រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន
បរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា និង ពាណិជ្ជកម្ម

គណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោក

IMO

USAMO

សម្រាប់សិស្សពូកែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២

Problems and Solutions

ភាគ២

ស្នាដៃបោះពុម្ពផ្សាយ

សៀវភៅគណិតវិទ្យា ៖

១_ដំណោះស្រាយលំហាត់គណិតវិទ្យា បោះពុម្ព ឆ្នាំ២០០០

(សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងចូលសាកលវិទ្យាល័យ និង អាហារូបករណ៍)

២_ពិភពស៊ីតចំនួនពិត (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១ និង សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា)

៣_ អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១ និង សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា)

៤_ ដំណោះស្រាយគំរូ ចំនួនកុំផ្លិច លីមីត ដេរីវេ (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១២)

៥_ សង្ខេបរូបមន្តគណិតវិទ្យា (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១_១២)

៦_ គំរូសិក្សាអនុគមន៍ (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១_១២)

៧_ កំនែលំហាត់គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០កម្មវិធីសិក្សាថ្មី (ភាគ១ ឆ្នាំ២០០៩)

៨_ **151** គណនាលីមីត (សម្រាប់ថ្នាក់ទី១១_១២)

✍✍✍✍✍

អ្នកចូលរួមត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក លឹម ឆុន

លោក សែន ពិសិដ្ឋ

លោកស្រី ឆុយ វីណា

លោក និត្យ ម៉េង

លោក ព្រឹម សុនិត្យ

លោក ផល ប៊ុនឆាយ

អ្នកត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិត្តសិរ

ការីកុំព្យូទ័រ

កញ្ញា លី គុណ្ណាកា

អ្នកនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លោក លឹម ផល្គុន និង លោក សែន ពិសិដ្ឋ

អារម្ភកថា

សៀវភៅ **គណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោក** ភាគ២ ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់នៅក្នុងដៃនេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបរៀងឡើងក្នុងគោលបំនងទុកជាឯកសារ សម្រាប់ជាជំនួយដល់អ្នកសិក្សាយកទៅសិក្សាស្រាវជ្រាវដោយខ្លួនឯង និង ម្យ៉ាងទៀតក្នុងគោលបំនងចូលរួមលើកស្ទួយវិស័យគណិតវិទ្យានៅប្រទេសកម្ពុជាយើងឲ្យកាន់តែរីកចម្រើនថែមទៀតដើម្បីបង្កើនធនធានមនុស្សឲ្យមានកាន់តែច្រើនដើម្បីជួយអភិវឌ្ឍន៍ប្រទេសជាតិរបស់យើង ។

នៅក្នុងសៀវនេះយើងខ្ញុំបានខិតខំស្រាវជ្រាវជ្រើសរើសយកលំហាត់យ៉ាងសម្រាំងបំផុតពីឯកសារបរទេសយ៉ាងច្រើនបំផុតដូចជា **103 Trigonometry Problems , Five Hundred Mathematical Challenges,Complex Numbers From A to … Z , Mathematical Olympiad in China,Mathematical Olympiad Challenges, Mathematical Olympiad Treasures, International Mathematical Olympiads 1959-1977, The IMO Compendium (1959-2004) , 360 Problems for Mathematical contest…**
និងឯកសារបរទេសផ្សេងៗទៀតតាមយៈនតរេនតេ យកមកធ្វើដំណោះស្រាយយ៉ាងក្បោះក្បាយដែលអាចឲ្យលោកអ្នកងាយយល់ឆាប់ចងចាំអំពីសិល្បៈនៃការដោះស្រាយទាំងអស់នេះ ។ ប៉ុន្តែទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ កង្វះខាត និង កំហុសឆ្គងដោយអចេតនាប្រាកដជាមានទាំងបច្ចេកទេស និង អក្ខរាវិរុទ្ធ ។ អាស្រ័យហេតុនេះ យើងខ្ញុំជាអ្នករៀបរៀងរង់ចាំដោយរីករាយជានិច្ចនូវមតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីសំណាក់អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដើម្បីជួយកែលំអសៀវភៅនេះឲ្យបានកាន់តែសុក្រិត្រភាពថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់នេះយើងខ្ញុំអ្នករៀបរៀងសូមគោរពជូនពរដល់អ្នកសិក្សាទាំងអស់ឲ្យមានសុខភាពមាំមួន និង ទទួលជ័យជំនះគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី ១៤ កុម្ភៈ ២០០៩

អ្នកនិពន្ធ លឹម ផល្លុន

Tel : 017 768 246

លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

គណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោក

ភាគ២

Problems and Solutions

ផ្នែកលំហាត់

១_គេឲ្យពីរចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+a)(1+b) \geq (1+\sqrt{ab})^2$

អនុវត្តន៍ រកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ ៖

$f(x) = (1+4^{\sin^2 x})(1+4^{\cos^2 x})$ ដែល $x \in IR$ ។

២_គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b និង c ។

ចូរបង្ហាញថា $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

៣_គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b និង c ។

ចូរបង្ហាញថា $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

៤_គេឲ្យ n ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1 ; a_2 ; a_3 ; .... ; a_n$

ដែលផលគុណ $a_1 . a_2 . a_3 .... a_n = 1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $(1+a_1)(1+a_2)....(1+a_n) \geq 2^n$

៥_គេឲ្យ $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ និង $0 < b < \dfrac{\pi}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\left(\dfrac{\sin^2 a}{\sin b}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos^2 a}{\cos b}\right)^2 = 1$

លុះត្រាតែ $a = b$ ។

៦_ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ចូរស្រាយថា ៖

$$(1+\sin x)(1+\cos x) \le \frac{3}{2} + \sqrt{2}$$

៧_គេឲ្យ $a_0 = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ និង $a_{n+1} = \frac{{a_n}^2 - 5}{2(a_n + 2)}$

ចំពោះគ្រប់ $n \ge 0$ ។

ចូរស្រាយថា $a_n = \cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right) - 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

៨_ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម ៖

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 9 \\ \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right) = 18 \end{cases}$$

៩_ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$n(\sqrt[n]{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

១០_គេឲ្យ n ចំនួន $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in (0,1)$ ហើយគេតាង

$$t_n = n.\frac{a_1.a_2.a_3\dots a_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}$$ ។

ចូរស្រាយថា $\sum_{k=1}^{n}\left(\log_{a_k} t_n\right) \geq (n-1)n$ ។

១១_គេឲ្យ m និង n ជាពីរចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $\frac{x^{mn}-1}{m} \geq \frac{x^n-1}{x}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x ។

១២_គេឲ្យ $x_n = 2^{2^n}+1$ ចំពោះគ្រប់ $n = 1, 2, 3, \dots$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\frac{2^2}{x_3}+\dots+\frac{2^{n-1}}{x_n} < \frac{1}{3}$

១៣_គេឲ្យ $f : (0, +\infty) \to IR$ ហើយមានចំនួនពិត $a > 0$

ដែល $f(a) = 1$ ។

ចូរបង្ហាញថាប្រសិនបើ $f(x)f(y) + f(\frac{a}{x})f(\frac{a}{y}) = 2f(xy)$

ចំពោះគ្រប់ $x, y \in (0, +\infty)$ នោះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ថេរ ។

១៤_គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ

$\sin^2 B + \sin^2 C = 1 + \sin B \sin C \cos A$ ។

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង ។

១៥_ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}+\frac{3^3-1}{3^3+1}+......+\frac{n^3-1}{n^3+1} > (n-1)\sqrt[(n-1)]{\frac{2}{3}}$$

១៦_គេឲ្យអនុគមន៍ $y=\frac{x^2+2mx+3m-8}{2\,(x^2+1)}$

ដែល $x \in IR$ និង mជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

តើគេអាចកំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍នេះអាចតាងឲ្យតម្លៃ

កូស៊ីនូសនៃមុំមួយបានឬទេ?

១៧_គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $x \in IR$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\frac{a+b}{1+a+b}) < f(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b})$

ចំពោះគ្រប់ $a>0, b>0$។

១៨_ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$-2 \le \frac{\cos 4x+4\sin 4x+1}{\cos 4x+2} \le \frac{8}{3}$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

១៩_គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $U_n=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+....+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}$

មាន n រ៉ាឌីកាល់ ។

ចូរស្រាយថា $U_n < 3$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

២០_គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច ៖

$$Z = (\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}) + i.(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x})$$

ដែល x ជាចំនួនពិត។

ចូរកំនត់រកម៉ូឌុលអប្បបរមានៃចំនួនកុំផ្លិចនេះ ?

២១_គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + ... + \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}}}}}$

ចូរកំនត់បណ្ដាតម្លៃ $x \in IN$ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$ មានតម្លៃលេខជាចំនួនគត់ ។

២២_គេឲ្យ x ជាចំនួនពិតដែល $60x^2 - 71x + 21 < 0$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sin\left(\frac{\pi}{3x-1}\right) < 0$ ។

២៣_គេឲ្យអនុគមន៍ ៖

$$f(x,y) = \frac{(x^2 - y^2)(1 - x^2y^2)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2} \ , \ x \ ; \ y \in IR$$

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x, y \in IR$ គេបាន $|f(x;y)| \le \frac{1}{4}$

២៤_ គេឲ្យស្វ៊ីត $U_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{(n)}$

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ក_ចូរកំនត់ U_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ខ_ចូរបង្ហាញថា $U_1 \times U_2 \times U_3 \times ...... \times U_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\dfrac{\pi}{3.2^n}}$ ។

គ_គេពិនិត្យស្វ៊ីត $V_n = 2^n \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{(n)}$ ។

ចូរគណនា V_n និង លីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ ។

២៥_គេឲ្យ $a \ge 1$ និង $b \ge 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \le 2\sqrt{\log_2(\dfrac{a+b}{2})}$

២៦_គេឲ្យ θ ជាចំនួនពិតដែល $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(\sin\theta)^{\cos\theta} + (\cos\theta)^{\sin\theta} > 1$

២៧_គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ក_ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin A + \sin B + \sin C \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ។

ខ_បង្ហាញថា $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ។

២៨_គេឲ្យសមីការ ៖

$$(E):\ x^2+2(2m+3)x+4m^2+8m+8=0$$

ក_ចូរកំនត់បណ្តាតម្លៃ $m\in IN$ ដើម្បីឲ្យសមីការនេះមានឬស

ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ ។

ខ_រកឬសដែលជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វរបស់សមីការ ។

២៩_M ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់បីដែលមានធាតុទាំងអស់ជាចំនួគត់ ។

គេដឹងថាផលគុណនៃធាតុទាំងបីតាមជួរដេកនីមួយៗ ផលគុណនៃ

ធាតុទាំងបីតាមជួរឈរនីមួយៗនិង ផលគុណនៃធាតុទាំងបីតាម

អង្កត់ទ្រូងស្មើនឹង m ដូចគ្នា ។

បង្ហាញថា m ជាគូបនៃចំនួនគត់ ។

៣០_គេឲ្យបួនចំនួនវិជ្ជមាន a , b , c , d ។

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$$

៣១_គេមានបីចំនួនពិត $a>0\,;b>0\,;c>0$ ។

ចូរស្រាយថា $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\ge 6abc$

៣២_គេឲ្យពីរចំនួន x និង y ខុសពីសូន្យ និង មានសញ្ញាដូចគ្នា ។

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}-3\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+4\ge 0$ ។

៣៣_គេឲ្យសមីការ $ax^2+bx+c=0\,,\ a\ne 0\,,\ a\ne c$ ។

តាង $\tan\alpha$ និង $\tan\beta$ ជាឫសរបស់សមីការខាងលើ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃកន្សោម ៖

$$A=a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta)$$

៣៤_ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចែកនឹង 8 ឱ្យសំណល់ 1 ។

ចំនួន n នោះចែកនឹង 5 ឱ្យសំណល់ 2 ។

ក-បើចំនួន n នោះចែកនឹង 40 ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ខ-រកចំនួន n នោះដោយដឹងថា $3940<n<4000$ ។

៣៥_ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} 5\,(\log_y x+\log_x y)=26 \\ xy=64 \end{cases}$$

៣៦_ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ $\begin{cases} 4^x \cdot 5^y = \dfrac{1}{400} \\ 5^x \cdot 6^y = \dfrac{1}{900} \end{cases}$

៣៧_ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$9^{x^2-x} + 3^{1-x^2} = 3^{(x-1)^2} + 1$$

៣៨_គេឲ្យ $a ; b ; c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដាច់ខាត ។

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \geq \dfrac{a+b+c}{2}$

៣៩_ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ បើគេដឹងថា :

$f(2x-1) + 2g(3x+1) = x^2$

និង $f(4x-3) - g(6x-2) = -2x^2 + 2x + 1$

ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ ។

៤០_គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a , b , c ។

កំនត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ ABC បើគេដឹងថា ៖

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

៥១_ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$

ខ. ចូរគណនាផលបូកខាងក្រោម ÷

$$S_n = \tan a + \frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{a}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n}$$

៥២_គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = x^2 - 2$ ដែល $x \in IR$

ក_គេយក $U_1 = f(x)$ និង $U_{n+1} = f(U_n)$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ចូរបង្ហាញថា $U_n = f_n\left[f[.......f[f(x)].......] \right]$ ។

ខ_ស្រាយថាបើ $x > 2$ គេបាន $U_n > 2$ គ្រប់ $n \in IN^*$ ។

គ_គេតាង $V_n = U_n - \sqrt{U_n{}^2 - 4}$ គ្រប់ $n \in IN^*$ និង $x > 2$ ។

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ចូរបង្ហាញថា $2V_{n+1} = V_n{}^2$ ។

ឃ_សន្មតថា $W_n = \ln V_n - \ln 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ចូររកប្រភេទនៃស្វ៊ីត W_n ។

ង_ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកអនុគមន៍ ÷

$F_n(x) = f_n\left[f\left[........f\left[f(x) \right]........\right]\right]$ ។

៥៣_គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 3x + 1}$ គ្រប់ $x \in IR$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$f\left(\frac{1+a+b}{2}\right) \geq f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$$ ។

៥៤_គេឱ្យខ្សែកោង $(C_m): \ y = f_m(x) = \frac{x^2+4mx-4m^2+1}{m-x}$

ចូរបង្ហាញថាមានខ្សែកោងពីរនៃគ្រួសារខ្សែកោង (C_m)

ដែលកាត់តាមចំនុច$M_0(x_0\,;y_0)$ ចំពោះគ្រប់$(x_0\,;y_0)\in IR^2$ ។

m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

៥៥_គេឱ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបី ។

គេដឹងថា $P(x)+2$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)^2$

ហើយ $P(x)-2$ ចែកដាច់នឹង $(x-1)^2$ ។

ចូរកំនត់រកពហុធា $P(x)$ ។

៥៦_គេឱ្យ $A = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}+i\right)^n - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}-i\right)^n$, $n \in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា $A = i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

៥៧_គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ :

$U_0 = \ln 3$ និង $U_{n+1} = \ln(1+e^{U_n})$, $n \in IN$ ។

ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៤៨_ដោះស្រាយសមីការ $47x + 29y = 1$ ក្នុងសំណុំចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ ។

៤៩_ចូរបង្ហាញថា $A_n = 3^{3n+2} + 7^{2n+3}$ ចែកដាច់នឹង 11 ជានិច្ចគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

៥០_ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន $E_n = 447^n + 462^n - 122^n - 124^n$ ចែកដាច់នឹង 221 ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

៥១_គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = e^x.\cos x$

ក. គណនា $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា $f'(x) = \sqrt{2}\, e^x \cos(x + \frac{\pi}{4})$

ខ. ដោយធ្វើវិចារតាមកំណើនចូរបង្ហាថាដេរីវេទី n កំនត់ដោយ

$$f^{(n)}(x) = \sqrt{2}^n e^x.\cos(x + \frac{n\pi}{4})$$

៥២_គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង

$BC = a\,, AC = b\,,\ AB = c$ ។

ឧបមាថា M ជាចំនុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណនេះ ហើយគេតាង $x\,, y$ និង z ជាចំងាយរៀងគ្នាពីចំនុច M ទៅជ្រុង BC , AC និង AB នៃត្រីកោណ ។ ចូរគណនាតម្លៃអប្បបរមានៃ $T = x^2 + y^2 + z^2$ ជាអនុគមន៍នៃ a, b, c ។

៥៣_ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $y = f(x)$ បើគេដឹងថា :

$f(x+\sqrt{x^2-2x+2}) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

៥៤_ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(O,\vec{i},\vec{j})$ គេឱ្យបួនចំនុច A , B , C ,D ដែលមានអាហ្វិករៀងគ្នា

$Z_A = 1+6i$, $Z_B = 4+5i$, $Z_C = 5+4i$ និង $Z_D = -2-3i$ ។

ចូរស្រាយថាចតុកោណ ABCD ចារិកក្នុងរង្វង់មួយដែលគេនឹងបញ្ជាក់ផ្ចិត និង កាំរបស់វា ។

៥៥_គេឲ្យត្រីធា $f(x) = ax^2+bx+c$ ដែល $a \neq 0$, $a,b,c \in IR$

ក_ចូរស្រាយថាបើ $\Delta = b^2-4ac < 0$ និង $a > 0$ នោះគេបាន

$f(x) > 0$, $\forall x \in IR$

ខ_ក្នុងករណីនេះគេសន្មតថា $\Delta = b^2-4ac < 0$ និង $a > 0$ ។

បើ $b > a$ ចំពោះគ្រប់ $\lambda \in IR$ ចូរបង្ហាញថា ÷

$$\frac{a(\lambda^2-k)+b(\lambda+k)+c}{b-a} > k$$

ដែល k ជាចំនួនពិតថេរមួយដែលគេឲ្យ ។

គ_អនុវត្តន៍ ចំពោះគ្រប់ត្រីធា $f(x) = ax^2+bx+c$

ដែល $a \neq 0$, $a,b,c \in IR$

បើ $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ និង $a > 0$ នោះបង្ហាញថាគេមាន ៖

$$\frac{a+b+a}{b-a} > 3$$ ។

៥៦_គេឲ្យ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)} \leq 1+\sqrt{2}$$

៥៧_ចូរដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} 4^x.3^{y+1} + 27^y = 171 \\ 8^x + 2^x.3^{1+2y} = 172 \end{cases}$

៥៨_ចូរដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases} 7x^3 - 3x^2y - 21xy^2 + 26y^3 = 342 \\ 9x^3 - 21x^2y + 33xy^2 - 28y^3 = 344 \end{cases}$$

៥៩_គេឲ្យសមីការ $(E): x^2 - 2\sqrt{2+a^2+b^2}.x + (1+a)(1+b) = 0$

ដែល a និង b ជាពីរចំនួនពិត ។

ក_ចូរកំនត់តម្លៃ a និង bដើម្បីឲ្យសមីការនេះមានឬសឌុប

រួចគណនាឬសឌុបនោះ ។

ខ_ក្រៅពីតម្លៃ a និង bខាងលើចូរបង្ហាញថាសមីការ (E)មានឬសពីរ

ជានិច្ចក្នុង IR ។

៦០_គេឲ្យពហុធា ៖

$$P_n(x) = 1 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_{n-1}x^{n-1} + x^n$$

ដែល $c_1 , c_2 , c_3 , ..., c_{n-1} \geq 0$ ។

សន្មតថាសមីការ $P_n(x) = 0$ មាន n ឫសជាចំនួនពិតអវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $P_n(2) \geq 3^n$ ។

៦១_ក_ប្រសិនបើ $p \geq -1$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$(1+p)^n \geq 1 + np \quad (1)$$ ។

ខ_គេឲ្យ $a_1 , a_2 , a_3 , ..., a_n$ ជា n ចំនួនមិនអវិជ្ជមាន ។

គេតាង $A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$

និង $G_n = \sqrt[n]{a_1 . a_2 . a_3 ...... a_n}$ ។

បង្ហាញថាប្រសិនបើ $G_k \leq A_k$ ហើយ $A_k \neq 0$

គេបាន $G_k{}^k . a_{k+1} \leq A_k{}^{k+1}(1+p)$ ដែល $p = \dfrac{a_{k+1}}{A_k} - 1$ ។

គ_ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 .... a_n}$$ ។

៦២_គេឲ្យ A , B , C ជារង្វាស់មុំក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ក_ចូរបង្ហាញថា $\cos A+\cos B+\cos C \le \frac{3}{2}$

ខ_ចូរបង្ហាញថា $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2} \le \frac{9}{4}$

គ_ចូរបង្ហាញថា $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2} \ge \frac{3}{4}$

ឃ_ចូរបង្ហាញថា $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$

៦៣_គេឲ្យសមភាព

$$\cot^2\frac{\pi}{2n+1}+\cot^2\frac{2\pi}{2n+1}+\cot^2\frac{3\pi}{2n+1}+......+\cot^2\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{n(2n-1)}{3}$$

ចូរបង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+..........+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$ ។

៦៤_គេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំនៃរង្វង់ចារិកក្នុង និង ចារិកក្រៅ ប្រស់ត្រីកោណកែង ABC មួយ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $R \ge (1+\sqrt{2})\,r$?

៦៥_គេឲ្យ a , b , c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព ៖

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0 \quad ?$$

៦៦_គេឲ្យ a , b , c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយដែលមានផ្ទៃក្រឡា

ស្មើនឹង S ។ ចូរស្រាយថា $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\,S$?

៦៧_គេយក I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC មួយដែល

$BC = a\ , AC = b\ ,\ AB = c$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនុច X ចូរស្រាយថា ៖

$$a.XA^2 + b.XB^2 + c.XC^2 = (a+b+c)XI^2 + abc$$

៦៨_គេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារិកក្នុង និង ចារឹកក្រៅ

នៃត្រីកោណមួយ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ d ជាចម្ងាយរវាងផ្ចិត

រង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅរបស់ត្រីកោណនោះគេបាន ៖

$d^2 = R(R - 2r)$?

៦៩_គេយក I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC មួយដែល

មានជ្រុង $BC = a\ , AC = b\ ,\ AB = c$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{IA^2}{bc} + \dfrac{IB^2}{ca} + \dfrac{IC^2}{ab} = 1$ ។

៧០_ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ចូរបង្ហាញថា ៖

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca)$$ ។

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

គេឲ្យពីរចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+a)(1+b) \ge (1+\sqrt{ab})^2$

អនុវត្តន៍ រកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ ៖

$f(x) = (1+4^{\sin^2 x})(1+4^{\cos^2 x})$ ដែល $x \in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(1+a)(1+b) \ge (1+\sqrt{ab})^2$

យើងមាន $(1+a)(1+b) = 1+(a+b)+ab \quad (1)$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $a+b \ge 2\sqrt{ab}$

តាម (1) គេទាញបាន $(1+a)(1+b) \ge 1+2\sqrt{ab}+ab$

ដោយ $1+2\sqrt{ab}+ab = (1+\sqrt{ab})^2$

ដូចនេះ $(1+a)(1+b) \ge (1+\sqrt{ab})^2$

ដោយប្រើវិសមភាពខាងលើនេះគេទាញបាន ៖

$f(x) = (1+4^{\sin^2 x})(1+4^{\cos^2 x}) \ge (1+\sqrt{4^{\sin^2 x+\cos^2 x}})^2 = 9$

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍ស្មើនឹង 9 ។

លំហាត់ទី២

គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b និង c ។

ចូរបង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន ៖

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab \quad (1)$$

$$\frac{b^2+c^2}{2} \geq bc \quad (2)$$

$$\frac{c^2+a^2}{2} \geq ca \quad (3)$$

បូកវិសមភាព $(1), (2)$ និង (3) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$\frac{a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2}{2} \geq ab+bc+ca$$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ ។

លំហាត់ទី៣

គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b និង c ។

ចូរបង្ហាញថា $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន ៖

$a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad (1)$

$b+c \geq 2\sqrt{bc} \quad (2)$

$c+a \geq 2\sqrt{ca} \quad (3)$

ធ្វើវិធីគុណ (1) , (2) និង (3) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{ab}.\sqrt{bc}.\sqrt{ca}$

ដូចនេះ $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឲ្យ n ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1 ; a_2 ; a_3 ; .... ; a_n$

ដែលផលគុណ $a_1 . a_2 . a_3 .... a_n = 1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $(1+a_1)(1+a_2)....(1+a_n) \geq 2^n$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(1+a_1)(1+a_2)....(1+a_n) \geq 2^n$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន ៖

$1+a_1 \geq 2\sqrt{a_1}$

$1+a_2 \geq 2\sqrt{a_2}$

$1+a_3 \geq 2\sqrt{a_3}$

$- - - - - - - - -$

$1+a_n \geq 2\sqrt{a_n}$

គេបាន $(1+a_1)(1+a_2)....(1+a_n) \geq 2^n\sqrt{a_1 . a_2 .... a_n}$

ដោយ $a_1 . a_2 . a_3 .... a_n = 1$ ។

ដូចនេះ $(1+a_1)(1+a_2)....(1+a_n) \geq 2^n$ ។

លំហាត់ទី៥

គេឲ្យ $0 < a < \frac{\pi}{2}$ និង $0 < b < \frac{\pi}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\left(\frac{\sin^2 a}{\sin b}\right)^2 + \left(\frac{\cos^2 a}{\cos b}\right)^2 = 1$

លុះត្រាតែ $a = b$ ។

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ

គេមាន $\left(\frac{\sin^2 a}{\sin b}\right)^2 + \left(\frac{\cos^2 a}{\cos b}\right)^2 = 1$

សមមូល $(\sin^2 b + \cos^2 b)\left(\frac{\sin^4 a}{\sin^2 b} + \frac{\cos^4 a}{\cos^2 b}\right) = 1$

$$\sin^4 a + \cos^4 a + \frac{\cos^2 b}{\sin^2 b}\sin^4 a + \frac{\sin^2 b}{\cos^2 b}\cos^4 a = 1$$

$$1 - 2\sin^2 a\cos^2 a + \frac{\cos^2 b}{\sin^2 b}\sin^4 a + \frac{\sin^2 b}{\cos^2 b}\cos^4 a = 1$$

$$\left(\frac{\cos b}{\sin b}\sin^2 a - \frac{\sin b}{\cos b}\cos^2 a)\right)^2 = 0$$

គេទាញ $\frac{\cos b}{\sin b}\sin^2 a = \frac{\sin b}{\cos b}\cos^2 a$

សមមូល $\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \frac{\sin^2 b}{\cos^2 b}$

សមមូល $\tan^2 a = \tan^2 b$

ដោយ $0 < a < \frac{\pi}{2}$ និង $0 < b < \frac{\pi}{2}$ នោះគេទាញ $a = b$ ។

លំហាត់ទី៦

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ចូរស្រាយថា ៖

$$(1+\sin x)(1+\cos x) \le \frac{3}{2} + \sqrt{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(1+\sin x)(1+\cos x) \le \frac{3}{2} + \sqrt{2}$

យើងមាន $(a-b)^2 \ge 0$ ចំពោះគ្រប់ $a , b \in IR$

គេបាន $a^2 - 2ab + b^2 \ge 0$

គេទាញ $a.b \le \frac{a^2 + b^2}{2}$

ដោយជ្រើសរើសយក $a = 1+\sin x$ និង $b = 1+\cos x$

គេបាន $(1+\sin x)(1+\cos x) \le \dfrac{(1+\sin x)^2 + (1+\cos x)^2}{2}$

$$(1+\sin x)(1+\cos x) \le \frac{3+2(\sin x+\cos x)}{2} \quad (1)$$

គេមាន $\sin x+\cos x = \sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4}) \le \sqrt{2}$

តាម (1) គេទាញ $(1+\sin x)(1+\cos x) \le \dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះ $(1+\sin x)(1+\cos x) \le \dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឲ្យ $a_0 = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ និង $a_{n+1} = \dfrac{a_n{}^2 - 5}{2(a_n+2)}$

ចំពោះគ្រប់ $n \ge 0$ ។

ចូរស្រាយថា $a_n = \cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right) - 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n = \cot\left(\dfrac{2^{n-3}\pi}{3}\right) - 2$

ចំពោះ $n = 0$ គេបាន $a_0 = \cot\dfrac{\pi}{24} - 2$

$$\cot\frac{\pi}{24} = \frac{\cos\frac{\pi}{24}}{\sin\frac{\pi}{24}} = \frac{2\cos^2\frac{\pi}{24}}{2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}$$

$$= \frac{1+\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = \frac{1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$\cot\frac{\pi}{24}=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4}$$

$$=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})+8+4\sqrt{3}}{4}$$

$$=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

គេទាញ $a_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$

ហេតុនេះ $a_n=\cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right)-2$ ពិតចំពោះ $n=0$ ។

សន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $a_k=\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ ៖

$a_{k+1}=\cot\left(\frac{2^{k-2}\pi}{3}\right)-2$ ពិត ។

យើងមាន $a_{k+1}=\frac{{a_k}^2-5}{2(a_k+2)}$ ដោយ $a_k=\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2$

នោះ $a_{k+1}=\frac{\left[\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)-2\right]^2-5}{2\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)}$

$$a_{k+1} = \frac{\cot^2\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right) - 4\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right) - 1}{2\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{\cot^2\left(\frac{2^{k-3}\pi}{3}\right) - 1}{2\cot\left(\frac{2^{k-3}\pi}{2}\right)} - 2$$

ដោយប្រើរូបមន្ត $\cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$

គេបាន $a_{k+1} = \cot\left(\frac{2^{k-2}\pi}{3}\right) - 2$ ពិត ។

ដូចនេះ $a_n = \cot\left(\frac{2^{n-3}\pi}{3}\right) - 2$ ។

លំហាត់ទី៨

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម ៖

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=9 \\ (\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})(1+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})=18 \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=9 \\ (\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})(1+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})=18 \end{cases}$$

ដោយប្រើឯកលក្ខណះភាព

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})^3 = 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+3(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})(1+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})$$

$$(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})^3 = 1+9+3(18)=64$$

គេទាញ $1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}=4$ ឬ $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}=3$

គេបាន $(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})^3=27$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{y}}(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}})=27$$

$$9+\frac{3}{\sqrt[3]{xy}}(3)=27$$

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{xy}}=3$$

$$xy=\frac{1}{8}$$

គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=9\\ xy=\frac{1}{8}\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x+y=\frac{9}{8}\\ xy=\frac{1}{8}\end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយសមីការវៀត $z^2-\frac{9}{8}z+\frac{1}{8}=0$

គេទទួលបានគូចម្លើយ ៖

($x=1$, $y=\frac{1}{8}$) ឬ ($x=\frac{1}{8}$, $y=1$) ។

លំហាត់ទី៩

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\mathbf{n(\sqrt[n]{n+1}-1) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n} < 1+n(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}})}$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\mathbf{n(\sqrt[n]{n+1}-1) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n} < 1+n(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}})}$$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ គេមាន ៖

$$\mathbf{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right) > \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)}}$$

ឬ $\mathbf{1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right) > \sqrt[n]{n+1}}$

ឬ $\mathbf{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n} > n(\sqrt[n]{n+1}-1) \quad (1)}$

ដូចគ្នាដែរតាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ គេមាន ៖

$$\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+....+\frac{n-1}{n}\right)>\sqrt[n]{1.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}....\frac{n-1}{n}}$$

$$\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+....+\frac{n-1}{n}\right)>\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{1}{n}(1+\frac{2-1}{2}+\frac{3-1}{3}+...+\frac{n-1}{n})>\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$\frac{1}{n}(1+1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}+...+1-\frac{1}{n})>\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$1-\frac{1}{n}(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n})>\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}<n(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}})+1 \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$$n(\sqrt[n]{n+1}-1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}<1+n(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}})$$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi}$$

លំហាត់ទី១០

គេឲ្យ n ចំនួន $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in (0,1)$ ហើយគេតាង

$$t_n = n.\frac{a_1.a_2.a_3....a_n}{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}$$ ។

ចូរស្រាយថា $\sum_{k=1}^{n}\left(\log_{a_k} t_n\right) \ge (n-1)n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\sum_{k=1}^{n}\left(\log_{a_k} t_n\right) \ge (n-1)n$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គ្រប់ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in (0,1)$

គេមាន $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3...a_n}$

គេទាញ $t_n \le \left(a_1.a_2.a_3....a_n\right)^{\frac{n-1}{n}}$ ដោយ $0 < a_k < 1$

គេទាញ $\log_{a_k}(t_n) \ge \frac{n-1}{n}.\log_{a_k}(a_1.a_2...a_k)$

ឬ $\sum_{k=1}^{n}\left[\log_{a_k}(t_n)\right] \ge \frac{n-1}{n}.\sum_{k=1}^{n}\left[\log_{a_k}\left(a_1.a_2...a_k\right)\right]$ (*)

តាង $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\log_{a_k}(a_1.a_2....a_k)\right]$

$$= n + (\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_1) + ... + (\log_{a_n} a_1 + \log_{a_1} a_n) + ... +$$
$$.... + (\log_{a_{n-1}} a_n + \log_{a_n} a_{n-1})$$

តាមវិសមភាព $t + \frac{1}{t} \geq 2 \, , \forall t > 0$ គេទាញបាន ៖

$$S_n \geq n + 2(n-1) + 2(n-2) + ... + 2\ ] = n^2$$

តាមទំនាក់ទំនង $(*)$ គេទាញបាន ៖

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\log_{a_k} t_n\right) \geq (n-1)n$$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឲ្យ m និង n ជាពីរចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $\frac{x^{mn}-1}{m} \geq \frac{x^n - 1}{x}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{x^{mn}-1}{m} \geq \frac{x^n - 1}{x}$

ដោយ $x > 0$ នោះវិសមភាពខាងលើសមមូល ៖

$$x(x^{mn}-1)-m(x^{n}-1)\geq 0$$

$$(x^{n}-1)\left[\,x(x^{n})^{m-1}+x(x^{n})^{m-2}+....+x-m\right]\geq 0 \ (*)$$

- ចំពោះ $x=1$ វិសមភាព (*)ក្លាយជាសមភាព ។

- ចំពោះ $x>1$ គេមាន $x^{n}-1>0$

និង $x(x^{n})^{m-1}+x(x^{n})^{m-2}+...+x-m>0$

នាំឲ្យវិសមភាព (*) ពិតជានិច្ច ។

- ចំពោះ $x<1$ គេមាន $x^{n}-1<0$

និង $x(x^{n})^{m-1}+x(x^{n})^{m-2}+...+x-m<0$

នាំឲ្យវិសមភាព (*) ពិតជានិច្ច ។

សរុបមកគេបាន $\dfrac{x^{mn}-1}{m}\geq\dfrac{x^{n}-1}{x}$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឲ្យ $x_n = 2^{2^n} + 1$ ចំពោះគ្រប់ $n = 1, 2, 3, ...$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \frac{2^2}{x_3} + ... + \frac{2^{n-1}}{x_n} < \frac{1}{3}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \frac{2^2}{x_3} + ... + \frac{2^{n-1}}{x_n} < \frac{1}{3}$

តាង $y_n = 2^{2^n} - 1$ គ្រប់ $n \geq 1$

គេបាន $y_{n+1} = 2^{2^{n+1}} - 1 = (2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1)$

ឬ $y_{n+1} = y_n x_n$ ។

គេមាន $\frac{1}{y_n} - \frac{2}{y_{n+1}} = \frac{1}{y_n} - \frac{2}{x_n y_n} = \frac{x_n - 2}{x_n y_n}$

ដោយ $x_n - 2 = 2^{2^n} + 1 - 2 = 2^{2^n} - 1 = y_n$

គេទាញ $\frac{1}{y_n} - \frac{2}{y_{n+1}} = \frac{1}{x_n}$

នាំឲ្យ $\frac{2^{n-1}}{x_n} = \frac{2^n}{y_n} - \frac{2^{n+1}}{y_{n+1}}$

ចំពោះ $n = 1 \ , \ 2 \ , 3 \ , ...$ គេបាន ៖

$$\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \frac{2^2}{x_3} + ... + \frac{2^{n-1}}{x_n} = \frac{1}{y_1} - \frac{2^{n+1}}{y_{n+1}} < \frac{1}{y_1}$$

ដោយ $y_1 = 2^2 - 1 = 3$

ដូចនេះ $\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \frac{2^2}{x_3} + ... + \frac{2^{n-1}}{x_n} < \frac{1}{3}$ ។

<u>លំហាត់ទី១៣</u>

គេឲ្យ $f : (0, +\infty) \to IR$ ហើយមានចំនួនពិត $a > 0$ ដែល $f(a) = 1$ ។

ចូរបង្ហាញថាប្រសិនបើ $f(x)f(y) + f(\frac{a}{x})f(\frac{a}{y}) = 2f(xy)$

ចំពោះគ្រប់ $x, y \in (0, +\infty)$ នោះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ថេរ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

បង្ហាញថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍ថេរ

គេមាន $f(x)f(y) + f(\frac{a}{x})f(\frac{a}{y}) = 2f(xy)$

យក $x = y = 1$ គេបាន $f^2(1) + f^2(a) = 2f(1)$

ដោយ $f(a) = 1$ នោះ $\left(f(1) - 1\right)^2 = 0$ ឬ $f(1) = 1$ ។

យក $y = 1$ គេបាន $f(x)f(1) + f(\frac{a}{x})f(a) = 2f(x)$

គេទាញ $f(x) = f(\frac{a}{x})$ ។

យក $y = \frac{a}{x}$ គេបាន $f(x)f(\frac{a}{x}) + f(\frac{a}{x})f(x) = 2f(a)$

គេទាញ $f(x)f(\frac{a}{x}) = f(a) = 1$ ដោយ $f(x) = f(\frac{a}{x})$

ហេតុនេះ $f^2(x) = 1 \ , \forall x > 0$ ។

យក $x = y = \sqrt{t}$ គេបាន $f^2(\sqrt{t}) + f^2(\frac{a}{\sqrt{t}}) = 2f(t)$

គេទាញ $f(t) > 0 \ , \forall t > 0$ ។

ដូចនេះ $f(x) = 1$ ជាអនុគមន៍ថេរគ្រប់ $x > 0$ ។

✍✍✍✍✍

លំហាត់ទី១៤

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ

$\sin^2 B+\sin^2 C=1+\sin B\sin C\cos A$ ។

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណកែង

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសគេមាន $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

គេទាញ $a=2R\sin A\,,b=2R\sin B\,,c=2R\sin C$

ដោយ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ (ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស)

គេទាញបាន ៖

$$4R^2\sin^2 A=4R^2(\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A)$$

$$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A \quad (1)$$

តែ $\sin^2 B+\sin^2 C=1+\sin B\sin C\cos A$ (2)

យកសមីការ (2) ជួសនៅក្នុង (1) គេទាញ $\sin^2 A=1$

នាំឲ្យ $A=90^0$ ។ ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណកែង ។

លំហាត់ទី១៥

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}+\frac{3^3-1}{3^3+1}+......+\frac{n^3-1}{n^3+1}>(n-1)\sqrt[(n-1)]{\frac{2}{3}}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន ៖

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}+\frac{3^3-1}{3^3+1}+......+\frac{n^3-1}{n^3+1}>(n-1)\sqrt[(n-1)]{\frac{2^3-1}{2^3+1}.\frac{3^3-1}{3^3+1}.....\frac{n^3-1}{n^3+1}}$$

គេមាន $\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{n-1}{n+1}.\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$

ចំពោះ $n=2\,;3\,;4\,;.....;n$ គេបាន ៖

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}=\frac{1}{3}.\frac{7}{3}$$

$$\frac{3^3-1}{3^3+1}=\frac{2}{4}.\frac{13}{7}$$

$$---------$$

$$\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{n-1}{n+1}.\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$$

គុណសមភាពនេះអង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{n(n+1)}\right]>\frac{2}{3}$$

ដូចនេះ $\frac{2^3-1}{2^3+1}+\frac{3^3-1}{3^3+1}+\cdots\cdots+\frac{n^3-1}{n^3+1}>(n-1)\sqrt[(n-1)]{\frac{2}{3}}$

លំហាត់ទី១៦

គេឲ្យអនុគមន៍ $y=\frac{x^2+2mx+3m-8}{2\,(x^2+1)}$

ដែល $x\in IR$ និង mជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

តើគេអាចកំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍នេះអាចតាងឲ្យតម្លៃ

កូស៊ីនុសនៃមុំមួយបានឬទេ?

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃរបស់ m

ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍នេះតាងឲ្យតម្លៃកូស៊ីនុសនៃមុំមួយលុះត្រាតែចំពោះ

គ្រប់ $x \in IR$ គេបាន $-1 \le \frac{x^2+2mx+3m-8}{2(x^2+1)} \le 1$

ដោយគេមាន $2(x^2+1)>0$, $\forall x \in IR$

គេទាញ $-2x^2-2 \le x^2+2mx+3m-8 \le 2x^2+2$

ឬ $\begin{cases} 3x^2+2mx+3m-6 \ge 0 & (1) \\ x^2-2mx-3m+10 \ge 0 & (2) \end{cases}$

ចំពោះ $(1): 3x^2+2mx+3m-6 \ge 0$

សមមូល $\begin{cases} a=3>0 \\ \Delta' = m^2-9m+18 \le 0 \end{cases}$

ដោយ $m^2-9m+18=(m-3)(m-6)$

គេបាន $\Delta' = (m-3)(m-6) \le 0$

នាំឲ្យ $3 \le m \le 6$ ឬ $m \in [3,6]$

ចំពោះ $(2): x^2-2mx-3m+10 \ge 0$

សមមូល $\begin{cases} a=1>0 \\ \Delta' = m^2+3m-10 \le 0 \end{cases}$

ដោយ $m^2+3m-10=(m-2)(m+5)$

គេបាន $\Delta' = (m-2)(m+5) \le 0$

នាំឲ្យ $-5 \le m \le 2$ ឬ $m \in [-5, 2]$

ដោយយកចម្លើយ $m \in [3,6]$ ប្រសព្វនឹង $m \in [-5\,,\,2\,]$

នោះគេបាន $m \in \phi$ ។

ដូចនេះគេមិនអាចកំនត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍នេះអាចតាងឲ្យតម្លៃ

កូស៊ីនូសនៃមុំមួយបានទេ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})\ ,\ x \in IR$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\dfrac{a+b}{1+a+b}) < f(\dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b})$

ចំពោះគ្រប់ $a > 0, b > 0$។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f(\dfrac{a+b}{1+a+b}) < f(\dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b})$

យើងមាន $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})\ ,\ x \in IR$

យើងបាន $f'(x) = \dfrac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2})} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ដោយ $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0 \ , \forall x \in IR$

ដូចនេះអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ IR ។

ម្យ៉ាងទៀតចំពោះគ្រប់ $a > 0, b > 0$ គេមាន ៖

$$\frac{a}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} \quad \text{និង} \quad \frac{b}{1+a+b} < \frac{b}{1+b}$$

គេទាញ $\frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$

ឬ $\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$

ដោយសារតែអនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ចលើ IR

ហេតុនេះតាមលក្ខណៈអនុគមន៍កើនគេបាន៖

$$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$$

នាំឲ្យ $f\left(\frac{a+b}{1+a+b}\right) < f\left(\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}\right)$

ដូចនេះ $f\left(\frac{a+b}{1+a+b}\right) < f\left(\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}\right)$

ចំពោះគ្រប់ $a > 0, b > 0$ ។

លំហាត់ទី១៨

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$-2 \le \frac{\cos 4x + 4\sin 4x + 1}{\cos 4x + 2} \le \frac{8}{3}$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $-2 \le \frac{\cos 4x + 4\sin 4x + 1}{\cos 4x + 2} \le \frac{8}{3}$

យើងតាង $y = \frac{\cos 4x + 4\sin 4x + 1}{\cos 4x + 2}$, $\forall x \in IR$

យើងបាន $\cos 4x + 4\sin 4x + 1 = y\cos 4x + 2y$

ឬ $(1-y)\cos 4x + 4\sin 4x = 2y - 1 \quad (1)$

យើងជ្រើសរើសវ៉ិចទ័រពីរ ៖

$\vec{U}\,(1-y\ ,\ 4)$ និង $\vec{V}\,(\cos 4x\ ,\ \sin 4x)$

តាមកន្សោមវិភាគផលគុណស្កាលែ ៖

$$\vec{U}.\vec{V} = (1-y)\cos 4x + 4\sin 4x \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេទាញ $\vec{U}.\vec{V} = 2y - 1$ ។

ម្យ៉ាងទៀតតាមនិយមន័យ $\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.\cos\theta$

ដោយ $-1 \le \cos\theta \le 1 \ , \forall\theta \in IR$

គេទាញ $-\|\vec{U}\|.\|\vec{V}\| \le \vec{U}.\vec{V} \le \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|$

ឬ $\left(\vec{U}.\vec{V}\right)^2 \le \|\vec{U}\|^2 .\|\vec{V}\|^2$

ដោយ $\|\vec{U}\|^2 = (1-y)^2 + 16 \ , \ \|\vec{V}\| = 1$

និង $\vec{U}.\vec{V} = 2y - 1$

គេបាន $(2y-1)^2 \le (1-y)^2 + 16$

ឬ $3y^2 - 2y - 16 \le 0$

ដោយ $3y^2 - 2y - 16 = (y+2)(3y-8)$

ហេតុនេះ $3y^2 - 2y - 16 \le 0$ សមមូល $-2 \le y \le \frac{8}{3}$ ។

ដូចនេះ $-2 \le \dfrac{\cos 4x + 4\sin 4x + 1}{\cos 4x + 2} \le \dfrac{8}{3}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

លំហាត់ទី១៩

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $U_n = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+....+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}$

មាន n រ៉ាឌីកាល់ ។

ចូរស្រាយថា $U_n < 3$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $U_n < 3$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$

សម្មតិកម្ម $U_n = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+....+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}$

យើងមាន $U_1 = \sqrt{6} < 3$ ពិត

$U_2 = \sqrt{6+\sqrt{6}} = \sqrt{6+U_1} < \sqrt{6+3} < 3$ ពិត ។

សន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $U_k = \sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}} < 3$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ

$U_{k+1} = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+....+\sqrt{6}}}} < 3$

យើងមាន $U_{k+1} = \sqrt{6+U_k}$ ដោយ $U_k < 3$ នាំឲ្យ $6+U_k < 9$

គេទាញបាន $U_{k+1} = \sqrt{6+U_k} < 3$ ពិត ។

ដូចនេះ $U_n < 3$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ ។

លំហាត់ទី២០

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z=(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})+i.(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})$

ដែល x ជាចំនួនពិត។

ចូរកំនត់រកម៉ូឌុលអប្បបរមានៃចំនួនកុំផ្លិចនេះ ?

ដំណោះស្រាយ

រកម៉ូឌុលអប្បបរមានៃចំនួនកុំផ្លិច

យើងបាន $|Z|=\sqrt{(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})^2+(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})^2}$

តាង
$$
\begin{aligned}
f(x)&=(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x})^2+(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x})^2\\
&=\cos^4 x+2+\frac{1}{\cos^4 x}+\sin^4 x+2+\frac{1}{\sin^4 x}\\
&=4+(\cos^4 x+\sin^4 x)+(\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x})\\
&=4+(\cos^4 x+\sin^4 x)+(\frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\sin^4 x\cos^4 x})
\end{aligned}
$$

$$f(x) = 4 + (\cos^4 x + \sin^4 x)(1 + \frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x})$$

$$= 4 + \left[(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x\right](1 + \frac{16}{\sin^4 2x})$$

$$= 4 + (1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x)(1 + \frac{16}{\sin^4 2x})$$

ដោយគេមាន $\sin^2 2x \le 1$ នាំឲ្យ $1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \ge \frac{1}{2}$

និង $1 + \frac{16}{\sin^4 2x} \ge 17$

គេទាញ $4 + (1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x)(1 + \frac{16}{\sin^4 2x}) \ge 4 + \frac{17}{2} = \frac{25}{2}$

យើងបាន $f(x) = 4 + (1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x)(1 + \frac{16}{\sin^4 2x}) \ge \frac{25}{2}$

ដោយ $|Z| = \sqrt{f(x)}$ គេទាញបាន $|Z| \ge \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

ដូចនេះម៉ូឌុលអប្បបរមានៃ Z គឺ $|Z|_{min} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ។

លំហាត់ទី២១

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+.....+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}}}}$

ចូរកំនត់បណ្តាតម្លៃ $x\in IN$ ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ $f(x)$មានតម្លៃលេខជាចំនួនគត់ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃ $x\in IN$ '

យើងមាន ៖

$$x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}+2.\frac{1}{2}\sqrt{x+\frac{1}{4}}.+(x+\frac{1}{4})$$

$$=(\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}})^2$$

គេទាញបាន $f(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}$ ។

សម្មតថាមានចំនួនគត់ $k\in IN^*$ ដែល $f(x)=k$

គេបាន $\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}=k$

ឬ $x+\frac{1}{4}=(k-\frac{1}{2})^2=k^2-k+\frac{1}{4}$

គេទាញ $x = k(k-1)$

ដោយ $k \in IN^*$ នោះ $x = k(k-1) \in IN$

ដូចនេះបណ្ដាតម្លៃ x ដែលត្រូវរកនោះគឺ ៖

$x = k(k-1)\ , \forall k \in IN^*$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឲ្យ x ជាចំនួនពិតដែល $60x^2 - 71x + 21 < 0$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sin\left(\frac{\pi}{3x-1}\right) < 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sin\left(\frac{\pi}{3x-1}\right) < 0$

តាង $f(x) = 60x^2 - 71x + 21$

បើ $f(x) = 0 \Leftrightarrow 60x^2 - 71x + 21 = 0$

$\Delta = (-71)^2 - 4(60)(21) = 5041 - 5040 = 1$

គេទាញឫស $x_1 = \frac{71-1}{120} = \frac{7}{12}$, $x_2 = \frac{71+39}{120} = \frac{3}{5}$

យើងបាន $f(x) = 60x^2 - 71x + 21 < 0$

នាំឲ្យ $\frac{7}{12} < x < \frac{3}{5}$ ឬ $\frac{7}{4} < 3x < \frac{9}{5}$

ឬ $\frac{3}{4} < 3x - 1 < \frac{4}{5}$ នាំឲ្យ $\frac{4}{5} < \frac{1}{3x-1} < \frac{4}{3}$

គេទាញ $\frac{4\pi}{5} < \frac{\pi}{3x-1} < \frac{4\pi}{3}$ នាំឲ្យ $\sin\left(\frac{\pi}{3x-1}\right) < 0$ ។

ដូចនេះ បើ x ជាចំនួនពិតដែល $60x^2 - 71x + 21 < 0$

នោះគេបាន $\sin\left(\frac{\pi}{3x-1}\right) < 0$ ។

លំហាត់ទី២៣

គេឲ្យអនុគមន៍ ៖

$$f(x,y) = \frac{(x^2 - y^2)(1 - x^2y^2)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2} \text{ , } x \text{ ; } y \in IR$$

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x, y \in IR$ គេបាន $|f(x;y)| \le \frac{1}{4}$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(x,y)=\dfrac{(x^2-y^2)(1-x^2y^2)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}$

$$=\frac{x^2-x^4y^2-y^2+x^2y^4}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x^2y^2+x^2y^4-y^2-2x^2y^2-x^4y^2}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^2(1+2y^2+y^4)-y^2(1+2x^2+x^4)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^2(1+y^2)^2-y^2(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^2}{(1+x^2)^2}-\frac{y^2}{(1+y^2)^2}$$

យើងបាន៖

$$f(x,y)-\frac{1}{4}=\frac{x^2}{(1+x^2)^2}-\frac{1}{4}-\frac{y^2}{(1+y^2)^2}$$

$$=\frac{4x^2-(1+x^2)^2}{4(1+x^2)^2}-\frac{y^2}{(1+y^2)^2}$$

$$=-\frac{(1-x^2)^2}{4(1+x^2)^2}-\frac{y^2}{(1+y^2)^2}\le 0 \quad , \ \forall x,y\in IR$$

គេទាញ $f(x,y)-\frac{1}{4}\le 0$

នាំឲ្យ $f(x,y)\le \frac{1}{4}\ ,\ \forall x,y\in IR \qquad (1)$

ម្យ៉ាងទៀតយើងមាន ៖

$$f(x,y)+\frac{1}{4}=\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{4}-\frac{y^2}{(1+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{(1+y^2)^2-4y^2}{4(1+y^2)^2}$$

$$=\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\frac{(1-y^2)^2}{4(1+y^2)^2}\ \ge 0\ ,\ \forall x,y\in IR$$

គេទាញ $f(x,y)+\frac{1}{4}\ge 0$

នាំឲ្យ $f(x,y)\ \ge -\frac{1}{4}\ ,\ \forall x,y\in IR \qquad (2)$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញបាន

$-\frac{1}{4}\le\ f(x,y)\ \le \frac{1}{4}\ ,\ \forall x,y\in IR$ ។

ដូចនេះ $|f(x;y)|\le \frac{1}{4}$ ចំពោះគ្រប់ $x,y\in IR$ ។

លំហាត់ទី២៤

គេឲ្យស្វ៊ីត $U_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{(n)}$

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ក_ចូរកំនត់ U_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ខ_ចូរបង្ហាញថា $U_1 \times U_2 \times U_3 \times ......\times U_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\dfrac{\pi}{3.2^n}}$ ។

គ_គេពិនិត្យស្វ៊ីត $V_n = 2^n \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{(n)}$ ។

ចូរគណនា V_n និង លីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក_កំនត់ U_n ជាអនុគមន៏នៃ n

យើងមាន $U_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{(n)}$

យើងបាន $U_1 = \sqrt{3} = 2\cos\dfrac{\pi}{6}$

$$U_2=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{2+U_1}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{6}}=2\cos\frac{\pi}{12}$$

$$U_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{2+U_2}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{12}}=2\cos\frac{\pi}{24}$$

យើងសន្មតថាវាពិតដល់តួទី $U_k=2\cos\frac{\pi}{3.2^k}$ ។

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថាវាពិតដល់តួទី $(k+1)$គឺ ៖

$U_{k+1}=2\cos\frac{\pi}{3.2^{k+1}}$ ពិត

យើងមាន ៖

$$U_{k+1}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}=\sqrt{2+U_k}$$

ដោយតាមការសន្មតគេមាន $U_k=2\cos\frac{\pi}{3.2^k}$

យើងបាន ៖

$$U_{k+1}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{3.2^k}}=\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{3.2^{k+1}}}=2\cos\frac{\pi}{3.2^{k+1}}$$ ពិត ។

ដូចនេះ $U_n=2\cos\frac{\pi}{3.2^n}$ ។

ខ-បង្ហាញថា $U_1\times U_2\times U_3\times......\times U_n=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\pi}{3.2^n}}$

យើងមាន $U_n = 2\cos\frac{\pi}{3.2^n} = \dfrac{\sin\frac{2\pi}{3.2^n}}{\sin\frac{\pi}{3.2^n}}$

(រូបមន្ត $\sin 2a = 2\sin a\cos a$)

យើងបាន ÷

$$\begin{cases} U_1 = \dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{6}} \\ U_2 = \dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{12}} \\ -------------- \\ U_n = \dfrac{\sin\frac{2\pi}{3.2^n}}{\sin\frac{\pi}{3.2^n}} \end{cases}$$

ដូចនេះ $U_1 \times U_2 \times U_3 \times ...... \times U_n = \dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3.2^n}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\pi}{3.2^n}}$ ។

គ_គណនា V_n និង លីមីត $\lim_{n\to+\infty} V_n$

យើងមាន $V_n = 2^n \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{(n)}$

$$V_n = 2^n \sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+....+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}_{(n-1)}}$$

$$V_n = 2^n \sqrt{2-U_{n-1}}$$

ដោយ $U_n = 2\cos\frac{\pi}{3.2^n}$ នោះ $U_{n-1} = 2\cos\frac{\pi}{3.2^{n-1}}$

យើងបាន ៖

$$V_n = 2^n \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{3.2^{n-1}}}$$

$$= 2^n \sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{3.2^n}} = 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3.2^n}$$

ដូចនេះ $V_n = 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3.2^n}$ ។

ហើយ $\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{3.2^n} = \frac{2\pi}{3}$ ។

លំហាត់ទី២៥

គេឲ្យ $a \ge 1$ និង $b \ge 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \le 2\sqrt{\log_2(\frac{a+b}{2})}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \le 2\sqrt{\log_2(\frac{a+b}{2})}$

ចំពោះ $a \ge 1$ និង $b \ge 1$

យើងមាន $a + b \ge 2\sqrt{a.b}$ (វិសមភាព $AM - GM$)

ឬ $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{a.b}$

នាំឲ្យ $\log_2(\frac{a+b}{2}) \ge \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$

ឬ $\log_2 a + \log_2 b \le 2\log_2(\frac{a+b}{2})$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន ៖

$\log_2 a + \log_2 b \ge 2\sqrt{\log_2 a}.\sqrt{\log_2 b}$

$$2(\log_2 a + \log_2 b) \ge \log_2 a + 2\sqrt{\log_2 a}.\sqrt{\log_2 b} + \log_2 b$$

$$2(\log_2 a + \log_2 b) \ge (\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b})^2$$

$$\log_2 a + \log_2 b \ge \frac{1}{2}(\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b})^2 \quad (2)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) យើងទាញ៖

$$\frac{1}{2}(\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b})^2 \le 2\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$(\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b})^2 \le 4\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \le 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \le 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}}$ ។

លំហាត់ទី២៦

គេឲ្យ θ ជាចំនួនពិតដែល $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(\sin\theta)^{\cos\theta}+(\cos\theta)^{\sin\theta}>1$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(\sin\theta)^{\cos\theta}+(\cos\theta)^{\sin\theta}>1$

តាមវិសមភាព **Bernoulli**

គេមាន $(1+x)^{\alpha}\le 1+\alpha x\ ,\forall x>-1\ ,\alpha>0$

យើងមាន ៖

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^{\cos\theta}=\left(1+\frac{1-\sin\theta}{\sin\theta}\right)^{\cos\theta}$$

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^{\cos\theta}<1+\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{\sin\theta}$$

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^{\cos\theta}<\frac{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}$$

ឬ $(\sin\theta)^{\cos\theta}>\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta}$ **(1)**

ស្រាយដូចខាងលើនេះដែរយើងបាន៖

$$(\cos\theta)^{\sin\theta} > \frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta} \quad (2)$$

បូកវិសមភាព (1) និង (2)ខាងលើនេះយើងបាន ៖

$$(\sin\theta)^{\cos\theta} + (\cos\theta)^{\sin\theta} > \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta}$$

ដោយគេមាន $\frac{\text{son}\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta} > 1$

ដូចនេះ $(\sin\theta)^{\cos\theta} + (\cos\theta)^{\sin\theta} > 1$ ។

លំហាត់ទី២៧

គេឲ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។

ក_ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ។

ខ_បង្ហាញថា $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក_ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$

យើងមានផលបូកមុំក្នុងត្រីកោណ $A+B+C=\pi$ ។

យើងបាន $\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ (1)

ដោយគេមាន $\cos\frac{A-B}{2}\le 1$ និង $2\sin\frac{A+B}{2}>0$

គេបាន $2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\le 2\sin\frac{A+B}{2}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញ ៖

$$\sin A+\sin B\le 2\sin\frac{A+B}{2}\quad (3)$$

ដូចគ្នាដែរគេមាន ៖

$$\sin C+\sin(\frac{A+B+C}{3})\le 2\sin\frac{C+\frac{A+B+C}{3}}{2}$$

$$\sin C+\sin(\frac{A+B+C}{3})\le 2\sin(\frac{A+B+4C}{6})\quad (4)$$

បូកវិសមីការ (3) និង (4) យើងបាន៖

$$\sin A+\sin B+\sin C+\sin(\frac{A+B+C}{3})\le 2\left[\sin\frac{A+B}{2}+\sin(\frac{A+B+4C}{6})\right]$$

$$\sin\frac{A+B}{2}+\sin(\frac{A+B+4C}{6})\le 2\sin(\frac{\frac{A+B}{2}+\frac{A+B+4C}{6}}{2})=2\sin(\frac{A+B+C}{3})$$

គេទាញ ៖

$$\sin A+\sin B+\sin C+\sin(\frac{A+B+C}{3})\le 4\sin(\frac{A+B+C}{3})$$

ឬ $\sin A+\sin B+\sin C\le 3\sin(\frac{A+B+C}{3})=3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

ដូចនេះ $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ។

ខ_បង្ហាញថា $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$

យើងមាន ៖

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

ដោយ $\sin\frac{A+B}{2}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})=\cos\frac{C}{2}$

និង $\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$

គេបាន $\sin A+\sin B+\sin C=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\cos\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2})$$

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\cos\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2})$$

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

ដោយ $\sin A+\sin B+\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$

គេទាញ $4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$

នាំឲ្យ $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$

ដូចនេះ $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$ ។

លំហាត់ទី២៨

គេឲ្យសមីការ $(E):\ x^2+2(2m+3)x+4m^2+8m+8=0$

ក_ចូរកំនត់បណ្តាតម្លៃ $m \in IN$ ដើម្បីឲ្យសមីការនេះមានឬស

ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ ។

ខ_រកឬសដែលជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វរបស់សមីការ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃ m

សមីការ $(E):\ x^2+2(2m+3)x+4m^2+8m+8=0$

គេមាន $\Delta' = (2m+3)^2 - (4m^2 + 8m + 8) = 4m + 1$

ដើម្បីឲ្យសមីការនេះមានឫសជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វលុះត្រាតែ÷

$\Delta' = 4m + 1$ ជាការេប្រាកដ

មានន័យថា $4m + 1 = k^2 , \forall k \in IN^*$

គេបាន $m = \dfrac{k^2 - 1}{4}$ តែដោយសារតែ $m \in IN^*$

ដូចនេះគេត្រូវឲ្យ k ជាចំនួនសេស

ពីព្រោះបើ $k = 2p - 1 , \forall p \in IN^*$

នោះ $m = \dfrac{(2p-1)^2 - 1}{4} = p(p-1)$ ជាចំនួនគត់ ។

ដូចនេះ $m = p(p-1) , \forall p \in IN^*$ ។

ខ.រកឫសដែលជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វរបស់សមីការ

តាមសម្រាយខាងលើបើ $m = p(p-1) , \forall p \in IN^*$

គេបាន $\Delta' = 4m + 1 = 4p(p-1) + 1 = (2p-1)^2$

គេទាញឫស $\left[\begin{array}{l} x_1 = -(2m+3) + (2p-1) = -2p^2 + 4p - 4 \\ x_2 = -(2m+3) - (2p-1) = -2p^2 - 2 \end{array}\right.$

ដូចនេះ $x_1 = -2p^2 + 4p - 4 \ , \ x_2 = -2p^2 - 2 \ , \forall p \in IN^*$ ។

លំហាត់ទី២៩

M ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់បីដែលមានធាតុទាំងអស់ជាចំនួនគត់ ។ គេដឹងថាផលគុណនៃធាតុទាំងបីតាមជួរដេកនីមួយៗ ផលគុណនៃធាតុទាំងបីតាមជួរឈរនីមួយៗនិង ផលគុណនៃធាតុទាំងបីតាមអង្កត់ទ្រូងស្មើនឹង mដូចគ្នា ។
បង្ហាញថា m ជាគូបនៃចំនួនគត់ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា m ជាគូបនៃចំនួនគត់ ៖

តាង $M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ដែល $a_{ij}\in IN$, $i=1;2;3$, $j=1;2;3$

តាមបំរាប់យើងបាន $\begin{cases} a_{11}.a_{12}.a_{13}=m & (1) \\ a_{21}.a_{22}.a_{23}=m & (2) \\ a_{31}.a_{32}.a_{33}=m & (3) \\ a_{11}.a_{21}.a_{31}=m & (4) \\ a_{12}.a_{22}.a_{32}=m & (5) \\ a_{13}.a_{23}.a_{33}=m & (6) \\ a_{11}.a_{22}.a_{33}=m & (7) \\ a_{31}.a_{22}.a_{13}=m & (8) \end{cases}$

គុណសមីការ (1) និង (3) គេបាន ៖

$$a_{11}.a_{12}.a_{13}.a_{31}.a_{32}.a_{33} = m^2 \quad (9)$$

គុណសមីការ (7) និង (8) គេបាន ៖

$$a_{11}.a_{22}.a_{33}.a_{31}.a_{22}.a_{13} = m^2 \quad (10)$$

ចែកសមីការ (9) និង (10) គេបាន ៖

$$\frac{a_{11}.a_{12}.a_{13}.a_{31}.a_{32}.a_{33}}{a_{11}.a_{22}.a_{33}.a_{31}.a_{22}.a_{13}} = \frac{m^2}{m^2}$$

នាំឲ្យ $a_{12}.a_{32} = {a_{22}}^2$ យកទៅជួសក្នុង (5)

គេបាន $(a_{22})^3 = m$ ។

ដូចនេះ $m = (a_{22})^3$ ជាគូបនៃចំនួនគត់ ។

លំហាត់ទី៣០

គេឲ្យបួនចំនួនវិជ្ជមាន a , b , c , d ។

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$

ចំពោះគ្រប់ $a > 0 , b > 0 , c > 0 , d > 0$

យើងមាន $\begin{cases} a+b+c+d > a+b+c > a+c \\ a+b+c+d > b+c+d > b+d \\ a+b+c+d > c+d+a > c+a \\ a+b+c+d > d+a+b > b+d \end{cases}$

គេទាញ $\begin{cases} \frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+c} \\ \frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{b+c+d} < \frac{b}{b+d} \\ \frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d+a} < \frac{c}{a+c} \\ \frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{d+a+b} < \frac{d}{b+d} \end{cases}$

ដោយបូកទំនាក់ទំនងទាំងនេះអង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

ដូចនេះវិសមភាពត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី៣១

គេមានបីចំនួនពិត $a > 0 ; b > 0 ; c > 0$ ។

ចូរស្រាយថា $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc$

តាង $A = ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) - 6abc$

$$A = a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + a^2c - 6abc$$

$$A = (a^2b + bc^2 - 2abc) + (ab^2 + ac^2 - 2abc) + (ca^2 + cb^2 - 2abc)$$

$$A = b(a^2 + c^2 - 2ac) + a(b^2 + c^2 - 2bc) + c(a^2 + b^2 - 2ab)$$

$$A = b(a-c)^2 + a(b-c)^2 + c(a-b)^2 \geq 0 \ , \forall a,b,c > 0$$

ដូចនេះ $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc$ ។

លំហាត់ទី៣២

គេឲ្យពីរចំនួន x និង y ខុសពីសូន្យ និង មានសញ្ញាដូចគ្នា ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4\geq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4\geq 0$

តាង $P=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ គេបាន $P^2=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2$

យក $M=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4$

គេបាន $M=P^2-2-3P+4=P^2-3P+2=(P-1)(P-2)$

ដោយ $P-2=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2=\frac{(x-y)^2}{xy}\geq 0$

(ព្រោះ x និង y មានសញ្ញាដូចគ្នា)

ហេតុនេះ $M=(P-2)(P-1)\geq 0$ ។

ដូចនេះ $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4\geq 0$ ។

លំហាត់ទី៣៣

គេឲ្យសមីការ $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, $a\neq c$ ។

តាង $\tan\alpha$ និង $\tan\beta$ ជាឬសរបស់សមីការខាងលើ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃកន្សោម ៖

$$A=a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta)$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម ៖

$$A=a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta)$$

ដោយ $\tan\alpha$ និង $\tan\beta$ ជាឬសរបស់សមីការគេបាន ៖

$$\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta=-\dfrac{b}{a}\\[2mm] \tan\alpha.\tan\beta=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

យើងបាន $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-\frac{b}{a}}{1-\frac{c}{a}}=-\dfrac{b}{a-c}=\dfrac{b}{c-a}$

យើងបាន $A=a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta)$

$$A = \cos^2(\alpha+\beta)\left[\,a\tan^2(\alpha+\beta)+b\tan(\alpha+\beta)+c\,\right]$$
$$= \frac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}\left[\,a\tan^2(\alpha+\beta)+b\tan(\alpha+\beta)+c\,\right]$$
$$= \left[\frac{(c-a)^2}{(c-a)^2+b^2}\right]\left(\frac{ab^2}{(c-a)^2}+\frac{b^2}{c-a}+c\right)$$
$$= \frac{(c-a)^2}{(c-a)^2+b^2}\times\frac{ab^2+b^2(c-a)+c(c-a)^2}{(c-a)^2} = c$$

ដូចនេះ

$$A = a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta) = c$$

លំហាត់ទី៣៤

ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចែកនឹង 8 ឱ្យសំណល់ 1 ។ ចំនួន n នោះចែកនឹង 5 ឱ្យសំណល់ 2 ។

ក-បើចំនួន n នោះចែកនឹង 40 ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ខ-រកចំនួន n នោះដោយដឹងថា $3940 < n < 4000$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បើចំនួន n នោះចែកនឹង 40 ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?

ឧបមាថា $\mathbf{n}$ ចែកនឹង 8 ឱ្យផលចែក $\mathbf{q_1 \in IN}$ និងសំណល់ 1

និង ចំនួន $\mathbf{n}$ នោះចែកនឹង 5 ឱ្យផលចែក $\mathbf{q_2 \in IN}$ និងសំណល់ 2 ។

តាមអឺគ្លីត យើងបាន $\left\{ \begin{array}{l|l} \mathbf{n = 8q_1 + 1} & \mathbf{(-15)} \\ \mathbf{n = 5q_2 + 2} & \mathbf{(16)} \end{array} \right.$

ឬ $\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{-15n = -120q_1 - 15} & \mathbf{(1)} \\ \mathbf{16n = 80q_2 + 32} & \mathbf{(2)} \end{array} \right.$

បូកសមីការ (1) និង (2)

យើងបាន $\mathbf{n = 80q_2 - 120q_1 + 17 = 40q + 17}$

ដែល $\mathbf{q = 2q_2 - 3q_1}$ ។

តាមទំនាក់ទំនង $\mathbf{n = 40q + 17}$ បញ្ជាក់ថាបើចំនួន $\mathbf{n}$ នោះចែកនឹង $\mathbf{40}$

ឱ្យសំណល់ $\mathbf{r = 17}$

ខ. រកចំនួន $\mathbf{n}$ នោះដោយដឹងថា $\mathbf{3940 < n < 4000}$

យើងមាន $\mathbf{n = 40q + 17}$ ដោយ $\mathbf{3940 < n < 4000}$

គេទាញ $\mathbf{3940 < 40q + 17 < 4000}$

ឬ $\mathbf{98 + \frac{3}{40} < n < 100 + \frac{17}{40}}$

ដោយ $\mathbf{q \in IN}$ នាំឱ្យគេទាញបាន $\mathbf{q = \{ 99 , 100 \}}$

ហើយ $\mathbf{n = \{ 3977 , 4017 \}}$ ។

លំហាត់ទី៣៥

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} 5\,(\log_y x + \log_x y) = 26 \\ xy = 64 \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} 5\,(\log_y x + \log_x y) = 26 & (1) \\ xy = 64 & (2) \end{cases}$$

លក្ខខ័ណ្ឌ $\begin{cases} x > 0 \text{ , } y > 0 \\ x \neq 1, \ y \neq 1 \end{cases}$

សមីការ (1) អាចសរសេរ $\log_y x + \dfrac{1}{\log_y x} = \dfrac{26}{5}$

ឬ $(\log_y x)^2 - \dfrac{26}{5}.\log_y x + 1 = 0$ តាង $t = \log_y x$

គេបាន $t^2 - \dfrac{26}{5}t + 1 = 0$, $\Delta' = \dfrac{169}{25} - 1 = \dfrac{144}{25}$

នាំឱ្យ $t_1 = \dfrac{13}{5} - \dfrac{12}{5} = \dfrac{1}{5}$, $t_2 = \dfrac{13}{5} + \dfrac{12}{5} = 5$

- ចំពោះ $t = \dfrac{1}{5}$ គេបាន $\log_y x = \dfrac{1}{5}$ នាំឱ្យ $x = y^{\frac{1}{5}}$ (3)

យក (3) ជួសក្នុង (2) គេបាន $y.y^{\frac{1}{5}} = 64$ នាំឱ្យ $y = 32$

ហើយតាម (3) គេបាន $x = (32)^{\frac{1}{5}} = 2$ ។

- ចំពោះ $t = 5$ គេបាន $\log_y x = 5$ នាំឱ្យ $x = y^5$ (4)

យក (4) ជួសក្នុង (2) គេបាន $y.y^5 = 64$ នាំឱ្យ $y = 2$

ហើយតាម (4) គេបាន $x = 2^5 = 32$ ។

ដូចនេះប្រព័ន្ធមានគូចម្លើយ $(x = 2 , y = 32)$ ឬ $(x = 32 , y = 2)$

លំហាត់ទី៣៦

ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ $\begin{cases} 4^x . 5^y = \dfrac{1}{400} \\ 5^x . 6^y = \dfrac{1}{900} \end{cases}$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ :

$$\begin{cases} 4^x . 5^y = \dfrac{1}{400} \\ 5^x . 6^y = \dfrac{1}{900} \end{cases}$$

យើងមាន $\ln(4^x.5^y)=\ln(\frac{1}{400})$

ឬ $x\ln 4+y\ln 5=-2\ln 4-2\ln 5$ (1)

ហើយ $\ln(5^x.6^y)=\ln(\frac{1}{900})$

ឬ $x\ln 5+y\ln 6=-2\ln 6-2\ln 5$ (2)

តាម (1) & (2) គេបានប្រពន្ធ័ ខាងក្រោម

$$\begin{cases} x\ln 4+y\ln 5=-2\ln 4-2\ln 5 & \Big| \ (-\ln 6) \\ x\ln 5+y\ln 6=-2\ln 6-2\ln 5 & \Big| \ (\ln 5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x\ln 4.\ln 6-y\ln 5.\ln 6=2\ln 4.\ln 6+2\ln 5.\ln 6 & (3) \\ x\ln^2 5+y\ln 5.\ln 6=-2\ln 6.\ln 5-2\ln^2 5 & (4) \end{cases}$$

បូកសមីការ (3) & (4) គេបាន

$(\ln^2 5-\ln 4.\ln 6)x=2(\ln 4.\ln 6-.\ln^2 5)$ នាំឱ្យ $x=-2$

តាមសមីការ $4^x.5^y=\frac{1}{400}$ គេទាញ $4^{-2}.5^y=\frac{1}{400}$

នាំឱ្យគេទាញ $y=-2$ ។

ដូចនេះប្រព័ន្ធសមីការមានគូចម្លើយ $x=-2$, $y=-2$ ។

លំហាត់ទី៣៧

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$9^{x^2-x}+3^{1-x^2}=3^{(x-1)^2}+1$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$9^{x^2-x}+3^{1-x^2}=3^{(x-1)^2}+1$ មានន័យគ្រប់ $x\in IR$

សមីការអាចសរសេរ $3^{2(x^2-x)}+3^{1-x^2}=3^{(x-1)^2}+1$

តាង $3^{2(x^2-x)}=X$ និង $3^{1-x^2}=Y$ ដែល $X>0\ ,\ Y>0$

គេបាន $X.Y=3^{2(x^2-x)+1-x^2}=3^{(x-1)^2}$

សមីការក្លាយជា $X+Y=X.Y+1$

$$(X-XY)-(1-Y)=0$$

$$X(1-Y)-(1-Y)=0$$

$$(X-1)(1-Y)=0$$

គេទាញ $\left[\begin{array}{l}X=1\\Y=1\end{array}\right.$ សមមូល $\left[\begin{array}{l}3^{2(x^2-x)}=1\\3^{1-x^2}=1\end{array}\right.$

សមមូល $\left[\begin{array}{l} 2(x^2 - x) = 0 \\ 1 - x^2 = 0 \end{array}\right.$

គេទាញឫស $x \in \{ -1 , 0 , 1 \}$ ។

លំហាត់ទី៣៨

គេឲ្យ $a ; b ; c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដាច់ខាត ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$

តាង $T = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$

$$T=(\frac{a^2}{b+c}+a)+(\frac{b^2}{c+a}+b)+(\frac{c^2}{a+b}+c)-(a+b+c)$$

$$T=\frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{b(b+c+a)}{c+a}+\frac{c(c+a+b)}{a+b}-(a+b+c)$$

$$T=(a+b+c)(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+b}-1)$$

$$T=\left(a+b+c\right)\left[(\frac{a}{b+c}+1)+(\frac{b}{c+a}+1)+(\frac{c}{a+b}+1)-4\right]$$

$$T=\left(a+b+c\right)\left[(a+b+c)\ (\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b})-4\right]\ \ (1)$$

តាមវិសមភាព AM – GM យើងមាន ៖

$$(a+b)+(b+c)+(c+a)\geq 3\ \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$2(a+b+c)\geq 3\ \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

គេទាញ $a+b+c\geq \frac{3}{2}\ \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}\ \ (2)$

និង $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq 3\ \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}\ \ (3)$

គុណវិសមភាព (2) និង (3) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$(a+b+c)\ (\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})\geq \frac{9}{2}$$

$$(a+b+c)\ (\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})-4\geq \frac{9}{2}-4$$

$$(a+b+c)\ (\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})-4\geq \frac{1}{2}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $a+b+c>0$ គេបាន ៖

$$(a+b+c)\left[(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-4\right]\geq\frac{a+b+c}{2} \quad (5)$$

តាមទំនាក់ទំនង (4) និង (5) គេបាន $T\geq\frac{a+b+c}{2}$

ដូចនេះ $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣៩

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$ បើគេដឹងថា :

$f(2x-1)+2g(3x+1)=x^2$

និង $f(4x-3)-g(6x-2)=-2x^2+2x+1$

ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$:

គេមាន $f(2x-1)+2g(3x+1)=x^2 \quad (1)$

និង $f(4x-3)-g(6x-2)=-2x^2+2x+1 \quad (2)$

យើងតាង $2x-1=4t-3$ នាំឱ្យ $x=2t-1$

យក $x = 2t - 1$ ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$f[2(2t-1)-1] + 2g[3(2t-1)+1] = (2t-1)^2$$

$$f(4t-3) + 2g(6t-2) = 4t^2 - 4t + 1 \quad (3)$$

បើគេយក $x = t$ ជួសក្នុង(2) គេបាន

$$f(4t-3) - g(6t-2) = -2t^2 + 2t + 1 \quad (4)$$

តាម (3) និង (4) គេបានប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases} f(4t-3) + 2g(6t-2) = 4t^2 - 4t + 1 & (3) \\ f(4t-3) - g(6t-2) = -2t^2 + 2t + 1 & (4) \end{cases}$$

ដកសមីការ(3)និង(4)គេបាន

$3g(6t-2) = 6t^2 - 6t$ នាំឱ្យ $g(6t-2) = 2t^2 - 2$

យក $x = 6t - 2$ នាំឱ្យ $t = \dfrac{x+2}{6}$

ហើយ $g(x) = 2(\dfrac{x+2}{6})^2 - 2 = \dfrac{(x-4)(x+8)}{18}$

តាម (4)នាំឱ្យ $f(4t-3) - (2t^2 - 2) = -2t^2 + 2t + 1$

នាំឱ្យ $f(4t-3) = 2t - 1$ យក $x = 4t - 3$ នាំឱ្យ $t = \dfrac{x+3}{4}$

គេទាញ $f(x) = 2(\dfrac{x+3}{4}) - 1 = \dfrac{x+1}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{f(x) = \dfrac{x+1}{2}\ ,\ g(x) = \dfrac{(x-4)(x+8)}{18}}$ ។

លំហាត់ទី៤០

គេឲ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង **a , b , c** ។

កំនត់ប្រភេទនៃត្រីកោណ **ABC** បើគេដឹងថា ៖

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

ដំណោះស្រាយ

ប្រភេទនៃត្រីកោណ **ABC**

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ ABC គេមាន ៖

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \text{ នាំឲ្យ } \frac{\cos A}{a}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc} \quad (1)$$

ដូចគ្នាដែរគេទាញ $\frac{\cos B}{b}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2abc}$ **(2)**

និង $\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$ **(3)**

បូកទំនាក់ទំនង (1) , (2) ,(3) អង្គនឹងអង្គគេបាន ៖

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

ដោយ $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

គេទាញបាន ៖

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}=\frac{bc+ca+ab}{2abc}$$

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$$

$$2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2bc+2ac$$

$$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ac+a^2)=0$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

គេទាញបានសមភាព $a=b=c$ ។

ដូចនេះ **ABC** ជាត្រីកោណសមបាត ។

លំហាត់ទី៤១

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$

ខ. ចូរគណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$S_n = \tan a + \frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{a}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n}$$

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ទំនាក់ទំនង $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$

តាង $A = \cot x - 2\cot 2x$

ដោយ $\begin{cases} \cot x = \dfrac{1}{\tan x} \\ \cot 2x = \dfrac{1}{\tan 2x} = \dfrac{1-\tan^2 x}{2\tan x} \end{cases}$

គេបាន

$$A = \frac{1}{\tan x} - 2\left(\frac{1-\tan^2 x}{2\tan x}\right)$$

$$= \frac{1-1+\tan^2 x}{\tan x} = \tan x$$

ដូចនេះ $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$ ។

ខ. គណនាផលបូកខាងក្រោម ៖

$$S_n = \tan a + \frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{a}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\tan\frac{a}{2^k}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{2^k}(\cot\frac{a}{2^k} - 2\cot\frac{a}{2^{k-1}})\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\cot\frac{a}{2^k} - \frac{1}{2^{k-1}}\cot\frac{a}{2^{k-1}}\right) = \frac{1}{2^n}\cot\frac{a}{2^n} - 2\cot 2a$$

ដូចនេះ

$$S_n = \tan a + \frac{1}{2}\tan\frac{a}{2} + ... + \frac{1}{2^n}\tan\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cot\frac{a}{2^n} - 2\cot 2a$$

លំហាត់ទី៤២

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = x^2 - 2$ ដែល $x \in IR$

ក_គេយក $U_1 = f(x)$ និង $U_{n+1} = f(U_n)$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ចូរបង្ហាញថា $U_n = f_n[\,f[.......f[f(x)].......]\,]$ ។

ខ_ស្រាយថាបើ $x > 2$ គេបាន $U_n > 2$ គ្រប់ $n \in IN^*$ ។

គ_គេតាង $V_n = U_n - \sqrt{U_n^{\,2} - 4}$ គ្រប់ $n \in IN^*$ និង $x > 2$ ។

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ចូរបង្ហាញថា $2V_{n+1} = V_n^{\,2}$ ។

ឃ_សន្មតថា $W_n = \ln V_n - \ln 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ។

ចូររកប្រភេទនៃស្វ៊ីត W_n ។

ង_ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរទាញរកអនុគមន៍ ៖

$F_n(x) = f_n[f[........f[f(x)].........]]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក_បង្ហាញថា $U_n = f_n[\,f[.......f[f(x)].......]\,]$

យើងមាន $U_1 = f(x)$ ពិត (តាមសម្មតិកម្ម)

$U_2 = f(U_1) = f[f(x)]$ ពិត (ព្រោះ $U_{n+1} = f(U_n)$)

$U_3 = f(U_2) = f[f[f(x)]]$ ពិត

យើងសន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ ៖

$U_k = f_k[f[.......f[f(x)].......]]$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ ៖

$U_{k+1} = f_{k+1}[f[.......f[f(x)].......]]$ ពិត

យើងមាន

$$U_{k+1} = f(U_k) = f[\ f_k[f[........f[f(x)]......]]\ ]$$
$$= f_{k+1}[f[.......f[f(x)].......]]$$

ដូចនេះ $U_n = f_n[\ f[.......f[f(x)].......]\ ]$ ។

ខ-ស្រាយថាបើ $x > 2$ គេបាន $U_n > 2$ គ្រប់ $n \in IN^*$

យើងមាន $U_{n+1} = f(U_n) = U_n{}^2 - 2$

បើ $x > 2$ នោះ $U_1 = f(x) = x^2 - 2 > 2$ ឬ $U_1 > 2$ ពិត

យើងសន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $U_k > 2$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $U_{k+1} > 2$ ពិត

យើងមាន $U_{k+1} = U_k{}^2 - 2$

ដោយ $U_k > 2$ នាំឲ្យ $U_k{}^2 > 4$ ឬ $U_k{}^2 - 2 > 4 - 2 = 2$

គេទាញ $U_{k+1} = U_k{}^2 - 2 > 2$ ពិត ។

ដូចនេះ បើ $x > 2$ គេបាន $U_n > 2$ គ្រប់ $n \in IN^*$ ។

គ-បង្ហាញថា $2V_{n+1} = V_n^2$

យើងមាន $V_n = U_n - \sqrt{U_n^2 - 4}$

យើងបាន $V_{n+1} = U_{n+1} - \sqrt{U_{n+1}^2 - 4}$ តែ $U_{n+1} = U_n^2 - 2$

$$V_{n+1} = U_n^2 - \sqrt{(U_n^2 - 2)^2 - 4}$$

$$V_{n+1} = U_n^2 - \sqrt{U_n^4 - 4U_n^2}$$

$$V_{n+1} = U_n^2 - U_n\sqrt{U_n^2 - 4}$$

$$2V_{n+1} = 2U_n^2 - 2U_n\sqrt{U_n^2 - 4}$$

$$2V_{n+1} = U_n^2 - 2U_n\sqrt{U_n^2 - 4} + (\sqrt{U_n^2 - 4})^2$$

$$2V_{n+1} = \left(U_n - \sqrt{U_n^2 - 4} \right)^2 = V_n^2$$

ដូចនេះ $2V_{n+1} = V_n^2$ ។

ឃ-រកប្រភេទនៃស្វ៊ីត W_n ។

គេមាន $W_n = \ln V_n - \ln 2$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

គេបាន $W_{n+1} = \ln V_{n+1} - \ln 2$ ដោយ $2V_{n+1} = V_n^2$

$$W_{n+1} = \ln\frac{V_n^2}{2} - \ln 2 = 2\ln V_n - 2\ln 2 = 2W_n$$

ដូចនេះ (W_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$ ។

ង_រកអនុគមន៍ $F_n(x) = f_n[f[........f[f(x)].........]]$

ដោយ $U_n = f_n[f[.......f[f(x)].......]]$

គេទាញបាន $F_n(x) = U_n$ ។

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន (W_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន

រេសុង $q = 2$ ។

តាមរូបមន្ត $W_n = W_1 \times q^{n-1} = 2^{n-1} . W_1$

ដោយ $W_1 = \ln V_1 - \ln 2 = \ln\left(\frac{V_1}{2}\right)$

តែ $V_1 = U_1 - \sqrt{U_1{}^2 - 4} = f(x) - \sqrt{f^2(x) - 4}$

$$V_1 = x^2 - 2 + \sqrt{(x^2 - 2)^2 - 4}$$

$$V_1 = x^2 - 2 - \sqrt{x^4 - 4x^2}$$

$$= x^2 - 2 - x\sqrt{x^2 - 4} = \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 - 4})^2$$

គេបាន $W_1 = \ln\left[\frac{(x - \sqrt{x^2 - 4})^2}{4}\right] = \ln\left(\frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right)^2$

ហេតុនេះ $W_n = 2^{n-1}.\ln\left(\frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right)^2 = \ln\left(\frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right)^{2^n}$

ដោយ $W_n = \ln V_n - \ln 2 = \ln\left(\frac{V_n}{2}\right)$

គេទាញ $\ln\left(\frac{V_n}{2}\right) = \ln\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

ឬ $V_n = 2\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $V_n = U_n - \sqrt{{U_n}^2 - 4}$

$$U_n - V_n = \sqrt{{U_n}^2-4}$$

$${U_n}^2 - 2U_nV_n + {V_n}^2 = {U_n}^2 - 4$$

$$2U_nV_n = {V_n}^2 + 4$$

$$U_n = \frac{{V_n}^2+4}{2V_n} = \frac{1}{2}V_n + \frac{2}{V_n}$$

ដោយ $V_n = 2\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$

គេបាន $U_n = \left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n} + \frac{1}{\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}}$

គុណនឹងកន្សោម $\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$ គេបាន ÷

$$U_n=\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}+\frac{\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}}{\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}}$$

$$U_n=\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}+\frac{\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}}{\left(\frac{x^2-x^2+4}{4}\right)^{2^n}}$$

$$U_n=\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}+\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$$

ដូចនេះ $F_n(x)=\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}+\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{2^n}$ ។

លំហាត់ទី៤៣

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-3x+1}{3x^2-3x+1}$

កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$f\left(\dfrac{1+a+b}{2}\right)\ \ge\ f\left(\dfrac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f\left(\dfrac{1+a+b}{2}\right)\ \ge\ f\left(\dfrac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$

យើងមាន $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-3x+1}{3x^2-3x+1}$ កំនត់ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x-3)(3x^2-3x+1)-(6x-3)(x^3+3x^2-3x+1)}{(3x^2-3x+1)^2}$$

$$=\frac{3x^4-6x^3+3x^2}{(3x^2-3x+1)^2}=\frac{3x^2(x-1)^2}{(3x^2-3x+1)^2}\ \ge 0\ ,\ \forall x\in IR$$

ដូចនេះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនលើ IR ។

ម្យ៉ាងទៀតយើងសន្មតថា $\dfrac{1+a+b}{2}\ge\dfrac{1+a+b+ab}{2+a+b}$

គេបាន $\dfrac{2}{1+a+b}\le\dfrac{2+a+b}{1+a+b+ab}$

$$\frac{2}{1+a+b} \le \frac{(1+a)+(1+b)}{(1+a)(1+b)}$$

$$\frac{2}{1+a+b} \le \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}$$

ដោយ $\frac{1}{1+a+b} \le \frac{1}{1+a}$ និង $\frac{1}{1+a+b} \le \frac{1}{1+b}$

គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b។

គេទាញ $\frac{2}{1+a+b} \le \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}$

នាំឲ្យការសន្មត $\frac{1+a+b}{2} \ge \frac{1+a+b+ab}{2+a+b}$ពិត។

ដូចនេះតាមលក្ខណៈអនុគមន៍កើនគេទាញបាន ៖

$$f\left(\frac{1+a+b}{2}\right) \ge f\left(\frac{1+a+b+ab}{2+a+b}\right)$$ ។

លំហាត់ទី៤៤

គេឱ្យខ្សែកោង $(C_m): \ y = f_m(x) = \dfrac{x^2 + 4mx - 4m^2 + 1}{m - x}$

ចូរបង្ហាញថាមានខ្សែកោងពីរនៃគ្រួសារខ្សែកោង (C_m)

ដែលកាត់តាមចំនុច$M_0(x_0 ; y_0)$ ចំពោះគ្រប់$(x_0 ; y_0) \in IR^2$ ។

m ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រ ។

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ ៖

បើ $M_0 \in (C_m)$ គេបាន $y_0 = \dfrac{{x_0}^2 + 4mx_0 - 4m^2 + 1}{m - x_0}$

សមមូល $y_0(m - x_0) = {x_0}^2 + 4mx_0 - 4m^2 + 1$

$$my_0 - x_0y_0 = {x_0}^2 + 4mx_0 - 4m^2 + 1$$

$$4m^2 + (y_0 - 4x_0)m - {x_0}^2 - x_0y_0 - 1 = 0 \quad (1)$$

ឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការ (1) សរសេរ ៖

$$\Delta = (y_0 - 4x_0)^2 - 16(-{x_0}^2 - x_0y_0 - 1)$$

$$= {y_0}^2 - 8x_0y_0 + 16{x_0}^2 + 16{x_0}^2 + 16x_0y_0 + 16$$

$$= ({y_0}^2 + 8x_0y_0 + 16{x_0}^2) + 16({x_0}^2 + 1)$$

$$= (y_0 + 4x_0)^2 + 16({x_0}^2 + 1) > 0 \ ; \forall x_0, y_0 \in IR$$

ដោយ $\Delta > 0$ នាំឲ្យសមីការ (1) មានឫសពីរផ្សេងគ្នាជានិច្ច ។
ដូចនេះមានខ្សែកោងពីរនៃគ្រួសារខ្សែកោង (C_m)ដែលកាត់តាម
ចំនុច $M_0(x_0\,;y_0)$ ចំពោះគ្រប់ $(x_0;y_0) \in IR^2$ ។

លំហាត់ទី៤៥

គេឱ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបី ។
គេដឹងថា $P(x)+2$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)^2$
ហើយ $P(x)-2$ ចែកដាច់នឹង $(x-1)^2$ ។
ចូរកំនត់រកពហុធា $P(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រកពហុធា $P(x)$៖

តាមបំរាប់គេអាចសរសេរ $\begin{cases} P(x)+2=(x+1)^2(ax+b) & (1) \\ P(x)-2=(x-1)^2(cx+d) & (2) \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} P(-1)+2=0 \\ P(1)-2=0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} P(-1)=-2 \\ P(1)=2 \end{cases}$

ដោយធ្វើដើរវេលើ (1) និង (2) គេបាន ៖

$$\begin{cases} P'(x) = 2(x+1)(ax+b) + a(x+1)^2 \\ P'(x) = 2(x-1)(cx+d) + c(x-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P'(x) = (x+1)[2(ax+b) + a(x+1)] & (3) \\ P'(x) = (x-1)[2(cx+d) + c(x-1) & (4) \end{cases}$$

តាម (3) នឹង (4) បញ្ជាក់ថា $P'(x)$ ចែកដាច់នឹង $(x+1)(x-1)$

គេទាញ $P'(x) = k(x+1)(x-1)$

(ព្រោះ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី៣)

គេបាន $P(x) = k\int (x^2-1).dx = k(\frac{x^3}{3} - x) + r$

ចំពោះ $x = \pm 1$ គេបាន $\begin{cases} P(-1) = \frac{2}{3}k + r = -2 \\ P(1) = -\frac{2}{3}k + r = 2 \end{cases}$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបាន $k = 3$, $r = 0$

ដូចនេះ $P(x) = 3\,(\frac{x^3}{3} - x) = x^3 - 3x$ ។

លំហាត់ទី៤៦

គេឱ្យ $A=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+i\right)^n-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-i\right)^n$, $n\in IN$ ។

ចូរបង្ហាញថា $A=i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $A=i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ។

យើងមាន $A=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+i\right)^n-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-i\right)^n$, $n\in IN$

តាង $Z=\frac{1}{\sqrt{3}}+i=\frac{1+i.\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$

តាមរូបមន្តដឺម័រគេបាន $Z^n=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+i\right)^n=\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

ហើយ $\overline{Z}^n=\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

គេទាញ $A=\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)-\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}-i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

$$=\frac{2^n}{(\sqrt{3})^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}-\cos\frac{n\pi}{3}+i.\sin\frac{n\pi}{3}\right)=i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}$$

ដូចនេះ $\boxed{A=i.\frac{2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n}.\sin\frac{n\pi}{3}}$ ។

លំហាត់ទី៤៧

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (U_n) កំនត់ដោយ ៖

$U_0 = \ln 3$ និង $U_{n+1} = \ln(1+e^{U_n})$, $n \in IN$ ។

ចូរគណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា U_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $U_{n+1} = \ln(1+e^{U_n})$, $n \in IN$

គេទាញ $e^{U_{n+1}} = 1 + e^{U_n}$

ឬ $e^{U_{n+1}} - e^{U_n} = 1$ ថេរ

នាំឱ្យ $\left(e^{U_n}\right)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d = 1$

និងតួទីមួយ $e^{U_0} = e^{\ln 3} = 3$

គេបាន $e^{U_n} = 3 + n$ នាំឱ្យ $U_n = \ln(n+3)$ ។

លំហាត់ទី៤៨

ដោះស្រាយសមីការ $47x + 29y = 1$ ក្នុងសំណុំចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ $47x + 29y = 1$ ក្នុងសំណុំចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីហ្វ

យើងមាន $47 = 29 \times 1 + 18$ នាំឱ្យ $18 = 47 - 29$

$$29 = 18 \times 1 + 11$$

នាំឱ្យ $11 = 29 - 18 = 29 - (47 - 29) = 29 \times 2 - 47$

$$18 = 11 \times 1 + 7$$

នាំឱ្យ $7 = 18 - 11 = (47 - 29) - (29 \times 2 - 47)$

ឬ $7 = 47 \times 2 - 29 \times 3$

$$11 = 7 \times 1 + 4$$

នាំឱ្យ $4 = 11 - 7 = (29 \times 2 - 47) - (47 \times 2 - 29 \times 3)$

ឬ $4 = -3 \times 47 + 29 \times 5$

$$7 = 4 \times 2 - 1$$

នាំឱ្យ $1 = 4 \times 2 - 7 = (-3 \times 47 + 29 \times 5).2 - (47 \times 2 - 29 \times 3)$

ឬ $1 = 47 \times (-8) + 29 \times (13)$

គេបាន $47x + 29y = 47 \times (-8) + 29 \times (13)$

$$47(x+8) = -29(y-13)$$

នាំឱ្យ $\begin{cases} x + 8 = -29q \\ y - 13 = 47q \quad , \ \forall q \in Z \end{cases}$

ដូចនេះ $x = -29q - 8 \ , \ y = 47q + 13 \ , \ \forall q \in Z$ ។

លំហាត់ទី៤៩

ចូរបង្ហាញថា $A_n = 3^{3n+2} + 7^{2n+3}$ ចែកដាច់នឹង 11

ជានិច្ចគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $A_n = 3^{3n+2} + 7^{2n+3}$ ចែកដាច់នឹង 11

យើងមាន $3^3 \equiv 5 \pmod{11}$

នាំឱ្យ $3^{3n+2} = 9.5^n \pmod{11}$

ម្យ៉ាងទៀត $7^2 \equiv 5 \pmod{11}$ នាំឱ្យ $7^{2n} \equiv 5^n \pmod{11}$

ហើយ $7^3 \equiv 2 \pmod{11}$

គេទាញបាន $7^{2n+3} \equiv 2\,.5^n \pmod{11}$

យើងបាន

$$A = 3^{3n+2} + 7^{2n+3} \equiv 9.5^n + 2.5^n = 11.5^n \equiv 0 \pmod{11}$$ ។

ដូចនេះ $A_n = 3^{3n+2} + 7^{2n+3}$ ចែកដាច់នឹង 11

ជានិច្ចគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

លំហាត់ទី៥០

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន $E_n = 447^n + 462^n - 122^n - 124^n$

ចែកដាច់នឹង 221 ជានិច្ចចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន E_n ចែកដាច់នឹង 221

យើងឃើញថា $221 = 13 \times 17$ ដែល 13 និង 17 បឋមរវាងគ្នា

ដូចនេះដើម្បីស្រាយថា ចំនួន E_n ចែកដាច់នឹង 221 គេត្រូវស្រាយ

ឱ្យឃើញថាចំនួន E_n វាចែកដាច់នឹង 13ផង និង ចែកដាច់នឹង 17 ផង ។

គេមាន $E_n = 447^n + 462^n - 122^n - 124^n$

$E_n = (447^n - 122^n) + (462^n - 124^n)$

តាមរូបមន្ត $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + b^{n-1})$

យើងបាន $E_n = (447-122).p_1 + (462-124).q_1$

$$= 325p_1 + 338q_1 = 13(25p_1 + 26q_1)$$

ដែល $p_1, q_1 \in IN^*$ ។

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា ចំនួន E_n ចែកដាច់នឹង 13 ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $E_n = (447^n - 124^n) + (462^n - 122^n)$

$$= (447-124).p_2 + (462-122).q_2$$

$$= 323p_2 + 340q_2$$

$$= 17(19p_2 + 20q_2) \quad , p_2, q_2 \in IN^*$$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា ចំនួន E_n ចែកដាច់នឹង 17 ។

ដូចនេះសរុបសេចក្តីទៅយើងបាន ចំនួន E_n ចែកដាច់នឹង 221 ជានិច្ច ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

លំហាត់ទី៥១

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = e^x.\cos x$

ក. គណនា $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា $f'(x) = \sqrt{2}\,e^x \cos(x + \frac{\pi}{4})$

ខ. ដោយធ្វើវិចារតាមកំណើនចូរបង្ហាថាដេរីវេទី n កំនត់ដោយ

$$f^{(n)}(x) = \sqrt{2}^n e^x.\cos(x + \frac{n\pi}{4})$$

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា $f'(x)$ រួចបង្ហាញថា $f'(x) = \sqrt{2}\,e^x \cos(x + \frac{\pi}{4})$

យើងមាន $f(x) = e^x \cos x$

យើងបាន $f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x$

$$= e^x(\cos x - \sin x)$$

$$= \sqrt{2}e^x(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x)$$

$$= \sqrt{2}e^x(\cos x\cos\frac{\pi}{4} - \sin x\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\,e^x \cos(x + \frac{\pi}{4})$$

ដូចនេះ $f'(x) = \sqrt{2}\,e^x \cos(x + \frac{\pi}{4})$ ។

ខ. ដោយធ្វើវិចារតាមកំណើនថា $f^{(n)}(x) = \sqrt{2}^n e^x.\cos(x + \frac{n\pi}{4})$

យើងមាន $f'(x) = \sqrt{2}\,e^x.\cos(x + \frac{\pi}{4}) = f^{(1)}(x)$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $f^{(k)}(x) = \sqrt{2}^k e^x.\cos(x + \frac{k\pi}{4})$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ

$$f^{(k+1)}(x) = \sqrt{2}^{k+1} e^x \cos\left(x + \frac{(k+1)\pi}{4} \right)$$

យើងមាន $f^{(k+1)}(x) = (\, f^{(k)}(x)\,)'$

$$= \sqrt{2}^k e^x \cos(x + \frac{k\pi}{4}) - \sqrt{2}^k e^x \sin(x + \frac{k\pi}{4})$$

$$= \sqrt{2}^k e^x \left[\cos(x + \frac{k\pi}{4}) - \sin(x + \frac{k\pi}{4}) \right]$$

ដោយ $\cos(x + \frac{k\pi}{4}) - \sin(x + \frac{k\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{(k+1)\pi}{4} \right)$

គេបាន $f^{(k+1)}(x) = \sqrt{2}^{k+1} e^x \cos\left(x + \frac{(k+1)\pi}{4} \right)$ ពិត ។

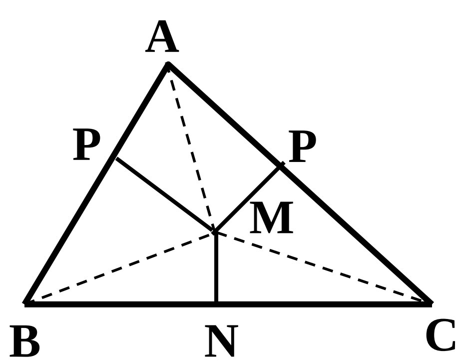
ដូចនេះ $f^{(n)}(x) = \sqrt{2}^n e^x.\cos(x + \frac{n\pi}{4})$ ។

លំហាត់ទី៥២

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ឧបមាថា M ជាចំនុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណនេះ ហើយគេតាង x, y និង z ជាចំងាយរៀងគ្នាពីចំនុច M ទៅជ្រុង BC , AC និង AB នៃត្រីកោណ ។ ចូរគណនាតម្លៃអប្បបរមានៃ $T = x^2 + y^2 + z^2$ ជាអនុគមន៍នៃ a, b, c ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃអប្បបរមានៃ $T = x^2 + y^2 + z^2$ ជាអនុគមន៍នៃ a, b, c



យើងតាង S ជាផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ ABC

យើងបាន $S = S_{AMB} + S_{BMC} + S_{AMC}$

$$S = \frac{1}{2}MQ.AB + \frac{1}{2}MN.BC + \frac{1}{2}MP.AC$$

$$S = \frac{1}{2}cz + \frac{1}{2}by + \frac{1}{2}ax$$

គេទាញបាន $ax + by + cz = 2S$

តាមវិសមភាពប៊ែនូយីយើងបាន :

$$ax + by + cz \le \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$2S \le \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{T}$$

គេទាញបាន $T \ge \dfrac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

ដូចនេះតម្លៃអប្បរមានៃ $T = x^2 + y^2 + z^2$

គឺ $T_{min} = \dfrac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

ដែល $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ និង $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ ។

លំហាត់ទី៥៣

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $y = f(x)$ បើគេដឹងថា :

$f(x+\sqrt{x^2-2x+2}) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រកអនុគមន៍ $y = f(x)$:

គេមាន $f(x+\sqrt{x^2-2x+2}) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \qquad (1)$

បើយើងតាង $x+\sqrt{x^2-2x+2} = t$

យើងបាន $\sqrt{x^2-2x+2} = t-x$

$$x^2-2x+2 = (t-x)^2$$

$$x^2-2x+2 = t^2-2tx+x^2$$

$$2tx-2x = t^2-2$$

$$2x(t-1) = t^2-2$$

$$x = \frac{t^2-2}{2(t-1)} \quad , \ t \neq 1$$

យកតម្លៃ $x = \dfrac{t^2-2}{2(t-1)}$ ជំនួសក្នុង (1) យើងបាន :

$$f(t)=\frac{[\frac{t^2-2}{2(t-1)}]^2-1}{[\frac{t^2-2}{2(t-1)}]^2+1}=\frac{t^4-4t^2+4-4t^2+8t-4}{t^4-4t^2+4+4t^2-8t+4}$$

$$f(t)=\frac{t^4-8t^2+8t}{t^4-8t+8}$$

$$f(t)=\frac{t(t^3-8t+8)}{t^4-8t+8}$$

ដូចនេះ $\boxed{f(x)=\frac{x(x^3-8x+8)}{x^4-8x+8}}$ ។

លំហាត់ទី៥៤

ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច $(O,\vec{i},\vec{j})$ គេឱ្យបួនចំនុច A , B , C ,D ដែលមានអាហ្វិករៀងគ្នា

$Z_A=1+6i$, $Z_B=4+5i$, $Z_C=5+4i$ និង $Z_D=-2-3i$ ។

ចូរស្រាយថាចតុកោណ $ABCD$ ចារិកក្នុងរង្វង់មួយដែលគេនឹងបញ្ជាក់ផ្ចិត និង កាំរបស់វា ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាចតុកោណ ABCD ចារិកក្នុងរង្វង់

យើងតាង (c): $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

ជាសមីការរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC ។

យើងបាន $A \in (c)$ នាំឱ្យ $1^2 + 6^2 + a + 6b + c = 0$

ឬ $a + 6b + c = -37 \quad (1)$

$B \in (c)$ នាំឱ្យ $4^2 + 5^2 + 4a + 5b + c = 0$

ឬ $4a + 5b + c = -41 \quad (2)$

$C \in (c)$ នាំឱ្យ $(-2)^2 + (-3)^2 - 2a - 3b + c = 0$

ឬ $-2a - 3b + c = -13 \quad (3)$

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} a + 6b + c = -37 \\ 4a + 5b + c = -41 \\ -2a - 3b + c = -13 \end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបានចម្លើយ

$a = -2$, $b = -2$, $c = -23$ ។

សមីការរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC អាចសរសេរ :

$$(c) : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$$

ឬ $(c):(x-1)^2+(y-1)^2=25$

ម្យ៉ាងទៀតដោយយកកូអរដោនេ D ជួសក្នុងសមីការ

$(c):(-2-1)^2+(-3-1)^2=25$

វាផ្ទៀងផ្ទាត់នោះនាំឱ្យ $D\in(c)$ ។

ដោយបួនចំនុច A , B , C,D ស្ថិតនៅលើរង្វង់មានសមីការ

$(c):(x-1)^2+(y-1)^2=25$ តែមួយ

នោះនាំឱ្យចតុកោណ $ABCD$ ចារិកក្នុងរង្វង់ (c) មានផ្ចិត $I(1,1)$

និង កាំ $R=5$ ។

លំហាត់ទី៥៥

គេឲ្យត្រីធា $f(x)=ax^2+bx+c$ ដែល $a\neq 0$, $a,b,c\in IR$

ក_ចូរស្រាយថាបើ $\Delta=b^2-4ac<0$ និង $a>0$ នោះគេបាន

$f(x)>0$, $\forall x\in IR$

ខ_ក្នុងករណីនេះគេសន្មតថា $\Delta=b^2-4ac<0$ និង $a>0$ ។

បើ $b>a$ ចំពោះគ្រប់ $\lambda\in IR$ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{a(\lambda^2-k)+b(\lambda+k)+c}{b-a}>k$$

ដែល k ជាចំនួនពិតថេរមួយដែលគេឲ្យ ។

គ_អនុវត្តន៍ ចំពោះគ្រប់ត្រីធា $f(x)=ax^2+bx+c$

ដែល $a\neq 0$, $a,b,c\in IR$

បើ $\Delta=b^2-4ac<0$ និង $a>0$ នោះបង្ហាញថាគេមាន ៖

$$\frac{a+b+a}{b-a}>3$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក_ស្រាយថាបើ $\Delta=b^2-4ac<0$ និង $a>0$ នោះគេបាន

$f(x)>0$, $\forall x\in IR$

យើងមាន $f(x)=ax^2+bx+c$

$$f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[(x)^2+2(x)(\frac{b}{2a})+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}\right]$$

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]\ ,\ \Delta=b^2-4ac$$

យើងឃើញថាបើ $\Delta<0$ នោះ $-\frac{\Delta}{4a^2}>0$

នាំឲ្យ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$ ។

ហេតុនេះ $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ មានសញ្ញាដូច a

ហើយបើ $a>0$ នោះគេបាន ៖

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]>0\ ,\forall x\in IR\text{ ។}$$

ដូចនេះបើ $\Delta=b^2-4ac<0$ និង $a>0$

នោះគេបាន $f(x)>0\ ,\ \forall x\in IR$ ។

ខ-បង្ហាញថា $\frac{a(\lambda^2-k)+b(\lambda+k)+c}{b-a}>k$

តាមសម្រាយខាងលើបើ $\Delta=b^2-4ac<0$ និង $a>0$

នោះ $\forall x \in IR : f(x) > 0$ ចំពោះគ្រប់ $\lambda \in IR$

គេបាន $f(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c > 0$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $kb - ka$

គេបាន $a\lambda^2 + b\lambda + c + kb - ka > kb - ka$

$$a(\lambda^2 - k) + b(\lambda + k) + c > k\ (b - a) \quad (1)$$

ដោយ $b > a$ ឬ $b - a > 0$

នោះយើងចែកទំនាក់ទំនង (1) នឹង $b - a$ វិជ្ជមាន

យើងបាន $\dfrac{a(\lambda^2 - k) + b(\lambda + k) + c}{b - a} > k$

ជាវិសមភាពដែលត្រូវបង្ហាញ ។

គ_អនុវត្តន៍ បង្ហាញថា $\dfrac{a + b + a}{b - a} > 3$

តាមសម្រាយខាងលើចំពោះគ្រប់ត្រីធា $f(x) = ax^2 + bx + c$

ដែល $a \neq 0$, $a, b, c \in IR$

បើ $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ និង $a > 0$ នោះយើងមាន

$$\frac{a(\lambda^2 - k) + b(\lambda + k) + c}{b - a} > k$$

ដែល $\lambda \in IR$, $k \in IR$ និង k :ថេរ ។

បើយើងជ្រើសរើស $k=3$ និង $\lambda=-2$

យើងបាន $\frac{a(4-3)+b(-2+3)}{b-a}>3$

ឬ $\frac{a+b+c}{b-a}>3$ ពិត ។

ដូចនេះ ចំពោះគ្រប់ត្រីធា $f(x)=ax^2+bx+c$

ដែល $a\neq 0$, $a,b,c\in IR$

បើ $\Delta=b^2-4ac<0$ និង $a>0$

នោះបង្ហាញថាគេមាន $\frac{a+b+a}{b-a}>3$ ។

លំហាត់ទី៥៦

គេឲ្យ $0<x<\frac{\pi}{2}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)}\leq 1+\sqrt{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)}\leq 1+\sqrt{2}$$

យើងមាន ៖

$$\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)=1+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x\cos x}$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន ៖

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin x\cos x}}$$

គេទាញ ៖

$$\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)\geq 1+2\sqrt{\frac{1}{\sin x\cos x}}+\frac{1}{\sin x\cos x}$$

ដោយ $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x\leq\frac{1}{2}$ ឬ $\frac{1}{\sin x\cos x}\geq 2$

គេបាន $\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)\geq 1+2\sqrt{2}+2=(1+\sqrt{2})^2$

ដូចនេះ $\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)}\leq 1+\sqrt{2}$ ។

លំហាត់ទី៥៧

ចូរដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases} 4^x.3^{y+1} + 27^y = 171 \\ 8^x + 2^x.3^{1+2y} = 172 \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases} 4^x.3^{y+1} + 27^y = 171 \quad (1) \\ 8^x + 2^x.3^{1+2y} = 172 \quad (2) \end{cases}$$

ដោយបូកសមីការ (1) និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$8^x + 4^x.3^{y+1} + 2^x.3^{1+2y} + 27^y = 343$$

$$(2^x)^3 + 3(2^x)^2(3^y) + 3(2^x)(3^y)^2 + (3^y)^3 = 343$$

$$(2^x + 3^y)^3 = 343$$

$$2^x + 3^y = 7 \quad (3)$$

ម្យ៉ាងទៀតដកសមីការ (1) និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$27^y - 2^x.3^{1+2y} + 4^x.3^{y+1} - 8^x = -1$$

$$(3^y)^3 - 3(3^y)^2(2^x) + 3(3^y)(2^x)^2 - (2^x)^3 = -1$$

$$(3^y - 2^x)^3 = -1$$

$$2^x - 3^y = 1 \quad (4)$$

តាម (3) និង (4) យើងបានប្រព័ន្ធ ៖

$$\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 & (3) \\ 2^x - 3^y = 1 & (4) \end{cases}$$

បូកសមីការ (3) និង (4) គេបាន $2.2^x = 8$ នាំឲ្យ $x = 2$

ដកសមីការ (3) និង (4) គេបាន $2.3^y = 6$ នាំឲ្យ $y = 1$ ។

ដូចនេះ $x = 2$, $y = 1$ ។

លំហាត់ទី៥៨

ចូរដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases} 7x^3 - 3x^2y - 21xy^2 + 26y^3 = 342 \\ 9x^3 - 21x^2y + 33xy^2 - 28y^3 = 344 \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases} 7x^3 - 3x^2y - 21xy^2 + 26y^3 = 342 & (1) \\ 9x^3 - 21x^2y + 33xy^2 - 28y^3 = 344 & (2) \end{cases}$$

ដោយបូកសមីការ (1) និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$16x^3-24x^2y+12xy^2-2y^3=686$$
$$2\,(8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3)=686$$
$$(2x-y)^3=343$$
$$2x-y=7 \qquad (3)$$

ម្យ៉ាងទៀតដកសមីការ (1)និង (2) អង្គនិងអង្គគេបាន ៖

$$-2x^3+18x^2y-54xy^2+54y^3=-2$$
$$-2(x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3)=-2$$
$$(x-3y)^3=1$$
$$x-3y=1 \qquad (4)$$

តាម (3) និង (4) យើងបានប្រព័ន្ធ ៖

$$\begin{cases} 2x-y=7 & (3) \\ x-3y=1 & (4) \end{cases}$$

យើងមាន $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-6+1=-5$

$$D_x=\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-20 \quad , \quad D_y=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2-7=-5$$

គេបាន $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{-20}{-5}=4$, $y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{-5}{-5}=1$

ដូចនេះ $x=4$, $y=1$ ។

លំហាត់ទី៥៩

គេឲ្យសមីការ $(E): x^2 - 2\sqrt{2+a^2+b^2}.x + (1+a)(1+b) = 0$

ដែល a និង b ជាពីរចំនួនពិត ។

ក_ចូរកំនត់តម្លៃ a និង bដើម្បីឲ្យសមីការនេះមានឫសឌុប

រួចគណនាឫសឌុបនោះ ។

ខ_ក្រៅពីតម្លៃ a និង bខាងលើចូរបង្ហាញថាសមីការ (E)មានឫសពីរ

ជានិច្ចក្នុង IR។

ដំណោះស្រាយ

ក_កំនត់តម្លៃ a និង b រួចគណនាឫសឌុប៖

គេមាន $(E): x^2 - 2\sqrt{2+a^2+b^2}.x + (1+a)(1+b) = 0$

ដើម្បីឲ្យសមីការនេះមានឫសឌុបលុះត្រាតែ $\Delta' = 0$

យើងមាន $\Delta' = (2+a^2+b^2) - (1+a)(1+b)$

$$= 2 + a^2 + b^2 - 1 - a - b - ab$$

$$= 1 + a^2 + b^2 - a - b - ab$$

$$= \frac{1}{2}\left[(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2\right]$$

គេបាន $\Delta' = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2\right] = 0$

នាំឲ្យ $\begin{cases} a-b=0 \\ a-1=0 \\ b-1=0 \end{cases}$

គេទាញបាន $a=1$ និង $b=1$ ។

ចំពោះ $a=1$, $b=1$ គេទាញឫសឌុប ÷

$x_1 = x_2 = \sqrt{2+a^2+b^2} = \sqrt{2+1+1} = 2$ ។

ខ_បង្ហាញថាសមីការ (E) មានឫសពីរជានិច្ចក្នុង IR

បើ $a \neq 1$, $b \neq 1$ នោះ $\Delta' = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2\right] > 0$

ដូចនេះសមីការ (E) មានឫសពីរជានិច្ចក្នុង IR ។

លំហាត់ទី៦០

គេឲ្យពហុធា $P_n(x) = 1 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_{n-1}x^{n-1} + x^n$

ដែល $c_1, c_2, c_3, ..., c_{n-1} \geq 0$ ។

សន្មតថាសមីការ $P_n(x) = 0$ មាន n ឫសជាចំនួនពិតអវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $P_n(2) \geq 3^n$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $P_n(2) \geq 3^n$

តាង $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ជាឫសសមីការ $P_n(x) = 0$

ដែល $x_k < 0, \forall k = 1, 2, ..., n$

គេបាន $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)......(x - x_n)$

យក $t_k = -x_k > 0, \forall k = 1, 2, 3, ..., n$

គេបាន $P_n(x) = (x + t_1)(x + t_2)(x + t_3).......(x + t_n)$

បើ $x = 2$ នោះគេបាន

$P_n(2) = (2 + t_1)(2 + t_2)(2 + t_3).....(2 + t_n)$ ។

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន ÷

$$2 + t_k = 1 + 1 + t_k \geq 3\sqrt[3]{t_k} \ , \forall k = 1\ ,\ 2\ ,3\ ,....n$$

យើងបាន $P_n(2) \geq 3^n \sqrt[3]{t_1 t_2 t_3 .....t_n}$

ដោយ $t_1.t_2.t_3.......t_n = (-1)^n.x_1.x_2.x_3......x_n = (-1)^n.(-1)^n = 1$

ដូចនេះ $P_n(2) \geq 3^n$ ។

<u>លំហាត់ទី៦១</u>

ក_ប្រសិនបើ $p \geq -1$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ចូរបង្ហាញថា ÷

$(1+p)^n \geq 1 + np \quad (1)$ ។

ខ_គេឲ្យ $a_1 ,a_2 ,a_3 ,......,a_n$ ជា n ចំនួនមិនអវិជ្ជមាន ។

គេតាង $A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$

និង $G_n = \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3......a_n}$ ។

បង្ហាញថាប្រសិនបើ $G_k \leq A_k$ ហើយ $A_k \neq 0$

គេបាន $G_k{}^k.a_{k+1} \leq A_k{}^{k+1}(1+p)$ ដែល $p = \dfrac{a_{k+1}}{A_k} - 1$ ។

គ_ដោយប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ÷

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 ....a_n} \ ។$$

ដំណោះស្រាយ

ចូរបង្ហាញថា ៖ $(1+p)^n \geq 1+np \quad (1)$

តាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុនគេមាន ៖

$$(1+p)^n = C_n^0 + C_n^1 p + C_n^2 p^2 + ... + C_n^n p^n$$

ដោយ $C_n^0 = 1, C_n^1 = n, C_n^2 = \frac{(n-1)n}{2}$

គេបាន $(1+p)^n = 1 + np + \frac{(n-1)n}{2} p^2 + ... + p^n$

ដោយចំពោះគ្រប់ $p \geq -1$ គេមាន $\frac{(n-1)n}{2} p^2 + ... + p^n \geq 0$

ដូចនេះ $(1+p)^n \geq 1+np \quad (1)$ ។

ខ_បង្ហាញថា $G_k{}^k . a_{k+1} \leq A_k{}^{k+1}(1+p)$

ប្រសិនបើ $G_k \leq A_k$ នោះ $G_k^k a_{k+1} \leq A_k^k a_{k+1}$

$$A_k^k a_{k+1} = A_k^k [\, A_k + (a_{k+1} - A_k)]$$

$$= A_k^{k+1} [\, 1 + (\frac{a_{k+1}}{A_k} - 1)]$$

$$= A_k^{k+1}(1+p)$$

ព្រោះ $p = \frac{a_{k+1}}{A_k} - 1$ ។

ដូចនេះ $G_k{}^k . a_{k+1} \leq A_k{}^{k+1}(1+p)$ ។

គ-ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 ....a_n}$$

យើងមាន $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 = a_1 - 2\sqrt{a_1 a_2} + a_2 \geq 0$

នាំឲ្យ $a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2}$ ពិត ។

សន្មតថាវាពិតដល់តួទី k គឺ ៖

$a_1 + a_2 + ... + a_k \geq k\sqrt[k]{a_1 a_2 .....a_k}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ ៖

$a_1 + a_2 + ... + a_{k+1} \geq k\sqrt[k]{a_1 a_2 .....a_{k+1}}$ ពិត

តាមការសន្មតយើងមាន $a_1 + a_2 + ... + a_k \geq k\sqrt[k]{a_1 a_2 .....a_k}$

សមមូល $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 a_3 ......a_k}$

ឬ $A_k \geq G_k$

ដែល $A_k = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k}{k}$

និង $G_k = \sqrt[k]{a_1 .a_2 .a_3 ......a_k}$ ។

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $G_k{}^k .a_{k+1} \leq A_k{}^{k+1}(1+p)$

ដោយ $G_k^k a_{k+1} = a_1 .a_2 .....a_k a_{k+1} = G_{k+1}{}^{k+1}$

គេទាញ $G_{k+1}^{k+1} \leq A_k{}^{k+1}(1+p)$

ដែល $p = \frac{a_{k+1}}{A_k} - 1 \geq -1$, $A_k \neq 0$ ។

តាមរូបមន្ត (1)គេបាន $(1+p) \leq (1+\frac{p}{k+1})^{k+1}$

នាំឲ្យ $A_k{}^{k+1}(1+p) \leq A_k{}^{k+1}(1+\frac{p}{k+1})^{k+1}$

គេទាញ $G_{k+1}{}^{k+1} \leq A_k{}^{k+1}(1+\frac{p}{k+1})^{k+1}$

ឬ $G_{k+1} \leq A_k(1+\frac{p}{k+1})$

ដោយ៖

$$A_k(1+\frac{p}{k+1}) = A_k\left[1+\frac{1}{k+1}(\frac{a_{k+1}}{A_k}-1)\right] = A_k + \frac{a_{k+1}-A_k}{k+1}$$

$$= \frac{A_k k + A_k + a_{k+1} - A_k}{k+1} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1}}{k+1} = A_{k+1}$$

គេទាញ $G_{k+1} \leq A_k{}^{k+1}(1+p) \leq A_{k+1}$

ឬ $a_1 + a_2 + ... + a_{k+1} \geq k\sqrt[k]{a_1 a_2 .....a_{k+1}}$ ពិត

ដូចនេះ៖ $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 ....a_n}$ ។

លំហាត់ទី៦២

គេឲ្យ A , B , C ជារង្វាស់មុំក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ក_ចូរបង្ហាញថា $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

ខ_ចូរបង្ហាញថា $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{9}{4}$

គ_ចូរបង្ហាញថា $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\ge\frac{3}{4}$

ឃ_ចូរបង្ហាញថា $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$

ដំណោះស្រាយ

ក_បង្ហាញថា $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

តាង $T=\cos A+\cos B+\cos C$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos C$$

ដោយ $A+B+C=\pi$ នោះ $\cos\frac{A+B}{2}=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2})=\sin\frac{C}{2}$

ហើយ $\cos C=\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin^2\frac{C}{2}$

គេបាន $T=\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$

$$=-2\sin^2\frac{C}{2}+\cos\frac{A-B}{2}.\sin\frac{C}{2}+1$$

តាង $t=\sin\frac{C}{2}$

គេបានអនុគមន៍ ៖

$$T(t)=-2t^2+\cos\frac{A-B}{2}t+1$$

$$=-2\left(t^2-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}t+\frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}\right)+1+\frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}$$

$$=-2(t-\frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2})^2+1+\frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}$$

ចំពោះគ្រប់ $t\in IR$ គេទាញ ៖

$T(t)\le 1+\frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}\le 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ ។

ដូចនេះ $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$ ។

ខ-បង្ហាញថា $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{9}{4}$

តាង $U=\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}$

$$=\frac{1+\cos A}{2}+\frac{1+\cos B}{2}+\frac{1+\cos C}{2}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

ដោយ $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

គេទាញ $U=\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$

ដូចនេះ $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{9}{4}$ ។

គ_បង្ហាញថា $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\ge\frac{3}{4}$

តាង $V=\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}$

$$=1-\cos^2\frac{A}{2}+1-\cos^2\frac{B}{2}+1-\cos^2\frac{C}{2}$$

$$=3-\left(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\right)$$

ដោយ $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{9}{4}$

(តាមសម្រាយខាងលើ)

គេទាញ $V=\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\ge 3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$

ដូចនេះ $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\ge\frac{3}{4}$ ។

ឃ_បង្ហាញថា $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន ÷

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\ge 3\sqrt[3]{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}$$

នាំឲ្យ $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\sqrt{\frac{1}{27}(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2})^3}$

ដោយ $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{9}{4}$

នាំឲ្យ $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ។

លំហាត់ទី៦៣

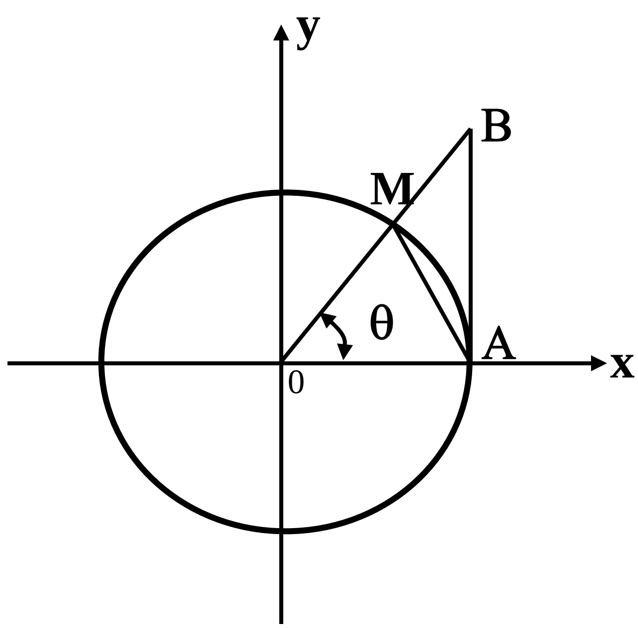
គេឲ្យសមភាព

$$\cot^2\frac{\pi}{2n+1}+\cot^2\frac{2\pi}{2n+1}+\cot^2\frac{3\pi}{2n+1}+......+\cot^2\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{n(2n-1)}{3}$$

ចូរបង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...........+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...........+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$



យើងមាន ÷

- ផ្ទៃក្រលាត្រីកោណ **OAM** គឺ $S_1 = \frac{1}{2}.OA.OM.\sin\theta = \frac{1}{2}\sin\theta$

- ផ្ទៃក្រលាចំរៀកថាស **OMA** គឺ $S_2 = \frac{1}{2}\,\theta.OA^2 = \frac{1}{2}\theta$

- ផ្ទៃក្រលាត្រីកោណ **OAB** គឺ $S_3 = \frac{1}{2}OA.AB = \frac{1}{2}\tan\theta$

តាមរូបខាងលើចំពោះ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ គេមាន ÷ $S_1 < S_2 < S_3$

គេបាន $\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta$

ឬ $\sin\theta \ < \ \theta \ < \ \tan\theta$

$$\frac{1}{\tan\theta} < \frac{1}{\theta} < \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cot\theta < \frac{1}{\theta} < \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cot^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2\theta} = 1+\cot^2\theta$$

ដោយជំនួស $\theta = \dfrac{k\pi}{2n+1}$ គេបាន ៖

$$\cot^2(\frac{k\pi}{2n+1}) < \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} < 1+\cot^2(\frac{k\pi}{2n+1})$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\cot^2(\frac{k\pi}{2n+1})\right] < \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(2n+1)^2}{\pi^2k^2}\right] < \sum_{k=1}^{n}\left[1+\cot^2(\frac{k\pi}{2n+1})\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\cot^2(\frac{k\pi}{2n+1})\right] < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}\right) < n+\sum_{k=1}^{n}\left[\cot^2(\frac{k\pi}{2n+1})\right]$$

ដោយតាមបំរាប់គេមាន ៖

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\cot^2(\frac{k\pi}{2n+1})\right]$$

$$= \cot^2\frac{\pi}{2n+1} + \cot^2\frac{2\pi}{2n+1} + \cot^2\frac{3\pi}{2n+1} + ...+\cot^2\frac{n\pi}{2n+1}$$

$$= \frac{n(2n-1)}{3}$$

គេបាន $\dfrac{n(2n-1)}{3} < \dfrac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k^2}\right) < n+\dfrac{n(2n-1)}{3} = \dfrac{n(2n+2)}{3}$

ឬ $\dfrac{\pi^2}{3}\dfrac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k^2}\right) < \dfrac{\pi^2}{3}\dfrac{n(2n+2)}{(2n+1)^2}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi^2}{3}\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} < \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}\right) < \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi^2}{3}\frac{n(2n+2)}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6} < \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}\right) < \frac{\pi^2}{6}$$

នាំឲ្យគេទាញ $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$ ។

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots\dots\dots\dots+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$ ។

លំហាត់ទី៦៤

គេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំនៃរង្វង់ចារិកក្នុង និង ចារិកក្រៅ ប្រស់ត្រីកោណកែង ABC មួយ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $R \geq (1+\sqrt{2})\,r$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $R \geq (1+\sqrt{2})\,r$

តាង $T = \cos A + \cos B + \cos C$

$$= 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= 1 - 2\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$= 1 - 2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2} - \cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$= 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

គេបាន $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \quad (1)$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

ដោយ $\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$

គេបាន $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc + 4bc\sin^2\frac{A}{2}$

គេទាញ $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}$

យក $p = \frac{a+b+c}{2}$ នាំឲ្យ $\begin{cases} a-b+c = 2(p-b) \\ a+b-c = 2(p-c) \end{cases}$

គេបាន $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{4(p-b)(p-c)}{4bc} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$

គេទាញ $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

ដូចគ្នាដែរ $\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$; $\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

គេបាន $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$ (2)

តាមរូបមន្តក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ៖

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr = \frac{abc}{4R}$$

គេទាញបាន $\begin{cases} abc = 4RS \\ (p-a)(p-b)(p-c) = \frac{S^2}{p} = \frac{S.p.r}{p} = S.r \end{cases}$

តាម (2) អាចសរសេរ ៖

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R}\quad(3)$$

យកទំនាក់ទំនង (3) ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}\quad(4)$$

ដោយ ABC ជាត្រីកោណកែងនោះគេអាចជ្រើសរើសយក $A=\frac{\pi}{2}$

ហើយ $B=\frac{\pi}{2}-C$ ជួសក្នុងទំនាក់ទំនង (4) គេបាន ៖

$$\cos\frac{\pi}{2}+\cos(\frac{\pi}{2}-C)+\cos C=1+\frac{r}{R}$$

$$\sin C+\cos C=1+\frac{r}{R}\quad(5)$$

តាមទំនាក់ទំនង $\sin C+\cos C=\sqrt{2}\,\sin(\frac{\pi}{4}+C)\le\sqrt{2}$

នោះតាម (5) គេបាន $1+\frac{r}{R}\le\sqrt{2}$

នាំឲ្យ $R\ge\frac{r}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)r$

ដូចនេះ $R\ge(1+\sqrt{2})r$ ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពកាលណា ៖

$\sin C+\cos C=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+C)=\sqrt{2}$ នាំឲ្យ $C=\frac{\pi}{4}$ និង $B=\frac{\pi}{4}$

ពោលគឺត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែងសមបាត ។

លំហាត់ទី៦៥

គេឲ្យ a, b, c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព ៖

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$

តាង $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ ដែល $x,y,z>0$

វិសមភាព $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$

សមមូលទៅនឹងវិសមភាពខាងក្រោម ៖

$$(y+z)^2(z+x)(y-x)+(z+x)^2(x+y)(z-y)+(x+y)^2(y+z)(x-z)\ge 0$$

$$x^3z+y^3x+z^3y-x^2yz-y^2zx-z^2xy\ge 0$$

$$x^3z+y^3x+z^3y\ge x^2yz+y^2zx+z^2xy$$

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{z}\ge x+y+z$$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz គេមាន ៖

$$(x+y+z)^2\le (x+y+z)\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{z}\right)$$

គេទាញ $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq x+y+z$ ពិត ។

ដូចនេះ $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$ ។

លំហាត់ទី៦៦

គេឲ្យ a , b , c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយដែលមានផ្ទៃក្រឡា ស្មើនឹង S ។ ចូរស្រាយថា $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}\ S$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}\ S$

គេមាន $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ នាំឲ្យ $\sin A=\frac{2S}{bc}$

ហើយ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (ទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស)

គេបាន $\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$

ដូចគ្នាដែរ $\cot B=\frac{c^2+a^2-b^2}{4S}$; $\cot C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$

គេបាន $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$

នាំឲ្យ $a^2+b^2+c^2=4S\,(\cot A+\cot B+\cot C)$ (1)

ជាបន្តទៅនេះយើងនឹងស្រាយថា $\cot A+\cot B+\cot C\ge\sqrt{3}$ ។

គេមាន $A+B+C=\pi$ នោះ $A=\pi-(B+C)$

គេបាន $\tan A=\tan\big(\pi-(B+C)\big)=-\tan(B+C)$

$$\tan A=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B.\tan C}$$

$$-\tan A+\tan B\tan C=\tan B+\tan C$$

គេទាញ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cot A\cot B\cot C$ គេបានសមភាព

$$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$$

ដោយប្រើវិសមភាព $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$

គេទាញបាន $(\cot A+\cot B+\cot C)^2\ge 3$

នាំឲ្យ $\cot A+\cot B+\cot C\ge\sqrt{3}$ (A , B , C ជាមុំស្រួច)

តាមទំនាក់ទំនង (1) គេទាញបាន ៖

$a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}\,S$ ជាវិសមភាពដែលត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី៦៧

គេយក **I** ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ **ABC** មួយដែល

$BC = a \ , AC = b \ , \ AB = c$ ។

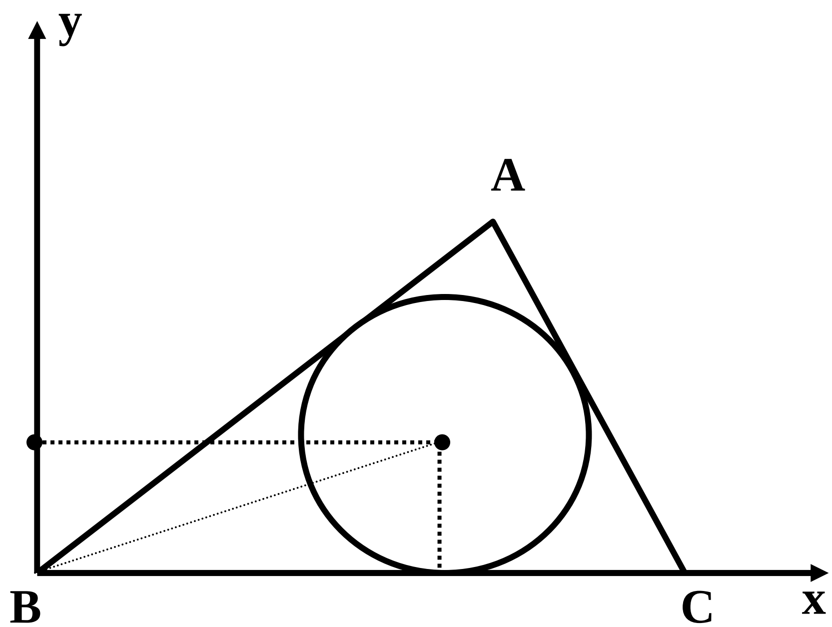
ចំពោះគ្រប់ចំនុច **X** ចូរស្រាយថា ៖

$$a.XA^2 + b.XB^2 + c.XC^2 = (a+b+c)XI^2 + abc$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា ៖

$$a.XA^2 + b.XB^2 + c.XC^2 = (a+b+c)XI^2 + abc$$



ក្នុងតម្រុយអរតូនរម៉ាល់ (Bxy) គេមាន ៖

$B(0;0)\,;\; C(a\,,0\,)\,;\; A(\,c\cos B\,;c\sin B)$ ។

តាង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ

នៃត្រីកោណ ABC នោះគេបាន $I(\,p-b\,;r\,)$ ។

បើ S ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC នោះគេមាន ៖

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr$$

នាំឲ្យ $r^2=\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$ ។

តាង $X(\,x_0\,;y_0)$ ជាចំនុចណាក៏ដោយនៃប្លង់ ។ គេបាន ៖

$$\begin{aligned}
M&=aXA^2+bXB^2+cXC^2\\
&=a[(x_0-c\cos B)^2+(y_0-c\sin B)^2]+b({x_0}^2+{y_0}^2)+\\
&\quad+c[(x_0-a)^2+{y_0}^2]\\
&=(a+b+c)({x_0}^2+{y_0}^2)-2acx_0(1+\cos B)-2acy_0\sin B+\\
&\quad+ac^2+a^2c\\
&=2p({x_0}^2+{y_0}^2)-2acx_0\left(1+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)-4y_0S+a^2c+ac^2\\
&=2p({x_0}^2+{y_0}^2)-x_0(2p)(2p-2b)-4y_0S+a^2c+ac^2\\
&=2p({x_0}^2+{y_0}^2)-4px_0(p-b)-4y_0S+a^2c+ac^2
\end{aligned}$$

ហើយ $N=(a+b+c)XI^2+abc$

$$=2p\left[(x_0-(p-b))^2+(y_0-r)^2\right]+abc$$

$$=2p(x_0{}^2+y_0{}^2)-4x_0p(p-b)-4y_0pr+2p(p-b)^2+$$

$$+2pr^2+abc$$

$$=2p(x_0{}^2+y_0{}^2)-4px_0(p-b)-4y_0S+2p(p-b)^2+$$

$$+2p\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}+abc$$

$$=2p(x_0{}^2+y_0{}^2)-4px_0(p-b)-4y_0S+2p(p-b)^2+$$

$$+2(p-a)(p-b)(p-c)+abc$$

យក $T=2p(p-b)^2+2(p-a)(p-b)(p-c)+abc$

$$=2(p-b)[p^2-pb+p^2-(a+c)p+ac]+abc$$

$$=2(p-b)[2p^2-(a+b+c)p+ac]+abc$$

$$=2ac(p-b)+abc=ac(2p-2b+b)=ac(a+c)$$

$$=a^2c+ac^2$$

គេទាញ $N=2p(x_0{}^2+y_0{}^2)-4px_0(p-b)-4y_0S+a^2c+ac^2$

ដោយយកនេ្យាម $M=N$ នាំឲ្យគេទាញបាន ៖

$a.XA^2+b.XB^2+c.XC^2=(a+b+c)XI^2+abc$ ។

(ទំនាក់ទំនងនេះហៅថារូបមន្តអឺលែ) ។

លំហាត់ទី៦៨

គេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារិកក្នុង និង ចារឹកក្រៅ នៃត្រីកោណមួយ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ d ជាចម្ងាយរវាងផ្ចិត រង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅរបស់ត្រីកោណនោះគេបាន ៖

$d^2 = R(R - 2r)$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $d^2 = R(R - 2r)$

តាង ABC ជាត្រីកោណដែល $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$

ហើយ r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារិកក្នុង និង ចារឹកក្រៅ នៃត្រីកោណនេះ ។ យក I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង O ជាផ្ចិត រង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។ តាមទ្រឹស្តីបទអឺលែយើងបាន ៖

$$a.OA^2 + b.OB^2 + c.OC^2 = (a + b + c)OI^2 + abc$$

ដោយ $OA = OB = OC = R$ និង $p = \frac{a + b + c}{2}$

គេបាន $2pR^2 = 2p.d^2 + abc$ នាំឲ្យ $d^2 = R^2 - \frac{abc}{2p}$

ដែល $d = OI$ ។

តាមរូបមន្តផ្ទៃក្រឡា $S = pr = \frac{abc}{4R}$ គេទាញ $\frac{abc}{2p} = 2rR$

ដូចនេះ $d^2 = R^2 - 2rR = R(R - 2r)$ ។

លំហាត់ទី៦៩

គេយក I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC មួយដែល

មានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1$

តាមទ្រឹស្តីបទអឺលែចំពោះគ្រប់ចំនុច X គេមាន

$$a.XA^2 + b.XB^2 + c.XC^2 = (a + b + c)XI^2 + abc$$

ដោយយក $X \equiv I$ គេបាន $a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2 = abc$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង abc គេទទួលបាន ៖

$$\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1$$ ។

លំហាត់ទី៧០

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c ចូរបង្ហាញថា ៖

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \ge 9(ab+bc+ca)$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \ge 9(ab+bc+ca)$

យើងជ្រើសរើស $0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$ ដែល $\begin{cases} a = \sqrt{2}\tan x \\ b = \sqrt{2}\tan y \\ c = \sqrt{2}\tan z \end{cases}$

វិសមភាព $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \ge 9(ab+bc+ca)$

សមមូលទៅនឹងវិសមភាពខាងក្រោម ៖

$$\frac{8}{\cos^2 x\cos^2 y\cos^2 z} \ge 18(\tan x\tan y + \tan y\tan z + \tan z\tan x)$$

$$\cos x\cos y\cos z(\sin x\sin y\cos z + \sin y\sin z\cos x + \sin z\sin x\cos y) \le \frac{4}{9}$$

ដោយប្រើរូបមន្ត ៖

$$\cos(x+y+z) = \cos x\cos y\cos z - \sin x\sin y\cos z - \sin y\sin z\cos x - \sin z\sin x\cos y$$

នោះគេអាចសរសេរ ៖

$$\cos x\cos y\cos z\left[\cos x\cos y\cos z-\cos(x+y+z)\right]\le\frac{4}{9}\quad(*)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ និង Jensen យើងបាន ៖

$$\cos x\cos y\cos z\le\left(\frac{\cos x+\cos y+\cos z}{3}\right)^3\le\cos^3 t$$

ដែល $t=\dfrac{x+y+z}{3}$ ។វិសមភាព (*) សមមូលទៅនឹងវិសមភាព ៖

$\cos^3 t(\cos^3 t-\cos 3t)\le\dfrac{4}{9}$ ដោយ $\cos 3t=4\cos^3 t-3\cos t$

នោះ $\cos^3 t(3\cos t-3\cos^3 t)\le\dfrac{4}{9}$

$$\cos^3 t(\cos t-\cos^3 t)\le\frac{4}{27}$$

$$\cos^4 t\,(1-\cos^2 t)\le\frac{4}{27}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន ៖

$$\frac{\cos^2 t}{2}.\frac{\cos^2 t}{2}.(1-\cos^2 t)\le\left(\frac{\frac{\cos^2 t}{2}+\frac{\cos^2 t}{2}+1-\cos^2 t}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

គេទាញ $\cos^4 t(1-\cos^2 t)\le\dfrac{4}{27}$ ពិត ។

ដូចនេះវិសមភាពខាងដើមត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់។

សូមរង់ចាំអានភាគ៣

ឯកសារយោង

(Referent)

1. **360 Problems for Mathematical Contest**
   (By Titu Andreescu , Dorin Andrica)
2. **103 Trigonometry Problems**
   (From the training of the USA IMO Team)
3. **Five Hundred Mathematical Challenges**
   (By Edward J. Bar beau, Murray S. Klamkin)
4. **Complex Numbers From A to ... Z**
   (By Titu Andresscu , Dorin Andrica)
5. **Mathematical Olympiad in China**
6. **Mathematical Olympiad Challenges**
   (By Titu Andresscu & Razvan Gelca)
7. **Mathematical Olympiad Treasures**
   (By Titu Andreescu , Bogdan enescu)
8. **International Mathematical Olympiads 1959-1977**
   (Samuel L. Greitzer)
9. **The IMO Compendium (1959-2004)**