n + 3\right)$

$\Rightarrow \frac{a_{n+1} + \left[(n+1)^2 + 2(n+1) + 3\right]}{\left(a_n + n^2 + 2n + 3\right)} = 2,$

$a_1 + 1^2 + 2 \times 1 + 3 = 6, \qquad (n = 1)$

នោះ

$\{a_n + n^2 + 2n + 3\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន តួដំបូងស្មើនឹង 6និងរេសុងស្មើនឹង 2 គេបាន:

$a_n + n^2 + 2n + 3 = 6 \times 2^{n-1}$

$\Rightarrow 2a_n = 6 \times 2^n - 2n^2 - 4n - 6$

យក $2a_n = 6 \times 2^n - 2n^2 - 4n - 6$ ជំនួសចូលសមីការ (*) យើងបាន:

$S_n = 6 \times 2^n - 2n^2 - 4n - 6 - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}, \ (n \in \mathbb{N}^*)$

ដូចនេះ $S_n=6\times 2^n-2n^2-4n-6-\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6},\ (n\in\mathbb{N}^*)$

៨៦. គេឲ្យអនុគមន៍ $f_1(x)=\dfrac{2}{1+x}$ ។ កំណត់ $f_{n+1}(x)=f_1[f_n(x)], a_n=\dfrac{f_n(0)-1}{f_n(0)+2},(n\in\mathbb{N}^*)$ ។

ក. រកតួទូទៅ a_n ។

ខ. បើ $T_{2n}=a_1+2a_2+\ldots+2na_{2n}, Q_n=\dfrac{4n^2+n}{4n^2+4n+1},\ (n\in\mathbb{N}^*)$ ។

ប្រៀបធៀប $9T_{2n}$ និង Q_n ។

ក. រកតួទូទៅ

តាមសម្មតិកម្ម យើងបាន:

$f_1(0)=2,\ a_1=\dfrac{2-1}{2+2}=\dfrac{1}{4},\ f_{n+1}(0)=f_1[f_n(0)]=\dfrac{2}{1+f_n(0)}$

នោះ

$$a_{n+1}=\frac{f_{n+1}(0)-1}{f_{n+1}(0)+2}$$

$$=\frac{\frac{2}{1+f_n(0)}-1}{\frac{2}{1+f_n(0)}+2}$$

$$=\frac{1-f_n(0)}{4+2f_n(0)}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{f_n(0)-1}{f_n(0)+2}$$

$$=-\frac{1}{2}a_n$$

នាំឲ្យ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=-\frac{1}{2}$

គេបាន $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែល $a_1=\frac{1}{4}$ និង $q=-\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $a_n=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ n\in\mathbb{N}^*$

ខ.ប្រៀបធៀប $9T_{2n}$ និង Q_n

យើងមាន

$$T_{2n}=a_1+2a_2+\ldots+2na_{2n}\qquad(1)$$

គុណសមីការ (1) នឹង $-\frac{1}{2}$ យើងបាន:

$$-\frac{1}{2}T_{2n}=\left(-\frac{1}{2}\right)a_1+\left(-\frac{1}{2}\right)2a_2+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)2na_{2n}$$

$$=a_2+2a_3+\ldots+(2n-1)a_{2n}-na_{2n}\qquad(2)$$

យក (1) ដក (2) យើងបាន:

$$\frac{3}{2}T_{2n}=a_1+a_2+\ldots+a_{2n}+na_{2n}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]}{1+\frac{1}{2}}+n\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}+n\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

$$\Rightarrow T_{2n}=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}+n\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

$$\Rightarrow 9T_{2n}=1-\frac{3n+1}{2^{2n}}$$

តែ

$$Q_n=\frac{4n^2+n}{4n^2+4n+1}$$

$$=1-\frac{3n+1}{(2n+1)^2}$$

ពេល $n=1$ នោះ $2^{2n}=4$ និង $(2n+1)^2=9$ យើងបាន $9T_{2n}<Q_n$

ពេល $n=2$ នោះ $2^{2n}=16$ និង $(2n+1)^2=25$ យើងបាន $9T_{2n}<Q_n$

ពេល $n\geq 3$ នោះ $2^{2n}=\left[(1+1)^n\right]^2=\left(c_n^0+c_n^1+c_n^2+\ldots+c_n^n\right)^2>(2n+1)^2$

យើងបាន $9T_{2n}>Q_n$

៨៧. តាង x_1 និង x_2 ជាឫសពិតនៃសមីការ៖ $x^2-6x+1=0$ ។ បង្ហាញថា $x_1^n+x_2^n$ តែងតែជាចំនួនគត់ ប៉ុន្តែមិនមែនជាពហុគុណនៃ 5 សម្រាប់ចំនួនធម្មជាតិ n មួយចំនួន ។

តាមទំនាក់ទំនងវីស ឬទ្រឹស្តីបទវ្យែត យើងបាន:

$$\begin{cases} x_1+x_2=6 \\ x_1x_2=1 \end{cases}$$

តាង $a_n=x_1^n+x_2^n$ នោះ

$$a_1=x_1+x_2=6,\ a_2=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=34$$

ដោយ

$$x_1^n+x_2^n=(x_1+x_2)(x_1^{n-1}+x_2^{n-1})-x_1x_2(x_1^{n-2}+x_2^{n-2})$$

$$\Rightarrow a_n=6a_{n-1}-a_{n-2},\quad n\geq 3$$

តាង b_n ជាសំនល់ពេល a_n ចែកនឹង 5

យើងបាន:

$$b_n=b_{n-1}-b_{n-2}$$

$$b_{n+2}=b_{n+1}-b_n$$

$$\begin{aligned} b_{n+3}&=b_{n+2}-b_{n+1} \\ &=(b_{n+1}-b_n)-b_{n+1} \\ &=-b_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b_{n+6}=b_{n+3}=-b_n$$

នោះ $\{b_n\}$ ជាស៊ីតដែលមានខួប 6

ដោយ $a_1=6\Rightarrow b_1=1,\quad a_2=34\Rightarrow b_2=4$

និង

$$a_3 = x_1^3 + x_2^3$$
$$= (x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right]$$
$$= 198$$
$$\Rightarrow b_3 = 3$$
$$a_4 = x_1^4 + x_2^4$$
$$= \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right] - 2(x_1x_2)^2$$
$$= 1154$$
$$\Rightarrow b_4 = -1$$
$$a_5 = x_1^5 + x_2^5$$
$$= \left(x_1^3 + x_2^3\right)\left(x_1^2 + x_2^2\right) - x_1^3x_2^2 - x_1^2x_2^3$$
$$= \left(x_1^3 + x_2^3\right)\left(x_1^2 + x_2^2\right) - (x_1x_2)^2(x_1 + x_2)$$
$$= 6726$$
$$\Rightarrow b_5 = -4$$
$$a_6 = x_1^6 + x_2^6 = \left(x_1^2\right)^3 + \left(x_2^2\right)^3 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(x_1^4 - x_1^2x_2^2 + x_2^4\right)$$
$$= \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right]\left\{\left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right]^2 - 3(x_1x_2)^2\right\} = 39202$$
$$\Rightarrow b_6 = -3$$

នោះ $b_n \neq 0$ ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិមួយចំនួន n បានន័យថា a_n ចែកមិនដាច់នឹង 5

ដូចនេះ $x_1^n + x_2^n$

តែងតែជាចំនួនគត់ ប៉ុន្តែមិនមែនជាពហុគុណនៃ 5 សម្រាប់ចំនួនធម្មជាតិ n មួយចំនួន

៨៨. គេឲ្យស៊ីត $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_0 = 1, b_0 = 0$ និង

$$\begin{cases} a_{n+1} = 7a_n + 6b_n - 3 & (1) \\ b_{n+1} = 8a_n + 7b_n - 4 & (2) \end{cases} \quad (n = 0,1,2......)$$

បង្ហាញថា $a_n \quad ,(n = 0,1,2......)$ បំពេញការេ ។

បង្ហាញថា $a_n \quad , (n = 0,1,2......)$ បំពេញការេ
តាមសមីការ (1) យើងបាន:
$b_n = \frac{1}{6}(a_{n+1} - 7a_n + 3)$ ជំនួសចូល (2)យើងបាន:
$b_n = \frac{1}{6}(a_{n+2} - 7a_{n+1} - 3) \quad (3)$
តាមសមីការ (1) ដដែលយើងបាន:
$b_{n+1} = \frac{1}{6}(a_{n+2} - 7a_{n+1} + 3) \ (4)$
តាម (3) និង (4) យើងបាន:
$a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n - 6$
$a_{n+2} - \frac{1}{2} = 14\left(a_{n+1} - \frac{1}{2}\right) - \left(a_n - \frac{1}{2}\right)$
ដែល $\frac{1}{2}$ ជាឫសរបស់សមីការ $x = 14x - x - 6$
តាង $d_n = a_n - \frac{1}{2}$ នោះ
$d_0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$d_1 = a_1 - \frac{1}{2}$
$\quad = 7a_0 - 6b_0 - 3 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$
យើងបាន:

$d_{n+2} = 14d_{n+1} - d_n$
ពិនិត្យសមីការ:
$x^2 = 14x - 1$ ជាសមីការដែលមានឫស $x_{1,2} = 7 \pm 4\sqrt{3}$

នោះ

$d_n = c_1\left(7+4\sqrt{3}\right)^n + c_2\left(7-4\sqrt{3}\right)^n$

ដោយ $d_0 = \frac{1}{2},\ d_1 = \frac{7}{2}$ យើងបាន:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{1}{2} \\ 7(c_1+c_2) + 4\sqrt{3}(c_1 - c_2) = \frac{7}{2} \end{cases}$$

ដោយដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ យើងបាន: $c_1 = c_2 = \frac{1}{4}$

នាំឲ្យ

$d_n = \frac{1}{4}\left[\left(7+4\sqrt{3}\right)^n + \left(7-4\sqrt{3}\right)^n\right]$

$$\begin{aligned} a_n &= d_n + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n} + 2\left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2-\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2n}\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]^2 \end{aligned}$$

តាង $\left(2+\sqrt{3}\right)^n = A_n + B_n\sqrt{3}$ ដែល $A_n,\ B_n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ $\left(2-\sqrt{3}\right)^n = A_n - B_n\sqrt{3}$ គេបាន:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{4}\left(A_n + B_n\sqrt{3} + A_n - B_n\sqrt{3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(2A_n)^2 \\ &= A_n^2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ a_n , $(n = 0,1,2......)$ បំពេញការេ ត្រូវបានបង្ហាញ

៨៩. គេឲ្យស៊ីត $\{a_n\}$និង $\{b_n\}$, $a_1=1,a_2=-1,b_1=2,b_2=-3$ និង $a_{n+1}=3a_n-2b_n,b_{n+1}=5a_n-4b_n$ ។ រកតួទូទៅនៃស៊ីត $\{a_n\}$និង $\{b_n\}$ ។

រក $\{a_n\}$និង $\{b_n\}$

តាមសម្មតិកម្ម យើងមាន:

$$\begin{aligned}a_{n+2}&=3a_{n+1}-2b_{n+1}\\&=3a_{n+1}-2(5a_n-4b_n)\\&=3a_{n+1}-2(5a_n+2a_{n+1}-6a_n)\\&=-a_{n+1}+2a_n\end{aligned}$$

តាង $a_{n+2}-r_1a_{n+1}=r_2(a_{n+1}-r_1a_n)$ ដោយធ្វើការផ្ទៀងផ្ទាត់មេគុណ យើងបាន:

$$\begin{cases}r_1+r_2=-1\\r_1r_2=-2\end{cases}$$

នោះ r_1, r_2 ជាឫសរបស់សមីការ $x^2+x-2=0$ នោះ $r_1=1,\ r_2=-2$

នាំឲ្យ $a_{n+2}-r_1a_{n+1}=r_2(a_{n+1}-r_1a_n)$

ក្លាយទៅជា:

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-2(a_{n+1}-a_n)$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{(a_{n+1}-a_n)}=-2$$

$$\Downarrow$$

$$\times\begin{cases}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{(a_{n-1}-a_{n-2})}\\ =\dfrac{(a_{n-1}-a_{n-2})}{a_{n-2}-a_{n-3}}\\ =\dots\\ =\dfrac{a_3-a_2}{a_2-a_1}=-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a_n-a_{n-1}}{a_2-a_1}=(-2)^{n-2}$$

$$\Rightarrow a_n-a_{n-1}=(-2)^{n-1}$$

នោះ

$$+\begin{cases}a_n-a_{n-1}=(-2)^{n-1}\\ a_{n-1}-a_{n-2}=(-2)^{n-2}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_2-a_1=(-2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n-a_1=(-2)+(-2)^2+\dots+(-2)^{n-1}$$

$$\Rightarrow a_n=1+\frac{-2\left[1-(-2)^{n-1}\right]}{1-(-2)}$$

$$=\frac{1-(-2)^n}{3},\quad (n\in\mathbb{N}^*)$$

ធ្វើដូចគ្នាដែរ យើងបាន: $b_n=\dfrac{1+5(-2)^{n-1}}{3},\quad (n\in\mathbb{N}^*)$

ដូចនេះ $a_n = \dfrac{1-(-2)^n}{3}, \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ និង $b_n = \dfrac{1+5(-2)^{n-1}}{3}, \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

៩០. តាង k ជាចំនួនគត់ធំជាង 1 ។ លក្ខខណ្ឌ $a_0 > 0$ និងកំនត់ $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{\sqrt[k]{a_n}}$ សម្រាប់ $n > 0$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^{k+1}}{n^k}$ ។

ដោយ $a_0 > 0$ និង $n > 0$ នោះគេទាញបានយ៉ាងច្បាស់ថា (a_n) ជាស៊ីតកើន ។ សន្មត់ a_n ជាស៊ីតជាប់ ។ នោះស៊ីតនេះត្រូវតែមានលីមីតស្មើនឹងចំនួនថេរមួយតាងដោយ L ។

យើងមាន: $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{\sqrt[k]{a_n}}$ បំពាក់លីមីតលើអង្គទាំងសងខាងយើងបាន

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{a_n}}$$

$$\Leftrightarrow L = L + \frac{1}{\sqrt[k]{L}}$$

នោះ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ បែកសមីការខាងលើនឹង a_n យើងបាន

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

យើងមាន

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{k+1}}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n^{\frac{k+1}{k}}}{n} \right)^k$$

តាងទ្រឹស្តីបទ Cesàro − Stolz យើងបាន

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{\frac{k+1}{k}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^{\frac{k+1}{k}}-a_n^{\frac{k+1}{k}}}{n+1-n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_{n+1}^{k+1}}-\sqrt[k]{a_n^{k+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^{k+1}-a_n^{k+1}}{\left(\sqrt[k]{a_{n+1}^{k+1}}\right)^{k-1}+\left(\sqrt[k]{a_{n+1}^{k+1}}\right)^{k-2}\sqrt[k]{a_n^{k+1}}+....+\left(\sqrt[k]{a_n^{k+1}}\right)^{k-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a_{n+1}-a_n\right)\left(a_{n+1}^k+a_{n+1}^{k-1}a_n+...+a_n^k\right)}{\left(\sqrt[k]{a_{n+1}^{k+1}}\right)^{k-1}+\left(\sqrt[k]{a_{n+1}^{k+1}}\right)^{k-2}\sqrt[k]{a_n^{k+1}}+....+\left(\sqrt[k]{a_n^{k+1}}\right)^{k-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^k+a_{n+1}^{k-1}a_n+...+a_n^k}{\sqrt[k]{a_n}\left[\left(\sqrt[k]{a_{n+1}^{k+1}}\right)^{k-1}+\left(\sqrt[k]{a_{n+1}^{k+1}}\right)^{k-2}\sqrt[k]{a_n^{k+1}}+....+\left(\sqrt[k]{a_n^{k+1}}\right)^{k-1}\right]}$$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង a_n^k យើងបាន

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{\frac{k+1}{k}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^k+\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{k-1}+...+1}{\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\frac{(k+1)(k-1)}{k}}+\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\frac{(k+1)(k-2)}{k}}+...+1}$$

ដោយ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ យើងបាន

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{\frac{k+1}{k}}}{n}=\frac{k+1}{k}\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n^{\frac{k+1}{k}}}{n}\right)^k=\left(\frac{k+1}{k}\right)^k$$

ដូចនេះ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{k+1}}{n^k}=\left(\frac{k+1}{k}\right)^k$

៩១. រករូបមន្តតួទូទៅនៃស៊ីត ៖ 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,.......... ។

តាម តួខាងលើនៃស៊ីតនេះ យើងឃើញថាតួទី m នៃស៊ីតនេះស្មើនឹង n ចំពោះចំនួន m ទាំងនោះផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\frac{n^2-n}{2}+1\le m\le \frac{n^2+n}{2}$$

យើងសង្កេតឃើញថា ស៊ីតនេះកើនឡើងយ៉ាងលឿនតាមរយៈវិសការេ យើងអាចសរសេរ
$n^2-n+2\le 2m\le n^2+n$ បន្ទាប់មកទៀត យើងនឹងដោះស្រាយរក n
យើងអាចបំពាក់ឬសការេចំពោះអង្គទាំងអស់ ហើយដោយ $m\ n$ ជាចំនួនគត់ នោះយើងអាចសរសេរ

$n^2-n+\frac{1}{4}<2m<n^2+n+\frac{1}{4}$ តែ n^2-n ជាចំនួនគូ ដោយបំពាក់វិសការេនៃអង្គទាំងអស់ យើងបាន

$$n-\frac{1}{2}<\sqrt{2m}<n+\frac{1}{2}$$

$$n<\sqrt{2m}+\frac{1}{2}<n+1$$

ក្នុងករណីនេះវាកើតឡើងបាន លុះត្រាតែ $n=\left\lfloor \sqrt{2m}+\frac{1}{2}\right\rfloor$

៩២. រករូបមន្តសង្ខេបសម្រាប់តួទូទៅនៃស៊ីត ដែលត្រូវបានកំណត់ដោយ $x_1=1, x_n=x_{n-1}+n$ បើ n សេស $x_n=x_{n-1}+n-1$ បើ n គូ ។

បើយើងឲ្យសមីការទំនាក់ទំនងជាប់គ្នានៃស៊ីត ដោយ $x_n=x_{n-1}+n$ ចំពោះគ្រប់ n តួនៃស៊ីតស៊ីតនឹងក្លាយទៅជាចំនួនត្រីកោណ $T_n=\frac{n(n+1)}{2}$

បើយើងឲ្យសមីការទំនាក់ទំនងជាប់គ្នានៃស៊ីត ដោយ $x_n = x_{n-1} + n - 1$

តួនៃស៊ីតស៊ីតនឹងក្លាយទៅជា $T_{n-1} + 1 = \dfrac{n^2 - n + 2}{2}$

តាមករណីទាំងពីរ ខាងលើយើងបាន:

$$\frac{n^2 - n + 2}{2} \le x_n \le \frac{n^2 + n}{2}$$

យើងតាង $x_n = \dfrac{P(n)}{2}$ ចំពោះពហុធាមួយចំនួន $P(n) = n^2 + an + b$

តាមពិតទៅយើងគួរ យក $x_n = \left\lfloor \dfrac{P(n)}{2} \right\rfloor$ ព្រោះតួនៃស៊ីតមានការផ្លាស់ប្តូរ (សេស និង គូ)

យើងបាន:

$$x_n = \left\lfloor \frac{n^2 + 1}{2} \right\rfloor$$

តែ

$$\left\lfloor \frac{n^2 + 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n-1)^2 + 1}{2} + \frac{2(n-1) + 1}{2} \right\rfloor$$

$$= \left\lfloor \frac{(n-1)^2 + 1}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor + (n-1)$$

ដែលត្រូវនឹង

$\left\lfloor \dfrac{(n-1)^2 + 1}{2} \right\rfloor + (n-1)$ ពេល n គូ

$\left\lfloor \dfrac{(n-1)^2 + 1}{2} \right\rfloor + n$ ពេល n សេស

ដូចនេះ $\left\lfloor \dfrac{(n-1)^2 + 1}{2} \right\rfloor + (n-1)$ ពេល n គូ និង $\left\lfloor \dfrac{(n-1)^2 + 1}{2} \right\rfloor + n$ ពេល n សេស

៩៣. ស៊ីត $(a_n)_{n\geq 0}$ កំនត់ដោយ $a_0=0, a_1=1, a_2=2, a_3=6$ និង $a_{n+4}=2a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n, \quad n\geq 0$ ។ បង្ហាញថា n ចែកដាច់ a_n គ្រប់ $n\geq 1$ ។

បង្ហាញថា n ចែកដាច់ a_n គ្រប់ $n\geq 1$

តាមបម្រាប់ យើងបាន:

$a_4=12,\ a_5=25,\ \ a_6=48$

ហើយ

$$\frac{a_1}{1}=\frac{a_2}{2}=1,\quad \frac{a_3}{3}=2,\quad ,\ \frac{a_4}{4}=3,\quad \frac{a_5}{5}=5,\quad \frac{a_6}{6}=8$$

ដែលតួនីមួយៗជាតួនៃស៊ីត ហ្វីបូណាស៊ី Fibonacci

យើងសន្មត់ថា $a_n=nF(n)$ បំពោះគ្រប់ $n\geq 1$

តែយើងនឹងបង្ហាញថា វាពិតតាមអនុមានរួមគណិតវិទ្យា យើងបាន:

$$\begin{aligned}
a_{n+4} &= 2(n+3)F_{n+3}+(n+2)F_{n+2}-2(n+1)F_{n+1}-nF_n\\
&= 2(n+3)F_{n+3}+(n+2)F_{n+2}-2(n+1)F_{n+1}-n(F_{n+2}-F_{n+1})\\
&= 2(n+3)F_{n+3}+(n+2)F_{n+2}-(n+2)(F_{n+3}-F_{n+2})\\
&= (n+4)(F_{n+3}+F_{n+2})\\
&= (n+4)F_{n+4}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ n ចែកដាច់ a_n គ្រប់ $n\geq 1$ ត្រូវបានបង្ហាញ

៩៤. ស៊ីត $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots.$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$ ។ សម្រាប់គ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន m,n ដោយ $m \geq n$ ។ បើ $a_1 = 1$ គណនា a_n ។

គណនា a_n

យើងមាន:

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$$

យើងបាន:

$$a_m + a_m = \frac{1}{2}(a_m + a_0), \qquad a_{2m} + a_0 = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2m})$$

គេបាន:

$a_{2m} = 4a_m$ និង $a_0 = 0$ នោះ $a_2 = 4,\ a_4 = 16$ ហើយ

$$a_1 + a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} = 10 \Rightarrow a_3 = 9$$

ដោយ $a_1 = 1,\ a_2 = 4, a_3 = 9,\ a_4 = 16$

យើងសន្មត់ $a_k = k^2,\ \ k \geq 1$

យើងនឹងបង្ហាញថាវាពិតតាម អនុមានរួមគណិតវិទ្យាទៅលើ k

សន្មត់ $a_j = j^2$ ចំពោះគ្រប់ $j < k$

យក $m = k-1,\ \ n = 1$ យើងបាន:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}(a_{2n-2}+a_2)-a_{n-2} \\ &= 2a_{n-1}+2a_1-a_{n-2} \\ &= 2(n^2-2n+1)+2-(n^2-4n+4) \\ &= n^2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $a_n = n^2,\quad \forall n \ge 1$ (Russian Mathematics Olympiad 1995)

៩៥. សង្កេតស៊ីត $(a_n)_n$ និង $(b_n)_n$ កំណត់ដោយ:

$a_0 = 0,\qquad a_1 = 2,\qquad a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1},\qquad n \ge 0$

$b_0 = 0, b_1 = 1,\qquad b_{n+1} = a_n - b_n + b_{n-1},\qquad n \ge 0$ ។

បង្ហាញថា $(a_n)^3 = b_{3n}$ ចំពោះគ្រប់ n ។

បង្ហាញថា $(a_n)^3 = b_{3n}$ ចំពោះគ្រប់ n

តាមសម្មតិកម្ម យើងទាញបាន:

$a_0 = 0,\ a_1 = 2,\ a_3 = 8,\ a_4 = 34,\ a_5 = 144$

ហើយយើងដឹងថាវាត្រូវនឹងចំនួន Fibonacci ត្រង់ $F_0,\ F_3,\ F_6,\ F_9,\ F_{12}$

នោះ តាង $a_n = F_{3n}$ និង $b_n = (F_n)^3$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 0$

យើងនឹងបង្ហាញ $a_n = F_{3n}$ ដោយប្រើអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

ចំពោះ $n=0$ និង $n=1$ សន្មត់យក $a_k = F_{3k}$ ចំពោះ $k \le n$ យើងបាន:

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 4F_{3n} + F_{3n-3}\\ &= 3F_{3n} + F_{3n} + F_{3n-3}\\ &= 3F_{3n} + F_{3n-1} + F_{3n-2} + F_{3n-3}\\ &= 3F_{3n} + F_{3n-1} + F_{3n-1}\\ &= F_{3n} + 2F_{3n} + 2F_{3n-1}\\ &= F_{3n} + 2F_{3n+1}\\ &= F_{3n} + F_{3n+1} + F_{3n+1}\\ &= F_{3n+2} + F_{3n+1}\\ &= F_{3n+3}\\ &= F_{3(n+1)}\end{aligned}$$

តែ

$b_{n+1} = 3b_n + 6b_{n-1} - 3b_{n-2} - b_{n-3},\ \ n \ge 3$ (១)

សមីការ (១) នឹងពិតដោយគ្រាន់តែជំនួស $a_{n+1} = b_{n+1} + b_n - b_{n-1}$ ចំពោះ $(a_n)_n$

ម្យ៉ាងទៀត $b_n = (F_n)^3$ ពិតចំពោះ $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

សន្មត់ $b_k = (F_k)^3$ ចំពោះ $k \le n$ យើងបាន:

$$\begin{aligned}b_{n+1} &= 3(F_n)^3 + 6(F_{n-1})^3 - 3(F_{n-2})^3 - (F_{n-3})^3\\ &= 3(F_{n-1} + F_{n-2})^3 + 6(F_{n-1})^3 - 3(F_{n-2})^3 - (F_{n-1} - F_{n-2})^3\\ &= 8(F_{n-1})^3 + 12(F_{n-1})^2 F_{n-2} + 6F_{n-1}(F_{n-2})^2 + (F_{n-2})^3\\ &= (2F_{n-1} + F_{n-3})^3\\ &= (F_{n+1})^3\end{aligned}$$

ដូចនេះ $(a_n)^3 = b_{3n}$ ចំពោះគ្រប់ n (ប្រឡងអន្តរជាតិ ២០០៣)

៩៦. ស៊ីត u_n ត្រូវបានកំណត់ដោយ:

$u_0=2,\ u_1=\frac{5}{2},\ \ u_{n+1}=u_n\left(u_{n-1}^2-2\right)-u_1,\qquad n\geq 1$ ។ បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់

វិជ្ជមាន n គេបាន : $\lfloor u_n\rfloor=2^{\left[\frac{2^n-(-1)^n}{3}\right]}$ ។

បញ្ជាក់៖ $\lfloor\cdot\rfloor$ សម្គាល់អនុគមន៍ចំនួនគត់ធំបំផុត ។

បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេបាន : $\lfloor u_n\rfloor=2^{\left[\frac{2^n-(-1)^n}{3}\right]}$

តាមបម្រាប់ យើងបាន:

$u_0=1+1,\ u_1=2+\frac{1}{2},\ u_3=2+\frac{1}{2},\ u_4=8+\frac{1}{8}$

សន្មត់ $u_n=2^{x_n}+2^{-x_n}$ ចំពោះស៊ីតចំនួនគត់មួយចំនួន $(x_n)_n$

យើងបាន:

$2^{x_{n+1}}+2^{-x_{n+1}}=2^{x_n+2x_{n-1}}+2^{-x_n-2x_{n-1}}+2^{x_n+2x_{n-1}}+2^{-x_n+2x_{n-1}}-2^{x_1}-2^{-x_1}$

ដែលបង្ហាញថា $x_{n+1}=x_n+2x_{n-1}$ និង $x_n-2x_{n-1}=\pm x_1=\pm 1$

ហើយមានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2-\lambda-2=0$ ដែលមានរឹស 2 និង -1

ដែលការពិត $x_0=0,\ x_1=1$ ហេតុនេះយើងបានតួទូទៅនៃស៊ីតគឺ

$x_n = \dfrac{\left(2^n - (-1)^n\right)}{3}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_n - 2x_{n-1} = (-1)^{n+1}$

ជាចុងក្រោយ យើងបាន: $\lfloor u_n \rfloor = 2^{x_n}$ នោះ $\lfloor u_n \rfloor = 2^{\left[2^n - (-1)^n\right]/3}$

ដូចនេះ $\lfloor u_n \rfloor = 2^{\left[\frac{2^n - (-1)^n}{3}\right]}$ ត្រូវបានបង្ហាញ

(18 International Mathematics Olympiad, 1976, proposed by UK)

៩៧. សង្កេតស៊ីត $(a_n)_n$ និង $(b_n)_n$ កំណត់ដោយ: $a_1 = 3, b_1 = 100, a_{n+1} = 3^{a_n}, b_{n+1} = 100^{b_n}$ ។ រកចំនួនតូចបំផុត m ដែល $b_m > a_{100}$ ។

រកចំនួនតូចបំផុត m

ដោយ $b_m > a_n > b_{m-1}$ វាដូចជាពិបាកបន្តិចដើម្បីបង្ហាញថា $a_n > b_m$ ឬ $3^{a_{n-1}} > 100^{b_{m-1}}$ ឬ $a_{n-1} > (\log_3 100) b_{m-1}$ យើងបាន: $3^{a_{n-2}} > (\log_3 100) 100^{b_{m-2}}$ ដែល

$a_{n-2} > \log_3(\log_3 100) + (\log_3 200) b_{m-2}$

ដែលវិសមភាពមានទម្រង់ជា $a_n > u + vb_n$ ពិតចំពោះគ្រប់ n និងចំនួនថេរ u, v យើងទាញបាន: $a_{n+1} = 3^{a_n} > 3^u \left(3^v\right)^{b_m}$ បើ $3^v > 100$ នោះ $a_{n+1} = 3^u b_{m+1}$ និង បើ $3^u > u + v$ នោះ យើងបាន $a_{n+1} > u + vb_{m+1}$

ចំពោះវិសមភាពដដែលដោយគ្រាន់តែជំនួស m និង n ដោយ $m+1, n+1$ រៀងគ្នា វិសមភាព $3^v > 100$ ពិតចំពោះ $v = 5$ និង $3^u > u + 5$ ពិតចំពោះ $u = 2$ នោះ

$a_n > 2 + 5b_m \Rightarrow a_{n+1} > 2 + 5b_{m+1}$

យើងមាន:

$b_1 = 100,\ a_1 = 3,\ a_2 = 27,\ a_3 = 3^{27},\ 2 + 5b_1 = 502 < 729 = 3^6$

$\Rightarrow a_3 > 2 + 5b_1$

យើងបាន:

$a_n > 2 + 5b_{n-2}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 3$ នោះ $a_n \geq b_{n-2}$

ម្យ៉ាងទៀត $a_n < b_m \Rightarrow a_{n+1} = 3^{a_n} < 100^{b_m} < b_{m+1}$ ដែល $a_2 < b_1$ នាំឲ្យ

$a_n < b_{n-1},\ n \geq 2$ ដូច្នេះ $b_{n-2} < a_n < b_{n-1}$ ដែលនាំឲ្យបាន $m = n - 1$

នោះ $n = 100,\ m = 99$

ដូចនេះ $m = 99$ (Shortlist 21th of IMO , 1979)

៩៨. តាង $p(x) = x^2 - 3x + 2$ បង្ហាញថា ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n មួយចំនួន មានចំនួន a_n និង b_n មួយគត់ ដែលពហុធា $q_n(x) = x^n - a_n x - b_n$ គឺអាចចែកដាច់នឹង $p(x)$ ។

សន្មត់ថា វាពិតគ្រប់ចំនួន n នោះ $q_{n+1}(x) - xq_n(x)$ ត្រូវតែចែកដាច់នឹង $p(x)$

តែ

$$q_{n+1}(x) - xq_n(x) = x^{n+1} - a_{n+1}x - b_{n+1} - x^{n+1} + a_n x^2 + b_n x$$
$$= -a_{n+1}x - b_{n+1} + a_n\left(x^2 - 3x + 2\right) + 3a_n x - 2a_n x + b_n x$$
$$= a_n\left(x^2 - 3x + 2\right) + \left(3a_n + b_n - a_{n+1}\right)x - \left(2a_n + b_{n+1}\right)$$

ហើយវាចែកដាច់នឹង $p(x)$ លុះត្រាតែ $3a_n + b_n - a_{n+1}$ និង $2a_n + b_{n+1}$ ទាំងពីរស្មើនឹងសូន្យ បានន័យថា ស៊ីត a_n និង b_n មានតែមួយគត់ដែលជាដំណោះស្រាយ

ដោយទំនាក់ទំនង $a_1 = 3,\ b_1 = -2,\ a_{n+1} = 3a_n + b_n,\ b_{n+1} = -2a_n$

ដូចនេះ $q_n(x) = x^n - a_n x - b_n$ គឺអាចចែកដាច់នឹង $p(x)$ ចំពោះ n មួយចំនួន

៩៩. រកតួទូទៅនៃស៊ីត ដែល $x_0=3,\ x_1=4$ និង
$(n+1)(n+2)x_n=4(n+1)(n+3)x_{n-1}-4(n+2)(n+3)x_{n-2},\quad n\geq 2$ ។

រកតួទូទៅនៃស៊ីត
យើងមាន:

$$(n+1)(n+2)x_n=4(n+1)(n+3)x_{n-1}-4(n+2)(n+3)x_{n-2}$$

ចែកសមីការនឹង $(n+1)(n+2)(n+3)$ យើងបាន:

$$\frac{x_n}{n+3}=4\frac{x_{n-1}}{n+2}-4\frac{x_{n-2}}{n+1}$$

ស៊ីត $y_n=\dfrac{x_n}{n+3}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$y_n=4y_{n-1}-4y_{n-2}$$

ដែលជាសមីការមានរឹសឌុប គឺមានតម្លៃស្មើនឹង 2

ដោយ $y_n=\dfrac{x_n}{n+3}$ នោះ $y_0=1,\ y_1=1$ យើងបាន: $y_n=2^n-n2^{n-1}$

ទាញបាន: $x_n=(n+3)2^n-n(n+3)2^{n-1}$

ដូចនេះ $x_n=(n+3)2^n-n(n+3)2^{n-1}$

១០០. តាង $(x_n)_{n\geq 0}$ ត្រូវបានកំនត់ដោយទំនាក់ទំនងតួបន្តបន្ទាប់ $x_{n+1}=ax_n+bx_{n-1},\ x_0=0$ ។
បង្ហាញថាសមីការ $x_n^2-x_{n-1}x_{n+1}$ អាស្រ័យលើ b និង x_1 តែមិនអាស្រ័យ a ។

បង្ហាញថាសមីការ $x_n^2-x_{n-1}x_{n+1}$ អាស្រ័យលើ b និង x_1 តែមិនអាស្រ័យ a

កំណត់ $c=\dfrac{b}{x_1}$ រួចសង្កេតទៅលើម៉ាទ្រីស:

$$A=\begin{pmatrix}0 & c\\ x_1 & a\end{pmatrix}\Rightarrow A^n=\begin{pmatrix}cx_{n-1} & cx_n\\ x_n & x_{n+1}\end{pmatrix}$$

ដោយ ប្រើ $\det A^n=(\det A)^n$ យើងបាន:

$$c\left(x_{n-1}x_{n+1}-x_n^2\right)=(-x_1c)^n=(-b)^n$$

គេបាន:

$x_n^2-x_{n+1}x_{n-1}=(-b)^{n-1}x_1$ ដែលមិនអាស្រ័យនឹង a

ចំណាំ: ករណីពិសេស $a=b=1$ នោះវាមានលក្ខណៈជាស្វ៊ីត Fibonacci គឺ

$$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^{n+1}$$

ដូចនេះ សមីការ $x_n^2-x_{n-1}x_{n+1}$ អាស្រ័យលើ b និង x_1 តែមិនអាស្រ័យ a

១០១. ស្វ៊ីត $(a_n)_n$ កំនត់ដោយ $a_1=1$ និង $a_{n+1}=\dfrac{1+4a_n+\sqrt{1+24a_n}}{16},\quad n\geq 1$ ។

រករូបមន្តជាក់លាក់ a_n ក្នុងលក្ខខណ្ឌនៃ n ។

រករូបមន្តជាក់លាក់ a_n ក្នុងលក្ខខណ្ឌនៃ n

តាង $b_n=\sqrt{1+24a_n}$ នោះ $b^2=1+24a_n$ យើងបាន:

$$\begin{aligned}
b_{n+1}^2 &= 1+24a_{n+1} \\
&= 1+\frac{3}{2}\left(1+4a_n+\sqrt{1+24a_n}\right) \\
&= 1+\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{6}\left(b_n^2-1\right)+b_n\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(b_n^2+6b_n+9\right) \\
&= \left(\frac{b_n+3}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

នោះ $b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{3}{2}$ ដែលនេះជាសមីការអ៊ូម៉ូសែនលំដាប់មួយ

បកមកវិញ បើ a, b ជាចំនួនថេរ នោះសមីការ: $f'(x)=af(x)+b$ មានដំណោះស្រាយ

$$f(x)=e^{ax}\int e^{-ax}bdx+ce^{ax}$$

នោះ តួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{b_n\}$គឺ

$$b_n=\frac{1}{2^{n+1}}+3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k},\quad n\geq 1$$

ដោយធ្វើការបូកនូវស៊េរីធរណីមាត្រ យើងបាន: $b_n=3+\frac{1}{2^{n-2}}$

នាំឲ្យ

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{b_n^2-1}{24} \\
&= \frac{1}{3}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}}$ (Proposed by Germany for the 22th IMO, 1981)

១០២. តាង $a = 4k - 1$ ដែល k ជាចំនួនគត់មួយ ។ បង្ហាញថាចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមានមួយចំនួន n ចំនួន: $1 - \binom{n}{2}a + \binom{n}{4}a^2 - \binom{n}{6}a^3 + \cdots$ ចែកដាច់ 2^{n-1} ។

តាង $S_n = 1 - \binom{n}{2}a + \binom{n}{4}a^2 - \binom{n}{6}a^3 + \ldots.$

$u = 1 + i\sqrt{a}$

នោះ

$$S_n = \frac{1}{2}\left(u^n + u^{-n}\right)$$

ដែល $u^n,\ u^{-n}$ ជាឫសរបស់សមីការ $z^2 - 2z + a + 1 = 0$

នោះ វាផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $x_{n+2} = 2x_{n+1} - (a+1)x_n$ ឬយើងទាញបាន:

$S_{n+2} = 2S_{n+1} - (a+1)S_n,\quad n \ge 1$

ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ $S_1 = 1,\ S_2 = 1 - 2k$ គឺចែកដាច់នឹង 2

បើ S_n ចែកដាច់នឹង 2^{n-1} និង S_{n+1} ចែកដាច់នឹង 2^n នោះ

$(a+1)S_n$ និង $2S_{n+1}$ ទាំងពីរគឺចែកដាច់នឹង 2^{n+1}

ទាញបាន S_{n+2} ចែកដាច់នឹង 2^{n+1}

ដូចនេះ $1 - \binom{n}{2}a + \binom{n}{4}a^2 - \binom{n}{6}a^3 + \cdots$ ចែកដាច់ 2^{n-1} ចំពោះ n មួយចំនួន

១០៣. តាង A និង E ជាចំនុចប្រសព្វផ្ទុយគ្នានៃអដ្ឋកោណមួយ ។ កង្កែបមួយក្បាលចាប់ផ្តើមលោតនៅពីមុខចំនុចប្រសព្វ A ។ ពីចំនុចប្រសព្វផ្សេងទៀតនៃអដ្ឋកោណ លើកលែងតែចំនុចប្រសព្វ E កង្កែបបានឈប់ និង នៅទីនោះ ។ តាង a_n ជាចំនួនផ្លូវផ្សេងគ្នាពិតប្រាកដ លោតបាន n ដង ហើយលោតបញ្ចប់នៅត្រង់ចំនុច E ។

បង្ហាញថា៖

$$a_{2n-1}=0,\ a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^{n-1}-y^{n-1}\right),\qquad n=1,2,3,\ldots$$

ដែល $x=2+\sqrt{2},\quad y=2-\sqrt{2}$ ។

បង្ហាញថា $a_{2n-1}=0,\ a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^{n-1}-y^{n-1}\right),\qquad n=1,2,3,\ldots$

សន្មត់យកមុំនៃអដ្ឋកោណដោយ

$A_1=A,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5=E$ និង $A_6,\ A_7,\ A_8$ នៅលំដាប់បន្តគ្នា

យ៉ាងណាមិញ កង្កែបលោតត្រលប់ក្រោយ និងលោតទៅមុខពីដង

នោះ ដើម្បីលោតពី A_1 ទៅកាន់ចំនុចសេសដទៃ ជាពិសេសដើម្បីដល់ A_5

វាបង្កើតចំនួនគូនៃការលោតនោះ នេះបង្ហាញថា $a_{2n-1}=0$

យើងនឹងគណនាចំនួនផ្លូវ ដែលលោតចំនួន $2n$ រៀងគ្នា

សង្កេតចំពោះ $n>2$ បន្ទាប់ពីការលោតពីដង កង្កែបបញ្ចប់ត្រង់ $A_1, A_3,\ A_7$

វាអាចបញ្ចប់នៅចំនុច A_1 តាម $A_2,\ A_8$ ហើយវាអាចបញ្ចប់ត្រង់ $A_3,\ A_7$

គឺស៊ីមេទ្រីជាមួយគ្នា ដែលវាអាចកើតឡើងដំណាលគ្នា

បើយើងយក b_{2n} ជាចំនួនមធ្យោបាយ ពីចំនុច A_3 ទៅដល់ A_5 ចំនួន $2n$ ជំហាន

យើងបានទំនាក់ទំនង:

$$a_{2n}=2a_{2n-2}+2b_{2n-2}$$

ម្យ៉ាងទៀត: បើកង្កែបចាប់ផ្តើមត្រង់ចំនុច A_3 នោះវាអាចត្រលប់មក A_3 តាមពីរវិធី (ដែលអាចកើតឡើងក្នុងពីររបៀបផ្សេងគ្នា) ឬបញ្ចប់នៅចំនុច A_1 (ដែលវាសំខាន់នៅពេល $n>2$)

ដូច្នេះ យើងអាចសរសេរ $b_{2n}=a_{2n-2}+2b_{2n-2}$

តាមទម្រង់វ៉ិចទ័រ ទំនាក់ទំនង

$$\begin{pmatrix} a_{2n} \\ b_{2n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{2n-2} \\ b_{2n-2} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} a_{2} \\ b_{2} \end{pmatrix}$$

ពិនិត្យ សមីការ:

$\lambda^2-4\lambda+2=0$ ដែលមានរឹស $x=2+\sqrt{2}$ និង $y=2-\sqrt{2}$

ស្វ័យគុណទី n នៃម៉ាទ្រីសអាចសរសេរជាទម្រង់

$X\begin{pmatrix} x^n & 0 \\ 0 & y^n \end{pmatrix}X^{-1}$ ចំពោះម៉ាទ្រីស X មួយចំនួន

ហេតុនេះ មានចំនួនថេរ α, β ត្រូវបានគណនាតាមលក្ខខណ្ឌខាងដើម ដែល $a_{2n}=\alpha x^{n-1}+\beta y^{n-1}$ ដើម្បីគណនា α, β ចាំថា $a_2=0, b_2=1$ និងតាមទំនាក់ទំនងសមីការខាងលើ យើងបាន: $a_4=2, b_4=3$

យើងបាន:

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ដូចនោះ $a_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^{n-1}-y^{n-1}\right), \ n\geq 1$

ដូចនេះ $a_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^{n-1}-y^{n-1}\right), \ n\geq 1$ (21st IMO 1979, by Germany)

១០៤. រកគ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង៖
$$f(f(f(n)))+6f(n)=3f(f(n))+4n+2001,\quad n\in\mathbb{N}$$ ។

រកគ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិវិជ្ជមាន n កំណត់ $a_0=n$ និង $a_k=f(f(\ldots(f(n)\ldots)))$

ដែលមានចំនួន k ដង ហើយ $k\ge 1$

ស៊ីត $(a_k)_{k\ge 0}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងលីនេអ៊ែរអ៊ូម៉ូសែន

$$a_{k+3}-3a_{k+2}+6a_{k+1}-4a_k=2001$$

ដំណោះស្រាយពិសេសគឺ $a_k=667k$

ដែលសមីការសម្គាល់អ៊ូម៉ូសែន $a_{k+3}-3a_{k+2}+6a_{k+1}-4a_k=0$ គឺ

$\lambda^3-3\lambda^2+6\lambda-4=0$ ដែលមានឫសពិសេស $\lambda_1=1$ ព្រោះ

$\lambda^3-3\lambda^2+6\lambda-4=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+4)=0$ និងឫសផ្សេងទៀតគឺ $\lambda_{2,3}=1\pm i\sqrt{3}$

នោះ $\lambda_{2,3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់រូបមន្តទូទៅនៃស៊ីត $(a_k)_{k\ge 0}$ យើងបាន:

$$a_k=c_1+c_2 2^k\cos\frac{k\pi}{3}+c_3 2^k\sin\frac{k\pi}{3}+667k,\quad k\ge 0$$

ដែល c_1, c_2, c_3 ជាចំនួនពិតមួយចំនួន

បើ $c_2>0$ នោះ $a_{3(2m+1)}$ ក្លាយជាចំនួនអវិជ្ជមាន ចំពោះចំនួនធំបំផុត m

បើ $c_2<0$ នោះ a_{6m} ក្លាយជាចំនួនអវិជ្ជមាន ចំពោះចំនួនធំបំផុត m

ដោយ $f(n)$ អាចយកតែចម្លើយវិជ្ជមាន នោះសន្មត់យក $c_2=0$

ស្រដៀងគ្នាដែរ យើងយក $c_3=0$ យើងបាន: $a_k=c_1+667k$

ដោយ $a_0=n$ យើងបាន $c_1=n$ នោះ $a_k=n+667k$ ចំពោះគ្រប់ k

នោះ $a_1=f(n)=n+667$ ដែលជាចម្លើយតែមួយគត់ដែលអាចកើតមាន

ដូចនេះ $f(n)=n+667$

១០៥. ស៊ីត $(x_n)_n$ កំនត់ដោយ $x_1=4,\ x_2=19$ និង ចំពោះ $n\ge 2,\ x_{n+1}=\left\lceil \frac{x_n^2}{x_{n-1}} \right\rceil$ ដែលមានន័យថាជាចំនួនតូចបំផុត ធំជាងឬស្មើនឹង $\frac{x_n^2}{x_{n-1}}$ ។ បង្ហាញថា x_n-1 តែងតែជាពហុគុណនៃ 3 ជានិច្ច ។

បង្ហាញថា x_n-1 តែងតែជាពហុគុណនៃ 3 ជានិច្ច

យើងមាន $x_1=4,\ x_2=19$ នោះ $x_3=91,\ x_4=436,\ x_5=2089$

សន្មត់ថា តួទូទៅនៃស៊ីតផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $x_{n+1}=\alpha x_n+\beta x_{n-1}$

ជំនួស $n=2,\ n=3$ យើងបាន: $\alpha=5,\ \beta=-1$ ដែលត្រូវនឹងតួទីប្រាំ

$2089=5\cdot 346-91$ នោះទំនាក់ទំនង ខាងលើពិត យើងនឹងបង្ហាញថាវាពិតឲ្យកាន់តែច្បាស់ជាងនេះទៀត

បើ y_n ជាតួទូទៅនៃទំនាក់ទំនងខាងលើ នោះ $y_n=ar^n+bs^n$ ដែល

$r=\frac{5+\sqrt{21}}{2},\ s=\frac{5-\sqrt{21}}{2},\ rs=1,\ r-s=\sqrt{21}$ និង

$a=\frac{7+\sqrt{21}}{14},\ b=\frac{7-\sqrt{21}}{14},\ ab=1$

នោះ:

$$\begin{aligned}
y_{n+1}-\frac{y_n^2}{y_{n-1}}&=\frac{y_{n+1}y_{n-1}-y_n^2}{y_{n-1}}\\
&=\frac{\left(ar^{n+1}+bs^{n+1}\right)\left(ar^{n-1}+bs^{n-1}\right)-\left(ar^n+bs^n\right)^2}{\left(ar^{n-1}+bs^{n-1}\right)}\\
&=\frac{ab(rs)^{n-1}(r-s)^2}{y_{n-1}}\\
&=\frac{3}{y_n-1}
\end{aligned}$$

ដែល $0<\dfrac{3}{y_n-1}<1$ ចំពោះ $n\ge 2$ ព្រោះ y_{n+1} ជាចំនួនគត់ យើងបាន:

$y_{n+1}=\left\lceil \dfrac{y_n^2}{y_{n-1}} \right\rceil$ នោះ x_n និង y_n ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងខាងលើដូចគ្នា

យើងបាន: $y_n=x_n$

ជាចុងក្រោយ យើងអាចសរសេរ: $(x_{n+1}-1)=5(x_n-1)-(x_{n-1}-1)+3$

ដូចនេះ x_n-1 តែងតែជាពហុគុណនៃ 3 ជានិច្ច (USA IMO)

១០៦. សង្កេតស៊ីតដែលឲ្យដោយ៖

$$a_0=1,\qquad a_{n+1}=\frac{3a_n+\sqrt{5a_n^2-4}}{2},\qquad n\ge 1$$

$$b_0=0,\qquad b_{n+1}=a_n-b_n,\qquad n\ge 1$$

បង្ហាញថា $(a_n)^2=b_{2n+1}$ ចំពោះគ្រប់ n ។

បង្ហាញថា $(a_n)^2=b_{2n+1}$ ចំពោះគ្រប់ n

យើងមាន: $a_{n+1}=\dfrac{3a_n+\sqrt{5a_n^2-4}}{2}$

នោះ $2a_{n+1}-3a_n=\sqrt{5a_n^2-4}$ យើងបាន:

$4a_{n+1}^2-12a_{n+1}a_n+9a_n^2=5a_n^2-4$

$4a_{n+1}^2-12a_{n+1}a_n+4a_n^2=-4$

$a_{n+1}^2-3a_{n+1}a_n+a_n^2=-1$

$a_{n+1}^2-3a_{n+1}a_n+3a_na_{n-1}-a_{n-1}^2=0$

$(a_{n+1}-a_{n-1})(a_{n+1}-3a_n+a_{n-1})=0,\quad n\ge 1$

បើពិនិត្យទៅលើទំនាក់ទំនង យើងឃើញថាស៊ីត $(a_n)_n$ កើនដាច់ខាត

នោះ កត្តាដំបូងមិនស្មើនឹងសូន្យឡើយ យើងទាញបាន:

$a_{n+1}-3a_n+a_{n-1}=0$

$a_{n+1}=3a_n-a_{n-1},\qquad n\geq 2$

សន្មត់យក $a_n=F_{2n+1},\ \ n\geq 1$ ព្រោះវាផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះចំនួនសេសនៃស្វ៊ីត Fibonacci

ស្វ៊ីត $(b_n)_n$ ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងផងដែរ ដោយគ្រាន់តែ

ជំនួស $a_n=b_{n+1}-b_n$ ចូលទៅក្នុងទំនាក់ទំនង $(a_n)_n$ យើងបាន:

$b_{n+1}=2b_n+2b_{n-1}-b_{n-2},\quad n\geq 3$

សន្មត់យក $b_n=(F_n)^2,\ n\geq 1$ ដែលយើងនឹងបង្ហាញថាវាពិតតាមអនុមានគណិតវិទ្យា

បើ $b_k=(F_k)^2,\quad k\leq n$ នោះ

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=2(F_n)^2+2(F_{n-1})^2-(F_{n-2})^2\\&=(F_n+F_{n-1})^2+(F_n-F_{n-1})^2-(F_{n-2})^2\\&=(F_{n+1})^2+(F_{n-2})^2-(F_{n-2})^2\\&=(F_{n+1})^2\end{aligned}$$

ដូចនេះ $(a_n)^2=b_{2n+1}$ ចំពោះគ្រប់ n ត្រូវបានបង្ហាញ

១០៧. សង្កេតស្វ៊ីត $(a_n)_{n\geq 1}$ កំណត់ដោយ $a_1=a_2=1,\ \ a_3=199$ និង $a_{n+1}=\dfrac{1989+a_na_{n-1}}{a_{n-2}}$ ចំពោះ $n\geq 3$ ។ បង្ហាញថាគ្រប់តួនៃស្វ៊ីតនេះជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

យើងមាន $a_{n+1}=\dfrac{1989+a_na_{n-1}}{a_{n-2}}$ យើងបាន

$a_{n+1}a_{n-2}=1989+a_na_{n-1}\Leftrightarrow a_{n+1}a_{n-2}-a_na_{n-1}=1989\quad(1)$

ជំនួស n ដោយ $n-1$

គេបាន

$$a_n a_{n-3} = 1989 + a_{n-1}a_{n-2} \Leftrightarrow a_n a_{n-3} - a_{n-1}a_{n-2} = 1989 \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន

$$a_{n+1}a_{n-2} - a_n a_{n-1} = a_n a_{n-3} - a_{n-1}a_{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+1}a_{n-2} + a_{n-1}a_{n-2} = a_n a_{n-1} + a_n a_{n-3}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{n-2}\left(a_{n+1} + a_{n-1}\right) = a_n\left(a_{n-1} + a_{n-3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n-3}}{a_{n-2}}$$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 4$

✍ បើ n គូ យើងបាន

$$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n-3}}{a_{n-2}} = \cdots = \frac{a_3 + a_1}{a_2} = 200$$

✍ បើ n សេស យើងបាន

$$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n-3}}{a_{n-2}} = \cdots = \frac{a_4 + a_2}{a_3} = 11$$

ដូចនេះ $a_{n+1} = \begin{cases} 200a_n - a_{n-1}, & \text{if } n \text{ is even}^{1} \\ 11a_n - a_{n-1}, & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$

[1] even បានន័យថា គូ odd បានន័យថា សេស

១០៨. ចំពោះ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ស៊្វីត $(a_n)_{n\ge1}$ កំណត់ $a_1=a,\ a_2=b$ និង $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+c}{a_{n-1}}$ ចំពោះគ្រប់ $n\ge2$ ។ បង្ហាញថា តួទាំងអស់នៃស៊្វីតនេះជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបាន លុះត្រាតែ a,b និង $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

យើងមាន

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2+c}{a_{n-1}}$$

យើងបាន

$a_{n+1}a_{n-1}=a_n^2+c\Rightarrow a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2=c\quad(1)$ នោះគេបានគ្រប់តួនៃស៊្វីតនេះគឺជាចំនួនវិជ្ជមាន

ជំនួស n ដោយ $n-1$

$$a_na_{n-2}=a_{n-1}^2+c\Rightarrow a_na_{n-2}-a_{n-1}^2=c\qquad(2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន

$$a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2=a_na_{n-2}-a_{n-1}^2$$

$$a_{n-1}(a_{n+1}+a_{n-1})=a_n(a_n+a_{n-2})$$

$$\Rightarrow\quad\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-2}}{a_{n-1}}$$

ចំពោះគ្រប់ $n\ge3$ គេបាន $b_n=\dfrac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}$ ជាចំនួនថេរ តាងដោយ $b_n=k$

ចំពោះគ្រប់ $n\ge2$ នោះស៊្វីត (a_n) ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $a_{n+1}=ka_n-a_{n-1}$

ចំពោះគ្រប់ $n\ge2$ និង $a_3=\dfrac{b^2+c}{a}=kb-a$ យើងទាញបាន

$$k=\frac{a^2+b^2+c}{ab}$$

បើ a,b និង k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន គេទាញបាន a_n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$ ។ ផ្ទុយមកវិញ បើ a_n ជាចំនួន
គត់វិជ្ជមាន ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$ នោះ a,b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង $k = \dfrac{a_3 + a}{b}$ ជា
ចំនួនសនិទាន ។ តាង $k = \dfrac{p}{q}$ ដែល p និង q
ជាចំនួនបឋមវិជ្ជមានរវាងគ្នា ។ តែយើងចង់បង្ហាញថា $q = 1$
សន្មត់យក $q > 1$ ពីទំនាក់ទំនងខាងលើយើងបាន:

$$q(a_{n+1} + a_{n-1}) = pa_n$$

តាមសមីការនេះ យើងបាន q ចែកដាច់នឹង a_n ចំពោះគ្រប់ $n \ge 2$ ។ យើងនឹងបង្ហាញ
តាមវិបារកំណើន ទៅលើ s និង q^s
ចែកដាច់នឹង a_n ចំពោះគ្រប់ $n \ge s+1$ ។ យើងឃើញថា វាពិតចំពោះ $s = 1$ ។
សន្មត់ q^{s-1} ចែកដាច់នឹង a_n ចំពោះគ្រប់ $n \ge s$
យើងបាន

$$a_{n+2} = \frac{p}{q}a_{n+1} - a_n \Leftrightarrow \frac{a_{n+2}}{q^{s-1}} = p\frac{a_{n+1}}{q^s} - \frac{a_n}{q^{s-1}}$$

បើ $n \ge s$ នោះ q^{s-1} ចែកដាច់នឹង a_n និង a_{n+2} គេទាញបាន q^s ចែកដាច់នឹង a_{n+1} ។
យើងបាន q^s ចែកដាច់នឹង a_n ចំពោះគ្រប់ $n \ge s+1$ ។
ដូច្នេះ

$$a_{s+2} = \frac{a_{s+1}^2 + c}{a_s} \Rightarrow c = a_s a_{s+2} - a_{s+1}^2$$

ដែលជំនួស c គឺចែកដាច់ដោយ $q^{2(s-1)}$ ចំពោះគ្រប់ $s \ge 1$ ព្រោះ $c > 0$ វាបារកំណើន
ត្រូវបានស្រាយ
ដូចនេះ តួទាំងអស់នៃស្វ៊ីតនេះជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ត្រូវបានបង្ហាញ ។

១០៩. សង្កេតស៊ីត $(a_n)_{n\geq 0}$ ដែល $a_0=4,\ a_1=22$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$, $a_n=6a_{n-1}-a_{n-2}$ បង្ហាញថា មានស៊ីតចំនួនគត់វិជ្ជមាន $(x_n)_{n\geq 0},\ (y_n)_{n\geq 0}$ ដែល $a_n=\dfrac{y_n^2+7}{x_n-y_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ។

តាមសម្មតិកម្ម a_n ជាចំនួនសេសគត់វិជ្ជមាន ចំពោះគ្រប់ n នោះស៊ីត $(a_n)_{n\geq 0}$ ជាស៊ីតកើន ។
យើងមាន

$$a_n=6a_{n-1}-a_{n-2}\Leftrightarrow a_n-a_{n-1}=5(a_{n-1}-a_{n-2})+4a_{n-2}$$

កំណត់យក

$$x_n=\frac{a_n+a_{n-1}}{2},\qquad y_n=\frac{a_n-a_{n-1}}{2}$$

និង $x_0=3,\ y_0=1$ តាមនេះ តេបាន

$$x_n=3x_{n-1}+4y_{n-1},\quad y_n=2x_{n-1}+3y_{n-1}$$

យើងមាន $a_n=x_n+y_n$ នោះយើងនឹងបង្ហាញ

$$x_n+y_n=\frac{y_n^2+7}{x_n-y_n}\Rightarrow x_n^2=2y_n^2+7$$ ចំពោះគ្រប់ n

យើងនឹងបង្ហាញតាមវិចារកំណើន
ចំពោះ $n=0$ សមីការពិត $9=9$
ជំនួស n ដោយ $n-1$ នោះ
$x_{n-1}^2=2y_{n-1}^2+7$ ពិត នោះ

$$x_n^2-2y_n^2-7=(3x_{n-1}+4y_{n-1})^2-2(2x_{n-1}+3y_{n-1})^2-7$$
$$=x_{n-1}^2-2y_{n-1}^2-7=0$$

ដូចនេះ $a_n=\dfrac{y_n^2+7}{x_n-y_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 0$ ត្រូវបានស្រាយ ។

១១០.(Poland) ស៊ីតនៃចំនួនពិត $a_0, a_1, a_2, \ldots$ កំណត់ដោយ:

$$a_0 = -1, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0 \;,\; n \geq 1 \text{ ។}$$

បង្ហាញថា $a_n > 0, \quad n \geq 1$ ។

យើងនឹងបង្ហាញតាមវិបារកំណើន

✍ ចំពោះ $n = 1$ យើងបាន

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

✍ ចំពោះ $n \geq 1$ សន្មត់

$$a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$$

សរសេររូបមន្តត្ទី n និង $n+1$ គេបាន

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+1} = 0 \text{ និង } \sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{n-k+2} = 0$$

ដោយធ្វើផលដក យើងបាន៖

$$0 = (n+2)\sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{n-k+2} - (n+1)\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+1}$$

$$= (n+2)a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n+2}{n-k+2} - \frac{n+1}{n-k+1}\right) a_k$$

ដោយ មេគុណនៃ a_0 បាត់នោះ:

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n+1}{n-k+1} - \frac{n+2}{n-k+2}\right) a_k$$

$$= \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(n-k+1)(n-k+2)} a_k$$

មេគុណ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ វិជ្ជមាន នោះ $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$

ទាញបាន $a_{n+1} > 0$

ដូចនេះ $a_n > 0, \quad n \geq 1$

១១១. (ប៉ូឡូញ) តាង $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ដែល $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2 = 1$ ។ បង្ហាញថា៖

$$a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + \dots + a_{100}^2 a_1 < \frac{12}{25}$$ ។

តាង $S = \sum_{k=1}^{100} a_k^2 a_{k+1}$ យើងឃើញថាសន្ទស្សន៍មេគុណគឺ 100

យើងកំណត់ $a_{101} = a_1, a_{102} = a_2$

អនុវត្តន៍វិសមភាព $Cauchy - Schwarz$ ចំពោះស៊ីត (a_{k+1}) និង $(a_k^2 + 2a_{k+1}a_{k+2})$ នោះ តាមវិសមភាព $AM - GM$ ចំពោះចំនួន a_{k+1}^2 និង a_{k+2}^2

$$(3S)^2 = \left(\sum_{k=1}^{100} a_{k+1}\left(a_k^2 + 2a_{k+1}a_{k+2}\right)\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{100} a_{k+1}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{100}\left(a_k^2 + 2a_{k+1}a_{k+2}\right)^2\right) \qquad (1)$$

$$= 1 \cdot \sum_{k=1}^{100}\left(a_k^2 + 2a_{k+1}a_{k+2}\right)^2 = \sum_{k=1}^{100}\left(a_k^4 + 4a_k^2 a_{k+1}a_{k+2} + 4a_{k+1}^2 a_{k+2}^2\right)$$

$$\le \sum_{k=1}^{100}\left(a_k^4 + 2a_k^2\left(a_{k+1}^2 + a_{k+2}^2\right) + 4a_{k+1}^2 a_{k+2}^2\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{100}\left(a_k^4 + 6a_k^2 a_{k+1}^2 + 2a_k^2 a_{k+2}^2\right)$$

អនុវត្តន៍តាម

$$\sum_{k=1}^{100}\left(a_k^4 + 2a_k^2 a_{k+1}^2 + 2a_k^2 a_{k+2}^2\right) \le \left(\sum_{k=1}^{100} a_k^2\right)^2, \quad \sum_{k=1}^{100} a_k^2 a_{k+1}^2 \le \left(\sum_{i=1}^{50} a_{2i-1}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{50} a_{2j}^2\right)$$

យើងបាន:

$$(3S)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{100} a_k^2\right)^2 + 4\left(\sum_{i=1}^{50} a_{2i-1}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{50} a_{2j}^2\right) \le 1 + \left(\sum_{i=1}^{50} a_{2i-1}^2 + \sum_{j=1}^{50} a_{2j}^2\right)^2 = 2$$

$$\Rightarrow S \le \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.4714 < \frac{12}{25} = 0.48$$

ដូចនេះ $a_1^2a_2+a_2^2a_3+\ldots+a_{100}^2a_1<\dfrac{12}{25}$ ត្រូវបានបង្ហាញ

១១២. (សិស្សពូកែថ្នាក់ស្រុក២០១៨) គណនាផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីត:

$$\ln\frac{1}{e},\ln\frac{1}{e^{-2}},\ln\frac{1}{e^{-7}},\ln\frac{1}{e^{-14}},\ln\frac{1}{e^{-23}},\ln\frac{1}{e^{-34}},\ln\frac{1}{e^{-47}},\ldots\ldots$$

យើងអាចសរសេរទៅជា:

$$\ln e^{-1},\ln e^{2},\ln e^{7},\ln e^{14},\ln e^{23},\ln e^{34},\ln e^{47},\ldots.$$

$$-1,\ 2,\ 7,\ 14,\ 23,\ 34,\ 47,\ldots\ldots$$

តាង $(a_n):-1,\ 2,\ 7,\ 14,\ 23,\ 34,\ 47,\ldots\ldots$

និង $b_n=a_n-a_{n-1}$

យើងបាន៖

$$b_1=3,\ b_2=5,\ b_3=7,\ b_4=9,\ldots\ldots$$

យើងឃើញថា ស៊ីត (b_n)ជាស៊ីតនព្វន្ត ដែលតួទីមួយ $b_1=3$ និង $d=2$

នោះ

$$S_{(b_n)}=\frac{n}{2}[2b_1+(n-1)d]$$
$$=\frac{n}{2}[2\times3+(n-1)2]$$
$$=n(n+2)$$

តាមទំនាក់ទំនងកំណើនលំដាប់ទីមួយ យើងបាន៖

$$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}b_n+a_1$$
$$=(n-1)(n+1)-1$$
$$=n^2-2$$

ពិនិត្យ៖

$a_k = k^2 - 2$ ដោយ $k = \overline{1,n}$

យើងបាន៖

$$+\begin{cases} a_1 = 1^2 - 2 \\ a_2 = 2^2 - 2 \\ a_3 = 3^2 - 2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_n = n^2 - 2 \end{cases}$$

$$S_{(a_n)} = \left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right) - 2n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2n$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 - 11n}{6}$$

ដូចនេះ ផលបូក n នៃស៊ីតគឺ $S = \dfrac{2n^3 + 3n^2 - 11n}{6}$

១១៣. (សិស្សពូកែថ្នាក់ស្រុក២០១៨) ស៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1 = 2, \sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 a_n$ ។

ក. កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង a_{n+1} និង a_n

ខ. គណនា a_{2018}

ក. កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង a_{n+1} និង a_n

យើងមាន

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 a_n \Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = n^2 a_n \quad (*)$$

នោះ

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} = (n+1)^2 a_{n+1} \Leftrightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} = (n+1)^2 a_{n+1} \quad (**)$$

យក (**) ជក (*) យើងបាន៖

$$a_{n+1} = (n+1)^2 a_{n+1} - n^2 a_n$$

$$n^2 a_n = (n^2 + 2n) a_{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{n^2 + 2n} = \frac{n}{n+2}$$

ដូចនេះ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+2}$

ខ. គណនា a_{2018}

យើងមាន

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+2}, \qquad n \le \mathbb{N}^*$$

នោះ

$$\times\begin{cases} \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3} \\ \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{4} \\ \frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{5} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n+2} \end{cases}$$

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{1 \times 2}{n(n+1)} \Rightarrow a_n = \frac{2a_1}{n(n+1)} = \frac{4}{n(n+1)}$$

យើងបាន

$$a_{2018}=\frac{4}{2018(2018+1)}=\frac{4}{2018\times 2019}$$

ដូចនេះ $a_{2018}=\dfrac{4}{2018\times 2019}$

១១៤. (សិស្សពូកែថ្នាក់ស្រុក២០១៨) គេឲ្យស៊ីតចំនួនពិត (u_n) មួយដែលមានលំដាប់តួ:

$$u_1=\frac{\sqrt{2}}{2},u_2=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\dots,u_n=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\ (n\text{ រ៉ាឌីកាល់})$$

គណនា $S_n=\ln u_1+\ln u_2+\dots+\ln u_n$ ។

ដោយ $u_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{4}=\cos\dfrac{\pi}{2^2}$

$$u_2=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{2^3}$$

គេទាញបាន: $u_n=\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

យើងបាន៖

$$S_n=\ln(u_1\cdot u_2\cdot u_3\cdots u_n)$$
$$=\ln\left(\cos\frac{\pi}{2^2}\cdot\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

ពិនិត្យ៖

$$\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\frac{\sin a}{\sin\frac{a}{2}}$$

យើងបាន៖

$$S_n = \ln\left(\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2^2}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2^2}}{\sin\frac{\pi}{2^3}}\cdot\dots\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\right)$$

ដូចនេះ $S_n = \ln\left(\frac{1}{2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\right)$

១១៥. (សិស្សពូកែទូទាំងខេត្តព្រៃវែង២០១៨) (U_n) ជាស៊ីតមួយកំណត់ដោយ $\forall n \in \mathbb{N}$

$U_{n+2} = 18U_{n+1} - 45U_n$ ។

ក. ចូរកំណត់តម្លៃ x ដែលនាំឲ្យ $V_n = U_{n+1} - xU_n$ ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ. គេឲ្យ $V_1 = a$ ជាតួទី១ នៃស៊ីត (V_n) ។ កំណត់តួទី n នៃស៊ីត (V_n) ចំពោះតម្លៃ x ដែលរកឃើញជាអនុគមន៍នៃ a និង n ។

ក. កំណត់ x

យើងមាន:

$$U_{n+2} = 18U_{n+1} - 45U_n$$
$$U_{n+2} - 15U_{n+1} = 3U_{n+1} - 45U_n$$
$$= 3(U_{n+1} - 15U_n)$$

តាង $V_n = U_{n+1} - 15U_n$ នោះ $V_{n+1} = 3V_n$ នោះ (V_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានរេសុងស្មើនឹង 3

តែ $V_n = U_{n+1} - xU_n$ និង $V_n = U_{n+1} - 15U_n$

នោះ $x = 15$

ដូចនេះ $x = 15$

ខ. កំណត់តួទី n នៃស៊ីត (V_n)

ដោយស៊ីត (V_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រ និង $V_1 = a$ យើងបាន:

$$V_n = V_1 \cdot q^{n-1}$$
$$= 3^{n-1}a$$

ដូចនេះ $V_n = 3^{n-1}a$

១១៦. (a_n) ជាស៊ីតនៃចំនួនពិតកំណត់ដោយ $a_1 = 1$ និង $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1+a_n}} + a_n$ ។

កំណត់តួទី 2018 នៃស៊ីត (a_n) ។

(ប្រឡងសិស្សពូកែប្រចាំខេត្តកំពត២០១៨)

កំណត់តួទី 2018 នៃស៊ីត (a_n)

យើងមាន:

$a_1 = 1 = \sqrt{1}$

$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1+a_n}} + a_n$

នោះ

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{1+1+a_1}} + a_1$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}+1} + 1$$
$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + 1$$
$$= \sqrt{2}$$

ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k$ យើងបាន

$a_k = \sqrt{k}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n = k+1$ នោះ

$a_{k+1} = \sqrt{k+1}$

យើងមាន

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}+a_k} + a_k$$

នោះ

$$a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+a_k} + a_k$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} + \sqrt{k}$$
$$= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k+1-k} + \sqrt{k}$$
$$= \sqrt{k+1}$$

ហេតុនេះ $a_{k+1} = \sqrt{k+1}$ ពិត

នោះ $a_n = \sqrt{n}$

ដូចនេះ $a_{2018} = \sqrt{2018}$

១១៧. កំណត់តួទី n ដែលកំណត់ដោយ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ $a_1 = 5$ និង $a_n = 2a_{n-1} - n$ ។
(ប្រឡងសិស្សពូកែប្រចាំខេត្តកំពត២០១៨)

កំណត់តួទី n

យើងមាន:

$a_1 = 5$ និង $a_n = 2a_{n-1} - n$

នោះ

$a_2 = 2\times 5 - 2 = 8$

$a_3 = 2\times 8 - 3 = 13$

$a_4 = 2\times 13 - 4 = 22$

$a_5 = 2\times 22 - 5 = 39$

$a_6 = 2\times 39 - 6 = 72....$

តាង $b_n = a_{n+1} - a_n$

យើងបាន:

$b_1 = 8 - 5 = 3$

$b_2 = 13 - 8 = 5$

$b_3 = 22 - 13 = 9$

$b_4 = 39 - 22 = 17$

$b_5 = 72 - 39 = 33.....$

តាង $c_n = b_{n+1} - b_n$

យើងបាន:

$c_1 = 5 - 3 = 2$

$c_2 = 9 - 5 = 4$

$c_3 = 17 - 9 = 8$

$c_4 = 33 - 17 = 16...$

យើងសង្កេតឃើញថា ស្វ៊ីត (c_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ដែលមានផលធៀបរួម $q = 2$ និង $c_1 = 2$

នោះ $c_n = 2\times 2^{n-1} = 2^n$

យើងបាន:

$$b_n=\sum_{k=1}^{n-1}(c_k)+b_1$$
$$=2^n-2+3$$
$$=2^n+1$$

នោះ

$$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}b_k+a_1$$
$$=2^n-2+(n-1)+5$$
$$=2^n+n+2$$

ដូចនេះតួទី n នៃស៊ីតគឺ $a_n=2^n+n+5$

១១៨. គេឲ្យស៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1=1$ និង $(1-4a_{n+1})(4a_n+3)=3, n\geq 1$ ។

គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

(សិស្សពូកែទូទាំងខេត្តកណ្តាល ២០១៨)

គណនា a_n

យើងមាន

$(1-4a_{n+1})(4a_n+3)=3$

$4a_n+3-16a_{n+1}a_n-12a_{n+1}=3$

$a_n-4a_{n+1}a_n-3a_{n+1}=0$

$\frac{1}{a_{n+1}}-4-\frac{1}{a_n}=0$

$\left(\frac{1}{a_{n+1}}+2\right)=3\left(2+\frac{1}{a_n}\right)$

តាង $b_n=\left(2+\frac{1}{a_n}\right)$

នោះ $b_{n+1}=\left(2+\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

យើងបាន:

$b_{n+1}=3b_n$

$\frac{b_{n+1}}{b_n}=3$

នោះ (b_n)ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែល $q=3$

ហើយ $b_1=2+\frac{1}{a_1}=2+1=3$

យើងបាន:

$b_n=3\times 3^{n-1}=3^n$

នោះ

$3^n=2+\frac{1}{a_n}\Rightarrow a_n=\frac{1}{3^n-2}$

ដូចនេះ $a_n=\frac{1}{3^n-2}, n\geq 1$

លំហាត់ស្រាវជ្រាវបន្ថែម

១. គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ ជាចំនួនពិតប្រាកដ ។
កំណត់ស៊ីត $u_0, u_1, \dots, u_n$ និង $v_0, \dots, v_n$ ដោយ $u_0 = u_1 = v_0 = v_1 = 1$ និង
$u_{k+1} = u_k + a_k u_{k-1}, \ v_{k+1} = v_k + a_{k-1} v_{k-1}, \qquad k = \overline{1,(n-1)}$
បង្ហាញថា $u_n = v_n$ ។ (បារាំង)

២. បង្ហាញថាក្នុងសំនុំមួយចំនួននៃ ចំនួនពិត ២000ផ្សេងគ្នា មានពីរគូ
$a > b, \ c > d$ ដែល $a \neq c, b \neq d$ នោះ $\left|\frac{a-b}{c-d} - 1\right| < \frac{1}{100000}$ $(Lithuania)$

៣. គេឲ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និងសង្កេតទៅលើស៊ីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន
$a_1, a_2, \dots, a_n$ ។ ពន្លាតស៊ីតឲ្យក្លាយទៅជាស៊េរីនៃស៊ីត $a_1, a_2, \dots$
ដោយកំណត់ $a_{n+i} = a_i$ ចំពោះគ្រប់ $i \geq 1$ ។
បើ $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_n + n$ និង $a_{a_i} \leq n + i - 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$
បង្ហាញថា $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq n^2$ ។ $(Germany)$

៤. សន្មត់ថាស៊ីត $a_1, a_2, \dots$ ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_{k+1} \geq \frac{k a_k}{a_k^2 + (k-1)}$
ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k ។ បង្ហាញថា $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$
ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ ។ (Serbia)

៥. គណនាគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន M ដែលស៊ីត $a_0, a_1, a_2, \dots$ កំនត់ដោយ
$a_0 = \frac{2M+1}{2}$ និង $a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor, \ k = 0, 1, 2, \dots$ មានយ៉ាងតិច
ជាចំនួនគត់មួយតួ ។ (Luxembourg)

៦. រកគ្រប់ចំនួនពិត a_0 ដែលស៊ីតកំណត់ដោយ $a_{n+1} = 2^n - 3a_n, \ n = 0, 1, 2, \dots$
ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ ។ (អង់គ្លេស ១៩៨0)

៧. បង្ហាញថាពេល n ខិតទៅរកអនន្ត ផលបូកនៃ 1972^n ក្នុងប្រព័ន្ធគោល ១0

នឹងក្លាយទៅជាស៊េរីមិនកំណត់ដូចគ្នា ។ (IMO 1971 – 1972)

៨. គេឲ្យ $a_1, a_2, ..., a_n$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ ។ បង្ហាញថាមានចំនួនមិនកំណត់ n មួយចំនួន ដែល $1 + a_n > 2^{\frac{1}{n}} a_{n-1}$ ។

៩. គេឲ្យ $\{a_n\}_{n\ge 1}$ ជាស្វ៊ីតជាប់ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$a_n < \sum_{k=n}^{2n+2006} \frac{a_k}{k+1} + \frac{1}{2n+2007},\ n = 1, 2, 3, ...$$

បង្ហាញថា $a_n < \frac{1}{n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 1$ ។ (ចិន ២០០៧)

១០. គេឲ្យ $n > 1$ ជាចំនួនគត់មិនមានពហុគុណនៃ 2 ។ បង្ហាញថាមានចម្លាស់មួយ $a_1, a_2, ..., a_n$ នៃ $1, 2, ..., n$ ដែល $\sum_{k=1}^{n} a_k \cos\frac{2k\pi}{n} = 0$ ។

១១. ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងខាងក្រោម:

មានចំនួនធម្មជាតិមួយដែល $a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$

និង $a_{n+k} = a_k,\ k = 0, 1, 2, ...$

បង្ហាញថាមានចំនួនគត់ធម្មជាតិ N មួយដែល $\sum_{i=N}^{N+k} a_i \ge 0$

ចំពោះ $k = 1, 2, ...$ មួយចំនួន (Poland 1975)

១២. បើ $a_1 = 1,\ a_2 = 2$ និង $a_{n+2} = \begin{cases} 5a_{n+1} - 3a_n, & a_n a_{n+1} \text{ is even} \\ a_{n+1} - a_n, & a_n a_{n+1} \text{ is odd} \end{cases}$

បង្ហាញថា ចំពោះចំនួនធម្មជាតិ n មួយចំនួន គេបាន $a_n \ne 0$ (ចិន១៩៨៨)

១៣. គេឲ្យ $x_1, x_2, ..., x_n$ ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$

បង្ហាញថា គ្រប់ $k \ge 2$ មានចំនួនគត់មិនសូន្យ $a_1, a_2, ..., a_n$

ដែល $|a_i| \le k - 1$ ចំពោះគ្រប់ i និង

$$|a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n| \le \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1},\quad \text{(IMO ១៩៨៧)}$$

១៤. គេឲ្យ k និង n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ដែល $1 \le k \le n$ បើ $x_1, x_2, ..., x_k$

ជា k ចំនួនវិជ្ជមាន ដែលផលគុណរបស់វាស្មើនឹងផលបូក បង្ហាញថា

$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + ... + x_k^{n-1} \geq kn$

រកលក្ខខណ្ឌចាំបាច់ដែលធ្វើឲ្យវាក្លាយជាសមភាព ។ (West Germany 1987)

១៥. ស៊ីត $\{x_n\}$ កំណត់ដោយ $x_1 = 2,\ x_2 = 3$ និង

$x_{2m+1} = x_{2m} + x_{2m-1},\quad m \geq 1,\quad x_{2m} = x_{2m-1} + 2x_{2m-2},\ m \geq 2$

គណនា x_n ជាអនុគមន៍នៃ n (Austria 1983)

១៦. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n គណនាផលបូក $\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$ $(IMO1968)$

១៧. បង្ហាញថា $[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$

គ្មានឫសក្នុងចំនួនពិត (Canada 1981)

១៨. តើការប្រយោគមួយណាត្រូវមួយណាខុស? ចំពោះ

ក. គេឲ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតដែល $a^{2013}+b^{2013}+c^{2013}=0$ នោះ

$a^{2014}+b^{2014}+c^{2014}=0$

ខ. គេឲ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតដែល $a^{2014}+b^{2014}+c^{2014}=0$ នោះ

$a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}=0$

គ. គេឲ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតដែល $a^{2013}+b^{2013}+c^{2013}=0$ និង

$a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}=0$ នោះ $a^{2014}+b^{2014}+c^{2014}=0$ ។

(2014 European Mathematics Cup)

១៩. ស៊ីត $a_0, a_1, ..$ និង $b_0, b_1, ...$ កំណត់ចំពោះ $n = 0, 1, 2, ...$ និង

$$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-a_n^2}}$$

$$b_0 = 1,\quad b_{n+1} = \frac{\sqrt{1+b_n^2}-1}{b_n}$$

បង្ហាញថា ចំពោះ $n = 0, 1, 2, ...$ យើងបាន:

$2^{n+2}a_n < \pi < 2^{n+2}b_n$ (IMO Longlists 1989)

២០. បំនួនគត់ $c_{m,n}$ ដែល $m \geq 0,\ n \geq 0$ កំណត់ដោយ

$c_{m,0} = 1,\ \forall m \geq 0,\ \ c_{0,n} = 1,\ \ \forall n \geq 0$

និង $c_{m,n} = c_{m-1,n} - nc_{m-1,n-1},\ \forall m > 0,\ \forall n > 0$

បង្ហាញថា $c_{m,n} = c_{n,m},\ \forall m > 0,\ \forall n > 0$ ។

២១. ស្វ៊ីតចំនួនគត់កំណត់ដោយ

$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2},\ \ (n > 1),\ \ a_0 = 0,\ a_1 = 1$

បង្ហាញថា 2^k ចែកដាច់នឹង a_n លុះត្រាតែ 2^k ចែកដាច់ n ។

(IMO Shortlist 1988, Bulgaria)

២២. បើ a_0 ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{n + 1},\ \ n \geq 0$$

បង្ហាញថា មានចំនួនពិត $a > 0$ ដែល

ក. ចំពោះគ្រប់ $a_0 \geq a$ ស្វ៊ីត $\{a_n\} \to \infty$

ខ. ចំពោះគ្រប់ $a_0 < a$ ស្វ៊ីត $\{a_n\} \to 0$

(IMO Longlist 1988, France)

២៣. គេឲ្យ $(a_n)_{n\geq 0}$ ជាស្វ៊ីតចំនួនគត់កំណត់ដោយ

$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_{n+2} = 4a_{n+1} + a_n,\ \ n \geq 0$ រកតំណាងចែកទូទៅនៃ

a_{1986} និង a_{6891} ។

២៤. គេឲ្យ $S = \{1, 2, ..., 999\}$ សង្កេតអនុគមន៍ $f : S \to S$ ដែលចំពោះ $n \in S$

និង $f^{n+f(n)+1} = f^{nf(n)}(n) = n$

បង្ហាញថាមាន $a \in S$ ដែល $f(a) = a$

សម្គាល់: $f^k(n) = f(f(....f(n)....))$ មានចំនួន k ដង ។ (ជប៉ុន ២០១៨)

២៥. ស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ: $x_1 = 2, x_{n+1} = \sqrt{x_n + 8} - \sqrt{x_n + 3}$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

ក .បង្ហាញថា (x_n) មានលីមីត និងរកលីមីតនោះ

ខ. ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ បង្ហាញថា:

$$n \leq x_1 + x_2 + ... + x_n \leq n + 1$$

$(Vietnam\ MO\ 2018)$

២៦. គេឲ្យ $a \in \mathbb{R}$ និងស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2n+3}{n+1}u_n + \frac{1}{4}}, \ \forall n \in \mathbb{N}^{\bullet} \end{cases}$$

ក. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតរួមពេល $a = 5$ និងរកលីមីតនោះ

ខ. រកគ្រប់ a ដែលធ្វើឲ្យស្វ៊ីត (u_n) មាន និង រួម ។

(2017 VMO)

២៧. ក. គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n = \ln(2n^2 + 1) - \ln(n^2 + n + 1), \forall n \geq 1$

បង្ហាញថាសំនុំ $\left\{ n \in \mathbb{N} \middle| \{a_n\} < \frac{1}{2} \right\}$ ជាសំនុំកំនត់ ។

ខ. គេឲ្យស្វ៊ីត (b_n) កំណត់ដោយ $a_n = \ln(2n^2 + 1) + \ln(n^2 + n + 1), \forall n \geq 1$

បង្ហាញថាសំនុំ $\left\{ n \in \mathbb{N} \middle| \{b_n\} < \frac{1}{2016} \right\}$ ជាសំនុំកំនត់ ។

(Vietnam Mathematics Olympiad 2016)

២៨. គេឲ្យបំនួនមិនអវិជ្ជមាន a និង ស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{n^2}{4n^2 + a}\sqrt{u_n^2 + 3} \end{cases}$$

ក. បង្ហាញថា $a = 0$ ស្វ៊ីត រួមនិងរកលីមីតនោះ

ខ. ចំពោះ $a\in[0,1]$ បង្ហាញថា ស៊ីតមានលីមីត ។

(2015 Vietnam NMO)

២៩. ស៊ីត $\{u_n\}$ និង $\{v_n\}$ កំណត់ដោយ $u_0=u_1=1,\ u_n=2u_{n-1}-3u_{n-2}, n\ge 2$

និង $v_0=a, v_1=b,\ v_2=c, v_n=v_{n-1}-3v_{n-2}+27v_{n-3},\ (n\ge 3)$ ។

មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន N ដែល $n>N$ យើងបាន $u_n|v_n$ ។

បង្ហាញថា $3a=2b+c$

(អូឡាំពិច ចិន ២០១៧)

៣០. ស៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1=1, a_2=\frac{1}{3}$ និង ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$

$$\frac{(1+a_n)(1+a_{n+2})}{(1+a_n+1)^2}=\frac{a_na_{n+2}}{a_{n+1}^2}$$

បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$ នោះ $a_1+a_2+...+a_n<\frac{34}{21}$ ។

(China Northern Mathematics Olympiad 2017)