វិទ្យាល័យ ហ៊ុនសែន ខ្នារ ស្រុកត្បូងឃ្មុំ
លី វាសនា
គ្រូគណិតវិទ្យាកម្រិតឧត្តម

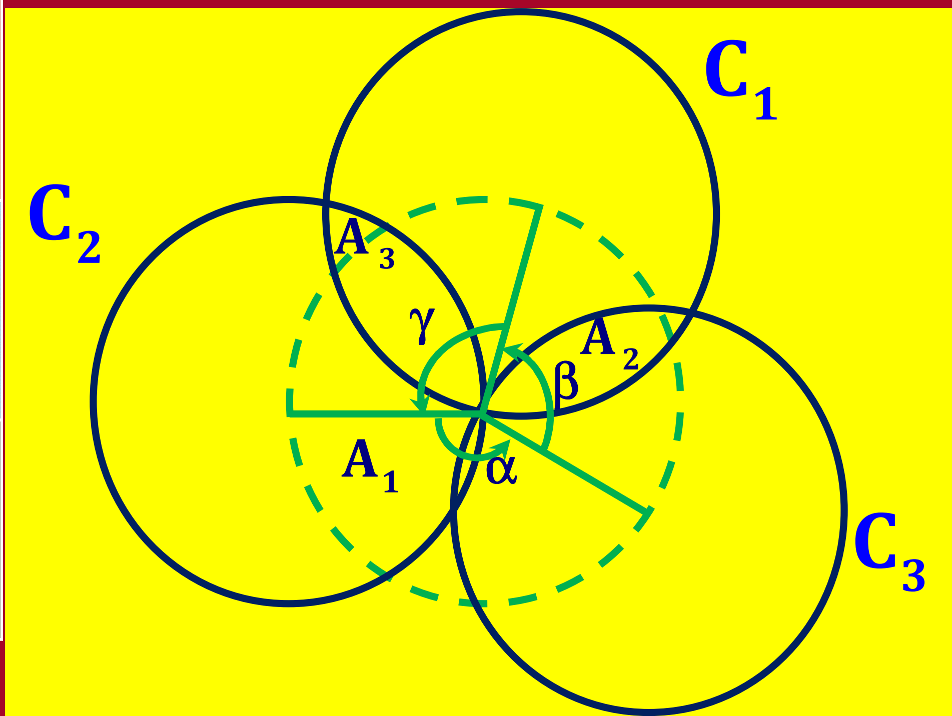
វិទ្យាល័យ ហ៊ុនសែន សិរីជីផុះ
សួន សម្ផស្ស
គ្រូគណិតវិទ្យាកម្រិតឧត្តម

គណិតវិទ្យាអនន្ត

ថ្នាក់ទី ១២

សម្រាប់ត្រៀមប្រឡងសិស្សពូកែ និងអាហារូបករណ៍នានា

ភាគ ១



ផ្សាយចេញពីក្រុមគណិតវិទ្យាអនន្ត

ឆ្នាំ ២០១៣

បុព្វកថា

គណិតវិទ្យាអនន្ត ជាស្នាដៃរួមគ្នាដំបូងដែលរៀបរៀងជាជំនួយសម្រាប់ ការប្រឡងប្រជែងនានាជាពិសេសប្រឡងសិស្សពូកែថ្នាក់ទី១២ដើម្បីទុកជាកំណាប់ទ្រព្យសម្រាប់កូនខ្មែរជំនាន់ក្រោយ។ សៀវភៅ នេះប្រស្ទូត្រចេញពីឯកសារដើមបរទេសទាំងស្រុងជាភាសាបារាំង និងអង់គ្លេសដែលយើងខ្ញុំប្រែសម្រួលនិងរៀបរៀងជាខេមរភាសាដោយសម្រាំងលំហាត់ជ្រើសរើសយ៉ាងផ្ចិតផ្ចង់បំផុត។

យើងខ្ញុំបាទរង់ចាំទទួលការរិះគន់ស្ថាបនាដោយក្តីរីករាយពីសំណាក់កល្យាណមិត្តអ្នកអានទាំងឡាយដែលប្រើពេលវេលាដ៏មានតម្លៃខិតខំអានសៀវភៅ និងធ្វើលំហាត់យ៉ាងយកចិត្តទុកដាក់ ព្រោះការធ្វើលំហាត់ខ្លួនឯងម្តងគឺប្រសើរជាងមើលគ្រូកែលំហាត់រាប់ពាន់ម៉ឺនដង។

សូមជូនពរសិរីមង្គលបវរប្រសើរដល់ ប្រិយមិត្តទាំងអស់ឲ្យជួបប្រទះតែពុទ្ធពរទាំងបួនប្រការកុំបីឃ្លៀងឃ្លាតឡើយ។

ត្បូងឃ្មុំ, ថ្ងៃទី ១៤ ខែកុម្ភៈ ឆ្នាំ ២០១៣

ប្រ. បច្ចេកទេស **វិ. ហស. ខ្នារ**

វិ. ហស. សិរីជីជុះ

ប្រធានក្រុមគណិតវិទ្យាអនន្ត

សួន សម្ផស្ស

លី វាសនា

ទូរស័ព្ទ៖ 092 74 83 68

ទូរស័ព្ទ៖ 097 98 93 365

បដិការគុណ

លោកឪពុក **មិត្ត មុជ**

អ្នកម្ដាយ **អ៊ុក ស៊ីថាន**

បងប្រុស **សយ ឆាវ៉ា**

សាស្ត្រាចារ្យ **ហ៊ុយ សុផាត** នៃសា. បៀលប្រាយ

សាស្ត្រាចារ្យ **ស៊ឹម ប៊ុនសុខ** នៃសា. យូ. អឹម. អ៊ី

ដែលមានឧបការគុណគ្រប់បែបយ៉ាងចំពោះខ្ញុំ

លំហាត់ទី១ ៖ គណនាផលបូក

$$A=\frac{1}{2\left\lfloor\sqrt{1}\right\rfloor+1}+\frac{1}{2\left\lfloor\sqrt{2}\right\rfloor+1}+\frac{1}{2\left\lfloor\sqrt{3}\right\rfloor+1}+\dots+\frac{1}{2\left\lfloor\sqrt{100}\right\rfloor+1}$$

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $a=1,2,\dots,9$

$$\frac{1}{2\left\lfloor\sqrt{a^2}\right\rfloor+1}=\frac{1}{2\left\lfloor\sqrt{a^2+2a}\right\rfloor+1}=\frac{1}{2a+1}$$

យើងបែងចែកផលបូកជា 9 ផ្នែក នោះគេបាន ៖

$a=1$: $\frac{1}{2\left\lfloor\sqrt{1}\right\rfloor+1}+\frac{1}{2\left\lfloor\sqrt{2}\right\rfloor+1}+\frac{1}{2\left\lfloor\sqrt{3}\right\rfloor+1}$ (មាន 3 ដងនៃ $\frac{1}{3}$)

$a=2$: $\frac{1}{2\left\lfloor\sqrt{4}\right\rfloor+1}+\dots+\frac{1}{2\left\lfloor\sqrt{8}\right\rfloor+1}$ (មាន 5 ដងនៃ $\frac{1}{5}$)

$a=3$: $\frac{1}{2\left\lfloor\sqrt{9}\right\rfloor+1}+\dots+\frac{1}{2\left\lfloor\sqrt{15}\right\rfloor+1}$ (មាន 7 ដងនៃ $\frac{1}{7}$)

$\vdots \qquad \vdots$

$a=9$: $\frac{1}{2\left\lfloor\sqrt{81}\right\rfloor+1}+\dots+\frac{1}{2\left\lfloor\sqrt{99}\right\rfloor+1}$ (មាន 19 ដងនៃ $\frac{1}{19}$)

$a=10$: $\frac{1}{2\left\lfloor\sqrt{100}+1\right\rfloor}$

បូកអង្គនឹងអង្គ គេបាន ៖

$$A=\underbrace{3\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{5}+7\times\frac{1}{7}+\ldots+19\times\frac{1}{19}}_{\text{មាន 9 តួ}}+\frac{1}{21}$$

ដូច្នេះ $A=\frac{190}{21}$

លំហាត់ទី ២ ៖ តាង x ជាចំនួនពិតដែល $x^3+4x=8$។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $A=x^7+64x^2$។

ដំណោះស្រាយ ៖

គេមាន $x^3+4x=8$ នោះ $x^3=-4x+8$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 0$ គេបាន $x^{n+3}=-4x^{n+1}+8x^n$

$$x^7=-4x^5+8x^4 \quad (\text{គេឲ្យតម្លៃ } n=4)$$

$$=-4(-4x^3+8x^2)+8(-4x^2+8x)$$

(គេឲ្យតម្លៃ $n=2$ និង $n=1$)

$$=16x^3-32x^2-32x^2+64x$$

$$=16x^3-64x^2+64x$$

$$=16(-4x+8)-64x^2+64x \quad (\text{ពេល } n=0)$$

$$x^7=-64x+128-64x^2+64x$$

នោះ $x^7+64x^2=128$

ដូច្នេះ $A=128$

លំហាត់ទី ៣ ៖

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការក្នុងសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន

$$\begin{cases} x+y\equiv 1\,[\bmod z] \\ y+z\equiv 1\,[\bmod x] \\ z+x\equiv 1\ [\bmod y] \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ៖

ឧបមាថា $1\le x\le y\le z$ ដែល $x,\ y,\ z$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

ប្រព័ន្ធសមីការដែលឲ្យទៅជា $\begin{cases} x+y-1\equiv 0\ [\bmod z] \\ y+z-1\equiv 0\ [\bmod x] \\ z+x-1\equiv 0\ [\bmod y] \end{cases}$

ដោយ $1\le x\le y\le z$ នោះគេបាន៖

$$\left.\begin{cases} 1\le x+y-1\le 2z-1 \\ z\,|\,x+y-1 \end{cases}\right| \Rightarrow z=x+y-1$$

ម៉្យាងទៀត

$$\left.\begin{cases} 1\le z+x-1=2x+y-2\le 3y-2 \\ y\,|\,2x+y-2 \end{cases}\right| \Rightarrow 2x+y-2\in\{y,\,2y\}$$

<u>ករណីទី១៖</u> បើ $2x+y-2=y$ នោះ $x=1$ និង $z=y$

នោះសំណុំចម្លើយប្រព័ន្ធសមីការគឺ៖

$\{(1,\ y,\ y)\ :\ y$ ចំនួនគត់$\}$

<u>ករណីទី២៖</u> បើ $2x+y-2=2y$ នោះ

$y=2x-2$ និង $z=3x-3$

ជំនួសចូលក្នុងប្រព័ន្ធ គេបាន៖ $\begin{cases} 3x-3\equiv 0\,[\bmod\ (3x-3)] \\ 5x-6\equiv 0\,[\bmod\ x] \\ 4x-4\equiv 0\,[\bmod(2x-2)] \end{cases}$

$\Leftrightarrow 5x\equiv 6\ [\bmod x]\ \Leftrightarrow\ x|6\ \Leftrightarrow\ x\in\{1,2,3,6\}$

+ បើ $x=1$ នោះ $y=0$ និង $z=0$

+ បើ $x=2$ នោះ $y=2$ និង $z=3$

+ បើ $x=3$ នោះ $y=4$ និង $z=6$

+ បើ $x=6$ នោះ $y=10$ និង $z=15$

សរុបមក សំណុំឬសរបស់ប្រព័ន្ធ គឺ ៖

$\{(1,\ y,\ y)\ :\ y$ ចំនួនគត់$\}\cup\{(2,2,\ 3),\ (3,4,\ 6),(6,10,15)\}$

លំហាត់ទី ៤ ៖ គណនាផ្នែកគត់នៃ

$$A=\frac{2014^3}{2012.2013}+\frac{2012^3}{2013.2014}$$

ដំណោះស្រាយ៖

គេពិនិត្យទំនាក់ទំនង ខាងក្រោម៖

$$\frac{(x+1)^3}{(x-1)x}-\frac{(x-1)^3}{x(x+1)}=\frac{(x+1)^4-(x-1)^4}{(x-1)x(x+1)}=\frac{8x^3+8x}{x^3-x}=8+\frac{16x}{x^3-x}$$

ដែលក្នុងនោះ $0<\frac{16x}{x^3-x}<1$

(សំណល់ត្រូវតូចជាងតួចែក x^3-x)

គេទាញបានថា៖ $\lfloor A\rfloor=\left\lfloor 8+\frac{16x}{x^3-x}\right\rfloor$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន

\+ យើងយក $x=2013$ នោះ $\lfloor A\rfloor=\left\lfloor 8+\frac{16.2013}{2013^3-2013}\right\rfloor=8$

ដូច្នេះ $\lfloor A\rfloor=8$ ។

លំហាត់ទី ៥ ៖ ក្នុងថង់មួយមានបាល់សចំនួន w $(w\geq 3)$ និងបាល់ក្រហមចំនួន r ។ បាល់បីត្រូវបានគេចាប់ដោយចៃដន្យដោយ មិនដាក់ចូលវិញ។ ប្រូបាបដែលគេចាប់បានបាល់សតាងដោយ p។ បើគេដាក់បាល់សមួយថ្មីចូលក្នុងថង់នោះប្រូបាបរបស់វានឹងកើនបានមួយភាគបីនៃប្រូបាបដើម។ រកចំនួនបាល់ក្រហមច្រើនបំផុតដែលអាចមាន។

ដំណោះស្រាយ ៖

ប្រូបាបនៃការជ្រើសរើសបាល់ស 3 ក្នុងចំណោមបាល់សរុប $w+r$ គឺ៖

$$p=\frac{C(w;3)}{C(w+r;3)} \qquad (1)$$

ដូចគ្នាដែរ

ប្រូបាបនៃបាល់សមួយដែលត្រូវបន្ថែមចូលទៅក្នុងថង់គឺ ៖

$$\frac{4}{3}p=\frac{C(w+1;3)}{C(w+r+1;3)} \qquad (2)$$

យក (1) ជួសចូលក្នុងសមីការ (2) គេបាន ៖

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{\dfrac{w!}{3!(w-3)!}}{\dfrac{(w+r)!}{3!(w+r-3)!}}=\frac{\dfrac{(w+1)!}{3!(w-2)!}}{\dfrac{(w+r+1)!}{3!(w+r-2)!}}$$

សមមូលនឹង $\dfrac{4}{3}=\dfrac{\dfrac{w+1}{w-2}}{\dfrac{w+r+1}{w+r-2}}=\dfrac{(w+1)(w+r-2)}{(w-2)(w+r+1)}$

សមមូលនឹង $4(w-2)(r+w+1)=3(w+1)(r+w-2)$

សមមូលនឹង $r(w-11)=-w^2+w+2$

$$r=\frac{-w^2+w+2}{w-11}$$
$$=\frac{-w^2+11w-10w+110-108}{w-11}$$
$$=-w-10+\frac{108}{11-w}$$

យើងបានដឹងមកហើយថា w ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ≥ 3។

ដើម្បីរក្សា r ឲ្យកំណត់បាន និងវិជ្ជមាននោះ $w<11$

គេបាន ៖ $w\in\{3,\ 4,\ 5, 6,\ 7, 8, 9,\ 10\}$

ពេល $w=3,\ 4,\ 6$ នោះ $11-w$ មិនមែនជាតួចែកនៃ108ទេ

$$\Rightarrow w\in\{5,\ 7,\ 8,\ 9, 10\}$$

ដើម្បីឲ្យ r ធំបំផុតលុះត្រាតែ $w=10$

$\Rightarrow r=-10-10+108=88$ បាល់ក្រហម

ដូច្នេះ $r=88$

លំហាត់ទី ៦ ៖ រកចំនួនគត់ n ធំបំផុតដែល $n!$ បញ្ចប់ដោយ លេខ 0ចំនួន **290** ដង។

ដំណោះស្រាយ៖

គេដឹងថា លេខ 0 ជាកត្តានៃ $10=2.5$ ដែល 2 និង 5 ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា

នោះគេគ្រាន់តែរកកត្តាដែលតូចបំផុតដែលមានលេខ 2 ចំនួន 290 ដង និង លេខ 5 ចំនួន 290 ដងជាការស្រេច។

តាង $p=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{2^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{2^3}\right\rfloor+\ldots$

និង $q=\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{5^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{5^3}\right\rfloor+\ldots$

ដើម្បីឲ្យ q តូចបំផុតជិត 290នោះតាមផលបូកអនន្តតួនៃស៊ីត

គេបាន $290\approx\dfrac{\frac{n}{5}}{1-\frac{1}{5}} \quad\Rightarrow\quad n\approx 1160$ និង $\underline{q\approx 288}$

ដើម្បីបាន $q=290$ គេត្រូវបន្ថែមកត្តា 2 និង 5 បន្ថែម

$$\Rightarrow n+10=1160+10=1170$$

ដូច្នេះ $n!=1170!$ បញ្ចប់ដោយលេខសូន្យចំនួន 290

លំហាត់ទី ៧ ៖ តាង $a_1=1$ និង $a_n=\left\lfloor\dfrac{n^3}{a_{n-1}}\right\rfloor$ ចំពោះ $n>1$។

គណនាតម្លៃនៃ $\underline{a_{2013}}$។

ដំណោះស្រាយ៖

\+ បើ $n=1$ នោះ $a_2=\left\lfloor \frac{2^3}{1} \right\rfloor=8$

\+ បើ $n=2$ នោះ $a_3=\left\lfloor \frac{3^3}{8} \right\rfloor=3$

គេនឹងស្រាយថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់សេស $n\geq 3$ នោះ

$$a_{n+1}=\left\lfloor \frac{(n+1)^3}{n} \right\rfloor = n^2+3n+3$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+2}=\left\lfloor \frac{(n+2)^3}{(n^2+3n+3)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n^3+6n^2+12n+8)}{(n^2+3n+2)} \right\rfloor$$

$$a_{n+2}=\left\lfloor n+2+\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n+3} \right\rfloor = n+2$$

ចំពោះ n សេស $a_n=n \Rightarrow a_{2013}=2013$

ដូច្នេះ $a_{2013}=2013$

លំហាត់ទី ៨ ៖ បើ a, b, c ជាឫសនៃពហុធា

$$P(x)=x^3+x^2-333x-1001$$

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $A=a^3+b^3+c^3$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

ដោយ $a; b; c$ ជាឫសនៃ $P(x)=x^3+x^2-333x-1001$

$$\Rightarrow P(x)=x^3+x^2-333x-1001=(x-a)(x-b)(x-c)$$

$$\left.\begin{cases} P(x)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc \\ P(x)=x^3+\qquad\qquad x^2-\qquad\qquad 333x-1001 \end{cases}\right| \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b+c=-1 \\ ab+bc+ca=-333333 \\ abc=1001 \end{cases}$$

ម្យ៉ាងទៀត

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc$$
$$=(-1)^3-3(-1)(-333)+3.1001=2003$$

ដូច្នេះ $A=2003$ ។

លំហាត់ទី ៩ ៖ គេឲ្យចំនួនពិត $0<a<b<c$ និងអនុគមន៍ $f(x)$ ជាប់និងមានដេរីវេលើចន្លោះ $[a;\ c]$ ដែល $f'(x)>0$ លើចន្លោះ $[a;\ c]$ ។ ចូរបង្ហាញថា៖

$$(c-b)f(a)+(b-a)f(c)>(c-a)f(b) \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ៖

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល បើ $f'(x)>0$ លើចន្លោះ $[a;\ c]$

ដែល $f'(x)>0$ លើចន្លោះ $[a;\ b]\cup[b;c]$ ដែល $a<b<c$

នោះមាន $u\in[a;b]$ ដែល $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(u)$

និងមាន $v\in[b;c]$ ដែល $\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}=f'(v)$

តែ $f'(x)>0$ លើចន្លោះ $[a;\ c]$ នោះ $f'(u)<f'(v)$

គ្រប់ $a<u<v<c$

$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

$$\Leftrightarrow \left(f(b)-f(a)\right)(c-b)<\left(f(c)-f(b)\right)(b-a)$$

$$\Leftrightarrow (c-a)f(b)<(c-b)f(a)+(b-a)f(c)$$

ដូច្នេះ $\quad (c-b)f(a)+(b-a)f(c)>(c-a)f(b)$

លំហាត់ទី ១០ ៖ រកគ្រប់អនុគមន៍ $H:\ \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ ដែល

ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{cases}(i)\quad H(1;0;0;1)=1\\(ii)\ H(\lambda a;b;\lambda c;d)=\lambda.H(a;b;c;d)\\(iii)\ H(a;b;c;d)=-H(b;a;d;c)\\(iv)\ H(a+e;b;c+f;d)=H(a;b;c;d)+H(e;b;f;d)\end{cases}$$

ដែល $a;\ b;c;d;e;\ f;\lambda$ ជាបណ្តាចំនួនពិត។

ដំណោះស្រាយ ៖

តាម(iii) $\Rightarrow H(1;1;0;0)=-H(1;1;0;0)$ និង

$$H(0;0;1;1)=-H(0;0;1;1)$$

$$\Leftrightarrow H(1;1;0;0)=H(0;0;1;1)=0$$

តាម(i) និង (iii) $\Rightarrow H(0;1;1;0)=-H(1;0;0;1)=-1$

ដូច្នេះគេបាន

$$\begin{aligned}
H(a;b;c;d)&=H(a;b;0;d)+H(0;b;c;d) \quad (\text{តាម } (iv))\\
&=aH(1;b;0;d)+cH(0;b;1;d) \quad (\text{តាម } (ii))\\
&=-aH(b;1;d;0)-cH(b;0;d;1) \quad (\text{តាម } (iii))\\
&=-a\left[H(b;1;0;0)+H(0;1;d;0)\right]\\
&\quad -c\left[H(b;0;0;1)+H(0;0;d;1)\right] (\text{តាម}(iv))\\
&=-abH(1;1;0;0)-adH(0;1;1;0)\\
&\quad -bcH(1;0;0;1)-cdH(0;0;1;1) (\text{តាម}(ii))\\
&=-ab(0)-ad(-1)-bc(1)-cd(0)\\
&=ad-bc=\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

ដូច្នេះ $$H(a;b;c;d)=\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}$$

លំហាត់ទី ១១ ៖ កំណត់ចំនួនពិត $a,\ b,\ c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\sqrt{n}=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt[3]{\sqrt{ak^3+bk^2+ck+1}-\sqrt{ak^3+bk^2+ck}}$$

គ្រប់ចំនួនគត់ $n=1,2,...$

ដំណោះស្រាយ ៖

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $k=0,1,2,...$ គេមាន ៖

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^3&=(k+1)\sqrt{k+1}-3(k+1)\sqrt{k}+3k\sqrt{k+1}-k\sqrt{k}\\&=(4k+1)\sqrt{k+1}-(4k+3)\sqrt{k}\\&=\sqrt{(4k+1)^2(k+1)}-\sqrt{(4k+3)^2k}\\&=\sqrt{16k^3+24k^2+9k+1}-\sqrt{16k^3+24k^2+9k}\end{aligned}$$

ឬ $\sqrt[3]{\sqrt{16k^3+24k^2+9k+1}-\sqrt{16k^3+24k^2+9k}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

នោះ $$\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt[3]{\sqrt{16k^3+24k^2+9k+1}-\sqrt{16k^3+24k^2+9k}}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=\sqrt{n}$$

ផ្ទឹមមេគុណនឹងមេគុណគេបាន ៖ $a=16;\ \ b=24;\ c=9$

ដូច្នេះ $a=16;\ \ b=24;\ c=9$ ។

លំហាត់ទី ១២ ៖ រកម៉ាទ្រីសច្រាសនៃ

$$S=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ដំណោះស្រាយ៖

យើងតាង $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

និង $U=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

ដែល $S=U-I$ និង $U^2=nU$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត c គេបាន៖

$$(U-I)(cU-I)=cU^2-(c+1)U+I$$

$$=\left(cn-\left(c+1\right)\right)U+I$$

គេជ្រើសរើស $cn-\left(c+1\right)=0$ ឬ $c=\dfrac{1}{\left(n-1\right)}$

នោះ $\left(U-1\right)\left(cU-I\right)=I$

ឬ $S^{-1}=\left(U-I\right)^{-1}=\dfrac{1}{n-1}U-I$

ដូច្នេះ $S^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{2-n}{n-1} & \dfrac{1}{n-1} & \cdots & \dfrac{1}{n-1} \\ \dfrac{1}{n-1} & \dfrac{2-n}{n-1} & \cdots & \dfrac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{n-1} & \dfrac{1}{n-1} & \cdots & \dfrac{2-n}{n-1} \end{pmatrix}$

លំហាត់ទី ១៣ ៖ មាន n ចំនួនគត់ $x_1;x_2;\ \dots\ ;x_n$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$$\begin{cases} x_1=0 \\ \left|x_i\right|=\left|x_{i-1}+c\right|,\ \ 2\le i\le n \end{cases}$$

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុត នៃ $\dfrac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ គេមាន គ្រប់ចំនួនពិត x_{n+1} ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$|x_{n+1}|=|x_n+c|$$

នោះ $\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2 = \sum_{i=2}^{n+1}|x_i|^2 = \sum_{i=2}^{n+1}|x_{i-1}+c|^2$ (ព្រោះ $x_1=0$)

$$= \sum_{i=2}^{n+1}(x_{i-1}+c)^2$$

$$=\sum_{i=2}^{n+1}(x_{i-1})^2+2c\sum_{i=2}^{n+1}(x_{i-1})+c^2n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2+2c\sum_{i=1}^{n}(x_i)+c^2n$$

គេបាន $0\le x_{n+1}^2=2c\sum_{i=1}^{n}x_i+c^2n$ ដែល $c>0$

នោះ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\ge-\frac{c}{2}$

ដូច្នេះ $Min\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)=-\frac{c}{2}$

លំហាត់ទី ១៤ ៖ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x+\lfloor y\rfloor+\{z\}=200.0 \\ \{x\}+y+\lfloor z\rfloor=190.1 \\ \lfloor x\rfloor+\{y\}+z=178.8 \end{cases}$$

ដែល $\lfloor x\rfloor$ ជាផ្នែកគត់នៃ x និង $\{x\}$ ជាផ្នែកទសភាគនៃ x ។

ដំណោះស្រាយ៖

គេមាន $\begin{cases} x+\lfloor y\rfloor+\{z\}=200.0 & (1) \\ \{x\}+y+\lfloor z\rfloor=190.1 & (2) \\ \lfloor x\rfloor+\{y\}+z=178.8 & (3) \end{cases}$

ដែល $x=\lfloor x\rfloor+\{x\}$ ចំពោះគ្រប់ x

គេយក $(1)+(2)+(3)$ នោះ $2x+2y+2z=568.9$

ឬ $x+y+z=284.45 \quad (4)$

យក $(4)-(1) \Rightarrow \{y\}+\lfloor z\rfloor=84.45 \quad (5)$

$(4)-(2) \Rightarrow \lfloor x\rfloor+\{z\}=94.35 \quad (6)$

$(4)-(3) \Rightarrow \{x\}+\lfloor y\rfloor=105.65 \quad (7)$

ពី (5) នោះ $84=\lfloor 84.45\rfloor=\lfloor \lfloor z\rfloor+\{y\}\rfloor=\lfloor z\rfloor$ និង $\{y\}=0.45$

ពី (6) នោះ $94=\lfloor 94.35\rfloor=\lfloor \lfloor x\rfloor+\{z\}\rfloor=\lfloor x\rfloor$ និង $\{z\}=0.35$

ពី (7) នោះ $105=\lfloor 105.65\rfloor=\lfloor \lfloor y\rfloor+\{x\}\rfloor=\lfloor y\rfloor$ និង $\{x\}=0.65$

គេទាញបាន $x=94.65;\quad y=105.45;\quad z=84.35$

ដូច្នេះ $(x;y;z)=(94.65;\quad 105.45;\quad 84.35)$

លំហាត់ទី ១៥ ៖ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x+\lfloor y\rfloor+\{z\}=1.1 \\ \lfloor x\rfloor+\{y\}+z=2.2 \\ \{x\}+y+\lfloor z\rfloor=3.3 \end{cases}$$

ដែល $\lfloor x\rfloor$ជាផ្នែកគត់នៃ x និង $\{x\}$ ផ្នែកទសភាគនៃ x ។

ដំណោះស្រាយ ៖

កត់សម្គាល់ថា $x=\lfloor x\rfloor+\{x\}$ ចំពោះគ្រប់ x

មាន $$\begin{cases} x+\lfloor y\rfloor+\{z\}=1.1 & (1) \\ \lfloor x\rfloor+\{y\}+z=2.2 & (2) \\ \{x\}+y+\lfloor z\rfloor=3.3 & (3) \end{cases}$$

យក $(1)+(2)+(3)$ នោះ $x+y+z=3.3 \qquad (4)$

យក $(4)-(1)$; $(4)-(2)$; $(4)-(3)$

គេបាន៖

$$\begin{cases} \{y\}+\lfloor z\rfloor=2.2 \\ \{x\}+\lfloor y\rfloor=1.1 \\ \{z\}+\lfloor x\rfloor=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lfloor z\rfloor=2\ ;\ \{y\}=0.2 \\ \lfloor y\rfloor=1;\ \{x\}=0.1 \\ \lfloor x\rfloor=0;\ \{z\}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0.1 \\ y=1.2 \\ z=2 \end{cases}$$

ដូច្នេះ $(x;\ y;\ z)=(0.1;\ 1.2;\ 2)$

លំហាត់ទី ១៦ ៖ ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនពិត

$$\sqrt{x_1-1^2}-2\sqrt{x_2-2^2}+\dots+n\sqrt{x_n-n^2}=\frac{1}{2}\left(x_1+x_2+\dots+x_n\right)$$

ដំណោះស្រាយ៖

គេមាន

$$\sqrt{x_1-1^2}-2\sqrt{x_2-2^2}+\dots+n\sqrt{x_n-n^2}=\frac{1}{2}\left(x_1+x_2+\dots+x_n\right)$$

$$2\left(\sqrt{x_1-1^2}-2\sqrt{x_2-2^2}+\dots+n\sqrt{x_n-n^2}\right)=\left(x_1+x_2+\dots+x_n\right)$$

$$\left(x_1+x_2+\dots+x_n\right)-2\sqrt{x_1-1^2}-4\sqrt{x_2-2^2}-\dots-2n\sqrt{x_n-n^2}=0$$

$$\left(x_1-1-2\sqrt{x_1-1}+1\right)+\left(x_2-2^2-4\sqrt{x_2-2^2}+2^2\right)+\dots$$

$$+\left(x_n-n^2-2n\sqrt{x_n-n^2}+n^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x_1-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{x_2-2^2}-2\right)^2+\dots+\left(\sqrt{x_n-n^2}-n\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x_1-1}-1\right)=0\wedge\left(\sqrt{x_2-2^2}-2\right)=0\wedge\dots\wedge\left(\sqrt{x_n-n^2}-n\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x_1-1}=1\wedge\sqrt{x_2-2^2}=2\wedge\dots\wedge\sqrt{x_n-n^2}=n$$

$$\Rightarrow\ x_1=2\ \wedge\ x_2=8\wedge\ \dots..\wedge\ x_n=2n^2$$

ដូច្នេះ $\left(x_1;\ x_2\ ;\dots.;\ x_n\right)=\left(2;\ 8\ ;\dots.;\ 2n^2\right)$

លំហាត់ទី ១៧ ៖ រកចំនួនធាតុនៃសំណុំ

$$A=\left\{x\in\mathbb{Z}\ \middle|\ \frac{x^3-3x+2}{2x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$$

ដំណោះស្រាយ៖

ដោយ x ជាចំនួនគត់ នោះ $2x+1$ និង x^3-3x+2 ក៏ជាចំនួនគត់ដែរ

ម៉្យាងទៀត $\dfrac{x^3-3x+2}{2x+1}\in\mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow\ \frac{8x^3-24x+16}{2x+1}=4x^2-2x-11+\frac{27}{2x+1}\in\mathbb{Z}$$

នោះ $2x+1\in\{\pm1;\pm3;\pm9;\pm27\}$

$$\Leftrightarrow\quad x\in\{-14;-5;-2;-1;0;1;4;13\}$$

ដូច្នេះ $A=\{-14;-5;-2;-1;0;1;4;13\}$

លំហាត់ទី ១៨ ៖ គេឲ្យគូប $ABCD-EFGH$ ។ $P;\ Q;\ R$ ជាចំណុចស្ថិតនៅលើជ្រុង $AB;\ CG;\ EH$ រៀងគ្នា។ កំណត់បរិមាត្រខ្លីបំផុតនៃត្រីកោណ PQR។

ដំណោះស្រាយ៖

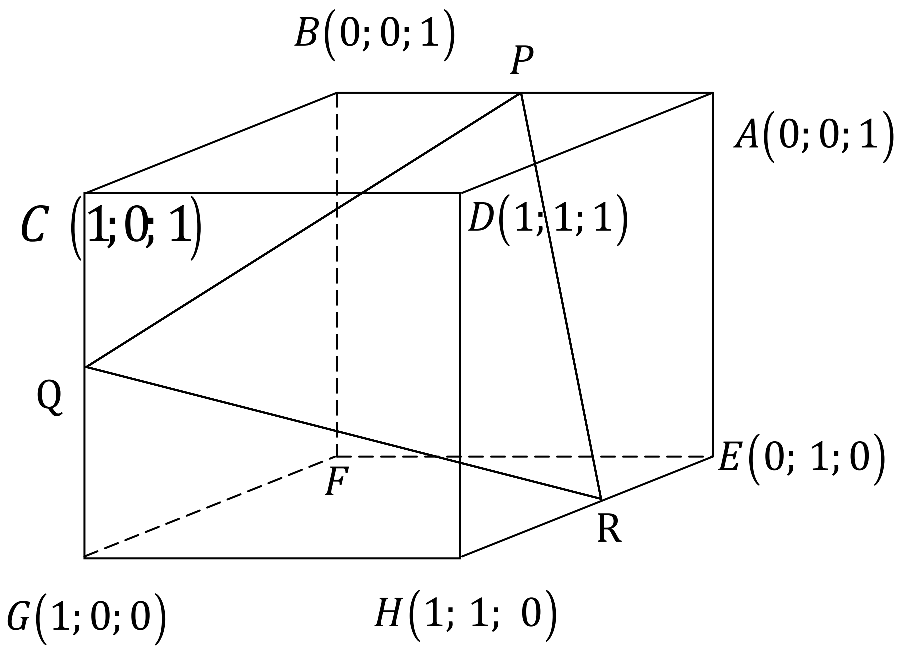
កំណត់យក $\left(F;\ \overrightarrow{FG};\ \overrightarrow{FE};\ \overrightarrow{FB}\right)$ ជាគោលអរត្តូណរម៉ាល់

មានទិសដៅវិជ្ជមាន

នោះ $P(0;\ c;\ 1)$, $Q(1;\ 0;\ a)$, $R(b;\ 1;\ 0)$

ដែល $a;\ b;\ c$ ជាចំនួនពិតដែលត្រូវរក

តាង $L=\left|\overrightarrow{RQ}\right|+\left|\overrightarrow{PR}\right|+\left|\overrightarrow{QP}\right|$ ជាបរិមាត្រត្រីកោណ PQR



$$L=\sqrt{a^2+(1-b)^2+1}+\sqrt{b^2+(1-c)^2+1}+\sqrt{c^2+(1-a)^2+1}$$

$$\Leftrightarrow L=\sqrt{1+a^2+(1-b)^2}+\sqrt{1+b^2+(1-c)^2}+\sqrt{1+c^2+(1-a)^2}\quad(1)$$

តាមវិសមភាព មីងកូវស្គី $(Minkowski)$ គេមាន ៖

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}+\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}$$

$$\geq\sqrt{(x_1+y_1+z_1)^2+(x_2+y_2+z_2)^2+(x_3+y_3+z_3)^2}$$

គេយក $\begin{cases}(x_1;\ y_1;\ z_1)=(1;\ \ 1;\ \ 1)\\(x_2;\ y_2;\ z_2)=(a;\ \ b;\ \ c)\\(x_3;\ y_3;\ z_3)=(1-b;\ \ 1-c;\ \ 1-a)\end{cases}$

នោះ (1) ទៅជា៖

$L^2\geq 3^2+s^2+(3-s)^2=2\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{2}$ ដែល $s=a+b+c$

ដោយ $\left(s-\frac{3}{2}\right)^2\geq 0$ នោះ L^2 តូចបំផុតពេល $s=\frac{3}{2}$

ហើយ $a=b=c=\frac{1}{2}$

គេទាញ $L\geq\sqrt{\frac{27}{2}}=3\sqrt{\frac{3}{2}}$

ដូច្នេះ បរិមាត្រខ្លីបំផុតនៃត្រីកោណ PQR គឺ $3\sqrt{\frac{3}{2}}$

ពេល $a=b=c=\frac{1}{2}$

លំហាត់ទី ១៩ ៖ បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a;\ \ b;\ \ c$

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-c)^2}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

ដំណោះស្រាយ៖

<u>របៀបទី១</u> ៖ គេមាន $\forall x; y\in\mathbb{R}$ $\quad (x+y)^2\geq 0$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2+y^2\right)\geq (x+y)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}\geq\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\geq 0$$

យក $x=a; y=(1-b)$ នោះ $\sqrt{a^2+(1-b)^2}\geq\frac{|a|+|1-b|}{\sqrt{2}}\quad(1)$

$x=b;\ y=(1-c)$ នោះ $\sqrt{b^2+(1-c)^2}\geq\frac{|b|+|1-c|}{\sqrt{2}}\quad(2)$

$x=c;\ y=(1-a)$ នោះ $\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geq\frac{|c|+|1-a|}{\sqrt{2}}\quad(3)$

បូកអង្គ និងអង្គនៃ $(1)+(2)+(3)$ គេបាន៖

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-c)^2}$$
$$\geq\frac{|a|+|1-b|}{\sqrt{2}}+\frac{|b|+|1-c|}{\sqrt{2}}+\frac{|c|+|1-a|}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-c)^2}$$
$$\geq\frac{|a|+|1-a|+|b|+|1-b|+|c|+|1-c|}{\sqrt{2}}\geq\frac{3}{\sqrt{2}}$$

(ព្រោះ គ្រប់ $\alpha\in\mathbb{R};\quad |\alpha|+|1-\alpha|\geq 1$)

ដូច្នេះ $\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-c)^2}\ge\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ពិត

<u>របៀបទី២</u>៖ តាមវិសមភាព មីងកូវស្គី $(Minkowski)$ គេមាន ៖

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2}+\sqrt{z_1^2+z_2^2}$$
$$\ge\sqrt{(x_1+y_1+z_1)^2+(x_2+y_2+z_2)^2}$$

គេយក $(x_1;\ y_1;z_1)=(a;\ b;\ c)$

និង $(x_2;\ y_2;z_2)=(1-b;\ 1-c;\ 1-a)$

នោះ $\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-c)^2}$

$$\ge\sqrt{(a+b+c)^2+(3-(a+b+c))^2}$$

តាង $s=a+b+c$ គេបាន៖

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-c)^2}$$
$$\ge\sqrt{(s)^2+(3-(s))^2}=\sqrt{2\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}}\ge\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

ដូច្នេះ $\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-c)^2}\ge\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ពិត

លំហាត់ទី ២០ ៖ បើ $a;\ b;c>0$ រកតម្លៃតូចបំផុតនៃ

$$A=\left\lfloor \frac{a+b}{c}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{b+c}{a}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{c+a}{b}\right\rfloor$$

ដែល $\lfloor x \rfloor$ ផ្នែកគត់ធំបំផុត $\le x$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

គេដឹងថា $\lfloor x \rfloor > x-1$ គ្រប់ចំនួនពិត x នោះ

$$A=\left\lfloor \frac{a+b}{c}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{b+c}{a}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{c+a}{b}\right\rfloor>\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}-3$$

$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)-3$$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ ៖

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}}=2 \qquad \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 2 \text{ និង } \frac{c}{a}+\frac{a}{c}\ge 2$$

គេបាន ៖ $A>2+2+2-3=3$

ដោយ A ជាចំនួនគត់នោះ $MinA=4$ ពេល $(a;b;c)=(6;8;9)$

ដូច្នេះ តម្លៃតូចបំផុតនៃ A គឺ 4 ។

លំហាត់ទី ២១ ៖ x ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ រកតម្លៃធំបំផុតនៃ

$$A=\frac{x^2+2-\sqrt{x^4+4}}{x}$$

ដំណោះស្រាយ៖ មាន

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{x^2+2-\sqrt{x^4+4}}{x} \\
&= \left(\frac{x^2+2-\sqrt{x^4+4}}{x}\right)\cdot\left(\frac{x^2+2+\sqrt{x^4+4}}{x^2+2+\sqrt{x^4+4}}\right) \\
&= \frac{\left(x^2+2\right)^2-\left(x^4+4\right)}{x\left(x^2+2+\sqrt{x^4+4}\right)} \\
&= \frac{4x^2}{x\left(x^2+2+\sqrt{x^4+4}\right)} \\
&= \frac{4}{\frac{1}{x}\left(x^2+2+\sqrt{x^4+4}\right)} \\
&= \frac{4}{x+\frac{2}{x}+\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}}
\end{aligned}
$$

តាមវិសមភាព $AM-GM:\quad x+\frac{2}{x}\geq 2\sqrt{2}$ និង $x^2+\frac{4}{x^2}\geq 4$

នោះ $A\leq\frac{4}{2\sqrt{2}+2}=2\sqrt{2}-2$

សមភាពកើតឡើងពេល $x=\sqrt{2}$

ដូច្នេះ $\quad Max\ \ A=2\sqrt{2}-2$

លំហាត់ទី ២២ ៖ ដោះស្រាយសមីការ

$$x^4-4x^3-4x^2+16x-8=0 ។$$

ដំណោះស្រាយ៖

គេមាន ៖

$$\begin{aligned}0&=x^4-4x^3-4x^2+16x-8\\&=\left(x^4-4x^3+4x^2\right)-\left(8x^2-16x+8\right)\\&=x^2\left(x-2\right)^2-8\left(x-1\right)^2\\&=\left(x^2-2x\right)^2-\left(2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}\right)^2\\&=\left(x^2-\left(2+2\sqrt{2}\right)x+2\sqrt{2}\right)\times\\&\qquad\left(x^2-\left(2-2\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

គេបាន ៖ $\left[\begin{array}{l}x^2-\left(2+2\sqrt{2}\right)x+2\sqrt{2}=0\\x^2-\left(2-2\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{2}=0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-\left(2+2\sqrt{2}\right)x+3+2\sqrt{2}-3=0\\x^2-\left(2-2\sqrt{2}\right)x+3-2\sqrt{2}-3=0\end{array}\right.$$

ដោយ $\left(1+\sqrt{2}\right)^2=3+2\sqrt{2}$ និង $\left(1-\sqrt{2}\right)^2=3-2\sqrt{2}$

គេបាន៖ $\left[\begin{array}{l}\left(x-\left(1+\sqrt{2}\right)\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=0\\ \left(x-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(x-1-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(x-1-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=0\\ \left(x-1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(x-1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=0\end{array}\right.$$

ដូច្នេះ $\left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\\ x=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\\ x=1-\sqrt{2}-\sqrt{3}\\ x=1-\sqrt{2}+\sqrt{3}\end{array}\right.$ ជាឫសនៃសមីការ។

លំហាត់ទី ២៣ ៖ បើ $x+y+z=0$ រកតម្លៃធំបំផុតនៃ

$$A=\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

$$0=\left(x+y+z\right)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$

នោះ $xy+yz+zx=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$

$$\Rightarrow A=-\frac{1}{2}$$ = ថេរ

ដូច្នេះ $Max \ \ A=-\frac{1}{2}$

លំហាត់ទី ២៣ ៖ មនុស្សម្នាក់ៗក្នុងចំណោម ៩ នាក់ $A \rightarrow I$ បានទិញឆ្នោតក្នុងនោះមានតែម្នាក់គត់ដែលត្រូវឆ្នោត។ក្រោយមកយើងសួរពួកគេថាអ្នកណាត្រូវឆ្នោត។ ពួកគេឆ្លើយថា ៖

A ឆ្លើយថា ៖ " E ត្រូវឆ្នោត "

B ឆ្លើយថា ៖ " ខ្ញុំត្រូវឆ្នោត "

C ឆ្លើយថា ៖ " B ត្រូវឆ្នោត "

D ឆ្លើយថា ៖ " E មិនត្រូវឆ្នោតទេ "

E ឆ្លើយថា ៖ " B ឬ H ត្រូវឆ្នោត "

F ឆ្លើយថា ៖ " E ត្រូវឆ្នោត "

G ឆ្លើយថា ៖ " B មិនត្រូវឆ្នោតទេ "

H ឆ្លើយថា ៖ " ខ្ញុំ និង B មិនត្រូវឆ្នោតទេ "

I ឆ្លើយថា ៖ " សំដីរបស់ H ពិត "

ទោះបីជាយ៉ាងណាក៏ដោយ យើងរកឃើញថាមានតែមនុស្សបីនាក់គត់ដែលនិយាយត្រង់ ហើយផ្សេងទៀតនិយាយកុហក។ តើអ្នកណាត្រូវឆ្នោត?

ដំណោះស្រាយ៖

យើងពិនិត្យសំណើផ្ទុយនៃសំណើដែលឲ្យតាមតារាងដូចខាងក្រោម ។

សម្គាល់ ៖

"✓" តាងមនុស្សដែលទទួលបានលុយ

"×" តាងមនុស្សដែលមិនទទួលបានលុយ

		មនុស្សដែលទទួលបានលុយ								
		A	B	C	D	E	F	G	H	I
សំណើផ្ទុយនៃសំណើ....	A	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓
	B	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	C	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	D	×	×	×	×	✓	×	×	×	×
	E	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓
	F	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓
	G	×	✓	×	×	×	×	×	×	×
	H	×	✓	×	×	×	×	×	✓	×
	I	×	✓	×	×	×	×	×	✓	×

ឧទាហរណ៍ បើ A និយាយកុហកនោះEមិនទទួលបានលុយទេ។ ហេតុនេះគេគូស "×" ក្នុងប្រឡោះ E និង "✓" ក្នុងប្រឡោះផ្សេងៗទៀតនៃជួរដេករបស់ A ។

គេឃើញថាជួរឈរ H មាន × ចំនួនបី ត្រង់ជួរដេក D, E និង G ។ ដូច្នេះ D, E និង G និយាយស្មោះត្រង់ និង H ជាអ្នកឈ្នះឆ្នោត។

លំហាត់ទី ២៤ ៖ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}(3x+y)(x+3y)\sqrt{xy}=14\\(x+y)(x^2+14xy+y^2)=36\end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ ៖

ប្រព័ន្ធសមមូលនឹង $\begin{cases}\sqrt{xy}(3x^2+10xy+3y^2)=14\\x^3+15x^2y+15xy^2+y^3=36\end{cases}$

តាង $\sqrt{x}=u$ និង $\sqrt{y}=v$ ដែល $u>0$ និង $v>0$ នោះ

$$\begin{cases}uv(3u^4+10u^2v^2+3^4)=16\\u^6+15u^4v^2+15u^2v^4+v^6=36\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3u^5v+10u^3v^3+3uv^5=16 & (1)\\u^6+15u^4v^2+15u^2v^4+v^6=36 & (2)\end{cases}$$

\+ យក $(2)+2.(1)$ គេបាន ៖

$$u^6+6u^5v+15u^4v^2+20u^3v^3+15u^2v^4+6uv^5+v^6=36+2.14$$

$$\Leftrightarrow (u+v)^6=64 \qquad (3)$$

+ យក $(2)-2.(1)$ គេបាន ៖

$$u^6-6u^5v+15u^4v^2-20u^3v^3+15u^2v^4-6uv^5+v^6=36-2.14$$

$$\Leftrightarrow (u-v)^6=8 \qquad (4)$$

ពី (3) និង (4) គេបាន ៖

$$\begin{cases} u+v=2 \\ u-v=\pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u+v=2 \\ u-v=\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} u+v=2 \\ u-v=-\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{x} \\ v=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{y} \end{cases} \\ \begin{cases} u=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{x} \\ v=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{y} \end{cases} \end{array}\right.$$

គេបាន ៖ $(x;\ y)=\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2};\ \frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$

ឬ $(x;\ y)=\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2};\ \frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$

លំហាត់ទី ២៥ ៖ ដោះស្រាយសមីការក្នុង $\mathbb{R}$ ៖

$$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1}=0$$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

គេមាន ៖

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$$

យក $a=\sqrt[3]{x-1}$; $b=\sqrt[3]{x}$; $c=\sqrt[3]{x+1}$

នោះ $a+b+c=0$ (បម្រាប់)

គេបាន ៖ $(x-1)+x+(x+1)-3\sqrt[3]{(x-1)x(x+1)}=0$

$$\Leftrightarrow \quad x=\sqrt[3]{x^3-x} \quad \Leftrightarrow x^3=x^3-x \quad \Rightarrow x=0$$

ដូច្នេះ $x=0$ ជាចម្លើយនៃសមីការ។

លំហាត់ទី ២៦ ៖ រកគ្រប់ចំនួនគត់ x ; y ; z ផ្ទៀងផ្ទាត់

$x^3+y^3+z^3-3xyz=p$ ដែល p ជាចំនួនបឋម >3 ។

ដំណោះស្រាយ ៖

ឧបមាថា ៖ $x \ge y \ge z$

គេមាន ៖ $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p$

$$\Leftrightarrow \quad (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = p$$

ដោយ $x + y + z > 1$ និង p បឋម >3 នោះតម្រូវឲ្យ ៖

$$\begin{cases} x+y+z=p & (1) \\ (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2 & (2) \end{cases}$$

$+$ បើ $x>y>z$ នោះ $\begin{cases} x-y\ge 1 \\ x-z\ge 2 \\ y-z \ge 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \ge 6 > 2$$

ផ្ទុយពីលក្ខខណ្ឌ (2)

$+$នោះតម្រូវឲ្យ $x=y=z+1$ ឬ $x-1=y=z$

ដោយ p បឋមនោះ pមានរាង $3k+1$ (k គូ)

ឬ $3k+2$ (k សេស)

ដូច្នេះ ឫសសមីការគឺ ៖ $\left(\dfrac{p-1}{3}\ ;\ \dfrac{p-1}{3};\ \dfrac{p+2}{3}\right)$

ឬ $\left(\dfrac{p-2}{3}\ ;\ \dfrac{p+1}{3};\ \dfrac{p+1}{3}\right)$

លំហាត់ទី ២៧ ៖ រកគ្រប់ត្រីធាតុចំនួនគត់ $(m;\ n;\ p)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $m+n+p=2002$ ដែលធ្វើឲ្យប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=m \\ \frac{y}{z}+\frac{z}{y}=n \\ \frac{z}{x}+\frac{x}{z}=p \end{cases}$$

មានឫសមួយ យ៉ាងតិចក្នុងសំណុំចំនួនពិត>0។

ដំណោះស្រាយ ៖

គេមាន $mnp=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)$

$$mnp=1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}+1$$

$$mnp=\left(\underbrace{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}_{m}\right)^2+\left(\underbrace{\frac{y}{z}+\frac{z}{y}}_{n}\right)^2+\left(\underbrace{\frac{z}{x}+\frac{x}{z}}_{p}\right)^2-4$$

$$m^2+n^2+p^2=mnp+4 \qquad (1)$$

បូកអង្គសងខាងនៃ (1) ជាមួយនឹង $2(mn+np+pm)$

នោះគេបាន ៖

$$(m+n+p)^2=mnp+2(mn+np+pm)+4 \qquad (2)$$

បូកអង្គសងខាងនៃ (2) នឹង $4(m+n+p)+4$ នោះគេបាន៖

$$\left(\underbrace{m+n+p}_{2002}+2\right)^2=(m+2)(n+2)(p+2)$$

$$\Leftrightarrow \quad (m+2)(n+2)(p+2)=2004^2$$

ដោយ

$$\left\{\begin{array}{l} 2004=2^2\times 3\times 167 \\ m+n+p=2002 \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow (m+2)+(n+2)+(p+2)=2008$$

ដូចនេះគេត្រូវរកត្រីធាតុ $(m+2;\ n+2;\ p+2)$ ដែល

$$\left\{\begin{array}{l} (m+2)+(n+2)+(p+2)=2008 \\ (m+2)(n+2)(p+2)=2004^2 \end{array}\right.$$

គេបាន ៖

$$(m+2,\ n+2;\ p+2)=\left[\begin{array}{l} (4\ ;1002;\ \ 1002) \\ (1002;\ \ 4;\ \ 1002) \\ (1002;\ \ 1002;\ \ 4) \end{array}\right.$$

$$\text{ឬ } (m;\ n;\ p)=\left[\begin{array}{l}(2;\ 1000;\ 1000)\\(1000;\ 2;\ 1000)\\(1000;\ 1000;\ 2)\end{array}\right.$$

លំហាត់ទី ២៨ ៖

ចូររកតួអក្សរខុសៗគ្នាតាងឲ្យលេខខុសគ្នានៃសំណុំ $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;......;9\}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$\begin{array}{ccccccc} & F & O & R & T & Y \\ + & & & T & E & N \\ & & & T & E & N \\ \hline & S & I & X & T & Y \end{array}$$

ដំណោះស្រាយ ៖

គេទាញ $E;\ N\in\{0;\ 5\}$

+បើ $N=5$ នោះ $E=0\ \Rightarrow T+1=T$ មិនអាច

នោះតម្រូវឲ្យ $\underline{N=0}$ និង $\underline{E=5}$ ។

គេពិនិត្យមើលខ្ទង់ពាន់ដែលត្រូវត្រាទុកពីខ្ទង់រយដែលត្រាទុកនេះត្រូវ ≤ 2

-ករណីត្រាទុក 1 នោះ $O=9$ និង $I=0=E$ មិនអាច

នោះត្រូវត្រាទុក 2 ទៅខ្ទង់ពាន់ $\underline{\Rightarrow O=9}$ និង $\underline{I=1}$

ហើយ $T\geq 5$

ដោយ $E=5$ រួចហើយនោះ $T\in\{6;\ 7;\ 8\}$

+បើ $T=6$ នោះ $R=7$ ឬ 8

- ចំពោះ $R=7\Rightarrow X=0=N$ មិនអាច
- ចំពោះ $R=8\Rightarrow X=1=I$ មិនអាច

+បើ $T=7$ នោះ $R\in\{6;\ 7\}$

- ចំពោះ $R=6\Rightarrow X=1=I$ មិនអាច
- ចំពោះ $R=8\Rightarrow X=3\Rightarrow F\notin\{0;\ 1;\ 2;\ ......;\ 9\}$

+នោះ $\underline{T=8;\ \ R=7;\ \ X=4;\ \ F=2;\ \ S=3;\ \ Y=6}$

ជាចម្លើយតែមួយគត់

ដូច្នេះ

$$
\begin{array}{rccccc}
 & 2 & 9 & 7 & 8 & 6 \\
+ & & & 8 & 5 & 0 \\
 & & & 8 & 5 & 0 \\
\hline
 & 3 & 1 & 4 & 8 & 6
\end{array}
$$

ត្រូវជួយអ្នកដទៃឲ្យបានច្រើនជាងពីអ្នកដទៃ

លំហាត់ទី ២៩ ៖ មានមនុស្ស ៥ នាក់ A; B; C; D; E ដែលម្នាក់ៗមានពាក់មួក**ពណ៌ស** ឬ**ក្រហម** តែពួកគេមិនបានដឹងថាខ្លួនឯងពាក់មួកពណ៌អ្វីទេ។គេដឹងថាអ្នកពាក់មួកខ្មៅតែងនិយាយស្មោះត្រង់ រីឯអ្នកពាក់មួកសតែង និយាយកុហក។ តើម្នាក់ៗពាក់មួកពណ៌អ្វី បើពួកគេអះអាងថា ៖

A និយាយថា ៖ "ខ្ញុំឃើញមួកខ្មៅ 3 និងស 1"

B និយាយថា ៖ "ខ្ញុំឃើញមួកស 4"

C និយាយថា ៖ "ខ្ញុំឃើញមួកខ្មៅ 1 និងស 3"

D និយាយថា ៖ "ខ្ញុំឃើញមួកខ្មៅ 4"?

ដំណោះស្រាយ៖

គេត្រូវពិភាក្សាពីរករណីចំពោះE គឺ Eពាក់មួកពណ៌ស ឬខ្មៅ។

\+ <u>**ករណីទី១**</u> ៖ Eពាក់មួកសនោះ E ជាមនុស្សកុហក

គេទាញបានថា D និយាយកុហក ហើយពាក់មួកស។

(ព្រោះ D ត្រូវឃើញមួកស 1)

ដោយ D និង E ពាក់មួកសដូចគ្នានោះ A កុហក និងពាក់មួកពណ៌ស។

(ព្រោះ A ត្រូវមើលឃើញមួកស 2)

ក) <u>បើ C និយាយត្រង់</u> នោះ C ពាក់មួកខ្មៅ

គេទាញថា B ពាក់មួកខ្មៅ និង B ស្មោះត្រង់

(មើលដោយ C) (*)

តែ B ត្រូវមើលឃើញ C ពាក់មួកខ្មៅ $\Rightarrow$B កុហក ផ្ទុយពី (*)

ខ) <u>បើ C កុហក</u> នោះ C ពាក់មួកស

$\Rightarrow A;\ B;\ \ D;\ E;$ ក៏ពាក់មួកស

នោះសម្តីរបស់ B ពិត (B ពាក់មួកខ្មៅ)$\Rightarrow$សម្តី C ក៏ពិតដែរ

$\Rightarrow$ផ្ទុយពីការឧបមាដែលថា C កុហក

សន្និដ្ឋានបានថា ករណី១ មិនអាចកើតមានបានទេ។

+<u>ករណីទី ២</u> ៖ E ពាក់មួកខ្មៅ នោះ E ស្មោះត្រង់

គេបាន៖ - សម្តីរបស់ B កុហក $\Leftrightarrow$ B ពាក់មួកស

(ព្រោះ B ត្រូវមើលឃើញមួកខ្មៅមួយ)

- សម្តីរបស់ D កុហក $\Leftrightarrow$ D ពាក់មួកស

(ព្រោះ D ត្រូវមើលឃើញមួកសមួយរបស់ B)

- សម្តីរបស់ A កុហក $\Leftrightarrow$ A ពាក់មួកស

(ព្រោះ A ត្រូវមើលឃើញមួក ស ពីរ)

- សម្តីរបស់ C ពិត $\Leftrightarrow$ ពាក់មួកខ្មៅ

(ព្រោះ C មើលឃើញមួកស បី)

សន្និដ្ឋានថា៖ A ពាក់មួកស; Bពាក់មួកស; C ពាក់មួកខ្មៅ;

D ពាក់មួកស និង E ពាក់មួកខ្មៅ។

លំហាត់ទី ៣០៖ រកចំនួនបឋម p ដែលគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន

x; y ផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$\begin{cases} p+1=2x^2 & (1) \\ p^2+1=2y^2 & (2) \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ៖

អង្គទីពីរនៃប្រព័ន្ធសមីការសុទ្ធតែជាចំនួនគូ នោះp សេស។

យក $(2)-(1)$ គេបាន៖ $p^2-p=2(y^2-x^2)$

សមមូល $p(p-1)=2(y-x)(y+x)$

ដោយ p សេស នោះ p មិនចែកដាច់នឹង 2 ទេ។

<u>ករណីទី១</u> ៖ $p \mid y-x \Leftrightarrow p\le y-x$

និង $p-1\ge 2y+2x$

គេបាន ៖ $p-1\ge 4x+2p \Leftrightarrow p+1\le -4x<0$

មិនអាចព្រោះ $(x>0)$

<u>ករណីទី២</u>៖ $p \mid y+x \Rightarrow p\le y+x$

និង $p-1\ge 2(y-x)$

គេបាន ៖ $p-1\ge 2p-4x \Leftrightarrow p+1\le 4x$

$$\left\{\begin{array}{l} p+1\le 4x \\ p+1=2x^2 \end{array}\right. \quad \Big| \Rightarrow 2x^2\le 4x \text{ នោះ } x\le 2$$

$+$បើ $x=1 \quad \Rightarrow \quad p=1$ មិនមែនចំនួនបឋម

$+$បើ $x=2 \quad \Rightarrow \quad p=7$

ដូច្នេះ $p=7$ ។

លំហាត់ទី ៣១ ៖ រកគ្រប់ត្រីធាតុនៃគត់វិជ្ជមាន $(a;\ b;\ c)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖

$$(*) \qquad \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=3$$

ដំណោះស្រាយ ៖

ឧបមាថា $a\ge b\ge c$ នោះ $\frac{1}{a}\le\frac{1}{b}\le\frac{1}{c}$ ។

គេបាន $(*) \quad \Leftrightarrow \quad 3\le\left(1+\frac{1}{c}\right)^3 \qquad (**)$

$+$បើ $c\ge 3$ នោះ $\left(1+\frac{1}{c}\right)^3\le\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\frac{64}{27}<3$

ដែលមិនផ្ទៀងផ្ទាត់ $(**)$

$+$បើ $c<3$ នោះ $c=1$ ឬ $c=2$

– បើ $c=1$ នោះ $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \ ab-2a-2b-2=0$

$\Leftrightarrow \ (a-2)(b-2)=6=6\times1=3\times2$

ព្រោះ $a\geq b\geq c$

$\Leftrightarrow \ (a-2;\ \ b-2)=(6;\ 1)$ ឬ $(3;\ 2)$

$\Leftrightarrow \ (a;\ b)=(8;\ 3)$ ឬ $(5;\ 1)$

– បើ $c=2$ នោះ $(a-1)(b-1)=2=2\times1$

$\Leftrightarrow \ (a;\ b)=(3;\ 2)$

សរុប $(a;\ b;\ c)=(8;\ 3;\ 1)$ ឬ $(5;\ 4;\ 1)$ ឬ $(3;\ 2;\ 1)$

លំហាត់ទី ៣២៖

រកគ្រប់ត្រីធាតុក្នុងសំណុំចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{cases} x+y=1-z \\ x^3+y^3=1-z^2 \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ៖

ប្រព័ន្ធដែលឲ្យ $\Leftrightarrow \begin{cases} z=1-x-y & (1) \\ x^3+y^3+z^2=1 & (2) \end{cases}$

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន៖

$$x^3+y^3+(1-x-y)^2=1$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-y)(x^2-xy+y^2+x+y-2)=0$$

ករណីទី ១ ៖ បើ $x+y=0 \quad \Rightarrow \quad z=1$

តាង $x=m$ ជាចំនួនគត់នោះ $(x;\ y;\ z)=(m;\ -m;\ 1)$

ករណីទី ២៖ បើ $x+y\neq 0 \ \Rightarrow x^2-xy+y^2+x+y-2=0$

$$\Leftrightarrow (2x-y+1)^2+3(y+1)^2=12$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+1=0 \\ y+1=\pm 2 \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} 2x-y+1=\pm 3 \\ y+1=\pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-y+1=0 \\ y+1=+2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-y+1=0 \\ y+1=-2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\text{ឬ } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-y+1=3 \\ y+1=+1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-y+1=3 \\ y+1=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

ឬ
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-y+1=-3\\ y+1=+1\end{cases}\\ \begin{cases}2x-y+1=-3\\ y+1=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ គេបាន៖

$$(x;\ y;\ z)\in\{(0;1;0),(-2;-3;6),(1;0;0),\ (0;-2;3),\ (-2;0;3),\ (-3;-2;6)\}$$

លំហាត់ទី ៣៣៖ គេមាន $a_1;\ \ a_2;......;\ \ a_n$ ជា n ចំនួនគត់សេសមិនចែកដាច់ចំនួនបឋមធំជាង 5។ បង្ហាញថា៖

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}<2\text{។}$$

ដំណោះស្រាយ៖

ចំពោះ $a>1$ និង $\forall\ m$ ចំនួនគត់ គេមាន៖

$$1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+.....+\frac{1}{a^m}\ =\ \frac{1-\dfrac{1}{a^{m+1}}}{1-\dfrac{1}{a}}\ <\ \frac{a}{a-1}$$

ដោយ $a_1;\ a_2;.....;\ a_n$ ជា n ចំនួនគត់សេសមិនមែនជាពហុគុណនៃចំនួន បឋម >5 គេបាន ៖

$\forall i\ \ a_i=1$ (មិនបឋម) ឬ $a_i=3$ ឬ $a_i=5$។

ចំពោះចំនួនគត់ m កាន់តែធំ គេបាន៖

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+....+\frac{1}{a_n}<\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^m}\right)\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+....+\frac{1}{5^m}\right)$$

$$<\frac{3}{2}.\frac{5}{4}=\frac{15}{8}<2$$ ពិត

ដូច្នេះ $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}<2$

លំហាត់ទី ៣៤៖ គេមានចំនួនពិត $a;\ b;\ c;\ d>0$ ដែល $a+b+c+d\le 1$។ បង្ហាញថា $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{d}+\frac{d}{c}<\frac{1}{64abcd}$។

ដំណោះស្រាយ៖

គេត្រូវស្រាយថា $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{d}+\frac{d}{c}<\frac{1}{64abcd}$

$$\Leftrightarrow \quad a^2cd+b^2cd+c^2ab+d^2ab\le\frac{1}{64} \qquad (1)$$

តែ $a^2cd+b^2cd+c^2ab+d^2ab=(ac+bd)(ad+bc)$

ម្យ៉ាងទៀត គេមាន គ្រប់ $x;\ y$: $xy\le\frac{(x+y)^2}{4}$ នោះ

$$\left\{\begin{array}{l} a^2cd+b^2cd+c^2ab+d^2ab\le\dfrac{(ac+bd+ad+bc)^2}{4} \\ ac+bd+ad+bc=(a+b)(c+d)\end{array}\right. \quad\Big| \quad \Rightarrow$$

$$a^2cd+b^2cd+c^2ab+d^2ab\le\frac{\left((a+b)(c+d)\right)^2}{4}\le\frac{\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2}{4}$$

ដោយ $a+b+c+d=1$ នោះគេបាន ៖

$$a^2cd+b^2cd+c^2ab+d^2ab\le\frac{1}{64}$$ ពិត

ដូច្នេះ $a^2cd+b^2cd+c^2ab+d^2ab\le\frac{1}{64}$

លំហាត់ទី ៣៥៖ បង្ហាញថា $1+\sqrt{5}$ មិនអាចសរសេរជាផលបូកការេនៃ $a+b\sqrt{5}$ បានទេ។ (គេឲ្យ a; b ជាចំនួនសនិទាន)។

ដំណោះស្រាយ៖

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $x_1; x_2; y_1;\ y_2$

+បើ $x_1+y_1\sqrt{5}=x_2+y_2\sqrt{5}$ នោះ $x_1=x_2$ និង $y_1=y_2$

+បើ $x_1\ne x_2$ និង $y_1\ne y_2$ នោះ $\sqrt{5}=\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}$

ដែល $\sqrt{5}$ ចំនួនអសនិទាន និង $\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}$ ជាចំនួនសនិទាន

យើងឧបមា

$$1+\sqrt{5}=\left(a_1+b_1\sqrt{5}\right)^2+\left(a_2+b_2\sqrt{5}\right)^2+\ldots\ldots+\left(a_n+b_n\sqrt{5}\right)^2$$

នោះគេក៏អាចសរសេរផងដែរ

$$1-\sqrt{5}=\left(a_1-b_1\sqrt{5}\right)^2+\left(a_2-b_2\sqrt{5}\right)^2+......+\left(a_n-b_n\sqrt{5}\right)^2$$

គេដឹងថា $1-\sqrt{5}<0$

រីឯ $\left(a_1-b_1\sqrt{5}\right)^2+\left(a_2-b_2\sqrt{5}\right)^2+......+\left(a_n-b_n\sqrt{5}\right)^2<0$

ផ្ទុយពីការពិតដែលការេនៃចំនួនពិតត្រូវ >0 ។

ដូច្នេះ $1+\sqrt{5}$ មិនអាចសរសេរជាផលបូកការេនៃ $a+b\sqrt{5}$ បានទេ។

លំហាត់ទី ៣៦៖ ចំពោះគ្រប់ $a;b;c\in\left]0;\ 1\right[$ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

<u>របៀបទី១</u> ៖ ចំពោះគ្រប់ $x\in\left]0;\ 1\right[$ គេបាន $x^{\frac{1}{2}}<x^{\frac{1}{3}}$

នោះ $\begin{cases}\sqrt{abc}<\sqrt[3]{abc}\\ \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)}\end{cases}\quad(*)$

ដោយ $\begin{cases}\sqrt[3]{abc}<\dfrac{a+b+c}{3}\\ \sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)}\le\dfrac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3}\end{cases}$

នោះ

$$(*) \iff \begin{cases} \sqrt{abc} < \dfrac{a+b+c}{3} \\ \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < \dfrac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3} \end{cases}$$

បូកអង្គនឹងអង្គ គេបាន ៖

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < \frac{a+b+c+1-a+1-b+1-c}{3} = 1$$

ដូច្នេះ $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$

<u>របៀបទី២</u> ៖

តាង $a = \sin^2 x$; $b = \sin^2 y$; $c = \sin^2 z$

ដែល $x;\ y;\ z \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

វិសមភាពត្រូវស្រាយ

$$\iff \sin x.\sin y.\sin z + \cos x.\cos y.\cos z < 1$$

ឬ $\sin x.\sin y.\sin z + \cos x.\cos y.\cos z$

$$< \sin x.\sin y + \cos x.\cos y < 1$$

$\sin x.\sin y.\sin z + \cos x.\cos y.\cos z < \cos(x-y) \le 1$ ពិត

ដូច្នេះ $\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$

លំហាត់ទី ៣៧៖ បង្ហាញថា

$$\frac{A+a+B+b}{A+a+B+b+c+r}+\frac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+r}>\frac{C+c+A+a}{C+c+A+a+b+r}$$

ដែលអក្សរនីមួយៗសុទ្ធតែជាចំនួនវិជ្ជមាន។

ដំណោះស្រាយ៖

យើងត្រូវប្រើបទគន្លឹះមួយជាជំនួយក្នុងការស្រាយវិសមភាព

បទគន្លឹះ (Lemma)៖

ចំពោះ $p;\ q;\ x;\ y>0$ បើ $\begin{cases}\dfrac{1}{p}>\dfrac{1}{q}\\ x>y\end{cases}$ នោះ $\dfrac{x}{x+p}>\dfrac{y}{y+q}$

សម្រាយបទគន្លឹះ

គេមាន $\begin{cases}\dfrac{1}{p}>\dfrac{1}{q}>0\\ x>y>0\end{cases}\ \Bigg|\ \Rightarrow\ \dfrac{x}{p}>\dfrac{y}{q}>0\ \Leftrightarrow\ \dfrac{p}{x}<\dfrac{q}{y}$

ឬ $0<1+\dfrac{p}{x}<1+\dfrac{q}{y}$

ឬ $0<\dfrac{x+p}{x}<\dfrac{y+q}{y}$

នោះ $\dfrac{x}{x+p}>\dfrac{y}{y+q}$ ពិត

សម្រាយលំហាត់ ៖

តាមបទគន្លឹះខាងលើ យើងជ្រើសរើស

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c+r} > \dfrac{1}{C+c+b+r} \\ A+a+B+b > A+a \end{cases} \Rightarrow$$

នោះ $\dfrac{A+a+B+b}{A+a+B+b+c+r} > \dfrac{A+a}{C+c+A+a+b+r} \qquad (1)$

ម៉្យាងទៀត គេជ្រើសរើស $\begin{cases} \dfrac{1}{a+r} > \dfrac{1}{A+a+b+r} \\ B+b+C+c > C+c \end{cases} \Rightarrow$

នោះ $\dfrac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+r} > \dfrac{C+c}{C+c+A+a+b+r} \qquad (2)$

បូកអង្គនឹងអង្គនៃ (1) និង (2) នោះ

$$\frac{A+a+B+b}{A+a+B+b+c+r} + \frac{B+b+C+c}{B+b+C+c+a+r} > \frac{C+c+A+a}{C+c+A+a+b+r}$$ ពិត

លំហាត់ទី ៣៨៖ បើ x និង y ជាចំនួនពិត >0

ដែល $x+y=1$ ស្រាយថា $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right) \geq 9$។

ដំណោះស្រាយ ៖

ដោយ $\begin{cases} x>0; \quad y>0 \\ x+y=1 \end{cases}$ នោះ $0<x<1$

វិសមភាពដែលឲ្យសមមូលនឹង $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{1-x}\right)\geq 9$

ឬ $(x+1)(1-x+1)\geq 9x(1-x)$

ឬ $2+x-x^2\geq 9x-9x^2$

សមមូលនឹង $(2x-1)^2\geq 0$ ពិត

ដូច្នេះ $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9$

លំហាត់ទី ៣៩ ៖ រកឬសគត់វិជ្ជមាននៃសមីការ $2a^2=3b^3$។

ដំណោះស្រាយ ៖

តាង $(x;\ y)$ ជាគូចម្លើយនៃសមីការ គេបាន៖ $2x^2=3y^3$

នោះមានចំនួនគត់ x' ដែល $x=3x'$ ធ្វើឲ្យ $2\,.\,3^2\,.\,(x')^2=3y^3$

ឬ $2\,.\,3(x')^2=y^3 \quad (1)$

ដើម្បីឲ្យ(1)ផ្ទៀងផ្ទាត់នោះមានចំនួនគត់y'ដែល $y=2.3.y'$

ហេតុនេះ (1) ទៅជា $2\,.\,3(x')^2=2^3\,.\,3^3.(y')^3$

ឬ $(x')^2=2^2.3^2.(y')^3 \quad (2)$

ដើម្បីឲ្យ (2) ផ្ទៀងផ្ទាត់នោះមាន x'' ដែល $x'=2.3x''$

ហេតុនេះ (2) ទៅជា $2^2 3^2 (x'')^2 = 2^2 3^2 (y')^3$

$$\Leftrightarrow \quad (x'')^2 = (y')^3 = c$$

គេសង្កេតឃើញថា c ជាចំនួនស្វ័យគុណនៃ 3 ផង និង 2

នោះមានចំនួនគត់ d ដែល $c=d^6$ នោះ

$$\begin{cases} x''=d^3 \\ y'=d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=6x''=6d^3 \\ y=6y'=6d^2 \end{cases}$$

ដោយ $x=3x'=18d^2$ គេទាញបាន $\begin{cases} x=18d^2 \\ y=6d^2 \end{cases}$

ដូច្នេះ គូចម្លើយសមីការគឺ $(x;\ y)=(18d^3;\ 6d^2)$

ដែល d ចំនួនគត់។

លំហាត់ទី ៤០៖ បើ $x;\ y; z\in\mathbb{R}$ កំណត់តម្លៃធំបំផុតនៃ z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖

$$\begin{cases} x+y+z=5 & (1) \\ xy+yz+xz=3 & (2) \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ ៖

ពីសមីការ (1) គេបាន ៖ $x=5-y-z$

នោះ (2) ទៅជា $(5-y-z)y+yz+(5-y-z)z=3$

ឬ $y^2+(z-5)y+(z^2+3-5z)=0$

ដោយ y ជាចំនួនពិតនោះ $\Delta\ge 0 \Leftrightarrow (z-5)^2-4(z^2+3-5z)\ge 0$

ឬ $-3z^2+10z+13\ge 0 \Leftrightarrow 3z^2-10z-13\le 0$

ឬ $(3z-13)(z+1)\le 0 \Leftrightarrow -1\le z\le\dfrac{13}{3}$

ដូច្នេះ តម្លៃធំបំផុតនៃ z គឺ $\dfrac{13}{3}$ ។

លំហាត់ទី ៤១៖ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $a; b; c; d; e$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $1\le a<b<c<d<e$ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$\frac{1}{LCM(a;b)}+\frac{1}{LCM(b;c)}+\frac{1}{LCM(c;d)}+\frac{1}{LCM(d;e)}\le\frac{15}{16}$$

ដំណោះស្រាយ ៖

ចំពោះគ្រប់ $a; b; c; d; e$ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន

តាង $S=\dfrac{1}{LCM(a;b)}+\dfrac{1}{LCM(b;c)}+\dfrac{1}{LCM(c;d)}+\dfrac{1}{LCM(d;e)}$

ដោយ $1\le a<b<c<d<e$ នោះ $LCM(a;b)\ge 2a$;

$LCM(a;b)\ge 2b$; $LCM(a;b)\ge 2c$ និង $LCM(a;b)\ge 2d$

ដែល $b\ge 2$ និង $c\ge 3$

+ <u>ករណីទី១</u>៖ $c=3$

• បើ $d=4$ នោះ $LCM(a;b)=2;\ LCM(b;c)=6$

$LCM(c;d)=12$ និង $LCM(d;e)\geq 8$ គេបាន ៖

$$S\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}<\frac{15}{16}$$ ពិត

• បើ $d\geq 5$ នោះ $LCM(c;d)\geq 6$ និង $LCM(d;e)\geq 10$

$$S\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}=\frac{28}{30}<\frac{15}{16}$$ ពិត

+ <u>ករណីទី២</u>៖ $c\geq 4$

• បើ $5\leq d\leq 7$ នោះ $LCM(c;d)=20;\ 28;\ 30;\ 35;$ ឬ 42

(លើកលែងពេល $c=4$ និង $d=6$) គេបាន ៖

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{10}=\frac{18}{20}<\frac{15}{16}$$ ពិត

ម្យ៉ាងទៀត បើ $c=4$ និង $d=6$ នោះ

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{11}{12}<\frac{15}{16}$$ ពិត

• បើ $d\geq 8$ នោះ $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$ ពិត

ដូច្នេះ $\frac{1}{LCM(a;b)}+\frac{1}{LCM(b;c)}+\frac{1}{LCM(c;d)}+\frac{1}{LCM(d;\ e)}\leq\frac{15}{16}$

លំហាត់ទី ៤២៖ រកតម្លៃនៃ b ដើម្បីឲ្យសមីការ

$1988x^2+bx+8891=0$ និង $8891x^2+bx+1988=0$

មានឫសរួម។

ដំណោះស្រាយ ៖

គេមាន $\begin{cases} 1988x^2+bx+8891=0 & (1) \\ 8891x^2+bx+1988=0 & (2) \end{cases}$

ពី (1) គេបាន $b=\dfrac{-8891-1988x^2}{x} \quad (3)$

ពី (2) គេបាន $b=\dfrac{-1988-8891x^2}{x} \quad (4)$

$(3)=(4)$ នោះ $x=\pm 1$ ។

$+$បើ $x=1$ នោះ $b=-10879$

$+$បើ $x=-1$ នោះ $b=10879$

ដូច្នេះ $b=-10879$ ឬ $b=10879$

លំហាត់ទី ៤៣៖ ដោះស្រាយសមីការ $x^2+\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=3 \quad (1)$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

<u>របៀបទី ១</u> ៖ $(1) \Leftrightarrow \ 0=x^4+2x^3-x^2-6x-3$

ឬ $\ 0=\left(x^2+x+1\right)^2-4(x+1)^2=\left(x^2+3x+3\right)\left(x^2-x-1\right)$

គេទាញបាន៖ $x^2+3x+3=0$ ឬ $x^2-x-1=0$

ដូច្នេះ ឫសសមីការ (1) គឺ៖ $x=\frac{1}{2}\left(-3\pm i\sqrt{3}\right)$

ឬ $x=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{5}\right)$

<u>របៀបទី២</u> ៖ មាន $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=3 \qquad (1)$

សមមូល $$x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}-\frac{2x^2}{x+1}=3-\frac{2x^2}{x+1}$$

ឬ $$\left(x-\frac{x}{x+1}\right)^2=3-2\frac{x^2}{x+1}$$

ឬ $$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2=3-2\frac{x^2}{x+1}$$

ឬ $$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2+2\left(\frac{x^2}{x+1}\right)-3=0$$

នោះ $\frac{x^2}{x+1}=1$ ឬ $\frac{x^2}{x+1}=-3$

គេទាញ $x=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{5}\right)$ ឬ $x=\frac{1}{2}\left(-3\pm i\sqrt{3}\right)$

<u>របៀបទី៣</u>៖ តាង $w=x+1 \Leftrightarrow x=w-1$ នោះ (1) ទៅជា

$$w^2-2w+1+1-\frac{2}{w}+\frac{1}{w^2}=3$$

សមមូល $\left(w+\frac{1}{w}\right)^2-2\left(w+\frac{1}{w}\right)-3=0$

គេបាន $w+\frac{1}{w}=-1$ ឬ $w+\frac{1}{w}=3$

ឬ $w^2+w+1=0$ ឬ $w^2-3w+1=0$

ដូច្នេះ $\left[\begin{array}{l} x=w-1=\frac{1}{2}\left(-1\pm i\sqrt{3}\right)-1=\frac{-3\pm i\sqrt{3}}{2} \\ x=w-1=\frac{1}{2}\left(3\pm\sqrt{5}\right)-1=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{5}\right) \end{array}\right.$

<u>របៀបទី៤</u> ៖ តាង $y=\frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=3 & (1) \\ xy=x-y \end{cases}$

នោះ៖ $x^2y^2=(x-y)^2=3-2xy$

ឬ $(xy)^2+2(xy)-3=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} xy=1 \\ xy=-3 \end{array}\right.$

សមមូល $\left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{x+1}=1 \\ \frac{x^2}{x+1}=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{5}\right) \\ x=\frac{1}{2}\left(-3\pm i\sqrt{3}\right) \end{array}\right.$

លំហាត់ទី ៤៤៖ (វិ.កូស៊ី–ប៊ូនៀកូស្គី ($Cauchy-Buniakowski$))

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $a_1;\ a_2;\ \dots\ ;a_n$ និង $b_1;\ b_2;\ \dots\ ;b_n$

បង្ហាញថា ៖

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n\right)^2\le\left(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2\right)$$

ដំណោះស្រាយ ៖

<u>របៀបទី១</u> ៖ គេមាន

$$\begin{aligned}&\left(xa_1+b_1\right)^2+\left(xa_2+b_2\right)^2+\dots+\left(xa_n+b_n\right)^2\\&\qquad=\left(x^2a_1^2+2xa_1b_1+b_1^2\right)+\left(x^2a_2^2+2xa_2b_2+b_2^2\right)\\&\qquad\qquad+\ \dots\ +\left(x^2a_n^2+2xa_nb_n+b_n^2\right)\end{aligned}$$

$$\left(xa_1+b_1\right)^2+\left(xa_2+b_2\right)^2+\dots+\left(xa_n+b_n\right)^2=Ax^2+2Bx+C$$

ដែលក្នុងនោះ $\begin{cases}A=a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2\\B=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n\\C=b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2\end{cases}$

ដោយអង្គខាងឆ្វេងនៃសមភាពជាចំនួនវិជ្ជមាននោះអង្គខាងស្តាំក៏វិជ្ជមានដែរ គឺ $Ax^2+2Bx+C>0$។

$Ax^2+2Bx+C>0$ លុះត្រាតែ $\left.\begin{cases}\Delta'=B^2-AC<0\\A>0\end{cases}\right|\Rightarrow B^2<AC$

សមមូល

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2 \le \left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)$$

ដែលសមភាពកើតឡើងពេល

$$xa_1+b_1=xa_2+b_2=...=xa_n+b_n=0$$

ឬ $$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=...=\frac{b_n}{a_n}\left(=-x\right)$$

<u>របៀបទី២</u> ៖ ចំពោះចំនួនពិត a និង b គេមាន ៖ $\left(a-b\right)^2 \ge 0$

ឬ $a^2+b^2 \ge 2ab$

ឬ $ab \le \frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2 \quad (*)$

យក $\begin{cases} A=\sqrt{a_1^2+...+a_n^2} \\ B=\sqrt{b_1^2+...+b_n^2} \end{cases}$ និង $\begin{cases} \overline{a}_i=\dfrac{a_i}{A} \\ \overline{b}_i=\dfrac{b_i}{B} \end{cases}$ $\forall i=1,2,...,n$

នោះ $\begin{cases} \overline{a}_1^2+...+\overline{a}_n^2=\dfrac{a_1^2+...+a_n^2}{A^2}=1 \\ \overline{b}_1^2+...+\overline{b}_n^2=\dfrac{b_1^2+...+b_n^2}{B^2}=1 \end{cases}$

តាម $(*)$ គេបាន៖

$$+\begin{cases} \overline{a}_1\overline{b}_2 \le \frac{1}{2}\overline{a}_1^2 + \frac{1}{2}\overline{b}_2^2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \overline{a}_n\overline{b}_n \le \frac{1}{2}\overline{a}_n^2 + \frac{1}{2}\overline{b}_n^2 \end{cases}$$

$$\overline{a}_1\overline{b}_2 + \dots + \overline{a}_1\overline{b}_2 \le \frac{1}{2}\left(\overline{a}_1^2 + \dots + \overline{a}_n^2\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{b}_1^2 + \dots + \overline{b}_n^2\right)$$

$$\overline{a}_1\overline{b}_2 + \dots + \overline{a}_1\overline{b}_2 \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

គេទាញ $\frac{a_1b_1}{AB} + \dots + \frac{a_nb_n}{AB} \le 1$ ឬ $a_1b_1 + \dots + a_nb_n \le AB$

សមមូល

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2\right)$$

<u>របៀបទី៣</u>៖ ស្រាយតាមវិចារកំណើន

+ បើ $n = 1$ នោះ $\left(a_1b_1\right)^2 \le a_1^2b_1^2$ ពិត

+ ឧបមាថាវាពិតដល់ n គឺ ៖ $C^2 \le AB$

ដែល $\begin{cases} A = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \\ B = b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2 \\ C = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \end{cases}$

+ យើងត្រូវស្រាយថា

$$\left(C + a_{n+1}b_{n+1}\right)^2 \le \left(A + a_{n+1}^2\right)\left(B + b_{n+1}^2\right)$$ ពិត

គេសរសេរ $\left(A + a_{n+1}^2\right)\left(B + b_{n+1}^2\right) - \left(C + a_{n+1}b_{n+1}\right)^2 \ge 0$

$$\begin{aligned} &\left(A+a_{n+1}^2\right)\left(B+b_{n+1}^2\right)-\left(C+a_{n+1}b_{n+1}\right)^2 \\ &= AB + Ab_{n+1}^2 + Ba_{n+1}^2 + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 - C^2 - 2Ca_{n+1}b_{n+1} - \left(a_{n+1}b_{n+1}\right)^2 \\ &= \left(AB - C\right) + \left(Ab_{n+1}^2 + Ba_{n+1}^2 - 2Ca_{n+1}b_{n+1}\right) \\ &= \left(AB - C\right) + \left(\sqrt{A}b_{n+1} - \sqrt{B}a_{n+1}\right)^2 \\ &\qquad + 2\left(\sqrt{AB} - \sqrt{C}^2\right)a_{n+1}b_{n+1} \ge 0 \end{aligned}$$ ពិត

(ព្រោះគ្រប់តួនីមួយៗសុទ្ធតែ ≥ 0)

ដូច្នេះ $\left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right)$

លំហាត់ទី ៤៥៖ បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;\ b;\ c$

បើ $abc = 1$ នោះ $\dfrac{b+c}{\sqrt{a}} + \dfrac{c+a}{\sqrt{b}} + \dfrac{a+b}{\sqrt{c}} \ge \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន ៖

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geq 2\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\right) \quad (1)$$

តែ $2\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)$

$$=\left(\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)+\left(\sqrt{\frac{ca}{b}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)+\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)$$

$$\geq 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3\sqrt[6]{abc}$$

$$=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$$

ដូច្នេះ $(1)\Leftrightarrow \frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$ ពិត។

សម្តីល្មីខរបស់មិត្ត ប្រសើរជាងសម្តីផ្អែមរបស់សត្រូវ

លំហាត់ទី ៤៦៖ គេមានអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែល

គ្រប់ $x;\ y\in\mathbb{R}$ គេមាន $\left|f(x)-f(y)\right|\le(x-y)^2$

ចូរបង្ហាញថា f ជាអនុគមន៍ថេរ។

ដំណោះស្រាយ៖

គេត្រូវស្រាយថា $f'(x)=0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$។

$$\left|f'(x)\right|=\left|\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|=\lim_{y\to x}\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|a$$

$$=\lim_{y\to x}\frac{\left|f(y)-f(x)\right|}{\left|y-x\right|}$$

$$\le\lim_{y\to x}\frac{(y-x)^2}{\left|y-x\right|}=\lim_{y\to x}\left|y-x\right|=0$$

នោះគេទាញ $f'(x)=0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$។

លំហាត់ទី ៤៧៖ រកចំនួនបឋម $a;\ b;\ c$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$ab+bc+ac>abc \qquad (1)$$

ដំណោះស្រាយ ៖

ឧបមាថា $a\le b\le c$

បើ $a\ge 3$ នោះ $ab+bc+ac\le 3ab\le abc$ ផ្ទុយពី (1)

ដូច្នេះ $a<3$ គឺថា $a=2$

នោះ $(1) \Leftrightarrow 2b+2c+bc\geq 2bc \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{1}{2}$

+ បើ $b\geq 5$ នោះ $c\geq 5$ គេបាន៖

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$$ មិនអាច

+ បើ $b<5$ នោះ $b=2$ ឬ $b=3$

• បើ $b=2$ នោះ c ជាចំនួនបឋមណាមួយក៏បាន

• បើ $b=3$ នោះ $c=3$ ឬ 4 ។

ដូច្នេះ ចម្លើយសមីការគឺ ៖

$$(a;\, b;\, c)\in\left\{(2;2;c),\ (2;3;3),\ (2;\ 3;5)\right\}$$

លំហាត់ទី ៤៨៖ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}(x+y)^3=z\\(y+z)^3=x\\(z+x)^3=y\end{cases}$

ដំណោះស្រាយ ៖

ឧបមាថា $x\geq y\geq z$ គេបាន ៖

+ $(y+z)^3=x\geq y=(z+x)^3$

នោះ $y+z\geq z+x$ ឬ $y\geq x$

ដោយ $\left\{\begin{array}{l} y \leq x \\ y \geq x \end{array}\right. \Rightarrow y = x \quad (1)$

$+ \quad (y+z)^3 = x \geq z = (x+y)^3$

នោះ $y+z \geq x+y$ ឬ $z \geq x$

ដោយ $\left\{\begin{array}{l} z \leq x \\ z \geq x \end{array}\right. \Rightarrow z = x \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន $8x^3 = x$ ឬ $x(8x^2-1)=0$

នោះ $x=0; \quad x = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

ដូច្នេះចម្លើយប្រព័ន្ធគឺ៖

$$(x;y;z) \in \left\{(0;0;0), \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}; -\frac{1}{2\sqrt{2}}; -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right\}$$

លំហាត់ ៤៩ ៖ រកចំនួនគត់វិជ្ជមាន k ដែលធ្វើឲ្យ $A = \dfrac{k^2}{1.001^k}$ ធំបំផុត។

ដំណោះស្រាយ ៖

ដើម្បីឲ្យ A ធំបំផុតលុះត្រាតែ k តូចបំផុត

គេមាន $\dfrac{(k+1)^2}{(1.001)^{k+1}} - \dfrac{k^2}{(1.001)^k} < 0$

ឬ $$\frac{(k+1)^2}{(1.001)^{k+1}} - \frac{1.001\,k^2}{(1.001)^{k+1}} < 0$$

ឬ $$k^2+2k+1-1.001k^2<0$$

ឬ $$k^2-200k-100>0 \Leftrightarrow k(k-2000)>1000$$

នោះ $k \ge 2000$ (បើ $k=2000$ មិនពិត)

ដូច្នេះ $k=2001$

លំហាត់ទី ៥០ ៖ បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត a នោះគេបាន ៖

$$3\left(1+a^2+a^4\right) \ge \left(1+a+a^2\right)^2$$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

វិសមភាពដែលឲ្យសមមូលនឹង

$$3\left(1+a^2+a^4\right)-\left(1+a+a^2\right)^2 \ge 0$$

$$3+3a+3a^4-\left(1-a+a^2\right)^2$$

$$=3+3a^2+3a^4-1-2a-3a^2-2a^3-a^4$$

$$=2a^4-2a^3-2a+2$$

$$=2\left(1-a-a^3+a^4\right)$$

$$=2\left(1-a-a^3(1-a)\right)$$

$$=2(1-a)\left(1-a^3\right) \ge 0$$

+ចំពោះ $a>1$ គេបាន $(1-a)<0$ និង $(1-a^3)<0$

សមមូល $2(1-a)(1-a^3)>0$ នោះ វិសមភាពពិត

+ចំពោះ $a=1$ គេបាន $(1-a)=0$ និង $(1-a^3)=0$

សមមូល $2(1-a)(1-a^3)=0$ នោះវិសមភាពពិត

+ចំពោះ $a<1$ គេបាន $(1-a)>0$ និង $(1-a^3)>0$

សមមូល $2(1-a)(1-a^3)>0$ នោះ វិសមភាពពិត

សន្និដ្ឋាន ៖ វិសមភាពដែលត្រូវស្រាយគឺពិត។

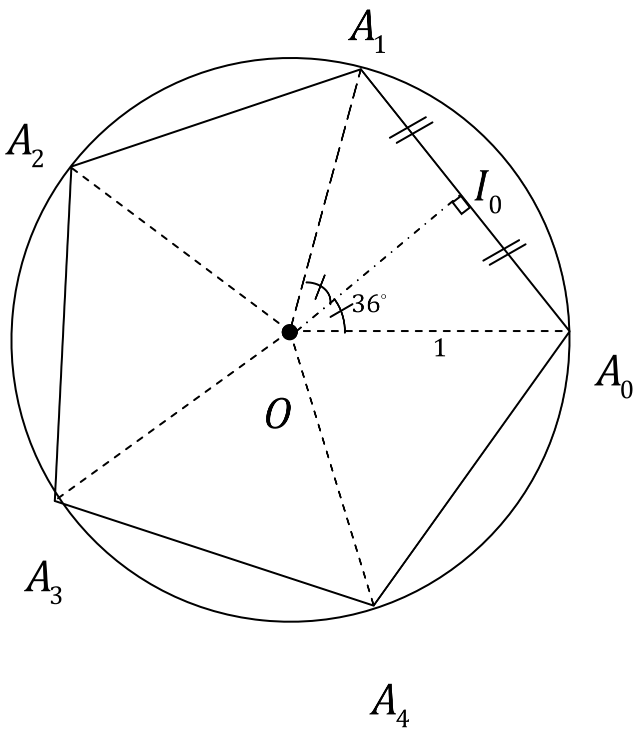
លំហាត់ទី ៥១៖ ចំណុច A_0; A_1; A_2; A_3 និង A_4 ចែករង្វង់កាំ ១ ឯកតាជាប្រាំចំណែកស្មើៗគ្នា។ បង្ហាញថា

$$(A_0A_1\times A_0A_2)^2=5\text{។}$$

ដំណោះស្រាយ ៖ តាមរូប

$$\angle A_0OA_1=\angle A_1OA_2=\angle A_2OA_3=\angle A_3OA_4=\angle A_4OA_0=\frac{360^\circ}{5}=72^\circ$$

គេបាន $A_0A_1=2A_0I_0=2\sin 36^\circ=4\sin 18^\circ\cos 18^\circ$



និង $A_0A_2 = 2\sin 72^\circ = 2\sin\left(90^\circ - 18^\circ\right) = 2\cos 18^\circ$

ដោយ $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ នោះ គេបាន ៖

$$A_0A_1 \times A_0A_2 = 8\sin 18^\circ \cos^2 18^\circ$$

$$= 8\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2\right)$$

$$= 8\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\sqrt{5}\left(\frac{5-1}{4}\right) = \sqrt{5}$$

នោះ $\left(A_0A_1 \times A_0A_2\right)^2 = 5$ ពិត។

លំហាត់ទី ៥២៖ ស្រាយថា $f(x)=ax^2+2bx+c\geq 0 \quad (1)$ លុះត្រាតែ $a\geq 0;\ c\geq 0$ និង $ac-b^2\geq 0$។

ដំណោះស្រាយ ៖

<u>លក្ខខណ្ឌចាំបាច់៖</u> $(\Rightarrow ?)$

បើ $f(x)=ax^2+2bx+c\geq 0$ នោះ $a\geq 0;\ c\geq 0$ និង $ac-b^2\geq 0$

គេមាន $af(x)=(ax+b)^2+ac-b^2=(ax+b)^2-(b^2-ac) \quad (2)$

<u>ករណីទី១</u>៖ $a\geq 0$ ពិត ព្រោះបើ $a<0$

នោះ $(1)\Rightarrow af(x)\leq 0;\ \forall x$

និងតាម $(2)\Leftrightarrow af(x)=(ax+b)^2-(b^2-ac)\leq 0$

នោះគេបាន $(ax+b)^2\leq b^2-ac;\ \forall x \qquad (3)$

តែគ្រប់ $\begin{cases} M>1 \\ M>b^2-ac \end{cases}$ និង $ax+b=M$

នោះមាន $x=\dfrac{M-b}{a}$ ដែល

$(ax+b)^2=M^2>M>b^2-ac$ ផ្ទុយពីលក្ខខណ្ឌ (3)

ដែលថា $(ax+b)^2\leq b^2-ac;\ \forall x$។

ដូច្នេះ $a\geq 0$ ពិតគ្រប់ x។

<u>ករណីទី២</u>៖ $c\geq 0$ ពិត ព្រោះ $(1)\Rightarrow f(0)=c\geq 0$ ពិត $\forall x$

ករណីទី៣៖ $ac-b^2\geq 0$ ពិត

$+$បើ $a>0$ និង $x=-\frac{b}{a}$ ឬ $ax+b=0$

នោះ $(2)\Rightarrow af(x)=ac-b^2\geq 0$

$+$បើ $a=0$ នោះ $(1)\Rightarrow f(x)=2bx+c\geq 0$

ដើម្បីឲ្យ $f(x)=2bx+c\geq 0$ នោះគេត្រូវយក $b=0$

ព្រោះបើ $b\neq 0$ នោះមាន $x<\frac{-c}{2b}$ ធ្វើឲ្យ $f(x)<0$។

លក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់៖ $(\Leftarrow ?)$

បើ $a\geq 0$; $c\geq 0$; និង $ac-b^2\geq 0$ ស្រាយថា

$$f(x)=ax^2+2bx+c\geq 0;\ \ \forall x$$

គេមាន $af(x)=(ax+b)^2+ac-b^2$

ដោយ $(ax+b)^2\geq 0$ នោះ $af(x)\geq ac-b^2\geq 0;\ \ \forall x$

$+$ បើ $a>0$ នោះ $f(x)\geq 0$ ពិត

$+$ បើ $\begin{cases} a=0 \\ ac-b^2\geq 0 \end{cases}\ \Bigg|\ \Rightarrow b=0$

ពេល $b=0$ នោះ $\begin{cases} f(x)=c;\ \ \forall x \\ c\geq 0 \end{cases}\ \Bigg|\ \Rightarrow f(x)\geq 0$ ពិត

ដូច្នេះ $f(x)=ax^2+2bx+c\geq 0 \Leftrightarrow a\geq 0; c\geq 0$ និង $ac-b^2\geq 0$។

លំហាត់ទី ៥៣៖ បើចំនួនពិត $a;\ b;c;\ p;\ q;r$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដែល $\begin{cases} ax^2+2bx+c\ge 0\\ px^2+2qx+r\ge 0\end{cases}$ នោះ

$apx^2+2bqx+cr\ge 0;\quad \forall x\in\mathbb{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

គេមាន ៖ $\begin{cases} ax^2+2bx+c\ge 0\\ px^2+2qx+r\ge 0\end{cases}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់ចំនួនពិត x

តាមលក្ខខណ្ឌចាំបាច់នៃលំហាត់ទី ៥២ នោះ គេបាន

$a\ge 0;\ \ c\ge 0;\ \ p\ge 0;\ \ r\ge 0;\ ac-b^2\ge 0$ និង $pr-q^2\ge 0$

ឬ $ac\ge b^2$ និង $pr\ge q^2$

គេបាន៖ $ap\ge 0;\ \ cr\ge 0;\ \ ac.pr\ge b^2q^2 \Leftrightarrow ap.cr-(bq)^2\ge 0$

នោះតាមលក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់នៃលំហាត់ទី ៥២

$$\Rightarrow apx^2+2bqx+cr\ge 0;\ \forall x\in\mathbb{R}$$

ដូច្នេះបើ $\begin{cases} ax^2+2bx+c\ge 0\\ px^2+2qx+r\ge 0\end{cases}$

នោះ $apx^2+2bqx+cr\ge 0;\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ ពិត។

រង់ចាំយូរ ប្រសើរជាងអត់មានអ្វីរង់ចាំ

លំហាត់ទី ៥៤៖ ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{Z}$ នូវសមីការ

$$6x^2+5y^2=74 \quad (1)$$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

ដោយ $y\in\mathbb{Z}$ នោះ $5y^2\geq 0$ ដែល $(1)\Leftrightarrow 74=6x^2+5y^2\geq 6x^2$

គេបាន $x^2<\dfrac{37}{3}$ ឬ $-3\leq x\leq 3$ ឬ $x^2\in\{0;\ 1;\ 4;\ 9\}$

$+$បើ $x^2=0$ នោះ $5y^2=74\Rightarrow y^2=\dfrac{74}{5}\notin\mathbb{Z}$

$+$បើ $x^2=1$ នោះ $6.1+5y^2=74\Rightarrow y^2=\dfrac{68}{5}\notin\mathbb{Z}$

$+$បើ $x^2=4$ នោះ $6.4+5y^2=74\Leftrightarrow y^2=10\Rightarrow y\notin\mathbb{Z}$

$+$បើ $x^2=9$ នោះ $6.9+5y^2=74\Leftrightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2$

ដូច្នេះ ចម្លើយសមីការគឺ

$$(x;y)\in\{(3;2),\ (3;-2),(-3;\ 2),\ (-3;-2)\}$$

លំហាត់ទី ៥៥៖ អក្សរខុសគ្នាជំនួសដោយលេខខុសៗគ្នា។
ចូររកលេខដែលត្រូវ នឹងអក្សរនៃប្រមាណវិធី៖

$$\begin{array}{ccccc} & B & E & S & T \\ + & M & A & D & E \\ \hline M & A & S & E & R \end{array}$$

ដំណោះស្រាយ ៖

គេបាន $\underline{M=1}$ (ផលបូកលេខពីរខ្ទង់<20)

នោះ $M+B=1+B=10$

(ព្រោះបើ $M+B=1+B+$គ្រាទុក $=11$ នោះ $A=M=1$មិនអាច)

ហេតុនេះ $\underline{A=0}$ និង $B=8$ ឬ $B=9$។

- បើ $B=8$ នោះ $E+A$ត្រូវមានគ្រាទុក 1ទៅ $M+B$
  តែ $E+A=E+0=S$ នោះ $E=9$ និង $S=0=A$ មិនអាច

គេទាញបាន $B=9$។

- ពេល $\underline{B=9}$ នោះ $S\neq 0$ ផលបូកទៅជា

$$\begin{array}{cccccc} & & 9 & E & S & T \\ + & & 1 & 0 & D & E \\ \hline & 1 & 0 & S & E & R \end{array}$$

- ពីផលបូកនេះ $S=E+1$ និង $E\neq 8$
  (ព្រោះបើ $E=8$នោះ $S=9=B$មិនអាច)

ហេតុនេះ $\begin{cases} S+D=10+E \\ S=E+1 \end{cases} \Rightarrow D+1=10$

សមមូល $\begin{cases} D\in\{8;\ 9\} \\ B=9 \end{cases} \Rightarrow D=8$

ផលបូកទៅជា

$$\begin{array}{ccccc} & 9 & E & S & T \\ + & 1 & 0 & 8 & E \\ \hline 1 & 0 & S & E & R \end{array}$$

យើងនៅសល់លេខ $\{2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$

ដូច្នេះបើ $E\in\{2; 3; 4;\ 5;\ 6\}$ នោះ $S\in\{3; 4;\ 5; 6; 7\}$ រៀងគ្នា

(ព្រោះ $S=E+1$)

+ បើ $E=2$;$S=3$ នោះ $S+8=12$

តម្រូវឲ្យ $T+E=T+2>9$ (មានត្រាទុក 1) មិនអាច

(ព្រោះខ្វង់លេខធំៗ ដូចជា 8; 9 បានប្រើហើយ)

ដូចគ្នាដែរ

+ បើ $E=3;\ S=4$ នោះ $T\in\{7;\ 8; 9\}$

- ពេល $T=7$ នោះ $R=A=0$ មិនអាច
- ម៉្យាងទៀតលេខ 8; 9 បានប្រើហើយ

+ បើ $E=4; S=5$ នោះ $T\in\{6;\ 7; 8; 9\}$

- ពេល $T=6$ នោះ $R=0=A$ មិនអាច
- ពេល $T=7$ នោះ $R=1=M$ មិនអាច
- ម៉្យាងទៀតលេខ 8; 9 បានប្រើហើយ

+ បើ $\underline{E=5;\ S=6}$ នោះប្រមាណវិធីទៅជា

$$\begin{array}{ccccc} & 9 & 5 & 6 & T \\ + & 1 & 0 & 8 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 6 & 5 & R \end{array}$$

លេខដែលនៅសល់គឺ 2; 3; 4; 7

គេទាញបានថា $\underline{T=7}$ និង $\underline{R=2}$

$+$បើ $E=6;\ S=7$ នោះ $T\in\{4;\ 5\}\Leftrightarrow R\in\{0;\ 1\}$

ដែលជាលេខប្រើហើយ

ដូច្នេះ $M=1;\ A=0;\ B=9;\ E=5; S=6;\ D=8; T=7$

និង $R=2$ ។

នោះ

$$\begin{array}{ccccc} & 9 & 5 & 6 & 7 \\ + & 1 & 0 & 8 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 6 & 5 & 2 \end{array}$$

លំហាត់ទី ៥៦៖ រកសំណុំចំណុច P ដែលបន្ទាត់ប៉ះអេលីប $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b}=1$ កែងគ្នា ត្រង់ចំណុចP ។

ដំណោះស្រាយ ៖

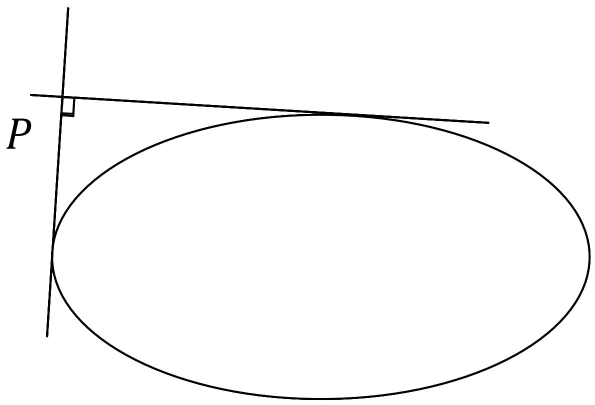
តាង $P(x_0;\ y_0)$ ជាចំណុចដែលបន្ទាត់ប៉ះកាត់កែងគ្នា

តាង $y=mx+n$ ជាបន្ទាត់ប៉ះនឹងអេលីប

យកបន្ទត់ $y=mx+n$ ជំនួសចូលក្នុងសមីការអេលីប

គេបាន៖

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(mx+n)^2}{b^2}=1$ ដែលត្រូវមានឫសឌុប



$$\left(\frac{b^2}{a^2}+m^2\right)x^2+2mnx+n^2-b^2=0$$

$$\Delta=4m^2n^2-4\left(\frac{b^2}{a^2}+m^2\right)\left(n^2-b^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\ a^2m^2-n^2+b^2=0\qquad(1)$$

ពីសមីការបន្ទាត់ប៉ះកាត់តាម $(x_0;\ \ y_0)$

គេទាញ $n=y_0-mx_0$

ជំនួស $n=y_0-mx_0$ ក្នុង (1) នោះ (1) ទៅជា

$$\left(a^2-x_0^2\right)m^2+2x_0y_0m+b^2-y_0^2=0\qquad(2)$$

បន្ទាត់ប៉ះកាត់កែងគ្នាកាលណាឫស m_1 និង m_2 នៃ(2)

ផ្ទៀងផ្ទាត់ $m_1.m_2=-1$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត គេបាន $m_1.m_2=\dfrac{b^2-y_0^2}{a^2-y_0^2}=-1$

សមមូល $x_0^2+y_0^2=a^2+b^2$

សំណុំចំណុច P ជារង្វង់ផ្ចិតត្រង់ $(0;\ 0)$ កាំ $r=\sqrt{a^2+b^2}$ ។

លំហាត់ទី ៥៧៖ បើ $\begin{cases} x^2=yx-1 \\ y^2=1-y \end{cases}$

ស្រាយថា $x^5=1$ តែ $x\neq 1$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

មាន $x^2=yx-1 \Leftrightarrow yx=x^2+1$ គេបាន ៖

$$x^2-x^3-x=x^2-x\left(x^2+1\right)=x^2-yx^2=\left(1-y\right)x^2=x^2y^2$$

$$=x^2\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2$$

$x^2-x^3-x=x^4+2x^2+1 \Leftrightarrow x^4+x^3+x^2+x+1=0$

នោះ $(x-1)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)=\left(x^5-1\right)=0$

ហេតុនេះ $x^5=1$ តែ $x\neq 1$

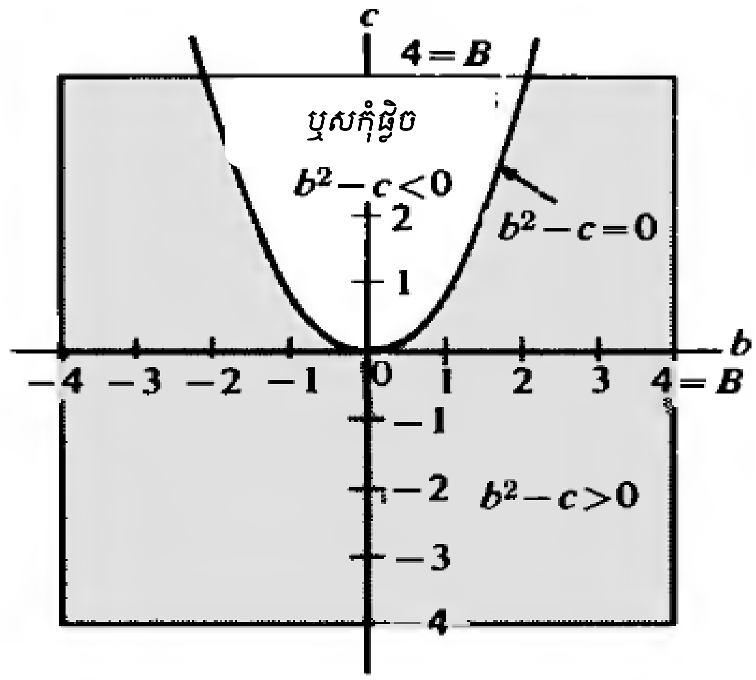
(ព្រោះបើ $x=1$ នោះ $x^4+x^3+x^2+x+1\neq 0$)

"ស្លូតឲ្យសាប អន្ទះយឲ្យទាប ប្រាជ្ញឲ្យវែង សម្តីឲ្យខ្លី"

លំហាត់ ៥៨៖ រកប្រូបាបដែលធ្វើឲ្យសមីការ $x^2+2bx+c=0$ មានឬសក្នុងសំណុំចំនួនពិត។

ដំណោះស្រាយ៖

សមីការ $x^2+2bx+c=0$ មានឬសពិតពេល $\Delta'=b^2-c\geq 0$។



ក្នុងរូបខាងលើនេះ ជាឧទាហរណ៍ករណី $B=4$។

ក្រឡាផ្ទៃផ្នែកមិនឆ្វូតគឺ៖ $S_1=2\int_0^B\sqrt{c}.\,dc=2\times\frac{2}{3}B^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}B^{\frac{3}{2}}$

ក្រឡាផ្ទៃសរុបគឺ ៖ $S_2=4B^2$

- តាង A ជាព្រឹត្តិការណ៍សមីការមានឬសពិត

  $\overline{A}$ ជាព្រឹត្តិការណ៍សមីការមានឬសកុំផ្លិច

គេបាន $P\left(\overline{A}\right)=\dfrac{\frac{4}{3}B^{\frac{3}{2}}}{4B^2}=\dfrac{1}{3\sqrt{B}}$

$-$ពេល $B=4$ នោះ $P\left(\overline{A}\right)=\dfrac{1}{6}$

$-$ពេល $B\to+\infty$ នោះ $\dfrac{1}{\sqrt{B}}\to 0$

គេបាន $P\left(A\right)\to 1!$

លំហាត់ទី ៥៩៖ តើគេត្រូវបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយប៉ុន្មានដង រហូតទាល់តែគេទទួលបានលទ្ធផលមុខ 6?

ដំណោះស្រាយ ៖

តាង p ជាប្រូបាបសម្រេចបំណងដែលបានមុខលេខ 6

គឺតាមទ្រឹស្តី $p=\dfrac{1}{6}$

q ជាប្រូបាបមិនសម្រេចបំណង ដែល $q=1-p$

m ជាមធ្យមនៃចំនួនដងការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់បានមុខ6

ពិនិត្យលទ្ធផលក្នុងតារាង

បោះលើកទី	ប្រូបាបដែលបានសម្រេចបាន
1	p
2	pq
3	pq^2
4	pq^3
$\vdots$	$\vdots$

ពេលបោះកាន់តែច្រើនដងទៅ គេបាន៖

$$p+pq+pq^2+pq^3+\ldots=p\left(1+q+q^2+q^3+\ldots\right)=p\left(\frac{1}{1-q}\right)=1$$

បើ m ជាមធ្យមនៃចំនួនដងក្នុងពិសោធន៍នេះ គេបាន៖

$$m=p+2pq+3pq^2+4pq^3+\ldots \qquad (1)$$

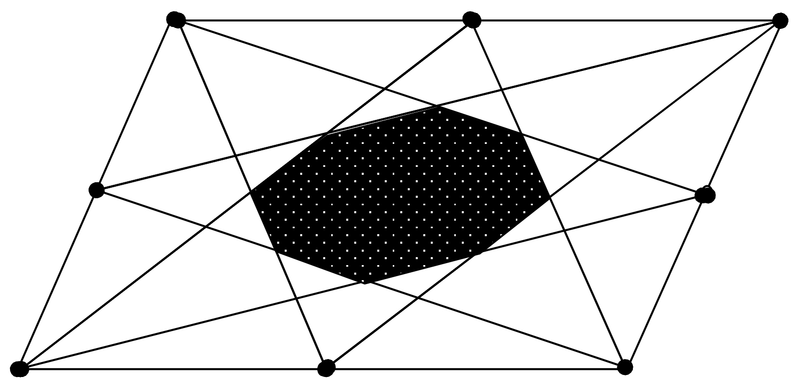
នោះ $$qm=pq+2pq^2+3pq^3+\ldots \qquad (2)$$

យក $(1)-(2)$ នោះ $m-qm=p+pq+pq^2+pq^3+\ldots$

ឬ $m(1-q)=1$ នោះ $m=\dfrac{1}{1-q}=\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{\frac{1}{6}}=6$

ដូច្នេះ $m=6$ ។

លំហាត់ទី ៦០៖ រកផលធៀបនៃក្រឡាផ្ទៃផ្នែកឆ្លូតជាមួយនឹងផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម ដូចរូបដែលឲ្យខាងក្រោម ៖



ដំណោះស្រាយ ៖

តាង X ជាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកឆូតខណ្ឌដោយបន្ទាត់ $AG;\ AF;$ $BH;\ BG;\ CE;\ CH;\ DF$ និង DE (មើលរូប (ក))

យើងចែកប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ជាបួនប្រលេឡូក្រាមមានផ្ទៃស្មើៗគ្នាគឺ ៖

$AEPH;\ EBFP;\ HPGD$ និង $PFCG$ ។

•រូប (ក)៖ ចតុកោណ $PQRS$ ជាបំណែកមួយនៃប្រលេឡូក្រាម $AEPH$ និង ត្រីកោណ ABD មាន R ជាទីប្រជុំទម្ងន់ (ប្រសព្វនៃមេដ្យាន DE និង BH)

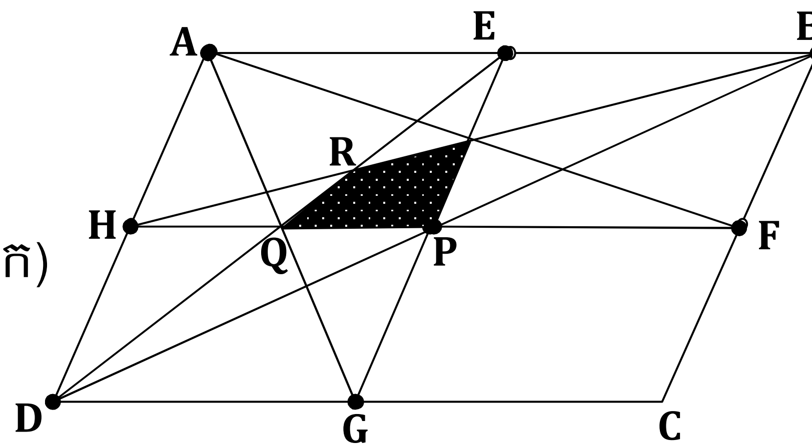
នោះ $A;\ R$ និង P រត់ត្រង់គ្នា ហើយ $\dfrac{AP}{RP}=\dfrac{3}{1}$ ។

•រូប (ខ) ចំពោះត្រីកោណ APS និង RPS មាន ៖

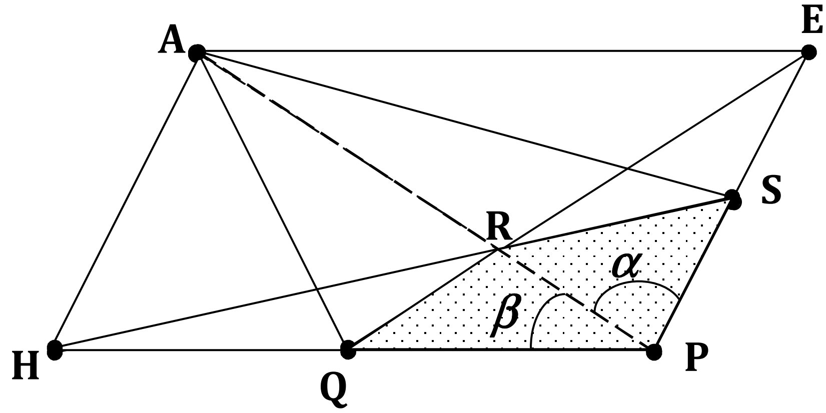
$$\frac{3}{1}=\frac{AP\times PS\times\sin\alpha}{RP\times PS\times\sin\alpha}=\frac{S_{APS}}{S_{RPS}}\ \Rightarrow\ S_{APS}=3.S_{RPS}\qquad(1)$$

•រូប (ខ) ចំពោះត្រីកោណ AQP និង RQP មាន ៖

$$\frac{3}{1}=\frac{AP}{RP}=\frac{AP\times QP\times\sin\beta}{RP\times QP\times\sin\beta}=\frac{S_{AQP}}{S_{RQP}}\ \Rightarrow\ S_{AQP}=3.S_{RQP}\qquad(2)$$



រូប (ក)



រូប (ខ)

ម៉្យាងទៀត $\frac{S_{APS}}{S_{APE}} = \frac{AP \times SP \times \sin\alpha}{AP \times EP \times \sin\alpha} = \frac{SP}{EP} = \frac{1}{2}$

នោះ $S_{APE} = 2.S_{APS}$

ពី (1) គេទាញ $S_{APE} = 2 \times (3.S_{RPS}) = 6.S_{RPS}$ (3)

ដូចគ្នា $\frac{S_{AQP}}{S_{AHP}} = \frac{AP \times QP \times \sin\alpha}{AP \times HP \times \sin\alpha} = \frac{QP}{HP} = \frac{1}{2}$

នោះ $S_{AHP} = 2.S_{AQP}$

ពី (2) គេទាញ $S_{AHP} = 2 \times (3.S_{RQP}) = 6.S_{RQP}$ (4)

បូកអង្គនឹងអង្គនៃ (3) និង (4) គេបាន ៖

$$S_{AEPH}=6\left(S_{RPS}+S_{RQP}\right) \text{ ឬ } S_{AEPH}=6\left(S_{PQRS}\right)$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរចំពោះប្រលេឡូក្រាម $EBFP; HPGD$ និង $PFCG$

គេបាន $\quad 4\times S_{AEPH}=6\times\left(4.S_{PQRS}\right)$

$$\text{ឬ } S_{ABCD}=6.X \quad \text{ឬ } X=\frac{1}{6}\times S_{ABCD}$$

ដូច្នេះ ផ្ទៃក្រឡាផ្នែកឆូតស្មើនឹង $\frac{1}{6}$ ដងនៃផ្ទៃ ប្រលេឡូក្រាម $ABCD$។

លំហាត់ទី ៦១៖ រកចំនួនដែលជាការេប្រាកដតូចបំផុតហើយមានលេខបួនខ្ទង់ចុងក្រោយគឺ 9009។

ដំណោះស្រាយ៖

តាង x ជាចំនួនដែលត្រូវរក

នោះ $x^2=10000y+9009 \quad (1)$ ដែល y ជាចំនួនគត់

ក្នុងករណីនេះ x ត្រូវមានរាង $10a\pm3$ នោះ

ពី $(1):\Rightarrow x^2=\left(10a\pm3\right)^2=100a^2\pm60a+9=1000y+9009$

ឬ $\quad 100a^2\pm60a+9=1000y+9000$

ឬ $\quad 10a^2\pm6a=100y+900 \quad$ នោះ

$$2a(5a\pm 3)=100(10y+9)=0(\text{mod } 25) \quad (2)$$

ដោយ $5a\pm 3$ មិនមែនពហុគុណនៃ 25 នោះ $2a$ ត្រូវតែជាពហុគុណនៃ 25 ។

ហេតុនេះត្រូវមានចំនួនគត់ b ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a=25b$ ។

ពី $(2)\Leftrightarrow\ 2(25b)(5(25b)\pm 3)=100(10y+9)$

ឬ $\quad b(125b\pm 3)=20y+18$

• <u>ករណីទី១៖</u> $b(125b+3)=20y+18$

អង្គខាងស្តាំមានលេខចុង 8 នោះអង្គខាងឆ្វេងក៏មានលេខចុង 8 ដែរ នោះ $b=6$ ធ្វើឲ្យ $y=225$ ជាចំនួនគត់ដែល $6.753=20.225+18$ ពិត

ដូចនេះ $a=150$ និង $x=10(150)+3=1503$

ឬ $x^2=2259009$

• <u>ករណីទី២</u> ៖ $b(125b-3)=20y+18$

នោះ b ត្រូវមានលេខចុង 4 ឬ 9

$+$ បើ $b=4$ នោះ $y=\dfrac{197}{2}\notin\mathbb{N}$

$+$ បើ $b=9$ នោះ $y=504$ និង $a=225$

ឬ $x=10\times 225-3=2247\Leftrightarrow x^2=5049009$

ដូច្នេះ $x=1503$

លំហាត់ទី ៦២៖ រកឬសគត់ >0 នៃសមីការ

$$x^2(y-1)+y^2(x-1)=1$$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

តាង $\begin{cases} u=x-1 \\ v=y-1 \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} x=u+1 \\ y=v+1 \end{cases}$

សមីការដែលឲ្យសមមូលនឹង $(u+1)^2.v+(v+1)^2.u=1$

ឬ $u^2v+2uv+v+uv^2+2uv+u=1$

$uv(u+v)+4uv+(u+v)=1$

$uv(u+v+4)+(u+v+4)=5$

$(u+v+4)(uv+1)=5=5\times1=1\times5$

នោះ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u+v+4=5 \\ uv+1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} u+v+4=1 \\ uv+1=5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u+v=1 \\ uv=0 \end{cases} \\ \begin{cases} u+v=-3 \\ uv=4 \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2-t=0 \\ t^2+3t+4=0 \end{array}\right.$

សមីការ $t^2+3t+4=0$ គ្មានឬសគត់

គេបាន សមីការ $t^2-t=0$

មានឫស $(u;v)=(0;1)$, $(1;\ 0)$

ត្រូវគ្នានឹង $(x;y)=(1;2)$, $(2;1)$

លំហាត់ទី ៦៣៖ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃអេលីប $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$។

ដំណោះស្រាយ ៖

តាង A ជាផ្ទៃក្រឡានៃអេលីប និង S ជាផ្ទៃនៃផ្នែកឆ្នូត

$$S=\int_0^a y.dx$$

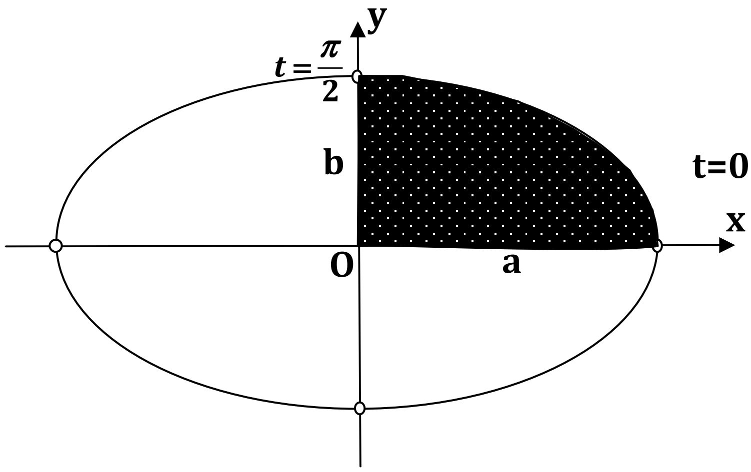
តាង $\begin{cases} x=a.\cos t \\ y=b.\sin t \end{cases}$ (សមីការប៉ារ៉ាម៉ែតអេលីប $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$)

ពេល $x=0$ នោះ $t=\frac{\pi}{2}$ និង $x=a$ នោះ $t=0$

គេបាន ៖ $S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(b.\sin t).d(a.\cos t).dt$

$$S=-ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t.dt=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t.dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t.dt=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}.dt$$

$$S=ab\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=ab\frac{\pi}{4}$$



ដូច្នេះ $A = 4S = 4\left(ab\frac{\pi}{4}\right) = ab\pi$

លំហាត់ទី ៦៥៖ រកឫសគត់ >0 នៃសមីការ $x^y = y^{x-y}$ (1)។

ដំណោះស្រាយ ៖

- ពេល $x=1$ នោះ $y=1$
- ពេល $y=1$ នោះ $x=1$
- ពេល $x=y$ នោះ $x^y=1$

ដែល $(1) \Leftrightarrow$ $x^y=1$ ឬ $x=y=1$

- ពេល $x>y\geq 2$ នោះ $\frac{x}{y}>1$ (2)

ពី $(1) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^y = y^{x-y}$ (3)

(2) និង (3) : $\begin{cases} y^{x-2y}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^y>1=y^0 \\ y>2 \end{cases} \Rightarrow x>2y$ និង $y|x$

ឧបមាថាមានចំនួនគត់ $k\geq 3$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x=k.y \quad (*)$

(ព្រោះបើ $k=1$នោះ $x=y$ និង $k=2$នោះ $x=2y$)

$$(2)\Leftrightarrow\left(\frac{ky}{y}\right)^y=y^{ky-2y}$$

ឬ $(k)^y=y^{(k-2)y}$ ឬ $k=y^{k-2} \quad (**)$

ដោយ $y\geq 2$ នោះ $k=y^{k-2}\geq 2^{k-2}$

ឬ $4k\geq 2^k;\ \forall k\geq 3 \quad (3)$

ម្យ៉ាងទៀត $\forall k\geq 5;\ 2^k>4k \quad (4)$

(តាមកំណើន ព្រោះ$2^{k+1}=2.2^k>2.4k>4(k+1)$)

ពីសមីការ (3) និង (4) គេបាន $k\in\{3;\ 4\}$

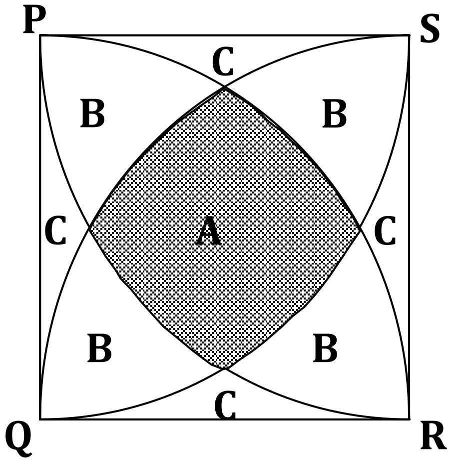
+ បើ $k=3$ នោះ $(**)\Rightarrow y=3$ និង $(*)\Rightarrow x=9$

+ បើ $k=4$ នោះ $(**)\Rightarrow y=2$ និង $(*)\Rightarrow x=8$

ដូច្នេះ ឬសគត់នៃ (1) គឺ $(x;\ y)\in\{(1;1),(8;2),(9;3)\}$។

លំហាត់ទី ៦៦៖ $PQRS$ ជាការេមានជ្រុង 1 ឯកតា។ គណនាក្រឡាផ្ទៃផ្នែកនីមួយៗនៃ A; B និង C ។

រូប (ក)

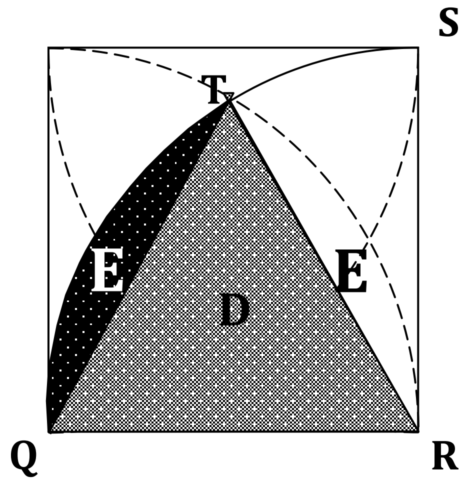


ដំណោះស្រាយ ៖

តាមរូប (ក) ផ្ទៃសរុបគឺ ៖ $A+4B+4C=1 \qquad (1)$

ផ្ទៃមួយកាជ្រង់រង្វង់គឺ ៖ $A+3B+2C=\frac{1}{4}\times 1^2\times\pi=\frac{\pi}{4} \qquad (2)$

រូប (ខ)



តាមរូប (ខ) TQR ជាត្រីកោណសម័ង្សនោះ $\angle QRS=60^\circ$

(សំណង់នៃរង្វង់ផ្ចិតត្រង់ Q និង R កាំប្រវែង 1 ឯកតា)

ដែល $D=S_{\Delta RQT}=\frac{1}{2}\times 1\times \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\quad (*)$

ម្យ៉ាងទៀត ៖

គម្លាតមុំ 90° ត្រូវនឹងផ្ទៃចម្រៀកថាស $S_{RQTS}=\frac{\pi}{4}$

គម្លាតមុំ 1° ត្រូវនឹងផ្ទៃចម្រៀកថាស $\frac{\pi}{4\times 90}$

គម្លាតមុំ 60° ត្រូវនឹងផ្ទៃ $D+E=\frac{\pi}{4\times 90}\times 60=\frac{\pi}{6}$

ដូច្នេះ $D+E=\frac{\pi}{6}\ (*)$

ម្យ៉ាងទៀត តាមរូប (ក) និង (ខ) $\begin{cases} S_{RQTR}=A+2B+C \\ S_{RQTR}=D+2E \end{cases}\Bigg| \Rightarrow$

$$A+2B+C=D+2E=2(D+E)-D \xrightarrow{(*)\ \&\ (**)} 2\left(\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

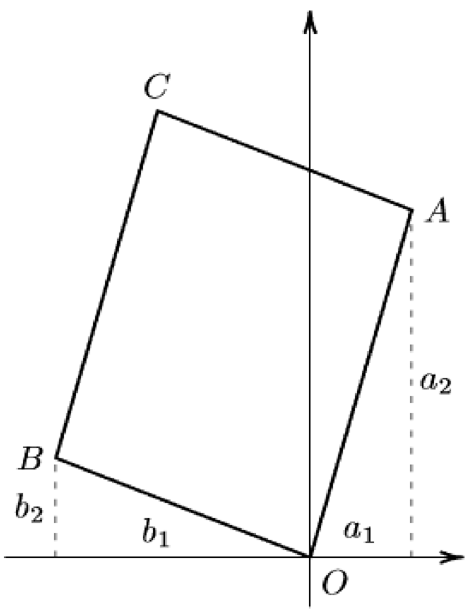
នោះ $$A+2B+C=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\quad (3)$$

ពី $(1);\ (2)$ និង (3) គេបានប្រព័ន្ធសមីការ ៖

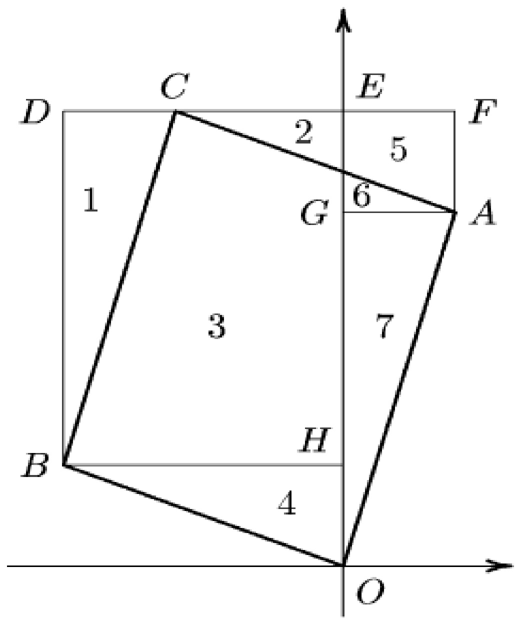
$$\begin{cases} A+4B+4C=1 & (1) \\ A+3B+2C=\frac{\pi}{4} & (2) \\ A+2B+C=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4} & (3) \end{cases}$$

ដូច្នេះ $\begin{cases} A = 1 - \sqrt{3} + \dfrac{\pi}{3} \\ B = -1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\pi}{12} \\ C = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$

លំហាត់ទី ៦៧៖ ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេគេឲ្យ $A(a_1;\ a_2)$ និង $B_1(-b_1;\ b_2)$ (រូប(ក))ដែល $a_1;\ a_2; a_3; a_4 > 0$ ។ គណនាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម $OACB$ ។



រូប (ក)



រូប(ខ)

ដំណោះស្រាយ៖

យើងសង់រូបបន្ថែមដូចរូប (ខ) នោះបញ្ចកោណ $OAFDB$ ត្រូវបានចែកជា 7 ចំណែក ដែល S_i តាងផ្ទៃផ្នែក i ។ តាមរូប (ខ) គេបាន ៖

$$EF = GA = a_1;\ DB = GO = a_2 \text{ និង } AF = OH = b_2$$

នោះ $\begin{cases} S_4 = S_2 + S_5 \\ S_1 = S_7 \end{cases}$ និង $S_{OACB} = S_3 + S_4 + S_6 + S_7$

$$\Rightarrow S_{OACB} = S_3 + (S_2 + S_5) + S_6 + S_1$$
$$= (S_1 + S_2 + S_3) + (S_5 + S_6)$$
$$= S_{HEDB} + S_{AFEG} = b_1a_2 + a_1b_2$$

ដូច្នេះ ផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម $OACB$ គឺ $b_1a_2 + a_1b_2$ ។

លំហាត់ទី ៦៨៖ រកបណ្តាអនុគមន៍កំណត់ពី $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ដែល ៖ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ គេមាន $x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^2$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

គេមាន៖ $$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^2 \qquad (1)$$

• យក $1-x$ ជំនួសក្នុង x នោះ សមីការ (1) ទៅជា ៖

$$(1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x^4) \qquad (2)$$

• គុណសមីការ (1) នឹង $(1-x)^2$ គេបាន៖

$$x^2(1-x)^2 f(x)+(1-x)^2 f(1-x)=(1-x)^2(2x-x^4) \quad (3)$$

• យក $(2)-(3)$ គេបាន ៖

$$\Big[\underbrace{1-x^2(1-x)^2}_{K(x)}\Big]f(x)$$

$$=(1-x)\Big[\underbrace{2-(1-x)^3-(1-x)(2x-x^4)}_{M(x)}\Big]$$

ឬ $K(x)f(x)=(1-x)M(x) \qquad (4)$

ដែល $K(x)=1-x^2(1-x)^2=(1-x+x^2)(1+x-x^2)$

និង $M(x)=2-(1-x)\left((1-x)^2+2x-x^4\right)$

$$=2-(1-x)(1-x^2-x^4)$$

$$=1+x-x^2+x^3+x^4-x^5$$

$$=(1+x^3)(1+x-x^2)$$

$$=(1+x)\underbrace{(1-x+x^2)(1+x-x^2)}_{K(x)}$$

នោះ $M(x)=(1+x).K(x)$

• សមីការ (4) ទៅជា៖ $K(x).f(x)=(1-x^2).K(x)$

+ បើ $K(x)\neq 0$ នោះ $f(x)=1-x^2$

+ បើ $K(x)=0$ នោះ $1-x^2(1-x)^2=0$

ឬ $x^2(1-x)^2=1$

ឬ $\left[\begin{array}{l} x(1-x)=1 \\ x(1-x)=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2+x-1=0 \\ -x^2+x+1=0 \end{array}\right. \quad (5)$

ដោយ $x\in\mathbb{R}$ នោះ $-x^2+x-1=0$ គ្មានឬសក្នុង $\mathbb{R}$។

តែ $-x^2+x+1=0$ មានឬស $\begin{cases} \alpha=\dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) \\ \beta=\dfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right) \end{cases} \quad (6)$

ដែល $\begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ \alpha\beta=-1 \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} \alpha^2=\alpha+1 \\ \beta^2=\beta+1 \end{cases} \quad (7)$

ដូច្នេះ $\oplus$ បើ $\forall\ x\neq\alpha,\ \beta$ នោះ $f(x)=1-x^2$

$\oplus$ បើ $\forall\ x=\alpha,\ \beta$ នោះសមីការ (1) សរសេរជា៖

$$\begin{cases} \alpha^2 f(\alpha)+f(\beta)=2\alpha-\alpha^4 \\ \beta^2 f(\beta)+f(\alpha)=2\beta^2-\beta \end{cases} \quad (8)$$

តែតាម (7)

គេមាន $\begin{cases} \alpha^4=\left(\alpha^2\right)^2=(\alpha+1)^2=\alpha^2+2\alpha+1 \\ \beta^4=\left(\beta^2\right)^2=(\beta+1)^2=\beta^2+2\beta+1 \end{cases}$

នោះ $(8)\Leftrightarrow\begin{cases} \alpha^2 f(\alpha)+f(\beta)=-\alpha^2-1 & (*) \\ \beta^2 f(\beta)+f(\alpha)=-\beta^2-1 & (**) \end{cases} \quad (9)$

គុណ $(**)$ នឹង α^2 នោះ

$$\alpha^2\beta^2 f(\beta)+\alpha^2 f(\alpha)=-\alpha^2\beta^2-\alpha^2$$

តាម (7) គេបាន $f(\beta)+\alpha^2 f(\alpha)=-1-\alpha^2$ គឺដូចគ្នានឹង $(*)$

$\Rightarrow (9)$ ប្រព័ន្ធមានចម្លើយរាប់មិនអស់

បើតាង $f(\alpha)=c$ នោះ $f(\beta)=-(\alpha^2+1)-\alpha^2 c$

គេបាន៖ $f(\beta)=-(\alpha+2)-(\alpha+1)c$

សរុបរួម $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & x\neq\frac{1}{2}\pm\sqrt{5} \\ c,\ (c\in\mathbb{R}) & x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \\ -\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})-\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})c, & x=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \end{cases}$

លំហាត់ទី ៦៩៖ គ្រប់ $a_i>0,\quad i=1;2;3;4$ ចូរបង្ហាញថា ៖

$$A=\frac{a_1+a_3}{a_1+a_2}+\frac{a_2+a_4}{a_2+a_3}+\frac{a_3+a_1}{a_3+a_4}+\frac{a_4+a_2}{a_4+a_1}\geq 4$$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

ចំពោះគ្រប់ $a, b>0$ គេមាន ៖

$$(a-b)^2\geq 0 \text{ ឬ } (a+b)^2\geq 4ab$$

ពីវិសមភាពនេះ គេបាន ៖ $\frac{1}{ab}\geq\frac{4}{(a+b)^2}$

ដូច្នេះ $\dfrac{1}{(a_1+a_2)(a_3+a_4)} \geq \dfrac{4}{(a_1+a_2+a_3+a_4)^2}$

និង $\dfrac{1}{(a_1+a_4)(a_2+a_4)} \geq \dfrac{4}{(a_1+a_2+a_3+a_4)^2}$

នោះ A អាចសរសេរជា ៖

$$A=\frac{a_1+a_3}{a_1+a_2}+\frac{a_3+a_1}{a_3+a_4}+\frac{a_2+a_4}{a_2+a_3}+\frac{a_4+a_2}{a_4+a_1}$$

ឬ $$A=\frac{(a_1+a_3)(a_3+a_4)+(a_3+a_1)(a_1+a_2)}{(a_1+a_2)(a_3+a_4)}+\frac{(a_2+a_4)(a_4+a_1)+(a_2+a_3)(a_4+a_2)}{(a_2+a_3)(a_4+a_1)}$$

$$A\geq\frac{(a_1+a_3)(a_1+a_2+a_3+a_4)}{(a_1+a_2)(a_3+a_4)}+\frac{(a_2+a_4)(a_1+a_2+a_3+a_4)}{(a_1+a_4)(a_2+a_3)}$$

ឬ $$A\geq\frac{4(a_1+a_3)}{(a_1+a_2+a_3+a_4)}+\frac{(a_2+a_4)}{(a_1+a_2+a_3+a_4)}$$

$$=\frac{4(a_1+a_2+a_3+a_4)}{(a_1+a_2+a_3+a_4)}=4$$

ដូច្នេះ $A\geq 4$ ពិត។

លំហាត់ទី ៧០ ៖ ក្នុងត្រីកោណ ABC គេយក $K\in[BC]$, $L\in[AC]$ $M\in[AB]$, $N\in[LM]$, $R\in[MK]$ និង $F\in[KL]$។ គេតាង $E_1;E_2;E_3;E_4;E_5;E_6$ និង E ជាផ្ទៃក្រឡារៀងគ្នានៃត្រីកោណ AMR; CKR; BKF; ALF; BNM; CLN និង ABC ។

ចូរបង្ហាញថា៖ $E\geq 8\sqrt[6]{E_1E_2E_3E_4E_5E_6}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

គេពិនិត្យផលធៀបត្រីកោណ AMR និង ABC ដូចខាងក្រោម៖

$$\frac{E_1}{E}=\frac{S_{AMR}}{S_{ABC}}=\frac{S_{AMR}}{S_{AMK}}\times\frac{S_{AMK}}{S_{ABK}}\times\frac{S_{ABK}}{S_{ABC}}=\frac{MR}{MK}\times\frac{AM}{AB}\times\frac{BK}{BC}$$

តាមវិសមភាព កូស៊ី គេបាន៖

$$\left(\frac{E_1}{E}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{MR}{MK}\times\frac{AM}{AB}\times\frac{BK}{BC}\right)^{\frac{1}{3}}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{MR}{MK}+\frac{AM}{AB}+\frac{BK}{BC}\right)\quad(1)$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ ចំពោះត្រីកោណ CKR និង ABC នោះ

$$\left(\frac{E_2}{E}\right)^{\frac{1}{3}}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{KR}{MK}+\frac{BM}{AB}+\frac{CK}{BC}\right)\qquad(2)$$

បូកអង្គនឹងអង្គនៃវិសមភាព (1) និង (2) គេបាន៖

$$\left(\frac{E_1}{E}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{E_2}{E}\right)^{\frac{1}{3}}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{MR+KR}{MK}+\frac{AM+BM}{AB}+\frac{CK+BK}{BC}\right)$$

ឬ $$\left(\frac{E_1}{E}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{E_2}{E}\right)^{\frac{1}{3}}\leq\left(\frac{MK}{MK}+\frac{AB}{AB}+\frac{BC}{BC}\right)=1$$

សមមូល $\sqrt[3]{E_1}+\sqrt[3]{E_2}\le\sqrt[3]{E}$

ដូចគ្នាដែរ $\sqrt[3]{E_3}+\sqrt[3]{E_4}\le\sqrt[3]{E}$

និង $\sqrt[3]{E_5}+\sqrt[3]{E_6}\le\sqrt[3]{E}$

ពីវិសមភាពខាងលើនេះ គេទាញបាន ៖

$$8\sqrt[6]{E_1E_2E_3E_4E_5E_6}=2\left(\sqrt[3]{E_1}.\sqrt[3]{E_2}\right)^{\frac{1}{2}}.2\left(\sqrt[3]{E_3}.\sqrt[3]{E_4}\right)^{\frac{1}{2}}.2\left(\sqrt[3]{E_5}.\sqrt[3]{E_6}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le\left(\sqrt[3]{E_1}+\sqrt[3]{E_2}\right)\left(\sqrt[3]{E_3}+\sqrt[3]{E_4}\right)\left(\sqrt[3]{E_5}+\sqrt[3]{E_6}\right)$$

$$\le\sqrt[3]{E}.\sqrt[3]{E}.\sqrt[3]{E}=E$$ ពិត។

ដូច្នេះ $E\ge 8\sqrt[6]{E_1E_2E_3E_4E_5E_6}$ ។

លំហាត់ទី ៧១៖ បង្ហាញថា $4^{79}<2^{100}+3^{100}<4^{80}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

• <u>បង្ហាញថា $2^{100}+3^{100}<4^{80}$</u>

គេមាន $2.3^{100}>2^{100}+3^{100}$

ហេតុនេះគេគ្រាន់តែស្រាយថា ៖ $4^{80}>2.3^{100}$

សមមូល $\left(\dfrac{4^4}{3^5}\right)^{20}=\left(\dfrac{256}{243}\right)^{20}>2$

តាមវិសមភាព ប៊ែនូយលី (Bernoulli′s inequality)

$(1+x)^n\ge 1+nx$ ដែល $x\ge -1;\quad n\ge -1$

$$\left(\frac{256}{243}\right)^{20}>\left(1+\frac{1}{20}\right)^{20}>2$$ ពិត

- បង្ហាញថា $2^{100}+3^{100}>4^{79}$

គេគ្រាន់តែស្រាយថា $3^{100}>4^{79}$

ឬ $\frac{4^{80}}{3^{100}}<4$ ជាការស្រេច

$$\frac{4^{80}}{3^{100}}=\left(\frac{256}{243}\right)^{20}<\left(\frac{19}{18}\right)^{20}=\left(\frac{361}{324}\right)^{10}$$

$$<\left(\frac{9}{8}\right)^{10}=\left(\frac{81}{64}\right)^{5}<\left(\frac{9}{7}\right)^{5}=\frac{59049}{16807}<4 \text{ ពិត}$$

ដូច្នេះ $4^{79}<2^{100}+3^{100}<4^{80}$ ។

លំហាត់ទី ៧២៖ ឧបមាថារង្វង់បីមានកាំ ១ ឯកតាប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុចរួម P និងតាង A ផ្ទៃសរុបនៃប្រសព្វរវាងរង្វង់ពីរៗ។ រកផ្ទៃតូចបំផុតនៃ A ។

ដំណោះស្រាយ៖

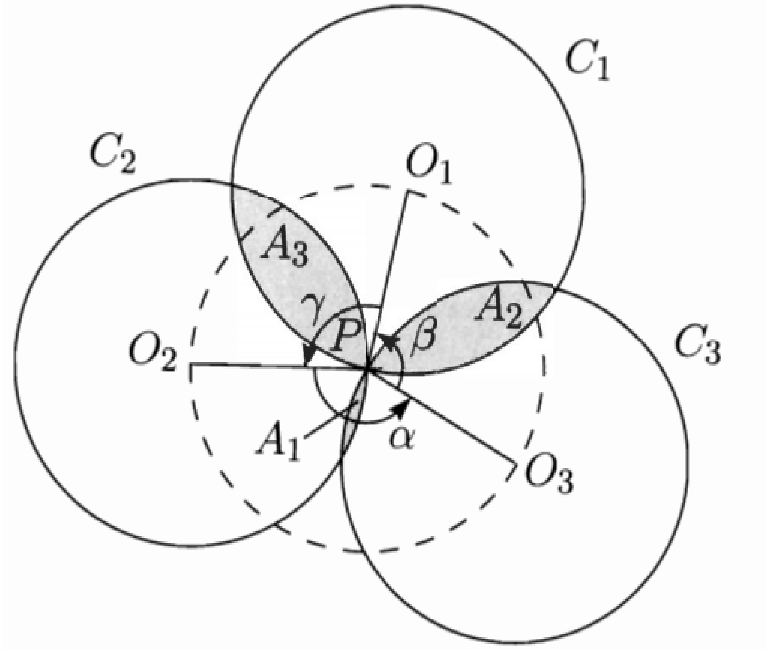
ក្នុងរូប (ក) តាង $C_1;C_2;C_3$ ជារង្វង់ផ្ចិត $O_1;O_2;O_3$ រៀងគ្នា

P ជាចំណុចប្រសព្វរួមនៃ $C_1;C_2;C_3$

$A_1;A_2;A_3$ ជាផ្ទៃរៀងគ្នានៃ

$C_2\cap C_3;\ C_1\cap C_3;\ C_1\cap C_2$

ដែលក្នុងនោះ $A=A_1\cup A_2\cup A_3$ ជាផ្ទៃដែលគេត្រូវរកតម្លៃតូចបំផុតរបស់វា



រូប (ក)

តាមសម្មតិកម្ម $PO_1 = PO_2 = PO_3 = 1$ ហេតុនេះ

$O_1; O_2; O_3$ ជាចំណុចដែលនៅលើរង្វង់ផ្ចិត P កាំ 1 ឯកតា។

បើគេបង្វិលរង្វង់ផ្ចិត P កាំ 1 ស្របទៅនឹងទ្រនិចនាឡិកានោះ

O_1 រត់តាមក្រោយ O_2 ។

តាង $\alpha = \angle O_2PO_3$; $\beta = \angle O_3PO_1$ និង $\gamma \angle O_1PO_2$

ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាន(ផ្ទុយទ្រនិចនាឡិកា) ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ ។

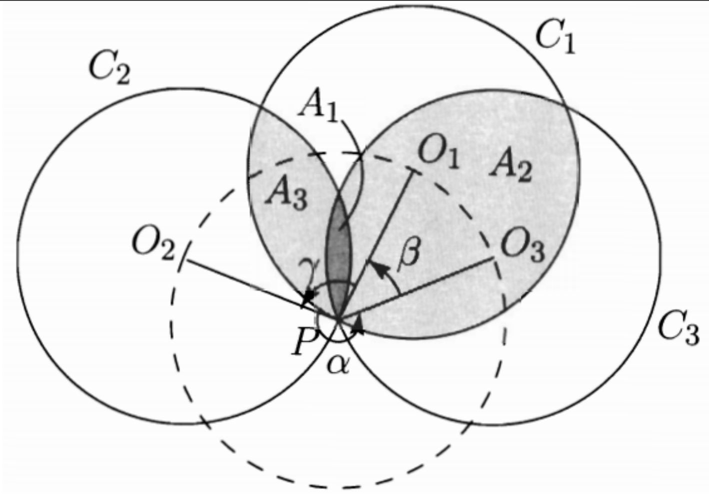
ឧបមាថា $\alpha \ge \beta$; $\beta \ge \gamma$ នោះមានករណីពីរកើតឡើង

• <u>ករណីទី១</u>៖ រូប (ក)

បើ $\alpha \le \pi$ នោះ $A_1 \cap A_1 \cap A_3 = \varnothing$ ឬ $A = A_1 + A_2 + A_3$

• <u>ករណីទី២</u>៖ រូប (ខ)

បើ $\alpha \ge \pi$ នោះ $A_2 \cap A_3 = A_1 \Rightarrow A = \left(A_2 + A_3\right) - A_1$



រូប(ខ)

<u>វិភាគ</u>៖ ផ្ទៃ A_1 ក្នុងករណីទី១ (តាម α) គឺដូចគ្នាទៅនឹង A_1 ក្នុងករណីទី 2 (តាម $2\pi-\alpha$)។

ដូច្នេះ ដើម្បីរក A_i, $i=1;2;3$ គេគ្រាន់តែរក A_2 អាស្រ័យមុំ β, A_1 អាស្រ័យមុំ α និង A_3 អាស្រ័យមុំ γ។

$A_2=2$ ដងនៃផ្ទៃចម្រៀកថាសផ្នែក PXQ (រូប(គ))

$$=2\left(S_{O_1PXQ}-S_{\Delta O_1PQ}\right)$$

$$=2\left[\left(\frac{\pi-\beta}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\pi-\beta\right)\right]$$

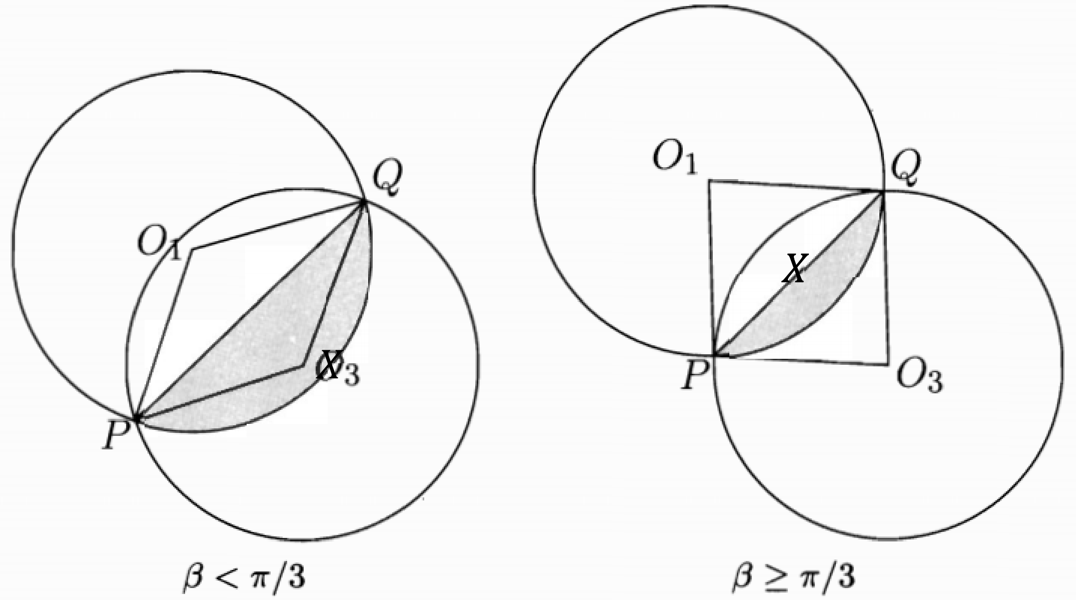
$$=2\left[\frac{\pi-\beta-\sin\beta}{2}\right]$$

$$A_2=\pi-\beta-\sin\beta$$

ដូចគ្នាដែរ គេបាន៖

$A_1=\pi-\alpha-\sin\alpha$ និង $A_3=\pi-\gamma-\sin\gamma$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$។



ពីលទ្ធផលនេះ គេទាញ៖

$$A=\pi-\sin\alpha-\sin\beta-\sin\gamma$$

ដើម្បីរកតម្លៃតូចបំផុតនៃ A គឺដូចគ្នានឹងការរកតម្លៃធំបំផុតនៃ

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$$

- ឧបមាថា $\alpha\neq\beta\neq\gamma$ និង $\alpha>\dfrac{2\pi}{3}$ នោះ β ឬ γ ត្រូវ $<\dfrac{2\pi}{3}$ ។

  បើ $\beta<\dfrac{2\pi}{3}$ និងយក γ ថេរនោះគេបាន ៖

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

ឬ $$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\pi-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

ពេល $\alpha-\beta$ ថយ $\Rightarrow\sin\alpha+\sin\beta$ កើន A ត្រូវថយចុះ។

ពេលនេះយើងបន្ថយតម្លៃ α តែបន្ថែមតម្លៃ β រហូតដល់មួយ

ក្នុងចំណោមនេះស្មើនឹង $\frac{2\pi}{3}$ និងផ្ទៀងផ្ទាត់ $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ ។

+ បើ $\beta=\frac{2\pi}{3}$ នោះ

$$\sin\alpha+\sin\gamma=2\sin\left(\pi-\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)$$

ផលបូកនេះធំបំផុតពេល $\cos\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)=1\Leftrightarrow\alpha=\beta=\gamma=\frac{2\pi}{3}$

សន្និដ្ឋាន $Min\ A=\pi-3\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}$

លំហាត់ទី ៧៣៖ រកឫសគត់ >0 នៃសមីការ

$$x^2-2y^2=0 \qquad (1)$$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

ឧបមាថា $(a_1;b_1)$ ជាឫសនៃ (1) នោះ $a_1^2-2b_1^2=0$

សមមូល $a_1^2=2b_1^2$ ឬ a_1^2 គូ $\Rightarrow a_1$ គូ

(ព្រោះបើ a_1 សេសនោះ a_1^2 សេស)

ដូចនេះ $\exists a_2>0;\ a_2\in\mathbb{N}$ ដែល $a_1=2a_2$

សមីការ (1) ទៅជា៖

$(2a_2)^2-2b_1^2=0$ ឬ $2a_2^2-b_1^2=0$

ឬ $b_1^2=2a_2^2$ នោះ b_1 គូ។

ដូចនេះ $\exists b_2>0;\ b_2\in\mathbb{R}$ ដែល $b_1=2b_2$

សមីការ (1) ទៅជា៖

$$2a_2^2-(2b_2)^2=0 \quad \text{ឬ } a_2^2-2b_2^2=0 \quad (2)$$

ហេតុនេះ $(a_2;b_2)$ ជាគូចម្លើយមួយទៀតនៃ (1)។

សម្រាយខាងលើ

$$\left.\begin{cases} a_1=2a_2 \\ a_1^2=2b_1^2 \end{cases}\right| \Rightarrow a_1>a_2 \text{ និង } a_1>b_1>a_2>b_2 \text{។}$$

យើងបន្តវិធីនេះរហូតបានស្វីតដូចខាងក្រោម ៖

$$(u_n):\ a_1>b_1>a_2>b_2>a_3>b_3>\ldots$$

ដោយគ្រប់សំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិត្រូវមានធាតុតូចបំផុតនោះ ស្វីត (u_n) ពុំអាចកើតមានបានឡើយដែលផ្ទុយពីការឧបមាខាងលើដែលថា (1) មានឫស។

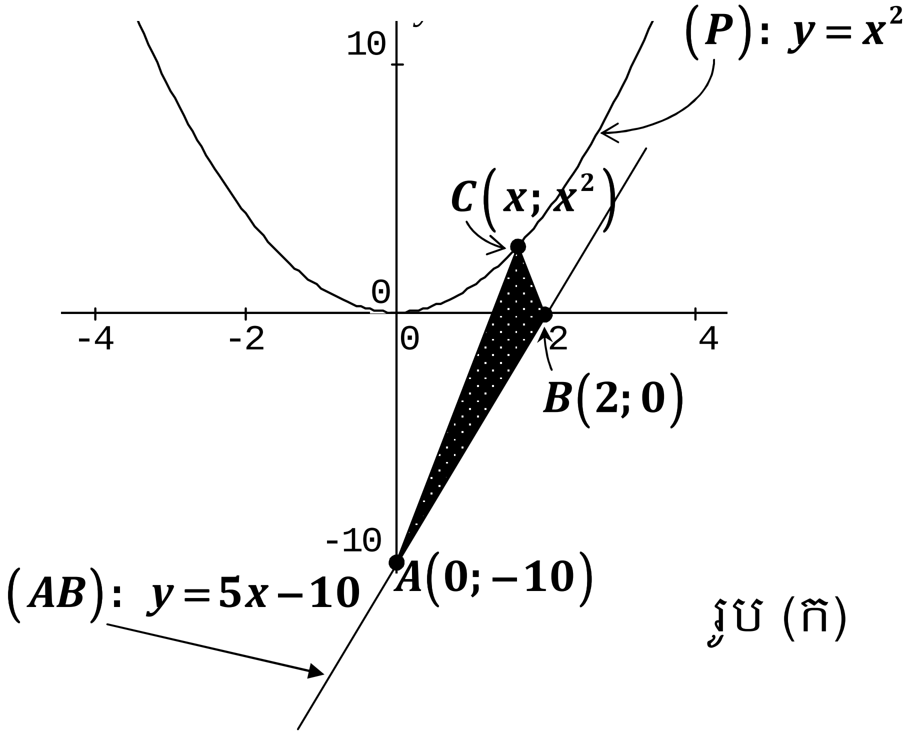
ដូច្នេះ សមីការ (1) គ្មានឫសក្នុង $\mathbb{N}^2$ ទេ។

ពាក្យគ្រូរៃទរឹង ស្រារៃទស្រទឹង ពុំដែលពិសារ

លំហាត់ទី ៧៤៖ ឲ្យចំណុច $A(0;-10)$; $B(2;0)$ និងប៉ារ៉ាបូល $(P):\ y=x^2$។ រកចំណុច $C\in(P)$ ដែលធ្វើឲ្យត្រីកោណ ABC មានផ្ទៃតូចបំផុត។

ដំណោះស្រាយ៖

<u>របៀបទី ១៖</u> សមីការបន្ទាត់ (AB): $\dfrac{y-y_A}{y_b-y_A}=\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}$



រូប (ក)

$$\frac{y-(10)}{0-(-10)}=\frac{x-0}{2-0}$$ ឬ $(AB):\ y=5x-10\Rightarrow m_{AB}=5$

ដោយ $C\in(P)$ នោះ C មានកូអរដោនេ $C(x;\ x^2)$ (រូប(ក))

ដើម្បីឲ្យត្រីកោណ ABC មានផ្ទៃអប្បបរមាលុះត្រាតែ

បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ C ស្របនឹងបន្ទាត់ (AB) គឺ

$$\begin{cases} P'(x) = 2x \\ m_{AB} = 5 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ នោះ } y = \frac{25}{4}$$

ដូចនេះ $C\left(\frac{5}{2};\frac{25}{4}\right)$ ។

<u>របៀបទី ២</u>៖ $\overrightarrow{AB} = (2;\ 10)$ និង $\overrightarrow{AC} = \left(x;\ x^2+10\right)$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 10 & 0 \\ x & x^2+10 & 0 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\times\left|2\left(x^2-5x+10\right)\vec{k}\right| = x^2-5x+10$$

សមមូល $S_{\Delta ABC} = \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}$ តូចបំផុតពេល

$x = \frac{5}{2}$ និង $y = \frac{15}{4}$

ដូចនេះ $C\left(\frac{5}{2};\frac{25}{4}\right)$ ។

លំហាត់ទី ៧៥៖ រកគ្រប់អនុគមន៍ $f(x)$ មានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖

$$|f(x)|<2 \quad (i) \text{ និង } f(x).f'(x)\geq \sin x \quad (ii)$$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

គេសង្កេតឃើញថា ៖ $\left(\left[f(x)\right]^2\right)'=2f'(x).f(x)$

តាម (i) គេបាន ៖

$$(f(x))^2-(f(0))^2=\int_0^x 2f(t).f'(t).dt>\int_0^2 2\sin t.dt=2-2\cos t$$

សមមូល

$$(f(x))^2\geq 2-2\cos x+(f(0))^2\geq 2-2\cos x\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$$

តែ $\exists x=\pi$ ដែល $(f(\pi))^2\geq 2-2\cos\pi=4$

ឬ $|f(x)|\geq 2$ ផ្ទុយនឹងលក្ខខណ្ឌ (1)ដែលថា $|f(x)|<2$ ។

ដូច្នេះគ្មានអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ (i) និង(ii) ទេ។

លលេខកូនក្មេងគង់អាប់យស លលេខនឹងពស់គង់ចឹកផង
លលេខអ្វីៗគង់គេថា លេខស្រីលេខស្រាគង់ឆ្កួតចិត្ត។

លំហាត់ទី ៧៦ ៖ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ៖

$$(1):\quad \begin{cases} x^4-6x^2y^2+y^4=1 \\ 4x^3y-4xy^3=1 \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ៖

តាង $z=x+iy$ និង $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ជាចំនួនកុំផ្លិច

រាងពីជគណិតនិងរាងត្រីកោណមាត្ររៀងគ្នា

នោះតាមទ្រឹស្តីបទទ្វេធា និងទ្រឹស្តីបទដឺម័រ គេបាន៖

$$\begin{cases} z^4=(x+y)^4=x^4+4x^3(iy)+6x^2(iy)^2+4xy^3+y^4 \\ z^4=\left[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]^4=r^4(\cos4\varphi+i\sin4\varphi) \end{cases}$$

ឬ
$$\begin{cases} z^4=\left(\underbrace{x^4-6x^2y^2+y^4}_{1}\right)+i\left(\underbrace{4x^3-4xy^3}_{1}\right)=1+i \\ z^4=r^4(\cos4\varphi+i\sin4\varphi) \end{cases}$$

ឬ
$$\begin{cases} z^4=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) \\ z^4=r^4(\cos4\varphi+i\sin4\varphi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} r^4=\sqrt{2} \\ 4\varphi=\dfrac{\pi}{4} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} r=\sqrt[8]{2} \\ \varphi=\dfrac{\pi}{16} \end{cases}$$

នោះ៖
$$z=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)$$

តែ $\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{16}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{8}}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{4}}{2}}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \\ \sin\dfrac{\pi}{16}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{8}}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{4}}{2}}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \end{cases}$

គេបាន៖ $\begin{cases} z=x+iy \\ z=\sqrt[8]{2}.\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}+i\sqrt[8]{2}.\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \end{cases}$

ដូច្នេះ $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2^{\frac{7}{8}}} \\ y=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2^{\frac{7}{8}}} \end{cases}$

លំហាត់ទី ៧៧៖ A និង B ទទួលបានប្រាក់ស្មើនឹងអាយុរបស់ពួកគេ។ គេដឹងថា Aមានអាយុច្រើនជាង B។ (ក)បើគេបន្ថែមប្រាក់ឲ្យAពីរដង នោះប្រាក់សរុបរបស់ពួកគេទាំងពីរតិចជាង **32$** តែ (ខ) បើគេបន្ថែមប្រាក់ឲ្យBពីរដងវិញនោះប្រាក់សរុបរបស់ពួកគេច្រើនជាង **28$**។ តើកុមារណាអាយុប៉ុន្មាន?

ដំណោះស្រាយ៖

តាង a ជាអាយុរបស់ A និង b ជាអាយុរបស់ B។

• A អាយុច្រើនជាង B នោះ $a=b+k$ ដែល $k\geq 1;\ k\in\mathbb{N}$

តាម (ក) គេបាន ៖ $2(b+k)+b=3b+k\leq 31 \quad (1)$

តាម (ខ) គេបាន ៖ $2b+(b+k)=3b+k\geq 29 \quad (2)$

• យក $2\times(2)-(1)$ គេបាន ៖ $2(3b+k)-(3b-2k)\geq 27$

ឬ $3b\geq 27$ គឺ $b\geq 9 \quad (*)$

• ដោយ $k\geq 1$ នោះ $(1)\Leftrightarrow 3b\leq 31-2k=31-2$

នោះ $b\leq 9 \quad (**)$

តាម $(*)$ និង $(**)$ គេបាន $b=9$។

ម៉្យាងទៀត តាម (1) និង (2) $\Leftrightarrow \begin{cases}3\times 9+2k\leq 31\\ 3\times 9+k\geq 29\end{cases}$

$$\left.\begin{cases}k\leq 2\\ k\geq 2\end{cases}\right| \Rightarrow k=2 \text{ នោះ } a=9+2=11$$

ដូច្នេះ A អាយុ 11 ឆ្នាំ និង B អាយុ 9 ឆ្នាំ។

លំហាត់ទី ៧៨៖ ការប្រឡងមួយមានមនុស្សចូលរួមសរុប 100 នាក់។ ក្នុងនោះអ្នកឆ្លើយថា "ព្រម" និង "ព្រម-មិនព្រម" (ព្រមខ្លះមិនព្រមខ្លះលាយគ្នា)ចំនួន $78;\ 70;\ \ 63$ ចំពោះសំណួរ $A;\ B;\ C$ រៀងគ្នា។ គេដឹងថាមានតែមនុស្ស 3 នាក់គត់ដែលឆ្លើយមិនព្រមទាំងបីសំណួរ។ រកចំនួនសំណួរតិចបំផុត និងច្រើនបំផុត ដែលអ្នកឆ្លើយថាយល់ព្រម។

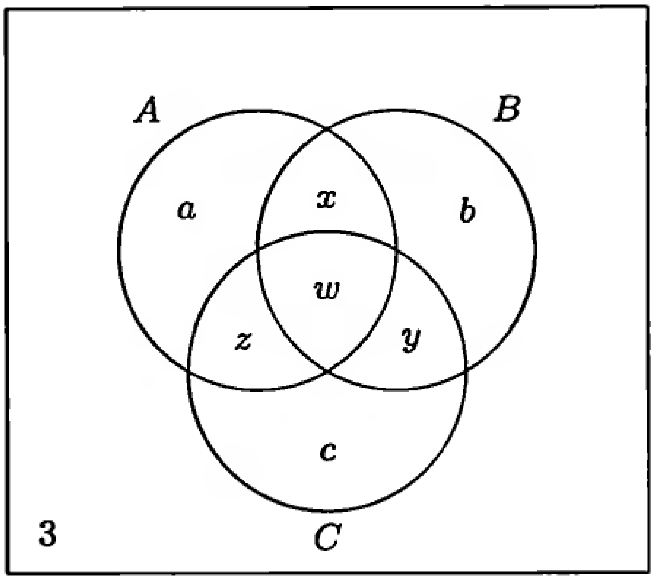
ដំណោះស្រាយ៖

តាង a; b; c ជាចំនួនអ្នកឆ្លើយថា "យល់ព្រម" ចំពោះសំណួរ A; B; C រៀងគ្នា

តាង x; y; z ជាចំនួនអ្នកឆ្លើយថា "យល់ព្រម" ចំពោះ $A\cap B$; $B\cap C$ និង $C\cap A$ រៀងគ្នា

តាង w ចំនួនអ្នកឆ្លើយថា "យល់ព្រម" នៃសំណួរ $A\cap B\cap C$

អ្នកឆ្លើយថា "មិនយល់ព្រម" ចំពោះទាំងបីសំណួរមាន 3 នាក់ ពីនេះគេបានដ្យាក្រាមវ៉ិន ដូចខាងក្រោម៖



តាមដ្យាក្រាមវ៉ិនខាងលើគេបាន ៖

$$\begin{cases} a+x+z+w=78 & (1) \\ b+x+y+w=70 & (2) \\ c+y+z+w=63 & (3) \end{cases}$$

យកសមីការ $(1)+(2)+(3)$ នោះ

$$(a+b+c)+2(x+y+z)+3w=211 \quad (4)$$

តាមសម្មតិកម្ម

$$(a+b+c)+(x+y+z)+w=100-3=97 \quad (5)$$

យក $(4)-(5)$ នោះ $(x+y+z)+2w=114 \quad (6)$

យក $(4)-2\times(5)$ នោះ $-(a+b+c)+w=17 \quad (7)$

ពី (6) គេបាន $w\le\dfrac{114}{2}=57$ និង ពី (7) គេបាន $w\ge 17$

សន្និដ្ឋាន៖ អ្នកឆ្លើយថា ″យល់ព្រម″ គឺ $17\le w\le 57$ ។

លំហាត់ ៧៩៖ សុខបានបង្កើតកម្មវិធីកុំព្យូទ័រមួយដែលអាចធ្វើប្រមាវិធីតែម៉្យាងគត់គឺ $a*b$។ បើគេបញ្ចូល a រួចហើយ b ($b\neq 0$ និង $a,\ b$ អាចអវិជ្ជមាន)ទៅក្នុងម៉ាស៊ីននោះលើអេក្រង់បង្ហាញ $1-\left(\dfrac{a}{b}\right)$។ សុខធ្វើការអះអាងថាកុំព្យូទ័រគាត់អាចធ្វើប្រមាណវិធីបួនប្រភេទគឺ គុណ ចែក បូក និងដក។ ឧទាហរណ៍ដើម្បីចែក $\dfrac{a}{b}$ នោះកុំព្យូទ័រត្រូវធ្វើប្រមាណវិធី $(a*b)*1$ គឺថាគេបញ្ចូល a ហើយបញ្ចូល b ចូលទៅក្នុងកុំព្យូទ័រនោះលទ្ធផលគឺ $1-\dfrac{a}{b}$។ បន្ទាប់មកទៀតយកលទ្ធផលនេះទៅធ្វើប្រមាណវិធីជាមួយលេខ 1 ទៀត គឺ $(a*b)*1=1-\left(1-\left(\dfrac{a}{b}\right)\right)=\dfrac{a}{b}$ ដូចការអះអាងមែន។ តើការអះអាងរបស់ សុខត្រឹមត្រូវឬទេ?

ដំណោះស្រាយ៖

- បើ $a\neq 0$ នោះ $a*a=1-\dfrac{a}{a}=0$ និង $0*a=1-\dfrac{0}{a}=1$
- បើ $a=0$ ឬ $b=0$នោះ $a\times b=1*1$
- បើ $a=0$ និង bណាមួយក៏បាន គេបាន៖

$$a-b=-b=1-\left(1-\left(\frac{b}{(-1)}\right)\right)=\left(b*(-1)\right)*1$$

និង $a+b=b=1-(1-b)=(b*1)*1$

- បើ $a\neq 0$ និង $b\neq 0$ គេបាន៖

$$1*b=1-\frac{1}{b} \text{ និង } a*1=1-a$$

នោះ $(1*b)*1=1-\left(1-\dfrac{1}{b}\right)=\dfrac{1}{b} \qquad (i)$

ដោយ $b\times a=\dfrac{a}{\frac{1}{b}}$នោះ $(a*b)*a=1-\dfrac{1-\left(\frac{a}{b}\right)}{a}=1-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

ឬ $\left((a*b)*a\right)*1=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b} \qquad (ii)$

ដូច្នេះ ប្រមាណវិធីមានដូចតទៅ៖

ក. $\dfrac{a}{b}=(a*b)*1$ (សម្មតិកម្ម)

ខ. $a\times b=\dfrac{a}{\dfrac{1}{b}}=\left(a*\left(\dfrac{1}{b}\right)\right)*1$ (តាម ក.)

$$a\times b=\left(a*\left(\left(1*b\right)*1\right)\right)*1$$

គ. <u>របៀបទី១</u>៖

$$a-b=1-\left(1-\left(a-b\right)\right)=\left(1-\left(1-\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)}{\frac{1}{a}}\right)\right)$$

$$=1-\left[\left(1-\frac{b}{a}\right)*\frac{1}{a}\right]=1-\left[\left(1-\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}\right)*\frac{1}{a}\right]$$

$$=1-\left(\left[\frac{1}{a}*\frac{1}{b}\right]*\frac{1}{a}\right)$$

$$=\left(\left[\left(\frac{1}{a}\right)*\left(\frac{1}{b}\right)\right]*\left(\frac{1}{a}\right)\right)*1$$

$$a-b=\left(\left[\left(\left(1*a\right)*1\right)*\left(\left(1*b\right)*1\right)\right]*\left(\left(1*a\right)*1\right)\right)*1$$

<u>របៀបទី២</u>៖ តាម (ii) គេបាន៖

$$a-b=\frac{1}{\frac{1}{a}}-\frac{1}{\frac{1}{b}}=\left(\left(\left(\frac{1}{a}\right)*\left(\frac{1}{b}\right)\right)*\frac{1}{a}\right)*1$$

ឬ $a-b=\left(\left[\left((1*a)*1\right)*\left((1*b)*1\right)\right]*\left((1*a)*1\right)\right)*1$

(ព្រោះតាម (i) គេមាន $(1*b)*1=\dfrac{1}{b}$)

ឃ. $a+b=a-\left(1-(1-b)\right)$

$=a-\left(1-(b*1)\right)$

$=a-\left((b*1)*1\right)$

នោះ $a-b=\left(\left[\left((1*a)*1\right)*\left(\left(1*\left((b*1)*1\right)\right)*1\right)\right]*\left((1*a)*1\right)\right)*1$

សន្និដ្ឋាន ៖ អំណះអំណាងរបស់សុខពិតជាត្រឹមត្រូវ។

លំហាត់ទី ៨០៖ ការប្រកួតល្បែងអុកមួយអនុញ្ញាតឲ្យដៃគូប្រកួតជួបគ្នាតែម្តងគត់។ សន្មតថាអ្នកឈ្នះបានពិន្ទុ 1 បើស្មើគ្នាបានពិន្ទុ $\frac{1}{2}$ និងចាញ់បានពិន្ទុ 0។លទ្ធផលចុងក្រោយកើតចេញពីការបូកសរុបពិន្ទុទាំងអស់ក្នុងការប្រកួតហើយគេដាក់តាមក្រុមក្នុងតម្រៀបចៃដន្យ។ គេដឹងថាអ្នកបានពិន្ទុខ្ពស់សរុបចុងក្រោយបួនរូបគឺ $4\frac{1}{2}$; $3\frac{1}{2}$; 3 និង $1\frac{1}{2}$។រកពិន្ទុទាបជាងគេបំផុតក្នុងក្រុម?

ដំណោះស្រាយ៖

តាង k ជាចំនួនអ្នកចូលរួមក្នុងប្រកួតនេះគូប្រកួតសរុបមាន

$C(k;\,2)=\dfrac{k(k-1)}{2}$ នោះក៏មានគូពិន្ទុ $\dfrac{k(k-1)}{2}$ ដែរ

ពិន្ទុសរុបអ្នកទាំងបួនដែលបានពិន្ទុខ្ពស់ជាងគេគឺ ៖

$$4\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}+3+1\frac{1}{2}=12\frac{1}{2}$$

គេបាន $\quad \frac{k(k-1)}{2}\ge 12\frac{1}{2} \quad \Rightarrow k\ge 6 \quad (1)$

នៅសល់ $k-4$ នាក់ទៀតដែលបានពិន្ទុតិចជាងមនុស្សពិន្ទុខ្ពស់ទាំងបួននោះមនុស្ស $k-4$នាក់នេះបានពិន្ទុយ៉ាងច្រើន $1\frac{1}{2}$ ។

គេបាន ៖ $\quad \frac{k(k-1)}{2}\le 12\frac{1}{2}+(k-4)\frac{3}{2}$

សមមូល $\quad k^2-k\le 25+3k-12$ ឬ $k^2-4k+4\le 17$

សមមូល $\quad (k-2)^2\le 17$ ឬ $k-2\le\sqrt{17}$

គេទាញបាន $\quad k\le 6 \quad (ii)$

តាម (i) និង (ii) នោះ $k=6$ ។

ពេល $k=6$ នោះពិន្ទុសរុបសម្រាប់ការប្រកួតគឺ15ពិន្ទុ ហើយពិន្ទុសរុបសម្រាប់អ្នកប្រកួតពីររូបទៀតដែលនៅសល់ក្នុងក្រុមគឺ $2\frac{1}{2}$ ។ ដូចនេះអ្នកប្រកួតទី៥ត្រូវបានពិន្ទុ $1\frac{1}{2}$ និងអ្នកទី៦ដែលបានពិន្ទុតិចជាងគេគឺបានពិន្ទុ 1 ។

យើងអាចឲ្យឧទាហរណ៍បានដូចតារាងខាងក្រោម៖

	1	2	3	4	5	6	ពិន្ទុ
1	—	$\frac{1}{2}$	1	1	1	1	$4\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}$	—	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$3\frac{1}{2}$
3	0	$\frac{1}{2}$	—	$\frac{1}{2}$	1	1	3
4	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	—	$\frac{1}{2}$	0	$1\frac{1}{2}$
5	0	0	0	$\frac{1}{2}$	—	1	$1\frac{1}{2}$
6	0	0	0	1	0	—	1

លំហាត់ទី ៨១៖ រកចំនួនគត់>0ដែល $x<y<z$ជាឬសនៃ

សមីការ $2^x+2^y+2^z=2336$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

គេមាន $\quad 2^x+2^y+2^z=2336$

សមមូល $2^x.\left(1+2^{y-x}+2^{z-x}\right)=2^5.73 \quad (*)$

បើតាង $M=1+2^{y-x}+2^{z-x}$ នោះ Mជាចំនួនគត់សេស

ពី $(*)$ គេបាន ៖

$$\begin{cases}2^x=2^5\\1+2^{y-x}+2^{z-x}=73\end{cases}$$

ឬ $$\begin{cases}2^x=2^5\\2^{y-x}+2^{z-x}=72\end{cases}$$

ឬ $\begin{cases} x=5 \\ 2^{y-x}.\left(1+2^{z-y}\right)=2^3.9 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} x=5 \\ 2^{y-x}=2^3 \\ 2^{z-y}=2^3 \end{cases}$

ដូច្នេះ $\begin{cases} x=5 \\ y=8 \\ z=11 \end{cases}$

លំហាត់ទី ៨២៖ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការក្នុង $\mathbb{Z}$ ដែល

$$\begin{cases} x^3+3xy^2=-49 & (1) \\ x^2-8xy+y^2=8y-17x & (2) \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ៖

យក $(1)+3\times(2)$ គេបាន៖

$$x^3+3x^2+3xy^2-24xy+3y^2=24y-51x-49$$

$$\Leftrightarrow\left(x^3+3x^2+3x+1\right)+3y^2(x+1)-24y(x+1)+48(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)\left[(x+1)^2+3y^2-24y+48\right]=0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)\left[(x+1)^2+3(y-4)^2\right]=0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \quad x+1=0 \text{ ឬ } (x+1)^2+3(y-4)^2=0$$

- បើ $x+1=0$ នោះ $x=-1$ ហើយ $y=\pm 4$
- បើ $(x+1)^2+3(y-4)^2=0$ នោះ $\begin{cases} (x+1)^2=0 \\ (y-4)^2=0 \end{cases}$

នោះ $x=-1$ និង $y=4$

ដូច្នេះ ចម្លើយប្រព័ន្ធសមីការគឺ $(x;y)=(-1;\pm 4)$

លំហាត់ទី ៨៣៖ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x^3+x(y-z)^2=2 \\ y^3+y(z-x)^2=30 \\ z^3+z(x-y)^2=16 \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ ៖

ដោយ $x;y;z\neq 0$ នោះប្រព័ន្ធសមីការទៅជា

$$\begin{cases} x(x^2+y^2+z^2)-2xyz=2 & (1) \\ y(x^2+y^2+z^2)-2xyz=30 & (2) \\ z(x^2+y^2+z^2)-2xyz=16 & (3) \end{cases}$$

យក $(2)-(3)$ និង $(3)-(1)$ គេបាន ៖

$$\begin{cases} x(x^2+y^2+z^2)-2xyz=2 \\ (y-z)(x^2+y^2+z^2)=14 & (4) \\ (z-x)(x^2+y^2+z^2)=14 & (5) \end{cases}$$

យក $(4)-(5)$ ប្រព័ន្ធទៅជា៖

$$\begin{cases} x(x^2+y^2+z^2)-2xyz=2 & (*) \\ (y-z)(x^2+y^2+z^2)=14 & (**) \\ y=2z-x & (***) \end{cases}$$

យក $(***)$ជំនួសក្នុង $(*)$ និង $(**)$ គេបាន ៖

$$\begin{cases} 2x^3-2x^2z+xz^2=2 \\ -2x^3+6x^2z-9xz^2+5z^3=14 \\ y=2z-x \end{cases}$$

សមមូល $\begin{cases} 2x^3-2x^2z+xz^2=2 & (I) \\ 5z^3-16xz^2+20x^2z+16x^3=0 & (II) \\ y=2z-x \end{cases}$

ដោយ $x;\ z\neq 0$ គេតាង $t=\dfrac{z}{x}$ នោះ (II) ទៅជា

$$5t^3-16t^2+20t-16=0$$

សមមូល $(t-2)(5t^2-6t+8)=0 \quad \Rightarrow t=2$

- បើ $t=2$ នោះ $z=2x$ ហើយប្រព័ន្ធទៅជា៖

$$\begin{cases} 2x^3-2x^2z+xz^2=2 \\ z=2x \\ y=2z-x \end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធនេះគេបាន $(x=1;\ y=3;\ z=2)$។

លំហាត់ទី ៨៤៖ គេឲ្យ $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ ជាពហុធាមានមេគុណជាចំនួនពិតដែល $a_0\neq 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខ័ណ្ឌ $f(x).f(2x^2)=f(2x^3+x);\ \forall x\in\mathbb{R}$។ បង្ហាញថា f គ្មានឫសក្នុង $\mathbb{R}$។

ដំណោះស្រាយ៖

- បើ $x=0$ នោះ $a_n=f(0)\neq 0$ ពិត
- តាង k ជាសន្ទស្សន៍ធំបំផុតដែល $a_k\neq 0$ គេបាន៖

$$f(x).f(2x^2)=(a_0x^n+\ldots+a_kx^{n-k})\times$$
$$(a_0 2^n x^{2n}+\ldots+a_k 2^{n-k}x^{2(n-k)})$$

ឬ $f(x).f(2x^2)=a_0^2 2^n x^{3n}+\ldots+a_k^2 2^{n-k}x^{3(n-k)}\quad (i)$

ម្យ៉ាងទៀត

$$f(2x^3+x)=a_0(2x^3+x)^n+\ldots+a_k(2x^3+x)^{n-k}$$

ឬ $f(2x^3+x)=a_0 2^n x^{3n}+\ldots+a_kx^{n-k}\quad (ii)$

ដោយ $(i)=(ii)$ គេបាន៖

$$a_k 2^{n-k}x^{3(n-k)}=a_kx^{n-k};\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

សមមូល $\quad n=k \Rightarrow a_k=a_n\neq 0$

- ឧបមាថា $x_0\neq 0$ ជាឬសនៃ $f(x)$ នោះ $f(x_0)=0$

  ពិនិត្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (x_n) ដែល $x_{n+1}=2x_n^3+x_n;\quad n\geq 0$

  $+$ពេល $x_0>0$ នោះ (x_n) កើន $\Rightarrow f$ គ្មានឬសក្នុង $\mathbb{R}$

  $+$ពេល $x_0<0$ នោះ (x_n) ចុះ $\Rightarrow f$ គ្មានឬសក្នុង $\mathbb{R}$

  គេដឹងថា $f(x).f(2x^2)=f(2x^3+x);\quad \forall x\in\mathbb{R}$

  ចំពោះ $\forall x_0\neq 0$ បើ $f(x_0)=0$ នោះ $f(x_k)=0;\ \forall k$

ដូច្នេះ $f(x)$ មិនមែនជាអនុគមន៍ថេរទេ គឺ f ជាអនុគមន៍មាន n ដឺក្រេហើយមានឫសច្រើនរាប់មិនអស់ ដែលផ្ទុយពីការពិត ដែលថាពហុធាមាន n ដឺក្រេមានឫសយ៉ាងច្រើន n ឫស។

ហេតុនេះ f គ្មានឫសក្នុង $\mathbb{R}$ ទេ។

លំហាត់ទី ៨៥៖ គេមានស្វ៊ីតចំនួនពិត (x_n) កំណត់ដោយ ៖

$$x_1=\frac{2}{3} \text{ និង } x_{n+1}=\frac{x_n}{2(2n+1)x_n+1};\ \forall n\geq 1$$

គណនា $A=x_1+x_2+...+x_{2013}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n គេបាន $x_n>0$

បើយក $y_n=\dfrac{2}{x_n}$ នោះ $y_1=3$ ហើយស្វ៊ីតទៅជា

$$\frac{2}{y_{n+1}}=\frac{\frac{2}{y_n}}{2(2n+1)\frac{2}{y_n}+1}$$

ឬ $\quad y_{n+1}=4(2n+1)+y_n;\ \forall n>1 \qquad (1)$

ឬ $\quad y_{k+1}-y_k=8k+4$

គេបាន ៖ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(y_{k+1}-y_k)=\sum_{k=1}^{n-1}(8k+4)$

សមមូល $y_n-y_1=8\dfrac{(n-1)n}{2}+4(n-1)$

នោះ $y_n=(2n-1)(2n+1);\quad \forall n\geq 1$

ហេតុនេះ $x_n=\frac{2}{y_n}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$

គេបាន $A=\sum_{k=1}^{2013}x_k=\sum_{k=1}^{2013}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=1-\frac{1}{4027}$

ដូច្នេះ $A=\frac{4026}{4027}$

លំហាត់ទី ៨៦៖ រកតម្លៃតូចបំផុត និងធំបំផុតនៃអនុគមន៍

$$f(x)=x\left(1993+\sqrt{1995-x^2}\right)$$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ $D=\left[-\sqrt{1995};\ \sqrt{1995}\right]$

$f(x)$ ជាអនុគមន៍សេស និង $f(x)\geq 0;\ \forall x\in\left[0;\ \sqrt{1995}\right]$

ហេតុនេះ ៖ $\begin{cases}\max\limits_{x\in D} f(x)=\max\limits_{x\in\left[0;\ \sqrt{1995}\right]} f(x)\\ \min\limits_{x\in D} f(x)=-\max\limits_{x\in\left[0;\ \sqrt{1995}\right]} f(x)\end{cases}$

ចំពោះ $\forall x\in\left[0;\ \sqrt{1995}\right]$ គេបាន៖

$$f(x)=x\left(1993+\sqrt{1995-x^2}\right)$$

ឬ $$f(x)=x\left(\sqrt{1993}.\sqrt{1993}+1.\sqrt{1995-x^2}\right)$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី-ស្វាត $(\mathbf{Cauchy-Schwarz})$ នោះ

$$f(x) \le x\left(\sqrt{1993+1}.\sqrt{1993+\left(1995-x^2\right)}\right)$$

ឬ $f(x) \le x\sqrt{1994}.\sqrt{1993+1995-x^2}$

ម៉្យាងទៀតតាមវិសមភាព $\mathbf{AM-GM}$

$$f(x) \le \sqrt{1994}.\frac{x^2+\left(1993+1995-x^2\right)}{2} = \sqrt{1994}.1994$$

ដែលសមភាពកើតឡើងពេល ៖

$$\begin{cases} 1=\sqrt{1995-x^2} \\ x=\sqrt{1993+1995-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{1994} \in \left[0;\sqrt{1995}\right]$$

ដូចេ្នះ $\max\limits_{x\in D} f(x) = \max\limits_{x\in\left[0;\sqrt{1995}\right]} f(x) = 1994\sqrt{1994}$

(កើតឡើងពេល $x=\sqrt{1994}$)

$$\min\limits_{x\in D} f(x) = -\max\limits_{x\in\left[0;\sqrt{1995}\right]} f(x) = -1994\sqrt{1994}$$

(កើតឡើងពេល $x=\sqrt{1994}$)

លំហាត់ទី ៨៧៖ រកលេខបីខ្ទង់ $n=\overline{abc}$ ដែល $2n=3a!b!c!$។

ដំណោះស្រាយ៖

ពី $2n=3a!b!c!$ នោះ n ត្រូវចែកដាច់នឹង $3 \quad (i)$

ហេតុនេះ $102\le n\le 999$។

ដោយ $102\le n\le 999$ នោះ $68\le \frac{2}{3}\overline{abc}\le 666$

សមមូលនឹង $68\le a!b!c!\le 666$

- ពេល $a!b!c!\le 666$ នោះខ្ទង់នីមួយៗត្រូវតូចជាង 6 (ព្រោះ $6!=720>666$)
- ពេល $68\le a!b!c!$ នោះ

$$\left.\begin{array}{l}\text{ខ្ទង់នីមួយៗត្រូវ}\ge 2\\ \text{ឬ ពីរខ្ទង់លេខស្មើ } 1;\ 2 \text{ ឬមួយខ្ទង់ត្រូវ}\ge 4\\ \text{ឬ ពីរខ្ទង់លេខ}\ge 3\text{(នោះខ្ទង់រាយត្រូវស្មើ}2)\end{array}\right|\Rightarrow$$

$a!b!c!$ ចែកដាច់នឹង $8\Rightarrow n$ ចែកដាច់នឹង $4 \quad (ii)$

តាម (i) និង (ii) គេបាន $n=\overline{abc}$ ចែកដាច់នឹង 3 ឬ 4

ហើយ $0<a;\ b;\ c\le 5$

ដោយ $n=\overline{abc}$ ជាចំនួនគូ នោះ c ក៏ជាចំនួនគូដែរ ឬ $c\in\{2;\ 4\}$

$+$ បើ $c=2$ នោះ $\overline{bc}$ ចែកដាច់នឹង 4

(ព្រោះ $\overline{abc}$ ចែកដាច់នឹង 4)

ហេតុនេះ $b\in\{1;\ 3;\ 5\}$ និង $\overline{bc}\in\{12;32;\ 52\}$

គេបាន $n=\overline{abc}=312;\ 432;\ 252\quad (*)$

$+$ដូចគ្នាដែរ បើ $c=4$ នោះ $b\in\{2;\ 4\}$ និង

$\overline{bc}\in\{24;\ 44\}$

តែ n ចែកដាច់នឹង 3 នោះ $a+b+c$ ត្រូវចែកដាច់នឹង 3

គេបាន $n=\overline{abc}=324;\ 144\quad (*)$

ម៉្យាងទៀត $a!b!c!$ ចែកដាច់នឹង 8 នោះតាម $(*)$ និង $(**)$

តម្រូវឲ្យ $n=\overline{abc}=432$

លំហាត់ទី ៨៨៖ រកលេខបីខ្ទង់ $\overline{abc}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖

$$2\overline{abc}=\overline{bca}+\overline{cab}$$

ដំណោះស្រាយ៖

ពី $2\overline{abc}=\overline{bca}+\overline{cab}$ គេបាន៖

$$2(100a+10b+c)=(100b+10c+a)+(100c+10a+b)$$

ឬ $\quad 7a=3b+4c\quad (1)$

- បើ $a=b$ នោះតាម (1) គេបាន $a=b=c$

  ដែល $a;\ b;\ c\in\{1;\ 2;....;9\}$

  ហេតុនេះចម្លើយនៃ (1) គឺ $\overline{abc}=111;222;....;999$

- បើ $a\neq b\neq c$ នោះ $(1)\Leftrightarrow \dfrac{a-b}{c-a}=\dfrac{4}{3}$

  ដែល $\begin{cases}a-b=4k\\ c-a=3k\end{cases};\ k\in\mathbb{Z}$ នោះ $c-b=7k$

ដោយ $c-b<10$ នោះតម្រូវឲ្យ $k=\pm 1$

$+$ បើ $k=1$ នោះ $\begin{cases} a-b=4 \\ c-a=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=a-4\geq 0 \\ a=c-3\leq 6 \end{cases} \Rightarrow 4\leq a\leq 6$

ឬ $a=4;5;6$ និង $b=0;1;2$ និង $c=7;8;9$ រៀងគ្នា

ដូច្នេះ $\overline{abc}=407;\ 518;\ 629$

$+$ ដូចគ្នា បើ $k=-1$ នោះ $\overline{abc}=307;\ 481;\ 592$

សរុបមក មាន (1) មានចម្លើយ 15 ផ្សេងគ្នាដូចបានបង្ហាញ។

ក្រុមគណិតវិទ្យាអនន្តយើងខ្ញុំ

មានទទួលបង្រៀនសិស្សដល់គេហដ្ឋាន

នៅភ្នំពេញទំនាក់ទំនង

ទូរស័ព្ទ៖ ០៩៧ ៩៨ ៩៣ ៣៦៥

០៩២ ៧៤ ៨៣ ៦៨

លំហាត់ទី ៨៩៖ គេមានពហុធាមានមេគុណ $\mathbf{a_i;\ 0 \le i \le n}$ $\mathbf{P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n;\ n \ge 3}$ ។ ឧបមាថា $\mathbf{P(x)}$ មាន $\mathbf{n}$ ឫស និង $\mathbf{a_0 = 1;\ a_1 = -n;\ a_2 = \dfrac{n^2 - n}{2}}$ ។ ចូរកំណត់មេគុណ $\mathbf{a_i}$ ចំពោះគ្រប់ $\mathbf{i \ge 3}$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

តាង $\mathbf{x_1; x_2; ....; x_n}$ ជា $\mathbf{n}$ ឫសនៃពហុធា $\mathbf{P(x)}$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត ចំពោះ $\mathbf{P(x)}$ គេបាន៖

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n \quad \text{និង} \quad \sum_{\substack{i;\, j=1 \\ i<j}}^{n} x_i x_j = \frac{n^2 - n}{2}$$

នោះ $$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - 2\sum_{\substack{i;\, j=1 \\ i<j}}^{n} x_i x_j = n^2 - n^2 + n = n$$

និង $$\sum_{i=1}^{n} (x_i - 1)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i + n = n - 2n + n = 0$$

នោះគ្រប់ $\mathbf{i = 1; 2; ...; n}$ $\mathbf{(x_i - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0}$

គេបាន៖ $\mathbf{P(x) = (x - 1)^2}$

ហើយ $\mathbf{a_k = (-1)^k.C(n;k)\quad ; k = 0; 1; ...; n}$

ដូច្នេះ $\mathbf{a_k = (-1)^k.C(n;k)\quad ; k = 0; 1; ...; n}$ ។

លំហាត់ទី ៩០៖ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $\mathbf{n>1}$ និង $\mathbf{p>1;\ p\in\mathbb{R}}$

បើ $\sum_{i=1}^{n} x_i = p$ ដែល $x_i > 0$ រកតម្លៃធំបំផុតនៃ $A=\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

តាង $x_k = \max\{x_1; x_2; ...; x_n\}$

នោះ៖
$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_{i+1} + \sum_{i=k}^{n-1} x_i x_{i+1}$$
$$\le x_k \sum_{i=1}^{k-1} x_i + x_k \sum_{i=k}^{n-1} x_i$$
$$= x_k (p - x_k) \le \frac{p^2}{4}$$

សមភាពកើតឡើងពេល $x_1 = x_2 = \frac{p}{2};\ x_3 = ... = x_n = 0$ ។

ដូច្នេះ៖ $\max\ A = \frac{p^2}{4}$ ។

លំហាត់ទី ៩១៖ រកគ្រប់ចំនួនគត់ $n>1$ ដែល $\forall x_i;\ i=1;...;n$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ge x_n . \sum_{i=1}^{n-1} x_i \qquad (1)$$

ដំណោះស្រាយ៖

- *ករណីពិសេស៖* បើ $x_1 = ... = x_{n-1} = 1$ និង $x_n = 2$

(1) ទៅជា៖
$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2 \ge x_n \sum_{i=1}^{n-1} x_i$$

សមមូលនឹង $(n-1)+4\ge 2(n-1)$

ហេតុនេះ $n\le 5$

• *<u>ករណីទូទៅ</u>*៖

$(1)\Leftrightarrow x_n^2-(x_1+...+x_{n-1})x_n+(x_1^2+...+x_{n-1}^2)\ge 0;\ \forall x_n$

មាន $\Delta=(x_1+...+x_{n-1})^2-4(x_1^2+...+x_{n-1}^2)\le 0\quad (2)$

ម៉្យាងទៀត តាមវិសមភាពកូស៊ី-ស្វាត $(\text{Cauchy}-\text{Schwarz})$

យកមេគុណ $x_1;...;x_{n-1}$ និង $\underbrace{1;...;1}_{n\text{ times}}$ នោះ

$$(1^2+...+1^2)(x_1^2+...+x_{n-1}^2)\ge(1.x_1+...+1.x_n)^2$$

ឬ $(n-1)(x_1^2+...+x_{n-1}^2)\ge(x_1+...+x_{n-1})^2$

ឬ $(x_1+...+x_{n-1})^2-(n-1)(x_1^2+...+x_n^2)\le 0\quad (3)$

តាម (2) និង (3) គេបាន៖

$n-1\le 4$ ឬ $n\le 5$

ដូច្នេះ $n=1;\ 2;\ 3;\ 4$ ។

លំហាត់ទី ៩២៖ រកគ្រប់ពហុធា $P(x)$ មានមេគុណជាចំនួនពិត ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$(1):\ P(x^2)+x[3P(x)+P(-x)]=[P(x)]^2+2x^2;\ \forall x$$

ដំណោះស្រាយ ៖

តាម (1) យើងបាន $\deg P>0$

• <u>ករណីទី១</u>៖ $\deg P=1$ នោះ $P(x)=ax+b;\ a\neq 0$

$(1)\Leftrightarrow (a^2-3a+2)x^2+2b(a-2)x+b^2-b=0;\ \forall x$

ហេតុនេះ $(a;b)=(0;0);\ (2;0)$ និង $(2;1)$

ហើយ $P(x)=x;\ P(x)=2x;\ P(x)=2x+1$ រៀងគ្នា

• <u>ករណីទី១</u>៖ $\deg P=n\geq 2$

នោះ $P(x)=ax^n+Q(x)$ ដែល $a\neq 0$ និង $\deg Q(x)=k<n$

$$(1)\Leftrightarrow (a^2-a)x^{2n}+[Q(x)]^2-Q(x^2)+2ax^n.Q(x)$$
$$=\left[3+(-1)^n\right]ax^{n+1}+\left[3Q(x)+Q(-x)\right]x-2x^2;\ \forall x\quad (*)$$

ដោយដឺក្រេពហុធាអង្គខាងស្ដាំ$=n+1;\quad n+1<2n$

នោះ $a^2-a=0\quad \Rightarrow a=1\quad (a\neq 0)$

ដូច្នេះ $(*)\Leftrightarrow 2x^nQ(x)+[Q(x)]^2-Q(x^2)=$
$$=\left[3+(-1)^n\right]x^{n+1}+\left[3Q(x)+Q(-x)\right]x-2x^2;\ \forall x$$

ដោយដឺក្រេពហុធាអង្គខាងឆ្វេង$=n+k$ និងដឺក្រេពហុធាអង្គខាងស្ដាំ$=n+1$ គេទាញបាន $k=1$ ឬ $\deg Q(x)=1$

ម្យ៉ាងទៀត ពេល $x=0$ នោះ $(Q(0))^2-Q(0)=0$

សមមូល $Q(0)=0$ ឬ $Q(0)=1$

នោះ $Q(x)$មានរាង ax ឬ $ax+1$

$\therefore$ បើ $Q(x)=ax$ គេបាន៖

$$\left[3+(-1)^n-2a\right]x^{n+1}-\left(a^2-3a+2\right)x^2=0;\quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3+(-1)^n-2a=0\\ a^2-3a+2=0\end{cases}$$

គេបាន៖ $a=1$ បើ n សេស និង $a=2$ បើ n គូ

ដូច្នេះ $P(x)=x^{2n+1}+x;\ P(x)=x^{2n}+2x$

$\therefore$ បើ $Q(x)=ax+1$ គេបាន៖

$$\left[3+(-1)^n-2a\right]x^n+1-2x^n-\left(a^2-3a+2\right)x^2-2(a-2)x=0$$

មិនអាចកើតមានបាន

សរុបមក $P(x)=x;\ P(x)=x^{2n}+2x;\ P(x)=x^{2n+1}+x;\ n\geq 0$

លំហាត់ទី ៩៣៖ ចំពោះចំនួនពិត $\alpha_1;\dots;\alpha_n\in[0;\ \pi]$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sum\limits_{i=1}^{n}(1+\cos\alpha_i)$ ជាចំនួនគត់សេស។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖ $S=\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\alpha_i\geq 1$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

តាមសម្មតិកម្ម ៖ $1+\cos\alpha_i\geq 0\quad(i=1;\dots;n)$

នោះ $\sum\limits_{i=1}^{n}(1+\cos\alpha_i)=2\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2\dfrac{\alpha_i}{2}=2M+1$

ដែល M ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន

ម្យ៉ាងទៀត

$$\text{ចំពោះ } x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \sin x.\cos x\begin{cases}\ge \sin^2 x; & x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\\ \ge \cos^2 x; & x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$$

ឧបមាថា $\alpha_1 \le \dots \le \alpha_n$ នោះ $\exists k_0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$S=\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i = 2\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\alpha_i}{2}.\cos\frac{\alpha_i}{2}$$

$$\ge 2\sum_{i=1}^{k_0}\sin^2\frac{\alpha_i}{2}+2\sum_{i=k_0+1}^{n}\cos^2\frac{\alpha_i}{2}=A+B$$

ដែល $A;\ B\ge 0$

•<u>ករណីទី១</u> $B\ge 1 \quad \Rightarrow S\ge 1$ ពិត

•<u>ករណីទី២</u> $B<1$ គេបាន៖

$$A=2\sum_{i=1}^{k_0}\sin^2\frac{\alpha_i}{2}=2\sum_{i=1}^{k_0}\left(1-\cos^2\frac{\alpha_i}{2}\right)$$

ឬ $$A=2k_0-2\sum_{i=1}^{k_0}\cos^2\frac{\alpha_i}{2}=2k_0-\left(2M+1-B\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{តែ } A\ge 0 \text{ នោះ } 2k_0\ge 2<+1-B\\ \text{និង } B<1 \text{ នោះ } 2M+1-B>2M\end{array}\right\}\Rightarrow 2k_0>2M$$

ឬ $k_0>M \Leftrightarrow k_0\ge M+1$ ឬ $2k_0\ge 2M+2$

ដោយ $B\ge 0$ នោះ $S\ge A+B=2k_0-\left(2M+1-B\right)+B$

ឬ $S\ge 2k_0-\left(2M+1\right)+2B\ge 1+2B\ge 1$ ពិត

លំហាត់ទី ៩៤៖ គណនាដោយមិនប្រើម៉ាស៊ីនគិតលេខនូវតម្លៃ

$$A=\frac{1}{\cos^2 10^\circ}+\frac{1}{\sin^2 20^\circ}+\frac{1}{\sin^2 40^\circ}-\frac{1}{\cos^2 45^\circ}$$

ដំណោះស្រាយ៖

ដោយ $\frac{1}{\cos^2 10^\circ}=\frac{1}{\sin^2 80^\circ}$

$$\frac{1}{\sin^2 20^\circ}=\frac{4\cos^2 20^\circ}{\sin^2 40^\circ}=\frac{2\left(1+\cos 40^\circ\right)}{\sin^2 40^\circ}$$

$$=\frac{2\left(1+\cos 40^\circ\right).4.\cos^2 40^\circ}{\sin^2 80^\circ}$$

និង $\frac{1}{\sin^2 40^\circ}=\frac{4\cos^2 40^\circ}{\sin^2 80^\circ}$

នោះ $A=\frac{1+2\left(1+\cos 40^\circ\right).4.\cos^2 40^\circ+4.\cos^2 40^\circ}{\sin^2 80^\circ}$

$$A=\frac{1+\left(3+2\cos 40^\circ\right).4.\cos^2 40^\circ}{\cos^2 10^\circ}$$

ម្យ៉ាងទៀត

$$1+\left(3\cos 40^\circ\right).4.\cos^2 40^\circ$$

$$=1+\left(3+2\cos 40^\circ\right).2\left(1+\cos 80^\circ\right)$$

$$=1+\left(6+4\cos 40^\circ+6\cos 80^\circ+4\cos 40^\circ\cos 80^\circ\right)$$

$$=1+\left[6+4\cos 40^\circ+6\cos 80^\circ+2\left(\cos 120^\circ+\cos 40^\circ\right)\right]$$

$$=6+6\cos 40^\circ+6\cos 80^\circ$$

$$1+\left(3\cos 40^\circ\right).4.\cos^2 40^\circ = 6+6.2.\cos 60^\circ.\cos 20^\circ$$
$$= 6\left(1+\cos 20^\circ\right) = 12\cos^2 10^\circ$$

ដូច្នេះ $A = 12-2 = 10$

លំហាត់ទី ៩៥៖ ចំពោះចំនួនគត់ $n \ge 2$ និង $a_i;b_i \in \mathbb{R}$ ដែល $i \le i \le n$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1;\ \sum_{i=1}^{n} b_i^2;$ និង $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$ ។

បង្ហាញថា $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 \le n$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

តាង $A = \sum_{i=1}^{n} a_i$ និង $B = \sum_{i=1}^{n} b_i$ គេបាន៖

$$0 \le \sum_{i=1}^{n}\left(1 - Aa_i - Bb_i\right)^2$$

ឬ $0 \le \sum_{i=1}^{n}\left(1 + A^2a_i^2 + B^2b_i^2 - 2Aa_i - 2Bb_i + 2ABa_ib_i\right)$

ឬ $0 \le \sum_{i=1}^{n} 1 + A^2\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + B^2\sum_{i=1}^{n} b_i^2 - 2A\sum_{i=1}^{n} a_i - 2B\sum_{i=1}^{n} b_i + 2AB\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$

ឬ $0 \le 1 + A^2 + B^2 - 2A^2 - 2B^2 + 0 = n - \left(A^2 + B^2\right)$

ហេតុនេះ $A^2 + B^2 \le n$ ពិត

ដូច្នេះ $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 \le n$ ។

លំហាត់ទី ៩៦៖ គេឲ្យចំនួនពិត $a_1;a_2;....;a_n;\quad n>1$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $A+\sum_{i=1}^{n}a_i^2<\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2$ ។ បង្ហាញថា ៖

គ្រប់ $1\le i<j\le n$ នោះ $A<2a_ia_j$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

តាមវិសមភាពកូស៊ី-ស្វាត គេយកមេគុណ

$\left(a_1;...;a_{i-1};a_{i+1};...;a_{j-1};a_{j+1};...;a_n;\left(a_i+a_j\right)\right)$ និង $(1;...;1)$

និង ចំពោះគ្រប់ $1\le i<j\le k$ គេបាន៖

$$\left(a_1+...+a_{i-1}+a_i+a_{i+1}+...+a_{j-1}+a_j+a_{j+1}+...+a_n\right)^2$$

$$=\left(a_1+...+a_{i-1}+a_{i+1}+...+a_{j-1}+a_{j+1}+...+a_n+\left(a_i+a_j\right)\right)^2$$

$$\le\left(1^2+...+1^2\right)\left(a_1^2+...+a_{i-1}^2+a_{i+1}^2+...+a_{j-1}^2+a_{j+1}^2+...+a_n^2+\left(a_i+a_j\right)^2\right)$$

ឬ $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\le(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2a_ia_j\right)$ ដែល $1\le i<j\le k$

ឬ $\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\le\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2a_ia_j\quad;\ \forall 1\le i<j\le n$

តែតាមសម្មតិកម្ម $A+\sum_{i=1}^{n}a_i^2<\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2$

គេបាន៖ $A+\sum_{i=1}^{n}a_i^2<\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2a_ia_j$

ដូច្នេះ $A<2a_ia_j$ ចំពោះ $\forall 1\le i<j\le n$ ។

លំហាត់ទី ៩៧៖ គ្រប់ឫសនៃពហុធា $P(x)=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+...+a_0$ សុទ្ធតែនៅចន្លោះ $]0;\ 1[$ ។ បើ $n\geq 3$ ស្រាយថា $S=\sum_{k=0}^{n-2}k.a_k>0$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

បើ $x_1;x_2;...;x_n\in]0;\ 1[$ ជាឫសនៃ $P(x)$ គេបាន៖

$$P(x)=X^n+X^{n-1}a_{n-1}+...+a_0=(X-x_1)(X-x_2)...(X-x_n)$$

ហេតុនេះ

$$P'(x)=nX^{n-1}+(n-1)a_{n-1}X^{n-2}+\sum_{i=1}^{n-2}i.a_i.X^{i-1}\quad (1)$$

និង $P'(x)=(X-x_1)...(X-x_{n-1})+(X-x_1)...(X-x_{n-2})(X-x_n)$

$$+...+(X-x_2)...(X-x_n)\quad (2)$$

តាម (1) និង (2) ហើយ ជំនួស $X=1$ គេបាន៖

$$n+(n-1)a_{n-1}+S=(1-x_1)...(1-x_{n-1})+(1-x_1)...(1-x_{n-2})(1-x_n)$$
$$+...+(1-x_2)...(1-x_n)\quad (3)$$

ដែលក្នុងនោះ $S=\sum_{i=0}^{n-2}i.a_i$

ម្យ៉ាងទៀត $\forall\ y_1;y_2;...;y_{n-1}\in]0;\ 1[$ យើងនឹងស្រាយថា៖

តាមកំណើន $\quad(1-y_1)...(1-y_{n-1})>1-y_1-...-y_{n-1}\quad (4)$

- បើ $n=3$ នោះ $(1-y_1)(1-y_2)(1-y_3)>1-y_1-y_2-y_3$ ពិត
- ឧបមាថា (4) ពិតរហូតដល់ $n=k$ គឺ

$$(1-y_1)...(1-y_k)>1-y_1-...-y_k$$

- យើងនឹងស្រាយថា (4) ពិតដល់ $n=k+1$

$$(1-y_1)\dots(1-y_k)(1-y_{k+1})>(1-y_1-\dots-y_k)(1-y_{k+1})$$
$$>1-y_1-\dots-y_k-y_{k+1}$$ ពិត

ដូច្នេះតាម (3) និង (4) គេបាន ៖

$$n-(n-1)(x_1+\dots+x_n)+S>n-(n-1)(x_1+\dots+x_n)\quad\Rightarrow S>0$$

ដូច្នេះ $S=\sum_{k=0}^{n-2}k.a_k>0$ ។

លំហាត់ទី ៩៨៖ រកគ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់៖

$\forall\ x;y\in\mathbb{R},\quad f(x-f(y))=f(x)+xf(y)+f(f(y))-1$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

តាមសម្មតិកម្ម $\forall\ x;y\in\mathbb{R},$

$$f(x-f(y))=f(x)+xf(y)+f(f(y))-1\qquad(i)$$

- យក $x=f(y)$ នោះ (i) ទៅជា៖

$$f(0)=f(f(y))+(f(y))^2+f(f(y))-1$$

នោះ $f(f(x))=\dfrac{a+1-(f(x))^2}{2};\quad\forall x\qquad(ii)$

ដែល $a=f(0)$

- យក $x=f(x)$ ជំនួសក្នុង (ii) នោះ $\forall x;\,y\in\mathbb{R}$ គេបាន៖

$$f(f(x)-f(y))=f(f(x))+f(x).f(y)+f(f(y))-1$$

ឬ $$f(f(x)-f(y))=a-\frac{1}{2}(f(x)-f(y))^2\qquad(iii)$$

យើងនិងបង្ហាញថា $f(x)-f(y)=m$ គ្រប់ $m\in\mathbb{R}$

• យក $y=y_0$ និង $f(y_0)=b\neq 0$ ជំនួសក្នុង (i)

(ព្រោះបើគ្មាន $y=y_0$ នោះ f ជាអនុគមន៍ថេរ ដែលមិនផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ(i))

នោះ $f(x_0-f(y_0))=f(x_0)+x_0f(y_0)+f(f(y_0))-1$

ឬ $f(x_0-b)-f(x_0)=bx_0+\dfrac{a-1-b^2}{2}\quad (iv)$

ដោយ $x_0\in\mathbb{R}$ នោះ $m=bx_0+\dfrac{a-1-b^2}{2}\in\mathbb{R}$

• យក $x=x_0-b$ និង $y=x_0$ នោះ (iii) និង(iv) គេបាន ៖

$$f(m)=a-\frac{m^2}{2};\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

• ជំនួស $f(x)$ ដោយ $a-\dfrac{x^2}{2}$ ក្នុង (ii) គេបាន $a=f(0)=1$

ដូច្នេះ $f(x)=1-\dfrac{x^2}{2};\quad \forall x\in\mathbb{R}$

លំហាត់ទី ៩៩៖ គេមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន $a_1<a_2<\ldots<a_n$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\leq 1$ ។ បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត $x>0$ គេបាន $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i^2+x}\right)^2\leq\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{a_1(a_1-1)+x}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

តាមវិសមភាព កូស៊ី-ស្វាត គេមាន៖

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2+x}\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(a_i^2+x)^2}\right)\le\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(a_i^2+x)^2}$$

ដូច្នេះគេគ្រាន់តែស្រាយថា $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(a_i^2+x)^2}\le\frac{1}{2}\frac{1}{a_1(a_1-1)+x}$

+ដោយ $(a_i^2-a_i+x)(a_i^2+a_i+x)\le(a_i^2+x)^2-a_i^2\le(a_i^2+x)^2$

នោះ $$\frac{2a_i}{(a_i^2+x)^2}\le\frac{2a_i}{(a_i^2-a_i+x)(a_i^2+a_i+x)}$$

$$=\frac{1}{a_i^2-a_i+x}-\frac{1}{a_i^2+a_i+x}$$

$$\le\frac{1}{a_i^2-a_i+x}-\frac{1}{a_{i+1}^2-a_{i+1}+x}$$

ព្រោះ (a_i) ជាស្វីតកើន នោះ $a_i(a_i+1)\le a_{i+1}(a_{i+1}-1)$

ដូច្នេះ $$\frac{a_1}{(a_i^2+x)^2}\le\frac{1}{2}\frac{1}{a_i(a_i-1)+x}-\frac{1}{2}\frac{1}{a_{i+1}(a_{i+1}-1)+x}$$

គេបាន $$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_1}{(a_i^2+x)^2}\le\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{a_i(a_i-1)+x}-\frac{1}{2}\frac{1}{a_{i+1}(a_{i+1}-1)+x}\right]$$

នោះ $$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_1}{(a_i^2+x)^2}\le\frac{1}{2}\frac{1}{a_1(a_1-1)+x}-\frac{1}{2}\frac{1}{a_{n+1}(a_{n+1}-1)+x}$$

ដូច្នេះ $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2+x}\right)^2 \le \frac{1}{2}\frac{1}{a_1(a_1-1)+x}$ ពិត។

លំហាត់ទី ១០០៖ គោលការណ៍ទ្រុងព្រាប

បើគេ $kn+1$ ព្រាប ទៅដាក់ក្នុង n ទ្រុង នោះមានទ្រុងមួយយ៉ាងតិចផ្ទុកព្រាប $k+1$ ក្នុងនោះ $k; n$ ជាចំនួនគត់ >0 ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

គេស្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើរផ្ទុយសម្មតិកម្ម

ឧបមាថាគ្មានទ្រុងណាមួយដែលមានព្រាបយ៉ាងតិច $k+1$

គេពិនិត្យ ៖

ទ្រុងទី១ ផ្ទុកព្រាប $\le k$

ទ្រុងទី២ ផ្ទុកព្រាប $\le k$

$\vdots \qquad \vdots$

ទ្រុងទីn ផ្ទុកព្រាប $\le k$

សរុបព្រាបគ្រប់ទ្រុង $\le kn$ ព្រាប

ផ្ទុយពីសម្មតិកម្មដែលថាមាន $kn+1$ ព្រាប

ដូច្នេះ មានទ្រុងមួយយ៉ាងតិចដែលផ្ទុកព្រាបយ៉ាងតិច $k+1$។

លំហាត់ទី ១០១៖ ចំពោះ $a_3;...;a_n \in \mathbb{R}$ មេគុណនៃពហុធា $P(x)$។

បង្ហាញថា $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_3x^3+x^2+x+1=0$

គ្មានឬសក្នុង $\mathbb{R}$ ទេ។

ដំណោះស្រាយ៖

តាង $r_1;r_2;...;r_n>0$ ជា n ឬសនៃ $P(x)=0$

ចែកអង្គសងខាងនៃ $P(x)=0$ នឹង x^n និងតាង $y=\dfrac{1}{x}$ នោះ

$$Q(x)=y^n+y^{n-1}+y^{n-2}+a_3y^{n-3}+...+a_{n-1}y+a_n=0$$

• បើ r ជាឬសនៃ $P(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{r}$ ជាឬសនៃ $Q(y)=0$

តាង $s_1;s_2;...;s_n$ ជាឬសនៃ $Q(y)=0$ ដែល $s_i=\dfrac{1}{r_i}; i=1;...;n$

នោះតាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត គេបាន៖

$$\sum_{i=1}^{n}s_i=-1 \quad \text{និង} \quad \sum_{i<j}s_is_j=1$$

ហេតុនេះ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}s_i^2=\left(\sum_{i=1}^{n}s_i\right)^2-2\sum_{i<j}s_is_j=1-2=-1$ មិនអាច

(ព្រោះ ផលបូកការេនៃចំនួនពិត s_i ត្រូវ≥ 0 ជានិច្ច)

ដូច្នេះ $P(x)$ គ្មានឬសក្នុង $\mathbb{R}$ ទេ។

លំហាត់ទី ១០២៖ រកគ្រប់គូចំនួនគត់ >0 $(m;\ n)$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $|3^m-2^n|=1$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

- បើ $m=1$ ឬ $m=2$ នោះ $(m;\ n)=(1;\ 1),\ (1;\ 2),\ (2;\ 3)$
- បើ $m>2$ និង $n>3$ យើងនឹងស្រាយថាសមីការគ្មានឬស

$$|3^m-2^n|=1 \iff 3^m-2^n=\pm1$$

\+ <u>ករណីទី១</u>៖ $3^m-2^n=-1$

នោះ $3^m\equiv-1[\bmod 8]$ $(*)$

(ព្រោះគ្រប់ $n>3;\quad 2^n\equiv0[\bmod 8]$)

តែ $3^m\equiv1[\bmod 8]$ បើ m គូ

និង $3^m\equiv3[\bmod 8]$ បើ m សេស

ហេតុនេះ $(*)$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ $\Rightarrow$ សមីការគ្មានឬសគត់

\+ <u>ករណីទី២</u>៖ $3^m-2^n=1;\ n>3$

នោះ $3^m\equiv1[\bmod 8]\Rightarrow m$ គូ $(**)$

(សម្រាយខាងលើ)

តាង $m=2k;\ k>1$ នោះ $2^n=3^{2k}-1=(3^k-1)(3^k+1)$

គេបាន $3^k-1=1$ និង $3^k+1=2^r$ ដែល $r>3$

នោះ $3^k-2^r=-1$ ដូចគ្នានឹង $(*)$ $\Rightarrow$ សមីការគ្មានឬស

លំហាត់ទី ១០៣៖ រកគ្រប់គូចំនួនគត់ >1 ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

(i) $\left|p^m - q^m\right| = 1$ ដែល p និង q ជាចំនួនបឋម។

ដំណោះស្រាយ៖

គេឃើញថា p និង q មិនសេសព្រមគ្នាទេ ព្រោះបើ p និង q សេសព្រមគ្នានោះ $p^m - q^m$ ជាចំនួនគត់គូ $\Rightarrow$ (i) គ្មានឫស

យើងនឹងស្រាយថា (*) មានឫសតែក្នុងករណីលំហាត់ទី១០២ គឺថា $\left|3^2 - 2^3\right| = 1$ ។

• ឧបមាថា $m;\ n > 1$ ដែល $\left|p^m - 2^n\right| = 1$

(ព្រោះចំនួនបឋមគូមានតែ 2 មួយគត់)

\+ <u>ករណីទី១</u>៖ m និង n គូព្រមគ្នា

យក $m = 2r$ និង $n = 2s$ គេបាន៖

$1 = \left|p^m - 2^n\right| = \left|p^{2r} - 2^{2s}\right| = \left|p^r - 2^s\right| . \left|p^r + 2^s\right|$ មិនអាច

ព្រោះ $p^r + 2^s > 1$

\+ <u>ករណីទី២</u>៖ m សេស និង n គូ

$2^n = p^m \pm 1 = (p \pm 1)(p^{m-1} \mp p^{m-2} + \ldots - p + 1)$ មិនអាច

(ព្រោះ $p^{m-1} \mp p^{m-2} + \ldots - p + 1$ ជាចំនួនសេស > 1)

\+ <u>ករណីទី៣</u>៖ m គូ និង n សេស

ឧបមាថា $m = 2^r k$ ដែល k សេស និង $k > 1$

$$2^n=p^m\pm1=\left(p^{2^r}\right)^k\pm1=\left(p^{2^r}\pm1\right)\left(\left(p^{2^r}\right)^{k-1}\pm...-\left(p^{2^r}\right)+1\right)$$

មិនអាចព្រោះ $\left(p^{2^r}\right)^{k-1}\pm...-\left(p^{2^r}\right)+1$ សេស

- ហេតុនេះ $m=2^r$ និង n សេស ហើយ (i) ទៅជា

$$\left|p^{2^r}-2^n\right|=1 \Leftrightarrow p^{2^r}-2^n=1 \text{ ឬ } p^{2^r}-2^n=-1$$

$\therefore$ ករណី $p^{2^r}-2^n=-1$ គេបាន

$$p^{2^r}=2^n-1=(2-1)\left(2^{n-1}+2^{n-2}+...+2+1\right)\equiv3(\text{mod } 4)$$

មិនអាច ព្រោះគ្រប់ចំនួនគត់សេស $x\Rightarrow x^2\equiv1[\text{mod } 4]$

$\therefore$ករណី $p^{2^r}-2^n=1$ គេបាន៖

$$2^n=p^{2^r}-1=\left(p^{2^{r-1}}-1\right)\left(p^{2^{r-1}}+1\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}p^{2^{r-1}}-1=2 & (1)\\ p^{2^{r-1}}+1=4 & (2)\end{cases}$$

យក $(1)+(2)\Rightarrow p^{2^{r-1}}=3$ នោះគេទាញបាន៖

$p=3;\ r=1;\ m=2$ និង $n=3$ ។

លំហាត់ទី ១០៤៖

រកឫសគត់នៃសមីការ៖ $xy+yz+zx=xyz+2 \quad (1)$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

ឧបមាថា $0<x\le y\le z$ ជាឫសគត់នៃ (1)

ចែកអង្គសងខាងនៃ(1) នឹងxyz គេបាន៖

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1+\frac{2}{xyz}$$

ឬ $$1<1+\frac{2}{xyz}=\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\le\frac{3}{x}$$

គេបាន $1<\frac{3}{x}\ \Rightarrow x<3$ នោះ $x=1$ ឬ $x=2$

• បើ $x=1$ នោះ $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{yz}\Rightarrow y=z=1$

ដូច្នេះ $(x;\ y;\ z)=(1;\ 1;\ 1)$

• បើ $x=2$ នោះ $\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}+\frac{1}{yz}$

ឬ $\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{yz}=\frac{1}{z}+\frac{1}{y}\le\frac{2}{y}\ \Rightarrow y<4\ \Leftrightarrow y\in\{1;\ 2;\ 3\}$

+ $y=1$ នោះ $\frac{1}{z}+1=\frac{1}{2}+\frac{1}{z}$ មិនអាច

+ $y=2$ នោះ $\frac{1}{z}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2z}$ មិនអាច

+ $y=3$ នោះ $z=4$ ដោយផ្ទើចម្លាស់នៃត្រីធាតុ

គេសរុបបាន៖ $(x;y;z)=(2;3;4),\ (2;4;3),\ (3;2;4),$ $(3;4;2),\ (4;2;3),\ (4;3;2)$ និង $(1;\ 1;\ 1)$។

លំហាត់ទី ១០៥៖ បង្ហាញថាស្វ៊ីត (x_n) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងកំណើន $x_{n+1}+x_{n-1}=\sqrt{2}x_n$ ជាស្វ៊ីតខួប។

ដំណោះស្រាយ៖

សមីការសម្គាល់នៃ $x_{n+1}+x_{n-1}=\sqrt{2}x_n$ គឺ $r^2-\sqrt{2}r+1=0$

ឬ $\left(r^2-\sqrt{2}r+1\right)\left(r^2+\sqrt{2}r+1\right)=\left(r^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}r\right)^2=r^4+1=0$

គេបាន $r^4=-1$ ឬ $r^8=1\Rightarrow r$ មានខួប $8 \quad (*)$។

$\therefore$បើ α និង β ជាឫសនៃសមីការសម្គាល់ $r^2-\sqrt{2}r+1=0$ នោះតួទៅនៃស្វ៊ីត (x_n) មានរាង $x_n=a\alpha^n+b\beta^n$ ដែល $a;b\in\mathbb{R}$ មានខួប 8 តាម $(*)$។

ដូច្នេះ (x_n) ជាស្វ៊ីតមានខួប 8។

លំហាត់ទី ១០៦៖ តាង $x_0=0$ និង $x_1;x_2;....;x_n>0$ ដែល $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=1$។ បង្ហាញថា ៖

$$(*)\qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{\sqrt{1+x_0+...+x_{k-1}}\sqrt{x_k+...+x_n}}<\frac{\pi}{2}$$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

គេមាន $x_1;x_2;....;x_n>0$ និង $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=1$

តាង $x_0+x_1+...+x_k=\sin a_k$ គ្រប់ $k=0;\ 1;.....;\ n$

ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_0=0<a_1<...<a_n=\dfrac{\pi}{2}$

$(*)$ ទៅជា៖ $$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin a_k-\sin a_{k-1}}{\sqrt{1+\sin a_{k-1}}\sqrt{1-\sin a_{k-1}}}<\frac{\pi}{2}\quad(**)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin a_k-\sin a_{k-1}}{\sqrt{1+\sin a_{k-1}}\sqrt{1-\sin a_{k-1}}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2\sin\frac{a_k-a_{k-1}}{2}.\cos\frac{a_k+a_{k-1}}{2}}{\cos a_{k-1}}$$

$$<\sum_{k=1}^{n}\frac{2\frac{a_k-a_{k-1}}{2}.\cos a_{k-1}}{\cos a_{k-1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k-a_{k-1}\right)=\frac{\pi}{2}$$

ហេតុនេះ $(**)$ ពិត។

(ព្រោះគ្រប់ $0<x\le\frac{\pi}{2}$ អនុគមន៍ $\cos x$ ចុះ និង $\sin x<x$)

លំហាត់ទី ១០៧៖ តាង $a_k=\dfrac{k}{(k-1)^{\frac{4}{3}}+k^{\frac{4}{3}}+(k+1)^{\frac{4}{3}}}$

បង្ហាញថា $\displaystyle\sum_{k=1}^{999}a_k<50$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

គេមាន $(k-1)^{\frac{2}{3}}(k+1)^{\frac{2}{3}}=\left(k^2-1\right)^{\frac{2}{3}}<\left(k^2\right)^{\frac{2}{3}}=k^{\frac{4}{3}}$

នោះ $a_k<\dfrac{k}{(k-1)^{\frac{4}{3}}+(k-1)^{\frac{2}{3}}(k+1)^{\frac{2}{3}}+(k+1)^{\frac{4}{3}}}$

ឬ $a_k < \dfrac{k\left[(k+1)^{\frac{2}{3}}-(k-1)^{\frac{2}{3}}\right]}{(k+1)^2-(k-1)^2} = \dfrac{1}{4}\left[(k+1)^{\frac{2}{3}}-(k-1)^{\frac{2}{3}}\right]$

ដូច្នេះ $\sum_{k=1}^{99} a_k < \dfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{999}\left[(k+1)^{\frac{2}{3}}-(k-1)^{\frac{2}{3}}\right]$

$$= \frac{1}{4}\left(1000^{\frac{2}{3}}+999^{\frac{2}{3}}-1^{\frac{2}{3}}-0^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$< \frac{1}{4}(100+100-1)=50$$

ដូច្នេះ $\sum_{k=1}^{999} a_k < 50$ ។

លំហាត់ទី ១០៨៖ ចំពោះ $a_i \in \mathbb{R};\ i=0;1;....;7$ ពហុធា $P(x)=x^{10}-10x^9+39x^8+a_7x^7+...+a_1x+a_0$ មានឫស 10 ក្នុងសំណុំចំនួនពិត។ បង្ហាញថា ឫសទាំង 10 របស់ $P(x)$ នៅចន្លោះ -2.5 និង 4.5 ។

ដំណោះស្រាយ៖

តាង $x_1;...;x_{10}$ ជាឫសទាំង10 នៃពហុធា $P(x)$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត គេបាន៖

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 10 \qquad \text{និង} \sum_{\substack{i;\ j=1\\ i<j}}^{10} x_i x_j = 39$$

ដោយ $\left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 + 2\sum_{\substack{i;\ j=1 \\ i<j}}^{10} x_i x_j$

នោះ $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 100 - 2.39 = 22$

ម្យ៉ាងទៀត $\sum_{i=1}^{10}(x_i-1)^2 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{10} x_i + \sum_{i=1}^{10} 1$

ឬ $\sum_{i=1}^{10}(x_i-1)^2 = 22 - 2.10 + 10 = 12$

គេបាន $(x_i-1)^2 \le 12 < (3.5)^2;\ \ \forall\ 1 \le i \le 10$

ហេតុនេះ $-2.5 < x_i < 4.5$ ដែល $1 \le i \le 10$ ។

លំហាត់ទី ១០៩៖ បើ $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ ជាផ្នែកទសភាគនៃ x

បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់ n នោះ $\sum_{k=1}^{n^2}\left\{\sqrt{k}\right\} \le \frac{n^2-1}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ៖

យើងស្រាយវិសមភាពនេះតាមកំណើន

- បើ $n = 1$ នោះ $0 \le 0$ ពិត ព្រោះ $\left\{\sqrt{1}\right\} = 0$
- យើងឧបមាថាវាពិតដល់ n គឺ $\sum_{k=1}^{n^2}\left\{\sqrt{k}\right\} \le \frac{n^2-1}{2}$ ពិត
- យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់ $n+1$

ដោយ $n<\sqrt{n^2+1};\sqrt{n^2+2};....;\sqrt{n^2+2n}<n+1$

គេបាន $\left\{\sqrt{n^2+i}\right\}=\sqrt{n^2+i}-n$

$$<\sqrt{n^2+i+\frac{i^2}{4n^2}}-n=\frac{i}{2n}$$

ហេតុនេះ $\sum_{k=1}^{(n+1)^2}\left\{\sqrt{k}\right\}=\sum_{k=1}^{n^2}\left\{\sqrt{k}\right\}+\sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2}\left\{\sqrt{k}\right\}$

$$<\frac{n^2-1}{2}+\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}i+\left\{\sqrt{(n+1)^2}\right\}$$

$$=\frac{n^2-1}{2}+\frac{2n+1}{2}+0$$

$$=\frac{(n+1)^2-1}{2}\text{ ពិត}$$

ដូច្នេះ $\sum_{k=1}^{n^2}\left\{\sqrt{k}\right\}\le\frac{n^2-1}{2}$ ។

លំហាត់ទី ១១០៖ រកគ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$(*):\quad f\left(x-f(y)\right)=1-x-y$$

ដំណោះស្រាយ៖

- យក $x=0;\ y=1$ នោះ $(*)\Leftrightarrow f\left(-f(1)\right)=0$
- យក $y=-f(-1)$ នោះ: $(*)\Rightarrow f\left(x-f\left(-f(1)\right)\right)=1-x+f(1)$

ឬ $f(x)=1+f(1)-x$

• យក $a=1+f(1)$ នោះ $f(x)=a-x$

នោះ $f(x-f(y))=a-x+f(y) \quad (**)$

តាម $(*)$ និង $(**)$ គេបាន៖

$$1-x-y=f(x-f(y))=a-x+f(y)=2a-x-y$$

$\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$ សមមូល $f(x)=\dfrac{1}{2}-x$ ។

ដូច្នេះ $f(x)=\dfrac{1}{2}-x$ ។

លំហាត់ទី ១១១៖ រកគ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x-1-f(x))=f(x)-x-1$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ និង $S=\left\{\dfrac{f(x)}{x}\;\middle|\; a\in\mathbb{R},\ x\neq 0\right\}$រាប់អស់ ។

ដំណោះស្រាយ៖

•ជាដំបូងយើងស្រាយថា $A=\{x-f(x)\mid x\in\mathbb{R}\}$ រាប់អស់

ឧបមាថា A រាប់មិនអស់ នោះ

$\forall k\neq 1;\ k\in\mathbb{R}$ គេបាន $x_k-f(x_k)=k$

តែ $\dfrac{f(k-1)}{k-1}=\dfrac{f(x_k-1-f(x_k))}{k-1}$

ឬ $\dfrac{f(k-1)}{k-1}=\dfrac{f(x_k)-x_k-1}{k-1}=-1-\dfrac{2}{k-1}$

ដោយ k មានច្រើនរាប់មិនអស់នោះ $\dfrac{f(k-1)}{k}$

ក៏មានច្រើនរាប់មិនអស់ដែរ ដែលផ្ទុយសម្មតិកម្ម

ហេតុនេះ $A=\{x-f(x)\mid x\in\mathbb{R}\}$ រាប់អស់។

- គេជ្រើសរើស $x=x_0$ ដែល $|x-f(x)|$ ធំបំផុត

នោះចំពោះ $y=x_0-1-f(x_0)$ គេបាន៖

$$y-f(y)=y-(f(x_0)-x-1)=2(x_0-f(x_0))$$

$$\Rightarrow y-f(y)=x_0-f(x_0)=0$$

ដូច្នេះ $f(x)=x;\ \forall x\in\mathbb{R}$។

លំហាត់ទី ១១២៖ ស្រាយថា៖ $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4...\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}<3$

ដំណោះស្រាយ៖

យើងពិនិត្យសមភាពខាងក្រោមនេះ

$$n=\sqrt{n^2}=\sqrt{1+n^2-1}=\sqrt{1+(n-1)(n+1)}$$

យក $n=2;\ 3;\ 4;....$

$$3=\sqrt{1+2(4)}$$
$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+3(5)}}$$

$$3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4(6)}}}$$

....

$$3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+...+(n-1)\sqrt{(n+1)^2}}}}$$

$$>\sqrt{2\sqrt{3....\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}$$

ដូច្នេះ $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4...\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}<3$ ។

លំហាត់ទី ១១៣៖ រកគ្រប់ចំនួនគត់ >0 ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\frac{x!+y!}{n!}=3$$

ដំណោះស្រាយ៖

សមីការអាចសរសេរជា $\frac{x!}{n!}+\frac{y!}{n!}=3 \quad (1)$

តាង $(x;\ y;\ n)$ ជាត្រីធាតុចម្លើយនៃ (1) ដែល $x\le y$

• <u>ករណីទី១</u> ៖ បើ $x<n$ និង $y<n$ នោះ $\frac{x!}{n!}<1$ និង $\frac{y!}{n!}<1$

ហេតុនេះ $\frac{x!}{n!}+\frac{y!}{n!}<2$

• <u>ករណីទី២</u> ៖ បើ $x<n$ និង $y>n$ នោះ $\frac{x!}{n!}<1<\frac{y!}{n!}$

ហេតុនេះ $\frac{x!}{n!}+\frac{y!}{n!}\notin \mathbb{N}$

•<u>ករណីទី៣</u> ៖ បើ $x>n$ និង $y\ge x$ នោះ $\frac{x!}{n!}+\frac{y!}{n!}\ge 4$

ព្រោះ $x>n$ នោះ $x\ge n+1$ និង $y\ge n+1$

ហេតុនេះ $\begin{cases}\frac{x!}{n!}\ge n+1\ge 2\\ \frac{y!}{n!}\ge n+1\ge 2\end{cases}\Rightarrow \frac{x!}{n!}+\frac{y!}{n!}\ge 4$ ពិត

តាមករណីទី១ ដល់ទី៣ គេបាន៖ $x=n$

នោះ $(1)\ \Leftrightarrow\ \frac{y!}{n!}=2\quad (2)$

ដោយ $\begin{cases}y\ge n+1\\ \frac{y!}{n!}\ge n+1\ge 2\end{cases}\Rightarrow (2)$ ទៅជា $\begin{cases}\frac{y!}{n!}=n+1\\ n+1=2\end{cases}$

គេទាញបាន $y=2;\ n=1$ និង $x=n=1$

ដូច្នេះ ត្រីធាតុចម្លើយគឺ $(x;y;n)=(1;2;1)$ ឬ $(2;1;1)$។

លំហាត់ទី ១១៤៖ រកគ្រប់អនុគមន៍ f ជាប់លើ $[0;1]$ ដែល

$$(*)\quad \begin{cases}f(0)=f(1)=0\\ 2.f(x)+f(y)=3.f\left(\frac{2x+y}{3}\right);\ \forall x;y\in[0;1]\end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ៖

• យក $x=0$ និង $y=1$ ជំនួសក្នុង $(*)$ គេបាន៖

$$2f(x)=3f\left(\frac{2x}{3}\right);\quad \forall x\in[0;\ 1]\quad (1)$$

និង $$2f(x)=3f\left(\frac{2x+1}{3}\right);\ \forall x\in[0;1]\quad (2)$$

ដោយ $f(x)$ កំណត់ និងជាប់លើ $[0;\ 1]$ នោះមាន $M\in\mathbb{R}$

ដែល $M=\max\limits_{x\in[0;\ 1]} f(x)=f(x_0)$ ដែល $x_0\in[0;\ 1]$

តែ $f(0)=f(1)=0$ នោះ $M\geq 0$

- <u>ករណីទី១</u>៖ ចំពោះ $x\in\left[0;\frac{2}{3}\right];\quad 0\leq\frac{3x_0}{2}\leq 1$

ពី $(1)\Leftrightarrow 2f\left(\frac{2x_0}{3}\right)=3f\left(\frac{2}{3}.\frac{3x_0}{2}\right)=3f(x_0)$

ឬ $M=f(x_0)=\frac{2}{3}f\left(\frac{3x_0}{2}\right)\leq\frac{2}{3}M\quad\Rightarrow M=0$

- <u>ករណីទី២</u>៖ ចំពោះ $x\in\left[\frac{2}{3};\ 1\right];\quad 0<\frac{3x_0-1}{2}\leq 1$

ពី $(2)\Rightarrow 2f\left(\frac{3x_0-1}{2}\right)=3f\left(\frac{2\frac{3x_0-1}{2}+1}{3}\right)=3f(x_0)$

ឬ $M=f(x_0)=\frac{2}{3}f\left(\frac{3x_0-1}{2}\right)\leq\frac{2}{3}M\quad\Rightarrow M=0$

សរុបករណីទី១ និងទី២ នោះ $M=0;\ \forall x\in[0;\ 1]$

ហើយ $f(x)\le 0;\ \forall x[0;\ 1]\quad (I)$

$\therefore$ ពិនិត្យអនុគមន៍ $g(x)=-f(x)$ លើ $[0;\ 1]$

បើ $f(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $(*)$ នោះ $g(x)$ ក៏ផ្ទៀងផ្ទាត់ $(*)$ ដែរ

ដោយ $f(x)\le 0$ តាម (I) នោះក៏ $g(x)\le 0;\ \forall x\in[0;\ 1]$

វិបាក៖ $f(x)\ge 0;\ \forall x\in[0;\ 1]\ (II)$

(ព្រោះ $g(0)=-f(0)=0$ និង $g(1)=-f(1)=0$ និង

$$-2f(x)-f(y)=-3f\left(\frac{2x+y}{3}\right)$$

ឬ $$2g(x)+g(y)=3f\left(\frac{2x+y}{3}\right)$$ ពិត)

តាម (I) និង (II) នោះ $f(x)=0;\ \forall x\in[0;1]$ ពិត។

សូមរង់ចាំអានភាគ២ជាបន្ត
ដែលមានវិធីសាស្ត្រណែនាំពី
ដំណោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី៣ និងទី៤

គន្ថនិទ្ទេស

[1] *ទីតូ អាន់ដ្រេស្គូ*; Putnam and Beyond; Springer; *ញូយ៉ក ឆ្នាំ២០០៧*

[2] *វី. អាយ ស្មៀនូវ*; A Course of Higher Mathematics *ភាគ១; រុស្ស៊ី ឆ្នាំ១៩៦៤*

[3] *អាឡិចសាន់ដឺ សូហ្វៃរ*; Mathematics as Problem Solving; *អាមេរិក ឆ្នាំ២០០៩*

[4] *អាន់ដ្រេ ណេហ្គាត់*; Problems for the Mathematical Olympiads from the first team selection test to the IMO; *រូម៉ានី ឆ្នាំ២០០៥*

[5] *ស៊ី. អ. ប្រ៉ានេសាកា-ប៊ី. ចេ. វេនកាតាចាឡា-ស៊ី. អេស. យ៉ូហ្គាណាដា*; Problem Primer for the Olympiad; *វិទ្យាស្ថានវិទ្យាសាស្ត្រឥណ្ឌា; ឆ្នាំ ២០០១*

[6] *ត្រឹស្តូហ្វឺ ចេ. ប្រេដលី;* Challenges in Geometry for Mathematical Olympians Past and Present; *អក់ ហ្វឺត ចក្រភពអង់គ្លេស ឆ្នាំ២០០៥*

[7] *លី ហាយចាវ និង លី ហាយខូយ*; Selected Problems Of The Vietnamese Mathematical Olympiad 1962-2009; *សិង្ហបុរី ឆ្នាំ២០០១០*

[8] *ហ្វ្រេដរិក ម៉ូស្តេឡឺ;* Fifty Challenging Problems In Probability; *ញូយ៉ក ឆ្នាំ១៩៦៥*

[9] *អិល. អេ. ហ្គ្រាហាំ;*Ingenious Mathematical Problems and Methods; *ញូយ៉ក ឆ្នាំ១៩៥៩*

[10] *ហ្សុង ប៊ីន និង លី ប៉េងយី* ;Mathematical Olympiad in China Problems and Solutions; *ចិន ឆ្នាំ២០០៧*

[11] *រ៉ូស ហុនស្ប៊ឺចឺ*; More Mathematical Morsels សមាគមន៍គណិតវិទ្យាអាមេរិក ឆ្នាំ១៩៩១

[12] *តឺរិន តៅ*; Solving Mathematical Problems A Personal Perspective; *សាកលវិទ្យាល័យកាលីហ្វញ៉ា ឆ្នាំ ២០០៦*

[13] *ចឺរ៉ាដ អេល. អេឡិចសាន់ដឺសាន់; ឡេអូណាត អេហ្វ. ក្លូស៊ីនស្គី; ឡូរិន ស៊ី. ឡាសុន;* The Putnam Mathematical Competition 1965-1984; *សមាគមន៍គណិតវិទ្យាអាមេរិក ឆ្នាំ១៩៨៥*

[14] *ទីទូ អាន់ដ្រេសស្គូ* ; Old And New Inequalities

[15] *អេដវ៉ាត ចេ. បាប៊ីយូ*; Canadian Mathematical Olympiad – 1969-1993; *សមាគមន៍គណិតវិទ្យា កាណាដា ឆ្នាំ ១៩៩៣*

[16] *ដេមីទ្រី ហ្វូមីន-សឺហ្គេយ ចិនគីន-អ៊ីលៀ វី. អ៊ីថេនបឺហ្គ* Mathematical Circles; Russian Experience; *សមាគមន៍គណិតវិទ្យាអាមេរិក ឆ្នាំ១៩៩៦*

[17] *អេច. ឡូឆ និងភី. ជេ. តាយឡឺ*; Australian Mathematical Olympiads 1979-1995; *អូស្ត្រាលី ឆ្នាំ១៩៩៧*