លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

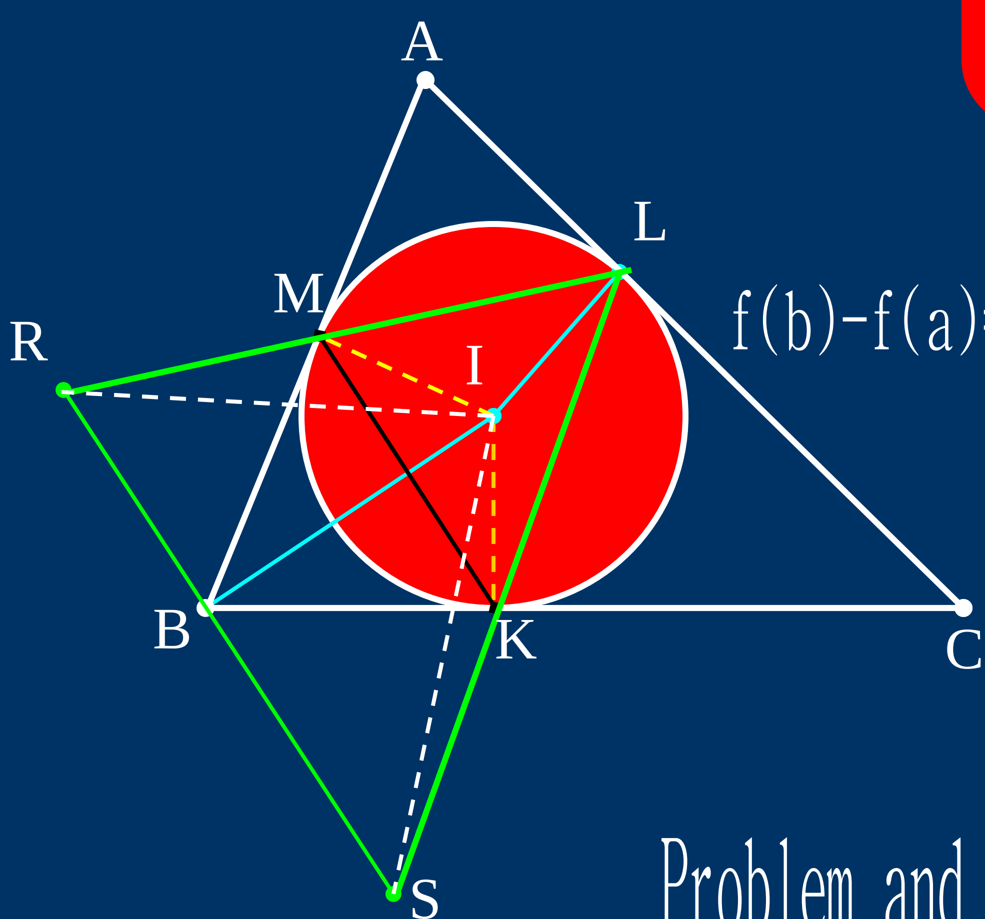
បរិញ្ញាបត្រផ្នែកគណិតវិទ្យា

គណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោក

សម្រាប់ សិស្សពូកែផ្នែកគណិតវិទ្យា

ត្រៀមប្រឡងអាហារូបករណ៍

ភាគ១០



$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

Problem and Solution

គណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោក

រៀបរៀងដោយ ៖

លឹម ផល្លុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

ភាគទី ១០

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក លឹម ឆុន

លោក នន់ សុខណា

លោក ព្រឹម សុនិត្យ

លោក និត្យ ម៉េង

លោក អ៊ឹង សំណាង

លោកស្រី នុយ រីណា

លោក ផល ប៊ុនឆាយ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិគ្គសិរ

ការីកុំព្យូទ័រ

កញ្ញា លី គុណ្ណាភា

លោក អ៊ឹង សំណាង

អារម្ភកថា

សៀវភៅគណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោកភាគទី១០ ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់នៅក្នុងដៃនេះ ចែកចេញជាបីផ្នែកដែលផ្នែកទី១ ជាកម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស ផ្នែកទី២ ជាផ្នែកដំណោះស្រាយ និង ផ្នែកទី៣ ជាលំហាត់អនុវត្តន៍ ។ រាល់បប្រធានលំហាត់នីមួយៗនៅក្នុងសៀវភៅនេះ យើងខ្ញុំបានជ្រើសរើសយកតែ លំហាត់ណាដែលមានលក្ខណៈពិបាក មកធ្វើដំណោះស្រាយគំរូយ៉ាងក្បោះក្បាយបំផុត ។

គោលបំណងនៃការរៀបរៀងចងក្រងគឺដើម្បីទុកជាឯកសារជំនួយសម្រាប់អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន និង ម្យ៉ាងទៀតដើម្បីចូលរួមលើកស្ទួយវិស័យគណិតវិទ្យាក្នុងប្រទេសកម្ពុជាយើងឱ្យកាន់តែរីកចម្រើនឆាប់រហស័ស្របតាមសម័យវិទ្យាសាស្ត្រទំនើប ។

សៀវភៅនេះមិនល្អហួសគេហួសឯងនោះទេ ។ កំហុសឆ្គងដោយអចេតនាប្រាកដជាមានទាំងបច្ចេកទេស និង អក្ខរាវិរុទ្ធ ។ ហេតុនេះយើងខ្ញុំជាអ្នកនិពន្ធ រងចាំជានិច្ចនូវមតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីអ្នកសិក្សាគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដោយក្តីរីករាយដើម្បីកែលំអសៀវនេះឱ្យកាន់តែមានសុក្រិត្យភាពប្រសើរឡើងថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់ ខ្ញុំបាទអ្នកនិពន្ធសូមគោរពជូនពរអ្នកសិក្សាទាំងអស់មានសុខភាពល្អមានប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និង ទទួលបានជោគជ័យជានិច្ចក្នុងការសិក្សា ។

បាត់ដំបង ថ្ងៃទី ២៧ ខែមិថុនា ឆ្នាំ២០១១

អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាវជ្រាវ **លឹម ផល្គុន**
Tel : 017 768 246
Email: lim_phalkun@ymail.com
Website: www.mathtoday.wordpress.com

ជំពូកទី១

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស

ជំពូកទី១

កម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស

1. គេឱ្យចំនួនពិត $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1 > 0, x_2 > 0$
   $x_1y_1 - z_1^2 > 0$ និង $x_2y_2 - z_2^2 > 0$ ។
   ចូរស្រាយថា :
   $$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \le \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}$$
   (IMO 1969)

2. គេតាង I និង O រៀងគ្នាជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនិងផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយ ។
   ចូរស្រាយថា $\angle OIA = 90^o$ លុះត្រាតែ AB, BC, CA ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

3. គេឱ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដោយដឹងថា $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ ជាចំនួនគត់ ។
   ចូរស្រាយថា $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់មួយ ។

4. គេយក x ជាចំនួនពិត ដោយដឹងថា $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ។
   ចូរបង្ហាញថា $\cos^2(x)\cot(x) + \sin^2(x)\tan(x) \ge 1$

   (Baltic Way 2010)

5. គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{a,b,c}$ ។ តាង $\mathbf{r}$ និង $\mathbf{R}$ រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ $\Delta\ \mathbf{ABC}$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $\mathbf{a\cos A + bosB + c\cos C = \frac{2pr}{R}}$

$$\mathbf{\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}}$$

$$\mathbf{\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}}$$

ដែល $\mathbf{p = \frac{a+b+c}{2}}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

ខ. ចូរទាញបញ្ជាក់ថា $\mathbf{a^2+b^2+c^2 \geq 4(R+r)^2}$ ($\mathbf{A,B,C}$ ជាមុំស្រួច) ។

6. គេឱ្យ $\mathbf{f}$ ជាអនុគមន៍កំណត់ពីសំណុំ $\mathbf{IR}$ ទៅសំណុំ $\mathbf{IR_+^*}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $\mathbf{f(x+y) = f(x).f(y)}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x,y \in IR}$ និង $\mathbf{f'(0) = \lambda}$

ចូរកំណត់រកអនុគមន៍ $\mathbf{y = f(x)}$ ។

7. ស៊ីត $\mathbf{\{a_n\}}$ កំណត់ដោយ $\mathbf{a_1 = \frac{21}{16}}$ និងចំពោះ $\mathbf{n \geq 2 : 2a_n - 3a_{n-1} = \frac{3}{2^{n+1}}}$

គេយក $\mathbf{m}$ ជាចំនួនគត់មួយដែល $\mathbf{m \geq 2}$ ។ ចូរបង្ហាញថាចំពោះ $\mathbf{n \leq m}$

យើងបាន $\mathbf{\left(a_n + \frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}} \left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < \frac{m^2-1}{m-n+1}}$?

(China National Olympiad 2005)

៨. គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=3$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2}\ge\frac{3}{2}$

(Croatia Team Selection Tests 2011)

៩.គេឱ្យ a,b,c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}+\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)}\ge ab+bc+ca$$

(Greece National Olympiad 2007)

10. គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់ពី $(0,+\infty)$ ទៅ IR ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$f(x)+f(y)=f(xy)$ គ្រប់ $x>0,y>0$ និង $f'(1)=\lambda$ ។

ចូរកំណត់រកអនុគមន៍ $y=f(x)$ ។

11. គេកំណត់ចំនួន $a_0,a_1,a_2,....,a_n$ ដូចខាងក្រោម :

$$a_0=\frac{1}{2};a_{k+1}=a_k+\frac{{a_k}^2}{n}\quad(\ n>1,k=0,1,2,....,n-1\ )$$

ចូរបង្ហាញថា $1-\frac{1}{n}<a_n<1$ ។

(IMO Longlists 1980)

12. គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ និង មានដេរីវេលើ IR ដែលចំពោះគ្រប់ $x,y\in IR$

គេមានទំនាក់ទំនង $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$ និង $f(x)\neq\pm1$ គ្រប់ x ។

ចូរកំណត់អនុគមន៍ $y=f(x)$ ។

13. ចូរបង្ហាញថា :

$$\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \ge 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b)$$

ចំពោះគ្រប់ a, b, c ធំជាងមួយ ។

(Malaysia National Olympiad 2010)

14. គេឱ្យរង្វង់ផ្ចិត **O** កាំ **r** និងត្រីកោណ **ABC** ប្រែប្រួលចារឹកក្រៅរង្វង់ ។ បន្ទាត់កាត់តាម **O** កាត់ជ្រុង **AB** និង **AC** រៀងគ្នាត្រង់ **M** និង **N** ។ កំណត់ទីតាំងចំណុច **A** និងអង្កត់ **[MN]** ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ **AMN** មានតម្លៃតូចបំផុត ?

(ប្រឡងសិស្សពូកែប្រចាំរាជធានីភ្នំពេញ ២០០៩)

15. គេតាង α, β, γ ជារង្វាស់មុំក្នុងត្រីកោណ **ABC** មួយដែលមានបរិមាត្រ **2p** និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ **R** ។

a/ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\cot^2\alpha + \cot^2\beta + \cot^2\gamma \ge 3\left(9.\frac{R^2}{p^2} - 1\right)$$

b/ តើពេលណាទើបគេបានសមភាព ?

(Morocco National Olympiad 2011)

16. គេឱ្យម៉ាទ្រីស $A=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{bmatrix}$ និង $I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

បង្ហាញថាមានស្ទីតចំនួនពិតពីរ (u_n) និង (v_n) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$\forall n\in IN:\ A^n=u_n.I+v_n.A$ ដែលគេនឹងបញ្ជាក់តួទូទៅ u_n

និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

17. គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ និង មានដេរីវេលើ IR ដែលចំពោះគ្រប់ $x,y\in IR$

គេមានទំនាក់ទំនង $f(\frac{x+y}{2})=\sqrt{f(x)f(y)}$ និង $f(x)>0$ ។

ចូរកំណត់អនុគមន៍ $y=f(x)$ ។

18. គេឱ្យចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មួយមានជ្រុង$AB=a\,,BC=b\,,$

$CD=c$ និង $DA=d$ ។

P ជាចំនុចមួយនៅក្នុងចតុកោណហើយ $K\,,L\,,M\,,N$ ជាចំណោលកែង

នៃចំនុច P លើជ្រុង $[AB],[BC],[CD],[DA]$ រៀងគ្នា ។

គេដឹងថា $\frac{PK}{AB}=\frac{PL}{BC}=\frac{PM}{CD}=\frac{PN}{DA}=h$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $h=\frac{2S}{a^2+b^2+c^2+d^2}$ ដែល S ជាផ្ទៃក្រឡានៃ

ចតុកោណ $ABCD$ ។

ខ.ចូរបង្ហាញថា $h\le\frac{1}{2}$

19. គេឱ្យចតុកោណប៉ោង $\mathbf{ABCD}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{AB=a}$, $\mathbf{BC=b}$

$\mathbf{CD=c}$ និង $\mathbf{DA=d}$ ។ $\mathbf{O}$ ជាចំនុចមួយនៅក្នុងចតុកោណនេះដែល

$\angle\mathbf{OAB}=\angle\mathbf{OBC}=\angle\mathbf{OCD}=\angle\mathbf{ODA}=\theta$ ($\mathbf{0<\theta<90^o}$)

ក. ចូរស្រាយថា $\mathbf{\tan\theta=\dfrac{4S}{a^2+b^2+c^2+d^2}}$

ដែល $\mathbf{S}$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ $\mathbf{ABCD}$ ។

ខ. កំនត់ θ ដោយដឹងថា $\mathbf{\tan\theta}$ មានតម្លៃធំបំផុត ។

20. ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x;y\geq 0}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព :

$$\mathbf{\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{y^2-y+1}+\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{y^2+y+1}\geq 2(x+y)}$$

(Kazakhstan NMO 2010**)**

21. គេឱ្យ $\mathbf{a,b,c}$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\mathbf{\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8}$$

(USAMO 2003)

22. ចូរបង្ហាញថា $$\mathbf{\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\leq\frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}}$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $\mathbf{a,b,c,d}$ ។ (*វៀតណាម* 1962)

23. ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\geq\frac{4}{xy+yz+zx}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានខុសគ្នា x,y,z ។

(វៀតណាម 2008)

24. ចូរកំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីតដែលកំណត់ដោយ :

$x_0=3, x_1=4$ និង $x_{n+1}=x_{n-1}^2-nx_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

25. ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនពិត x បើគេដឹងថា $\frac{8^x+27^x}{12^x+18^x}=\frac{7}{6}$ ។

26. ចូរគណនាផលបូក :

$$S_n=\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+...+\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}$$

27. (China 1983)

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់លើចន្លោះ $[0,1]$ ដោយដឹងថា :

$f(0)=f(1)=1$ និង $|f(a)-f(b)|<|a-b|$

ចំពោះគ្រប់ $a\neq b$ ក្នុងចន្លោះ $[0,1]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $|f(a)-f(b)|<\frac{1}{2}$ ។

28. (AIME 1988)

ចូរកំណត់គូនៃចំនួនគត់ (a,b) ដោយដឹងថា $ax^{17}+bx^{16}+1$

ចែកដាច់នឹង x^2-x-1 ។

29. ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនពិតនៃសមីការ :

$$x^3 - 3x = \sqrt{x+2}$$ ។

30. (Korean Mathematics Competition 2000)

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនពិត x ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ :

$$2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x = 1$$

31. (China 1992)

ចូរបង្ហាញថា $16 < \sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{k}} < 17$

32. គេឱ្យ z_1, z_2, z_3 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_2 = 2 \\ {z_1}^2 + {z_2}^2 + {z_3}^2 = 3 \\ z_1 z_2 z_3 = 4 \end{cases}$

ចូរគណនាតម្លៃ $S = \frac{1}{z_1 z_2 + z_3 - 1} + \frac{1}{z_2 z_3 + z_1 - 1} + \frac{1}{z_3 z_1 + z_2 - 1}$

33. គេឱ្យ x, y, z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $\frac{x^3}{1-x^8} + \frac{y^3}{1-y^8} + \frac{z^3}{1-z^8}$ ។

34. (Iran 1996)

គេឱ្យបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន a, b, c និងមិនសូន្យព្រមគ្នាពីរ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$(ab + bc + ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right] \geq \frac{9}{4}$$

35. គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $a^3+b^3+c^3-3abc \geq 2\left(\frac{b+c}{2}-a\right)^3$ ។

36. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$

ហើយមុំក្នុង A,B,C ជាមុំស្រួចឬមុំកែង ។

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡានៃ $\Delta\ ABC$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4} \geq \frac{9}{16S^2}$ ។

37. (Turkey 2007)

គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ដែល $a+b+c=1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ca+2b^2+2b} \geq \frac{1}{ab+bc+ca}$$

38. គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a^2+ab+b^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{2b^2+bc+c^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{2c^2+ca+a^2}} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

39. គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតខុសគ្នា ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2} \geq 2$ ។

40. ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព :

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a,b,c ។

41. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយកែងត្រង់ C ។ D និង E ជាចំណុចពីរជ្រើសរើស នៅលើអ៊ីប៉ូតេនូស ដែល$BC=BD$ និង $AC=AE$ ។

F និង G ជាចំណោលកែងនៃ D និង E លើជ្រុង AC និង BC រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $DE=DF+EG$ ។

42. គេយក D ជាចំនុចមួយនៃជ្រុង BC របស់ត្រីកោណ ABC ហើយ E និង F ជាចំណោលកែងនៃ B និង C លើ AD ។

បើ R ជាចំនុចកណ្ដាលនៃ BC នោះស្រាយថា $RE=RF$

43. គេឱ្យការេ $ABCD$ មួយ ។ E ជាប្រសព្វរវាងអង្កត់ទ្រូងទាំងពីរ ហើយ N ជាចំនុចមួយស្ថិតលើ AE ។

ចូរស្រាយថា $AB^2-BN^2=AN.NC$ និង $AN^2+NC^2=2BN^2$

44. គេឱ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយហើយ D ជាជើងនៃកម្ពស់គូសពីកំពូល A ។ យក E និង F ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់កាត់តាមD ដោយដឹងថា AE កែងនឹង BE ហើយ AF កែងនឹង CF ដែល E និង F ខុសពី D ។

យក M និង N ជាចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ BC និង EF រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថា AN កែងនឹង NM ?

45. រកអនុគមន៍ $f : IR \mapsto IR$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$\forall \mathbf{x,y} \in \mathbf{IR}:\ \mathbf{f((x-y)^2) = x^2 - 2yf(x) + \left(f(y)\right)^2}$$

46. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $\mathbf{a,b,c}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \sqrt[6]{\frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}{8}} + \sqrt[3]{abc}$$

47.(**Greece National Olympiad 2011**)

គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលមានផលបូកស្មើ 6 ។

ចូរកំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ :

$$\mathbf{S = \sqrt[3]{a^2+2bc} + \sqrt[3]{b^2+2ca} + \sqrt[3]{c^2+2ab}}$$

48.(USAMO 1989)

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{n}$ គេឱ្យ :

$$\mathbf{S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}}$$

$$\mathbf{T_n = S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_n}$$

$$\mathbf{U_n = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{3} + \frac{T_3}{4} + ... + \frac{T_n}{n+1}}$$

ចូរកំណត់ដោយធ្វើដំណោះស្រាយ នូវចំនួនគត់ $\mathbf{0 < a,b,c,d < 1000\,000}$

ដោយដឹងថា $\mathbf{T_{1988} = aS_{1989} - b}$ និង $\mathbf{U_{1988} = cS_{1989} - d}$ ។

49.(Japan Mathematical Olympiad Finals 2010)

គេឱ្យ x,y,z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{1+yz+zx}{(1+x+y)^2}+\frac{1+zx+xy}{(1+y+z)^2}+\frac{1+xy+yz}{(1+z+x)^2}\geq 1$$ ។

50. (**China Team Selection Test 2002**)

គេឱ្យស្វ៊ីត $a_1=1,\ a_2=5$ និង $a_{n+1}=\dfrac{a_n a_{n-1}}{\sqrt{a_n^{\ 2}+a_{n-1}^2+1}}\ \forall n\geq 2$

ចូរកំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

51. (**China Team Selection Test 2006**)

គេឱ្យ $x_1,x_2,....,x_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i=1$ ។

ចូរស្រាយថា :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+x_i}}\right)\leq\frac{n^2}{\sqrt{n+1}}$$ ។

52.(**China Team Selection Test 2005**)

គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ដែល $ab+bc+ca=\dfrac{1}{3}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{1}{a^2-bc+1}+\dfrac{1}{b^2-ca+1}+\dfrac{1}{c^2-ab+1}\leq 3$ ។

ជំពូកទី២

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

ជំពូកទី២

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

គេឱ្យចំនួនពិត $\mathbf{x_1\,,x_2\,,y_1\,,y_2\,,z_1\,,z_2}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\mathbf{x_1>0\,,x_2>0}$

$\mathbf{x_1y_1-z_1^{\;2}>0}$ និង $\mathbf{x_2y_2-z_2^{\;2}>0}$ ។

ចូរស្រាយថា :

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\le\frac{1}{x_1y_1-z_1^{\;2}}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^{\;2}}$$

(IMO 1969)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា :

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\le\frac{1}{x_1y_1-z_1^{\;2}}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^{\;2}}\quad(*)$$

តាង $\mathbf{a=x_1y_1-z_1^{\;2}>0\;;\;b=x_2y_2-z_2^{\;2}>0}$

និង $\mathbf{c=(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}$

ដោយ $\mathbf{x_1>0}$ និង $\mathbf{x_2>0}$ នោះ $\mathbf{y_1=\dfrac{a+z_1^{\;2}}{x_1}>0}$ និង $\mathbf{y_2>0}$

គេមាន :

$$c=(x_1y_1-z_1^2)+(x_2y_2-z_2^2)+x_1y_2+x_2y_1-2z_1z_2$$

$$c=a+b+x_1y_2+x_2y_1-2z_1z_2$$

ដោយ $a=x_1y_1-z_1^2$ នោះ $x_1=\dfrac{a+z_1^2}{y_1}$

និង $b=x_2y_2-z_2^2$ នោះ $x_2=\dfrac{b+z_2^2}{y_2}$

គេបាន $c=a+b+y_2(\dfrac{a+z_1^2}{y_1})+y_1(\dfrac{b+z_2^2}{y_2})-2z_1z_2$

$$=a+b+\frac{y_2}{y_1}a+\frac{y_1}{y_2}b+\frac{y_2}{y_1}z_1^2-2z_1z_2+\frac{y_1}{y_2}z_2^2$$

$$=a+b+\frac{y_2}{y_1}a+\frac{y_1}{y_2}b+\left(\sqrt{\frac{y_2}{y_1}}\,z_1-\sqrt{\frac{y_1}{y_2}}\,z_2\right)^2$$

ដោយ $\left(\sqrt{\dfrac{y_2}{y_1}}z_1-\sqrt{\dfrac{y_1}{y_2}}z_2\right)^2\geq 0$ នោះគេទាញបាន :

$c\geq a+b+\dfrac{y_2}{y_1}a+\dfrac{y_1}{y_2}b$ ដោយ $\dfrac{y_2}{y_1}a+\dfrac{y_1}{y_2}b\geq 2\sqrt{ab}$

នោះ $c\geq a+b+2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ **(1)**

យើងឧបមាថាវិសមភាព **(*)** ពិតពោលគឺ $\dfrac{8}{c}\leq\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ ពិត

គេបាន $c\geq\dfrac{8ab}{a+b}$ ដោយ $c\geq(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ （តាមវិសមភាព **(1)** ）

យើងនឹងស្រាយថា $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq \frac{8ab}{a+b}$

សមមូល $(a+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq 8ab$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន :

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ហើយ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq 4\sqrt{ab}$

នោះ $(a+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \geq 8ab$ ពិត

ដូចនេះ

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1-{z_1}^2}+\frac{1}{x_2y_2-{z_2}^2}$$

វិសមភាពនេះក្លាយសមភាពលុះត្រាតែ :

$z_1\sqrt{\frac{y_2}{y_1}} = z_2\sqrt{\frac{y_1}{y_2}}$ ឬ $z_1y_2 = z_2y_1$ និង $\frac{y_2}{y_1}a = \frac{y_1}{y_2}b$ ។

លំហាត់ទី២

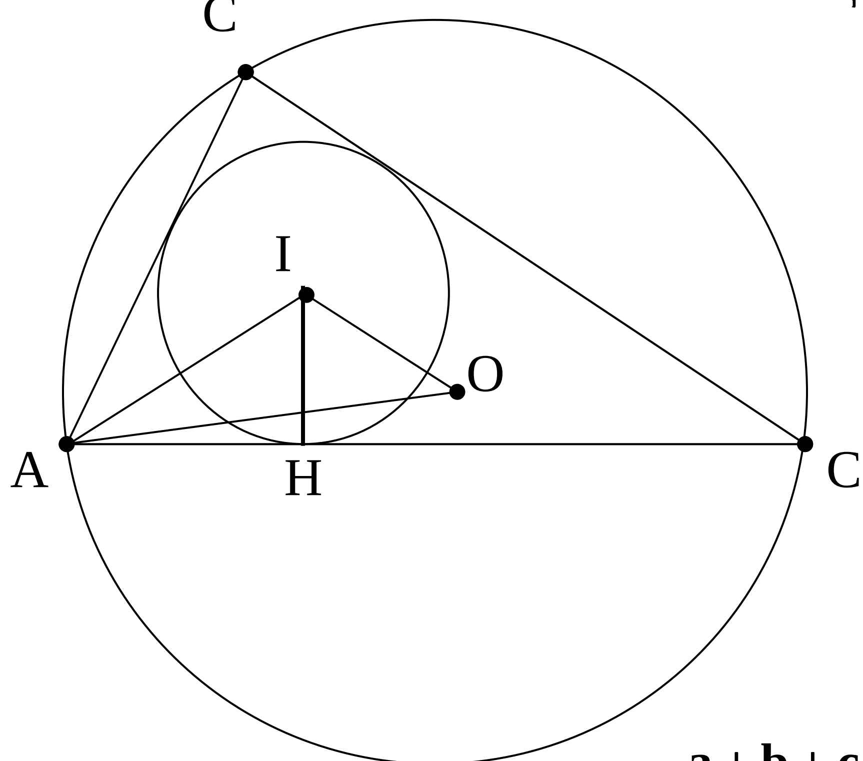
គេតាង **I** និង **O** រៀងគ្នាជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនិងផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ

នៃត្រីកោណ គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយ ។

ចូរស្រាយថា $\angle OIA = 90^o$ លុះត្រាតែ AB, BC, CA ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\angle OIA = 90^o$ លុះត្រាតែ AB, BC, CA ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត



តាង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ និង $p = \frac{a+b+c}{2}$

ហើយ **r** និង **R** ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ **ABC** ។

យក **H** ជាចំណោលនៃ **I** លើ **[AC]** នោះគេបាន :

$IH = r$ និង $AH = p - a$ ។

-សន្មតថា $\angle OIA = 90^{0}$ នោះ $OA^2 = OI^2 + IA^2$

តាមទ្រឹស្តីបទអឺលែគេមាន $OI^2 = R(R-2r)$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រក្នុងត្រីកោណកែង AHI : $IA^2 = AH^2 + IH^2$

គេបាន $R^2 = R(R-2r) = r^2 + (p-a)^2$

ឬ $2rR = r^2 + (p-a)^2$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង $S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \dfrac{abc}{4R}$

គេទាញ $2rR = \dfrac{abc}{2p}$ និង $r^2 = \dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$

គេបាន $\dfrac{abc}{2p} = \dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} + (p-a)^2$

$$abc = 2(p-a)(p-b)(p-c) + 2p(p-a)^2$$

$$abc = 2(p-a)[(p-b)(p-c) + p(p-a)]$$

$$abc = (2p-2a)(p^2 - pb - pc + bc + p^2 - pa)$$

$$abc = (2p-2a)[2p^2 - p(a+b+c) + bc]$$

$$abc = (b+c-a)(2p^2 - 2p^2 + bc)$$

$$abc = bc(b+c-a)$$

$$a = b+c-a$$

គេទាញ $2a = b+c$ នោះ c, a, b ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

-សន្មតថា c, a, b ជាស្វ៊ីតនព្វន្តនោះគេបាន $2a = b+c$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុងត្រីកោណ OIA គេបាន :

$$OA^2 = OI^2 + IA^2 - 2OI.IA\cos\angle OIA$$

គេទាញ $\cos\angle OIA = \dfrac{OI^2 + IA^2 - OA^2}{2OI.IA}$

$$= \frac{R(R-2r) + r^2 + (p-a)^2 - R^2}{2OI.IA}$$

$$= \frac{r^2 - 2rR + (p-a)^2}{2OI.IA}$$

ដោយ $b + c = 2a$ នោះ $p = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{3a}{2}$

$$r^2 = \frac{(\frac{3a}{2} - a)(\frac{3a}{2} - b)(\frac{3a}{2} - c)}{\frac{3a}{2}} = \frac{a(3a-2b)(3a-2c)}{12a}$$

$$= \frac{9a^2 - 6(b+c)a + 4bc}{12} = \frac{4bc - 3a^2}{12}$$

ហើយ $R = 2rR = \dfrac{abc}{2(\frac{3a}{2})} = \dfrac{bc}{3}$

គេបាន $\cos\angle OIA = \dfrac{\frac{4bc - 3a^2}{12} - \frac{bc}{3} + (\frac{3a}{2} - a)^2}{2OI.IA} = 0$

គេបាន $\angle OIA = 90^o$ ។

ដូចនេះ $\angle OIA = 90^o$ លុះត្រាតែ AB, BC, CA ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

លំហាត់ទី៣

គេឱ្យ $\mathbf{n}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដោយដឹងថា $\mathbf{2+2\sqrt{28n^2+1}}$ ជាចំនួនគត់។

ចូរស្រាយថា $\mathbf{2+2\sqrt{28n^2+1}}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់មួយ ។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី១

ស្រាយថា $\mathbf{2+2\sqrt{28n^2+1}}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់

តាមបម្រាប់ $\mathbf{2+2\sqrt{28n^2+1}}$ ជាចំនួនគត់នាំឱ្យមាន $\mathbf{m\in IN}$ ដែល

$\mathbf{28n^2+1=m^2}$ ឬ $\mathbf{m^2-28n^2=1}$ ជាសមីការ **Pell** ។

គូចម្លើយដំបូងនៃសមីការនេះគឺ $\mathbf{m=127\ ,\ n=24}$

ព្រោះ $\mathbf{127^2-28\times 24^2=1}$ ។ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{k\geq 1}$ គេអាចសរសេរ :

$$\mathbf{m^2-28n^2=127^2-28\times 24^2=(127-28\times 24^2)^k}$$

$$\mathbf{(m-2\sqrt{7}n)(m+2\sqrt{7}n)=(127-48\sqrt{7})^k(127+48\sqrt{7})^k}$$

គេទាញ $\begin{cases}\mathbf{m-2\sqrt{7}n=(127-48\sqrt{7})^k}\\ \mathbf{m+2\sqrt{7}n=(127+48\sqrt{7})^k}\end{cases}$

គេបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការ :

$$\mathbf{m=\frac{(127-48\sqrt{7})^k+(127+48\sqrt{7})^k}{2}}$$

$$\mathbf{n=\frac{(127+48\sqrt{7})^k-(127-48\sqrt{7})^k}{4\sqrt{7}}}$$

ក្នុងករណីនេះគេបាន $2+2\sqrt{28n^2+1}=2+2m$

$2+2\sqrt{28n^2+1}=2+(127+48\sqrt{7})^k+(127-48\sqrt{7})^k$

ដោយ $127\pm 48\sqrt{7}=(8\pm 3\sqrt{7})^2$

និង $(8+3\sqrt{7})(8-3\sqrt{7})=1$ នោះគេបាន

$2+(127+48\sqrt{7})^k+(127-48\sqrt{7})^k=\left[(8+3\sqrt{7})^k+(8-3\sqrt{7})^k\right]^2$

គេបាន $2+2\sqrt{28n^2+1}=[(8+3\sqrt{7})^k+(8-3\sqrt{7})^k]^2$

ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់ព្រោះ $(8+3\sqrt{7})^k+(8-3\sqrt{7})^k$ ជាចំនួនគត់

ដូចនេះបើ $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាចំនួនគត់នោះ $2+2\sqrt{28n^2+1}$

ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់ ។

របៀបទី២

ស្រាយថា $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់

តាមបម្រាប់ $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាចំនួនគត់នាំឱ្យមាន $m\in IN$ ដែល

$28n^2+1=m^2$ ឬ $m^2-1=28n^2$

ឬ $\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m+1}{2}=7n^2$

តាមសមីការនេះគេទាញបាន $\begin{cases}\frac{m-1}{2}=p^2\\ \frac{m+1}{2}=7q^2\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}\frac{m-1}{2}=7p^2\\ \frac{m+1}{2}=q^2\end{cases}$

ដែល p និង q ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

គេទាញបាន

$\mathbf{m = 2p^2 + 1 \ , \ m = 14q^2 - 1}$ ឬ $\mathbf{m = 14p^2 + 1 , m = 2q^2 - 1}$

-ករណី $\mathbf{m = 2p^2 + 1 \ , \ m = 14q^2 - 1}$

គេបាន $\mathbf{2p^2 + 1 = 14q^2 - 1}$ ឬ $\mathbf{p^2 - 7q^2 = -1}$ ជាសមីការគ្មាន

ចម្លើយក្នុង $\mathbf{IN}$ ព្រោះអង្គទីពីរសមីការចែកនឹង 7 ឱ្យសំណល់ $\mathbf{-1}$

តែអង្គទីពីរនៃសមីការចែកនឹង 7 មិនអាចឱ្យសំណល់ $\mathbf{-1}$ ទេ ព្រោះគ្រប់

ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbf{p}$ ចំនួន $\mathbf{p^2}$ ចែកនឹង 7 ឱ្យសំណល់ $\mathbf{1 \ , \ 2 \ , \ 4}$ ។

-ករណី $\mathbf{m = 14p^2 + 1 , m = 2q^2 - 1}$

គេបាន $\mathbf{14p^2 + 1 = 2q^2 - 1}$ ឬ $\mathbf{q^2 - 7p^2 = 1}$ ជាសមីការមានចម្លើយ

ក្នុងសំណុំ $\mathbf{IN}$ ព្រោះ $\mathbf{q^2 - 7p^2}$ ចែកនឹង 7 អាចឱ្យសំណល់ $\mathbf{1}$ ។

ហេតុនេះ មានគូ $\mathbf{p , q \in IN}$ ដែល $\mathbf{m = 14p^2 + 1 , m = 2q^2 - 1}$

ក្នុងករណីនេះគេបាន $\mathbf{2 + 2\sqrt{28n^2 + 1} = 2 + 2m}$

ចំពោះ $\mathbf{m = 2q^2 - 1}$ គេបាន :

$$\mathbf{2 + 2\sqrt{28n^2 + 1} = 2 + 2(2q^2 - 1) = 4q^2}$$ ជាការេប្រាកដ ។

ឬគេអាចយក $\mathbf{m = 14p^2 + 1}$ គេបាន :

$$\mathbf{2 + 2\sqrt{28n^2 + 1} = 2 + 2(14p^2 + 1) = 28p^2 + 4}$$

$$\mathbf{= 4(7p^2 + 1) = 4q^2}$$ ជាការេប្រាកដ

ព្រោះ $\mathbf{q^2 - 7p^2 = 1}$ ឬ $\mathbf{7p^2 + 1 = q^2}$ ។

របៀបទី៣ ស្រាយថា $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនគត់

តាមបម្រាប់ $2+2\sqrt{28n^2+1}$ ជាចំនួនគត់នាំឱ្យមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន p

ដែល $28n^2+1=(2p+1)^2=4p^2+4p+1$

គេបាន $p(p+1)=7n^2$ ដោយ $GCD(p,p+1)=1$

ព្រោះ $(p+1)-p=1$ (តាមទ្រឹស្តីបទ **Bezout**)

គេទាញបាន p ចែកដាច់នឹង 7 ឬ $p+1$ ចែកដាច់នឹង 7 ។

-ករណី p ចែកដាច់នឹង 7 :

តាម $p(p+1)=7n^2$ គេទាញបាន $p=7k^2, p+1=t^2$

គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k និង t ហើយ $GCD(k,t)=1$ ។

គេមាន $7k^2+1=t^2$ ឬ $t^2-7k^2=1$ ជាសមីការមានឬសក្នុង IN

ព្រោះ t^2-7k^2 ចែកនឹង 7 មានសំណល់ 1, 2 ឬ 4 ។

-ករណី $p+1$ ចែកដាច់នឹង 7 :

តាម $p(p+1)=7n^2$ គេទាញបាន $p=k^2, p+1=7t^2$

គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k និង t ហើយ $GCD(k,t)=1$ ។

គេមាន $k^2+1=7t^2$ ឬ $k^2-7t^2=-1$ ជាសមីការគ្មានឬសក្នុង IN

ព្រោះ k^2-7t^2 ចែកនឹង 7 មិនអាចមានសំណល់ -1 ទេ ។

ចំពោះ $p=7k^2, p+1=t^2$ ដែល $t^2-7k^2=1$ គេមាន

$2+2\sqrt{28n^2+1}=2+2(2p+1)=4p+4=4t^2$ ជាការេ ។

លំហាត់ទី៤

គេយក $\mathbf{x}$ ជាចំនួនពិត ដោយដឹងថា $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\cos^2(x)\cot(x) + \sin^2(x)\tan(x) \geq 1$

(Baltic Way 2010)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\cos^2(x)\cot(x) + \sin^2(x)\tan(x) \geq 1$

ដោយជំនួស $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ និង $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ វិសមភាពសមមូល

$\frac{\cos^3 x}{\sin x} + \frac{\sin^3 x}{\cos x} \geq 1$ ហើយ $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM - GM}$ គេបាន :

$$\frac{\cos^3 x}{\sin x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x} + \sin^2 x \geq 3\cos^2 x$$

ឬ $\frac{\cos^3 x}{\sin x} \geq \frac{3\cos^2 x - \sin^2 x}{2}$ **(1)**

ហើយ $\frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\sin^3 x}{\cos x} + \cos^2 x \geq 3\sin^2 x$

ឬ $\frac{\sin^3 x}{\cos x} \geq \frac{3\sin^2 x - \cos^2 x}{2}$ **(2)**

បូកវិសមភាព **(1)** និង **(2)** អង្គនិងអង្គគេបាន :

$$\frac{\cos^3 x}{\sin x}+\frac{\sin^3 x}{\cos x} \ \geq\ \cos^2 x+\sin^2 x=1$$ ពិត

ដូចនេះ $\cos^2(x)\cot(x)+\sin^2(x)\tan(x)\geq 1$ ។

លំហាត់ទី៥

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយមានជ្រុង $\mathbf{a,b,c}$ ។ តាង $\mathbf{r}$ និង $\mathbf{R}$ រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ $\Delta\ \mathbf{ABC}$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $\mathbf{a\cos A + bosB + c\cos C = \dfrac{2pr}{R}}$

$$\mathbf{\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}}$$

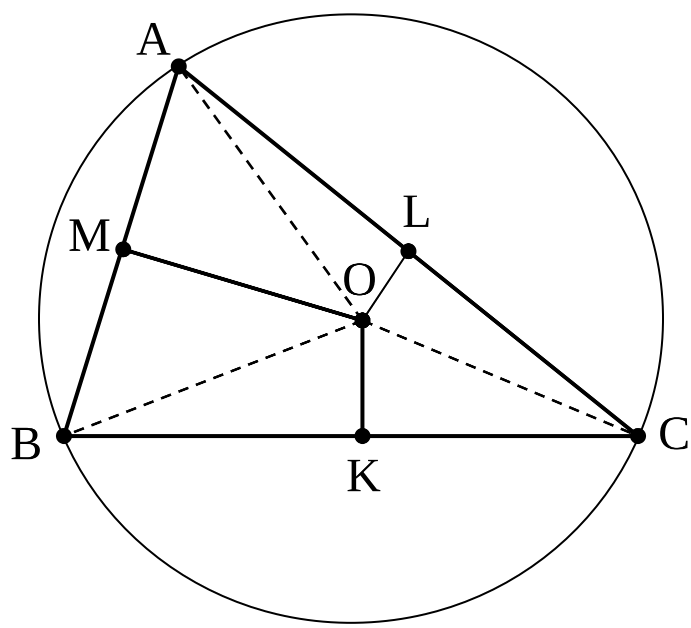
$$\mathbf{\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}}$$

ដែល $\mathbf{p = \dfrac{a+b+c}{2}}$ ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

ខ. ចូរទាញបញ្ជាក់ថា $\mathbf{a^2 + b^2 + c^2 \ge 4(R+r)^2}$ ($\mathbf{A,B,C}$ ជាមុំស្រួច) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $\mathbf{a\cos A + bosB + c\cos C = \dfrac{2pr}{R}}$



គេមាន $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BOK$ (មុំផ្ចិត និង មុំចារឹកក្នុងរង្វង់)

ក្នុងត្រីកោណកែង **OKB** គេមាន $\cos\angle BOK = \frac{OK}{OB} = \frac{OK}{R}$

គេទាញ $OK = R\cos\angle BOK = R\cos A$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $OL = R\cos B$, $OM = R\cos C$

តាង **S** ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ **ABC** នោះគេបាន :

$$S = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB}$$
$$pr = \frac{1}{2}BC.OK + \frac{1}{2}CA.OL + \frac{1}{2}AB.OM$$
$$pr = \frac{1}{2}aR\cos A + \frac{1}{2}bR\cos B + \frac{1}{2}cR\cos C$$
$$pr = \frac{1}{2}R(a\cos A + b\cos B + c\cos C)$$

ដូចនេះ $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{2pr}{R}$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេមាន $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

គេទាញ $\frac{\cos A}{a} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc}$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន :

$\frac{\cos B}{b} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2abc}$ និង $\frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2abc}$

ដូចនេះ $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន :

$$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)-(a^3+b^3+c^3)}{2abc}$$

$$=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-2(a^3+b^3+c^3)}{2abc}\quad (*)$$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុងគេមាន $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេគេបាន :

$p(p-a)(p-b)(p-c)=p^2r^2$

$(p-a)(p-b)(p-c)=pr^2$

$p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p-abc=pr^2$

ដោយ $a+b+c=2p$ ហើយ $S=\frac{abc}{4R}=pr$ នោះ $abc=4Rpr$

គេបាន $p^3-2p^3+(ab+bc+ca)p-4Rpr=pr^2$

គេទាញ $ab+bc+ca=p^2+r^2+4rR$

ដោយ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

គេបាន $a^2+b^2+c^2=4p^2-2(p^2+r^2+4rR)$

ឬ $a^2+b^2+c^2=2(p^2-r^2-4rR)$

ហើយ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

គេទាញបាន $a^3+b^2+c^3=2(p^3-3pr^2-6Rpr)$

ទំនាក់ទំនង **(*)** អាចសរសេរ :

$$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{4p(p^2-r^2-4Rr)-(p^3-3pr^2-6Rpr)}{8Rpr}$$

$$=\frac{p^2-r^2-4Rr-p^2+3r^2+6Rr}{2Rr}$$

$$=\frac{2r^2+2Rr}{2Rr}=\frac{r}{R}+1$$

ដូចនេះ $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $a^2+b^2+c^2\geq 4(R+r)^2$

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy}-\text{Schwarz}$ គេមាន :

$$(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\leq(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)(y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2)$$

យក $x_1=\sqrt{a\cos A}$, $x_2=\sqrt{b\cos B}$, $x_3=\sqrt{c\cos C}$

និង $y_1=\sqrt{\frac{\cos A}{a}}$, $y_2=\sqrt{\frac{\cos B}{b}}$, $z_2=\sqrt{\frac{\cos C}{c}}$ គេបាន :

$$(\cos A+\cos B+\cos C)^2\leq\frac{2pr}{R}.\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

$$(1+\frac{r}{R})^2\leq\frac{2pr}{R}.\frac{a^2+b^2+c^2}{8Rpr}$$

$$\frac{(r+R)^2}{R^2}\leq\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}$$

ដូចនេះ $a^2+b^2+c^2\geq 4(R+r)^2$ ។

លំហាត់ទី៦

គេឱ្យ $\mathbf{f}$ ជាអនុគមន៍កំណត់ពីសំណុំ $\mathbf{IR}$ ទៅសំណុំ $\mathbf{IR}_+^*$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់
លក្ខខណ្ឌ $\mathbf{f(x+y)=f(x).f(y)}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x,y\in IR}$ និង $\mathbf{f'(0)=\lambda}$
ចូរកំណត់រកអនុគមន៍ $\mathbf{y=f(x)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់រកអនុគមន៍ $\mathbf{y=f(x)}$

គេមាន $\mathbf{f(x+y)=f(x).f(y)}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x,y\in IR}$

យក $\mathbf{x=y=0}$ គេបាន $\mathbf{f(0)=f^2(0)}$

នាំឱ្យ $\mathbf{f(0)[1-f(0)]=0}$ គេទាញ $\mathbf{f(0)=0}$ ឬ $\mathbf{f(0)=1}$

ដោយ $\mathbf{f}$ ជាអនុគមន៍កំណត់ពីសំណុំ $\mathbf{IR}$ ទៅសំណុំ $\mathbf{IR}_+^*$ នោះ $\mathbf{f(0)>0}$

គេបាន $\mathbf{f(0)=1}$ ។

ធ្វើដេរីវេធៀបនឹង $\mathbf{x}$ ក្នុងសមភាព $\mathbf{f(x+y)=f(x).f(y)}$ ដោយចាត់ទុក $\mathbf{y}$
ជាអថេរមិនអាស្រ័យនឹង $\mathbf{x}$ គេបាន $\mathbf{f'(x+y)=f'(x)f(y)}$

យក $\mathbf{x=0}$ គេបាន $\mathbf{f'(y)=f'(0)f(y)}$ ដោយ $\mathbf{f'(0)=\lambda}$

គេទាញបាន $\mathbf{f'(y)-\lambda f(y)=0}$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី១

គេបានចម្លើយទូទៅនៃសមីការរាង $\mathbf{f(y)=k\,e^{\lambda y}}$

ចំពោះ $\mathbf{y=0}$ គេបាន $\mathbf{f(0)=k=1}$ (ព្រោះ $\mathbf{f(0)=1}$)

ដូចនេះ $\mathbf{f(x)=e^{\lambda x}}$ ជាអនុគមន៍ត្រូវរក ។

លំហាត់ទី៧

ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 = \frac{21}{16}$ និងចំពោះ $n \geq 2 : 2a_n - 3a_{n-1} = \frac{3}{2^{n+1}}$

គេយក m ជាចំនួនគត់មួយដែល $m \geq 2$ ។ ចូរបង្ហាញថាចំពោះ $n \leq m$

យើងបាន $\left(a_n + \frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}} \left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < \frac{m^2-1}{m-n+1}$?

(China National Olympiad 2005)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\left(a_n + \frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}} \left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < \frac{m^2-1}{m-n+1}$

គេមាន $2a_n - 3a_{n-1} = \frac{3}{2^{n+1}}$

នាំឱ្យ $2^n a_n - 3.2^{n-1} a_{n-1} = \frac{3}{4}$

ឬ $\left(\frac{2}{3}\right)^n a_n - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} a_{n-1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3^n}$

គេបាន $\sum_{k=2}^{n} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^k a_k - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} a_{k-1}\right] = \frac{3}{4} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{3^k}\right)$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n a_n - \frac{2}{3}a_1 = \frac{3}{4}\times\frac{1}{3^2}.\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n a_n - \frac{2}{3}.\frac{21}{16} = \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

គេទាញបាន $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{2^{n+3}}$ ឬ $a_n + \frac{3}{2^{n+3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

តាង $P = \left(a_n + \frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}}\left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)$

គេបាន $P = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)$

គេមាន $\frac{m^2-1}{m-n+1} = \frac{(m+1)(m-1)}{(m+1)-n} = \frac{m-1}{1-\frac{n}{m+1}}$

ដើម្បីស្រាយឱ្យឃើញថា $P < \frac{m^2-1}{m-n+1}$

យើងត្រូវស្រាយឱ្យឃើញថា $(1-\frac{n}{m+1})P < m-1$

តាមវិសមភាព **Bernoully** គេមាន

$$1-\frac{n}{m+1}<(1-\frac{1}{m+1})^n=\left(\frac{m}{m+1}\right)^n=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{m}}\right)^n$$

នាំឱ្យ $\left(1-\frac{n}{m+1}\right)^m<\left(\frac{1}{1+\frac{1}{m}}\right)^{mn}=\left[\frac{1}{(1+\frac{1}{m})^m}\right]^n$

ចំពោះគ្រប់ $m\geq 2$ តាមទ្វេធាញូតុន គេមាន :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{1}{m}C_m^1+\frac{1}{m^2}C_m^2+....+\frac{1}{m^m}C_m^m$$

នោះ $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\geq 1+\frac{1}{m}C_m^1+\frac{1}{m^2}C_m^2=\frac{5}{2}-\frac{1}{2m}\geq\frac{9}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$

គេទាញបាន $\left(1-\frac{n}{m+1}\right)^m<\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$ ឬ $1-\frac{n}{m+1}<\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n}{m}}$

គេទាញ $\left(1-\frac{n}{m+1}\right)P<\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n}{m}}P$

តែ $P=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)$

គេបាន $(1-\frac{n}{m+1})P<\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}(m-1)}\right)$

ឧបមាថា $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}(m-1)}\right) < m-1$ ពិត

ដោយតាង $u=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}$ នោះ $u(m-u^{m-1}) < m-1$

សមមូល $mu-u^{m}-m+1<0$

$$m(u-1)-(u^{m}-1)<0$$

$$(u-1)[m-(u^{m-1}+....+u+1)]<0$$

ដោយ $m\geq n$ & $m\geq 2$ នោះ $0<u=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}<1$

នាំឱ្យ $(u-1)[m-(u^{m-1}+....+u+1)]<0$ ពិត

ដូចនេះ $\left(a_n+\frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)<\frac{m^2-1}{m-n+1}$

លំហាត់ទី៨

គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=3$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2}\geq\frac{3}{2}$

(Croatia Team Selection Tests 2011)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2}\geq\frac{3}{2}$

គេមាន $\frac{a^2}{a+b^2}=\frac{a(a+b^2)-ab^2}{a+b^2}=a-\frac{ab^2}{a+b^2}\quad(1)$

ដូចគ្នាដែរ $\frac{b^2}{b+c^2}=b-\frac{bc^2}{b+c^2}(2)\ ;\ \frac{c^2}{c+a^2}=c-\frac{ca^2}{c+a^2}\ (3)$

តាង $S=\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2}$ ។ បូកវិសមភាព $(1),(2)\,\&\,(3)$

គេបាន $S=3-(\frac{ab^2}{a+b^2}+\frac{bc^2}{b+c^2}+\frac{ca^2}{c+a^2})$

ដើម្បីស្រាយថា $S\geq\frac{3}{2}$ នោះយើងនឹងស្រាយថា :

$$\frac{ab^2}{a+b^2}+\frac{bc^2}{b+c^2}+\frac{ca^2}{c+a^2}=3-S\leq 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$ ។

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $a+b^2\geq 2b\sqrt{a}=\frac{2ab^2}{b\sqrt{a}}$

គេទាញ $\frac{ab^2}{a+b^2} \le \frac{b\sqrt{a}}{2}$ ហើយ $\frac{bc^2}{b+c^2} \le \frac{c\sqrt{b}}{2}$, $\frac{ca^2}{c+a^2} \le \frac{a\sqrt{c}}{2}$

ហេតុនេះ $\frac{ab^2}{a+b^2} + \frac{bc^2}{b+c^2} + \frac{ca^2}{c+a^2} \le \frac{1}{2}(a\sqrt{c} + b\sqrt{a} + c\sqrt{b})$ (*)

តាមវិសមភាព **Cauchy – Schwarz** គេមាន :

$$(a\sqrt{c} + b\sqrt{a} + c\sqrt{b})^2 \le (a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$(a\sqrt{c} + b\sqrt{a} + c\sqrt{b})^2 \le 3(ab+bc+ca)$$

ហើយ $(ab+bc+ca)^2 \le (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+a^2)$

$$(ab+bc+ca)^2 \le (a^2+b^2+c^2)^2$$

$$ab+bc+ca \le a^2+b^2+c^2$$

$$ab+bc+ca \le (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$$

$$3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2 = 9$$

គេទាញ $(a\sqrt{c} + b\sqrt{a} + c\sqrt{b})^2 \le 3(ab+bc+ca) \le 9$

នាំឱ្យ $a\sqrt{c} + b\sqrt{a} + c\sqrt{b} \le 3$ (**)

តាមវិសមភាព (*) & (**) គេទាញបាន :

$\frac{ab^2}{a+b^2} + \frac{bc^2}{b+c^2} + \frac{ca^2}{c+a^2} \le \frac{3}{2}$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{a^2}{a+b^2} + \frac{b^2}{b+c^2} + \frac{c^2}{c+a^2} \ge \frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឱ្យ a,b,c ជាជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}+\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)}\geq ab+bc+ca$$

(Greece National Olympiad 2007)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា :

$$\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}+\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)}\geq ab+bc+ca$$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$ គេមាន :

$$\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}+a(a+b-c)\geq 2(c+a-b)^2$$

គេទាញ $\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}\geq 2(c+a-b)^2-a(a+b-c)$

ឬ $\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}\geq a^2+2b^2+2c^2+5ac-5ab-4bc \quad (1)$

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន :

$$\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}\geq 2a^2+b^2+2c^2+5ab-5bc-4ac \quad (2)$$

$$\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)}\geq 2a^2+2b^2+c^2+5bc-5ac-4ab \quad (3)$$

បូកវិសមភាព **(1) , (2) & (3)** គេបាន :

$$\mathbf{S \ge 5(a^2+b^2+c^2)-4(ab+bc+ca) \ge ab+bc+ac}$$ ពិត

ដូចនេះ $\mathbf{S=\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}+\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)} \ge ab+bc+ca}$ ។

លំហាត់ទី១០

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំណត់ពី $(0,+\infty)$ ទៅ IR ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$f(x)+f(y)=f(xy)$ គ្រប់ $x>0, y>0$ និង $f'(1)=\lambda$ ។

ចូរកំណត់រកអនុគមន៍ $y=f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់រកអនុគមន៍ $y=f(x)$

គេមាន $f(x)+f(y)=f(xy)$ គ្រប់ $x>0, y>0$

យក $y=0$ គេបាន $f(x)+f(1)=f(x)$ នាំឱ្យ $f(1)=0$

ធ្វើដេរីវេធៀបនឹង x ក្នុងសមភាព $f(x)+f(y)=f(xy)$ ដោយចាត់ទុក y

ជាអថេរមិនអាស្រ័យនឹង x គេបាន $f'(x)=yf'(xy)$

យក $x=1$ គេបាន $f'(1)=yf'(y)$ ដោយ $f'(1)=\lambda$ នោះ $f'(y)=\dfrac{\lambda}{y}$

គេទាញបាន $f(y)=\int \dfrac{\lambda}{y}dy=\lambda\ln|y|+k$

យក $y=1$ នោះ $f(1)=k=0$ ព្រោះ $f(1)=0$ ។

ហេតុនេះ $f(y)=\lambda\ln|y|=\lambda\ln y$ គ្រប់ $y>0$

ដូចនេះ $f(x)=\lambda.\ln x$ ជាអនុគមន៍ត្រូវរក ។

លំហាត់ទី១១

គេកំណត់ចំនួន $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ ដូចខាងក្រោម :

$$a_0 = \frac{1}{2}; a_{k+1} = a_k + \frac{a_k^2}{n} \quad (n > 1, k = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

ចូរបង្ហាញថា $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$ ។

(IMO Longlists 1980)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$

គេមាន $a_{k+1} = a_k + \frac{a_k^2}{n} = \frac{a_k(n + a_k)}{n}$

គេបាន $\frac{1}{a_{k+1}} = \frac{n}{a_k(a_k + n)} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_k + n}$

ឬ $\frac{1}{a_k + n} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}$

ហេតុនេះ $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k + n} = \sum_{k=0}^{n-1} (\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}) = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} = 2 - \frac{1}{a_n}$ (*)

គេមាន $a_0 = \frac{1}{2} > 0$ ពិត ។ ឧបមាថា $a_k > 0$ ពិត

តាម $a_{k+1} = a_k + \frac{a_k^2}{n}$ គេទាញបាន $a_{k+1} > 0$ ពិត

ដូចនេះ $a_k > 0$ នោះ $a_k + n > n$ ឬ $\frac{1}{a_k + n} < \frac{1}{n}$,$\forall n > 1$

គេបាន $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k + n} < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}}_{(n)} = \frac{n}{n} = 1$

តាម (*) គេទាញបាន $2 - \frac{1}{a_n} < 1$ នាំឱ្យ $a_n < 1$ (i)

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $a_n < 1$ នោះ $a_k < 1$ ឬ $a_k + n < n + 1$

ឬ $\frac{1}{a_k + n} > \frac{1}{n+1}$ គ្រប់ $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ ។

គេបាន $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k + n} > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

ដោយពិនិត្យឃើញថាគ្រប់ $n > 1$ គេមាន $\frac{n}{n+1} - \frac{n-2}{n-1} = \frac{2}{n^2 - 1} > 0$

នោះគេទាញបាន $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k + n} > \frac{n}{n+1} > \frac{n-2}{n-1}$

តាម (*) គេទាញបាន $2 - \frac{1}{a_n} > \frac{n-2}{n-1}$

ឬ $\frac{1}{a_n} < 2 - \frac{n-2}{n-1} = \frac{n}{n-1}$ នោះ $a_n > \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ (ii)

តាម (i) & (ii) គេទាញបាន $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$ ។

ដូចនេះ $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ និង មានដេរីវេលើ IR ដែលចំពោះគ្រប់ $x,y \in IR$ គេមានទំនាក់ទំនង $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$ និង $f(x)\neq \pm 1$ គ្រប់ x ។

ចូរកំណត់អនុគមន៍ $y=f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់អនុគមន៍ $y=f(x)$

គេមាន $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$

យក $y=0$ គេបាន $f(x)=\frac{f(x)+f(0)}{1+f(x)f(0)}$

ឬ $f(x)+f^2(x)f(0)=f(x)+f(0)$

ឬ $f(0)[f^2(x)-1]=0$ គេទាញបាន $f(0)=0$ ឬ $f(x)=\pm 1$

ដោយតាមសម្មតិកម្ម $f(x)\neq \pm 1$ នោះ $f(0)=0$ ។

ធ្វើដេរីវេធៀបនឹង x ក្នុងសមភាព $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$

ដោយចាត់ទុក y ជាអថេរមិនអាស្រ័យនឹង x គេបាន :

$$f'(x+y)=\frac{f'(x)[1+f(x)f(y)]-f'(x)f(y)[f(x)+f(y)]}{[1+f(x)f(y)]^2}$$

$$f'(x+y)=\frac{f'(x)[1-f^2(y)]}{[1+f(x)f(y)]^2}$$

យក $x=0$ គេបាន $f'(y)=\dfrac{f'(0)[1-f^2(y)]}{[1+f(0)f(y)]^2}$ ដោយ $f(0)=0$

គេបាន $f'(y)=f'(0)[1-f^2(y)]$ តាង $f'(0)=\lambda$

គេបាន $\dfrac{f'(y)}{1-f^2(y)}=\lambda$ (ព្រោះ $f(y)\neq\pm1$)

ធ្វើអាំងតេក្រាលធៀបនឹង y លើអង្គទាំងពីរនៃសមីការខាងលើគេបាន :

$$\int\frac{f'(y)dy}{1-f^2(y)}=\int\lambda dy=\lambda y+k$$

តាង $z=f(y)$ នោះ $dz=f'(y)dy$

គេបាន $\displaystyle\int\frac{f'(y)dy}{1-f^2(y)}=\int\frac{dz}{1-z^2}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right)dz$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{1-z}+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{1+z}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|1-z|+\frac{1}{2}\ln|1+z|$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-z}{1+z}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-f(y)}{1+f(y)}\right|$$

គេទាញ $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1-f(y)}{1+f(y)}\right|=\lambda y+k$

ចំពោះ $y=0$ គេបាន $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1-f(0)}{1+f(0)}\right|=k$ នាំឱ្យ $k=0$ ព្រោះ $f(0)=0$

ហេតុនេះ $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1-f(y)}{1+f(y)}\right|=\lambda y$

គេទាញបាន $\dfrac{1-f(y)}{1+f(y)}=e^{2\lambda y}$ **(1)** ឬ $\dfrac{1-f(y)}{1+f(y)}=e^{-2\lambda y}$ **(2)**

តាម **(1)** គេបាន $1-f(y)=e^{2\lambda y}+f(y)e^{2\lambda y}$

នាំឱ្យ $f(y)=\dfrac{1-e^{2\lambda y}}{1+e^{2\lambda y}}$ ។

តាម **(2)** គេបាន $1-f(y)=e^{-2\lambda y}+f(y)e^{-2\lambda y}$

នាំឱ្យ $f(y)=\dfrac{1-e^{-2\lambda y}}{1+e^{-2\lambda y}}$ ។

ដូចនេះ $f(x)=\dfrac{1-e^{2\lambda x}}{1+e^{2\lambda x}}$ ឬ $f(x)=\dfrac{1-e^{-2\lambda x}}{1+e^{-2\lambda x}}$ ដែល $\lambda=f'(0)$ ។

លំហាត់ទី១៣

ចូរបង្ហាញថា :

$$\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \ge 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b)$$

ចំពោះគ្រប់ a, b, c ធំជាងមួយ ។

(Malaysia National Olympiad 2010)

ដំណោះស្រាយ

ការបង្ហាញ :

តាង $A = \log_a bc + \log_b ca + \log_c ab$

និង $B = 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b)$

ហើយយក $x = \ln a$, $y = \ln b$, $z = \ln c$

ចំពោះ $a, b, c > 1$ នោះ $x, y, z > 0$

តាមរូបមន្តប្តូរគោល $\log_q p = \dfrac{\ln p}{\ln q}$ គេបាន :

$$A = \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} = x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + y\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) + z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

$$B = 4\left(\frac{z}{x+y} + \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x}\right) = \frac{4x}{y+z} + \frac{4y}{z+x} + \frac{4z}{x+y}$$

តាមវិសមភាព $\mathbf{AB-GM}$ គ្រប់ $\mathbf{u\,,v>0 : u+v\geq 2\sqrt{uv}}$

ឬ $\mathbf{(u+v)^2\geq 4uv}$ ឬ $\mathbf{\frac{u+v}{uv}\geq\frac{4}{u+v}}$ ឬ $\mathbf{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\geq\frac{4}{u+v}}$

គេទាញ $\mathbf{x(\frac{1}{y}+\frac{1}{z})\geq\frac{4x}{y+z};y(\frac{1}{z}+\frac{1}{x})\geq\frac{4y}{z+x};z(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\geq\frac{4z}{x+y}}$

បូកវិសមភាពនេះគេបាន $\mathbf{A\geq B}$ ពិត ។

ដូចនេះ

$$\mathbf{\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab\geq 4(\log_{ab} c+\log_{bc} a+\log_{ca} b)}$$

លំហាត់ទី១៤

គេឱ្យរង្វង់ផ្ចិត **O** កាំ **r** និងត្រីកោណ **ABC** ប្រែប្រួលចារឹកក្រៅរង្វង់ ។ បន្ទាត់កាត់តាម **O** កាត់ជ្រុង **AB** និង **AC** រៀងគ្នាត្រង់ **M** និង **N** ។ កំណត់ទីតាំងចំណុច **A** និងអង្កត់ **[MN]** ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ **AMN** មានតម្លៃតូចបំផុត ?

(ប្រឡងសិស្សពូកែប្រចាំរាជធានីភ្នំពេញ ២០០៩)

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ទីតាំងចំណុច **A** និងអង្កត់ **[MN]**

តាង S_{AMN} ជាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ **AMN** ហើយ **A', B' , C'** ជាចំណោលកែងនៃ **O** លើជ្រុង BC, CA, AB រៀងគ្នា ។

យើងបាន :

$$S_{AMN} = \frac{1}{2}AM.AN.\sin A = \frac{1}{2}r(AM + AN)$$

គេទាញបាន $AM.AN.\sin A = r(AM + AN)$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេមាន $AM + AN \geq 2\sqrt{AM.AN}$

គេបាន $\mathbf{AM.AN.\sin A \geq 2r\sqrt{AM.AN}}$

ឬ $\mathbf{AM^2.AN^2.\sin^2 A \geq 4r^2.AM.AN}$

គេទាញបាន $\mathbf{AM.AN.\sin A \geq \dfrac{4r^2}{\sin A}}$

ហេតុនេះ $\mathbf{S_{AMN} \geq \dfrac{4r^2}{\sin A}}$

ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ $\mathbf{AMN}$ មានតម្លៃតូចបំផុតលុះត្រាតែ $\mathbf{\sin A = 1}$

គេទាញបាន $\mathbf{A = 90^o}$ ។

ក្នុងករណីនេះធ្វើឱ្យវិសមភាព $\mathbf{AM + AN \geq 2\sqrt{AM.AN}}$ ក្លាយជាសមភាព

គឺ $\mathbf{AM = AN}$ ហេតុនេះ $\mathbf{AMN}$ គឺជាត្រីកោណសមបាតកំពូល ។

ដោយ $\mathbf{OA}$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ $\mathbf{\angle BAC}$ នោះ $\mathbf{OA \perp MN}$

ហេតុនេះ $\mathbf{OM = ON}$ នាំឱ្យ $\mathbf{MN = 2.OM}$

ក្នុងត្រីកោណកែង $\mathbf{OMC'}$ គេមាន $\mathbf{\sin\angle OMC' = \dfrac{OC'}{OM} = \dfrac{r}{OM}}$

ដោយ $\mathbf{\angle OMC' = 45^o}$ នោះ $\mathbf{OM = \sqrt{2}\ r}$

គេទាញបាន $\mathbf{MN = 2\sqrt{2}\,r}$ ។

សន្និដ្ឋាន :

ដោយមុំ $\mathbf{\angle MAN = 90^o}$ នោះចំនុច $\mathbf{M}$ គឺជាកន្លះរង្វង់មានផ្ចិត $\mathbf{O}$ និងមាន

វិជ្ឈមាត្រ $\mathbf{MN = 2\sqrt{2}\,r}$ ។

លំហាត់ទី១៥

គេតាង α,β,γ ជារង្វាស់មុំក្នុងត្រីកោណ **ABC** មួយដែលមានបរិមាត្រ **2p** និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ **R** ។

a/ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\geq 3\left(9.\frac{R^2}{p^2}-1\right)$

b/ តើពេលណាទើបគេបានសមភាព ?

(Morocco National Olympiad 2011)

ដំណោះស្រាយ

a/ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\geq 3\left(9.\frac{R^2}{p^2}-1\right)$

គេមាន $\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}=3+\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma$

យើងនឹងស្រាយថា $\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}\geq\frac{27R^2}{p^2}$

តាមវិសមភាព **Cauchy – Schwarz** គេមាន :

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right)^2\quad(1)$$

ដោយប្រើ $\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\frac{a_3^2}{b_3}\geq\frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{b_1+b_2+b_3}$

គេបាន $\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\sin\beta}+\dfrac{1}{\sin\gamma}\ge\dfrac{9}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$

តាមទ្រឹស្ដីបទស៊ីនុសអនុវត្តន៍ក្នុង $\Delta\,ABC$ គេបាន :

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a+b+c}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=2R$$

គេទាញ $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\dfrac{a+b+c}{2R}=\dfrac{p}{R}$

ហេតុនេះ $\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\sin\beta}+\dfrac{1}{\sin\gamma}\ge\dfrac{9}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=\dfrac{9R}{p}$ (2)

តាម (1) & (2) គេទាញបាន :

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}\ge\frac{1}{3}\times\frac{81R^2}{p^2}=\frac{27R^2}{p^2}$$ ពិត

ដូចនេះ $\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\ge 3\left(9.\dfrac{R^2}{p^2}-1\right)$ ។

b / វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ $\dfrac{1}{\sin\alpha}=\dfrac{1}{\sin\beta}=\dfrac{1}{\sin\gamma}$

គេទាញបាន $\alpha=\beta=\gamma$ នាំឱ្យ ΔABC ជាត្រីកោណសមង្ស័ ។

លំហាត់ទី១៦

គេឱ្យម៉ាទ្រីស $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{bmatrix}$ និង $\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

បង្ហាញថាមានស្វ៊ីតចំនួនពិតពីរ $(\mathbf{u_n})$ និង $(\mathbf{v_n})$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$\forall \mathbf{n}\in \mathbf{IN}:\ \mathbf{A^n}=\mathbf{u_n.I}+\mathbf{v_n.A}$ ដែលគេនឹងបញ្ជាក់តួទូទៅ $\mathbf{u_n}$ និង $\mathbf{v_n}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\forall \mathbf{n}\in \mathbf{IN}:\ \mathbf{A^n}=\mathbf{u_n.I}+\mathbf{v_n.A}$

គេមាន $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{bmatrix}=0.\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+1.\begin{bmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{bmatrix}$

គេបាន $\mathbf{A^1}=\mathbf{u_1.I}+\mathbf{v_1.A}$ ពិតចំពោះ $\mathbf{n}=1$ ដែល $\mathbf{u_1}=0$, $\mathbf{v_1}=1$ ។

$$\mathbf{A^2}=\mathbf{A.A}=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&7&7\\7&11&7\\7&7&11\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A^2}=\begin{bmatrix}-10&0&0\\0&-10&0\\0&0&-10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}21&7&7\\7&21&7\\7&7&21\end{bmatrix}=-10.\mathbf{I}+7.\mathbf{A}$$

គេបាន $\mathbf{A^2}=\mathbf{u_2.I}+\mathbf{v_2.A}$ ពិតចំពោះ $\mathbf{n}=2$ ។

ឧបមាថាវាពិតចំពោះគ្រប់ $\mathbf{n \in IN}$ គឺ $\mathbf{A^n = u_n.I + v_n.A}$

យើងនឹងស្រាយថា $\mathbf{A^{n+1} = u_{n+1}.I + v_{n+1}.A}$ ពិត ។

គេមាន $\mathbf{A^{n+1} = A.A^n = A.(u_n.I + v_n.A) = u_n.A.I + v_n.A^2}$

ដោយ $\mathbf{A.I = A}$ និង $\mathbf{A^2 = u_2.I + v_2.A}$

គេបាន $\mathbf{A^{n+1} = u_n.A + v_n(u_2.I + v_2.A)}$

$$\mathbf{A^{n+1} = u_2 v_n.I + (u_n + v_2 v_n).A}$$

$$\mathbf{A^{n+1} = u_{n+1}.I + v_{n+1}.A} \text{ ពិត}$$

ដែល $\mathbf{u_{n+1} = u_2 v_n = -10.v_n}$ និង $\mathbf{v_{n+1} = u_n + v_2 v_n = u_n + 7v_n}$

ដូចនេះ $\mathbf{\forall n \in IN :\ A^n = u_n.I + v_n.A}$

ដែល (u_n) និង (v_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតពីរកំណត់ដោយ $u_1 = 0$, $v_1 = 1$

និង $u_{n+1} = -10.v_n$, $v_{n+1} = u_n + 7v_n$ គ្រប់ $n \in IN$ ។

បញ្ជាក់តួទូទៅ $\mathbf{u_n}$ *និង* $\mathbf{v_n}$ *ជាអនុគមន៍នៃ* $\mathbf{n}$ *:*

គេមាន $\mathbf{u_{n+1} = -10.v_n}$, $\mathbf{v_{n+1} = u_n + 7v_n}$ គ្រប់ $\mathbf{n \in IN}$

តាម $\mathbf{v_{n+1} = u_n + 7v_n}$ គេបាន $\mathbf{v_{n+2} = u_{n+1} + 7v_{n+1}}$

តែ $\mathbf{u_{n+1} = -10v_n}$ នោះ $\mathbf{v_{n+2} = 7v_{n+1} - 10v_n}$

សមីការសម្គាល់នៃ $\mathbf{v_{n+2} = 7v_{n+1} - 10v_n}$ គឺ $\mathbf{r^2 = 7r - 10}$

ឬ $\mathbf{r^2 - 7r + 10 = 0}$ មានឫស $\mathbf{r_1 = 2}$, $\mathbf{r_2 = 5}$ ។

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $\begin{cases} a_n = v_{n+1} - 2v_n \\ b_n = v_{n+1} - 5v_n \end{cases}$

គេបាន $\begin{cases} a_{n+1} = v_{n+2} - 2v_{n+1} = 7v_{n+1} - 10v_n - 2v_{n+1} = 5a_n \\ b_{n+1} = v_{n+2} - 5v_{n+1} = 7v_{n+1} - 10v_n - 5v_{n+1} = 2b_n \end{cases}$

នាំឱ្យ (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង 5 និង 2 រៀងគ្នា ។

គេបាន $a_n = a_1.5^{n-1}$ និង $b_n = b_1.2^{n-1}$ ។

ដោយ $a_1 = v_2 - 2v_1 = 7 - 2 = 5$ និង $b_1 = v_2 - 5v_1 = 7 - 2 = 2$

គេទាញ $a_n = 5.5^{n-1} = 5^n$ និង $b_n = 2.2^{n-1} = 2^n$ ។

គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} v_{n+1} - 2v_n = 5^n \\ v_{n+1} - 5v_n = 2^n \end{cases}$

ដកសមីការពីរនេះគេបាន $3v_n = 5^n - 2^n$ នាំឱ្យ $v_n = \dfrac{5^n - 2^n}{3}$

ហើយ $u_{n+1} = -10v_n = -\dfrac{10}{3}(5^n - 2^n)$

នាំឱ្យ $u_n = -\dfrac{10}{3}(5^{n-1} - 2^{n-1})$ ។

ដូចនេះ $u_n = -\dfrac{10}{3}(5^{n-1} - 2^{n-1})$ និង $v_n = \dfrac{5^n - 2^n}{3}$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ជាប់ និង មានដេរីវេលើ IR ដែលចំពោះគ្រប់ $x,y\in IR$

គេមានទំនាក់ទំនង $f(\frac{x+y}{2})=\sqrt{f(x)f(y)}$ និង $f(x)>0$ ។

ចូរកំណត់អនុគមន៍ $y=f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់អនុគមន៍ $y=f(x)$

គេមានទំនាក់ទំនង $f(\frac{x+y}{2})=\sqrt{f(x)f(y)}$

ដោយ $f(x)>0$ នោះ $f(y)>0$ និង $f(\frac{x+y}{2})>0$

តាងអនុគមន៍ $g(x)=\ln f(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in IR$

គេបាន $g(\frac{x+y}{2})=\ln\left[f(\frac{x+y}{2})\right]$ ដោយ $f(\frac{x+y}{2})=\sqrt{f(x)f(y)}$

ហេតុនេះ $g(\frac{x+y}{2})=\ln\left[\sqrt{f(x)f(y)}\right]=\frac{1}{2}\left[\ln f(x)+\ln f(y)\right]$

ឬ $g(\frac{x+y}{2})=\frac{1}{2}\left[g(x)+g(y)\right]$

ធ្វើដេរីវេធៀបនឹង x ក្នុងសមភាព $g(\frac{x+y}{2})=\frac{1}{2}\left[g(x)+g(y)\right]$

ដោយចាត់ទុក y ជាអថេរមិនអាស្រ័យនឹង x គេបាន :

$$\frac{1}{2}g'(\frac{x+y}{2})=\frac{1}{2}g'(x) \text{ ឬ } g'(\frac{x+y}{2})=g'(x)$$

យក $x=0$ គេបាន $g'(\frac{y}{2})=g'(0)$

ធ្វើអាំងតេក្រាល $\int g'(\frac{y}{2})dy=\int g'(o)dy=g'(0)y+k$

តាង $z=\frac{y}{2}$ នោះ $dy=2dz$

គេបាន $2\int g'(z)dz=g'(0)y+k$

$$2g(z)=g'(0)y+k \text{ ឬ } g(z)=\frac{1}{2}g'(0)y+\frac{k}{2}=g'(0)z+\frac{k}{2}$$

យក $a=g'(0)$ និង $b=\frac{k}{2}$ គេបាន $g(z)=az+b$

ឬ $g(x)=ax+b$ ដោយ $g(x)=\ln f(x)$

គេបាន $\ln f(x)=ax+b$ នាំឱ្យ $f(x)=e^{ax+b}$

ដូចនេះ $f(x)=e^{ax+b}$ ដែល $a,b\in IR$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឱ្យចតុកោណប៉ោង $\mathbf{ABCD}$ មួយមានជ្រុង$\mathbf{AB = a\,, BC = b\,,}$
$\mathbf{CD = c}$ និង $\mathbf{DA = d}$ ។

$\mathbf{P}$ ជាចំនុចមួយនៅក្នុងចតុកោណហើយ $\mathbf{K\,, L\,, M\,, N}$ ជាចំណោលកែង
នៃចំនុច $\mathbf{P}$ លើជ្រុង $\mathbf{[AB],[BC],[CD],[DA]}$ រៀងគ្នា ។

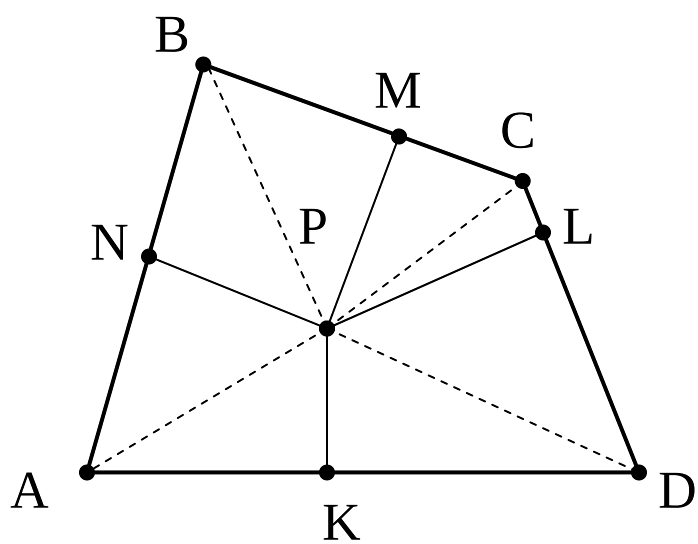
គេដឹងថា $\mathbf{\frac{PK}{AB} = \frac{PL}{BC} = \frac{PM}{CD} = \frac{PN}{DA} = h}$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $\mathbf{h = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$ ដែល $\mathbf{S}$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃ
ចតុកោណ $\mathbf{ABCD}$ ។

ខ.ចូរបង្ហាញថា $\mathbf{h \le \frac{1}{2}}$

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $\mathbf{h = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$



គេមាន $\mathbf{S = S_{PAB} + S_{PBC} + S_{PCD} + S_{PDA}}$

$$\mathbf{= \frac{1}{2}a.PK + \frac{1}{2}b.PL + \frac{1}{2}c.PM + \frac{1}{2}d.PN}$$

ដោយ $\mathbf{\frac{PK}{AB} = \frac{PL}{BC} = \frac{PM}{CD} = \frac{PN}{DA} = h}$

គេទាញ $\mathbf{PK = ah\,, PL = bh\,, PM = ch\,, PN = dh}$

គេបាន $\mathbf{S = \frac{1}{2}a^2h + \frac{1}{2}b^2h + \frac{1}{2}c^2h + \frac{1}{2}d^2h}$

ដូចនេះ $\mathbf{h = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$ ។

ខ.បង្ហាញថា $\mathbf{h \le \frac{1}{2}}$

គេមាន $\mathbf{S = S_{ABC} + S_{CDA} = \frac{1}{2}(ab\sin B + cd\sin D)}$

ដោយ $\mathbf{\sin B \le 1}$ និង $\mathbf{\sin D \le 1}$ នោះគេបាន :

$\mathbf{S \le \frac{1}{2}(ab + cd)}$ ដោយ $\mathbf{ab \le \frac{a^2 + b^2}{2}}$; $\mathbf{cd \le \frac{c^2 + d^2}{2}}$

គេបាន $\mathbf{S \le \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}}$

តាមសម្រាយខាងលើ $\mathbf{h = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$

ដូចនេះ $\mathbf{h \le \frac{2(\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4})}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \frac{1}{2}}$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេឱ្យចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មួយមានជ្រុង $AB = a$, $BC = b$ $CD = c$ និង $DA = d$ ។ O ជាចំនុចមួយនៅក្នុងចតុកោណនេះដែល $\angle OAB = \angle OBC = \angle OCD = \angle ODA = \theta$ ($0 < \theta < 90^o$)

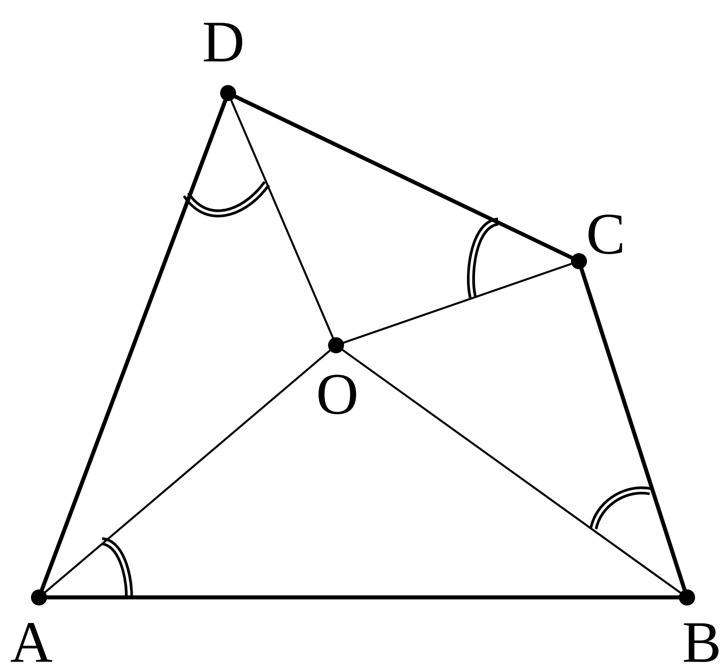
ក. ចូរស្រាយថា $\tan\theta = \dfrac{4S}{a^2+b^2+c^2+d^2}$

ដែល S ជាផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណ $ABCD$ ។

ខ. កំនត់ θ ដោយដឹងថា $\tan\theta$ មានតម្លៃធំបំផុត ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $\tan\theta = \dfrac{4S}{a^2+b^2+c^2+d^2}$



តាង $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$, $OD = t$ ។

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសក្នុង $\Delta OAB, \Delta OBC, \Delta OCD, \Delta ODA$:

$$y^2 = a^2 + x^2 - 2ax\cos\theta \quad (1)$$

$$z^2 = y^2 + b^2 - 2by\cos\theta \quad (2)$$

$$t^2 = z^2 + c^2 - 2zc\cos\theta \quad (3)$$

$$x^2 = t^2 + d^2 - 2td\cos\theta \quad (4)$$

បូកសមីការ $(1),(2),(3)\ \&\ (4)$ គេទាញបាន :

$$\cos\theta = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2(ax + by + cz + dt)} \quad (5)$$

ម្យ៉ាងទៀត $S = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{ODA}$

ឬ $S = \frac{1}{2}(ax + by + cz + dt)\sin\theta$

គេទាញ $\sin\theta = \frac{2S}{ax + by + cz + dt} \quad (6)$

ចែកទំនាក់ទំនង (6) និង (5) អង្គ និង អង្គគេបាន :

$$\tan\theta = \frac{4S}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$ ។

ខ. កំនត់ θ ដោយដឹងថា $\tan\theta$ មានតម្លៃធំបំផុត :

គេមាន $S = S_{ABC} + S_{CDA} = \frac{1}{2}(ab\sin B + cd\sin D)$

ដោយ $\sin B \le 1$ និង $\sin D \le 1$ នោះគេបាន :

$\mathbf{S \le \frac{1}{2}(ab + cd)}$ ដោយ $\mathbf{ab \le \frac{a^2 + b^2}{2}}$; $\mathbf{cd \le \frac{c^2 + d^2}{2}}$

គេបាន $\mathbf{S \le \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}}$

ដោយ $\mathbf{\tan\theta = \frac{4S}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$

គេទាញ $\mathbf{\tan\theta \le \frac{4\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}\right)}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = 1}$

ដូចនេះដើម្បីឱ្យ $\mathbf{\tan\theta}$ មានតម្លៃធំបំផុតលុះត្រាតែ $\mathbf{\theta = 45^o}$ ។

លំហាត់ទី២០

ចំពោះគ្រប់ $x;y\geq 0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព :

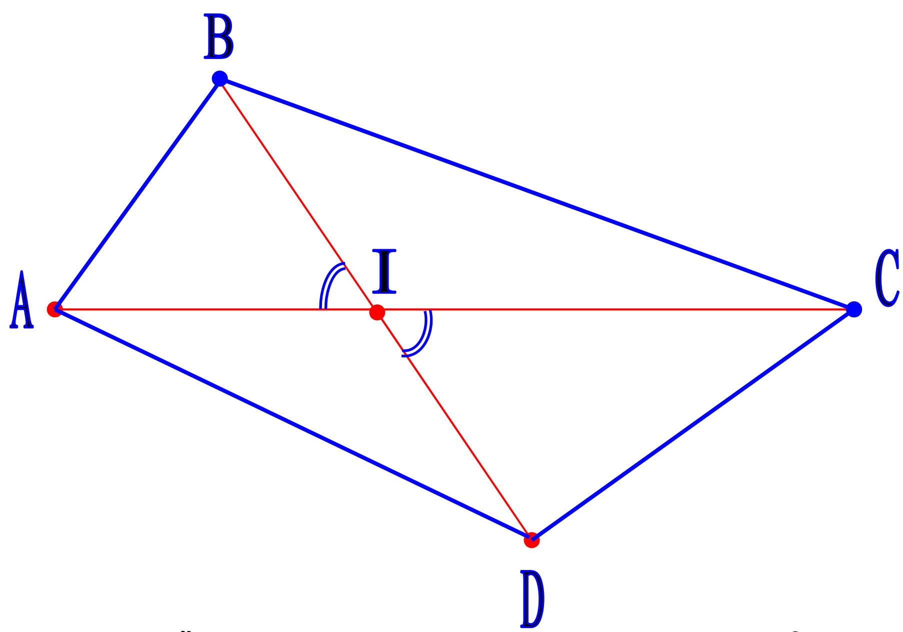
$$\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{y^2-y+1}+\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{y^2+y+1}\geq 2(x+y)$$

(Kazakhstan NMO 2010)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព :

$$\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{y^2-y+1}+\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{y^2+y+1}\geq 2(x+y)$$



ជ្រើសរើសចតុកោណប៉ោង **ABCD** មួយមានអង្កត់ទ្រូង **AC** និង **BD** ប្រសព្វ

គ្នាត្រង់ចំនុច $\mathbf{I}$ ដែល $\mathbf{IA = x}$, $\mathbf{IC = y}$, $\mathbf{IB = ID = 1}$

និង $\angle \mathbf{AIB} = \angle \mathbf{CID} = \mathbf{60^o}$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនូសគេបាន :

$$\mathbf{AB = \sqrt{x^2 - x + 1}} \ , \ \mathbf{CD = \sqrt{y^2 - y + 1}}$$
$$\mathbf{AD = \sqrt{x^2 + x + 1}} \ , \ \mathbf{BC = \sqrt{y^2 + y + 1}}$$

តាមទ្រឹស្តីបទអឺលែ $\mathbf{AC.BD \le AB.CD + AD.BC}$

ដោយ $\mathbf{AC = AI + IB = x + y}$, $\mathbf{BC = BI + IC = 2}$

ដូចនេះ

$$\mathbf{\sqrt{x^2 - x + 1}\sqrt{y^2 - y + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}\sqrt{y^2 + y + 1} \ge 2(x + y)}$$

លំហាត់ទី២១

គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$$

(USAMO 2003)

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$

របៀបទី១

តាង $T=\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}$

យក $s=a+b+c$ នោះកន្សោម T អាចសរសេរ :

$$T=\frac{(a+s)^2}{2a^2+(a-s)^2}+\frac{(b+s)^2}{2b^2+(b-s)^2}+\frac{(c+s)^2}{2c^2+(c-s)^2}$$

គេមាន $\frac{(a+s)^2}{2a^2+(a-s)^2}=\frac{a^2+2as+s^2}{3a^2-2as+s^2}$

$$=\frac{1}{3}.\frac{3a^2+6as+3s^2}{3a^2-2as+s^2}$$

$$=\frac{1}{3}(1+\frac{8as+2s^2}{3a^2-2as+s^2})$$

$$\frac{(a+s)^2}{2a^2+(a-s)^2}=\frac{1}{3}+\frac{8as+2s^2}{9a^2-6as+3s^2}=\frac{1}{3}+\frac{8as+2s^2}{(3a-s)^2+2s^2}$$

ដោយ $(3a-s)^2 \geq 0$ នោះ $(3a-s)^2+2s^2 \geq 2s^2$

ឬ $\frac{8as+2s^2}{(3a-s)^2+2s^2} \leq \frac{8as+2s^2}{2s^2}=1+\frac{4a}{s}=1+\frac{4a}{a+b+c}$

គេទាញ $\frac{(a+s)^2}{2a^2+(a-s)^2} \leq \frac{4}{3}+\frac{4a}{a+b+c}$ (1)

ស្រាយបំភ្លឺដូចគ្នាខាងលើដែរគេបាន :

$$\frac{(b+s)^2}{2b^2+(b-s)^2} \leq \frac{4}{3}+\frac{4b}{a+b+c} \quad (2)$$

$$\frac{(c+s)^2}{2c^2+(c-s)^2} \leq \frac{4}{3}+\frac{4c}{a+b+c} \quad (3)$$

បូកវិសមភាព $(1),(2)$ និង (3) គេបាន :

$$T \leq \frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4a+4b+4c}{a+b+c}=4+4=8$$

ដូចនេះ $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8$ ។

របៀបទី២

តាង $T=\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}$

យក $x=a+b$, $y=b+c$, $z=c+a$

គេបាន $\begin{cases} x+z=2a+b+c \\ x+y=2b+c+a \\ z+y=2c+a+b \end{cases}$ និង $\begin{cases} 2a=x+z-y \\ 2b=x+y-z \\ 2c=z+y-x \end{cases}$

កន្សោម T អាចសរសេរជា :

$$T=\frac{2(x+z)^2}{(x+z-y)^2+2y^2}+\frac{2(z+y)^2}{(z+y-x)^2+2x^2}+\frac{2(y+x)^2}{(y+x-z)^2+2z^2}$$

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy}-\text{Schwarz}$: $2(u^2+v^2)\ge(u+v)^2$

គេបាន $2(x+z-y)^2+2y^2\ge(x+z-y+y)^2=(x+z)^2$

$$2(x+z-y)^2+4y^2\ge(x+z)^2+2y^2$$

$$(x+z-y)^2+2y^2\ge\frac{1}{2}(x+z)^2+y^2$$

គេទាញ $\dfrac{2(x+z)^2}{(x+z-y)^2+2y^2}\le\dfrac{2(x+z)^2}{\frac{1}{2}(x+z)^2+y^2}=\dfrac{4}{1+\dfrac{2y^2}{(x+z)^2}}$

ដោយ $(x+z)^2\le 2(x^2+z^2)$ នាំឱ្យ $\dfrac{2y^2}{(x+z)^2}\ge\dfrac{y^2}{x^2+z^2}$

ឬ $1+\dfrac{2y^2}{(x+z)^2}\ge\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^2+z^2}$

គេទាញបាន $\dfrac{2(x+z)^2}{(x+z-y)^2+2y^2}\le\dfrac{4(x^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}$ **(1)**

ស្រាយបំភ្លឺដូចខាងលើដែរគេបាន :

$$\frac{2(z+y)^2}{(z+y-x)^2+2x^2} \le \frac{4(z^2+y^2)}{x^2+y^2+z^2} \quad (2)$$

$$\frac{2(y+x)^2}{(y+x-z)^2+2z^2} \le \frac{4(y^2+x^2)}{x^2+y^2+z^2} \quad (3)$$

បូកវិសមភាព **(1) , (2) , (3)** គេបាន :

$$T \le \frac{4(x^2+z^2)+4(z^2+y^2)+4(y^2+x^2)}{x^2+y^2+z^2} = 8$$

ដូចនេះ $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8$ ។

របៀបទី៣

តាង $T = \frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}$

គេមានសមភាព $(2u+v)^2 + 2(u-v)^2 = 3(2u^2+v^2)$

ដោយយក $u = a$ និង $v = b+c$ នោះគេបាន :

$$(2a+b+c)^2 + 2(a-b-c)^2 = 3\left(2a^2+(b+c)^2\right)$$

ឬ $(2a+b+c)^2 = 3\left(2a^2+(b+c)^2\right) - 2(a-b-c)^2$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $2a^2+(b+c)^2$ គេបាន :

យើងបាន $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} = 3 - \frac{2(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2}$

កន្សោម $\mathbf{T}$ អាចបំលែងជា :

$$T=9-2\left[\frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(b-a-c)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(c-a-b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\right]$$

ដើម្បីស្រាយថា $T\le 8$ យើងត្រូវស្រាយឱ្យឃើញថា :

$$S=\frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(b-a-c)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(c-a-b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\ge\frac{1}{2}$$

គេមាន $2a^2+(b+c)^2=2a^2+b^2+c^2+2bc$

ដោយ $2bc\le b^2+c^2$ នោះ $2a^2+(b+c)^2\le 2(a^2+b^2+c^2)$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $2b^2+(c+a)^2\le 2(a^2+b^2+c^2)$

ហើយ $2c^2+(a+b)^2\le 2(a^2+b^2+c^2)$

គេទាញ $S\ge\dfrac{(a-b-c)^2+(b-a-c)^2+(c-a-b)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$

ដោយកន្សោម $(a-b-c)^2+(b-a-c)^2+(c-a-b)^2$

ស្មើនឹង $3(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$

នោះ $S\ge\dfrac{3}{2}-\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$

គេមាន $\dfrac{a^2+b^2}{2}+\dfrac{b^2+c^2}{2}+\dfrac{c^2+a^2}{2}\ge ab+bc+ca$

ឬ $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ នាំឱ្យ $S\ge\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{1}{2}$ ពិត ។

របៀបទី៤

ស្រាយថា $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$

តាង $x=\frac{b+c}{a}$, $y=\frac{c+a}{b}$, $z=\frac{a+b}{c}$

ដែល $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=1$

វិសមភាពសមមូល $\frac{(2+x)^2}{2+x^2}+\frac{(2+y)^2}{2+y^2}+\frac{(2+z)^2}{2+z^2}\le 8$

យើងនឹងស្រាយថា $\frac{(2+u)^2}{2+u^2}-\frac{8}{3}\le\frac{1}{1+u}-\frac{1}{3}$ គ្រប់ $u>0$

គេមាន $\frac{(2+u)^2}{2+u^2}-\frac{8}{3}-\frac{1}{1+u}+\frac{1}{3}=-\frac{(u+5)(u-2)^2}{3(2+u^2)(1+u)}\le 0$ ពិត

ហេតុនេះ $\frac{(2+u)^2}{2+u^2}\le\frac{1}{1+u}-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}$ (*)

តាម (*) គេបាន :

$$\frac{(2+x)^2}{2+x^2}+\frac{(2+y)^2}{2+y^2}+\frac{(2+z)^2}{2+z^2}\le\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}-1+8$$

ដូចនេះ $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$

លំហាត់ទី២២

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\dfrac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \le \dfrac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c,d ។

(*វៀតណាម* 1962)

ដំណោះស្រាយ

គេមាន :

$$X=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}=\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}=\frac{abc+abd+acd+bcd}{(a+b)(c+d)}$$

និង $Y=\dfrac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}=\dfrac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}$

គេបាន $Y-X=\dfrac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}-\dfrac{abc+abd+acd+bcd}{(a+b)(c+d)}$

បន្ទាប់ពីតម្រូវភាគរួម រួចសម្រួលគេបាន :

$Y-X=\dfrac{(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+b+c+d)}\ge 0$ នាំឱ្យ $Y\ge X$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\dfrac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \le \dfrac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}$ ។

លំហាត់ទី២៣

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\geq\frac{4}{xy+yz+zx}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានខុសគ្នា x,y,z ។

(*វៀតណាម* 2008)

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\geq\frac{4}{xy+yz+zx}$

ដោយ x,y,z ជាចំនួនពិតខុសគ្នា និង មិនអវិជ្ជមាននោះគេអាចសន្មតយក

$z>y>x\geq 0$ ។

តាង $A=\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}$

និង $B=xy+yz+zx$ ។

យក $y=x+p$, $z=x+p+q$ ដែល $p>0,q>0$

គេបាន $A=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{(p+q)^2}$

និង $B=x(x+p)+(x+p)(x+p+q)+x(x+p+q)$

$=3x^2+2(2p+q)x+p^2+pq$

ដោយសារតែ $x\geq 0$ នោះ $B\geq p^2+pq=p(p+q)$

គេបាន $\mathbf{A\times B\ge\left[\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{(p+q)^2}\right]p(p+q)}$

$$\mathbf{=\frac{p+q}{p}+\frac{p(p+q)}{q^2}+\frac{p}{p+q}}$$

$$\mathbf{=1+\frac{q}{p}+\frac{p(p+q)}{q^2}+1-\frac{q}{p+q}}$$

$$\mathbf{=2+(\frac{q}{p}-\frac{q}{p+q})+\frac{p(p+q)}{q^2}}$$

$$\mathbf{=2+\frac{q^2}{p(p+q)}+\frac{p(p+q)}{q^2}}$$

ដោយ $\mathbf{\frac{q^2}{p(p+q)}+\frac{p(p+q)}{q^2}\ge 2\sqrt{\frac{q^2}{p(p+q)}.\frac{p(p+q)}{q^2}}=2}$

គេទាញបាន $\mathbf{A\times B\ge 2+2=4}$ នាំឱ្យ $\mathbf{A\ge\frac{4}{B}}$

ដូចនេះ $\mathbf{\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\ge\frac{4}{xy+yz+zx}}$ ។

វិសមភាពនេះក្លាយជាសមភាពលុះត្រាតែ $\mathbf{\begin{cases}3x^2+2(2p+q)x=0\\ p(p+q)=q^2\end{cases}}$

គេទាញបាន $\mathbf{x=0}$ និង $\mathbf{p(p+q)=q^2}$ ហើយ $\mathbf{y=p\,,z=p+q}$

នោះ $\mathbf{z-y=q}$ តាម $\mathbf{p(p+q)=q^2}$ គេទាញបាន $\mathbf{yz=(z-y)^2}$

នាំឱ្យ $\mathbf{z^2-3yz+y^2=0}$ ដោយ $\mathbf{z>y}$ នោះ $\mathbf{\frac{z}{y}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}$ ។

លំហាត់ទី២៤

ចូរកំណត់តួទូទៅនៃស៊ីតដែលកំណត់ដោយ :

$x_0 = 3, x_1 = 4$ និង $x_{n+1} = x_{n-1}^2 - nx_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតួតូទៅ x_n :

គេមាន

$$x_0 = 3 = 0 + 3$$

$$x_1 = 4 = 1 + 3$$

$$x_2 = {x_0}^2 - x_1 = 9 - 4 = 5 = 2 + 3$$

ឧបមាថា $x_{n-1} = n + 2$, $x_n = n + 3$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា $x_{n+1} = n + 4$

គេមាន $x_{n+1} = x_{n-1}^2 - nx_n$

$$= (n+2)^2 - n(n+3)$$

$$= n^2 + 4n + 4 - n^2 - 3n$$

$$= n + 4$$

ដូចនេះ $x_n = n + 3$ ។

លំហាត់ទី២៥

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{x}$ បើគេដឹងថា $\dfrac{8^x+27^x}{12^x+18^x}=\dfrac{7}{6}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនពិត $\mathbf{x}$:

គេមាន $\dfrac{8^x+27^x}{12^x+18^x}=\dfrac{7}{6}$ តាង $a=2^x$ និង $b=3^x$ ដែល $a>0, b>0$

សមីការក្លាយជា :

$$\frac{a^3+b^3}{a^2b+ab^2}=\frac{7}{6}$$

$$\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{ab(a+b)}=\frac{7}{6}$$

$$\frac{a^2-ab+b^2}{ab}=\frac{7}{6}$$

$$6a^2-6ab+6b^2=7ab$$

$$6a^2-13ab+6b^2=0$$

$$(2a-3b)(3a-2b)=0$$

គេទាញបាន $\dfrac{a}{b}=\dfrac{2}{3}$ ឬ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{2}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}$ ដោយ $\dfrac{a}{b}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}$

ដូចនេះ $x=-1$, $x=1$ ។

លំហាត់ទី២៦

ចូរគណនាផលបូក :

$$S_n = \frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+...+\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក S_n :

គេមាន $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+)!}$

តាង $a_k = \frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$

$$= \frac{k+2}{k![1+(k+1)+(k+1)(k+2)]}$$

$$= \frac{k+2}{k!(1+k+1+k^2+3k+2)}$$

$$= \frac{k+2}{k!(k+2)^2} = \frac{1}{k!(k+2)}$$

$$= \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{(k+2)-1}{(k+2)!}$$

$$= \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!}$$

ដូចនេះ $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!}$ ។

លំហាត់ទី២៧ (China 1983)

គេឱ្យ $\mathbf{f}$ ជាអនុគមន៍កំណត់លើចន្លោះ $[0,1]$ ដោយដឹងថា :

$f(0)=f(1)=1$ និង $|f(a)-f(b)|<|a-b|$

ចំពោះគ្រប់ $a\neq b$ ក្នុងចន្លោះ $[0,1]$ ។

ចូរបង្ហាញថា $|f(a)-f(b)|<\dfrac{1}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $|f(a)-f(b)|<\dfrac{1}{2}$

-ករណីទី១ :

ចំពោះ $|a-b|\leq\dfrac{1}{2}$ នោះគេបាន $|f(a)-f(b)|<|a-b|\leq\dfrac{1}{2}$ ពិត

-ករណីទី២ :

ចំពោះ $|a-b|>\dfrac{1}{2}$ នោះតាមលក្ខណៈឆ្លុះគេអាចសន្មតថា $a>b$

គេមាន $|f(a)-f(b)|=|f(a)-f(1)+f(0)-f(b)|$

តាមវិសមភាពត្រីកោណគេបាន :

$$|f(a)-f(b)|\leq|f(a)-f(1)|+|f(0)-f(b)|$$

$$|f(a)-f(b)|<|a-1|+|0-b|=1-a+b=1-(a-b)<\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $|f(a)-f(b)|<\dfrac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី២៨ (AIME 1988)

ចូរកំណត់គូនៃចំនួនគត់ (a,b) ដោយដឹងថា $ax^{17}+bx^{16}+1$

ចែកដាច់នឹង x^2-x-1 ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គូនៃចំនួនគត់ (a,b) :

តាង p និង q ជាឫសរបស់សមីការ $x^2-x-1=0$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត

គេបាន $p+q=1$ និង $pq=-1$ ។

ដើម្បីឱ្យ$ax^{17}+bx^{16}+1$ ចែកដាច់នឹង x^2-x-1 លុះត្រាតែ p និង q

ជាឫសរបស់សមីការ $ax^{17}+bx^{16}+1=0$ ដែរ ។

គេបាន $ap^{17}+bp^{16}=-1$ និង $aq^{17}+bq^{16}=-1$

គេទាញបាន $q^{16}(ap^{17}+bp^{16})=-q^{16}$

ឬ $ap+b=-q^{16}$ (ព្រោះ $pq=-1$)

ហើយ $p^{16}(aq^{17}+bq^{16})=-p^{16}$ ឬ $aq+b=-p^{16}$

ហេតុនេះ $(ap+b)-(aq+b)=p^{16}-q^{16}$

គេទាញបាន $a=\dfrac{p^{16}-q^{16}}{p-q}=(p+q)(p^2+q^2)(p^4+q^4)(p^8+q^8)$

ដោយ $p+q=1$ នោះ $p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=1+2=3$

$$p^4+q^4=(p^2+q^2)^2-2p^2q^2=9-2=7$$

$$p^8+q^8=(p^4+q^4)^2-2p^4q^4=49-2=47$$

ដូចនេះ $a = 1.3.7.47 = 987$ ។

ម្យ៉ាងទៀតតាម $ap^{17} + bp^{16} = -1$ និង $aq^{17} + bq^{16} = -1$

គេបាន $ap^{17} + bp^{16} = aq^{17} + bq^{16}$

គេទាញបាន $b = -\frac{p^{17} - q^{17}}{p^{16} - q^{16}}.a$ តែ $a = \frac{p^{16} - q^{16}}{p - q}$

នោះ $b = -\frac{p^{17} - q^{17}}{p - q} = -(p^{16} + p^{15}q + p^{14}q^2 + ... + q^{16})$

$$= -[(p^{16} + q^{16}) + pq(p^{14} + q^{14}) + p^2q^2(p^{12} + q^{12}) + ...$$

$$... + p^7q^7(p^2 + q^2) + p^8q^8]$$

$$= -[(p^{16} + q^{16}) - (p^{14} + q^{14}) + ... - (p^2 + q^2) + 1]$$

តាង $S_{2n} = p^{2n} + q^{2n}$ គ្រប់ $n \geq 1$ នោះ $S_2 = 3, S_4 = 7, S_8 = 47$

គេមាន $S_{2n+4} = p^{2n+4} + q^{2n+4}$

$$= (p^2 + q^2)(p^{2n+2} + q^{2n+2}) - p^2q^2(p^{2n} + q^{2n})$$

$$= 3S_{2n+2} - S_n$$

យកតម្លៃ $n = 3,4,5,6,7,8$ ជំនួសក្នុង $S_{2n+4} = 3S_{2n+2} - S_{2n}$

គេបាន $S_6 = 18$,$S_8 = 47, S_{10} = 123, S_{12} = 322$, $S_{14} = 843$

និង $S_{16} = 2207$ ។

គេបាន $b = -(2207 - 843 + 322 - 123 + 47 - 18 + 7 - 3 + 1)$

ឬ $b = -1597$ ។

ដូចនេះ $(a,b) = (987, -1597)$ ។

លំហាត់ទី២៩

ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនពិតនៃសមីការ :

$x^3 - 3x = \sqrt{x+2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ $x^3 - 3x = \sqrt{x+2}$

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ $x + 2 \geq 0$ ឬ $x \geq -2$ ។

-ចំពោះ $x > 2$ គេមាន $x^3 - 4x = x(x^2 - 2) > 0$ (i)

ហើយ $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) > 0$ ឬ $x > \sqrt{x+2}$ (ii)

បូកវិសមភាព (i) & (ii) គេបាន $x^3 - 3x > \sqrt{x+2}$

ដូចនេះសមីការ $x^3 - 3x = \sqrt{x+2}$ គ្មានឫសចំពោះ $x > 2$ ។

-ចំពោះ $-2 \leq x \leq 2$ យើងអាចតាង $x = 2\cos a$ ដែល $0 \leq a \leq \pi$

សមីការអាចសរសេរជា $8\cos^3 a - 6\cos a = \sqrt{2\cos a + 2}$

$$2(4\cos^3 - 3\cos a) = \sqrt{4\cos^2 \frac{a}{2}}$$

$$\cos 3a = |\cos \frac{a}{2}|$$

ដោយ $0 \leq a \leq \pi$ នោះ $\cos \frac{a}{2} \geq 0$

សមីការសមមូល $\cos 3a = \cos \frac{a}{2}$

គេទាញឬស $3a=\frac{a}{2}+2k_1\pi$, $3a=-\frac{a}{2}+2k_2\pi$

ឬ $a=\frac{4k_1\pi}{5}$, $a=\frac{4k_2\pi}{7}$ $(k_1,k_2\in\mathbb{Z})$

ដោយ $0\le a\le\pi$ នោះគេទាញបាន $a\in\{\,0\,,\frac{4\pi}{5},\frac{4\pi}{7}\,\}$

ដូចនេះ $x=2\cos 0=2$, $x=2\cos\frac{4\pi}{5}, x=2\cos\frac{4\pi}{7}$ ។

លំហាត់ទី៣០ (Korean Mathematics Competition 2000)

ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{x}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ :

$$2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x = 1$$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់ចំនួនពិត $\mathbf{x}$:

$$2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x = 1$$

តាង $a = 2^x > 0$ និង $b = 3^x > 0$ សមីការក្លាយជា :

$$a + b - a^2 + ab - b^2 = 1$$
$$1 + a^2 + b^2 - a - b - ab = 0$$

$$2 + 2a^2 + 2b^2 - 2a - 2b - 2ab = 0$$

$$(1 - 2a + a^2) + (1 - 2b + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2) = 0$$

$$(1 - a)^2 + (1 - b)^2 + (a - b)^2 = 0$$

គេទាញបាន $a = b = 1$

ហេតុនេះ $2^x = 3^x = 1$ នាំឱ្យ $x = 0$ ។

ដូចនេះសមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ $x = 0$ ។

លំហាត់ទី៣១ (China 1992)

ចូរបង្ហាញថា $16 < \sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}} < 17$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $16 < \sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}} < 17$

គេមាន $2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} < \frac{2}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}}$

គេបាន $\sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = 16$

ហើយ $2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}) = \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} > \frac{2}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}}$

គេបាន $\sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}} < 1+2\sum_{k=2}^{80}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}) = 2\sqrt{80}-1 < 17$

ដូចនេះ $16 < \sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}} < 17$ ។

លំហាត់ទី៣២

គេឱ្យ z_1, z_2, z_3 ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $\begin{cases} z_1+z_2+z_2=2 \\ z_1^{\,2}+z_2^{\,2}+z_3^{\,2}=3 \\ z_1z_2z_3=4 \end{cases}$

ចូរគណនាតម្លៃ $S=\dfrac{1}{z_1z_2+z_3-1}+\dfrac{1}{z_2z_3+z_1-1}+\dfrac{1}{z_3z_1+z_2-1}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃ S :

គេមាន $z_1z_2+z_3-1=z_1z_2+z_3+1-(z_1+z_2+z_3)$

$$=z_1z_2+1-z_1-z_2=(z_1-1)(z_2-1)$$

ស្រាយបំភ្លឺដូចគ្នានេះដែរគេបាន :

$$z_2z_3+z_1-1=(z_2-1)(z_3-1), z_3z_1+z_2-1=(z_1-1)(z_3-1)$$

$$S=\sum_{cyc}\frac{1}{(z_1-1)(z_2-1)}=\frac{z_1+z_2+z_3-3}{(z_1-1)(z_2-1)(z_3-1)}$$

$$=\frac{2-3}{z_1z_2z_3-(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)+z_1+z_2+z_3-1}$$

$$=\frac{-2}{10-2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)}=\frac{-2}{10-(4-3)}=-\frac{2}{9}$$

ព្រោះ $2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)=(z_1+z_2+z_3)^2-(z_1^{\,2}+z_2^{\,2}+z_3^{\,2})$

លំហាត់ទី៣៣

គេឱ្យ x, y, z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ ។

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $\dfrac{x^3}{1-x^8} + \dfrac{y^3}{1-y^8} + \dfrac{z^3}{1-z^8}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ $S = \dfrac{x^3}{1-x^8} + \dfrac{y^3}{1-y^8} + \dfrac{z^3}{1-z^8}$

ដោយ $x, y, z > 0$ និង $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ នោះគេទាញ $0 < x, y, z < 1$

ចំពោះ $0 < t < 1$ តាង $f(t) = t(1-t^8)$

គេបាន $[f(t)]^8 = t^8(1-t^8)^8$ ឬ $8\left[f(t)\right]^8 = 8t^8(1-t^8)^8$

តាមវិសមភាព $AM - GM$ គេបាន

$$8t^8(1-t^8) = 8t^8.(1-t^8)(1-t^8)...(1-t^8) \le \left(\frac{8t^8 + 8 - 8t^8}{9}\right)^9$$

$$= \left(\frac{8}{9}\right)^9$$

គេទាញ $8\left[f(t)\right]^8 \ge \left(\dfrac{8}{9}\right)^9$ ឬ $f(t) \le \dfrac{8}{\sqrt[4]{3^9}}$ តែ $f(t) = t(1-t^8)$

នោះគេទាញបានថា $\dfrac{1}{t(1-t^8)} = \dfrac{1}{f(t)} \ge \dfrac{\sqrt[4]{3^9}}{8}$ (*)

គេមាន $S = \dfrac{x^3}{1-x^8} + \dfrac{y^3}{1-y^8} + \dfrac{z^3}{1-z^8}$

គេអាចសរសេរ $S=\frac{x^4}{x(1-x^8)}+\frac{y^4}{y(1-y^8)}+\frac{z^4}{z(1-z^8)}$

តាមវិសមភាព **(*)** គេទាញបាន **:**

$S\ge\frac{\sqrt[4]{3^9}}{8}(x^4+y^4+z^4)=\frac{\sqrt[4]{3^9}}{8}$ ព្រោះ $x^4+y^4+z^4=1$

ដូចនេះតម្លៃតូចបំផុតនៃ $S=\frac{x^3}{1-x^8}+\frac{y^3}{1-y^8}+\frac{z^3}{1-z^8}$

គឺ $S_{min}=\frac{\sqrt[4]{3^9}}{8}=\frac{9\sqrt[4]{3}}{8}$ ។

លំហាត់ទី៣៤ (Iran 1996)

គេឱ្យបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន a,b,c និងមិនសូន្យព្រមគ្នាពីរ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]\geq\frac{9}{4}$$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]\geq\frac{9}{4}\quad (*)$$

តាង $x=a+b+c\ ,\ y=ab+bc+ca\ ,\ z=abc$

គេមានសមភាព :

$$(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$$

$$=xy-z$$

និង $\sum\limits_{cyc}(a+b)^2(a+c)^2=(x^2+y)^2-4x(xy-z)$

វិសមភាព **(*)** ខាងលើសមមូល $y\left[\frac{(x^2+y)^2-4x(xy-z)}{(xy-z)^2}\right]\geq\frac{9}{4}$

សមមូល $4x^4y-17x^2y^2+4y^3+34xyz-9z^2\geq 0$

$$xy(x^3-4xy+9z)+y(x^4-5x^2y+4y^2+6xz)+z(xy-9z)\geq 0\ (**)$$

តាមវិសមភាព **Schur** ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន x, y, z គេមាន :

$$\sum_{cyc} x(x-y)(x-z) \geq 0 \Leftrightarrow x^3 - 4xy + 9z \geq 0 \quad (1)$$

$$\sum_{cyc} x^2(x-y)(x-z) \geq 0 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2y + 4y^2 + 6xz \geq 0 \quad (2)$$

តាមវិសមភាព **AM − GM** គេមាន :

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc \Leftrightarrow xy - 9z \geq 0 \quad (3)$$

តាម $(1), (2) \& (3)$ គេទាញបាន $(**)$ ពិត ។

ដូចនេះ $(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right] \geq \frac{9}{4}$ ។

លំហាត់ទី៣៥

គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $a^3+b^3+c^3-3abc \ge 2(\frac{b+c}{2}-a)^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេមាន $a^3+b^3+c^3 \ge 3abc$

នោះ $a^3+b^3+c^3-3abc \ge 0$ ។

បើ $\frac{b+c}{2}-a \le 0$ នោះវិសមភាពខាងលើពិតជានិច្ច ។

យើងឧបមាថា $\frac{b+c}{2}-a > 0$ ។

តាង $T = a^3+b^3+c^3-3abc-2(\frac{b+c}{2}-a)^3$

យក $b=a+2x$ និង $c=a+2y$ នោះ $b+c=2a+2x+2y$

ដែល $x \ge 0$, $y \ge 0$ ។ គេបាន :

$$T = a^3+(a+2x)^3+(a+2y)^3-3a(a+2x)(a+2y)-2(x+y)^3$$

បន្ទាប់ពីបង្រួមរួចគេបាន :

$$T = 12a(x^2-xy+y^2)+6(x+y)(x-y)^2 \ge 6(x+y)(x-y)^2$$

$T = 6(\frac{b+c}{2}-a)(\frac{b-c}{2})^2 \ge 0$ ពិត

ដូចនេះ $a^3+b^3+c^3-3abc \ge 2(\frac{b+c}{2}-a)^3$ ។

លំហាត់ទី៣៦

គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{BC=a}$, $\mathbf{CA=b}$, $\mathbf{AB=c}$

ហើយមុំក្នុង $\mathbf{A,B,C}$ ជាមុំស្រួចឬមុំកែង ។

តាង $\mathbf{S}$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃ $\Delta\ \mathbf{ABC}$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{1}{a^4}+\dfrac{1}{b^4}+\dfrac{1}{c^4}\ge\dfrac{9}{16S^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{1}{a^4}+\dfrac{1}{b^4}+\dfrac{1}{c^4}\ge\dfrac{9}{16S^2}$ ។

គេមាន $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$ ដែល $p=\dfrac{a+b+c}{2}$

តាង $x=b^2+c^2-a^2$, $y=c^2+a^2-b^2$, $z=a^2+b^2-c^2$

ដែល $x,y,z\ge 0$ និង មិនអាចមានពីរសូន្យព្រមគ្នា ។

គេបាន $x+y=2c^2$, $y+z=2a^2$, $z+x=2b^2$

ហើយ $16S^2=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

$$=4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$$

$$=(x+y)(z+x)-x^2=xy+yz+zx$$

វិសមភាព $\dfrac{1}{a^4}+\dfrac{1}{b^4}+\dfrac{1}{c^4}\ge\dfrac{9}{16S^2}$ អាចបម្លែងទៅជា :

$$\frac{4}{(x+y)^2}+\frac{4}{(y+z)^2}+\frac{4}{(z+x)^2}\ge\frac{9}{xy+yz+zx}$$

$$(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right]\ge\frac{9}{4}$$

តាមលក្ខណះអូម៉ូសែនគេអាចជ្រើសរើសយក $xy+yz+zx=1$ នោះវិសមភាព

ខាងលើសមមូល : $4\sum_{cyc}(x+y)^2(x+z)^2\ge 9(x+y)^2(y+z)^2(x+z)^2$

ដោយ $(x+y)(x+z)=x^2+xy+xz+yz=x^2+1$

ហើយ $(x+y)(y+z)(x+z)=(x^2+1)(y+z)$

$$=x^2(y+z)+y+z$$

$$=x(xy+xz)+y+z$$

$$=x(1-yz)+y+z$$

$$=x+y+z-xyz$$

គេបាន $4\sum_{cyc}(x^2+1)^2\ge 9(x+y+z-xyz)^2$

$$4[(x^2+1)^2+(y^2+1)^2+(z^2+1)^2]\ge 9(x+y+z-xyz)^2$$

$$4[(x^4+y^4+z^4)+2(x^2+y^2+z^2)+3]\ge 9(x+y+z-xyz)^2 \quad (*)$$

តាង $S=x+y+z$ និង $P=xyz$

ដែល $S=a^2+b^2+c^2>0$ និង $P\ge 0$ ព្រោះ $x,y,z\ge 0$ ។

គេបាន $S^2=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2$

ហើយ $(S^2-2)^2=x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+y^2z^2)$

ដោយ $xy+yz+xz=1$ នោះ $(xy+yz+xz)^2=1$

ឬ $x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+2xyz(x+y+z)=1$

ឬ $x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2=1-2SP$

នោះ $(S^2-2)^2=x^4+y^4+z^4+2(1-2SP)$

នាំឱ្យ $x^4+y^4+z^4=S^4-4S^2+4SP+2$

វិសមភាព (*) ខាងលើសមមូល :

$$4(S^4-4S^2+4SP+2+2S^2-4+3)\geq 9(S-P)^2$$

$$4(S^4-2S^2+4SP+1)\geq 9(S-P)^2$$

$$4S^4-8S^2+16SP+4\geq 9(S-P)^2$$

$$9S^2+(4S^2-1)(S^2-4)+16SP\geq 9(S-P)^2 \quad (**)$$

-ចំពោះ $S\geq 2$ គេមាន $(4S^2-1)(S^2-4)+16SP\geq 0$

នាំឱ្យវិសមភាព (**) ពិត

ព្រោះ $9S^2+(4S^2-1)(S^2-4)+16SP\geq 9S^2\geq 9(S-P)^2$ ។

-ចំពោះ $0<S<2$ វិសមភាព (**) អាចសរសេរ :

$$9S^2+(4S^2-1)(S^2-4)+16SP\geq 9S^2-18SP+9P^2$$

$$(4S^2-1)(S^2-4)+34SP-9P^2\geq 0$$

តាង $T=(4S^2-1)(S^2-4)+34SP-9P^2$

យើងនឹងស្រាយថា $T\geq 0$ ។

គេមាន $(x+y+z)(xy+yz+xz)\geq 9xyz$ (តាម $AM-GM$)

ដោយ $xy+yz+zx=1$ នោះ $S\geq 9P$

ហើយ $T=(4S^2-1)(S^2-4)+P(S-9P)+33SP$

គេបាន $T\geq(4S^2-1)(S^2-4)+33SP$

តាមវិសមភាព **Schur** គេមាន $\sum_{cyc}x^2(x-y)(x-z)\geq 0$

ដោយ $x^2(x-y)(x-z)=x^4+x^2yz-x^3(y+z)$

គេបាន $\sum_{cyc}(x^4)+xyz\sum_{cyc}(x)\geq\sum_{cyc}x^3(y+z)$

ដោយ $\sum_{cyx}(x^4)=S^4-4S^2+4SP+2$, $xyz\sum_{cyc}x=SP$

និង $\sum_{cyc}x^3(y+z)=\sum_{cyc}x^2(xy+xz)=\sum_{cyc}x^2(1-yz)$

$$=\sum_{cyc}x^2-xyz\sum_{cyc}x=S^2-2-SP$$

គេបាន $S^4-4S^2+5SP+2\geq S^2-SP-2$

$$6SP\geq -S^4+5S^2-4$$

$$6SP\geq(4-S^2)(S^2-1)$$

ហេតុនេះ $T\geq(4S^2-1)(S^2-4)+\frac{11}{2}\times 6SP$

$$T\geq(4S^2-1)(S^2-4)+\frac{11}{2}(4-S^2)(S^2-1)$$

$$T\geq\frac{3}{2}(4-S^2)(S^2-3)$$

ដោយ $0 < S \le 2$ នោះ $4 - S^2 \ge 0$

ហើយ $S^2 = (x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx) = 3$ នោះ $S^2 - 3 \ge 0$

គេទាញបាន $T \ge \frac{3}{2}(4-S^2)(S^2-3) \ge 0$ ពិត ។

សរុបមកគេបាន $(xy+yz+zx)[\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}] \ge \frac{9}{4}$

ដូចនេះ $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} \ge \frac{9}{16S^2}$ ។

លំហាត់ទី៣៧ (Turkey 2007)

គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ដែល $a+b+c=1$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ca+2b^2+2b}\geq\frac{1}{ab+bc+ca}$$

ដំណោះស្រាយ

ជាដំបូងយើងនឹងស្រាយថា $\frac{1}{ab+2c^2+2c}\geq\frac{ab}{(ab+bc+ca)^2}$

សមមូល $(ab+bc+ca)^2\geq ab(ab+2c^2+2c)$

សមមូល $b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)\geq 2abc^2+2abc$

ដោយ $a+b+c=1$ នោះ $b^2c^2+c^2a^2+2abc\geq 2abc^2+2abc$

សមមូល $b^2c^2+c^2a^2-2abc^2=c^2(a-b)^2\geq 0$ ពិត

ហេតុនេះ $\frac{1}{ab+2c^2+2c}\geq\frac{ab}{(ab+bc+ca)^2}$ (1)

$$\frac{1}{bc+2a^2+2a}\geq\frac{bc}{(ab+bc+ca)^2}\quad(2)$$

$$\frac{1}{ca+2b^2+2b}\geq\frac{ca}{(ab+bc+ca)^2}\quad(3)$$

បូកវិសមភាព $(1),(2)\,\&\,(3)$ គេបាន :

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ca+2b^2+2b}\geq\frac{1}{ab+bc+ca}$$

លំហាត់ទី៣៨

គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a^2+ab+b^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{2b^2+bc+c^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{2c^2+ca+a^2}}\geq\frac{a+b+c}{2}$$

ដំណោះស្រាយ

យើងពិនិត្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{2x^2+x+1}}$ គ្រប់ $x>0$

វិសមភាពខាងលើសមមូល $bf(\frac{a}{b})+cf(\frac{b}{c})+af(\frac{c}{a})\geq\frac{a+b+c}{2}$ ។

ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាពនេះយើងត្រូវកំណត់អនុគមន៍លីនេអ៊ែមួយដែល $f(x)\geq\alpha x+\beta$ $(*)$ ហើយ α និង β ជាពីរចំនួនពិតដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $(*)$ ពិតចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

ដោយសារតែវិសមភាពពិតចំពោះ $a=b=c$ នោះយើងនឹងកំណត់រក α និង β ដែលធ្វើឱ្យខ្សែកោង $(c):y=f(x)$ ប៉ះនឹង $(d):y=\alpha x+\beta$ ត្រង់ $x=1$ ពោលគឺត្រូវឱ្យ $f(1)=\alpha+\beta$ និង $f'(1)=\alpha$ ។

ដោយ $f(1)=\frac{1}{2}$ នោះ $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$

គេមាន $f'(x)=\dfrac{2x\sqrt{2x^2+2x+1}-\dfrac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+2x+1}}.x^2}{2x^2+2x+1}$

គេបាន $f'(1)=\dfrac{4-\dfrac{5}{4}}{4}=\dfrac{11}{16}$ នោះ $\alpha=\dfrac{11}{16}$ ហើយ $\beta=\dfrac{1}{2}-\alpha=-\dfrac{3}{16}$

ហេតុនេះ $f(x)\ge\dfrac{11x-3}{16}$ ឬ $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x^2+x+1}}\ge\dfrac{11x-3}{16}$ $(**)$

-បើ $0<x<\dfrac{3}{11}$ នោះវិសមភាព $(**)$ ពិតជានិច្ចព្រោះអង្គទី១ជាកន្សោមវិជ្ជមាន ជានិច្ចគ្រប់ $x>0$ ហើយអង្គទីពីរអវិជ្ជមាន ។

-បើ $x\ge\dfrac{3}{11}$ នោះវិសមភាព $(**)$ អាចសរសេរ :

$$\left(\frac{x^2}{\sqrt{2x^2+2x+1}}\right)^2\ge\frac{(11x-3)^2}{256}\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2(14x^2+39x-9)}{256(2x^2+x+1)}\ge 0$$

វាពិតចំពោះគ្រប់ $x\ge\dfrac{3}{11}$ ព្រោះ $14x^2+39x-9>0$ ។

តាម $(**)$ គេជំនួស x ដោយ $\dfrac{a}{b}$, $\dfrac{b}{c}$, $\dfrac{c}{a}$ គេបាន :

$$bf\left(\frac{a}{b}\right)+cf\left(\frac{b}{c}\right)+af\left(\frac{c}{a}\right)\ge\frac{11a-3b+11b-3c+11c-3a}{16}$$

$$=\frac{8a+8b+8c}{16}=\frac{a+b+c}{2}\text{ ពិត}$$

ដូចនេះ

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a^2+ab+b^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{2b^2+bc+c^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{2c^2+ca+a^2}}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

លំហាត់ទី៣៩

គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតខុសគ្នា ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}\geq 2$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

ដោយ $(x+y+z)^2\geq 0$ គ្រប់ចំនួនពិត x, y, z នោះគេបាន :

$x^2+y^2+z^2\geq -2(xy+yz+zx)$ (*)

យក $x=\frac{a}{b-c}$, $y=\frac{b}{c-a}$, $z=\frac{c}{a-b}$ នោះគេបាន :

$$xy+yz+zx=\frac{ab}{(b-c)(c-a)}+\frac{bc}{(a-b)(c-a)}+\frac{ac}{(a-b)(b-c)}$$

$$=\frac{ab(a-b)+bc(b-c)+ac(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{b(c-a)(b-c-a)+ac(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{(c-a)(b-c)(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=-1$$

តាមទំនាក់ទំនង (*) គេទាញបាន $x^2+y^2+z^2\geq -2(-1)=2$

ដូចនេះ $\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}\geq 2$ ។

លំហាត់ទី៤០

ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព :

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a, b, c ។

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាព **Minkowsky** គេមាន :

$$\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}}+\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}}+\sqrt{x_3^{\,2}+y_3^{\,2}}\ge\sqrt{(x_1+x_2+x_3)^2+(y_1+y_2+y_3)^2}$$

យក $x_1=a\ ,\ x_2=b\ ,\ x_3=c$

និង $y_1=1-b\ ,\ y_2=1-c\ ,\ y_3=1-a$ និង $s=a+b+c$

គេបាន $(x_1+x_2+x_3)^2+(y_1+y_2+y_3)^2=s^2+(3-s)^2\ge\frac{9}{2}$

ព្រោះ $s^2+(3-s)^2=2s^2-6s+9=\frac{1}{2}[(2s-3)^2+9]\ge\frac{9}{2}$

ដូចនេះ

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}$$ ។

លំហាត់ទី៤១

គេឱ្យត្រីកោណ **ABC** មួយកែងត្រង់ **C** ។ **D** និង **E** ជាចំណុចពីរជ្រើសរើស

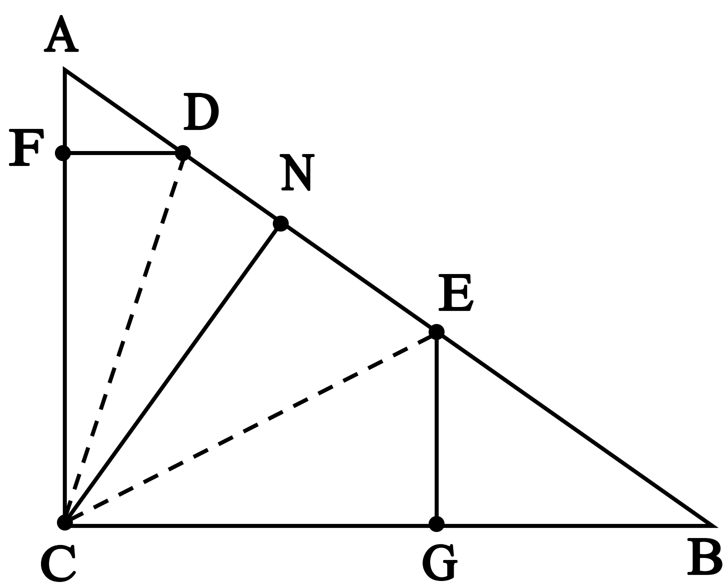
នៅលើអ៊ីប៉ូតេនូស ដែល $\mathbf{BC = BD}$ និង $\mathbf{AC = AE}$ ។

F និង **G** ជាចំណោលកែងនៃ **D** និង **E** លើជ្រុង **AC** និង **BC** រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\mathbf{DE = DF + EG}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\mathbf{DE = DF + EG}$



យើងសង់កម្ពស់ **CN** រួចភ្ជាប់ **CD** និង **CE** ។

គេមាន $\mathbf{BC = BD}$ នោះ $\mathbf{\Delta BCD}$ ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល **B**

គេបាន $\mathbf{\angle BCD = \angle BDC}$ តែ $\mathbf{\angle BCD = \angle BCN + \angle NCD}$

និង $\mathbf{\angle BDC = \angle DCA + \angle A}$

ហេតុនេះ $\angle BCN + \angle NCD = \angle DCA + \angle A$ **(1)**

ដោយ $CN \perp AB$ នោះ $\angle BCN = \angle A$ **(2)** (មុំបំពេញនៃមុំ $\angle NCA$)

តាម **(1)** និង **(2)** គេទាញបាន $\angle NCD = \angle DCA$

ហើយ $\angle CND = \angle CFD = 90^o$ នោះគេទាញត្រីកោណ **CND** និង **CFD**

ជាត្រីកោណកែងប៉ុនគ្នា ។ គេទាញបាន $DN = DF$ ។

ស្រាយបំភ្លឺតាមរបៀបដូចគ្នាគេបាន $EN = EG$ ។

ដូចនេះ $DE = DN + NE = DF + EG$ ។

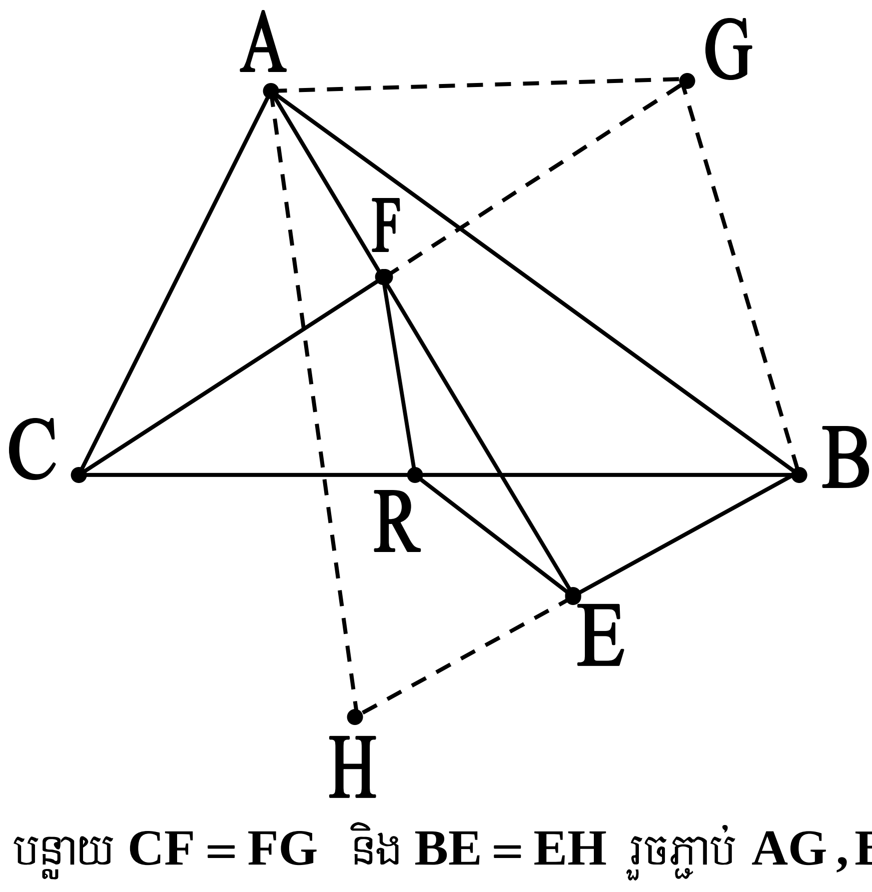
លំហាត់ទី៤២

គេយក **D** ជាចំនុចមួយនៃជ្រុង **BC** របស់ត្រីកោណ **ABC** ហើយ **E** និង **F** ជាចំណោលកែងនៃ **B** និង **C** លើ **AD** ។

បើ **R** ជាចំនុចកណ្តាលនៃ **BC** នោះស្រាយថា **RE = RF**

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា **RE = RF**



បន្លាយ $\mathbf{CF = FG}$ និង $\mathbf{BE = EH}$ រួចភ្ជាប់ $\mathbf{AG, BG, AH}$ និង $\mathbf{CH}$ ។

គេមាន $\mathbf{BE \perp AE}$ និង $\mathbf{BE = EH}$ (សំណង់) នោះ $\mathbf{\Delta ABE \cong \Delta AHE}$

គេបាន $\mathbf{AB = AH}$ និង $\mathbf{\angle BAE = \angle HAE}$ ។

ស្រាយដូចគ្នាដែរគេបាន $\Delta ACF \cong \Delta AGF$

គេបាន $AC = AG$ និង $\angle CAF = \angle GAF$ ។

ធ្វើផលដក $\angle CAF - \angle BAF = \angle GAF - \angle AHE$

គេទាញបាន $\angle BAG = \angle CAH$ នោះ $\Delta AGB \cong \Delta ACH$

ជាវិបាកគេទាញ $BG = CH$ ។

ក្នុងត្រីកោណ CBG គេមាន R និង F ជាចំនុចកណ្តាលនៃ CB និង CG

គេបាន $RF = \frac{1}{2}BG$ (បាតមធ្យម)

ដូចគ្នាដែរក្នុងត្រីកោណ CBH គេបាន $RE = \frac{1}{2}CH$ ។

ដោយ $BG = CH$ ដូចនេះ $RE = RF$ ។

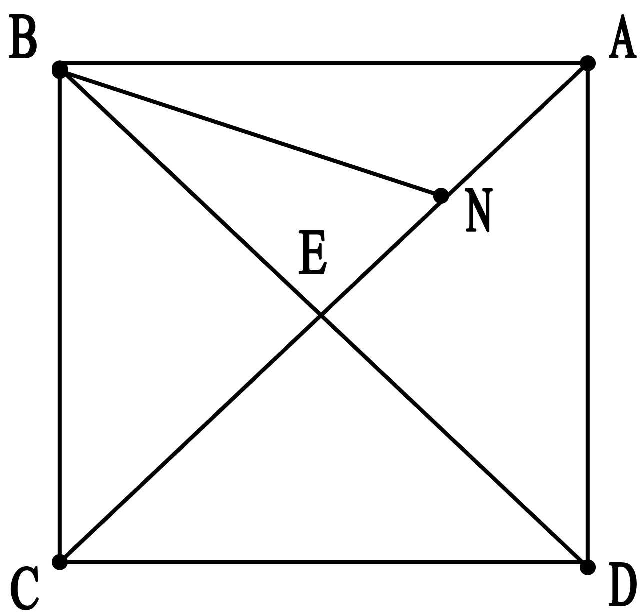
លំហាត់ទី៤៣

គេឱ្យការេ **ABCD** មួយ ។ **E** ជាប្រសព្វរវាងអង្កត់ទ្រូងទាំងពីរ ហើយ **N** ជាចំនុច មួយស្ថិតលើ **AE** ។

ចូរស្រាយថា $\mathbf{AB^2 - BN^2 = AN.NC}$ និង $\mathbf{AN^2 + NC^2 = 2BN^2}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\mathbf{AB^2 - BN^2 = AN.NC}$



គេមាន $\mathbf{AC \perp BD}$ (អង្កត់ទ្រូងនៃការេ) នោះ $\mathbf{AE \perp BE}$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រចំពោះ $\mathbf{\Delta \perp AEB}$ និង $\mathbf{\Delta \perp NEB}$

$$\mathbf{AB^2 = AE^2 + EB^2 = (AN + NE)^2 + EB^2 \quad (1)}$$

$$\mathbf{BN^2 = NE^2 + EB^2 \quad (2)}$$

ដកសមីការពីរនេះអង្គនិងអង្គគេបាន :

$$AB^2 - BN^2 = AN^2 + 2AN.NE = AN.(AN + 2NE)$$

តែ $AN + 2NE = AE + NE = NE + EC = NC$

ដូចនេះ $AB^2 - BN^2 = AN.NC$ ។

ស្រាយថា $AN^2 + NC^2 = 2BN^2$

គេមាន $AN^2 = (AE - NE)^2 = AE^2 + NE^2 - 2AE.NE \quad (3)$

ហើយ $NC^2 = (NE + EC)^2 = (NE + AE)^2$ ព្រោះ $EC = AE$

$$NC^2 = NE^2 + AE^2 + 2AE.NE \quad (4)$$

បូកសមីការ (3) និង (4) គេបាន :

$AN^2 + NC^2 = 2NE^2 + 2AE^2$ តែ $AE = BE$

ដូចនេះ $AN^2 + NC^2 = 2(NE^2 + BE^2) = 2BN^2$ ។

លំហាត់ទី៤៤

គេឱ្យ **ABC** ជាត្រីកោណមួយហើយ **D** ជាជើងនៃកម្ពស់គូសពីកំពូល **A** ។

យក **E** និង **F** ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់កាត់តាម**D** ដោយដឹងថា **AE** កែងនឹង **BE**

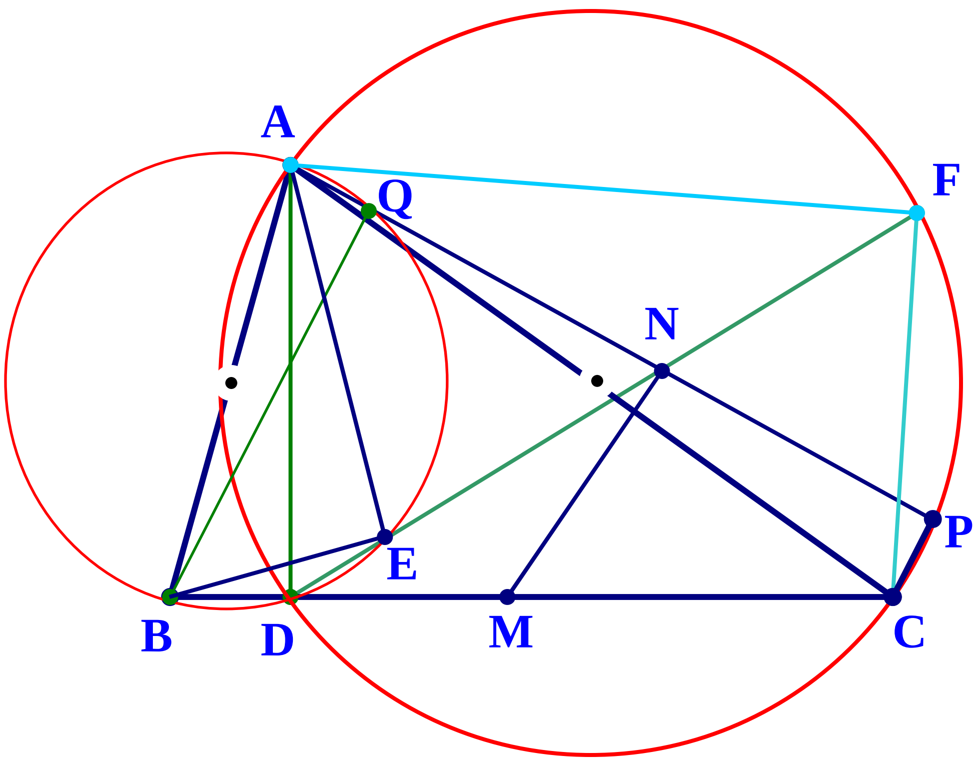
ហើយ **AF** កែងនឹង **CF** ដែល **E** និង **F** ខុសពី **D** ។

យក **M** និង **N** ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ **BC** និង **EF** រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថា **AN** កែងនឹង **NM** ?

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា **AN** កែងនឹង **NM**



តាង (w_1) និង (w_2) ជារង្វង់មានអង្កត់ផ្ចិតរៀងគ្នា AB និង AC ។

គេបាន $E \in (w_1)$ ព្រោះ $AE \perp BE$ ហើយ $F \in (w_2)$ ព្រោះ $AF \perp CF$

តាង P និង Q ជាចំនុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ (AN) ជាមួយ(w_1) និង (w_2) រៀងគ្នា ។

ចំនុច N នៅក្រៅរង្វង់ (w_1) នោះគេបាន $NE.ND = NQ.NA$ (1)

ព្រោះ N ជាចំណុចកណ្តាលនៃ EF ។

ចំពោះរង្វង់ (w_2) គេមាន $NF.ND = NP.NA$ (2)

តាម $(1)\&(2)$ គេទាញបាន $NQ.NA = NP.NA$ ឬ $NQ = NP$

ដោយ $MB = MC$ នោះគេបាន $MN // PC$ ហើយដោយ $AP \perp PC$

ដូចនេះ $AN \perp NM$ ។

លំហាត់ទី៤៥

រកអនុគមន៍ $f : IR \mapsto IR$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{IR} : \mathbf{f}((\mathbf{x}-\mathbf{y})^2) = \mathbf{x}^2 - \mathbf{2yf}(\mathbf{x}) + \left(\mathbf{f}(\mathbf{y})\right)^2$$

ដំណោះស្រាយ

រកអនុគមន៍ $\mathbf{f}$

យក $y = x$ គេបាន $f(0) = x^2 - 2xf(x) + \left(f(x)\right)^2 = (x - f(x))^2$

បើ $x = 0$ នោះ $f(0) = f^2(0)$ នាំឱ្យ $f(0) = 0$ ឬ $f(0) = 1$

-ករណី $f(0) = 0$ គេបាន $(x - f(x))^2 = 0$ នោះ $f(x) = x$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$f((x-y)^2) = (x-y)^2$$

$$x^2 - 2yf(x) + \left(f(y)\right)^2 = x^2 - 2yx + y^2 = (x-y)^2$$

គេបាន $f((x-y)^2) = x^2 - 2yf(x) + \left(f(y)\right)^2 = (x-y)^2$ ពិត

ដូចនេះ $f(x) = x$ គ្រប់ $x \in IR$

-ករណី $f(0) = 1$ គេបាន $(x - f(x))^2 = 1$ នោះ $f(x) = x + 1$

ឬ $f(x) = x - 1$ ។

ផ្ទៀងផ្ទាត់ :

-ចំពោះ $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{1}$

$$\mathbf{f((x-y)^2)=(x-y)^2+1}$$

$$\mathbf{x^2-2yf(x)+\left(f(y)\right)^2=x^2-2y(x+1)+(y+1)^2}$$

$$\mathbf{=(x-y)^2+1}$$

គេបាន $f\left((x-y)^2\right)=x^2-2yf(x)+\left(f(y)\right)^2=(x-y)^2+1$ ពិត

ដូចនេះ $f(x)=x+1$ គ្រប់ $x\in IR$

-ចំពោះ $f(x)=x-1$

$$\mathbf{f((x-y)^2)=(x-y)^2-1}$$

$$\mathbf{x^2-2yf(x)+\left(f(y)\right)^2=x^2-2y(x-1)+(y-1)^2}$$

$$\mathbf{=(x-y)^2+1}$$

គេបាន $f\left((x-y)^2\right)\neq x^2-2yf(x)+\left(f(y)\right)^2$

ដូចនេះ $f(x)=x-1$ មិនមែនជាចម្លើយ ។

សរុបមកគេបាន $f(x)=x$ ឬ $f(x)=x+1$ គ្រប់ $x\in IR$ ។

លំហាត់ទី៤៦

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន **a,b,c** ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \sqrt[6]{\frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}{8}} + \sqrt[3]{abc}$$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា :

$$\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \sqrt[6]{\frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}{8}} + \sqrt[3]{abc}$$

ជាដំបូងយើងត្រូវស្រាយថាគ្រប់ $x, y \geq 0$ គេបាន $x+y \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy}$

គេមាន $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ នោះ $(x+y)^2 \geq 4xy$ ឬ $(x+y)^2 - 4xy \geq 0$

លើកជាការេ $[(x+y)^2 - 4xy]^2 \geq 0$

$$(x+y)^4 - 8xy(x+y)^2 + 16x^2y^2 \geq 0$$

$$(x+y)^4 \geq 8xy[(x+y)^2 - 2xy] = 8xy(x^2+y^2)$$

គេទាញ $(x+y)^2 \geq 4\sqrt{xy\frac{x^2+y^2}{2}}$ ឬ $\frac{(x+y)^2}{2} \geq 2\sqrt{xy\frac{x^2+y^2}{2}}$

ដោយ $2\sqrt{xy.\frac{x^2+y^2}{2}} = (\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy})^2 - \frac{(x+y)^2}{2}$

គេបាន $\frac{(x+y)^2}{2} = (\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{xy})^2 - \frac{(x+y)^2}{2}$

នាំឱ្យ $x+y\ge\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{xy}$ ។

តាមវិសមភាពខាងលើ គេទាញ $\begin{cases} a+b\ge\sqrt{p}+\sqrt{ab} \\ b+c\ge\sqrt{q}+\sqrt{bc} \\ a+c\ge\sqrt{r}+\sqrt{ac} \end{cases}$

ដែល $p=\frac{a^2+b^2}{2}$, $q=\frac{b^2+c^2}{2}$ និង $r=\frac{a^2+c^2}{2}$

គេបាន $(a+b)(b+c)(c+a)\ge(\sqrt{p}+\sqrt{ab})(\sqrt{q}+\sqrt{bc})(\sqrt{r}+\sqrt{ac})$

ឬ $(a+b)(b+c)(c+a)\ge\sqrt{pqr}+m+n+abc$

ដែល $m=\sqrt{acpq}+\sqrt{bcpr}+\sqrt{abqr}\ge3\sqrt[3]{a^2b^2c^2p^2q^2r^2}$

និង $n=\sqrt{abc^2p}+\sqrt{a^2bcq}+\sqrt{ab^2cr}\ge3\sqrt[3]{a^4b^4c^4pqr}$

ដោយ $\sqrt{pqr}+m+n+abc\ge(\sqrt[6]{pqr}+\sqrt[3]{abc})^3$

គេទាញ $(a+b)(b+c)(c+a)\ge(\sqrt[6]{pqr}+\sqrt[3]{abc})^3$

ឬ $\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\sqrt[6]{pqr}+\sqrt[3]{abc}$

ដូចនេះ $\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\sqrt[6]{\frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}{8}}+\sqrt[3]{abc}$

លំហាត់ទី៤៧ (Greece National Olympiad 2011)

គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលមានផលបូកស្មើ 6 ។

ចូរកំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ $\mathbf{S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}}$

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ $S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}$

តាង $u=\sqrt[3]{a^2+2bc}$, $v=\sqrt[3]{b^2+2ca}$ និង $w=\sqrt[3]{c^2+2ab}$

គេមាន $u^3+v^3+w^3=a^2+2bc+b^2+2ca+c^2+2ab=(a+b+c)^2$

តែតាមសម្មតិកម្ម $a+b+c=6$ នោះ $u^3+v^3+w^3=36$ (1)

ហើយ $S=u+v+w$ (2)

ចំពោះគ្រប់ $x>0$ យើងជ្រើសរើស $f(x)=x^3$

គេមាន $f'(x)=3x^2$ និង $f''(x)=6x>0$ នោះតាមវិសមភាព Jensen គេបាន

$$f(u)+f(v)+f(w)\geq 3f\left(\frac{u+v+w}{3}\right)\ ,\ \forall u,v,w>0$$

គេបាន $u^3+v^3+w^3\geq 3\left(\dfrac{u+v+w}{3}\right)^3=\dfrac{1}{9}(u+v+w)^3$ (3)

តាមទំនាក់ទំនង (1),(2) & (3) គេបាន $36\geq\dfrac{S^3}{9}$ នាំឱ្យ $S\leq 3\sqrt[3]{12}$

ដូចនេះតម្លៃអតិបរមានៃ $S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}$

ស្មើនឹង $S_{max}=3\sqrt[3]{12}$ ដែលត្រូវនឹង $a=b=c=2$ ។

លំហាត់ទី៤៨ (USAMO 1989)

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេឱ្យ :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

$$T_n = S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_n$$

$$U_n = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{3} + \frac{T_3}{4} + ... + \frac{T_n}{n+1}$$

ចូរកំណត់ដោយធ្វើដំណោះស្រាយ នូវចំនួនគត់ $0 < a, b, c, d < 1000\,000$

ដោយដឹងថា $T_{1988} = aS_{1989} - b$ និង $U_{1988} = cS_{1989} - d$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនគត់ a, b, c, d

យើងនឹងស្រាយតាមកំណើនថាគ្រប់ $n \ge 2 : T_{n-1} = nS_n - n$

-ចំពោះ $n = 2 :\ T_1 = 2S_2 - 2 = 2(1 + \frac{1}{2}) - 2 = 1 = S_1$ ពិត

-ឧបមាថា $T_{n-1} = nS_n - n$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា $T_n = (n+1)S_{n+1} - (n+1)$ ពិត

គេមាន $T_n = S_1 + S_2 + ... + S_{n-1} + S_n = T_{n-1} + S_n$

$$T_n = nS_n - n + S_n = (n+1)S_n - n$$

ដោយ $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{n+1}$ នោះ $S_n = S_{n+1} + \dfrac{1}{n+1}$

គេបាន $T_n=(n+1)(S_{n+1}+\dfrac{1}{n+1})-n=(n+1)S_{n+1}-(n+1)$ ពិត

ដូចនេះ $n\geq 2: T_{n-1}=nS_n-n$

យក $n=1989$ គេបាន $T_{1988}=1989\,S_{1989}-1989$

ដោយ $T_{1988}=aS_{1989}-b$ នោះគេទាញ $a=1989$, $b=1989$ ។

ហើយ $U_n=\dfrac{T_1}{2}+\dfrac{T_2}{3}+\dfrac{T_3}{4}+...+\dfrac{T_n}{n+1}=\sum_{k=1}^{n}(\dfrac{T_k}{k+1})$

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)S_{k+1}-(k+1)}{k+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(S_{k+1}-1)$$

$$=S_2+S_3+....+S_{n+1}-n$$

$$=T_{n+1}-S_1-n$$

$$=(n+1)S_{n+1}-(n+1)-1-n$$

$$=(n+1)S_{n+1}-2(n+1)$$

យក $n=1988$ គេបាន $U_{1988}=1989S_{1989}-3978$

ដោយ $U_{1988}=cS_{1989}-d$ នោះ $c=1989$, $d=3978$

ដូចនេះ $a=1989$, $b=1989$, $c=1989$, $d=3978$ ។

លំហាត់ទី៤៩ (Japan Mathematical Olympiad Finals 2010)

គេឱ្យ x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{1+yz+zx}{(1+x+y)^2}+\frac{1+zx+xy}{(1+y+z)^2}+\frac{1+xy+yz}{(1+z+x)^2}\geq 1$$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាព $\textbf{Cauchy – Schwarz}$:

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leq (a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2)$$

យក $a_1=b_1=1$, $a_2=\sqrt{xz}$, $b_2=\sqrt{\frac{x}{z}}$, $a_3=\sqrt{yz}$, $b_3=\sqrt{\frac{y}{z}}$

គេបាន $(1+x+y)^2\leq (1+xz+yz)(1+\frac{x}{z}+\frac{y}{z})$

គេទាញបាន $\frac{1+xz+yz}{(1+x+y)^2}\geq \frac{z}{x+y+z}$ (1)

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $\frac{1+zx+xy}{(1+y+z)^2}\geq \frac{x}{x+y+z}$ (2)

និង $\frac{1+xy+yz}{(1+z+x)^2}\geq \frac{y}{x+y+z}$ (3)

ធ្វើផលបូកវិសមភាព (1), (2) & (3) គេបាន :

$$\frac{1+yz+zx}{(1+x+y)^2}+\frac{1+zx+xy}{(1+y+z)^2}+\frac{1+xy+yz}{(1+z+x)^2}\geq \frac{x+y+z}{x+y+z}=1$$

ដូចនេះ $\frac{1+yz+zx}{(1+x+y)^2}+\frac{1+zx+xy}{(1+y+z)^2}+\frac{1+xy+yz}{(1+z+x)^2}\geq 1$ ។

លំហាត់ទី៥០ (China Team Selection Test 2002)

គេឱ្យស្វ៊ីត $a_1 = 1, a_2 = 5$ និង $a_{n+1} = \dfrac{a_n a_{n-1}}{\sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2 + 1}}\ \forall n \geq 2$

ចូរកំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេមាន $a_{n+1} = \dfrac{a_n a_{n-1}}{\sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2 + 1}}\ \forall n \geq 2$

គេបាន

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} = \frac{a_n^2 + a_{n-1}^2 + 1}{a_n^2 a_{n-1}^2}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}^2} = \frac{1}{a_n^2} + \frac{1}{a_{n-1}^2} + \frac{1}{a_n^2 a_{n-1}^2}$$

$$1 + \frac{1}{a_{n+1}^2} = (1 + \frac{1}{a_n^2}) + \frac{1}{a_{n-1}^2}(1 + \frac{1}{a_n^2})$$

$$1 + \frac{1}{a_{n+1}^2} = (1 + \frac{1}{a_n^2})(1 + \frac{1}{a_{n-1}^2})$$

ឬ $1 + \dfrac{1}{a_{n+2}^2} = (1 + \dfrac{1}{a_n^2})(1 + \dfrac{1}{a_{n+1}^2})\ \ (*)$

តាង $b_n = \ln(1 + \dfrac{1}{a_n^2})$ នោះ $b_{n+1} = \ln(1 + \dfrac{1}{a_{n+1}^2})$

ហើយ $\mathbf{b_{n+2} = \ln(1 + \frac{1}{a_{n+2}^2})}$ (**)

យក (*) ជំនួសក្នុង (**) គេទទួលបាន $\mathbf{b_{n+2} = b_{n+1} + b_n}$

សមីការសម្គាល់ $\mathbf{q^2 - q - 1 = 0}$ មានឫស $\mathbf{q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, $\mathbf{q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

គេបាន $\mathbf{b_n = \alpha(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \beta(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}$ ដែល α, β កំណត់ដូចខាងក្រោម :

ចំពោះ $\mathbf{n = 1}$ $\mathbf{b_1 = \alpha.\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta.\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

ចំពោះ $\mathbf{n = 2 : b_2 = \alpha\frac{3+\sqrt{5}}{2} + \beta\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

ដោយ $\mathbf{b_1 = \ln(1 + \frac{1}{a_1{}^2}) = \ln 2}$ និង $\mathbf{b_2 = \ln(1 + \frac{1}{a_2{}^2}) = \ln\frac{26}{25}}$

គេបាន $\begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\beta = \ln 2 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\alpha + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\beta = \ln\frac{26}{25} \end{cases}$

គេទាញ $\alpha = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2\sqrt{13}}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{100}{3}\right)$

និង $\beta = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2\sqrt{13}}{5} - \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{100}{3}\right)$

ហើយ $\mathbf{b_n = \ln(1 + \frac{1}{a_n{}^2})}$ គេទាញ $\mathbf{a_n = \frac{1}{\sqrt{e^{b_n} - 1}}}$ ។

លំហាត់ទី៥១ (China Team Selection Test 2006)

គេឱ្យ $x_1, x_2, ..., x_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+x_i}}\right) \le \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $1 + x_i = y_i$ គេទាញ $x_i = y_i - 1$ និង $\sum_{i=1}^{n} y_i = n+1$ ដែល $y_i > 1$

វិសមភាព $\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+x_i}}\right) \le \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}$ សមមូល :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i - 1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{y_i}}\right) \le \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}$$

តាមវិសមភាព **Cauchy – Schwarz** : $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n}(a_i^{\,2}).\sum_{i=1}^{n}(b_i^{\,2})$

គេយក $a_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}, a_i = \sqrt{y_i - 1} \quad \forall i \ge 2$

ហើយ $b_1 = \sqrt{y_1 - 1}$, $b_i = \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall i \ge 2$ គេបាន :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}.\sqrt{y_i - 1}\right)^2 \le \left(\frac{1}{n} + \sum_{i=2}^{n}(y_i - 1)\right)\left(y_1 - 1 + \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{n}\right)$$

ដោយ $\sum_{i=2}^{n}(y_i - 1) = n + 1 - y_1 - (n-1) = 2 - y_1$

ហើយ $\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$ នោះគេបាន :

$$\left(\frac{1}{n}+\sum_{i=2}^{n}(y_i-1)\right)\left(y_1-1+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{n}\right)=(\frac{1+2n}{n}-y_i)(y_i-\frac{1}{n})$$

$$=-y_1^{\ 2}+\frac{2(n+1)}{n}y_1-\frac{2n+1}{n^2}$$

គេទាញ $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}.\sqrt{y_i-1}\right)^2\le -y_1^{\ 2}+\frac{2(n+1)}{n}y_1-\frac{2n+1}{n^2}$

ឬ $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i-1}\le \sqrt{n}\sqrt{-y_1^{\ 2}+\frac{2(n+1)}{n}y_1-\frac{2n+1}{n^2}}$

ឬ $\frac{1}{\sqrt{y_1}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i-1}\le\sqrt{n}\sqrt{-y_1+\frac{2n+2}{n}-\frac{2n+1}{n^2}.\frac{1}{y_1}}$

ដូចគ្នាដែរគេទាញបាន :

$$\frac{1}{\sqrt{y_2}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i-1}\le\sqrt{n}\sqrt{-y_2+\frac{2n+2}{n}-\frac{2n+1}{n^2}.\frac{1}{y_2}}$$

$$-------------------------$$

$$\frac{1}{\sqrt{y_n}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i-1}\le\sqrt{n}\sqrt{-y_n+\frac{2n+2}{n}-\frac{2n+1}{n^2}.\frac{1}{y_n}}$$

ដោយធ្វើវិធីបូកអង្គ និង អង្គនៃបណ្ដាវិសមភាពខាងលើគេបាន :

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i-1}.\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{y_i}}\le\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{-y_i+\frac{2n+2}{n}-\frac{2n+1}{n^2}.\frac{1}{y_i}}\quad (*)$$

តាមវិសមភាព **Cauchy – Schwarz** គេមាន :

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{-y_i+\frac{2n+2}{2}-\frac{2n+1}{n^2}.\frac{1}{y_i}}\le\sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(-y_i+\frac{2n+2}{n}-\frac{2n+1}{n^2}.\frac{1}{y_i})}$$

ដោយ $\sum_{i=1}^{n}(-y_i+\frac{2n+2}{n})=-(n+1)+2n+2=n+1$

គេបាន $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{-y_i+\frac{2n+2}{2}-\frac{2n+1}{n^2}.\frac{1}{y_i}}\le\sqrt{n}\sqrt{n+1-\frac{2n+1}{n^2}.\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}}$

ហើយ $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}\ge\frac{(1+1+...+1)^2}{\sum_{i=1}^{n}y_i}=\frac{n^2}{n+1}$

គេទាញ $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{-y_i+\frac{2n+2}{2}-\frac{2n+1}{n^2}.\frac{1}{y_i}}\le\sqrt{n}\sqrt{n+1-\frac{2n+1}{n^2}.\frac{n^2}{n+1}}$

ឬ $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{-y_i+\frac{2n+2}{2}-\frac{2n+1}{n^2}.\frac{1}{y_i}}\le\sqrt{n}\,.\frac{n}{\sqrt{n+1}}$ (**)

តាម (*) និង (**) គេទាញ $\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{y_i}}\right)\le\frac{n^2}{\sqrt{n+1}}$ ពិត

ដូចនេះ $\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+x_i}}\right)\le\frac{n^2}{\sqrt{n+1}}$ ។

លំហាត់ទី៥២ (China Team Selection Test 2005)

គេឱ្យ $\mathbf{a,b,c}$ ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ដែល $\mathbf{ab+bc+ca=\frac{1}{3}}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\mathbf{\frac{1}{a^2-bc+1}+\frac{1}{b^2-ca+1}+\frac{1}{c^2-ab+1}\le 3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $\mathbf{S=\frac{a}{a^2-bc+1}+\frac{b}{b^2-ca+1}+\frac{c}{c^2-ab+1}}$

និង $\mathbf{T=\frac{1}{a^2-bc+1}+\frac{1}{b^2-ca+1}+\frac{1}{c^2-ab+1}}$

គេមាន $\mathbf{S=\frac{a^2}{a^3-abc+a}+\frac{b^2}{b^3-cab+b}+\frac{c^2}{c^3-abc+c}}$

តាមវិសមភាព $\mathbf{Cauchy-Schwarz}$ គេបាន :

$$\mathbf{S\ge\frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3-3abc+a+b+c}}$$

តែ $\mathbf{a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$

គេបាន $\mathbf{S\ge\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca+1}}$ ដោយ $\mathbf{ab+bc+ca=\frac{1}{3}}$

នោះ $\mathbf{S\ge\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2cc}=\frac{1}{a+b+c}}$ ។

ម្យ៉ាងទៀត $\mathbf{\frac{T}{3}=\frac{ab+bc+ca}{a^2-bc+1}+\frac{ab+bc+ca}{b^2-ca+1}+\frac{ab+bc+ca}{c^2-ab+1}}$

ហើយ $\mathbf{\frac{ab+bc+ca}{a^2-bc+1}=\frac{a(a+b+c)}{a^2-bc+1}+\frac{1}{a^2-bc+1}-1}$

គេបាន

$$\frac{T}{3}=\sum_{cyc}\frac{ab+bc+ca}{a^2-bc+1}$$

$$=\sum_{cyc}[\frac{a(a+b+c)}{a^2-bc+1}+\frac{1}{a^2-bc+1}-1]$$

$$=(a+b+c)S+T-3\geq(a+b+c).\frac{1}{a+b+c}+T-3$$

ព្រោះ $S\geq\frac{1}{a+b+c}$ (សម្រាយខាងលើ)

គេទាញ $T-\frac{T}{3}\leq 2$ ឬ $T\leq 3$ ។

ដូចនេះ $\frac{1}{a^2-bc+1}+\frac{1}{b^2-ca+1}+\frac{1}{c^2-ab+1}\leq 3$ ។

ជំពូកទី៣

កម្រងលំហាត់អនុវត្តន៍

ជំពូកទី៣

លំហាត់អនុវត្តន៍

1. គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (x_n) កំណត់ដោយ : $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = {x_n}^2 - x_n + 1 \end{cases}$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$1 - \frac{1}{2^{2^{n-1}}} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} < 1 - \frac{1}{2^{2^n}}$$ ។

2. គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc = 1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1$$ ។

3. ចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃផលបូក :

$$S_n = \log_{x1}(x_2 - \frac{1}{4}) + \log_{x2}(x_3 - \frac{1}{4}) + ... + \log_{x_n}(x_1 - \frac{1}{4})$$

ដែល $x_1, x_2, ..., x_n$ ជាចំនួនពិតនៃចន្លោះ $(\frac{1}{4}, 1)$ ។

4. ចូរកំណត់អនុគមន៍ $f: \ IR \rightarrow IR$ បើគេដឹងថា :

$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y$ ចំពោះគ្រប់ $x, y \in IR$ ។

5. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x+\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}=3 \\ y-\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=0 \end{cases}$

6. គណនាផលបូក $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(n-k)!(n+k)!}$

7. ដោះស្រាយសមីការ $2(2^x-1)x^2+(2^{x^2}-2)x=2^{x+1}-2$

8. ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}....\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{3n}}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

9. គេឱ្យស្វ៊ីត $\begin{cases} x_0=a\ ,\ x_1=b \\ x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_{n-1}+\dfrac{1}{x_n}) \end{cases}$ ជាស្វ៊ីតខួប (**Periodic**) ។

ចូរបង្ហាញថា $a.b=1$ ។

10. ចូរកំណត់គ្រប់ចម្លើយពិតរបស់សមីការ $2^x+3^x+6^x=x^2$ ។

11. គេឱ្យ $\{a_n\}_{n\ge1}$ ជាស្វ៊ីតមួយដែល $a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{a_n}$ $(n\in IN)$

ចូរកំណត់រូបមន្តអិុចព្លីស៊ីតមួយនៃ (a_n) ។

12. គេឱ្យ $a_1,a_2,....,a_n$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែល $a_{n+1}=\sqrt{{a_n}^2+a_n-1}$

ដែល $n\ge1$ ។ ចូរបង្ហាញថា $a_1\notin(-2\ ,\ 1)$ ។

13. ចូរស្រាយថាត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ជាត្រីកោណកែងលុះត្រាតែ :

$$\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C}=2$$ ។

14. ចូរកំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (a,b,c) បើគេដឹងថា :

$a^2+1\ ,\ b^2+1$ ជាចំនួនបឋម និង $(a^2+1)(b^2+1)=c^2+1$ ។

15. គេឱ្យ $n\ge 4$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និងយក $a_1\,,a_2\,,....,a_n$ ជាចំនួនពិតដែល

$a_1{}^2+a_2{}^2+...+a_n{}^2=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a_1}{a_2^2+1}+\frac{a_2}{a_3^2+1}+...+\frac{a_n}{a_1^2+1}\ge\frac{4}{5}(a_1\sqrt{a_1}+...+a_n\sqrt{a_n})^2$$

16. គេឱ្យ $a\,,b\,,c$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានមានផលបូកស្មើ 3 ។

ចូរស្រាយថា $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge ab+bc+ca$ ។

17. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$2|\sin^n x-\cos^n x|\le 3\,|\sin^m x-\cos^m x|$ គ្រប់ $x\in(0\,,\frac{\pi}{2})$

ដែល $n>m$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

18. ចូរកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b ដោយដឹងថា $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ និង $\frac{b^2+a}{a^2-b}$

ជាចំនួនគត់ព្រមគ្នា ។

19. គេឱ្យ $x\,,y\,,z$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy}\ge\sqrt{xyz}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$ ។

20. គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[5]{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ ។

21. គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតខុសគ្នា ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}\geq 2$ ។

22. គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2=a+b+c$

ចូរស្រាយថា $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\leq ab+bc+ca$ ។

23. គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា :

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\geq(ab+bc+ca)^3$$

24. គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{c\sqrt{a^3+b^3}}{a^2+b^2}+\frac{a\sqrt{b^3+c^3}}{b^2+c^2}+\frac{b\sqrt{c^3+a^3}}{c^2+a^2}\geq\frac{3}{\sqrt{2}}$$ ។

25. គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព :

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\geq 1$$ ។

26. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ចូរស្រាយថា :

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}}\leq\frac{3}{\sqrt{2}}$$

27. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន x, y, z ចូរស្រាយថា :

$$2(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) \geq (1+x)(1+y)(1+z)(1+xyz)$$

28. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន a, b, c, d ចូរស្រាយថា :

$$4(1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2)(1-d+d^2) \geq (1+abcd)^2$$

29. បើសមីការ $x^4+ax^3+2x^2+bx+1=0$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយ

ជាចំនួនពិតនោះបង្ហាញថា $a^4+b^4 \geq 8$ ។

30. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}$$

ចំពោះគ្រប់ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

31. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{a^3}{b^2}+\dfrac{b^3}{c^2}+\dfrac{c^3}{a^2} \geq \dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}$

ចំពោះគ្រប់ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

32. គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \geq 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

33. គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរស្រាយថា $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 4(a+b+c-1)$

34. ចូរបង្ហាញថា $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca)$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c ។

35. គេយក a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\ge\frac{3}{5}$$

36. គេឱ្យ x,y,z,t ជាបួនចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា :

$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^2+\left(\frac{y}{y+z}\right)^2+\left(\frac{z}{z+t}\right)^2+\left(\frac{t}{t+x}\right)^2\ge 1$$ ។

37. គេឱ្យ a,b,c និង x,y,z ជាចំនួនពិត ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$4(a^2+x^2)(b^2+y^2)(c^2+z^2)\ge 3(bcx+cay+abz)^2$$

38. គេឱ្យបីចំនួនពិត $a>-1$, $b>-1$, $c>-1$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{1+a^2}{1+b+c^2}+\frac{1+b^2}{1+c+a^2}+\frac{1+c^2}{1+a+b^2}\ge 2$$ ។

39. គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ដែល $abc=1$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{1}{(1+a)^3}+\frac{1}{(1+b)^3}+\frac{1}{(1+c)^3}\ge\frac{3}{8}$$ ។

40. គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ដែល

$$a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2\le 4$$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $$\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2}\ge 3$$ ។

41. គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b និង c ។ ចូរស្រាយថា

$$(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3)\ge(a+b+c)^3$$

42. ចូរស្រាយថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $\mathbf{a,b,c}$ គេមានវិសមភាព :

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$ ។

43. គេយក $\mathbf{a}=\frac{m^{m+1}+n^{n+1}}{m^m+n^n}$ ដែល $\mathbf{m}$ និង $\mathbf{n}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយថា $\mathbf{a^m+a^n\ge m^m+n^n}$ ។

44. គេឱ្យ $\mathbf{x\ ;\ y\ ;\ z}$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\mathbf{xyz=1}$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\ge 2$$

45. គេឱ្យ $\mathbf{a\ ,\ b\ ,c}$ ជាចំនួនវិជ្ជមានដែល $\mathbf{ab+bc+ca=3}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{abc}$

46. គេឱ្យ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាពីរចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានដែល $\mathbf{a^2+b^2=4}$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{ab}{a+b+2}\le\sqrt{2}-1$ ។

47. ចូរស្រាយថា $\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\ge xyz+\frac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|$

ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{x\ ;\ y\ ;\ z\ge 0}$ ។

48. គេឱ្យ $\mathbf{a\ ,\ b\ ,\ c}$ ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a}{b-a+c}+\frac{b}{a-b+c}+\frac{c}{a+b-c}\ge 3$ ។

49. គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2+b^2+c^2=3$ ។

ចូរបង្ហាញថា $|a|+|b|+|c|-abc\le 4$ ។

50. គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $1+\frac{3}{a+b+c}\ge\frac{6}{ab+bc+ca}$ ។

51. គេឱ្យ $a\ge 1$ និង $b\ge 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\le 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}$ ។

52. គេឱ្យ x, y, z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $xyz=1$ ។

ចូរបង្ហាញវិសមភាព :

$$\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}\ge x+y+z$$ ។

53.គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\ge 0$ ។

54. គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^5+b^5+c^5-(a+b+c)^5}{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3}\ge\frac{10}{9}(a+b+c)^2$$

55. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\in(0,\frac{\pi}{4})$

ចូរបង្ហាញថា $(\cos x)^{\cos x}>(\sin x)^{\sin x}$ ។

56. គេឱ្យ a, b, c, d ជាបីចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាព :

$$(a^2+b^2-1)(c^2+d^2-1)>(ac+bd-1)^2$$

ចូរបង្ហាញថា $a^2+b^2>1$ និង $c^2+d^2>1$ ។

57. គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$ ។

ចូរកំនត់តម្លៃអប្បបរមានៃកន្សោម $E=\dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{b+c}+\dfrac{c^2}{c+a}$ ។

58. គេឱ្យ $x_1, x_2, ..., x_n$ (ដែល $n\geq 2$) ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$\frac{1}{x_1+1998}+\frac{1}{x_2+1998}+....+\frac{1}{x_n+1998}=\frac{1}{1998}$$

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}{n-1}\geq 1998$ ។

59. គេឱ្យ x, y, z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz=x+y+z$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{x+y}{1+z^2}+\dfrac{y+z}{1+x^2}+\dfrac{z+x}{1+y^2}\geq\dfrac{27}{2xyz}$ ។

60. គេយក a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $ab+bc+ca=abc$

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\dfrac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\dfrac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)}\geq 1$ ។

61. គេយក x, y, z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz=1$

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{1}{yz+z}+\dfrac{1}{zx+x}+\dfrac{1}{xy+y}\geq\dfrac{3}{2}$ ។

62. ចំនួនពិត $\mathbf{a,\ ,b\ ,c\ ,x\ ,y\ ,z}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\mathbf{a \ge b \ge c > 0}$

និង $\mathbf{x \ge y \ge z > 0}$ ។ ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \ge \frac{3}{4} \quad ។$$

63. ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{y}{1-y}+\dfrac{z}{1-z} \ge \dfrac{3\sqrt[3]{xyz}}{1-\sqrt[3]{xyz}}$

ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{0 < x\ ,y\ ,z < 1}$ ។

64. ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $\mathbf{a\ ,b\ ,c}$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានគេបាន :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1 \quad ។$$

បង្ហាញថា $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1$

65. ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $\mathbf{a\ ,b\ ,c}$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានគេបាន :

$$\frac{(a+1)(b+1)^2}{3\sqrt[3]{c^2a^2}+1}+\frac{(b+1)(c+1)^2}{3\sqrt[3]{a^2b^2}+1}+\frac{(c+1)(a+1)^2}{3\sqrt[3]{b^2c^2}+1} \ge a+b+c+3 \quad ។$$

66. គេឱ្យ $\mathbf{x\ ,y\ ,z}$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ ។

ចូរស្រាយថា :

$$\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \ge 1 \quad ។$$

67. បើចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2+b^2+c^2=3$

នោះចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^2}{2+b+c^2}+\frac{b^2}{2+c+a^2}+\frac{c^2}{2+a+b^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{12}$$ ។

68. គេមានចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\leq\frac{3}{2}$ ។

69. គេឱ្យ a , b , c ជា ចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\leq\frac{1}{2}(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca})$ ។

70. គេឱ្យ a , b , c , d ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

$$S=\frac{a^4}{(a+b)(a^2+b^2)}+\frac{b^4}{(b+c)(b^2+c^2)}+\frac{c^4}{(c+d)(c^2+d^2)}+\frac{d^4}{(d+a)(d^2+a^2)}$$

ចូរបង្ហាញថា $S\geq\frac{a+b+c+d}{4}$ ។

71. គេឱ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន $x_1 , x_2 , ..., x_n$ ហើយគេតាង

$S_n=x_1+x_2+...+x_n$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$(1+x_1)(1+x_2)....(1+x_n)\leq 1+S+\frac{S^2}{2!}+...+\frac{S^n}{n!}$$

72. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និង ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន

$a_1 , a_2 , ..., a_n$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1a_2a_3....a_n=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា : $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt{a_i^4+3}}\leq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$ ។

73. គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ដោយដឹងថា

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2}\le\frac{3}{16}$$ ។

74. សមីការ $x^3-ax^2+bx-c=0$ មានឬសបីជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

(មិនចាំបាច់ខុសគ្នា) ។

ចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរមាដែលអាចនៃ $\frac{1+a+b+c}{3+2a+b}-\frac{c}{b}$ ។

75. ចូរស្រាយថា :

$$\sum_{Cyc}\sqrt[4]{\frac{(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)}{2}}\le\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។

76. បើ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ហើយ r ជាកាំរង្វង់

ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណនោះចូរស្រាយថា $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{4r^2}$ ។

77. គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

$16(a+b+c)\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{1}{(a+b+\sqrt{2a+2c})^3}+\frac{1}{(b+c+\sqrt{2a+2b})^3}+\frac{1}{(c+a+\sqrt{2b+2c})^3}\le\frac{8}{9}$$

78. គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{ab}{1-c^2}+\frac{bc}{1-a^2}+\frac{ca}{1-b^2}\le\frac{3}{8}$ ។

79. គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន និង x, y , z

ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដោយដឹងថា $a+b+c=x+y+z$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា : $\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}\ge a+b+c$ ។

80. គេឱ្យ a , b , $c>0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}}{b+c}+\frac{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}}{c+a}+\frac{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}}{a+b}\ge\frac{9}{2}$$

81. គេអោយបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a^3}{(b+c)^3}+\frac{b^3}{(c+a)^3}+\frac{c^3}{(a+b)^3}\ge\frac{3}{8}\quad ។$$

82. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c គេកំណត់តាង $A=\frac{a+b+c}{3}$

$G=\sqrt[3]{abc}$ និង $H=\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ ។

ចូរស្រាយថា $\left(\frac{A}{G}\right)^3\ge\frac{1}{4}+\frac{3}{4}.\frac{A}{H}$?

83. គេឱ្យចំនួនពិត $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1 > 0, x_2 > 0$

$x_1y_1 - z_1^2 > 0$ និង $x_2y_2 - z_2^2 > 0$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \le \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2} \quad (*)$$

84. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ ចូរស្រាយថា :

$$\sqrt{\cos A} + \sqrt{\cos B} + \sqrt{\cos C} \le \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ ។}$$

85. គេឱ្យ $x\,;\ y\,;\ z$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $xyz = 1$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{1}{(x+1)^2 + y^2 + 1} + \frac{1}{(y+1)^2 + z^2 + 1} + \frac{1}{(z+1)^2 + x^2 + 1} \le \frac{1}{2} \text{ ។}$$

86. គេឱ្យ $a\,;\, b\,;\, c$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc = 1$ ។

ចូរស្រាយថា :

$$a(b^2 - \sqrt{b}) + b(c^2 - \sqrt{c}) + c(a^2 - \sqrt{a}) \ge 0 \text{ ។}$$

87. គេឱ្យ $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ និង $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ ។

ចូរស្រាយតាមកំណើនថា :

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + ... + \frac{a_n^2}{x_n} \ge \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n} \text{ ។}$$

88. គេឱ្យ $a\ ;\ b\ ;\ c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc = 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}\quad ?$$

89. គេឱ្យ $x\ ;\ y\ ;\ z>0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y}\geq\frac{1}{2}$$

90. គេឱ្យស្វ៊ីត $a_1\ ;\ a_2\ ;\ ....;\ a_n$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ :

$a_1=0\ ;|\,a_2\,|=|\,a_1+1\,|;...$ និង $|\,a_n\,|=|\,a_{n-1}+1\,|$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geq-\dfrac{1}{2}$ ។

91.គេឱ្យ $a\ ;\ b\ ;\ c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)\quad ។$$

92.គេឱ្យ $a\ ;\ b\ ;\ c$ ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយ ។

ចូរបង្ហាញថា :

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\quad ។$$

93.គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\geq 2\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C\quad ។$$

94.គេឱ្យ $A\ ;\ B\ ;\ C$ ជាមុំក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2} \ge 3\sqrt{3}$

95.គេឱ្យ $A\,;\,B\,;C$ ជាមុំស្រួចក្នុងរបស់ត្រីកោណ ABC មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $(1+\tan A)(1+\tan B)(1+\tan C) \ge (1+\sqrt{3})^3$ ។

96.គេឱ្យ $a\,;\,b\,;c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា :

$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \ge 9(ab+bc+ca)$ ។

97.ប្រសិនបើ $xyx=(1-x)(1-y)(1-z)$ ដែល $0 \le x;y;z \le 1$

ចូរបង្ហាញថា $x(1-z)+y(1-x)+z(1-y) \ge \frac{3}{4}$ ។

98.គេឱ្យ $a\,;\,b\,;\,c$ ជាប្រវែងជ្រុងរបស់ត្រីកោណមួយដែលមាន

បរិមាត្រស្មើ 2 ។

ចូរស្រាយថា $\frac{3}{2} < a^2+b^2+c^2+2abc < 2$ ។

99.គេឱ្យ $x\,;\,y\,;\,z$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x+y+z=1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right) \ge 8$ ។

100. គេឱ្យ $a\,;b\,;c$ ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a^2+b^2+c^2=1$

បង្ហាញថា $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge 3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$

101. គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a^2+ab+b^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{2b^2+bc+c^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{2c^2+ca+a^2}}\geq\frac{a+b+c}{2}$$

102. គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{29a^3-b^3}{ab+6a^2}+\frac{29b^3-c^3}{bc+6b^2}+\frac{29c^3-a^3}{ca+6c^2}\leq 4(a+b+c)$$

103. គេឱ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព :

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}$$

104. គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ដែល $a+b+c=1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ca+2b^2+2b}\geq\frac{1}{ab+bc+ca}$$

105. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$

ហើយមុំក្នុង A,B,C ជាមុំស្រួចឬមុំកែង ។

តាង S ជាផ្ទៃក្រឡានៃ $\Delta\ ABC$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\geq\frac{9}{16S^2}$ ។

106. ចូរបង្ហាញថា $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\geq\frac{4}{xy+yz+zx}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមានខុសគ្នា x,y,z ។

107. ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\dfrac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \le \dfrac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c,d ។

108. គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$$

109. គេឱ្យ a , b, x , y , z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{x}{ay+bz}+\dfrac{y}{az+bx}+\dfrac{z}{ax+by}\ge\dfrac{3}{a+b}$

110. គេឱ្យ $n\ge 2$ ជាចំនួនគត់ ហើយ $x_1 , x_2 , ..., x_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន

ដោយដឹងថា $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+....+x_n^{\,2}=1$ ។ ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ :

$$\frac{x_1^{\,5}}{x_2+x_3+...+x_n}+\frac{x_2^{\,5}}{x_3+...+x_n+x_1}+...+\frac{x_n^{\,5}}{x_1+x_2+...+x_{n-1}}$$

111. គេឱ្យ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ចូរកំណត់តម្លៃអប្បបរមានៃផលបូក :

$$S=x_1+\frac{x_2^{\,2}}{2}+\frac{x_3^{\,3}}{3}+.....+\frac{x_n^{\,n}}{n}$$ ។

(Poland 1995)

112. ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c , d គេមាន :

$$a^4b+b^4c+c^4d+d^4a\ge abcd(a+b+c+d)$$

113. គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}}\geq 3$$

(MOP 2002)

114. ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c គេមាន :

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}\geq\frac{3}{4}$$

115. ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a , b , c គេមាន :

$$\left(\frac{a+2b}{a+2c}\right)^3+\left(\frac{b+2c}{b+2a}\right)^3+\left(\frac{c+2a}{c+2b}\right)^3\geq 3$$

116. គេឱ្យ a , b , c , x , y , z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $x+y+z=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា :

$$ax+by+cz+2\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}\leq a+b+c$$

117. គេឱ្យ a ,b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $5+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq(1+a)(1+b)(1+c)$

118. គេឱ្យ a ,b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)}+\frac{b^3}{(2b^2+c^2)(2b^2+a^2)}+\frac{c^3}{(2c^2+a^2)(2c^2+b^2)}\leq\frac{1}{a+b+c}$$

119. គេឱ្យ a ,b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3)\geq(a+b+c)^3$$

120. គ្រប់ $a,b,c>0$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$

121. ចូរស្រាយថាគ្រប់ $a,b,c>0$ គេមាន :

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{a(b+c)}+\frac{c^2+a^2-b^2}{b(c+a)}+\frac{a^2+b^2-c^2}{c(a+b)}\ge\frac{3}{2}$$

122. គេឱ្យ $a\ ,\ b\ ,\ c>0$ ដែល $a+b+c=1$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\sqrt{ab+c}+\sqrt{bc+a}+\sqrt{ca+b}\ge 1+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$$

123. គេឱ្យ $a\ ,\ b\ ,\ c>0$ ដែល $abc=8$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a^2}{\sqrt{(a^3+1)(b^3+1)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(b^3+1)(c^3+1)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(c^3+1)(a^3+1)}}\ge\frac{4}{3}$$

124.ចូរស្រាយថាគ្រប់ចំនួនពិត $0<x_1,x_2,.....,x_n\le\frac{1}{2}$ គេមានវិសមភាព :

$$\left(\frac{n}{x_1+x_2+...+x_n}-1\right)^n\le\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}-1\right)$$

125. បង្ហាញថាគ្រប់ $a,\ b\ ,\ c>0$ គេបាន :

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}+\frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)}+\frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)}\le\frac{1}{3}$$

126. បង្ហាញថាគ្រប់ $a,\ b\ ,\ c>0$ គេបាន :

$$\sqrt[3]{4a^3+4b^3}+\sqrt[3]{4b^3+4c^3}+\sqrt[3]{4c^3+4a^3}\le\frac{4a^2}{a+b}+\frac{4b^2}{b+c}+\frac{4c^2}{c+a}$$

127. គេមាន $\mathbf{a, b, c, x, y, z \in IR}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព :

$$(a+b+c)(x+y+z)=3$$

និង $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=4$

ចូរបង្ហាញថា $ax+by+cz \geq 0$ ។

128. គេឱ្យ $a, b, c > 1$ ដែល $\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{b^2-1}+\frac{1}{c^2-1}=1$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1} \leq 1$ ។

129. បង្ហាញថាគ្រប់ $a, b, c > 0$ គេមាន :

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

130. គេឱ្យ $n \geq 2$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_1, a_2, ..., a_n$ ដែល $a_1.a_2....a_n = 1$

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\sqrt{\frac{{a_1}^2+1}{2}}+\sqrt{\frac{{a_2}^2+1}{2}}+...+\sqrt{\frac{{a_n}^2+1}{2}} \leq a_1+a_2+...+a_n$$

131. គេឱ្យ $a, b, c, x, y, z \in IR_+$ ដែល $xy+yz+zx=3$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a(y+z)}{b+c}+\frac{b(z+x)}{c+a}+\frac{c(x+y)}{a+b} \geq 3$ ។

132. គេឱ្យ $a, b, c > 0$ ដែល $a+b+c=3$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a}{ab+1}+\frac{b}{bc+1}+\frac{c}{ca+1} \geq \frac{3}{2}$ ។

133. គេឱ្យ $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{a_1+\sqrt{a_1a_2}+\sqrt[3]{a_1a_2a_3}+...+\sqrt[n]{a_1a_2..a_n}}{n} \le \sqrt[n]{a_1.\frac{a_1+a_2}{2}...\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}}$$

134. ចូរស្រាយថាគ្រប់ $a, b, c > 0$ គេមាន :

$$\frac{ab-bc+ca}{b^2+c^2}+\frac{bc-ca+ab}{c^2+a^2}+\frac{ca-ab+bc}{a^2+b^2} \ge \frac{3}{2}$$

135. គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{a^2+bc}{b^2+ca}+\frac{b^2+ca}{c^2+ab}+\frac{c^2+ab}{a^2+bc} \le \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$$

136. បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x, y, z ដែល $x+y+z=1$ គេមាន :

$$\sqrt{x+(y-z)^2}+\sqrt{y+(z-x)^2}+\sqrt{z+(x-y)^2} \ge \sqrt{3}$$

137. គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន និង គ្មានពីរចំនួនណាស្មើសូន្យ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{ab+bc-ca}{c^2+a^2}+\dfrac{bc+ca-ab}{a^2+b^2}+\dfrac{ca+ab-bc}{b^2+c^2} \ge \dfrac{3}{2}$

138. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\sqrt{1+\frac{2ab}{a^2+b^2}} \ge 2+\sqrt{2}$$

139. គេឱ្យ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{c}{3a-b+c}+\dfrac{a}{3b-c+a}+\dfrac{b}{3c-a+b} \ge 1$

140. គេឱ្យ a , b , c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$a^2.\frac{a+2c}{3b}+b^2.\frac{b+2a}{3c}+c^2.\frac{c+2b}{3a}\geq a^2+b^2+c^2$$

141. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន x , y , z ចូរស្រាយថា :

$$(x^2-yz)^2\geq\frac{27}{8}xy(xy-z^2)(zx-y^2)$$

142. គេឱ្យ a , b , c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $abc=1$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a^3+b^3+c^3+3}{4}\geq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$

143. គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=2$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{a}{b(a+b)}+\frac{b}{c(b+c)}+\frac{c}{a(a+c)}\geq 2$

144. គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b , c ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a^2+ac}{2b+a+c}+\frac{b^2+ba}{2c+a+b}+\frac{c^2+cb}{2a+b+c}\geq\frac{a+b+c}{2}$$

145. គេឱ្យ $a , b,c\in IR^+$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a^2+ab+b^2}{(a+b)^2}+\frac{b^2+bc+c^2}{(b+c)^2}+\frac{c^2+ca+a^2}{(c+a)^2}\geq\frac{9}{4}$$

146. គេឱ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ដែល $\mathbf{a+b+c=1}$ ។

ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a}{4b+3bc+4c}+\frac{b}{4c+3ca+4a}+\frac{c}{4a+3ab+4b}\geq\frac{1}{3}$$

147. គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ដែល $\mathbf{a+b+c=3}$ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{a}{b+c-1}+\dfrac{b}{c+a-1}+\dfrac{c}{a+b-1}\geq 3$

148. គ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ដែល $\mathbf{a+b+c=3}$ ។

ចូរស្រាយថា :

$$\frac{a}{2b+3c-1}+\frac{b}{2c+3a-1}+\frac{c}{2a+3b-1}\geq\frac{3}{4}$$

149. គេឱ្យ $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c>0}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\frac{\sqrt{a^3+b^3}}{a^2+b^2}+\frac{\sqrt{b^3+c^3}}{b^2+c^2}+\frac{\sqrt{c^3+a^3}}{c^2+a^2}\geq\frac{6(ab+bc+ca)}{(a+b+c)\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

150. បើ $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាននោះចូរស្រាយថា :

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{b^2(c+a)}{c^2+a^2}+\frac{c^2(a+b)}{a^2+b^2}\geq a+b+c$$

151. បើ $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាននោះចូរស្រាយថា

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{9(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

152. បើ $\mathbf{a, b, c}$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\mathbf{ab+bc+ca+abc \geq 4}$

ចូរស្រាយថា :

$$\frac{1}{(a+1)^2(b+c)}+\frac{1}{(b+1)^2(c+a)}+\frac{1}{(c+1)^2(a+b)} \leq \frac{3}{8}$$

153. បើ $\mathbf{a, b, c}$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\mathbf{abc = 1}$ ។ ចូរស្រាយថា

$$\frac{1}{(a+1)^2(b+c)}+\frac{1}{(b+1)^2(c+a)}+\frac{1}{(c+1)^2(a+b)} \leq \frac{3}{8}$$

154. គេមាន $\mathbf{a , b , c , d}$ ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា :

$$(a+b+c+d)^3 \geq 4\left[a(c+d)^2+b(d+a)^2+c(a+b)^2+d(b+c)^2\right]$$

155. បើ $\mathbf{a, b, c}$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $\mathbf{abc = 1}$ នោះចូរស្រាយថា :

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{b+c}}+\frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{c+a}}+\frac{\sqrt[3]{c^2}}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

156. គេឱ្យ $\mathbf{a, b, c}$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2} \geq 1$$

157. គេឱ្យ $\mathbf{a, b, c}$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា

$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{b^2+c^2}+\frac{b+c}{c^2+a^2}+\frac{c+a}{a^2+b^2}\right)$$

158. បើ $\mathbf{a , b , c}$ ជាចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន នោះចូរស្រាយថា :

$$2(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq (a+1)(b+1)(c+1)(abc+1)$$

159. គេឱ្យ $x, y, z > 0$ និង $n \in IN$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$(x^{n+3} - x^n + 3)(y^{n+3} - y^n + 3)(z^{n+3} - z^n + 3) \geq (x + y + z)^3$$

160. បើ $a, b, c > -1$ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{1+a^2}{1+b+c^2} + \frac{1+b^2}{1+c+a^2} + \frac{1+c^2}{1+a+b^2} \geq 2$$

161. បើ $a, b, c \in IR$ បង្ហាញថា : $\sqrt[4]{a^4 + b^4 + c^4 + 1} \geq \sqrt[5]{a^5 + b^5 + c^5 + 1}$

162. បើ x, y, z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាននោះចូរស្រាយថា :

$$\frac{xy}{xy+x^2+y^2} + \frac{yz}{yz+y^2+z^2} + \frac{zx}{zx+z^2+x^2} \leq \frac{x}{2x+z} + \frac{y}{2y+x} + \frac{z}{2z+y}$$

163. គេឱ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) \geq (ab + bc + ca)^3$$

164. គេឱ្យ $a, b, c > 0$ ដែល $a + b + c = 1$ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{a^2 + b}{b + c} + \dfrac{b^2 + c}{c + a} + \dfrac{c^2 + a}{a + b} \geq 2$ ។

165. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \alpha x + \beta - x^\alpha$ ដែល $\alpha > 0, \beta > 0$

$\alpha + \beta = 1$ ។

ក. គ្រប់ $x \in [0,1]$ បង្ហាញថា $f(x) \geq 0$ ។

ខ. គ្រប់ $u, v > 0$ ដែល $u \leq v$ បង្ហាញថា $u^\alpha . v^\beta \leq \alpha u + \beta v$ ។

166. គេឱ្យ $a, b, c, x_1, x_2, x_3, ..., x_5$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល

$a+b+c=1$ និង $x_1.x_2.x_3.x_4.x_5=1$ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$(ax_1^2+bx_1+c)(ax_2^2+bx_2+c)...(ax_5^2+bx_5+c)\geq 1$$ ។

167. រង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ប៉ះជ្រុង BC , CA , AB រៀងគ្នាត្រង់

A_1 , B_1 , C_1 ។ស្រាយថា $\sqrt{\frac{AB_1}{AB}}+\sqrt{\frac{BC_1}{BC}}+\sqrt{\frac{CA_1}{CA}}\leq\frac{3}{\sqrt{2}}$

168. គេឱ្យ $0<x<\frac{\pi}{2}$ ។ ចូរស្រាយថា

$$\left(1+\frac{1}{\sin^n x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^n x}\right)>\left(1+2^{\frac{n}{2}}\right)^2 \quad , n\in IN^*$$ ។

169. គេឱ្យ a,b,c ជាជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

ក. $3<bc+ca+ab)\leq(a+b+c)^2<4(bc+ca+ab)$

ខ. $a^2+b^2+c^2\geq\frac{36}{35}(p^2+\frac{abc}{p})$ ដែល $p=\frac{a+b+c}{2}$

គ. $\frac{3}{2}\leq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<3$

ឃ. $(p-a)(p-b)(p-c)\leq\frac{abc}{8}$

170. ត្រីកោណ ABC មានជ្រុង a,b,c ហើយតាង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង

និង p ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geq\frac{1}{r^2}$ ។

171. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

ក. $abc < a^2(p-a)+b^2(p-b)+c^2(p-c) \le \frac{3}{2}abc$

ខ. $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b) \ge 48(p-a)(p-b)(p-c)$

គ. $a^3(p-a)+b^3(p-b)+c^3(p-c) \le abcp$

ដែល a, b, c ជាជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ និង p ជាកន្លះបរិមាត្រ ។

172. បើ a, b, c ជាជ្រុងនៃត្រីកោណមួយនោះចូរស្រាយថា :

$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \ge 0$

តើពេលណាទើបគេបានសមភាព ។

173. គេតាង a, b, c ជាជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ហើយ $p = \frac{a+b+c}{2}$ ។

ចូរបង្ហាញថា :

ក. $64p^3(p-a)(p-b)(p-c) \le 27a^2b^2c^2$

ខ. $\frac{2p}{abc} \le \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

គ. $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \ge \frac{9}{p}$

ឃ. $\frac{15}{4} \le \frac{p+a}{b+c}+\frac{p+b}{c+a}+\frac{p+c}{a+b} < \frac{9}{2}$

ង. $\sqrt{p} < \sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c} \le \sqrt{3p}$

174. គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{a,b,c}$ ។ តាង $\mathbf{R}$ ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង នៃត្រីកោណនេះ ។

ក. ស្រាយថា $\mathbf{a^2+b^2+c^2=8R^2(1+\cos A\cos B\cos C)}$

ខ. ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទឡិបនិចចូរទាញថា $\mathbf{\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}}$ ។

គ. បើ $\mathbf{A,B,C}$ ជាមុំស្រួចនោះ $\mathbf{2<\sin A+\sin B+\sin C<\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ ។

175. ក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយចូរស្រាយថា :

ក. $\mathbf{a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{2S}{R}}$

ខ. $\mathbf{\sin A+\sin B+\sin C \ge \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$

176. គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{a,b,c}$ ។

ក. ស្រាយថា $\mathbf{\sin\frac{A}{2}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}}}$ រួចទាញថា $\mathbf{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}}$ ។

ខ. តាង $\mathbf{r}$ និង $\mathbf{R}$ ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ។

បង្ហាញថា $\mathbf{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R}}$ រួចទាញថា $\mathbf{R\ge 2r}$ ។

177. គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយ ។

ចូរបង្ហាញថា $\mathbf{\cos A+\sqrt{2}(\cos B+\cos C)\le 2}$?

តើពេលណាទើបសមភាពនេះក្លាយជាសមភាព ?

178. ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ចូរស្រាយថា :

$$\cos A+\lambda(\cos B+\cos C)\le 1+\frac{\lambda^2}{2}$$ គ្រប់ចំនួនពិត $\lambda\ne 0$ ។

179. គេឱ្យ x,y,z ជាចំនួនពិតដែល $xyz>0$ ។

ចូរស្រាយថា $x\cos A+y\cos B+z\cos C\le \frac{1}{2}(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y})$

ដែល A,B,C ជាមុំក្នុងនៃត្រីកោណមួយ ។

180. ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

ក. $\cos^2(A-B)+\cos^2(B-C)+\cos^2(C-A)\ge 24\cos A\cos B\cos C$

ខ. $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}$

គ. $\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\ge 1$

181. ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ចូរស្រាយថា :

ក. $\sqrt{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+5}+\sqrt{\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+5}+\sqrt{\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+5}\le 4\sqrt{3}$

ខ. $\tan^6\frac{A}{2}+\tan^6\frac{B}{2}+\tan^6\frac{C}{2}\ge\frac{1}{9}$

គ. $\cot A+\cot B+\cot C\ge\sqrt{3}$

182. ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ចូរស្រាយថា :

ក. $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\ge 3\sqrt{3}$

ខ. $\cot^2\frac{A}{2}+\cot^2\frac{B}{2}+\cot^2\frac{C}{2}\geq 9$

183. ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណ ABC ចូរស្រាយថា :

$$\frac{1+\cos A\cos B\cos C}{\sin A\sin B\sin C}\geq\sqrt{3}$$

តើគេបានសមភាពនៅពេលណា ?

184. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a, b, c ។

ស្រាយថាបើ $a<\frac{b+c}{2}$ នោះ $A<\frac{B+C}{2}$ ។

185. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a, b, c ។

តាង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង S ជាផ្ទៃក្រលារបស់ត្រីកោណនេះ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $a\sin A+b\sin B+c\sin C\geq\frac{2\sqrt{3}S}{R}$

186. ត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ $A>B>C$ ។

តាង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង ហើយ r ជាចម្ងាយរវាងផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$2R\cos A<R-d<2R\cos B<R+d<2R\cos C$$

187. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a, b, c ។

តាង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងហើយ r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $9r\leq a\sin A+b\sin B+c\sin C\leq\frac{9R}{2}$ ។

188. គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{a,b,c}$ ។

តាង $\mathbf{S}$ ជាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណនេះ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

ក. $\mathbf{a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}\,S}$

ខ. $\mathbf{a^4+b^4+c^4 \ge 16S^2}$

គ. $\mathbf{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2 \ge 16S^2}$

ឃ. $\mathbf{4\sqrt{3}S \le \dfrac{9abc}{a+b+c}}$

ង. $\mathbf{(abc)^2 \ge (\dfrac{4S}{\sqrt{3}})^3}$

189. គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{a,b,c}$ ។

តាង $\mathbf{S}$ ជាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណនេះ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$$\mathbf{27(b^2+c^2-a^2)^2(c^2+a^2-b^2)^2(a^2+b^2-c^2)^2 \le (4S)^6}$$

190. គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{a,b,c}$ ។

តាង $\mathbf{S}$ ជាផ្ទៃក្រលានៃត្រីកោណនេះ ហើយយក $\mathbf{u = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}}$

និង $\mathbf{v = bc+ca+ab}$ ។

ស្រាយថា $\mathbf{\dfrac{(u-v)(3u-5v)}{12} \le S^2 \le \dfrac{(u-v)^2}{12}}$ ។

191. តាង $\mathbf{S}$ ជាផ្ទៃក្រឡា និង $\mathbf{a,b,c}$ ជាជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។

គ្រប់ $\mathbf{n>0}$ បង្ហាញថា $\mathbf{S \le \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \sqrt[3]{\dfrac{a^n+b^n+c^n}{3}}}$ ។

192. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a, b, c ។ គេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

យក O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង H ជាអរតូសង់នៃត្រីកោណ ABC ។ ស្រាយថា $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$

និង $IH^2 = 2r^2 - 4R^2 \cos A \cos B \cos C$ ។

193. គេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណមួយដែលមាន p ជាកន្លះបរិមាត្រ ។ ចូរស្រាយថា :

ក. $9r(r + 4R) \le 3p^2 \le (4R + r)^2$

ខ. $6r(r + 4R) \le 2p^2 \le R^2 + 2(r + 2R)^2$

គ. $2p^2(2R - r) \le R(4R + r)^2$

ឃ. $r(16R - 5r) \le p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$

194. ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a, b, c គេតាង p ជាកន្លះបរិមាត្រ r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។ ចូរស្រាយថា :

ក. $p^2 \ge 27r^2$

ខ. $2p^2 \ge 27rR$

គ. $36r^2 \le a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2$

ឃ. $3(2rR - r^2) \le \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \le r^2 + 2R^2$

ង. $36r^2 \le bc + ca + ab \le 9R^2$

ច. $5rR-r^2 \le \frac{bc+ca+ab}{4} \le (r+R)^2$

ឆ. $a(p-a)+b(p-b)+c(p-c) \le 9Rr$

ជ. $abc \le 8rR^2+(12\sqrt{3}-16)Rr^2$

ឈ. $\frac{\sqrt{3}}{R} \le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \frac{\sqrt{3}}{2r}$

ញ. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2(R+r)}$

ដ. $\frac{1}{R^2} \le \frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab} \le \frac{1}{4r^2}$

ឋ. $4r^2 \le \frac{abc}{a+b+c}$

ឌ. $abc \le (R\sqrt{3})^3$

195. គេឱ្យត្រីកោណសមញ្ញ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ គេតាង p ជាកន្លះបរិមាត្រ r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង S ជាផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ ហើយ r_A , r_B , r_C តាងរៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណក្នុងមុំរៀងគ្នា A , B , C ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក. $\frac{a^2}{r_Br_C}+\frac{b^2}{r_Cr_A}+\frac{c^2}{r_Ar_B} \ge 4$

ខ. $p-a < \frac{4R-r_A}{\sqrt{3}}$

គ. $\sqrt{3}+\frac{a^2+(b-c)^2}{2S}\le\frac{4R-r_A}{p-a}$

ឃ. $p^2\le {r_A}^2+{r_B}^2+{r_C}^2$

ង. $\frac{r_A}{a}\times\frac{r_B}{b}\times\frac{r_C}{c}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$

ច. $\frac{r_Br_C+r_Cr_A+r_Ar_B}{bc+ca+ab}\ge\frac{3}{4}$

ឆ. $9r\le r_A+r_B+r_C\le\frac{9}{2}R$

ជ. ${r_A}^2+{r_B}^2+{r_C}^2\ge\frac{27}{4}R^2$

ឈ. $r^2+{r_A}^2+{r_B}^2+{r_C}^2\ge 7R^2$

ញ. $S\sqrt{3}\le(R+r)^2$

196. គេឱ្យត្រីកោណសមញ្ញ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ គេតាង p ជាកន្លះបរិមាត្រ r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង S ជាផ្ទៃក្រឡារបស់ត្រីកោណ ហើយ m_a , m_b , m_c តាងរៀងគ្នាជាមេដ្យាន និង h_a, h_b, h_c ជាកម្ពស់គូសចេញពីកំពូលរៀងគ្នា A , B , C ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

ក. $9r\le m_a+m_b+m_c\le\frac{9}{2}R$

ខ. $9r\le h_a+h_b+h_c\le\frac{9R}{2}$

គ. $S \le \frac{\sqrt{3}}{27}(m_a + m_b + m_c)^2$

ឃ. $m_a{}^2 + m_b{}^2 + m_c{}^2 \ge 3\sqrt{3}S$

ង. $m_a + m_b + m_c \le 4R + r$

197. គេឱ្យត្រីកោណសមញ្ញ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$

តាង ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C រៀងគ្នាជាកន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A, B, C និង S ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ។ ចូរស្រាយថា :

ក. $\ell_A{}^2 + \ell_B{}^2 + \ell_C{}^2 \ge 3\sqrt{3}S$

ខ. $16(\ell_A{}^4 + \ell_B{}^4 + \ell_C{}^4) \le 9(a^4 + b^4 + c^4)$

គ. $\ell_A . \ell_B . \ell_C \le p.S$ ដែល $p = \frac{a+b+c}{2}$ ។

198. គេយក P ជាចំនុចនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ហើយ D, E, F ជាប្រសព្វរវាង

AP, BP, CP ជាមួយជ្រុង BC, CA, AB រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថា $\frac{AD}{AP} + \frac{BE}{BP} + \frac{CF}{CP} \ge \frac{9}{2}$ ។

199. រង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ប៉ះនឹងជ្រុង BC, CA, AB រៀងគ្នាត្រង់ចំណុច D, E, F ។

ស្រាយថា $\left(\frac{BC}{EF}\right)^2 + \left(\frac{CA}{FD}\right)^2 + \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 \ge 12$

200. គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានកម្ពស់ $\mathbf{AD, BE, CF}$ ។

ស្រាយថា $\left(\frac{EF}{BC}\right)^2+\left(\frac{FD}{CA}\right)^2+\left(\frac{DE}{AB}\right)^2\ge\frac{3}{4}$

201. គេមានត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានជ្រុង $\mathbf{a,b,c}$ និងផ្ទៃក្រលា $\mathbf{S}$ ។

តាង $\mathbf{T}$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណសមង្ស័ចារឹកក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ខាងលើ ។

ចូរស្រាយថា $T\ge\frac{2\sqrt{3}S^2}{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S}$ ។

202. គេមានត្រីកោណពីរ $\mathbf{ABC}$ និង $\mathbf{XYZ}$ ចារឹកក្នុងរង្វង់តែមួយ ។

គេដឹងថា $AX\parallel BC$, $BY\parallel CA$, $CZ\parallel AB$ ។

តាង $\mathbf{a,b,c}$ ជាជ្រុងនៃ ΔABC និង $\mathbf{x,y,z}$ ជាជ្រុងនៃ ΔXYZ ។

ស្រាយថា $\frac{x+y+z}{a+b+c}\le 1$ និង $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\le 3$ ។

203. គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយកែងត្រង់ $\mathbf{A}$ និងមានកម្ពស់ $AH=h$ ។

តាង $\mathbf{r}$ ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយថា $\sqrt{2}-1\le\frac{r}{h}<\frac{1}{2}$?

204. គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយកែងត្រង់ $\mathbf{A}$ ។

គេតាង $\mathbf{r}$ ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព :

$r\ge\sqrt{\frac{2}{2}AB.AC}-\frac{BC}{2}$ ។ តើពេលណាទើបគេបានសមភាព ?

205. គេតាង $\mathbf{P}$ ជាចំនុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ហើយយក $\mathbf{D,E,F}$ ជាចំនុច

ប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ $\mathbf{AP,BP,CP}$ ជាមួយជ្រុង $\mathbf{BC,CA,AB}$ រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\mathbf{AP}}{\mathbf{PD}}+\frac{\mathbf{BP}}{\mathbf{PE}}+\frac{\mathbf{CP}}{\mathbf{PF}}\ge \mathbf{6}$ និង $\frac{\mathbf{AP}}{\mathbf{PD}}.\frac{\mathbf{BP}}{\mathbf{PE}}.\frac{\mathbf{CP}}{\mathbf{PF}}\ge \mathbf{8}$

206. គេតាង $\mathbf{A_1,B_1,C_1}$ ជាបីចំនុចស្ថិតនៅលើជ្រុង $\mathbf{BC,CA,AB}$ នៃ $\Delta\mathbf{ABC}$

ចូរបង្ហាញថា $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}<\frac{\mathbf{AA_1+BB_1+CC_1}}{\mathbf{AB+BC+CA}}<\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$ ។

207. ក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយចូរស្រាយថា :

$$\frac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\cos A+\cos B}+\frac{\cos^2 B+\cos^2 C}{\cos B+\cos C}+\frac{\cos^2 C+\cos^2 A}{\cos C+\cos A}\ge 1+\frac{r}{R}$$

208. គេមានត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយកែងត្រង់ $\mathbf{A}$ ។ តាង $\mathbf{M\ ,N,P}$ ជាចំនុចប៉ះ

រវាងរង្វង់ចារឹកក្នុងជាមួយជ្រុង $\mathbf{BC,CA,AB}$ ។ ចូរស្រាយថា :

$$\mathbf{MN+MP\le\frac{4\sqrt{3}}{9}BC}$$ ។

209. ត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត $\mathbf{O}$ កាំ $\mathbf{R}$ ។

តាង $\mathbf{R_1,R_2,R_3}$ ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ $\mathbf{OAB,OBC,OCA}$

រៀងគ្នា ។ ស្រាយថា $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R_1}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R_2}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R_3}}\ge\frac{\mathbf{3+2\sqrt{3}}}{\mathbf{R}}$?

210. បើ $\mathbf{ABCD}$ ជាប្រលេឡូក្រាមនោះបង្ហាញថា $\mathbf{|AB^2-BC^2|<AC.BD}$

211. បើ a,b,c ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ហើយ m_a,m_b,m_c ជាមេដ្យាន

និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនោះបង្ហាញថា :

ក. $\frac{a^2+b^2}{m_c}+\frac{b^2+c^2}{m_a}+\frac{c^2+a^2}{m_b}\le 12R$

ខ. $m_a(bc-a^2)+m_b(ca-b^2)+m_c(ab-c^2)\ge 0$

212. (APMO, 1996) តាង a,b,c ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

213. (IMO, 1964) តាង a,b,c ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\le 3abc$$

214. (IMO, 1983) តាង a,b,c ជាប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ចូរបង្ហាញថា :

$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$ ។

215. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយកែងត្រង់ A ។ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\ge 2$

ចូរស្រាយថា $AB^n+AC^n\ge BC^n$ ។

216. តាង h_a,h_b,h_c ជាប្រវែងកម្ពស់នៃត្រីកោណ ABC មួយដែលចារឹកក្រៅ

រង្វង់ផ្ចិត I និងកាំ r ។ ចូរស្រាយថា :

ក. $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$

ខ. $h_a+h_b+h_c\ge 9r$

217. (Korea, 1995) គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយហើយតាង L, M, N ជាចំនុចស្ថិតលើជ្រុង BC, CA, AB រៀងគ្នា ។ តាង P, Q និង R ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ AL, BM និង CN ជាមួយរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ ΔABC រៀងគ្នា ។ ចូរស្រាយថា $\frac{AL}{LP}+\frac{BM}{MQ}+\frac{CN}{NR}\geq 9$ ។

218. (Shortlist IMO, 1997) ប្រវែងជ្រុងនៃឆកោណ $ABCDEF$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $AB = BC, CD = DE$ និង $EF = FA$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geq\frac{3}{2}$ ។

219. គេយក AD, BE, CF ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណ ABC ហើយ PQ, PR, PS ជាចម្ងាយពីចំនុច P ទៅជ្រុង BC, CA, AB រៀងគ្នា ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{AD}{PQ}+\frac{BE}{PR}+\frac{CF}{PS}\geq 9$ ។

220. សន្មតថារង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ប៉ះទៅនឹងជ្រុង BC, CA, AD រៀងគ្នាត្រង់ D, E, F ។ បង្ហាញថា $EF^2 + FD^2 + DE^2 \leq \frac{p^2}{3}$

ដែល p ជាកន្លះបរិមាត្រនៃ ΔABC ។

221. ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង a, b, c និងតាង S ជាផ្ទៃក្រលានៃ ΔABC

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

ក. $a^2 + b^2 + c^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 4\sqrt{3}S$

ខ. $ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}S$

គ. $\dfrac{3(a+b+c)abc}{ab+bc+ca} \geq 4\sqrt{3}S$

222. តាង a, b, c ជាជ្រុង និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណមួយ ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{a^2}{b+c-a} + \dfrac{b^2}{c+a-b} + \dfrac{c^2}{a+b-c} \geq 3\sqrt{3}R$ ។

223. ចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មួយមានជ្រុង a, b, c, d ។ តាង S ជាផ្ទៃក្រឡា

របស់ចតុកោណនេះ ។ ចូរស្រាយថា :

ក. $S \leq \dfrac{ab+cd}{2}$

ខ. $S \leq \dfrac{ac+bd}{2}$

គ. $S \leq \left(\dfrac{a+c}{2}\right)\left(\dfrac{b+d}{2}\right)$

224. បើ P ជាចំនុចនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ដែល $\ell = PA, m = PB, n = PC$

នោះចូរបង្ហាញថា $(\ell m + mn + n\ell)(\ell + m + n) \geq a^2\ell + b^2 m + c^2 n$

ដែល a, b, c ជាជ្រុងនៃ ΔABC ។

225. គេតាង O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង G ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃ ΔABC មួយ ។

គេតាង r និង R រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុង និង ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ចូរស្រាយថា $OG \leq \sqrt{R(R-2r)}$ ។ (Balkan, 1996)

226. (Taiwan, 1997) គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O និងកាំ R ស្រាយថាបើ AO កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ OBC ត្រង់ D ហើយ BO កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ OCA ត្រង់ E ហើយ CO កាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ OAB ត្រង់ F នោះ $OD.OE.PF \geq 8R^3$ ។

227. (APMO, 1997) គេឱ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយ ។ បន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ A ជួបអង្កត់ BC ត្រង់ X និងជួបរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ ΔABC ត្រង់ Y ។ តាង $L_a = \dfrac{AX}{AY}$ ។គេកំណត់ L_b និង L_c តាមរបៀបដូចគ្នាដែរ ។ ចូរស្រាយថា $\dfrac{L_a}{\sin^2 A} + \dfrac{L_b}{\sin^2 B} + \dfrac{L_c}{\sin^2 C} \geq 3$?

228. (Balkan, 1999) គេឱ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ហើយតាង L, M, N ជាជើងនៃចំណោលកែងពីទីប្រជុំទម្ងន់ G នៃត្រីកោណ ABC ទៅលើជ្រុង BC, CA, AB រៀងគ្នា ។ ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{4}{27} < \dfrac{S_{LMN}}{S_{ABC}} \leq \dfrac{1}{4}$?

229. តាង D និង E ជាចំនុចនៅលើជ្រុង AB និង CA នៃត្រីកោណ ABC ដោយដឹងថា DE ស្របនឹង BC ហើយ DE ប៉ះនឹងរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃ ΔABC ។ចូរបង្ហាញថា $DE \leq \dfrac{AB + BC + CA}{8}$ ។

(Italy, 1999)

230. (Mediterranean, 2000) តាង P, Q, R, S ជាចំនុចកណ្តាល រៀងគ្នា

BC, CD, DA, AB នៃចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មួយ ។

ចូរស្រាយថា :

$$4(AP^2 + BQ^2 + CR^2 + DS^2) \le 5(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2)$$

231. គេតាង R និង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង កាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃ ΔABC ។

សន្មតថា $\angle A$ ជាមុំធំជាងគេនៃត្រីកោណ ABC ។

យក M ជាចំណុចកណ្តាលនៃ BC ហើយ X ជាប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ប៉ះ

ទៅនឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណABC ត្រង់ B និង C ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{r}{R} \ge \dfrac{AM}{AX}$ (Korea, 2004)

236. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយហើយយក O ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណនេះ ។

បន្ទាត់ OA, OB, OC ជួបជ្រុងនៃត្រីកោណត្រង់ A_1, B_1, C_1 រៀងគ្នា ។

តាង R_1, R_2, R_3 ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណOBC, OCA, OAB

រៀងគ្នាហើយ R ជាកាំនៃរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ ΔABC ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{OA_1}{AA_1}.R_1 + \dfrac{OB_1}{BB_1}.R_2 + \dfrac{OC_1}{CC_1}.R_3 \ge R$

327. មុំក្នុងនៃត្រីកោណ ABC មួយជាមុំស្រួច ហើយ $\angle ACB = 2\angle ABC$ ។

D ជាចំនុចមួយស្ថិតលើជ្រុង BC ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ $2\angle BAD = \angle ABC$

ចូរស្រាយថា $\dfrac{1}{BD} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}$?

(Mathematical Olympiad in Poland 1999)

238. ចំណុច $\mathbf{D}$ និង $\mathbf{E}$ ស្ថិតនៅលើជ្រុង $\mathbf{BC}$ និង $\mathbf{AC}$ នៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ រៀងគ្នា

បន្ទាត់ $\mathbf{AD}$ និង $\mathbf{BC}$ កាត់គ្នាត្រង់ $\mathbf{P}$ ។

$\mathbf{K}$ និង $\mathbf{L}$ ជាចំណុចនៅលើជ្រុង $\mathbf{BC}$ និង $\mathbf{AC}$ រៀងគ្នាដែល $\mathbf{CLPK}$

ជាប្រលេឡូក្រាម ។ ចូរស្រាយថា $\mathbf{\frac{AE}{EL}=\frac{BD}{DK}}$

(Mathematical Olympiad in Poland 2000)

239. បីចំណុចខុសគ្នា $\mathbf{A,B,C}$ ស្ថិតនៅលើរង្វង់ $\mathbf{(O)}$ ។

បន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ $\mathbf{(O)}$ ត្រង់ $\mathbf{A}$ និង $\mathbf{B}$ កាត់គ្នាត្រង់ $\mathbf{P}$ ។

បន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ $\mathbf{(O)}$ ត្រង់ $\mathbf{C}$ កាត់បន្ទាត់ $\mathbf{AB}$ ត្រង់ $\mathbf{Q}$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\mathbf{PQ^2=PB^2+QC^2}$?

(Mathematical Olympiad in Poland 2002)

240.បន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណសមង្ស័ $\mathbf{ABC}$ កាត់ជ្រុង $\mathbf{AB}$

និង $\mathbf{AC}$ ត្រង់ $\mathbf{D}$ និង $\mathbf{E}$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\mathbf{\frac{AD}{DB}+\frac{AE}{EC}=1}$?

(Mathematical Olympiad in Poland 1995)

241. បន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ $\mathbf{A,B,C}$ នៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយកាត់ជ្រុងឈមត្រង់

$\mathbf{D,E,F}$ រៀងគ្នា ហើយកាត់រង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ត្រង់

$\mathbf{K,L,M}$ រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា $\mathbf{\frac{AD}{DK}+\frac{BE}{EL}+\frac{CF}{FM}\ge 9}$?

(Mathematical Olympiad in Poland 1996)

242. ក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមាន $\mathbf{AB > AC}$ ។ $\mathbf{D}$ ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $\mathbf{BC}$ ហើយ $\mathbf{E}$ ស្ថិតនៅលើ $\mathbf{AC}$ ។ $\mathbf{P}$ និង $\mathbf{Q}$ ជាជើងនៃចំណោលកែងពីចំណុច $\mathbf{B}$ និង $\mathbf{E}$ រៀងគ្នាទៅលើបន្ទាត់ $\mathbf{AD}$ ។

បង្ហាញថា $\mathbf{BE = AE + AC}$ លុះត្រាតែ $\mathbf{AD = PQ}$?

(Mathematical Olympiad in Poland 1997)

243.គេតាង $\mathbf{O}$ ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង $\mathbf{H}$ ជាអរតូសង់នៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយដែលមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថាផ្ទៃក្រឡាមួយនៃត្រីកោណ $\mathbf{AOH, BOH, COH}$ ស្មើនឹងផលបូកនៃផ្ទៃក្រឡាពីរផ្សេងទៀត ?

(Asian–Pacific Mathematical Olympiad 2004)

244. ក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ចំណុច $\mathbf{M}$ និង $\mathbf{N}$ ស្ថិតលើជ្រុង $\mathbf{AB}$ និង $\mathbf{AC}$ រៀងគ្នាដោយដឹងថា $\mathbf{MB = BC = CN}$ ។

តាង $\mathbf{r}$ និង $\mathbf{R}$ រៀងគ្នាជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនិង ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ ។

ចូរសរសេរកន្សោមផលធៀប $\mathbf{\dfrac{MN}{BC}}$ ជាអនុគមន៍នៃ $\mathbf{R}$ និង $\mathbf{r}$ ។

(Asian–Pacific Mathematical Olympiad 2005)

245. គេឱ្យ ABC ជាត្រីកោណមួយមានមុំក្នុងជាមុំស្រួច ហើយ $\angle BAC = 60^{o}$ និង $AB > AC$ ។ យក I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង H ជាអរតូសង់នៃΔABC ។ ចូរស្រាយថា $2\angle AHI = 3\angle ABC$?

(Asian–Pacific Mathematical Olympiad 2007)

246. គេតាង G ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ ABC ហើយ M ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង BC ។ បន្ទាត់គូសចេញពី G ស្របនឹង BC កាត់ AB ត្រង់ X ហើយគាត់ AC ត្រង់ Y ។ សន្មតថា XC និង GB កាត់គ្នាត្រង់ Q ហើយ YB និង GC កាត់គ្នាត្រង់ P ។

ចូរស្រាយថាត្រីកោណ MPQ ដូចគ្នានឹងត្រីកោណ ABC ?

(Asian–Pacific Mathematical Olympiad 1991)

247. លើជ្រុង AB និង BC នៃការេ $ABCD$ គេដៅចំណុច E និង F រៀងគ្នាដែល $BE = BF$ ។ តាង BN ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណ BCE ។

ចូរស្រាយថា $\angle DNF = 90^{o}$?

(Austrian–Polish Mathematical Competition 1979)

248. រង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ប៉ះជ្រុង BC និង AC ត្រង់ D និង E រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថាបើ $AD = BE$ នោះ ABC ជាត្រីកោណសមបាត ?

(Austrian Mathematical Olympiad 2006)

249. ក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយគេយក $\mathbf{E}$ ជាចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុង $\mathbf{AC}$ និង $\mathbf{F}$ ជាចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុង $\mathbf{BC}$ ។ តាង $\mathbf{G}$ ជាចំណោលកែងពី $\mathbf{C}$ ទៅ $\mathbf{AB}$ ។ បង្ហាញថា $\mathbf{\Delta EFG}$ ជាត្រីកោណសមបាតលុះត្រាតែ $\mathbf{\Delta ABC}$ សមបាត ។

(Austrian Mathematical Olympiad 2008)

250. គេយក $\mathbf{D, E}$ និង $\mathbf{F}$ រៀងគ្នាជាចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុង $\mathbf{BC, CA}$ និង $\mathbf{AB}$ នៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ។ យក $\mathbf{H_a, H_b, H_c}$ ជាជើងនៃចំណោលកែងពី $\mathbf{A, B, C}$ ទៅជ្រុងឈមរៀងគ្នា ។យក $\mathbf{P, Q, R}$ ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $\mathbf{H_bH_c}$ $\mathbf{H_cH_a}$ និង $\mathbf{H_aH_b}$ រៀងគ្នា ។

បង្ហាញថា $\mathbf{PD, QE}$ និង $\mathbf{RF}$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំនុចមួយ ?

(Austrian Mathematical Olympiad 2009)

251.ក្នុងចតុកោណប៉ោង $\mathbf{ABCD}$ មួយគេយក $\mathbf{E}$ ជាចំនុចប្រសព្វរវាងអង្កត់ទ្រូង ហើយ $\mathbf{S_1, S_2}$ និង $\mathbf{S}$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃ $\mathbf{ABE, CDE}$ និង $\mathbf{ABCD}$ រៀងគ្នា

ចូរស្រាយថា $\sqrt{\mathbf{S_1}} + \sqrt{\mathbf{S_2}} \le \sqrt{\mathbf{S}}$?

(Austrian Mathematical Olympiad 1990)

252. បញ្ចកោណប៉ោង $\mathbf{ABCDE}$ មួយចារឹកក្នុងរង្វង់ ។ ចម្ងាយពី $\mathbf{A}$ ទៅបន្ទាត់ $\mathbf{BC, CD, DE}$ ស្មើរៀងគ្នា $\mathbf{a, b, c}$ ។

ចូរគណនាចម្ងាយពីកំពូល $\mathbf{A}$ ទៅបន្ទាត់ $\mathbf{(BE)}$ ។

(Austrian Mathematical Olympiad 1990)

253. គេឱ្យត្រីកោណសមបាត $\mathbf{ABC}$ មួយដែល $\angle \mathbf{A} = \mathbf{90^o}$ ។

គេយក $\mathbf{M}$ ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $\mathbf{AB}$ ។ បន្ទាត់មួយគូសចេញពី $\mathbf{A}$ ហើយកែង

នឹង $\mathbf{CM}$ កាត់ជ្រុង $\mathbf{BC}$ ត្រង់ $\mathbf{P}$ ។ បង្ហាញថា $\angle \mathbf{AMC} = \angle \mathbf{BMP}$?

(Baltic Way 2000)

254.គេឱ្យត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយមានមុំ $\angle \mathbf{A} = \mathbf{120^o}$ ។ ចំណុច $\mathbf{K}$ និង $\mathbf{L}$

ស្ថិតនៅលើជ្រុង $\mathbf{AB}$ និង $\mathbf{AC}$ រៀងគ្នា ។

គេសង់ត្រីកោណសមង្ស័ $\mathbf{BKP}$ និង $\mathbf{CLQ}$ នៅក្រៅជ្រុងនៃត្រីកោណ$\mathbf{ABC}$

ចូរស្រាយថា $\mathbf{PQ} \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\mathbf{AB} + \mathbf{AC})$?

(Baltic Way 2000)

255. ក្នុងត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយគេឱ្យ $\mathbf{2AB} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ ។ ចូរស្រាយថាផ្ចិតរង្វង់

ចារឹកក្នុង $\Delta\mathbf{ABC}$ ផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ $\Delta\mathbf{ABC}$ ហើយចំណុចកណ្ដាលនៃ

$\mathbf{AC}$ និង $\mathbf{BC}$ ស្ថិតនៅលើរង្វង់តែមួយ ។

(Problems for the Team Competition Baltic Way 1999)

256.គេឱ្យ $\mathbf{ABC}$ និង $\mathbf{DAC}$ ជាត្រីកោណសមបាតពីរដែលមានមុំកំពូល

$\angle \mathbf{BAC} = \mathbf{20^o}$ និង $\angle \mathbf{ADC} = \mathbf{100^o}$ ។

ចូរស្រាយថា $\mathbf{AB} = \mathbf{BC} + \mathbf{CD}$?

(Flanders Mathematical Olympiad 1996)

257.គេតាង $\mathbf{R}$ ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង $\mathbf{r}$ ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃ $\Delta\mathbf{ABC}$ មួយ ។

$\mathbf{S}$ ជាចំនុចមួយនៅក្នុង $\Delta\mathbf{ABC}$ ហើយបន្ទាត់ $\mathbf{AS, BS, CS}$ កាត់ជ្រុងឈម

ត្រង់ $\mathbf{X, Y, Z}$ រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថា $\dfrac{\mathbf{BX.CX}}{\mathbf{AX^2}}+\dfrac{\mathbf{CY.AY}}{\mathbf{BY^2}}+\dfrac{\mathbf{AZ.BZ}}{\mathbf{CZ^2}}=\dfrac{\mathbf{R-r}}{\mathbf{r}}$

(Bosnia and Hercegovina Mathematical Olympiad 2000)

258. គេឱ្យត្រីកោណកែងមួយ $\mathbf{ABC}$ ដែល $\angle\mathbf{ACB}=\mathbf{90^o}$ ហើយយក

$\mathbf{CH}$ ដែល $\mathbf{H}\in\mathbf{AB}$ ជាកំពស់ចំពោះជ្រុង $\mathbf{AB}$ ហើយតាង $\mathbf{P}$ និង $\mathbf{Q}$

ជាចំណុចប៉ះរវាងរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ ជាមួយជ្រុង $\mathbf{AC}$ និង $\mathbf{BC}$

រៀងគ្នា ។ បើ $\mathbf{AQ}\perp\mathbf{HP}$ ចូរកំណត់ផលធៀប $\dfrac{\mathbf{AH}}{\mathbf{BH}}$?

(Bulgarian Mathematical Olympiad 2006)

259. គេឱ្យចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់ $\mathbf{ABCD}$ មួយ ។ បន្ទាត់ $\mathbf{AD}$ និង $\mathbf{BC}$ ជួបគ្នា

ត្រង់ចំណុច $\mathbf{E}$ ហើយអង្កត់ទ្រូង $\mathbf{AC}$ និង $\mathbf{BD}$ ជួបគ្នាត្រង់ $\mathbf{F}$ ។

បើ $\mathbf{M}$ និង $\mathbf{N}$ ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $\mathbf{AB}$ និង $\mathbf{CD}$ នោះចូរបង្ហាញថា :

$$\frac{\mathbf{MN}}{\mathbf{EF}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left|\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{CD}}-\frac{\mathbf{CD}}{\mathbf{AB}}\right|$$ ។

(Bulgarian Mathematical Olympiad 1997)

260. បញ្ចកោណប៉ោង $\mathbf{ABCDE}$ មួយចារឹកក្នុងរង្វង់កាំ $\mathbf{R}$ ។ គេសំគាល់ $\mathbf{r_{XYZ}}$ ជារង្វាស់កាំនៃរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃ $\Delta\,\mathbf{XYZ}$ ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា :

ក. $\mathbf{\cos\angle CAB+\cos\angle ABC+\cos\angle BCA=1+\dfrac{r_{ABC}}{R}}$

ខ. បើ $\mathbf{r_{ABC}=r_{AED}}$ និង $\mathbf{r_{ABD}=r_{AEC}}$ នោះ $\mathbf{\Delta ABC\cong\Delta AED}$

(Bulgarian Mathematical Olympiad 1998)

261. គេឱ្យបន្ទាត់ (ℓ) កាត់ជ្រុង $\mathbf{AC}$ និង $\mathbf{BC}$ នៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ រៀងគ្នាត្រង់ចំណុច $\mathbf{E}$ និង $\mathbf{F}$ ។

ចូរស្រាយថាបន្ទាត់ (ℓ) កាត់តាមផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ លុះត្រាតែ $\mathbf{BC.\dfrac{AE}{CE}+AC.\dfrac{BF}{CF}=AB}$ ។

(Bulgarian Mathematical Olympiad 1973)

262. គេតាង $\mathbf{M}$ ជាទីប្រជុំទម្ងន់នៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$ មួយ ។

ចូរស្រាយថាវិសមភាព $\mathbf{\sin\angle CAM+\sin\angle CBM\le\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$ ។

(Bulgarian Mathematical Olympiad 1997)

263. បើ $\mathbf{a,b,c}$ ជាជ្រុង និង $\mathbf{R}$ ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ $\mathbf{ABC}$

នោះបង្ហាញថា $\mathbf{R\ge\dfrac{a^2+b^2}{2\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}}$ ។

តើសមភាពមាននៅពេលណា?

(Baltic Way 1998)

ឯកសារយោង

1. **101 problems in Algebra**
   (Titu Andreescu & Zuming Feng)
2. **Selected Problems of the Vietnamese Mathematical Olympiad (1962–2009)**
   (Le Hai Chau & Le Hai Khoi)
3. **TOPICS IN INEQUALITIES** (Hojoo Lee)
4. **Mathematical Olympiad in China**
   (Xiong Bin & Lee Peng Yee)
5. **Lecture Notes onMathematical Olympiad Courses**
   (Xu Jiagu)
6. **INFINITY**
   (Hojoo Lee, Tom Lovering, and Cosmin Pohoat)
7. **Secrets in Inequalities**
   (PHAM KIM HUNG)