លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

បរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា និង ពាណិជ្ជកម្ម

គណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោក

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{3^k}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2+3n+3}{3^n}$$

សម្រាប់សិស្សពូកែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២

Problems and Solutions

ភាគ៣

ស្នាដៃបោះពុម្ពផ្សាយ

សៀវភៅគណិតវិទ្យា ៖

១_ដំណោះស្រាយលំហាត់គណិតវិទ្យា បោះពុម្ព ឆ្នាំ២០០០

(សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងចូលសាកលវិទ្យាល័យ និង អាហារូបករណ៍)

២_ពិភពស្វ៊ីតចំនួនពិត (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១ និង សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា)

៣_ អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១ និង សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា)

៤_ ដំណោះស្រាយគំរូ ចំនួនកុំផ្លិច លីមីត ដេរីវេ (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១២)

៥_ សង្ខេបរូបមន្តគណិតវិទ្យា (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១_១២)

៦_ គំរូសិក្សាអនុគមន៍ (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១_១២)

៧_ កំនែលំហាត់គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០កម្មវិធីសិក្សាថ្មី (ភាគ១ ឆ្នាំ២០០៤)

៨_ **151** គណនាលីមីត (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១_១២)

៩_ គណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោក ភាគ១ និង ភាគ២

(សម្រាប់សិស្សពូកែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១១ និង ១២)

✍✍✍✍✍

អ្នកចូលរួមត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក លឹម ឆុន

លោក សែន ពិសិដ្ឋ

លោកស្រី នុយ រីណា

លោក និត្យ ម៉េង

លោក ព្រឹម សុនិត្យ

លោក ផល ប៊ុនឆាយ

អ្នកត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិគ្គសិរ

ការីកុំព្យូទ័រ

កញ្ញា លី គុណ្ណាកា

អ្នកនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លោក លឹម ផល្លុន និង លោក សែន ពិសិដ្ឋ

អារម្ភកថា

សៀវភៅ **គណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោក ភាគ៣** ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់ នៅក្នុងដៃនេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបរៀងឡើងក្នុងគោលបំណងទុកជាឯកសារ សម្រាប់ជាជំនួយដល់អ្នកសិក្សាដែលមានបំណងត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែផ្នែកគណិតវិទ្យា និង ត្រៀមប្រឡងយកអាហារូបករណ៍នានា និង ម្យ៉ាងទៀតក្នុងគោលបំណងចូលរួមលើកស្ទួយវិស័យគណិតវិទ្យានៅប្រទេសកម្ពុជាយើងឲ្យកាន់តែរីកចម្រើនថែមទៀតដើម្បីបង្កើនធនធានមនុស្សឲ្យមានកាន់តែច្រើនដើម្បីជួយអភិវឌ្ឍន៍ប្រទេសជាតិរបស់យើង ។

នៅក្នុងសៀវនេះយើងខ្ញុំបានខិតខំស្រាវជ្រាវជ្រើសរើសយកលំហាត់យ៉ាងសម្រាំងបំផុតយកមកធ្វើដំណោះស្រាយយ៉ាងក្បោះក្បាយដែលអាចឲ្យលោកអ្នកងាយយល់ឆាប់ចងចាំអំពីសិល្បៈនៃការដោះស្រាយទាំងអស់នេះ ។ ប៉ុន្តែទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ កង្វះខាត និង កំហុសឆ្គងដោយអចេតនាប្រាកដជាមានទាំងបច្ចេកទេស និង អក្ខរាវិរុទ្ធ ។ អាស្រ័យហេតុនេះ យើងខ្ញុំជាអ្នករៀបរៀងរង់ចាំដោយរីករាយជានិច្ចនូវមតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីសំណាក់អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដើម្បីជួយកែលំអ សៀវភៅនេះឲ្យបានកាន់តែសុក្រិត្រភាពថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់នេះយើងខ្ញុំអ្នករៀបរៀងសូមគោរពជូនពរដល់អ្នកសិក្សាទាំងអស់ឲ្យមានសុខភាពមាំមួន និង ទទួលជ័យជំនះគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី ១៧ មិថុនា ២០០៩

អ្នកនិពន្ធ លឹម ផល្គុន

ផ្នែកប្រធានលំហាត់

Problems

ផ្នែកប្រធានលំហាត់

១-គេឱ្យ n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត θ ចូរស្រាយថា :

$$\left(1+2\sin^2\theta\right)^n+\left(1+2\cos^2\theta\right)^n \geq 2^{n+1}$$

២-ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq \sqrt[3]{2(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ។

៣-ចូរកំនត់គ្រប់អនុគមន៍ $f : IR \to IR$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$f(x^2-y^2)=(x-y)(f(x)+f(y))$ ចំពោះគ្រប់ $x\,;y \in IR$

៤-គណនាផលបូក $S=\sum\limits_{i=0}^{101}\dfrac{{x_i}^3}{1-3x_i+3{x_i}^2}$

ដែល $x_i=\dfrac{i}{101}\ ;\ i=1\,,2\,,3\,,...$ ។

៥-ចូរកំនត់តម្លៃផ្នែកគត់នៃផលបូក :

$$S=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+......+\frac{1}{\sqrt{10000}}$$ ។

៦-គណនាតម្លៃនៃផលគុណ

$$P=(1-\cot 1^o)(1-\cot 2^o)(1-\cot 3^o).....(1-\cot 44^o)$$

៧-គេឱ្យ $x; y ; z$ ជាចំនួនពិតដែល $\begin{cases} x+y+z=5 \\ xy+yz+zx=3 \end{cases}$

ចូរបង្ហាញថា $-1 \le z \le \frac{13}{3}$

៨-ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេឱ្យ

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{n^2-2n+1}}$$

គណនា $f(1)+f(3)+f(5)+...+f(999997)+f(999999)$

៩-ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេមាន :

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.4}+...+\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{2n}$$

១០-បង្ហាញថា :

$$(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20})=\frac{1}{16}$$

១១-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ ចូរស្រាយថា :

$$\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

១២-គេឱ្យ z_1 ; z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $|z_1|=|z_2|=r>0$ ។

បង្ហាញថា $\left(\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}\right)^2\ge\frac{1}{r^2}$

១៣-គេយក $z_1\ ;\ z_2\ ;\ ....;\ z_n$ ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង ៖

$$(k+1)z_{k+1} - i(n-k)z_k = 0\ ;\ k = 0\,, 1\,, 2\,, ...\,, n-1$$

ក-កំនត់ z_0 បើគេដឹងថា $z_0 + z_1 + z_2 + ... + z_n = 2^n$

ខ-ចំពោះតម្លៃ z_0 ដែលបានកំនត់ខាងលើចូរបង្ហាញថា ៖

$$|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + ... + |z_n|^2 < \frac{(3n+1)^n}{n!}$$

១៤-គេឱ្យ $z_1\ ;\ z_2\ ;\ z_3$ ជាចំនួនកុំផ្លិចដោយដឹងថា ៖

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$$ ។

ចូរបង្ហាញថា $|z_1| = |z_2| = |z_3|$

១៥-គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត ៖

$$a_n = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}\ ;\ n \ge 1$$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_{20}}$ ជាចំនួនគត់ ។

១៦-គេឱ្យ $x\ ;\ y\ ;\ z$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz = 1$ ។

ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{1}{(x+1)^2 + y^2 + 1} + \frac{1}{(y+1)^2 + z^2 + 1} + \frac{1}{(z+1)^2 + x^2 + 1} \le \frac{1}{2}$$

១៧-គេឱ្យ $a\ ;\ b\ ;\ c$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc = 1$ ។

ចូរស្រាយថា :

$$a(b^2 - \sqrt{b}) + b(c^2 - \sqrt{c}) + c(a^2 - \sqrt{a}) \geq 0$$

១៨-គេឱ្យ k ជាចំនួនគត់មួយ ហើយគេយក :

$$n = \sqrt[3]{k + \sqrt{k^2 - 1}} + \sqrt[3]{k - \sqrt{k^2 - 1}} + 1$$

ចូរបង្ហាញថា $n^3 - 3n^2$ ជាចំនួនគត់មួយ ។

១៩-គេឱ្យអនុគមន៍ $f : IR \rightarrow IR$ ដោយ :

$$f(x) = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^6 - x^3 + 1}$$

ចូររកតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍នេះ ?

២០-ចូរគណនាតម្លៃផលគុណ :

$$P = (\sqrt{3} + \tan 1^o)(\sqrt{3} + \tan 2^o).....(\sqrt{3} + \tan 29^o)$$

២១-គេឱ្យ $a_1 , a_2 , ..., a_n > 0$ និង $x_1 , x_2 , ..., x_n > 0$ ។

ចូរស្រាយថា :

$$\frac{{a_1}^2}{x_1} + \frac{{a_2}^2}{x_2} + ... + \frac{{a_n}^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$$

២២-គេឱ្យ $a\ ;\ b\ ;\ c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}$$

២៣-គេឱ្យ $x\ ;\ y\ ;\ z>0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y}\ge\frac{1}{2}$$

២៤-គេឱ្យស្វ៊ីត $a_1\ ;\ a_2\ ;\ ....;\ a_n$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ ៖

$a_1=0\ ;|\,a_2\,|=|\,a_1+1\,|;...$ និង $|\,a_n\,|=|\,a_{n-1}+1\,|$ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\ge-\dfrac{1}{2}$

២៥-គេឱ្យ $a\ ;\ b\ ;\ c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\ge 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

២៦-គេឱ្យ $a\ ;\ b\ ;\ c$ ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ ។

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

២៧- គណនាផលបូក ៖

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}\right]$ រួចទាញរកតម្លៃ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n$ ។

២៨-គណនាផលគុណខាងក្រោម :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(\tan^{2^k}\frac{x}{2^k}\right) = \tan x.\tan^2\frac{x}{2}.\tan^4\frac{x}{4}.....\tan^{2^n}\frac{x}{2^n}$$

២៩-គណនាផលគុណខាងក្រោម :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left[(1-\tan^2\frac{x}{2^k})^{2^k}\right]$$

៣០ គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរបង្ហាញថា :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$$

៣១-ចូរបង្ហាញថា $\left|\dfrac{6z-i}{2+3iz}\right| \leq 1$ លុះត្រាតែ $|z| \leq \dfrac{1}{3}$

៣២-គេឱ្យ z_1 ; z_2 ; z_3 ; ....; z_n ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមានម៉ូឌុលស្មើ 1

គេតាង $Z = \left(\sum_{k=1}^{n}(z_k)\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{z_k})\right)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $0 \leq Z \leq n^2$

៣៣-គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច z ដែល $|z|=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\sqrt{2} \leq |1-z| + |1+z^2| \leq 4$$

៣៤-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(v_n)_{n\in IN}$ កំនត់ដោយ :

$v_0=\sqrt{5}$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $v_{n+1}=2{v_n}^2-1$; $\forall n\geq 0$

បង្ហាញថា $v_{n+1}+\sqrt{v_{n+1}^2-1}=(v_n+\sqrt{{v_n}^2-1})^2$

រួចគណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៣៥-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_k)_{k\in IN}$ កំនត់ដោយ :

$u_0=9$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $u_{k+1}=\sum\limits_{p=1}^{n}\left(C_n^p\,{u_k}^p\right)$

ដែល $C_n^p=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ ។

ចូរគណនា u_k ជាអនុគមន៍នៃ k និង n

៣៦-គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\in IN}$ កំនត់ដោយ :

$u_0=1$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $u_{n+1}=2{u_n}^2+4u_n+1$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

៣៧-គេឱ្យ A ; B ; C ជាមុំក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}$

៣៨-គេឱ្យ A ; B ; C ជាមុំស្រួចក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C)\geq(1+\sqrt{3})^3$

៣៩-គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

គេដឹងថា n ចែកនឹង 7 ឱ្យសំណល់ 5 ហើយ n ចែកនឹង 8 ឱ្យសំណល់3

ក. តើចំនួន n នោះចែកនឹង 56 ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ខ. រកចំនួន n នោះដោយដឹងថា $5616 < n < 5626$ ។

៤០-គេឱ្យអនុគមន៍ f កំនត់លើ IR ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង:

$$x^2 f\left(x^3\right) + \frac{1}{(1+x)^2} f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 4x^3\left(1+x^4\right)^5$$

ចូរគណនាអាំងតេក្រាល: $I = \int_0^1 f(x).dx$ ។

៤១-នៅក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

មានឯកតា 1cm នៅលើអក្ស័ គេឱ្យពីរចំនុច $A(0,-2,0)$

និង $B(1,-2,1)$ ។ (P)ជាប្លង់មានសមីការ $2x + 2y + z + 4 = 0$ ។

ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមចំនុច A និង B ហើយផ្គុំជាមួយ

ប្លង់ (P) បានមុំស្រួចមួយមានតម្លៃ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ។

៤២-គេឱ្យ a ; b ; c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា :

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca)$$

៤៣-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ក.បង្ហាញថា $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$

ខ.បង្ហាញថា $\cos A \cos B \cos C \le \frac{1}{8}$

គ.បង្ហាញថា $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$

៤៤-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ តាង p ជាកន្លះបរិមាត្រ និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។ ចូរបង្ហាញថា :

ក. $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{p}{4R}$

ខ. $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

៤៥-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ តាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា :

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$$

ខ. បើ ABC ជាត្រីកោណកែងនោះចូរស្រាយថា $R \ge (\sqrt{2}+1)r$

៤៦-ដោះស្រាយសមីការ :

$$\sqrt{x + \sqrt{4x + \sqrt{16x + \ldots + \sqrt{4^n x + 3}}}} = \sqrt{x} + 1$$

៤៧-ចូរបង្ហាញថានៅក្នុងគ្រប់ត្រីកោណគេមានទំនាក់ទំនង :

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{abc}{2R^2}$$

ដែល a ; b ; c ជាជ្រុង និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

៤៨-គណនាផលគុណ :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1+\tan^2 2^k x}{\left(1-\tan^2 2^k\right)^2}\right] \text{ ដែល } |x| < \frac{\pi}{2^{n+2}}$$

៤៩-គេឱ្យ a ; b ; c ; d និង x ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$\frac{\sin x}{a} = \frac{\sin 2x}{b} = \frac{\sin 3x}{c} = \frac{\sin 4x}{d} \quad \text{ដែល } x \neq k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$$

ចូរបង្ហាញថា $a^3(4b^2 - d^2) = b^4(3a - c)$

៥០-គេឱ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា :

ក. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$

ខ. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$

៥១-គេឱ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a-b}{a+b} = \tan\frac{A-B}{2}.\tan\frac{C}{2}$$

៥២- ចូរបង្ហាញថា :

$$(\sin x + a\cos x)(\sin x + b\cos x) \le 1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

៥៣-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច

និង ជ្រុង a ; b ; c និងផ្ទៃក្រឡា K ។ ចូរស្រាយថា :

$$\sqrt{a^2b^2 - 4K^2} + \sqrt{b^2c^2 - 4K^2} + \sqrt{c^2a^2 - 4K^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

៥៤-ប្រសិនបើ $xyx = (1-x)(1-y)(1-z)$ ដែល $0 \le x ; y ; z \le 1$

ចូរបង្ហាញថា $x(1-z) + y(1-x) + z(1-y) \ge \frac{3}{4}$

៥៥-គេឱ្យ a ; b ; c ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយដែលមាន

បរិមាត្រស្មើ 2 ។

ចូរស្រាយថា :

$$\frac{3}{2} < a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$$

៥៦-គេឱ្យ $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{3^k}\right) = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{3^2}{3^3} + ... + \frac{n^2}{3^n}$

គណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ ។

៥៧-ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a; AC = b\ ; AB = c$

តាង $p = \frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ r និង R

ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនិងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនងខាងក្រោម ៖

ក. $bc + ca + ab = p^2 + r^2 + 4Rr$

ខ. $a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$

គ. $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \frac{r}{p}$

ឃ. $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = \frac{4R+r}{p}$

ង. $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \frac{p}{r}$

៥៨-គេឱ្យ $x\ ;\ y\ ;\ z$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x + y + z = 1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right)\left(\frac{1}{z} - 1\right) \geq 8$

៥៩-គេឱ្យ $a\ ;\ b\ ;\ c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

បង្ហាញថា $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3 + \frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc}$

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

Solutions

លំហាត់ទី១

គេឱ្យ n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត θ ចូរស្រាយថា :

$\left(1+2\sin^2\theta\right)^n+\left(1+2\cos^2\theta\right)^n \geq 2^{n+1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា :

$$\left(1+2\sin^2\theta\right)^n+\left(1+2\cos^2\theta\right)^n \geq 2^{n+1}$$

តាង $x=1+2\sin^2\theta$ និង $y=1+2\cos^2\theta$ ដែល $x>0\,;\,y>0$

គេមាន $x+y=1+2\sin^2\theta+1+2\cos^2\theta$

$$x+y=2+2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$

$$x+y=4$$

$$y=4-x$$

ដោយ $y>0$ នោះ $4-x>0$ ឬ $x<4$

យក $T=(1+2\sin^2\theta)^n+(1+2\cos^2\theta)^n$

$$T=x^n+y^n$$

$$T=f(x)=x^n+(4-x)^n$$

ដែល $0<x<4$ ។

យើងមាន $\frac{dT}{dx} = f'(x) = nx^{n-1} - n(4-x)^{n-1}$

$$= n\,[\,x^{n-1} - (4-x)^{n-1}\,]$$

$$= n[\,x-(4-x)\,]\,g(x)$$

$$= n\,(2x-4)\,g(x)$$

ដែល $g(x) = x^{n-2} + x^{n-3}(4-x) + ... + (4-x)^{n-2} > 0$ ។

បើ $2x - 4 = 0$ គេទាញឫស $x = 2$ ។

ចំពោះ $x = 2$ គេបាន $f(2) = 2^n + (4-2)^n = 2^{n+1}$

តារាងអថេរភាពនៃ $f(x) = x^n + (4-x)^n$

x	0		2		4
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	2^{n+1}	$\nearrow$	

តាមតារាងខាងលើគេទាញ $f(x) \geq 2^{n+1} \quad \forall x \in \,]\,0\,;4\,[$ ។

ដូចនេះ $\left(1+2\sin^2\theta\right)^n + \left(1+2\cos^2\theta\right)^n \geq 2^{n+1}$ គ្រប់ $\theta \in IR$

លំហាត់ទី២

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\le\sqrt[3]{2(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា :

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\le\sqrt[3]{2(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}$$

ដោយគុណអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនឹង $\sqrt[3]{ab}$ គេបាន :

$$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\le\sqrt[3]{2(a+b)^2}$$

តាង $x=\sqrt[3]{a}$ និង $y=\sqrt[3]{b}$

គេបាន $x^2+y^2\le\sqrt[3]{2(x^3+y^3)}$ (*)

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$x^6+x^3y^3+x^3y^3\ge 3x^4y^2$ និង $y^6+x^3y^3+x^3y^3\ge 3x^2y^4$

បូកវិសមភាពទាំងពីរនេះអង្គនិងអង្គគេបាន :

$$x^6+4x^3y^3+y^6\ge 3x^4y^2+3x^2y^4$$

ថែមអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនឹង $x^6 + y^6$ គេបាន

$$2(x^6 + 2x^3y^3 + y^6) \ge x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6$$

$$2(x^3 + y^3)^2 \ge (x^2 + y^2)^3$$

គេទាញ $x^2 + y^2 \le \sqrt[3]{2(x^3 + y^3)}$ នាំឱ្យ (*) ពិត ។

ដូចនេះ $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \le \sqrt[3]{2(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})}$ គ្រប់ $a > 0 ; b > 0$ ។

លំហាត់ទី៣

ចូរកំនត់គ្រប់អនុគមន៍ $f : IR \to IR$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y))$ ចំពោះគ្រប់ $x ; y \in IR$

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រកអនុគមន៍ f :

គេមាន $f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y))$

យក $x = y$ គេបាន $f(0) = 0$

យក $x = -1 \; ; y = 0$ នោះ $f(1) = -(f(-1) + f(0)) = -f(-1)$

យក $x = t \; ; y = -1$ គេបាន $f(t^2 - 1) = (t + 1)(f(t) + f(-1))$

ដោយ $f(1)=-f(-1)$ នោះ $f(t^2-1)=(t+1)(f(t)-f(1))$ (1)

យក $x=t\ ;\ y=1$ គេបាន $f(t^2-1)=(t-1)(f(t)+f(1))$ (2)

ផ្ទឹម (1) និង (2) គេបាន ៖

$$(t+1)\left(\ f(t)-f(1)\ \right)=(t-1)\left(\ f(t)+f(1)\ \right)$$

គេទាញ $f(t)=f(1)t$ ដោយតាង $k=f(1)\in IR$

ដូចនេះ $f(x)=kx$ ជាអនុគមន៍ដែលត្រូវរក ។

លំហាត់ទី៤

គណនាផលបូក $S=\sum\limits_{i=0}^{101}\dfrac{x_i^{\ 3}}{1-3x_i+3x_i^{\ 2}}$

ដែល $x_i=\dfrac{i}{101}\ ;\ i=1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,...$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក $S=\sum\limits_{i=0}^{101}\dfrac{x_i^{\ 3}}{1-3x_i+3x_i^{\ 2}}$

យើងមាន $1-3x+3x^2=x^3+(1-x)^3=x^3-(x-1)^3$

តាង $f(x)=\dfrac{x^3}{1-3x+3x^2}=\dfrac{x^3}{x^3+(1-x)^3}$

គេបាន $f(x_i)=\dfrac{x_i^{\ 3}}{x_i^{\ 3}+(1-x_i)^3}$

ហើយ $f(1-x_i)=\dfrac{(1-x_i)^3}{(1-x_i)^3+x_i^{\ 3}}$

គេបាន $f(x_i)+f(1-x_i)=\dfrac{x_i^{\ 3}}{x_i^{\ 3}+(1-x_i)^3}+\dfrac{(1-x_i)^3}{(1-x_i)^3+x_i^{\ 3}}=1$

គេទាញ $f(x_i)=1-f(1-x_i)$

ដោយ $x_i=\dfrac{i}{101}$ នោះ $1-x_i=1-\dfrac{i}{101}=\dfrac{101-i}{101}$

គេបាន $S=\sum\limits_{i=0}^{101}f(x_i)=\sum\limits_{i=0}^{101}f\left(\dfrac{i}{101}\right)=\sum\limits_{i=0}^{101}\left[1-f(\dfrac{101-i}{101})\right]$

$$S=102-\sum_{i=0}^{101}f\left(\frac{101-i}{101}\right)=102-S$$

គេទាញ $S=\dfrac{102}{2}=51$ (ព្រោះ $\sum\limits_{i=0}^{101}f\left(\dfrac{i}{101}\right)=\sum\limits_{i=0}^{101}f\left(\dfrac{101-i}{101}\right)$)

✍✍✍✍✍

លំហាត់ទី៥

ចូរកំនត់តម្លៃផ្នែកគត់នៃផលបូក ៖

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{10000}}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ផ្នែកគត់របស់ S ៖

យើងពិនិត្យ $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$; $\forall k \geq 1$

គេទាញ $\frac{1}{\sqrt{k}} < 2\,(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\,)$

គេបាន $S < 2\sum_{k=2}^{10000}(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = 2(\sqrt{10000} - 1) = 198$

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$; $\forall k \geq 1$

គេទាញ $\frac{1}{\sqrt{k}} > 2\,(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$

គេបាន $S > 2\sum_{k=2}^{10000}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2(\sqrt{10001} - \sqrt{2}) = 197$

ដូចនេះផ្នែកគត់នៃ S គឺ 197 ។

លំហាត់ទី៦

គណនាតម្លៃនៃផលគុណ

$$P=(1-\cot 1^o)(1-\cot 2^o)(1-\cot 3^o).....(1-\cot 44^o)$$

ដំណោះស្រាយ

គណនា

$$P=(1-\cot 1^o)(1-\cot 2^o)(1-\cot 3^o).....(1-\cot 44^o)$$

យើងពិនិត្យ $1-\cot a=1-\frac{\cos a}{\sin a}=\frac{\sin a-\cos a}{\sin a}$

ដោយ $\sin a-\cos a=\sqrt{2}\sin(45^o-a)$

ហេតុនេះ $1-\cot a=\sqrt{2}\,\frac{\sin(45^o-a)}{\sin a}$

យើងបាន $P=\prod_{a=1^o}^{44^o}\left(1-\cot a\right)=\prod_{a=1^o}^{44^o}\left[\sqrt{2}\,\frac{\sin(45^o-a)}{\sin a}\right]$

$$P=\left(\sqrt{2}\right)^{44}.\frac{\sin 44^o.\sin 43^o.....\sin 1^o}{\sin 1^o.\sin 2^o......\sin 44^o}=2^{22}$$

ដូចនេះ $P=(1-\cot 1^o)(1-\cot 2^o).....(1-\cot 44^o)=2^{22}$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឱ្យ $x; y ; z$ ជាចំនួនពិតដែល $\begin{cases} x+y+z=5 \\ xy+yz+zx=3 \end{cases}$

ចូរបង្ហាញថា $-1 \le z \le \dfrac{13}{3}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $-1 \le z \le \dfrac{13}{3}$

គេមាន $x+y+z=5$

យើងបាន $x+y=5-z$

$$(x+y)^2=(5-z)^2$$

$$(x+y)^2=25-10z+z^2$$

ដោយ $xy+yz+zx=3$

យើងបាន $xy=3-z(x+y)$

$$xy=3-z(5-z)$$

$$xy=3-5z+z^2$$

យើងមាន $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy \ge 0$

គេទាញ $(25-10z+z^2)-4(3-5z+z^2) \ge 0$

$$25 - 10z + z^2 - 12 + 20z - 4z^2 \geq 0$$

$$-3z^2 + 10z + 13 \geq 0$$

$$(-3z^2 - 3z) + (13z + 13) \geq 0$$

$$-3z(z+1) + 13(z+1) \geq 0$$

$$(z+1)(-3z+13) \geq 0$$

គេទាញ $-1 \leq z \leq \dfrac{13}{3}$ ។

លំហាត់ទី៨

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេឱ្យ

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 2n + 1} + \sqrt[3]{n^2 - 1} + \sqrt[3]{n^2 - 2n + 1}}$$

គណនា $f(1) + f(3) + f(5) + ... + f(999997) + f(999999)$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $f(1) + f(3) + f(5) + ... + f(999997) + f(999999)$

គេមាន $f(n) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 2n + 1} + \sqrt[3]{n^2 - 1} + \sqrt[3]{n^2 - 2n + 1}}$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)(n-1)} + \sqrt[3]{(n-1)^2}}$$

គុណភាគយកនឹងភាគបែងនឹង $\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}$

$$f(n)=\frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}}{(\sqrt[3]{n+1})^3-(\sqrt[3]{n-1})^3}=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1})$$

គេបាន $f(1)+f(3)+...+f(999999)=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{10^6}-0)=50$

ដូចនេះ $f(1)+f(3)+f(5)+...+f(999997)+f(999999)=50$

លំហាត់ទី៩

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេមាន :

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.4}+...+\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{2n}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា :

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.4}+...+\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{2n}$$

តាង $T=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.4}+.....+\frac{1}{(2n-1)2n}$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+....+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n})$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{2n}-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+....+\frac{1}{2n})$$

$$T=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{2n}-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n})$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+.....+\frac{1}{2n}$$

ដូចនេះ $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.4}+...+\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{2n}$

លំហាត់ទី១០

បង្ហាញថា :

$$(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20})=\frac{1}{16}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា :

$$(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20})=\frac{1}{16}$$

តាង $P=(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20})$

$$=\prod_{n=0}^{3}\left[\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{3^n\pi}{20}\right)\right]$$

គេមាន $\frac{1}{2}+\cos a=\frac{1}{2}+1-2\sin^2\frac{a}{2}=\frac{1}{2}(3-4\sin^2\frac{a}{2})$

ហើយ $\sin\frac{3a}{2}=3\sin\frac{a}{2}-4\sin^2\frac{a}{2}=\sin\frac{a}{2}(3-4\sin^2\frac{a}{2})$

នាំឱ្យ $3-4\sin^2\frac{a}{2}=\dfrac{\sin\frac{3a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$

ហេតុនេះ $\frac{1}{2}+\cos a=\frac{1}{2}\dfrac{\sin\frac{3a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$

យក $a=\frac{3^n\pi}{20}$ គេបាន $\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{3^n\pi}{20}\right)=\frac{1}{2}.\dfrac{\sin\frac{3^{n+1}\pi}{40}}{\sin\frac{3^n\pi}{40}}$

គេបាន $P=\prod_{n=0}^{3}\left(\frac{1}{2}.\dfrac{\sin\frac{3^{n+1}\pi}{40}}{\sin\frac{3^n\pi}{40}}\right)=\frac{1}{16}.\dfrac{\sin\frac{81\pi}{40}}{\sin\frac{\pi}{40}}=\frac{1}{16}$

ព្រោះ $\sin\frac{81\pi}{40}=\sin(2\pi+\frac{\pi}{40})=\sin\frac{\pi}{40}$ ។

ដូចនេះ

$$(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20})(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20})=\frac{1}{16}$$

✍✍✍✍✍✍✍

លំហាត់ទី១១

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ ចូរស្រាយថា :

$$\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា :

$$\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwartz យើងបាន:

$$(\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C})^2\le 3(\cos A+\cos B+\cos C)\quad (1)$$

តាង $T=\cos A+\cos B+\cos C$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

ព្រោះ $\cos\frac{B+C}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$ ។

ដោយ B និង C ជាមុំស្រួចនោះ $0<B<\frac{\pi}{2}\ ;\ 0<C<\frac{\pi}{2}$

គេទាញ $-\frac{\pi}{4}<\frac{B-C}{2}<\frac{\pi}{4}$ នាំឱ្យ $\cos\frac{B-C}{2}\le 1$

ហេតុនេះ $T \le 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2\sin\frac{A}{2})^2 \le \frac{3}{2}$

ឬ $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$ (2)

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញបាន:

$$(\sqrt{\cos A} + \sqrt{\cos B} + \sqrt{\cos C})^2 \le \frac{9}{2}$$

ដូចនេះ $\sqrt{\cos A} + \sqrt{\cos B} + \sqrt{\cos C} \le \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឱ្យ z_1 ; z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $|z_1| = |z_2| = r > 0$ ។

បង្ហាញថា $\left(\frac{z_1 + z_2}{r^2 + z_1z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_1 - z_2}{r^2 - z_1z_2}\right)^2 \ge \frac{1}{r^2}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា :

$$\left(\frac{z_1 + z_2}{r^2 + z_1z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_1 - z_2}{r^2 - z_1z_2}\right)^2 \ge \frac{1}{r^2}$$

តាង $z_1 = r(\cos 2x + i\sin 2x)$ និង $z_2 = r(co2y + i\sin 2y)$

ដែល $x \in IR$; $y \in IR$ ។

គេបាន :

$$\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}=\frac{r[\ (\cos 2x+\cos 2y)+i(\sin 2x+\sin 2y)\ ]}{r^2+r^2[\ \cos(2x+2y)+i.\sin(2x+2y)\ ]}$$

$$=\frac{2\cos(x+y)\cos(x-y)+2i\sin(x+y)\cos(x-y)}{r\ [\ 2\cos^2(x+y)+2i\sin(x+y)\cos(x+y)\ ]}$$

$$=\frac{1}{r}.\frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}$$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}=\frac{1}{r}\frac{\sin(y-x)}{\sin(y+x)}$

គេបាន :

$$\left(\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}\right)^2=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\cos^2(x-y)}{\cos^2(x+y)}+\frac{\sin^2(y-x)}{\sin^2(y+x)}\right]$$

ដោយ $\frac{\cos^2(x-y)}{\cos^2(x+y)}\ge\cos^2(x-y)$ ព្រោះ $\cos^2(x+y)\le 1$

ហើយ $\frac{\sin^2(y-x)}{\sin^2(y+x)}\ge\sin^2(x-y)$ ព្រោះ $\sin^2(x+y)\le 1$

$$\frac{\cos^2(x-y)}{\cos^2(x+y)}+\frac{\sin^2(y-x)}{\sin^2(y+x)}\ge\cos^2(x-y)+\sin^2(x-y)\ =1$$

ដូចនេះ $\left(\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}\right)^2\ge\frac{1}{r^2}$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេយក z_1 ; z_2 ; ....; z_n ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$(k+1)z_{k+1} - i(n-k)z_k = 0$; $k = 0 , 1 , 2 , ... , n-1$

ក-កំនត់ z_0 បើគេដឹងថា $z_0 + z_1 + z_2 + ... + z_n = 2^n$

ខ-ចំពោះតម្លៃ z_0 ដែលបានកំនត់ខាងលើចូរបង្ហាញថា :

$$|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + ... + |z_n|^2 < \frac{(3n+1)^n}{n!}$$

ដំណោះស្រាយ

ក-កំនត់ z_0 បើគេដឹងថា $z_0 + z_1 + z_2 + ... + z_n = 2^n$

គេមាន $(k+1)z_{k+1} - i(n-k)z_k = 0$

គេបាន $\frac{z_{k+1}}{z_k} = i.\frac{n-k}{k+1}$

$$\prod_{k=0}^{(p-1)}\left(\frac{z_{k+1}}{z_k}\right) = \prod_{k=0}^{p-1}\left(i.\frac{n-k}{k+1}\right)$$

$$\frac{z_p}{z_0} = i^p C_n^p \quad ; \; C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

គេទាញ $z_p = i^p z_0 C_n^p$; $p = 0 , 1 , 2 , ...$

ដោយ $z_0+z_1+z_2+....+z_n=2^n$ ឬ $\sum_{p=0}^{n}(z_p)=2^n$

មាន $\sum_{p=0}^{n}(z_p)=z_0\sum_{p=0}^{n}C_n^p\, i^p=z_0(1+i)^n$

គេបាន $z_0(1+i)^n=2^n$

គេទាញ $z_0=\dfrac{2^n}{(1+i)^n}=(1-i)^n$

ដូចនេះ $z_0=(1-i)^n$ ។

ខ-ចំពោះតម្លៃ z_0 ដែលបានកំនត់ខាងលើចូរបង្ហាញថា :

$$|z_0|^2+|z_1|^2+|z_2|^2+....+|z_n|^2<\frac{(3n+1)^n}{n!}$$

ដោយអនុវត្តន៏វិសមភាព $AM-GM$ យើងបាន

$$\begin{aligned}|z_0|^2+|z_1|^2+...+|z_n|^2&=|z_0|^2\left((C_n^0)^2+(C_n^1)^2+....+(C_n^n)^2\right)\\&=|z_0|^2C_{2n}^n=2^n.\frac{(2n)!}{n!n!}\\&=\frac{2^n}{n!}\left(2n(2n-1)(2n-2)....(n+1)\right)\\&<\frac{2^n}{n!}\left(\frac{2n+(2n-1)+(2n-2)+....+(n+1)}{n}\right)^n\\&<\frac{(3n+1)^n}{n!}\end{aligned}$$

ដូចនេះ $|z_0|^2+|z_1|^2+|z_2|^2+....+|z_n|^2<\dfrac{(3n+1)^n}{n!}$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេឱ្យ z_1 ; z_2 ; z_3 ជាចំនួនកុំផ្លិចដោយដឹងថា :

$z_1 + z_2 + z_3 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$ ។

ចូរបង្ហាញថា $|z_1| = |z_2| = |z_3|$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $|z_1| = |z_2| = |z_3|$

គេមាន $z_1 + z_2 + z_3 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$

គេទាញ $\begin{cases} z_1 + z_2 = -z_3 & (1) \\ z_1z_2 + z_3(z_1 + z_2) = 0 & (2) \end{cases}$

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) យើងបាន :

$z_1z_2 - {z_3}^2 = 0$ នាំឱ្យ $|z_3|^2 = |z_1|.|z_2|$

ដូចគ្នាដែរ $|z_2|^2 = |z_1|.|z_3|$ និង $|z_1|^2 = |z_2|.|z_3|$

យើងបាន :

$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = |z_1||z_2| + |z_2||z_3| + |z_3||z_1|$

ឬ $(|z_1| - |z_2|)^2 + (|z_2| - |z_3|)^2 + (|z_3| - |z_1|)^2 = 0$

ដូចនេះ $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ ។

លំហាត់ទី១៥

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត :

$$a_n = \sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} \ ; n \ge 1$$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+....+\frac{1}{a_{20}}$ ជាចំនួនគត់ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+....+\frac{1}{a_{20}}$ ជាចំនួនគត់

យើងមាន $a_n = \sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} \ ; n \ge 1$

គេបាន

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}}$$

$$= \frac{n}{4}\left[\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} - \sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sqrt{2n^2+2n+1} - \sqrt{2n^2-2n+1}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{20}\left(\sqrt{2n^2+2n+1}-\sqrt{2n^2-2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[(\sqrt{5}-1)+(\sqrt{13}-\sqrt{5})+....+(29-\sqrt{761})\right]$$

$$=\frac{1}{4}(-1+29)=7$$

ដូចនេះ $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+....+\frac{1}{a_{20}}=7$ ជាចំនួនគត់ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឱ្យ $x\ ;\ y\ ;z$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz=1$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}\le\frac{1}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា

$$\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}\le\frac{1}{2}$$

យើងមាន $(x+1)^2+y^2+1=x^2+y^2+2x+2$

ដោយ $x^2+y^2\ge 2xy$

គេទាញ $(x+1)^2+y^2+1\ge 2(xy+x+1)$

នាំឱ្យ $\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}\le\frac{1}{2}.\frac{1}{xy+x+1}$

គេមាន $xyz=1$ នោះគេអាចយក $x=\frac{b}{a}$; $y=\frac{c}{b}$, $z=\frac{a}{c}$

ដែល $a>0$; $b>0$; $c>0$ ។

គេបាន $xy+x+1=\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+1=\frac{a+b+c}{a}$

ហេតុនេះ $\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}\le\frac{1}{2}.\frac{a}{a+b+c}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន :

$$\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1}\le\frac{1}{2}.\frac{b}{a+b+c}\quad(2)$$

$$\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}\le\frac{1}{2}.\frac{c}{a+b+c}\quad(3)$$

ធ្វើផលបូកវិសមភាព (1) ; (2) និង (3) គេបាន :

$$\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1}+\frac{1}{(y+1)^2+z^2+1}+\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}\le\frac{1}{2}$$

លំហាត់ទី១៧

គេឱ្យ $a\,;b\,;c$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$a(b^2-\sqrt{b})+b(c^2-\sqrt{c})+c(a^2-\sqrt{a})\ge 0$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $a(b^2-\sqrt{b})+b(c^2-\sqrt{c})+c(a^2-\sqrt{a})\ge 0$

ដោយ $abc=1$ នោះគេអាចតាង $a=\frac{x^2}{y^2}\ ;b=\frac{y^2}{z^2}\ ;c=\frac{z^2}{x^2}$

ដែល $x>0\ ;y>0\ ;z>0$ ។

វិសមភាពខាងលើសមមូល :

$$\frac{x^2}{y^2}\left(\frac{y^4}{z^4}-\frac{y}{z}\right)+\frac{y^2}{z^2}\left(\frac{z^4}{x^4}-\frac{z}{x}\right)+\frac{z^2}{x^2}\left(\frac{x^4}{y^4}-\frac{x}{y}\right)\ge 0$$

$$\frac{x^2y^2}{z^4}-\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2z^2}{x^4}-\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2x^2}{y^4}-\frac{z^2}{xy}\ge 0$$

$$\frac{2x^2y^2}{z^4}-\frac{2x^2}{yz}+\frac{2y^2z^2}{x^4}-\frac{2y^2}{zx}+\frac{2z^2x^2}{y^4}-\frac{2z^2}{xy}\ge 0$$

$$\left(\frac{xy}{z^2}-\frac{yz}{x^2}\right)^2+\left(\frac{yz}{x^2}-\frac{zx}{y^2}\right)^2+\left(\frac{zx}{y^2}-\frac{xy}{z^2}\right)^2\ge 0 \text{ ពិត}$$

លំហាត់ទី១៨

គេឱ្យ k ជាចំនួនគត់មួយ ហើយគេយក :

$n=\sqrt[3]{k+\sqrt{k^2-1}}+\sqrt[3]{k-\sqrt{k^2-1}}+1$

ចូរបង្ហាញថា n^3-3n^2 ជាចំនួនគត់មួយ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា n^3-3n^2 ជាចំនួនគត់មួយ

គេមានសមភាព :

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

តាង $a=\sqrt[3]{k+\sqrt{k^2-1}}$; $b=\sqrt[3]{k-\sqrt{k^2-1}}$; $c=1-n$

គេបាន $2k+(1-n)^3-3(1-n)=0$ (ព្រោះ $ab=1$)

ឬ $2k+1-3n+3n^2-n^3-3+3n=0$

គេទាញ $n^3-3n^2=2k-2$ ជាចំនួនគត់គ្រប់ចំនួនគត់ k ។

ដូចនេះ n^3-3n^2 ជាចំនួនគត់មួយ ។

លំហាត់ទី១៩

គេឱ្យអនុគមន៍ $f : IR \to IR$ ដោយ :

$$f(x) = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^6 - x^3 + 1}$$

ចូររកតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍នេះ ?

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍ $f(x)$

$$f(x) = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^6 - x^3 + 1}$$

យើងសំគាល់ឃើញថា $f(o) = 1$ កំនត់ ។ អនុគមន៍អាចសរសេរ :

$$f(x) = \frac{(x + \frac{1}{x} - 1)^3}{x^3 + \frac{1}{x^3} - 1} = \frac{(x + \frac{1}{x} - 1)^3}{(x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x}) - 1}$$

តាង $t = x + \frac{1}{x}$ ដែល $|t| \geq 2$ ឬ $t \in]-\infty ; -2] \cup [2 ; +\infty[$

គេបាន $f(x) = g(t) = \dfrac{(t-1)^3}{t^3 - 3t - 1}$ ។

យើងមាន $g'(x) = \dfrac{3(t-1)^2(t^3 - 3t - 1) - 3(t^2 - 1)(t-1)^3}{(t^3 - 3t - 1)^2}$

$$g'(t)=\frac{3(t-1)^2(t^3-3t-1-t^3+t^2+t-1)}{(t^3-3t-1)^2}$$

$$=\frac{3(t-1)^2(t^2-2t-2)}{(t^3-3t-1)^2}$$

បើ $g'(t)=0$ គេបាន $t=1$ ឬ $t^2-2t-2=0$

សមមូល $t_1=1\,;\,t_2=1+\sqrt{3}\,;\,t_3=1-\sqrt{3}$

ដោយ $t\in]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$ នោះគេទាញ $t=1+\sqrt{3}$

ដោយ $\frac{3(t-1)^2}{(t^3-3t-1)^2}>0$ គ្រប់ $t\in]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$

នោះ $g'(t)$ មានសញ្ញាដូច t^2-2t-2 ។

ត្រង់ចំនុច $t=1+\sqrt{3}$ អនុគមន៍ $g'(t)$ ប្តូរសញ្ញាពី $(-)$ ទៅ $(+)$

នាំឱ្យ $g(t)$ មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ $t=1+\sqrt{3}$

គឺ $g(1+\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\sqrt{3}(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}-3$

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ f គឺ $2\sqrt{3}-3$ ។

លំហាត់ទី២០

ចូរគណនាតម្លៃផលគុណ ៖

$P = (\sqrt{3} + \tan 1^o)(\sqrt{3} + \tan 2^o).....(\sqrt{3} + \tan 29^o)$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃផលគុណ ៖

$P = (\sqrt{3} + \tan 1^o)(\sqrt{3} + \tan 2^o).....(\sqrt{3} + \tan 29^o)$

$$= \prod_{k=1}^{29}\left(\sqrt{3} + \tan k^o\right)$$

គេមាន $\sqrt{3} + \tan k^o = \sqrt{3} + \dfrac{\sin k^o}{\cos k^o} = \dfrac{\sqrt{3}\cos k^o + \sin k^o}{\cos k^o}$

$$= \frac{2\cos(30^o - k^o)}{\cos k^o}$$

គេបាន $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{29}\left[\frac{2\cos(30^o - k^o)}{\cos k^o}\right]$

$$= \frac{2^{29}\cos 29^o \cos 28^o.....\cos 2^o \cos 1^o}{\cos 1^o \cos 2^o.....\cos 28^o \cos 29^o} = 2^{29}$$

ដូចនេះ $(\sqrt{3} + \tan 1^o)(\sqrt{3} + \tan 2^o).....(\sqrt{3} + \tan 29^o) = 2^{29}$

លំហាត់ទី២១

គេឱ្យ $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ និង $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + ... + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា :

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + ... + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$$

តាង $T_n = \frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + ... + \frac{a_n^2}{x_n} - \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$

ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $T_1 = \frac{a_1^2}{x_1} - \frac{a_1^2}{x_1} = 0 \geq 0$ ពិត

ចំពោះ $n = 2$ គេបាន :

$$T_2 = \frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} - \frac{(a_1 + a_2)^2}{x_1 + x_2}$$

$$= \frac{(x_1 + x_2)(a_1^2 x_2 + a_2^2 x_1) - x_1 x_2 (a_1 + a_2)^2}{x_1 x_2 (x_1 + x_2)}$$

$$= \frac{(a_1 x_2 - a_2 x_1)^2}{x_1 x_2 (x_1 + x_2)} \geq 0$$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $T_k \ge 0$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $T_{k+1} \ge 0$ ពិត

គេមាន $T_k \ge 0$ (ការឧបមាខាងលើ)

គេបាន $\dfrac{{a_1}^2}{x_1} + \dfrac{{a_2}^2}{x_2} + ... + \dfrac{{a_k}^2}{x_k} - \dfrac{(a_1 + a_2 + ... + a_k)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_k} \ge 0$

គេទាញ $\dfrac{{a_1}^2}{x_1} + \dfrac{{a_2}^2}{x_2} + ... + \dfrac{{a_k}^2}{x_k} \ge \dfrac{(a_1 + a_2 + ... + a_k)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_k}$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $\dfrac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}}$ គេបាន :

$$\frac{{a_1}^2}{x_1} + \frac{{a_2}^2}{x_2} + ... + \frac{{a_k}^2}{x_k} + \frac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}} \ge \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_k)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_k} + \frac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}}$$

ដោយ $\dfrac{(a_1 + a_2 + ... + a_k)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_k} + \dfrac{a_{k+1}^2}{x_{k+1}} \ge \dfrac{(a_1 + a_2 + ... + a_{k+1})^2}{x_1 + x_2 + ... + x_{k+1}}$

គេទាញបាន :

$$\frac{{a_1}^2}{x_1} + \frac{{a_2}^2}{x_2} + ... + \frac{{a_k}^2}{x_k} + \frac{a_{k+1}^2}{x_k} \ge \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1})^2}{x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1}}$$

នាំឱ្យ $T_{k+1} \ge 0$ ពិត ។

ដូចនេះ $\dfrac{{a_1}^2}{x_1} + \dfrac{{a_2}^2}{x_2} + ... + \dfrac{{a_n}^2}{x_n} \ge \dfrac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឱ្យ a ; b ; c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$

គេមាន :

$$T = \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)}$$

$$T = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{a(b+c)} + \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^2}{b(c+a)} + \frac{\left(\frac{1}{c}\right)^2}{c(a+b)} \geq \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}$$

ដោយ $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 = \left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right)^2 = (ab+bc+ca)^2$

ហើយ $a(b+c)+b(c+a)+c(a+b) = 2(ab+bc+ca)$

គេទាញ $T \geq \frac{ab+bc+ca}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{2} = \frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី២៣

គេឱ្យ $x\ ;\ y\ ;\ z>0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y}\ge\frac{1}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\dfrac{x}{x+2y+3z}+\dfrac{y}{y+2z+3x}+\dfrac{z}{z+2x+3y}\ge\dfrac{1}{2}$

តាង $T=\dfrac{x}{x+2y+3z}+\dfrac{y}{y+2z+3x}+\dfrac{z}{z+2x+3y}$

$$T=\frac{x^2}{x^2+2xy+3xz}+\frac{y^2}{y^2+2yz+3xy}+\frac{z^2}{z^2+2xz+3yz}$$

$$T\ge\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)}$$

គេបាន $T-\dfrac{1}{2}\ge\dfrac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)}-\dfrac{1}{2}$

$$T-\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)^2}\ge 0$$

គេទាញបាន $T\ge\dfrac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ $\dfrac{x}{x+2y+3z}+\dfrac{y}{y+2z+3x}+\dfrac{z}{z+2x+3y}\ge\dfrac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី២៤

គេឱ្យស៊ីត $a_1 ; a_2 ; ....; a_n$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ :

$a_1 = 0 ; |a_2| = |a_1 + 1| ; ...$ និង $|a_n| = |a_{n-1} + 1|$ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq -\dfrac{1}{2}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq -\dfrac{1}{2}$

យើងមាន $|a_n| = |a_{n-1} + 1|$

នាំឱ្យ $a_n{}^2 = a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} + 1$

គេបាន $\sum_{k=1}^{n+1}(a_k{}^2) = \sum_{k=1}^{n+1}(a_{k-1}^2 + 2a_{k-1} + 1) = \sum_{k=1}^{n}(a_k{}^2 + 2a_k + 1)$

$$a_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k{}^2) = \sum_{k=1}^{n}(a_k{}^2) + 2\sum_{k=1}^{n}(a_k) + n$$

គេទាញ $\sum_{k=1}^{n}(a_k) = \dfrac{a_{n+1}^2 - n}{2} \geq -\dfrac{n}{2}$

ដូចនេះ $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq -\dfrac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី២៥

គេឱ្យ a ; b ; c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\geq 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\geq 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$

តាង $T=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)$

$$=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}$$

$$=\left(\frac{a}{a}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{c}\right)-1$$

$$\geq\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{3b}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}-1$$

$$\geq\frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}-1=\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}-1$$

$$\geq\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}+3-1=2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$$

ដូចនេះ $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\geq 2(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}})$ ។

លំហាត់ទី២៦

គេឱ្យ a ; b ; c ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា :

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

ដោយ a ; b ; c ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណនោះគេបាន :

$$a+b-c>0\ ;\ b+c-a>0\ ;c+a-b>0$$

តាមវិសមភាព Cauchy – Schwartz គេបាន :

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}\le 2\sqrt{b}\quad(1)$$

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{c+a-b}\le 2\sqrt{a}\quad(2)$$

$$\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le 2\sqrt{c}\quad(3)$$

បូកវិសមភាព (1) ; (2) និង (3) គេទទួលបាន :

$$2(\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b})\le 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$$

ដូចនេះ

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$ ។

លំហាត់ទី២៧

គណនាផលបូក :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}\right]$$

រួចទាញរកតម្លៃ $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}\right]$$

គេមាន $\frac{3^k}{3^k-2^k}-\frac{3^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}}=\frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})}$

គេបាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3^k}{3^k-2^k}-\frac{3^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}}\right)$

ដូចនេះ $S_n = 3-\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}$ ។

ហើយ $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(3-\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}\right)=3-1=2$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$ ។

លំហាត់ទី២៨

គណនាផលគុណខាងក្រោម :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(\tan^{2^k}\frac{x}{2^k}\right) = \tan x.\tan^2\frac{x}{2}.\tan^4\frac{x}{4}.....\tan^{2^n}\frac{x}{2^n}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(\tan^{2^k}\frac{x}{2^k}\right) = \tan x.\tan^2\frac{x}{2}.\tan^4\frac{x}{4}.....\tan^{2^n}\frac{x}{2^n}$$

គេមាន $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{2\sin^2 a}{2\sin a\cos a} = \frac{2\sin^2 a}{\sin 2a}$

យក $a = \frac{x}{2^k}$ គេបាន $\tan\frac{x}{2^k} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2^k}}{\sin\frac{2x}{2^k}}$

គេទាញ $P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(2^{2^k}.\frac{\sin^{2^{k+1}}\frac{x}{2^k}}{\sin^{2^k}\frac{2x}{2^k}}\right) = 2^{2^{n+1}-1}.\frac{\sin^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}{\sin 2x}$

ដូចនេះ $P_n = 2^{(2^{n+1}-1)}.\frac{\sin^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}{\sin 2x}$ ។

លំហាត់ទី២៩

គណនាផលគុណខាងក្រោម :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left[(1-\tan^2\frac{x}{2^k})^{2^k}\right]$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left[(1-\tan^2\frac{x}{2^k})^{2^k}\right]$$

យើងមាន $1-\tan^2\frac{x}{2^k} = \dfrac{\cos^2\frac{x}{2^k}-\sin^2\frac{x}{2^k}}{\cos^2\frac{x}{2^k}} = \dfrac{\cos\frac{2x}{2^k}}{\cos^2\frac{x}{2^k}}$

គេបាន $P_n = \prod_{k=0}^{n}\left[\dfrac{\cos^{2^k}\frac{x}{2^{k-1}}}{\cos^{2^{k+1}}\frac{x}{2^k}}\right] = \dfrac{\cos 2x}{\cos^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}$

ដូចនេះ $P_n = \dfrac{\cos 2x}{\cos^{2^{n+1}}\frac{x}{2^n}}$ ។

លំហាត់ទី៣០

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\geq 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា :

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\geq 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \quad (\text{ R : កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ })$$

គេទាញ $\begin{cases} a=2R\sin A \\ b=2R\sin B \\ c=2R\sin C \end{cases} \quad (I)$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \quad (II)$$

យក (I) ជួសក្នុង (II) គេបាន :

$$4R^2\sin^2 A=4R^2\sin^2 B+4R^2\sin^2 C-8R^2\sin B\sin C\cos A$$

$$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A$$

គេទាញ $\cos A = \dfrac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2\sin B \sin C}$

ហេតុនេះ $\cot A = \dfrac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2\sin B \sin C \sin A}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\cot B = \dfrac{\sin^2 C + \sin^2 A - \sin^2 B}{2\sin C \sin A \sin B}$ (2)

ហើយនឹង $\cot C = \dfrac{\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C}$ (3)

បូកទំនាក់ទំនង (1) ; (2) និង (3) គេទទួលបាន :

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C} \quad (4)$$

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $A + B + C = \pi$ ឬ $A + B = \pi - C$

គេបាន $\tan(A + B) = \tan(\pi - C)$

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$$

គេទាញ $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cot A \cot B \cot C$ គេបាន :

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ ចំពោះគ្រប់ $x\ ;\ y\ ; z > 0$

គេមាន $\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 2xy \\ y^2 + z^2 \ge 2yz \\ z^2 + x^2 \ge 2zx \end{cases}$

គេបាន $2(x^2+y^2+z^2)\ge 2(xy+yz+zx)$

ឬ $x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2xy+2yz+2zx$ គេបាន ៖

$(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx)$

ដោយយក $x=\cot A$; $y=\cot B$; $z=\cot C$

គេបាន $(\cot A+\cot B+\cot C)^2 \ge 3$

នាំឱ្យ $\cot A+\cot B+\cot C \ge \sqrt{3}$ (5)

តាមទំនាក់ទំនង (4) និង (5) គេបាន ៖

$$\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C} \ge \sqrt{3}$$

ដូចនេះ $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C \ge 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$

លំហាត់ទី៣១

ចូរបង្ហាញថា $\left| \frac{6z - i}{2 + 3iz} \right| \le 1$ លុះត្រាតែ $|z| \le \frac{1}{3}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $|z| \le \frac{1}{3}$

គេមាន $\left| \frac{6z - i}{2 + 3iz} \right| \le 1$

លក្ខខណ្ឌ $2 + 3iz \ne 0$ ឬ $z \ne \frac{2i}{3}$

គេបាន $|6z - i| \le |2 + 3iz|$

$$|6z - i|^2 \le |2 + 3iz|^2$$

$$(6z - i)(6\bar{z} + i) \le (2 + 3iz)(2 - 3i\bar{z})$$

$$36z\bar{z} + 6iz - 6i\bar{z} + 1 \le 4 - 6i\bar{z} + 6iz + 9z\bar{z}$$

$$27z\bar{z} \le 3$$

$$z\bar{z} \le \frac{1}{9}$$

$$|z|^2 \le \frac{1}{9}$$

ដូចនេះ $|z| \le \frac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី៣២

គេឱ្យ $z_1\ ;\ z_2\ ;\ z_3\ ;....;z_n$ ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមានម៉ូឌុលស្មើ 1 ។

គេតាង $Z=\left(\sum_{k=1}^{n}(z_k)\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{z_k})\right)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $0\le Z\le n^2$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $0\le Z\le n^2$

ដោយ $z_1\ ;\ z_2\ ;\ z_3\ ;....;z_n$ ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលមានម៉ូឌុលស្មើ 1

នោះគេអាចតាង $z_k=\cos x_k+i.\sin x_k$

ដែល $x_k\in IR\ ;k=1\ ,2\ ,\ 3\ ,....,n$

គេបាន
$$Z=\left(\sum_{k=1}^{n}(z_k)\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{z_k})\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos x_k+i.\sin x_k\right)\times\sum_{k=1}^{n}\left(\cos x_k-i\sin x_k\right)$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{n}\cos x_k\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}\sin x_k\right)^2\ge 0$$

គេបាន $Z\ge 0$

ម្យ៉ាងទៀតតាមវិសមភាព Cauchy – Schwartz

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\cos x_k\right)^2 \le n\ \sum_{k=1}^{n}\left(\cos^2 x_k\right)$$

និង $\left(\sum_{k=1}^{n}\sin x_k\right)^2 \le n\ \sum_{k=1}^{n}\left(\sin^2 x_k\right)$

គេទាញ $Z \le n\sum_{k=1}^{n}\left(\cos^2 x_k\right) + n\sum_{k=1}^{n}(\sin^2 x_k)$

$$Z \le n\ \sum_{k=1}^{n}\left(\cos^2 x_k + \sin^2 x_k\right)$$

$$Z \le n.n = n^2$$

ដូចនេះ $0 \le Z \le n^2$ ។

សំគាល់ **:** គេអាចស្រាយ $Z \le n^2$ តាមមួយរបៀបទៀតដូចខាងក្រោម

ដោយ $|z_k| = 1$ នោះ $\bar{z}_k = \dfrac{1}{z_k}$ គ្រប់ $k = 1\ ;\ 2\ ;.....;\ n$

គេបាន $Z = \left(\sum_{k=1}^{n}(z_k)\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{z_k})\right)$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) \times \overline{\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)}$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n}\left(z_k\right)\right|^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|\right)^2 = n^2$$

គេទាញបាន $Z \le n^2$ ។

លំហាត់ទី៣៣

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច z ដែល $|z|=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$\sqrt{2} \le |1-z| + |1+z^2| \le 4$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sqrt{2} \le |1-z| + |1+z^2| \le 4$

តាង $z = \cos t + i.\sin t$

គេបាន $|1-z| = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = 2\left|\sin\frac{t}{2}\right|$

ហើយ $|1+z^2| = \sqrt{(1+\cos 2t)^2 + \sin^2 2t} = 2|\cos t|$

$$= 2\left|1 - 2\sin^2\frac{t}{2}\right|$$

គេបាន $|1-z| + |1-z^2| = 2\left(\left|\sin\frac{t}{2}\right| + \left|1-2\sin^2\frac{t}{2}\right|\right)$

ដោយយក $x = \sin\frac{t}{2}$; $-1 \le x \le 1$ ហើយតាងអនុគមន៍ f

កំនត់ដោយ $f(x) = |x| + |1-2x^2|$ ដែល $-1 \le x \le 1$

ចំពោះ $-1 \le x \le 1$ គេបាន $\frac{\sqrt{2}}{2} \le f(x) \le 2$

ដូចនេះ $\sqrt{2} \le |1-z| + |1+z^2| \le 4$ ។

លំហាត់ទី៣៤

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(v_n)_{n\in IN}$ កំនត់ដោយ :

$v_0 = \sqrt{5}$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $v_{n+1} = 2{v_n}^2 - 1$; $\forall n \ge 0$

បង្ហាញថា $v_{n+1} + \sqrt{v_{n+1}^2 - 1} = (v_n + \sqrt{{v_n}^2 - 1}\,)^2$

រួចគណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $v_{n+1} + \sqrt{v_{n+1}^2 - 1} = (v_n + \sqrt{{v_n}^2 - 1}\,)^2$

តាង $w_n = v_{n+1} + \sqrt{v_{n+1}^2 - 1}$ ដោយ $v_{n+1} = 2{v_n}^2 - 1$; $\forall n \ge 0$

គេបាន
$$\begin{aligned} w_n &= 2{v_n}^2 - 1 + \sqrt{(2{v_n}^2 - 1)^2 - 1} \\ &= 2{v_n}^2 - 1 + \sqrt{4{v_n}^4 - 4{v_n}^2} \\ &= {v_n}^2 + 2v_n\sqrt{{v_n}^2 - 1} + ({v_n}^2 - 1) \\ &= (v_n + \sqrt{{v_n}^2 - 1})^2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ $v_{n+1} + \sqrt{v_{n+1}^2 - 1} = (v_n + \sqrt{{v_n}^2 - 1}\,)^2$

គណនា v_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

តាង $t_n = \ln(v_n + \sqrt{{v_n}^2 - 1})$

គេបាន $t_{n+1} = \ln(v_{n+1} + \sqrt{v_{n+1}^2 - 1})$

ដោយ $v_{n+1} + \sqrt{v_{n+1}^2 - 1} = (v_n + \sqrt{{v_n}^2 - 1}\ )^2$

គេទាញ $t_{n+1} = 2\ln(v_n + \sqrt{{v_n}^2 - 1}) = 2t_n$

នាំឱ្យ (t_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$

និងតួ $t_0 = \ln(\sqrt{5} + 2)$ ។

តាមរូបមន្ត $t_n = t_0 \times q^n = 2^n \ln(\sqrt{5} + 2) = \ln(\sqrt{5} + 2)^{2^n}$

ដោយ $t_n = \ln(v_n + \sqrt{{v_n}^2 - 1})$

គេទាញបាន $v_n + \sqrt{{v_n}^2 - 1} = (\sqrt{5} + 2)^{2^n} \quad (1)$

ដោយ $(v_n + \sqrt{{v_n}^2 - 1})(v_n - \sqrt{{v_n}^2 - 1}) = 1$

គេទាញ $v_n - \sqrt{{v_n}^2 - 1} = \dfrac{1}{v_n + \sqrt{{v_n}^2 - 1}}$

$$v_n - \sqrt{{v_n}^2 - 1} = \frac{1}{(\sqrt{5} + 2)^{2^n}} = (\sqrt{5} - 2)^{2^n} \quad (2)$$

បូកសមីការ (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$$2v_n = (\sqrt{5} + 2)^{2^n} + (\sqrt{5} - 2)^{2^n}$$

ដូចនេះ $v_n = \dfrac{(\sqrt{5} + 2)^{2^n} + (\sqrt{5} - 2)^{2^n}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣៥

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_k)_{k\in IN}$ កំនត់ដោយ :

$u_0 = 9$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $u_{k+1} = \sum_{p=1}^{n}\left(C_n^p\, u_k{}^p\right)$

ដែល $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ ។

ចូរគណនា u_k ជាអនុគមន៏នៃ k និង n

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_k ជាអនុគមន៏នៃ k និង n :

យើងមាន $u_{k+1} = \sum_{p=1}^{n}\left(C_n^p\, u_k{}^p\right)$

ដោយ $\sum_{p=1}^{n}\left(C_n^p\, u_k{}^p\right) = -1 + \sum_{p=0}^{n}\left(C_n^p u_k{}^p\right) = -1 + (1+u_k)^p$

គេបាន $u_{k+1} = -1 + (1+u_k)^p$

គេទាញ $\ln(1+u_{k+1}) = p\ln(1+u_k)$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $\{\ln(1+u_k)\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន

ផលធៀបរួម p និងតួដំបូង $\ln(1+u_o) = \ln 10$

គេបាន $\ln(1+u_k) = p^k \ln 10$ នាំឱ្យ $u_k = 10^{p^k} - 1$ ។

លំហាត់ទី៣៦

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(u_n)_{n\in IN}$ កំនត់ដោយ :

$u_0 = 1$ និង ទំនាក់ទំនងកំនើន $u_{n+1} = 2u_n^2 + 4u_n + 1$

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេមាន $u_{n+1} = 2u_n^2 + 4u_n + 1$

គុណអង្គទាំងពីរ នឹង 2 គេបាន :

$$2u_{n+1} = 4u_n^2 + 8u_n + 2$$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង 2 គេបាន :

$$2(u_{n+1} + 1) = 4(u_n + 1)^2$$

តាង $v_n = \ln[2(u_n + 1)]$

គេបាន $v_{n+1} = \ln[2(u_{n+1} + 1)]$

$$v_{n+1} = \ln\left[4(u_n + 1)^2\right]$$

$$v_{n+1} = 2\ln[2(u_n + 1)]$$

នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានផលធៀបរួម $q = 2$

និងតួ $v_0 = \ln[2(u_0+1)] = \ln(4)$

តាមរូបមន្ត $v_n = v_0 \times q^n = 2^n \ln 4 = \ln 2^{2^{n+1}}$

ដោយ $v_n = \ln\left[2(u_n+1)\right]$

គេទាញ $2(u_n+1) = 2^{2^{n+1}}$

ដូចនេះ $u_n = 2^{2^{n+1}-1} - 1$ ។

លំហាត់ទី៣៧

គេឱ្យ A ; B ; C ជាមុំក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$

គេមាន $A + B + C = \pi$ នាំឱ្យ $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$

គេបាន $\tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)$

$$\frac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} = \cot\frac{C}{2}$$

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\tan\frac{C}{2}(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2})=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ គេបាន ៖

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

ដោយ $0 < A\ ;B\ ;C < \pi$ នោះ $0 < \frac{A}{2}\ ;\frac{B}{2}\ ;\frac{C}{2} < \frac{\pi}{2}$

គេបាន $\cot\frac{A}{2} > 0\ ;\cot\frac{B}{2} > 0\ ;\cot\frac{C}{2} > 0$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន ៖

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\ge 3\sqrt[3]{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}$$

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\ge 3\sqrt[3]{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}$$

$$\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)^3\ge 27\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$$

ដូចនេះ $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\ge 3\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៣៨

គេឱ្យ A ; B ; C ជាមុំស្រួចក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C)\ge(1+\sqrt{3})^3$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C)\ge(1+\sqrt{3})^3$

ដោយ A ; B ; C ជាមុំស្រួចនោះ $\tan A>0;\tan B>0;\tan C>0$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គ្រប់ $x>0$; $y>0$; $z>0$ គេមាន:

$$(1+x)(1+y)(1+z)=1+(x+y+z)+(xy+yz+zx)+xyz$$

$$(1+x)(1+y)(1+z)\ge 1+3\sqrt[3]{xyz}+3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}+xyz$$

$$(1+x)(1+y)(1+z)\ge(1+\sqrt[3]{xyz})^3$$

យក $x=\tan A$; $y=\tan B$; $z=\tan C$ គេបាន :

$$(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C)\ge(1+\sqrt{\tan A\tan B\tan C})^3$$

គេមាន $\tan(A+B)=\tan(\pi-C)$

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$$

គេទាញ $\tan A+\tan B+\tan B=\tan A\tan B\tan C$

$$x+y+z=xyz$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន :

$$x+y+z \ge 3\sqrt[3]{xyz}$$

$$xyz \ge 3\sqrt[3]{xyz}$$

គេទាញ $xyz \ge 3\sqrt{3}$ ឬ $\tan A \tan B \tan C \ge 3\sqrt{3}$

គេបាន $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan B) \ge (1+\sqrt[3]{3\sqrt{3}})^3$

ដូចនេះ $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C) \ge (1+\sqrt{3})^3$ ។

លំហាត់ទី៣៩

គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

គេដឹងថា n ចែកនឹង 7 ឱ្យសំណល់ 5 ហើយ n ចែកនឹង 8 ឱ្យសំណល់3

ក. តើចំនួន n នោះចែកនឹង 56 ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ខ. រកចំនួន n នោះដោយដឹងថា $5616 < n < 5626$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. តើចំនួន n នោះចែកនឹង 56 ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

តាមសម្មតិកម្មគេដឹងថា n ចែកនឹង 7 ឱ្យសំណល់ 5 នាំឱ្យមាន

$q_1 \in IN$ ដែល $n = 7q_1 + 5$ (1)

ហើយម្យ៉ាងទៀត n ចែកនឹង 8 ឱ្យសំណល់ 3 នោះនាំឱ្យមាន

$q_2 \in IN$ ដែល $n = 8q_2 + 3$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} n = 7q_1 + 5 \ (1) \\ n = 8q_2 + 3 \ (2) \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} 8n = 56q_1 + 40 \ (3) \\ 7n = 56q_2 + 21 \ (4) \end{cases}$

ដកសមីការ (3) និង (4) គេបាន $n = 56(q_1 - q_2) + 19$

តាង $q = q_1 - q_2$, $q \in IN$

គេបាន $n = 56q + 19$ ។

ទំនាក់ទំនងនេះមានន័យថា ចំនួន n នោះចែកនឹង 56 ឱ្យសំណល់ 19 ។

ខ. រកចំនួន n នោះដោយដឹងថា $5616 < n < 5626$

គេមាន $n = 56q + 19$ នាំឱ្យ $5616 < 56q + 19 < 5626$

ឬ $\frac{5597}{56} < q < \frac{5607}{56}$ ឬ $99 + \frac{53}{56} < q < 100 + \frac{7}{56}$

នាំឱ្យ $q = 100$ ។

ចំពោះ $q = 100$ គេបាន $n = 5600 + 19 = 5619$ ។

ដូចនេះចំនួន n នោះគឺ $n = 5619$ ។

លំហាត់ទី៤០

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំនត់លើ IR ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង:

$$x^2 f\left(x^3\right)+\frac{1}{(1+x)^2} f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=4x^3\left(1+x^4\right)^5$$

ចូរគណនាអាំងតេក្រាល: $I=\int_0^1 f(x).dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាល: $I=\int_0^1 f(x).dx$

តាង $x=t^3$ នាំឱ្យ $dx=3t^2.dt$ និងចំពោះ $x\in[\,0,1\,]$

នាំឱ្យ $t\in[0,1]$

គេបាន $I=\int_0^1 f(x).dx=\int_0^1 f(t^3).3t^2dt$

នាំឱ្យ $\frac{1}{3}I=\int_0^1 t^2 f(t^3).dt \quad (1)$

ម្យ៉ាងទៀតបើគេតាង $x=\frac{1-t}{1+t}$ នាំឱ្យ $dx=-\frac{2dt}{(1+t)^2}$

ចំពោះ $x\in[\,0,1\,]$ នាំឱ្យ $t\in[1,0]$

គេបាន :

$$I=\int_0^1 f(x).dx=\int_1^0 f\left(\frac{1-t}{1+t}\right).(-\frac{2dt}{(1+t)^2})=2\int_0^1\frac{1}{(1+t)^2}f(\frac{1-t}{1+t}).dt$$

គេទាញបាន $\frac{1}{2}I = \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2} f(\frac{1-t}{1+t}).dt \quad (2)$

បូកទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន ៖

$$\frac{1}{3}I + \frac{1}{2}I = \int_0^1 \left[t^2 f(t^3) + \frac{1}{(1+t)^2} f(\frac{1-t}{1+t}) \right].dt$$

តាមសម្មតិកម្មគេមាន ៖

$$x^2 f\left(x^3\right) + \frac{1}{(1+x)^2} f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 4x^3\left(1+x^4\right)^5$$

គេបាន ៖

$$\frac{5}{6}I = \int_0^1 4t^3(1+t^4)^5.dt = \left[\frac{1}{6}(1+t^4)^6\right]_0^1 = \frac{64-1}{6} = \frac{63}{6}$$

ដូចនេះ $\boxed{I = \int_0^1 f(x).dx = \frac{63}{5}}$ ។

លំហាត់ទី៤១

នៅក្នុងតំរុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ មានឯកតា 1cm នៅលើអក្ស័ គេឱ្យពីរចំនុច $A(0,-2,0)$ និង $B(1,-2,1)$ ។ (P)ជាប្លង់មានសមីការ $2x+2y+z+4=0$ ។ ចូរសរសេរសមីការប្លង់ (Q) កាត់តាមចំនុច A និង B ហើយផ្គុំជាមួយប្លង់ (P) បានមុំស្រួចមួយមានតម្លៃ $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរសមីការប្លង់ (Q)

តាង $(Q): ax+by+cz+d=0$ ជាសមីការដែលត្រូវរក ។

ដោយប្លង់ (Q) កាត់តាមចំនុច A និង B នោះកូអរដោនេចំនុច A និង B ផ្ទៀងផ្ទាត់នឹងសមីការប្លង់ (Q) ។

គេបាន $\begin{cases} a(0)+b(-2)+c(0)+d=0 \\ a(1)+b(-2)+c(1)+d=0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} -2b+d=0 \\ a-2b+c+d=0 \end{cases}$

នាំឱ្យគេទាញបាន $\begin{cases} b=\dfrac{d}{2} \quad (1) \\ a=-c \quad (2) \end{cases}$

ម្យ៉ាងទៀតបើយើងតាង θ ជាមុំផ្គុំដោយប្លង់ (P) និង (Q)

នោះគេបាន $\cos\theta = \dfrac{\vec{n}_P.\vec{n}_Q}{\|\vec{n}_P\|.\|\vec{n}_Q\|}$

ដោយ $\vec{n}_P(2,2,1)$ និង $\vec{n}_Q(a,b,c)$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់នៃប្លង់ (P) និង (Q) ។ គេបាន ៖

$$\cos\theta = \frac{2a+2b+c}{\sqrt{2^2+2^2+1}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{2a+2b+c}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ដោយ $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ (បំរាប់)

នោះគេទាញ $\dfrac{2a+2b+c}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

នាំឱ្យ $2(2a+2b+c)^2 = 9(a^2+b^2+c^2)$ (3)

យកសមីការ (1) និង (2) ជួសក្នុង (3) គេបាន ៖

$$2(-2c+d+c)^2 = 9(c^2+\frac{d^2}{4}+c^2)$$

$$2(-c+d)^2 = 9(2c^2+\frac{d^2}{4})$$

$$2(c^2-2cd+d^2) = 18c^2+\frac{9}{4}d^2$$

$$2c^2-4cd+2d^2-18c^2-\frac{9}{4}d^2=0$$

$$-16c^2-4cd-\frac{d^2}{4}=0$$

$$16c^2+4cd+\frac{d^2}{4}=0$$

$\left(4c+\frac{d}{2}\right)^2=0$ នាំឱ្យ $c=-\frac{d}{8}$ ។

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញ $b=\frac{d}{2}$ និង $a=\frac{d}{8}$ ។

យកតម្លៃ $a=\frac{d}{8}$, $b=\frac{d}{2}$ និង $c=-\frac{d}{8}$ ជួសក្នុងសមីការប្លង់ (Q)

គេបាន :

$(Q):\frac{d}{8}x+\frac{d}{2}y-\frac{d}{8}z+d=0$

សមមូល $(Q): x+4y-z+8=0$ ។

ដូចនេះសមីការប្លង់ (Q)ដែលត្រូវរកគឺ : $(Q): x+4y-z+8=0$

លំហាត់ទី៤២

គេឱ្យ a ; b ; c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា :

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca)$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា :

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca)\quad (1)$$

ជ្រើសរើស $A\,,B\,,C\in\,]\,0\,;\frac{\pi}{2}\,[$ ដែល $\begin{cases} a=\sqrt{2}\tan A\\ b=\sqrt{2}\tan B\\ c=\sqrt{2}\tan C\end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} a^2+2=2(1+\tan^2 A)=\dfrac{2}{\cos^2 A}\\ b^2+2=2(1+\tan^2 B)=\dfrac{2}{\cos^2 B}\\ c^2+2=2(1+\tan^2 C)=\dfrac{2}{\cos^2 C}\end{cases}$

នាំឱ្យ $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)=\dfrac{8}{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C}$

តាង $T=ab+bc+ca$

$$T=2(\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A)$$

$$T = \frac{2(\sin A \sin B \cos C + \sin B \sin C \cos A + \sin C \sin A \cos B)}{\cos A \cos B \cos C}$$

$$= \frac{2\,[\,\cos A \cos B \cos C - \cos(A+B+C)\,]}{\cos A \cos B \cos C}$$

វិសមភាព (1) សមមូលនឹង :

$$\frac{8}{\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C} \geq \frac{18\,[\cos A \cos B \cos C - \cos(A+B+C)]}{\cos A \cos B \cos C}$$

គេទាញបាន :

$$\cos A \cos B \cos C \left[\cos A \cos B \cos C - \cos(A+B+C)\right] \leq \frac{4}{9}$$

តាង $\theta = \dfrac{A+B+C}{3}$ ។

តាមវិសមភាព $AM - GM$ និង Jensen យើងបាន :

$$\cos A \cos B \cos C \leq \left(\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3}\right)^3 \leq \cos^3\theta$$

គេទាញ $\cos^3\theta\,(\cos^3\theta - \cos 3\theta) \leq \dfrac{4}{9}$

ដោយ $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

គេបាន $\cos^3\theta\,(3\cos\theta - 3\cos^3\theta) \leq \dfrac{4}{9}$

$$\cos^4\theta\,(1 - \cos^2\theta) \leq \frac{4}{27}$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេបាន :

$$\frac{\cos^2\theta}{2}.\frac{\cos^2\theta}{2}.(1-\cos^2\theta)\le\left(\frac{\frac{\cos^2\theta}{2}+\frac{\cos^2\theta}{2}+1-\cos^2\theta}{3}\right)^3$$

នាំឱ្យ $\cos^4\theta\,(1-\cos^2\theta)\le\frac{4}{27}$ ពិត ។

ដូចនេះ $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca)$ ពិត ។

លំហាត់ទី៤៣

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ក.បង្ហាញថា $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

ខ.បង្ហាញថា $\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$

គ.បង្ហាញថា $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

គេមាន $A+B+C=\pi$

គេបាន $\cos(A+B)=\cos(\pi-C)$

ឬ $\cos A\cos B - \sin A\sin B = -\cos C$

ឬ $\cos C = \sin A\sin B - \cos A\cos B$

តាង $T = 3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C)$

$$= 3 - 2(\cos A + \cos B + \sin A\sin B - \cos A\cos B)$$

$$= (\sin A - \sin B)^2 + (\cos A + \cos B - 1)^2 \geq 0$$

ដូចនេះ $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

ខ.បង្ហាញថា $\cos A\cos B\cos C \leq \frac{1}{8}$

ដោយ $A ; B ; C$ ជាមុំស្រួចនោះ $\cos A ; \cos B ; \cos C > 0$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេបាន ៖

$$\cos A + \cos B + \cos C \geq 3\sqrt[3]{\cos A\cos B\cos C}$$

$$\cos A\cos B\cos C \leq \left(\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3}\right)^3$$

ដោយ $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ （សម្រាយខាងលើ）

គេទាញ $\cos A\cos B\cos C \leq \left(\frac{\frac{3}{2}}{3}\right)^3 = \frac{1}{8}$

ដូចនេះ $\cos A\cos B\cos C \leq \frac{1}{8}$ ។

គ.បង្ហាញថា $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$

គេមាន $\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

ដោយ $\cos\frac{A+B}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}$

និង $\cos C=1-2\sin^2\frac{C}{2}$ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}\cos A+\cos B+\cos C&=1+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}\\&=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\\&=1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\\&=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\end{aligned}$$

ដោយ $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$ (សម្រាយខាងលើ)

គេទាញ $1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$ ។

លំហាត់ទី៤៤

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ តាង p ជាកន្លះបរិមាត្រ និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។ ចូរបង្ហាញថា :

ក. $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p}{4R}$

ខ. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p}{4R}$

តាង $BC=a\ ;\ AC=b\ ;\ AB=c$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស :

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ដោយ $\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1$

$a^2=b^2+c^2-2bc(2\cos^2\frac{A}{2}-1)$

គេទាញ $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}$

$=\frac{2p(2p-2a)}{4bc}=\frac{p(p-a)}{bc}$

នាំឱ្យ $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

ដូចគ្នាដែរ $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$ និង $\cos C=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

គេបាន $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc}$

ដោយ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abc}{4R}$

គេបាន $\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc}=\frac{1}{4R}$

ដូចនេះ $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p}{4R}$ ។

ខ. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos A\cos B\cos C$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

គេទាញ $\sin A=\frac{a}{2R}$; $\sin B=\frac{b}{2R}$; $\sin C=\frac{c}{2R}$

គេបាន $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a+b+c}{2R}=\frac{2p}{2R}=\frac{p}{R}$

ដោយ $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{p}{4R}$

ដូចនេះ $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

លំហាត់ទី៤៥

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ តាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា :

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$$

ខ. បើ ABC ជាត្រីកោណកែងនោះចូរស្រាយថា :

$$R\geq(\sqrt{2}+1)r$$

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$

គេមាន $\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

ដោយ $\cos\frac{A+B}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}$

និង $\cos C=1-2\sin^2\frac{C}{2}$ គេបាន :

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

គេបាន $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ដោយ $\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(1 - 2\sin^2\frac{A}{2})$

គេទាញ $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$

$$= \frac{(2p-2c)(2p-2b)}{4bc} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$$

នាំឱ្យ $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ :

$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$; $\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

គេបាន :

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

ដោយ $S = pr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

គេទាញ $\begin{cases} (p-a)(p-b)(p-c) = \frac{S^2}{p} = \frac{prS}{p} = Sr \\ abc = 4SR \end{cases}$

នាំឱ្យ $\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{r}{4R}$

ដូចនេះ $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$

ខ. បើ ABC ជាត្រីកោណកែងនោះចូរស្រាយថា $R \geq (\sqrt{2}+1)r$

ឧបមាថា ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A នោះ $A = \frac{\pi}{2}; B = \frac{\pi}{2} - C$

ដោយ $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$

គេបាន $0 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right) + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$

$$\sin C + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$$

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + C\right) = 1 + \frac{r}{R}$$

ដោយ $\sin\left(\frac{\pi}{4} + C\right) \leq 1$ នោះ $1 + \frac{r}{R} \leq \sqrt{2}$

នាំឱ្យ $R \geq \frac{r}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)r$

ដូចនេះ $R \geq (\sqrt{2}+1)r$ ។

លំហាត់ទី៤៦

ដោះស្រាយសមីការ :

$$\sqrt{x+\sqrt{4x+\sqrt{16x+.....+\sqrt{4^n x+3}}}} = \sqrt{x}+1$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ

$$\sqrt{x+\sqrt{4x+\sqrt{16x+.....+\sqrt{4^n x+3}}}} = \sqrt{x}+1$$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន :

$$x+\sqrt{4x+\sqrt{16x+.....+\sqrt{4^n x+3}}} = x+2\sqrt{x}+1$$

$$\sqrt{4x+\sqrt{16x+.....+\sqrt{4^n x+3}}} = 2\sqrt{x}+1$$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន :

$$4x+\sqrt{16x+.....+\sqrt{4^n x+3}} = 4x+4\sqrt{x}+1$$

$$\sqrt{16x+....+\sqrt{4^n x+3}} = 4\sqrt{x}+1$$

ធ្វើរបៀបនេះជាបន្តបន្ទាប់គេបាន :

$$4^n x+3 = 4^n x+2.2^n\sqrt{x}+1 \Rightarrow 2^n\sqrt{x}=1$$

គេទាញ $x=\dfrac{1}{4^n}$ ជាឫសសមីការ ។

លំហាត់ទី៤៧

ចូរបង្ហាញថានៅក្នុងគ្រប់ត្រីកោណគេមានទំនាក់ទំនង :

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{abc}{2R^2}$$

ដែល a ; b ; c ជាជ្រុង និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{abc}{2R^2}$

តាង $T = a\cos A + b\cos B + c\cos C$

គេមាន $a = 2R\sin A \ ; b = 2R\sin B \ ; \ c = 2R\sin C$

គេបាន $T = R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$

$$\begin{aligned}
&= R\left[2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C\right] \\
&= R\left[2\sin C\cos(A-B) + 2\sin C\cos C\right] \\
&= 2R\sin C\left[\cos(A-B) + \cos C\right] \\
&= 2R\sin C\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right] \\
&= 4R\sin A\sin B\sin C = 4R.\frac{abc}{8R^3} = \frac{abc}{2R^2}
\end{aligned}$$

ដូចនេះ $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{abc}{2R^2}$ ។

លំហាត់ទី៤៨

គណនាផលគុណ :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1+\tan^2 2^k x}{\left(1-\tan^2 2^k\right)^2}\right] \text{ ដែល } |x| < \frac{\pi}{2^{n+2}}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលគុណ $P_n = \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1+\tan^2 2^k x}{\left(1-\tan^2 2^k\right)^2}\right]$

តាមរូបមន្ត $\cos 2a = \frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$

គេបាន $\cos 2^{k+1} x = \frac{1-\tan^2 2^k x}{1+\tan^2 2^k x}$

ហើយ $1-\tan^2 2^k = \frac{\cos^2 2^k - \sin^2 2^k}{\cos^2 2^k x} = \frac{\cos 2^{k+1} x}{\cos^2 2^k x}$

គេបាន $\frac{1+\tan^2 2^k x}{(1-\tan^2 2^k x)^2} = \frac{\cos^2 2^k x}{\cos^2 2^{k+1} x}$

ដូចនេះ $P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\cos^2 2^k x}{\cos^2 2^{k+1} x}\right) = \frac{\cos^2 2x}{\cos^2 2^{n+1} x}$ ។

លំហាត់ទី៤៩

គេឱ្យ a ; b ; c ; d និង x ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$\frac{\sin x}{a}=\frac{\sin 2x}{b}=\frac{\sin 3x}{c}=\frac{\sin 4x}{d}$$ ដែល $x\neq k\pi$; $k\in Z$

ចូរបង្ហាញថា $a^3(4b^2-d^2)=b^4(3a-c)$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $a^3(4b^2-d^2)=b^4(3a-c)$

តាង $\frac{\sin x}{a}=\frac{\sin 2x}{b}=\frac{\sin 3x}{c}=\frac{\sin 4x}{d}=t$

គេទាញ $\begin{cases}\sin x=at\\ \sin 2x=bt\\ \sin 3x=ct\\ \sin 4x=dt\end{cases}$

គេមាន $\sin 4x=2\sin 2x\cos 2x$

$$\sin^2 4x=4\sin^2 2x\cos^2 2x$$

$$\sin^2 4x=4\sin^2 2x(1-\sin^2 2x)$$

$$d^2t^2 \quad =4b^2t^2(1-b^2t^2)$$

គេទាញ $t^2=\frac{1}{b^2}\left(1-\frac{d^2}{4b^2}\right)$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$$\sin 3x = \sin x(3 - 4\sin^2 x)$$

$$ct = at(3 - 4a^2t^2)$$

គេទាញ $t^2 = \frac{1}{4a^2}(3 - \frac{c}{a})$ (2)

ផ្ទឹម (1) និង (2) គេបាន ៖

$$\frac{1}{b^2}\left(1 - \frac{d^2}{4b^2}\right) = \frac{1}{4a^2}\left(3 - \frac{c}{a}\right)$$

$$\frac{4b^2 - d^2}{4b^4} = \frac{3a - c}{4a^3}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង a^3b^4 គេបាន $a^3(4b^2 - d^2) = b^4(3a - c)$

ដូចនេះ $a^3(4b^2 - d^2) = b^4(3a - c)$ ។

លំហាត់ទី៥០

គេឱ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា :

ក. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

ខ. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\le\frac{\sqrt{3}}{9}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា

ក. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

តាមរូបមន្ត $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$

គេបាន $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\cot\frac{C}{2}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\tan\frac{C}{2}(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2})=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

ដូចនេះ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$ ។

ខ. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\le\frac{\sqrt{3}}{9}$

តាមវិសភាព $AM-GM$ គេបាន :

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\ge 3\sqrt[3]{\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)^2}$$

$$1\ge 3\sqrt[3]{\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)^2}$$

គេទាញ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\le\sqrt{\frac{1}{27}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$

ដូចនេះ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\le\frac{\sqrt{3}}{9}$ ។

លំហាត់ទី៥១

គេឱ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}.\tan\frac{C}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}.\tan\frac{C}{2}$

គេមាន $a=2R\sin A$; $b=2R\sin B$ (R កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ)

គេបាន $\frac{a-b}{a+b}=\frac{2R(\sin A-\sin B)}{2R(\sin A+\sin B)}$

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}.\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})}$$

$$\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}.\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

ដូចនេះ $\frac{a-b}{a+b}=\tan\frac{A-B}{2}.\tan\frac{C}{2}$ ។

លំហាត់ទី៥២

ចូរបង្ហាញថា :

$$(\sin x + a\cos x)(\sin x + b\cos x) \le 1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា :

$$(\sin x + a\cos x)(\sin x + b\cos x) \le 1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (1)$$

-បើ $\cos x = 0$ នោះ $\sin^2 x \le 1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ពិត

-បើ $\cos x \ne 0$ យើងចែកអង្គទាំងពីរនៃ (1) នឹង $\cos^2 x$

$$(\tan x + a)(\tan x + b) \le \left[1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\frac{1}{\cos^2 x}$$

តាង $t = \tan x$ នោះ $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2$

គេបាន $(t+a)(t+b) = \left[1 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\left(1 + t^2\right)$

$$t^2 + (a+b)t + ab \le 1 + t^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 t^2$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 t^2-(a+b)t+1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab\geq 0$$

$$\left(\frac{a+b}{2}t-1\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\geq 0$$ ពិត

ដូចនេះ $(\sin x+a\cos x)(\sin x+b\cos x)\leq 1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ។

លំហាត់ទី៥៣

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច និង ជ្រុង a ; b ; c និងផ្ទៃក្រឡា K ។ ចូរស្រាយថា :

$$\sqrt{a^2b^2-4K^2}+\sqrt{b^2c^2-4K^2}+\sqrt{c^2a^2-4K^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា :

$$\sqrt{a^2b^2-4K^2}+\sqrt{b^2c^2-4K^2}+\sqrt{c^2a^2-4K^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

គេមាន $K=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$

តាង $T=\sqrt{a^2b^2-4K^2}+\sqrt{b^2c^2-4K^2}+\sqrt{c^2a^2-4K^2}$

$$=\sqrt{a^2b^2\cos^2 C}+\sqrt{b^2c^2\cos^2 A}+\sqrt{c^2a^2\cos^2 B}$$

$$T = ab\cos C + bc\cos A + ca\cos B$$
$$= ab\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + bc\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + ca\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$
$$= \frac{a^2+b^2-c^2+b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2}{2}$$
$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

ដូចនេះ

$$\sqrt{a^2b^2-4K^2} + \sqrt{b^2c^2-4K^2} + \sqrt{c^2a^2-4K^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

លំហាត់ទី៥៤

ប្រសិនបើ $xyx = (1-x)(1-y)(1-z)$ ដែល $0 \le x;y;z \le 1$

ចូរបង្ហាញថា $x(1-z)+y(1-x)+z(1-y) \ge \frac{3}{4}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា :

$$x(1-z)+y(1-x)+z(1-y) \ge \frac{3}{4}$$

គេមាន $(x-\frac{1}{2})^2 = x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0$ ចំពោះគ្រប់ x

គេទាញ $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ ដោយ $0 \leq x \leq 1$ នោះគេទាញបាន :

$0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ ។ ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន :

$0 \leq y(1-y) \leq \frac{1}{4}$ និង $0 \leq z(1-z) \leq \frac{1}{4}$

យើងបាន $xyz(1-x)(1-y)(1-z) \leq \frac{1}{64}$

ដោយ $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$ នោះគេទាញ :

$(xyz)^2 \leq \frac{1}{64}$ នាំឱ្យ $xyz \leq \frac{1}{8}$ ។

តាង $T = x(1-z) + y(1-x) + z(1-y)$

$$= (x+y+z) - (xy+yz+xz)$$

ដោយ $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$

ឬ $xyz = 1 - (x+y+z) + (xy+yz+zx) - xyz$

ឬ $(x+y+z) - (xy+yz+zx) = 1 - 2xyz$

គេទាញ $T = 1 - 2xyz \geq 1 - 2\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{4}$

ដូចនេះ $x(1-z) + y(1-x) + z(1-y) \geq \frac{3}{4}$

លំហាត់ទី៥៥

គេឱ្យ a ; b ; c ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយដែលមាន
បរិមាត្រស្មើ 2 ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{3}{2} < a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{3}{2} < a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$

ដោយបរិមាត្ររបស់ត្រីកោណនេះស្មើ 2 នោះជ្រុងទាំងបីa ; b ; c
របស់ត្រីកោណសុទ្ធតែតូចជាង 1 ។

យើងបាន $S = \frac{1}{2}bc\sin A < \frac{1}{2}$

តាមរូបមន្តហេរុង $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ដោយ $p = 1$

នោះ $S = \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < \frac{1}{2}$

គេទាញ $0 < (1-a)(1-b)(1-c) < \frac{1}{4}$

ឬ $0 < 1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc < \frac{1}{4}$

ឬ $0 < 1-2+(ab+bc+ca)-abc < \frac{1}{4}$

ឬ $1 < (ab + bc + ca) - abc < \frac{5}{4}$

ឬ $2 < 2(ab + bc + ca) - 2abc < \frac{5}{2}$

គេមាន $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

គេទាញ ៖

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = (a + b + c)^2 + 2abc - 2(ab + bc + ca)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 4 - \left[2(ab + bc + ca) - 2abc\right]$$

ដោយ $2 < 2(ab + bc + ca) - 2abc < \frac{5}{2}$

គេបាន $4 - \frac{5}{2} < a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 4 - 2$

ដូចនេះ $\frac{3}{2} < a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$ ។

✍✍✍✍✍

លំហាត់ទី៥៦

គេឱ្យ $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{3^k}\right) = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{3^2}{3^3} + ... + \frac{n^2}{3^n}$

គណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty} S_n$

ដំណោះស្រាយ

គណនា S_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{3^k}\right) = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{3^2}{3^3} + ... + \frac{n^2}{3^n}$$

តាង $t_k = \frac{k^2}{3^k}$ ចំពោះគ្រប់ $k \geq 1$

គេបាន $3t_{k+1} - t_k = \frac{(k+1)^2}{3^k} - \frac{k^2}{3^k} = \frac{2k+1}{3^k}$

យក $T_k = 3t_{k+1} - t_k = \frac{2k+1}{3^k}$

គេបាន $3T_{k+1} - T_k = \frac{2k+3}{3^k} - \frac{2k+1}{3^k} = \frac{2}{3^k}$

ឬ $3(3t_{k+2} - t_{k+1}) - (3t_{k+1} - t_k) = \frac{2}{3^k}$

ឬ $9t_{k+2} - 6t_{k+1} + t_k = \frac{2}{3^k}$

ដោយគេមាន :

$$9t_{k+2}-6t_{k+1}+t_k=9(t_{k+2}-t_{k+1})+3(t_{k+1}-t_k)+4t_k$$

គេទាញ $t_k=\frac{1}{2}.\frac{1}{3^k}-\frac{9}{4}(t_{k+2}-t_{k+1})-\frac{3}{4}(t_{k+1}-t_k)$

គេបាន $S_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3^k}\right)-\frac{9}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(t_{k+2}-t_{k+1}\right)-\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(t_{k+1}-t_k\right)$

$$=\frac{1}{6}.\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{9}{4}(t_{n+2}-t_2)-\frac{3}{4}(t_{n+1}-t_1)$$

$$=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{3^n})-\frac{9}{4}t_{n+2}-\frac{3}{4}t_{n+1}+\frac{9}{4}t_2+\frac{3}{4}t_1$$

ដោយ $t_k=\frac{k^2}{3^k}$

គេបាន $t_1=\frac{1}{3}$; $t_2=\frac{4}{9}$; $t_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}$; $t_{n+2}=\frac{(n+2)^2}{3^{n+2}}$

$$S_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4.3^n}-\frac{9}{4}.\frac{(n+2)^2}{3^{n+2}}-\frac{3}{4}.\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}+\frac{9}{4}.\frac{4}{9}+\frac{3}{4}.\frac{1}{3}$$

ដូចនេះ $S_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}.\frac{n^2+3n+3}{3^n}$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+3n+3}{3^n}=0$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី៥៧

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a ; AC = b \ ; AB = c$

តាង $p = \frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនងខាងក្រោម :

ក. $bc + ca + ab = p^2 + r^2 + 4Rr$

ខ. $a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$

គ. $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \frac{r}{p}$

ឃ. $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = \frac{4R+r}{p}$

ង. $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \frac{p}{r}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនងខាងក្រោម :

ក. $bc + ca + ab = p^2 + r^2 + 4Rr$

តាមរូបមន្តហេរុងគេបាន :

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន :

$p(p-a)(p-b)(p-c)=p^2r^2$

$(p-a)(p-b)(p-c)=pr^2$

$p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p-abc=pr^2$

ដោយ $a+b+c=2p$ ហើយ $S=pr=\dfrac{abc}{4R}$ ឬ $abc=4pRr$

គេបាន $p^3-2p^3+(ab+bc+ca)p-4pRr=pr^2$

គេទាញ $ab+bc+ca=\dfrac{pr^2+p^3+4pRr}{p}=r^2+p^2+4Rr$

ដូចនេះ $bc+ca+ab=p^2+r^2+4Rr$

ខ. $a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8Rr$

គេមាន $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

ដោយ $bc+ca+ab=p^2+r^2+4Rr$ និង $a+b+c=2p$

គេបាន $a^2+b^2+c^2=4p^2-2(p^2+r^2+4Rr)$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8Rr$

គ. $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{p}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស :

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ដោយ $\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}$

$a^2=b^2+c^2-2bc(1-2\sin^2\frac{A}{2})$

គេទាញ $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$

$$=\frac{(2p-2c)(2p-2b)}{4bc}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$$

នាំឱ្យ $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

ម្យ៉ាងទៀត

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ដោយ $\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1$

$a^2=b^2+c^2-2bc(2\cos^2\frac{A}{2}-1)$

គេទាញ $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}$

$$=\frac{2p(2p-2a)}{4bc}=\frac{p(p-a)}{bc}$$

នាំឱ្យ $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

គេបាន $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេទាញ :

$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$; $\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$

ធ្វើវិធីគុណគេបាន :

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}}$$

$$=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p^2}$$

$$=\frac{S}{p^2}=\frac{pr}{p^2}=\frac{r}{p}$$

ដូចនេះ $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{p}$ ។

ឃ. $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}$

តាង $T=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}$

ដោយគេមាន $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$; $\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$

នោះគេបាន :

$$T=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}+\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}+\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

$$=\frac{(p-b)(p-c)+(p-a)(p-c)+(p-a)(p-b)}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$=\frac{3p^2-(b+c+a+c+a+b)p+bc+ac+ab}{S}$$

$$T=\frac{3p^2-2(a+b+c)p+(ab+bc+ca)}{pr}$$

ដោយ $bc+ca+ab=p^2+r^2+4Rr$ និង $a+b+c=2p$

$$T=\frac{3p^2-4p^2+p^2+r^2+4Rr}{pr}=\frac{r+4R}{p}$$

ដូចនេះ $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}$

ង. $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{p}{r}$

គេមាន $A+B+C=\pi$ នាំឱ្យ $\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$

តាមរូបមន្ត $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$

គេបាន $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\cot\frac{C}{2}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\tan\frac{C}{2}(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2})=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ គេបាន :

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

ដោយ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{p}$

ដូចនេះ $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{p}{r}$

✍✍✍✍✍

លំហាត់ទី៥៨

គេឱ្យ $x\,;\,y\,;\,z$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x+y+z=1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)\ge 8$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)\ge 8$$

គេមាន $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)=\frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{xyz}$

ដោយ $x+y+z=1$ នាំឱ្យ $\begin{cases}1-x=y+z\\1-y=x+z\\1-z=x+y\end{cases}$

គេបាន $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)=\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{xyz}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$y+z\ge 2\sqrt{yz}$; $z+x\ge 2\sqrt{zx}$ និង $x+y\ge 2\sqrt{xy}$

គេបាន $(y+z)(z+x)(x+y)\ge 8xyz$

នាំឱ្យ $\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{xyz} \geq 8$

ដូចនេះ $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right) \geq 8$ ។

លំហាត់ទី៥៩

គេឱ្យ $a\,;\,b\,;\,c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2=1$

បង្ហាញថា $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$

តាង $T=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-3-2.\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$

ដោយ $a^2+b^2+c^2=1$ នោះគេទាញ :

$$\frac{1}{a^2}=1+\frac{b^2+c^2}{a^2}\;;\;\frac{1}{b^2}=1+\frac{a^2+c^2}{b^2}\;;\;\frac{1}{c^2}=1+\frac{a^2+b^2}{c^2}$$

ធ្វើវិធីបូកសមភាពទាំងនេះគេបាន :

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=3+a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+b^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

កន្សោម T អាចសរសេរ :

$$T = a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+b^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)-2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)$$

$$= a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 \geq 0$$

ដូចនេះ $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$ ។

📖📖📖📖📖

សូមរង់ចាំអានភាគទី៤

លំហាត់អនុវត្តន៍

ឈឈឈ❀លលល

១-គណនាផលបូក :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{10^k}\right) = \frac{1^2}{10} + \frac{2^2}{100} + \frac{3^2}{1000} + \dots + \frac{n^2}{1000\dots000}$$

រួចទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$ ។

២-គេឱ្យ $\{x_n\}$ ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតកំនត់ដោយ :

$$x_1 = \sqrt{5} \;;\quad x_2 = \sqrt{5+\sqrt{13}} \;;\quad x_3 = \sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{5}}}$$

$$x_4 = \sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{5+\sqrt{13}}}} \;; \dots\dots$$

ចូរបង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)$ មាន រួចកំនត់តម្លៃរបស់វា ។

៣-ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនពិតនៃសមីការ :

$$\sqrt{x_1 - 1} + 2\sqrt{x_2 - 4} + \dots + n\sqrt{x_n - n^2} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{2}$$

៤-គេឱ្យ $a\,;b\,;c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

៥-បង្ហាញថា $1 + \frac{1}{\sqrt[n]{2}} + \frac{1}{\sqrt[n]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} > n\sqrt[n]{\frac{2}{n+1}}$ ។

៦-ចូរបង្ហាញថា $\sum_{k=1}^{2^n}\left(\log_2 k\right)=(n-2)2^n+n+2$ គ្រប់ $n\geq 2$ ។

៧-គេឱ្យ $f: C\to C$ ជាអនុគមន៍មួយកំនត់ដោយ $f(z).f(iz)=z^2$

ចំពោះគ្រប់ $z\in C$ ។

ចូរបង្ហាញថា $f(z)+f(-z)=0$ ចំពោះគ្រប់ $z\in C$ ។

៨-ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចំនួន :

$$\frac{\left(17+12\sqrt{2}\right)^n+\left(17-12\sqrt{2}\right)^n}{4\sqrt{2}}$$

ជាចំនួនគត់ និង មិនមែនជាការេប្រាកដ ។

៩-គេយក $(u_n)_{n\geq 1}$ ជាស៊ីត Fibonacci ដែលកំនត់ដោយ :

$u_1=u_2=1$ និង $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$

បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n\geq 6$ រវាង u_n និង u_{n+1} មានមួយជាការេ

ប្រាកដ ។

១០-បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ ចំនួន $n!+5$ មិនមែនជាការេ

ប្រាកដ ។

១១-ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនគត់នៃសមីការ :

$$(x^2+1)(y^2+1)+2(x-y)(1-xy)=4(1+xy)$$

១២-គេកំនត់ស៊ីត $(a_n)_{n\geq 1}$ ដោយ $a_1 = 1$

និង ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 1$ គេមាន $a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^{\ 2} - 2}$

ចូរបង្ហាញថា a_n ជាចំនួនគត់ចំពោះគ្រប់ n ។

១៣-គេឱ្យ $a_1 = a_2 = 97$ និង ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 2$

$a_{n+1} = a_n a_{n-1} + \sqrt{(a_n^{\ 2} - 1)(a_{n-1}^2 - 1)}$ ។

ក.បង្ហាញថា $2 + 2a_n$ ជាការេប្រាកដ

ខ. $2 + \sqrt{2 + 2a_n}$ ជាការេប្រាកដ

១៤-ចូរបង្ហាញថា $\cot^2\frac{\pi}{7} + \cot^2\frac{2\pi}{7} + \cot^2\frac{3\pi}{7} = 5$

១៥-គណនា $S_n = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\sin(kx)\cos(n-k)x\right]$

១៦-គេឱ្យ $a_0\ ;\ a_1\ ;\ a_2\ ;\ ...;\ a_n$ ជាចំនួនស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

ដែល $\tan(a_0 - \frac{\pi}{4}) + \tan(a_1 - \frac{\pi}{4}) + ... + \tan(a_n - \frac{\pi}{4}) \geq n - 1$ ។

បង្ហាញថា $\tan a_0 . \tan a_1 . \tan a_2 .... \tan a_n \geq n^{n+1}$ ។

១៧-គេឱ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$\left(\cot\frac{A}{2}\right)^2 + \left(2\cot\frac{B}{2}\right)^2 + \left(3\cot\frac{C}{2}\right)^2 = \left(\frac{6s}{7r}\right)^2$$

ដែល s ជាកន្លះបរិមាត្រ និង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណនេះ ។

ចូរបង្ហាញថាត្រីកោណ ABC ដូចទៅនឹងត្រីកោណ T មួយដែលមានរង្វាស់ជ្រុងទាំងអស់ជាចំនួនគត់គ្មានតួចែករួមរួចកំនត់ជ្រុងទាំងនេះ ?

១៨-ចូរបង្ហាញថាក្នុងគ្រប់ត្រីកោណគេមានវិសមភាព :

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\ge 4\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

១៩-ចូរបង្ហាញថាក្នុងគ្រប់ត្រីកោណគេមានវិសមភាព :

$$\frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos B}{b^3}+\frac{\cos C}{c^3}\ge\frac{81}{16p^3}$$

ដែល $a; b ; c$ ជារង្វាស់ជ្រុង និង p ជាកន្លះបរិមាត្រ ។

២០-គេឱ្យ $z_1 ; z_2 ; z_3$ ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r>0$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{1}{|z_1-z_2||z_1-z_3|}+\frac{1}{|z_2-z_1||z_2-z_3|}+\frac{1}{|z_3-z_1||z_3-z_2|}\ge\frac{1}{r^2}$$

២១-គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{k(n-k)!+k+1}{(k+1)!(n-k)!}\right]$

២២-ចូរបង្ហាញថា $(1-\cot 22^o)(1-\cot 23^o)=2$

២៣-គេឱ្យ $f_k(x)=\frac{1}{k}(\sin^k x+\cos^k x)\ ; k=1 , 2, 3 , ...$

ចូរបង្ហាញថា $f_4(x)-f_6(x)=\frac{1}{12}$ ចំពោះគ្រប់ x ។

២៤-គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ ចូរបង្ហាញថា :

ក. $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}$

ខ. $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\geq\frac{3}{4}$

គ. $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\leq\frac{9}{4}$

ឃ. $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$

២៥-ក.ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{\tan 3x}{\tan x}=\tan\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$$

ខ.គណនា $\prod_{k=1}^{n}\left[\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{3^k}\right).\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{3^k}\right)\right]$

២៦-បង្ហាញថាត្រីកោណ ABC មួយជាត្រីកោណសមបាតលុះត្រាតែ

$$a\cos B+b\cos C+c\cos A=\frac{a+b+c}{2}$$

២៧-គេឱ្យ a ; b ; c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$(ab+bc+ca-1)^2\leq(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$$

២៨-ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{1}{\sin 1^o\sin 2^o}+\frac{1}{\sin 2^o\sin 3^o}+...+\frac{1}{\sin 89^o\sin 90^o}=\frac{\cos 1^o}{\sin^2 1^o}$$

២៩-គេឱ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយមានជ្រុង a ; b ; c ហើយ x ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$a^x \cos A + b^x \cos B + c^x \cos C \le \frac{1}{2}\left(a^x + b^x + c^x\right)$$

៣០-គេឱ្យ x ; y ; z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

ក. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$

បើ $x + y + z = xyz$ ។

ខ. $\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$

បើ $0 < x ; y ; z < 1$ និង $xy + yz + zx = 1$ ។

៣១-គេឱ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចំពោះគ្រប់ $n = 1 ; 2 ; 3$ គេតាង :

$$x_n = 2^{n-3}(\cos^n A + \cos^n B + \cos^n C) + \cos A \cos B \cos C$$

ចូរបង្ហាញ $x_1 + x_2 + x_3 \ge \frac{3}{2}$ ។

៣២-គេឱ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ បង្ហាញថា :

$$\cot^3 A + \cot^3 B + \cot^3 C + 6\cot A \cot B \cot C \ge \cot A + \cot B + \cot C$$

៣៣-ដោះស្រាយសមីការ $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$ ។

ឯកសារយោង

1-360 Problems for Mathematical Contests
2-103 Trigonometry Problems
3-Complex Number from A to Z
4-Mathematical Olympiad in China
5-The IMO Compendium