លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

បរិញ្ញាបត្រផ្នែកគណិតវិទ្យា

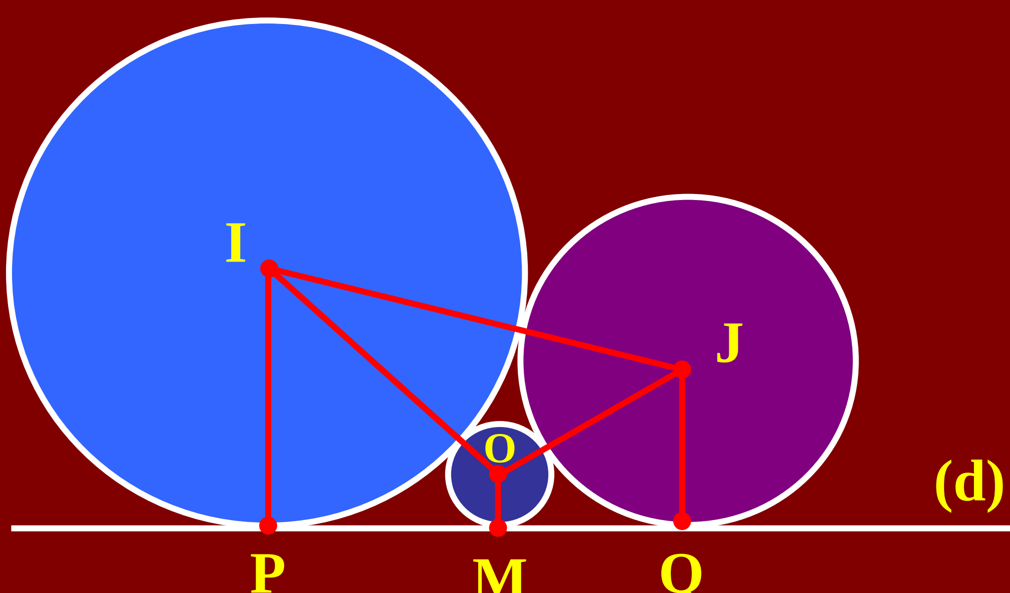
គណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោក

ភាគ៩

សម្រាប់

សិស្សពូកែផ្នែកគណិតវិទ្យា

ត្រៀមប្រឡងអាហារូបករណ៍



អ្នកចូលរួមត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក លឹម ឆុន

លោក សែន ពិសិដ្ឋ

លោកស្រី ឌុយ រីណា

លោក ឆិត្យ ម៉េង

លោក ព្រឹម សុនិត្យ

លោក ផល ប៊ុនឆាយ

អ្នកត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិត្តសិរ

ការីកុំព្យូទ័រ

កញ្ញា លី គុណ្ណាភា

អ្នកនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លោក លឹម ផល្លុន និង លោក សែន ពិសិដ្ឋ

អារម្ភកថា

សៀវភៅ **គណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោក** ភាគ៩ ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់នៅក្នុងដៃនេះ ខ្ញុំបាទបានរៀបរៀងឡើងក្នុងគោលបំនងទុកជាឯកសារ សម្រាប់ជាជំនួយដល់អ្នកសិក្សាយកទៅសិក្សាស្រាវជ្រាវដោយខ្លួនឯង និង ម្យ៉ាងទៀតក្នុងគោលបំនងចូលរួមលើកស្ទួយវិស័យគណិតវិទ្យានៅប្រទេសកម្ពុជាយើងឲ្យកាន់តែរីកចម្រើនថែមទៀតដើម្បីបង្កើនធនធានមនុស្សឲ្យមានកាន់តែច្រើនដើម្បីជួយអភិវឌ្ឍន៍ប្រទេសជាតិរបស់យើង ។

នៅក្នុងសៀវនេះយើងខ្ញុំបានខិតខំស្រាវជ្រាវជ្រើសរើសយកលំហាត់យ៉ាងសម្រាំងបំផុតពីឯកសារបរទេសយ៉ាងច្រើនបំផុតដូចជា **103 Trigonometry Problems , Five Hundred Mathematical Challenges,Complex Numbers From A to ... Z , Mathematical Olympiad in China,Mathematical Olympiad Challenges, Mathematical Olympiad Treasures, International Mathematical Olympiads 1959-1977, The IMO Compendium (1959-2004) , 360 Problems for Mathematical contest...**
និងឯកសារបរទេសផ្សេងៗទៀតតាម **Internet** យកមកធ្វើដំណោះស្រាយយ៉ាងក្បោះក្បាយដែលអាចឲ្យលោកអ្នកងាយយល់ឆាប់ចងចាំអំពីសិល្បៈនៃការដោះស្រាយទាំងអស់នេះ ។ ប៉ុន្តែទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ កង្វះខាត និងកំហុសឆ្គងដោយអចេតនាប្រាកដជាមានទាំងបច្ចេកទេស និង អក្ខរាវិរុទ្ធ ។ អាស្រ័យហេតុនេះ យើងខ្ញុំជាអ្នករៀបរៀងរង់ចាំដោយរីករាយជានិច្ចនូវមតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីសំណាក់អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដើម្បីជួយកែលំអ

សៀវភៅនេះឲ្យបានកាន់តែសុក្រិត្រភាពថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់នេះយើងខ្ញុំអ្នករៀបរៀងសូមគោរពជូនពរដល់អ្នកសិក្សា ទាំងអស់ឲ្យមានសុខភាពមាំមួន និង ទទួលជ័យជំនះគ្រប់ភារកិច្ច ។

បាត់ដំបងថ្ងៃទី ៨ មីនា ២០១១

អ្នកនិពន្ធ លឹម ផល្គុន

Tel : 017 768 246

លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

គណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោក

ភាគ១

Problems and Solutions

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស

1. ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ចំនួន $3^n + n^3$ ចែកដាច់នឹង 7 លុះត្រាតែ $3^n n^3 + 1$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

2. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច និងមាន M ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[BC]$ ។ គេគូសបន្ទាត់កែង HP ពីអរតូសង់ H នៃត្រីកោណ ABC ទៅ $[AM]$ ។ ចូរស្រាយថា $AM.PM = BM^2$

(Japan Mathematical Olympiad Finals 2011)

3. គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដោយដឹងថា

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2}\le\frac{3}{16}$$

(*IMO Shortlist 2009*)

4. គេយក Q ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ។ ចំពោះគ្រប់ចំនុច P ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$aPA^2+bPB^2+cPC^2=aQA^2+bQB^2+cQC^2+(a+b+c)QP^2$$

ដែល $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ ។

(IMO Shortlist 1988)

5. សមីការ $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ មានឫសបីជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន (មិនចាំបាច់ខុសគ្នា) ។

ចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរមាដែលអាចនៃ $\dfrac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \dfrac{c}{b}$ ។

(Turkey Team Selection Tests 2008)

6. ចូរស្រាយថា :

$$\sum_{Cyc}\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}} \le \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។

(Turkey TST 2010)

7. បើ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ហើយ r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនោះចូរស្រាយថា $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2} \le \dfrac{1}{4r^2}$ ។

(Turkey National Olympiad 2005)

8. គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $16(a+b+c) \ge \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{1}{(a+b+\sqrt{2a+2c})^3}+\frac{1}{(b+c+\sqrt{2a+2b})^3}+\frac{1}{(c+a+\sqrt{2b+2c})^3} \le \frac{8}{9}$$

(Vietnam Team Selection Tests 2010)

9.គេឱ្យ x,y,z ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2y^2+2yx^2+1=0$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ

$$f(x,y)=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+y(y+\frac{1}{x}+2)$$

10. គេឱ្យចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មួយមានផ្ទៃក្រឡា S ហើយ

K,L,M,N ជាចំនុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃ ជ្រុង

$[AB],[BC],[CD],[DA]$ ។

តាង S_1 , S_2 , S_3 , S_4 រៀងគ្នាជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណបួន

$AKN, BKL\ \ CLM$, DMN ។

ចូរស្រាយថា $\sqrt[3]{S_1}+\sqrt[3]{S_2}+\sqrt[3]{S_3}+\sqrt[3]{S_3}\le 2\sqrt[3]{S}$ ។

(Turkey National Olympiad 2003)

11. គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{ab}{1-c^2}+\frac{bc}{1-a^2}+\frac{ca}{1-b^2}\le\frac{3}{8}$

12. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយចារឹកក្រៅរង្វង់ (Γ) កាំ r ។

តាង H, K, L ជាចំនុចប៉ះរវាង (Γ) ជាមួយជ្រុងទាំងបី

$[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ រៀងគ្នា ។ គេសង់រង្វង់បី $(C_A),(C_B),(C_C)$

មានផ្ចិត A,B,C រៀងគ្នាហើយប៉ះគ្នាពីរៗ ។

តាង R_A, R_B, R_C ជាកាំនៃរង្វង់ $(C_A),(C_B),(C_C)$ រៀងគ្នា

ចូរស្រាយថា $R_A R_B R_C \geq 3\sqrt{3}\, r^3$ ។

13. គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

P ជាចំនុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណនេះ **H, K ,L** ជាចំណោលកែងនៃ **H** រៀងគ្នាលើជ្រុង **[BC] , [CA] , [AB]** ។

ចំពោះគ្រប់ចំនុច **P** ចូរស្រាយថា $AL^2 + BH^2 + CK^2 \geq \frac{p^2}{3}$

ដែល $p = \frac{BC + CA + AB}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ **ABC** ។

14. គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយហើយ **M** ជាចំនុចនៅក្នុងត្រីកោណនេះ **D,E,F** ជាចំនុចប្រសព្វរវាង **AM , BM , CM** ជាមួយជ្រុង **BC, AC, AB** រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថាគ្រប់ចំនុច **M** គេមាន $\frac{AM}{MD} \cdot \frac{BM}{ME} \cdot \frac{CM}{MF} \geq 8$?

រួចបញ្ជាក់ទីតាំងនៃ **M** ដើម្បីឱ្យវិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាព ។

15. ចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ **ABC** គេយក **D,E,F** ជាចំនុចស្ថិតនៅលើអង្កត់ **[BC] [CA],[AB]** រៀងគ្នា ។

យក **P** ជាចំនុចប្រសព្វរវាង **[AD]** និង **[EF]** ។

ចូរស្រាយថា $\frac{AB}{AF} \times DC + \frac{AC}{AE} \times DB = \frac{AD}{AP} \times BC$ ។

(Indonesia National Science Olympiad 2009)

16. គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន និង x, y , z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដោយដឹងថា $a+b+c=x+y+z$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\geq a+b+c$ ។

(Indonesia Indonesia TST 2010)

17. គេឱ្យ $a , b , c > 0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}{b+c}+\frac{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}{c+a}+\frac{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{a+b}\geq\frac{9}{2}$$

18. ចំពោះ a និង b ជាចំនួនពិត សមីការ $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយជាចំនួនពិត ។

ចូរគណនាតម្លៃតូចបំផុតនៃ a^2+b^2 ?

(International mathematical Olympiad 1973)

19. គេឱ្យចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មួយមានជ្រុង $AB=x$, $BC=y$ $CD=z$ និង $DA=t$ ។ ផ្ទៃក្រឡារបស់ចតុកោណនេះគឺ S ដែលកំណត់ដោយ $S\leq r(x^2+y^2+z^2+t^2)$ ។

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតនៃចំនួនពិត r ?

20. គេឱ្យចតុមុខ $\mathbf{OABC}$ ដែលមុំត្រង់កំពូល $\mathbf{O}$ សុទ្ធតែកែងគ្នា ហើយ

$\mathbf{OA = a}$ $\mathbf{OB = b}$, $\mathbf{OC = c}$ ដែល $\mathbf{a, b, c \in IN^*}$

និង $\mathbf{a + b + c = 10}$ ។

ចូររកមាឌអតិបរមានៃចតុមុខនេះ ?

21. គេឱ្យ $\mathbf{P(x) = x^5 + ax^2 + b}$ មានឫសប្រាំ $\mathbf{x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5}$

និង $\mathbf{f(x) = x^2 - 3}$ ។

រកតម្លៃអប្បបរមានៃ $\mathbf{f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)f(x_5)}$ ។

22. គេឱ្យកន្លះរង្វង់មួយដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $\mathbf{AB = 1}$ ។

ចំនុច $\mathbf{P}$ មួយរត់នៅលើកន្លះរង្វង់ខាងលើ ។ តាង $\mathbf{\angle PAB = \theta}$

ដែល $\mathbf{0 < \theta < \frac{\pi}{2}}$ ។

ចូររកតម្លៃធំបំផុតនៃ $\mathbf{2\,AP + 2\sqrt{3}\,BP}$ កាលណា θ ប្តូរតម្លៃ ។

23. គេឱ្យចតុកោណប៉ោង $\mathbf{ABCD}$ មួយចារឹកក្នុងរង្វង់ $\mathbf{C(O,R)}$

និងចារឹកក្រៅ រង្វង់ $\mathbf{C'(I,r)}$ ។

ចូរស្រាយថា $\mathbf{OI = \sqrt{r^2 + R^2 - r\sqrt{r^2 + 4R^2}}}$ ។

24. គេឱ្យ $\mathbf{f}$ ជាអនុគមន៍ផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$\mathbf{f(x) + 2f\left(\dfrac{x + \frac{2001}{2}}{x - 1}\right) = 4014 - x}$ ។ ចូរកំណត់ $\mathbf{f(2004)}$?

(Costa Rica Final Round 2003)

25. ចូរកំណត់ផលបូកនៃមុំ $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ បើគេដឹងថា :

$\mathbf{0^o \le A;B \le 180^o}$ ហើយ

$$\mathbf{\sin A + \sin B = \sqrt{\frac{3}{2}}\ ,\ \cos A + \cos B = \sqrt{\frac{1}{2}}}$$

(Canadian Open Math Challenge 1996)

26. គេឱ្យចតុកោណប៉ោង $\mathbf{ABCD}$ មួយចារឹកក្នុងរង្វង់ ។

ចូរស្រាយថា $\mathbf{\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{AB.BC + AD.DC}{AB.AD + BC.CD}}$

27. គេមានបីចំនួនពិត $\mathbf{x \ge 1\ ,\ y \ge 1\ ,\ z \ge 1}$ ដែល $\mathbf{xyz = 27}$ ។

ចូរស្រាយថា $\mathbf{(\log_3 x)^3 + (\log_3 y)^3 + (\log_3 z)^3 \ge 3}$

28. គេអោយបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន $\mathbf{a, b, c}$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\mathbf{\frac{a^3}{(b+c)^3} + \frac{b^3}{(c+a)^3} + \frac{c^3}{(a+b)^3} \ge \frac{3}{8}}$$

29. គេយកពីរ៉ាមីត $\mathbf{PABC}$ មានបាត $\mathbf{ABC}$ ជាត្រីកោណដែលមានជ្រុង $\mathbf{a, b, c}$ និង មានផ្ទៃក្រលា $\mathbf{S}$ ។ ផលបូកក្រឡាផ្ទៃនៃមុខខាង $\mathbf{PAB, PBC}$ និង $\mathbf{PCA}$ ស្មើនឹង $\mathbf{3}$ ដងនៃផ្ទៃក្រឡាបាត $\mathbf{ABC}$ ។

គេឧបមាថា $\mathbf{\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \varphi}$ ដែល $\mathbf{0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}}$

ក. ចូរស្រាយថា $\mathbf{\tan\varphi = \dfrac{12S}{a^2 + b^2 + c^2}}$

ខ. កំណត់តម្លៃ $\mathbf{\varphi}$ ដែលធ្វើឱ្យ $\mathbf{\tan\varphi}$ មានតម្លៃអតិបរមា ។

30. គេយកពីរ៉ាមីត $\mathbf{PABC}$ មានបាត $\mathbf{ABC}$ ជាត្រីកោណដែលមានជ្រុង $\mathbf{a,b,c}$ និង មានផ្ទៃក្រលា $\mathbf{S}$ ។ ផលបូកក្រឡាផ្ទៃនៃមុខខាង $\mathbf{PAB,PBC}$ និង $\mathbf{PCA}$ ស្មើនឹង $\mathbf{3}$ ដងនៃផ្ទៃក្រឡាបាត $\mathbf{ABC}$ ។

គេឧបមាថា $\angle\mathbf{APB}=\angle\mathbf{BPC}=\angle\mathbf{CPA}=\varphi$ ដែល $\mathbf{0}<\varphi<\dfrac{\pi}{\mathbf{2}}$

ហើយ $\mathbf{PA^2+PB^2+PC^2=AB^2+BC^2+CA^2}$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $\tan\varphi=\dfrac{\mathbf{12S}}{\mathbf{a^2+b^2+c^2}}$

ខ. កំណត់តម្លៃ φ ដែលធ្វើឱ្យ $\tan\varphi$ មានតម្លៃអតិបរមា ។

គ. ចំពោះតម្លៃ φ រកឃើញខាងលើស្រាយថា $\mathbf{PABC}$ ជាពីរ៉ាមីតនិយ័ត ។

31. ក្នុងតេត្រាអ៊ែត $\mathbf{ABCD}$ មួយមាន $\angle\mathbf{BDC}=\mathbf{90^o}$

ហើយជើងនៃចំណោលកែងពី $\mathbf{D}$ ទៅប្លង់ $\mathbf{(ABC)}$ ជាប្រសព្វនៃ

កម្ពស់នៃ$\Delta\mathbf{ABC}$ ។

ចូរស្រាយថា $\mathbf{(AB+BC+CA)^2\le 6(AD^2+BD^2+CD^2)}$

តើពេលណាទើបយើងបានសមភាព ?

(IMO 1970)

32. គេឱ្យ $\mathbf{x}\in[\mathbf{0,a}]$ និង $\mathbf{m,n>0}$ ។

ចូរស្រាយថា $\mathbf{x^m(a-x)^n}\le\dfrac{\mathbf{m^m n^n}}{\mathbf{(m+n)^{m+n}}}.\mathbf{a^{m+n}}$ ។

33. ត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមាន $\mathbf{AB = x}$, $\mathbf{AC = 1 - x}$ ($\mathbf{0 < x < 1}$) និង $\angle\mathbf{BAC = 90^o}$ ។

$\mathbf{P}$ ជាចំនុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ដែល $\angle\mathbf{PAB} = \angle\mathbf{PBC} = \angle\mathbf{PCA} = \varphi$ ហើយ $\mathbf{0 < \varphi < 90^o}$ ។

ចូរកំណត់ $\mathbf{x}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{\tan\varphi}$ មានតម្លៃអតិបរមា ។

34. គេយក $\mathbf{I}$ ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង $\mathbf{O}$ ជារង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ដែលមិនមែនជាត្រីកោណសមង្ស័ ។

ចូរបង្ហាញថា $\angle\mathbf{AIO \le 90^o}$ លុះត្រាតែ $\mathbf{2BC \le AB + AC}$

(Hong Kong National Olympiad 1999)

35. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $\mathbf{a, b, c}$ គេកំណត់តាង $\mathbf{A = \dfrac{a+b+c}{3}}$

$\mathbf{G = \sqrt[3]{abc}}$ និង $\mathbf{H = \dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}$ ។

ចូរស្រាយថា $\left(\mathbf{\dfrac{A}{G}}\right)^3 \ge \mathbf{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}.\dfrac{A}{H}}$?

(IMO LongList 1992)

36. រង្វង់ $C(K;\rho)$ ប៉ះទៅនឹងជ្រុង AB និង AC នៃត្រីកោណ ABC ហើយផ្ចិត K របស់វាស្ថិតនៅចម្ងាយ d ពីជ្រុង BC ។

ក.ចូរស្រាយថា $a(d-\rho)=2p(r-\rho)$ ដែល r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង $2p$ ជាបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC ។

ខ. បង្ហាញថាបើរង្វង់ (C) កាត់ជ្រុង BC ត្រង់ D និង E នោះគេបាន :

$$DE=\frac{4\sqrt{r.r_A(\rho-r)(r_A-\rho)}}{r_A-r}$$

ដែល r_A ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំ A នៃត្រីកោណ ABC ។

37. គេឱ្យ $ABCD$ ជាតេត្រាអ៊ែតដែលមានផលបូកទ្រនុងឈមគ្នាស្មើ 1 ។

ចូរស្រាយថា $r_A+r_B+r_C+r_D\leq\frac{\sqrt{3}}{3}$

ដែល r_A, r_B, r_C, r_D ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃមុខខាងរបស់តេត្រាអ៊ែត ។

បង្ហាញថាសមភាពកើតមានលុះត្រាតែ $ABCD$ ជាតេត្រាអ៊ែតនិយ័ត ។

(IMO Longlists 1986)

38. ចូរកំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x,y) ដោយដឹងថា x^2y+x+y ចែកដាច់នឹង xy^2+y+7 ។

(IMO 1998)

39.គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។

គេតាង **I** ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ។

កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ **A , B , C** កាត់ជ្រុងឈមរៀងគ្នាត្រង់

A' , B' , C' ។

ចូរស្រាយថា $\frac{1}{4} < \frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \leq \frac{8}{27}$ ។

(IMO 1991)

40. គេតាង **I** ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ **ABC** មួយ ។

ឧបមាថារង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ **ABC** ប៉ះជ្រុង **[BC],[CA],[AB]**

រៀងគ្នាត្រង់ **K , L , M** ។

បន្ទាត់មួយគូសចេញពីចំនុច **B** ស្របនឹង **(MK)** កាត់**(LM)** និង**(LK)**

រៀងគ្នាត្រង់ **R** និង **S** ។ ចូរស្រាយថា $\angle RIS$ ជាមុំស្រួច ?

(IMO 1998)

41. សន្មតថា **O** ជាចំនុចមួយនៅក្នុងចតុកោណប៉ោង **ABCD** ដែលមាន

ផ្ទៃក្រលា **S** ។ គេដឹងថា $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 2S$ ។

ចូរស្រាយថា **ABCD** គឺជាការេ និង **O** ជាផ្ចិតរបស់វា ។

(Balkan MO 1997**)**

42. ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(a_n)_{n\geq 1}$ កំណត់ដោយ $a_1 = 1$, $a_2 = 3$

និង $a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n$, $\forall n \in IN$

ចូរកំណត់គ្រប់តម្លៃ n ដើម្បីឱ្យ a_n ចែកដាច់នឹង 11 ។

(Balkan MO 1990)

43. ចូរបង្ហាញថា $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ចែកដាច់នឹង 1897

(Eötvös Competition 1899)

44. គេឱ្យតេត្រាអ៊ែត $SABC$ មានបាត ABC ជាត្រីកោណដែល មានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ K , L , M ជាចំណោលកែងនៃ S លើជ្រុង $[BC]$,$[CA]$ និង $[AB]$ រៀងគ្នា ។

គេដឹងថា $\frac{BC}{SK} = \frac{CA}{SL} = \frac{AB}{SM} = d$ ហើយផលបូកផ្ទៃក្រឡានៃមុខខាង SAB, SBC, SAB ស្មើនឹង 3 ដងនៃផ្ទៃក្រឡានៃបាត ABC ។

ក. ស្រាយថា $d = \frac{6S}{a^2 + b^2 + c^2}$ ដែល a , b , c ជាជ្រុង និង S ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC ។

ខ. បង្ហាញថា d មានតម្លៃអតិបរមាលុះត្រាតែ $SABC$ និយ័ត ។

45. គេឱ្យចតុកោណប៉ោង $\mathbf{ABCD}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{AB=a}$, $\mathbf{BC=b}$ $\mathbf{CD=c}$ និង $\mathbf{DA=d}$ ។ $\mathbf{O}$ ជាចំនុចមួយនៅក្នុងចតុកោណនេះដែល $\angle\mathbf{OAB}=\angle\mathbf{OBC}=\angle\mathbf{OCD}=\angle\mathbf{ODA}=\theta$ ($\mathbf{0<\theta<90^o}$)

ក. ចូរស្រាយថា $\tan\theta=\dfrac{\mathbf{2(ab\sin B+cd\sin D)}}{\mathbf{a^2+b^2+c^2+d^2}}$

ខ. បង្ហាញថាតម្លៃ $\tan\theta$ អតិបរមាលុះត្រាតែ $\mathbf{ABCD}$ ជាការេហើយ

$\mathbf{O}$ ជាផ្ចិតរបស់វា ។

46. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{n}$ និង ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $\mathbf{a_1, a_2, ..., a_n}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\mathbf{a_1a_2a_3....a_n=1}$ ចូរបង្ហាញថា :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt{a_i^4+3}}\le\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$$ ។

(Turkey National Olympiad 2010)

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{n}$ ចំនួន $\mathbf{3^n + n^3}$ ចែកដាច់នឹង 7 លុះត្រាតែ $\mathbf{3^n n^3 + 1}$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

ដំណោះស្រាយ

-សន្មតថា $\mathbf{3^n + n^3}$ ចែកដាច់នឹង 7 នោះ $\mathbf{n}$ ត្រូវចែកមិនដាច់នឹង 7

តាមទ្រឹស្តីបទ **Euler** គេបាន $\mathbf{n^6 \equiv 1 \pmod 7}$ ។

ចំនួន $\mathbf{3^n + n^3}$ ចែកដាច់នឹង 7 នោះគេបានដូចគ្នា $\mathbf{n^3(3^n + n^3)}$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

គេមាន $\mathbf{n^3(3^n + n^3) = (n^3 3^n + 1) + (n^6 - 1)}$

ដោយ $\mathbf{n^6 \equiv 1 \pmod 7}$ នោះគេទាញបាន $\mathbf{n^3 3^n + 1}$ ចែកដាច់នឹង7

-សន្មតថា $\mathbf{n^3 3^n + 1}$ ចែកដាច់នឹង 7 នោះ $\mathbf{n}$ ត្រូវចែកមិនដាច់នឹង 7

តាមទ្រឹស្តីបទ **Euler** គេបាន $\mathbf{n^6 \equiv 1 \pmod 7}$ ។

ចំនួន $\mathbf{n^3 3^n + 1}$ ចែកដាច់នឹង 7 នោះ $\mathbf{n^3(n^3 3^n + 1)}$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

គេមាន $\mathbf{n^3(n^3 3^n + 1) = (n^6 - 1)3^n + n^3 + 3^n}$

ដោយ $\mathbf{n^6 \equiv 1 \pmod 7}$ នោះគេទាញបាន $\mathbf{n^3 + 3^n}$ ចែកដាច់នឹង7

ដូចនេះ ចំនួន $\mathbf{3^n + n^3}$ ចែកដាច់នឹង 7 លុះត្រាតែ $\mathbf{3^n n^3 + 1}$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

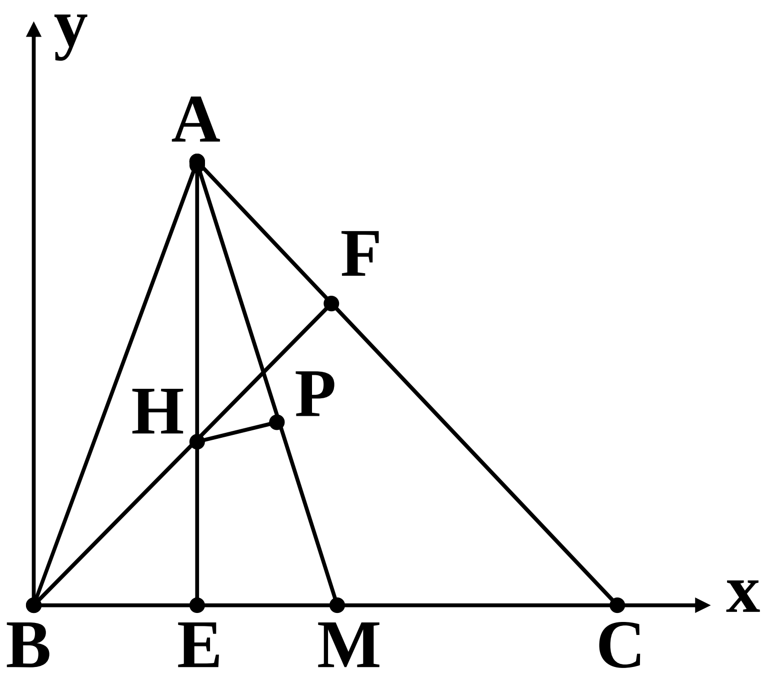
លំហាត់ទី២

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច និងមាន **M** ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ **[BC]** ។ គេគូសបន្ទាត់កែង **HP** ពីអរតូសង់ **H** នៃត្រីកោណ **ABC** ទៅ **[AM]** ។ ចូរស្រាយថា $AM.PM = BM^2$

(Japan Mathematical Olympiad Finals 2011)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $AM.PM = BM^2$



តាង $A(2m , 2n)$, $B(0,0)$ $C(2p,0)$ $H(2m , y_H)$

និង $P(x_p,y_p)$ ។

សង់កម្ពស់ **[AE]** និង **[BF]** នៃត្រីកោណ **ABC** ។

គេមាន $\overrightarrow{BH} = (2a\ , y_H)$ និង $\overrightarrow{AC} = (2p - 2m, - 2n)$

ដោយ $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$

នោះ $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a(2p - 2m) - 2ny_H = 0$

គេទាញបាន $y_H = \dfrac{2a(p - m)}{n}$ ។

គេមាន $\overrightarrow{HP} = (x_p - 2m\ , y_p - \dfrac{2a(p - m)}{n})$

និង $\overrightarrow{AM} = (p - 2m, - 2n)$

ដោយ $\overrightarrow{HP} \perp \overrightarrow{AM}$ នោះ $\overrightarrow{HP} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

គេបាន $(x_p - 2m)(p - 2m) - 2n(y_p - \dfrac{2a(p - m)}{n}) = 0 \quad (1)$

គេមាន $\overrightarrow{MP} = (x_p - p\ , y_p)$ ដោយ $\overrightarrow{MP} // \overrightarrow{AM}$ នោះគេបាន :

$\dfrac{x_p - p}{p - 2m} = \dfrac{y_p}{- 2n}$ នាំឱ្យ $y_p = \dfrac{2n}{2m - p}(x_p - p) \quad (2)$

យកសមីការ (2) ជួសក្នុង (1) បន្ទាប់ពីដោះស្រាយមកគេទទួលបាន :

$x_p = \dfrac{(4m^2 - 2mp + 4n^2)p}{(2m - p)^2 + 4n^2}$ ។

គេបាន $\mathbf{PM = \sqrt{(x_p - p)^2 + {y_p}^2}}$

តែ $\mathbf{y_p = \dfrac{2n}{2m-p}(x_p - p)}$

នោះ $\mathbf{PM = \sqrt{(2m-p)^2 + 4n^2}.\dfrac{|\,x_p - p\,|}{|\,2m-p\,|} = \dfrac{|\,x_p - p\,|}{|\,2m-p\,|}.AM}$

ហើយ $\mathbf{x_p - p = \dfrac{(4m^2 - 2mp + 4n^2)p}{(2m-p)^2 + 4n^2} - p = \dfrac{(2m-p)p^2}{AM^2}}$

(ព្រោះ $\mathbf{AM = \sqrt{(2m-p)^2 + 4n^2}}$)

គេទាញ $\mathbf{PM = \dfrac{p^2}{AM} = \dfrac{BM^2}{AM}}$ (ព្រោះ $\mathbf{BM = p}$) ។

ដូចនេះ $\mathbf{BM^2 = AM.PM}$ ។

លំហាត់ទី៣

គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដោយដឹងថា

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2}\le\frac{3}{16}$$

(IMO Shortlist 2009)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2}\le\frac{3}{16}$

គេមាន $(2a+b+c)^2=4a^2+4a(b+c)+(b+c)^2$

$$=4a^2+4ab+4ac+4bc+(b-c)^2$$

$$=4(a+b)(a+c)+(b-c)^2$$

ដោយ $(b-c)^2\ge 0$ នោះ $(2a+b+c)^2\ge 4(a+b)(a+c)$

គេទាញ $\frac{1}{(2a+b+c)^2}\le\frac{1}{4(a+b)(a+c)}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $\frac{1}{(a+2b+c)^2}\le\frac{1}{4(a+b)(b+c)}$ (2)

និង $\frac{1}{(a+b+2c)^2}\le\frac{1}{4(b+c)(a+c)}$ (3)

បូកវិសមភាព **(1) , (2)** និង **(3)** គេបាន :

$$S \le \frac{1}{4(a+b)(a+c)} + \frac{1}{4(a+b)(b+c)} + \frac{1}{4(b+c)(a+c)}$$

$$S \le \frac{a+b+c}{2(a+b)(b+c)(c+a)}$$

ពិនិត្យ $(a+b+c)(ab+bc+ca) - (a+b)(b+c)(c+a) = abc$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន :

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 2\sqrt{ab}\,.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca} = 8abc$$

គេទាញបាន

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

តាមសម្មតិកម្មគេមាន $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a+b+c$

គេបាន $(a+b)(b+c)(c+a) \ge \frac{8}{9}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})(ab+bc+ca)$

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge \frac{8}{9}\frac{(ab+bc+ca)^2}{abc}$$

ដោយ $(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c)$ នោះគេទាញ

$(a+b)(b+c)(c+a) \ge \frac{8}{3}(a+b+c)$ នោះ $S \le \frac{1}{2}.\frac{3}{8} = \frac{3}{16}$

ដូចនេះ $\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(a+2b+c)^2} + \frac{1}{(a+b+2c)^2} \le \frac{3}{16}$

លំហាត់ទី៤

គេយក **Q** ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ **ABC** ។ ចំពោះគ្រប់ចំនុច **P** ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$aPA^2 + bPB^2 + cPC^2 = aQA^2 + bQB^2 + cQC^2 + (a+b+c)QP^2$$

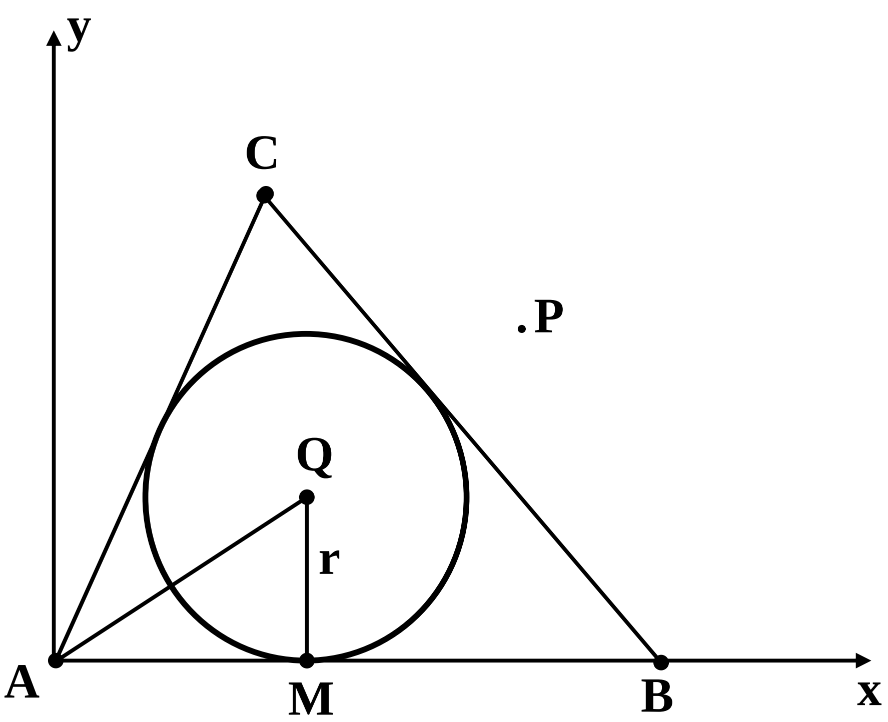
ដែល $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ ។

(IMO Shortlist 1988)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$aPA^2 + bPB^2 + cPC^2 = aQA^2 + bQB^2 + cQC^2 + (a+b+c)QP^2$$



ជ្រើសរើស $A(0,0)$, $B(c,0), C(b\cos A, b\sin A)$

តាង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ហើយយក M ជាចំនុចប៉ះ រវាងរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណជាមួយជ្រុង $[AB]$ ។

គេបាន $AM = p - a$ ដែល $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃΔABC

ហេតុនេះ $I(p-a, r)$ ។ តាង $P(x, y)$ ជាចំនុចទូទៅនៃប្លង់ ។

គេមាន $PA^2 = x^2 + y^2$

$$PB^2 = (x-c)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2cx + c^2$$

$$PC^2 = (x - b\cos A)^2 + (y - b\sin A)^2$$

$$= x^2 + y^2 - 2bx\cos A - 2by\sin A + b^2$$

តាង $T = aPA^2 + bPB^2 + cPC^2$ គេបាន :

$$T = (x^2 + y^2)(a+b+c) - 2bcx(1+\cos A) - 2bcy\sin A$$

$$+ ac^2 + b^2c$$

គេមាន $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin A = pr$ ឬ $bc\sin A = 2pr$

ហើយ $1 + \cos A = 1 + \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{2p(p-a)}{bc}$

$$T = 2p(x^2 + y^2) - 4p(p-a)x - 4pry + ac^2 + b^2c$$

គេមាន $QP^2 = (x - (p-a))^2 + (y - r)^2$

$$QP^2 = x^2 + y^2 - 2(p-a)x - 2ry + r^2 + (p-a)^2$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $a+b+c=2p$ គេបាន :

$$2pQP^2 = 2p(x^2+y^2)-4p(p-a)x-4pry+2pr^2+2p(p-a)^2$$

ដោយ $r=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

គេបាន $2pr^2+2p(p-a)^2=b^2c+bc^2-abc$

$$2pQP^2 = 2p(x^2+y^2)-4p(p-a)x-4pry+bc^2+bc^2-abc$$

គេបាន $T-2pQP^2=abc$ ឬ $T=(a+b+c)QP^2+abc$

ជាទូទៅគ្រប់ចំនុច P គេបានទំនាក់ទំនង :

$$aPA^2+bPB^2+cPC^2=(a+b+c)QP^2+abc \quad (1)$$

បើចំនុច $P\equiv Q$ នោះ $QP=0$

តាម (1) គេទាញ $aQA^2+bQB^2+cQC^2=abc$ (2)

យកទំនាក់ទំនង (2) ជំនួសក្នុង (1) គេបាន :

$$aPA^2+bPB^2+cPC^2=aQA^2+bQB^2+cQC^2+(a+b+c)QP^2$$

សម្គាល់ :

ទំនាក់ទំនង $aPA^2+bPB^2+cPC^2=(a+b+c)QP^2+abc$

ហៅថាទ្រឹស្តីបទអឺលែ ។

លំហាត់ទី៥

សមីការ $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ មានឬសបីជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

(មិនចាំបាច់ខុសគ្នា) ។

ចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរមាដែលអាចនៃ $\frac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \frac{c}{b}$ ។

(Turkey Team Selection Tests 2008)

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃអប្បបរមាដែលអាចនៃ $\frac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \frac{c}{b}$

តាង u, v, w ជាឬសរបស់សមីការ $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ ។

គេបាន $\begin{cases} u+v+w = a \\ uv+vw+wu = b \\ uvw = c \end{cases}$

ដោយ $u > 0, v > 0, w > 0$ នោះ $a > 0, b > 0, c > 0$

គេមាន $\frac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \frac{c}{b} = \frac{b^2 + ab - 2ac + b - 3c}{b^2 + 2ab + 3a}$

$$= \frac{3b^2 + 3ab - 6ac + 3b - 9c}{3(b^2 + 2ab + 3b)}$$

$$= \frac{(b^2 + 2ab + 3b) + (2b^2 + ab - 6ac - 9c)}{3(b^2 + 2ab + 3b)}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2b^2 + ab - 6ac - 9c}{3(b^2 + 2ab + 3b)}$$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM - GM}$ គេមាន :

$$a = u + v + w \ge 3\sqrt[3]{uvw}$$

និង $b = uv + vw + wu \ge 3\sqrt[3]{u^2v^2w^2}$

គេបាន $ab \ge 9uvw = 9c$ ឬ $ab - 9c \ge 0$ (*)

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន :

$$\frac{u^2v^2 + v^2w^2}{2} \ge uv^2w \quad (1)$$

$$\frac{v^2w^2 + u^2w^2}{2} \ge uvw^2 \quad (2)$$

$$\frac{u^2w^2 + u^2v^2}{2} \ge u^2vw \quad (3)$$

បូកវិសមភាព $(1),(2),(3)$ គេបាន :

$$u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 \ge uvw(u + v + w)$$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2uvw(u+v+w)$ គេបាន

$(uv+vw+wu)^2 \geq 3uvw(u+v+w)$

ឬ $b^2 \geq 3ac$ ឬ $2b^2 - 6ac \geq 0$ (**)

បូកវិសមភាព (*) & (**) គេបាន $2b^2 + ab - 6ac - 9c \geq 0$

ហេតុនេះ $\frac{1}{3} + \frac{2b^2 + ab - 6ac - 9c}{3(b^2 + 2ab + 3b)} \geq \frac{1}{3}$

ឬ $\frac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \frac{c}{b} \geq \frac{1}{3}$

ដូចនេះតម្លៃអប្បបរមានៃ $\frac{1+a+b+c}{3+2a+b} - \frac{c}{b}$ គឺ $\frac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី៦

ចូរស្រាយថា :

$$\sum_{Cyc}\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}\le\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។

(Turkey TST 2010)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\sum_{Cyc}\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}\le\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})$$

តាមវិសមភាព $\mathbf{Cauchy-Schwarz}$ គេមាន :

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{9}{2(a+b+c)}$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)$ គេបាន :

$$\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})\ge\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}\quad(1)$$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ គេមាន :

$$\frac{\frac{a^2+b^2}{2}+(a^2-ab+b^2)}{2}\ge\sqrt{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}$$

ឬ $\frac{3a^2+3b^2-2ab}{4}\ge\sqrt{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}$

គេបាន $\sum_{Cyc}\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}\le\sum_{Cyc}\frac{\sqrt{3a^2+3b^2-2ab}}{2}$

តាមវិសមភាព **Cauchy – Schwarz** គេបាន :

$$\sum_{Cyc}\frac{\sqrt{3a^2+3b^2-2ab}}{2}\le\frac{\sqrt{3(6a^2+6b^2+6c^2-2ab-2bc-2ca)}}{2}$$

គេទាញបាន :

$$\sum_{Cyc}\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}\le\frac{\sqrt{6[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)]}}{2}\quad(2)$$

យើងនឹងស្រាយថា :

$$\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}\ge\frac{\sqrt{6[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)]}}{2}$$

សមមូល

$$a^2+b^2+c^2\ge\sqrt{\frac{(a+b+c)^2[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)]}{6}}$$

$$a^2+b^2+c^2 \ge \frac{\sqrt{2(a+b+c)^2[9(a^2+b^2+c^2)-3(ab+bc+ca)}}{6}$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$, $\forall x , y \ge 0$

$x=2(a+b+c)^2$, $y=9(a^2+b^2+c^2)-3(ab+bc+ca)$

ហើយ $x+y=11(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca$ នោះគេបាន

$$a^2+b^2+c^2 \ge \frac{11(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}{12}$$

$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$$

ឬ $\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \ge 0$ ពិត

ហេតុនេះគេបាន

$$\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c} \ge \frac{\sqrt{6[3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)]}}{2} \quad (3)$$

តាមទំនាក់ទំនង (1) ,(2) និង (3) គេទាញបាន :

$$\sum_{Cyc}\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}} \le \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ $a=b=c$ ។

លំហាត់ទី៧

បើ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ហើយ r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនោះចូរស្រាយថា $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{4r^2}$ ។

(Turkey National Olympiad 2005)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{4r^2}$

តាង $\begin{cases} b+c-a=x \\ c+a-b=y \\ a+b-c=z \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} a=\frac{y+z}{2} \\ b=\frac{z+x}{2} \\ c=\frac{x+y}{2} \end{cases}$

គេបាន $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{4}{(y+z)^2}+\frac{4}{(z+x)^2}+\frac{4}{(x+y)^2}$ (1)

តាមរូបមន្តហេរ៉ុងគេបាន ៖

$S=p\,r=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ដែល $p=\frac{a+b+c}{2}$

គេទាញ $r^2=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$

ឬ $r^2 = \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4(a+b+c)} = \frac{xyz}{4(x+y+z)}$

គេទាញ $\frac{1}{4r^2} = \frac{x+y+z}{xyz} = \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy}$ **(2)**

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន **:**

$y + z \ge 2\sqrt{yz}$ នាំឱ្យ $\frac{4}{(y+z)^2} \le \frac{1}{yz}$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{4}{(z+x)^2} \le \frac{1}{zx}$ និង $\frac{4}{(x+y)^2} \le \frac{1}{xy}$

គេបាន $\frac{4}{(y+z)^2} + \frac{4}{(z+x)^2} + \frac{4}{(x+y)^2} \le \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy}$ **(3)**

តាមទំនាក់ទំនង **(1) , (2) & (3)** គេទាញបាន

$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \le \frac{1}{4r^2}$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \le \frac{1}{4r^2}$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$16(a+b+c) \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{1}{(a+b+\sqrt{2a+2c})^3}+\frac{1}{(b+c+\sqrt{2a+2b})^3}+\frac{1}{(c+a+\sqrt{2b+2c})^3} \leq \frac{8}{9}$$

(Vietnam Team Selection Tests 2010)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{1}{(a+b+\sqrt{2a+2c})^3}+\frac{1}{(b+c+\sqrt{2a+2b})^3}+\frac{1}{(c+a+\sqrt{2b+2c})^3} \leq \frac{8}{9}$$

តាមសម្មតិកម្មគេមាន $16(a+b+c) \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

គេបាន $ab+bc+ca \leq 16abc(a+b+c)$ (1)

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$$\frac{a^2b^2+b^2c^2}{2}+\frac{b^2c^2+c^2a^2}{2}+\frac{c^2a^2+a^2b^2}{2} \geq ab^2c+abc^2+a^2bc$$

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq ab^2c+abc^2+a^2bc = abc(a+b+c)$$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2ab^2c+2abc^2+2a^2bc = 2abc(a+b+c)$

គេបាន $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$ (2)

តាម (1) នឹង (2) គេទាញបាន

$$(ab+bc+ca)^2 \ge \frac{3}{16}(ab+bc+ca)$$

ឬ $ab+bc+ca \ge \frac{3}{16}$ (3)

ម្យ៉ាងទៀតតាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$$(a+b)+\frac{1}{2}(\sqrt{2a+2c})+\frac{1}{2}(\sqrt{2a+2c}) \ge 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(a+c)}{2}}$$

ឬ $(a+b+\sqrt{2a+2c})^3 \ge \frac{27}{2}(a+b)(a+c)$

គេទាញបាន $\frac{1}{(a+b+\sqrt{2a+2c})^3} \le \frac{2}{27}\cdot\frac{1}{(a+b)(a+c)}$ (4)

ស្រាយបំភ្លឺដូចគ្នាដែរគេបាន :

$$\frac{1}{(b+c+\sqrt{2a+2b})^3} \le \frac{2}{27}\cdot\frac{1}{(a+b)(b+c)} \quad (5)$$

$$\frac{1}{(c+a+\sqrt{2b+2c})^3} \le \frac{2}{27}\cdot\frac{1}{(c+a)(b+c)} \quad (6)$$

តាង

$$T=\frac{1}{(a+b+\sqrt{2a+2c})^3}+\frac{1}{(b+c+\sqrt{2a+2b})^3}+\frac{1}{(c+a+\sqrt{2b+2c})^3}$$

បូកវិសមភាព $(4),(5),(6)$ គេបាន

$$T \le \frac{2}{27}\cdot\frac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

គេមាន

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-(a+b)(b+c)(c+a)=abc \quad (7)$$

តាមវិសមភាព **AM – GM** គេមាន **:**

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 2\sqrt{ab}\,.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca}=8abc \quad (8)$$

តាម **(7)** និង **(8)** គេទាញបាន

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

នាំឱ្យ $\dfrac{a+b+c}{(a+b)(b+c)(c+a)}\leq \dfrac{9}{8}.\dfrac{1}{ab+bc+ca}=\dfrac{9}{8}.\dfrac{16}{3}=6$

ព្រោះ $ab+bc+ca\geq \dfrac{3}{16}$ ។

គេទាញបាន $T\leq \dfrac{2}{27}\times 2\times 6=\dfrac{8}{9}$ ពិត

ដូចនេះ

$$\frac{1}{(a+b+\sqrt{2a+2c})^3}+\frac{1}{(b+c+\sqrt{2a+2b})^3}+\frac{1}{(c+a+\sqrt{2b+2c})^3}\leq \frac{8}{9}$$

លំហាត់ទី៩

គេឱ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2y^2 + 2yx^2 + 1 = 0$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ

$$f(x,y) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + y(y + \frac{1}{x} + 2)$$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ

$$f(x,y) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + y(y + \frac{1}{x} + 2)$$

គេមាន $x^2y^2 + 2yx^2 + 1 = 0$

គេបាន $y^2 + 2y + \frac{1}{x^2} = 0$ ឬ $(y+1)^2 + \frac{1}{x^2} = 1$ ដែល $x \neq 0$

តាង $y + 1 = \cos\varphi$ និង $\frac{1}{x} = \sin\varphi$

នោះ $(y+1)^2 + \frac{1}{x^2} = 1$ ពិតគ្រប់ φ

គេមាន $f(x,y) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + y(y + \frac{1}{x} + 2)$

$$= 2\sin^2\varphi + \sin\varphi + (\cos\varphi - 1)(\cos\varphi - 1 + \sin\varphi + 2)$$

$$= 2\sin^2\varphi + \sin\varphi + \cos^2\varphi - 1 + \sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi$$

$$= \sin^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{\pi}{4} + 2\varphi)$$

ដូចនេះ $\min f(x, y) = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ និង $\max = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ ។

លំហាត់ទី១០

គេឱ្យចតុកោណប៉ោង **ABCD** មួយមានផ្ទៃក្រឡា **S** ហើយ

K,L,M,N ជាចំនុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃ ជ្រុង

[AB],[BC],[CD],[DA] ។

តាង S_1 , S_2 , S_3 , S_4 រៀងគ្នាជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណបួន

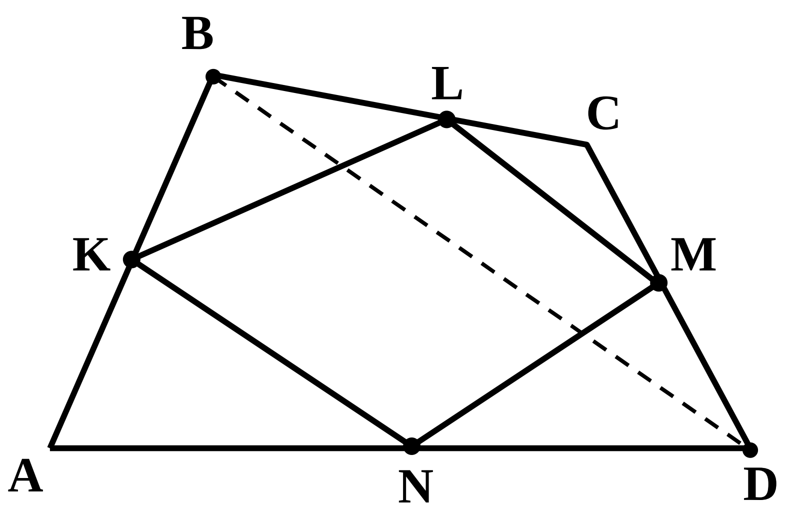
AKN,BKL CLM , DMN ។

ចូរស្រាយថា $\sqrt[3]{S_1}+\sqrt[3]{S_2}+\sqrt[3]{S_3}+\sqrt[3]{S_3}\le 2\sqrt[3]{S}$ ។

(Turkey National Olympiad 2003)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt[3]{S_1}+\sqrt[3]{S_2}+\sqrt[3]{S_3}+\sqrt[3]{S_3}\le 2\sqrt[3]{S}$



គេមាន **K** និង **N** ជាចំនុចកណ្ដាលនៃ **[AB]** និង **[AD]** នោះ **[KN]**

ជាបាតមធ្យមនៃត្រីកោណ **ABD** នោះគេបាន $S_1 = \frac{1}{4}.S_{ABD}$ ។

ដូចគ្នាដែរ $S_3 = \frac{1}{4}S_{BCD}$, $S_2 = \frac{1}{4}S_{BKL}$, $S_4 = \frac{1}{4}S_{DMN}$

គេបាន

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{(S_{ABD} + S_{BCD}) + (S_{BKL} + S_{DMN})}{4}$$

ដោយ $S_{ABD} + S_{BCD} = S$ និង $S_{BKL} + S_{DMN} = S$

គេបាន $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{S}{2}$ ។

តាងអនុគមន៍ $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ ដែល $x > 0$

គេមាន $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ និង $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} < 0\ \forall x > 0$

នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ប៉ោង ។

តាមវិសមភាព **Jensen** គេបាន :

$$\frac{f(S_1) + f(S_2) + f(S_3) + f(S_4)}{4} \le f\left(\frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{4}\right)$$

តែ $f(\frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{4}) = f(\frac{S}{8}) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{S}$

គេបាន $\frac{\sqrt[3]{S_1} + \sqrt[3]{S_2} + \sqrt[3]{S_3} + \sqrt[3]{S_3}}{4} \le \frac{1}{2}\sqrt[3]{S}$

ដូចនេះ $\sqrt[3]{S_1} + \sqrt[3]{S_2} + \sqrt[3]{S_3} + \sqrt[3]{S_3} \le 2\sqrt[3]{S}$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{ab}{1-c^2}+\frac{bc}{1-a^2}+\frac{ca}{1-b^2}\le\frac{3}{8}$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{ab}{1-c^2}+\frac{bc}{1-a^2}+\frac{ca}{1-b^2}\le\frac{3}{8}$

ដោយ $a+b+c=1$ នោះ $1-c^2=(a+b+c)^2-c^2$

$=(a+b)(a+b+2c)$

$=(a+b)(a+c)+(a+b)(b+c)$

គេបាន $\frac{ab}{1-c^2}=\frac{ab}{(a+b)(a+c)+(a+b)(b+c)}$

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy}-\text{Schwarz}$ គេបាន :

$$\frac{1}{(a+b)(a+c)}+\frac{1}{(a+b)(b+c)}\ge\frac{4}{(a+b)(a+c)+(a+b)(b+c)}$$

$$\frac{a+b+2c}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\frac{4}{(a+b)(a+c)+(a+b)(b+c)}$$

$$\frac{1+c}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\frac{4}{(a+b)(a+c)+(a+b)(b+c)}$$

គេទាញ $\frac{ab}{1-c^2}\le\frac{ab(1+c)}{4(a+b)(b+c)(c+a)}\quad(1)$

ស្រាយបំភ្លឺដូចគ្នាដែរគេបាន $\frac{bc}{1-a^2} \le \frac{bc(1+a)}{4(a+b)(b+c)(c+a)}$ (2)

និង $\frac{ac}{1-b^2} \le \frac{ac(1+b)}{4(a+b)(b+c)(c+a)}$ (3)

បូកវិសមភាព (1) , (2) & (3) គេបាន :

$$\frac{ab}{1-c^2} + \frac{bc}{1-a^2} + \frac{ac}{1-b^2} \le \frac{ab(1+c)+bc(1+a)+ac(1+b)}{4(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\frac{ab}{1-c^2} + \frac{bc}{1-a^2} + \frac{ac}{1-b^2} \le \frac{ab+bc+ca+3abc}{4(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (4)$$

គេមាន $(a+b)(b+c)(c+a) = (1-a)(1-b)(1-c)$

ព្រោះ $a+b+c=1$ ។

ដោយ

$$(1-a)(1-b)(1-c) = 1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc$$

$$= ab+bc+ca-abc$$

គេបាន $(a+b)(b+c)(c+a) = ab+bc+ca-abc$

ឬ $(a+b)(b+c)(c+a)+4abc = ab+bc+ca+3abc$

ឬ $1+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{ab+bc+ca+3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

ដោយ $(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$

គេបាន $\frac{ab+bc+ca+3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \le 1+\frac{4}{8}=\frac{3}{2}$ (5)

តាម (4) & (5) គេបាន $\frac{ab}{1-c^2}+\frac{bc}{1-a^2}+\frac{ca}{1-b^2} \le \frac{3}{8}$ ពិត ។

ដូចនេះ $\frac{ab}{1-c^2}+\frac{bc}{1-a^2}+\frac{ca}{1-b^2} \le \frac{3}{8}$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយចារឹកក្រៅរង្វង់ (Γ) កាំ $\mathbf{r}$ ។

តាង $\mathbf{H}, \mathbf{K}, \mathbf{L}$ ជាចំនុចប៉ះរវាង (Γ) ជាមួយជ្រុងទាំងបី

$\mathbf{[BC]}, \mathbf{[CA]}, \mathbf{[AB]}$ រៀងគ្នា ។ គេសង់រង្វង់បី $(\mathbf{C_A}),(\mathbf{C_B}),(\mathbf{C_C})$

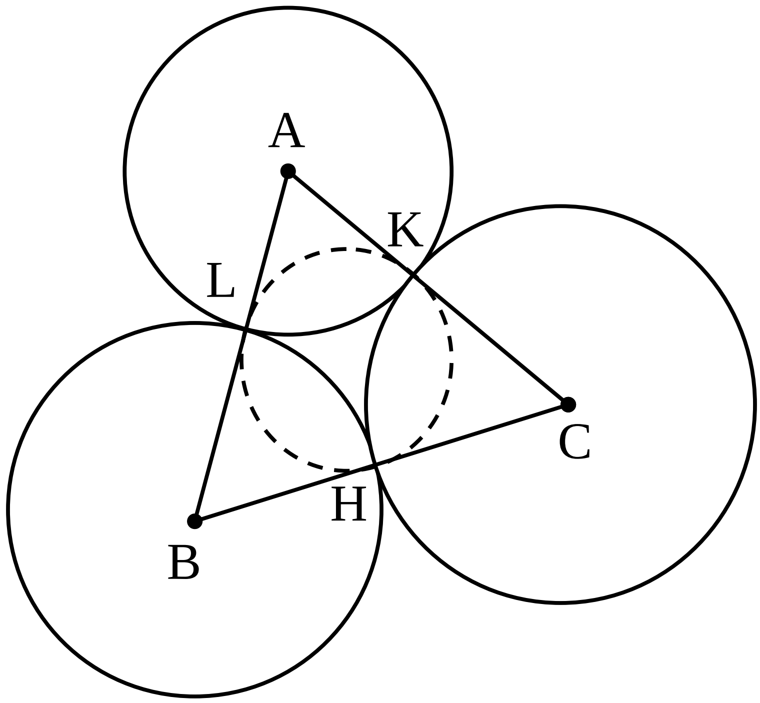
មានផ្ចិត $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ រៀងគ្នាហើយប៉ះគ្នាពីរៗ ។

តាង $\mathbf{R_A}, \mathbf{R_B}, \mathbf{R_C}$ ជាកាំនៃរង្វង់ $(\mathbf{C_A}),(\mathbf{C_B}),(\mathbf{C_C})$ រៀងគ្នា

ចូរស្រាយថា $\mathbf{R_A R_B R_C \geq 3\sqrt{3}\, r^3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\mathbf{R_A R_B R_C \geq 3\sqrt{3}\, r^3}$



តាង $\mathbf{p}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនិង $\mathbf{S}$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$

គេបាន $\mathbf{S = pr = \sqrt{p(p-BC)(p-CA)(p-AB)}}$

ដោយ $\mathbf{p = \dfrac{AB+BC+CA}{2} = R_A + R_B + R_C}$

ព្រោះ $\mathbf{AB = R_A + R_B\ ,\ BC = R_B + R_C , CA = R_A + R_C}$

គេទាញ $\mathbf{r = \sqrt{\dfrac{R_A R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}}}$

ដោយ $\mathbf{R_A + R_B + R_C \ge 3\sqrt[3]{R_A R_B R_C}}$

នោះ $\mathbf{r \le \sqrt{\dfrac{R_A R_B R_C}{3\sqrt[3]{R_A R_B R_C}}} = \dfrac{\sqrt[3]{R_A R_B R_C}}{\sqrt{3}}}$

នាំឱ្យ $\mathbf{R_A R_B R_C \ge (\sqrt{3}r)^3 = 3\sqrt{3}\,r^3}$ ពិត ។

ដូចនេះ $\mathbf{R_A R_B R_C \ge 3\sqrt{3}\,r^3}$

លំហាត់ទី១៣

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

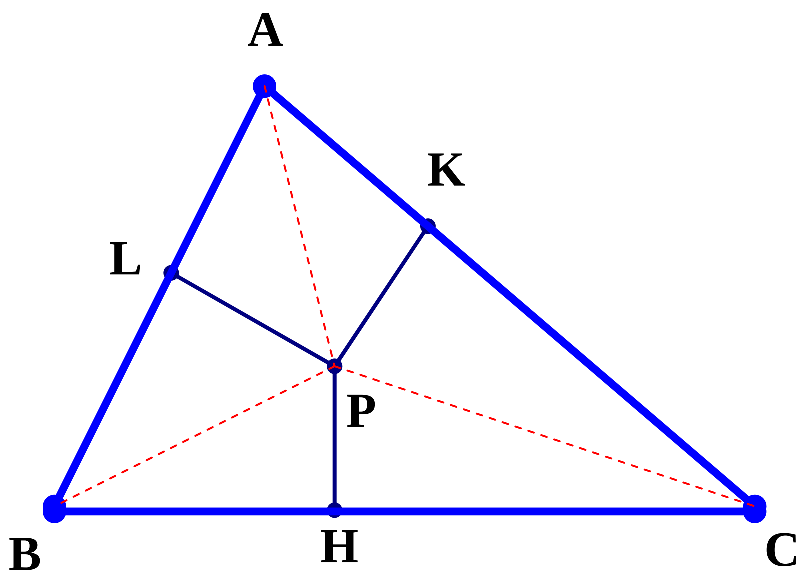
P ជាចំនុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណនេះ **H, K ,L** ជាចំណោលកែងនៃ **H** រៀងគ្នាលើជ្រុង **[BC] , [CA] , [AB]** ។

ចំពោះគ្រប់ចំនុច **P** ចូរស្រាយថា $AL^2 + BH^2 + CK^2 \geq \frac{p^2}{3}$

ដែល $p = \frac{BC + CA + AB}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ **ABC** ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $AL^2 + BH^2 + CK^2 \geq \frac{p^2}{3}$



តាមវិសមភាព **Cauchy – Schwarz** គេបាន :

$$AL^2+LB^2+BH^2+HC^2+CK^2+KA^2 \ge \frac{(AB+BC+CA)^2}{6} \quad (1)$$

ព្រោះ $AL+LB+BH+HC+CK+KA=AB+BC+CA$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រគេមាន :

$$AP^2=AL^2+PL^2=PK^2+KA^2$$

$$BP^2=BH^2+HP^2=PL^2+LB^2$$

$$CP^2=CK^2+PK^2=HP^2+HC^2$$

បូកសមភាពទាំងនេះគេបាន

$$AL^2+BH^2+CH^2=LB^2+HC^2+KA^2 \quad (2)$$

តាមទំនាក់ទំនង **(1) & (2)** គេទាញបាន

$$2(AL^2+BH^2+CK^2) \ge \frac{4p^2}{6}$$

ព្រោះ $AB+BC+CA=2p$

ដូចនេះ $AL^2+BH^2+CK^2 \ge \frac{p^2}{3}$ ។

លំហាត់ទី១៤

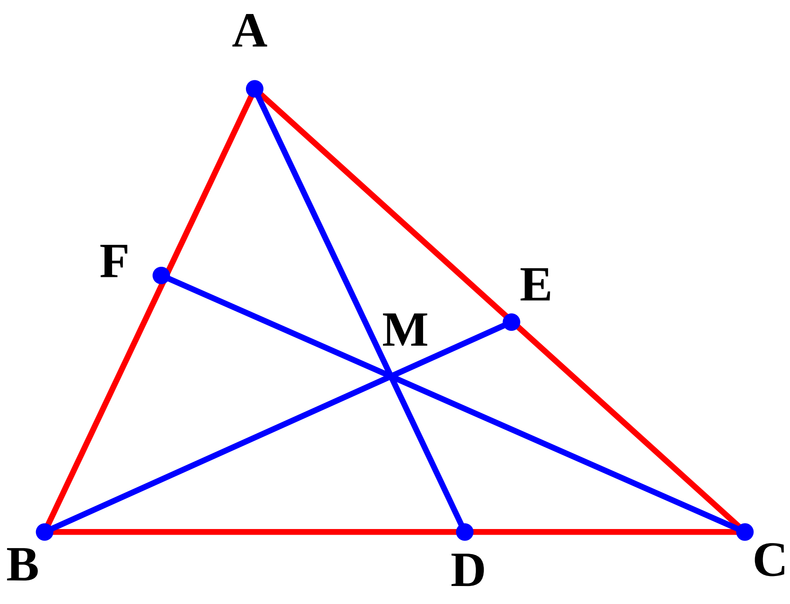
គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយហើយ **M** ជាចំនុចនៅក្នុងត្រីកោណនេះ ។ **D,E,F** ជាចំនុចប្រសព្វរវាង **AM , BM , CM** ជាមួយជ្រុង **BC,AC,AB** រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថាគ្រប់ចំនុច **M** គេមាន $\frac{AM}{MD}\cdot\frac{BM}{ME}\cdot\frac{CM}{MF}\geq 8$?

រួចបញ្ជាក់ទីតាំងនៃ **M** ដើម្បីឱ្យវិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាព ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{AM}{MD}\cdot\frac{BM}{ME}\cdot\frac{CM}{MF}\geq 8$



តាង S_1, S_2, S_3 និង S រៀងគ្នាជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ

MBC, MAC, MAB និង ABC ។

គេបាន $S = S_1 + S_2 + S_3$

គេមាន $\frac{AM}{MD} = \frac{AD - MD}{MD} = \frac{AD}{MD} - 1 = \frac{S}{S_1} - 1 = \frac{S_2 + S_3}{S_1}$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\frac{BM}{ME} = \frac{S_3 + S_1}{S_2}$ និង $\frac{CM}{MF} = \frac{S_1 + S_2}{S_3}$

គេបាន $\frac{AM}{MD} \cdot \frac{BM}{ME} \cdot \frac{CM}{MF} = \frac{(S_1 + S_2)(S_2 + S_3)(S_1 + S_3)}{S_1 S_2 S_3}$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន $\begin{cases} S_1 + S_2 \ge 2\sqrt{S_1 S_2} \\ S_2 + S_3 \ge 2\sqrt{S_2 S_3} \\ S_1 + S_3 \ge 2\sqrt{S_1 S_3} \end{cases}$

គុណវិសមភាពនេះអង្គ និង អង្គគេបាន

$(S_1 + S_2)(S_2 + S_3)(S_1 + S_3) \ge 8 S_1 S_2 S_3$

ដូចនេះ $\frac{AM}{MD} \cdot \frac{BM}{ME} \cdot \frac{CM}{MF} \ge 8$ ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពកាលណា $S_1 = S_2 = S_3$

ក្នុងករណីនេះ $\frac{AM}{MD} = \frac{BM}{ME} = \frac{CM}{MF} = 2$

នាំឱ្យ M ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃΔ ABC ។

លំហាត់ទី១៥

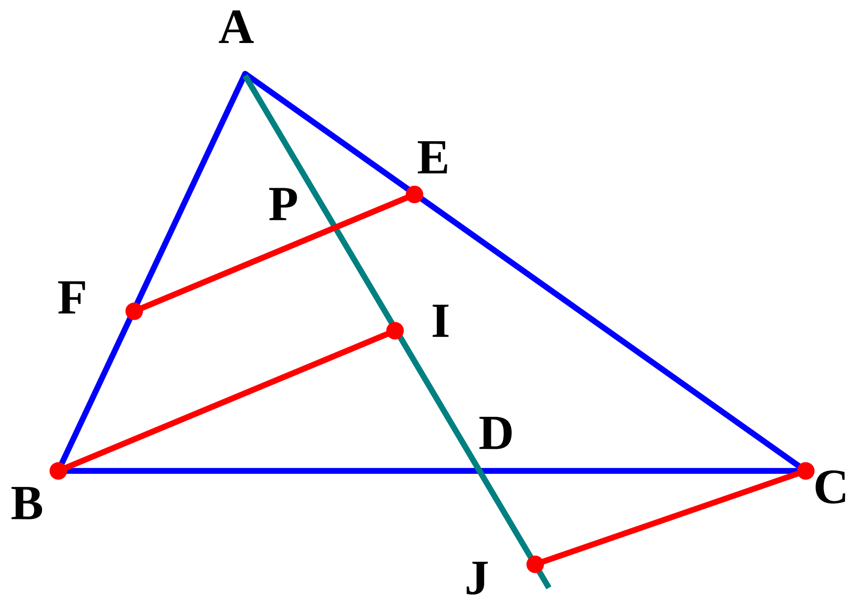
ចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC គេយក D,E,F ជាចំនុចស្ថិតនៅលើអង្កត់ $[BC]$ $[CA],[AB]$ រៀងគ្នា ។ យក P ជាចំនុចប្រសព្វរវាង $[AD]$ និង $[EF]$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{AB}{AF}\times DC+\frac{AC}{AE}\times DB=\frac{AD}{AP}\times BC$ ។

(Indonesia National Science Olympiad 2009)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{AB}{AF}\times DC+\frac{AC}{AE}\times DB=\frac{AD}{AP}\times BC$



សង់ $(BI)//(EF)$ និង $(CJ)//(EF)$ ដែល $I,J\in(AD)$ ។

គេមាន Δ IBD និង Δ JCD ដូចគ្នានោះគេបាន $\frac{ID}{JD}=\frac{DB}{DC}$

ឬ $\frac{ID}{DB}=\frac{JD}{DC}=\frac{ID+JD}{DB+DC}=\frac{IJ}{BC}$ ឬ $ID=\frac{DB.IJ}{BC}$

និង $JD=\frac{IJ.DC}{BC}$ ។

គេមាន $AI=AD-ID=AD-\frac{DB.IJ}{BC}$

គេបាន $\frac{AI.DC}{AP}=\frac{AD.DC}{AP}-\frac{DB.IJ.DC}{AP.BC}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $AJ=AD+JD$ តែ $JD=AD+\frac{IJ.DC}{BC}$

គេបាន $\frac{AJ.DB}{AP}=\frac{AD.DB}{AP}+\frac{DB.IJ.DC}{AP.BC}$ (2)

បូកសមភាព (1) & (2) គេបាន :

$$\frac{AI.DC}{AP}+\frac{AJ.DB}{AP}=\frac{AD.DC+AD.DB}{AP}=\frac{AD.BC}{AP} \quad (3)$$

ព្រោះ $DC+DB=BC$ ។

គេមាន ΔABI និង ΔAFP ដូចគ្នានោះគេបាន $\frac{AB}{AF}=\frac{AI}{AP}$ (4)

គេមាន ΔAPE និង ΔAJC ដូចគ្នានោះគេបាន $\frac{AC}{AE}=\frac{AJ}{AP}$ (5)

យកសមីការ (4) & (5) ជំនួសក្នុង (3) គេបាន :

$\frac{AB}{AF}\times DC+\frac{AC}{AE}\times DB=\frac{AD}{AP}\times BC$ ពិត ។

លំហាត់ទី១៦

គេឱ្យ $a\,,b\,,c$ ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន និង $x,y\,,z$

ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដោយដឹងថា $a+b+c=x+y+z$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\ge a+b+c$ ។

(Indonesia Indonesia TST 2010)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\ge a+b+c$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ **គេមាន** $\frac{a^3}{x^2}+x+x\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{x^2}.x.x}$

គេទាញ $\frac{a^3}{x^2}\ge 3a-2x \quad (1)$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\frac{b^3}{y^2}\ge 3b-2y \quad (2)$ **និង** $\frac{c^3}{z^2}\ge 3c-2z \quad (3)$

បូកវិសមភាព $(1),(2)\ \&\ (3)$ **គេបាន :**

$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\ge 3(a+b+c)-2(x+y+z)=a+b+c$ **ពិត**

ដូចនេះ $\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\ge a+b+c$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឱ្យ $a\ ,\ b\ ,\ c > 0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}{b+c}+\frac{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}{c+a}+\frac{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{a+b}\geq\frac{9}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}{b+c}+\frac{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}{c+a}+\frac{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{a+b}\geq\frac{9}{2}$$

គេមាន $b^3+c^3=(b+c)^3-3bc(b+c)$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ **គេមាន** $b+c\geq 2\sqrt{bc}$

គេទាញ $bc\leq\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$ **នាំឱ្យ** $-3bc(b+c)\geq -\frac{3}{4}(b+c)^3$

គេបាន $b^3+c^3\geq (b+c)^3-\frac{3}{4}(b+c)^3=\frac{1}{4}(b+c)^3$

គេទាញ $b+c\leq\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}$

ឬ $a+b+c\leq a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}$

នាំឱ្យ $\frac{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}{b+c}\geq 1+\frac{a}{b+c}$ **(1)**

ដូចគ្នាដែរ $\frac{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}{c+a}\geq 1+\frac{b}{c+a}$ **(2)**

និង $\dfrac{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{a+b}\geq 1+\dfrac{c}{a+b}$ (3)

ដោយបូកទំនាក់ខ្ញុំទំនង (1),(2),(3) គេបាន :

$T\geq 3+\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$ ដែល

$$T=\frac{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}{b+c}+\frac{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}{c+a}+\frac{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{a+b}$$

យើងនឹងស្រាយថា $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2}$

តាង $\begin{cases} b+c=m \\ c+a=n \\ a+b=p \end{cases}$

គេបាន $(b+c)+(c+a)+(a+b)=m+n+p$

នាំឱ្យ $a+b+c=\dfrac{m+n+p}{2}$

គេទាញ $\begin{cases} a=\dfrac{n+p-m}{2} \\ b=\dfrac{m-n+p}{2} \\ c=\dfrac{m+n-p}{2} \end{cases}$

គេបាន

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{n+p-m}{2m}+\frac{m-n+p}{2n}+\frac{m+n-p}{2p}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\right)+\left(\frac{p}{m}+\frac{m}{p}\right)+\left(\frac{n}{p}+\frac{p}{n}\right)-3\right]$$

តាមវិសមភាព$AM-GM$ គេបាន

$$\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\geq 2\ ;\ \frac{p}{m}+\frac{m}{p}\geq 2\ ;\ \frac{n}{p}+\frac{p}{n}\geq 2$$

គេបាន $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ \geq\ \frac{1}{2}(2+2+2-3)=\frac{3}{2}$

គេទាញ $T\geq 3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$ ពិត ។

ដូចនេះ

$$\frac{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}{b+c}+\frac{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}{c+a}+\frac{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{a+b}\geq\frac{9}{2}$$ ។

លំហាត់ទី១៨

ចំពោះ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាចំនួនពិត សមីការ

$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ មានឫសយ៉ាងតិច

មួយជាចំនួនពិត ។

ចូរគណនាតម្លៃតូចបំផុតនៃ $a^2 + b^2$?

(International mathematical Olympiad 1973)

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃតូចបំផុតនៃ $a^2 + b^2$

គេមាន $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$

ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនេះ នឹង $x^2 \neq 0$ គេបាន :

$$x^2 + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + a(x + \frac{1}{x}) + b = 0$$

$$(x + \frac{1}{x})^2 + a(x + \frac{1}{x}) + b - 2 = 0$$

តាង $z = x + \frac{1}{x}$ សមីការនេះអាចសរសេរ :

$z^2 + az + b - 2 = 0$ ឬ $az + b = 2 - z^2$ (1)

តាមវិសមភាព $\mathbf{Cauchy-Schwarz}$ គេមាន :

$$(az+b)^2 \le (a^2+b^2)(z^2+1) \quad (2)$$

តាម $(1)\,\&\,(2)$ គេបាន :

$$(a^2+b^2)(z^2+1) \ge (2-z^2)^2$$

$$a^2+b^2 \ge \frac{(2-z^2)^2}{z^2+1}$$

$$a^2+b^2 \ge \frac{[3-(1+z^2)]^2}{z^2+1}$$

$$a^2+b^2 \ge z^2-5+\frac{9}{z^2+1}$$

យក $t=z^2$ ដោយ $z=x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}$

នោះ $|z| \ge \frac{|x^2+1|}{|x|} \ge \frac{|2x|}{|x|}=2$ ហើយ $t=z^2=|z|^2 \ge 4$

គេបាន $a^2+b^2 \ge t-5+\frac{9}{t+1}$

តាងអនុគមន៍ $f(t)=t-5+\frac{9}{t+1}$

គេបាន $f'(t)=1-\frac{9}{(t+1)^2}=\frac{(t+4)(t-2)}{(t+1)^2}>0\;\forall t \ge 4$

គេទាញបាន $\mathbf{f(t)}$ ជាអនុគមន៍កើនគ្រប់ $\mathbf{t \geq 4}$ ។

តាមលក្ខណៈនៃអនុគមន៍កើនគេបាន $\mathbf{f(t) \geq f(4)}$

តែ $\mathbf{f(4) = 4 - 5 + \frac{9}{4+1} = -1 + \frac{9}{5} = \frac{4}{5}}$ នោះ $\mathbf{f(t) \geq \frac{4}{5}}$

គេទាញបាន $\mathbf{a^2 + b^2 \geq f(t) \geq \frac{4}{5}}$

ដូចនេះ តម្លៃតូចបំផុតនៃ $\mathbf{a^2 + b^2}$ ស្មើនឹង $\mathbf{\frac{4}{5}}$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេឱ្យចតុកោណប៉ោង $\mathbf{ABCD}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{AB = x}$, $\mathbf{BC = y}$

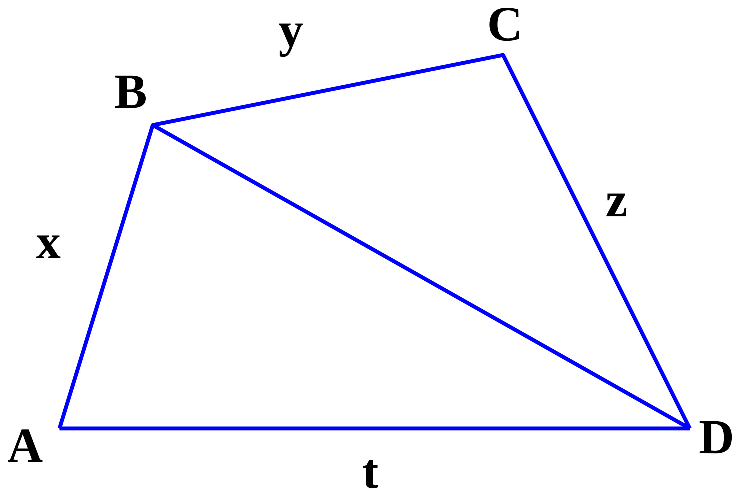
$\mathbf{CD = z}$ និង $\mathbf{DA = t}$ ។ ផ្ទៃក្រឡារបស់ចតុកោណនេះគឺ $\mathbf{S}$ ដែលកំណត់

ដោយ $\mathbf{S \le r(x^2+y^2+z^2+t^2)}$ ។

ចូររកតម្លៃតូចបំផុតនៃចំនួនពិត $\mathbf{r}$?

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃចំនួនពិត $\mathbf{r}$



គេមាន $\mathbf{S = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2} x\, t \sin A + \frac{1}{2} yz \sin C}$

ដោយ $\mathbf{\sin A \le 1}$ និង $\mathbf{\sin C \le 1}$ គេបាន $\mathbf{S \le \frac{1}{2}(xt + yz)}$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM - GM}$ គេមាន $\mathbf{x.t \le \frac{x^2+t^2}{2}}$

និង $yz \le \frac{y^2 + z^2}{2}$

គេទាញបាន $S \le \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)$

តែតាមបម្រាប់ $S \le r(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)$

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃចំនួនពិត r គឺ $r = \frac{1}{4}$ ។

លំហាត់ទី២០

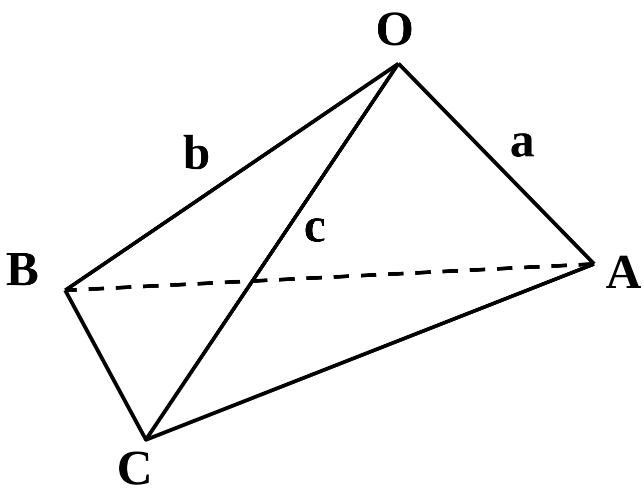
គេឱ្យចតុមុខ **OABC** ដែលមុំត្រង់កំពូល **O** សុទ្ធតែកែងគ្នា ហើយ $\mathbf{OA = a}$

$\mathbf{OB = b}$, $\mathbf{OC = c}$ ដែល $\mathbf{a, b, c \in IN^*}$ និង $\mathbf{a + b + c = 10}$

ចូររកមាឌអតិបរមានៃចតុមុខនេះ ?

ដំណោះស្រាយ

រកមាឌអតិបរមានៃចតុមុខនេះ



តាង **V** ជាមាឌរបស់ចតុមុខ **OABC**

ដោយ មុំត្រង់កំពូល **O** សុទ្ធតែកែងគ្នានោះគេបាន $\mathbf{V = \frac{1}{6}OA.OB.OC}$

ឬ $\mathbf{V = \frac{1}{6}abc}$ ដោយ $\mathbf{a + b + c = 10}$ នោះ $\mathbf{c = 10 - a - b}$

គេបាន $\mathbf{V(a) = \frac{1}{6}a(10 - a - b) = \frac{(10 - b)a - a^2}{6}}$

ដេរីវេ $\mathbf{V'(a) = \frac{10 - b - 2a}{6}}$ បើ $\mathbf{V'(o) = 0}$ នោះ $\mathbf{10 - b - 2a = 0}$

ឬ $\mathbf{a=5-\frac{b}{2}}$ តែតាមបម្រាប់ $\mathbf{a,b,c\in IN^*}$ នោះដើម្បីឱ្យ $\mathbf{a=5-\frac{b}{2}}$
ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានលុះត្រាតែ $\mathbf{b=2,4,6,8}$ ។

-បើ $\mathbf{b=2}$ នោះ $\mathbf{a=4}$, $\mathbf{c=4}$ នាំឱ្យ $\mathbf{abc=(2)(4)(4)=32}$

-បើ $\mathbf{b=4}$ នោះ $\mathbf{a=3}$, $\mathbf{c=3}$ នាំឱ្យ $\mathbf{abc=(4)(3)(3)=36}$

-បើ $\mathbf{b=6}$ នោះ $\mathbf{a=2}$, $\mathbf{c=2}$ នាំឱ្យ $\mathbf{abc=(6)(2)(2)=24}$

-បើ $\mathbf{b=8}$ នោះ $\mathbf{a=1}$, $\mathbf{c=1}$ នាំឱ្យ $\mathbf{abc=(8)(1)(1)=8}$

តម្លៃ $\mathbf{V=\frac{1}{6}abc}$ ធំបំផុតគឺត្រូវនឹងតម្លៃធំបំផុតនៃ $\mathbf{abc=36}$

ដូចនេះ $\mathbf{V_{max=}=\frac{1}{6}\times 36=6}$ ឯកតាមាឌ ។

លំហាត់ទី២១

គេឱ្យ $P(x) = x^5 + ax^2 + b$ មានឫសប្រាំ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 និង

$f(x) = x^2 - 3$ ។

រកតម្លៃអប្បបរមានៃ $f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)f(x_5)$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃអប្បបរមានៃ $f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)f(x_5)$

បើ $P(x) = x^5 + ax^2 + b$ មានឫសប្រាំ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

នោះគេបាន $P(x) = \prod_{k=1}^{5}(x - x_k)$ ។

តាង $Q = f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4)f(x_5) = \prod_{k=1}^{5} f(x_k)$

តែ $f(x) = x^2 - 3$

គេបាន
$$Q = \prod_{k=1}^{5}({x_k}^2 - 3) = \prod_{k=1}^{5}(x_k - \sqrt{3})(x_k + \sqrt{3})$$
$$= \prod_{k=1}^{5}(\sqrt{3} - x_k)(-\sqrt{3} - x_k)$$
$$= \prod_{k=1}^{5}(\sqrt{3} - x_k) \times \prod_{k=1}^{5}(-\sqrt{3} - x_k)$$
$$= P(\sqrt{3}) \times P(-\sqrt{3})$$

តែ $P(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^5 + 3a + b = 9\sqrt{3} + 3a + b$

និង $P(-\sqrt{3})=(-\sqrt{3})^5+3a+b=-9\sqrt{3}+3a+b$

គេបាន

$Q=(9\sqrt{3}+3a+b)(-9\sqrt{3}+3a+b)=(3a+b)^2-243$

ដើម្បីឱ្យ Q មានតម្លៃតូចបំផុតលុះត្រាតែ $3a+b=0$ ។

ដូចនេះ $Q_{min}=-243$ ។

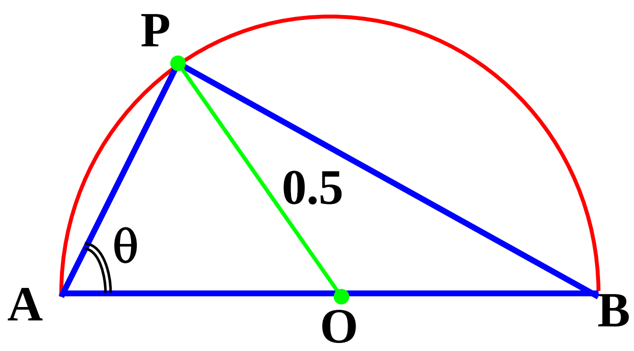
លំហាត់ទី២២

គេឱ្យកន្លះរង្វង់មួយដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $AB=1$ ។ ចំនុច P មួយរត់នៅលើកន្លះរង្វង់ខាងលើ ។ តាង $\angle PAB=\theta$ ដែល $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ ។

ចូររកតម្លៃធំបំផុតនៃ $2\,AP+2\sqrt{3}\,BP$ កាលណា θ ប្តូរតម្លៃ ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃធំបំផុតនៃ $2\,AP+2\sqrt{3}\,BP$ កាលណា θ ប្តូរតម្លៃ



គេមាន $\angle APB=90^{o}$ មុំចារឹកកន្លះរង្វង់

ក្នុងត្រីកោណកែង PAB គេមាន

$$\cos\theta=\frac{AP}{AB}\Rightarrow AP=AB\cos\theta=\cos\theta$$

ហើយ $\sin\theta=\frac{BP}{AB}\Rightarrow BP=AB\sin\theta=\sin\theta$

គេបាន $2\,AP+2\sqrt{3}\,BP=2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta$

$$= 4(\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta)$$

$$= 4(\sin\frac{\pi}{6}\cos\theta + \sin\theta\cos\frac{\pi}{6})$$

$$= 4\sin(\frac{\pi}{6} + \theta) \le 4$$

ដូចនេះតម្លៃធំបំផុតនៃ $2\,AP + 2\sqrt{3}\,BP$ ស្មើនឹង 4 ។

សម្គាល់

គេអាចដោះស្រាយតាមរបៀបមួយទៀតដូចខាងក្រោម :

តាមវិសមភាព **Cauchy – Schwarz** គេមាន :

$$(2\,AP + 2\sqrt{3}\,BP)^2 \le (2^2 + (2\sqrt{3})^2)(AP^2 + BP^2)$$

$$= 16(AP^2 + BP^2)$$

ដោយគេមាន $\angle APB = 90^o$ មុំចារឹកកន្លះរង្វង់នោះ

APB ជាត្រីកោណកែងត្រង់ **P**

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រអនុវត្តក្នុងត្រីកោណកែង **APB**

គេបាន $AB^2 = AP^2 + BP^2$

ដោយ $AB = 1$ នោះ $AP^2 + BP^2 = 1$

គេបាន $(2AP + 2\sqrt{3}BP)^2 \le 16$ នោះ $2AP + 2\sqrt{3}BP \le 4$

ដូចនេះតម្លៃធំបំផុតនៃ $2\,AP + 2\sqrt{3}\,BP$ ស្មើនឹង 4 ។

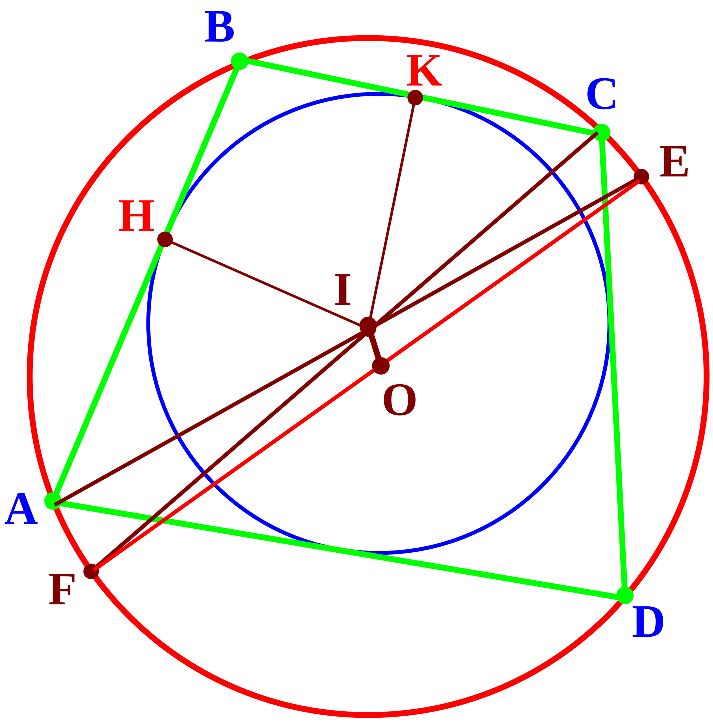
លំហាត់ទី២៣

គេឱ្យចតុកោណប៉ោង **ABCD** មួយចារឹកក្នុងរង្វង់ $\mathbf{C(O,R)}$ និងចារឹកក្រៅ រង្វង់ $\mathbf{C'(I,r)}$ ។

ចូរស្រាយថា $\mathbf{OI=\sqrt{r^2+R^2-r\sqrt{r^2+4R^2}}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចូរស្រាយថា $\mathbf{OI=\sqrt{r^2+R^2-r\sqrt{r^2+4R^2}}}$ ។



តាង **H** និង **K** ជាចំណុចប៉ះរវាងរង្វង់ **(C')** ជាមួយជ្រុង **[AB]** និង **[BC]** ហើយ **E** និង **F** ជាចំណុចប្រសព្វរវាង **(AI)**

និង **(CI)** ជាមួយរង្វង់ **(C)** រៀងគ្នា ។

គេមាន $\angle DOF = 2\angle DCF = \angle DCB$

និង $\angle DOE = 2\angle DAE = \angle DAB$

គេបាន $\angle DOF + \angle DOE = \angle DCB + \angle DAB = 180^o$

នាំឱ្យ **[EF]** ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់ **(C)** ។

តាមទ្រឹស្តីបទមេដ្យានក្នុងត្រីកោណ **EIF** គេបាន **:**

$$OI^2 = \frac{IE^2 + IF^2}{2} - \frac{EF^2}{4} = \frac{1}{2}(IE^2 + IF^2) - R^2 \ (1)$$

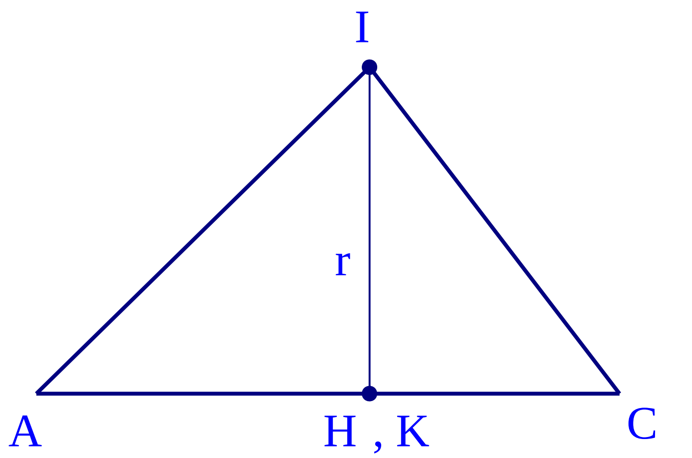
ព្រោះ $EF = 2R$ ។

គេមាន $\angle IAB = \dfrac{\angle BAD}{2}$ និង $\angle ICB = \dfrac{\angle DCB}{2}$

គេបាន $\angle IAB + \angle ICB = \dfrac{\angle BAD + \angle DCB}{2} = \dfrac{180^o}{2} = 90^o$

សង់ $IH = IK = r$ ។

ពីរត្រីកោណកែង **IAH** និង **IKC** ផ្គុំគ្នាបង្កើតបានជាត្រីកោណកែង ដែលមាន**IA** និង **IC** ជាជ្រុងមុំកែង និង $AH + KC$ ជាអ៊ីប៉ូតេនូស ។



តាមទំនាក់ទំនងមាត្រក្នុងត្រីកោណកែងគេបាន $\frac{1}{r^2}=\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IC^2}$ **(2)**

តាមទ្រឹស្តីបទស្វ័យគុណចំណុច **I** ធៀបនឹងរង្វង់ **(C)**

គេបាន $IA.IE = IC.IF = R^2 - OI^2$

នាំឱ្យ $IA=\frac{R^2-OI^2}{IE}$ **(3)** និង $IC=\frac{R^2-OI^2}{IF}$ **(4)**

យកទំនាក់ទំនង (3) និង (4) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន :

$\frac{1}{r^2}=\frac{IE^2+IF^2}{(R^2-OI^2)^2}$ នាំឱ្យ $IE^2+IF^2=\frac{(R^2-OI^2)^2}{r^2}$ **(5)**

យកទំនាក់ទំនង (5) ជំនួសក្នុង (1) គេបាន :

$$OI^2=\frac{(R^2-OI^2)^2}{2r^2}-R^2$$

ឬ $(R^2-OI^2)^2-2OI^2.r^2-2R^2r^2=0$

តាង $d=OI$ គេបាន $(R^2-d^2)^2-2d^2r^2-2R^2r^2=0$

ឬ $d^4-2(r^2+R^2)d^2+R^4-2R^2r^2=0$ តាង $t=d^2$

គេបាន $t^2-2(r^2+R^2)t+R^4-2R^2r^2=0$

ឌីសគ្រីមីណង់បង្រួម

$\Delta'=(r^2+R^2)^2-(R^4-2R^2r^2)=r^2(r^2+4R^2)$

គេទាញឫស $t_1=r^2+R^2-r\sqrt{r^2+4R^2}$

ឬ $t_2=r^2+R^2+r\sqrt{r^2+4R^2}$

ដោយ $d<R$ នោះ $t=d^2<R^2$ ។

ហេតុនេះ $t=d^2=r^2+R^2-r\sqrt{r^2+4R^2}$

នាំឱ្យ $OI=d=\sqrt{r^2+R^2-r\sqrt{r^2+4R^2}}$ ពិត ។

សម្គាល់ :

តាមសមភាព $(R^2-d^2)^2-2d^2r^2-2R^2r^2=0$

គេអាចសរសេរ :

$(R^2-d^2)^2=2r^2(R^2+d^2)=r^2[(R+d)^2+(R-d)^2]$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $(R^2-d^2)^2r^2=(R+d)^2(R-d)^2r^2$

គេបានទំនាក់ទំនង

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}$$ ។

លំហាត់ទី២៤

គេឱ្យ $\mathbf{f}$ ជាអនុគមន៍ផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$f(x)+2f\left(\frac{x+\frac{2001}{2}}{x-1}\right)=4014-x$$

ចូរកំណត់ $f(2004)$?

(Costa Rica Final Round 2003)

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ $f(2004)$

គេមាន $f(x)+2f\left(\frac{x+\frac{2001}{2}}{x-1}\right)=4014-x$

យក $x=2004$ គេបាន

$$f(2004)+2f\left(\frac{2004+\frac{2001}{2}}{2004-1}\right)=4014-2004$$

ឬ $f(2004)+2f(\frac{3}{2})=2010 \ \ (1)$

យក $x=\frac{3}{2}$ គេបាន $f(\frac{3}{2})+2f(2004)=\frac{8025}{2} \ (2)$

តាម $(1)\ \&\ (2)$ គេបាន $f(2004)=2005$ ។

លំហាត់ទី២៥

ចូរកំណត់ផលបូកនៃមុំ $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ បើគេដឹងថា :

$\mathbf{0^o \le A;B \le 180^o}$ ហើយ

$$\mathbf{\sin A + \sin B = \sqrt{\frac{3}{2}}\ ,\ \cos A + \cos B = \sqrt{\frac{1}{2}}}$$

(Canadian Open Math Challenge 1996)

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ផលបូកនៃមុំ $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$

គេមាន $\mathbf{\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$ **(1)**

និង $\mathbf{\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$ **(2)**

ចែកសមភាព **(1) & (2)** អង្គ និង អង្គគេបាន :

$$\mathbf{\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan\frac{A+B}{2} = \sqrt{3}}$$

គេទាញបាន $\mathbf{\frac{A+B}{2} = 60^o}$

ដូចនេះ $\mathbf{A + B = 120^o}$ ។

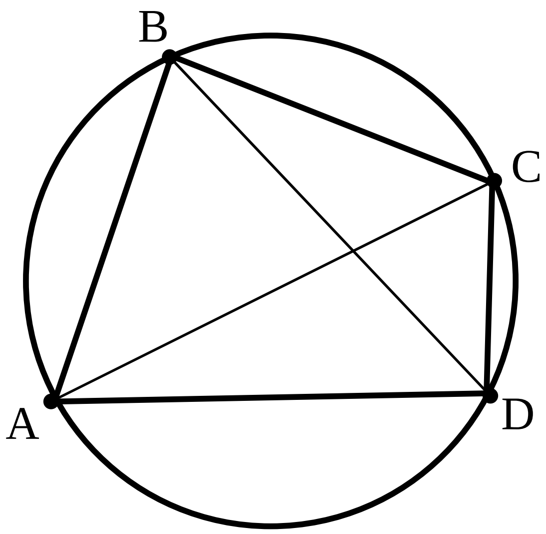
លំហាត់ទី២៦

គេឱ្យចតុកោណប៉ោង **ABCD** មួយចារឹកក្នុងរង្វង់ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{AC}{BD}=\dfrac{AB.BC+AD.DC}{AB.AD+BC.CD}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{AC}{BD}=\dfrac{AB.BC+AD.DC}{AB.AD+BC.CD}$



តាង **R** ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅចតុកោណ **ABCD**

គេមាន $S_{ABD}=\dfrac{AB.BD.AD}{4R}$ និង $S_{BCD}=\dfrac{BC.BD.CD}{4R}$

គេបាន $S_{ABCD}=S_{ABD}+S_{BCD}=\dfrac{BD}{4R}(AB.AD+BC.CD)$

ម្យ៉ាងទៀត $S_{ABC} = \frac{AB.AC.BC}{4R}$ និង $S_{ACD} = \frac{AC.AD.CD}{4R}$

គេបាន $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{AC}{4R}(AB.BC + AD.CD)$

គេទាញ $\frac{BD}{4R}(AB.AD + BC.CD) = \frac{AC}{4R}(AB.BC + AD.CD)$

ដូចនេះ $\frac{AC}{BD} = \frac{AB.BC + AD.DC}{AB.AD + BC.CD}$ ។

លំហាត់ទី២៧

គេមានបីចំនួនពិត $x \ge 1$, $y \ge 1$, $z \ge 1$ ដែល $xyz = 27$ ។

ចូរស្រាយថា $(\log_3 x)^3 + (\log_3 y)^3 + (\log_3 z)^3 \ge 3$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$(\log_3 x)^3 + (\log_3 y)^3 + (\log_3 z)^3 \ge 3$$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គ្រប់ $a \ge 0$ គេមាន :

$1 + 1 + a^3 \ge 3\sqrt[3]{1.1.a^3} = 3a$ ឬ $a^3 \ge 3a - 2$ (*)

ដោយ $x \ge 1$, $y \ge 1$, $z \ge 1$ នោះ $\log_3 x, \log_3 y, \log_3 z \ge 0$

តាមវិមភាព (*) គេបាន :

$$(\log_3 x)^3 + (\log_3 y)^3 + (\log_3 z)^3 \ge 3\log_3(xyz) - 6$$

ដោយ $xyz = 27$ នោះ $\log_3(xyz) = 3$

គេបាន $(\log_3 x)^3 + (\log_3 y)^3 + (\log_3 z)^3 \ge 9 - 6 = 3$

ដូចនេះ $(\log_3 x)^3 + (\log_3 y)^3 + (\log_3 z)^3 \ge 3$ ។

លំហាត់ទី២៨

គេអោយបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a^3}{(b+c)^3}+\frac{b^3}{(c+a)^3}+\frac{c^3}{(a+b)^3}\geq\frac{3}{8}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{a^3}{(b+c)^3}+\frac{b^3}{(c+a)^3}+\frac{c^3}{(a+b)^3}\geq\frac{3}{8}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន :

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{a^3}{(b+c)^3}\geq\frac{3a}{4(b+c)}$$

ឬ $\frac{a^3}{(b+c)^3}\geq\frac{3a}{4(b+c)}-\frac{1}{4}\quad(1)$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{b^3}{(c+a)^3}\geq\frac{3b}{4(c+a)}-\frac{1}{4}\quad(2)$

និង $\frac{c^3}{(a+b)^3}\geq\frac{3c}{4(a+b)}-\frac{1}{4}\quad(3)$

បូកវិសមភាព $(1),(2)\&(3)$ គេបាន :

$$\frac{a^3}{(b+c)^3}+\frac{b^3}{(c+a)^3}+\frac{c^3}{(a+b)^3}\geq\frac{3}{4}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)-\frac{3}{4}$$

យើងនឹងស្រាយថា $\frac{3}{4}(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b})-\frac{3}{4}\geq\frac{3}{8}$

ឬ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$

តាង $\begin{cases} b+c=m \\ c+a=n \\ a+b=p \end{cases}$

គេបាន $(b+c)+(c+a)+(a+b)=m+n+p$

នាំឲ្យ $a+b+c=\frac{m+n+p}{2}$

គេទាញ $\begin{cases} a=\frac{n+p-m}{2} \\ b=\frac{m-n+p}{2} \\ c=\frac{m+n-p}{2} \end{cases}$

គេបាន

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{n+p-m}{2m}+\frac{m-n+p}{2n}+\frac{m+n-p}{2p}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\right)+\left(\frac{p}{m}+\frac{m}{p}\right)+\left(\frac{n}{p}+\frac{p}{n}\right)-3\right]$$

តាមវិសមភាព$AM-GM$ គេបាន

$\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\geq 2\ ;\ \frac{p}{m}+\frac{m}{p}\geq 2\ ;\ \frac{n}{p}+\frac{p}{n}\geq 2$

គេបាន $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ \geq\ \frac{1}{2}(2+2+2-3)=\frac{3}{2}$ ពិត

លំហាត់ទី២៩

គេយកពីរ៉ាមីត **PABC** មានបាត **ABC** ជាត្រីកោណដែលមានជ្រុង $\mathbf{a,b,c}$ និង មានផ្ទៃក្រលា **S** ។ ផលបូកក្រឡាផ្ទៃនៃមុខខាង **PAB**, **PBC** និង **PCA** ស្មើនឹង **3** ដងនៃផ្ទៃក្រឡាបាត **ABC** ។

គេឧបមាថា $\angle\mathbf{PAB} = \angle\mathbf{PBC} = \angle\mathbf{PCA} = \varphi$ ដែល $\mathbf{0 < \varphi < \frac{\pi}{2}}$

ក. ចូរស្រាយថា $\mathbf{\tan\varphi = \frac{12S}{a^2+b^2+c^2}}$

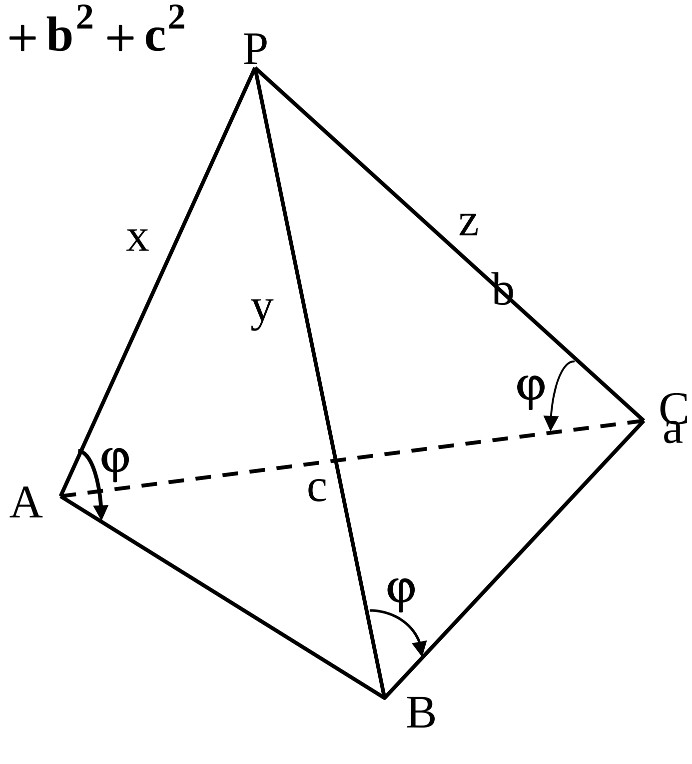
ខ. កំណត់តម្លៃ φ ដែលធ្វើឱ្យ $\mathbf{\tan\varphi}$ មានតម្លៃអតិបរមា ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $\mathbf{\tan\varphi = \frac{12S}{a^2+b^2+c^2}}$

តាង $\mathbf{SA = x}$, $\mathbf{SB = y}$

និង $\mathbf{SC = y}$ ។



គេមាន $S_{PAB}+S_{PBC}+S_{PCA}=3S$

ដោយ $S_{PAB}=\frac{1}{2}cx\sin\varphi$; $S_{PBC}=\frac{1}{2}ay\sin\varphi$;

និង $S_{PCA}=\frac{1}{2}bz\sin\varphi$ នោះគេបាន :

$\frac{1}{2}(cx+ay+bz)\sin\varphi=3S$ ឬ $\sin\varphi=\frac{6S}{cx+ay+bz}$ **(1)**

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ **PAB, PBC, PCA**

គេបាន $\begin{cases} y^2=x^2+c^2-2xc\cos\varphi \\ z^2=a^2+y^2-2ay\cos\varphi \\ x^2=b^2+z^2-2bz\cos\varphi \end{cases}$

បូកសមីការទាំងនេះគេបាន :

$0=a^2+b^2+c^2-2(cx+ay+bz)\cos\varphi$

គេទាញបាន $\cos\varphi=\frac{a^2+b^2+c^2}{2(cx+ay+bz)}$ **(2)**

ចែកសមភាព **(1) & (2)** អង្គ និង អង្គ គេបាន $\tan\varphi=\frac{12S}{a^2+b^2+c^2}$

ដូចនេះ $\tan\varphi=\frac{12S}{a^2+b^2+c^2}$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ φ ដែលធ្វើឱ្យ $\tan\varphi$ មានតម្លៃអតិបរមា

តាមរូបមន្តហេរ៉ុងគេមាន $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

ដែល $P=\frac{1}{2}(a+b+c)$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

គេបាន $\frac{S^2}{p}=(p-a)(p-b)(p-c)\le\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3$

ឬ $\frac{S^2}{p}\le\frac{p^3}{27}$ នាំឱ្យ $S\le\frac{p^2}{3\sqrt{3}}=\frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}}$

តាមវិសមភាព **Cauchy – Schwarz** គេមាន :

$$(a+b+c)^2\le(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)=3(a^2+b^2+c^2)$$

គេទាញបាន $S\le\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{12\sqrt{3}}=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}$

ដោយ $\tan\varphi=\frac{12S}{a^2+b^2+c^2}$

គេបាន $\tan\varphi\le\frac{12\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}\right)}{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}$

ដូចនេះដើម្បីឱ្យ $\tan\varphi$ មានតម្លៃអតិបរមាលុះត្រាតែ $\varphi=\frac{\pi}{3}$ ។

លំហាត់ទី៣០

គេយកពីរ៉ាមីត $\mathbf{PABC}$ មានបាត $\mathbf{ABC}$ ជាត្រីកោណដែលមានជ្រុង $\mathbf{a,b,c}$ និង មានផ្ទៃក្រលា $\mathbf{S}$ ។ ផលបូកក្រឡាផ្ទៃនៃមុខខាង $\mathbf{PAB,PBC}$ និង $\mathbf{PCA}$ ស្មើនឹង $\mathbf{3}$ ដងនៃផ្ទៃក្រឡាបាត $\mathbf{ABC}$ ។

គេឧបមាថា $\angle\mathbf{APB}=\angle\mathbf{BPC}=\angle\mathbf{CPA}=\varphi$ ដែល $\mathbf{0}<\varphi<\dfrac{\pi}{\mathbf{2}}$

ហើយ $\mathbf{PA^2+PB^2+PC^2=AB^2+BC^2+CA^2}$ ។

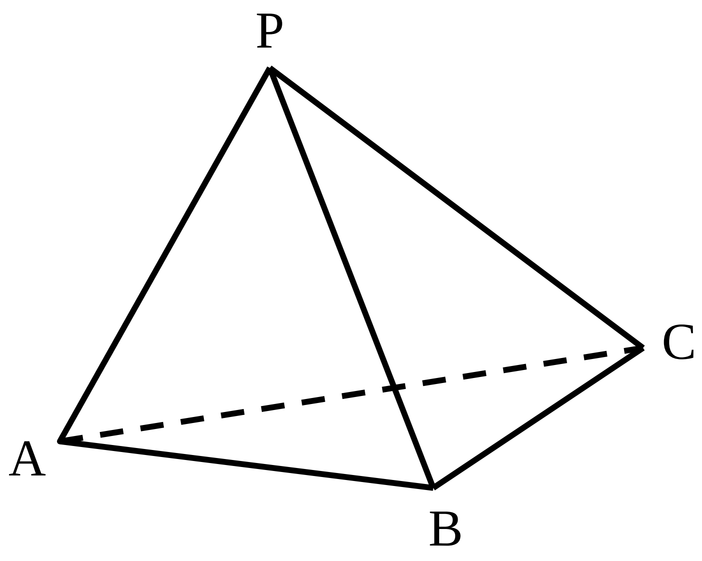
ក. ចូរស្រាយថា $\mathbf{tan}\,\varphi=\dfrac{\mathbf{12S}}{\mathbf{a^2+b^2+c^2}}$

ខ. កំណត់តម្លៃ φ ដែលធ្វើឱ្យ $\mathbf{tan}\,\varphi$ មានតម្លៃអតិបរមា ។

គ. ចំពោះតម្លៃ φ រកឃើញខាងលើស្រាយថា $\mathbf{PABC}$ ជាពីរ៉ាមីតនិយ័ត ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $\mathbf{tan}\,\varphi=\dfrac{\mathbf{12S}}{\mathbf{a^2+b^2+c^2}}$



តាង $PA = x$, $PB = y$, $PC = z$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ PAB, PBC និង PCA គេមាន

$$c^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi$$

$$a^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\varphi$$

$$b^2 = x^2 + z^2 - 2xz\cos\varphi$$

បូកសមីការបីនេះអង្គ និង អង្គគេបាន :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + xz)\cos\varphi$$

ដោយសម្មតិកម្ម $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2$

គេទាញបាន $\cos\varphi = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2(xy + yz + zx)}$

ម្យ៉ាងទៀតតាមបម្រាប់គេមាន :

$$S_{PAB} + S_{PBC} + S_{PAC} = 3S_{ABC} = 3S$$

$$(xy + yz + zx)\sin\varphi = 6S \Rightarrow \sin\varphi = \frac{6S}{xy + yz + xz}$$

ដូចនេះ $\tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{12S}{a^2 + b^2 + c^2}$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ φ ដែលធ្វើឱ្យ $\tan\varphi$ មានតម្លៃអតិបរមា

តាមរូបមន្តហេរ៉ុងគេមាន $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

ដែល $P = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

គេបាន $\frac{S^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c) \le \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3$

ឬ $\frac{S^2}{p} \le \frac{p^3}{27}$ នាំឱ្យ $S \le \frac{p^2}{3\sqrt{3}} = \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}}$

តាមវិសមភាព $\mathbf{Cauchy - Schwarz}$ គេមាន :

$(a+b+c)^2 \le (1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2) = 3(a^2+b^2+c^2)$

គេទាញបាន $S \le \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{12\sqrt{3}} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}$

ដោយ $\tan\varphi = \frac{12S}{a^2+b^2+c^2}$

គេបាន $\tan\varphi \le \frac{12\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}\right)}{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$

ដូចនេះដើម្បីឱ្យ$\tan\varphi$ មានតម្លៃអតិបរមាលុះត្រាតែ $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ។

គ. ចំពោះតម្លៃ φ រកឃើញខាងលើស្រាយថា $\mathbf{PABC}$ ជាពីរ៉ាមីតនិយត័ :

ចំពោះ $\varphi = \frac{\pi}{3}$ នោះគេបាន $a = b = c$ ។ ហើយ

$c^2 = x^2 + y^2 - xy \,,\; a^2 = y^2 + z^2 - yz \,,\; b^2 = x^2 + z^2 - xz$

គេទាញបាន $a^2+b^2+c^2 = 2(x^2+y^2+z^2) - (xy+yz+zx)$

នាំឱ្យ $x^2+y^2+z^2 = xy+yz+zx$ នាំឱ្យ $x = y = z$ ។

ដោយ $a = b = c = x = y = z$ នោះ $\mathbf{PABC}$ ជាពីរ៉ាមីតនិយត័ ។

លំហាត់ទី៣១

ក្នុងតេត្រាអ៊ែត $\mathbf{ABCD}$ មួយមាន $\angle\mathbf{BDC}=\mathbf{90^o}$ ហើយជើងនៃចំណោល កែងពី $\mathbf{D}$ ទៅប្លង់ $\mathbf{(ABC)}$ ជាប្រសព្វនៃកម្ពស់នៃ$\Delta\mathbf{ABC}$ ។

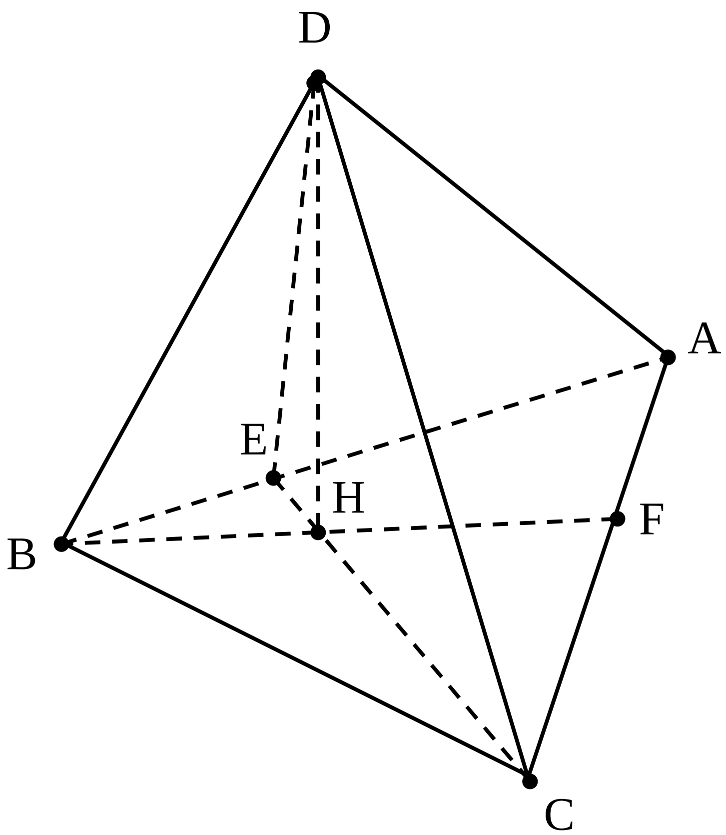
ចូរស្រាយថា $\mathbf{(AB+BC+CA)^2\le 6(AD^2+BD^2+CD^2)}$

តើពេលណាទើបយើងបានសមភាព ?

(IMO 1970)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\mathbf{(AB+BC+CA)^2\le 6(AD^2+BD^2+CD^2)}$



សង់កម្ពស់ $[CE]$ និង $[BF]$ នៃត្រីកោណ ABC ហើយតាង H ជាប្រសព្វ
រវាងកម្ពស់នៃត្រីកោណនេះ ។

គេមាន $(CED)\perp(ABC)$ និង $(AB)\perp(CE)$ ដែល (CE)
ជាបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ (CED) និង (ABC) នោះគេទាញបាន
$(AB)\perp(CDE)$ ហើយដោយ $(DE)\subset(CDE)$ នោះគេបាន
$(AB)\perp(DE)$ នាំឱ្យ ΔBED ជាត្រីកោណកែងត្រង់ E ។

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ $BD^2=DE^2+EB^2$ (1)

តាមសម្មតិកម្ម $\angle BDC=90^o$ នោះ ΔBDC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ D
គេបាន $BC^2=BD^2+CD^2$ (2)

យក (1) ជួសក្នុង (2) គេបាន $BC^2=DE^2+EB^2+CD^2$

តែ $BC^2=CE^2+EB^2$ នោះគេទាញបាន :

$CE^2+EB^2=DE^2+EB^2+CD^2$ ឬ $CE^2=DE^2+CD^2$

នាំឱ្យ ΔCED ជាត្រីកោណកែងត្រង់ D ។

គេបាន $(CD)\perp(ED)$ និង $(CD)\perp(BD)$ នោះ $(CD)\perp(ABD)$
ដោយ $(AD)\subset(ABD)$ នោះ $(CD)\perp(AD)$ នាំឱ្យ ΔCDA
ជាត្រីកោណកែងត្រង់ D ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $(AD)\perp(BD)$ នាំឱ្យ ΔADB ជាត្រីកោណកែង
ត្រង់ D ។

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រគេបាន $\begin{cases} AB^2 = AD^2 + BD^2 \\ BC^2 = BD^2 + CD^2 \\ CA^2 = AD^2 + CD^2 \end{cases}$

គេទាញ $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2 + CD^2)$ **(3)**

តាមវិសមភាព **Cauchy – Schwarz** គេមាន :

$(AB + BC + CA)^2 \leq 3(AB^2 + BC^2 + CA^2)$ **(4)**

តាម **(3) & (4)** គេបាន :

$(AB + BC + CA)^2 \leq 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$ ពិត

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ $AB = BC = CA$

ក្នុងករណីនោះគេបាន **ABC** ជាត្រីកោណសមង្ស ។

លំហាត់ទី៣២

គេឱ្យ $x \in [0,a]$ និង $m,n > 0$ ។

ចូរស្រាយថា $x^m(a-x)^n \le \dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.a^{m+n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $x^m(a-x)^n \le \dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.a^{m+n}$

តាងអនុគមន៍ $g(x) = x^m(a-x)^n$ ដែល $x \in [0,a]$ និង $m,n > 0$

គេបាន $g'(x) = mx^{m-1}(a-x)^n - n(a-x)^{n-1}x^m$

$$= x^{m-1}(a-x)^{n-1}\left[m(a-x) - nx\right]$$

$$= x^{m-1}(a-x)^{n-1}\left[ma - (m+n)x\right]$$

ដោយ $x \in [0,a]$ និង $m,n > 0$ នោះ $x^{m-1}(a-x)^{n-1} \ge 0$

ហេតុនេះ $g'(x)$ មានសញ្ញាដូច $ma - (m+n)x$ ។

បើ $ma - (m+n)x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{ma}{m+n}$ ។

ចំពោះ $x = \dfrac{ma}{m+n} \Rightarrow f(\dfrac{ma}{m+n}) = (\dfrac{ma}{m+n})^m(a - \dfrac{ma}{m+n})^n$

$$= \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.a^{m+n}$$

តារាងអថេរភាព

x	0		$\frac{ma}{m+n}$		a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\frac{ma}{m+n})$	$\searrow$	0

តាមតារាងខាងលើគ្រប់ $x \in [0,a]$ គេបាន $f(x) \le f(\frac{ma}{m+n})$

ដូចនេះ $x^m(a-x)^n \le \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.a^{m+n}$ ។

សម្គាល់ : វិសមភាពនេះអាចស្រាយមួយបែបទៀតដូចខាងក្រោម :

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត និង មធ្យមធរណីមាត្រគេមាន :

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_k \ge k\sqrt[k]{a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_k}$$

គ្រប់ $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k \ge 0$

ឬ $a_1.a_2.a_3\ldots\ldots a_k \le \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_k}{k}\right)^k$ ។

គេមាន $x^m = \frac{1}{m^n}(\underbrace{(mx)(mx)\ldots.(mx)}_{n})$

និង $$(a-x)^n = \frac{1}{n^m}\left[\underbrace{(n(a-x)).(n(a-x))....(n(a-x))}_{m}\right]$$

$$x^m(a-x)^n = \frac{1}{m^n}.\frac{1}{n^m}((\underbrace{(mx)(mx)...(mx)}_{n})).\left[\underbrace{(n(n(a-x))....(n(a-x))}_{m}\right]$$

$$x^m(a-x)^n \le \frac{1}{m^n}.\frac{1}{n^m}\left(\frac{mx+...+mx+n(a-x)+...+n(a-x)}{m+n}\right)^{m+n}$$

$$x^m(a-x)^n \le \frac{1}{m^n}.\frac{1}{n^m}.\left[\frac{mnx+mn(a-x)}{m+n}\right]^{m+n}$$

$$x^m(a-x)^n \le \frac{1}{m^n}.\frac{1}{n^m}.\frac{m^{m+n}n^{m+n}a^{m+n}}{(m+n)^{m+n}} = \frac{m^m.n^n}{(m+n)^{m+n}}.a^{m+n}$$

ដូចនេះ $$x^m(a-x)^n \le \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.a^{m+n}$$ ។

លំហាត់ទី៣៣

ត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមាន $\mathbf{AB = x}$, $\mathbf{AC = 1 - x}$ （$\mathbf{0 < x < 1}$）

និង $\angle\mathbf{BAC = 90^o}$ ។

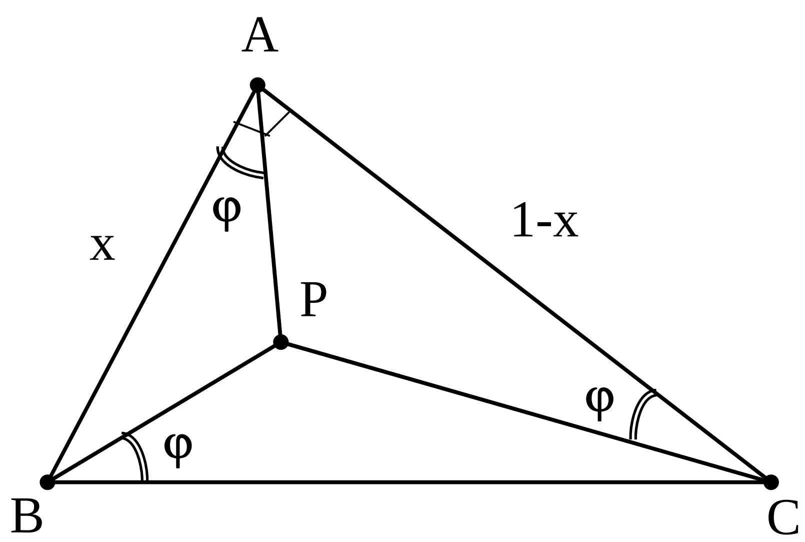
$\mathbf{P}$ ជាចំនុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ដែល $\angle\mathbf{PAB} = \angle\mathbf{PBC} = \angle\mathbf{PCA} = \varphi$

ហើយ $\mathbf{0 < \varphi < 90^o}$ ។

ចូរកំណត់ $\mathbf{x}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{\tan\varphi}$ មានតម្លៃអតិបរមា ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ $\mathbf{x}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{\tan\varphi}$ មានតម្លៃអតិបរមា



គេមាន $\mathbf{S_{ABC} = S_{PAB} + S_{PBC} + S_{PCA}}$

$$\frac{1}{2}\mathbf{AB.AC} = \frac{1}{2}\mathbf{(PA.AB + PB.BC + PC.CA)\sin\varphi}$$

គេទាញបាន $\sin\varphi = \dfrac{AB.AC}{PA.AB + PB.BC + PC.CA}$ **(1)**

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន :

$$\begin{cases} PA^2 = PC^2 + CA^2 - 2PC.CA\cos\varphi \\ PB^2 = PA^2 + AB^2 - 2PA.AB\cos\varphi \\ PC^2 = PB^2 + BC^2 - 2PB.BC\cos\varphi \end{cases}$$

បូកសមភាពនេះអង្គនិងអង្គគេទាញបាន :

$$\cos\varphi = \frac{AB^2 + BC^2 + AC^2}{PA.AB + PB.BC + PC.CA} \quad (2)$$

ចែកសមភាព **(1) & (2)** គេបាន :

$$\tan\varphi = \frac{AB.AC}{AB^2 + BC^2 + AC^2} = \frac{AB.AC}{2(AB^2 + AC^2)}$$

ព្រោះ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (ទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ)

តាមវិសមភាព **AM − GM**

គេមាន $AB.AC \le \dfrac{AB^2 + AC^2}{2}$ គេបាន $\tan\varphi \le \dfrac{1}{4}$

ដូចនេះដើម្បីឱ្យ $\tan\varphi$ អតិបរមាលុះត្រាតែ $AB = AC$

គេបាន $x = 1 - x$ ឬ $x = \dfrac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣៤

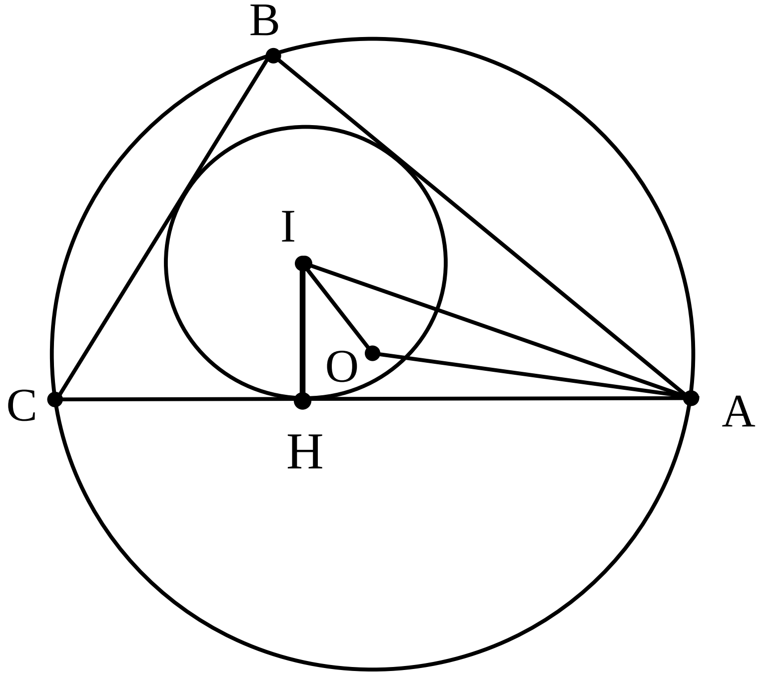
គេយក $\mathbf{I}$ ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង $\mathbf{O}$ ជារង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ដែលមិនមែនជាត្រីកោណសមង្ស ។

ចូរបង្ហាញថា $\angle\mathbf{AIO} \le \mathbf{90^o}$ លុះត្រាតែ $\mathbf{2BC \le AB + AC}$

(Hong Kong National Olympiad 1999)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\angle\mathbf{AIO} \le \mathbf{90^o}$ លុះត្រាតែ $\mathbf{2BC \le AB + AC}$



តាង $\mathbf{a, b, c}$ ជាជ្រុង និង $\mathbf{r}$, $\mathbf{R}$ ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ។

បើ $\angle AIO \le 90^o$ នោះ $OI^2 + IA^2 \ge OA^2$ **(1)**

យក **H** ជាចំណោលកែងនៃ **I** លើ **[CA]**

គេបាន $IH = r$, $AH = p - a$ ដែល $p = \frac{a+b+c}{2}$

ក្នុង $\Delta \perp AIH$ គេមាន $IA^2 = (p-a)^2 + r^2$

តាមរូបមន្ត **Euler** គេមាន $OI^2 = R^2 - 2rR$ ហើយ $OA = R$

ទំនាក់ទំនង **(1)** អាចសរសេរ $(p-a)^2 + r^2 + R^2 - 2rR \ge R^2$

$\Leftrightarrow (p-a)^2 + r^2 \ge 2rR$

$\Leftrightarrow (p-a)^2 + \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} \ge 2\frac{abc}{4Rp}.R$

$\Leftrightarrow 2p(p-a)^2 + 2(p-a)(p-b)(p-c) \ge abc$

$\Leftrightarrow 2(p-a)[p^2 - ap + p^2 - (b+c)p + bc] \ge abc$

$\Leftrightarrow (b+c-a)bc \ge abc$

$\Leftrightarrow b + c \ge 2a$

ដូចនេះ $\angle AIO \le 90^o$ លុះត្រាតែ $2BC \le AB + AC$ ។

លំហាត់ទី៣៥

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c គេកំណត់តាង$A=\dfrac{a+b+c}{3}$

$G=\sqrt[3]{abc}$ និង $H=\dfrac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$ ។

ចូរស្រាយថា $\left(\dfrac{A}{G}\right)^3\geq\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}.\dfrac{A}{H}$?

(**IMO LongList 1992**)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា :$\left(\dfrac{A}{G}\right)^3\geq\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}.\dfrac{A}{H}$

ឧបមាថា $\left(\dfrac{A}{G}\right)^3\geq\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}.\dfrac{A}{H}$ ពិត

សមមូល $A^3\geq\dfrac{1}{4}G^3+\dfrac{3}{4}.\dfrac{A}{H}.G^3$

$$(\frac{a+b+c}{3})^3\geq\frac{1}{4}abc+\frac{3}{4}.\frac{\frac{a+b+c}{3}}{\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}.abc$$

$$(a+b+c)^3\geq\frac{27}{4}abc+\frac{9abc}{4}(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

ឬ $4(a+b+c)^3 \ge 27abc+9(a+b+c)(ab+bc+ca)$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ យើងបាន

$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$ នាំឱ្យ $(a+b+c)^3 \ge 27abc \quad (1)$

$$\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2} \ge ab+bc+ca$$

$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$$

ថែមអង្គទាំងពីរនឹង $2ab+2bc+2ca$ គេបាន :

$(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$

$3(a+b+c)^3 \ge 9(ab+bc+ca) \quad (2)$

បូកវិសមភាព $(1)\,\&\,(2)$ គេបាន :

$4(a+b+c)^3 \ge 27abc+9(a+b+c)(ab+bc+ca)$ ពិត

ដូចនេះ $\left(\frac{A}{G}\right)^3 \ge \frac{1}{4}+\frac{3}{4}.\frac{A}{H}$ ។

លំហាត់ទី៣៦

រង្វង់ $C(K;\rho)$ ប៉ះទៅនឹងជ្រុង AB និង AC នៃត្រីកោណ ABC ដែល A ជាមុំស្រួចហើយផ្ចិត K របស់វាស្ថិតនៅចម្ងាយ d ពីជ្រុង BC ។

ក.ចូរស្រាយថា $a(d-\rho)=2p(r-\rho)$ ដែល r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង $2p$ ជាបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC ។

ខ. បង្ហាញថាបើរង្វង់ (C) កាត់ជ្រុង BC ត្រង់ D និង E នោះគេបាន :

$$DE=\frac{4\sqrt{r.r_A(\rho-r)(r_A-\rho)}}{r_A-r}$$

ដែល r_A ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងមុំ A នៃត្រីកោណ ABC ។

(IMO LongList 1992)

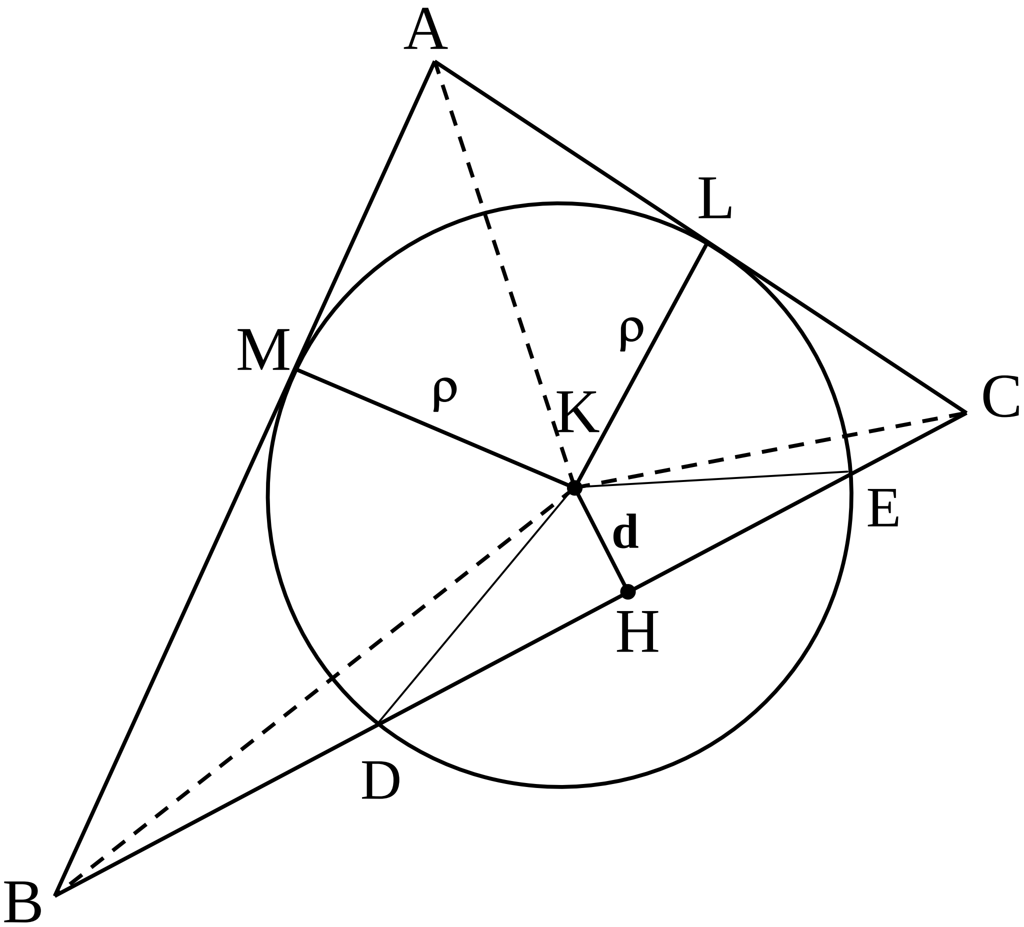
ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a(d-\rho)=2p(r-\rho)$

តាង a,b,c ជាជ្រុង និង S ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC

យក H,L,M ជាចំណោលកែងនៃ K លើជ្រុង BC,CA,AB

រៀងគ្នាដែល $KH=d$, $KL=KM=\rho$



គេមាន $\mathbf{S = S_{KAB} + S_{KBC} + S_{KCA}}$

$$\mathbf{pr = \frac{1}{2}c\rho + \frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}b\rho}$$

$$\mathbf{2pr = ad + (c+b)\rho}$$

$$\mathbf{2pr = ad + (2p-a)\rho}$$

$$\mathbf{2p(r-\rho) = (d-\rho)a}$$

ដូចនេះ $\mathbf{a(d-\rho) = 2p(r-\rho)}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\mathbf{DE=\dfrac{4\sqrt{r\,.r_A(\rho-r)(r_A-\rho)}}{r_A-r}}$

គេមាន $\mathbf{DE=2DH=2\sqrt{KD^2-KH^2}=2\sqrt{\rho^2-d^2}}$ **(1)**

តាមសម្រាយខាងលើ $\mathbf{a(d-\rho)=2p(r-\rho)}$

គេទាញបាន $\mathbf{p=\dfrac{a(d-\rho)}{2(r-\rho)}}$

តាមរូបមន្ត $\mathbf{S=pr=(p-a)r_A}$ គេទាញបាន $\mathbf{p=\dfrac{ar_A}{r_A-r}}$

គេបាន $\mathbf{\dfrac{a(d-\rho)}{2(r-\rho)}=\dfrac{ar_A}{r_A-r}}$ នាំឱ្យ $\mathbf{d=\dfrac{2r_A(r-\rho)}{r_A-r}+\rho}$ **(2)**

យក **(2)** ជំនួសក្នុង **(1)** គេបាន :

$$\mathbf{DE=2\sqrt{\rho^2-\left[\frac{2r_A(r-\rho)}{r_A-r}+\rho\right]^2}}$$

$$\mathbf{=2\sqrt{\left[\rho+\frac{2r_A(r-\rho)}{r_A-r}+p\right]\left[\rho-\frac{2r_A(r-p)}{r_A-r}-p\right]}}$$

$$\mathbf{=\frac{4\sqrt{rr_A(\rho-r)(r_A-\rho)}}{r_A-r}}$$

ដូចនេះ $\mathbf{DE=\dfrac{4\sqrt{r\,.r_A(\rho-r)(r_A-\rho)}}{r_A-r}}$ ។

លំហាត់ទី៣៧

គេឱ្យ **ABCD** ជាតេត្រាអ៊ែតដែលមានផលបូកទ្រនុងឈមគ្នាស្មើ **1** ។

ចូរស្រាយថា $\mathbf{r_A + r_B + r_C + r_D \le \frac{\sqrt{3}}{3}}$

ដែល $\mathbf{r_A , r_B , r_C , r_D}$ ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃមុខខាងរបស់តេត្រាអ៊ែត ។

បង្ហាញថាសមភាពកើតមានលុះត្រាតែ **ABCD** ជាតេត្រាអ៊ែតនិយត័ ។

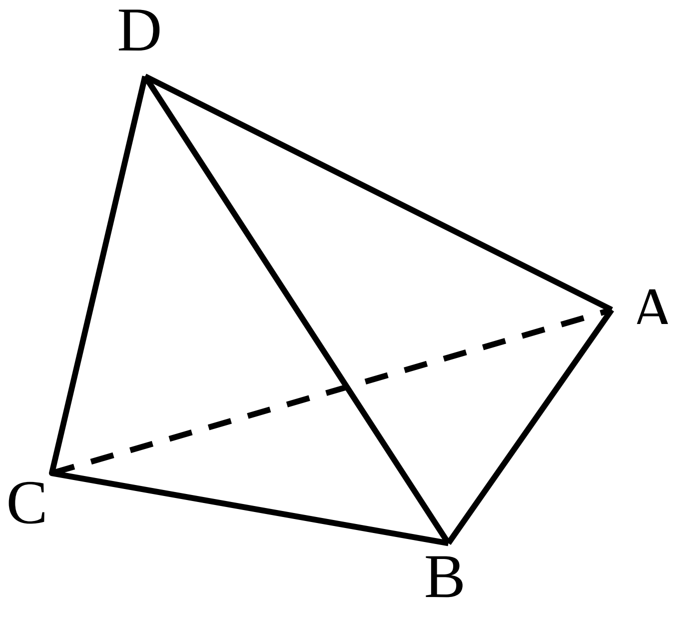
(IMO Longlists 1986)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\mathbf{r_A + r_B + r_C + r_D \le \frac{\sqrt{3}}{3}}$

តាង $\mathbf{BC = a \, , CA = b , AB = c}$

$\mathbf{DA = x , DB = y , DC = z}$



ឧបមា r_A, r_B, r_C, r_D ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងរៀងគ្នា នៃមុខខាង ABC, BDA, CAD និង DBC របស់តេត្រាអ៊ែត ។

តាមរូបមន្តហេរ៉ុងចំពោះត្រីកោណ ABC គេបាន :

$$S_{ABC} = p_A r_A = \sqrt{p_A(p_A-a)(p_A-b)(p_A-c)}$$

ដែល $p_A = \dfrac{a+b+c}{2}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC ។

គេបាន $r_A{}^2 = \dfrac{(p_A-a)(p_A-b)(p_A-c)}{p_A}$

$$r_A{}^2 \le \frac{(p_A-a+p_A-b+p_A-c)}{27p_A} = \frac{p_A{}^2}{27}$$

គេទាញបាន $r_A \le \dfrac{p_A}{3\sqrt{3}}$ ។

ស្រាយដូចគ្នា $r_B \le \dfrac{p_B}{3\sqrt{3}}$; $r_C \le \dfrac{p_C}{3\sqrt{3}}$ និង $r_D \le \dfrac{p_D}{3\sqrt{3}}$

គេបាន $r_A + r_B + r_C + r_D \le \dfrac{p_A+p_B+p_C+p_D}{3\sqrt{3}}$

ដោយ $p_A + p_B + p_C + p_D = a+b+c+x+y+z$

តែតាមបម្រាប់ $a+x = b+y = c+z = 1$

ហេតុនេះ $r_A + r_B + r_C + r_D \le \dfrac{3}{3\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ពិត ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ $BCD; CDA; DAB; ABC$ ជាត្រីកោណសមង្ស ។ដូចនេះ $ABCD$ ជាតេត្រាអ៊ែតនិយត័ ។

លំហាត់ទី៣៨

ចូរកំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x , y) ដោយដឹងថា x^2y+x+y ចែកដាច់នឹង xy^2+y+7 ។

(IMO 1998)

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x , y)

តាង $a = x^2y+x+y$ និង $b = xy^2+y+7$

បើ a ចែកដាច់នឹង b នោះគេបានដូចគ្នា $ay-bx$ ចែកដាច់នឹង b ។

គេមាន $ay-bx = y(x^2y+x+y)-x(xy^2+y+7) = y^2-7x$

ដោយ $x \geq 1$ នោះ $xy^2 \geq y^2$

នាំឱ្យ $y^2-7x \leq xy^2-7x < xy^2+y+7 = b$ ។

ដូចនេះ y^2-7x ចែកដាច់នឹង b លុះត្រាតែ $y^2-7x \leq 0$ ។

ក. ករណីទី១ : $y^2-7x = 0$ នោះ $y^2 = 7x$

ដោយ y ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាននោះលុះត្រាតែ $x = 7k^2$ ហើយ $y = 7k$

គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k ។

ខ.ករណីទី២ $y^2-7x < 0$ នោះ $7x-y^2 > 0$

ដោយពិនិត្យឃើញថា $7x-y^2 < 7x$ ហេតុនេះដើម្បីឱ្យ $7x-y^2$ ចែកដាច់នឹង $b = xy^2+y+7$ លុះត្រាតែ $7x > 7x-y^2 \geq xy^2+y+7$

ហេតុនេះគេត្រូវឱ្យ $y^2 < 7$ នោះ $y = 1$ ឬ $y = 2$ ។

-ចំពោះ $y = 1$ គេបាន $7x - y^2 = 7x - 1$ ហើយ $b = x + 8$

គេមាន $7x - 1 = 7(x + 8) - 57$ ចែកដាច់នឹង $b = x + 8$ លុះត្រាតែ

b ជាតួចែកនៃ 57 ។ ដោយ $b = x + 8 > 8$ នោះ $b = 19$ ឬ $b = 57$

គេទាញបាន $x = 11$ ឬ $x = 49$ ។

ដូចនេះគេបាន $x = 11$, $y = 1$ ឬ $x = 49$, $y = 1$ ។

-ចំពោះ $y = 2$ គេបាន $7x - y^2 = 7x - 4$ ហើយ $b = 4x + 9$

ដោយ $GCD(4x + 9; 4) = 1$ នោះ $7x - 4$ ចែកដាច់នឹង $4x + 9$

សមមូល $4(7x - 4)$ ចែកដាច់នឹង $4x + 9$ ។

គេមាន $4(7x - 4) = 7(4x + 9) - 79$ ។

ដោយ 79 ជាចំនួនបឋមនោះដើម្បីឱ្យ $4(7x - 4)$ ចែកដាច់នឹង $4x + 9$

លុះត្រាតែ $4x + 9 = 79$ នោះ $x = \dfrac{35}{2}$ មិនមែនជាចំនួនគត់ ។

ដូចនេះក្នុងករណី $y = 2$ គ្មានចម្លើយ ។

សរុបមកគេបានគូចម្លើយ :

$$(x,y) \in \{ (11, 1), (49, 1), (7k^2, 7k) \}, k = 1, 2, ...$$

លំហាត់ទី៣៩

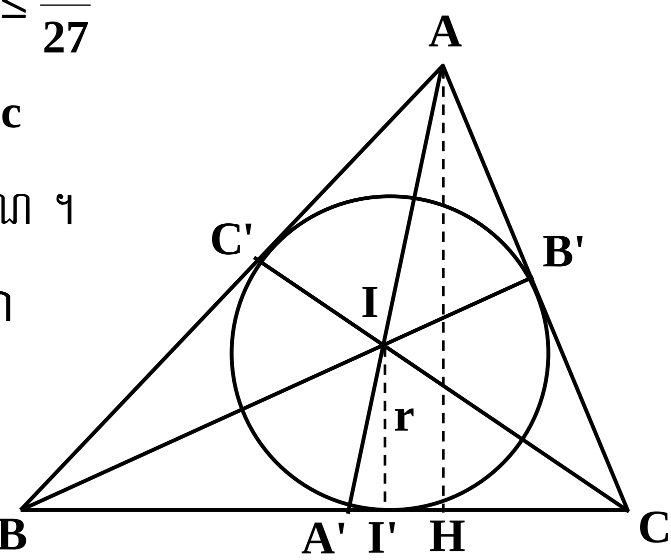
គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។ គេតាង I ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A , B , C កាត់ជ្រុងឈមរៀងគ្នាត្រង់ A' , B' , C' ។

ចូរស្រាយថា $\frac{1}{4} < \frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \le \frac{8}{27}$ ។

(IMO 1991)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{1}{4} < \frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \le \frac{8}{27}$



តាង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$

និង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ។

តាង S និង T រៀងគ្នាជាផ្ទៃក្រលា នៃត្រីកោណ ABC និង IBC

យើងមាន :

$S = \frac{1}{2}AH.BC$ និង $T = \frac{1}{2}II'.BC$

គេបាន $\frac{T}{S} = \frac{II'}{AH}$ (i)

ត្រីកោណកែង AA'H និង IA'I' មានមុំ $\angle A'AH = \angle A'II'$

(មុំត្រូវគ្នា)

ជាត្រីកោណដូចគ្នា ។

គេបាន $\frac{II'}{AH}=\frac{IA'}{AA'}=\frac{AA'-AI}{AA'}=1-\frac{AI}{AA'}$ (ii)

តាមទំនាក់ទំនង (i) និង (ii) គេទាញបាន $\frac{T}{S}=1-\frac{AI}{AA'}$

ដោយ $T=\frac{1}{2}a.r$ និង $S=pr=\frac{a+b+c}{2}.r$

គេបាន $\frac{\frac{1}{2}ar}{\frac{a+b+c}{2}.r}=1-\frac{AI}{AA'}$

នាំឱ្យ $\frac{AI}{AA'}=1-\frac{a}{a+b+c}=\frac{b+c}{a+b+c}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $\frac{BI}{BB'}=\frac{c+a}{a+b+c}$ (2) និង $\frac{CI}{CC'}=\frac{a+b}{a+b+c}$ (3)

ធ្វើវិធីគុណទំនាក់ទំនង (1) , (2) និង (3) គេបាន :

$$\frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'}=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \quad (4)$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន :

$$(a+b)+(b+c)+(c+a)\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$2(a+b+c)\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

គេទាញ $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\leq\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

ហេតុនេះ $\frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'}\leq\frac{8}{27}$ (*)

ម្យ៉ាងទៀតយើងសន្មតថា $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} > \frac{1}{4}$ ពិត

យើងបាន $4(a+b)(b+c)(c+a) > (a+b+c)^3$

ដោយ $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$

$$4(a+b)(b+c)(c+a) > a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) - a^3 - b^3 - c^3 > 0$$

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) + 4abc > 0$$

ដោយ a , b , c ជាជ្រុងត្រីកោណមួយនោះ $\begin{cases} a+b > c \\ a+c > b \\ b+c > a \end{cases}$

គេទាញ $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) + 4abc > 0$ ពិត

ហេតុនេះ $\frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} > \frac{1}{4}$ (**)

តាម (*) និង (**) គេបាន $\frac{1}{4} < \frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \le \frac{8}{27}$ ។

ដូចនេះ $\frac{1}{4} < \frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \le \frac{8}{27}$ ។

លំហាត់ទី៤០

គេតាង **I** ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ **ABC** មួយ ។

ឧបមាថារង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ **ABC** ប៉ះជ្រុង **[BC],[CA],[AB]**

រៀងគ្នាត្រង់ **K,L,M** ។

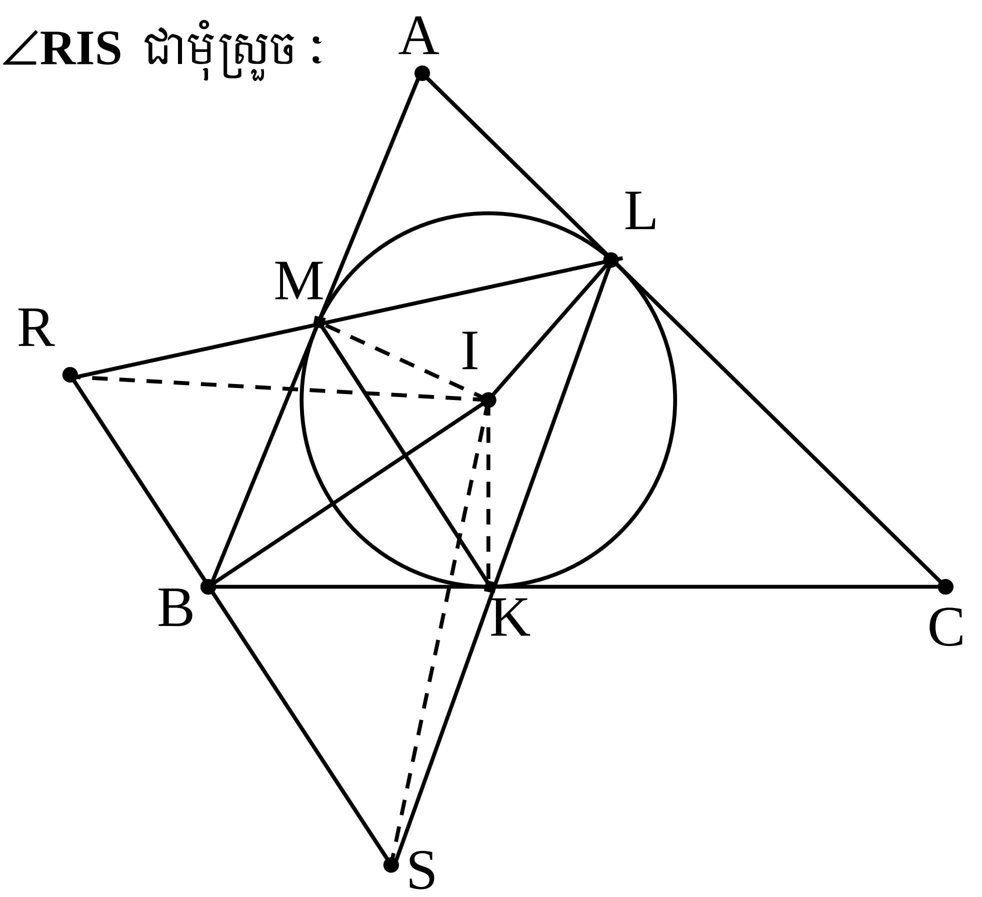
បន្ទាត់មួយគូសចេញពីចំនុច **B** ស្របនឹង **(MK)** កាត់**(LM)** និង**(LK)**

រៀងគ្នាត្រង់ **R** និង **S** ។ ចូរស្រាយថា $\angle$**RIS** ជាមុំស្រួច ?

(IMO 1998)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\angle$**RIS** ជាមុំស្រួច :



គេមាន $\angle AML = \angle BMR = 90^o - \frac{A}{2}$

ដូចគ្នាដែរ $\angle CKL = \angle BKS = 90^o - \frac{C}{2}$

និង $\angle BKM = \angle BMK = 90^o - \frac{B}{2}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $\angle LMK = \angle MRS = 90^o - \frac{B}{2}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ **BRM** និងត្រីកោណ **BSK**

គេបាន $\frac{RB}{BM} = \frac{\sin(90^o - \frac{A}{2})}{\sin(90^o - \frac{C}{2})} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$

ហើយដូចគ្នាដែរ $\frac{SB}{BK} = \frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ ឬ $\frac{BK}{SB} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$

គេទាញបាន $\frac{RB}{BM} = \frac{BK}{SB}$ នាំឱ្យ $BM.BK = RB.SB$

ដោយ $BM = BK$ នោះ $BM^2 = RB.SB$ **(1)**

គេមាន $(RS)//(MK)$ ហើយ $(IB) \perp (KM)$ នោះ $(IB) \perp (RS)$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណកែង **RIB** និង **SIB**

គេបាន $IR^2 = RB^2 + IB^2$ **(2)**

និង $IS^2 = SB^2 + IB^2$ **(3)**

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសអនុវត្តន៍ក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{RIS}$ គេបាន :

$$\mathbf{RS^2 = IR^2 + IS^2 - 2IR.IS.\cos\angle RIS \ (4)}$$

យកទំនាក់ទំនង $\mathbf{(1),(2),(3)}$ មកជំនួសក្នុង $\mathbf{(4)}$ គេបាន :

$$\mathbf{\cos\angle RIS = \frac{RB^2 + SB^2 + 2IB^2 - (RB+SB)^2}{2IR.IS}}$$

$$\mathbf{= \frac{2IB^2 - 2RB.SB}{2IR.IS} = \frac{IB^2 - BM^2}{IR.IS}}$$

តែក្នុងត្រីកោណកែង $\mathbf{BIM}$ មាន $\mathbf{IB^2 = IM^2 + BM^2}$

គេបាន $\mathbf{\cos\angle RIS = \frac{IM^2}{IR.IS} > 0}$ នាំឱ្យ $\mathbf{\angle RIS}$ ជាមុំស្រួច ។

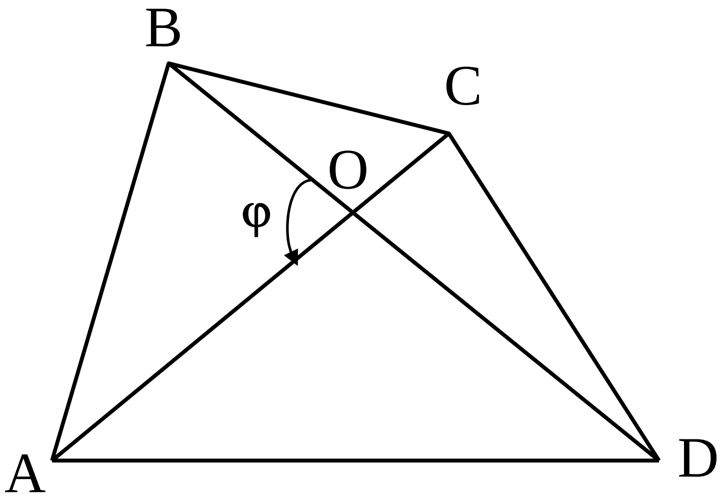
លំហាត់ទី៤១

សន្មតថា **O** ជាចំនុចមួយនៅក្នុងចតុកោណប៉ោង **ABCD** ដែលមានផ្ទៃក្រលា **S** ។ គេដឹងថា $\mathbf{OA^2+OB^2+OC^2+OD^2=2S}$ ។ ចូរស្រាយថា **ABCD** គឺជាការេ និង **O** ជាផ្ចិតរបស់វា ។

(Balkan MO 1997**)**

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា**ABCD** គឺជាការេ និង **O** ជាផ្ចិតរបស់វា



តាង $\mathbf{\angle AOB=\angle COD=\varphi}$

នោះ $\mathbf{\angle AOD=\angle BOC=180^o-\varphi}$

យក $\mathbf{OA=x\,,OB=y\,,OC=z\,,OD=t}$

គេបាន $S = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{ODA}$

$$= \frac{1}{2}(OA.OB + OB.OC + OC.OD + OD.OA)\sin\varphi$$

ដោយ $\sin\varphi \le 1$ នោះគេបាន $2S \le xy + yz + zt + tx$

តាមបម្រាប់ $2S = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ នោះគេបាន :

$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \le xy + yz + zt + tx$

ឬ $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-t)^2 + (t-x)^2 \le 0$

ដោយ $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-t)^2 + (t-x)^2 \ge 0$

នោះគេទាញបាន $x = y = z = t$ ហើយក្នុងករណីនេះ $\sin\varphi = 1$

នាំឱ្យ $\varphi = 90^o$ ។

ដូចនេះចតុកោណ **ABCD** ជាការេ ហើយ **O** ជាផ្ចិតរបស់វា ។

លំហាត់ទី៤២

ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $(a_n)_{n\geq 1}$ កំណត់ដោយ $a_1 = 1$, $a_2 = 3$

និង $a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n \ ,\forall n \in IN$

ចូរកំណត់គ្រប់តម្លៃ n ដើម្បីឱ្យ a_n ចែកដាច់នឹង 11 ។

(Balkan MO 1990)

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់តម្លៃ n ដើម្បីឱ្យ a_n ចែកដាច់នឹង 11

គេមាន $a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n \ ,\forall n \in IN$

ឬ $a_{n+2} - a_{n+1} = (n+2)(a_{n+1} - a_n)$

ឬ $\dfrac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = n+2$

គេបាន $\displaystyle\prod_{k=1}^{(n-2)} \left(\frac{a_{k+2} - a_{k+1}}{a_{k+1} - a_k} \right) = \prod_{k=1}^{(n-2)} (k+2)$

$$\frac{a_n - a_{n-1}}{a_2 - a_1} = 3.4.5......n$$ ដោយ $a_2 - a_1 = 2$

គេទាញបាន $a_n - a_{n-1} = n!$

ហើយ $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n} (k!)$

$$a_n - a_1 = 2! + 3! + ... + n!$$ ដោយ $a_1 = 1 = 1!$

គេបាន $a_n = 1! + 2! + 3! + ... + n!$ ។

-ករណីទី១ : ចំពោះ $n < 11$ គេមាន

$a_1 = 1$

$a_2 = 3$

$a_3 = 1! + 2! + 3! = 9$

$a_4 = 1! + 2! + 3! + 4! = 33 = 3 \times 11$

$a_5 = a_4 + 5! = 153$

$a_6 = a_5 + 6! = 873$

$a_7 = a_6 + 7! = 5913$

$a_8 = a_7 + 8! = 46233 = 4203 \times 11$

$a_9 = a_8 + 9! = 409113$

$a_{10} = a_9 + 10! = 4037913$

គេបាន $n = 4$, $n = 8$ ។

-ករណីទី២: ចំពោះ $n \geq 11$

គេបាន $a_n = a_{10} + \sum_{k=11}^{n} (k!)$

ដោយ $\sum_{k=11}^{n} (k!)$ ចែកដាច់នឹង 11 ហើយ a_{10} ចែកមិនដាច់នឹង 11

នោះចំពោះ $n \geq 11$ គេបាន a_n ចែកមិនដាច់នឹង 11 ។

ដូចនេះតម្លៃ n ដែលធ្វើឱ្យ a_n ចែកដាច់នឹង 11 មានតែពីរគត់គឺ ៗ

$n = 4$ ឬ $n = 8$ ។

លំហាត់ទី៤៣

ចូរបង្ហាញថា $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ចែកដាច់នឹង 1897

(Eötvös Competition 1899)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ចែកដាច់នឹង 1897

គេមាន $1897 = 271 \times 7$ ហើយ $GCD(271, 7) = 1$

តាមរូបមន្ត $a^p - b^p = (a-b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + ... + b^{p-1})$

គេបាន $2903^n - 803^n = (2903 - 803)N_1 = 7 \times 300N_1$

$464^n - 261^n = (464 - 261)N_2 = 7 \times 29N_2$

ដែល N_1, N_2 ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

នោះ $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n = 7(300N_1 - 29N_2)$

នាំឱ្យ$2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

ដូចគ្នាដែរ $2903^n - 464^n = (2903 - 464)N_3 = 271 \times 9N_3$

$803^n - 261^n = (803 - 261)N_4 = 271 \times 2N_4$

នោះ $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n = 271(9N_3 - 2N_4)$

នាំឱ្យ$2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ចែកដាច់នឹង 271 ។

ដូចនេះ $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ ចែកដាច់នឹង 1897 ។

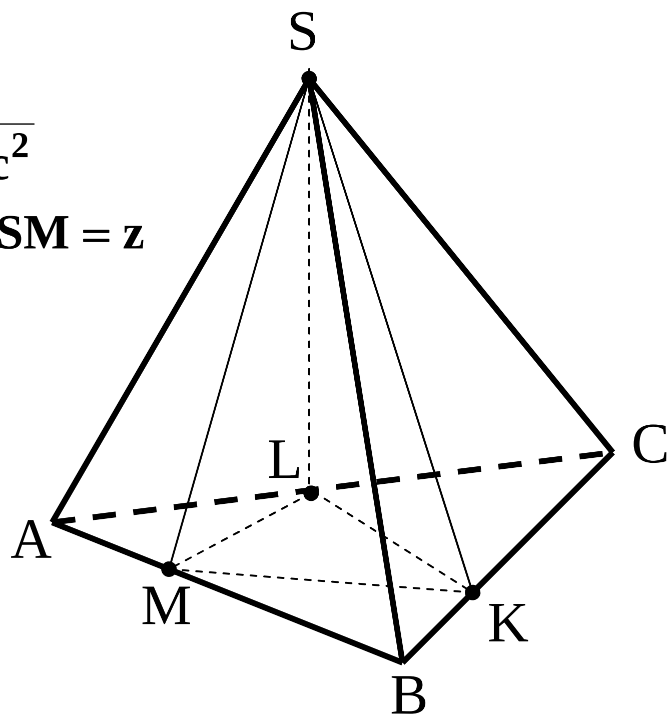
លំហាត់ទី៤៤

គេឱ្យតេត្រាអ៊ែត $\mathbf{SABC}$ មានបាត $\mathbf{ABC}$ ជាត្រីកោណដែលមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ $\mathbf{K}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ ជាចំណោលកែងនៃ $\mathbf{S}$ លើជ្រុង $\mathbf{[BC],[CA]}$ និង $\mathbf{[AB]}$ រៀងគ្នា ។ គេដឹងថា $\mathbf{\frac{BC}{SK}=\frac{CA}{SL}=\frac{AB}{SM}=d}$ ហើយផលបូកផ្ទៃក្រឡានៃមុខខាង $\mathbf{SAB,SBC,SAB}$ ស្មើនឹង $\mathbf{3}$ ដងនៃផ្ទៃក្រឡានៃបាត $\mathbf{ABC}$ ។

ក. ស្រាយថា $\mathbf{d=\frac{6S}{a^2+b^2+c^2}}$ ដែល $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ជាជ្រុង និង $\mathbf{S}$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $\mathbf{d}$ មានតម្លៃអតិបរមាលុះត្រាតែ $\mathbf{SABC}$ និយ័ត ។

ដំណោះស្រាយ



ស្រាយថា $\mathbf{d=\frac{6S}{a^2+b^2+c^2}}$

តាង $\mathbf{SK=x}$, $\mathbf{SL=y}$, $\mathbf{SM=z}$

គេមាន $\mathbf{\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=d}$

នោះ $\begin{cases}\mathbf{x=ad} \\ \mathbf{y=bd} \quad \mathbf{(1)} \\ \mathbf{z=cd}\end{cases}$

តាមសម្មតិកម្ម $S_{SAB}+S_{SBC}+S_{SCA}=3S_{ABC}=3S$

គេបាន $\frac{1}{2}cz+\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}by=3S$ ឬ $ax+by+cz=6S$ (2)

យកទំនាក់ទំនង (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន :

$(a^2+b^2+c^2)d=6S \Rightarrow d=\frac{6S}{a^2+b^2+c^2}$ ពិត ។

ខ.បង្ហាញថា d មានតម្លៃអតិបរមាលុះត្រាតែ SABC និយត័ :

តាមរូបមន្តហេរ៉ុងគេមាន $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

គេបាន $\frac{S^2}{p}=(p-a)(p-b)(p-c)\le\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3$

ឬ $\frac{S^2}{p}\le\frac{p^3}{27}$ នាំឱ្យ $S\le\frac{p^2}{3\sqrt{3}}=\frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}}$

តាមវិសមភាព Cauchy – Schwarz គេមាន :

$(a+b+c)^2\le(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)=3(a^2+b^2+c^2)$

គេទាញបាន $S\le\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{12\sqrt{3}}=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}$

គេបាន $d\le\frac{6}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ នោះ $d_{max}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ក្នុងករណីនេះធ្វើឱ្យ ΔABC សមង្ស័ហើយដោយ $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=d=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=y=z=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ។

ដូចនេះ SABC ជាតេត្រាអ៊ែតនិយត័ ។

លំហាត់ទី៤៥

គេឱ្យចតុកោណប៉ោង $\mathbf{ABCD}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{AB = a}$, $\mathbf{BC = b}$

$\mathbf{CD = c}$ និង $\mathbf{DA = d}$ ។ $\mathbf{O}$ ជាចំនុចមួយនៅក្នុងចតុកោណនេះដែល

$\angle\mathbf{OAB} = \angle\mathbf{OBC} = \angle\mathbf{OCD} = \angle\mathbf{ODA} = \theta$ ($\mathbf{0 < \theta < 90^o}$)

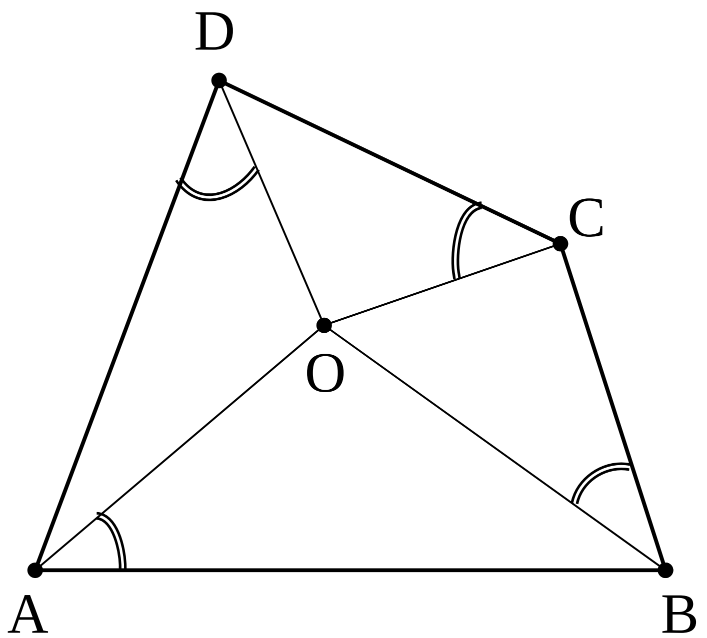
ក. ចូរស្រាយថា $\mathbf{\tan\theta = \dfrac{2(ab\sin B + cd\sin D)}{a^2+b^2+c^2+d^2}}$

ខ. បង្ហាញថាតម្លៃ $\mathbf{\tan\theta}$ អតិបរមាលុះត្រាតែ $\mathbf{ABCD}$ ជាការេហើយ

$\mathbf{O}$ ជាផ្ចិតរបស់វា ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $\mathbf{\tan\theta = \dfrac{2(ab\sin B + cd\sin D)}{a^2+b^2+c^2+d^2}}$



តាង $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$, $OD = t$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុង $\Delta OAB, \Delta OBC, \Delta OCD, \Delta ODA$:

$$y^2 = a^2 + x^2 - 2ax\cos\theta \quad (1)$$

$$z^2 = y^2 + b^2 - 2by\cos\theta \quad (2)$$

$$t^2 = z^2 + c^2 - 2zc\cos\theta \quad (3)$$

$$x^2 = t^2 + d^2 - 2td\cos\theta \quad (4)$$

បូកសមីការ $(1),(2),(3)\,\&\,(4)$ គេទាញបាន :

$$\cos\theta = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2(ax + by + cz + dt)} \quad (5)$$

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ $ABCD$ គេបាន :

$$S = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}(ab\sin B + cd\sin D)$$

ម្យ៉ាងទៀត $S = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{ODA}$

ឬ $S = \frac{1}{2}(ax + by + cz + dt)\sin\theta$

គេបាន $(ax + by + cz + dt)\sin\theta = ab\sin B + cd\sin D$

ឬ $\sin\theta = \frac{ab\sin B + cd\sin D}{ax + by + cz + dt} \quad (6)$

ចែកទំនាក់ទំនង (6) និង (5) អង្គ និង អង្គគេបាន :

$$\tan\theta = \frac{2(ab\sin B + cd\sin D)}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$ ។

ខ. បង្ហាញថាតម្លៃ $\tan\theta$ អតិបរមាលុះត្រាតែ $ABCD$ ជាការេ :

គេមាន $\sin B \le 1$ និង $\sin D \le 1$

គេបាន $\tan\theta \le \dfrac{2(ab+cd)}{a^2+b^2+c^2+d^2}$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$$ab+cd \le \frac{a^2+b^2}{2}+\frac{c^2+d^2}{2}=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}$$

គេទាញបាន $\tan\theta \le \dfrac{2\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}\right)}{a^2+b^2+c^2+d^2}=1$

ដូចនេះតម្លៃអតិបរមានៃ $\tan\theta = 1$ ដែលត្រូវនឹងមុំ $\theta = 45^o$

ក្នុងករណីនេះវិសមភាពក្លាយជាសមភាពនោះ $a=b=c=d$

ហើយ $\sin B = 1$ និង $\sin D = 1$ នោះ $B = D = 90^0$ ។

ដូចនេះ $ABCD$ ជាការេហើយ O ជាផ្ចិតរបស់វា ។

លំហាត់ទី៤៦

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និង ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន

$a_1, a_2, ..., a_n$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1 a_2 a_3 .... a_n = 1$ ចូរបង្ហាញថា :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{a_i^4 + 3}} \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$ ។

(Turkey National Olympiad 2010)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{a_i^4 + 3}} \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$

ជាដំបូងយើងត្រូវស្រាយឱ្យឃើញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x > 0$ គេមាន

$$\frac{x}{x+1} \ge \frac{x}{\sqrt{x^4 + 3}} \Leftrightarrow x^4 + 3 \ge (x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 (x^2 + 2x + 2) \ge 0$$

ដោយ $(x-1)^2 \ge 0$ និង $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$

នាំឱ្យ $(x-1)^2 (x^2 + 2x + 2) \ge 0$ ពិតគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ហេតុនេះ $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + 1} \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{a_i^4 + 3}}$ (1)

ជាបន្តទៀតយើងនឹងស្រាយថា $\displaystyle \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \ge \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + 1}$ ។

ឧបមាថា $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \ge 2\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+1}$ ពិត

សមមូល $\sum_{i=1}^{n}(\frac{a_i+1}{2a_i}-\frac{1}{2})+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2a_i} \ge 2\sum_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{a_i+1})$

សមមូល $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i+1}{2a_i}-\frac{n}{2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2a_i} \ge 2n-\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{a_i+1}$

សមមូល $\sum_{i=1}^{n}(\frac{a_i+1}{2a_i}+\frac{2}{a_i+1})+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2a_i} \ge \frac{5n}{2}$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ ចំពោះ $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ គេមាន :

$$\sum_{i=1}^{n}(\frac{a_i+1}{2a_i}+\frac{2}{a_i+1}) \ge 2n\sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{n}(\frac{a_i+1}{2a_i}.\frac{2}{a_i+1})} = 2n$$

និង $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2a_i} \ge \frac{n}{2}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}} = \frac{n}{2}$ (ព្រោះ $a_1a_2a_3....a_n = 1$)

គេទាញបាន $\sum_{i=1}^{n}(\frac{a_i+1}{2a_i}+\frac{2}{a_i+1})+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2a_i} \ge 2n+\frac{n}{2} = \frac{5n}{2}$ ពិត

គេទាញបាន $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \ge \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+1}$ **(2)**

តាមទំនាក់ទំនង **(1)** និង **(2)** គេទាញបាន $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \ge \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt{a_i^4+3}}$

ដូចនេះ $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt{a_i^4+3}} \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

1. ចូរកំណត់គ្រប់គូ (m,n) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$1!+2!+3!+4!+....+n!=m^2$$

2. គេឱ្យ a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ដោយដឹងថា a^2+b^2 ចែកដាច់នឹង $ab+1$ នោះចូរបង្ហាញថា $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់ ។

3. គេឱ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយដោយដឹងថា $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាចំនួនគត់មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់មួយ ។

4. ចូររកគ្រប់គូ a និង b នៃចំនួនគត់វិជ្ជមានដើម្បីឱ្យ $\frac{a^2+2b^2+3b+1}{a+b+1}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

5.ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដើម្បីឱ្យ 9^n-1 ចែកដាច់នឹង 7^n

6. ចូរកំណត់គ្រប់គូ (a,b) ដើម្បីឱ្យ a^2+b^2+3 ចែកដាច់នឹង ab ។

7.ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដើម្បីឱ្យ 3^n-n ចែកដាច់នឹង 17 ។

8. កំណត់តម្លៃគត់វិជ្ជមាន n ធំបំផុតដើម្បីឱ្យ $\frac{2012!}{5^n}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

9.ចូរបង្ហាញថា $3^{4^5}+4^{5^6}$ គឺជាផលគុណនៃពីរចំនួនគត់ ដែលចំនួនគត់នីមួយៗ ធំជាង 10^{2002} ។

10. ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{n}$ ដើម្បីឱ្យផ្នែកគត់នៃ $\sqrt[n]{111}$ ជាតួចែក នៃ $\mathbf{111}$ ។

11. បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានខុសគ្នា $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ចំនួន $\mathbf{2a(a^2+3b^2)}$ មិនអាចជាគូបនៃចំនួនគត់ ។

12. ចូរកំណត់តម្លៃធំបំផុតនៃ $\mathbf{m^2+n^2}$ ដែល $\mathbf{m}$ និង $\mathbf{n}$ ជាចំនួនគត់ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\mathbf{m,n\in\{1,2,3,.....,1981\}}$ និង $\mathbf{(n^2-mn-m^2)^2=1}$

13.គេសម្គាល់ឃើញថា :

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3},\ 4^2+3^2=5^2$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15},\ 8^2+15^2=17^2$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{12}{35},\ 12^2+35^2=37^2$$

ចូរបង្ហាញលក្ខណៈទូទៅតាមឧទាហរណ៍ខាងលើនេះ ។

14.អនុគមន៍ $\mu:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ កំណត់ដោយ :

$$\mu(n)=\sum_{k\in R_n}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i.\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

ដែល $\mathbf{R_n=\{k\in IN/1\le k\le n,gcd(k,n)=1\}}$ ។

ចូរស្រាយថា $\mu(n)$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{n}$ ។

15. ចូរកំណត់គ្រប់គូចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x,y) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ :

$y^2 = x^3 + 16$ ។

16. ចូរកំនត់គ្រប់ចំនួនគត់ a ដើម្បីឱ្យ $x^3 - x + a = 0$ មានឬសបីជាចំនួនគត់

17. ចូរកំនត់គ្រប់គូ (a,b) នៃចំនួនគត់វិជ្ជមានដោយដឹងថា :

$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - 1)^2 = 49 + 20\sqrt[3]{6}$

18.ចូរកំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a ដើម្បីឱ្យ $\sqrt[3]{2+\sqrt{a}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{a}}$

ជាចំនួនគត់មួយ ។

19.ចូរកំនត់គ្រប់គូចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x,y,z) ដោយដឹងថា :

$(x+y)(1+xy) = 2^z$

20. គេឱ្យស្វីត $\{a_n\}_{n\ge1}$ កំណត់ដោយ $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^{\ 2} + 1} \end{cases}$

ចូរបង្ហាញថា a_n ជាចំនួនគត់គ្រប់ n ។

21. គេឱ្យស្វីត $\{a_n\}_{n\ge1}$ កំណត់ដោយ $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{4a_n} \end{cases}$

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{\dfrac{2}{2a_n^{\ 2} - 1}}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានគ្រប់ $n > 1$ ។

22. ចូរកំនត់លេខ x,y,z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព :

$$\sqrt{\underbrace{\overline{xxx....xxx}}_{(n)} - \underbrace{\overline{yyy....yyy}}_{(n)}} = \underbrace{\overline{zzz.....zzz}}_{(n)}$$

23.គេឱ្យ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $\binom{n}{2}\sum_{i<j}\frac{1}{a_i a_j} \geq 4\left(\sum_{i<j}\frac{1}{a_i+a_j}\right)^2$

24. ចូរបង្ហាញថា $\tan 7°30' = \sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2$

25.គេយក M ជាចំនុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ C ដោយគេដឹងថា $\angle MAB = \angle MBC = \angle MCA = \phi$ ។ តាង ψ ជាមមុស្រួចរវាងមេដ្យាននៃជ្រុង AC និង BC ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\sin(\phi+\psi)}{\sin(\phi-\psi)} = 5$ ។

26.ចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មួយមានជ្រុង$AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ និង $DA = d$ ហើយមុំ $\angle DAB = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle BCD = \gamma$ និង $\angle CDA = \delta$ ។ យក $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ និង S ជាផ្ទៃក្រលានៃចតុកោណនេះ ។ ចូរស្រាយថា :

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

27.គេយក a និង b ជាពីរចំនួនគត់ខុសគ្នា ។ ចូរស្រាយថាបើ k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានចែកមិនដាច់នឹង 3 នោះ $(a+b)^{2k} + a^{2k} + b^{2k}$ ចែកដាច់នឹង $a^2 + ab + b^2$ ។