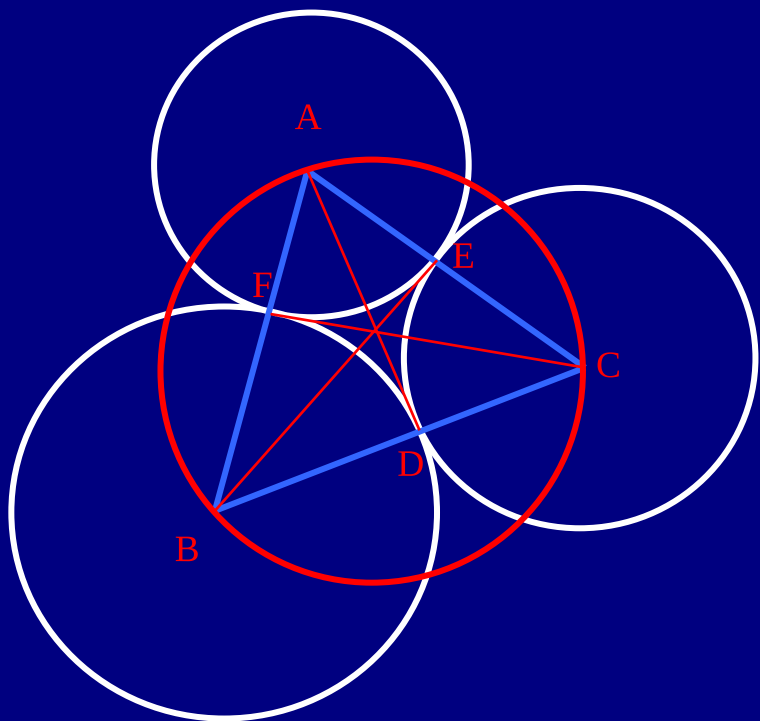
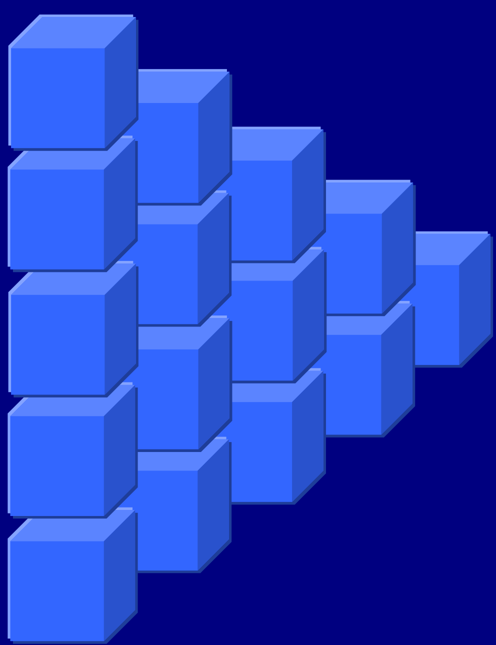
រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ
បរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា និង ពាណិជ្ជកម្ម

គណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោក

សម្រាប់សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា





ភាគ៥

អ្នកចូលរួមត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក លឹម ឆុន

លោក សែន ពិសិដ្ឋ

លោកស្រី ឌុយ វីណា

លោក ឆិត្យ ម៉េង

លោក ព្រឹម សុនិត្យ

លោក ផល ប៊ុនឆាយ

អ្នកត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិត្តសិរ

ការីកុំព្យូទ័រ

កញ្ញា លី គុណ្ណាកា

អ្នកនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លោក លឹម ផល្លុន និង លោក សែន ពិសិដ្ឋ

អារម្ភកថា

សៀវភៅ **គណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោក** ភាគ៥ ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់នៅក្នុងដៃនេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបរៀងឡើងក្នុងគោលបំនងទុកជាឯកសារ សម្រាប់ជាជំនួយដល់អ្នកសិក្សាយកទៅសិក្សាស្រាវជ្រាវដោយខ្លួនឯង និង ម្យ៉ាងទៀតក្នុងគោលបំនងចូលរួមលើកស្ទួយវិស័យគណិតវិទ្យានៅប្រទេសកម្ពុជាយើងឲ្យកាន់តែរីកចម្រើនថែមទៀតដើម្បីបង្កើនធនធានមនុស្សឲ្យមានកាន់តែច្រើនដើម្បីជួយអភិវឌ្ឍន៍ប្រទេសជាតិរបស់យើង ។

នៅក្នុងសៀវនេះយើងខ្ញុំបានខិតខំស្រាវជ្រាវជ្រើសរើសយកលំហាត់យ៉ាងសម្រាំងបំផុតពីឯកសារបរទេសយ៉ាងច្រើនបំផុតដូចជា **103 Trigonometry Problems , Five Hundred Mathematical Challenges,Complex Numbers From A to … Z , Mathematical Olympiad in China,Mathematical Olympiad Challenges, Mathematical Olympiad Treasures, International Mathematical Olympiads 1959-1977, The IMO Compendium (1959-2004) , 360 Problems for Mathematical contest…**

និងឯកសារបរទេសផ្សេងៗទៀតតាម **Internet** យកមកធ្វើដំណោះស្រាយយ៉ាងក្បោះក្បាយដែលអាចឲ្យលោកអ្នកងាយយល់ឆាប់ចងចាំអំពីសិល្បៈនៃការដោះស្រាយទាំងអស់នេះ ។ ប៉ុន្តែទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ កង្វះខាត និង កំហុសឆ្គងដោយអចេតនាប្រាកដជាមានទាំងបច្ចេកទេស និង អក្ខរាវិរុទ្ធ ។ អាស្រ័យហេតុនេះ យើងខ្ញុំជាអ្នករៀបរៀងរង់ចាំដោយរីករាយជានិច្ចនូវមតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីសំណាក់អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដើម្បីជួយកែលំអ

សៀវភៅនេះឲ្យបានកាន់តែសុក្រិត្រភាពថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់នេះយើងខ្ញុំអ្នករៀបរៀងសូមគោរពជូនពរដល់អ្នកសិក្សា ទាំងអស់ឲ្យមានសុខភាពមាំមួន និង ទទួលជ័យជំនះគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី ៩ មីនា ២០១០

អ្នកនិពន្ធ លឹម ផល្គុន

Tel : 017 768 246

លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

គណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោក

ភាគ៥

Problems and Solutions

ផ្នែកកម្រងលំហាត់

1/ កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង
នៃត្រីកោណសមបាតមួយស្មើរៀងគ្នា R និង r ។
ចូរស្រាយថាចម្ងាយរវាងផ្ចិតរង្វង់ពីរនេះគឺ
$\mathbf{d=\sqrt{R(R-2r)}}$ ។ (IMO 1962)

2/ កំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដោយផលគុណ
នៃលេខរបស់វាក្នុងប្រព័ន្ធដេស៊ីម៉ាល់គឺ
$\mathbf{n^2-10n-22}$ ។ (IMO 1968)

3/a និង b ជាចំនួនពិត , ចំពោះសមីការ
$\mathbf{x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0}$ មានឬសយ៉ាង
តិចមួយជាចំនួនពិត ។
ចូរកំនត់តម្លៃតូចបំផុតដែលអាចនៃ $\mathbf{a^2+b^2}$ ។

(IMO 1973)

4/កំនត់ $f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x$

ដែល a , b , A , B ជាចំនួនពិតថេរ ។

សន្មតថា $f(x)\geq 0$ ចំពោះគ្រប់ x ។

បង្ហាញថា $a^2+b^2\leq 2$ និង $A^2+B^2\leq 1$ ។

(IMO 1977)

5/ (IMO 1977) គេឲ្យ a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

ពេលដែល a^2+b^2 ចែកនឹង $a+b$ គេបានផល

ចែក q និងសំណល់ r ។

កំនត់គ្រប់គូ (a,b) ដោយដឹងថា $q^2+r=1977$

6/m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $m<n$ ។

បីលេខចុងក្រោយក្នុងប្រពន្ធ័ដេស៊ីម៉ាល់នៃ1978^m

ដូចគ្នានឹងបីលេខចុងក្រោយនៃ 1978^n ។

កំនត់ m និង n ដោយដឹងថា $m+n$ មានតម្លៃ

តូចបំផុត ។ (IMO 1977)

7/ ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយមាន $AB = AC$ ។ រង្វង់មួយប៉ះខាងក្នុងទៅនឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណABC ហើយប៉ះទៅនឹង AB នឹង AC រៀងគ្នាត្រង់ P និង Q រៀងគ្នា ។ ស្រាយថាចំណុចកណ្តាលនៃ PQ គឺជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ។

(IMO 1978)

8/P ជាចំនុចនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ។ D , E , F ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃ P ទៅលើបន្ទាត់ BC , CA, AB រៀងគ្នា ។ ចូរកំនត់គ្រប់ចំនុច P ដោយដឹងថា

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$ មានតម្លៃអប្បបរមា ។

(IMO1981)

9/P ជាចំនុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ។
PA កាត់ BC ត្រង់ D , PB កាត់ AC ត្រង់ E
និង PC កាត់ AB ត្រង់ F ។
ចូរបង្ហាញថាយ៉ាងតិចមានមួយនៃ $\frac{AP}{PD},\frac{BP}{PE},\frac{CP}{PF}$
មានតម្លៃតូចជាង 2 និង យ៉ាងតិចមានមួយនៃ
$\frac{AP}{PD},\frac{BP}{PE},\frac{CP}{PF}$ មានតម្លៃធំជាង 2 ។

(IMO 1961)

10/ ចូរកំនត់គ្រប់អនុគមន៍ $f(x)$ ពីសំណុំចំនួនពិត
ទៅសំណុំចំនួនពិត
ដោយដឹងថា $f\left(f(x)+y\right)=2x+f\left(f(y)-x\right)$
ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x;y$ ។

(IMO Shortlist 2002)

11/ ចំណុច M មួយជ្រើសរើសនៅលើជ្រុង AC នៃត្រីកោណ ABC , ដោយដឹងថា កាំនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABM និង BMC ស្មើគ្នា ។

ចូរបង្ហាញថា $BM^2 = X.\cot\frac{B}{2}$ ។

ដែល X ជាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC ។

(IMO Longlists 1988)

12/ គេឲ្យ x , y , z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែល $xyz = 1$,ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geq\frac{3}{4}$$

(IMO Shortlist 1998)

13/ គេឲ្យ x , y , z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\geq 2+\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$$

(APMO 1998)

14/ គណនាផលបូកខាងក្រោម

$$S_n=\frac{\tan\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{4}}+\frac{\tan\frac{\pi}{16}}{\cos\frac{\pi}{8}}+\frac{\tan\frac{\pi}{32}}{\cos\frac{\pi}{16}}+.....+\frac{\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

រួចទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n\to+\infty$

15/ គេឲ្យ a និង b ជាពីរចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

គេដឹងថាចំនួន a ចែកនឹង 5 ឲ្យសំនល់ 2

ហើយចំនួន b ចែកនឹង5 ឲ្យសំនល់ 4 ។

ក/ចូរបង្ហាញថាចំនួន a^2+b^2 ចែកដាច់នឹង 5

ខ/ មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន c ដែល $c=a^3+b^3$

ចូររកសំណល់នៃវិធីចែករវាងចំនួន c នឹង 5
គ/ ជាបន្ថែមគេឧបមាថា c ចែកនឹង 8
ឲ្យសំនល់ 6 ។
តើ c ចែកនឹង 40 ឲ្យសំនល់ប៉ុន្មាន ?
ចូរកំនត់ចំនួន c បើគេដឹងថា
$11066 < c < 11119$ ។

16/ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ និង $a \in Z$ គេឲ្យចំនួន
$E_n = a^n - (a-720)^n - (a+737)^n + (a+2027)^n$
ចូរស្រាយថា E_n ចែកដាច់នឹង 2010
ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$

17/ គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (U_n) កំនត់ចំពោះ
គ្រប់ $n \in IN^*$ ដោយ $U_1 = \sqrt{3}$ និងទំនាក់ទំនង
កំណើន $U_{n+1} = \dfrac{2-\sqrt{3}+U_n}{1+(\sqrt{3}-2)U_n}$
គណនាតួ U_n រួចគណនា U_{2010} ?

18/ គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំនត់ចំពោះ
គ្រប់ $n \in IN^*$ ដោយ $a_1 = \sqrt{3}$ និងទំនាក់ទំនង
កំណើន $a_{n+1} = \dfrac{a_n + \sqrt{2} - 1}{1 + (1 - \sqrt{2})a_n}$

ចូរបង្ហាញថា (a_n)ជាស្វ៊ីតខួបគណនាតួ a_{2009}

19/ គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x^3 + 9x + 6}{3x^2 + 6x + 7}$

ចូរគណនា $f_n(x) = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \ldots\ldots \circ f}_{(n)}(x)$

20/ គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x) = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x + \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x$

ក/ ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ $x \in IR$ គេមាន
$f(2x) = f^2(x) - 2$ ។

ខ/ គណនា $A = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^8 + \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^8$ ។

គ/ ដោះស្រាយសមីការ $f(x) = 5$ ។

21/ គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x$

ក/ ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ $x\in IR$ គេមាន

$f(3x)=f^3(x)-3f(x)$ ។

ខ/ គណនា $A=\left(2-\sqrt{3}\right)^9+\left(2+\sqrt{3}\right)^9$ ។

គ/ ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=14$ ។

ឃ/ចូរបង្ហាញថា $f(x)\geq 2$ គ្រប់ $x\in IR$,

22/ គេឲ្យ a , b ,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{a^3+c^3+abc}\leq\frac{1}{abc}$$

(USA MO 1998)

23/ គេឲ្យ $a>1$ និង $x>y>z>1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\log_a(\frac{x}{y})\log_a(\frac{y}{z})\leq\left[\log_{a^2}(\frac{x}{z})\right]^2$

24/ គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបីនៃ x ។

គេដឹងថា $P(x)-a$ ចែកដាច់នឹង $(x-a)^2$

ហើយ $P(x)+a$ ចែកដាច់នឹង $(x+a)^2$

ដែលក្នុងទីនេះ $a\neq 0$ និង a ជាចំនួនពិត ។

ចូរកំនត់រកពហុធា $P(x)$ ខាងលើនេះ ?

25/ គេឲ្យពហុធា $P(x)=(x^2-3x+1)^{100}$

ក/ដោយមិនបាច់ពន្លាតចូរកំនត់លេខ

មេគុណមុខតួ x^2 របស់ពហុធា $P(x)$ ។

ខ/រកសំណល់ពីការចែក $P(x)$ នឹង x^2-5x+6

គ/គេសន្មតថា $P(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_{200}x^{200}$

គណនា $A=c_0+c_2+c_4+...+c_{200}$

$$B=c_1+c_3+c_5+...+c_{199}$$

26/ គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាមួយ ។

គេដឹងថា $P(x)$ ចែកនឹង $(x-1)$ ឲ្យសំណល់ 2

ហើយ $P(x)$ ចែកនឹង $(x-2)$ ឲ្យសំណល់ 3 ។

ក/ ចូររកសំណល់នៃវិធីចែក $P(x)$ នឹង

x^2-3x+2 ។

ខ/ គេសន្មតថា $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួន

នៃ x ដែល $P(-2)=-1$

$P(-1)=-7$, $P(0)=5$ ។ ចូរកំនត់ $P(x)$

គ/ ដោះស្រាយសមីការ $P(x)=x+1$ ។

27/ គេឲ្យពហុធា $P(x)=ax^5+bx^3+1$

ដែល a និង b ជាពីរចំនួនពិតដែលគេឲ្យ ។

ចូរកំនត់ a ដើម្បីឲ្យ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង

x^2-3x+1 ។

28/ គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^n+bx^2+42x+8$

ដែល $n\in IN$ និង b ជាពិតដែលគេឲ្យ ។

ចូរកំនត់ n និង b ដើម្បីឲ្យ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង

x^2-6x+8 ។

29/ គេមានអនុគមន៍លេខ f កំនត់ពីសំណុំ IN ទៅសំណុំ IR ដោយ $f(0)=0$

និង $f(n+1)=2f(n)+\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$ ចូរកំនត់រក $f(n)$?

30/ គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (y_n) កំនត់ដោយ

$y_0=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ និងទំនាក់ទំនងកំណើន

$$y_{n+1}=\frac{y_n^2}{\sqrt[3]{y_n^6-2y_n^3+2}}$$

ដែល $n=0,1,2,....$ ។

ចូរគណនា y_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

31/ គេឲ្យ $a\in IR, 0<a<1$ ហើយ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0;1]$ ដោយ

$f(0)=0\,;\ f(1)=1$ និង $f(\frac{x+y}{2})=(1-a)f(x)+af(y)$

ចំពោះគ្រប់ $x;y\in[0,1]$ និង $x\le y$ ។ចូរកំនត់ $f(\frac{1}{7})$

(IMO Longlist 1989)

32/ គេឱ្យ a , b ,c ជាចំនួនវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca=3$

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{abc}$$

33/ គេយក A, B, C ជាមុំបីនៃត្រីកោណ ABC

តាងអនុគមន៍ $y=\cot A+\frac{2\sin A}{\cos A+\cos(B-C)}$

រកតម្លៃអប្បរមានៃអនុគមន៍នេះ ?

34/ ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយមានមេដ្យាន

នៃជ្រុង AB និង AC កែងគ្នា ។

ចូរបង្ហាញថា $\cot B+\cot C\ge\frac{2}{3}$ ។

(CMO 1993)

35/ គេឲ្យ $a ; b ; c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b}\ge 3$

(Regional Mathematical Olympiad-India 2006)

36/ សន្មតថាពហុធា $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ អាចដាក់ជាកត្តា $(x+r_1)(x+r_2)...(x+r_n)$ ដែល $r_1, r_2, ..., r_n$ ជាចំនួនពិត ។

ចូរបង្ហាញថា $(n-1)a_{n-1}^2 \geq 2na_{n-2}$ ។

(Costa Rican Math Olympiad 2009)

37/ មាន x និង y ជាពីរចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $(1+x)(1+y)=2$ ។

ចូរបង្ហាញថា $xy + \dfrac{1}{xy} \geq 6$ ។

(Costa Rican Math Olympiad 2009)

38/ គេមានបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c ។

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{a^3}{bc} + \dfrac{b^3}{ca} + \dfrac{c^3}{ab} \geq a+b+c$ ។

39/ គេមានស្វ៊ីត (x_n) កំនត់ដោយ $x_0 = x_1 = 1$ និង

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ គេមាន $x_{n+1} = \dfrac{x_n^{\ k} + 1}{x_{n-1}}$

ដែល k ជាចំនួនគត់ និង $k \geq 2$ ។

ចូរបង្ហាញថា (x_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ ?

40/គេយកចំនុច $K ; L ; M$ រៀងគ្នានៅលើ

ជ្រុង $BC ; CA ; AB$ ។

ចូរបង្ហាញថាយ៉ាងតិចមានមួយនៃត្រីកោណ

AML , BKM , CLK មានផ្ទៃក្រឡាតូចជាង

ឬស្មើ $\dfrac{1}{4}$ នៃផ្ទៃក្រលាត្រីកោណ ABC ។

(IMO 1966)

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

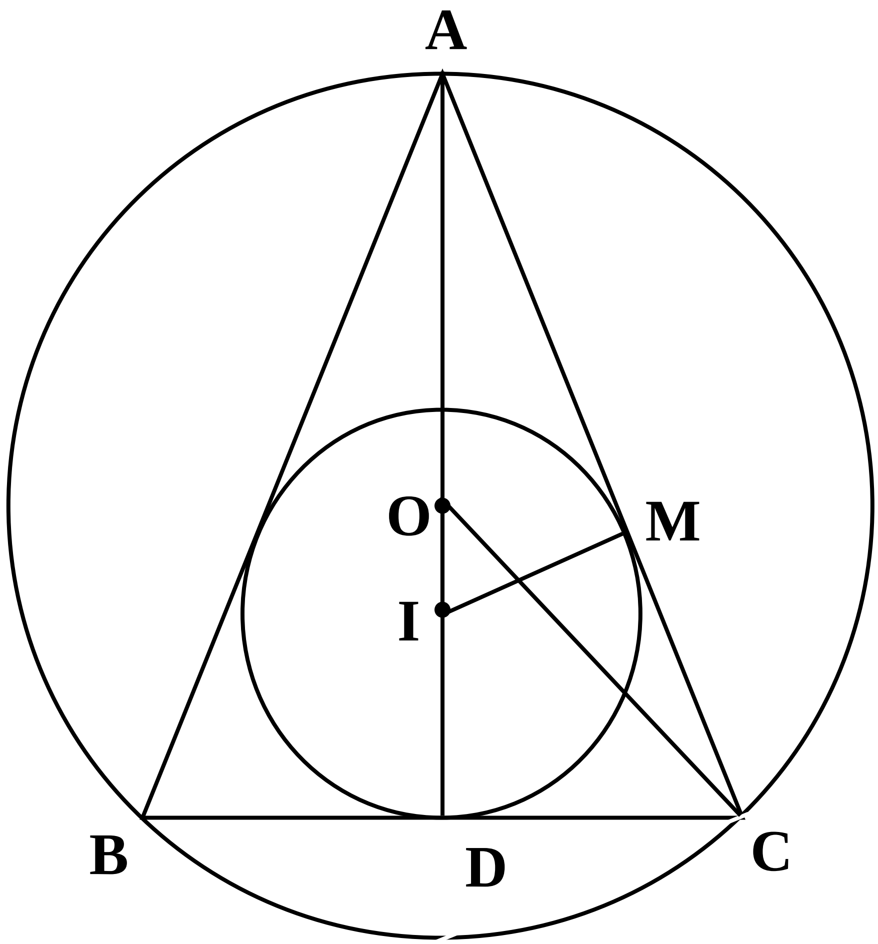
កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង
នៃត្រីកោណសមបាតមួយស្មើរៀងគ្នា R និង r ។
ចូរស្រាយថាចម្ងាយរវាងផ្ចិតរង្វង់ពីរនេះគឺ
$\mathbf{d = \sqrt{R(R-2r)}}$ ។

(IMO 1962)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាចម្ងាយរវាងផ្ចិតរង្វង់ពីរនេះគឺ
$\mathbf{d = \sqrt{R(R-2r)}}$
យក ΔABC មួយដែល $AB = AC$ ។
O និង I ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង ចារឹកក្នុង
នៃត្រីកោណ ABC ។
យក E ជាប្រសព្វរវាងកំពស់ AD នៃត្រីកោណ

ជាមួយនឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ និង M ជាចំណោលកែងនៃ I លើជ្រុង AC ។



តាង $\alpha = \angle\, DAC$ គេបាន $\angle DOC = 2\alpha$

ក្នុងត្រីកោណកែង AIM គេបាន $\sin\alpha = \frac{IM}{IA}$

តែ $IM = r$, $IA = IO + OA = d + R$

គេទាញ $\sin\alpha = \dfrac{r}{d+R}$ ។

ក្នុងត្រីកោណកែង ODC គេមាន $\cos 2\alpha = \dfrac{OD}{OC}$

ដោយ $OC = R$, $OD = OI + ID = d + r$

គេទាញ $\cos 2\alpha = \dfrac{d+r}{R}$ ។

តាមទំនាក់ទំនង $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

គេបាន $\dfrac{d+r}{R} = 1 - \dfrac{2r^2}{(d+R)^2}$

ឬ $(d+r)(d+R)^2 = R(d+R)^2 - 2r^2R$

$$\left[(d+r+R) - R\right](d+R)^2 - R(d+R)^2 + 2r^2R = 0$$

$$(d+r+R)(d+R)^2 - 2R(d+R)^2 + 2r^2R = 0$$

$$(d+r+R)(d+R)^2 - 2R[(d+R)^2 - r^2] = 0$$

$$(d+r+R)\left[(d+R)^2 - 2R(d+R-r)\right] = 0$$

$$(d+r+R)[d^2 - R(R-2r)] = 0$$

ដោយ $OI < OA$ នោះ $d \neq -(r+R)$

ដូចនេះ $d = \sqrt{r(R-2r)}$ ។

លំហាត់ទី២

កំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbf{n}$ ដោយផលគុណនៃលេខរបស់វាក្នុងប្រព័ន្ធដេស៊ីម៉ាល់គឺ $\mathbf{n^2 - 10n - 22}$ ។

(IMO 1968)

ដំណោះស្រាយ

ឧបមាថាចំនួន $\mathbf{n}$ មាន $\mathbf{m > 1}$ លេខគឺ

$\mathbf{n = a_m a_{m-1} .....a_2 a_1}$ ដែល $\mathbf{1 \le a_m \le 9}$

និង $\mathbf{0 \le a_{m-1}, ..., a_2, a_1 \le 9}$

តាមបំរាប់ $\mathbf{a_m \times .... \times a_2 \times a_1 = n^2 - 10n - 22}$ (1)

ដោយ $\mathbf{a_m \times .... \times a_2 \times a_1 \le a_m .9^{m-1} < a_m .10^{m-1}}$

ហើយ $\mathbf{n = a_m .10^{m-1} + a_{m-1} a_{m-2} ....a_2 a_1}$

គេទាញ $\mathbf{n > a_m .10^{m-1} > a_m \times ..... \times a_2 \times a_1}$ (2)

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញបាន

$$\mathbf{n > n^2 - 10n - 22} \quad ,$$

ឬ $\mathbf{n^2 - 11n - 22 < 0} \quad \mathbf{(i)}$

ដោយ $\mathbf{a_m \times .... \times a_2 \times a_1 \geq 0}$

នោះ $\mathbf{n^2 - 10n - 22 \geq 0} \; \mathbf{(ii)}$

តាម **(i)** និង **(ii)** គេបានប្រព័ន្ធវិសមីការ

$$\begin{cases} \mathbf{n^2 - 11n - 22 < 0} & \mathbf{(i)} \\ \mathbf{n^2 - 10n - 22 \geq 0} & \mathbf{(ii)} \end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបាន $\mathbf{n = 12}$ ។

លំហាត់ទី៣

a និង **b** ជាចំនួនពិត , ចំពោះសមីការ

$\mathbf{x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0}$ មានឫសយ៉ាង

តិចមួយជាចំនួនពិត ។

ចូរកំនត់តម្លៃតូចបំផុតដែលអាចនៃ $\mathbf{a^2+b^2}$ ។

(IMO 1973)

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃតូចបំផុតដែលអាចនៃ $\mathbf{a^2+b^2}$

គេមាន $\mathbf{x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0}$

ចំពោះ $\mathbf{x=0}$ នោះ $\mathbf{1=0}$ មិនពិត

ដូចនេះសមីការគ្មានឫស $\mathbf{x=0}$ ទេ ។

ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $\mathbf{x\neq 0}$ គេបាន

$$\mathbf{x^2+ax+b+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}=0}$$

ឬ $(x+\frac{1}{x})^2+a(x+\frac{1}{x})+b-2=0$

តាង $y=x+\frac{1}{x}$

ដែល $|y|=|x+\frac{1}{x}|=\frac{|x^2|+1}{|x|}\ge\frac{2|x|}{|x|}=2$

គេបានសមីការ

$$y^2+ay+b-2=0$$

ឬ $ay+b=2-y^2$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwartz

$(ay+b)^2\le(y^2+1)(a^2+b^2)$

គេទាញ $a^2+b^2\ge\frac{(ay+b)^2}{y^2+1}=\frac{(2-y^2)^2}{y^2+1}$

តាង $g(y)=\frac{(2-y)^2}{y^2+1}=y^2+1+\frac{9}{y^2+1}-6$

គេបាន $g'(y)=2y-\frac{18y}{(y^2+1)^2}=\frac{2y\left((y^2+1)^2-9\right)}{(y^2+1)^2}$

ឬ $g'(y) = \dfrac{2y(y^2-2)(y^2+4)}{(y^2+1)^2}$

ចំពោះ $y \ge 2$ នោះ $g'(y) > 0$

ហេតុនេះ $g(y)$ ជាអនុគមន៍កើនចំពោះ $y \ge 2$

ដូចនេះ $a^2 + b^2 = g(y) \ge g(2)$

ដោយ $g(2) = \dfrac{(2-4)^2}{2^2+1} = \dfrac{4}{5}$

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃ $a^2 + b^2$ គឺ $\dfrac{4}{5}$ ។

លំហាត់ទី៨

គេកំនត់ $f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x$

ដែល a , b , A , B ជាចំនួនពិតថេរ ។

សន្មតថា $f(x)\geq 0$ ចំពោះគ្រប់ x ។

បង្ហាញថា $a^2+b^2\leq 2$ និង $A^2+B^2\leq 1$ ។

(IMO 1977)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $a^2+b^2\leq 2$ និង $A^2+B^2\leq 1$

$$f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x$$

គេមាន $a\cos x+b\sin x=r\cos(x-\alpha)$

ដែល $r=\sqrt{a^2+b^2}$; $\cos\alpha=\frac{a}{r}$; $\sin x=\frac{b}{r}$

ហើយ $A\cos 2x+B\sin 2x=R\cos(2x-2\beta)$

ដែល $R=\sqrt{A^2+B^2}$; $\cos 2\beta=\frac{A}{R}$; $\sin 2\beta=\frac{B}{R}$

គេបាន $f(x)=1-r\cos(x-\alpha)-R\cos(2x-2\beta)$

-ចំពោះ $x=\pi+\beta$ គេបាន

$$f(\pi+\beta)=1+r\cos(\beta-\alpha)-R$$

-ចំពោះ $x=\beta$ គេបាន

$$f(\beta)=1-r\cos(\beta-\alpha)-R$$

គេទាញ $f(\pi+\beta)+f(\beta)=2-2R\geq 0$

នោះ $R\leq 1$ ឬ $\sqrt{A^2+B^2}\leq 1\Rightarrow A^2+B^2\leq 1$

-ចំពោះ $x=\alpha+\frac{\pi}{4}$ គេបាន

$$f(\alpha+\frac{\pi}{4})=1-r.\frac{\sqrt{2}}{2}-R\sin(2\alpha-2\beta)$$

-ចំពោះ $x=\alpha-\frac{\pi}{4}$ គេបាន

$$f(\alpha+\frac{\pi}{4})=1-r.\frac{\sqrt{2}}{2}+R\sin(2\alpha-2\beta)$$

គេទាញ $f(\alpha+\frac{\pi}{4})+f(\alpha-\frac{\pi}{4})=2-\sqrt{2}r\geq 0$

គេទាញ $r\leq\sqrt{2}\Rightarrow a^2+b^2\leq 2$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឲ្យ a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ពេលដែល a^2+b^2 ចែកនឹង $a+b$ គេបានផល

ចែក q និងសំណល់ r ។

កំនត់គ្រប់គូ (a,b) ដោយដឹងថា $q^2+r=1977$

(IMO 1977)

ដំណោះស្រាយ

កំនត់គ្រប់គូ (a,b)

តាមបំរាប់ $\begin{cases} a^2+b^2=(a+b)q+r \\ q^2+r=1977 \end{cases}$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwartz គេមាន

$2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$ ឬ $a^2+b^2\geq\dfrac{(a+b)^2}{2}$

គេទាញ $(a+b)q+r\geq\dfrac{(a+b)^2}{2}$ ឬ $q\geq\dfrac{a+b}{2}$

ដោយ $0 \le r < a+b$ នោះ $r < 2q$

តែ $q^2 + r = 1977$ នោះ $1977 < 2q + q^2$

ឬ $(q+1)^2 > 1978 \Rightarrow q+1 \ge 45$ ឬ $q \ge 44$

ហើយ $r \ge 0$ នោះ $q^2 = 1977 - r \le 1977$

គេទាញ $q \le 44$

ដូចនេះ $q = 44$ ហើយ $r = 1977 - 44^2 = 41$

គេបានសមីការ $a^2 + b^2 = 44(a+b) + 41$

ឬ $(a-22)^2 + (b-22)^2 = 1009$

យក $x = |a-22| \ge 0$ និង $y = |b-22| \ge 0$

នោះ $x^2 + y^2 = 1009$ ។

គេដឹងថាការេនៃចំនួនគត់មានលេខចុងក្រោយ

$\{ 0 , 1 , 4 , 5 , 6 , 9 \}$ ។

ផលបូកការេ $x^2 + y^2$ មានលេខចុងក្រោយស្មើ9

លុះត្រាតែ (x^2, y^2) មានលេខចុងក្រោយ

$\{ (0,9);(9,0);(4,5);(5,4)\}$ ។

តាមសមីការ $x^2 + y^2 = 1009$ យើងពិនិត្យឃើញ

ថាបើ (a,b) ជាចម្លើយនោះ (b,a) ក៏ជាចម្លើយ

ហេតុនេះយើងអាចសិក្សាតែករណីចំនួន x មាន

លេខចុងក្រោយ $\{0, 5\}$

ហើយដោយ $y^2 \geq 0$ នោះ $0 \leq x^2 \leq 1009$

ឬ $0 \leq x \leq 31$ ។

ហេតុនេះ $x \in \{0 , 10 , 20, 30 , 5 , 15 , 25 \}$.

ដោយ $y \in IN^*$ និង $y^2 = 1009 - x^2$ នោះតម្លៃ

x ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌនេះមានតែ

$x = 15$ និង $y = 28$ ឬ $x = 28 , y = 15$ ។

ដោយ $x = |a - 22|$ និង $y = |b - 22|$

គេទាញ $(a, b) \in \{(7,50); (37,50); (50,7); (50,37)\}$ ។

<u>លំហាត់ទី៦</u>

m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $m < n$។

បីលេខចុងក្រោយក្នុងប្រពន្ធ័ដេស៊ីម៉ាល់នៃ1978^m

ដូចគ្នានឹងបីលេខចុងក្រោយនៃ 1978^n ។

កំនត់ m និង n ដោយដឹងថា $m+n$ មានតម្លៃ

តូចបំផុត ។

(IMO 1978)

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

កំនត់ m និង n

ដោយ $m < n$ នោះគេអាចសរសេរ

$$1978^n - 1978^m = 1978^m(1978^{n-m} - 1)$$

ដោយ បីលេខចុងក្រោយនៃ1978^mដូចគ្នានឹង

បីលេខចុងក្រោយនៃ 1978^n នោះ$1978^n - 1978^m$

ត្រូវចែកដាច់នឹង $1000 = 8\times 125 = 2^3\times 5^3$ ។

ចំនួន $1978^m(1978^{n-m}-1)$ ចែកដាច់នឹង 1000

លុះត្រាតែ 1978^m ចែកដាច់នឹង 2^3 ហើយ

$1978^{n-m}-1$ ចែកដាច់នឹង 5^3 ។

1978^m ចែកដាច់នឹង 2^3 លុះត្រាតែ $m\ge 3$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $1978\equiv 103\equiv -22 \pmod{125}$

នោះ $1978^4\equiv 22^4\equiv 6$ (mo125)

គេទាញ $1978^{4p}\equiv 6^p \pmod{125}$

ដែល $p\in IN^*$ ។

ដោយ $6^p=(1+5)^p=\sum_{k=0}^{p}\left(C_p^k 5^k\right)$

$$= C_p^0 + C_p^1 5 + C_p^2 5^2 + 5^3 C_p^3 + ...C_p^p 5^p$$

គេទាញ $6^p\equiv 1+5p+25\dfrac{p(p-1)}{2} \pmod{125}$

ឬ $1978^{4p}\equiv 1+5p+25.\dfrac{p(p-1)}{2} \pmod{125}$

$$1978^{2p} - 1 \equiv \frac{5p(5p-3)}{2} \pmod{125}$$

ដើម្បីឲ្យ $1978^{4p} - 1$ ចែកដាច់នឹង 125

លុះត្រាតែ $\frac{p(5p-3)}{2}$ ចែកដាច់នឹង 25

ដោយ $5p-3$ មិនអាចចែកដាច់នឹង 5

ហេតុនេះគេត្រូវឲ្យ p ចែកដាច់នឹង 25 ។

គេបាន $p = 25q \ , \ \forall q \in IN^*$

គេទាញ $1978^{100q} - 1 \equiv 0 \pmod{125}$

ហេតុនេះ $1978^{n-m} - 1$ ចែកដាច់នឹង 5^3 លុះត្រាតែ

$n - m = 100q \ , \forall q \in IN^*$

ដោយ $m \geq 3$ នោះ $n + m = (n-m) + 2m$

ឬ $n + m \geq 100q + 6 \geq 106$

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ $n+m$ គឺ 106

ដែលត្រូវនឹងតម្លៃ $m = 3$ និង $n = 103$ ។

លំហាត់ទី៧

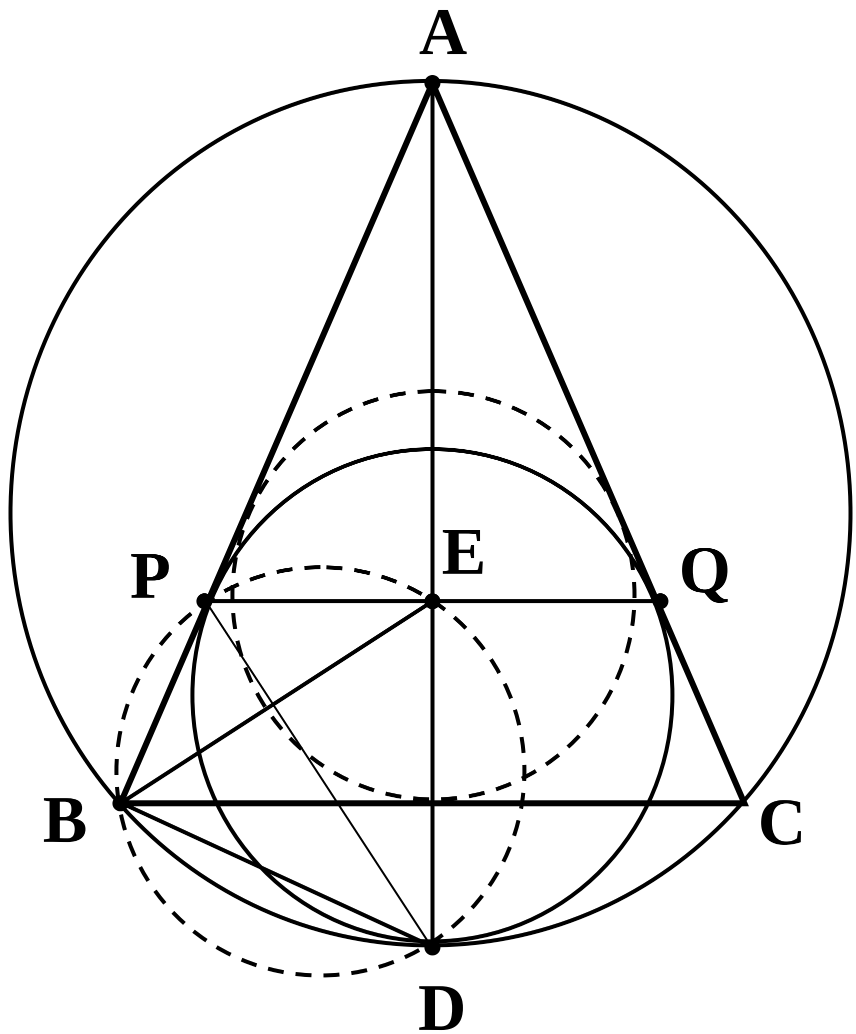
ក្នុងត្រីកោណ **ABC** មួយមាន $AB = AC$ ។ រង្វង់មួយប៉ះខាងក្នុងទៅនឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ**ABC** ហើយប៉ះទៅនឹង **AB** នឹង **AC** រៀងគ្នាត្រង់ **P** និង **Q** រៀងគ្នា ។ ស្រាយថាចំណុចកណ្តាលនៃ **PQ** គឺជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ **ABC** ។

(IMO 1978)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាចំណុចកណ្តាលនៃ **PQ** គឺជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ **ABC**

តាង **E** ជាចំនុចកណ្តាលនៃ **PQ** និង **D** ជាប្រសព្វរវាង **AE** នឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅΔ**ABC** ។



យើងមាន $\angle ABD = 90^{o}$ (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

គេបាន $\angle PBD + \angle PED = 180^{o}$

ដូចនេះ **BPED** ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់មាន

អង្កត់ផ្ចិត **DP** ។ គេបាន

$\angle PBE = \angle PDE = \dfrac{\angle PDQ}{2}$ (មុំស្កាត់ធ្នូរួម **PE**)

ម្យ៉ាងទៀត AP ជាបន្ទាត់ប៉ះនឹងរង្វង់ដែលប៉ះ AB ត្រង់ P នោះគេបាន $\angle APQ = \angle PDQ = \angle ABC$

គេទាញ $\angle PBE = \dfrac{\angle ABC}{2}$ នាំឲ្យ BE ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ $\angle ABC$ ។

ដោយ E ជាប្រសព្វរវាងកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុង BE និង AD នៃមុំ $\angle B$ និង $\angle A$ ដូចនេះវាជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ។

លំហាត់ទី៨

P ជាចំនុចនៅក្នុងត្រីកោណ **ABC** ។

D , E , F ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃ **P** ទៅលើ

បន្ទាត់ **BC , CA, AB** រៀងគ្នា ។

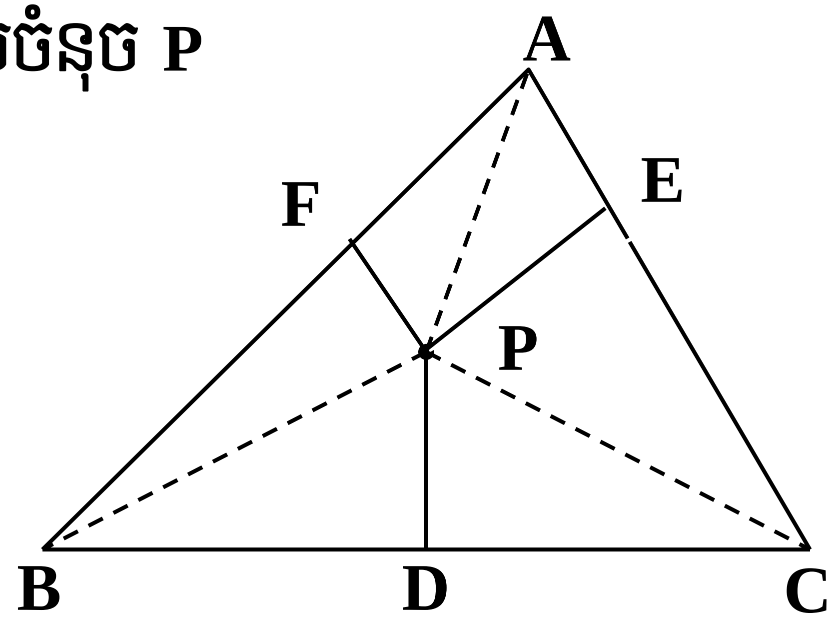
ចូរកំនត់គ្រប់ចំនុច **P** ដោយដឹងថា

$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$ មានតម្លៃអប្បបរមា ។

(IMO1981)

ដំណោះស្រាយ

កំនត់គ្រប់ចំនុច **P**



តាង S ជាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC

គេបាន $S = S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}$

$$S = \frac{1}{2}PD.BC + \frac{1}{2}PE.CA + \frac{1}{2}PF.AB$$

ឬ $PD.BC + PE.CA + PF.AB = 2S$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwartz

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \ge (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

យក $a_1 = \sqrt{\frac{BC}{PD}}$; $a_2 = \sqrt{\frac{CA}{PE}}$; $a_3 = \sqrt{\frac{AB}{PF}}$

និង $b_1 = \sqrt{BC.PD}$, $b_2 = \sqrt{CA.PE}$, $b_3 = \sqrt{AB.PF}$

គេបាន

$$\left(\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}\right)2S \ge (BC + CA + AB)^2$$

ឬ $\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF} \ge \frac{(BC + CA + AB)^2}{2S}$ (*)

តម្លៃអប្បបរមានៃ $\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$

គឺ $\frac{(BC+CA+AB)^2}{2S}$ ដែលត្រូវនឹងវិសមភាព(*)

ក្លាយជាសមភាពពេលគឺ $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$

សមមូល $\frac{\sqrt{\frac{BC}{PD}}}{\sqrt{BC.PD}}=\frac{\sqrt{\frac{CA}{PE}}}{\sqrt{CA.PE}}=\frac{\sqrt{\frac{AB}{PF}}}{\sqrt{AB.PF}}$

ឬ $\frac{1}{PD}=\frac{1}{PE}=\frac{1}{PF}\Leftrightarrow PD=PE=PF$

ដូចនេះ $\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$ មានតម្លៃអប្បបរមា

មានតែករណីចំនុច **P** ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃ

ត្រីកោណ **ABC** ។

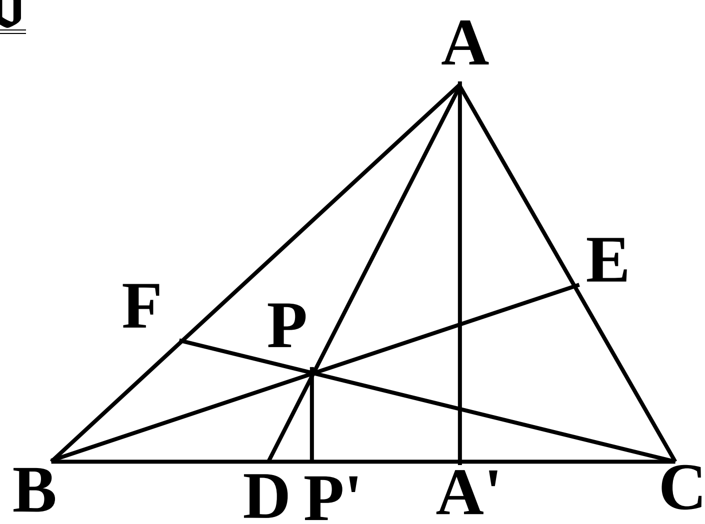
លំហាត់ទី៩

P ជាចំនុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ **ABC** ។
PA កាត់ **BC** ត្រង់ **D** , **PB** កាត់ **AC** ត្រង់ **E**
និង **PC** កាត់ **AB** ត្រង់ **F** ។
ចូរបង្ហាញថាយ៉ាងតិចមានមួយនៃ $\frac{AP}{PD},\frac{BP}{PE},\frac{CP}{PF}$
មានតម្លៃតូចជាង **2** និង យ៉ាងតិចមានមួយនៃ
$\frac{AP}{PD},\frac{BP}{PE},\frac{CP}{PF}$ មានតម្លៃធំជាង **2** ។

(IMO 1961)

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ



តាង **A'** និង **P'** ជាចំណោលកែងនៃ **A** និង **P** លើជ្រុង **BC** ។

ផលធៀបក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ **PBC** និង **ABC**

គឺ $\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}}=\frac{PP'}{AA'}$ ។

ត្រីកោណកែង **PP'D** និង **AA'D**

មាន $\angle DPP'=\angle DAA'$ (មុំត្រូវគ្នា)

ជាត្រីកោណដូចគ្នា ។

គេបានផលធៀបដំណូច $\frac{PP'}{AA'}=\frac{PD}{AD}$

ហេតុនេះ $\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}}=\frac{PD}{AD}=\frac{PD}{AP+PD}=\frac{1}{1+\frac{AP}{PD}}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន

$\frac{S_{PCA}}{S_{ABC}}=\frac{1}{1+\frac{BP}{PE}}$ (2) ; $\frac{S_{PAB}}{S_{ABC}}=\frac{1}{1+\frac{CP}{PF}}$ (3)

បូកទំនាក់ទំនង (1);(2);(3) គេបាន

$$1=\frac{1}{1+\frac{AP}{PD}}+\frac{1}{1+\frac{BP}{PE}}+\frac{1}{1+\frac{CP}{PF}}$$

តាង $\frac{AP}{PD}=x\ ;\ \frac{BP}{PE}=y\ ;\ \frac{CP}{PF}=z$

គេបាន $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=1$

យើងនឹងស្រាយថា $x\ ,\ y\ ,\ z$ យ៉ាងតិចមានមួយតូចជាង 2 និង យ៉ាងតិចមានមួយធំជាង 2 ។

-ឧបមាថា $x\geq 2$ និង $y\geq 2$

គេបាន $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

ដោយ $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=1$ នោះគេបាន

$1-\frac{1}{1+z}\leq\frac{2}{3}\Rightarrow z\leq 2$ ។

ដូចនេះ $x\ ,\ y\ ,\ z$ យ៉ាងតិចមានមួយតូចជាង 2 ។

-ឧបមាថា $x \le 2$ និង $y \le 2$

គេបាន $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y} \ge \frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

ដោយ $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=1$ នោះគេបាន

$1-\frac{1}{1+z} \ge \frac{2}{3} \Rightarrow z \ge 2$ ។

ដូចនេះ x , y , z យ៉ាងតិចមានមួយធំជាង 2 ។

សរុបមកគេអាចសន្និដ្ឋានថាយ៉ាងតិចមានមួយនៃ $\frac{AP}{PD},\frac{BP}{PE},\frac{CP}{PF}$ មានតម្លៃតូចជាង 2 និង យ៉ាងតិចមានមួយនៃ $\frac{AP}{PD},\frac{BP}{PE},\frac{CP}{PF}$ មានតម្លៃធំជាង 2 ។

លំហាត់ទី១០

ចូរកំនត់គ្រប់អនុគមន៍ $f(x)$ ពីសំណុំចំនួនពិត ទៅសំណុំចំនួនពិត

ដោយដឹងថា $f\big(f(x)+y\big)=2x+f\big(f(y)-x\big)$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x;y$ ។

(IMO Shortlist 2002)

ដំណោះស្រាយ

តាង $m=f(o)$

គេមាន $f\big(f(x)+y\big)=2x+f\big(f(y)-x\big)$ (1)

ជំនួស $x=0$ ក្នុង (1) គេបាន

$f(m+y)=f\big(f(y)\big)$ (2)

ជំនួស $x=f(y)$ក្នុង (1) គេបាន

$f\big[f\big(f(y)\big)+y\big]=2f(y)+m$ (3)

យក (2) ជួសក្នុង(3) គេបាន

$$\mathbf{f(f(m+y)+y)=2f(y)+m}$$

យក $\mathbf{y=-m}$ គេបាន $\mathbf{f(f(0)-m)=2f(-m)+m}$

ដោយ $\mathbf{f(0)=m}$

នោះ $\mathbf{m=2f(-m)+m \Rightarrow f(-m)=0}$

យក $\mathbf{x=-m}$ ជំនួសក្នុង (1) គេបាន

$$\mathbf{f(f(-m)+y)=-2m+f(f(y)+m)}$$

$$\mathbf{f(y)=-2m+f(f(y)+m)}$$

$$\mathbf{f(y)+m=m+f(f(y)+m)}$$

យក $\mathbf{x=f(y)+m}$

នោះ $\mathbf{x=m+f(x) \Rightarrow f(x)=x+c}$ ដែល $\mathbf{c=-m}$

ដូចនេះ $\mathbf{f(x)=x+c}$ គ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{x}$

និងចំនួនថេរ $\mathbf{c \in IR}$ ។

លំហាត់ទី១១

ចំណុច **M** មួយជ្រើសរើសនៅលើជ្រុង **AC** នៃត្រីកោណ **ABC** , ដោយដឹងថា កាំនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ **ABM** និង **BMC** ស្មើគ្នា ។

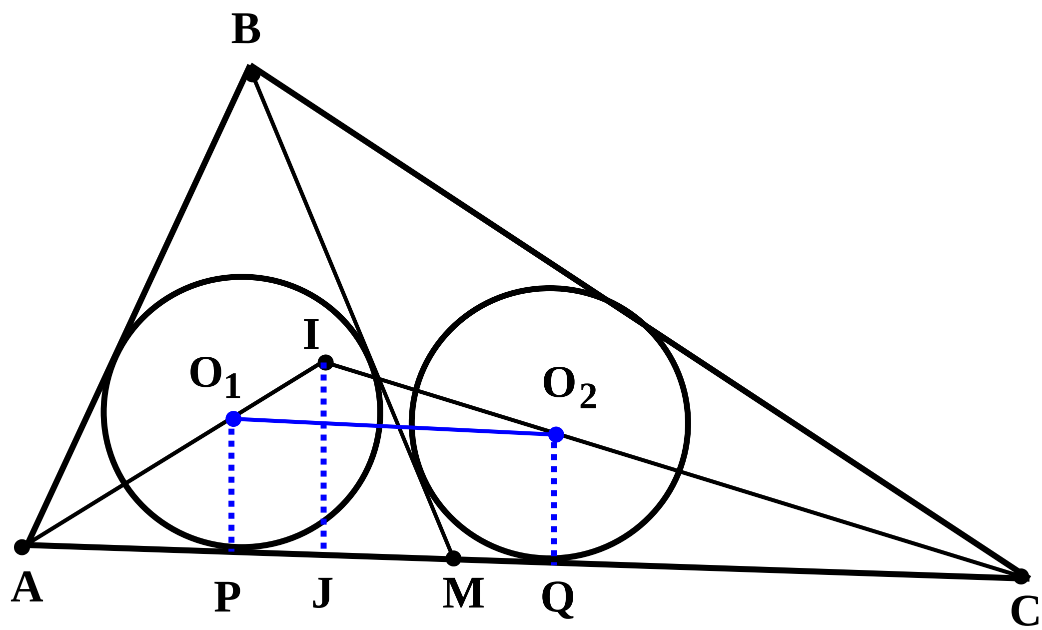
ចូរបង្ហាញថា $BM^2 = X.\cot\frac{B}{2}$ ។

ដែល **X** ជាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ **ABC** ។

(IMO Longlists 1988)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $BM^2 = X.\cot\frac{B}{2}$



តាង $BC = a\ ;\ AC = b\ ;\ AB = c$

និង $p = \frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ ។

យក $I\ ;O_1;O_2$ ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ

$ABC\ ;\ ABM\ ;\ BMC$ ហើយ $J\ ,\ P\ ,\ Q$

ជាចំណោលកែងនៃ $I\ ;O_1;O_2$ លើ AC ។

តាង$IJ = r$ និង $O_1P = O_2Q = r_1$ ជាកាំរង្វង់

ចារឹកក្នុងត្រីកោណ $ABC\ ;\ ABM\ ;\ BMC$,

ហើយ $p_1\ ;p_2$ ជាកន្លះបរិមាត្រត្រីកោណ

$ABM; BMC$ ។

យើងមាន $S_{ABC} = S_{AMB} + S_{BMC}$

គេបាន $pr = p_1 r_1 + p_2 r_1$ ឬ $\frac{r_1}{r} = \frac{p}{p_1 + p_2}$

គេមាន

$$p_1 + p_2 = \frac{(AB + AM + BM) + (BM + MC + BC)}{2}$$

$$p_1 + p_2 = \frac{AB + BC + AC + 2BM}{2}$$

$$p_1 = \frac{a + b + c + 2BM}{2} = p + BM$$

គេទាញ $\frac{r_1}{r} = \frac{p}{p + BM}$ (1)

ត្រីកោណ AO_1P និង AIJ ជាត្រីកោណកែង

ដូចគ្នា ។គេបាន $\frac{AP}{AJ} = \frac{O_1P}{IJ} = \frac{r_1}{r}$ (2)

ត្រីកោណ CO_2Q និង CIJ ជាត្រីកោណកែង

ដូចគ្នា ។ គេបាន $\frac{CQ}{CJ} = \frac{O_2Q}{IJ} = \frac{r_1}{r}$ (3)

តាម (2) និង (3) គេបាន $\frac{r_1}{r} = \frac{AP}{AJ} = \frac{CQ}{CJ}$

ដោយ

$$AP = p_1 - BM \text{ ; } AJ = p - a \text{ ;}$$

$$CQ = p_2 - BM \text{ ; } CJ = p - c$$

គេបាន

$$\frac{r_1}{r} = \frac{p_1 - BM}{p - a} = \frac{p_2 - BM}{p - c}$$

$$= \frac{p_1 + p_2 - 2BM}{2p - (a + c)} = \frac{p - BM}{b} \quad (4)$$

តាម (1) និង (4) គេទាញបាន

$$\frac{p}{p + BM} = \frac{p - BM}{b}$$

នាំឲ្យ $pb = p^2 - BM^2 \Rightarrow BM^2 = p(p - b)$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង

$$S_{ABC} = X = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

និងរូបមន្ត $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$

$$BM^2 = p(p-b)$$

$$BM^2 = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \times \sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-a)(p-c)}}$$

$$BM^2 = X.\frac{1}{\tan\frac{B}{2}} = X.\cot\frac{B}{2}$$

ដូចនេះ $BM^2 = X.\cot\frac{B}{2}$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឲ្យ x, y, z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz = 1$,ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}$$

(**IMO Shortlist 1998**)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ យើងមាន

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{1+y}{8} + \frac{1+z}{8} \geq \frac{3x}{4} \quad (1)$$

$$\frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{1+z}{8} + \frac{1+x}{8} \geq \frac{3y}{4} \quad (2)$$

$$\frac{z^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{1+x}{8} + \frac{1+y}{8} \geq \frac{3z}{4} \quad (3)$$

បូកវិសមភាព (1) , (2) និង (3)

អង្គនិងអង្គគេបាន

$$\Sigma = \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)}$$

$$\Sigma \geq \frac{2(x+y+z)-3}{4}$$

ដោយ $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$ ព្រោះ $xyz = 1$

ដូចនេះ

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}$$

លំហាត់ទី១៣

គេឲ្យ x , y , z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\geq 2+\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$$

(APMO 1998)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\geq 2+\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$$

យើងមាន

$$(1+\frac{x}{y})(1+\frac{y}{z})(1+\frac{z}{x})=2+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\right)\quad (i)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន

$$\frac{x}{y}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}}=\frac{3x}{\sqrt[3]{xyz}}$$

ឬ $\frac{2x}{y}+\frac{y}{z}\geq\frac{3x}{\sqrt[3]{xyz}}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន

$\frac{2y}{z}+\frac{z}{x}\geq\frac{3y}{\sqrt[3]{xyz}}$ (2) និង $\frac{2z}{x}+\frac{x}{y}\geq\frac{3z}{\sqrt[3]{xyz}}$ (3)

បូកវិសមភាព (1),(2) និង (3) គេបាន

$$3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\geq\frac{3(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$$

ឬ $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geq\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$ (4)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន

$\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\geq\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$ (5)

បូកវិសមភាព (4) និង (5) គេបាន

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\right)\geq\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}} \quad \text{(ii)}$$

តាមទំនាក់ទំនង (i) និង (ii) គេទាញបាន

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\geq 2+\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}} \ ,$$

លំហាត់ទី១៨

គណនាផលបូកខាងក្រោម

$$S_n = \frac{\tan\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{4}} + \frac{\tan\frac{\pi}{16}}{\cos\frac{\pi}{8}} + \frac{\tan\frac{\pi}{32}}{\cos\frac{\pi}{16}} + ... + \frac{\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

រួចទាញរកលីមីតនៃ S_n កាលណា $n \to +\infty$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក S_n

$$S_n = \frac{\tan\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{4}} + \frac{\tan\frac{\pi}{16}}{\cos\frac{\pi}{8}} + \frac{\tan\frac{\pi}{32}}{\cos\frac{\pi}{16}} + ... + \frac{\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\tan\frac{\pi}{2^{k+2}}}{\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}$$

តាមរូបមន្ត $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

គេបាន

$$\tan 2x - \tan x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} - \tan x$$

$$= \frac{\tan x + \tan^2 x}{1-\tan^2 x}$$

$$\tan 2x - \tan x = \tan x.\frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x}$$

ដោយ $\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ នោះ

$$\tan 2x - \tan x = \frac{\tan x}{\cos 2x} \quad (*)$$

ដោយជ្រើសរើស $x = \dfrac{\pi}{2^{k+2}}$ ជួសក្នុង (*) គេបាន

$$\tan\frac{\pi}{2^{k+1}} - \tan\frac{\pi}{2^{k+2}} = \frac{\tan\frac{\pi}{2^{k+2}}}{\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}$$

យើងបាន

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\tan\frac{\pi}{2^{k+1}} - \tan\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)$$

$$= (\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{8}) + (\tan\frac{\pi}{8} - \tan\frac{\pi}{16}) + ... + (\tan\frac{\pi}{2^{n+1}} - \tan\frac{\pi}{2^{n+2}})$$

$$= \tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

$$= 1 - \tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$$

ដូចនេះ $S_n = 1 - \tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $\lim_{n\to+\infty} \tan\frac{\pi}{2^{n+2}} = 0$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឲ្យ a និង b ជាពីរចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

គេដឹងថាចំនួន a ចែកនឹង 5 ឲ្យសំនល់ 2

ហើយចំនួន b ចែកនឹង5 ឲ្យសំនល់ 4 ។

ក/ចូរបង្ហាញថាចំនួន a^2+b^2 ចែកដាច់នឹង 5

ខ/ មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន c ដែល $c=a^3+b^3$

ចូររកសំណល់នៃវិធីចែករវាងចំនួន c នឹង 5

គ/ ជាបន្ថែមគេឧបមាថា c ចែកនឹង 8

ឲ្យសំនល់ 6 ។

តើ c ចែកនឹង 40 ឲ្យសំនល់ប៉ុន្មាន ?

ចូរកំនត់ចំនួន c បើគេដឹងថា

$11066 < c < 11119$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក/បង្ហាញថាចំនួន a^2+b^2 ចែកដាច់នឹង 5

តាមបំរាប់គេដឹងថាចំនួន a ចែកនឹង 5

ឲ្យសំនល់ 2 ហើចំនួន b

ចែកនឹង5 ឲ្យសំនល់ 4 នោះចំនួន a

មានរាង $a=5q_1+2$

ហើយចំនួន b មានរាង $b=5q_2+4$ ដែល

$q_1 , q_2 \in IN$,

យើងមាន

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (5q_1+2)^2+(5q_2+4)^2 \\ &= 25{q_1}^2+20q_1+4+25{q_2}^2+40q_2+16 \\ &= 25{q_1}^2+25{q_2}^2+20q_1+40q_2+20 \\ &= 5(5{q_1}^2+5{q_2}^2+4q_1+8q_2+4) \end{aligned}$$

តាង $q=5{q_1}^2+5{q_2}^2+4q_1+8q_2+4$

គេបាន $a^2+b^2=5q$ នាំឲ្យចំនួន a^2+b^2 ចែកដាច់នឹង 5 ។

ខ/ រកសំណល់នៃវិធីចែករវាងចំនួន c នឹង 5

$c=a^3+b^3$

$$=(5q_1+2)^3+(5q_2+4)^3$$
$$=125q_1^{\ 3}+150q_1^{\ 2}+60q_1+8+125q_2^{\ 3}+300q_2^{\ 2}+240q_2+64$$
$$=5(25q_1^{\ 3}+25q_2^{\ 3}+30q_1^{\ 2}+60q_2^{\ 2}+12q_1+48q_2+14)+2$$

តាង $q_3=25q_1^{\ 3}+25q_2^{\ 3}+30q_1^{\ 2}+60q_2^{\ 2}+12q_1+48q_2+14$

គេបាន $c=5q_3+2$ នាំឲ្យ c ចែកនឹង 5 ឲ្យសំនល់ 2 ។

គ/ តើ C ចែកនឹង 40 ឲ្យសំនល់ប៉ុន្មាន ?

ដោយCចែកនឹង 8 ឲ្យសំនល់ 6 នាំឲ្យមាន $q_4\in IN$ ដែល $c=8q_4+6$

គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} c=5q_3+2 \\ c=8q_4+6 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} 16c = 80q_3 + 32 & (i) \\ 15c = 120q_4 + 90 & (ii) \end{cases}$

ដកសមីការ $(i) \& (ii)$ គេបាន

$c = 80q_3 - 120q_4 - 58$

ឬ $c = 40(2q_3 - 3q_4 - 2) + 22$

តាង $q = 2q_3 - 3q_4 - 2$

គេបាន $c = 40q + 22$ ដែល $q \in IN$

ដូចនេះ c ចែកនឹង 40 ឲ្យសំណល់ 22 ។

កំនត់ចំនួន c បើគេដឹងថា $11066 < c < 11119$

គេបាន $11066 < 40q + 22 < 11119$

ឬ $$\frac{11044}{40} < q < \frac{11097}{40}$$

$$276 + \frac{4}{40} < q < 277 + \frac{17}{40} \Rightarrow q = 277$$

ដូចនេះ $c = 40(277) + 22 = 11102$ ។

លំហាត់ទី១៦

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$ និង $a \in Z$ គេឲ្យចំនួន

$$E_n = a^n - (a-720)^n - (a+737)^n + (a+2027)^n$$

ចូរស្រាយថា E_n ចែកដាច់នឹង 2010

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា E_n ចែកដាច់នឹង 2010

យើងមាន $2010 = 30 \times 67$

តាមរូបមន្ត

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + y^{n-2})$$

គេបាន $a^n - (a-720)^n = [a-(a-720)]q_1 = 720q_1$

ដែល $q_1 \in IN$

ហើយ $(a+2027)^n - (a+737)^n = 1290q_2$

ដែល $q_2 \in IN$

នាំឲ្យ $E_n = 720q_1 + 1290q_2 = 30(14q_1 + 43q_2)$

នាំឲ្យ E_n ចែកដាច់នឹង 30 ។

ម្យ៉ាងទៀត

$a^n-(a+737)^n=[a-(a+737)]q_3=-737q_3\ ;\ q_3\in IN$

ហើយ $(a+2027)^n-(a-720)^n=2747q_4\ ;\ q_4\in IN$

នាំឲ្យ $E_n=2747q_4-737q_3=67(41q_4-11q_3)$

នាំឲ្យ E_n ចែកដាច់នឹង 67 ។

ដោយ E_n ចែកដាច់នឹង 30 ផង និង 67 ផង

ហើយ 30 និង 67ជាពីរចំនួនបឋមរវាងគ្នា

នោះ E_n ចែកដាច់នឹង 2010 ។

លំហាត់ទី១៧

គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (U_n) កំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ដោយ $U_1 = \sqrt{3}$ និងទំនាក់ទំនង

កំណើន $U_{n+1} = \dfrac{2-\sqrt{3}+U_n}{1+(\sqrt{3}-2)U_n}$

គណនាតួ U_n រួចគណនា U_{2010} ?

ដំណោះស្រាយ

គណនាតួ U_n រួចគណនា U_{2010}

គេមាន $U_{n+1} = \dfrac{2-\sqrt{3}+U_n}{1+(\sqrt{3}-2)U_n} \quad (1)$

យក $\tan x = 2-\sqrt{3}$

គេបាន

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$$

គេទាញ $x = \dfrac{\pi}{12}$ ហេតុនេះ $\tan\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$

តាង $U_n = \tan V_n$ នាំឲ្យ $U_{n+1} = \tan V_{n+1}$

ទំនាក់ទំនង (1) អាចសរសេរទៅជា

$$\tan V_{n+1} = \frac{\tan\frac{\pi}{12} + \tan V_n}{1 - \tan\frac{\pi}{12}\tan V_n} = \tan(\frac{\pi}{12} + V_n)$$

គេទាញ $V_{n+1} = \frac{\pi}{12} + V_n$ នាំឲ្យ (V_n)

ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសង

រួម $d = \frac{\pi}{12}$ និងតួ $U_1 = \tan V_1 = \sqrt{3} \Rightarrow V_1 = \frac{\pi}{3}$

គេបាន

$$V_n = V_1 + (n-1)d = \frac{\pi}{3} + (n-1)\frac{\pi}{12} = \frac{(n+3)\pi}{12}$$

ដូចនេះ $U_n = \tan\frac{(n+3)\pi}{12}$ ។

គណនា U_{2010}

បើ $n = 2010$ នោះ $U_{2010} = \tan\frac{(2010+3)\pi}{12} = \tan\frac{2013\pi}{12}$

ដោយ $\frac{2013\pi}{12} = 167\pi + \frac{3\pi}{4}$

គេបាន $U_{2010} = \tan\frac{3\pi}{4} = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

លំហាត់ទី១៨

គេឲ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ ដោយ $a_1 = \sqrt{3}$ និងទំនាក់ទំនង កំណើន $a_{n+1} = \dfrac{a_n + \sqrt{2} - 1}{1 + (1 - \sqrt{2})a_n}$

ចូរបង្ហាញថា (a_n) ជាស្វ៊ីតខួបគណនាតួ a_{2009}

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា (a_n) ជាស្វ៊ីតខួបគណនាតួ a_{2009}

មាន

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{2} - 1}{1 + (1 - \sqrt{2})a_n} \Rightarrow a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + \sqrt{2} - 1}{1 + (1 - \sqrt{2})a_{n+1}}$$

$$a_{n+2} = \frac{\dfrac{a_n + \sqrt{2} - 1}{1 + (1 - \sqrt{2})a_n} + \sqrt{2} - 1}{1 + (1 - \sqrt{2})\dfrac{a_n + \sqrt{2} - 1}{1 + (1 - \sqrt{2})a_n}}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} - 1 - (\sqrt{2} - 1)^2 a_n}{1 + (1 - \sqrt{2})a_n + (1 - \sqrt{2})a_n - (1 - \sqrt{2})^2}$$

$$a_{n+2} = \frac{[1-(\sqrt{2}-1)^2]a_n + 2(\sqrt{2}-1)}{[1-(\sqrt{2}-1)^2] + 2(1-\sqrt{2})a_n}$$

$$a_{n+2} = \frac{2(\sqrt{2}-1)a_n + 2(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}-1) - 2(\sqrt{2}-1)a_n}$$

$$a_{n+2} = \frac{a_n + 1}{1 - a_n}$$

យើងបង្កើនកំណើនពី $n+2$ ទៅ $n+4$

គេបាន

$$a_{n+4} = \frac{a_{n+2} + 1}{1 - a_{n+2}} = \frac{\frac{a_n + 1}{1 - a_n} + 1}{1 - \frac{a_n + 1}{1 - a_n}}$$

$$= \frac{a_n + 1 + 1 - a_n}{1 - a_n - a_n - 1} = -\frac{1}{a_n}$$

យើងបង្កើនកំណើនពី $n+4$ ទៅ $n+8$

គេបាន

$a_{n+8} = -\frac{1}{a_{n+4}}$ ដោយ $a_{n+4} = -\frac{1}{a_n}$

គេបាន $a_{n+8} = a_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$

ដូចនេះ (a_n) ជាស្វ៊ីតខួបដែលមានខួបស្មើ 8

គេទាញបាន $a_1 = a_9 = a_{17} = ... = a_{8k+1}$

ចំពោះគ្រប់ $k \in IN$

យក $k = 251 \Rightarrow a_{2009} = a_1 = \sqrt{3}$

ដូចនេះ $a_{2009} = \sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^3+9x+6}{3x^2+6x+7}$

ចូរគណនា $f_n(x)=\underbrace{f\circ f\circ f\circ.....\circ f}_{(n)}(x)$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $f_n(x)=\underbrace{f\circ f\circ f\circ.....\circ f}_{(n)}(x)$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $a_1=f(x)$

$$a_2=f\circ f(x)=f(a_1)$$

$$a_3=f\circ f\circ f(x)=f(a_2)$$

តាមលំនាំគំរូនេះគេបាន

$$a_n=\underbrace{f\circ f\circ f\circ.....\circ f}_{(n)}(x)=f(a_{n-1})$$

គេទាញ $a_{n+1}=f(a_n)=\dfrac{a_n^{\;3}+9a_n+6}{3a_n^{\;2}+6a_n+7}$

សមីការសម្គាល់របស់ស្វ៊ីតនេះមានរាង

$$r = \frac{r^3 + 9r + 6}{3r^2 + 6r + 7}$$

ឬ $3r^3 + 6r^2 + 7r = r^3 + 9r + 6$

ឬ $2r^3 + 6r^2 - 2r - 6 = 0$

ឬ $2(r+3)(r-1)(r+1) = 0$

មានឬស $r_1 = -3$; $r_2 = 1$; $r_3 = -1$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $b_n = \dfrac{a_n - r_1}{a_n - r_2} = \dfrac{a_n + 3}{a_n - 1}$

គេបាន $b_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} + 3}{a_{n+1} - 1}$

ដោយ $a_{n+1} = \dfrac{a_n^3 + 9a_n + 6}{3a_n^2 + 6a_n + 7}$

$$\Rightarrow b_{n+1} = \frac{\dfrac{a_n^3 + 9a_n + 6}{3a_n^2 + 6a_n + 7} + 3}{\dfrac{a_n^3 + 9a_n + 6}{3a_n^2 + 6a_n + 7} - 1} = \frac{a_n^3 + 9a_n^2 + 27a_n + 27}{a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n - 1}$$

$$\Rightarrow b_{n+1} = \frac{(a_n + 3)^3}{(a_n - 1)^3} = b_n^3$$

-បើ $n=1$ នោះ $b_2=b_1^{\,3}$

-បើ $n=2$ នោះ $b_3=b_2^{\,3}=b_1^{\,9}$

-បើ $n=3$ នោះ $b_4=b_3^{\,3}=b_1^{\,27}$

ឧបមាថាវាពិតចំពោះ $n=p$ គឺ $b_p=b_1^{\,3^{p-1}}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n=p+1$

គឺ $b_{p+1}=b_1^{\,3^p}$

គេមាន $b_{p+1}=b_p^{\,3}$ តែតាមការឧបមា $b_p=b_1^{\,3^{p-1}}$

ហេតុនេះ $b_{p+1}=\left(b_p^{\,3^{p-1}}\right)^3=b_p^{\,3^p}$ ពិត

ដូចនេះ $b_n=b_1^{\,3^{n-1}}$

ដោយ $b_1=\dfrac{a_1+3}{a_1-1}=\dfrac{\dfrac{x^3+9x+6}{3x^2+6x+7}+3}{\dfrac{x^3+9x+6}{3x^2+6x+7}-1}$

$$b_1=\frac{x^3+9x+6+9x^2+18x+21}{x^3+9x+6-3x^2-6x-7}$$

$$b_1=\frac{x^3+9x^2+27x+27}{x^3-3x^2+3x-1}=\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^3$$

គេទាញ $b_n = \left[\left(\dfrac{x+3}{x-1} \right)^3 \right]^{3^{n-1}} = \left(\dfrac{x+3}{x-1} \right)^{3^n}$

ដោយ $b_n = \dfrac{a_n + 3}{a_n - 1} \Rightarrow a_n = \dfrac{b_n + 3}{b_n - 1}$ ជំនួស

$$b_n = \frac{(x+3)^{3^n}}{(x-1)^{3^n}}$$

គេបាន $a_n = \dfrac{(x+3)^{3^n} + 3(x-1)^{3^n}}{(x+3)^{3^n} - (x-1)^{3^n}}$

ដូចនេះ $f_n(x) = \dfrac{(x+3)^{3^n} + 3(x-1)^{3^n}}{(x+3)^{3^n} - (x-1)^{3^n}}$ ។

លំហាត់ទី២០

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{x}$

ក/ ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ $x\in IR$ គេមាន

$f(2x)=f^{2}(x)-2$ ។

ខ/ គណនា $A=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{8}+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{8}$ ។

គ/ ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=5$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក/ បង្ហាញថាគ្រប់ $x\in IR$ គេមាន

$f(2x)=f^{2}(x)-2$

គេមាន $f(x)=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{x}$

គេបាន $f(2x)=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2x}$

តាមសមភាព $a^{2}+b^{2}=(a+b)^{2}-2ab$

ដោយយក $a=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x$ និង $b=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x$

ហើយ $ab=1$

គេបាន $f(2x)=f^2(x)-2$ ។

ខ/ គណនា $A=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^8+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^8$

គេបាន $A=f(8)$

ដោយ $f(2x)=f^2(x)-2$

នោះ $f(2)=f^2(1)-2=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2=5-2=3$

បើ $x=2$ នោះ $f(4)=f^2(2)-2=9-2=7$

បើ $x=4$ នោះ $f(8)=f^2(4)-2=7^2-2=47$

ដូចនេះ $A=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^8+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^8=47$ ។

គ/ ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=5$

គេបាន $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x=3$

តាង $t=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{x}>0$

ដោយ $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{x}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{x}=1\Rightarrow\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{x}=\frac{1}{t}$

សមីការអាចសរសេរ $t+\frac{1}{t}=3\Rightarrow t^{2}-3t+1=0$

$\Delta=9-4=5\Rightarrow t_{1}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\ ;\ t_{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

-ចំពោះ $t=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2}$

គេបាន $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{x}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2}$

នាំឲ្យ $x=2$ ។

-ចំពោះ $t=\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{-2}$

គេបាន $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{x}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{-2}$

នាំឲ្យ $x=-2$ ។

លំហាត់ទី២១

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x$

ក/ ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ $x\in IR$ គេមាន

$f(3x)=f^3(x)-3f(x)$ ។

ខ/ គណនា $A=\left(2-\sqrt{3}\right)^9+\left(2+\sqrt{3}\right)^9$ ។

គ/ ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=14$ ។

ឃ/ចូរបង្ហាញថា $f(x)\geq 2$ គ្រប់ $x\in IR$,

ដំណោះស្រាយ

ក/ បង្ហាញថា $f(3x)=f^3(x)-3f(x)$

តាង $a=(2-\sqrt{3})^x$ និង $b=(2+\sqrt{3})^x$

គេបាន $ab=(2-\sqrt{3})^x(2+\sqrt{3})^x=1$

តាមរូបមន្ត $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

គេបាន $f(3x)=f^3(x)-3f(x)$ ។

ខ/ គណនា $A=\left(2-\sqrt{3}\right)^9+\left(2+\sqrt{3}\right)^9$

គេបាន $A=f(9)$

គេមាន $f(3x)=f^3(x)-3f(x)$

ចំពោះ $x=1: f(3)=f^3(1)-3f(1)$

ដោយ $f(1)=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$

គេបាន $f(3)=4^3-3(4)=64-12=52$

ចំពោះ

$x=3: f(9)=f^3(3)-3f(3)=52^3-3(52)=140452$

ដូចនេះ $A=\left(2-\sqrt{3}\right)^9+\left(2+\sqrt{3}\right)^9=140452$ ។

គ/ ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=14$

គេបាន $(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=14$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $(2+\sqrt{3})^x$

គេបាន

$$(2+\sqrt{3})^{2x}+1=14(2+\sqrt{3})^x$$

$$(2+\sqrt{3})^{2x}-14(2+\sqrt{3})^x+1=0$$

តាង $t=(2+\sqrt{3})^x>0$

$t^2-14t+1=0$, $\Delta'=49-1=48$

នាំឲ្យ $t_1=7-4\sqrt{3}$; $t_2=7+4\sqrt{3}$

-ចំពោះ $t_1=7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2=(2+\sqrt{3})^{-2}$

គេបាន $(2+\sqrt{3})^x=(2+\sqrt{3})^{-2}\Rightarrow x=-2$

-ចំពោះ $t_2=7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$

គេបាន $(2+\sqrt{3})^x=(2+\sqrt{3})^2\Rightarrow x=2$

ដូចនេះសមីការមានឫស $x_1=-2$; $x_2=2$ ។

ឃ/បង្ហាញថា $f(x)\geq 2$ គ្រប់ $x\in IR$

គេមាន $(2-\sqrt{3})^x>0$; $(2+\sqrt{3})^x>0$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន

$$f(x)=(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x\geq 2\sqrt{(2-\sqrt{3})^x(2+\sqrt{3})^x}=2$$

ដូចនេះ $f(x)\geq 2$ គ្រប់ $x\in IR$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឲ្យ a , b ,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{a^3+c^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$

(USA MO 1998)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{a^3+c^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$

យើងមាន

$$(a-b)(a^2-b^2)=a^3+b^3-ab(a+b)\ge 0$$

ឬ $a^3+b^3\ge ab(a+b)$

ឬ $a^3+b^3+abc\ge ab(a+b)+abc=ab(a+b+c)$

គេទាញ

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}\le\frac{1}{ab(a+b+c)}=\frac{c}{abc(a+b+c)}\ (1)$$

ស្រាយបំភ្លឺដូចគ្នាដែរគេបាន

$$\frac{1}{b^3+c^3+abc}\le\frac{a}{abc(a+b+c)}\ (2)$$

$$\frac{1}{a^3+c^3+abc}\le\frac{b}{abc(a+b+c)}\ (3)$$

ដោយបូកវិសមភាព (1) , (2) និង (3)

គេបាន

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{a^3+c^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$

លំហាត់ទី២៣

គេឲ្យ $a>1$ និង $x>y>z>1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\log_a(\frac{x}{y})\log_a(\frac{y}{z}) \le \left[\log_{a^2}(\frac{x}{z})\right]^2$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\log_a(\frac{x}{y})\log_a(\frac{y}{z}) \le \left[\log_{a^2}(\frac{x}{z})\right]^2$

ចំពោះ $x>y>z>1$

នោះ $\frac{x}{y}>1 , \frac{y}{z}>1 , \frac{x}{z}>1$

ដោយ $a>1$ នោះ

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)>0 \text{ , } \log_a\left(\frac{y}{z}\right)>0 \text{ , } \log_a\left(\frac{x}{z}\right)>0$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)+\log_a\left(\frac{y}{z}\right)\geq 2\sqrt{\log_a\left(\frac{x}{y}\right).\log_a\left(\frac{y}{z}\right)}$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}.\frac{y}{z}\right)\geq 2\sqrt{\log_a\left(\frac{x}{y}\right).\log_a\left(\frac{y}{z}\right)}$$

$$\log_a\left(\frac{x}{z}\right)\geq 2\sqrt{\log_a\left(\frac{x}{y}\right).\log_a\left(\frac{y}{z}\right)}$$

ដោយ $\log_{a^2}\left(\frac{x}{z}\right)=\frac{1}{2}\log_a\left(\frac{x}{z}\right)$ នោះគេបាន

$$2\log_{a^2}\left(\frac{x}{z}\right)\geq 2\sqrt{\log_a\left(\frac{x}{y}\right).\log_a\left(\frac{y}{z}\right)}$$

ដូចនេះ $\log_a(\frac{x}{y})\log_a(\frac{y}{z})\leq\left[\log_{a^2}(\frac{x}{z})\right]^2$

លំហាត់ទី២៨

គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបីនៃ x ។

គេដឹងថា $P(x)-a$ ចែកដាច់នឹង $(x-a)^2$

ហើយ $P(x)+a$ ចែកដាច់នឹង $(x+a)^2$

ដែលក្នុងទីនេះ $a\neq 0$ និង a ជាចំនួនពិត ។

ចូរកំនត់រកពហុធា $P(x)$ ខាងលើនេះ ?

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រកពហុធា $P(x)$

បើ $P(x)-a$ ចែកដាច់នឹង $(x-a)^2$

នាំឲ្យមានពហុធា $Q(x)$ មួយដែល

$$P(x)-a=(x-a)^2Q(x)\Rightarrow P(x)=(x-a)^2Q(x)+a \quad (1)$$

បើ $P(x)+a$ ចែកដាច់នឹង $(x+a)^2$

នាំឲ្យមានពហុធា $R(x)$ មួយដែល

$$P(x)+a=(x+a)^2R(x)\Rightarrow P(x)=(x+a)^2R(x)-a \quad (2)$$

តាម (1) គេមាន

$$P'(x) = 2(x-a)Q(x) + (x-a)^2 Q'(x)$$

ឬ $P'(x) = (x-a)\left[2Q(x) + (x-a)Q'(x)\right]$

នាំឲ្យ $P'(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-a$ ។

តាម (2) គេមាន

$$P'(x) = 2(x+a)R(x) + (x+a)^2 R'(x)$$

ឬ $P(x) = (x+a)\left[2R(x) + (x+a)R'(x)\right]$

នាំឲ្យ $P'(x)$ ចែកដាច់នឹង $x+a$ ។

ដោយ $P'(x)$ ចែកដាច់នឹង $x-a$ និង $x+a$

នាំឲ្យមានចំនួនថេរk មួយដែល

$$P'(x) = k(x-a)(x+a) = kx^2 - ka^2$$

(ព្រោះ $P(x)$ជាពហុធាដឺក្រេទីបីនោះ$P'(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីពីរ)

គេទាញ

$$P(x) = \int (kx^2 - ka^2)dx = \frac{kx^3}{3} - ka^2x + C$$

បើគេជំនួស $x=a$ និង $x=-a$ រៀងគ្នាក្នុង (1) និង (2)គេបាន

$P(a)=a$ និង $P(-a)=-a$

ដោយ $P(a)=\frac{ka^3}{3}-ka^3+C=-\frac{2ka^3}{3}+C$

និង $P(-a)=-\frac{ka^3}{3}+ka^3+C=\frac{2ka^3}{3}+C$

គេទាញបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases}-\frac{2ka^3}{3}+C=a\\ \frac{2ka^3}{3}+C=-a\end{cases}$

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបាន $C=0$ និង $k=-\frac{3}{2a^2}$

ហេតុនេះ $P(x)=-\frac{3}{2a^2}.\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2a^2}.a^2x=-\frac{x^3}{2a^2}+\frac{3}{2}x$

ដូចនេះ $P(x)=-\frac{x^3}{2a^2}+\frac{3}{2}x$ ។

លំហាត់ទី២៨

គេឲ្យពហុធា $P(x)=(x^2-3x+1)^{100}$

ក/ដោយមិនបាច់ពន្លាតចូរកំនត់លេខ

មេគុណមុខតួ x^2 របស់ពហុធា $P(x)$ ។

ខ/រកសំណល់ពីការចែក $P(x)$ នឹង x^2-5x+6

គ/គេសន្មតថា $P(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_{200}x^{200}$

គណនា $A=c_0+c_2+c_4+...+c_{200}$

$B=c_1+c_3+c_5+...+c_{199}$

ដំណោះស្រាយ

ក/កំនត់លេខមេគុណមុខតួ x^2

តាង $P(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_{200}x^{200}$

គេបាន $P'(x)=c_1+2c_2x+3c_3x^2+...+200c_{200}x^{199}$

និង $P''(x)=2c_2+6c_3x+....+200\times 199c_{200}x^{198}$

បើ $x=0$ នោះ $P''(0)=2c_2 \Rightarrow c_2=\dfrac{P''(0)}{2}$

មាន $P(x)=(x^2-3x+1)^{100}$

គេបាន $P'(x)=100(2x-3)(x^2-3x+1)^{199}$

និង

$$P''(x)=200(x^2-3x+1)^{199}+19900(2x-3)^2(x^2-3x+1)^{198}$$

បើ $x=0 \Rightarrow P''(0)=200+19900\times 9=179300$

គេទាញ $c_2=\dfrac{179300}{2}=89650$

ដូចនេះ លេខមេគុណមុខតួ x^2 គឺ 89650 ។

ខ/រកសំណល់ពីការចែក $P(x)$ នឹង x^2-5x+6

តាង $R(x)=ax+b$ ជាសំណល់ ពីការចែក $P(x)$ នឹង x^2-5x+6

គេបាន $P(x)=(x^2-5x+6)Q(x)+ax+b$

ដោយសមីការ $x^2-5x+6=0$ មានឬស

$x_1=2\ ;\ x_2=3$

គេបាន $\begin{cases} P(2)=2a+b \\ P(3)=3a+b \end{cases}$

ដោយ $P(x)=(x^2-3x+1)^{100} \Rightarrow P(2)=1\ ;\ P(3)=1$

នាំឲ្យ $\begin{cases} 2a+b=1 \\ 3a+b=1 \end{cases} \Rightarrow a=0\ ,\ b=1$

ដូចនេះសំណល់នៃការចែក $P(x)$ នឹង

x^2-5x+6 គឺ $R(x)=1$

គ/គណនា $A=c_0+c_2+c_4+...+c_{200}$

$$B=c_1+c_3+c_5+...+c_{199}$$

មាន $P(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_{200}x^{200}$

គេបាន $P(1)=c_0+c_1+c_2+...+c_{200}$

និង $P(-1)=c_0-c_1+c_2-....+c_{200}$

គេបាន

$P(1)+P(-1)=2(c_0+c_2+c_4+.....+c_{200})=2A$

នាំឲ្យ $A=\dfrac{P(-1)+P(1)}{2}$ ហើយ $B=\dfrac{P(1)-P(-1)}{2}$

$P(1)=(1-3+1)^{100}=1\ ,\ P(-1)=(1+3+1)^{100}=5^{100}$

ដូចនេះ $A=\dfrac{5^{100}+1}{2}$ និង $B=\dfrac{1-5^{100}}{2}$ ។

លំហាត់ទី២៦

គេឲ្យ $P(x)$ ជាពហុធាមួយ ។

គេដឹងថា $P(x)$ ចែកនឹង $(x-1)$ ឲ្យ

សំណល់ 2 ហើយ $P(x)$ ចែកនឹង $(x-2)$

ឲ្យសំណល់ 3 ។

ក/ ចូររកសំណល់នៃវិធីចែក $P(x)$ នឹង

x^2-3x+2 ។

ខ/ គេសន្មតថា $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួន

នៃ x ដែល $P(-2)=-1$

$P(-1)=-7$, $P(0)=5$ ។ ចូរកំនត់ $P(x)$

គ/ ដោះស្រាយសមីការ $P(x)=x+1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក/ រកសំណល់នៃវិធីចែក $P(x)$ នឹង x^2-3x+2

ដោយ $P(x)$ ចែកនឹង $(x-1)$ ឲ្យសំណល់ 2

នាំឲ្យមានពហុធា $q_1(x)$ ដែល

$P(x) = (x-1)q_1(x) + 2$

$P(x)$ ចែកនឹង $(x-2)$ ឲ្យសំណល់ 3

នាំឲ្យមានពហុធា

$q_2(x)$ ដែល $P(x) = (x-2)q_2(x) + 3$

គេបាន $\begin{cases} P(x) = (x-1)q_1(x) + 2 \\ P(x) = (x-2)q_2(x) + 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-2)P(x) = (x^2-3x+2)q_1(x) + 2x - 4 \quad (1) \\ (x-1)P(x) = (x^2-3x+2)q_2(x) + 3x - 3 \quad (2) \end{cases}$$

ដកសមីការ (2) និង (1) គេបាន

$P(x) = (x^2-3x+2)q(x) + x + 1$

ដែល $q(x) = q_2(x) - q_1(x)$

ទំនាក់ទំនងចុងក្រោយនេះបញ្ជាក់ថា $P(x)$

ចែកនឹង x^2-3x+2 ឲ្យសំនល់ $R(x) = x + 1$ ។

ខ/ កំនត់ពហុធា $P(x)$

គេមាន $P(x)=(x^2-3x+2)q(x)+x+1$

ដោយ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទីបួននោះ

$q(x)$ ត្រូវតែជាពហុធាដឺក្រេទីពីរ ។

តាង $q(x)=ax^2+bx+c\ ,\ a\neq 0\ ,\ a\ ,\ b\ ,\ c\in IR$

គេបាន $P(x)=(x^2-3x+2)(ax^2+bx+c)+x+1$

ដោយ $P(-2)=-1$ និង $P(-1)=-7\ ,\ P(0)=5$

គេបាន $\begin{cases}12(4a-2b+c)-1=-1\\7(a-b+c)=-7\\2c+1=5\end{cases}$

សមមូល $\begin{cases}4a-2b+c=0\\a-b+c=-1\\c=2\end{cases}$

នាំឲ្យ $a=2\ ,\ b=5\ ,\ c=2$

ហេតុនេះ $P(x)=(x^2-3x+2)(2x^2+5x+2)+(x+1)$

បន្ទាប់ពីពន្លាតរួចមកគេទទួលបានពហុធា

$P(x)=2x^4-x^3-9x^2+5x+5$ ។

គ/ ដោះស្រាយសមីការ $P(x)=x+1$

ដោយ $P(x)=(x^2-3x+2)(2x^2+5x+2)+(x+1)$

គេបាន $(x^2-3x+2)(2x^2+5x+2)+x+1=x+1$

$$(x^2-3x+2)(2x^2+5x+2)=0$$

$$(x-1)(x-2)(x+2)(2x+1)=0$$

គេទាញឫស $x\in\{-2,-\frac{1}{2},1,2\}$ ។

លំហាត់ទី២៧

គេឲ្យពហុធា $P(x)=ax^5+bx^3+1$

ដែល a និង b ជាពីរចំនួនពិតដែលគេឲ្យ ។

ចូរកំនត់ a ដើម្បីឲ្យ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង

x^2-3x+1 ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃ a

ដើម្បីឲ្យ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង x^2-3x+1

លុះត្រាតែឫសរបស់សមីការ $x^2-3x+1=0$

ជាឫសរបស់សមីការ$P(x)=0$ដែរ។

តាង α និង β ជាឫសរបស់សមីការ

$x^2-3x+1=0$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេបាន $\begin{cases}\alpha+\beta=3\\ \alpha\beta=1\end{cases}$

បើα និង β ជាឫសរបស់សមីការ $P(x)=0$

នោះគេបាន

$$\begin{cases} P(\alpha)=0 \\ P(\beta)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\alpha^5+b\alpha^3+1=0 \\ a\beta^5+b\beta^3+1=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\alpha^5\beta^3+b\alpha^3\beta^3+\beta^3=0 & (1) \\ a\alpha^3\beta^5+b\alpha^3\beta^3+\alpha^3=0 & (2) \end{cases}$$

ដកសមីការពីនេះ $a\alpha^3\beta^3(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha^3-\beta^3)=0$

គេទាញ $a=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta}{\alpha^3\beta^3(\alpha+\beta)}=\dfrac{9-1}{3}=\dfrac{8}{3}$

ដូចនេះ $a=\dfrac{8}{3}$ ។

លំហាត់ទី២៨

គេឲ្យពហុធា $P(x)=x^n+bx^2+42x+8$ ដែល $n\in IN$ និង b ជាពិតដែលគេឲ្យ ។

ចូរកំនត់ n និង b ដើម្បីឲ្យ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង x^2-6x+8 ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃ n និង b

បើ $x^2-6x+8=0 \Rightarrow x_1=2\ ;\ x_2=4$

ដើម្បីឲ្យ $P(x)$ ចែកដាច់នឹង x^2-6x+8

លុះត្រាតែ $\begin{cases} P(2)=0 \\ P(4)=0 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} 2^n+4b+42(2)+8=0 \\ 4^n+16b+42(4)+8=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2^n+4b=-92 \\ 4^n+16b=-176 \end{cases} \begin{vmatrix} -4 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4.2^n-16b=368 & (1) \\ 4^n+16b=-176 & (2) \end{cases}$$

បូកសមីការ (1) និង (2) បាន

$4^n - 4.2^n - 192 = 0$

តាង $t = 2^n > 0$ គេបាន

$t^2 - 4t - 192 = 0$, $\Delta' = 4 + 192 = 196$

គេទាញឫស

$t_1 = 2 + 14 = 16$; $t_2 = 1 - 14 = -12 < 0$(មិនយក)

ចំពោះ $t = 16 \Rightarrow 2^n = 16$ ឬ $n = 4$

តាមសមីការ $2^n + 4b = -92 \Rightarrow b = \dfrac{-92 - 2^4}{4} = -27$

ដូចនេះ $n = 4$; $b = -27$ ។

លំហាត់ទី២៩

គេមានអនុគមន៍លេខ f កំនត់ពីសំណុំ IN ទៅសំណុំ IR ដោយ $f(0)=0$

និង $f(n+1)=2f(n)+\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$

ចូរកំនត់រក $f(n)$?

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រក $f(n)$

គេមាន $f(n+1)=2f(n)+\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង 2^n គេបាន

$$\frac{1}{2^n}f(n)=\frac{1}{2^{n-1}}f(n)+\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^{n+2}} \quad (1)$$

គេមាន

$$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

$$=\frac{2\tan a}{\tan a\cot a-\tan^2 a}=\frac{2}{\cot a-\tan a}$$

គេទាញ $\tan a = \cot a - 2\cot 2a$

ដោយយក $a = \frac{\pi}{2^{n+2}}$

គេបាន $\tan\frac{\pi}{2^{n+2}} = \cot\frac{\pi}{2^{n+2}} - 2\cot\frac{\pi}{2^{n+1}} \quad (2)$

យក (2) ជួសក្នុង (1) គេបាន

$$\frac{1}{2^n}f(n+1) - \frac{1}{2^{n-1}}f(n) = \frac{1}{2^n}\cot\frac{\pi}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}[\frac{1}{2^k}f(k+1) - \frac{1}{2^{k-1}}f(k)] = \sum_{k=0}^{n-1}[\frac{1}{2^k}\cot\frac{\pi}{2^{k+2}} - \frac{1}{2^{k-1}}\cot\frac{\pi}{2^{k+1}}]$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}f(n) - 2f(0) = \frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{\pi}{2^{n+1}} \Rightarrow f(n) = \cot\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

ដូចនេះ $f(n) = \cot\frac{\pi}{2^{n+1}}$ ។

លំហាត់ទី៣០

គេឲ្យស្វីតចំនួនពិត (y_n) កំនត់ដោយ

$y_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ និងទំនាក់ទំនងកំណើន

$$y_{n+1} = \frac{y_n^2}{\sqrt[3]{y_n^6 - 2y_n^3 + 2}}$$

ដែល $n = 0 , 1 , 2 , ...$ ។

ចូរគណនា y_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា y_n ជាអនុគមន៍នៃ n

មាន $y_{n+1} = \frac{y_n^2}{\sqrt[3]{y_n^6 - 2y_n^3 + 2}}$

$$\Rightarrow \; y_{n+1}^3 = \frac{y_n^6}{y_n^6 - 2y_n^3 + 2}$$

$$\Rightarrow \; y_{n+1}^3 - 1 = \frac{y_n^6}{y_n^6 - 2y_n^3 + 2} - 1 = \frac{2(y_n^3 - 1)}{(y_n^3 - 1)^2 + 1}$$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $z_n = {y_n}^3 - 1$

គេបាន $z_{n+1} = \dfrac{2z_n}{{z_n}^2 + 1}$ មានសមីការសំគាល់

$r = \dfrac{2r}{r^2 + 1}$

សមមូល $r(r-1)(r+1) = 0 \Rightarrow r_1 = 0\ ,\ r_2 = 1\ ,\ r_3 = -1$

តាងស្វ៊ីជំនួយ $t_n = \dfrac{z_n - 1}{z_n + 1}$

គេបាន $t_{n+1} = \dfrac{z_{n+1} - 1}{z_{n+1} + 1} = \dfrac{\dfrac{2z_n}{1 + {z_n}^2} - 1}{\dfrac{2z_n}{1 + {z_n}^2} + 1} = -\left(\dfrac{z_n - 1}{z_n + 1}\right)^2$

$t_{n+1} = -{t_n}^2$ តាង $u_n = -t_n$

គេបាន $-u_{n+1} = -(-u_n)^2$ ឬ $u_{n+1} = {u_n}^2$

$\Rightarrow \ln(u_{n+1}) = 2\ln(u_n)$

គេទាញ $\{\ \ln(u_n)\ \}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន

ផលធៀបរួម 2 ។

គេបាន $\ln(u_n) = 2^n \ln(u_0) \Rightarrow u_n = {u_0}^{2^n}$

ដោយ $u_n = -t_n$

នោះ $-t_n = (-t_0)^{2^n}$ ឬ $t_n = -(-t_0)^{2^n}$

តែ $t_0 = \dfrac{z_0 - 1}{z_0 + 1} = \dfrac{(y_0^{\,3} - 1) - 1}{(y_0^{\,3} - 1) + 1} = \dfrac{\frac{3}{2} - 2}{\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{3}$

គេទាញ $t_n = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2^n} = -\dfrac{1}{3^{2^n}}$

ដោយ $t_n = \dfrac{z_n - 1}{z_n + 1} \Rightarrow z_n = \dfrac{1 + t_n}{1 - t_n} = \dfrac{3^{2^n} - 1}{3^{2^n} + 1}$

តាម $z_n = y_n^{\,3} - 1 \Rightarrow y_n = \sqrt[3]{1 + z_n} = \sqrt[3]{1 + \dfrac{3^{2^n} - 1}{3^{2^n} + 1}}$

ដូចនេះ $y_n = \sqrt[3]{\dfrac{2 \times 3^{2^n}}{1 + 3^{2^n}}}$ ។

លំហាត់ទី៣១

គេឲ្យ $a \in IR \ ,0 < a < 1$ ហើយ f

ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0;1]$ ដោយ

$f(0) = 0 \ ; \ f(1) = 1$ និង

$$f(\frac{x+y}{2}) = (1-a)f(x) + af(y)$$

ចំពោះគ្រប់ $x;y \in [0,1]$ និង $x \le y$ ។

ចូរកំនត់ $f(\frac{1}{7})$?

(IMO Longlist 1989)

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ $f(\frac{1}{7})$

គេមាន $f(\frac{x+y}{2}) = (1-a)f(x) + af(y) \quad (1)$

យក $x=0\ ;\ y=\frac{2}{7}$ ជួសក្នុង (1) គេបាន

$$f(\frac{1}{7})=(1-a)f(0)+af(\frac{2}{7})$$

គេទាញ $f(\frac{2}{7})=\frac{1}{a}f(\frac{1}{7})$ (ព្រោះ $f(0)=0$)

យក $x=\frac{1}{7}\ ;\ y=1$ ជួសក្នុង (1) គេបាន

$$f(\frac{4}{7})=(1-a)f(\frac{1}{7})+af(1)=(1-a)f(\frac{1}{7})+a$$

យក $x=\frac{2}{7}\ ;\ y=\frac{4}{7}$ ជួសក្នុង (1) គេបាន

$$f(\frac{3}{7})=(1-a)f(\frac{2}{7})+af(\frac{4}{7})$$

$$f(\frac{3}{7})=(1-a)\left(\frac{1}{a}f(\frac{1}{7})\right)+a\left[(1-a)f(\frac{1}{7})+a\right]$$

$$f(\frac{3}{7})=[\frac{1-a}{a}+a(1-a)]f(\frac{1}{7})+a^2$$

$$=\frac{(1-a)(1+a^2)}{a}f(\frac{1}{7})+a^2$$

យក $x=0\ ;\ y=1$ ជួសក្នុង (1) គេបាន $f(\frac{1}{2})=a$

យក $x=\frac{3}{7}\,;\,y=\frac{4}{7}$ ជួសក្នុង (1) គេបាន

$$f(\frac{1}{2})=(1-a)f(\frac{3}{7})+af(\frac{4}{7})$$

$$a=(1-a)\left[\frac{(1-a)(1+a^2)}{a}f(\frac{1}{7})+a^2\right]+a\left[(1-a)f(\frac{1}{7})+a\right]$$

$$a=\frac{(1-a)^2(1+a^2)}{a}f(\frac{1}{7})+a^2-a^3+a(1-a)f(\frac{1}{7})+a^2$$

$$a^3-2a^2+a=\frac{(1-a)^2(1+a^2)+a^2(1-a)}{a}f(\frac{1}{7})$$

$$a(1-a)^2=\frac{(1-a)[(1-a)(1+a^2)+a^2]}{a}f(\frac{1}{7})$$

$$\Rightarrow f(\frac{1}{7})=\frac{a^2(1-a)}{(1-a)(1+a^2)+a^2}=\frac{a^2(1-a)}{1-a+2a^2-a^3}$$

ដូចនេះ $f(\frac{1}{7})=\frac{a^2-a^3}{1-a+2a^2-a^3}$,។

លំហាត់ទី៣២

គេឱ្យ a , b ,c ជាចំនួនវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca=3$ ។

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{abc}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{abc}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$1=\frac{ab+bc+ca}{3}\ge\sqrt[3]{(abc)^2}$ ឬ $abc\le 1$ ។

គេមាន

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}=\frac{1}{1+a(ab+ac)}=\frac{1}{1+a(3-bc)}=\frac{1}{3a+(1-abc)}$$

ដោយ $abc\le 1$ ឬ $1-abc\ge 0$ នោះ $\frac{1}{1+a^2(b+c)}\le\frac{1}{3a}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{1}{1+b^2(c+a)}\le\frac{1}{3b}$ (2) , $\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{3c}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) ; (2) និង (3) គេបាន

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}=\frac{ab+bc+ca}{3abc}$$

ដោយ $ab+bc+ca=3$

ដូចនេះ $$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{abc}$$ ។

លំហាត់ទី៣៣

គេយក A, B, C ជាមុំបីនៃត្រីកោណ ABC ។

តាងអនុគមន៍ $y = \cot A + \dfrac{2\sin A}{\cos A + \cos(B - C)}$

រកតម្លៃអប្បរមានៃអនុគមន៍នេះ ?

ដំណោះស្រាយ

តម្លៃអប្បរមានៃអនុគមន៍

$$y = \cot A + \frac{2\sin A}{\cos A + \cos(B - C)}$$

គេមាន $A + B + C = \pi$

នោះ $\cos A = \cos(\pi - B - C) = -\cos(B + C)$

គេបាន

$$y = \cot A + \frac{2\sin A}{\cos(B - C) - \cos(B + C)}$$

$$= \cot A + \frac{\sin A}{\sin B \sin C}$$

$$= \frac{\cos A \sin B \sin C + \sin^2 A}{\sin A \sin B \sin C}$$

យក a, b, c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណនេះ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសគេមាន

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ នាំឲ្យ } \begin{cases} a = 2R\sin A \\ b = 2R\sin B \\ c = 2R\sin C \end{cases} \quad (1)$$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad (2)$$

យកទំនាក់ទំនង (1) ជួសក្នុង (2) គេបាន

$$4R^2\sin^2 A = 4R^2(\sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A)$$

គេទាញ $\sin B\sin C\cos A = \dfrac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2}$

ហេតុនេះអនុគមន៍ y អាចសរសេរ

$$y = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin B}$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \ge 3\sqrt[3]{(\sin A\sin B\sin C)^2}$$

$$\Rightarrow y \geq \frac{3\sqrt[3]{(\sin A \sin B \sin C)^2}}{2\sin A \sin B \sin C}$$

$$\Rightarrow y \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{\sin A \sin B \sin C}}$$

តាងអនុគមន៍ $f(x) = \sin x$ ដែល $0 < x < \pi$

គេមាន $f''(x) = -\sin x < 0\ ,\ \forall x \in (0;\pi)$

នាំឲ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ប៉ោង ។

តាមទ្រឹស្តីបទ Jensen គេបាន

$$\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3} \leq f(\frac{A+B+C}{3})$$

ឬ $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin(\frac{A+B+C}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

តាម វិសមភាព $AM - GM$ គេមាន

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \geq \sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C}$$

គេទាញ $\sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

ឬ $\sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

ហេតុនេះ $y \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{\sin A \sin B \sin C}} \geq \frac{3}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

ដោយ $y = \cot A + \dfrac{2\sin A}{\cos A + \cos(B - C)} \geq \sqrt{3}$

ដូចនេះតម្លៃអប្បរមានៃអនុគមន៍គឺ $\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៣៨

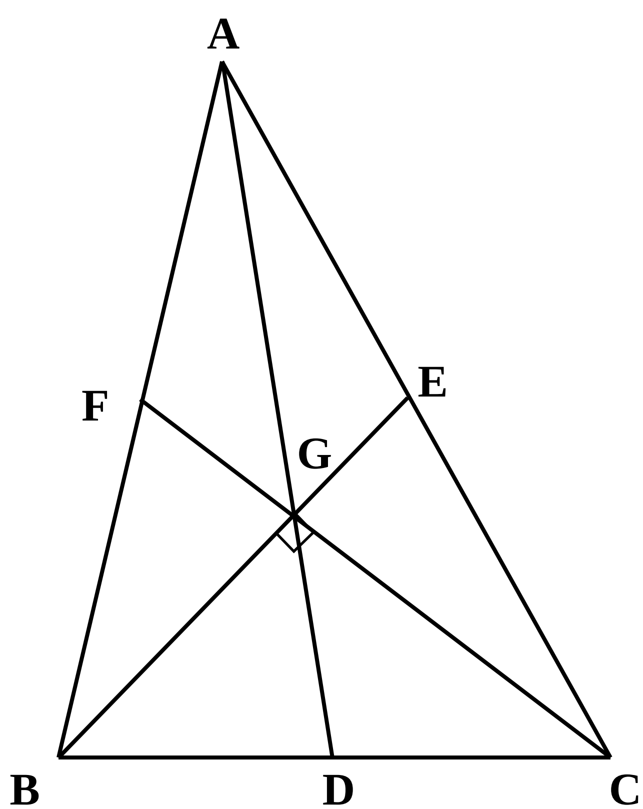
ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយមានមេដ្យាននៃជ្រុង AB និង AC កែងគ្នា ។

ចូរបង្ហាញថា $\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}$ ។

(CMO 1993)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}$



យើងសង់មេដ្យាន AD , BE , CF ហើយតាង G ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ ABC ។

យក $GE = x$ និង $GF = y$ នោះគេបាន

$BG = 2GE = 2x$ និង $CG = 2GF = 2y$

យើងមាន

$$\cot B = \cot(\angle GBA + \angle GBC)$$

$$= \frac{\cot(\angle GBA).\cot(\angle GBC) - 1}{\cot(\angle GBA) + \cot(\angle GBC)}$$

$$= \frac{\left(\frac{2x}{y}\right)\left(\frac{2x}{2y}\right) - 1}{\frac{2x}{y} + \frac{2x}{2y}} = \frac{2x^2 - y^2}{3xy}$$

ដូចគ្នាដែរ $\cot C = \dfrac{2y^2 - x^2}{3xy}$

គេបាន $\cot B + \cot C = \dfrac{2x^2 - y^2}{3xy} + \dfrac{2y^2 - x^2}{3xy} = \dfrac{x^2 + y^2}{3xy}$

តាមវិសមភាព AM-GM គេមាន

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \ge xy \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{3xy} \ge \frac{2}{3}$$

ដូចនេះ $\cot B + \cot C \ge \dfrac{2}{3}$ ។

លំហាត់ទី៣៨

គេឲ្យ $a\,;b\,;c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b}\ge 3$

(Regional Mathematical Olympiad-India 2006)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b}\ge 3$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $a^2+1\ge 2a$

គេទាញ $\frac{a^2+1}{b+c}\ge\frac{2a}{b+c}$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{b^2+1}{c+a}\ge\frac{2b}{c+a}$ និង $\frac{c^2+1}{a+b}\ge\frac{2c}{a+b}$

$$\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b}\ge\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}$$

គេមាន

$$\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}=\frac{2a^2}{a(b+c)}+\frac{2b^2}{b(c+a)}+\frac{2c^2}{c(a+b)}$$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwartz គេបាន

$$\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+a)}+\frac{c^2}{c(a+b)} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

ឬ $\frac{2a^2}{a(b+c)}+\frac{2b^2}{b(c+a)}+\frac{2c^2}{c(a+b)} \ge \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$

ដោយ $\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2} \ge ab+bc+ca$

ឬ $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2ab+2bc+2ca$

គេបាន $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$

នាំឲ្យ $\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \ge 3$

គេទាញ $\frac{2a^2}{a(b+c)}+\frac{2b^2}{b(c+a)}+\frac{2c^2}{c(a+b)} \ge 3$

ដូចនេះ $\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b} \ge 3$ ។

លំហាត់ទី៣៦

សន្មតថាពហុធា $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$

អាចដាក់ជាកត្តា $(x + r_1)(x + r_2)...(x + r_n)$

ដែល $r_1, r_2, ..., r_n$ ជាចំនួនពិត ។

ចូរបង្ហាញថា $(n-1)a_{n-1}^2 \geq 2na_{n-2}$ ។

(Costa Rican Math Olympiad 2009)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(n-1)a_{n-1}^2 \geq 2na_{n-2}$

យើងមាន $\sum_{i=1}^{n}(r_i) = r_1 + r_2 + ... + r_n = a_{n-1}$

និង $\sum_{1\leq i<j\leq n}(r_i.r_j) = a_{n-2}$ ។គេមាន

$$\sum_{1\leq i<j\leq 1}(r_i - r_j)^2 = (n-1)\left[\sum_{i=1}^{n}(r_i)\right]^2 - 2n\sum_{1\leq i<j\leq n}(r_i.r_j) \geq 0$$

គេទាញ $(n-1)a_{n-1}^2 - 2na_{n-2} \geq 0$

ដូចនេះ $(n-1)a_{n-1}^2 \geq 2na_{n-2}$ ។

លំហាត់ទី៣៧

មាន x និង y ជាពីរចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $(1+x)(1+y)=2$ ។

ចូរបង្ហាញថា $xy+\frac{1}{xy}\geq 6$ ។

(Costa Rican Math Olympiad 2009)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $xy+\frac{1}{xy}\geq 6$

គេមាន

$$(1+x)(1+y)=2$$

$$1+x+y+xy=2$$

$$x+y=1-xy$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$

គេមាន $x+y\geq 2\sqrt{xy}$

គេទាញ $1-xy\geq 2\sqrt{xy}\Leftrightarrow (1-xy)^2\geq 4xy$

សមមូល $1-2xy+(xy)^2 \geq 4xy$

ឬ $1+(xy)^2 \geq 6xy$

ដោយចែកអង្គទាំងពីរនឹង xy

គេបាន $xy+\frac{1}{xy} \geq 6$ ។

លំហាត់ទី៣៨

គេមានបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាព AM-GM គេបាន

$$\frac{a^3}{bc}+b+c\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{bc}.b.c}=3a\ \ (1)$$

$$\frac{b^3}{ca}+c+a\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{ca}.c.a}=3b\ \ (2)$$

$$\frac{c^3}{ab}+a+b\geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{ab}.a.b}=3c\ \ (3)$$

បូកវិសមភាព (1), (2) និង (3)

អង្គនិងអង្គគេបាន

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}+2(a+b+c)\geq 3(a+b+c)$$

ដូចនេះ $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c$ ។

លំហាត់ទី៣៩

គេមានស្វ៊ីត (x_n) កំនត់ដោយ $x_0 = x_1 = 1$ និង

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ គេមាន $x_{n+1} = \dfrac{x_n^k + 1}{x_{n-1}}$

ដែល k ជាចំនួនគត់ និង $k \geq 2$ ។

ចូរបង្ហាញថា (x_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ ?

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា (x_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់

គេមាន $x_0 = x_1 = 1$ និង $x_{n+1} = \dfrac{x_n^k + 1}{x_{n-1}}$

គេបាន $x_2 = \dfrac{x_1^k + 1}{x_0} = 2$ ជាចំនួនគត់

$x_3 = \dfrac{x_2^k + 1}{x_1} = 2^k + 1$ ជាចំនួនគត់

ឧបមាថា $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ សុទ្ធតែជាចំនួនគត់ ។ យើងនឹងស្រាយថា x_{n+1} ជាចំនួនគត់ដែរ។

គេមាន $x_{n+1} = \dfrac{x_n^{\ k} + 1}{x_{n-1}}$ និង $x_n = \dfrac{x_{n-1}^{\ k} + 1}{x_{n-2}}$

គេបាន $x_{n+1} = \dfrac{\left(\dfrac{x_{n-1}^k + 1}{x_{n-2}}\right)^k + 1}{x_{n-1}}$

$$x_{n+1} = \frac{(x_{n-1}^k + 1)^k + x_{n-2}^k}{x_{n-1}\,.x_{n-2}^k}$$

ដោយ $x_n = \dfrac{x_{n-1}^k + 1}{x_{n-2}} \Rightarrow x_{n-1}^k + 1 = x_n x_{n-2}$

ឬ $(x_{n-1}^k + 1)^k + x_{n-2}^k = x_n^k x_{n-2}^k + x_{n-2}^k$ ចែកដាច់នឹង x_{n-2}^k ។

ហើយ $x_{n-1}^k + 1 \equiv 1 \pmod{x_{n-1}}$

នោះ $(x_{n-1}^k + 1)^k + x_{n-2}^k \equiv 1 + x_{n-2}^k \pmod{x_{n-1}}$

ដោយ $1 + x_{n-2}^k = \dfrac{1 + x_{n-2}^k}{x_{n-3}}.x_{n-3} = x_{n-1}x_{n-3}$

នោះ $1 + x_{n-2}^k \equiv 0 \pmod{x_{n-1}}$ ។

សម្រាយខាងលើនេះបញ្ជាក់ថា x_{n+1} ជាចំនួនគត់

លំហាត់ទី៤០

គេយកចំនុច **K ; L ; M** រៀងគ្នានៅលើ

ជ្រុង **BC ; CA ; AB** ។

ចូរបង្ហាញថាយ៉ាងតិចមានមួយនៃត្រីកោណ

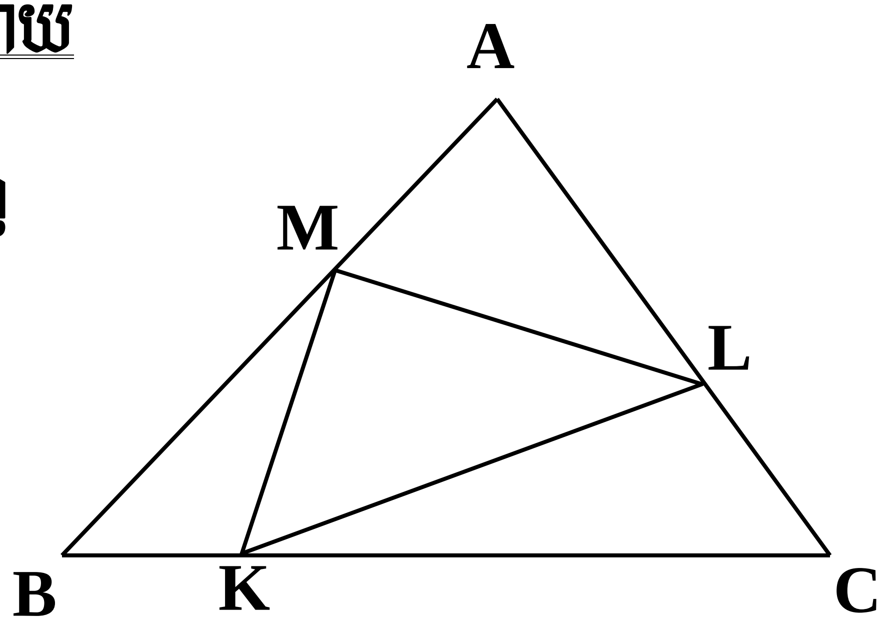
AML , BKM ,CLK មានផ្ទៃក្រឡាតូចជាង

ឬស្មើ $\frac{1}{4}$ នៃផ្ទៃក្រលាត្រីកោណ **ABC** ។

(IMO 1966)

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ



តាង S_1 ; S_2 ; S_3 រៀងគ្នាជាផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ AML, BKM ,CLK និង S ជាផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ ABC ។

ឧបមាថា $S_1 > \frac{1}{4}S$ ដោយ $\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2}AM.AL\sin A \\ S = \frac{1}{2}AB.AC\sin A \end{cases}$

គេបាន $\frac{1}{2}AM.AL\sin A > \frac{1}{8}AB.AC\sin A$

$4AM.AL > AB.AC$

$4AM.AL > (AM+ML)(AL+LC)$

$4AM.AL > AM.AL + AM.LC + ML.AL + ML.LC$

$3AM.AL > AM.LC + ML.AL + ML.LC$

$$3 > \frac{LC}{AL} + \frac{ML}{AM} + \frac{AM.AL}{ML.LC}$$

តាង $x = \frac{BK}{CK}$; $y = \frac{CL}{AL}$; $z = \frac{AM}{BM}$

គេបាន $3 > y + \frac{1}{z} + \frac{y}{z} \quad (1)$

ឧបមាថា $S_2 > \frac{1}{4}S$ និង $S_3 > \frac{1}{4}S$ ហើយស្រាយ

ដូចគ្នាដែរគេបាន $3 > x + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} \quad (2)$

និង $3 > z + \frac{1}{x} + \frac{z}{x} \quad (3)$

បូកវិសមភាព (1) , (2) & (3) គេបាន

$$9 > (x + y + z) + (\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) + (\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x})$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន

$$(x + y + z) + (\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) + (\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}) \geq 9$$

ហេតុនេះការឧបមាខាងលើមិនពិត ។

ដូចនេះ យ៉ាងតិចមានមួយនៃត្រីកោណ AML , BKM ,CLK មានផ្ទៃក្រឡាតូចជាង ឬស្មើ $\frac{1}{4}$ នៃផ្ទៃក្រលាត្រីកោណ ABC ។

រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន
Tel : 017 768 246
Email: lim_phalkun@ymail.com
www.mathtoday.wordpress.com

លំហាត់អនុវត្តន៍

1/គេឲ្យប្រវែង **AC** ។ ចូរសង់ត្រីកោណ **ABC** ដែលមានមុំ $\angle ABC = 90^{o}$ និងមេដ្យាន **BM** ផ្ទៀងផ្ទាត់ $BM^2 = AB.AC$ ។ (IMO 1959)

2/ ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនមានលេខបីខ្ទង់បើគេដឹងថា **N** ចែកដាច់នឹង **3** ហើយ $\frac{N}{11}$ ស្មើនឹងផលបូកការេនៃលេខលំដាប់របស់វា ។ (IMO 1960)

3/ សង់ត្រីកោណ **ABC** ,ឲ្យប្រវែង $AC = b, AB = c$ និងមុំស្រួច $\angle AMB = \omega$ ដែល **M** ជាចំនុចកណ្តាលនៃ **BC** ។

ចូរបង្ហាញថាសំណង់អាចមានលុះត្រាតែនិងមានតែ $b\tan\frac{\omega}{2} \le c < b$ ។ (IMO1961)

4/គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ហើយមាន
កំពស់ AD ។ រង្វង់ផ្ចិត O_1 និង O_2 ចារឹករៀងគ្នា
ក្នុងត្រីកោណ ABD និង ACD ។ បន្ទាត់(O_1O_2)
កាត់ជ្រុង AB និង AC រៀងគ្នាត្រង់ K និង L ។
តាង S_1 និង S_2 ជាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC
និង AKL រៀងគ្នា ។
ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $S_1 \geq 2S_2$?

5/ គេឲ្យបីចំនុចខុសគ្នា A, B , C នៅលើរង្វង់ (K)
ចូរសង់ចំនុច D នៅលើ រង្វង់ (K)ដោយដឹងថា
ចតុកោណ ABCD អាចមានរង្វង់ចារឹកក្នុង ។

(IMO1962)

6/ ចូរបង្ហាញថា $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$

(IMO1963)

7/ ក-ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ **n** ដោយដឹងថា $2^n - 1$ ចែកដាច់នឹង **7** ។

ខ-ចូរបង្ហាញថាគ្មានចំនួនគត់ធម្មជាតិ **n** ណា ដែល $2^n + 1$ ចែកដាច់នឹង **7** ។

(IMO1964)

8/ ត្រីកោណ **OAB** មួយមានមុំ $\angle AOB$ ជាមុំស្រួច **M** ជាចមណុចនៅលើ **AB** ។ **P** និង **Q** ជាជើងនៃចំណោលកែងពី **M** ទៅលើ **OA** និង **OB**រៀងគ្នា។ តើអ្វីជាសំណុំចំនុច**H** ជាអរតូសង់ត្រីកោណ**OPQ**? កំនត់សំណុំចំនុច **H**បើ **M**ប្រែប្រួលក្នុងΔOAB ?

(IMO1965)

9/បង្ហាញថាបើ $BC + AC = (BC\tan A + AC\tan B)\tan\frac{C}{2}$ នោះ **ABC** ជាត្រីកោណសមបាត ។ (IMO1966)

10/ ប្រលេឡូក្រាម $\mathbf{ABCD}$ មាន $\mathbf{AB = a\ ,\ AD = 1}$ មុំ $\angle\mathbf{BAD} = \varphi$ ហើយត្រីកោណ $\mathbf{ABD}$ មានមុំទាំងអស់ជាមុំស្រួច ។
បង្ហាញថារង្វង់មានកាំស្មើ 1 និងមានផ្ចិត $\mathbf{A, B, C}$ និង $\mathbf{D}$ គ្របដណ្តប់ប្រលេឡូក្រាមប្រសិនបើ
$\mathbf{a \le \cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi}$? (IMO 1967)

11/គេឲ្យ $\mathbf{f}$ ជាអនុគមន៍នៃតម្លៃពិតកំនត់គ្រប់ចំនួនពិត , ដោយដឹងថា ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{a > 0}$ គេមាន
$\mathbf{f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x}$ ។
ចូរបង្ហាញថា $\mathbf{f}$ ជាអនុគមន៍ខួប រួចឲ្យឧទាហរណ៍មួយដោយដឹងថា $\mathbf{f}$ ជាអនុគមន៍មិនថេរចំពោះ $\mathbf{a = 1}$

(IMO 1968)

12/ **C** ជាចំនុចមួយនៅលើកន្លះរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត **AB** រវាង **A** និង **B** ។ **D** ជាជើងចំណោលកែងពី **C** ទៅលើ **AB** ។ រង្វង់ (K_1) ចារឹកក្នុងត្រីកោណ **ABC** រង្វង់ (K_2) ប៉ះនឹង **CD ; DA** និងកន្លះរង្វង់ ។ រង្វង់ (K_3) ប៉ះនឹង **CD ; DB** និងកន្លះរង្វង់ ។ បង្ហាញថារង្វង់ (K_1) ,(K_2),(K_3) មានបន្ទាត់ប៉ះរួមមួយផ្សេងពី **AB** ។ (IMO 1969)

13/ ក្នុងតេត្រាអ៊ែត **ABCD** មាន $\angle BDC = 90^o$ ហើយជើងនៃចំណោលកែងពី **D** ទៅលើប្លង់ **(ABC)** គឺជាអរត្តូសង់នៃត្រីកោណ **ABC** ។

ចូរបង្ហាញថា

$$(AB + BC + CA)^2 \le 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$$

តើពេលណាទើបយើងបានសមភាព ?

(IMO 1970)

14/ f និង g ជាអនុគមន៍តម្លៃពិតកំនត់លើ

បន្ទាត់ពិត ។ ចំពោះគ្រប់ x និង y គេមាន

$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y)$ ។

f មិនអាចស្មូន្យនិង $|f(x)|\le 1$,

បង្ហាញថា $|g(x)|\le 1$ ចំពោះគ្រប់ x ។

(IMO 1972)

15/ ចូរបង្ហាញថាមានចំនុច D មួយលើជ្រុង AB នៃត្រីកោណ ABC ដោយដឹងថា CD ជាមធ្យមធរណីមាត្ររវាង AD និង DB លុះត្រាតែនិងមានតែ $\sin A\sin B\le \sin^2\frac{C}{2}$ ។ (IMO 1974)

16/កំនត់គ្រប់ចំនួនពិត a ដើម្បីឲ្យមានចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=a \\ x_1+2^3x_2+3^3x_3+4^3x_4+5^3x_5=a^2 \\ x_1+2^5x_2+3^5x_3+4^5x_4+5^5x_5=a^3 \end{cases}$$

(IMO1979)

17/ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន $x \& y$ អនុគមន៍ $f(x,y)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{cases} f(0,y) = y+1 \\ f(x+1,0) = f(x,1) \\ f(x+1,y+1) = f\left[x, f(x+1,y)\right] \end{cases}$$

ចូរកំនត់ $f(4\ ,1981)$? **(IMO1981)**

18/ កំនត់គូមួយនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន $a\ ,\ b$ ដោយដឹងថា $ab(a+b)$ ចែកមិនដាច់នឹង 7 ប៉ុន្តែ $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ ចែកដាច់នឹង 7^7 ។

(IMO 1984)

19/ **A circle has center on the side AB of the cyclic quadrilateral ABCD. The other three sides are tangent to the circle. Prove that AD + BC = AB. (IMO 1985)**

20/ **In an acute-angled triangle ABC the interior bisector of angle A meets BC at L and meets the circumcircle of ABC again at N. From L perpendiculars are drawn to AB and AC, with feet K and M respectively. Prove that the quadrilateral AKNM and the triangle ABC have equal areas.**

(IMO 1987)