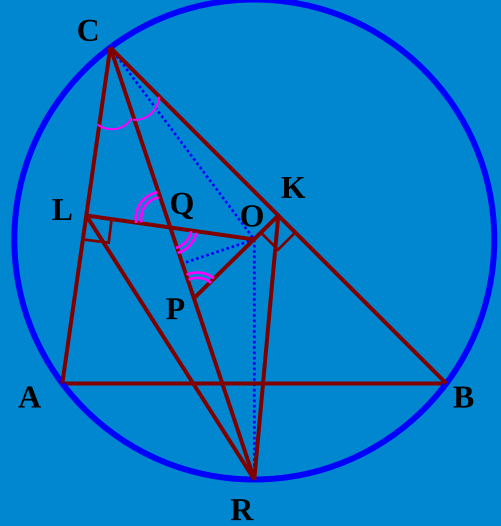
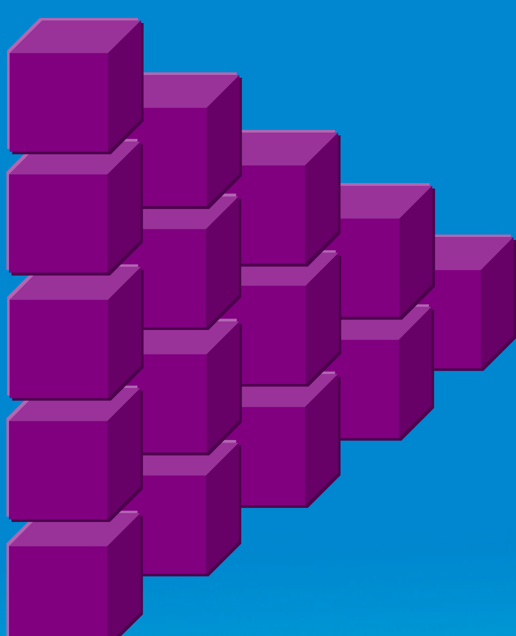
លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ
បរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា និង ពាណិជ្ជកម្ម

គណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោក

សម្រាប់សិស្សពូកែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២



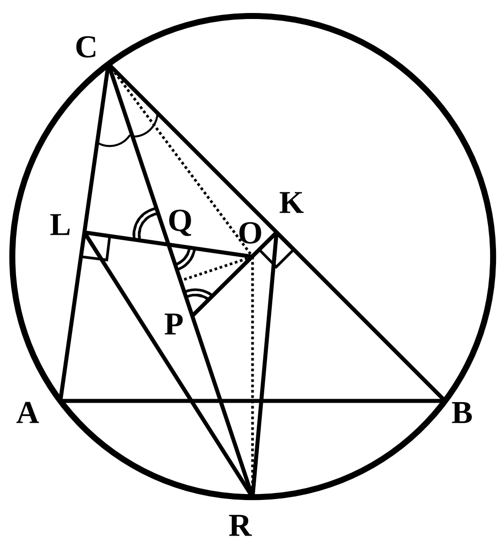


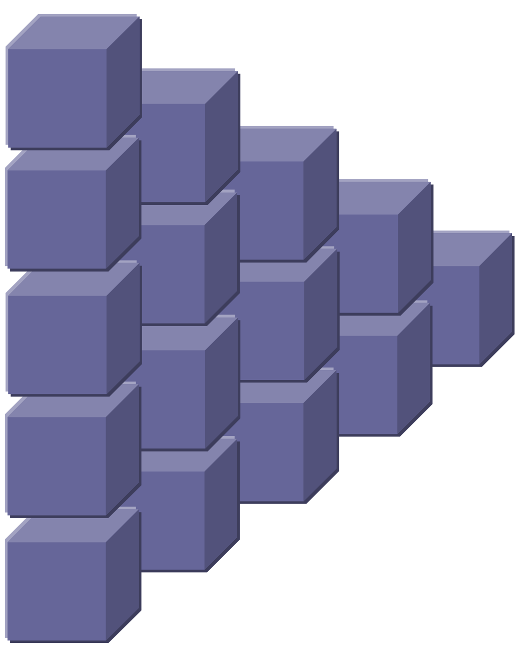
ភាគ៩

លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ
បរិញ្ញាបត្រគណិតវិទ្យា និង ពាណិជ្ជកម្ម

គណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោក

សម្រាប់សិស្សពូកែគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១២





ភាគ៩

អ្នកចូលរួមត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក លឹម ឆុន

លោក សែន ពិសិដ្ឋ

លោកស្រី ឌុយ រីណា

លោក ឆិត្យ ម៉េង

លោក ព្រឹម សុនិត្យ

លោក ផល ប៊ុនឆាយ

អ្នកត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិគ្គសិរ

ភារីកុំព្យូទ័រ

កញ្ញា លី គុណ្ណាភា

អ្នកនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លោក លឹម ផល្លុន និង លោក សែន ពិសិដ្ឋ

អារម្ភកថា

សួស្តីប្រិយមិត្តអ្នកសិក្សាទាំងអស់ជាទីរាប់អាន ! សៀវភៅគណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោកដែលអ្នកសិក្សាកំពុងតែកាន់នៅក្នុងដៃនេះខ្ញុំបាទបានរៀបរៀងឡើងទុកជាឯកសារសម្រាប់អ្នកសិក្សាដែលមានបំនងត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែគណិតវិទ្យា និង ត្រៀមប្រឡងអាហារូបករណ៍នានា ។

ក្នុងសៀវភៅនេះខ្ញុំបាទបានជ្រើសរើសលំហាត់ដែលបានេចេញប្រឡងរួចហើយពីប្រទេសនានាជុំវិញពិភពលោក និង ប្រឡងគណិតវិទ្យាអន្តរជាតិ ហើយលំហាត់មួយចំនួនទៀតដកស្រង់ចេញពី **Website** នានាតាម **Internet** មកធ្វើបំនកស្រាយយ៉ាងក្បោះក្បាយបំផុតដែលអាចឲ្យអ្នកសិក្សាងាយយល់ ឆាប់ចងចាំ ។

ជាទីបញ្ចប់នេះយើងខ្ញុំសូមគោរពជូនពរដល់អ្នកសិក្សាទាំងអស់សូមជួបតែសេចក្តីសុខ និង សំណាងល្អជានិច្ចព្រមទាំងទទួលបានជ័យជំនះគ្រប់ភារកិច្ច។

បាត់ដំបង ថ្ងៃទី ២ ខែ វិច្ឆកា ឆ្នាំ ២០០៩

អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាវជ្រាវ

លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

ផ្នែកប្រធានលំហាត់

១-ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases} 27^x + 3^{x+1} x^2 (\log_2 y)^2 = 36 \\ 3^{1+2x} x \log_2 y + x^3 (\log_2 y)^3 = 28 \end{cases}$$

២-គេឲ្យអនុគមន៍ f កំនត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 0$ ដោយទំនាក់ទំនង ៖

$f(0) = 1$ និង $f(n+1) = 2f(n) + 2n + 1 + 2^n$

ក-គេតាង $f(n) = g(n) + an + b + cn2^n$ ។ ចូរបង្ហាញថាគេអាចកំនត់បី ចំនួនពិត a , b , c ដើម្បីឲ្យ $g(n+1) = 2g(n)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 0$ ។

ខ-ចូរកំនត់ $f(n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៣-ដោះស្រាយសមីការ

$$\log_3(2^x+1) + \frac{6}{\log_3(2^x+1)} = 1 + 2\sqrt{\log_3(2^x+1) + \frac{8}{\log_3^2(2^x+1)}}$$

៤-គេឲ្យអនុគមន៍ f និង g កំនត់លើ IR ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង ៖

$f(2x+1) + g(x-2) = x^2 + 9$ និង $x\, f(4x-1) - 2g(2x-3) = 25x - 18$

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$

៥-គេឲ្យស្វីតចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0 = 1$ និង ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt[3]{1 + 8u_n^3}}$

ចំពោះគ្រប់ $n = 1 , 2 , ... ,$ ។

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និងរកលីមីត $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt[3]{n} . u_n\right)$ ។

៦-ក្នុងត្រីកោណ **ABC** កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle \mathbf{BCA}$ ប្រសព្វរង្វង់ចារឹកក្រៅ ត្រីកោណនេះត្រង់ **R** ហើយកន្លះបន្ទាត់ពុះនេះកាត់មេដ្យាទ័រនៃជ្រុង **BC** ត្រង់ **P** និងកាត់មេដ្យាទ័រនៃជ្រុង **AC** ត្រង់ **Q** ។ ចំនុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ **BC** គឺ **K** និងចំនុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ **AC** គឺ **L** ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថាត្រីកោណ **RPK** និង ត្រីកោណ **RQL** មានក្រឡាផ្ទៃស្មើគ្នា។

(IMO 2007)

៧-គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។ គេតាង **I** ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ **A , B , C** កាត់ជ្រុងឈមរៀងគ្នាត្រង់ **A' , B' , C'** ។ ចូរស្រាយថា $\frac{1}{4} < \frac{\mathbf{AI.BI.CI}}{\mathbf{AA'.BB'.CC'}} \le \frac{8}{27}$ ។

(IMO 1991

៨-គេឱ្យ $x\ ;\ y\ ;\ z$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz = 1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\ge 2$$

៩-ចូរបង្ហាញថា :

$$\cos^7 x+\cos^7\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^7\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{63}{64}\cos 3x$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

១០-គេឱ្យសមីការ $x^2 - x - 3 = 0$ មានឫសពាងដោយ x_1 និង x_2 ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $A = 7x_1{}^5 + 19x_2{}^4$ ។

១១-គេត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ។

តាង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ

ហើយ I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC ។

ក. ស្រាយថា $\mathbf{IA.IB.IC = 4R\,r^2}$

ខ. ស្រាយថា $\mathbf{IA^2 + IB^2 + IC^2 = r^2 + p^2 - 8Rr}$

គ. ស្រាយថា $\mathbf{\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1}$ ។

១២-គេឱ្យ $\mathbf{z_1}$ និង $\mathbf{z_2}$ ជាពីរចំនួនកុំផ្លិច ។

ចូរបង្ហាញថា $\mathbf{|1 + z_1 z_2| + |z_1 + z_2| \ge \sqrt{|z_1{}^2 - 1||z_2{}^2 - 1|}}$

(RMC)

១៣-គេឱ្យ $\mathbf{a , b , c}$ ជាចំនួនវិជ្ជមានដែល $\mathbf{ab + bc + ca = 3}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\mathbf{\frac{1}{1 + a^2(b + c)} + \frac{1}{1 + b^2(c + a)} + \frac{1}{1 + c^2(a + b)} \le \frac{1}{abc}}$

(JBM)

១៤–គេឱ្យ a និង b ជាពីរចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2=4$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{ab}{a+b+2}\le\sqrt{2}-1$

(Austrian Olympiad 1989)

១៥–គេឱ្យត្រីកោណ ABC ដែលមានជ្រុង និង មុំផ្ទៀងផ្ទាត់ $c^2=4ab\cos A\cos B$ ។

ចូរស្រាយថា ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

(Pi Mu Epsilon Journal -Fall 1992)

១៦–គេសន្មតថា $x\,,\,y\in(-2\,,\,2)$ ហើយ $xy=-1$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃអប្បបរមានៃ $u=\dfrac{4}{4-x^2}+\dfrac{9}{9-y^2}$

(Shaanxi 2003)

១៧–ដោះស្រាយវិសមីការ $\sqrt{\log_2 x-1}+\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}x^3+2>0$

(Hainan 2004)

១៨- គេឱ្យ O ជាចំនុចនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ដោយដឹងថា

$$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=0$$ ។

ចូរគណនាផលធៀបក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ ABC និងក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ AOC ។

(Hainan 2004)

១៩-គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតដែល $a, b, c \in (1, +\infty)$

ឬ $a, b, c \in (0, 1)$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \geq 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b)$$

(Romanian 2007)

២០-បង្ហាញថា

$$\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \geq 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b)$$

២១-ចូរស្រាយថា $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq xyz + \dfrac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|$

ចំពោះគ្រប់ $x ; y ; z \geq 0$ ។ **(Selection test for JBMO 2007**

២២-ចូរស្រាយថា :

$$n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}\right) \geq (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n+1}\right)$$

(District Round RMC 2008)

២៣-គេឱ្យ a , b , c ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។

ចូរស្រាយថា $$\frac{a}{b-a+c}+\frac{b}{a-b+c}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$$

(RMC 2000)

២៤-គេឱ្យការេ ABCD មួយ ។ E និង F ជាពីរចំនុចស្ថិតនៅលើជ្រុងរៀងគ្នា AB និង AD ។ តាង P ជាចំនុចប្រសព្វរវាង EF និង AC ។

ចូរស្រាយថា :

ក. $\frac{1}{AE}+\frac{1}{AF}=\frac{\sqrt{2}}{AP}$ ខ. $AP^2\leq\frac{AE.AF}{2}$

(RMC 2000)

២៥-បង្ហាញថាគ្មានចំនួនគត់ x ; y ; z ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$x^2+y^2-8z=6$ ទេ ។

(កម្ពុជា 2004)

២៦-ចូរបង្ហាញថា $F=\frac{4n+17}{3n+13}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន

២៧-គេឱ្យ AD ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A នៃត្រីកោណ ABC មួយ ។ M និង N ជាពីរចំនុចនៅលើជ្រុង AB និង AC រៀងគ្នាដែលមុំ $\angle MDA=\angle B$

និងមុំ $\angle NDA = \angle C$ ។ តាង P ជាប្រសព្វរវាង MN និង AD ។

ចូរស្រាយថា $AD^3 = AB.AC.AP$ ។

(RMC 1999)

២៨– គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ ។

ចូរបង្ហាញថា $|a| + |b| + |c| - abc \le 4$

(RMC 2004)

២៩– គេឱ្យ x និង y ជាចំនួនពិត ។

គេដឹងថា $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$ និង $x^4 + y^4$ ជាចំនួនសនិទាន ។

ចូរស្រាយថា xy និង $x + y$ ជាចំនួនសនិទាន ។

(RMC 2004

៣០– ចូរកំនត់ផ្នែកគត់នៃចំនួន $\sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + ... + \sqrt[3]{24}}}}$

(មាន n ឫសទីបី) ។

(RMC 2004)

៣១– គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc = 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $1 + \dfrac{3}{a + b + c} \ge \dfrac{6}{ab + bc + ca}$

(JBMO 2003)

៣២-គេតាង r, R និង p រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និងជាកន្លះបរិមាត្ររបស់ត្រីកោណមួយ ។

ចូរបង្ហាញថាជ្រុងទាំងបីរបស់ត្រីកោណនេះជាឫសរបស់សមីការ ៖

$$x^3 - 2px^2 + (r^2 + p^2 + 4rR)x - 4prR = 0$$

៣៣- ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$$

៣៤- គណនា $P = \cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o$

៣៥- សន្មតថា a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a^{\log_3 7} = 27$

$b^{\log_7 11} = 49$ និង $c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$ ។

ចូរគណនា $a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2}$ ។

(ប្រលងសិស្សពូកែ AIME អាមេរិច ឆ្នាំ2009

៣៦-គេឲ្យ x, y, z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ហើយ $a > 0$ និងខុសពី 1 ។

ចូរស្រាយថា៖

$$\left(\log_a \frac{x}{y}\right)^3 + \left(\log_a \frac{y}{z}\right)^3 + \left(\log_a \frac{z}{x}\right)^3 = 3\log_a \frac{x}{y}\log_a \frac{y}{z}\log_a \frac{z}{x}$$

៣៧- គេឲ្យ a និង b ជាចំនួនគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$$

ចូរស្រាយថា a ចែកដាច់នឹង 1979 ។

៣៨- ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាផលគុណ ៖

$(4 - \frac{2}{1})(4 - \frac{2}{2})(4 - \frac{2}{3})....(4 - \frac{2}{n})$ ជាចំនួនគត់មួយ ។

៣៩–គេឲ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានផលសងរួម d ។

គេតាង $S_n = \frac{\cos a_1}{\cos d} + \frac{\cos a_2}{\cos^2 d} + \frac{\cos a_3}{\cos^3 d} + ... + \frac{\cos a_n}{\cos^n d}$

ចំពោះ $n = 1, 2, 3, ...$ ។ ចូរស្រាយថា $S_n = \frac{\sin a_n}{\cos^n d \sin d} - \frac{\sin a_1}{\sin d}$ ។

៤០– កំនត់ចំនួនគត់ n ដើម្បីឲ្យ $f(n) = n^2 - 3n + 9$ ជាការេប្រាកដ ។

៤១– បើ x, y, z ជាបីចំនួនពិតខុសពី 1 ដែល $xyz = 1$ នោះចូរបង្ហាញថា

$$\frac{x^2}{(1-x)^2} + \frac{y^2}{(1-y)^2} + \frac{z^2}{(1-z)^2} \geq 1$$

(IMO 2008)

៤២– ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases}$

(Indian Mathematical Olympiad 1986)

៤៣– គេឲ្យ a និង b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a + b = 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(a + \frac{1}{a})^2 + (b + \frac{1}{b})^2 \geq \frac{25}{2}$

(Indian Mathematical Olympiad 1988)

៤៤–ត្រីកោណមួយមានកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅរៀងគ្នា r និង R ។ចូរស្រាយថា $R \geq 2r$ ។

(Indian Mathematical Olympiad 1988

៩៥–គេឲ្យ $f(x)=\frac{x}{3x-2}$

ចូរបង្ហាញថាបើ n មាន d លេខដែល $f(n)=\frac{n}{10^d}$ នោះ n ជាចំនួនគត់

ដែល $n=\underbrace{333....333}_{(d-1)}4$ ។

៩៦–គេឲ្យសមីការ $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ មានឫសបួនវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$a/\ \ pr-16s\ge 0$

$b/\ \ q^2-36s\ge 0$

(Indian Mathematical Olympiad 1990)

៩៧–ចូរកំនត់គ្រប់គូតំលៃគត់មិនអវិជ្ជមាន (x , y) បើគេដឹងថា ៖

$(xy-7)^2=x^2+y^2$ ។

(Indian Mathematical Olympiad 1990)

៩៨–គេឲ្យ x ; y ; z ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{6}\le\frac{x+y+z}{3}\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$$

(Hungary-Israel Binational 2009

៩៩– គេឲ្យ a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $4ab-1$ ជាតួចែកនៃ $(4a^2-1)^2$ នោះ $a=b$ ។

(IMO 2007)

៥០-គេឲ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x ; y ; z$ ដែល $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2}$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2}\le\frac{1}{3}$ ។

(Serbia Junior Balkan Team Selection Test 2009

៥១-គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយហើយតាង r និង R
រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ ។

ចូរស្រាយថា $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\le\frac{5}{8}+\frac{r}{4R}$

(IMO Long lists 1988)

៥២-គេដឹងថា $\frac{\cos x+\cos y+\cos z}{\cos(x+y+z)}=\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\sin(x+y+z)}=a$

ចូរស្រាយថា $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$

(IMO Short lists 1989)

៥៣-គេឲ្យ $a ,b\in[0,1]$ ។

ចូរស្រាយវិសមភាព $1-\frac{a+b}{2}+\frac{ab}{3}\ge\frac{1}{1+a+b}$ ។

(Romania National Olympiad 2008)

៥៤- ដោះស្រាយសមីការ $2^{x^2+x}+\log_2 x=2^{x+1}$

(Romania National Olympiad 2007)

៥៥-គេឲ្យ a , b , c , d ជាបួនចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c+d=1$ ។

បង្ហាញថា $6(a^3+b^3+c^3+d^3)\ge a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$

(គណិតវិទ្យាសិស្សពូកែប្រទេសបារាំង 2007)

៥៦-គេឲ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le 1$

(**Baltic Way 2005**)

៥៧-ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\sqrt[3]{1+\log_3(2^x+1)}+\sqrt[3]{5-\log_3(2^x+1)}=2\sqrt[3]{3}$$

៥៨-គេតាង a , b , c ជារង្វាស់ជ្រុងរបស់ត្រីកោណ ABC ហើយតាង

r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយថា $a+b+c\ge 2\sqrt{3r(r+4R)}$ ។

៥៩-គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំនត់ដោយ ៖

$a_0=4$ និងទំនាក់ទំនងកំណើន $a_{n+1}=2{a_n}^2+4a_n+1$

ដែល $n=0 , 1 , 2,\dots$ ។គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

៦០-គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយរួចគេគូស AD ដែល D ជាចំនុចកណ្តាល BC,

គេដឹងថា $\angle ACB=30^o$; $\angle ADB=45^o$ ។

កំនត់មុំ $\angle ABC$ ។

៦១-គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមាន $AB=AC$ ។

ចំនុច D មួយស្ថិតនៅលើជ្រុង AB ដែល $BC=\sqrt{6}\,AD$

និងមុំ $\angle DCB=15^o$ ។ ចូរកំនត់មុំ $\angle CAB$?

៦២–គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{\pi}{3^k}\cos\frac{2\pi}{3^k}\right)$

រួចទាញរកលីមីតវាកាលណា $n \to +\infty$ ។

៦៣–គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{\pi}{3^n}\sin\frac{2\pi}{3^n}\right)$

រួចទាញរកលីមីតវាកាលណា $n \to +\infty$ ។

៦៤–គេយក AD ជាកំពស់ ΔABC ហើយ R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ តាង E និង F ជាជើងនៃចំណោលកែងពី D ទៅជ្រុង AB និង AC ។ បើ $AD = R\sqrt{2}$ នោះចូរស្រាយថាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ស្ថិតនៅលើ EF ។ (**Bosnia Herzegovina 2008**)

លំហាត់ទី១

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases} 27^x + 3^{x+1}x^2(\log_2 y)^2 = 36 \\ 3^{1+2x}x\log_2 y + x^3(\log_2 y)^3 = 28 \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases} 27^x + 3^{x+1}x^2(\log_2 y)^2 = 36 \\ 3^{1+2x}x\log_2 y + x^3(\log_2 y)^3 = 28 \end{cases}$$

លក្ខខណ្ឌ $y > 0$ និង $x \in IR$

តាង $a = 3^x > 0$ និង $b = x\log_2 y$

ប្រព័ន្ធសមីការសមមូល $\begin{cases} a^3 + 3ab^2 = 36 \quad (i) \\ 3a^2b + b^3 = 28 \quad (ii) \end{cases}$

បូកសមីការ (i) និង (ii) គេបាន $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 64$

ឬ $(a+b)^3 = 64$ នាំឲ្យ $a + b = 4$ (1)

ដកសមីការ (i) និង (2) គេបាន $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = 8$

ឬ $(a-b)^3 = 8$ នាំឲ្យ $a - b = 2$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} a+b=4 \\ a-b=2 \end{cases}$ នាំឲ្យ $a = 3$, $b = 1$

ដោយ $a = 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$ ហើយ $b = x\log_2 y = 1 \Rightarrow y = 2$

ដូចនេះ $x = 1$; $y = 2$ ។

លំហាត់ទី២

គេឲ្យអនុគមន៍ f កំនត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\ge 0$ ដោយទំនាក់ទំនង ៖

$f(0)=1$ និង $f(n+1)=2f(n)+2n+1+2^n$

ក–គេតាង $f(n)=g(n)+an+b+cn2^n$ ។ ចូរបង្ហាញថាគេអាចកំនត់បី

ចំនួនពិត a , b , c ដើម្បីឲ្យ $g(n+1)=2g(n)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\ge 0$ ។

ខ–ចូរកំនត់ $f(n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក–កំនត់បីចំនួនពិត a , b , c

យើងមាន $f(n)=g(n)+an+b+cn2^n$

យើងបាន $f(n+1)=g(n+1)+an+a+b+(cn+c).2^{n+1}$

ដោយ $f(n+1)=2f(n)+2n+1+2^n$ នោះគេបាន ៖

$g(n+1)+an+a+b+(cn+c).2^{n+1}=2g(n)+2an+2b+cn.2^{n+1}+2n+1+2^n$

$g(n+1)+an+a+b+(2cn+2c)2^n=2g(n)+(2a+2)n+2b+1+(2cn+1)2^n$

ដើម្បីឲ្យ $g(n+1)=2g(n)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\ge 0$ លុះត្រាតែ និង គ្រាន់តែ

$\begin{cases} a=2a+2 \\ a+b=2b+1 \\ 2c=1 \end{cases}$ គេទាញ $a=-2\ ,\ b=-3\ ,\ c=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $a=-2\ ,\ b=-3\ ,\ c=\dfrac{1}{2}$ ។

ខ–កំនត់ $f(n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n

ចំពោះ $a=-2$, $b=-3$, $c=\frac{1}{2}$ គេបាន $f(n)=g(n)-2n-3+n\,2^{n-1}$

ហើយ $g(n+1)=2g(n)$ ជាស្វីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=2$ ។

តាមរូបមន្តគេបាន $g(n)=g(0)\,2^{n}$

ដោយ $f(n)=g(n)-2n-3+n\,2^{n-1}$ នោះ $f(0)=g(0)-3=1$ នាំឲ្យ $g(0)=4$

ហេតុនេះ $g(n)=4\times 2^{n}=2^{n+2}$

គេបាន $f(n)=2^{n+2}-2n-3+n.2^{n-1}$

ដូចនេះ $f(n)=(n+8)\,2^{n-1}-(2n+3)$ ។

លំហាត់ទី៣

ដោះស្រាយសមីការ

$$\log_3(2^x+1)+\frac{6}{\log_3(2^x+1)}=1+2\sqrt{\log_3(2^x+1)+\frac{8}{\log_3^2(2^x+1)}}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ

$$\log_3(2^x+1)+\frac{6}{\log_3(2^x+1)}=1+2\sqrt{\log_3(2^x+1)+\frac{8}{\log_3^2(2^x+1)}}$$

តាង $t=\log_3(2^x+1)$ សមីការអាចសរសេរ ៖

$$t+\frac{6}{t}=1+2\sqrt{t+\frac{8}{t^2}} \quad \text{ឬ} \quad \frac{t^2-t+6}{t}=2\sqrt{\frac{(t+2)(t^2-2t+4)}{t^2}}$$

ឬ $\dfrac{t^2-t+6}{t}=2\sqrt{\dfrac{t+2}{t}.\dfrac{t^2-2t+4}{t}}$ (1)

តាង $u=\dfrac{t+2}{t}$ និង $v=\dfrac{t^2-2t+4}{t}$ គេបាន $u+v=\dfrac{t^2-t+6}{t}$

សមីការ (1) អាចសរសេរ $u+v=2\sqrt{uv} \Leftrightarrow (\sqrt{u}-\sqrt{v})^2=0$

គេទាញ $u=v$ ឬ $\dfrac{t+2}{t}=\dfrac{t^2-2t+4}{t}$ ($t\neq 0$)

ឬ $t+2=t^2-2t+4$

ឬ $t^2-3t+2=0$ មានឫស $t_1=1\,;\,t_2=2$ ។

–ចំពោះ $t=1 \Rightarrow \log_3(2^x+1)=1$

$\Rightarrow 2^x+1=3$

$\Rightarrow \quad 2^x=2$

$\Rightarrow \quad x=1$

–ចំពោះ $t=2 \Rightarrow \log_3(2^x+1)=2$

$\Rightarrow 2^x+1=9$

$\Rightarrow \quad 2^x=8$

$\Rightarrow \quad x=3$

ដូចនេះសមីការមានឫស $x_1=1\,,\,x_2=3$ ។

លំហាត់ទី៤

គេឲ្យអនុគមន៍ f និង g កំនត់លើ IR ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង ៖

$f(2x+1)+g(x-2)=x^2+9$ និង $x\,f(4x-1)-2g(2x-3)=25x-18$

ចូរកំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$

ដំណោះស្រាយ

កំនត់រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$

គេមាន $f(2x+1)+g(x-2)=x^2+9 \quad (1)$

និង $x\,f(4x-1)-2g(2x-3)=25x-18 \quad (2)$

គេយក $2x+1=4t-1 \Rightarrow x=2t-1$ ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$f(4t-1)+g(2t-3)=(2t-1)^2+9$

$f(4t-1)+g(2t-3)=4t^2-4t+10 \quad (3)$

គេយក $x=t$ ជួសក្នុង (2) គេបាន ៖

$t\,f(4t-1)-2g(2t-3)=25t-18 \quad (4)$

តាម (3) និង (4) គេបានប្រព័ន្ធ ៖

$$\begin{cases} f(4t-1)+g(2t-3)=4t^2-4t+10 \\ t\,f(4t-1)-2g(2t-3)=25t-18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2f(4t-1)+2g(2t-3)=8t^2-8t+20 \\ t\,f(4t-1)-2g(2t-3)=25t-18 \end{cases} +$$

$$(t+2)\,f(4t-1)=8t^2+17t+2$$

គេទាញ $f(4t-1)=\dfrac{8t^2+17t+2}{t+2}=8t+1$

យក $4t-1=x\Rightarrow t=\dfrac{x+1}{4}$ គេបាន $f(x)=8\left(\dfrac{x+1}{4}\right)+1=2x+3$

តាមទំនាក់ទំនង (4) គេទាញ $g(2t-3)=\dfrac{t\,f(4t-1)-25t+18}{2}$

$g(2t-3)=\dfrac{t(8t+1)-25t+18}{2}=4t^2-12t+9$

$g(2t-3)=(2t-3)^2\Rightarrow g(x)=x^2$

ដូចនេះ $f(x)=2x+3$ និង $g(x)=x^2$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឲ្យស្វីតចំនួនពិត (u_n) កំនត់ដោយ ៖

$u_0=1$ និង ទំនាក់ទំនងកំណើន $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\sqrt[3]{1+8{u_n}^3}}$

ចំពោះគ្រប់ $n=1,2,\dots,$ ។

ចូរគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n និងរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n}\,.u_n\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\sqrt[3]{1+8{u_n}^3}}$

គេបាន $u_{n+1}^3=\dfrac{{u_n}^3}{1+8{u_n}^3}$

ឬ $$\frac{1}{u_{n+1}^3}=\frac{1}{u_n^3}+8 \quad (1)$$

តាងស្វ៊ីជំនួយ $v_n=\frac{1}{u_n^3}\Rightarrow v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}^3}$

តាម (1) គេបាន $v_{n+1}=v_n+8$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (v_n)ជាស្វ៊ីនព្វន្តមានផលសងរួម $d=8$ ។

គេបាន $v_n=v_0+nd$ តែ $v_0=\frac{1}{u_0^3}=1$ គេទាញ $v_n=1+8n$

តាមសមភាព $v_n=\frac{1}{u_n^3}\Rightarrow u_n=\frac{1}{\sqrt[3]{v_n}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8n+1}}$,

ដូចនេះ $u_n=\frac{1}{\sqrt[3]{8n+1}}$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n}.u_n\right)=\frac{1}{2}$ ៕

លំហាត់ទី៦

ក្នុងត្រីកោណ **ABC** កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle BCA$ ប្រសព្វរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណនេះត្រង់ **R** ហើយកន្លះបន្ទាត់ពុះនេះកាត់មេដ្យាទ័រនៃជ្រុង **BC** ត្រង់ **P** និងកាត់មេដ្យាទ័រនៃជ្រុង **AC** ត្រង់ **Q** ។ ចំនុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ **BC** គឺ **K** និងចំនុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ **AC** គឺ **L** ។

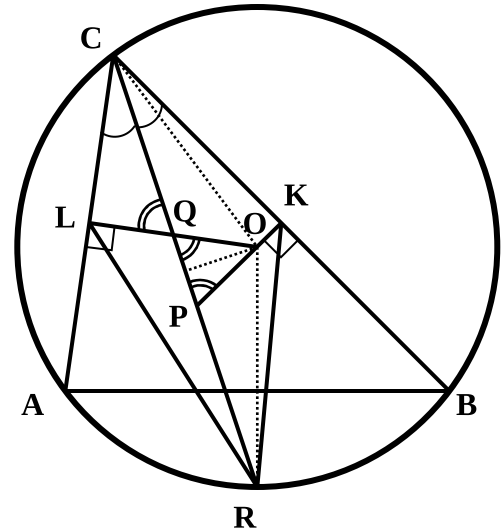
ស្រាយបញ្ជាក់ថាត្រីកោណ **RPK** និង ត្រីកោណ **RQL** មានក្រឡាផ្ទៃស្មើគ្នា ។

(IMO 2007)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថាត្រីកោណ **RPK** និង **RQL** មានក្រឡាផ្ទៃស្មើគ្នា **:**

តាង **O** ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ **ABC** ។



យើងមាន **CR** ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ **C** នោះគេបាន $\angle PCK = \angle QCL$

នោះ **CPK** និង **CQL** ជាត្រីកោណកែងដូចគ្នា

គេបានផលធៀបដំនូច $\dfrac{CP}{CQ} = \dfrac{PK}{QL}$ **(1)**

ហើយមុំ $\angle CQL = \angle CPK = \angle OQP$

នោះ **OPQ** ជាត្រីកោណសមបាទ

កំពូល O គេទាញបាន $OP = OQ$ ។

យក I ជាចំនុចកណ្ដាលនៃ PQ នោះ (OI) ជាអក្ស័ឆ្លុះនៅក្នុងត្រីកោណOPQ

ម្យ៉ាងទៀត $OC = OR$ (កាំរង្វង់ ចារឹកក្រៅត្រីកោណ)

នោះ OCR ជាត្រីកោណសមបាទ ហើយ (OI) ជាអក្ស័ឆ្លុះនៅក្នុងត្រីកោណ។

គេទាញបាន $CQ = PR$ និង $CP = QR$ ។

ធ្វើផលធៀបក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ RPK និង RQL គេបាន :

$$\frac{S_{RPK}}{S_{RQL}} = \frac{\frac{1}{2}PR.PK.\sin\angle RPK}{\frac{1}{2}QR.QL.\sin\angle RQL} = \frac{PR.PK}{QR.QL} \quad (2)$$

(ព្រោះ $\angle RPK = \pi - \angle OPQ = \pi - \angle CQL = \angle RQL$)

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន $\frac{S_{RPK}}{S_{RQL}} = \frac{PR.CP}{QR.CQ}$

ដោយ $CQ = PR$ និង $CP = QR$ នោះ $\frac{S_{RPK}}{S_{RQL}} = \frac{PR.QR}{QR.PR} = 1$

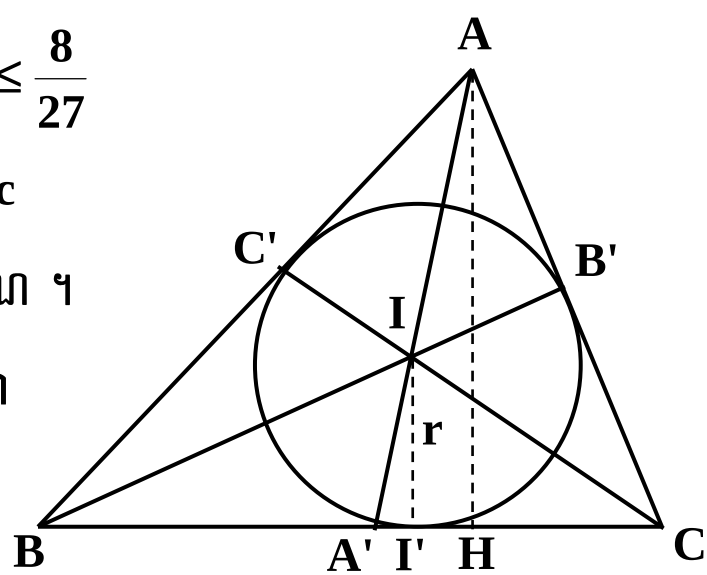
ដូចនេះ $S_{RPK} = S_{RQL}$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ គេតាង I ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A , B , C កាត់ជ្រុងឈមរៀងគ្នាត្រង់ A' , B' , C' ។ ចូរស្រាយថា $\frac{1}{4} < \frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \le \frac{8}{27}$ ។

(IMO 1991)

ដំណោះស្រាយ



ស្រាយថា $\frac{1}{4} < \frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \le \frac{8}{27}$

តាង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$

និង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ។

តាង S និង T រៀងគ្នាជាផ្ទៃក្រលា

នៃត្រីកោណ ABC និង IBC

យើងមាន :

$S = \frac{1}{2}AH.BC$ និង $T = \frac{1}{2}II'.BC$

គេបាន $\frac{T}{S} = \frac{II'}{AH}$ (i)

ត្រីកោណកែង AA'H និង IA'I' មានមុំ $\angle A'AH = \angle A'II'$ (មុំត្រូវគ្នា)

ជាត្រីកោណដូចគ្នា ។

គេបាន $\frac{II'}{AH}=\frac{IA'}{AA'}=\frac{AA'-AI}{AA'}=1-\frac{AI}{AA'}$ (ii)

តាមទំនាក់ទំនង (i) និង (ii) គេទាញបាន $\frac{T}{S}=1-\frac{AI}{AA'}$

ដោយ $T=\frac{1}{2}a.r$ និង $S=pr=\frac{a+b+c}{2}.r$

គេបាន $\frac{\frac{1}{2}ar}{\frac{a+b+c}{2}.r}=1-\frac{AI}{AA'}$

នាំឱ្យ $\frac{AI}{AA'}=1-\frac{a}{a+b+c}=\frac{b+c}{a+b+c}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{BI}{BB'}=\frac{c+a}{a+b+c}$ (2) និង $\frac{CI}{CC'}=\frac{a+b}{a+b+c}$ (3)

ធ្វើវិធីគុណទំនាក់ទំនង (1) , (2) និង (3) គេបាន :

$$\frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'}=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \quad (4)$$

តាមវិសមភាព AM – GM គេបាន :

$$(a+b)+(b+c)+(c+a)\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$2(a+b+c)\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

គេទាញ $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\leq\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

ហេតុនេះ $\frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'}\leq\frac{8}{27}$ (*)

ម្យ៉ាងទៀតយើងសន្មតថា $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}>\frac{1}{4}$ ពិត

យើងបាន $4(a+b)(b+c)(c+a) > (a+b+c)^3$

ដោយ $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

នោះ $4(a+b)(b+c)(c+a) > a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

$$(a+b)(b+c)(c+a)-a^3-b^3-c^3>0$$

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)+4abc>0$$

ដោយ a , b , c ជាជ្រុងត្រីកោណមួយនោះ $\begin{cases} a+b>c \\ a+c>b \\ b+c>a \end{cases}$

គេទាញ $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)+4abc>0$ ពិត

ហេតុនេះ $\frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} > \frac{1}{4}$ (**)

តាម (*) និង (**) គេបាន $\frac{1}{4} < \frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \le \frac{8}{27}$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឱ្យ $x\,;\,y\,;\,z$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz=1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\geq 2$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\geq 2$$

យើងមាន $x^9+y^9=(x^3+y^3)(x^6-x^3y^3+y^6)$

$$x^9+y^9=(x^3+y^3)(x^6+x^3y^3+y^6)-2x^3y^3(x^3+y^3)$$

គេទាញ $\dfrac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}=x^3+y^3-\dfrac{2x^3y^3(x^3+y^3)}{x^6+x^3y^3+y^6}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$

គេមាន $x^6+x^3y^3+y^6\geq 3x^3y^3$

គេបាន $\dfrac{2x^3y^3(x^3+y^3)}{x^6+x^3y^3+y^6}\leq\dfrac{2}{3}(x^3+y^3)$

គេទាញ $\dfrac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}\geq x^3+y^3-\dfrac{2}{3}(x^3+y^3)$

ឬ $$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6} \geq \frac{1}{3}(x^3+y^3) \quad (1)$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $$\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6} \geq \frac{1}{3}(y^3+z^3) \quad (2)$$

$$\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6} \geq \frac{1}{3}(z^3+x^3) \quad (3)$$

ធ្វើផលបូក (1) ; (2) និង (3) អង្គ និង អង្គ គេបាន :

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6} \geq \frac{2}{3}(x^3+y^3+z^3)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$

គេបាន $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz = 3$ ព្រោះ $xyz = 1$

ដូចនេះ $$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6} \geq 2$$ ។

លំហាត់ទី៩

ចូរបង្ហាញថា :

$$\cos^7 x+\cos^7(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^7(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{63}{64}\cos 3x$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ដំណោះស្រាយ

$$\cos^7 x+\cos^7(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^7(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{63}{64}\cos 3x$$

តាង $E_n(x)=\cos^n x+\cos^n(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^n(x+\frac{4\pi}{3})\ (i)$

តាមរូបមន្ត $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

គេទាញ $\cos^3 x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$

ដោយគុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^{n-3} x$ គេបាន :

$$\cos^n x=\frac{3}{4}\cos^{n-2} x+\frac{1}{4}\cos 3x\cos^{n-3} x\ \ (1)$$

ដូចគ្នាដែរគេទាញបាន :

$$\cos^n(x+\frac{2\pi}{3})=\frac{3}{4}\cos^{n-2}(x+\frac{2\pi}{3})+\frac{1}{4}\cos 3x\cos^{n-3}(x+\frac{2\pi}{3})\ \ (2)$$

$$\cos^n(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{3}{4}\cos^{n-2}(x+\frac{4\pi}{3})+\frac{1}{4}\cos 3x\cos^{n-3}(x+\frac{4\pi}{3})\ \ (3)$$

ដោយបូកសមីការ (1); (2) និង (3) គេបាន :

$$E_n(x)=\frac{3}{4}E_{n-2}(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\, E_{n-3}(x) \quad (ii)$$

តាម (i) ចំពោះ $n=0$; $n=1$, $n=2$ គេបាន :

$E_0(x)=3$

$$E_1(x)=\cos x+\cos(x+\frac{2\pi}{3})+\cos(x+\frac{4\pi}{3})$$

$$E_1(x)=\cos x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=0$$

$$E_2(x)=\cos^2 x+(-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^2+(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^2$$

$$E_2(x)=\frac{3}{2}\cos^2 x+\frac{3}{2}\sin^2 x=\frac{3}{2}$$

តាម (ii) ចំពោះ $n=3$; $n=4$, $n=5$; $n=7$ គេបាន

$$E_3(x)=\frac{3}{4}E_1(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\, E_0(x)=\frac{3}{4}\cos 3x$$

$$E_4(x)=\frac{3}{4}E_2(x)+\frac{1}{4}\cos 3x E_1(x)=\frac{9}{8}$$

$$E_5(x)=\frac{3}{4}E_3(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\, E_2(x)=\frac{9}{16}\cos 3x+\frac{3}{8}\cos 3x=\frac{15}{16}\cos 3x$$

$$E_7(x)=\frac{3}{4}E_5(x)+\frac{1}{4}\cos 3x\, E_4(x)=\frac{45}{64}\cos 3x+\frac{9}{32}\cos 3x=\frac{63}{64}\cos 3x$$

ដូចនេះ $\cos^7 x+\cos^7(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^7(x+\frac{4\pi}{3})=\frac{63}{64}\cos 3x$ ។

លំហាត់ទី១០

គេឱ្យសមីការ $x^2 - x - 3 = 0$ មានឫសពីរគឺ x_1 និង x_2 ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $A = 7x_1^5 + 19x_2^4$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ $A = 7x_1^5 + 19x_2^4$

ដោយ x_1 និង x_2 ជាឫសរបស់សមីការនោះគេបាន :

$$\begin{cases} x_1^2 - x_1 - 3 = 0 \\ x_2^2 - x_2 - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{ឬ} \quad \begin{cases} x_1^2 = x_1 + 3 \\ x_2^2 = x_2 + 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A = 7x_1^5 + 19x_2^4 &= 7x_1\left(x_1^2\right)^2 + 19\left(x_2^2\right)^2 \\ &= 7x_1(x_1+3)^2 + 19(x_2+3)^2 \\ &= 7x_1^3 + 42x_1^2 + 63x_1 + 19x_2^2 + 114x_2 + 171 \\ &= 7x_1(x_1+3) + 42(x_1+3) + 63x_1 + 19(x_2+3) + 114x_2 + 171 \\ &= 7x_1^2 + 21x_1 + 42x_1 + 126 + 63x_1 + 19x_2 + 57 + 114x_2 + 171 \\ &= 7(x_1+3) + 126x_1 + 133x_2 + 354 \\ &= 133(x_1 + x_2) + 375 \end{aligned}$$

ដោយ $x_1 + x_2 = 1$ (តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត)

គេបាន $A = 133 + 375 = 508$

ដូចនេះ $A = 7x_1^5 + 19x_2^4 = 508$ ។

<u>លំហាត់ទី១១</u>

គេត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ ។

តាង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ

ហើយ I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC ។

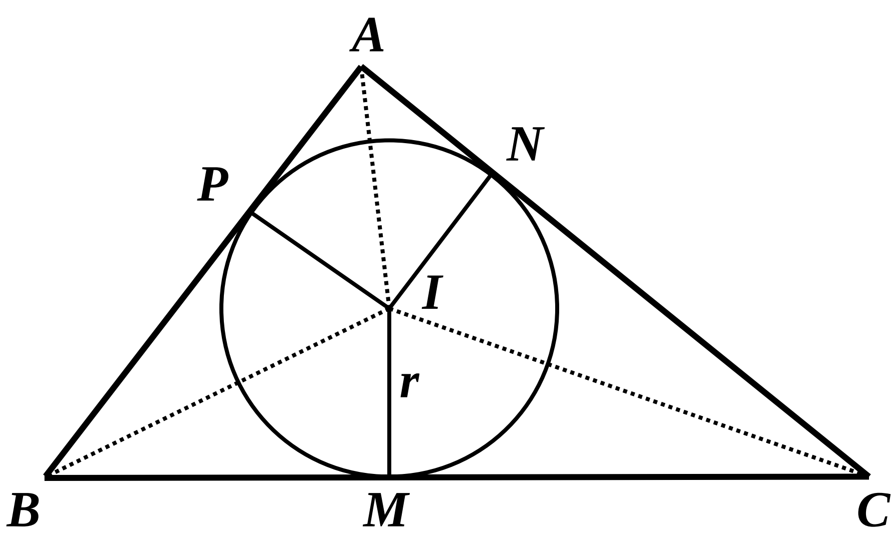
ក. ស្រាយថា $\mathbf{IA.IB.IC = 4R\,r^2}$

ខ. ស្រាយថា $\mathbf{IA^2 + IB^2 + IC^2 = r^2 + p^2 - 8Rr}$

គ. ស្រាយថា $\mathbf{\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ក. ស្រាយថា $\mathbf{IA.IB.IC = 4R\,r^2}$



យើងមាន $2p = AB + BC + CA$ (បរិមាត្រត្រីកោណ ABC)

ដោយ $AB = AP + PB = AP + BM$ ព្រោះ $PB = BM$

ហើយ $AC = AN + NC = AP + MC$ ព្រោះ $AN = NP , NC = MC$

គេបាន $AB + AC = 2AP + BM + MC = 2AP + BC$

គេទាញ $2p = 2AP + 2BC = 2AP + 2a$ នាំឱ្យ $AP = AN = p - a$

ដូចគ្នាដែរ $BM = BP = p - b$ និង $CM = CN = p - c$ ។

ក្នុងត្រីកោណកែង PAI គេមាន $\tan\frac{A}{2} = \frac{IP}{AP} = \frac{r}{p-a}$

គេទាញ $r = (p-a)\tan\frac{A}{2}$ (i)

តាមរូបមន្តហេរុង $S = pr = \frac{1}{2}bc\sin A$ (ii)

តាម (i) និង (ii) គេបាន $p(p-a)\tan\frac{A}{2} = \frac{1}{2}bc\sin A$

ឬ $p(p-a)\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{1}{2}bc(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2})$

គេទាញ $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}$ នាំឱ្យ $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

ដោយ $\cos\frac{A}{2} = \frac{AP}{IA}$ (ក្នុងត្រីកោណកែង PAI)

គេទាញ $IA = \frac{AP}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{(p-a)\sqrt{bc}}{\sqrt{p(p-a)}} = \sqrt{\frac{p-a}{p}.bc}$

ដូចគ្នាដែរ $IB = \sqrt{\frac{p-b}{p}.ca}$ និង $IC = \sqrt{\frac{p-c}{p}.ab}$

គេបាន $IA.IB.IC = abc\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}}$

$$IA.IB.IC = \frac{abc}{p^2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

តាមរូបមន្តផ្ទៃក្រលា $S = pr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

ដូចនេះ $IA.IB.IC = 4Rr^2$ ។

ខ. ស្រាយថា $IA^2 + IB^2 + IC^2 = r^2 + p^2 - 8Rr$

គេបាន $IA^2 + IB^2 + IC^2 = \frac{p-a}{p}bc + \frac{p-b}{p}ca + \frac{p-c}{p}ab$

$$= \frac{p(bc+ca+ab) - 3abc}{p}$$

$$= bc + ca + ab - 3\frac{abc}{p} \quad (*)$$

តាមរូបមន្ត ៖

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr$$

គេទាញ $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

$$r^2=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$$

$$r^2=\frac{p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p-abc}{p}$$

$$r^2=\frac{p^3-2p^3+(ab+bc+ca)p-abc}{p}$$

$$r^2=\frac{-p^3+(ab+bc+ca)p-abc}{p}$$

$$ab+bc+ca=r^2+p^2+\frac{abc}{p}$$

ដោយ $S=pr=\frac{abc}{4R}$ គេទាញ $\frac{abc}{p}=4rR$

គេបាន $ab+bc+ca=r^2+p^2+4r\,R$ (**)

តាម (*) និង (**) គេបាន :

$$IA^2+IB^2+IC^2=r^2+p^2+4Rr-3(4Rr)$$

ដូចនេះ $IA^2+IB^2+IC^2=r^2+p^2-8Rr$

គ. ស្រាយថា $\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}=1$

គេមាន $IA=\sqrt{\frac{p-a}{p}.bc}$, $IB=\sqrt{\frac{p-b}{p}.ca}$

និង $IC=\sqrt{\frac{p-c}{p}.ab}$

គេបាន $$\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}=\frac{p-a+p-b+p-c}{p}$$

$$\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}=\frac{3p-(a+b+c)}{p}=1$$

ដូចនេះ $\frac{IA^2}{bc}+\frac{IB^2}{ca}+\frac{IC^2}{ab}=1$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឱ្យ z_1 និង z_2 ជាពីរចំនួនកុំផ្លិច ។

ចូរបង្ហាញថា $|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\geq\sqrt{|z_1{}^2-1||z_2{}^2-1|}$

(RMC 2008)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\geq\sqrt{|z_1{}^2-1||z_2{}^2-1|}$

តាមវិសមភាពត្រីកោណគេបាន :

$$|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\ \geq|1+z_1z_2+z_1+z_2|$$

និង $|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\ \geq|1+z_1z_2-z_1-z_2|$

គេបាន $\left(|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\right)^2\geq|(1+z_1z_2)^2-(z_1+z_2)^2|$

ដោយ $(1+z_1z_2)^2-(z_1+z_2)^2=1-{z_1}^2-{z_2}^2+{z_1}^2{z_2}^2=(1-{z_1}^2)(1-{z_2}^2)$

គេបាន $\left(|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\right)^2\ge|(1-{z_1}^2)(1-{z_2}^2)|$

$$\left(|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\right)^2\ge|1-{z_1}^2||1-{z_2}^2|$$

ដូចនេះ $\left(|1+z_1z_2|+|z_1+z_2|\right)^2\ge|(1+z_1z_2)^2-(z_1+z_2)^2|$

<u>លំហាត់ទី១៣</u>

គេឱ្យ a , b ,c ជាចំនួនវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca=3$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{1}{1+a^2(b+c)}+\dfrac{1}{1+b^2(c+a)}+\dfrac{1}{1+c^2(a+b)}\le\dfrac{1}{abc}$

(JBMO)

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

បង្ហាញថា $\dfrac{1}{1+a^2(b+c)}+\dfrac{1}{1+b^2(c+a)}+\dfrac{1}{1+c^2(a+b)}\le\dfrac{1}{abc}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$1=\dfrac{ab+bc+ca}{3}\ge\sqrt[3]{(abc)^2}$ ឬ $abc\le 1$ ។

គេមាន $\dfrac{1}{1+a^2(b+c)}=\dfrac{1}{1+a(ab+ac)}=\dfrac{1}{1+a(3-bc)}=\dfrac{1}{3a+(1-abc)}$

ដោយ $abc \le 1$ ឬ $1 - abc \ge 0$ នោះ $\frac{1}{1+a^2(b+c)} \le \frac{1}{3a}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{1}{1+b^2(c+a)} \le \frac{1}{3b}$ (2) , $\frac{1}{1+c^2(a+b)} \le \frac{1}{3c}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) ; (2) និង (3) គេបាន

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(c+a)} + \frac{1}{1+c^2(a+b)} \le \frac{1}{3a} + \frac{1}{3b} + \frac{1}{3c} = \frac{ab+bc+ca}{3abc}$$

ដោយ $ab + bc + ca = 3$

ដូចនេះ $\frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(c+a)} + \frac{1}{1+c^2(a+b)} \le \frac{1}{abc}$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឱ្យ a និង b ជាពីរចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែល $a^2 + b^2 = 4$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{ab}{a+b+2} \le \sqrt{2} - 1$

(Austrian Olympiad 1989)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{ab}{a+b+2} \le \sqrt{2} - 1$

យើងមាន $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4 + 2ab$

គេទាញ $2ab = (a+b)^2 - 4 = (a+b+2)(a+b-2)$

នាំឱ្យ $\dfrac{ab}{a+b+2}=\dfrac{a+b-2}{2}$

$$\frac{ab}{a+b+2}=\frac{a+b}{2}-1 \quad (1)$$

គេមាន $(a-b)^2+(a+b)^2=2(a^2+b^2)$

គេទាញ $(a+b)^2=2(a^2+b^2)-(a-b)^2\le 2(a^2+b^2)=8$

នាំឱ្យ $a+b\le 2\sqrt{2}$ ឬ $\dfrac{a+b}{2}\le\sqrt{2}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន $\dfrac{ab}{a+b+2}\le\sqrt{2}-1$ ។

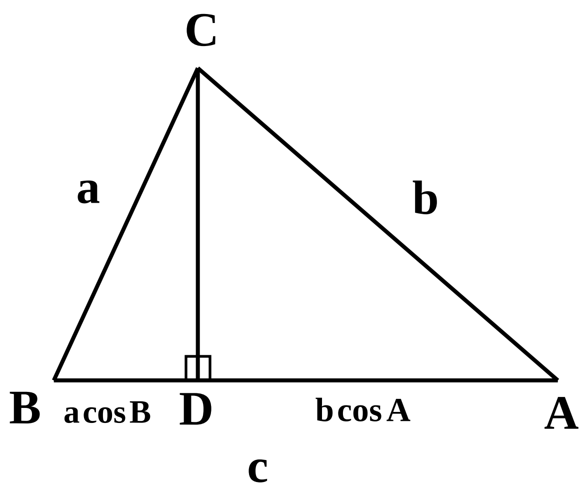
លំហាត់ទី១៩

គេឱ្យត្រីកោណ ABC ដែលមានជ្រុង និង មុំផ្ទៀងផ្ទាត់ $c^2=4ab\cos A\cos B$
ចូរស្រាយថា ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

(Pi Mu Epsilon Journal -Fall 1992)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា ABC ជាត្រីកោណសមបាត



ក្នុងត្រីកោណកែង CBD និង CAD យើងមាន :

$\cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{a}$ នោះ $BD = a\cos B$

$\cos A = \frac{DA}{AC} = \frac{DA}{b}$ នោះ $DA = b\cos A$

យើងមាន $BA = BD + DA$ ឬ $c = a\cos B + b\cos A$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន

$c^2 = a^2\cos^2 B + 2ab\cos A\cos B + b^2\cos^2 A$

ដោយ $c^2 = 4ab\cos A\cos B$

គេទាញ $a^2\cos^2 B + 2ab\cos A\cos B + b^2\cos^2 A = 4ab\cos A\cos B$

$$a^2\cos^2 B - 2ab\cos A\cos B + b^2\cos^2 A = 0$$

$$(a\cos B - b\cos A)^2 = 0$$

$$a\cos B - b\cos A = 0$$

$$a\cos B = b\cos A$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសគេមាន $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

គេបាន $a = 2R\sin A$ និង $b = 2R\sin B$

ហេតុនេះ $2R\sin A\cos B = 2R\sin B\cos A$

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin B}{\cos B}$$

$$\tan A = \tan B$$

នាំឱ្យ $A = B$ ។ ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

លំហាត់ទី១៦

គេសន្មតថា $x , y \in (-2 , 2)$ ហើយ $xy = -1$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃអប្បបរមានៃ $u = \frac{4}{4-x^2} + \frac{9}{9-y^2}$

(Shaanxi 2003)

ដំណោះស្រាយ

កំនត់តម្លៃអប្បបរមានៃ $u = \frac{4}{4-x^2} + \frac{9}{9-y^2}$

ដោយ $xy = -1$ នោះ $y = -\frac{1}{x}$

គេបាន $u=\frac{4}{4-x^2}+\frac{9x^2}{9x^2-1}=\frac{4(9x^2-1)+9x^2(4-x^2)}{(4-x^2)(9x^2-1)}$

$$=\frac{36x^2-4+36x^2-9x^4}{36x^2-4-9x^4+x^2}=\frac{-9x^4+72x^2-4}{-9x^4+37x^2-4}$$

$$=1+\frac{35x^2}{-9x^4+37x^2-1}=1+\frac{35}{37-\left((3x-\frac{2}{x})^2+12\right)}$$

ដោយ $(3x-\frac{2}{x})^2\geq 0$ នោះគេទាញ $u\geq 1+\frac{35}{37-12}=\frac{12}{5}$

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ u គឺ $\frac{12}{5}$ ។

លំហាត់ទី១៧

ដោះស្រាយវិសមីការ $\sqrt{\log_2 x-1}+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x^3+2>0$

(Hainan 2004)

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយវិសមីការ

$$\sqrt{\log_2 x-1}+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x^3+2>0$$

លក្ខខណ្ឌ $\begin{cases} \log_2 x - 1 \ge 0 \\ x > 0 \end{cases}$ ឬ $x \ge 2$

វិសមីការអាចសរសេរ $\sqrt{\log_2 x - 1} - \frac{3}{2}\log_2 x + 2 > 0$

តាង $t = \sqrt{\log_2 x - 1} \ge 0$

គេបាន $t - \frac{3}{2}(t^2 + 1) + 2 > 0$

ឬ $-3t^2 + 2t + 1 > 0$

គេទាញ $-\frac{1}{3} < t < 1$ ដោយ $t \ge 0$

គេបាន $0 \le t < 1$ ឬ $0 \le \sqrt{\log_2 x - 1} < 1$ នាំឱ្យ $2 \le x < 4$

ដូចនេះ $x \in [\,2\,,4\,)$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឱ្យ **O** ជាចំនុចនៅក្នុងត្រីកោណ **ABC** ដោយដឹងថា

$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=0$

ចូរគណនាផលធៀបក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ **ABC** និងក្រលាផ្ទៃត្រីកោណ **AOC** ។

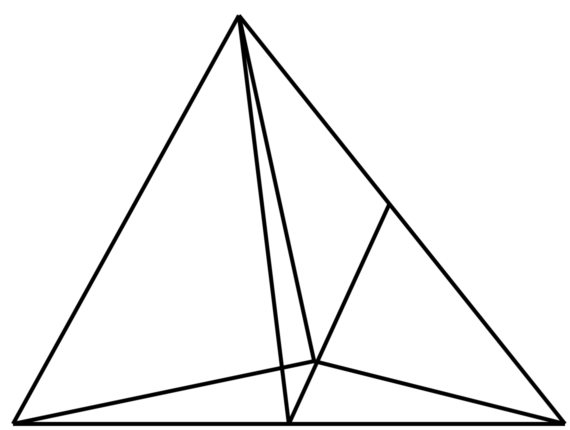
(Hainan 2004)

ដំណោះស្រាយ

យើងយក **D** និង **E** ជាចំនុចកណ្តាល **AC** និង **BC**

គេបាន $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$

និង $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OE}$



គេមាន $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=0$

ឬ $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+2(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=0$

$$2\overrightarrow{OD}+4\overrightarrow{OE}=0$$

$$\overrightarrow{OD}=-2\overrightarrow{OE}$$

នាំឱ្យ $\overrightarrow{OD}$ និង $\overrightarrow{OE}$ ជាវ៉ិចទ័រកូលីនេអ៊ែគ្នា ហើយ $|\overrightarrow{OD}|=2|\overrightarrow{OE}|$ ។

គេបាន $\frac{S_{AEC}}{S_{AOC}} = \frac{3}{2}$ ហើយ $S_{ABC} = 2S_{AEC} = 2 \times \frac{3}{2} S_{AOC} = 3S_{AOC}$

ដូចនេះ $\frac{S_{ABC}}{S_{AOC}} = 3$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតដែល $a, b, c \in (1, +\infty)$

ឬ $a, b, c \in (0, 1)$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \geq 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b)$$

(Romanian 2007)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \geq 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b)$ (*)

យើងយក d ជាចំនួនពិតនៃចន្លោះ $(1, +\infty)$ ឬ $(0,1)$ ។

តាមរូបមន្តប្តូរគោលគេបាន $\log_a bc = \frac{\log_d bc}{\log_d a} = \frac{\log_d b + \log_d c}{\log_d a}$

$\log_b ca = \frac{\log_d ca}{\log_d b} = \frac{\log_d c + \log_d a}{\log_d b}$; $\log_c ab = \frac{\log_d ab}{\log_d c} = \frac{\log_d a + \log_d b}{\log_d c}$

ដោយយក $x = \log_d a$, $y = \log_d b$, $z = \log_d c$ វិសមភាព (*) សមមូល

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{y}{x}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{z}{y}\right)\ge\frac{4x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{4z}{x+y}\quad (**)$$

តាមវិសមភាព $AM-HM$ គេមាន $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{4}{y+z}$ នាំឱ្យ $\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\ge\frac{4x}{y+z}$

តាមវិសមភាពនេះគេទាញបាន (**) ពិត ។

ដូចនេះ $\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab\ge 4(\log_{ab} c+\log_{bc} a+\log_{ca} b)$ ។

<u>**លំហាត់ទី២០**</u>

ចូរស្រាយថា $\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\ge xyz+\frac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|$

ចំពោះគ្រប់ $x\,;\,y\,;\,z\ge 0$ ។

(Selection test for JBMO 2007)

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\ge xyz+\frac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|$$

តាង $p=|(x-y)(y-z)(z-x)|$

គេមានឯកលក្ខណៈភាព

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \quad (i)$$

ចំពោះគ្រប់ $x\,;\,y\,;\,z\ge 0$ គេមាន :

$$x+y\ge|x-y|,\ y+z\ge|y-z|,\ z+x\ge|z-x|$$

គេបាន $2(x+y+z)\ge|x-y|+|y-z|+|z-x|$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន $2(x+y+z)\ge 3\sqrt[3]{p}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតគេមានសមភាព

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន :

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\ge\frac{3}{2}\sqrt[3]{p^2} \quad (2)$$

ធ្វើវិធីគុណវិសមភាព (1) និង (2) គេទទួលបាន :

$$2(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\ge\frac{9}{2}p$$

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\ge\frac{9}{4}p \quad (ii)$$

តាម (i) និង (ii) គេបាន $x^3+y^3+z^3-3xyz\ge\frac{9}{4}p$

គេទាញ $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}\ge xyz+\dfrac{3}{4}p$ ដោយ $p=|(x-y)(y-z)(z-x)|$

ដូចនេះ $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}\ge xyz+\dfrac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|$ ។

លំហាត់ទី២១

ចូរស្រាយថា :

$$n(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n})\geq(n+1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n+1})$$

(District Round RMC 2008)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា

$$n(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n})\geq(n+1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n+1})\quad (i)$$

តាង $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{n}$

វិសមភាព (i) សមមូល $n(1+x)\geq(n+1)(x+\frac{1}{n+1})$

សមមូល $n+nx\geq nx+x+1$ ឬ $1+x\leq n$

គេមាន $1+x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\leq 1+1+1+....+1=n$

គេបាន $1+x\leq n$ ពិត

ដូចនេះ $n(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n})\geq(n+1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n+1})$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឱ្យ a , b , c ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a}{b-a+c}+\frac{b}{a-b+c}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$

(RMC 2000)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{a}{b-a+c}+\frac{b}{a-b+c}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$

តាង $\begin{cases} b-a+c=x \\ a-b+c=y \\ a+b-c=z \end{cases}$ នោះ $a=\frac{y+z}{2}\ ;b=\frac{z+x}{2}\ ;c=\frac{x+y}{2}$

យក $T=\frac{a}{b-a+c}+\frac{b}{a-b+c}+\frac{c}{a+b-c}$

$=\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)$

$=\frac{1}{2}\left[(\frac{y}{x}+\frac{x}{y})+(\frac{y}{z}+\frac{z}{y})+(\frac{z}{x}+\frac{x}{z})\right]\geq\frac{1}{2}(2+2+2)=3$

ព្រោះ $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geq 2\ ;\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 2\ ;\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\geq 2$

ដូចនេះ $\frac{a}{b-a+c}+\frac{b}{a-b+c}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$ ។

លំហាត់ទី២៣

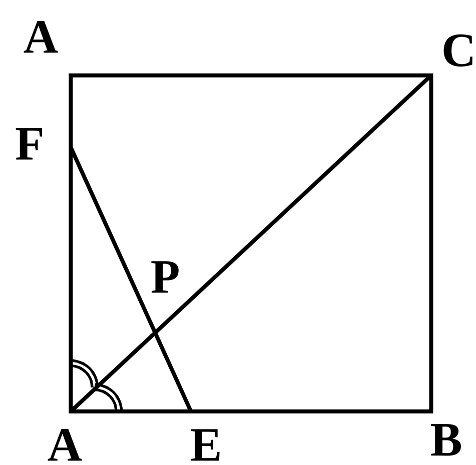
គេឱ្យការេ ABCD មួយ ។ E និង F ជាពីរចំនុចស្ថិតនៅលើជ្រុងរៀងគ្នា AB និង AD ។ តាង P ជាចំនុចប្រសព្វរវាង EF និង AC ។

ចូរស្រាយថា :

ក. $\frac{1}{AE}+\frac{1}{AF}=\frac{\sqrt{2}}{AP}$ ខ. $AP^2 \le \frac{AE.AF}{2}$

(RMC 2000)

ដំណោះស្រាយ



ក. $\frac{1}{AE}+\frac{1}{AF}=\frac{\sqrt{2}}{AP}$

តាង S_{AEF} , S_{AEP} , S_{AFP} រៀងគ្នាជាផ្ទៃក្រលា នៃត្រីកោណ AEF ; AEP ; AFP

យើងបាន $S_{AEF}=S_{AEP}+S_{AFP}$

$$\frac{1}{2}AE.AF=\frac{1}{2}AE.AP\sin 45^{o}+\frac{1}{2}AF.AP\sin 45^{o}$$

$$AE.AF=\frac{1}{\sqrt{2}}AE.AP+\frac{1}{\sqrt{2}}AF.AP$$

$$\sqrt{2}AE.AF=AE.AF.AP(\frac{1}{AE}+\frac{1}{AF})$$

ដូចនេះ $\frac{1}{AE}+\frac{1}{AF}=\frac{\sqrt{2}}{AP}$ ។

ខ. $AP^2\le\frac{AE.AF}{2}$

តាមវិសមភាព $HM-GM$ គេមាន $\frac{2}{\frac{1}{AE}+\frac{1}{AF}}\le\sqrt{AE.AF}$

ដោយ $\frac{1}{AE}+\frac{1}{AF}=\frac{\sqrt{2}}{AP}$ នោះ $\sqrt{2}AP\le\sqrt{AE.AF}$

លើកជាការេគេបាន $2AP^2\le AE.AF$

ដូចនេះ $AP^2\le\frac{AE.AF}{2}$ ។

លំហាត់ទី២៨

បង្ហាញថាគ្មានចំនួនគត់ $x\,;\ y\,;z$ ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

$x^2+y^2-8z=6$ ទេ ។

(កម្ពុជា 2004)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាគ្មានចំនួនគត់ $x\,;\ y\,;z$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2+y^2-8z=6$ ទេ

យើងបាន $x^2+y^2=2(4z+3)\ \ (1)$

យើងនឹងស្រាយថាសមីការ (1) គ្មានឬសជាចំនួនគត់ ។

-បើ x ជាចំនួនគូ និង y ជាចំនួនសេសនោះ x^2+y^2 ជាចំនួនសេស

ដូចនេះសមីការ (1) គ្មានចម្លើយ (ព្រោះ $2(4z+3)$ ជាចំនួនគូ) ។

-បើ x ជាចំនួនសេសនិង y ជាចំនួនគូនោះ x^2+y^2 ជាចំនួនសេស

ដូចនេះសមីការ (1) គ្មានចម្លើយ(ព្រោះ $2(4z+3)$ ជាចំនួនគូ) ។

-បើ x ជាចំនួនគូ y ជាចំនួនគូ នោះគេអាចតាង $x=2m\,;\ y=2n\ \ (m\,,n\in Z)$

សមីការ (1) អាចសរសេរ $(2m)^2+(2n)^2=2(4z+3)$

ឬ $2(m^2+n^2)=4z+3$ ជាសមីការគ្មានឬសក្នុងសំណុំចំនួនគត់ ។

(ព្រោះ $2(m^2+n^2)$ ជាចំនួនគូ ហើយ $4z+3$ ជាចំនួនសេស)

-បើ x ជាចំនួនសេស y ជាចំនួនសេសនោះគេអាចតាង $x = 2m - 1 ; y = 2n - 1$
ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ m និង n ។

សមីការ (1) អាចសរសេរ $(2m-1)^2 + (2n-1)^2 = 2(4z+3)$

ឬ $4m^2 - 4m + 4n^2 - 4n + 2 = 8z + 6$

ឬ $m(m-1) + n(n-1) = 2z + 1$ ជាសមីការគ្មានឫសក្នុងសំណុំចំនួនគត់ ។

(ព្រោះ $m(m-1) ; n(n-1)$ ជាចំនួនគូ ហើយ $2z+1$ ជាចំនួនសេស)

សរុបមកសមីការ $x^2 + y^2 - 8z = 6$ គ្មានចម្លើយក្នុងសំណុំចំនួនគត់ ។

ដូចនេះ គ្មានចំនួនគត់ $x ; y ; z$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2 + y^2 - 8z = 6$ ទេ ។

លំហាត់ទ២៨

ចូរបង្ហាញថា $F=\dfrac{4n+17}{3n+13}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in IN$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $F=\dfrac{4n+17}{3n+13}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន

សន្មតថា $4n+17$ និង $3n+13$ មានតួចែកធំបំផុតស្មើ d ។

យើងបាន $4n+17=ad$ និង $3n+13=bd$ ដែល a និង b បឋមរវាងគ្នា ។

យើងមាន $4(3n+13)-3(4n+17)=(4b-3a)d$

$$12n+52-12n-51=(4b-3a)d$$

$$1 = (4b-3a)d$$

ដោយ $4b-3a$ និង d សុទ្ធតែជាចំនួនគត់នោះគេទាញបាន $d=1$

នាំឱ្យ$4n+17$ និង $3n+13$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ។

ដូចនេះ $F=\dfrac{4n+17}{3n+13}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន ។

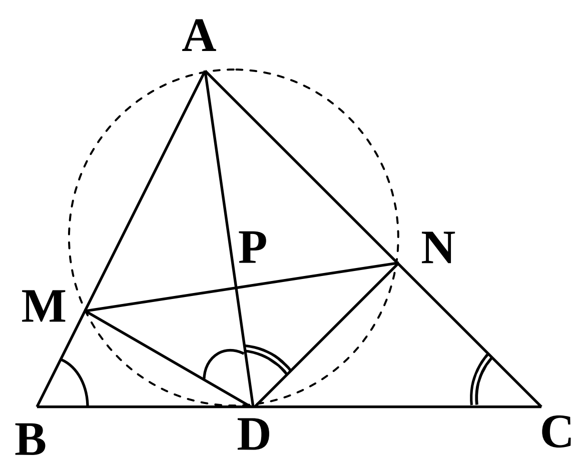
លំហាត់ទី២៦

គេឱ្យ AD ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A នៃត្រីកោណ ABC មួយ ។ M និង N ជាពីរចំនុចនៅលើជ្រុង AB និង AC រៀងគ្នាដែលមុំ $\angle MDA = \angle B$ និងមុំ $\angle NDA = \angle C$ ។ តាង P ជាប្រសព្វរវាង MN និង AD ។ ចូរស្រាយថា $AD^3 = AB.AC.AP$ ។

(RMC 1999)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $AD^3 = AB.AC.AP$



យើងមាន ΔABD ដូច ΔADM

គេបាន $\frac{AD}{AM} = \frac{AB}{AD}$

ឬ $AD^2 = AM.AB$ (1)

យើងមាន ΔACD ដូច ΔADN

គេបាន $\frac{AD}{AN} = \frac{AC}{AD}$

ឬ $AD^2 = AN.AC$ (2)

គុណទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន :

$$AD^4 = AM.AN.AB.AC \quad (3)$$

យើងមាន $\angle ADM + \angle ADN + \angle A = \angle B + \angle C + \angle A = 180^o$

នោះ **AMDN** ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ ។

គេបាន $\angle AMP = \angle ADN$ (មុំស្កាត់ដោយធ្នូរួម **AN**)

នោះត្រីកោណ ΔAMP ដូចត្រីកោណ ΔADN

គេបាន $\frac{AM}{AD} = \frac{AP}{AN}$ នាំឱ្យ $AM.AN = AD.AP$ (4)

យក (4) ជំនួសក្នុង (3) គេបាន $AD^4 = AD.AP.AB.AC$

ដូចនេះ $AD^3 = AB.AC.AP$ ។

លំហាត់ទី២៧

គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ ។

ចូរបង្ហាញថា $|a| + |b| + |c| - abc \le 4$

(RMC 2004)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $|a| + |b| + |c| - abc \le 4$

តាមវិសមភាព **Cauchy-Schwarz** គេបាន :

$$(|a| + |b| + |c|)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2) = 9$$

គេទាញ $|a|+|b|+|c| \le 3$ (1)

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន :

$$a^2+b^2+c^2 \ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}$$

គេទាញ $(abc)^2 \le \left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3 = 1$ នាំឱ្យ $-1 \le abc \le 1$

គេទាញបាន $-abc \ge 1$ (2)

ធ្វើផលបូកវិសមភាព (1) និង (2) គេបាន :

$$|a|+|b|+|c|-abc \le 4$$ ។

<u>**លំហាត់ទី២៨**</u>

គេឱ្យ x និង y ជាចំនួនពិត ។

គេដឹងថា x^2+y^2 , x^3+y^3 និង x^4+y^4 ជាចំនួនសនិទាន ។

ចូរស្រាយថា xy និង $x+y$ ជាចំនួនសនិទាន ។

(RMC 2004)

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

ស្រាយថា xy និង $x+y$ ជាចំនួនសនិទាន

យើងមាន $x^2y^2 = \dfrac{1}{2}\left[(x^2+y^2)^2-(x^4+y^4)\right]$ ជាចំនួនសនិទាន

$$x^6+y^6=(x^2+y^2)^3-3x^2y^2(x^2+y^2)$$ ជាចំនួនសនិទាន

ហើយ $x^3y^3=\frac{1}{2}\left[(x^3+y^3)^2-(x^6+y^6)\right]$ ជាចំនួនសនិទាន

យើងទាញបាន $xy=\frac{x^3y^3}{x^2y^2}$ ជាចំនួនសនិទាន ។

ម្យ៉ាងទៀត $x+y=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2-xy}$ ជាចំនួនសនិទាន ។

ដូចនេះ xy និង $x+y$ ជាចំនួនសនិទាន ។

លំហាត់ទី២៩

ចូរកំនត់ផ្នែកគត់នៃចំនួន $\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+....+\sqrt[3]{24}}}}$

(មាន n ឬសទីបី) ។

(RMC 2004)

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ផ្នែកគត់

តាង $a_n=\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+....+\sqrt[3]{24}}}}$ ដែល $n\geq 1$

យើងមាន $a_1=\sqrt[3]{24}$ ដោយ $2<\sqrt[3]{24}<3$ នោះ $2<a_1<3$

សន្មតថាវាពិតចំពោះ $n=k$ គឺ $2<a_k<3$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតចំពោះ $n = k+1$ គឺ $2 < a_{k+1} < 3$

យើងមាន $a_{k+1} = \sqrt[3]{24 + a_k}$ ដោយ $2 < a_k < 3$

នោះគេបាន $26 < 24 + a_k < 27$ ឬ $2 < \sqrt[3]{26} < \sqrt[3]{24 + a_k} < 3$

នាំឱ្យ $2 < a_{k+1} < 3$ ពិត ។

គេបាន $2 < a_n < 3$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

ដូចនេះផ្នែកគត់នៃ $a_n = \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + ... + \sqrt[3]{24}}}}$ គឺ $[a_n] = 2$ ។

លំហាត់ទី៣០

គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc = 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $1 + \frac{3}{a+b+c} \geq \frac{6}{ab+bc+ca}$

(JBMO 2003)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $1 + \frac{3}{a+b+c} \geq \frac{6}{ab+bc+ca}$

យើងតាង $a = \frac{1}{x}\ ; b = \frac{1}{y}\ ; c = \frac{1}{z}$ នោះវិសមភាពអាចសរសេរ :

$$1 + \frac{3}{xy+yz+zx} \geq \frac{6}{x+y+z} \quad \text{(ព្រោះ } xyz = \frac{1}{abc} = 1 \text{)}$$

យើងមាន $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0$

គេទាញ $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2xy+2yz+2zx$

គេបាន $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$

នាំឱ្យ $1+\dfrac{3}{xy+yz+zx}\geq 1+\dfrac{9}{(x+y+z)^2}\geq\dfrac{6}{x+y+z}$

ព្រោះ $1-\dfrac{6}{x+y+z}+\dfrac{9}{(x+y+z)^2}=\left(1-\dfrac{3}{x+y+z}\right)^2\geq 0$

ដូចនេះ $1+\dfrac{3}{a+b+c}\geq\dfrac{6}{ab+bc+ca}$ ។

លំហាត់ទី៣១

គេតាង r , R និង p រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង ជាកន្លះបរិមាត្ររបស់ត្រីកោណមួយ ។

ចូរបង្ហាញថាជ្រុងទាំងបីរបស់ត្រីកោណនេះជាឬសរបស់សមីការ ៖

$$x^3-2px^2+(r^2+p^2+4rR)x-4prR=0$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាជ្រុងទាំងបីរបស់ត្រីកោណជាឬសរបស់សមីការ ៖

$$x^3-2px^2+(r^2+p^2+4rR)x-4prR=0$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសយើងមាន $a = 2R\sin A = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ (1)

ហើយ $p - a = r\tan\frac{A}{2} = \frac{r\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ (2)

គុណទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន $(p-a)a = 4Rr\sin^2\frac{A}{2}$

គេទាញ $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(p-a)a}{4Rr}$ (3)

ចែកទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេបាន $\frac{a}{p-a} = \frac{4R\cos^2\frac{A}{2}}{r}$

គេទាញ $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{ar}{4(p-a)R}$ (4)

បូកសមីការ (3) និង (4) អង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$\sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2} = \frac{(p-a)a}{4Rr} + \frac{ar}{4(p-a)R}$$

$$1 = \frac{(p-a)^2a + ar^2}{4rR(p-a)}$$

$$4rR(p-a) = p^2a - 2a^2p + a^3 + ar^2$$

$$4rRp - 4rRa = p^2a - 2a^2p - a^3 + ar^2$$

$$a^3 - 2pa^2 + (r^2 + p^2 + 4Rr)a - 4prR = 0$$

ដូចនេះជ្រុងទាំងបីរបស់ត្រីកោណជាឫសរបស់សមីការ ៖

$x^3 - 2px^2 + (r^2 + p^2 + 4rR)x - 4prR = 0$ ។

លំហាត់ទី៣២

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា ៖

$$\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$$

យក $z=\cos\frac{\pi}{11}+i.\sin\frac{\pi}{11}$ ហើយ $z^{11}=-1$

គេមាន $W=z+z^3+z^5+z^7+z^9=\frac{z^{11}-z}{z^2-1}=\frac{-1-z}{z^2-1}=\frac{1}{1-z}$

ដោយ $1-z=1-\cos\frac{\pi}{11}-i\sin\frac{\pi}{11}=2\sin\frac{\pi}{22}(\sin\frac{\pi}{22}-i\cos\frac{\pi}{22})$

គេបាន $W=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{22}(\sin\frac{\pi}{22}-i\cos\frac{\pi}{22})}$

$$W=\frac{\sin\frac{\pi}{22}+i\cos\frac{\pi}{22}}{2\sin\frac{\pi}{22}}=\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{22}$$

ដោយផ្នែកពិតនៃ W គឺ $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$

ដូចនេះ $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣៣

គណនា $P=\cos 20^{o}\cos 40^{o}\cos 80^{o}$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $P=\cos 20^{o}\cos 40^{o}\cos 80^{o}$

តាង $z=\cos 20^{o}+i\sin 20^{o}$ ហើយ $z^{9}=\cos 180^{o}+i\sin 180^{o}=-1$

គេបាន $\cos 20^{o}=\dfrac{z+\bar{z}}{2}=\dfrac{z+\frac{1}{z}}{2}=\dfrac{z^{2}+1}{2z}$ (ព្រោះ $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$)

$$\cos 40^{o}=\frac{z^{2}+\bar{z}^{2}}{2}=\frac{z^{4}+1}{2z^{2}}\ ;\ \cos 80^{o}=\frac{z^{4}+\bar{z}^{4}}{2}=\frac{z^{8}+1}{2z^{4}}$$

គេបាន $P=\dfrac{(z^{2}+1)(z^{4}+1)(z^{8}+1)}{8z^{7}}=\dfrac{(z^{2}-1)(z^{2}+1)(z^{4}+1)(z^{8}+1)}{8z^{7}(z^{2}-1)}$

$$=\frac{z^{16}-1}{8(z^{9}-z^{7})}=\frac{-z^{7}-1}{8(-1-z^{7})}=\frac{1}{8}$$

ដូចនេះ $P=\cos 20^{o}\cos 40^{o}\cos 80^{o}=\dfrac{1}{8}$ ។

លំហាត់ទី៣៨

សន្មតថា a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a^{\log_3 7} = 27$
$b^{\log_7 11} = 49$ និង $c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$ ។
ចូរគណនា $a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2}$ ។

(ប្រលងសិស្សពូកែ AIME អាមេរិច ឆ្នាំ2009)

ដំណោះស្រាយ

គណនា $a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2}$

គេមាន $a^{(\log_3 7)^2} = \left(a^{\log_3 7}\right)^{\log_3 7} = (27)^{\log_3 7} = 3^{3\log_3 7} = 7^3 = 343$

$b^{(\log_7 11)^2} = \left(b^{\log_7 11}\right)^{\log_7 11} = 49^{\log_7 11} = 7^{2\log_7 11} = 11^2 = 121$

$c^{(\log_{11} 25)^2} = \left(c^{\log_{11} 25}\right)^{\log_{11} 25} = \left(\sqrt{11}\right)^{\log_{11} 25} = 25^{\frac{1}{2}} = 5$

គេបាន $a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2} = 343 + 121 + 5 = 469$

ដូចនេះ $a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2} = 469$ ៕

លំហាត់ទី៣៤

គេឲ្យ x , y , z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ហើយ $a>0$ និងខុសពី 1 ។

ចូរស្រាយថា៖

$$\left(\log_a \frac{x}{y}\right)^3+\left(\log_a \frac{y}{z}\right)^3+\left(\log_a \frac{z}{x}\right)^3=3\log_a \frac{x}{y}\log_a \frac{y}{z}\log_a \frac{z}{x}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា៖

$$\left(\log_a \frac{x}{y}\right)^3+\left(\log_a \frac{y}{z}\right)^3+\left(\log_a \frac{z}{x}\right)^3=3\log_a \frac{x}{y}\log_a \frac{y}{z}\log_a \frac{z}{x}$$

តាង $p=\log_a \frac{x}{y}$, $q=\log_a \frac{y}{z}$, $r=\log_a \frac{z}{x}$

គេមាន $p+q+r=\log_a \frac{x}{y}+\log_a \frac{y}{z}+\log_a \frac{z}{x}$

$$p+q+r=\log_a\left(\frac{x}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{x}\right)=\log_a 1=0$$

$$p+q=-r$$

លើកអង្គទាំងពីរជាគូប $(p+q)^3=-r^3$

ឬ $p^3+3pq(p+q)+q^3=-r^3$ ដោយ $p+q=-r$

គេទាញ $p^3+q^3+r^3=3pqr$

ដូចនេះ $\left(\log_a \frac{x}{y}\right)^3+\left(\log_a \frac{y}{z}\right)^3+\left(\log_a \frac{z}{x}\right)^3=3\log_a \frac{x}{y}\log_a \frac{y}{z}\log_a \frac{z}{x}$

លំហាត់ទី៣៦

គេឲ្យ a និង b ជាចំនួនគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$\frac{a}{b}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$$

ចូរស្រាយថា a ចែកដាច់នឹង 1979 ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា a ចែកដាច់នឹង 1979

យើងមាន 1979 ជាចំនួនបឋម ។

យើងបាន ៖

$$\frac{a}{b}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{1318}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+....+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}-1-\frac{1}{2}-....-\frac{1}{659}$$

$$=\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\frac{1}{662}+...+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$$

$$=(\frac{1}{660}+\frac{1}{1319})+(\frac{1}{661}+\frac{1}{1318})+(\frac{1}{662}+\frac{1}{1317})+...+(\frac{1}{989}+\frac{1}{1990})$$

$$=\frac{1979}{660.1319}+\frac{1979}{661.1318}+\frac{1979}{662.1317}+....+\frac{1979}{989.1990}=1979.\frac{c}{d}$$

ដែល c និង d ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ។

ដោយ d ចែកមនិដាច់នឹង 1979 ដូចនេះ a ចែកដាច់នឹង 1979 ។

លំហាត់ទី៣៧

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាផលគុណ ៖

$(4-\frac{2}{1})(4-\frac{2}{2})(4-\frac{2}{3})....(4-\frac{2}{n})$ ជាចំនួនគត់មួយ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់

តាង $P_n=(4-\frac{2}{1})(4-\frac{2}{2})(4-\frac{2}{3})....(4-\frac{2}{n})$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left(4-\frac{2}{k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{4k-2}{k}\right)$$

$$=\frac{2^n.1.3.5.....(2n-1)}{n!}=\frac{n!.2^n.1.3.5...(2n-1)}{n!.n!}$$

$$=\frac{1.2.3.4....(2n-1)(2n)}{n!.n!}$$

$$=\frac{(2n)!}{n!.n!}=C(2n,n)$$

ដោយ $C(2n,n)$ ជាបន្សំ n ក្នុង $2n$ ជាចំនួនគត់

ដូចនេះ $(4-\frac{2}{1})(4-\frac{2}{2})(4-\frac{2}{3})....(4-\frac{2}{n})$ ជាចំនួនគត់មួយ ។

<u>លំហាត់ទី៣៨</u>

គេឲ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានផលសងរួម d ។

គេតាង $S_n = \frac{\cos a_1}{\cos d} + \frac{\cos a_2}{\cos^2 d} + \frac{\cos a_3}{\cos^3 d} + ... + \frac{\cos a_n}{\cos^n d}$ ចំពោះ $n = 1, 2, 3, ...$

ចូរស្រាយថា $S_n = \frac{\sin a_n}{\cos^n d \sin d} - \frac{\sin a_1}{\sin d}$ ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ស្រាយថា $S_n = \frac{\sin a_n}{\cos^n d \sin d} - \frac{\sin a_1}{\sin d}$

ដោយ (a_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយមានផលសងរួម d នោះ $a_{n+1} = a_n + d$

គេបាន $\sin a_{n+1} = \sin(a_n + d) = \sin a_n \cos d + \sin d \cos a_n$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\cos^{n+1} d \neq 0$ គេបាន ៖

$$\frac{\sin a_{n+1}}{\cos^{n+1} d} = \frac{\sin a_n \cos d + \sin d \cos a_n}{\cos^{n+1} d}$$

គេទាញ $\frac{\cos a_n}{\cos^n d} = \frac{\cos d}{\sin d}\left(\frac{\sin a_{n+1}}{\cos^{n+1} d} - \frac{\sin a_n}{\cos^n d}\right)$

$$S_n = \sum_{p=1}^{n}\left[\frac{\cos d}{\sin d}\left(\frac{\sin a_{p+1}}{\cos^{p+1} d} - \frac{\sin a_p}{\cos^p d}\right)\right]$$

$$S_n = \frac{\cos d}{\sin d}\left(\frac{\sin a_{n+1}}{\cos^{n+1} d} - \frac{\sin a_1}{\cos d}\right) = \frac{\sin a_{n+1}}{\cos^n d \sin d} - \frac{\sin a_1}{\sin d}$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{\sin a_n}{\cos^n d \sin d} - \frac{\sin a_1}{\sin d}$ ។

លំហាត់ទី៣៩

កំនត់ចំនួនគត់ n ដើម្បីឲ្យ $f(n)=n^2-3n+9$ ជាការេប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

កំនត់ចំនួនគត់ n

តាង k ជាចំនួនគត់ដែល $n^2-3n+9=k^2$

ឬ $4n^2-12n+36=4k^2$

$(2n-3)^2+27=4k^2$

$4k^2-(2n-3)^2=27$

$(2k+2n-3)(2k-2n+3)=27$

គេទាញបាន $\begin{cases}2k+2n-3=27\\2k-2n+3=1\end{cases}$ មានចម្លើយ $k=7\ ,\ n=8$

$\begin{cases}2k+2n-3=-27\\2k-2n+3=-1\end{cases}\Rightarrow k=-7\ ,\ n=-5$

$\begin{cases}2k+2n-3=9\\2k-2n+3=3\end{cases}\Rightarrow k=3\ ,\ n=3$

$\begin{cases}2k+2n-3=-9\\2k-2n+3=-3\end{cases}\Rightarrow k=-3\ ,\ n=0$

ដូចនេះ $n\in\{-5\ ,\ 0\ ,\ 3\ ,\ 8\}$ ។

លំហាត់ទី៤០

បើ x , y , z ជាបីចំនួនពិតខុសពី 1 ដែល $xyz = 1$ នោះចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{x^2}{(1-x)^2} + \frac{y^2}{(1-y)^2} + \frac{z^2}{(1-z)^2} \geq 1$$

(IMO 2008)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{x^2}{(1-x)^2} + \frac{y^2}{(1-y)^2} + \frac{z^2}{(1-z)^2} \geq 1$

តាង $a = \frac{x}{1-x}$; $b = \frac{y}{1-y}$; $c = \frac{z}{1-z}$

គេបាន $abc = \frac{xyz}{(1-x)(1-y)(1-z)} = \frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}$ ព្រោះ $xyz = 1$

ហើយ $1 + a = \frac{1}{1-x}$, $1 + b = \frac{1}{1-y}$, $1 + c = \frac{1}{1-z}$

គេបាន $(1+a)(1+b)(1+c) = \frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}$

គេទាញ $abc = (1+a)(1+b)(1+b) \Leftrightarrow ab + bc + ca + a + b + c + 1 = 0$

យើងមាន $a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) + 2(a + b + c) + 2$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 + 2(a + b + c) + 2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c + 1)^2 + 1 \geq 1$$

ដូចនេះ $\frac{x^2}{(1-x)^2} + \frac{y^2}{(1-y)^2} + \frac{z^2}{(1-z)^2} \geq 1$ ។

លំហាត់ទី៤១

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} \log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2 \\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2 \\ \log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2 \end{cases}$$

(Indian Mathematical Olympiad 1986)

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} \log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2 & (1) \\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2 & (2) \\ \log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2 & (3) \end{cases}$$

ដោយប្រើរូបមន្ត $\log_{a^n} b=\frac{\ln b}{\ln a^n}=\frac{\ln b}{n\ln a}=\frac{1}{n}\log_a b$ គេបាន ៖

$(1):\ \log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2$

$$\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 y+\frac{1}{2}\log_2 z=2$$

$$\log_2(x\sqrt{y}\sqrt{z})=2\Rightarrow x\sqrt{yz}=4\ (4)$$

$(2):\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2$

$$\log_3(y\sqrt{z}\sqrt{x})=2\Rightarrow y\sqrt{zx}=9\ \ (5)$$

$(3):\log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2$

$$\log_4(z\sqrt{x}\sqrt{y})=2\Rightarrow z\sqrt{xy}=16\ \ (6)$$

គុណទំនាក់ទំនង (1) , (2) និង (3) គេបាន $(xyz)^2=576\Rightarrow xyz=24$

តាម (4) គេបាន $x^2yz = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{xyz} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

តាម (5) គេបាន $y^2zx = 81 \Rightarrow y = \frac{81}{xyz} = \frac{81}{24} = \frac{27}{8}$

តាម $z^2xy = 256 \Rightarrow z = \frac{256}{xyz} = \frac{256}{24} = \frac{32}{3}$

ដូចនេះ $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{27}{8}$, $z = \frac{32}{3}$ ។

លំហាត់ទី៤២

គេឲ្យ a និង b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $(a+\frac{1}{a})^2 + (b+\frac{1}{b})^2 \ge \frac{25}{2}$

(**Indian Mathematical Olympiad 1988**)

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី១

បង្ហាញថា $(a+\frac{1}{a})^2 + (b+\frac{1}{b})^2 \ge \frac{25}{2}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ យើងបាន ៖

$$(a+\frac{1}{a})^2 + (b+\frac{1}{b})^2 \ge 2(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})$$

តាង $X=2(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=\frac{2(a^2+1)(b^2+1)}{ab}=2ab+\frac{2(a^2+b^2+1)}{ab}$

ដោយ $a+b=1$ នាំឲ្យ $a^2+b^2=1-2ab$

គេបាន $X=2ab+\frac{2(2-2ab)}{ab}=2ab-4+\frac{4}{ab}$

តាង $t=ab$ ហើយ $0<t\le\frac{1}{4}$ (ព្រោះ $t=ab\le\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{1}{4}$)

គេបាន $X(t)=2t-4+\frac{4}{t}=2t+\frac{1}{8t}+\frac{31}{8t}-4$

ដោយ $2t+\frac{1}{8t}\ge 2\sqrt{2t.\frac{1}{8t}}=1$ ហើយ $t\le\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{31}{8t}\ge\frac{31}{2}$

គេបាន $X(t)\ge 1+\frac{31}{2}-4=\frac{25}{2}$

ដូចនេះ $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\ge\frac{25}{2}$ ។

<u>របៀបទី២</u>

ដោយប្រើវិសមភាព $x^2+y^2\ge\frac{(x+y)^2}{2}$

គេបាន $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\ge\frac{1}{2}(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b})^2$

ដោយ $a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}=(a+b)+\frac{(a+b)}{ab}=1+\frac{1}{ab}$ ព្រោះ $a+b=1$

ហើយ $ab\le\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow 1+\frac{1}{ab}\ge 5$

ដូចនេះ $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\ge\frac{25}{2}$ ។

<u>លំហាត់ទី៤៣</u>

ត្រីកោណមួយមានកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅរៀងគ្នា $\mathbf{r}$ និង $\mathbf{R}$ ។
ចូរស្រាយថា $R \ge 2r$ ។

(Indian Mathematical Olympiad 1988)

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ស្រាយថា $R \ge 2r$

យកត្រីកោណ ABC មានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$

តាង I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ និង O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ ។

តាមទ្រឹស្តីបទអឺលែចំពោះគ្រប់ចំនុច X នៃប្លង់គេមាន ៖

$$a\,XA^2 + b\,XB^2 + c\,XC^2 = (a+b+c)\,XI^2 + abc$$

យក X នៅត្រង់ផ្ចិត O គេបាន ៖

$$a\,OA^2 + b\,OB^2 + c\,OC^2 = (a+b+c)\,OI^2 + abc$$

ដោយ $OA = OB = OC = R$ កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ

$$(a+b+c)R^2 = (a+b+c)OI^2 + abc$$

គេទាញ $OI^2 = R^2 - \dfrac{abc}{a+b+c} = R^2 - \dfrac{abc}{2p}$

រូបមន្តផ្ទៃក្រឡា $S = pr = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow \dfrac{abc}{2p} = 2rR$

គេបាន $OI^2 = R^2 - 2rR = R(R-2r) \Rightarrow OI = \sqrt{R(R-2r)}$

ដោយ $OI \ge 0$ ដូចនេះ $R \ge 2r$ ។

លំហាត់ទី៤៤

គេឲ្យ $f(x)=\dfrac{x}{3x-2}$

ចូរបង្ហាញថាបើ n មាន d លេខដែល $f(n)=\dfrac{n}{10^d}$ នោះ n ជាចំនួនគត់ដែល $n=\underbrace{333....333}_{(d-1)}4$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $n=\underbrace{333....333}_{(d-1)}4$

គេមាន $f(n)=\dfrac{n}{3n-2}=\dfrac{n}{10^d}$

គេទាញ $3n-2=10^d$ ឬ $n=\dfrac{10^d+2}{3}$

ដោយ $10^d+2=(10^d-1)+3=\underbrace{999....999}_{(d)}+3$

គេបាន $n=\dfrac{\underbrace{999....999}_{(d)}+3}{3}=\underbrace{333......333}_{(d)}+1$

ដូចនេះ $n=\underbrace{333....333}_{(d-1)}4$ ។

លំហាត់ទី៤៨

គេឲ្យសមីការ $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ មានឫសបួនវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$a/\quad pr-16s\geq 0$$

$$b/\quad q^2-36s\geq 0$$

(Indian Mathematical Olympiad 1990)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $pr-16s\geq 0$

តាង y_1, y_2, y_3, y_4 ជាឫសសមីការ $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែតគេមានទំនាក់ទំនងឫសដូចខាងក្រោម ៖

$$\begin{cases} y_1+y_2+y_3+y_4=-p \\ y_1y_2+y_1y_3+y_1y_4+y_2y_3+y_2y_4+y_3y_4=q \\ y_1y_2y_3+y_1y_2y_4+y_1y_3y_4+y_2y_3y_4=-r \\ y_1y_2y_3y_4=s \end{cases}$$

តាមវិសមភាព $AM-HM$ គេមាន

$$y_1y_2y_3y_4(y_1+y_2+y_3+y_4)\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}+\frac{1}{y_4}\right)\geq 16y_1y_2y_3y_4$$

$$(-p)(-r)\geq 16s$$

$$pr\geq 16s$$

ដូចនេះ $pr-16s\geq 0$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $q^2 - 36s \geq 0$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេបាន ៖

$$(y_1y_2 + y_1y_3 + y_1y_4 + y_2y_3 + y_2y_4 + y_3y_4)^2 \geq 36y_1y_2y_3y_4$$

$$q^2 \geq 36s$$

ដូចនេះ $q^2 - 36s \geq 0$ ។

លំហាត់ទី៤៦

ចូរកំនត់គ្រប់គូតំលៃគត់មិនអវិជ្ជមាន (x, y) បើគេដឹងថា ៖

$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$ ។

(**Indian Mathematical Olympiad 1990**)

ដំណោះស្រាយ

កំនត់គ្រប់គូតំលៃគត់មិនអវិជ្ជមាន (x, y)

គេមាន $(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$

$$x^2y^2 - 14xy + 49 = x^2 + y^2$$

$$(x^2y^2 - 12xy + 36) + 13 = (x^2 + 2xy + y^2)$$

$$(xy - 6)^2 + 13 = (x + y)^2$$

$$(x + y)^2 - (xy - 6)^2 = 13$$

$$(x + y + xy - 6)(x + y - xy + 6) = 13$$

គេទាញ $\begin{cases} x + y + xy - 6 = 13 \\ x + y - xy + 6 = 1 \end{cases} \quad (S_1)$

ឬ $\begin{cases} x+y+xy-6=1 \\ x+y-xy+6=13 \end{cases}$ (S_2)

ឬ $\begin{cases} x+y+xy-6=-13 \\ x+y-xy+6=-1 \end{cases}$ (S_3)

ឬ $\begin{cases} x+y+xy-6=-1 \\ x+y-xy+6=-13 \end{cases}$ (S_4)

បន្ទាប់ពីដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ (S_1); (S_2);(S_3);(S_4)

គេទទួលបានគូចម្លើយ ៖

$(x\ ,\ y) = \{\ (0,7);(7,0);(3,4);(4,3)\ \}$ ។

លំហាត់ទី៤៧

គេឲ្យ $x\ ;\ y\ ;\ z$ ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{6} \le \frac{x+y+z}{3}\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$$

(Hungary-Israel Binational 2009)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា ៖

$$\frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{6} \le \frac{x+y+z}{3}\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$$

តាង $a = x^2+y^2+z^2$ និង $b = xy+yz+zx$

គេបាន $a+2b = (x+y+z)^2 \Rightarrow x+y+z = \sqrt{a+2b}$

វិសមភាពសមមូល $\frac{a+b}{6} \le \frac{\sqrt{a+2b}}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$

$\Leftrightarrow 3(a+b)^2 \le 4a(a+2b)$

$\Leftrightarrow a^2+2ab-3b^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a+3b) \ge 0$

ដោយ $a \ge 0$, $b \ge 0$ នោះ $a+3b \ge 0$

ហើយ $a-b = x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

ឬ $a-b = \frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \right] \ge 0$

គេទាញ $(a-b)(a+3b) \ge 0$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{6} \le \frac{x+y+z}{3}\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$ ។

លំហាត់ទី៤៨

គេឲ្យ a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $4ab-1$ ជាតួចែកនៃ $(4a^2-1)^2$ នោះ $a=b$ ។

(IMO 2007)

ដំណោះស្រាយ

តាង $a-b=k \Leftrightarrow b=a-k>0$ ឬ $k<a$

គេមាន $4ab-1 = 4a(a-k)-1 = 4a^2-4ak-1$

ហើយ $(4a^2-1)^2 = \left[(4a^2-4ak-1)+4ak \right]^2$

$= (4a^2-4ak-1)^2 + 8ak(4a^2-4ak-1) + 16a^2k^2$

$(4a^2-1)^2=(4a^2-4ak-1)(4a^2+4ak+1)+16a^2k^2$

តាមទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $(4a^2-1)^2$ ចែកនឹង $4a^2-4ak-1=4ab-1$

ឲ្យផលចែក $4a^2+4ak+1$ នឹងសំណល់ $16a^2k^2=16a^2(a-b)^2$

ដូចនេះស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $4ab-1$ ជាតួចែកនៃ $(4a^2-1)^2$ សមមូលឲ្យ

$16a^2k^2=16a^2(a-b)^2=0\Leftrightarrow a=b$ ។

លំហាត់ទី៤៩

គេឲ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x\,;y\,;z$ ដែល $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2}\le\frac{1}{3}$ ។

(Serbia Junior Balkan Team Selection Test 2009)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2}\le\frac{1}{3}$

ជាដំបូងយើងត្រូវស្រាយឲ្យឃើញថា $\frac{1}{x^3+2}\le\frac{2}{3(x^2+1)}$ ។

គេមាន $\frac{1}{x^3+2}\le\frac{2}{3(x^2+1)}\Leftrightarrow 2(x^3+2)\ge 3(x^2+1)$

$$\Leftrightarrow 2x^3-3x^2+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3-2x^2-x^2+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(2x+1)\ge 0$$

ហេតុនេះ $\frac{1}{x^3+2} \le \frac{2}{3(x^2+1)}$ (1) ពិត

ដូចគ្នាដែរ $\frac{1}{y^3+2} \le \frac{2}{3(y^2+1)}$ (2) និង $\frac{1}{z^3+2} \le \frac{2}{3(z^2+1)}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) , (2) និង (3) គេបាន ៖

$$\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2} \le \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}\right)$$

ដោយ $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2}$

ដូចនេះ $\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2} \le \frac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី៨០

គេឲ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយហើយតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} \le \frac{5}{8}+\frac{r}{4R}$$

(IMO Long lists 1988)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} \le \frac{5}{8}+\frac{r}{4R}$$

តាង a, b, c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណ ABC ហើយយក $p=\frac{a+b+c}{2}$

គេមាន $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$; $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

យើងបាន $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$=1+4\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

$$=1+4\frac{\frac{S^2}{p}}{4RS}=1+\frac{S}{pR}$$

$$=1+\frac{pr}{pR}=1+\frac{r}{R}$$

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$$

$$1-2\sin^2\frac{A}{2}+1-2\sin^2\frac{B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}=1+\frac{r}{R}$$

$$3-2(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2})=1+\frac{r}{R}$$

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-\frac{r}{2R}\quad(1)$$

តាមវិសមភាព Jensen យើងមាន ៖

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le 3\sin\left(\frac{A+B+C}{6}\right)=3\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន ៖

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)^2\le\frac{9}{4}\quad(2)$$

ដោយប្រើសមភាព $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$$1-\frac{r}{2R}+2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)\le\frac{9}{4}$$

ឬ $2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)\le\frac{5}{4}+\frac{r}{2R}$

ដូចនេះ $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\le\frac{5}{8}+\frac{r}{4R}$ ។

លំហាត់ទី៨១

គេដឹងថា $\frac{\cos x+\cos y+\cos z}{\cos(x+y+z)}=\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\sin(x+y+z)}=a$

ចូរស្រាយថា $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$

(IMO Short lists 1989)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$

តាង $u=e^{ix}$, $v=e^{iy}$, $w=e^{iz}$

គេបាន $u+v+w=(\cos x+\cos y+\cos z)+i(\sin x+\sin y+\sin z)$

ហើយ $uvw=e^{i(x+y+z)}=\cos(x+y+z)+i\sin(x+y+z)$

គេមាន $\frac{\cos x+\cos y+\cos z}{\cos(x+y+z)}=\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\sin(x+y+z)}=a$

នាំឲ្យ $\frac{(\cos x+\cos y+\cos z)+i(\sin x+\sin y+\sin z)}{\cos(x+y+z)+i\cos(x+y+z)}=a$

$$\frac{u+v+w}{uvw}=a$$

$$\frac{1}{vw}+\frac{1}{uw}+\frac{1}{uv}=a$$

$$e^{-i(y+z)}+e^{-i(x+z)}+e^{-i(x+y)}=a$$

គេទាញបាន $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$

និង $\sin(x+y)+\sin(y+z)+\sin(z+x)=0$

ដូចនេះ $\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)=a$ ។

លំហាត់ទី៨២

គេឲ្យ $a, b \in [0, 1]$ ។

ចូរស្រាយវិសមភាព $1 - \frac{a+b}{2} + \frac{ab}{3} \ge \frac{1}{1+a+b}$ ។

(Romania National Olympiad 2008)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយវិសមភាព $1 - \frac{a+b}{2} + \frac{ab}{3} \ge \frac{1}{1+a+b}$

ដោយ $a, b \in [0, 1]$ នោះយើងតាង $a = \cos x$; $b = \sin x$

ដែល $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ ។

យក $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$ ដែល $1 \le t \le \sqrt{2}$

គេមាន $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

វិសមភាពដែលត្រូវបង្ហាញសមមូលនឹង $1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2 - 1}{6} \ge \frac{1}{1+t}$

$$\Leftrightarrow \frac{3(2-t)(1+t) + (t^2-1)(1+t) - 6}{6(t+1)} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(t-1)(t^2 - t + 1)}{6(t+1)} \ge 0$$

ដោយ $t - 1 \ge 0$ និង $t^2 - t + 1 = (t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ នោះ $\frac{(t-1)(t^2-t+1)}{6(t+1)} \ge 0$

ដូចនេះ $1 - \frac{a+b}{2} + \frac{ab}{3} \ge \frac{1}{1+a+b}$ ។

លំហាត់ទី៨៣

ដោះស្រាយសមីការ

$2^{x^2+x}+\log_2 x=2^{x+1}$

(**Romania National Olympiad** 2007)

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ

$2^{x^2+x}+\log_2 x=2^{x+1}$

–ចំពោះ $x>1$ គេមាន $2^{x^2+x}>2^{x+1}$ និង $\log_2 x>0$

គេបាន $2^{x^2+x}+\log_2 x>2^{x+1}$

–ចំពោះ $0<x<1$ គេមាន $2^{x^2+x}<2^{x+1}$ និង $\log_2 x<0$

គេបាន $2^{x^2+x}+\log_2 x<2^{x+1}$

–ចំពោះ $x=1$ គេបាន $2^{1^2+1}+\log_2 1=2^{1+1}$ ពិត

ដូចនេះសមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ $x=1$ ។

លំហាត់ទី៨៤

គេឲ្យ a , b , c , d ជាបួនចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c+d=1$ ។

បង្ហាញថា $6(a^3+b^3+c^3+d^3) \ge a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$

(គណិតវិទ្យាសិស្សពូកែប្រទេសបារាំង 2007)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $6(a^3+b^3+c^3+d^3) \ge a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=6x^3-x^2$ មានក្រាបតំនាង (c)

គេមាន $f'(x)=12x^2-2x$

យកចំនុច $M\in(c)$ មានអាប់ស៊ីស $x=\frac{1}{4}$ និងអរដោនេ $f(\frac{1}{4})=\frac{1}{32}$

សមីការបន្ទាត់ប៉ះ (c) ត្រង់ M គឺ ៖

$$y-f(\frac{1}{4})=f'(\frac{1}{4})(x-\frac{1}{4})$$

$$y-\frac{1}{32}=\frac{5}{8}(x-\frac{1}{4}) \Rightarrow y=\frac{5x}{8}-\frac{1}{8}$$

ចំពោះ $x>0$ គេមាន $f(x)-(\frac{5x}{8}-\frac{1}{8})=6(x-\frac{1}{4})^2(x+\frac{1}{3})\ge 0$

គេទាញ $6x^3-x^2\ge\frac{5x}{8}-\frac{1}{8}$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$

គេបាន $6(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^2+b^2+c^2+d^2)\ge\frac{5}{8}(a+b+c+d)-\frac{4}{8}$

ដូចនេះ $6(a^3+b^3+c^3+d^3)\ge a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$ ។

លំហាត់ទី៨៥

គេឲ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc = 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le 1$

(**Baltic Way 2005**)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le 1$

យើងមាន $(a-1)^2 = a^2-2a+1\ge 0$

គេទាញ $a^2+2\ge 2a+1$ នាំឲ្យ $\frac{a}{a^2+2}\le\frac{a}{2a+1}$

ស្រាយតាមរបៀបដូចគ្នា $\frac{b}{b^2+2}\le\frac{b}{2b+1}$; $\frac{c}{c^2+2}\le\frac{c}{2c+1}$

គេបាន $\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le\frac{a}{2a+1}+\frac{b}{2b+1}+\frac{c}{2c+1}$ (1)

មាន $\frac{a}{2a+1}+\frac{b}{2b+1}+\frac{c}{2c+1}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}\right)$

ដោយ $\frac{1}{2a+1}=\frac{bc}{2abc+bc}=\frac{bc}{2+bc}$ (ព្រោះ $abc=1$)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{1}{2b+1}=\frac{ac}{2+ac}$, $\frac{1}{2c+1}=\frac{ab}{2+ab}$

គេទាញ $\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}=\frac{bc}{2+bc}+\frac{ac}{2+ac}+\frac{ab}{2+ab}$

ដោយ $\frac{bc}{2+bc}+\frac{ac}{2+ac}+\frac{ab}{2+ab}\ge\frac{(\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab})^2}{6+bc+ca+ab}$

គេទាញ $\frac{a}{2a+1}+\frac{b}{2b+1}+\frac{c}{2c+1}\le\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\frac{(\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab})^2}{6+bc+ca+ab}$ (2)

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន ៖

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le\frac{3}{2}-\frac{1}{2}.\frac{(\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab})^2}{6+bc+ca+ab}\quad(3)$$

ជាបន្តទៅនេះយើងនឹងស្រាយថា $\frac{(\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab})^2}{6+bc+ca+ab}\ge 1$

តាង $x=\sqrt{ab}\ ;\ y=\sqrt{bc}\ ;\ z=\sqrt{ac}$ ហើយ $xyz=abc=1$

វិសមភាពសមមូល $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2}{6+x+y+z}\ge 1$

$\Leftrightarrow(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2\ge 6+x+y+z$

$\Leftrightarrow 2(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})\ge 6$

តាមវិមសមភាព $AM-GM$ $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3$

គេទាញ $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2}{6+x+y+z}\ge 1$ ពិតហើយ $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2}{6+x+y+z}\ge 1$ ពិត

ហេតុនេះតាម (3) គេបាន $\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$

ដូចនេះ $\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le 1$ ។

<u>លំហាត់ទី៨៦</u>

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\sqrt[3]{1+\log_3(2^x+1)}+\sqrt[3]{5-\log_3(2^x+1)}=2\sqrt[3]{3}$$

<u>ដំណោះស្រាយ</u>

ដោះស្រាយសមីការ ៖

$$\sqrt[3]{1+\log_3(2^x+1)}+\sqrt[3]{5-\log_3(2^x+1)}=2\sqrt[3]{3}\ (E)$$

តាង $t=1+\log_3(2^x+1)$

សមីការ (E) អាចសរសេរ $\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{6-t}=2\sqrt[3]{3}$ (1)

លើកអង្គទាំងពីរនៃ (1) ជាគូបគេបាន ៖

$$(\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{6-t}\ )^3=\left(2\sqrt[3]{3}\ \right)^3$$

$$t+3\sqrt[3]{t}\sqrt[3]{6-t}\ (\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{6-t})+6-t=24$$

$$6+3\sqrt[3]{t(6-t)}\ (\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{6-t})=24\ (2)$$

យក (1) ជួសក្នុង (2) គេបាន ៖

$$6+3\sqrt[3]{t(6-t)}.2\sqrt[3]{3}=24$$

$$6\sqrt[3]{3t(6-t)}=18$$

$$\sqrt[3]{3t(6-t)}=3$$

$$3t(6-t)=27$$

$$t(6-t)=9$$

$$t^2-6t+9=0$$

$$(t-3)^2=0\Rightarrow t=3$$

ចំពោះ $t=3$ គេបាន $1+\log_3(2^x+1)=3$

$$\log_3(2^x+1)=2$$

$$2^x+1=9$$

$$2^x=8 \Rightarrow x=3$$

ដូចនេះសមីការមានឫស $x=3$ ។

លំហាត់ទី៨៧

គេតាង $a\,,b\,,c$ ជារង្វាស់ជ្រុងរបស់ត្រីកោណ ABC ហើយតាង r និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយថា $a+b+c \ge 2\sqrt{3r(r+4R)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $a+b+c \ge 2\sqrt{3r(r+4R)}$

គេមាន $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$

$$a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2 \ge 0$$

$$2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca) \ge 0$$

$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2ab+2bc+2ca$ គេបាន ៖

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \ge 3(ab+bc+ca)$$

$$(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca) \quad (1)$$

តាង $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ,

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr$

គេបាន $p(p-a)(p-b)(p-c)=p^2r^2$

$$(p-a)(p-b)(p-c)=pr^2$$

$$p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p-abc=pr^2$$

$$p^3-2p^3+(ab+bc+ca)p-abc=pr^2$$

$$-p^3+(ab+bc+ca)p-abc=pr^2$$

គេទាញ $ab+bc+ca=r^2+p^2+\dfrac{abc}{p}$

គេមាន $S=pr=\dfrac{abc}{4R}\Rightarrow\dfrac{abc}{p}=4rR$

គេបាន $ab+bc+ca=r^2+p^2+4rR\ \ (2)$

យកទំនាក់ទំនង (2) ជួសក្នុង (1) គេបាន ៖

$4p^2\geq 3(r^2+p^2+4rR)\Leftrightarrow p^2\geq 3r(r+4R)$

$$\Leftrightarrow p\ \geq\sqrt{3r(r+4R)}$$

ដោយ $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ នោះ $\dfrac{a+b+c}{2}\geq\sqrt{3r(r+4R)}$

ដូចនេះ $a+b+c\geq 2\sqrt{3r(r+4R)}$ ។

<u>**លំហាត់ទី៨៨**</u>

គេមានស្វីតចំនួនពិត (a_n) កំនត់ដោយ ៖

$a_0 = 4$ និងទំនាក់ទំនងកំណើន $a_{n+1} = 2a_n^{\ 2} + 4a_n + 1$ ដែល $n = 0 , 1 , 2,...$

គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

<u>**ដំណោះស្រាយ**</u>

គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $a_{n+1} = 2a_n^{\ 2} + 4a_n + 1$

$$2a_{n+1} = 4a_n^{\ 2} + 8a_n + 2$$

$$2a_{n+1} + 2 = 4a_n^{\ 2} + 8a_n + 4$$

$$2a_{n+1} + 2 = (2a_n + 2)^2$$

$$\ln(2a_{n+1} + 2) = 2\ln(2a_n + 2) \quad (1)$$

តាងស្វីតជំនួយ $b_n = \ln(2a_n + 2) \Rightarrow b_{n+1} = \ln(2a_{n+1} + 2)$

តាម (1) គេទាញ $b_{n+1} = 2b_n$ នាំឲ្យ (b_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 2$

គេបាន $b_n = 2^n b_0$ តែ $b_0 = \ln(2a_0 + 2) = \ln(10)$

ហេតុនេះ $b_n = 2^n \ln 10 = \ln(10^{2^n})$ ដោយ $b_n = \ln(2a_n + 2)$

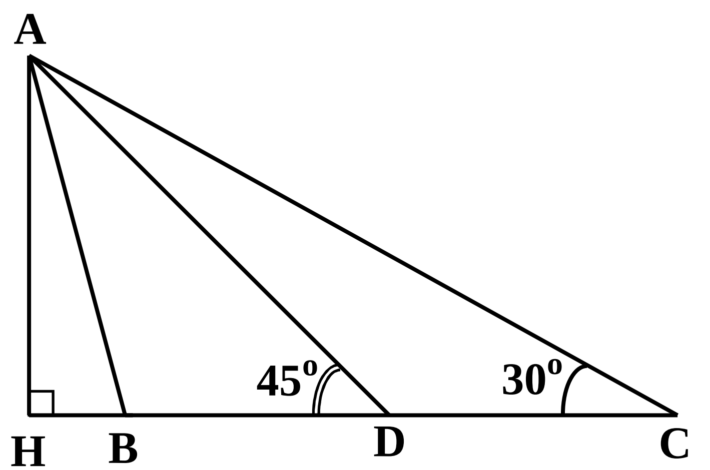
គេទាញ $2a_n + 2 = 10^{2^n} \Rightarrow a_n = \dfrac{10^{2^n}}{2} - 1$

ដូចនេះ $a_n = \dfrac{10^{2^n}}{2} - 1$ ។

លំហាត់ទី៨៩

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយរួចគេគូស AD ដែល D ជាចំនុចកណ្ដាល BC,
គេដឹងថា $\angle ACB = 30^o$; $\angle ADB = 45^o$ ។
កំនត់មុំ $\angle ABC$ ។

ដំណោះស្រាយ



កំនត់មុំ $\angle ABC$

តាង $BC = 2x$

នោះ $BD = DC = x$

សង់កំពស់ $AH = h = HD$

គេមាន $HB = HD - BD$

ឬ $HB = h - x$

ក្នុងត្រីកោណកែង AHC គេមាន $\tan 30^o = \dfrac{h}{h - x + 2x} = \dfrac{h}{h + x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow h = \frac{x}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)x}{2}$$

ក្នុងត្រីកោណកែង AHB

មាន $\tan \alpha = \dfrac{AH}{HB} = \dfrac{h}{h - x}$ ដែល $\alpha = \angle ABH$

$$\tan \alpha = \frac{(\sqrt{3} + 1)x}{(\sqrt{3} + 1)x - 2x} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3}$$

តាមរូបមន្ត $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{1-(2+\sqrt{3})^2}$

$\tan 2\alpha = \frac{2(2+\sqrt{3})}{1-7-4\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan(180^o - 30^o) = \tan 150^o$

គេទាញ $2\alpha = 150^o \Rightarrow \alpha = 75^o$

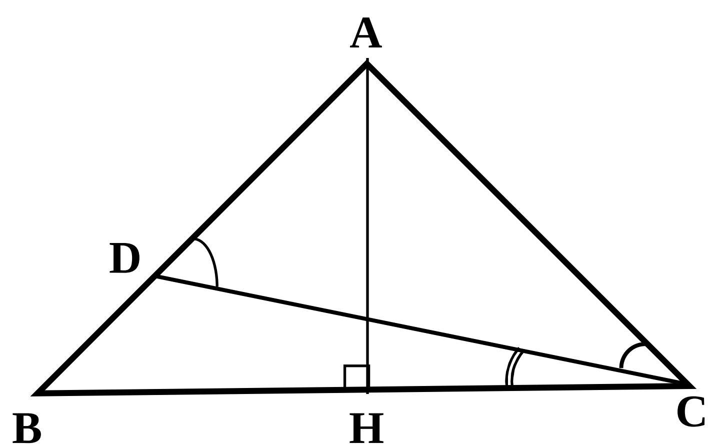
ដោយ $\angle ABC = 180^o - \alpha = 180^o - 75^o = 105^o$

ដូចនេះ $\angle ABC = 105^o$ ។

លំហាត់ទី៦០

គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមាន $AB = AC$ ។ ចំនុច D មួយស្ថិតនៅលើជ្រុង AB ដែល $BC = \sqrt{6}\,AD$ និងមុំ $\angle DCB = 15^o$ ។
ចូរកំនត់មុំ $\angle CAB$

ដំណោះស្រាយ



កំនត់មុំ $\angle CAB$

តាងមុំ $\alpha = \angle ABC$

យើងបាន $\angle ACD = \alpha - 15^o$

និង $\angle ADC = \alpha + 15^o$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ ADC គេបាន ៖

$$\frac{AD}{\sin(\alpha-15^o)}=\frac{AC}{\sin(\alpha+15^o)}\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{\sin(\alpha-15^o)}{\sin(\alpha+15^o)}\ (1)$$

យើងគូសកំពស់ AH របស់ΔABC ។ក្នុងត្រីកោណកែង ABH

យើងបាន $\cos\alpha=\frac{BH}{AB}=\frac{BC}{2AC}=\frac{\sqrt{6}AD}{2AC}\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{2\cos\alpha}{\sqrt{6}}$ (2)

ផ្ទឹមសមីការ (1) និង (2) គេបាន $\frac{\sin(\alpha-15^o)}{\sin(\alpha+15^o)}=\frac{2\cos\alpha}{\sqrt{6}}$ (E)

ចំពោះ $\alpha=45^o$ គេបាន ៖

$$\frac{\sin(\alpha-15^o)}{\sin(\alpha+15^o)}=\frac{\sin 30^o}{\sin 60^o}=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad \text{និង}\quad \frac{2\cos\alpha}{\sqrt{6}}=\frac{2\cos 45^o}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ដូចនេះ $\alpha=45^o$ ជាឬសមួយរបស់សមីការ (E) ។

ម្យ៉ាងទៀតដោយតាង $f(\alpha)=\frac{\sin(\alpha-15^o)}{\sin(\alpha+15^o)}=\frac{\cot 15^o-\cot\alpha}{\cot 15^o+\cot\alpha}$

និង $g(\alpha)=\frac{2\cos\alpha}{\sqrt{6}}$ ចំពោះ $0<\alpha<90^o$

គេបាន $f'(\alpha)=\frac{2\cot 15^o}{\sin^2\alpha(\cot 15^o+\cot\alpha)^2}>0$ នាំឲ្យ $f(\alpha)$ ជាអនុគមន៍កើន

ហើយ $g'(\alpha)=-\frac{2\sin\alpha}{\sqrt{6}}<0$ នាំឲ្យ $g(\alpha)$ ជាអនុគមន៍ចុះ។

ហេតុនេះក្រាបតាង $f(\alpha)$ និង$g(\alpha)$កាត់គ្នាបានតែមួយចំនុចគត់។

ដូចនេះចំនួន $\alpha=45^o$ ជាឬសតែមួយគត់របស់សមីការ (E) ។

ដោយ ABC ជាត្រីកោណសមបាតមានមុំ $\angle ABC=\angle ACB=\alpha=45^o$

ដូចនេះគេទាញបាន $\angle CAB=90^o$ ជាមុំកែង ។

លំហាត់ទី៦១

គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{\pi}{3^k}\cos\frac{2\pi}{3^k}\right)$

រួចទាញរកលីមីតវាកាលណា $n\to+\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{\pi}{3^n}\cos\frac{2\pi}{3^n}\right)$

គេមាន $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

$$\sin 3x-\sin x=2\sin x-4\sin^2 x$$

$$\sin 3x-\sin x=2\sin x(1-2\sin^2 x)$$

$$\sin 3x-\sin x=2\sin x\cos 2x$$

គេទាញ $\sin x\cos 2x=\frac{1}{2}(\sin 3x-\sin x)$

យក $x=\frac{\pi}{3^k}$ គេបាន $\sin\frac{\pi}{3^k}\cos\frac{2\pi}{3^k}=\frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{3^{k-1}}-\sin\frac{\pi}{3^k})$

យើងបាន $S_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{\pi}{3^{k-1}}-\sin\frac{\pi}{3^k}\right)=\frac{1}{2}(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{3^n})=-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3^n}$

ដូចនេះ $S_n=-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3^n}$ ហើយ $\lim_{n\to+\infty}S_n=0$ ។

លំហាត់ទី៦២

គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{\pi}{3^n}\sin\frac{2\pi}{3^n}\right)$

រួចទាញរកលីមីតវាកាលណា $n \to +\infty$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{\pi}{3^n}\sin\frac{2\pi}{3^n}\right)$

គេមាន $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$$\cos x - \cos 3x = 4\cos x - 4\mathrm{cso}^3 x$$

$$\cos x - \cos 3x = 4\cos x(1 - \cos^2 x)$$

$$\cos x - \cos 3x = 4\cos x \sin^2 x$$

$$\cos x - \cos 3x = 2\sin x \sin 2x$$

គេទាញ $\sin x \sin 2x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)$

យក $x = \frac{\pi}{3^k}$ គេបាន $\sin\frac{\pi}{3^k}\sin\frac{2\pi}{3^k} = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{3^k} - \cos\frac{\pi}{3^{k-1}})$

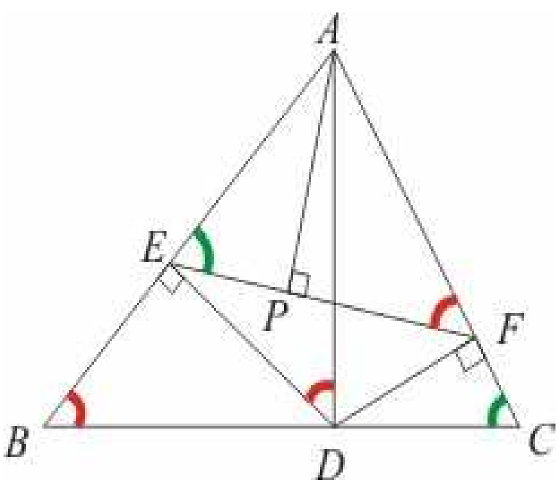
យើងបាន $S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{\pi}{3^k} - \cos\frac{\pi}{3^{k-1}}\right) = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{3^n} - \cos\pi) = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{3^n} + 1)$

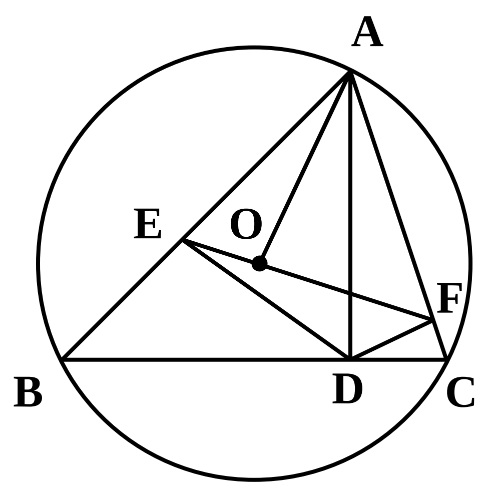
ដូចនេះ: $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3^n}$ ហើយ $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ។

លំហាត់ទី៦៣

គេយក AD ជាកំពស់ ΔABC ហើយ R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។ តាង E និង F ជាជើងនៃចំណោលកែងពី D ទៅជ្រុង AB និង AC ។ បើ $AD = R\sqrt{2}$ នោះចូរស្រាយថាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ស្ថិតនៅលើ EF ។ (**Bosnia Herzegovina 2008**)

ដំណោះស្រាយ





តាង O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ ΔABC ហើយ P ជាប្រសព្វរវាង AO និង EF ។

យើងមាន $\angle OAB = \angle OBA = 90^{o} - \angle C$

ចតុកោណ AEDF ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់

ព្រោះ $\angle AED + \angle AFD = 180^{o}$

គេបាន $\angle AEF = \angle ADF$ (មុំចារឹកក្នុងរង្វង់ស្កាត់ដោយធ្នូរួម AF)
ដោយ $\angle ADF = \angle C$ (មុំមានជ្រុងកែងរៀងគ្នា)
ហេតុនេះ $\angle AEF = \angle C$ ។
យើងមាន $\angle APE = 180^o - \angle OAB - \angle AEF$

$= 180^o - (90^o - \angle C) - \angle C = 90^o$ គេទាញ $AO \perp EF$

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡា ΔABC ហើយ $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$
យើងបាន $S = \frac{1}{2}AD.a = \frac{abc}{4R} \Rightarrow AD = \frac{bc}{2R}$ តែ $AD = R\sqrt{2}$
គេបាន $R\sqrt{2} = \frac{bc}{2R} \Rightarrow bc = 2\sqrt{2}R^2$ (1)
តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
គេទាញ $b = 2R\sin B$; $c = 2R\sin C \Rightarrow bc = 4R^2 \sin B \sin C$ (2)
តាម (1) និង (2) គេទាញ $4R^2 \sin B \sin C = 2\sqrt{2}R^2$
គេទាញ $\sin B \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (3)
ក្នុងត្រីកោណកែង AEP គេមាន $AP = AE\sin\angle AEP = AE.\sin C$
ក្នុងត្រីកោណកែង AED គេមាន $AE = AD\sin\angle ADE = AD.\sin B$
(ព្រោះ $\angle ADE = \angle B$ (មុំមានជ្រុងកែងរៀងគ្នា))
គេទាញ $AP = AD\sin B\sin C = R\sqrt{2}\sin B\sin C$ (4)
យកទំនាក់ទំនង (3) ជួសក្នុង (4) គេបាន ៖
$AP = R\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = R = AO$ នាំឲ្យចំនុច O ត្រួតស៊ីគ្នាជាមួយនឹងចំនុច P
ដូចនេះ ផ្ចិត O ស្ថិតនៅលើ EF ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

(ដកស្រង់ចេញពី **Internet**)

(http://www.artofproblemsolving.com/Forum/resources.php)

១–គេឲ្យស្វីត $\{a_k\}_{k\ge1}$ កំនត់ដោយ $a_1=1\ ;\ a_2=\frac{1}{2}$

និង $a_{k+2}=a_k+\frac{1}{2}a_{k+1}+\frac{1}{4a_ka_{k+1}}\ ,k\ge1$

បង្ហាញថា $\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\frac{1}{a_3a_5}+...+\frac{1}{a_{98}a_{100}}<4$ ។

(Baltic Way 2005)

២–គេឲ្យ $a>0\ ,b>0\ ,c>0$ ដែល $a+b+c=1$ ។

បង្ហាញថា $\sqrt{a^{1-a}b^{1-b}c^{1-c}}\le\frac{1}{3}$ ។

(Australia 2008)

៣–ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $x\ ,y\ ,z$ ដើម្បីឲ្យ

$\sqrt{\frac{2005}{x+y}}+\sqrt{\frac{2005}{y+z}}+\sqrt{\frac{2005}{z+x}}$ ជាចំនួនគត់ ។

(Bulgaria National Olympiad 2005)

៤–គេមាន $a\ ,b\ ,c$ ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយដែល $a+b+c=3$,

ចូរកំនត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $a^2+b^2+c^2+\frac{4abc}{3}$,

(China Northern Mathematical Olympiad 2007)

៥–គេមាន a, b, c ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}+\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)} \geq ab+bc+ca \text{ ។}$$

(**Greece National Olympiad 2007**)

៦–គេឲ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a^3+b^3=c^3$ ។

ចូរបង្ហាញថា $a^2+b^2-c^2>6(c-a)(c-b)$

(**India National Olympiad 2009**)

៧–គេឲ្យ $x, y, z \in IR^*_+$ ដែល $x+y+z=3$ ។

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{x^3}{y^3+8}+\frac{y^3}{z^3+8}+\frac{z^3}{x^3+8} \geq \frac{1}{9}+\frac{2}{27}(xy+yz+zx)$$

(**Iran National Math Olympiad 2008**)

៨–គេឲ្យ $a>0, b>0, c>0$ ដែល $a+b+c=1$,

ចូរបង្ហាញថា $a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b} \leq 1$

(**Japan Mathematical Olympiad 2005**)

៩–គេឲ្យ $a>0, b>0, c>0, d>0$ ដែល $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=4$ ។

ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}} \leq 2(a+b+c+d)-4$$

(**Polan 2007**)

១០–ចូរបង្ហាញថា $\log_a b+\log_b c+\log_c a \leq \log_b a+\log_c b+\log_a c$

ដែល $1<a \leq b \leq c$ ។ (**Russian Olympiad 2009**)

១១-សមីការ $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ មានឫសបី (មិនចាំបាច់ខុសគ្នា)

ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូររកតំលៃតូចបំផុតដែលអាចមាននៃ $\frac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \frac{c}{b}$?

(Turkey 2008)

១២-មាន $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ ដែល $a + b + c = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{1}{ab + 2c^2 + 2c} + \frac{1}{bc + 2a^2 + 2a} + \frac{1}{ca + 2b^2 + 2b} \geq \frac{1}{ab + bc + ca}$$

(Turkey 2007)

១៣-ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនពិត (x, y, z) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$\begin{cases} x^3 = 3x - 12y + 50 \\ y^3 = 12y + 3z - 2 \\ z^3 = 27z + 27x \end{cases}$$

(USA 2009)

១៤-ចំពោះគ្រប់ $x > 0$; $y > 0$; $z > 0$ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$x^3(y^2+z^2)^2 + y^3(x^2+z^2)^2 + z^3(x^2+y^2)^2 \geq xyz\left[xy(x+y)^2 + yz(y+z)^2 + zx(z+x)^2\right]$$

(USA 2009)

១៥-ចូរកំនត់គ្រប់ x , y ជាចំនួនពិតដែល ៖

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \dfrac{2}{9} \end{cases}$$

(Vietnam National Olympiad 2009)

១៦–ចំពោះ $x>0\,;y>0\,,z>0$ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\ge\frac{4}{xy+yz+zx}$$

(**Vietnam National Olympiad 2008**)

១៧–ចំពោះគ្រប់ $a\,,b\,,c\,,d>0$ ចូរបង្ហាញថា៖

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)(1+\sqrt[4]{abcd})^4\ge 16abcd(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$$

(**Ukraine2008**)

១៨–គេមាន $f(x)=x^3-6x^2+17x$

បើ $f(a)=16$ និង $f(b)=20$ ចូរកំនត់ $a+b$

(**Taiwan 2005**)

១៩–គេឲ្យ $a\,,b\,,c$ ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\le 3$$

(**Peru 2007**)

២០–ចូរកំនត់គ្រប់ $x_1\,,x_2\,,x_3\,,...,x_n$ បើគេដឹងថា ៖

$$\sqrt{x_1-1}+2\sqrt{x_2-4}+3\sqrt{x_3-9}+...+n\sqrt{x_n-n^2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3+...+x_n)$$

(**Moldova National Olympiad 2008**)

២១–គេឲ្យ $a\,,b\,,c$ ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ ។

ចូរកំនត់តម្លៃដែលអាចនៃ $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$,

(**Hongkong 2008**)

២២-គេឲ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $xyz \geq 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{x}{x^3+y^2+z}+\frac{y}{y^3+z^2+x}+\frac{z}{z^3+x^2+y}\leq 1$,

២៣-បង្ហាញថា $\frac{ab}{a^2+3b^2}+\frac{bc}{b^2+3c^2}+\frac{ca}{c^2+3a^2}\leq \frac{3}{4}$

ចំពោះគ្រប់ $a>0 ; b>0 ; c>0$ ។

២៤-គេឲ្យ a, b, x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}\geq \frac{3}{a+b}$$

២៥-ចូរកំនត់គ្រប់អនុគមន៍ $f : IR \to IR$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$f\left(f(x)+y\right)=f(x^2-y)+4f(x)y$$

ចំពោះគ្រប់ $x, y \in IR$ ។ (**Bosnia Herzegovina 2008**)

២៦-គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\tan\frac{\pi}{2^{k+2}}}{\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}\right)$ រួចគណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

២៧-ត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួចដែល $\angle BAC = 60^o$

និង $AB > AC$ ។ I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង H ជាអរតូសង់នៃត្រីកោន

ចូរបង្ហាញថា $2\angle AHI = 3\angle ABC$?

(**Balkan Mathematical Olympiad 2009**)

២៨-គេឲ្យ $a, b, c > 0$ ដែល $(a+b)(b+c)(c+a)=8$ ។

បង្ហាញថា $\frac{a+b+c}{3}\geq \sqrt[27]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$

(**Macedonia National Olympiad 2008**)

២៩–គេឲ្យចំនួន x , y , z ដោយដឹងថា ៖

$$x+y+z=1 \;,\; x^2+y^2+z^2=2 \text{ និង } x^3+y^3+z^3=3$$

ចូរគណនា $x^4+y^4+z^4$ ។

(APICS Mathematics Contest 1983)

៣០–ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $n^{\frac{1}{n-1}} \geq (n+1)^{\frac{1}{n}}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$

(APICS Mathematics Contest 1979)

៣១–ចូរបង្ហាញថា $(\sin x+\cos x)^4 \leq 4$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

(APICS Mathematics Contest 1982)

៣២–ចូររក y_n ដោយដឹងថា $\begin{cases} y_0=5 \\ y_1=9 \\ y_n=n+4y_{n-1}-4y_{n-2} \quad (n\geq 2) \end{cases}$

(APICS Mathematics Contest 1984)

៣៣–ចូរបង្ហាញថា $3a^4-4a^3b+b^4 \geq 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ។

(APICS Mathematics Contest 1988)

៣៤–ចូរកំនត់តំលៃ $P=\tan 20^o \tan 40^o \tan 60^o \tan 80^o$

(APICS Mathematics Contest 1989)

៣៥–គេកំនត់ស្វ៊ីត A_n ដោយ $\begin{cases} A_{n+1} = 1 + A_n + \sqrt{1 + 4A_n} \\ A_0 = 0 \end{cases}$

ចូររក A_{1990} ?

(APICS Mathematics Contest 1990)

៣៦–កំនត់តំលៃ m ដើម្បីឲ្យសមីការ $x^4 - (3m+2)x^2 + m^2 = 0$ មានឬសបួនជាកំនើនស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

(APICS Mathematics Contest 1990)

៣៧–ចូរកំនត់គ្រប់គូចំនួនពិត (x , y , z) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ៖

$$\frac{3xy}{x+y} = 5 \ ; \ \frac{2xz}{x+z} = 3 \ , \ \frac{yz}{y+z} = 4$$

(APICS Mathematics Contest 1992)

៣៨–គេយក $a_1 , a_2 , ..., a_n$ ជាចំនួនពិត ។ អនុគមន៍ f មួយកំនត់ដោយ ៖

$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + ... + a_n \sin(nx)$ ។

សន្មតថាគ្រប់ x គេមាន $|f(x)| \le |\sin x|$ ។

ចូរបង្ហាញថា $|a_1 + 2a_2 + 3a_3 + ... + na_n| \le 1$ ។

(APICS Mathematics Contest 1993)

៣៩–ចូរបង្ហាញថា $\tan^2 \frac{\pi}{7} + \tan^2 \frac{2\pi}{7} + \tan^2 \frac{3\pi}{7} = 21$

(APICS Mathematics Contest 1994)

៤០–ចូរកំនត់គ្រប់ចំលើយនៃ $(x^2 + y)(x + y^2) = (x - y)^3$ ដែល x និង y ជាចំនួនគត់ខុសពីសូន្យ ។ (APICS Mathematics Contest 1995)

៩១-សម្រួល $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}$ ជារាង $\dfrac{a+b\sqrt{c}}{d}$ ដែល a,b,c និង d

ជាចំនួនគត់ ។

(APICS Mathematics Contest 1995)

៩២-a/ បង្ហាញថា $\dfrac{\sin\theta}{\theta}=\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{4}\cos\dfrac{\theta}{8}.....$

b/ បង្ហាញថា $\dfrac{2}{\pi}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}.....$

(1997 APICS MATHEMATICS CONTEST)

៩៣-គេកំនត់ស្វ៊ីត (T_n) ដោយ $T_0=0$, $T_1=1$, $T_2=2$ និងទំនាក់ទំនង

$T_{n+1}=T_n+T_{n+1}+T_{n-2}$, $(n\geq 2)$ ។

ចូរគណនា $S=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{T_n}{2^n}\right)$ ។

(1998 APICS MATHEMATICS CONTEST)

៩៤-ចូរបង្ហាញថាអនុគមន៍ $\sin^2(x+\alpha)+\sin^2(x+\beta)-2\cos(\alpha-\beta)\sin(x+\alpha)\sin(x+\beta)$

ជាអនុគមន៍ថេរជានិច្ចគ្រប់ x ។

(1999 APICS MATHEMATICS CONTEST)

៩៥-ចូរកំនត់គ្រប់អនុគមន៍ f មានដេរីវេ និង ផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$f(x)+f(y)=f\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$ គ្រប់ $x,y\in IR$ និង $xy\neq 1$ ។

(2001 APICS MATHEMATICS CONTEST)

៤៦-ចូរកំនត់គ្រប់គូចំនួនពិត $(x;y)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \end{cases}$$

(2003 APICS MATHEMATICS CONTEST)

៤៧-ចូរកំនត់គ្រប់គូចំនួនគត់វិជ្ជមាន $(x ; y)$ ដោយដឹងថា $x^2 + 3y$ និង $y^2 + 3x$ សុទ្ធតែជាការេប្រាកដ ។

(2004 APICS MATHEMATICS CONTEST)

៤៨-បង្ហាញថាគ្មានបីចំនួនគត់ a , b , c ណាដែល $a^2 + b^2 - 8c = 6$ ។

(2005 APICS MATHEMATICS CONTEST)

៤៩-រកតំលៃតូចបំផុតនៃ $f(x) = \frac{1 + \cos 2x + 8\sin^2 x}{\sin 2x}$ គ្រប់ $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(2008 APICS MATHEMATICS CONTEST)

៥០-គេឲ្យ $a_1, a_2, ..., a_n$ និង $b_1, b_2, ..., b_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)...(a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n} + \sqrt[n]{b_1.b_2...b_n}$$

(2008 APICS MATHEMATICS CONTEST)

៥១-គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$ និង $AB = c$ តាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណនេះ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក/ $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{Rr}$

ខ/ $a^3 + b^3 + c^3 = 2p(p^2 - r^2 - 4rR)$ ដែល $p = \frac{a + b + c}{2}$ ។

៥២_គេឲ្យពីរចំនួនពិត $a \ge 1$ និង $b \ge 1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left(\log_2 a\right)^2 + \left(\log_2 b\right)^2 \ge 2\left[\log_2(a.b)\right]^2$

៥៣_ចំពោះគ្រប់ $x\,;y \in IR$ ចូរស្រាយថា ៖

$\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y} + \sqrt{\cos^2 x + \cos^2 y} \le \sqrt{2 + \sin 2x + \sin 2y}$ ។

៥៤_ចំពោះគ្រប់ $x\,;y \in IR$ ចូរស្រាយថា ៖

$\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \le \sqrt[3]{\frac{\cos^3 x + \cos^3 y}{2}}$ ។

៥៥_គេឲ្យ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ។

ចូរស្រាយថា $\left(\tan^3\theta + \cot^3\theta\right)\left(\tan\theta + \cot\theta\right) \ge \frac{4}{\sin^2 2\theta}$

៥៦_ចំពោះ $\forall x \in IR$ ចូរស្រាយថា $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$ ។

៥៧_ចូរស្រាយថា $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \ge \frac{2}{1+ab}$ ចំពោះគ្រប់ $a \ge b \ge 1$ ។

៥៨_គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a\,;b\,;c$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក. $(1+a)(1+b) \ge (1+\sqrt{ab})$

ខ. $(1+a)(1+b)(1+c) \ge (1+\sqrt[3]{abc})$

គ.ជាទូទៅចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1;a_2;a_3;........;a_n$ ចូរស្រាយថា ៖

$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)........(1+a_n) \ge (1+\sqrt[n]{a_1.a_2.a_3.....a_n})^n$ ។

៥៩_គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ចូរស្រាយថា $\frac{n+1}{2} > \sqrt[n]{n!}$ ។

៦០_គ្រប់ $x;y;z \in IR$ ចូរស្រាយថា $x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx$ ។

៦១_គេឲ្យ $a>1\,;b>1\,;c>1$ ចូរស្រាយថា ៖

$$\log_{(ab)}c+\log_{(ac)}b+\log_{(bc)}a\ \ge\ \frac{3}{2}$$ ។

៦២_គេឲ្យ $x>0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{(x+1)(x+2)(x+3)....(x+n)}{.x^{\frac{n}{2}}}\ge 2^n\sqrt{n!}$$ ។

៦៣_គេឲ្យ $x_1\,;x_2\,;x_3\,;.......;\,x_n>0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$(x_1+x_2+x_3+.....+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+....+\frac{1}{x_n}\right)\ge n^2$$ ។

១៣_គេឲ្យ $a_1\,;a_2\,;a_3\,;........;a_n\ge 0$ និង $a_1+a_2+a_3+.....+a_n=1$

ចូរស្រាយថា $\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+...........+\sqrt{a_{n-1}a_n}\le\dfrac{n-1}{2}$ ។

៦៤_គេឲ្យ $a;b>0$ ។ ចូរស្រាយថា $\dfrac{x^2+a^2+b^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\ge 2b\ \ ;\forall x\in IR$ ។

៦៥_គេឲ្យ $0\le x\,;\,y;\,z\le 1$ ។បង្ហាញថា $(2^x+2^y+2^z)\left(\dfrac{1}{2^x}+\dfrac{1}{2^y}+\dfrac{1}{2^z}\right)\le\dfrac{81}{8}$

៦៦_ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+.....+\dfrac{1}{n^2}>\dfrac{3}{2}$ ។

៦៧_គេពិនិត្យអនុគមន៍ $f(x,y,z)=\dfrac{xy\sqrt{z-a^2}+zx\sqrt{y-b^2}+zy\sqrt{x-c^2}}{xyz}$

ដែល $a\,,\,b\,,\,c>0$ និង $x\ge c^2\,;\,y\ge b^2\,,z\ge c^2$ ។

ចូររកតម្លៃអតិបរមានៃអនុគមន៍ $f(x,y,z)$ ។

៦៨_ចំពោះគ្រប់ $x;y\in IR$ គេមាន $3x+4y=10$ ។រកតម្លៃតូចបំផុតនៃ $S=x^2+y^2$

៦៩_គេឲ្យ $\forall x,y\in IR : x^2+y^2=4$ ។ រកតម្លៃបរមានៃ $A=20x+21y$?

៧០_គេឲ្យ $2x^2+y^2=6$ ។ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតនៃ $P=xy^2$?

៧១_ចំពោះគ្រប់ $x\,;y\in IR$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sqrt{4\cos^2 x\cos^2 y+\sin^2(x-y)}+\sqrt{4\sin^2 x\sin^2 y+\sin^2(x-y)}\ \geq 2$$ ។

៧២_គេឲ្យ $x^2+y^2+z^2=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា $|x+2y+2z|\leq 3$ ។

៧៣_គេឲ្យ $2x+3y+6z=14$ ។ ចូរបង្ហាញថា $x^2+y^2+z^2\geq 4$ ។

៧៤_គេឲ្យ $a\geq 1\,;b\geq 1$ ។ បង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\ \leq 2\sqrt{\log_2(\frac{a+b}{2})}$

៧៥_គេឲ្យ $a\,,b\,,c>0$ ។ បង្ហាញថា $a^a b^b c^c\geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$ ។

៧៦_គេឲ្យ $a>0\,;b>0$ ។ គ្រប់ $n\in IN^*$ បង្ហាញថា $\dfrac{a^n+b^n}{2}\geq\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$ ។

៧៧_គេឲ្យ $n\in IN^*$ ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\sqrt{n(n+1)+\sqrt{n(n+1)+.......+\sqrt{n(n+1)}}}<n+1$$

(មាន n រ៉ាឌីកាល់)។

៧៨_គេឲ្យ $f(x,y)=\dfrac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$ ។បង្ហាញថា $\forall x,y\in IR : |f(x,y)|\leq\dfrac{1}{2}$ ។

៧៩_ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$ បង្ហាញថា $\left|\dfrac{\cos 2x+2\sqrt{2}\sin 2x+1}{2+\cos 2x}\right|\leq 2$ ។

៨០_គេឲ្យចំនួនពិត $x;y>0$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{x^m y^n}{(x+y)^{m+n}}\leq\dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$; $m,n\in IN^*$ ។

៨១_ចំពោះគ្រប់ $0 \le x_k \le \pi$, $k = 1 ;2 ;3 ;........; n$ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{\sin x_1 + \sin x_2 + ... + \sin x_n}{n} \le \sin\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)$$ ។

៨២_ចំពោះគ្រប់ $0 < x_k < \frac{\pi}{2}$, $k = 1 ;2 ;3 ;........; n$ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{\tan x_1 + \tan x_2 + ... + \tan x_n}{n} \ge \tan\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)$$ ។

៨៣_គេឲ្យ $a_1 , a_2 , ..., a_n \ge 0$ ។ ចំពោះគ្រប់ $p \in IN^*$ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{a_1^p + a_2^p + a_3^p + ... + a_n^p}{n} \ge \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}\right)^p$$ ។

៨៤_គេឲ្យ $p > 0$, $q > 0$ ដែល $p + q = 1$ ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n < (a_1^{\frac{1}{p}} + a_2^{\frac{1}{p}} + ... + a_n^{\frac{1}{p}})^p \, (b_1^{\frac{1}{q}} + b_2^{\frac{1}{q}} + ... + b_n^{\frac{1}{q}})^q$$

($a_k > 0 , b_k > 0 , k = 1 ; 2 ;........; n$) ។

៨៥_ចូរប្រៀបធៀបពីរចំនួន a^b និង b^a ដែល $a > 0$ និង $b > 0$ ។

៨៦_ចូរស្រាយថា $e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in IR$ ។

៨៧_ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{x^2 - x + 1} \le \frac{4}{3}$ ។

៨៨_បើ $a; b ; c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានមិនស្មើគ្នាទាំងអស់នោះចូរស្រាយថា ៖

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) > 6abc$$ ។

៨៩_បើ $a > 0$, $a \ne 1$ និង $m > n$ នោះបង្ហាញថា $a^m + \frac{1}{a^m} > a^n + \frac{1}{a^n}$ ។

៩០_គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ ។

ចូរស្រាយថា $a^2+b^2 \geq 2ab\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C+\frac{1}{2}\cos C\right)$ ។

៩១_បង្ហាញថាបើ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាននោះ $(a+b)(b+c)(c+a)>8abc$

៩២_ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $a,b,c,d>0$ គេមាន ៖

$$\sqrt{a+b+c+d} > \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}{2}$$ ។

៩៣_ក. បង្ហាញថា $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$, $\forall n\in IN^*$ ។

ខ. គ្រប់ $p\geq 2$ ចូរទាញថា $2\sqrt{p}-2<\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)<2\sqrt{p}-1$ ។

គ.ទាញថា $13<\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{11}}+........+\frac{1}{\sqrt{100}}<14$ ។

៩៤_ឲ្យ $a;b;x;y$ ជាចំនួនពិត ,. $a>0, b>0$ និង $a+b=1$ ។

បង្ហាញថា $A.B\geq xy$ ដែល $A=ax+by$; $B=bx+ay$ ។

៩៥_គេឲ្យ a ; b ; c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន និងមិនស្មើគ្នាទាំងអស់ ។

ចូរបង្ហាញថា $(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)>(a^2+b^2+c^2)^2$ ។

៩៦_គេឲ្យ $a_1 , a_2 , ..., a_n>0$; $0<q<1$ និងគ្រប់ $k=1;2;3;.......n$

គេសរសេរ $b_k=a_1q^{k-1}+a_2q^{k-2}+.........+a_{k-1}q+a_k+a_{k+1}q+a_{k+2}q^2+.......+a_nq^{n-k}$

ក. បង្ហាញថា $q<\frac{b_{k+1}}{b_k}<\frac{1}{q}$, $\forall k=1,2,3,.......,(n-1)$

ខ. បង្ហាញថា $\sum_{k=1}^{n}(b_k)<\frac{1+q}{1-q}\sum_{k=1}^{n}(a_k)$ ។

៩៧-គេឲ្យ $a>0$, $a\neq 1$ ។ ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n គេមាន ៖

$$\frac{1+a^2+a^4+..........+a^{2n}}{a+a^3+a^5+......+a^{2n-1}}>\frac{n+1}{n}$$ ។

៩៨-គេឲ្យ $a>0 , b>0 , c>0$ ។

បើ $x=b+c-a$; $y=c+a-b$; $z=a+b-c$

ចូរបង្ហាញថា $abc(xy+yz+zx)\geq xyz(ab+bc+ca)$ ។

៩៩- គេឲ្យ $a>0 , b>0 , c>0$ ។

បង្ហាញថា $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$ ។

១០០-គេឲ្យ $a_1;a_2;a_3;.......;a_n$ ជា n ចំនួនវិជ្ជមាន ។

តាង $S=a_1+a_2+....+a_n$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{S}{S-a_1}+\frac{S}{S-a_2}+............+\frac{S}{S-a_n}\geq\frac{n^2}{n-1}$, $n>1$ ។

១០១-គេឲ្យ n ចំនួន $a_1;a_2;a_3;.......;a_n$ ដែល $0<a_k<1$, $k=1;2;3;.......;n$

គេតាង $S=a_1+a_2+....+a_n$ ។

ក. បង្ហាញថា $(1+a_1)(1+a_2)...........(1+a_n)>1+S_n$

ខ. បង្ហាញថា $(1-a_1)(1-a_2)...........(1-a_n)>1-S_n$

គ. បង្ហាញថា $\frac{1}{(1-a_1)(1-a_2).........(1-a_n)}>(1+a_1)(1+a_2).........(1+a_n)$

១០២-បង្ហាញថា $\forall n\in IN^*:\ 2\leq(1+\frac{1}{n})^n<3$ ។

១០៣_គេឲ្យ $a_k > 0$; $b_K > 0$ ($k = 1 ; 2 ; 3 ;..........;n)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k b_k}{a_k + b_k}\right) \le \frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k)\sum_{k=1}^{n}(b_k)}{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)}$ ។

១០៤_គេឲ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a_n{}^2 \le a_n - a_{n+1}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $a_n < \frac{1}{n}$ ចំពោះ $n = 1;2;3;.........;n$ ។

១០៥_គេឲ្យ $A ; B ; C$ ជាមុំស្រួចរបស់ត្រីកោណ ABC ។

ចូរស្រាយថា $\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C > 3 + \frac{3n}{2}$, $n \in IN^*$ ។

១០៦_គេឲ្យ $x_1 , x_2 , ..., x_n > 0$ គេតាង $y_k = \frac{1}{x_k}$; $k = 1 ; 2 ;.......;n$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sum_{k=1}^{n}(x_k)\sum_{k=1}^{n}(y_k) \ge n^2$ ។

១០៧_គេឲ្យ $x_1 \le x_2 \le ..... \le x_n$; $y_1 \le y_2 \le .... \le y_n$ ។

ក.ចូរពន្យល់ថាចំពោះ j ថេរនោះ $S_j = \sum_i (x_i - x_j)(y_i - y_j) \ge 0$ ។

ខ. ចូរស្រាយថា $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) \times \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}\right) \le \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i y_j)}{n}$ ។

១០៨_ក.ចូរស្រាយថាបើ $p \geq -1$ នោះ $(1+p)^n \geq 1+np$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

(វិសមភាព **Bernoulli**) ។

ខ. គេឲ្យ $a_1 ; a_2 ; .... ; a_n$ ជា n ចំនួនមិនអវិជ្ជមាន ។

គេតាង $A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$; $G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 .... a_n}$

ចូរបង្ហាញថាបើ $G_k \leq A_k$ ហើយ $A_k \neq 0$ នោះ $(G_k)^k a_{k+1} \leq (A_k)^{k+1}(1+p)$

ដែល $p = \dfrac{a_{k+1}}{a_k} - 1$ ។

គ.ចូរស្រាយថា $G_n \leq A_n$ (ដោយប្រើវិសមភាព **Bernoulli**)

១០៩_គេឲ្យ $p > 0 ; q > 0$ ដែល $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ។

សន្មតថា $\{ x_1 ; x_2 ; .....; x_n \}$ និង $\{ y_1 ; y_2 ; .....; y_n \}$

ជាពីរសំណុំនៃចំនួនវិជ្ជមាន ។

ក. ចូរស្រាយថា $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k y_k) \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k{}^p \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\sum_{k=1}^{n} y_k{}^q \right)^{\frac{1}{q}}$

(**Holder inequality**) ។

ខ. ចូរស្រាយថា $\displaystyle\left[\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^r \right]^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k{}^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k{}^r \right)^{\frac{1}{r}}$, $r > 1$

(**Minkowski Inequality**) ។

១១០–ដោះស្រាយសមីការ $7^{\frac{x-1}{x+3}} . 9^{\frac{n-2}{x+1}} = 3\sqrt{7}$

១១១–ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a , b , c យក $p = \frac{a+b+c}{2}$ ។

គេគូសមេដ្យាន AM , BN និង CP នៃត្រីកោណ ។

តាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយថា $a\,AM^2 + b\,BN^2 + c\,CP^2 = \frac{p(p^2+5r^2+2rR)}{2}$

១១២–ក/ចូរបង្ហាញថា $\left(\sqrt[3]{9}\right)^{\log_2 x} = \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{\log_2 3}$ ចំពោះ $x > 0$ ៕

ខ/ដោះស្រាយសមីការ $\left(\sqrt[3]{9}\right)^{\log_2 x} + 2\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{\log_2 3} = 27$

១១៣–គេឲ្យត្រីកោណ ABC មួយមាន B_1 ជាចំនុចកណ្តាលនៃជ្រុង AB

និង C_1 ជាចំនុចកណ្តាលនៃជ្រុង AC ។

P ជាចំនុចប្រសព្វរវាងរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC_1 និង AB_1C

Q ជាចំនុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (AP)រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ AB_1C_1 និង

($P \neq A$ និង $Q \neq A$) ។ ចូរបង្ហាញថា $\frac{AP}{AQ} = \frac{3}{2}$?

(Argentina 2009)

១១៤–ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$\begin{cases} 2^x\ 3^y\ 5^z = 240 \\ 3^x\ 2^y\ 5^z = 360 \\ 5^x\ 3^y\ 2^z = 1350 \end{cases}$$

50th International Mathematical Olympiad
Bremen | Germany | 2009

Language: **Khmer**

Day: **1**

ថ្ងៃពុធទី ១៥ ខែ កក្កដា ឆ្នាំ ២០០៩

លំហាត់ ១. គេអោយ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ ជាចំនួនគត់ខុសគ្នានៅក្នុងសំណុំ $\{1, \ldots, n\}$ ហើយ $a_i(a_{i+1}-1)$ ចែកដាច់នឹង n ចំពោះ $i = 1, \ldots, k-1$ ។ បង្ហាញថា $a_k(a_1-1)$ មិនចែកដាច់នឹង n ទេ ។

លំហាត់ ២. គេអោយត្រីកោណ ABC មួយដែលមាន O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណនេះ ។ចំនុច P និង Q ជាចំនុចស្ថិតនៅក្នុងជ្រុង CA និង AB រៀងគ្នា ។ គេអោយ K, L និង M ជាចំនុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ BP, CQ និង PQ រៀងគ្នា ហើយ Γ ជារង្វង់កាត់តាមចំនុច K, L និង M ។ឧបមាថាបន្ទាត់ PQ ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ Γ ។ បង្ហាញថា $OP = OQ$ ។

លំហាត់ ៣. ឧបមាថា $s_1, s_2, s_3, \ldots$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមានកើនដាច់ខាតហើយស្វ៊ីតរង

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \quad \text{និង} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

ជាស្វ៊ីតនព្វន្តទាំងពីរ ។ បង្ហាញថាស្វ៊ីត $s_1, s_2, s_3, \ldots$ ក៏ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែរ ។

Language: Khmer

រយៈពេល: ៤ម៉ោង និង ៣០ នាទី
លំហាត់និមួយៗមានតំលៃ ៧ពិន្ទុ

50th International Mathematical Olympiad Bremen | Germany | 2009

Language: **Khmer**

Day: **2**

ថ្ងៃព្រហស្បត្តិ៍ ទី ១៦ ខែ កក្កដា ឆ្នាំ ២០០៩

លំហាត់ ៤. គេអោយត្រីកោណ ABC មួយដែលមានជ្រុង $AB = AC$ ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle CAB$ និង $\angle ABC$ កាត់ជ្រុង BC និង CA ត្រង់ចំនុច D និង E រៀងគ្នា។ គេអោយចំនុច K ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ADC ។ ឧបមាថា $\angle BEK = 45°$ ។ ចូររកតំលៃដែលអាចកើតមានទាំងអស់នៃមុំ $\angle CAB$ ។

លំហាត់ ៥. ចូរកំនត់អនុគមន៍ f ទាំងអស់ពីសំនុំចំនួនគត់វិជ្ជមានទៅសំនុំចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ : ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b មានត្រីកោណមួយដែលជ្រុងរបស់វាមានប្រវែង

$$a,\ f(b) \text{ និង } f(b + f(a) - 1) \text{ ។}$$

លំហាត់ ៦. គេអោយ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានខុសគ្នា និង M ជាសំនុំដែលមាន $n-1$ ចំនួនគត់វិជ្ជមានមិនផ្ទុកធាតុ $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ ។ សត្វកណ្តូបមួយនឹងលោតតាមអ័ក្សចំនួនពិត ដោយចាប់ផ្តើមពីចំនុច 0 និងធ្វើការលោត n ដងទៅខាងស្តាំដោយប្រវែង $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ក្នុងលំដាប់មួយចំនួន ។
បង្ហាញថាលំដាប់នេះអាចត្រូវបានជ្រើសរើសក្នុងលក្ខណៈមួយដែលសត្វកណ្តូបនេះមិនជាន់លើចំនុចណាមួយនៅក្នុងសំនុំ M ។

Language: Khmer

រយៈពេល: ៤ ម៉ោង និង ៣០ នាទី

លំហាត់និមួយៗមានតំលៃ ៧ពិន្ទុ

Language: **Khmer** Day: **1**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

ថ្ងៃ ពុធ ទី ១៦ កក្កដា ២០០៨

លំហាត់ ១: គេអោយ ABC ជាត្រីកោណដែលមុំទាំងអស់ជាមុំស្រួច H ជាអរតូសង់ ។ រង្វង់កាត់តាម H មានផ្ចិតជាចំនុចកណ្តាលនៃ BC រង្វង់នេះប្រសព្វនឹង BC ត្រង់ A_1 និង A_2 ។ ដូចគ្នានេះដែរ រង្វង់កាត់តាម H មានផ្ចិតជាចំនុចកណ្តាលនៃ CA ហើយរង្វង់នេះប្រសព្វនឹង CA ត្រង់ B_1 និង B_2 រង្វង់មួយទៀតកាត់តាម H ដដែលមានផ្ចិតជាចំនុចកណ្តាលនៃ AB រង្វង់នេះប្រសព្វនឹង AB ត្រង់ C_1 និង C_2 ។ បង្ហាញថាចំនុច $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ ស្ថិតនៅលើរង្វង់តែមួយ ។

លំហាត់ ២: (ក) បង្ហាញថា

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, y, z ដែលចំនួននិមួយៗខុសពី 1 ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ $xyz=1$

(ខ) បង្ហាញថាវិសមភាពខាងលើនេះទៅជាសមភាព ចំពោះត្រីធាតុ x, y, z ច្រើនរាប់មិនអស់ ដែល x, y, z ជាចំនួនសនិទានខុសពី 1 និង ផ្ទៀងផ្ទាត់ $xyz=1$ ។

លំហាត់ ៣: បង្ហាញថាមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ច្រើនរាប់មិនអស់ដែល n^2+1 មានតួចែក ជាចំនួនបឋមដែលធំជាង $2n+\sqrt{2n}$ ។

Language: Khmer

រយៈពេល: ៤ ម៉ោង និង ៣០ នាទី
លំហាត់និមួយៗទទួលបាន ៧ពិន្ទុ

Language: **Khmer** Day: **2**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

ថ្ងៃ ព្រហស្បតិ៍ ទី ១៧ កក្កដា ២០០៨

លំហាត់ ៤: រកគ្រប់អនុវត្តន៍ $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ (មានន័យថា f ជាអនុវត្តន៍ពីចំនួនពិតវិជ្ជមានទៅចំនួនពិតវិជ្ជមាន) ដែល

$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន w, x, y, z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $wx=yz$ ។

លំហាត់ ៥: គេអោយ n និង k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដោយ $k\ge n$ និង $k-n$ ជាចំនួនគូ។ គេមានអំពូលចំនួន $2n$ ដែលដាក់លេខ $1, 2, \ldots, 2n$ អំពូលនិមួយៗនៃអំពូលទាំងនោះអាច ***បើក*** រឺ ***បិទ*** ។ ដំបូង អំពូលទាំងអស់បិទ។ យើងពិនិត្យ ស៊្វីតនៃជំហាន: នៅជំហ៊ាននិមួយៗ អំពូលមួយនៃអំពូលទាំងនោះត្រូវបានចុចប្តូរ (ចុចប្តូរពីបើកទៅបិទ រឺ ចុចប្តូរពីបិទទៅបើក) ។

តាង N ជាចំនួននៃស៊្វីតនេះ ដែលមាន k ជំហ៊ាន ហើយធ្វើអោយមានស្ថានភាព ដែលអំពូលពី 1 ទៅ n ទាំងអស់បើក និង អំពូល $n+1$ ទៅ $2n$ ទាំងអស់បិទ។

តាង M ជាចំនួននៃស៊្វីតនេះ ដែលមាន k ជំហ៊ាន ធ្វើអោយមានស្ថានភាព ដែលអំពូលពី 1 ទៅ n ទាំងអស់បើក និង អំពូល $n+1$ ទៅ $2n$ ទាំងអស់បិទ ប៉ុន្តែគ្មានអំពូលពី $n+1$ ទៅ $2n$ ធ្លាប់បានបើកទេ។

កំណត់អត្រា N/M ។

លំហាត់ ៦: គេអោយ $ABCD$ ជាចតុកោណប៉ោង ដែល $|BA|\neq|BC|$ ។ តាង ω_1 និង ω_2 ជារង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC និង ADC រៀងគ្នា។ ឧបមាថា មានរង្វង់ ω ប៉ះនឹងកន្លះបន្ទាត់ BA បន្លាយចេញពី A និងប៉ះកន្លះបន្ទាត់ BC បន្លាយចេញពី C ដែលរង្វង់នេះក៏ប៉ះនឹងបន្ទាត់ AD និង CD ដែរ។

បង្ហាញថា បន្ទាត់ប៉ះរួមខាងក្រៅទាំងសងខាងនឹងរង្វង់ ω_1 និង រង្វង់ ω_2 ប្រសព្វគ្នាលើរង្វង់ ω ។

Language: Khmer

រយៈពេល: ៤ ម៉ោង និង ៣០ នាទី
លំហាត់និមួយៗទទួលបាន ៧ពិន្ទុ

CAMBODIA
Language: KHMER

ថ្ងៃទី ១ (DAY 1): ២៥ កក្កដា ២០០៧

រយៈពេល: ៤ម៉ោង ៣០នាទី

ចំណាំ: *សូមសរសេរចំលើយនៅលើតែទំព័រម្ខាងប៉ុណ្ណោះក្នុងក្រដាស់ចំលើយរបស់អ្នក លំហាត់នីមួយៗទទួលបាន ៧ពិន្ទុស្មើគ្នា*

លំហាត់ទី ១: គេអោយ $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ជាចំនួនពិត។ ចំពោះគ្រប់ i $(1 \le i \le n)$ កំនត់

$d_i = \max\left\{a_j : 1 \le j \le i\right\} - \min\left\{a_j : i \le j \le n\right\}$

ហើយ តាង $d = \max\left\{d_i : 1 \le i \le n\right\}$

a) បង្ហាញថា ចំពោះចំនួនពិត $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$

នោះ $\max\left\{\left|x_i - a_i\right| : 1 \le i \le n\right\} \ge \frac{d}{2}$ $(*)$ ។

b) បង្ហាញថាមានចំនួនពិត $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ ដែលធ្វើអោយ$(*)$ ជាសមភាព។

លំហាត់ទី ២: គេអោយប្រាំចំនុច A, B, C, D និង E ដែល $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម និង $BCED$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់។ តាង l ជាបន្ទាត់គូសចេញពី A ។ ឧបមាថា បន្ទាត់ l ប្រសព្វអង្កត់ DC ត្រង់ F និង បន្ទាត់ l ប្រសព្វបន្ទាត់BC ត្រង់ G ។ គេសន្មតថា $EF = EG = EC$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា l ជាកន្ទះបន្ទាត់ពុះមុំ DAB ។

លំហាត់ទី ៣: ក្នុងការប្រលងប្រកួតប្រជែងគណិតវិទ្យា អ្នកចូលប្រកួតខ្លះជាមិត្តភក្តិ មិត្តភាពតែងតែមានភាពស្និតស្នាល។ គេហៅ ក្រុមមួយនៃអ្នកចូលប្រកួតថាជា ***clique*** មួយ បើមានពីរៗនាក់ក្នុងចំណោមពួកគេជាមិត្តភក្តិគ្នា (ក្នុងករណីពិសេស ក្រុមណាដែលមានអ្នកចូលប្រកួតតិចជាងពីរនាក់ជា***clique*** មួយ)។ ចំនួននៃ សមាជិកនៃ ***clique*** មួយ ហៅថា*ទំហំ* នៃ ***clique***។

នៅក្នុងការប្រកួតនេះ គេអោយទំហំធំបំផុតនៃ***clique*** ជាចំនួនគូ បង្ហាញថា គេអាចរៀបអ្នកចូលប្រកួតដាក់ក្នុងបន្ទប់ពីរ ដែលទំហំធំបំផុតនៃ ***clique*** ក្នុងបន្ទប់មួយស្មើនឹង ទំហំធំបំផុតនៃ ***clique*** ក្នុងបន្ទប់ មួយទៀត។

CAMBODIA
Language: KHMER

ថ្ងៃទី ២ (DAY 2): ២៦ កក្កដា ២០០៧

រយៈពេល: ៤ម៉ោង ៣០នាទី

ចំណាំ: *សូមសរសេរចំលើយនៅលើតែទំព័រម្ខាងប៉ុណ្ណោះក្នុងក្រដាស់ចំលើយរបស់អ្នក លំហាត់នីមួយៗទទួលបាន ៧ពិន្ទុស្មើគ្នា*

លំហាត់ទី ៤: ក្នុងត្រីកោណ ABC កន្ទះបន្ទាត់ពុះមុំ BCA ប្រសព្វរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណនេះត្រង់ R ហើយ កន្ទះបន្ទាត់ពុះនេះកាត់មេដ្យាទ័រនៃជ្រុង BC ត្រង់ P និង កាត់មេដ្យាទ័រនៃជ្រុង AC ត្រង់ Q ។ ចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ BC គឺ K និង ចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ AC គឺ L ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ត្រីកោណ RPK និង ត្រីកោណ RQL មានក្រឡាផ្ទៃស្មើគ្នា។

លំហាត់ទី ៥: គេអោយ a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ $4ab-1$ ជាតួចែកនៃ $(4a^2-1)^2$ នោះ $a=b$ ។

លំហាត់ទី ៦: គេអោយ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ តាង

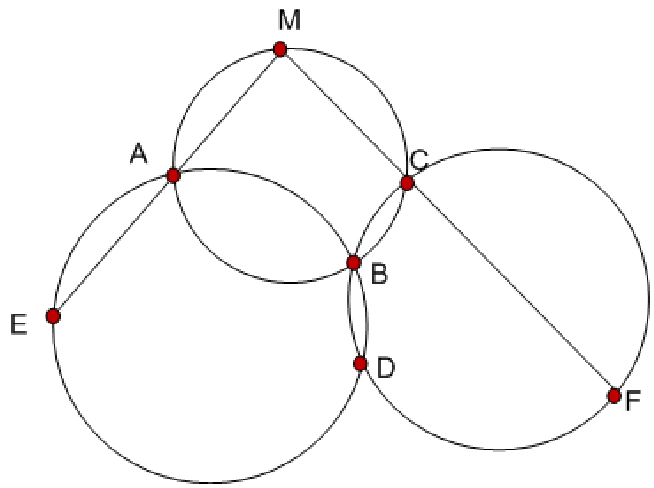
$$S=\{(x,y,z): x,y,z\in\{0,1,\cdots,n\},\ x+y+z>0\}$$

ជាសំនុំនៃ $(n+1)^3-1$ ចំនុចនៅក្នុងលំហដែលមានវិមាត្របី។ កំណត់ចំនួនប្លង់តិចបំផុតដែលអាចមាន ដែលប្រជុំនៃប្លង់ទាំងនេះផ្ទុក S ប៉ុន្តែ មិនផ្ទុកគល់តំរុយ $(0,0,0)$ ។

វិញ្ញាសាប្រឡងសិស្សពូកែគណិតវិទ្យាប្រទេសកម្ពុជាឆ្នាំ2009

វិញ្ញាសាថ្ងៃទី១

១)* (១០ពិន្ទុ) គេឱ្យរង្វង់បីដែលកាត់គ្នាពីរៗដូចរូបខាងក្រោម។ សង់រូបឡើងវិញ ហើយបង្ហាញថា**E; D** និង **F** នៅលើបន្ទាត់តែមួយ។



២) (១០ពិន្ទុ) បង្ហាញថា $1^{2009}+2^{2009}+...+n^{2009}$ ចែកមិនដាច់នឹង $n+2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

៣) (១៥ពិន្ទុ) គេមាន $f(x)=x^2-3x+3$ ។

ក) បង្ហាញថា បើ $f(x)=x$ នោះ $f(f(x))=x$

ខ) ចូររកឫសនៃសមីការ $f(x)=x$ ។ ទាញរកឫសនៃសមីការ

$$(x^2-3x+3)^2-3(x^2-3x+3)+3=x$$ ។

៤) (១៥ពិន្ទុ) តាង $n! = n(n-1)(n-2)....3.2.1$ ។

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេបាន៖

$$1+\frac{2009}{1!}+\frac{2009.2010}{2!}+...+\frac{2009.2010...(2009+n-1)}{n!}=\frac{2010.2011...(2009+n)}{n!}$$

៥) (១៥ពិន្ទុ) អនុគមន៍ g កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ ៖

$g(x+1)+g(x-1)=\sqrt{2}g(x)$ ។

ក) តាង $g(x)=p$ និង $g(x-1)=q$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

គណនា $g(x+1), g(x+2), g(x+3)$ និង $g(x+4)$ ជាអនុគមន៍នៃ p និង q ។

ខ) បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍ខួប។

៦) (១៥ពិន្ទុ) គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត u_n ដែលកំណត់ដោយ $u_1=\frac{1}{2}$ និង

$u_n=\frac{2n-3}{2n}u_{n-1}$ ចំពោះ $n = 2 , 3 , ...$ ។

ចូរបង្ហាញថា $u_1+u_2+...+u_n<1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

៧)** (២០ពិន្ទុ) ត្រីកោណកែង ABC មួយ មានអ៊ីប៉ូតេនុស BC=a និងកម្ពស់

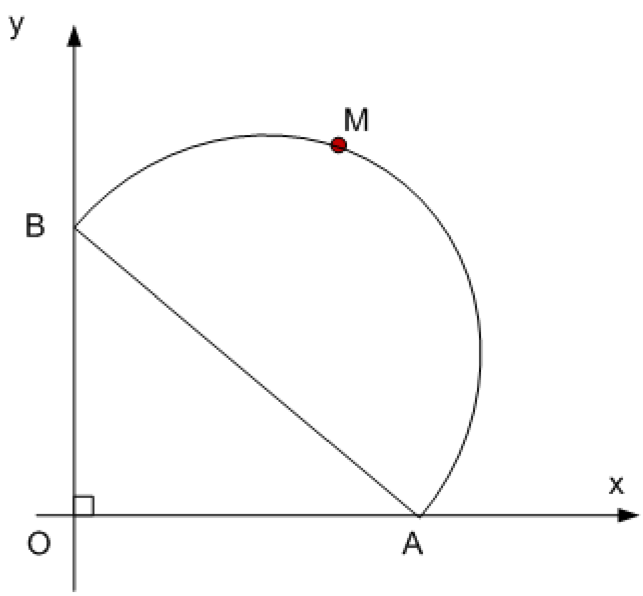
AH=h ។ គេចែកBC ជា n ចំណែក ដែល n ជាចំនួនគត់សេស។

គេយកPQ ជាចំណែកនៅកណ្តាលគេ ហើយរង្វាស់មុំ $\angle PAQ = x$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\tan x = \dfrac{4nh}{a(n^2-1)}$ ។

វិញ្ញាសាថ្ងៃទី២

៨) គេឱ្យចំណុចM មួយនៃកន្លះរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត [AB]។ រកសំណុំចំណុចនៃ ចំណុចM កាលណា A ចល័តលើកន្លះបន្ទាត់ [Ox) និង B ចល័តលើកន្លះ បន្ទាត់ [Oy) នៃមុំកែង xOy ដោយរក្សាប្រវែង AB ថេរ។



៩) បង្ហាញថា $3^{2n}+2^{6n-5}$ ចែកដាច់នឹង 11 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។