លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

បរិញ្ញាបត្រផ្នែកគណិតវិទ្យា

គណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោក

សម្រាប់

សិស្សពូកែផ្នែកគណិតវិទ្យា

ត្រៀមប្រឡងអាហារូបករណ៍

ភាគ៧

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k^{2}}{y_k}\right) \geq \frac{\left[\sum_{k=1}^{n}\left(x_k\right)\right]^{2}}{\sum_{k=1}^{n}\left(y_k\right)}$$

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លឹម ផល្លុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក លឹម ឆុន

លោក នន់ សុខណា

លោក ព្រឹម សុនិត្យ

លោក ឆិត្យ ម៉េង

លោក អ៊ឹង សំណាង

លោកស្រី ទុយ រីណា

លោក ផល ប៊ុនឆាយ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិត្តសិរ

ការិកុំព្យូទ័រ

កញ្ញា លី គុណ្ណាភា

លោក អ៊ឹង សំណាង

អារម្ភកថា

សៀវភៅគណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោកភាគទី៧ ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់នៅក្នុងដៃនេះ ចែកចេញជាបីផ្នែកដែលផ្នែកទី១ ជាកម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស ផ្នែកទី២ ជាផ្នែកដំណោះស្រាយ និង ផ្នែកទី៣ ជាលំហាត់អនុវត្តន៍ ។ រាល់បប្រធានលំហាត់នីមួយៗនៅក្នុងសៀវភៅនេះ យើងខ្ញុំបានជ្រើសរើសយកតែ លំហាត់ណាដែលមានលក្ខណៈពិបាក មកធ្វើដំណោះស្រាយគំរូយ៉ាងក្បោះក្បាយបំផុត ។

គោលបំណងនៃការរៀបរៀងចងក្រងគឺដើម្បីទុកជាឯកសារជំនួយសម្រាប់អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន និង ម្យ៉ាងទៀតដើម្បីចូលរួមលើកស្ទួយវិស័យគណិតវិទ្យាក្នុងប្រទេសកម្ពុជាយើងឱ្យកាន់តែរីកចម្រើនឆាប់រហស់ស្របតាមសម័យវិទ្យាសាស្ត្រទំនើប ។

សៀវភៅនេះមិនល្អហួសគេហួសឯងនោះទេ ។ កំហុសឆ្គងដោយអចេតនាប្រាកដជាមានទាំងបច្ចេកទេស និង អក្ខរាវិរុទ្ធ ។ ហេតុនេះយើងខ្ញុំជាអ្នកនិពន្ធ រងចាំជានិច្ចនូវមតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីអ្នកសិក្សាគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដោយក្ដីរីករាយដើម្បីកែលំអសៀវនេះឱ្យកាន់តែមានសុក្រិត្យភាពប្រសើរឡើងថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់ ខ្ញុំបាទអ្នកនិពន្ធសូមគោរពជូនពរអ្នកសិក្សាទាំងអស់មានសុខភាពល្អមានប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និង ទទួលបានជោគជ័យជានិច្ចក្នុងការសិក្សា ។

បាត់ដំបង ថ្ងៃទី ២៥ ខែធ្នូ ឆ្នាំ២០១០

អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាយជ្រាវ **លឹម ផល្គុន**
Tel : 017 768 246
Email: lim_phalkun@ymail.com
Website: www.mathtoday.wordpress.com

កម្រងលំហាត់

1. ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$|a\cos x + b\sin x| \le \sqrt{a^2+b^2}$$

2. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} \ge \frac{1}{a+b} \quad ;(a>0\ ,\ b>0\ )$$

3. គេឱ្យអនុគមន៍

$$f(x) = 4(\tan^2 x + \cot^2 x) - 12(\tan x + \cot x) + 9$$

ដែល $x \in (\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ )$ ។

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

4. គេឱ្យអនុគមន៍ $y = \dfrac{3\cos x}{5+4\sin x}$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុត និង តម្លៃធំបំផុតនៃអនុគមន៍ y ។

5. គេឱ្យអនុគមន៍

$$f(x,y) = x^2y^2 + 3x^2 + 4y^2 - 12(xy + x + 2y) + 89$$

ចូរកំណត់ x និង y ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x,y)$ មានតម្លៃតូចបំផុត

រួចកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនោះ ។

6. គេមានសមីការ $x^2 - x - 3 = 0$ មានឫសតាងដោយ x_1 និង x_2

   ចូរគណនាតម្លៃ $A = 19x_1{}^3 + 4x_2{}^5$

7. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = ax^2 + bx + c$

   ដែល $a \neq 0, a, b, c \in IR$ ។

   ចូរស្រាយថាបើសមីការ $f(x) = x$ គ្មានឫសក្នុងសំណុំចំនួនពិតនោះ

   សមីការ $f[f(x)] = x$ ក៏គ្មានឫសក្នុងសំណុំចំនួនពិតដែរ ។

8. ដោះស្រាយសមីការ :

$$x^2 + x + 4 = 2\sqrt{3x^3 - 6x^2 + 12x}$$

9. ដោះស្រាយសមីការ :

$$\frac{\sqrt[3]{10(3^x - 1)^2} + \sqrt[3]{4(3^x + 1)^2}}{2 + \sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{9^x - 1}$$

10. គេឱ្យសមីការ $x^9 + 9x - 999 = 0$

ចូរបង្ហាញថាសមីការនេះមានឫស x_0 ជាចំនួនពិតតែមួយគត់ រួចស្រាយថា x_0 ជាចំនួនអសនិទាន ។

11. គេដឹងថា $\tan x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ ។

   ចូរស្រាយថា $\frac{\cos^4 x}{a} + \frac{\sin^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$

12. គេដឹងថា $\cos a=\frac{m}{n+p}$, $\cos b=\frac{n}{p+m}$, $\cos c=\frac{p}{m+n}$

ចូរគណនាកន្សោម :

$$M=\frac{\sin^2 a}{2+2\cos a-\sin^2 a}+\frac{\sin^2 b}{2+2\cos b-\sin^2 b}+\frac{\sin^2 c}{2+2\cos c-\sin^2 c}$$

13. គេមានត្រីកោណ ABC មួយដែល $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ ។

តាង R និង S រៀងគ្នាជាកាំ និង ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC នេះ ។

ចូរស្រាយថា :

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{R(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)}{4S}$$

14. ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា :

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{2}$$

15. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $1-\cos A\le\frac{a^2}{2bc}$

ដែល a , b , c ជាជ្រុងត្រីកោណ ABC ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)\le\frac{1}{8}$

16. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A$

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$

17. គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានមុំ $\mathbf{A,B,C}$ ជាមុំស្រួចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

សមភាព

$$\cot A+\cot B+\cot C=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$$ ។

ចូរស្រាយថា $\mathbf{ABC}$ ជាត្រីកោណសមង្ស ?

18. តាង $\mathbf{R}$ ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង $\mathbf{S}$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយ ។

ក. ចូរស្រាយថា $(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\dfrac{2R^2}{S}$

ខ. បើ $\mathbf{ABC}$ ជាមុំស្រួចនោះចូរទាញឱ្យបានថា : $\cos A\cos B\cos C\le\dfrac{1}{8}$ ។

19. គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$

ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយមានផ្ចិត $\mathbf{O}$ និង កាំ $\mathbf{R}$ ។

តាង $\mathbf{S}$ និង S_{OBC} ជាផ្ទៃក្រឡានៃ ΔOBC និង ΔABC រៀងគ្នា ។

សន្មតថា $\mathbf{A,B,C}$ ជាមុំស្រួច ។

ក. ចូរស្រាយថា $S_{OBC}=\dfrac{1}{4}a^2\cot A$ ។

ខ. ចូរទាញបង្ហាញថា $a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C=4S$ ។

គ. ចូរទាញបង្ហាញថា $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\dfrac{abc}{2R^2}$ ។

20. គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយ ។ $\mathbf{D}$ ជាចំណុចមួនៃជ្រុង $\mathbf{[BC]}$ ដែល

$\angle BAD = \alpha$ និង $\angle DAC = \beta$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin B} + \dfrac{\sin\beta}{\sin C}$?

21. បង្ហាញថាបើ $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ តាងរៀងគ្នាជាតួទី $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$

នៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយនោះគេបានសមភាព

$(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0$ ។

22. គេឱ្យចតុកោណប៉ោង $\mathbf{ABCD}$ មួយមានផ្ទៃក្រឡាស្មើ $\mathbf{1}$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$AB+BC+CD+DA+AC+BD \geq 4+\sqrt{8} \ ?$$

(**Austria-Poland, 1985**)

23. គេឱ្យត្រីកោណពីរមានជ្រុង $\mathbf{a,b,c}$ កន្លះបរិមាត្រ $p=\dfrac{a+b+c}{2}$

និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ $\mathbf{R}$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{2}{5} \leq \dfrac{pR}{2aR+bc} < \dfrac{1}{2}$

24. គេយក $\mathbf{I}$ និង $\mathbf{O}$ ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅនៃ $\Delta\mathbf{ABC}$ ។ រង្វង់ ω_A ចារឹកក្នុងមុំ $\mathbf{A}$ វាប៉ះទៅនឹង $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$ និង $\mathbf{BC}$ រៀងគ្នា ត្រង់ចំនុច $\mathbf{K},\mathbf{M}$ និង $\mathbf{N}$ រៀងគ្នា ។

បើសិនជាចំនុចកណ្តាល $\mathbf{P}$ នៃអង្កត់ $\mathbf{KM}$ ស្ថិតនៅលើរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ នោះចូរបង្ហាញថាបីចំនុច $\mathbf{O}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{N}$ រត់ត្រង់គ្នា ?

25. ចូរស្រាយថាការេនៃគ្រប់ចំនួនគត់ត្រូវមានទម្រង់ $\mathbf{4}k$ ឬ $\mathbf{4}k+\mathbf{1}$ គ្រប់ $k \in IN^*$ ។

26. ចូរស្រាយថាបើ a^2+b^2 ចែកដាច់នឹង $\mathbf{3}$ នោះ a ចែកដាច់នឹង $\mathbf{3}$ និង b ចែកដាច់នឹង $\mathbf{3}$ ។

27. ចូរបង្ហាញថា n^4+4 ជាចំនួនបឋមតែក្នុងករណី $n=1$ ។

28. គេដឹងថា $\mathbf{1002004008016032}$ មានកត្តាបឋម $p>250000$ ។ ចូរកំណត់កត្តាបឋមនោះ ។

29. ចូរកំណត់ផ្នែកគត់នៃ $\displaystyle\sum_{k=1}^{10^6}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$?

30. ចូរកំណត់គូមួយនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b ដោយដឹងថា :

$(i):$ $ab(a+b)$ ចែកមិនដាច់នឹង 7

$(ii):$ $(a+b)^7-a^7-b^7$ ចែកដាច់នឹង 7^7 (IMO 1984)

31. គេអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{1-2x}}$

ចូរគណនា $S = f(\frac{1}{n})+ f(\frac{2}{n})+...+ f(\frac{n-1}{n})$

32. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន : $A = 113^n - 168^n - 141^n + 427^n$

ចែកដាច់នឹង 7 ជានិច្ចគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

33. គេឱ្យ m និង n ជាពីរចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $1 \le m < n$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $m+n$ ដើម្បីឱ្យចំនួន 22^m និង 22^n

មានលេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយដូចគ្នា ។

34. គេឱ្យ $f(n) = 4n^2 + 7n + 34$ ដែល $n \in IN^*$

ចូរបង្ហាញថាគ្មាន n ដែលធ្វើឱ្យចំនួន $f(n)$ ចែកដាច់នឹង 121 ទេ។

35.គេឱ្យ $f(a) = 16a^2 + 50a - 13$ ដែល $a \in \mathbb{Z}$

កំណត់គ្រប់តម្លៃ a ដែលធ្វើឱ្យចំនួន $f(a)$ ចែកដាច់នឹង 49

36. កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន x ដើម្បីឱ្យ $x^3 + 10x^2 + 115x - 237$

ចែកដាច់នឹង 343 ។

37. ចូរស្រាយថាគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេបាន $f(n)=\dfrac{4n+13}{7n+23}$

ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន ?

38. គេដឹងថា $\tan^3\varphi=\frac{b}{a}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{\cos^4\varphi}{\sqrt[3]{a^2}}+\frac{\sin^4\varphi}{\sqrt[3]{b^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}$$

39. គេមានស៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ :

$$a_n=(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{4})....(1+\frac{1}{2^{2^n}})$$

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ ។

40. គេឱ្យផលបូក

$$S_n=\frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+....+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}\right]$$

ចូរគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ។

41. គេមានស៊េរីអនន្តមួយ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{n^2}{2^n})=\frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+.....+\frac{n^2}{2^n}+....$

ចូរស្រាយថាស៊េរីខាងលើនេះជាស៊េរីបង្រួម ។

42. ចំពោះគ្រប់ $n\in IN^*$ គេមានផលបូក :

$$S_n=\frac{5}{1.3.2^2}+\frac{7}{3.5.2^3}+\frac{9}{5.7.2^4}+....+\frac{2n+3}{(2n-1)(2n+1).2^{n+1}}$$

ក. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យគេបានសមភាព

$$\frac{2n+3}{(2n-1)(2n+1).2^{n+1}}=\frac{a}{(2n-1).2^n}+\frac{b}{(2n+1).2^{n+1}}$$

ខ. គណនា S_n និង $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ ។

43. ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{n \in IN^*}$ គេមានស៊ីតចំនួនពិត $\mathbf{(a_n)}$ កំណត់ដោយ :

$\mathbf{a_0 = 3}$ និង $\mathbf{a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{3^{2^n}}\right) a_n - \frac{1}{3^{2^n}}}$

ក. គណនា $\mathbf{a_n}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{n}$ ។

ខ. គណនាលីមីត $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}$ ។

44. គេឱ្យ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាពីរចំនួនពិតដែល $\mathbf{0 \le a < b < \frac{\pi}{2}}$

ចូរស្រាយថា $\mathbf{\frac{b-a}{\cos^2 a} \le \tan b - \tan a \le \frac{b-a}{\cos^2 b}}$

45. គណនាផលបូក :

$$\mathbf{S_n = C_n^1 + 4C_n^2 + 9C_n^3 + ... + n^2 C_n^n} \text{ ដែល } \mathbf{C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

46. គេឱ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f(x) = \sqrt{x+2}}$

ក. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប $\mathbf{(c)}$ នៃអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ ។

ខ. គេពិនិត្យ $\mathbf{n}$ ចំនុច $\mathbf{A_1 , A_2 , A_3 , ..., A_n}$ ស្ថិតនៅលើក្រាប $\mathbf{(c)}$ ដែល $\mathbf{A_1(\sqrt{2} , \sqrt{2+\sqrt{2}})}$ និង $\mathbf{A_n(a_n , a_{n+1})}$ គ្រប់ $\mathbf{n \in IN^*}$ ។

ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃចំនុច $\mathbf{A_n}$ ។

គ. ចូរគណនា $\mathbf{OA_n}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{n}$ រួចគណនា $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} OA_n}$ ។

47. គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។ មេដ្យាននៃត្រីកោណដែលគូសចេញពីកំពូល **A , B , C** កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណរៀងគ្នាត្រង់ **M , N , P** ។ តាង a, b, c ជាជ្រុង និង m_a, m_b, m_c ជាមេដ្យាននៃ ΔABC ។

ចូរស្រាយថា

$$\frac{m_a^{\ 4}}{a^4+2b^2c^2}+\frac{m_b^{\ 4}}{b^4+2a^2c^2}+\frac{m_c^{\ 4}}{c^4+2a^2b^2}\geq\frac{16}{9}$$

48. គេឱ្យ **M** ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ **ABC** ។

បើបន្ទាត់ **AB** ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ **AMC**

នោះបង្ហាញថា $\dfrac{1}{\sin\angle CMA}+\dfrac{1}{\sin\angle CBM}\geq 2\sqrt{3}$

49. គេឱ្យ $a\ , b\ , c>0$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}{b+c}+\frac{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}{c+a}+\frac{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{a+b}\geq\frac{9}{2}$$

50. គេឱ្យ $a>1\ , b>1$ និង $x>1$ ។

ចូរស្រាយថា $\sqrt{\log_a x}+\sqrt{\log_b x}\geq 2\sqrt{\log_{\frac{a+b}{2}} x}$

វិញ្ញាសាប្រឡងគណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោក

ភាគទី ៧

រក្សាសិទ្ធិដោយ លឹម ផល្គុន

Tel : 017 768 246

លំហាត់ទី១

ចំពោះគ្រប់ $x \in IR$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$|a\cos x + b\sin x| \le \sqrt{a^2 + b^2}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$|a\cos x + b\sin x| \le \sqrt{a^2 + b^2}$$

តាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{u} = (a, b)$ និង $\overrightarrow{v} = (\cos x, \sin x)$

យក θ ជាមុំរវាងវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{u}$ និង $\overrightarrow{v}$ ។

តាមនិយមន័យផលគុណស្កាលែ :

$$\overrightarrow{u} . \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| . |\overrightarrow{v}| \cos\theta$$

គេទាញ $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{u} . \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| . |\overrightarrow{v}|}$

គេមាន $\overrightarrow{u} . \overrightarrow{v} = a\cos x + b\sin x$

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{a^2 + b^2} \; ; |\overrightarrow{v}| = 1$$

គេបាន $\cos\theta = \frac{a\cos x + b\sin x}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ចំពោះគ្រប់មុំ $\theta \in IR : -1 \le \cos\theta \le 1$

ឬ $|\cos\theta| \le 1$

គេបាន $\left|\frac{a\cos x + b\sin x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$

ដូចនេះ $|a\cos x + b\sin x| \le \sqrt{a^2+b^2}$ ។

លំហាត់ទី២

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}\geq\frac{1}{a+b}\quad ;(a>0\ ,\ b>0\ )$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}\geq\frac{1}{a+b}$$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេបាន :

$$\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\frac{(\sin^2 x)^2}{a}+\frac{(\cos^2 x)^2}{b}$$

$$\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}\geq\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{a+b}$$

ដោយ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

ដូចនេះ $\displaystyle\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}\geq\frac{1}{a+b}$ ។

លំហាត់ទី៣

គេឱ្យអនុគមន៍

$$f(x)=4(\tan^2 x+\cot^2 x)-12(\tan x+\cot x)+9$$

ដែល $x \in \left(0\,,\,\frac{\pi}{2}\right)$ ។

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន

$$f(x)=4(\tan^2 x+\cot^2 x)-12(\tan x+\cot x)+9$$

តាង $t=\tan x+\cot x \ge 2\sqrt{\tan x\cot x}=2$

គេបាន $t^2=(\tan x+\cot x)^2=\tan^2 x+\cot^2 x+2$

ឬ $\tan^2 x+\cot^2 x=t^2-2$

គេបាន $f(x)=4(t^2-2)-12t+9=(2t-3)^2-8$

ដោយ $t\ge 2$ នោះ $2t-3\ge 4-3=1$

គេបាន $f(x)\ge 1-8=-7$

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃ $f(x)$ ស្មើនឹង -7 ។

លំហាត់ទី៤

គេឱ្យអនុគមន៍ $y=\dfrac{3\cos x}{5+4\sin x}$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុត និង តម្លៃធំបំផុតនៃអនុគមន៍ y ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃតូចបំផុត និង តម្លៃធំបំផុត

គេមាន $y=\dfrac{3\cos x}{5+4\sin x}$

គេបាន $5y+4y\sin x=3\cos x$

ឬ $3\cos x-4y\sin x=5y \quad (1)$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេបាន :

$|3\cos x-4y\sin x|\le\sqrt{9+16y^2} \quad (2)$

តាម **(1)** និង **(2)** គេបាន $|5y|\le\sqrt{9+16y^2}$

ឬ $25y^2\le 9+16y^2$

$9y^2\le 9$

$y^2\le 1$

គេទាញបាន $-1\le y\le 1$ ។

ដូចនេះ $y_{\min}=-1$; $y_{\max}=1$ ។

លំហាត់ទី៥

គេឱ្យអនុគមន៍

$$f(x,y)=x^2y^2+3x^2+4y^2-12(xy+x+2y)+89$$

ចូរកំណត់ x និង y ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x,y)$ មានតម្លៃតូចបំផុត រួចកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនោះ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ x និង y

$$f(x,y)=x^2y^2+3x^2+4y^2-12(xy+x+2y)+89$$

អនុគមន៍នេះអាចសរសេរ :

$$f(x,y)=(xy-6)^2+3(x-2)^2+4(y-3)^2+5$$

ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x,y)$ មានតម្លៃតូចបំផុតលុះត្រាតែ :

$$\begin{cases} xy-6=0 \\ x-2=0 \quad \text{នាំឱ្យ } x=2\ ,\ y=3 \\ y-3=0 \end{cases}$$

ដូចនេះ $x=2$, $y=3$ ហើយតម្លៃតូចបំផុតនៃ $f(x,y)$ គឺ 5 ។

លំហាត់ទី៦

គេមានសមីការ $x^2 - x - 3 = 0$ មានឫសតាងដោយ x_1 និង x_2

ចូរគណនាតម្លៃ $A = 19x_1^{\ 3} + 4x_2^{\ 5}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ $A = 19x_1^{\ 3} + 4x_2^{\ 5}$

គេមាន x_1 និង x_2 ជាឫសនៃសមីការ $x^2 - x - 3 = 0$

គេបាន $x_1^{\ 2} - x_1 - 3 = 0$ (1) និង $x_2^{\ 2} - x_2 - 3 = 0$(2)

តាម (1) គេបាន $x_1^{\ 2} = x_1 + 3$

$$x_1^{\ 3} = x_1^{\ 2} + 3x_1$$

$$x_1^{\ 3} = (x_1 + 3) + 3x_1 = 4x_1 + 3$$

តាម (2) គេបាន $x_2^{\ 2} = x_2 + 3$

$$x_2^{\ 4} = (x_2 + 3)^2$$

$$x_2^{\ 5} = x_2(x_2^{\ 2} + 6x_2 + 9)$$

$$x_2^{\ 5} = x_2(x_2 + 3 + 6x_2 + 9)$$

$$x_2^{\ 5} = x_2(7x_2 + 12)$$

$$x_2^{\ 5} = 7x_2^{\ 2} + 12x_2 = 7(x_2 + 3) + 12x_2$$

$$x_2^{\ 5} = 19x_2 + 21$$

យក $x_1^{\ 3} = 4x_1 + 3$ និង $x_2^{\ 5} = 19x_2 + 21$

ជំនួសក្នុងកន្សោម $A = 19x_1^{\ 3} + 4x_2^{\ 5}$ គេបាន :

$$\begin{aligned} A &= 19(4x_1 + 3) + 4(19x_2 + 21) \\ &= 76x_1 + 57 + 76x_2 + 84 \\ &= 76(x_1 + x_2) + 141 \end{aligned}$$

ដោយ $x_1 + x_2 = 1$

គេបាន $A = 76 + 141 = 217$

ដូចនេះ $A = 19x_1^{\ 3} + 4x_2^{\ 5} = 217$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=ax^2+bx+c$

ដែល $a\neq 0,a,b,c\in IR$ ។

ចូរស្រាយថាបើសមីការ $f(x)=x$ គ្មានឫសក្នុងសំណុំចំនួនពិតនោះ

សមីការ $f[f(x)]=x$ ក៏គ្មានឫសក្នុងសំណុំចំនួនពិតដែរ ។

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ

គេមាន $f(x)=x$ សមមូល $ax^2+bx+c=x$

ឬ $ax^2+(b-1)x+c=0\ \ (E_1)$

សមីការ (E_1) គ្មានឫសក្នុងសំណុំចំនួនពិតលុះត្រាតែ :

$\Delta_1=(b-1)^2-4ac<0\ \ \ (1)$

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន :

$$\begin{aligned} f[f(x)]-x &= af^2(x)+bf(x)+c-x \\ &= a[f^2(x)-x^2]+b[f(x)-x]+f(x)-x \\ &= [f(x)-x][af(x)+ax+b+1] \end{aligned}$$

សមីការ $f[f(x)]=x$ សមមូល :

$[f(x)-x][af(x)+ax+b+1]=0$

ដោយ $f(x)-x=0$ ជាសមីការគ្មានឫស (សម្មតិកម្ម)

គេបាន $af(x)+ax+b+1=0$

$$a(ax^2+bx+c)+ax+b+1=0$$

$$a^2x^2+a(b+1)x+ac+b+1=0 \ (E_2)$$

ឌីសគ្រីមីណង់នៃសមីការ (E_2) គឺ :

$$\Delta_2=a^2(b+1)^2-4a^2(ac+b+1)$$
$$=a^2[(b+1)^2-4ac-4b-4]$$
$$=a^2[(b-1)^2-4ac-4] \ (2)$$

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន $\Delta_2<0$

ដូចនេះបើសមីការ $f(x)=x$ គ្មានឫសក្នុងសំណុំចំនួនពិតនោះ

សមីការ $f[f(x)]=x$ ក៏គ្មានឫសក្នុងសំណុំចំនួនពិតដែរ ។

លំហាត់ទី៨

ដោះស្រាយសមីការ :

$$x^2+x+4=2\sqrt{3x^3-6x^2+12x}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ $x^2+x+4=2\sqrt{3x^3-6x^2+12x}$

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ $3x^3-6x^2+12x\geq 0$

សមមូល $3x(x^2-2x+4)\geq 0$

សមមូល $3x[(x-1)^2+3]\geq 0$ នាំឱ្យ $x\geq 0$ ។

តាង $a=3x$, $b=x^2-2x+4$

គេបាន $a+b=x^2+x+4$ ។

សមីការអាចសរសេរ $a+b=2\sqrt{ab}$

លើកជាការេ $(a+b)^2=4ab$

$$a^2+2ab+b^2=4ab$$

$$(a-b)^2=0$$

$$a=b$$

គេទាញ $3x=x^2-2x+4$ ឬ $x^2-5x+4=0$

ដោយ $a+b+c=0$ ដូចនេះ $x_1=1$; $x_2=4$ ។

លំហាត់ទី៩

ដោះស្រាយសមីការ :

$$\frac{\sqrt[3]{10(3^x-1)^2}+\sqrt[3]{4(3^x+1)^2}}{2+\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{9^x-1}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ :

$$\frac{\sqrt[3]{10(3^x-1)^2}+\sqrt[3]{4(3^x+1)^2}}{2+\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{9^x-1}$$

សមីការអាចសរសេរ :

$$\sqrt[3]{10(3^x-1)^2}-(2+\sqrt[3]{5})\sqrt[3]{9^x-1}+\sqrt[3]{4(3^x+1)^2}=0$$

ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនឹង $\sqrt[3]{(3^x+1)^2}$ គេបាន :

$$\sqrt[3]{10}.\sqrt[3]{\left(\frac{3^x-1}{3^x+1}\right)^2}-(2+\sqrt[3]{5})\sqrt[3]{\frac{3^x-1}{3^x+1}}+\sqrt[3]{4}=0$$

តាង $t=\sqrt[3]{\dfrac{3^x-1}{3^x+1}}$ គេបាន $\sqrt[3]{10}t^2-(2+\sqrt[3]{5})t+\sqrt[3]{4}=0$

$$\Delta=(2+\sqrt[3]{5})^2-4\sqrt[3]{10}.\sqrt[3]{4}$$

$$=4+4\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}-8\sqrt[3]{5}$$

$$=4-4\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}=(2-\sqrt[3]{5})^2$$

គេទាញឫស $t_1 = \dfrac{2+\sqrt[3]{5}+2-\sqrt[3]{5}}{2\sqrt[3]{10}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}$

$$t_2 = \frac{2+\sqrt[3]{5}-2+\sqrt[3]{5}}{2\sqrt[3]{10}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

-ចំពោះ $t = \sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}$ គេបាន $\sqrt[3]{\dfrac{3^x-1}{3^x+1}} = \sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}$

ឬ $5(3^x-1) = 4(3^x+1)$

$3^x = 9$ ឬ $x = 2$ ។

-ចំពោះ $t = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$ គេបាន $\sqrt[3]{\dfrac{3^x-1}{3^x+1}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$

ឬ $2(3^x-1) = 3^x+1$

$3^x = 3$ ឬ $x = 1$ ។

ដូចនេះ $x = 1\,;\ x = 2$ ។

លំហាត់ទី១០

គេឱ្យសមីការ $x^9+9x-999=0$

ចូរបង្ហាញថាសមីការនេះមានឫស x_0 ជាចំនួនពិតតែមួយគត់ រួចស្រាយថា x_0 ជាចំនួនអសនិទាន ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាសមីការមានឫសតែមួយគត់

តាងអនុគមន៍ $f(x)=x^9+9x-999$ ដែល $x\in IR$

គេបាន $f'(x)=9x^8+9=9(x^8+1)>0\ \forall x\in IR$

នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនជានិច្ច ។

ដូចនេះក្រាប (c) តាង f កាត់អក្ស័ $x'ox$ តែមួយចំនុចគត់ ។

ដូចនេះសមីការ $x^9+9x-999=0$ មានឫស x_0 តែមួយគត់ ។

បង្ហាញថា x_0 ជាចំនួនអសនិទាន

ឧបមាថា x_0 ជាចំនួនសនិទាននោះ $x_o=\dfrac{p}{q}$ ដែល $GCD(p,q)=1$

គេបាន $(\dfrac{p}{q})^9+9(\dfrac{p}{q})-999=0$ ឬ $p^9=9q^8(111q-p)$

ដោយអង្គទីពីរចែកដាច់នឹង q នោះ p ចែកដាច់នឹង q (ផ្ទុយពីការពិត)

ដូចនេះ x_0 ជាចំនួនអសនិទាន ។

លំហាត់ទី១១

គេដឹងថា $\tan x=\sqrt{\frac{b}{a}}$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\cos^4 x}{a}+\frac{\sin^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{\cos^4 x}{a}+\frac{\sin^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$

គេមាន $\tan x=\sqrt{\frac{b}{a}}$ នាំឱ្យ $\tan^2 x=\frac{b}{a}$ ដោយ $\tan x=\frac{\cos x}{\sin x}$

គេបាន $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{b}{a}$ ឬ $\frac{\cos^2 x}{a}=\frac{\sin^2 x}{b}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{a+b}=\frac{1}{a+b}$

គេទាញ $\frac{\cos^2 x}{a}=\frac{1}{a+b}$ នាំឱ្យ $\frac{\cos^4}{a}=\frac{a}{(a+b)^2}$ **(1)**

ហើយ $\frac{\sin^2 x}{b}=\frac{1}{a+b}$ នាំឱ្យ $\frac{\sin^4}{b}=\frac{b}{(a+b)^2}$ **(2)**

បូកសមភាព **(1)** និង **(2)** អង្គ និង អង្គគេបាន **:**

$$\frac{\cos^4 x}{a}+\frac{\sin^4 x}{b}=\frac{a}{(a+b)^2}+\frac{b}{(a+b)^2}=\frac{a+b}{(a+b)^2}=\frac{1}{a+b}$$

ដូចនេះ $\frac{\cos^4 x}{a}+\frac{\sin^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$ ។

លំហាត់ទី១២

គេដឹងថា $\cos a=\frac{m}{n+p}$, $\cos b=\frac{n}{p+m}$, $\cos c=\frac{p}{m+n}$

ចូរគណនាកន្សោម :

$$M=\frac{\sin^2 a}{2+2\cos a-\sin^2 a}+\frac{\sin^2 b}{2+2\cos b-\sin^2 b}+\frac{\sin^2 c}{2+2\cos c-\sin^2 c}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាកន្សោម :

គេមាន $\sin^2 a=1-\cos^2 a=(1-\cos a)(1+\cos a)$

និង $2+2\cos a-\sin^2 a=1+2\cos a+\cos^2 a=(1+\cos a)^2$

គេបាន $\frac{\sin^2 a}{2+2\cos a-\sin^2 a}=\frac{(1-\cos a)(1+\cos a)}{(1+\cos a)^2}=\frac{1-\cos a}{1+\cos a}$

ហើយ $\frac{\sin^2 b}{2+2\cos b-\sin^2 b}=\frac{1-\cos b}{1+\cos b}$

និង $\frac{\sin^2 c}{2+2\cos c-\sin^2 c}=\frac{1-\cos c}{1+\cos c}$

គេបាន $E=\frac{1-\cos a}{1+\cos a}+\frac{1-\cos b}{1+\cos b}+\frac{1-\cos c}{1+\cos c}$

$$=\frac{1-\frac{m}{n+p}}{1+\frac{m}{n+p}}+\frac{1-\frac{n}{p+m}}{1+\frac{n}{p+m}}+\frac{1-\frac{p}{m+n}}{1+\frac{p}{m+n}}$$

$$=\frac{n+p-m+p+m-n+m+n-p}{m+n+p}=1$$

លំហាត់ទី១៣

គេមានត្រីកោណ **ABC** មួយដែល $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ ។

តាង **R** និង **S** រៀងគ្នាជាកាំ និង ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ **ABC** នេះ ។

ចូរស្រាយថា :

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{R(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)}{4S}$$

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស និង ស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ **ABC** គេបាន :

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ ឬ $\frac{\cos A}{a}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}$

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ ឬ $\begin{cases} a=2R\sin A \\ b=2R\sin B \\ c=2R\sin C \end{cases}$ និង $S=\frac{abc}{4R}$

គេបាន $\frac{\cos A}{a}=\frac{4R^2(\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A)}{8RS}$

ឬ $\frac{\cos A}{a}=\frac{R(\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A)}{4S}$ **(1)**

ដូចគ្នាដែរ $\frac{\cos B}{b}=\frac{R(\sin^2 A+\sin^2 C-\sin^2 B)}{4S}$ **(2)**

និង $\frac{\cos C}{c}=\frac{R(\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C)}{4S}$ **(3)**

បូកសមភាព **(1),(2) &(3)** គេបាន :

$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{R(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)}{4S}$ ពិត ។

លំហាត់ទី១៤

ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ **ABC** ចូរស្រាយថា :

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{2}$$

តាងជ្រុង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ និង $p=\frac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រ

យក R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង S ជាផ្ទៃក្រឡារបស់ ΔABC ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

គេបាន $a^2=(b^2+2bc+c^2)-2bc(1+\cos A)$

គេទាញ $1+\cos A=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$

ដោយ $p=\frac{a+b+c}{2}$ នោះ $a+b+c=2p$ និង $b+c-a=2(p-a)$

គេបាន $1+\cos A=\frac{4p(p-a)}{2bc}=\frac{2p(p-a)}{bc}$

ដូចគ្នាដែរ $1+\cos B=\frac{2p(p-b)}{ac}$, $1+\cos C=\frac{2p(p-c)}{ab}$

គេបាន $(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{8p^2.p(p-a)(p-b)(p-c)}{(abc)^2}$ (1)

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abc}{4R}$

គេទាញ $\dfrac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(abc)^2}=\dfrac{1}{16R^2}$ **(2)**

យកទំនាក់ទំនង **(2)** ជំនួសក្នុង **(1)** គេបាន :

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{8p^2}{16R^2}=\frac{1}{2}.\left(\frac{p}{R}\right)^2 \quad (3)$$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

គេទាញ $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{a+b+c}{2R}=\dfrac{2p}{2R}=\dfrac{p}{R}$ **(4)**

តាម **(3)** និង **(4)** គេបានទំនាក់ទំនង :

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{2}$$ ពិត ។

សម្គាល់ : គេអាចសួរបន្ថែមទៀតដោយឱ្យស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\left(1+\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3\geq\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sqrt{2}}\right)^2$$

ដោយប្រើវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត មធ្យមធរណីមាត្រគេបាន :

$$(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)\leq\left(\frac{1+\cos A+1+\cos B+1+\cos C}{3}\right)^3$$

ឬ $(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)\leq\left(1+\dfrac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3$

ដោយ $(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)=\dfrac{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}{2}$

ដូចនេះ $\left(1+\dfrac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3\geq\left(\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sqrt{2}}\right)^2$

លំហាត់ទី១៥

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\mathbf{1-\cos A \le \frac{a^2}{2bc}}$

ដែល **a , b , c** ជាជ្រុងត្រីកោណ **ABC** ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $\mathbf{(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) \le \frac{1}{8}}$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\mathbf{1-\cos A \le \frac{a^2}{2bc}}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសគេមាន $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន $\mathbf{b^2 + c^2 \ge 2bc}$

គេទាញ $\mathbf{a^2 \ge 2bc - 2bc\cos A = 2bc(1-\cos A)}$

ដូចនេះ $\mathbf{1-\cos A \le \frac{a^2}{2bc}}$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $\mathbf{(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) \le \frac{1}{8}}$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $\mathbf{1-\cos A \le \frac{a^2}{2bc}}$ **(1)**

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\mathbf{1-\cos B \le \frac{b^2}{2ac}}$ **(2)** និង $\mathbf{1-\cos C \le \frac{c^2}{2ab}}$ **(3)**

គុណវិសមភាព **(1) , (2) , (3)** អង្គ និង អង្គគេទទួលបាន **:**

$\mathbf{(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) \le \frac{1}{8}}$ ពិត ។

លំហាត់ទី១៦

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A$

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា :

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C}$$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A$

តាង **a , b , c** ជាជ្រុងត្រីកោណ **ABC**

និង **R** ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ។

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូស $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

គេទាញ $\begin{cases} a = 2R\sin A \\ b = 2r\sin B \quad (1) \\ c = 2R\sin C \end{cases}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad (2)$

យក **(1)** ជំនួសក្នុង **(2)** គេបាន :

$$4R^2\sin^2 A = 4R^2(\sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A)$$

សម្រួល $4R^2$ ក្នុងអង្គទាំងពីរនៃសមភាពគេបាន :

$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A$ ពិត

ដូចនេះ $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា :

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C}$$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B \sin C \cos A$$

គេទាញ $\cos A = \dfrac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2\sin B \sin C}$ ដោយ $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$

គេបាន $\cot A = \dfrac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2\sin A \sin B \sin C}$ (i)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេទទួលបាន $\cot B = \dfrac{\sin^2 A + \sin^2 C - \sin^2 B}{2\sin A \sin B \sin C}$ (ii)

និង $\cot C = \dfrac{\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C}$ (iii)

ធ្វើផលបូកសមភាព (i) , (ii) & (iii) គេបាន :

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C}$$ ពិត

ដូចនេះ $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2\sin A \sin B \sin C}$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានមុំ $\mathbf{A,B,C}$ ជាមុំស្រួចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព

$$\cot A+\cot B+\cot C=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$$ ។

ចូរស្រាយថា **ABC** ជាត្រីកោណសមង្ស ?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា **ABC** ជាត្រីកោណសមង្ស

តាង **a , b , c** ជាជ្រុង និង **S** ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ **ABC**

គេមាន $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

គេទាញបាន $\sin A=\frac{2S}{bc}$, $\sin B=\frac{2S}{ac}$, $sibC=\frac{2S}{ab}$

គេបាន $\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{2S}{bc}}=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$

ហើយ $\cot B=\frac{a^2+c^2-b^2}{4S}$, $\cot C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$

គេបាន $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$ **(1)**

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=\frac{bc+ca+ab}{2S}$ **(2)**

តាមសម្មតិកម្ម $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$ **(3)**

យកសមីការ **(1) & (2)** ជំនួសក្នុង **(3)** គេបាន :

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}=\frac{ab+bc+ca}{4S}$$

ឬ $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$

ទំនាក់ទំនងនេះសមមូល $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

គេទាញ $\begin{cases} a-b=0 \\ b-c=0 \\ c-a=0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $a=b=c$ ។

ដោយត្រីកោណ **ABC** មានជ្រុងបីស្មើគ្នាវាជាត្រីកោណសមង្ស័ ។

សម្គាល់ :

គេអាចស្រាយថា $\cot A+\cot B+\cot C=\dfrac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$

ហើយសម្ភតិកម្ម $\cot A+\cot B+\cot C=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{1}{\sin B}+\dfrac{1}{\sin C}\right)$

គេទាញបានសមីការ :

$$\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$$

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A$$

$$(\sin A-\sin B)^2+(\sin B-\sin C)^2+(\sin C-\sin A)^2=0$$

គេទាញ $\begin{cases} \sin A-\sin B=0 \\ \sin B-\sin C=0 \\ \sin C-\sin A=0 \end{cases}$ នាំឱ្យ $\sin A=\sin B=\sin C$

ឬ $A=B=C$ នោះ **ABC** ជាត្រីកោណសមង្ស័ ។

លំហាត់ទី១៨

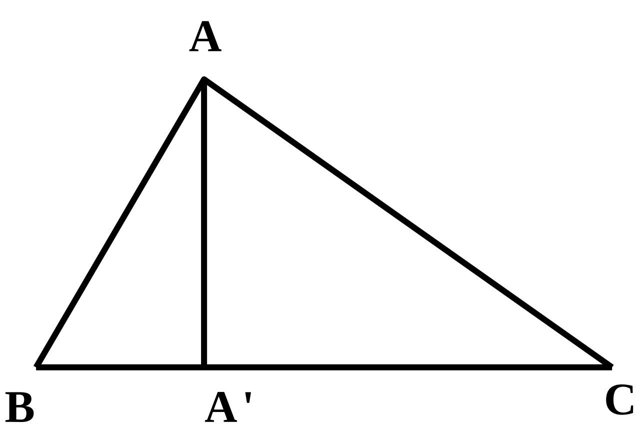
តាង **R** ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង **S** ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ **ABC** មួយ ។

ក. ចូរស្រាយថា $(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\dfrac{2R^2}{S}$

ខ. បើ **ABC** ជាមុំស្រួចនោះចូរទាញឱ្យបានថា : $\cos A\cos B\cos C\le\dfrac{1}{8}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\dfrac{2R^2}{S}$



គូសកំពស់ $AA'=h_a$ នៃ ΔABC ។ តាង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ ។

ក្នុងត្រីកោណកែង ABA' & $AA'C$ គេមាន

$$\cot B=\frac{BA'}{AA'}\ ;\ \cot C=\frac{A'C}{AA'}$$

គេបាន $\cot B+\cot C=\dfrac{BA'+A'C}{AA'}=\dfrac{a}{h_a}=\dfrac{a^2}{2S}$ ។ S ជាផ្ទៃក្រឡា ΔABC

ដូចគ្នាដែរ $\cot C+\cot A=\dfrac{b^2}{2S}$, $\cot A+\cot B=\dfrac{c^2}{2S}$

គេបាន $(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\frac{a^2b^2c^2}{8S^3}$

ដោយ $S=\frac{abc}{4R}$ នោះ $abc=4RS$

គេបាន $(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\frac{16R^2S^2}{8S^3}$

ដូចនេះ $(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\frac{2R^2}{S}$ ។

ខ. ទាញ ឱ្យបានថា : $\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$

មាន $(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)=\frac{2R^2}{S}$ (i)

បើ ABC ជាមុំស្រួចនោះ $\cot A>0$, $\cot B>0$, $\cot C>0$

តាមវិសមភាព មធ្យមនព្វន្ត មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន :

$\cot A+\cot B\ge 2\sqrt{\cot A\cot B}$, $\cot B+\cot C\ge 2\sqrt{\cot B\cot C}$

$\cot C+\cot A\ge 2\sqrt{\cot C\cot A}$

គុណវិសមភាពខាងលើនេះ អង្គ និង អង្គ គេបាន

$(\cot A+\cot B)(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)\ge 8\cot A\cot B\cot C$ (ii)

តាម (i)&(ii) គេទាញបាន $8\cot A\cot B\cot C\le\frac{2R^2}{S}$

តែ $S=\frac{abc}{4R}=\frac{8R^3\sin A\sin B\sin C}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C$

គេបាន $8\cot A\cot B\cot C\le\frac{2R^2}{2R^2\sin A\sin B\sin C}$

ដូចនេះ $\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$

លំហាត់ទី១៩

គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{BC=a}$, $\mathbf{AC=b}$, $\mathbf{AB=c}$

ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយមានផ្ចិត $\mathbf{O}$ និង កាំ $\mathbf{R}$ ។

តាង $\mathbf{S}$ និង $\mathbf{S_{OBC}}$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃ $\mathbf{\Delta OBC}$ និង $\mathbf{\Delta ABC}$ រៀងគ្នា ។

សន្មតថា $\mathbf{A,B,C}$ ជាមុំស្រួច ។

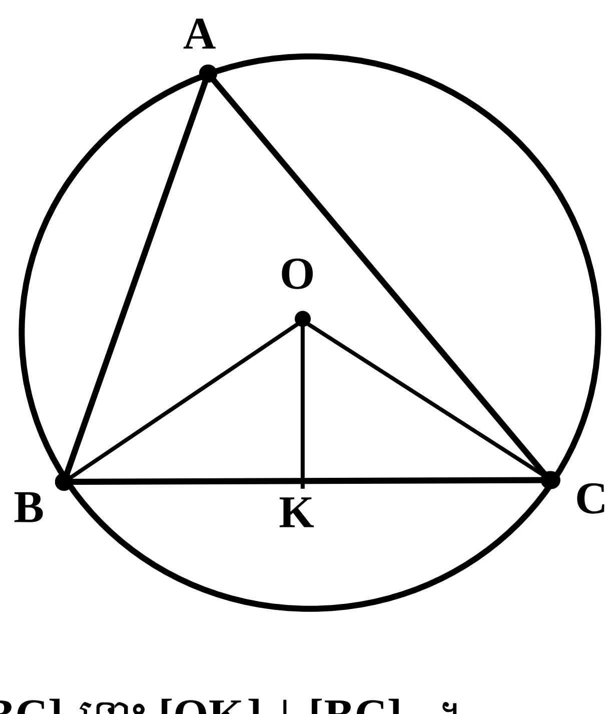
ក. ចូរស្រាយថា $\mathbf{S_{OBC}=\frac{1}{4}a^2\cot A}$ ។

ខ. ចូរទាញបង្ហាញថា $\mathbf{a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C=4S}$ ។

គ. ចូរទាញបង្ហាញថា $\mathbf{a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{abc}{2R^2}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $\mathbf{S_{OBC}=\frac{1}{4}a^2\cot A}$



តាង $\mathbf{K}$ ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង $\mathbf{[BC]}$ នោះ $\mathbf{[OK]\perp[BC]}$ ។

គេមាន $\mathbf{\angle BOK=\frac{\angle BOC}{2}=\angle BAC=\angle A}$ ។

ក្នុងត្រីកោណកែង **OBK** គេមាន :

$$\cot\angle BOK=\cot A=\frac{OK}{BK}=\frac{2OK}{BC}=\frac{2OK}{a}$$

គេទាញ $OK=\frac{1}{2}a\cot A$ ។

ក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ **OBC** គឺ $S_{OBC}=\frac{1}{2}BC.OK=\frac{1}{4}a^2\cot A$ ពិត

ដូចនេះ $S_{OBC}=\frac{1}{4}a^2\cot A$ ។

ខ. ទាញបង្ហាញថា $a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C=4S$

តាមសម្រាយខាងលើគេមាន $S_{OBC}=\frac{1}{4}a^2\cot A$

ដូចគ្នាដែរ $S_{OCA}=\frac{1}{4}b^2\cot B$ និង $S_{OAB}=\frac{1}{4}c^2\cot C$

ដោយ $S=S_{OBC}+S_{OCA}+S_{OAB}$

គេបាន $S=\frac{1}{4}(a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C)$

ដូចនេះ $a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C=4S$ ។

គ. ទាញបង្ហាញថា $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{abc}{2R^2}$

គេមាន $a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C=4S=\frac{abc}{R}$ ព្រោះ $S=\frac{abc}{4R}$

ដោយ $a^2\cot A=\frac{a}{\sin A}.a\cos A=2Ra\cos A$, $b^2\cot B=2Rb\cos B$

នោះគេបាន $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{abc}{2R^2}$ ។

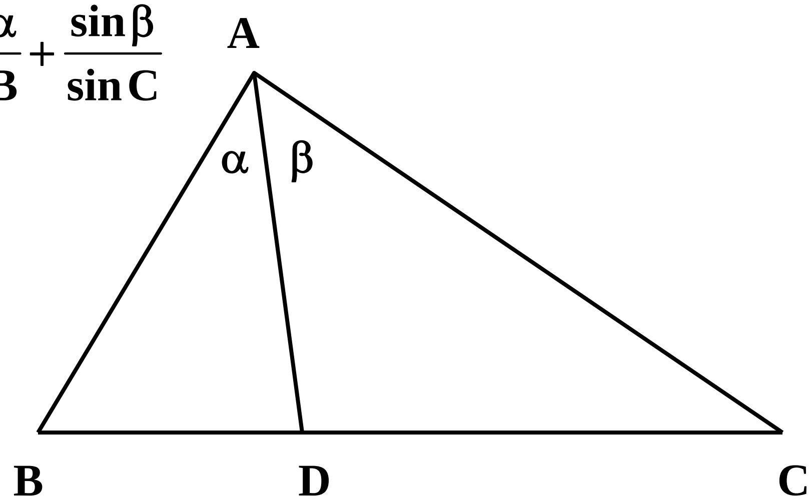
លំហាត់ទី២០

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។ **D** ជាចំណុចមួយនៃជ្រុង **[BC]** ដែល $\angle BAD = \alpha$ និង $\angle DAC = \beta$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{BC}{AD} = \frac{\sin\alpha}{\sin B} + \frac{\sin\beta}{\sin C}$?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{BC}{AD} = \frac{\sin\alpha}{\sin B} + \frac{\sin\beta}{\sin C}$



តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសអនុវត្តន៍

ក្នុង $\Delta ABD \,\&\, \Delta ADC$

គេមាន $\frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin B}$

ឬ $BD = \frac{\sin\alpha}{\sin B}.AD \quad (1)$

ហើយ $\frac{DC}{\sin\beta} = \frac{AD}{\sin C}$

ឬ $DC = \frac{\sin\beta}{\sin C}.AD \quad (2)$

បូកទំនាក់ទំនង **(1) & (2)** គេបាន $BD + DC = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin B} + \frac{\sin\beta}{\sin C}\right).AD$

ដោយ $BD + DC = BC$ នោះ $BC = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin B} + \frac{\sin\beta}{\sin C}\right).AD$

ដូចនេះ $\frac{BC}{AD} = \frac{\sin\alpha}{\sin B} + \frac{\sin\beta}{\sin C}$ ។

លំហាត់ទី២១

បង្ហាញថាបើ **a , b , c** តាងរៀងគ្នាជាតួទី **p , q , r**

នៃស្វីតនព្វន្តមួយនោះគេបានសមភាព

$(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ

បើ **a , b , c** តាងរៀងគ្នាជាតួទី **p , q , r** នៃស្វីតនព្វន្ត (u_n) នោះគេបាន

$a=u_p=u_1+(p-1)d$, $b=u_q=u_1+(q-1)d$, $c=u_r=u_1+(r-1)d$

គេមាន $(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0$

ឬ $aq-ar+br-bp+cp-cq=0$

ឬ $p(c-b)+q(a-c)+r(b-a)=0$ ដោយ $\begin{cases} c-b=(r-q)d \\ a-c=(p-r)d \\ b-a=(q-p)d \end{cases}$

នោះ $pd(r-q)+qd(p-r)+rd(q-p)=0$

ឬ $d(pr-pq+pq-qr+qr-pr)=0$

$0=0$ ពិត

ដូចនេះ $(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឱ្យចតុកោណប៉ោង **ABCD** មួយមានផ្ទៃក្រឡាស្មើ **1** ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

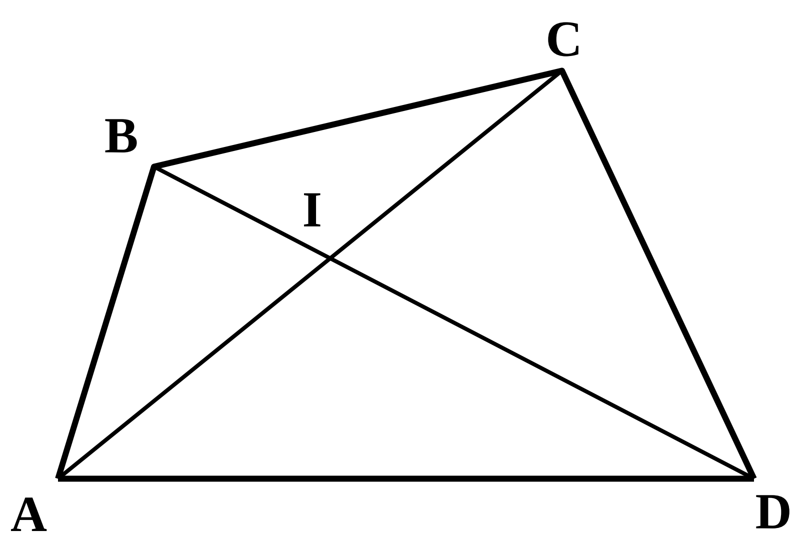
$$AB + BC + CD + DA + AC + BD \ge 4 + \sqrt{8} \quad ?$$

(**Austria-Poland, 1985**)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$AB + BC + CD + DA + AC + BD \ge 4 + \sqrt{8}$$



តាង $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$

និងអង្កត់ទ្រូង $AC = m$, $BD = n$ ។

តាងមុំ $\angle AIB = \angle CID = \varphi$ ។

ក្រឡាផ្ទៃនៃចតុកោណ **ABCD** កំណត់ដោយ :

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=\frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin D\ (1)$$

ឬ $S_{ABCD}=S_{ABD}+S_{BCD}=\frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin C\ (2)$

បូកទំនាក់ទំនង **(1)** និង **(2)** គេបាន :

$$2S_{ABCD}=\frac{1}{2}(ad\sin A+ab\sin B+bc\sin C+cd\sin D)$$

ដោយគេមាន $\sin x\le 1$ គ្រប់ចំនួនពិត **x** នោះគេទាញបាន

$$2S_{ABCD}\le\frac{1}{2}(ad+ab+bc+cd)$$

ឬ $S_{ABCD}\le\frac{1}{4}(a+c)(b+d)$ ដោយ $S_{ABCD}=1$

គេទាញបាន $(a+c)(b+d)\ge 4$

តាវិសមភាព **AM – GM** គេមាន :

$$a+b+c+d\ge 2\sqrt{(a+c)(b+d)}$$

ឬ $a+b+c+d\ge 4\ \ (i)$

ម្យ៉ាងទៀត :

$$\mathbf{S_{ABCD} = S_{IAB} + S_{IBC} + S_{ICD} + S_{IAD}}$$
$$\mathbf{= \frac{1}{2}(IA.IB + IB.IC + IC.ID + ID.IA)\sin\varphi}$$
$$\mathbf{= \frac{1}{2}(AC.IB + AC.ID)\sin\varphi}$$
$$\mathbf{= \frac{1}{2}AC.BD\sin\varphi \le \frac{1}{2}AC.BD}$$

គេបាន $\mathbf{S_{ABCD} \le \frac{1}{2}mn}$ ដោយ $\mathbf{S_{ABCD} = 1}$

គេបាន $\mathbf{mn \ge 2}$ តែតាវិសមភាព $\mathbf{AM - GM}$ គេមាន :

$\mathbf{m + n \ge 2\sqrt{mn} \ge 2\sqrt{2} = \sqrt{8}}$ **(ii)**

បូកវិសមភាព **(i)** និង **(ii)** គេបាន :

$\mathbf{a + b + c + d + m + n \ge 4 + \sqrt{8}}$ ពិត

ដូចនេះ $\mathbf{AB + BC + CD + DA + AC + BD \ge 4 + \sqrt{8}}$ ។

លំហាត់ទី២៣

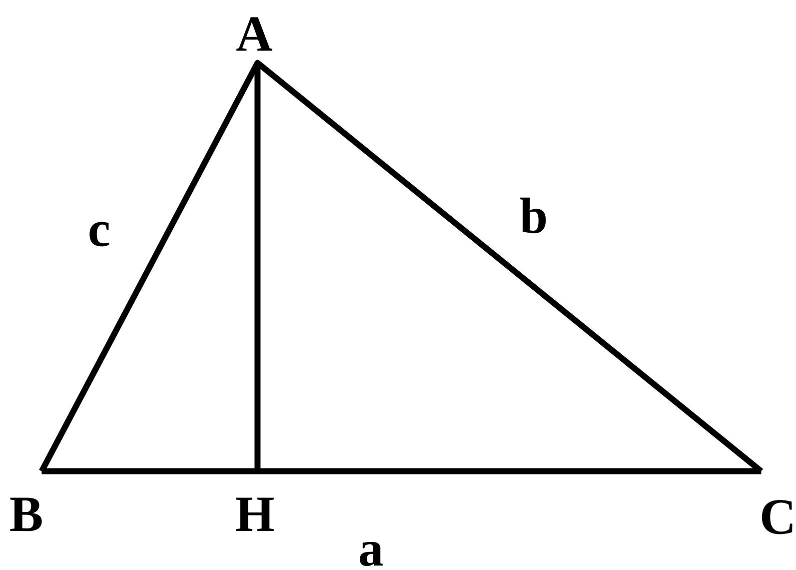
គេឱ្យត្រីកោណពីរមានជ្រុង a,b,c កន្លះបរិមាត្រ $p=\frac{a+b+c}{2}$

និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ R ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{2}{5}\le\frac{pR}{2aR+bc}<\frac{1}{2}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{2}{5}\le\frac{pR}{2aR+bc}<\frac{1}{2}$



តាមវិសមភាពត្រីកោណគេមាន :

$$AB+AC<(AH+BH)+(AH+HC)=2AH+BC$$

គេទាញបាន $AH>\frac{AB+AC-BC}{2}=\frac{b+c-a}{2}=p-a$

តាង $\mathbf{S}$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ នោះគេបាន :

$$S=\frac{1}{2}BC.AH=\frac{1}{2}a.AH$$ ឬ $AH=\dfrac{2S}{a}$

គេទាញបាន $\dfrac{2S}{a}>p-a$ ឬ $2S>a(p-a)$ តែ $S=\dfrac{abc}{4R}$

ហេតុនេះ $2.\dfrac{abc}{4R}>a(p-a)$

ឬ $bc>2pR-2aR$

ឬ $bc+2aR>2pR$ នាំឱ្យ $\dfrac{pR}{bc+2aR}<\dfrac{1}{2}$ (i)

ម្យ៉ាងទៀតឧបមាថា $\dfrac{pR}{2aR+bc}\geq\dfrac{2}{5}$ ពិត

គេបាន $4aR+2bc\leq 5pR$ (1)

ដោយ $S=\dfrac{abc}{4R}=\dfrac{1}{2}a.AH$ ឬ $bc=2R.AH$

តាម (1) គេបាន $4aR+4R.AH\leq 5pR$

ឬ $a+AH\leq\dfrac{5p}{4}$ (2)

ក្នុងត្រីកោណកែង $\mathbf{ABH}$ និង $\mathbf{AHC}$ គេមាន :

$$AB^2=AH^2+BH^2 \text{ និង } AC^2=AH^2+HC^2$$

ឬ $c^2=AH^2+BH^2$ និង $b^2=AH^2+HC^2$

នោះ $b+c=\sqrt{AH^2+HC^2}+\sqrt{AH^2+BH^2}$

តាមវិសមភាព **Minkowsky** គេមាន :

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\geq\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$$

ហេតុនេះ $b+c\geq\sqrt{4.AH^2+(BH+HC)^2}=\sqrt{4.AH^2+a^2}$

ឬ $a+b+c\geq a+\sqrt{4AH^2+a^2}$

ឬ $p\geq\dfrac{a+\sqrt{4AH^2+a^2}}{2}$ **(3)**

តាម **(2)** និង **(3)** យើងនឹងស្រាយឱ្យបានថា :

$a+AH\leq\dfrac{5}{4}\left(\dfrac{a+\sqrt{4AH^2+a^2}}{2}\right)$ ពិត

ឬ $3a+8.AH\leq 5\sqrt{4.AH^2+a^2}$

ឬ $9a^2+48a.AH+64.AH^2\leq 100.AH^2+25a^2$

ឬ $16a^2-48a.AH+36.AH^2\geq 0$

ឬ $(4a-6AH)^2\geq 0$ ពិត

ហេតុនេះ $\dfrac{pR}{2aR+bc}\geq\dfrac{2}{5}$ **(ii)**

តាមទំនាក់ទំនង **(i)** និង **(ii)** គេបាន :

$$\frac{2}{5}\leq\frac{pR}{2aR+bc}<\frac{1}{2} \quad \text{ពិត}$$

លំហាត់ទី២៤

គេយក **I** និង **O** ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅនៃ **ΔABC** ។

រង្វង់ ω_A ចារឹកក្នុងមុំ **A** វាប៉ះទៅនឹង **AB , AC** និង **BC** រៀងគ្នា

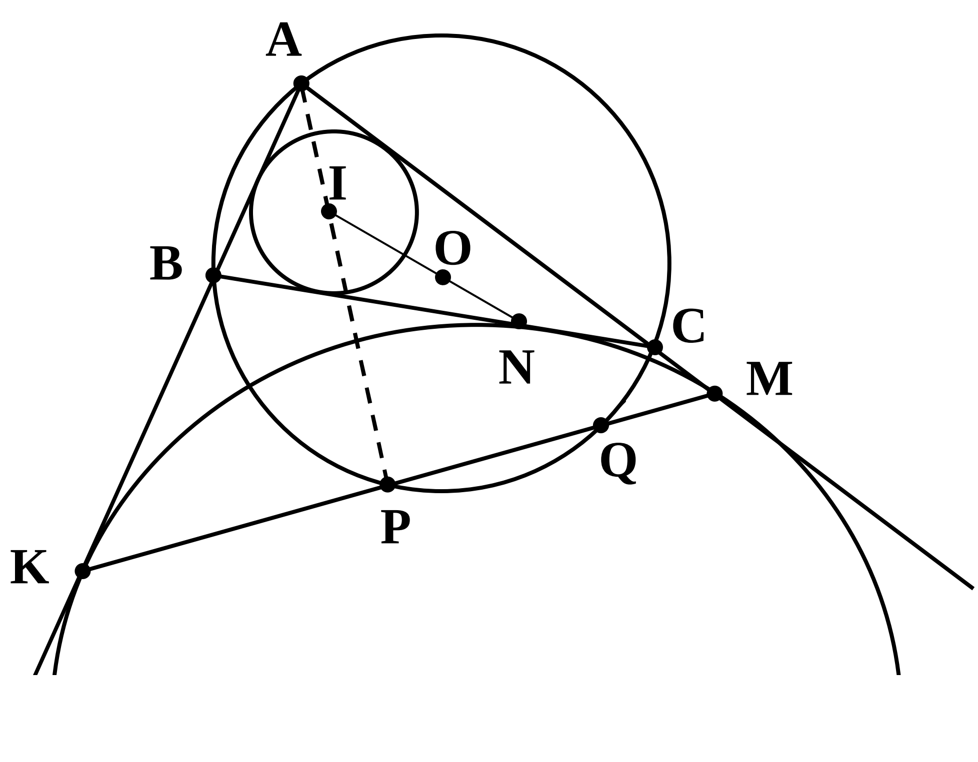
ត្រង់ចំនុច **K,M** និង **N** រៀងគ្នា ។

បើសិនជាចំនុចកណ្តាល **P** នៃអង្កត់ **KM** ស្ថិតនៅលើរង្វង់ចារឹកក្រៅ

នៃត្រីកោណ **ABC** នោះចូរបង្ហាញថាបីចំនុច **O , I , N** រត់ត្រង់គ្នា ?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថាបីចំនុច **O , I , N** រត់ត្រង់គ្នា



យក $\mathbf{Q}$ ជាចំនុចប្រសព្វទីពីររវាងបន្ទាត់ $\mathbf{PM}$ ជាមួយរង្វង់ $\mathbf{(ABC)}$

តាង $\mathbf{KP = PM = x}$ និង $\mathbf{PQ = y}$ ។

យើងមាន $\mathbf{KB = p - c}$ និង $\mathbf{MC = p - b}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទស្វ័យគុណនៃចំនុច $\mathbf{K}$ និង $\mathbf{M}$ ធៀបនឹងរង្វង់ $\mathbf{(ABC)}$

គេមាន $\mathbf{KP.KQ = KA.KB}$ និង $\mathbf{MP.MQ = MC.MA}$

ឬ $\mathbf{x(x + y) = p(p - c)}$ និង $\mathbf{x(x - y) = p(p - b)}$

បូកសមីការពីរនេះគេបាន $\mathbf{2x^2 = p(2p - b - a) = pa}$

ឬ $\mathbf{x^2 = \frac{1}{2}pa}$ ហេតុនេះ $\mathbf{MK^2 = 4x^2 = 2pa}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសអនុវត្តន៏ក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{AKM}$ គេមាន :

$$\mathbf{MK^2 = MA^2 + KA^2 - 2MA.KA\cos A}$$

ដោយ $\mathbf{MA = KA = p}$ និង $\mathbf{MK^2 = 2pa}$ នោះគេបាន :

$\mathbf{2pa = 2p^2 - 2p^2\cos A = 4p^2\sin^2\frac{A}{2}}$ ឬ $\mathbf{a = 2p\sin^2\frac{A}{2}}$

តែ $\mathbf{\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}$

គេបាន $\mathbf{a = \frac{2p(p-b)(p-c)}{bc}}$

ឬ $\mathbf{abc = 2p(p-b)(p-c)}$ **(1)**

យក $\mathbf{D}$ ជាចំណោលកែងនៃ $\mathbf{I}$ លើ $\mathbf{BC}$ ហើយសន្មតថា $\mathbf{N'}$ ជាប្រសព្វរវាង $\mathbf{(OI)}$ ជាមួយ $\mathbf{[BC]}$ និង តាង $\mathbf{E}$ ជាចំនុចកណ្តាលនៃ $\mathbf{BC}$ ។

ឧបមាថា $\mathbf{N'=N}$ នោះគេបាន $\mathbf{N'C=NC=p-b}$

ដោយ $\mathbf{BD=p-b}$ នោះគេបាន $\mathbf{ED=EN'}$ ឬ $\mathbf{E}$ ជាចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $\mathbf{[DN']}$ ។

ត្រីកោណកែង $\mathbf{N'DI}$ និងត្រីកោណកែង $\mathbf{N'EO}$ មានមុំ $\angle\mathbf{DN'I}$ រួមវាជាត្រីកោណដូចគ្នា ។

ហេតុនេះគេបាន $\mathbf{\dfrac{DI}{EO}=\dfrac{DN'}{EN'}=\dfrac{2DE}{EN'}=2}$ ឬ $\mathbf{DI=2.EO}$

គេមាន $\mathbf{\angle BAC=\dfrac{\angle BOC}{2}=\angle EOC}$ ។

ក្នុងត្រីកោណកែង $\mathbf{EOC}$ គេមាន $\mathbf{\cos\angle EOC=\cos A=\dfrac{OE}{OC}}$

គេទាញ $\mathbf{OE=OC.\cos A}$ នាំឱ្យ $\mathbf{DI=2.OC\cos A}$

យក $\mathbf{DI=r}$ និង $\mathbf{OC=R}$ (កាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ក្រៅ $\mathbf{\Delta ABC}$)

គេបាន $\mathbf{r=2R\cos A}$ ឬ $\mathbf{\cos A=\dfrac{r}{2R}}$

តាមរូបមន្តផ្ទៃក្រឡានៃ $\mathbf{\Delta ABC}$ គេមាន $\mathbf{S=\dfrac{abc}{4R}=pr}$

និងទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស $\mathbf{\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$

គេបាន $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{\dfrac{S}{p}}{\dfrac{abc}{2S}}=\dfrac{2S^2}{abcp}$

ឬ $4S^2=ap(b^2+c^2-a^2)$ តែ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

គេបាន $4p(p-a)(p-b)(p-c)=ap(b^2+c^2-a^2)$

ឬ $4(p-a)(p-b)(p-c)=a(b^2+c^2-a^2)$

ដោយ $b^2+c^2-a^2=(b-c)^2-a^2+2bc$

$=2bc+(b-c+a)(b-c-a)$

$=2bc-4(p-b)(p-c)$

នោះ $4(p-a)(p-b)(p-c)=2abc-4a(p-b)(p-c)$

ឬ $abc=2(p-a)(p-b)(p-c)+2a(p-b)(p-c)$

ឬ $abc=2p(p-b)(p-c) \quad (2)$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) បញ្ជាក់ថាការឧបមា $N'=N$ ពិត

ដូចនេះបីចំនុច O , I , N រត់ត្រង់គ្នា ។

លំហាត់ទី២៥

ចូរស្រាយថាការេនៃគ្រប់ចំនួនគត់ត្រូវមានទម្រង់ $4k$ ឬ $4k+1$

គ្រប់ $k \in IN*$ ។

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ

យើងដឹងថាគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន មានរាង $2n$ ឬ $2n-1$, $n \geq 1$

គេបាន $(2n)^2 = 4n^2$ មានរាង $4k$ ដែល $k = n^2$

ហើយ $(2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 = 4n(n-1) + 1$

មានរាង $4k+1$ ដែល $k = n(n-1)$ ។

ដូចនេះការេនៃគ្រប់ចំនួនគត់ត្រូវមានទម្រង់ $4k$ ឬ $4k+1$

គ្រប់ $k \in IN*$ ។

លំហាត់ទី២៦

ចូរស្រាយថាបើ a^2+b^2 ចែកដាច់នឹង 3 នោះ a ចែកដាច់នឹង 3 និង b ចែកដាច់នឹង 3 ។

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ

សន្មតថា a និង b ជាចំនួនចែកមិនដាច់នឹង 3 នោះចំនួនពីរនេះត្រូវមានរាង $a=3p+1, a=3p+2$, $b=3q+1$, $b=3q+2$ ដែល $p=0\ ,1\ ,2,...;\ q=0\ ,1\ ,2\ ,\ ...$ ។

គេបាន $a^2=(3p+1)^2=3p(3p+2)+1$

ហើយ $a^2=(3p+2)^2=3[p(3p+2)+1]+1$

គេទាញបានថា $a^2=3x+1\ ,\ x\geq 0$ និង $b^2=3y+1, y\geq 0$

គេបាន $a^2+b^2=3(x+y)+2$ ចែកមិនដាច់នឹង 3 ដែលផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ។

ដូចនេះគេអាចសន្និដ្ឋានថាបើ a^2+b^2 ចែកដាច់នឹង 3 នោះ a ចែកដាច់នឹង 3 និង b ចែកដាច់នឹង 3 ។

លំហាត់ទី២៧

ចូរបង្ហាញថា n^4+4 ជាចំនួនបឋមតែក្នុងករណី $n=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ

គេមាន $n^4+4=(n^2+2)^2-4n^2$

$$=(n^2+2+2n)(n^2+2-2n)$$

$$=[(n+1)^2+1][(n-1)^2+1]$$

ចំពោះគ្រប់ $n>1$ គេមាន $(n+1)^2+1>1$

និង $(n-1)^2+1>1$ នោះ n^4+4 មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

បើ $n=1$ នោះ $n^4+4=5$ ជាចំនួនបឋម ។

ដូចនេះ n^4+4 ជាចំនួនបឋមតែក្នុងករណី $n=1$ ។

លំហាត់ទី២៨

គេដឹងថា $\mathbf{1002004008016032}$ មានកត្តាបឋម $\boldsymbol{p > 250000}$

ចូរកំណត់កត្តាបឋមនោះ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់កត្តាបឋម

ដោយជ្រើសរើស $\boldsymbol{a = 1000}$, $\boldsymbol{b = 2}$ គេបាន :

$$\begin{aligned}
\mathbf{1002004008016032} &= a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5 \\
&= \frac{a^6 - b^6}{a - b} \\
&= (a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) \\
&= (1002)(1002004)(998004) \\
&= 4^2.1002.250501.k
\end{aligned}$$

ដែល $\boldsymbol{k < 250000}$ នោះ $\boldsymbol{p = 250501}$ ។

លំហាត់ទី២៩

ចូរកំណត់ផ្នែកគត់នៃ $\sum_{k=1}^{10^6}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ផ្នែកគត់

តាង $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}\quad , x>0$

គេបាន $f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}<0\ , \forall x>0$

នោះ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ចុះ ។

ចំពោះ $k>0$ គេបាន $\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{k}}$

គេទាញ $\sum_{k=1}^{10^6-1}\frac{1}{\sqrt{k}}>\sum_{k=1}^{10^6-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int_1^{10^6}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

ហើយ $\sum_{k=1}^{10^6-1}\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\sum_{k=2}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{k}}<\int_1^{10^6}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

គេទាញ $\sum_{k=2}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{k}}<\int_1^{10^6}\frac{dx}{\sqrt{x}}<\sum_{k=1}^{10^6-1}\frac{1}{\sqrt{k}}$

ដោយ $\sum_{k=2}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{k}}=-1+\sum_{k=1}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{k}}$

ហើយ $\sum_{k=1}^{10^6-1}\frac{1}{\sqrt{k}}=-\frac{1}{1000}+\sum_{k=1}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{k}}$

និង $\int_1^{10^6}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\left[2\sqrt{x}\right]_1^{10^6}=2(10^3-1)=1998$

គេបាន $-1+\sum_{k=1}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{k}}<1998<-\frac{1}{1000}+\sum_{k=1}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{k}}$

ឬ $1998+\frac{1}{1000}<\sum_{k=1}^{10^6}\frac{1}{\sqrt{k}}<1999$

ដូចនេះផ្នែកគត់នៃ $\sum_{k=1}^{10^6}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ គឺ 1998 ។

លំហាត់ទី៣០

ចូរកំណត់គូមួយនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b ដោយដឹងថា :

$(i):\ \ ab(a+b)$ ចែកមិនដាច់នឹង 7

$(ii):\ (a+b)^7-a^7-b^7$ ចែកដាច់នឹង 7^7 ។

(IMO 1984)

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គូមួយនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b :

តាមរូបមន្តទ្វេធាញូតុនគេបាន :

$(a+b)^7-a^7-b^7=7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$

តាមបម្រាប់គេមាន $(i):\ \ ab(a+b)$ ចែកមិនដាច់នឹង 7

ដូចនេះដើម្បីឱ្យ $(ii):\ (a+b)^7-a^7-b^7$ ចែកដាច់នឹង 7^7

លុះត្រាតែ a^2+ab+b^2 ចែកដាច់នឹង 7^3 ។

គេមាន $(a+b)^2>a^2+ab+b^2\geq 7^3$ នោះ $a+b\geq 19$

ដោយធ្វើការសាកល្បងជំនួស $a=1\ ,\ b=18$ នោះគេបាន :

$a^2+ab+b^2=1^2+1\times 18+18^2=343=7^3$

ដូចនេះគូ $a=1\ ,\ b=18$ ជាចម្លើយ ។

ម្យ៉ាងទៀតតាមទ្រឹស្តីបទអឺលែ :

បើ $GCD(a,n)=1$ នោះ $a^{\phi(n)}\equiv 1 \pmod{n}$ ។

គេមាន $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

ហេតុនេះដើម្បីឱ្យ a^2+ab+b^2 ចែកដាច់នឹង 7^3 លុះត្រាតែ

$a^3\equiv b^3 \pmod{7^3}$ និង $a-b$ ចែកមិនដាច់នឹង 7 ។

គេមាន $\phi(7^3)=7^3-7^2=6\times 7^2=3\times 98$ ។

បើ c ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានចែកមិនដាច់នឹង 7 នោះគេបាន

$(c^{98})^3\equiv 1 \pmod{7^3}$ ។

ដូចនេះដើម្បីឱ្យ $a^3\equiv 1 \pmod{7^3}$ លុះត្រាតែ $a=c^{98}$

ឧទាហរណ៍ :

-បើគេយក $c=2$ នោះ $2^{98}\equiv 18 \pmod{7^3}$

ហេតុនេះ $\left(2^{98}\right)^3\equiv 18^3\equiv 1 \pmod{7^3}$

ដូចនេះ $a=18$, $b=1$ ជាចម្លើយមួយ ។

-បើគេយក $c=3$ នោះ $3^{98}\equiv 324 \pmod{7^3}$

ហេតុនេះ $\left(3^{98}\right)^3\equiv 324^3\equiv 1 \pmod{7^3}$

ដូចនេះ $a=324$, $b=1$ ជាចម្លើយផ្សេងមួយទៀត ។

លំហាត់ទី៣១

គេអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{1-2x}}$

ចូរគណនា $S=f(\dfrac{1}{n})+f(\dfrac{2}{n})+...+f(\dfrac{n-1}{n})$

ដំណោះស្រាយ

គណនា S

ជាដំបូងយើងត្រូវស្រាយថា បើ $p+q=1$ នោះ $f(p)+f(q)=1$

គេមាន $f(p)=\dfrac{1}{1+2^{1-2p}}$; $f(q)=\dfrac{1}{1+2^{1-2q}}$

$$f(p)+f(q)=\frac{1}{1+2^{1-2p}}+\frac{1}{1+2^{1-2q}}$$
$$=\frac{2+2^{1-2p}+2^{1-2q}}{(1+2^{1-2p})(1+2^{1-2q})}$$
$$=\frac{2+2^{1-2p}+2^{1-2q}}{1+2^{1-2p}+2^{1-2q}+2^{2-2p-2q}}$$

បើ $p+q=1$ នោះ $2-2p-2q=2-2(p+q)=0$

$$f(p)+f(q)=\frac{2+2^{1-2p}+2^{1-2q}}{2+2^{1-2p}+2^{1-2q}}=1$$

គេមាន $S = f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + ... + f(\frac{n-1}{n})$ (1)

ឬ $S = f(\frac{n-1}{n}) + f(\frac{n-2}{n}) + ... + f(\frac{1}{n})$ (2)

បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន :

$$2S = [f(\frac{1}{n}) + f(\frac{n-1}{n})] + ... + [f(\frac{n-1}{n}) + f(\frac{1}{n})]$$

$$2S = \underbrace{1+1+1+.....+1}_{(n-1)} = n-1$$

ដូចនេះ $S = \frac{n-1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣២

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន : $A = 113^n - 168^n - 141^n + 427^n$

ចែកដាច់នឹង **7** ជានិច្ចគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ **n** ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា **A** ចែកដាច់នឹង **7**

តាមរូបមន្ត $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + b^{n-1})$

គេបាន $A = (427^n - 168^n) - (141^n - 113^n)$

$$= (427-168)m_1 - (141-113)m_2$$

$$= 259m_1 - 28m_2 = 7(37m_1 - 4m_2)$$

ដូចនេះ **A** ចែកដាច់នឹង **7** គ្រប់ $m_1 , m_2 \in IN^*$ ។

លំហាត់ទី៣៣

គេឱ្យ m និង n ជាពីរចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $1 \le m < n$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $m+n$ ដើម្បីឱ្យចំនួន 22^m និង 22^n មានលេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយដូចគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $m+n$:

ដើម្បីឱ្យចំនួន 22^m និង 22^n មានលេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយដូចគ្នាលុះត្រាតែ $22^n - 22^m$ ចែកដាច់នឹង 100 ។

គេមាន $22^n - 22^m = 22^m(22^{n-m} - 1)$

ដោយ 22^m ជាចំនួនគូ និង $22^{n-m} - 1$ ជាចំនួនសេស ។

ហេតុនេះ $22^m(22^{n-m} - 1)$ ចែកដាច់នឹង $100 = 4 \times 25$ លុះត្រាតែ 22^m ចែកដាច់នឹង 4 និង $22^{n-m} - 1$ ចែកដាច់នឹង 25 ។

ចំនួន 22^m ចែកដាច់នឹង 4 លុះត្រាតែ $m \ge 2$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $22^2 = 96 \times 5 + 4$

លើកជាការេគេបាន $22^4 = (96 \times 5 + 4)^2$

$$22^4 = (96 \times 5)^2 + 2(96 \times 5).4 + 4^2$$

$$= (96^2 + 154) \times 25 + 6$$

$$= 25a + 6 \ , \ a = 96^2 + 154$$

គេបាន $22^{4p} = (25a+6)^p = 25q + 6^p$, $q \in IN$

ដោយ $6 = 5+1$ នោះគេបាន :

$$6^p = (5+1)^p = \sum_{k=0}^{p} C(p,k)5^k$$

$$= 1 + 5p + \sum_{k=2}^{p} C(p,k)5^k$$

គេទាញ $22^{4p} = 1 + 5p + 25q + \sum_{k=2}^{p} C(p,k)5^k$

ឬ $22^{4p} - 1 = 5p + 25q + \sum_{k=2}^{p} C(p,k)5^k$

ដោយ $25q + \sum_{k=2}^{p} C(p,k)5^k$ ចែកដាច់នឹង 25 ហេតុនេះ $22^{4p} - 1$

ចែកដាច់នឹង 25 លុះត្រាតែ $5p$ ចែកដាច់នឹង 25 ពោលគឺគេត្រូវឱ្យ

$p = 5k$, $k \in IN^*$ ។

ដូចនេះ $22^{n-m} - 1$ ចែកដាច់នឹង 25 លុះត្រាតែ $n - m = 4p = 20k$

ដោយ $m \geq 2$ នោះ $m + n = (n-m) + 2m \geq 20k + 4 \geq 24$

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ $m + n$ គឺ 24 ។

លំហាត់ទី៣៤

គេឱ្យ $f(n) = 4n^2 + 7n + 34$ ដែល $n \in IN^*$

ចូរបង្ហាញថាគ្មាន n ដែលធ្វើឱ្យចំនួន $f(n)$ ចែកដាច់នឹង 121 ទេ។

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ

គេមាន $f(n) = 4n^2 + 7n + 34$

$$= (4n^2 - 4n + 1) + (11n + 33)$$

$$= (2n-1)^2 + 11(n+3)$$

យើងឃើញថាដើម្បីឱ្យ $f(n)$ ចែកដាច់នឹង 121 លុះត្រាតែ $n+3$ និង $2n-1$ ចែកដាច់នឹង 11 នាំឱ្យគេមាន $q_1, q_2 \in IN^*$ ដែល

$n + 3 = 11q_1$ និង $2n - 1 = 11q_2$ ។

គេបាន $2(n+3) - (2n-1) = 22q_1 - 11q_2$

ឬ $11(2q_1 - q_2) = 7$ ជាសមីការគ្មានចម្លើយក្នុងសំណុំ IN^* ពីព្រោះអង្គទីមួយនៃសមីការចែកដាច់នឹង 11 តែអង្គទីពីរមិនចែកដាច់នឹង 11 ។

ដូចនេះ គ្មាន n ដែលធ្វើឱ្យចំនួន $f(n)$ ចែកដាច់នឹង 121 ទេ។

លំហាត់ទី៣៥

គេឱ្យ $f(a)=16a^2+50a-13$ ដែល $a\in\mathbb{Z}$

កំណត់គ្រប់តម្លៃ a ដែលធ្វើឱ្យចំនួន $f(a)$ ចែកដាច់នឹង 49

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់តម្លៃ a

គេមាន $f(a)=16a^2+50a-13$

$$=(16a^2+8a+1)+(42a-14)$$

$$=(4a+1)^2+7(6a-2)$$

ដើម្បីឱ្យ $f(a)$ ចែកដាច់នឹង 49 លុះត្រាតែគេមាន $p\ ,\ q\in\mathbb{Z}$ ដែល

$4a+1=7p$ និង $6a-2=7q$ ។

គេបាន $3(4a+1)-2(6a-2)=21p-14q$

$$7=7(3p-2q)$$

ឬ $3p-2q=1$

គេអាចសរសេរ $3(p-1)=2(q-1)$

គេទាញ $p-1=2k$ និង $q-1=3k$ គ្រប់ $k\in\mathbb{Z}$

ឬ $p=2k+1\ ,\ q=3k+1$

គេទាញបាន $4a+1=7(2k+1)$ នាំឱ្យ $a=\dfrac{7k+3}{2}$

ដោយ $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}$ នោះ $\frac{\mathbf{7k+3}}{\mathbf{2}} \in \mathbb{Z}$ ។

ដើម្បីឱ្យ $\frac{\mathbf{7k+3}}{\mathbf{2}} \in \mathbb{Z}$ លុះត្រាតែ $\mathbf{k}$ ជាចំនួនគត់សេសគឺ :

$\mathbf{k = 2\lambda - 1}\ \mathbf{,} \lambda \in \mathbb{Z}$ នោះគេបាន $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{7(2\lambda-1)+3}}{\mathbf{2}} = \mathbf{7\lambda - 2}$

ដូចនេះ $\mathbf{a = 7\lambda - 2}\ \mathbf{,}\ \lambda \in \mathbb{Z}$ ។

លំហាត់ទី៣៦

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{x}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{x^3+10x^2+115x-237}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{343}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{x}$

តាង $\mathbf{f(x)=x^3+10x^2+115x-237}$

$$\mathbf{=(x+1)^3+7(x+1)^2+49(2x-5)}$$

$$\mathbf{=(x+1)^2(x+8)+49(2x-5)}$$

ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{f(x)}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{343}$ លុះត្រាតែ : $\mathbf{x+1}$ និង $\mathbf{2x-5}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{7}$ ឬ $\mathbf{x+8}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{343}$ និង $\mathbf{2x-5}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{7}$ ។

-ករណី $\mathbf{x+1}$ និង $\mathbf{2x-5}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{7}$ នោះគេមាន $\mathbf{q_1\,,\,q_2\in IN^*}$

ដែល $\begin{cases}\mathbf{x+1=7q_1}\\ \mathbf{2x-5=7q_2}\end{cases}$

គេបាន $\mathbf{2(x+1)-(2x-5)=14q_1-7q_2}$

$$\mathbf{7=7(2q_1-q_2)}$$

$$\mathbf{1=2q_1-q_2}$$

$$\mathbf{2(q_1-1)=(q_2-1)}$$

គេទាញ $\begin{cases}\mathbf{q_1-1=k}\\ \mathbf{q_2-1=2k}\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}\mathbf{q_1=k+1}\\ \mathbf{q_2=2k+1}\end{cases}$, $\mathbf{k\in IN}$

គេទាញបាន $\mathbf{x+1=7(k+1)}$ ឬ $\mathbf{x=7k+6\ ,\ k\in IN}$

ដូចនេះ $\mathbf{x=7k+6\ ,\ k\in IN}$ ជាចម្លើយ ។

-ករណី $\mathbf{x+8}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{343}$ និង $\mathbf{2x-5}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{7}$

គេបាន $\begin{cases}\mathbf{x+8=343m_1}\\ \mathbf{2x-5=7m_2\ \ ,\ m_1,m_2\in IN^*}\end{cases}$

គេមាន $\mathbf{2(x+8)-(2x-5)=686m_1-7m_2}$

$$\mathbf{21=686m_1-7m_2}$$

$$\mathbf{3=98m_1-m_2}$$

គេអាចសរសេរ $\mathbf{98(m_1-1)=m_2-95}$

នាំឱ្យ $\begin{cases}\mathbf{m_1-1=k}\\ \mathbf{m_2-95=98k}\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}\mathbf{m_1=k+1}\\ \mathbf{m_2=98k+95\ \ ,\ k\in IN}\end{cases}$

ដូចនេះ $\mathbf{x=343(k+1)-8=343k+335}$ គ្រប់ $\mathbf{k\in IN}$ ។

លំហាត់ទី៣៧

ចូរស្រាយថាគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេបាន $f(n)=\dfrac{4n+13}{7n+23}$

ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន ?

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $f(n)$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន

តាង $d = GCD(4n+13\,,7n+23)$

គេបាន $4n+13 = x.d$, $7n+23 = y.d$

ដែល $GCD(x\,,y)=1$ ។

គេបាន $4(7n+23)-7(4n+13) = 4yd-7xd$

$$28n+92-28n-91=(4y-7x).d$$

$$1=(4y-7x).d$$

គេទាញបាន $d=1$ នោះ $GCD(4n+13\,,7n+23)=1$

បានន័យថា $4n+13$ និង $7n+23$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នាគ្រប់$n\geq 1$

ដូចនេះ $f(n)=\dfrac{4n+13}{7n+23}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន ។

លំហាត់ទី៣៨

គេដឹងថា $\tan^3\varphi=\frac{b}{a}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{\cos^4\varphi}{\sqrt[3]{a^2}}+\frac{\sin^4\varphi}{\sqrt[3]{b^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{\cos^4\varphi}{\sqrt[3]{a^2}}+\frac{\sin^4\varphi}{\sqrt[3]{b^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}$$

គេមាន $\tan^3\varphi=\frac{b}{a}$ នាំឱ្យ $\tan\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$

គេទាញ $\frac{\cos\varphi}{\sqrt[3]{a}}=\frac{\sin\varphi}{\sqrt[3]{b}}$

ឬ $\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt[3]{a^2}}=\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}$

គេទាញ $\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt[3]{a^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}$ និង $\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt[3]{b^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}$

គេទាញ $\frac{\cos^4\varphi}{\sqrt[3]{a^2}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}}{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^2}$ និង $\frac{\sin^4\varphi}{\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\sqrt[3]{b^2}}{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^2}$

បូកសមីការពីនេះគេទទួលបាន $\frac{\cos^4\varphi}{\sqrt[3]{a^2}}+\frac{\sin^4\varphi}{\sqrt[3]{b^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}$ ពិត ។

លំហាត់ទី៣៩

គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ :

$$a_n=(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{4})....(1+\frac{1}{2^{2^n}})$$

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

យក $q=\frac{1}{2}$ គេបាន :

$$a_n=(1+q)(1+q^2)......(1+q^{2^n})$$

ដោយប្រើសមភាព $x+y=\frac{x^2-y^2}{x-y}$ គេបាន :

$$a_n=\frac{1-q^2}{1-q}.\frac{1-q^4}{1-q^2}....\frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q^{2^n}}$$

$$a_n=\frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}\right]$$

កាលណា $n\to+\infty$ នោះ $\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$ ខិតជិតសូន្យ

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=2$ ។

លំហាត់ទី៤០

គេឱ្យផលបូក

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+....+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}\right]$$

ចូរគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

គេពិនិត្យ $1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{k^2(k+1)^2+(k+1)^2+k^2}{k^2(k+1)^2}$

$$= \frac{k^2(k+1)^2+k^2+2k+1+k^2}{k^2(k+1)^2}$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2+2k(k+1)+1}{k^2(k+1)^2}$$

$$= \frac{\left[k(k+1)+1\right]^2}{k^2(k+1)^2} = \left[1+\frac{1}{k(k+1)}\right]^2$$

$$= \left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)^2$$

គេបាន $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n}(n+1-\frac{1}{n+1}) = 1+\frac{1}{n+1}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = 1$ ។

លំហាត់ទី៤១

គេមានស៊េរីអនន្តមួយ $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n^2}{2^n})=\frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+.....+\frac{n^2}{2^n}+....$

ចូរស្រាយថាស៊េរីខាងលើនេះជាស៊េរីបង្រួម ។

ដំណោះស្រាយ

ផលបូកដោយផ្នែករបស់ស៊េរីនេះគឺ $S_n=\frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+...+\frac{n^2}{2^n}$

ពិនិត្យអនុគមន៍ $f(k)=ak^2+bk+c$ ដែលគ្រប់ $k\in IN^*$ គេមាន :

$$\frac{k^2}{2^k}=\frac{f(k)}{2^k}-\frac{f(k+1)}{2^{k+1}}$$

ឬ $\frac{k^2}{2^k}=\frac{ak^2+bk+c}{2^k}-\frac{a(k+1)^2+b(k+1)+c}{2^{k+1}}$

ឬ $2k^2=2ak^2+2bk+2c-ak^2-2ak-a-bk-b-c$

$$2k^2=ak^2+(b-2a)k+c-a-b$$

គេទាញ $a=2$ ហើយ $b-2a=0\Rightarrow b=4$ និង $c=a+b=6$

ហេតុនេះ $\frac{k^2}{2^k}=\frac{2k^2+4k+6}{2^k}-\frac{2k^2+8k+12}{2^{k+1}}$

គេបាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}(\frac{2k^2+4k+6}{2^k}-\frac{2k^2+8k+12}{2^{k+1}})=6-\frac{n^2+4n+6}{2^n}$

ដោយ $\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(6-\frac{n^2+4n+6}{2^n}\right)=6$

ដូចនេះស៊េរីអនន្តខាងលើជាស៊េរីបង្រួម ។

លំហាត់ទី៤២

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ គេមានផលបូក :

$$S_n = \frac{5}{1.3.2^2} + \frac{7}{3.5.2^3} + \frac{9}{5.7.2^4} + ... + \frac{2n+3}{(2n-1)(2n+1).2^{n+1}}$$

ក. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យគេបានសមភាព

$$\frac{2n+3}{(2n-1)(2n+1).2^{n+1}} = \frac{a}{(2n-1).2^n} + \frac{b}{(2n+1).2^{n+1}}$$

ខ. គណនា S_n និង $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យគេបានសមភាព

$$\frac{2n+3}{(2n-1)(2n+1).2^{n+1}} = \frac{a}{(2n-1).2^n} + \frac{b}{(2n+1).2^{n+1}}$$

គេបាន $2n+3 = 2a(2n+1) + b(2n-1)$

$$2n+3 = (4a+2b)n + 2a - b$$

គេទាញ $\begin{cases} 4a+2b = 2 \\ 2a - b = 3 \end{cases}$ នាំឱ្យ $a = 1$, $b = -1$

ដូចនេះ $a = 1$ និង $b = -1$ ។

ខ. គណនា S_n និង $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

តាមសម្រាយខាងលើនេះចំពោះ $a = 1$ និង $b = -1$ គេបាន :

$$\frac{2n+3}{(2n-1)(2n+1).2^{n+1}} = \frac{1}{(2n-1).2^n} - \frac{1}{(2n+1).2^{n+1}}$$

ឬ $\dfrac{2p+3}{(2p-1)(2p+1)2^{p+1}} = \dfrac{1}{(2p-1)2^{p}} - \dfrac{1}{(2p+1)2^{p+1}}$

គេបាន $S_n = \sum_{p=1}^{n}\left[\dfrac{2p+3}{(2p-1)(2p+1).2^{p+1}}\right]$

$$= \sum_{p=1}^{n}\left[\frac{1}{(2p-1)2^{p}} - \frac{1}{(2p+1)2^{p+1}}\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{(2n+1).2^{n+1}}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{1}{2}\left[1 - \dfrac{1}{(2n+1).2^{n}}\right]$ ។

ហើយ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1 - \dfrac{1}{(2n+1).2^{n}}\right] = \dfrac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៤៣

ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{n \in IN^*}$ គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត $\mathbf{(a_n)}$ កំណត់ដោយ :

$\mathbf{a_0 = 3}$ និង $\mathbf{a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{3^{2^n}}\right) a_n - \frac{1}{3^{2^n}}}$

ក. គណនា $\mathbf{a_n}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{n}$ ។

ខ. គណនាលីមីត $\mathbf{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា $\mathbf{a_n}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{n}$

គេមាន $\mathbf{a_{n+1} = (1 + \frac{1}{3^{2^n}})\, a_n - \frac{1}{3^{2^n}}}$

$$\mathbf{a_{n+1} - 1 = (1 + \frac{1}{3^{2^n}})a_n - (1 + \frac{1}{3^{2^n}})}$$

$$\mathbf{a_{n+1} - 1 = (1 + \frac{1}{3^{2^n}})(a_n - 1)}$$

$$\mathbf{\frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1} = 1 + \frac{1}{3^{2^n}}}$$

គេបាន $\mathbf{\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1} - 1}{a_k - 1}\right) = \prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{3^{2^k}}\right)}$

តាមសមភាព $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$

ឬ $\alpha + \beta = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}$

ដោយយក $\mathbf{\alpha = 1}$ និង $\mathbf{\beta = 3^{2^k}}$

គេបាន $1+\frac{1}{3^{2^k}}=\frac{1-\frac{1}{3^{2^{k+1}}}}{1-\frac{1}{3^{2^k}}}$

ហេតុនេះ $\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{1}{3^{2^k}}\right)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1-\frac{1}{3^{2^{k+1}}}}{1-\frac{1}{3^{2^k}}}\right)$

$$=\frac{1-\frac{1}{3^{2^n}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{2^n}}\right)$$

ហើយដោយ $\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1}-1}{a_k-1}\right)=\frac{a_n-1}{a_0-1}=\frac{a_n-1}{2}$

គេទាញ $\frac{a_n-1}{2}=\frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^{2^n}})$ ឬ $a_n=4-\frac{3}{3^{2^n}}$

ដូចនេះ $a_n=4-\frac{3}{3^{2^n}}$

ខ. គណនាលីមីត $\lim_{n\to+\infty}a_n$

គេបាន $\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}(4-\frac{3}{3^{2^n}})=4$ ព្រោះ $\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{3^{2^n}}=0$

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty}a_n=4$ ។

លំហាត់ទី៤៤

គេឱ្យ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាពីរចំនួនពិតដែល $0 \le a < b < \frac{\pi}{2}$

ចូរស្រាយថា $\frac{b-a}{\cos^2 a} \le \tan b - \tan a \le \frac{b-a}{\cos^2 b}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{b-a}{\cos^2 a} \le \tan b - \tan a \le \frac{b-a}{\cos^2 b}$

តាងអនុគមន៍ $f(x) = \tan x$ ដែល $x \in [0, \frac{\pi}{2})$

គេបាន $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ ។

ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ និងមានដេរីវេលើចន្លោះ $x \in [0, \frac{\pi}{2})$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម នោះមាន $c \in (a, b)$ ដែល :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{\tan b - \tan a}{b-a} \quad (1)$$

ហើយចំពោះ $x \in [a, b]$ ដែល $0 \le a < b < \frac{\pi}{2}$

គេមាន $\cos b \le \cos x \le \cos a$ នោះគេទាញ $\frac{1}{\cos^2 a} \le f'(x) \le \frac{1}{\cos^2 b}$

យក $x = c$ គេបាន $\frac{1}{\cos^2 a} \le f'(c) \le \frac{1}{\cos^2 b} \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេទាញ $\frac{b-a}{\cos^2 a} \le \tan b - \tan a \le \frac{b-a}{\cos^2 b}$ ។

លំហាត់ទី៤៥

គណនាផលបូក :

$$S_n = C_n^1 + 4C_n^2 + 9C_n^3 + ... + n^2 C_n^n$$ ដែល $$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក :

$$S_n = C_n^1 + 4C_n^2 + 9C_n^3 + ... + n^2 C_n^n$$

តាមទ្វេធាញូតុន $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + ... + C_n^n x^n$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការនេះគេបាន :

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + ... + nC_n^n x^{n-1}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង x គេបាន :

$$nx(1+x)^{n-1} = C_n^1 x + 2C_n^2 x^2 + 3C_n^3 x^3 + ... + nC_n^n x^n$$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការនេះគេបាន :

$$n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = C_n^1 + 4C_n^2 x + ... + n^2 C_n^n x^{n-1}$$

យក $x = 1$ ជួសក្នុងសមភាពនេះគេបាន :

$$n.2^{n-1} + n(n-1).2^{n-2} = C_n^1 + 4C_n^2 + 9C_n^3 + ... + n^2 C_n^n$$

$$[2n + n(n-1)]2^{n-2} = C_n^1 + 4C_n^2 + 9C_n^3 + ... + n^2 C_n^n$$

ដូចនេះ $S_n = n(n+1).2^{n-2}$

លំហាត់ទី៤៦

គេឱ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f(x)=\sqrt{x+2}}$

ក. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប $\mathbf{(c)}$ នៃអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ ។

ខ. គេពិនិត្យ $\mathbf{n}$ ចំនុច $\mathbf{A_1, A_2, A_3, ..., A_n}$ ស្ថិតនៅលើក្រាប $\mathbf{(c)}$ ដែល

$\mathbf{A_1(\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2+\sqrt{2}}\ )}$ និង $\mathbf{A_n(a_n , a_{n+1})}$ គ្រប់ $\mathbf{n \in IN^*}$ ។

ចូរកំណត់កូអរដោនេនៃចំនុច $\mathbf{A_n}$ ។

គ. ចូរគណនា $\mathbf{OA_n}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{n}$ រួចគណនា $\mathbf{\lim\limits_{n\to+\infty} OA_n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សិក្សាអថេរភាព និង សង់ក្រាប $\mathbf{(c)}$ នៃអនុគមន៍ $\mathbf{f}$

គេមាន $\mathbf{f(x)=\sqrt{x+2}}$ មានន័យលុះត្រាតែ $\mathbf{x \ge -2}$

. ដែនកំណត់ $\mathbf{D=[-2\ ,\ +\infty)}$

. ទិសដៅអថេរភាព

-ដេរីវេ $\mathbf{f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}}$

គ្រប់ $\mathbf{x>-2}$ គេបាន $\mathbf{f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}>0}$

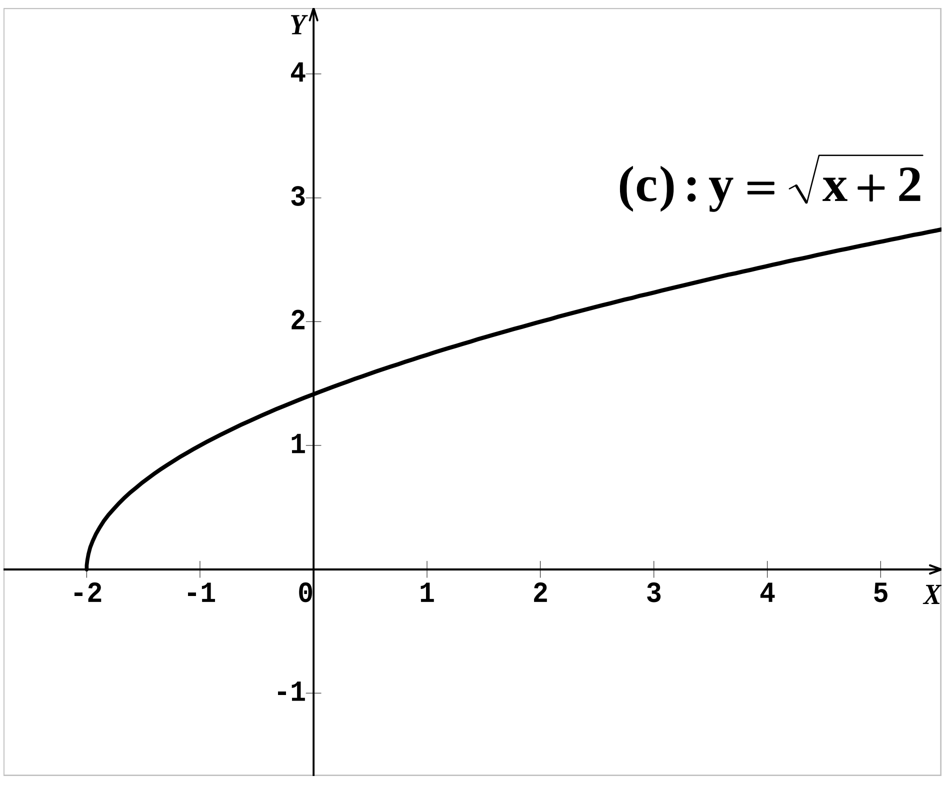
នាំឱ្យ $\mathbf{f}$ ជាអនុគមន៍កើនគ្រប់ $\mathbf{x \in \left(-2\ ,\ +\infty\right)}$ ។

-លីមីត $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+2}=+\infty}$

-តារាងអថេរភាព

x	-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

-សំណង់ក្រាប $(c): y = \sqrt{x+2}$



ខ. កំណត់កូអរដោនេនៃចំនុច A_n

ដោយ $A_n(a_n, a_{n+1}) \in (c): y = \sqrt{x+2}$

នោះគេបាន $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$

គេមាន $A_1(a_1\,,a_2)=A(\sqrt{2}\,,\sqrt{2+\sqrt{2}}\,)$

គេបាន $a_1=\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{2^2}$

$$a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^2}}=2\cos\frac{\pi}{2^3}$$

$$-----------------------$$

ឧបមាថាវាពិតចំពោះតួទី n គឺ $a_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $n+1$ គឺ $a_{n+1}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$

គេមាន $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$ ដោយ $a_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

នោះ $a_{n+1}=\sqrt{2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}+2}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$ ពិត

ដូចនេះ $A_n(2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\,,\;2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}})$

គ. ចូរគណនា OA_n ជាអនុគមន៏នៃ n រួចគណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}OA_n$

គេបាន $OA_n=\sqrt{{a_n}^2+{a_{n+1}}^2}$

ដោយ $a_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ និង $a_{n+1}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$

ដូចនេះ $OA_n=2\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{2^{n+1}}+\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}}}$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty}OA_n=2\sqrt{2}$

លំហាត់ទី៤៧

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។ មេដ្យាននៃត្រីកោណដែលគូសចេញពីកំពូល **A , B , C** កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណរៀងគ្នាត្រង់ **M , N , P** ។

តាង a,b,c ជាជ្រុង និង m_a, m_b, m_c ជាមេដ្យាននៃ ΔABC ។

ចូរស្រាយថា

$$\frac{m_a^{\ 4}}{a^4+2b^2c^2}+\frac{m_b^{\ 4}}{b^4+2a^2c^2}+\frac{m_c^{\ 4}}{c^4+2a^2b^2}\geq\frac{16}{9}$$

ដំណោះស្រាយ

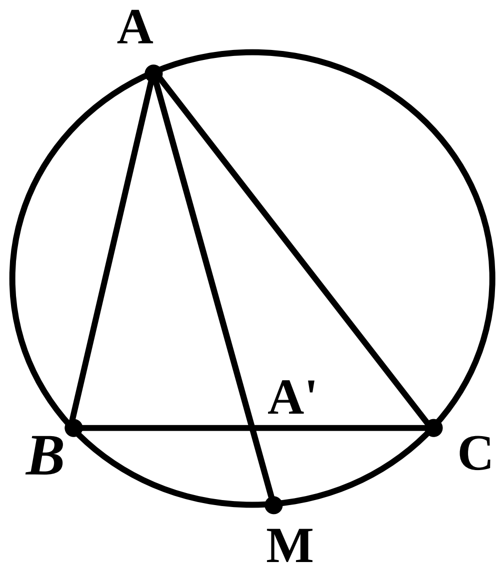
ស្រាយថា :

$$\frac{m_a^{\ 4}}{a^4+2b^2c^2}+\frac{m_b^{\ 4}}{b^4+2a^2c^2}+\frac{m_c^{\ 4}}{c^4+2a^2b^2}\geq\frac{16}{9}$$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេបាន :

$$\frac{m_a^{\ 4}}{a^4+2b^2c^2}+\frac{m_b^{\ 4}}{b^4+2a^2c^2}+\frac{m_c^{\ 4}}{c^4+2a^2b^2}\geq\frac{(m_a^{\ 2}+m_b^{\ 2}+m_c^{\ 2})^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

យើងនឹងស្រាយថា $\dfrac{m_a^{\ 2}+m_b^{\ 2}+m_c^{\ 2}}{a^2+b^2+c^2}\geq\dfrac{4}{3}$



យើងមាន $\angle ABC = \angle AMC$

(មុំស្កាត់ដោយធ្នូរួម **AC**)

ហើយ $\angle AA'B = \angle MA'C$ (មុំទល់កំពូល)

គេទាញបាន **AA'B** និង **MA'C** ជាត្រីកោណដូចគ្នា ។

គេបាន $\frac{AA'}{CA'} = \frac{A'B}{A'M} \Rightarrow A'M = \frac{A'B.CA'}{AA'} = \frac{a^2}{4m_a}$

ហើយ $AM = AA' + A'M = m_a + \frac{a^2}{4m_a}$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $BN = m_b + \frac{b^2}{4m_b}$ និង $CP = m_c + \frac{c^2}{4m_c}$ ។

តាង $T = AM^2 + BN^2 + CP^2$

$$\mathbf{T = (m_a + \frac{a^2}{4m_a})^2 + (m_b + \frac{b^2}{4m_b})^2 + (m_c + \frac{c^2}{4m_c})^2}$$

$$\mathbf{= {m_a}^2 + {m_b}^2 + {m_c}^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \frac{1}{16}\left(\frac{a^4}{{m_a}^2} + \frac{b^4}{{m_b}^2} + \frac{c^4}{{m_c}^2}\right)}$$

ដោយ $\mathbf{{m_a}^2 + {m_b}^2 + {m_c}^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)}$

គេបាន $\mathbf{T = \frac{5}{4}(a^2+b^2+c^2) + \frac{1}{16}\left(\frac{a^4}{{m_a}^2} + \frac{b^4}{{m_b}^2} + \frac{c^4}{{m_c}^2}\right)}$

តាមវិសមភាព **Cauchy – Schwart** គេបាន

$$\mathbf{\frac{a^4}{{m_a}^2} + \frac{b^4}{{m_b}^2} + \frac{c^4}{{m_c}^2} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{{m_a}^2+{m_b}^2+{m_c}^2} = \frac{4}{3}(a^2+b^2+c^2)}$$

គេទាញបាន **:**

$$\mathbf{T \geq \frac{5}{4}(a^2+b^2+c^2) + \frac{1}{12}(a^2+b^2+c^2) = \frac{4}{3}(a^2+b^2+c^2)}$$

នាំឱ្យ $\boldsymbol{\frac{{m_a}^2+{m_b}^2+{m_c}^2}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{4}{3}}$ ពិត

ដូចនេះ $\boldsymbol{\frac{{m_a}^4}{a^4+2b^2c^2} + \frac{{m_b}^4}{b^4+2a^2c^2} + \frac{{m_c}^4}{c^4+2a^2b^2} \geq \frac{16}{9}}$

លំហាត់ទី៤៨

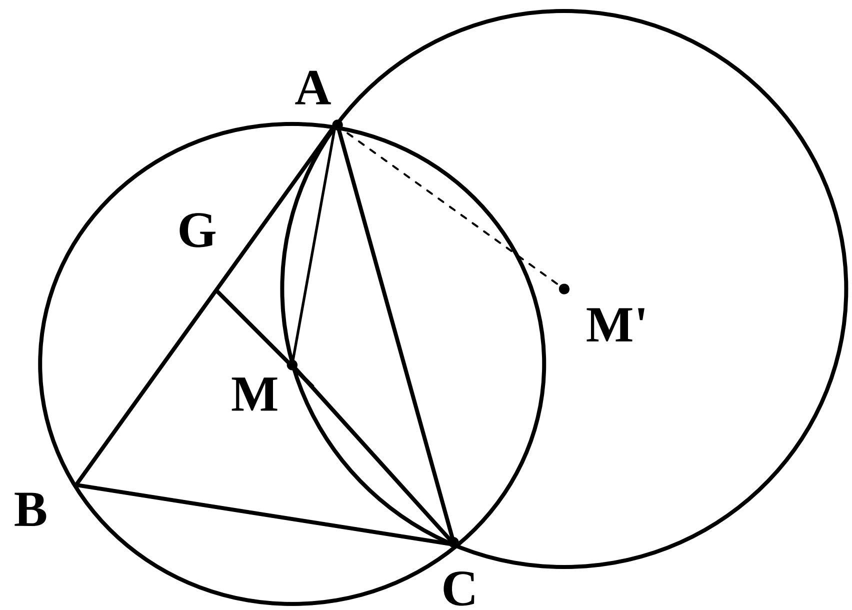
គេឱ្យ **M** ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ **ABC** ។

បើបន្ទាត់ **AB** ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ **AMC**

នោះបង្ហាញថា $\frac{1}{\sin\angle CMA}+\frac{1}{\sin\angle CBM}\geq 2\sqrt{3}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{1}{\sin\angle CMA}+\frac{1}{\sin\angle CBM}\geq 2\sqrt{3}$



តាមវិសមភាព ***Cauchy – Schwarz***

$$\frac{1}{\sin\angle CMA}+\frac{1}{\sin\angle CBM}\geq\frac{4}{\sin\angle CMA+\sin\angle CBM}$$

យើងនឹងស្រាយថា $\sin\angle CAM + \sin\angle CBM \le \frac{2}{\sqrt{3}}$

យក **G** ជាចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុង **[AB]** ។

តាង a, b, c ជាប្រវែងជ្រុង **BC , CA , AB** ហើយ m_a, m_b, m_c

ជារង្វាស់មេដ្យានគូសពីកំពូល A, B, C រៀងគ្នា ។

ដោយ **A** ជាចំនុចប៉ះរវាងបន្ទាត់ **(AB)** ជាមួយរង្វង់ផ្ចិត **M'**

នោះគេមាន $GA^2 = GM.GC = \frac{1}{3}GC^2$ (ព្រោះ $GM = \frac{1}{3}GC$)

ដោយ $GA = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}$, $GC = m_c$ គេបាន $\frac{c^2}{4} = \frac{1}{3}{m_c}^2$

តាមទ្រឹស្ដីបទមេដ្យានគេមាន ${m_c}^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$

គេទាញ $\frac{c^2}{4} = \frac{1}{3}(\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4})$ ឬ $a^2 + b^2 = 2c^2$ ។

ហេតុនេះ ${m_c}^2 = \frac{2c^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{3c^2}{4}$ ឬ $m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}c$

ហើយ ${m_a}^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4} = \frac{3b^2}{4}$

នាំឱ្យ $m_a = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ ហើយ $m_b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ។

តាង **S** ជាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ **ABC** ហើយ **AA' , BB'**

ជាមេដ្យាន ។ គេបាន :

$$S_{CAM}=\frac{1}{2}AM.AC\sin\angle CAM=\frac{1}{4}AA'.AC\sin\angle CAM$$

ឬ $S_{CAM}=\frac{1}{4}m_a b\sin\angle CAM=\frac{1}{2}S_{AA'C}=\frac{1}{4}S$

គេទាញបាន $\sin\angle CAM=\frac{S}{m_a b}$ ហើយ $\sin\angle CBM=\frac{S}{m_b a}$

គេបាន $\sin\angle CAM+\sin\angle CBM=\frac{S}{m_a b}+\frac{S}{m_b a}$

តែ $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ ហើយ $m_a=\frac{\sqrt{3}}{2}b$ និង $m_b=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

គេបាន $\sin\angle CAM+\sin\angle CBM=\frac{a^2+b^2}{\sqrt{3}ab}\sin C \quad (1)$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូស $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

គេទាញ $\frac{a^2+b^2}{2}=a^2+b^2-2ab\cos C$ ព្រោះ $a^2+b^2=2c^2$

ហេតុនេះ $a^2+b^2=4bc\cos C \quad (2)$

យកទំនាក់ទំនង (2) ជំនួសក្នុង (1) គេបាន :

$$\sin\angle CAM+\sin\angle CBM=\frac{4\sin C\cos C}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin 2C\le\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\sin\angle CAM+\sin\angle CBM\le\frac{2}{\sqrt{3}}$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{1}{\sin\angle CMA}+\frac{1}{\sin\angle CBM}\ge 2\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៤៩

គេឱ្យ $a , b , c > 0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}{b+c}+\frac{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}{c+a}+\frac{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{a+b}\ge\frac{9}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}{b+c}+\frac{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}{c+a}+\frac{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{a+b}\ge\frac{9}{2}$$

គេមាន $\mathbf{b^3+c^3=(b+c)^3-3bc(b+c)}$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ **គេមាន** $\mathbf{b+c\ge 2\sqrt{bc}}$

គេទាញ $\mathbf{bc\le\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}$ **នាំឱ្យ** $\mathbf{-3bc(b+c)\ge-\frac{3}{4}(b+c)^3}$

គេបាន $\mathbf{b^3+c^3\ge(b+c)^3-\frac{3}{4}(b+c)^3=\frac{1}{4}(b+c)^3}$

គេទាញ $\mathbf{b+c\le\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}$

ឬ $\mathbf{a+b+c\le a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}$

នាំឱ្យ $$\frac{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}{b+c}\ge 1+\frac{a}{b+c}\quad(1)$$

ដូចគ្នាដែរ $$\frac{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}{c+a}\ge 1+\frac{b}{c+a}\quad(2)$$

និង $\dfrac{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{a+b} \ge 1+\dfrac{c}{a+b}$ (3)

ដោយបូកទំនាក់ទំនង (1),(2),(3) គេបាន :

$$T \ge 3+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$ ដែល

$$T=\frac{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}{b+c}+\frac{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}{c+a}+\frac{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{a+b}$$

យើងនឹងស្រាយថា $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}$

តាង $\begin{cases} b+c=m \\ c+a=n \\ a+b=p \end{cases}$

គេបាន $(b+c)+(c+a)+(a+b)=m+n+p$

នាំឱ្យ $a+b+c=\dfrac{m+n+p}{2}$

គេទាញ $\begin{cases} a=\dfrac{n+p-m}{2} \\ b=\dfrac{m-n+p}{2} \\ c=\dfrac{m+n-p}{2} \end{cases}$

គេបាន $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{n+p-m}{2m}+\dfrac{m-n+p}{2n}+\dfrac{m+n-p}{2p}$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\right)+\left(\frac{p}{m}+\frac{m}{p}\right)+\left(\frac{n}{p}+\frac{p}{n}\right)-3\right]$$

តាមវិសមភាព$AM-GM$ គេបាន

$$\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\geq 2\ ;\ \frac{p}{m}+\frac{m}{p}\geq 2\ ;\ \frac{n}{p}+\frac{p}{n}\geq 2$$

គេបាន $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ \geq\ \frac{1}{2}(2+2+2-3)=\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $T\geq 3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$ ពិត ។

លំហាត់ទី៥០

គេឱ្យ $a > 1$, $b > 1$ និង $x > 1$ ។

ចូរស្រាយថា $\sqrt{\log_a x} + \sqrt{\log_b x} \geq 2\sqrt{\log_{\frac{a+b}{2}} x}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\sqrt{\log_a x} + \sqrt{\log_b x} \geq 2\sqrt{\log_{\frac{a+b}{2}} x}$

គេមាន $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$ និង $\log_b x = \dfrac{1}{\log_x b}$

តាមវិសមភាព $Cauchy - Schwarz$ គេបាន :

$$\sqrt{\log_a x} + \sqrt{\log_b x} \geq \frac{4}{\sqrt{\log_x a} + \sqrt{\log_x b}}$$

យើងនឹងស្រាយថា $\dfrac{4}{\sqrt{\log_x a} + \sqrt{\log_x b}} \geq 2\sqrt{\log_{\frac{a+b}{2}} x}$

ឬ $\sqrt{\log_x a} + \sqrt{\log_x b} \leq 2\sqrt{\log_x \dfrac{a+b}{2}}$

ចំពោះ $a > 1$ **និង** $b > 1$

យើងមាន $\mathrm{a} + \mathrm{b} \geq 2\sqrt{\mathrm{a.b}}$ (**វិសមភាព** $\mathrm{AM} - \mathrm{GM}$)

ឬ $\dfrac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2} \geq \sqrt{\mathrm{a.b}}$

នាំឱ្យ $\log_x(\frac{a+b}{2}) \geq \frac{1}{2}(\log_x a+\log_x b)$

ឬ $\log_x a+\log_x b \leq 2\log_x(\frac{a+b}{2})$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន :

$$\log_x a+\log_x b \geq 2\sqrt{\log_x a}.\sqrt{\log_x b}$$

$$2(\log_x a+\log_x b) \geq \log_x a+2\sqrt{\log_x a}.\sqrt{\log_x b}+\log_x b$$

$$2(\log_x a+\log_x b) \geq (\sqrt{\log_x a}+\sqrt{\log_x b})^2$$

$$\log_x a+\log_x b \geq \frac{1}{2}(\sqrt{\log_x a}+\sqrt{\log_x b})^2 \quad (2)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) និង (2) យើងទាញ :

$$\frac{1}{2}(\sqrt{\log_x a}+\sqrt{\log_x b})^2 \leq 2\log_x(\frac{a+b}{2})$$

$$(\sqrt{\log_x a}+\sqrt{\log_x b})^2 \leq 4\log_x(\frac{a+b}{2})$$

$$\sqrt{\log_x a}+\sqrt{\log_x b} \leq 2\sqrt{\log_x(\frac{a+b}{2})}$$

ដូចនេះ $\sqrt{\log_a x}+\sqrt{\log_b x} \geq 2\sqrt{\log_{\frac{a+b}{2}} x}$

លំហាត់អនុវត្តន៍

1. គេឱ្យ $0 < \alpha\ ,\ \beta < \dfrac{\pi}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta} + \dfrac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta} \ \geq\ 1$?

2. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{1+\sin x+\cos x}{2+\sin x}$

គ្រប់ $x \in IR$ បង្ហាញថា $\dfrac{1}{3} \leq\ f(x) \leq 1$ ។

3. គេឱ្យ $a\ ,\ b, c > 1$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{\log_b a^2}{a+b} + \frac{\log_c b^2}{b+c} + \frac{\log_a c^2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

4. ដោះស្រាយសមីការ :

$$\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x^4+x^2+1} + 2\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2} = 0$$

5. គេមានអនុគមន៍ :

$$f(x) = \tan^2 x + \cot^2 x - 2(\tan x + \cot x) + 9$$

ដែល $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ ។ ចូររកតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍នេះ ?

6. ចូរបង្ហាញថាបើ k ជាចំនួនគូនោះ $k^{2^n}-1$ ចែកដាច់នឹង 2^{n+2} ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

7. ចំនួនគត់ n មួយនឹងហៅថា *Good* បើយើងអាចសរសេរ :

$n = a_1 + a_2 + ... + a_k$ ដែល $a_1, a_2, ...a_k$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន (មិនចាំបាច់ខុសគ្នា) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k} = 1$$ ។

បង្ហាញថាបើ n គឺ *Good* នោះ $2n+8$ និង $2n+9$ ក៏ *Good* ។

8. គ្រប់ $n > 1$ បង្ហាញថា $\dfrac{4^n}{n+1} < \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ ។

9. ចូរបង្ហាញថាបើ n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិមួយនោះគេបាន :

$\dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^4}{2} + \dfrac{n^3}{3} - \dfrac{n}{30}$ ក៏ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិដែរ ។

10. បង្ហាញថា $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$ គ្រប់ $n > 1$ ។

11. ចូរបង្ហាញថា $n^5 - 5n^3 + 4n$ ចែកដាច់នឹង 120 គ្រប់ $n \in IN$

12. ចូរបង្ហាញថា $n^9 - 6n^7 + 9n^5 - 4n^3$ ចែកដាច់នឹង 8640 គ្រប់ $n \in IN$ ។

13. គេឱ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$(n+1)(n+2)....(2n)$ ចែកដាច់នឹង 2^n ?

14. បង្ហាញថា $4^{2^n}+2^{2^n}+1$ ចែកដាច់នឹង 7 ជានិច្ចគ្រប់ $n \in IN$

15. បង្ហាញថាបើ a^2+b^2 ចែកដាច់នឹង 7 នោះ a ចែកដាច់នឹង 7 និង b ចែកដាច់នឹង 7 ។

16. ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b បើគេដឹងថា :

$a^2+b^2=85113$ និង $LCM(a,b)=1764$

17. គ្រប់ $n \geq 1$ ចូរស្រាយថា :

$$GCD(n^3+3n+1, 7n^3+18n^2-n-2)=1$$

18. បើ $GCD(m,n)=1$ ចូរស្រាយថា $\dfrac{(m+n-1)!}{m!.n!}$ ជាចំនួនគត់ ។

19. បើ $n>1$ និង $GCD(n,6)=1$ នោះបង្ហាញថា $\dfrac{(2n-4)!}{n!(n-2)!}$ ជាចំនួនគត់ ។

20. ចូរស្រាយថា $\dfrac{n^9-n^3}{504}$ ជាចំនួនគត់បើ $n \in IN$ ។

21. គ្រប់ចំនួនពិត x និង y ចូរស្រាយថា :

$$\frac{1}{1+4^x}+\frac{1}{1+4^y}\geq\frac{1}{1+2^{x+y}}$$

22. គ្រប់ $x\in IR$ បង្ហាញថា :

$$\frac{1}{1+\sin^2 x}+\frac{1}{1+\cos^2 x}\geq\frac{4}{3}$$

23. ត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\geq 6$

24. ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា :

$$\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}\geq 4$$

25. គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a}{a^2+8bc}+\frac{b}{b^2+8ca}+\frac{c}{c^2+8ab}\geq\frac{1}{a+b+c}$$

28. គេឱ្យ a , b , c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{1}{a^2(b+b-a)}+\frac{1}{b^2(c+a-b)}+\frac{1}{c^2(a+b-c)}\geq\frac{3}{abc}$$

29. បង្ហាញថា $\frac{(1-a^2)\sin x+2a\cos x}{1+a^2}\leq 1$ គ្រប់ $x\in IR$ ។

30. ចូរស្រាយថា $\frac{1}{3} < \sin\frac{\pi}{9} < \frac{7}{20}$

31. គ្រប់ $x \in (-1,1)$ បង្ហាញថា $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}} \geq 2$

32. គេឱ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $\sqrt{\frac{x}{x+y}} + \sqrt{\frac{y}{y+z}} + \sqrt{\frac{z}{x+z}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$

33. គេឱ្យ a, b, c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{1}{8abc+(a+b-c)^3} + \frac{1}{8abc+(b+c-a)^3} + \frac{1}{8abc+(c+a-b)^3} \leq \frac{1}{3abc}$$

34.បើ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca=1$

ចូរស្រាយថា :

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a} \leq \frac{1}{abc}$$

រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន

Tel: 017 768 246

សូមរង់ចាំអានភាគទី៨