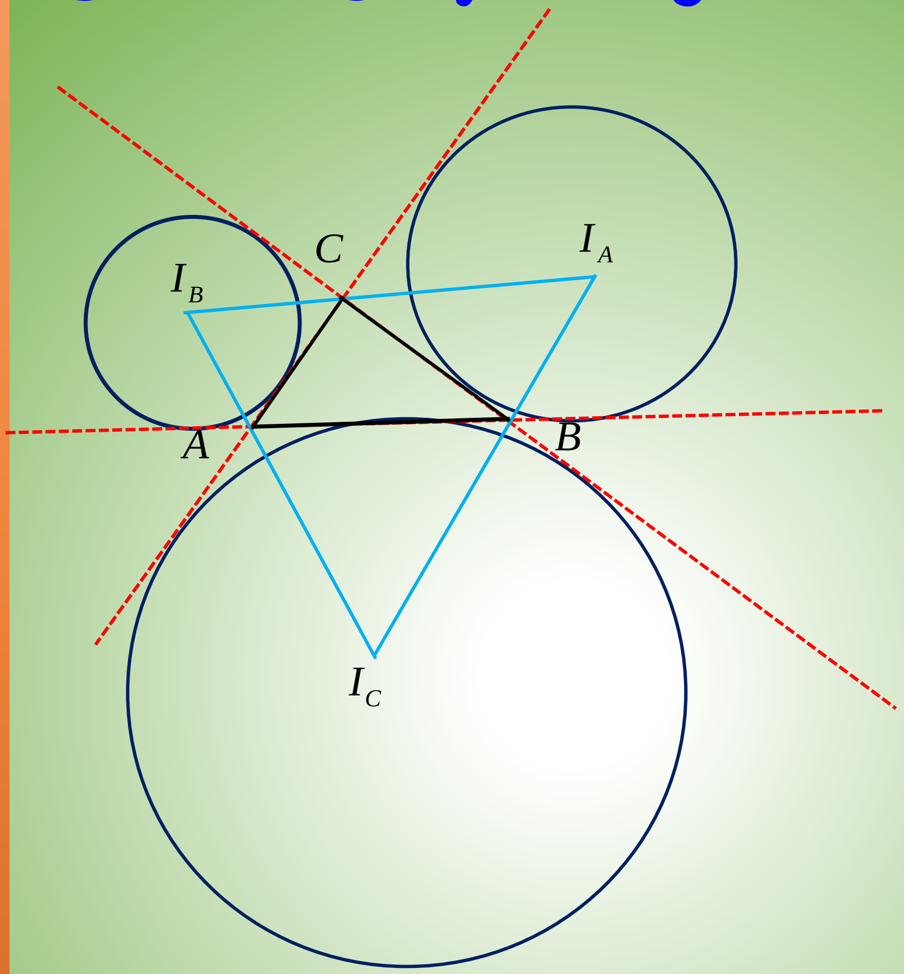
គណិតវិទ្យាសិស្សពូកែ

មធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ



រៀបរៀងដោយ នូ ច័ន្ទណារិទ្ធិ

រក្សាសិទ្ធិ

like us on facebook
បណ្ណាគារបាក់ទូក ॥

០១ គេអោយ $4\le k\le n$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $C_n^k+4.C_n^{k-1}+6.C_n^{k-2}+4.C_n^{k-3}+C_n^{k-4}=C_{n+4}^k$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $C_n^k+4.C_n^{k-1}+6.C_n^{k-2}+4.C_n^{k-3}+C_n^{k-4}=\left(C_n^k+C_n^{k-1}\right)+3\left(C_n^{k-1}+C_n^{k-2}\right)$

$+3\left(C_n^{k-2}+C_n^{k-3}\right)+\left(C_n^{k-3}+C_n^{k-4}\right)$

$=C_{n+1}^k+3.C_{n+1}^{k-1}+3.C_{n+1}^{k-2}+C_{n+1}^{k-3}$

$=\left(C_{n+1}^k+C_{n+1}^{k-1}\right)+2\left(C_{n+1}^{k-1}+C_{n+1}^{k-2}\right)+\left(C_{n+1}^{k-2}+C_{n+1}^{k-3}\right)$

$=C_{n+2}^k+2.C_{n+2}^{k-1}+C_{n+1}^{k-3}$

$=\left(C_{n+2}^k+C_{n+2}^{k-1}\right)+\left(C_{n+2}^{k-1}+C_{n+2}^{k-3}\right)$

$=C_{n+3}^k+C_{n+3}^{k-1}=C_{n+4}^k$ ពិត

០២ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+ac}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+ab}}\ge 1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $a=x^3,b=y^3$ និង $c=z^3$

យក $I=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+ac}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+ab}}$

$$I=\frac{x^3}{\sqrt{x^6+8y^3z^3}}+\frac{y^3}{\sqrt{y^6+8x^3z^3}}+\frac{z^3}{\sqrt{z^6+8x^3y^3}}$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2yz}{x^2}\right)^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2xz}{y^2}\right)^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x^3y^3}{z^2}\right)^3}}$$

ដោយ $1+\left(\dfrac{2yz}{x^2}\right)^3=\left(1+\dfrac{2yz}{x^2}\right)\left(1-\dfrac{2yz}{x^2}+\dfrac{4y^2z^2}{x^4}\right)$

តាមវិសមភាព AM-GM យើងបាន

$1+\left(\dfrac{2yz}{x^2}\right)^3\le\dfrac{x^4+y^2z^2}{x^4}$ នោះ $\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2yz}{x^2}\right)^3}}\ge\dfrac{x^4}{x^4+2y^2z^2}$

នាំអោយ $I \geq \frac{x^4}{x^4+y^4+z^4}+\frac{y^4}{x^4+y^4+z^4}+\frac{z^4}{x^4+y^4+z^4}$

នាំអោយ $I \geq 1$ ពិត

០៣ ឧបមាថា $a,b,c \in Z$ ហើយតាង $d=\gcd(a;b)$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

(1) សមីការ $ax+by=c$ មានចម្លើយកាលណា $d \mid c$ ។

(2) បើ x_0, y_0 ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការនេះ នោះចម្លើយទាំងអស់មានទម្រង់

$x=x_0+\frac{b}{d}t$, $y=y_0-\frac{b}{d}t$ ដែល $t \in Z$ ។

ដំណោះស្រាយ

(1) បើ $d=\gcd(a;b)$ នោះ $d \mid a$ និង $d \mid b$

$\Rightarrow a=dr$ និង $b=ds$ $,r,s$ ជាចំនួនគត់

បើ $x=x_0$ និង $y=y_0$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $ax+by=c$ នោះ $ax_0+by_0=c$

$\Rightarrow c=ax_0+by_0=drx_0+dsy_0=d(rx_0+sy_0)$

នាំអោយ $d \mid c$

ដូចនេះ សមីការ $ax+by=c$ មានចម្លើយកាលណា $d \mid c$

(2) បើ x_0, y_0 ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការនេះ នោះចម្លើយទាំងអស់មានទម្រង់

$x=x_0+\frac{b}{d}t$, $y=y_0-\frac{b}{d}t$ ដែល $t \in Z$

x_0, y_0 ជាចម្លើយនៃសមីការ $ax+by=c$ នោះ $ax_0+by_0=c$

បើ x', y' ជាចម្លើយផ្សេងទៀត នោះ $ax'+by'=c$

នាំអោយ $a(x_0-x')=b(y'-y_0)$ (1)

ដោយ $d=\gcd(a,b)$ នោះមានចំនួនគត់ r,s បឋមរវាងគ្នាដែល $a=dr$ និង $b=ds$

$\Rightarrow dr(x_0-x')=ds(y'-y_0)$

$\Rightarrow r(x_0-x')=s(y'-y_0)$

$\Rightarrow r \mid s(y'-y_0)$ ដែល $\gcd(r,s)=1$ (2)

តាម Euclid’s Lemma បើ $a \mid bc$ ហើយ $\gcd(a,b)=1$ នោះ $a \mid c$

នោះតាម (2) គេបាន $r \mid (y_0-y')$

នាំអោយ $y_0-y'=rt$ ចំពោះ $t \in Z$

នោះ $y'=y_0-rt$

ជំនួសចូល (1) យើងបាន $a(x_o-x')=b(-rt)$

$dr(x_0-x')=ds(-rt)$ នោះ $x'=x_0+st$

ដូចនេះ $x'=x_0+\left(\frac{b}{d}\right)t$ និង $y'=y_0-\left(\frac{a}{d}\right)t$ ដែល $t\in Z$

ផ្ទៀងផ្ទាត់បើ $x=x_0+\left(\frac{b}{d}\right)t$ និង $y=y_0-\left(\frac{a}{d}\right)t$

គេបាន $ax+by=a\left(x_0+\frac{b}{d}t\right)+b\left(y_0-\frac{a}{d}t\right)=ax_0+by_0=c$

០៤ តាង S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វីត $\{a_n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$S_n+a_n=\frac{n-1}{n(n+1)}$, $n=1,2,...$ ។ ចូររកតួទី n ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$

$$a_{n+1}=\frac{n}{(n+1)(n+2)}-a_{n+1}-\frac{n-1}{n(n+1)}+a_n$$

$$2a_{n+1}=\frac{n+2-2}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}+a_n$$

$$=\frac{-2}{(n+1)(n+2)}+a_n+\frac{1}{n(n+1)}$$

គេបាន $a_{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

យក $b_n=a_n+\frac{1}{n(n+1)}$ នោះ $b_{n+1}=a_{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

នាំអោយ $b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$ ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (b_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុង $q=\frac{1}{2}$ និង

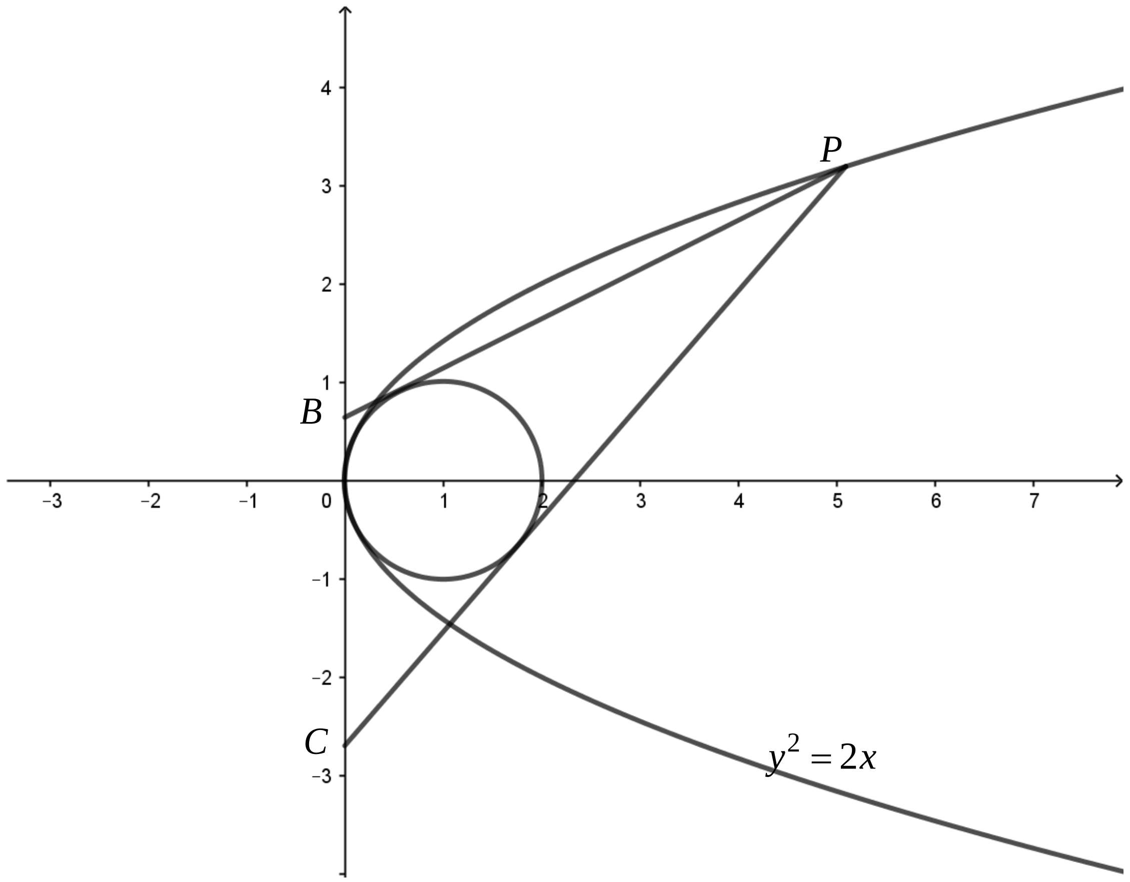
$b_1=a_1+\frac{1}{1.2}=0+\frac{1}{2}$

គេបាន $b_n=b_1.q^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ដូចនេះ $a_n=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{n(n+1)}$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

០៥ P ជាចំនុចមួយចល័តនៅលើប៉ារ៉ាបូល $y^2=2x$ ។ ចំណុច B និង C នៅលើអ័ក្ស y ហើយរង្វង់ $(x-1)^2+y^2=1$ ប៉ះខាងក្នុងទៅនឹងត្រីកោណ PBC ។ រកតម្លៃអប្បបរមាក្រឡាផ្ទៃ នៃត្រីកោណ ΔPBC ។



ដំណោះស្រាយ

តាង $P(x_0,y_0)$, $B(0,b)$ និង $C(0,c)$ ដែល $b>c$

សមីការបន្ទាត់ $(PB):\dfrac{y-b}{y_0-b}=\dfrac{x-0}{x_0-0}$

$$(PB): y-b=\frac{y_0-b}{x_0}.x$$

នោះ $(y_0-b)x-x_0y+x_0b=0$

ចម្ងាយពីផ្ចិតនៃរង្វង់ទៅបន្ទាត់ PB គឺ $d=1$

តែ $d=\dfrac{|y_0-b+x_0b|}{\sqrt{(y_0-b)^2+x_0^2}}$

នាំអោយ $\dfrac{|y_0-b+x_0b|}{\sqrt{(y_0-b)^2+x_0^2}}=1$

$\Rightarrow\ (y_0-b)^2+x_0^2=(y_0-b)^2+2(y_0-b)x_0b+x_0^2b^2$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

គេឃើញថា $x_0>2$ ហើយសមីការក្លាយជា $(x_0-2)b^2+2y_0b-x_0=0$

ដូចគ្នាដែរ $(x_0-2)c^2+2y_0c-x_0=0$

នាំអោយ $b+c=\frac{-2y_0}{x_0-2}$ និង $bc=\frac{-x_0}{x_0-2}$

យើងបាន $(b-c)^2=\frac{4x_0^2+4y_0^2-8x_0}{(x_0-2)^2}$

ដោយចំណុច $P(x_0,y_0)$ នៅលើប៉ារ៉ាបូល $y^2=2x$ នោះ $(b-c)^2=\frac{4x_0^2}{(x_0-2)^2}$

ឬ $b-c=\frac{2x_0}{x_0-2}$

ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ PBC គឺ $S_{\Delta PBC}=\frac{1}{2}(b-c)\times x_0$

$$=\frac{x_0}{x_0-2}\times x_0$$

$$=(x_0-2)+\frac{4}{x_0-2}+4$$

$S_{\Delta PBC}\geq 4+4=8$

សមភាពកើតមានកាលណា $x_0-2=2$ នោះ $x_0=4$, $y_0=\pm 2\sqrt{2}$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃអប្បបរមាគឺ $S_{\Delta PBC=8}$

០៦ តាង $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ និង $f^{(n)}(x)=\underbrace{f\left[f\left[f....\left[f(x)\right]\right]\right]}_{n}$ ។

ចូររក $f^{(99)}(1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f^{(1)}(x)=f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$f^{(2)}(x)=f\left[f^{(1)}(x)\right]=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

ស្រាយតាមលំនាំនេះបន្តទៀត យើងបាន $f^{(99)}(x)=\frac{x}{\sqrt{1+99x^2}}$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

ដូចនេះ $f^{(99)}(x)=\frac{1}{10}$

(០៧) គេអោយបន្ទាត់ $L:x+y-9=0$ និងរង្វង់ $M:2x^2+2y^2-8x-8y-1=0$ ។ ចំណុច A មួយនៅលើបន្ទាត់ L និង ចំណុច B,C នៅលើរង្វង់ M ហើយ $\angle BAC=45^0$ ។ បន្ទាត់ AB កាត់តាមផ្ចិតនៃរង្វង់ M ។ រកវ៉ង់នៃអាប់ស៊ីស x របស់ចំណុច A ។

ដំណោះស្រាយ

ចំណុច A នៅលើ $L:x+y-9=0$ នោះយើងយក $A(a,9-a)$

ចម្ងាយពីចំណុច M ទៅបន្ទាត់ AC គឺ $d=|AM|\times\sin\angle BAC$

$d=\sqrt{(a-2)^2+(9-a-2)^2}\times\sin 45^0$

$d=\sqrt{2a^2-18a+53}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\quad(1)$

បន្ទាត់ AC ប្រសព្វជាមួយរង្វង់ M នោះ $d\le R$ ដែល R ជាកាំនៃរង្វង់ (2)

រង្វង់ $M:x^2+y^2-4x-4y-\frac{1}{2}=0$

នោះ $M:(x-2)^2+(y-2)^2=\frac{17}{2}$

កាំរង្វង់ $R=\sqrt{\frac{17}{2}}\ (3)$

តាម $(1),(2)$ និង (3) គេបាន $\sqrt{2a^2-18a+53}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sqrt{\frac{17}{2}}$

ដោះស្រាយវិសមីការនេះ គេបាន $3\le a\le 6$

ដូចនេះ វ៉ង់នៃអាប់ស៊ីស x របស់ចំណុច គឺ $3\le a\le 6$

(០៨) វិសមភាព $f(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+1}<a-2017\frac{1}{3}$ ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។ តើតម្លៃតូចបំផុតនៃចំនួនគត់ a ស្មើនឹងប៉ុន្មាន ?

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ $f(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+1}$ ម៉ូណូតូនចុះ

នោះ $f(1)$ ជាតម្លៃធំបំផុតនៃ $f(n)$

បើ $n=1$ នោះ $f(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<a-2017\frac{1}{3}$

នាំអោយ $a>2018$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

ដូចនេះ $a=2019$ ជាចំនួនគត់តូចបំផុត

០៩ P និង Q ជាចំណុចនៅលើអេលីប $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ ,(a>b>0)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $OP\perp OQ$ ។ រកតម្លៃអតិបរមានៃផលគុណ $|OP|\times|OQ|$ ។

ដំណោះស្រាយ

យក $P\left(|OP|\cos\theta,|OP|\sin\theta\right)$ និង $Q\left(|OQ|\cos\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right),|OQ|\sin\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)\right)$

យើងមាន $\frac{1}{OP^2}=\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}$ និង $\frac{1}{OQ^2}=\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}$

នាំអោយ $\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

នោះផលគុណ $|OP|\times|OQ|$ មានតម្លៃអតិបរមា $\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$ ពេល $|OP|=|OQ|=\sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}$

១០ សមីការ $\lg kx=2\lg(x+1)$ មានរឹសតែមួយគត់ជាចំនួនគត់ ។ រកវ៉ង់នៃតម្លៃ k ។

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន $\begin{cases} kx>0 & (1)\\ x+1>0 & (2)\\ kx=(x+1)^2 & (3)\end{cases}$

តាម (3) $x^2+(2-k)x+1=0$

រឹសទាំងពីរគឺ $x_1,x_2=\frac{1}{2}\left[k-2\pm\sqrt{k^2-4k}\right]$ ដែល $\Delta=k^2-4k\geq 0$

$k\leq 0$ រឺ $k\geq 4$

(i) បើ $k<0$ នោះ $x_1+1>0,x_2+1<0$ ហើយ $kx_1>0$ ។ សមីការមានរឹសមួយ

$x_1=\frac{1}{2}\left[k-2+\sqrt{k^2-4k}\right]$

(ii) បើ $k=4$ សមីការមានរឹសមួយ $x=1$

(iii) បើ $k>0$ សមីការមានរឹសពីរ x_1,x_2 វិជ្ជមាន និង $x_1\neq x_2$ (មិនយក)

ដូចនេះ វ៉ង់តម្លៃ k គឺ $k<0$ និង $k=4$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

១១ បន្ទាត់ $l:y=kx+m$ (k,m ជាចំនួនគត់) ប្រសព្វជាមួយអេលីប $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា A និង Bរួចប្រសព្វនឹងអ៊ីពែបូល $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ ត្រង់ពីរចំណុចផ្សេងគ្នា C និង D ។ តើបន្ទាត់ l អាចផ្ទៀងផ្ទាត់ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=0$ ដែររឺទេ? បើអាច តើវាកើតឡើងបានប៉ុន្មានយ៉ាង? បើមិនអាច ចូរបញ្ជាក់មូលហេតុ?

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះ $\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1 \end{cases}$

យើងបាន $\frac{x^2}{16}+\frac{(kx+m)^2}{12}=1$

នាំអោយ $\left(3+4k^2\right)x^2+8kmx+4m^2-48=0$

យក $A(x_1,y_1)$ និង $B(x_2,y_2)$ នោះ $x_1+x_2=-\frac{8km}{3+4k^2}$

$\Delta_1=(8km)^2-4\left(3+4k^2\right)\left(4m^2-48\right)>0 \quad (1)$

ចំពោះ $\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1 \end{cases}$

យើងបាន $\frac{x^2}{4}-\frac{(kx+m)^2}{12}=1$

នាំអោយ $\left(3-k^2\right)x^2-2kmx-m^2-12=0$

យក $C(x_3,y_3)$ និង $D(x_4,y_4)$ នោះ $x_3+x_4=\frac{2km}{3-k^2}$

$\Delta_2=(-2km)^2+4\left(3-k^2\right)\left(m^2+12\right)>0 \ (2)$

បើ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=0$ នោះ $(x_4-x_2)+(x_3-x_1)=0$

នាំអោយ $x_1+x_2=x_3+x_4$

នាំអោយ $km=0$ ឬ $-\frac{4}{3+4k^2}=\frac{1}{3-k^2}$

• បើ $km=0$ នោះ $k=0$ឬ $m=0$

$a)$ បើ $k=0$ នោះតាម (1) និង (2) យើងបាន $-2\sqrt{3}<m<2\sqrt{3}$

តែ m ជាចំនួនគត់ នោះ m អាចយកតម្លៃ $-3,-2,-1,0,1,2,3$

$b)$ បើ $m=0$ នោះតាម (1) និង (3) យើងបាន $-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ॥

តែ k ជាចំនួនគត់ នោះ k អាចយកតម្លៃ $-1,0,1$
ដូចនេះ មានបន្ទាត់ l ចំនួន 9 ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ

(១២) p និង $q(q \neq 0)$ ជាចំនួនពិត ។ សមីការ $x^2 - px + q = 0$ មានរឹសពីរ α និង β ។ ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1 = p, a_2 = p^2 - q, a_n = pa_{n-1} - qa_{n-2}(n = 3,4,..)$ ។

ក) រកទម្រង់ទូទៅនៃ $\{a_n\}$ ជាអនុគមន៍នៃ α និង β ។

ខ) បើ $p = 1, q = \frac{1}{4}$ រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) រកទម្រង់ទូទៅនៃ $\{a_n\}$ ជាអនុគមន៍នៃ α និង β

តាមទ្រឹស្តីបទវៀែត $\alpha + \beta = p, \alpha\beta = q \neq 0$

គេបាន $a_n = pa_{n-1} - qa_{n-2}$

$$= (\alpha + \beta)a_{n-1} - \alpha\beta a_{n-2} \; (n = 3,4,...)$$

គេអាចសរសេរ $a_n - \beta a_{n-1} = \alpha(a_{n-1} - \beta a_{n-2})$

តាង $b_n = a_{n+1} - \beta a_n$ នោះ $b_{n+1} = \alpha b_n \; (n = 1,2,...)$

ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា (b_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុង α និងតួទី 1 គឺ

$$b_1 = a_2 - \beta a_1 = p^2 - q - \beta p = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta - \beta(\alpha + \beta) = \alpha^2$$

នាំអោយ $b_n = \alpha^2 \times \alpha^{n-1} = \alpha^{n+1} \quad (1)$

នាំអោយ $a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n+1}$ រឺ $a_{n+1} = \alpha^{n+1} + \beta a_n (n = 1,2,...)$

➢ បើ $\Delta = p^2 - 4q = 0$ យើងបាន $\alpha = \beta \neq 0, a_1 = p = 2\alpha$

នោះតាម (1) $a_{n+1} = \alpha^{n+1} + \alpha a_n$ ឬ $\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{a_n}{\alpha_n} = 1$

នាំអោយ $\left\{\frac{a_n}{\alpha^n}\right\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម 1 និងតួទី 1 គឺ $\frac{a_1}{\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha} = 2$

គេបាន $\frac{a_n}{\alpha^n} = 2 + 1(n-1)$ នោះ $a_n = n + 1$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ គឺ $a_n = (n+1)\alpha^n \quad (2)$

➢ បើ $\Delta > 0, \alpha \neq \beta$ យើងបាន $a_{n+1} = \alpha^{n+1} + \beta a_n$

$$= \beta a_n + \frac{\beta}{\beta - \alpha}\alpha^{n+1} - \frac{\alpha}{\beta - \alpha}\alpha^{n+1} \; (n = 1,2,...)$$

គេបាន $a_{n+1} + \frac{\alpha^{n+2}}{\beta - \alpha} = \beta\left(a_n + \frac{\alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}\right)$

នោះស្វ៊ីត $\left\{a_n+\frac{\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}\right\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុង β និងតួទី 1 គឺ

$$a_1+\frac{\alpha^2}{\beta-\alpha}=\alpha+\beta+\frac{\alpha^2}{\beta-\alpha}=\frac{\beta^2}{\beta-\alpha}$$

នាំអោយ $a_n+\frac{\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}=\frac{\beta^2}{\beta-\alpha}\cdot\beta^{n-1}$

ដូចនេះ តួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ គឺ $a_n=\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}\ (n=1,2,...)\quad(3)$

ខ) បើ $p=1,q=\frac{1}{4}$ រកផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$

បើ $p=1,q=\frac{1}{4}$ នោះ $\Delta=p^2-4q=0$ និង $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$

តាម (2) គេបាន $a_n=(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{n+1}{2^n}\ ,(n=1,2,3,...)$

ផលបូក n តួដំបូងគឺ $S_n=\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n+1}{2^n}$

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n+1}{2^{n+1}}$$

គេបាន $\frac{1}{2}S_n=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{2^{n+1}}$

ដូចនេះ $S_n=3-\frac{n+3}{2^n}$

របៀបទី ០២ សម្រាប់សំនួរ ក)

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត $\alpha\times\beta=q\neq0,\alpha+\beta=p$ នោះ $a_1=\alpha+\beta,a_2=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\quad(6)$

សមីការសំគាល់នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ គឺ $\lambda^2-p\lambda+q=0$ ដែលមានរឹស α និង β

យើងអាចកំណត់តួទូទៅនៃ $\{a_n\}$ ដូចតទៅ ៖

(i) បើ $\alpha=\beta\neq0$, $a_n=(A_1+A_2n)\alpha^n$

តាម (6) យើងបាន

$$(A_1+A_2)\alpha=2\alpha$$

$$(A_1+2A_2)\alpha^2=3\alpha^2$$

នាំអោយ $A_1=A_2=1$

ដូចនេះ តួទូទៅ $a_n=(n+1)\alpha^n$

(ii) បើ $\alpha\neq\beta$ នោះ $a_n=A_1\alpha^n+A_2\beta^n$

តាម (6) យើងបាន $A_1\alpha+A_2\beta=\alpha+\beta$

$$A_1\alpha^2+A_2\beta^2=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

នាំអោយ $A_1=\dfrac{-\alpha}{\beta-\alpha}$ និង $A_2=\dfrac{\beta}{\beta-\alpha}$

ដូចនេះ $a_n=\dfrac{-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}+\dfrac{\beta^{n+1}}{\beta-\alpha}=\dfrac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}$

១៣ រកតម្លៃអតិបរមា និង អប្បបរមានៃអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}+\sqrt{x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដែនកំណត់ $x\in[0;13]$

$$\begin{aligned}y&=\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}+\sqrt{x}\\&=\sqrt{x+27}+\sqrt{13+2\sqrt{x(13-x)}}\\&\geq\sqrt{27}+\sqrt{13}=3\sqrt{3}+\sqrt{13}\end{aligned}$$

នាំអោយ $\min(y)=3\sqrt{3}+\sqrt{13}$ ពេល $x=0$

ម្យ៉ាងទៀត តាមវិសមភាព Cauchy យើងបាន

$$\begin{aligned}y^2&=\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}\right)^2\\&\leq\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{3}\right)\left[2x+(x+27)+3(13-x)\right]\\&=121\end{aligned}$$

នាំអោយ $\max(y)=121$ ពេល $4x=9(13-x)$ ឬ $x=9$

១៤ រកវ៉ង់នៃអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{x-5}-\sqrt{24-3x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនលើដែនកំណត់ $[5;8]$

វ៉ង់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ គឺ $\left[-3;\sqrt{3}\right]$ ។

១៥ អនុគមន៍ $y=\left(a\cos^2x-3\right)\sin x$ មានអប្បបរមាស្មើ -3 ។ រកវ៉ង់នៃចំនួនពិត a ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $\sin x=t$ នោះ $g(t)=\left(-at^2+a-3\right)t$

ឬ $g(t)=-at^3+(a-3)t$

ដោយ $-at^3+(a-3)t\geq-3$ (អនុគមន៍មានអប្បបរមាស្មើ -3)

យើងបាន $-at\left(t^2-1\right)-3(t-1)\geq0$

$$(t-1)\left(-at(t+1)-3\right)\geq0$$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

ដោយ $t-1\le 0$ នោះ $-at(t+1)-3\le 0$

ឬ $a(t^2+t)\ge -3 \quad (1)$

ក) បើ $t=0,-1$ នោះ (1) ពិតជានិច្ច

ខ) បើ $0<t\le 1$ នោះ $0<t^2+t\le 2$

គ) បើ $-1<t<0$ នោះ $-\frac{1}{4}\le t^2+t<0$

ដូចនេះ $-\frac{3}{2}\le a\le 12$

១៦ រកចំនួនចំណុចគត់ (i.e. ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស x និង អរដោនេ y ជាចំនួនគត់) ដែលមាននៅក្នុងតំបន់ហ៊ុំព័ទ្ធដោយមែកស្តាំនៃអ៊ីពែបូល $x^2-y^2=1$ និង បន្ទាត់ $x=100$ (មិនរាប់បញ្ចូលចំណុចនៅលើព្រំដែនឡើយ) ។

ដំណោះស្រាយ

មែកស្តាំរបស់អ៊ីពែបូលឆ្លុះគ្នាធៀបអ័ក្សអាប់ស៊ីស នោះយើងគិតទៅលើចំណុចគត់ផ្នែកខាងលើអ័ក្ស $x'ox$

យើងសន្មត់ថាបន្ទាត់ $y=k$ ប្រសព្វជាមួយមែកស្តាំអ៊ីពែបូល និង បន្ទាត់ $x=100$ រៀងគ្នាត្រង់ចំណុច A_k និង B_k $(k=1,2,3,\cdots,99)$ ។

ចំនួនចំណុចគត់នៅលើបណ្តាអង្កត់ A_kB_k គឺ $99-k$

ដូច្នេះ ចំនួនចំណុចគត់នៅក្នុងផ្ទៃផ្នែកខាងលើអ័ក្សអាប់ស៊ីសមាន $\sum_{k=1}^{99}(99-k)=99\times 49=4851$

ដូចនេះ ចំនួនចំណុចគត់នៅក្នុងផ្ទៃសរុបមាន $2\times 4851+98=9800$

១៧ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួមមិនសូន្យ និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។ ស្វ៊ីតទាំងពីរផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1=3,b_1=1,a_2=b_2,3a_5=b_3$ ។ គេដឹងថាមានចំនួនថេរ α និង β ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេបាន $a_n=\log_\alpha b_n+\beta$ ។ ចូររក $\alpha+\beta$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង d ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ និង q ជារេសុងនៃស្វ៊ីត $\{b_n\}$

យើងបាន $\begin{cases} 3+d=q & (1) \\ 3(3+4d)=q^2 & (2) \end{cases}$

យក (1) ជំនួសចូល (2) យើងបាន $9+12d=d^2+6d+9$

នាំអោយ $d=6$ និង $q=9$

នោះ $a_n=a_1+(n-1)d=3+(n-1)\times 6=6n-3$

នោះ $b_n=b_1.q^{n-1}=1.9^{n-1}$

តែ $a_n=\log_\alpha b_n+\beta$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

នោះ $6n-3=\log_{\alpha} 9^{n-1}+\beta$ ឬ $6n-3=(n-1)\log_{\alpha} 9+\beta$ ពិតចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n

យក $n=1$ និង $n=2$ យើងបាន $\alpha=\sqrt[3]{3}$, $\beta=3$

ដូចនេះ $\alpha+\beta=\sqrt[3]{3}+3$

១៨ អនុគមន៍ $f(x)=a^{2x}+3a^{x}-2\ (a>0\ ,\ a\neq 1)$ មានតម្លៃអតិបរមាទៅដល់ 8 នៅក្នុងចន្លោះ $[-1,1]$ ។ រកតម្លៃអប្បបរមារបស់ f នៅក្នុងចន្លោះ $[-1,1]$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $a^{x}=y$ នោះអនុគមន៍ដើមក្លាយជា $g(y)=y^{2}+3y-2$

$g(y)$ ជាអនុគមន៍កើនលើ $\left(-\dfrac{3}{2};+\infty\right)$

បើ $0<a<1$ នោះ $y\in\left[a,a^{-1}\right]$ ហើយ $g(y)_{\max}=a^{-2}+3a^{-1}-2=8$

នាំអោយ $a^{-1}=2$ ឬ $a=\dfrac{1}{2}$

គេបាន $g(y)_{\min}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}+3\times\dfrac{1}{2}-2=-\dfrac{1}{4}$

បើ $a>1$ នោះ $y\in\left[a,a^{-1}\right]$ ហើយ $g(y)_{\max}=a^{2}+3a-2=2$

នាំអោយ $a=2$

គេបាន $g(y)_{\min}=2^{-2}+3\times 2^{-1}-2=-\dfrac{1}{4}$

សរុបមក តម្លៃអប្បបរមានៃ f ក្នុងចន្លោះ $[-1,1]$ គឺ $-\dfrac{1}{4}$

១៩ មនុស្សពីរនាក់បោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ម្តងពីរគ្រាប់តាមលំដាប់ ។ អ្នកដែលបោះបានផលបូកលេខច្រើនជាង 6 មុនគេជាអ្នកឈ្នះ ។ រកប្រូបាបដែលអ្នកបោះដំបូងជាអ្នកឈ្នះ ។

ដំណោះស្រាយ

ប្រូបាបដែលបោះបានផលបូកលេខច្រើនជាង 6 គឺ $\dfrac{21}{36}=\dfrac{7}{12}$

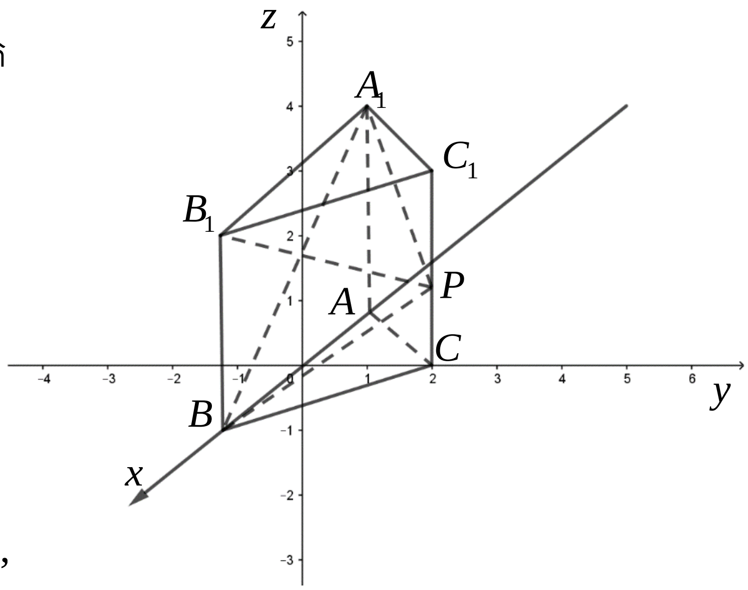
ដូចនេះ ប្រូបាបដែលអ្នកដំបូងឈ្នះគឺ $\dfrac{7}{12}+\left(\dfrac{5}{12}\right)^{2}\times\dfrac{7}{12}+\left(\dfrac{5}{12}\right)^{4}\times\dfrac{7}{12}+\cdots=\dfrac{7}{12}\times\dfrac{1}{1-\dfrac{25}{144}}=\dfrac{12}{17}$

២០ ប្រវែងទ្រនុងទាំង 9 នៃព្រីសត្រីមុខនិយ័ត $ABC-A_1B_1C_1$ ស្មើគ្នា ។ P ជាចំណុចកណ្តាលនៃ CC_1 ហើយមុំទ្វេមុខ $B-A_1P-B_1=\alpha$ ។ រក $\sin\alpha$ ។

ដំណោះស្រាយ

យកអ័ក្សអាប់ស៊ីស (x) ជាបន្ទាត់កាត់តាមអង្កត់ AB ដែល O ជាចំណុចកណ្តាល AB

យកអ័ក្សអរដោនេ (y) ជាបន្ទាត់កាត់តាមអង្កត់ OC ដើម្បីបង្កើតបានជាប្រព័ន្ធលំហកូអរដោនេចតុកោណ (ដូចរូប) ។



តាងប្រវែងទ្រនុងស្មើ 2 យើងបាន

$B(1,0,0)$, $B_1(1,0,2)$

$A_1(-1,0,2)$, $P\left(0,\sqrt{3},1\right)$

គេបាន $\overrightarrow{BA_1}=(-2,0,2)$, $\overrightarrow{BP}=\left(-1,\sqrt{3},\right.$

$\overrightarrow{B_1A_1}=(-2,0,0)$, $\overrightarrow{B_1P}=\left(-1,\sqrt{3},-1\right)$

តាងវ៉ិចទ័រ $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$ និង $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$ កែងទៅនឹង BA_1P និង B_1A_1P រៀងគ្នា

គេបាន $\begin{cases}\vec{m}.\overrightarrow{BA_1}=-2x_1+2z_1=0,\\ \vec{m}.\overrightarrow{BP}=-x_1+\sqrt{3}y_1+z_1=0\end{cases}$

$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{B_1A_1}=-2x_2=0,\\ \vec{n}.\overrightarrow{B_1P}=-x_2+\sqrt{3}y_2-z_2=0\end{cases}$

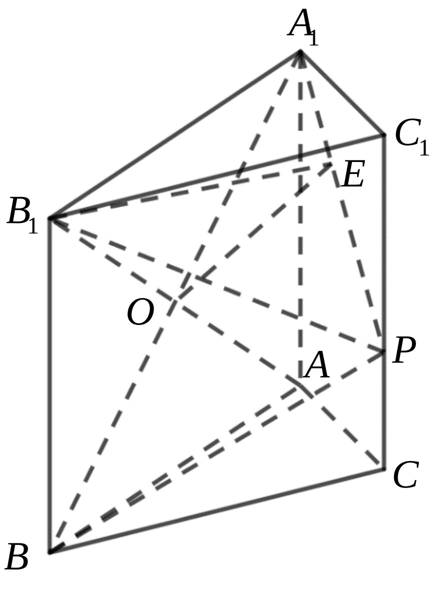
យើងទាញបាន $\vec{m}=(1,0,1)$ និង $\vec{n}=(0,1,3)$

ដោយ $\left|\vec{m}.\vec{n}\right|=\left|\vec{m}\right|.\left|\vec{n}\right|.\left|\cos\alpha\right|$ នោះ $\sqrt{3}=\sqrt{2}.2.\left|\cos\alpha\right|$

នាំអោយ $\left|\cos\alpha\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

ដូចនេះ $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

របៀបទី ២



យើងមាន $PC=PC_1, PA_1=PB$

តាង O ជាប្រសព្វរវាង A_1B និង AB_1

យើងបាន $OA_1=OB, OA=OB_1$, $A_1B\perp AB_1$

ដោយ $PA=PB_1$ នោះ $PO\perp AB_1$

នាំអោយ $AB_1\perp(PA_1B)$

នៅក្នុងប្លង់ (PA_1B) សង់បន្ទាត់ $OE\perp A_1P$

ភ្ជាប់ B_1E នោះ $\angle B_1EO$ ជាប្លង់មុំនៃមុំទ្វេមុខ $B-A_1P-B_1$

សន្មត់យក $AA_1=2$ គេបាន $PB=PA_1=\sqrt{5}$

$, A_1O=B_1O=\sqrt{2}, PO=\sqrt{3}$

នៅក្នុងត្រីកោណ PA_1O គេមាន $A_1O.PO = A_1P.OE$ ឬ $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{5}.OE$

នោះ $OE = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$

ដោយ $B_1O = \sqrt{2}$ នោះ $B_1E = \sqrt{B_1O^2 + OE^2} = \sqrt{2 + \dfrac{6}{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

$$\sin\alpha = \sin\angle B_1EO = \frac{B_1O}{B_1E} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{4\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

២១ គេមាន $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0)$ ហើយ $|f'(x)| \leq 1$ ។ រកតម្លៃអតិបរមានៃ a ។

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

នោះ $\begin{cases} f'(0) = c \\ f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}a + b + c \\ f'(1) = 3a + 2b + c \end{cases}$

នាំអោយ $3a = 2f'(0) + 2f'(1) - 4f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$

នោះ $3|a| = \left|2f'(0) + 2f'(1) - 4f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|$

$$\leq 2|f'(0)| + 2|f'(1)| + 4\left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq 8$$

នោះ $a \leq \dfrac{8}{3}$

ម្យ៉ាងទៀត $f(x) = \dfrac{8}{3}x^3 - 4x^2 + x + m$ (m ជាចំនួនថេរ) ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែលអោយមក

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមានៃ a គឺ $\dfrac{8}{3}$

របៀបទី ២

តាង $g(x) = f'(x) + 1$ នោះ $0 \leq g(x) \leq 2$ ចំពោះ $0 \leq x \leq 1$

យក $z = 2x - 1$ នោះ $x = \dfrac{z+1}{2}$ ហើយ $-1 \leq z \leq 1$

តាង $h(z) = g\left(\dfrac{z+1}{2}\right) = \dfrac{3a}{4}z^2 + \dfrac{3a+2b}{2}z + \dfrac{3a}{4} + b + c + 1$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

គេសង្កេតឃើញថា $0\le h(z)\le 2$ និង $0\le h(-z)\le 2$ ចំពោះ $-1\le z\le 1$

នាំអោយ $0\le \dfrac{h(z)+h(-z)}{2}\le 2$ ចំពោះ $-1\le z\le 1$

នោះ $0\le \dfrac{3a}{4}z^2+\dfrac{3a}{4}+b+c+1\le 2$

យើងទាញបាន $\dfrac{3a}{4}+b+c+1\ge 0$ និង $\dfrac{3a}{4}z^2\le 2$

ដោយ $0\le z^2\le 1$ យើងបាន $a\le \dfrac{8}{3}$

ម្យ៉ាងទៀត $f(x)=\dfrac{8}{3}x^3-4x^2+x+m$ (m ជាចំនួនថេរ) ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែលអោយមក

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមានៃ a គឺ $\dfrac{8}{3}$

២២ គេអោយចំណុចចល័តពីរ $A(x_1,y_1)$ និង $B(x_2,y_2)$នៅលើខ្សែកោងប៉ារ៉ាបូល $y^2=6x$ ដែល $x_1+x_2=4$ ហើយ $x_1\ne x_2$ ។ មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ AB កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច C ។ រកក្រឡាផ្ទៃធំបំផុតនៃ ΔABC ។

ដំណោះស្រាយ

តាង M ជាចំណុចកណ្តាលនៃ AB ដែល $M(x_0,y_0)$ នោះ $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=2$ និង $y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}$

យើងបាន $k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{6}-\frac{y_1^2}{6}}=\dfrac{6}{y_1+y_2}=\dfrac{3}{y_0}$

សមីការមេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ AB គឺ $y-y_0=-\dfrac{y_0}{3}(x-2)\quad (1)$

ដោយមេដ្យាទ័រកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសនត្រង់ C នោះ $y=0, x=5$

នាំអោយ $C(5,0)$

តាម (1) គេទាញបានសមីការបន្ទាត់ AB គឺ $y-y_0=\dfrac{3}{y_0}(x-2)$ ឬ $x=\dfrac{y_0}{3}(y-y_0)+2\quad (2)$

យក (2) ជំនួសចូល $y^2=6x$ គេបាន $y^2=2y_0(y-y_0)+12$

$y^2-2yy_0+2y_0^2-12=0\quad (3)$

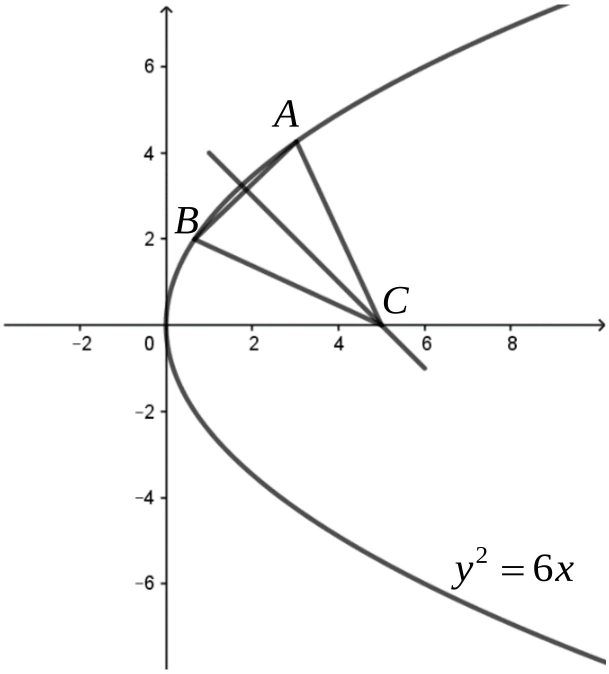
ដោយ y_1,y_2 ជាឫសនៃសមីការ (3) ហើយ $y_1\ne y_2$ យើងបាន

$\Delta=4y_0^2-4(2y_0^2-12)=-4y_0^2+48>0$

នោះ $-2\sqrt{3}<y_0<2\sqrt{3}$

យើងបាន

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ll



$$\begin{aligned}|AB| &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\\ &= \sqrt{\left(1+\left(\frac{y_0}{3}\right)^2\right)(y_1-y_2)^2}\\ &= \sqrt{\left(1+\frac{y_0^2}{9}\right)\left[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2\right]}\\ &= \sqrt{\left(1+\frac{y_0^2}{9}\right)\left(4y_0^2-4\left(2y_0^2-12\right)\right)}\\ &= \frac{2}{3}\sqrt{\left(9+y_0^2\right)\left(12-y_0^2\right)}\end{aligned}$$

ចម្ងាយពីចំណុច $C(5,0)$ ទៅអង្គត់ AB គឺ

$$h = |CM| = \sqrt{(5-2)^2+(0-y_0)^2} = \sqrt{9+y_0^2}$$

នាំអោយ $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|AB|.h = \frac{1}{3}\sqrt{\left(9+y_0^2\right)\left(12-y_0^2\right)}\cdot\sqrt{9+y_0^2}$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\left(9+y_0^2\right)\left(24-2y_0^2\right)\left(9+y_0^2\right)}\\ &\le \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{9+y_0^2+24-2y_0^2+9+y_0^2}{3}\right)^3}\\ &= \frac{14}{3}\sqrt{7}\end{aligned}$$

សមភាពកើតមានកាលណា $9+y_0^2 = 24-2y_0^2$ i.e. $y_0 = \pm\sqrt{5}$

យើងបាន $A\left(\frac{6+\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)$, $B\left(\frac{6-\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)$ និង

$A\left(\frac{6+\sqrt{35}}{3},-\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)\right), B\left(\frac{6-\sqrt{35}}{3},-\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)$

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមានៃក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC គឺ $\frac{14}{3}\sqrt{7}$

របៀបទី ០២

មេដ្យាទ័រនៃអង្គត់ AB កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុច $C(5;0)$

តាង $x_1 = t_1^2, x_2 = t_2^2, t_1 > t_2, t_1^2 + t_2^2 = 4$

ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC គឺ $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}5 & 0 & 1\\ t_1^2 & \sqrt{6}t_1 & 1\\ t_2^2 & \sqrt{6}t_2 & 1\end{vmatrix}$

នោះ $S_{\Delta ABC}^2=\left(\frac{1}{2}\left(5\sqrt{6}t_1+\sqrt{6}t_1^2t_2-\sqrt{6}t_1t_2^2-5\sqrt{6}t_2\right)\right)^2$

$$=\frac{3}{2}(t_1-t_2)^2(t_1t_2+5)^2$$

$$=\frac{3}{2}(4-2t_1t_2)^2(t_1t_2+5)(t_1t_2+5)$$

$$\le\frac{3}{2}\left(\frac{14}{3}\right)^3$$

នាំអោយ $S_{\Delta ABC}\le\frac{14}{3}\sqrt{7}$

សមភាពកើតមានកាលណា $(t_1-t_2)^2=t_1t_2+5$ និង $t_1^2+t_2^2=4$

គេបាន $t_1=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ និង $t_2=-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

នាំអោយ $A\left(\frac{6+\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)$, $B\left(\frac{6-\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)$ និង

$A\left(\frac{6+\sqrt{35}}{3},-\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)\right),B\left(\frac{6-\sqrt{35}}{3},-\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)$

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមានៃក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC គឺ $\frac{14}{3}\sqrt{7}$

២៣ ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $2x^3+5x-2=0$ មានរឹសតែមួយគត់តាងដោយ r ហើយមានស្វ៊ីតកើនដាច់ខាតតែមួយគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{2}{5}=r^{a_1}+r^{a_2}+r^{a_3}+\cdots$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $f(x)=2x^3+5x-2$ នោះ $f'(x)=6x^2+5>0$

មានន័យថា $f(x)$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត

ម្យ៉ាងទៀត $f(0)=-2<0$ និង $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}>0$

នេះបញ្ជាក់ថាសមីការ $2x^3+5x-2=0$ មានរឹសតែមួយគត់ $r\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

ដោយ r ជាឫសនៃសមីការ $2x^3+5x-2=0$ នោះ $2r^3+5r-2=0$

យើងបាន $\frac{2}{5}=\frac{r}{1-r^3}=r+r^4+r^7+r^{10}+\cdots$

នោះស្វ៊ីត $a_n=3n-2\ (n=1,2,\cdots)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌដែលសួររក

ឧបមាថាមានស្វ៊ីតចំនួនគត់វិជ្ជមានពីរ $a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$ និង $b_1<b_2<\cdots<b_n<\cdots$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $r^{a_1}+r^{a_2}+r^{a_3}+\cdots=r^{b_1}+r^{b_2}+r^{b_3}+\cdots=\frac{2}{5}$

សម្រួលតួណាដែលកើតមាននៅអង្គទាំងពីរនៃកន្សោមខាងលើ គេបាន

$r^{s_1}+r^{s_2}+r^{s_3}+\cdots=r^{t_1}+r^{t_2}+r^{t_3}+\cdots$ ដែល s_i និង t_1 ខុសពីគ្នា

យើងឧបមាដែរថា $s_1<t_1$ នោះ $r^{s_1}<r^{s_1}+r^{s_2}+\cdots=r^{t_1}+r^{t_2}+\cdots$

$$1<r^{t_1-s_1}+r^{t_2-s_1}+\cdots\le r+r^2+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-r}-1<\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1$$

នាំអោយ $1<1$ ផ្ទុយពីការពិត

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើនដាច់ខាតតែមួយគត់

(២៤) តាងសំណុំ $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ ។ គេដឹងថា សំណុំនៃផលបូកធាតុនៃសំណុំរងដែលមានបីធាតុ (ternary subsets) កើតចេញពីសំណុំ A គឺ $B=\{-1,3,5,8\}$ ។ ចូររកសំណុំ A ។

ដំណោះស្រាយ

សំណុំរងមានបីធាតុ នោះមានធាតុបីនៃសំណុំ A កើតឡើងនៅក្នុងសំណុំរងទាំងនោះ

គេបាន $3(a_1+a_2+a_3+a_4)=(-1)+3+5+8=15$

ឬ $a_1+a_2+a_3+a_4=5$

ធាតុទាំងបួននៃសំណុំ A មាន $5-(-1)=6, 5-3=2, 5-5=0$ និង $5-8=-3$

ដូចនេះ សំណុំ $A=\{-3,0,2,6\}$

(២៥) a និង b ជាចំនួនពិតដែល $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le 2\sqrt{2}$ និង $(a-b)^2=4(ab)^3$ ។

កំណត់ $\log_a b$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le 2\sqrt{2}$ នោះ $a+b\le 2\sqrt{2}ab$

តែ $(a+b)^2=4ab+(a-b)^2=4ab+4(ab)^3$
$$\ge 4.2\sqrt{ab.(ab)^3}=8(ab)^2$$

នាំអោយ $a+b\geq 2\sqrt{2}ab$ (1)

គេបាន $a+b=2\sqrt{2}ab$ (2)

តាម (1) សមភាពកើតមានកាលណា $ab=1$ ហើយតាម (2) យើងអាចរកបាន

$\begin{cases}a=\sqrt{2}-1\\ b=\sqrt{2}+1\end{cases}$ និង $\begin{cases}a=\sqrt{2}+1\\ b=\sqrt{2}-1\end{cases}$

ដូចនេះ $\log_a b=-1$

២៦ គេមានវិសមភាព $\cos^5\theta-\sin^5\theta<7\left(\sin^3\theta-\cos^3\theta\right)$, $\theta\in[0;2\pi)$ ។

រកវ៉ង់នៃ θ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាព $\cos^5\theta-\sin^5\theta<7\left(\sin^3\theta-\cos^3\theta\right)$

យើងបាន $\sin^3\theta+\frac{1}{7}\sin^5\theta>\cos^3\theta+\frac{1}{7}\cos^5\theta$

ដោយ $f(x)=x^3+\frac{1}{7}x^5$ កើនលើ $(-\infty;+\infty)$

នោះ $\sin\theta>\cos\theta$ ឬ $2k\pi+\frac{\pi}{4}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{4}\ (k\in Z)$

តែ $\theta\in[0;2\pi)$ នោះវ៉ង់នៃ θ គឺ

២៧ សិស្ស 7 នាក់នឹងត្រូវបានគណៈកម្មការកីឡារៀបចំអោយចូលរួមកម្មវិធីប្រកួត 5 ប្រភេទ ។ គេតម្រូវថា សិស្ស A និង B មិនអាចចូលរួមកម្មវិធីតែមួយទេ ។ គ្រប់កម្មវិធីប្រកួតត្រូវតែមានសិស្សយ៉ាងតិចម្នាក់ចូលរួម ។ សិស្សនិមួយៗត្រូវតែចូលរួមប្រកួតអោយបានមួយកម្មវិធី ហើយតែមួយកម្មវិធីគត់ ។ តើមានប៉ុន្មានរបៀបដើម្បីរៀបគម្រោងអោយត្រូវនឹងលក្ខខណ្ឌខាងលើនេះ ?

ដំណោះស្រាយ

មានពីរករណីដែលអាចរៀបចំបាន ដើម្បីអោយត្រូវចលក្ខខណ្ឌខាងលើ

(i). មានកម្មវិធីប្រកួតមួយ ដែលចូលរួមប្រកួតដោយសិស្សបីនាក់

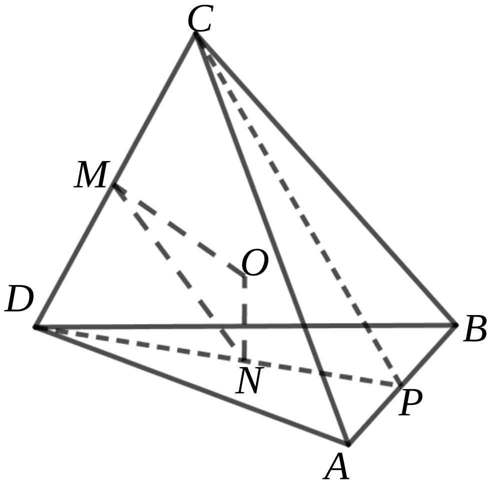
ក្នុងករណីនេះគេបាន $C_7^3.5!-C_5^1.5!=3600$

(ii). មានកម្មវិធីប្រកួតពីរ ដែលកម្មវិធីនិមួយៗចូលរួមដោយសិស្សពីររូប

ក្នុងករណីនេះ គេបាន $\frac{1}{2}\left(C_7^2.C_5^2\right).5!-C_5^2.5!=11400$

ដូចនេះ គម្រោងសរុបដែលអាចរៀបបានគឺ $3600+11400=15000$ របៀប

២៨ គេមានតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ។ គេដឹងថា $\angle ADB=\angle BDC=\angle CDA=60^0$, $AD=BD=3$ និង $CD=2$ ។ រករង្វាស់កាំនៃស្វ៊ែរចារិកក្រៅ $ABCD$ ។



ដំណោះស្រាយ

តាង O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្រៅ $ABCD$

នោះ O ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ឈរនៃប្លង់ ABD កាត់តាម

N ជាផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្រៅ ΔABD

គេដឹងថា ត្រីកោណ ABD សម័ង្ស នោះ N ជាផ្ចិត

តាង P និង N ជាំណុចកណ្តាលនៃ AB និង CD រៀងគ្នា

នោះ N នៅលើ DP ដែល $ON \perp DP$ និង $OM \perp CD$

តាង θ ជាមុំកំណត់ដោយបន្ទាត់ CD និងប្លង់ (ABD)

គេមាន $\angle CDA = \angle CDB = \angle ADB = 60^0$

គេបាន $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

ដោយ $DM = \dfrac{1}{2}CD = 1, DN = \dfrac{2}{3}\cdot DP = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3 = \sqrt{3}$

អនុវត្តទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស ក្នុងត្រីកោណ DMN យើងបាន

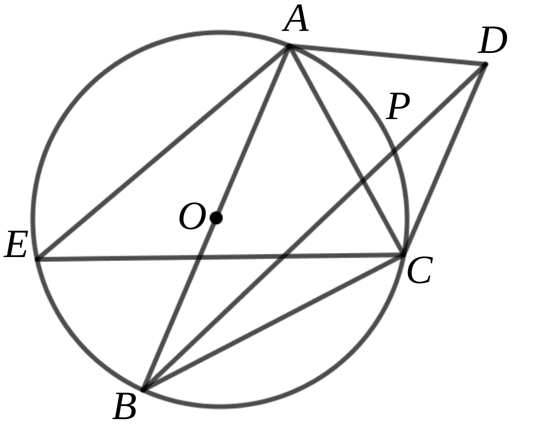
$$MN^2 = DM^2 + DN^2 - 2\cdot DM\cdot DN\cdot\cos\theta$$

$$= 1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2.1.\sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}} = 2$$

$MN = \sqrt{2}$ នោះកាំស្វ៊ែរចារិកក្រៅ $ABCD$ គឺ $OD = \dfrac{MN}{\sin\theta} = \dfrac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$

ដូចនេះ $R = \sqrt{3}$

២៩ $ABCD$ ជាចតុកោណប៉ោងដែលមាន $\angle B + \angle D < 180^0$ (ដូចរូប) ។ P ជាចំណុចមួយចល័ត នៅក្នុងប្លង់ ។ តាង $f(P) = PA\times BC + PD\times CA + PC\times AB$ ។



ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា P, A, B, C នៅលើរង្វង់តែមួយកាលណា $f(P)$ ខិតទៅរកតម្លៃអប្បរមា ។

ខ) E ជាចំណុចមួយនៅលើធ្នូ AB នៃរង្វង់ផ្ចិត O ដែលចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{AE}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{BC}{EC}=\sqrt{3}-1,\angle ECB=\frac{1}{2}\angle ECA$ ហើយ DA,DC ប៉ះនឹងរង្វង់ផ្ចិត O ប្រវែង $AC=\sqrt{2}$ ។ រកតម្លៃអប្បបរមានៃ $f(P)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា P,A,B,C នៅលើរង្វង់តែមួយកាលណា $f(P)$ ខិតទៅរកតម្លៃអប្បរមា

តាមរូប យើងប្រើវិសមភាព Ptolemy គឺ $PA\times BC+PC\times AB\geq PB\times AC$

នោះ $f(P)=PA\times BC+PC\times AB+PD\times AC$

$\geq PB\times CA+PD\times CA$

$=(PB+PD)\times CA$

សមភាពកើតមានកាលណាចំណុច P,A,B,C នៅលើរង្វង់ផ្ចិត O ហើយ P នៅលើធ្នូ AC (1)

ម្យ៉ាងទៀត $PB+PD\geq BD$ សមភាពកើតមានកាលណា P នៅលើបន្ទាត់ BD (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន $f(P)_{\min}=BD\times CA$

ដូចនេះ P,A,B,C នៅលើរង្វង់តែមួយកាលណា $f(P)$ ខិតទៅរកតម្លៃអប្បរមា

ខ) រកតម្លៃអប្បបរមានៃ $f(P)$

តាង $\angle ECB=\alpha$ នោះ $\angle ECA=2\alpha$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស យើងបាន $\frac{AE}{AB}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

នោះ $\sqrt{3}\sin 3\alpha=2\sin 2\alpha$

$\sqrt{3}\left(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\right)=4\sin\alpha\cos\alpha$

សម្រួលរួចយើងបាន $3\sqrt{3}-4\sqrt{3}\left(1-\cos^2\alpha\right)-4\cos\alpha=0$

ឬ $4\sqrt{3}\cos^2\alpha-4\cos\alpha-\sqrt{3}=0$

គេបាន $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $\cos\alpha=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (មិនយក)

នាំអោយ $\alpha=30^0$ និង $\angle ECA=60^0$

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{BC}{EC}=\sqrt{3}-1=\frac{\sin\left(\angle EAC-30^0\right)}{\sin\angle EAC}$

នោះ $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\angle EAC-\frac{1}{2}\cos\angle EAC=\left(\sqrt{3}-1\right)\sin\angle EAC$

$\frac{2-\sqrt{3}}{2}\sin\angle EAC=\frac{1}{2}\cos\angle EAC$

នាំអោយ $\tan\angle EAC = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$

យើងបាន $\angle EAC = 75^0$ និង $\angle AEC = 45^0$

ដោយត្រីកោណ ADC សមបាត និង $AC=\sqrt{2}$ យើងបានត្រីកោណសមបាត ABC ដែលមាន $BC=\sqrt{2}$ និង $AB=2$

គេមាន $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 4+1=5$

$BD=5$

នាំអោយ $f(P)_{\min} = BD\times CA = \sqrt{5}\times\sqrt{2} = \sqrt{10}$

៣០ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ខួបដែលមានខួប T និង 1 ហើយ $0<T<1$ ។
ស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

ក) បើ T ជាចំនួនសនិទាន នោះមានចំនួនបឋម p មួយដែល $\dfrac{1}{p}$ ជាខួបនៃ $f(x)$ ។

ខ) បើ T ជាចំនួនអសនិទាន នោះមានស្វ៊ីតនៃចំនួនអសនិទាន $\{a_n\}$ មួយផ្ទៀងផ្ទាត់ $1>a_n>a_{n+1}>0\ (n=1,2,\cdots)$ ហើយ a_n និមួយៗជាខួបនៃ $f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) បើ T ជាចំនួនសនិទាន នោះមានចំនួនបឋម p មួយដែល $\dfrac{1}{p}$ ជាខួបនៃ $f(x)$

T ជាចំនួនសនិទាន នោះ $T=\dfrac{m}{n}$ ដែល m,n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និង $(m,n)=1$

មានពីរចំនួនគត់ a និង b ដែល $ma+nb=1$

គេបាន $\dfrac{1}{m} = \dfrac{ma+nb}{m} = a\times 1 + b\times T$ ក៏ជាខួបនៃ $f(x)$

ម្យ៉ាងទៀត $m\ge 2$ ព្រោះ $0<T<1$

នោះ $m=pm'$ ដែល p ជាចំនួនបឋម

នាំអោយ $\dfrac{1}{p} = m'\times\dfrac{1}{m}$ ជាខួបនៃអនុគមន៍ $f(x)$

ខ) បើ T ជាចំនួនអសនិទាន នោះមានស្វ៊ីតនៃចំនួនអសនិទាន $\{a_n\}$ មួយផ្ទៀងផ្ទាត់ $1>a_n>a_{n+1}>0\ (n=1,2,\cdots)$ ហើយ a_n និមួយៗជាខួបនៃ $f(x)$

បើ T អសនិទាន គេតាង $a_1 = 1-\left[\dfrac{1}{T}\right]\times T$

នោះ $0<a_1<1$ និង a_1 អសនិទាន

យើងកំណត់ទំនាក់ទំនងកំណើន $a_{n+1} = 1-\left[\dfrac{1}{a_n}\right]\times a_n$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

តាមកំណើន a_n និមួយៗអសនិទាន និង $o<a_n<1$

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{1}{a_n}-\left[\frac{1}{a_n}\right]<1$

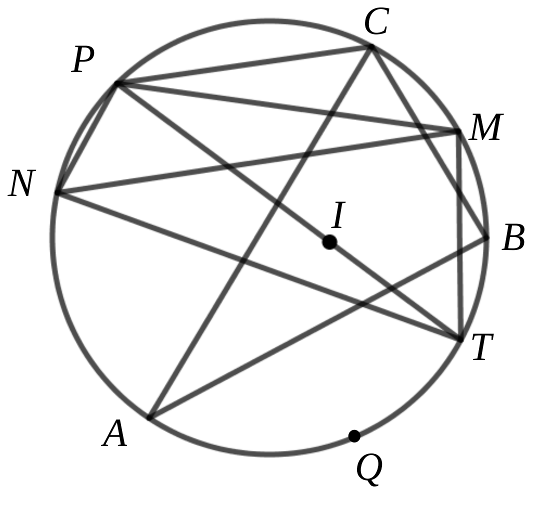
គេបាន $1<a_n+\left[\frac{1}{a_n}\right]\times a_n$

នោះ $a_{n+1}=1-\left[\frac{1}{a_n}\right]\times a_n<a_n$

ស៊ីត $\{a_n\}$ ជាស៊ីតចុះ

យើងអាចស្រាយតាមនិយមន័យនៃ $\{a_n\}$ និងតាមវិចារកំណើន a_n និមួយៗជាខួបនៃ $f(x)$

(៣១) M,N ជាចំណុចកណ្ដាលនៃធ្នូ BC,AC រៀងគ្នា (មើលរូប) ដែលនៅលើរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណមានមុំស្រួច ABC $(\angle A<\angle B)$ ។ តាមចំណុច C គូស $PC\parallel MN$ ប្រសព្វជាមួយរង្វង់ Γ ត្រង់ចំណុច P ។ I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ។ បន្លាយ PI អោយជួប Γ ត្រង់ចំណុច T ។

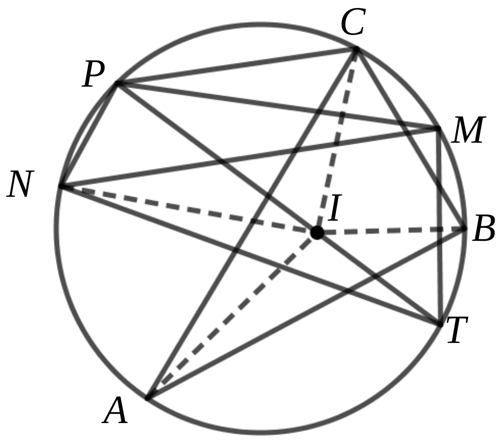


ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $MP\times MT=NP\times NT$ ។

ខ) Q ជាចំណុចសេរី $(\neq A,T,B)$ នៅលើធ្នូ AB (មិនមានចំណុច C) តាងផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ $\Delta AQC,\Delta QCB$ ដោយ I_1,I_2 រៀងគ្នា ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា Q,I_1,I_2,T ស្ថិតនៅលើរង្វង់តែមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II



ភ្ជាប់ NI និង MI

ដោយ $PC \parallel MN$ ហើយ P, C, M, N នៅលើរង្វង់តែមួយ នោះ $PCMN$ ជាចតុកោណព្នាយសមបាត

នាំអោយ $NP = MC, PM = NC$

ភ្ជាប់ AM, CI នោះ AM ប្រសព្វ CI ត្រង់ I

យើងបាន $\angle MIC = \angle MAC + \angle ACI$

$$= \angle MCB + \angle BCI$$

$$= \angle MCI$$

នាំអោយ $MC = MI$

ដូចគ្នាដែរ $NC = NI$

គេបាន $NP = MI, PM = NI$ នោះ $MPNI$ ជាប្រលេឡូក្រាម

$S_{\Delta PMT} = S_{\Delta PNT}$ (បាតនិងកម្ពស់រួម)

ម្យ៉ាងទៀត $\angle TNP + \angle PMT = 180^0$ នោះ P, N, T, M នៅលើរង្វង់តែមួយ

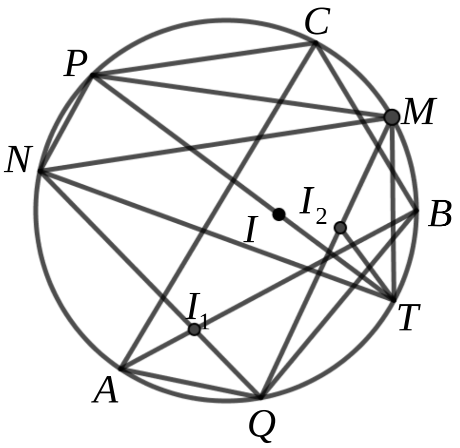
យើងបាន $S_{\Delta PMT} = \frac{1}{2} PM \times MT \sin \angle PMT$

$$= S_{\Delta PNT} = \frac{1}{2} PN \times NT \sin \angle PNT$$

$$= \frac{1}{2} PN \times NT \sin \angle PMT$$

ដូចនេះ $MP \times MT = NP \times NT$

ខ) ស្រាយបញ្ជាក់ថា Q, I_1, I_2, P នៅលើរង្វង់តែមួយ



យើងមាន $\angle NCI_1 = \angle NCA + \angle ACI_1$

$= \angle NQC + \angle QCI_1 = \angle CI_1N$

នាំអោយ $NC = NI_1$

ដូចគ្នាដែរ $MC = MI_2$

តាមសំនួរ ក) យើងដឹងថា $MP = NC, NP = MC$ នោះ $\frac{NT}{NI_1} = \frac{MT}{MI_2}$

នាំអោយ $\angle I_1NT = \angle QNT = \angle QMT = \angle I_1MT$

គេបាន $\Delta I_1NT \sim \Delta I_2MT$

វិបាក $\angle NTI_1 = \angle MTI_2$

យើងបាន $\angle I_1QI_2 = \angle NQM = \angle NTM = \angle I_1TI_2$

ដូចនេះ ចំណុច Q, I_1, I_2, T នៅលើរង្វង់តែមួយ

៣២ បន្ទាត់ $x - 2y - 1 = 0$ និងបារ៉ាបូល $y^2 = 4x$ កាត់គ្នាត្រង់ពីរចំណុច A និង B ។ ចំណុច C នៅលើប៉ារ៉ាបូល ហើយ $\angle ACB = 90^0$ ។ រកកូអរដោនេនៃចំណុច C ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ និង $C(t^2, 2t)$

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ និង ប៉ារ៉ាបូលគឺ

$$y^2 - 8y - 4 = 0$$

នោះ $y_1 + y_2 = 8, y_1.y_2 = -4$

ដោយ $x_1 = 2y_1 + 1$, $x_2 = 2y_2 + 1$

$x_1 + x_2 = 2(y_1 + y_2) + 2 = 18$

$x_1.x_2 = 4y_1y_2 + 2(y_1 + y_2) + 1 = 1$

ម្យ៉ាងទៀត $\angle ACB = 90^0$ នោះ $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0$

នាំអោយ $\left(t^2-x_1\right)\left(t^2-x_2\right)+\left(2t-y_1\right)\left(2t-y_2\right)=0$

$t^4-\left(x_1+x_2\right)t^2+x_1\cdot x_2+4t^2-2\left(y_1+y_2\right)t+y_1\cdot y_2=0$

$t^4-14t^2-16t-3=0$

$\left(t^2+4t+3\right)\left(t^2-4t-1\right)=0$

តែ $t^2-4t-1\neq 0$ ហើយបើ $t^2-2.2t-1=0$ នោះចំណុច C នៅលើបន្ទាត់ $x-2y-1=0$ ហើយអាចត្រួតស៊ីគ្នាជាមួយនឹង A ឬ B ដែលជាករណីមិនអាច

គេបាន $t^2+4t+3=0$

$t_1=-1,t_2=-3$

ដូចនេះ កូអរដោនេចំណុច $C(1,-2)$ ឬ $C(9,-6)$

៣៣ គេអោយ a,b,c,x,y,z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=x+y+z$ និង $abc=xyz$ ។ ឧបមាថា $a\leq x<y<z\leq c$ និង $a<b<c$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a=x,b=y$ និង $c=z$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)-(t-a)(t-b)(t-c)$

នោះ $f(t)=kt$ ដែល k ជាចំនួនថេរ

គេមាន $ka=f(a)=(a-x)(a-y)(a-z)\leq 0$

$kc=f(c)=(c-x)(c-y)(c-z)\geq 0$

នាំអោយ $k=0$ ហើយ $f(a)=f(c)=0$

គេទាញបាន $a=x,c=z$ និង $b=y$

៣៤ គេមាន $f(x)=\left|\lg(x+1)\right|$ ហើយចំនួនពិត a និង $b\ (a<b)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(a)=f\left(-\dfrac{b+1}{b+2}\right)$, $f(10a+6b+21)=4\lg 2$ ។ ចូររកតម្លៃ a និង b ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $f(a)=f\left(-\dfrac{b+1}{b+2}\right)$

នោះ $\left|\lg(a+1)\right|=\left|\lg\left(-\dfrac{b+1}{b+2}+1\right)\right|=\left|\log\left(\dfrac{1}{b+2}\right)\right|=\left|\lg(b+2)\right|$

គេទាញបាន $a+1=b+2$ រឺ $(a+1)(b+2)=1$

តែ $a<b$ នោះ $a+1\neq b+2$

នាំអោយ $(a+1)(b+2)=1$

ដោយ $0<a+1$ ព្រោះ $f(a)=\left|\lg(a+1)\right|$

នោះ $0<a+1<b+1<b+2$

នាំអោយ $0<a+1<a<b+2$

គេបាន $(10a+6b+21)+1=10(a+1)+6(b+2)$

$$=6(b+2)+\frac{10}{b+2}>1$$

នោះ $f(10a+6b+21)=\left|\log\left[6(b+2)+\frac{10}{b+2}\right]\right|$

$$=\lg\left[6(b+2)+\frac{10}{b+2}\right]$$

តែ $\lg\left[6(b+2)+\frac{10}{b+2}\right]=4\lg 2$

យើងបាន $6(b+2)+\frac{10}{b+2}=16$ នោះ $b=-\frac{1}{3}$ និង $b=-1$ (មិនយក)

ចំពោះ $b=-\frac{1}{3}$ នោះ $a=-\frac{2}{5}$

ដូចនេះ $a=-\frac{2}{5}$, $b=-\frac{1}{3}$

៣៥ ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_1=2t-3\ (t\in R, t\neq 1)$ ដែល

$$a_{n+1}=\frac{(2t^{n+1}-3)a_n+2(t-1)t^n-1}{a_n+2t^n-1}\ (n\in N^*)$$ ។

ក) រករូបមន្តតួទី n នៃ $\{a_n\}$ ។

ខ) បើ $t>0$ តើមួយណាធំជាងរវាង a_{n+1} និង a_n ។

ដំណោះស្រាយ

ក) រករូបមន្តតួទី n នៃ $\{a_n\}$

គេអាចសរសេរ $a_{n+1}=\frac{2(t^{n+1}-1)(a_n-1)}{a_n+2t^n-1}-1$

នោះ $\frac{a_{n+1}+1}{t^{n+1}-1}=\frac{2(a_n+1)}{a_n+2t^n-1}=\frac{\frac{2(a_n+1)}{t^n-1}}{\frac{a_n+1}{t^n-1}+2}$

តាង $\frac{a_n+1}{t^n-1}=b_n$ នោះ $b_{n+1}=\frac{2b_n}{b_n+2}$ ដែល $b_1=\frac{a_1+1}{t-1}=\frac{2t-2}{t-1}=2$

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{b_n}+\frac{1}{2},\ \frac{1}{b_1}=\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b_1}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$$

នាំអោយ $\frac{a_n+1}{t^n-1}=\frac{n}{2}$

ដូចនេះ $$a_n=\frac{2\left(t^n-1\right)}{n}-1$$

ខ) ប្រៀបធៀប a_{n+1} និង a_n

យើងបាន $$a_{n+1}-a_n=\frac{2\left(t^{n+1}-1\right)}{n+1}-\frac{2\left(t^n-1\right)}{n}$$

$$=\frac{2(t-1)}{n(n+1)}\left[n\left(1+t+\cdots+t^{n-1}+t^n\right)-(n+1)\left(1+t+\cdots+t^{n-1}\right)\right]$$

$$=\frac{2(t-1)}{n(n+1)}\left[nt^n-\left(1+t+\cdots+t^{n-1}\right)\right]$$

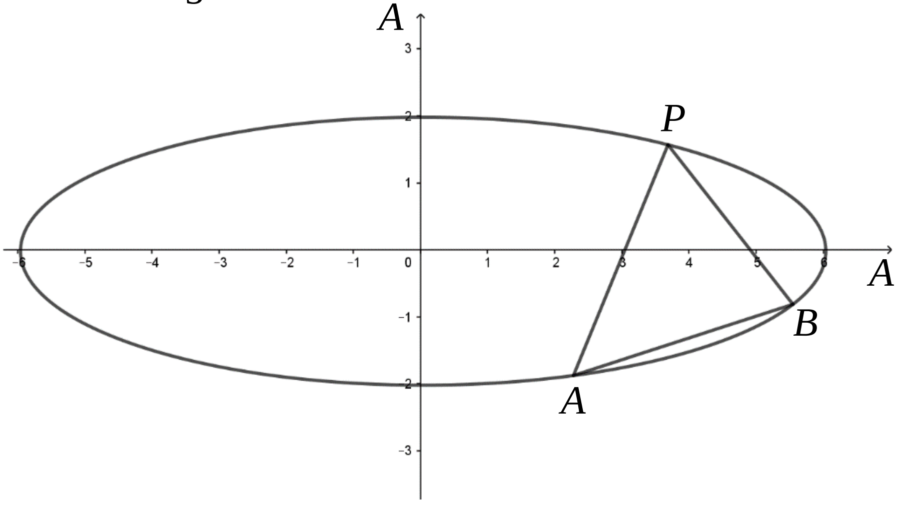
$$=\frac{2(t-1)}{n(n+1)}\left[\left(t^n-1\right)+\left(t^n-t\right)+\cdots+\left(t^n-t^{n-1}\right)\right]$$

$$=\frac{2(t-1)^2}{n(n+1)}\left[\left(t^{n-1}+\cdots+t+1\right)+t\left(t^{n-2}+\cdots+t+1\right)+\cdots+t^{n-1}\right]$$

ចំពោះ $t>0$ និង $t\neq 1$ គេបាន $a_{n+1}-a_n>0$

ដូចនេះ a_{n+1} ធំជាង a_n

៣៦ បន្ទាត់ l មួយមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ $\frac{1}{3}$ ប្រសព្វ អេលីប $C:\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$ ត្រង់ ពីរចំណុច A និង B ។ ចំណុច $P\left(3\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ នៅខាងលើផ្នែកខាងឆ្វេងនៃបន្ទាត់ l (ដូចមានក្នុងរូប) ។



ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថាផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្នុងត្រីកោណ ΔPAB ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់មួយ ។

ខ) បើ $\angle APB=60^0$ ចូររកក្រឡាផ្ទៃ ΔAPB ។

ដំណោះស្រាយ

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ll

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថាផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្នុងត្រីកោណ ΔPAB ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់មួយ

តាងបន្ទាត់ $(l): y=\frac{1}{3}x+m$ និងចំណុច $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

សមីការអាប់ស៊ីសចំណុចប្រសព្វរវាង (l) និង អេលីប C គឺ

$$2x^2+6mx+9m^2-36=0$$

នោះ $x_1+x_2=-3m,\ x_1x_2=\frac{9m^2-36}{2},\ k_{PA}=\frac{y_1-\sqrt{2}}{x_1-3\sqrt{2}}$ និង $k_{PB}=\frac{y_2-\sqrt{2}}{x_2-3\sqrt{2}}$

គេបាន $k_{PA}+k_{PB}=\frac{y_1-\sqrt{2}}{x_1-3\sqrt{2}}+\frac{y_2-\sqrt{2}}{x_2-3\sqrt{2}}$

$$=\frac{\left(y_1-\sqrt{2}\right)\left(x_2-3\sqrt{2}\right)+\left(y_2-\sqrt{2}\right)\left(x_1-3\sqrt{2}\right)}{\left(x_1-3\sqrt{2}\right)\left(x_2-3\sqrt{2}\right)}$$

នៅក្នុងកន្សោមខាងលើ ភាគយកគឺ

$$\left(\frac{1}{3}x_1+m-\sqrt{2}\right)\left(x_2-3\sqrt{2}\right)+\left(\frac{1}{3}x_2+m-\sqrt{2}\right)\left(x_1-3\sqrt{2}\right)$$

$$=\frac{2}{3}x_1x_2+\left(m-2\sqrt{2}\right)(x_1+x_2)-6\sqrt{2}\left(m-\sqrt{2}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{9m^2-36}{2}+\left(m-2\sqrt{2}\right)(-3m)-6\sqrt{2}\left(m-\sqrt{2}\right)$$

$$=3m^2-12-3m^2+6\sqrt{2}m-6\sqrt{2}m+12=0$$

នាំអោយ $k_{PA}+k_{PB}=0$

ដោយចំណុច P ស្ថិតនៅផ្នែកខាងលើឆ្វេងបន្ទាត់ l នោះកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle APB$ ស្របនឹងអ័ក្ស $y'oy$

ដូចនេះ ផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្នុងត្រីកោណ APB នៅលើបន្ទាត់ $x=3\sqrt{2}$

ខ) បើ $\angle APB=60^0$ រកក្រឡាផ្ទៃ ΔAPB

បើ $\angle APB=60^0$ តាមសំនួរ ក) យើងបាន $k_{PA}=\sqrt{3},k_{PB}=-\sqrt{3}$

សមីការបន្ទាត់ $(PA): y-\sqrt{2}=\sqrt{3}\left(x-3\sqrt{2}\right)$

យកជំនួសចូល $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$ រួចបំបាត់ y គេបាន

$$14x^2+9\sqrt{6}\left(1-3\sqrt{3}\right)x+18\left(13-3\sqrt{3}\right)=0$$

ដែលមានរឹស x_1 និង $3\sqrt{2}$

ដោយ $x_1.3\sqrt{2}=\frac{18\left(13-3\sqrt{3}\right)}{14}$ នោះ $x_1=\frac{3\sqrt{2}\left(13-3\sqrt{3}\right)}{14}$

យើងបាន $|PA|=\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}.\left|x_1-3\sqrt{2}\right|=\dfrac{3\sqrt{2}\left(3\sqrt{3}+1\right)}{7}$

ដូចគ្នាដែរ $|PB|=\dfrac{3\sqrt{2}\left(3\sqrt{3}-1\right)}{7}$

$$S_{\Delta APB}=\frac{1}{2}\cdot|PA|.|PB|.\sin 60^0$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}\left(3\sqrt{3}+1\right)}{7}\cdot\frac{3\sqrt{2}\left(3\sqrt{3}-1\right)}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{117\sqrt{3}}{49}$$

ដូចនេះ $S_{\Delta APB}=\dfrac{117\sqrt{3}}{49}$

៣៧ P ជាចំណុចមួយនៅលើរូបភាពនៃ $y=x+\dfrac{2}{x}\ (x>0)$ ។ តាមចំណុច P គូសបន្ទាត់មួយកែងនឹង $y=x$ និងអ័ក្ស y ដោយមាន A និង B ជាជើងនៃចំណោលកែងរៀងគ្នា ។ កំណត់តម្លៃ $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $P\left(x_0,x_0+\dfrac{2}{x_0}\right)$

សមីការបន្ទាត់ $(PA): y-y_0=m(x-x_0)$

ដោយបន្ទាត់ (PA) កែងនឹង $y=x$ នោះ $m\cdot 1=-1$ ឬ $m=-1$

គេបាន $(PA): y-\left(x_0+\dfrac{2}{x_0}\right)=-(x-x_0)$

$$y=-x+2x_0+\frac{2}{x_0}$$

បន្ទាត់ $(PA): y=-x+2x_0+\dfrac{2}{x_0}$ កែង $y=x$ ត្រង់ A

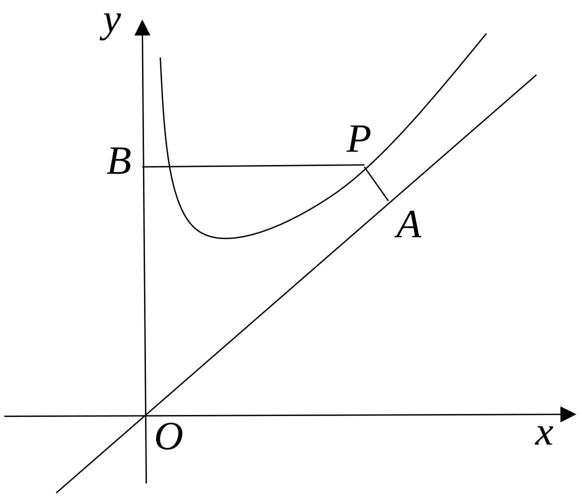
នោះកូអរដោនេចំណុច A ជាចម្លើយនៃសមីការ $-x+2x_0+\dfrac{2}{x_0}=x$

នាំអោយ $x=x_0+\dfrac{1}{x_0}$

នោះចំណុច $A\left(x_0+\dfrac{1}{x_0},x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

ចំណុច $B\left(0, x_0 + \dfrac{2}{x_0}\right)$



$$\overrightarrow{PA} = \left(\frac{1}{x_0}, -\frac{1}{x_0}\right) \text{ និង } \overrightarrow{PB} = (-x_0, 0)$$

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = \left(\frac{1}{x_0}\right)(-x_0) + \left(-\frac{1}{x_0}\right)(0) = -1$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = -1$

របៀបទី ២

ចម្ងាយពីចំណុច $P\left(x_0, x_0 + \dfrac{2}{x_0}\right)$ ទៅបន្ទាត់ $y = x$

និងអ័ក្ស y គឺ $|PA| = \dfrac{\left|x_0 - \left(x_0 + \dfrac{2}{x_0}\right)\right|}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{x_0}$

ហើយ $|PB| = x_0$

ដោយ O, A, P និង B ជាចំណុចនៅលើរង្វង់ នោះ $\angle APB = \pi - \angle AOB = \dfrac{3\pi}{4}$

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = \left|\overrightarrow{PA}\right|.\left|\overrightarrow{PB}\right|.\cos\frac{3\pi}{4} = -1$$

៣៨ A, B, C ជាមុំនៃ ΔABC ដែលត្រូវនឹងជ្រុង a, b, c ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $a\cos B - b\cos A = \dfrac{3}{5}c$ ។ កំណត់តម្លៃ $\dfrac{\tan A}{\tan B}$ ។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី ១

គេមានសមីការ $a\cos B - b\cos A = \dfrac{3}{5}c$

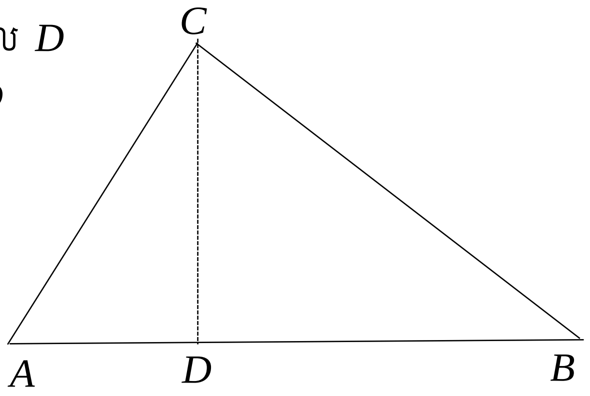
$$a \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} - b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3}{5}c$$

ឬ $a^2 - b^2 = \dfrac{3}{5}c^2$

នាំអោយ $\dfrac{\tan A}{\tan B} = \dfrac{\sin A.\cos B}{\sin B.\cos A} = \dfrac{a \cdot \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}}{b \cdot \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$

$$=\frac{c^2+a^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}=\frac{\frac{8}{5}c^2}{\frac{2}{5}c^2}=4$$

របៀបទី ២



តាម C គូស $CD\perp AB$ ដែលមានជើងចំណោល D

យើងបាន $a\cos B=DB$ និង $b\cos A=AD$

តាមសម្មតិកម្ម $DB-AD=\frac{3}{5}c$

ហើយ $DB+AD=c$

នាំអោយ $AD=\frac{1}{5}c$ និង $DB=\frac{4}{5}c$

គេបាន $\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{\frac{CD}{AD}}{\frac{CD}{BD}}=\frac{BD}{AD}=4$

របៀបទី ៣

តាមទ្រឹស្តីបទចំណោលកែង $a\cos B+b\cos A=c$

តែ $a\cos B-b\cos A=\frac{3}{5}c$

នោះ $a\cos B=\frac{4}{5}c$ និង $b\cos A=\frac{1}{5}c$

គេបាន $\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{\sin A\cos B}{\sin B\cos A}=\frac{a.\cos B}{b.\cos A}=\frac{\frac{4}{5}c}{\frac{1}{5}c}=4$

៣៩ គេអោយ $x,y,z\in[0,1]$ ។ រកតម្លៃអតិបរមានៃ $M=\sqrt{y-x}+\sqrt{z-y}+\sqrt{z-x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងសន្មត់ថា $0\le x\le y\le z\le 1$

ដោយ $\sqrt{y-x}+\sqrt{z-y}\le\sqrt{2\left[(y-x)+(z-y)\right]}=\sqrt{2(z-x)}$

យើងបាន $M\le\sqrt{2(z-x)}+\sqrt{z-x}=\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{z-x}\le\sqrt{2}+1$

សមភាពកើតមានកាលណា $y-x=z-y, x=0, z=1$ (i.e. $x=0, y=\frac{1}{2}, z=1$)

ដូចនេះ $M_{\max}=\sqrt{2}+1$

៤០ $f(x)$ ជាអនុគមន៍សេសនៅលើ R ហើយ $f(x)=x^2$ ចំពោះ $x\geq 0$ ។ ឧបមាថាចំពោះ $x\in[a,a+2]$, $f(x+a)\geq 2f(x)$ ។ រកវែងនៃចំនួនពិត a ។

ដំណោះស្រាយ

តាមលក្ខខណ្ឌដែលអោយមក យើងអាចយក $f(x)$ ដូចខាងក្រោម

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\geq 0) \\ -x^2 & (x<0) \end{cases}$$

នោះ $2f(x)=f\left(\sqrt{2}x\right)$

វិសមីការដើមក្លាយជា $f(x+a)\geq f\left(\sqrt{2}x\right)$

ដោយ $f(x)$ កើនលើ R នោះ $x+a\geq\sqrt{2}x$

i.e. $a\geq\left(\sqrt{2}-1\right)x$

ម្យ៉ាងទៀត $x\in[a,a+2]$ នោះ $\left(\sqrt{2}-1\right)x$ មានតម្លៃអតិបរមាដល់ $\left(\sqrt{2}-1\right)(a+2)$ កាលណា

$x=a+2$

នាំអោយ $a\geq\left(\sqrt{2}-1\right)(a+2)$

$$a\geq\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $a\in\left[\sqrt{2},+\infty\right]$

៤១ រកផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន n ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{4}<\sin\frac{\pi}{n}<\frac{1}{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\sin x$ ជាអនុគមន៍ផតចំពោះ $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$

យើងបាន $\frac{3}{\pi}x<\sin x<x$

$$\sin\frac{\pi}{13}<\frac{\pi}{13}<\frac{1}{4}\ ,\ \sin\frac{\pi}{12}>\frac{3}{\pi}\times\frac{\pi}{12}=\frac{1}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{10}<\frac{\pi}{10}<\frac{1}{3}\ ,\ \sin\frac{\pi}{9}>\frac{3}{\pi}\times\frac{\pi}{9}=\frac{1}{3}$$

នោះ $\sin\frac{\pi}{13}<\frac{1}{4}<\sin\frac{\pi}{12}<\sin\frac{\pi}{11}<\sin\frac{\pi}{10}<\frac{1}{3}<\sin\frac{\pi}{9}$

ចំនួនគត់ n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់មាន 10,11,12

ដូចនេះ ផលបូកគឺ 33

(៤២) ក) គណនា $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^4}{x^2-1}dx$ ។

ខ) តាង $I(t)=\int_0^{t}\frac{\tan^4 x}{\cos 2x}dx \quad \left(0<t<\frac{\pi}{4}\right)$ ។

ទាញរក $I(t)$ រួចស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)>e^{\frac{2}{3}\left(\tan^3 t+3\tan t\right)}$ ចំពោះ $0<t<\frac{\pi}{4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) គណនា $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^4}{x^2-1}dx$

យើងបាន $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^4-1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-1}\right)dx$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)dx+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}-0\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{3}-0\right)$$

$$=\frac{13}{24}-\frac{1}{2}\ln 3$$

ដូចនេះ $I=\frac{13}{24}-\frac{1}{2}\ln 3$

ខ) ទាញរក $I(t)$ រួចស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)>e^{\frac{2}{3}\left(\tan^3 t+3\tan t\right)}$ ចំពោះ $0<t<\frac{\pi}{4}$

តាង $u=\tan x$ នោះ $du=\left(1+\tan^2 x\right)dx$

$x=0\Rightarrow u=0$

$x=t\Rightarrow u=\tan t$

យើងបាន $I(t)=\int_0^{t}\frac{\tan^4 x}{\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}}\cdot\frac{1}{1+\tan^2 x}\left(1+\tan^2 x\right)dx$

$$=\int_0^{t}\frac{\tan^4 x}{1-\tan^2 x}\cdot\left(1+\tan^2 x\right)dx$$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

នោះ $I(t)=\int_0^{\tan t}\frac{u^4}{1-u^2}du=-\int_0^{\tan t}\frac{u^4}{u^2-1}du$

$$=-\int_0^{\tan t}\left(u^2+1+\frac{1}{u^2-1}\right)du$$

$$=-\int_0^{\tan t}\left(u^2+1\right)du-\frac{1}{2}\int_0^{\tan t}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du$$

$$=-\frac{1}{3}\left[u^3\right]_0^{\tan t}-\tan t-\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_0^{\tan t}$$

$$=-\frac{1}{3}\tan^3 t-\tan t-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan t-1}{\tan t+1}\right|$$

គេបាន $I(t)=-\left(\frac{1}{3}\tan^3 t+\tan t\right)+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\tan t}{1-\tan t}\right|$

ដូចនេះ $I(t)=-\left(\frac{1}{3}\tan^3 t+\tan t\right)+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right|$

ចំពោះ $0<t<\frac{\pi}{4}$ នោះ $0\le x\le t$

$\Rightarrow 0\le 2x\le\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos 2x>0$

នាំអោយ $\frac{\tan^4 x}{\cos 2x}\ge 0$ (ស្មើ 0 កាលណា $x=0$)

គេទាញបាន $I(t)=\int_0^t\frac{\tan^4 x}{\cos 2x}dx>0$

ឬ $$-\frac{1}{3}\left(\tan^3 t+3\tan t\right)+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right|>0$$

$$\ln\left|\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right|>\frac{2}{3}\left(\tan^3 t+2\tan t\right)$$

$$\left|\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right|>e^{\frac{2}{3}\left(\tan^3 t+3\tan t\right)}$$

ដោយ $0<t<\frac{\pi}{4}$ នោះ $0<t+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$

នាំអោយ $\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)>0$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ll

ដូចនេះ $\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right) > e^{\frac{2}{3}\left(\tan^3 t+3\tan t\right)}$ ចំពោះ $0<t<\frac{\pi}{4}$

(៤៣) រកគ្រប់ចម្លើយជាចំនួនពិតនៃសមីការ $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)=(ab+1)(a+b)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $2\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)-2(ab+1)(a+b)$

$$=2\left(a^2b^2+a^2+b^2+1-a^2b-ab^2-a-b\right)$$

$$=\left(a^2b^2-2a^2b+a^2\right)+\left(a^2b^2-2ab^2+b^2\right)+\left(a^2-2a+1\right)+\left(b^2-2b+1\right)$$

$$=a^2(b-1)^2+b^2(a-1)^2+(a-1)^2+(b-1)^2$$

ជាចំនួនវិជ្ជមាន ។

សមីការពិតកាលណា $a=b=1$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $a=1,b=1$

(៤៤) រកគូលំដាប់ (x,y) ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $2^x=3^y+7$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $(-1)^x \equiv 1 \pmod 3$ បើ x គូ

$0 \equiv (-1)^y - 1 \pmod 4$ បើ y គូ

តាង $x=2a$ និង $y=2b$ នោះ $2^{2a}-3^{2b}=7$

នាំអោយ $\left(2^a+3^b\right)\left(2^a-3^b\right)=7$

ដោយ $2^a+3^b>0$, $2^a+3^b>2^a-3^b$ ហើយ 7 ជាចំនួនបឋម

គេទាញបាន $\begin{cases}2^a+3^b=7\\2^a-3^b=1\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}2^a=4\\3^b=3\end{cases}$

$$\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$$

ដូចនេះ $(x,y)=(4,2)$

(៤៥) គេអោយ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ឧបមាថា $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$ ជាមុំដែល $0<\theta_i<\frac{\pi}{2}$ ចំពោះ i និមួយៗដែល $\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cdots+\cos^2\theta_n=1$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\tan\theta_1+\tan\theta_2+\cdots+\tan\theta_n \ge (n-1)\left(\cot\theta_1+\cot\theta_2+\cdots+\cot\theta_n\right)$$ ។

ដំណោះស្រាយ

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ॥

តាង $a_i = \cos\theta_i$ យើងបាន

$$\tan\theta_i = \frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta_i}}{\cos\theta_i} = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{i-1}^2 + a_{i+1}^2 + \cdots + a_n^2}}{a_i}$$

$$\geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n}{a_i\sqrt{n-1}}$$

តាម Power-Mean inequality បូកវិសមភាពខាងលើដោយយក $i = 1, 2, \cdots, n$ យើងបាន

$$\sum_{i=1}^{n}\tan\theta_i \geq \frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{a_j}{a_i} = \sqrt{n-1}\sum_{j\neq i}\frac{a_j}{a_i}$$

ដែលផលធៀប $\frac{a_i}{a_j}$ កើតឡើង $n-1$ ដង

តែ $\cot\theta_i = \frac{\cos\theta_i}{\sin\theta_i} = \frac{\cos\theta_i}{\sqrt{1-\cos^2\theta_i}} = \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{i-1}^2 + a_{i+1}^2 + \cdots + a_n^2}}$

$$\leq \frac{1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}} a_i \left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{i-1}} + \frac{1}{a_{i+1}} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

តាម Power-Mean inequality បូកវិសមភាពខាងលើដោយយក $i = 1, 2, \cdots, n$ យើងបាន

$$\sum_{i=1}^{n}\cot\theta_i \leq \frac{1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{a_j}{a_i} = \sqrt{n-1}\sum_{j\neq i}\frac{a_j}{a_i}$$

នាំអោយ $\sum_{i=1}^{n}\tan\theta_i \geq \sqrt{n-1}\sum_{i\neq j}\frac{a_j}{a_i} \geq (n-1)\sum_{i=1}^{n}\cot\theta_i$ ពិត

៤៦ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k និង n គេបាន $\gcd\left(2^k - 1, 2^n - 1\right) = 2^{\gcd(k,n)} - 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

សម្រាយបញ្ជាក់ទី ១

គេមាន $\gcd(a,b) = \gcd(a-b, b)$

ចំពោះ $k \geq n$ យើងបាន

$$\gcd\left(2^k - 1, 2^n - 1\right) = \gcd\left(2^k - 2^n, 2^n - 1\right)$$

$$= \gcd\left(2^n\left(2^{k-n} - 1\right), 2^n - 1\right)$$

$$= \gcd\left(2^{k-n} - 1, 2^n - 1\right) = 2^{\gcd(k-n,n)} - 1 = 2^{\gcd(k,n)} - 1$$

សម្រាយបញ្ជាក់ទី ២

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ။

តាង $d=\gcd(k,n)$ និង $e=\gcd\left(2^k-1,2^n-1\right)$

នោះ $d\,|\,k, d\,|\,n$ និង $e\,|\,2^k-1, e\,|\,2^n-1$

តាង $d=km-nt \quad k\geq 1\,,\, n\geq 1$

គេបាន $2^d-1\,|\,2^k-1, 2^d-1\,|\,2^n-1$

$\Rightarrow 2^d-1\,|\,e \qquad (1)$

ម្យ៉ាងទៀត $2^k\equiv 1\,(\text{mod } e)$

$2^{km}\equiv 1\,(\text{mod } e)$

$2^n\equiv 1\,(\text{mod } e)$

$2^{nt}\equiv 1\,(\text{mod } e)$

គេបាន $2^{km}\equiv 2^{nt}\,(\text{mod } e)$

នោះ $2^{km-nt}\times 2^{nt}\equiv 2^{nt}\,(\text{mod } e)$

តែ $2^{nt}\equiv 1\,(\text{mod } e)$

នាំអោយ $2^{km-nt}\equiv 1\,(\text{mod } e)$

នាំអោយ $2^d\equiv 1\,(\text{mod } e)$

នាំអោយ $e\,|\,2^d-1 \quad (2)$

តាម (1) និង (2) យើងបាន

$$\begin{cases} e\,|\,2^d-1 \\ 2^d-1\,|\,e \end{cases} \text{ នោះ } e=2^d-1$$

ឬ $\gcd\left(2^k-1,2^n-1\right)=2^{\gcd(k,n)}-1$ ពិត

ទូទៅ៖ បើ $a>1$ និង $m,n>0$ ហើយ a,m,n ជាចំនួនគត់ គេបាន

$\gcd\left(a^m-1,a^n-1\right)=a^{\gcd(m,n)}-1$ ។

(៤៧) គេអោយ a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $2a+1$ និង $2b+1$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ។ រកតម្លៃដែលអាចមាននៃតួចែករួមធំបំផុតរវាង $2^{2a+1}+2^{a+1}+1$ និង $2^{2b+1}+2^{b+1}+1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k និង n គេបាន $\gcd\left(2^k-1,2^n-1\right)=2^{\gcd(k,n)}-1 \quad (1)$

គេមាន $4x^4+1=\left(2x^2+1\right)^2-4x^2=\left(2x^2+2x+1\right)\left(2x^2-2x+1\right)$

យក $x=2^a$ គេបាន

$2^{4a+2}+1=\left(2^{2a+1}+2^{a+1}+1\right)\left(2^{2a+1}-2^{a+1}+1\right)$

គេទាញបាន តួចែករួមធំបំផុត d នៃ $2^{2a+1}+2^{a+1}+1$ និង $2^{2b+1}+2^{b+1}+1$ ចែកដាច់តួចែករួមធំបំផុត នៃ $2^{4a+2}+1$ និង $2^{4b+2}+1$

នោះ d ចែកដាច់តួចែករួមធំបំផុតនៃ $2^{8a+4}-1$ និង $2^{8b+4}-1$

តែតាម (1) យើងបាន $\gcd\left(2^{8a+4}-1,2^{8b+4}-1\right)=2^{\gcd(8a+4,8b+4)}-1=2^4-1=15$

យើងដឹងថា $2a+1,2b+1$ ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នានោះ $d\,|\,15$

ដោយ $2^{2a+1}+2^{a+1}+1\equiv 2^{a+1}\not\equiv 0\ (\text{mod } 3)$ (3 មិនចែកដាច់ d ទេ)

នោះ $d=1$ ឬ $d=5$

បើ $a=4,b=8$ នោះ $d=5$

បើ $a=2,b=3$ នោះ $d=1$

៤៨ តាង λ ជាឫសវិជ្ជមាននៃសមីការ $t^2-2018t-1=0$ ។ តាងស្វ៊ីត $x_0,x_1,\cdots$ កំណត់ដោយ $x_0=1$ និង $x_{n+1}=\lfloor \lambda x_n\rfloor$ ចំពោះ $n\ge 0$ ។ រកសំណល់ពេល x_{2018} ចែកនឹង 2018 ។

ដំណោះស្រាយ

λ ជាឫសនៃសមីការ $t^2-2018t-1=0$ នោះ $\lambda^2-2018\lambda-1=0$

គេបាន $\lambda=2018+\dfrac{1}{\lambda}$

ដោយ x_n ជាចំនួនគត់ នោះ $x_{n+1}=\lfloor \lambda x_n\rfloor=\left\lfloor 2018x_n+\frac{x_n}{\lambda}\right\rfloor=2018x_n+\left\lfloor\dfrac{x_n}{\lambda}\right\rfloor$

$$\equiv\left\lfloor\frac{x_n}{\lambda}\right\rfloor\ (\text{mod } 2018)$$

ដោយ $x_n=\lfloor x_{n-1}\lambda\rfloor$ ដែល x_{n-1} ជាចំនួនគត់ ហើយ λ ជាចំនួនសនិទាន នោះ $x_n=x_{n-1}\lambda-\varepsilon$ ដែល $0<\varepsilon<1$ ជាផ្នែកទសភាគនៃ $x_{n-1}\lambda$

ដោយ $\lambda>1$ នោះ $0\le\dfrac{\varepsilon}{\lambda}<1$ ហើយ $\left\lfloor\dfrac{x_n}{\lambda}\right\rfloor=\left\lfloor x_{n-1}-\dfrac{\varepsilon}{\lambda}\right\rfloor=x_{n-1}-1$

គេទាញបាន $x_{n+1}\equiv x_{n-1}-1\ (\text{mod } 2018)$

តាមកំណើន គេបាន $x_{2018}\equiv x_0-1014\equiv 1015\ (\text{mod } 2018)$

ដូចនេះ សំណល់ពេល x_{2018} ចែកនឹង 2018 គឺ 1015

៤៩ រកគ្រប់ $a\in R$ ដើម្បីអោយមានអនុគមន៍ $f:R\to R$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

$(i)\ f\left(f(x)\right)=f(x)+x$ ចំពោះគ្រប់ $x\in R$

$(ii)\ f\left(f(x)-x\right)=f(x)+ax$ ចំពោះគ្រប់ $x\in R$

ដំណោះស្រាយ

តាម (i) យើងបាន $f\left(f\left(f(x)\right)-f(x)\right)=f(x)$

តែតាម (ii) យើងបាន $f\left(f\left(f(x)\right)-f(x)\right)=f\left(f(x)\right)+af(x)$

នោះ $(1-a)f(x)=f\left(f(x)\right)$

$(1-a)f(x)=f(x)+x$ (តាម (i))

$f(x)=-\frac{1}{a}x$

បើ $a=0$ នោះគ្មានចម្លើយ

យើងមាន $f\left(f(x)\right)=-\frac{1}{a}f(x)=\frac{1}{a^2}x$ និង $f(x)+x=-\frac{1}{a}x+x=\frac{a-1}{a}x$

នោះ (i) ពិតចំពោះគ្រប់ x កាលណា $\frac{1}{a^2}=\frac{a-1}{a}$ ឬ $a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

ចំពោះតម្លៃ a ទាំងនេះ យើងបាន

$$f\left(f(x)-x\right)=-\frac{1}{a}\left(f(x)-x\right)=-\frac{1}{a}\left(-\frac{1}{a}x-x\right)=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}\right)x=\frac{a+1}{a^2}x=x$$

និង $f(x)+ax=-\frac{1}{a}x+ax=\frac{a^2-1}{a}x=x$

គេឃើញថា ចំពោះតម្លៃ a នេះ (i) និង (ii) ពិតចំពោះគ្រប់ $x\in R$

ដូចនេះ $a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

៥០ រកគ្រប់ចំនួនបឋម p ដើម្បីអោយ $16p+1$ ជាគូប។

ដំណោះស្រាយ

តាង $16p+1=n^3$ ដែល n ជាចំនួនគត់

$16p=n^3-1$

$16p=(n-1)(n^2+n+1)$

ដោយ n^2+n+1 ជាចំនួនសេសចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n នោះ $16|n-1$ ហើយ $p|n^2+n+1$

$n^2+n+1>1$ នោះ $16=n-1$ និង $p=n^2+n+1$

គេបាន $n=17$ និង $p=17^2+17+1=307$ ជាចំនួនបឋម

ដូចនេះ $p=307$

៥១ គេអោយ a,b,c,d,e ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានខុសៗគ្នា ហើយដែល $a^4+b^4=c^4+d^4=e^5$ ។

បង្ហាញថា $ac+bd$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

ដំណោះស្រាយ

ឧបមាថា $ac+bd=p$ ជាចំនួនបឋម

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ॥

យើងសន្មត់ថា $\max\{a,b,c,d\}=a$ ហើយដោយ $a^4+b^4=c^4+d^4$ នោះ $\min\{a,b,c,d\}=b$

គេមាន $ac\equiv -bd \pmod p$

$a^4c^4\equiv b^4d^4 \pmod p$

ដោយ $b^4d^4+b^4c^4\equiv a^4c^4+b^4c^4=c^4\left(a^4+b^4\right)=c^4\left(c^4+d^4\right)=c^8+c^4d^4 \pmod p$

នោះ $\left(c^4+d^4\right)\left(c^4-b^4\right)\equiv 0 \pmod p$

p ត្រូវចែកដាច់មួយក្នុងចំណោម $c-b, c+b, c^2+b^2$ និង c^4+d^4

ដោយ b និង c ជាចំនួនគត់ផ្សេងគ្នា នោះ $0<c-b<c+b<c^2+b^2<ac+bd=p$

p ចែកដាច់នឹង $c^4+d^4=e^5$

នាំអោយ $p^5=(ac+bd)^5$ ចែកដាច់ c^4+d^4 ជាករណីមិនអាច ព្រោះ $(ac+bd)^5>c^4+d^4$

ដូចនេះ $ac+bd$ មិនមែនជាចំនួនបឋម

(៥២) រកគ្រប់តម្លៃដែលអាចកើតមាននៃ a,b,c ជាចំនួនគត់ផ្ទៀងផ្ទាត់

$(a).\ a+b+c=51$

$(b).\ abc=4000$

$(c).\ 0<a\le 10$ និង $c\ge 25$

ដំណោះស្រាយ

តាងពហុធា $p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-51x^2+kx-4000$

$q(x)=(x-10)(x-16)(x-25)=x^3-51x^2+810x-4000$

ដែល $k=ab+bc+ca$

អនុគមន៍ $f(x)=p(x)-q(x)=(k-810)x$ ជាអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ

$f(c)=(k-810)c=p(c)-q(c)=0-(c-10)(c-16)(c-25)\le 0$ ព្រោះ $c\ge 25$

$f(a)=(k-810)a=p(a)-q(a)=0-(a-10)(a-16)(a-25)\ge 0$ ព្រោះ $a\le 10$

នាំអោយ $k=810$

ពហុធា $p(x)=q(x)$

a,b,c អាចយកតម្លៃ $10,16,25$

តែ $0<a\le 10$ និង $c\ge 25$ នោះ $a=10, b=16$ និង $c=25$

ដូចនេះ $a=10, b=16$ និង $c=25$

(៥៤) វិញ្ញាសាប្រលងសិស្សពូកែគណិតមួយមានលំហាត់ងាយចំនួន 9 និងលំហាត់ពិបាកចំនួន 6 ។ បេក្ខជននិមួយៗនៅក្នុងការប្រលងបានដោះស្រាយលំហាត់ 14 ក្នុងចំណោមលំហាត់ 15 ។ ចំពោះគូលំហាត់និមួយៗ(ពិបាកមួយ ងាយមួយ) ចំនួនបេក្ខជនដែលបានដោះស្រាយលំហាត់ទាំងពីរ ត្រូវបានគេកត់ត្រាទុក។ ផលបូកនៃចំនួនការកត់ត្រាទុកគឺ 459 ។ តើមានបេក្ខជនប៉ុន្មាននាក់ចូលរួមប្រលង ?

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ll

ដំណោះស្រាយ

តាង $x+y$ ជាចំនួនបេក្ខជនប្រលង ដែល x ជាចំនួនបេក្ខជនដោះស្រាយលំហាត់ងាយទាំងអស់ ហើយ y ជាចំនួនបេក្ខជនដោះស្រាយលំហាត់ពិបាកទាំងអស់

តាងគូលំហាត់និមួយៗដោយ m ហៅថាគូរាប់បាន

ចំនួនគូរាប់បានសរុបមាន $6\times 9=54$ គូ

បេក្ខជន x នាក់ ដោះស្រាយបាន $9\times 5=45$ គូរាប់បាន

បេក្ខជន y នាក់ដោះស្រាយបាន $8\times 6=48$ គូរាប់បាន

គេបាន $45x+48y=459$

ដោយ $x\geq 0$ នោះ $y\leq 9$

$$3y\equiv 9\pmod{45}$$

$$y\equiv 3\pmod{15}$$

នោះ $y=3$ ហើយ $x=7$

ដូចនេះ បេក្ខជនចូលរួមប្រលងមាន $x+y=10$ នាក់

៥៥ រកគ្រប់គូជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x,y) ដើម្បីអោយ $(x+y)(x^2+9y)$ ជាគូបនៃចំនួនបឋម ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $(x+y)(x^2+9y)=p^3$ ដែល p ជាចំនួនបឋម

ដោយ $x+y<x^2+9y$ នោះ $x+y=p$ និង $x^2+9y=p^2$

នាំអោយ $x^2+9y=(x+y)^2$

$$x^2+9y=x^2+2xy+y^2$$

$$(2x+y)y=9y$$

$$2x+y=9$$

គេត្រូវរកអោយបាន $x+y$ បឋម និង $2x+y=9$

ដូចនេះ $(2,5)$ និង $(4,1)$ ជាគូចម្លើយ (x,y)

៥៦ កំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនពិត (k,d) ដើម្បីអោយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}x^3+y^3=2\\kx+d=y\end{cases}$ គ្មានចម្លើយ (x,y) ដែល x,y ជាចំនួនពិត ។

ដំណោះស្រាយ

គេមានប្រព័ន្ធ $\begin{cases}x^3+y^3=2 & (1)\\kx+d=y & (2)\end{cases}$

យក (2) ជំនួសចូល (1) យើងបាន

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ॥

$\left(k^3+1\right)x^3+3dk^2x^2+3d^2kx+d^3-2=0 \quad (3)$

- បើ $k^3 \neq -1$ នោះ (3) ជាសមីការដឺក្រេទីបីដែលមានរឹសពិតមួយ x មួយយ៉ាងតិច នោះ $y=kx+d$ ក៏ជាចំនួនពិតដែរ
- បើ $k=-1$ សមីការក្លាយជា $3dx^2-3d^2x+d^3-2=0$

យើងនិងបង្ហាញថាសមីការនេះគ្មានរឹសទេ

ចំពោះ $d=0$ ពិត

ចំពោះ $d\neq 0$ គេបាន

$\Delta=\left(-3d^2\right)^2-4.3d.\left(d^3-2\right)=3d\left(3d^3-4d^3+8\right)=3d\left(8-d^3\right)<0$ ក្នុងករណីដែល $d<0$ និង $d>2$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការគ្មានចម្លើយ (x,y) កាលណា $(k,d)=(-1,d)$ ដែល $d\leq 0$ ឬ $d>2$

៥៧ ក្នុងប្រព័ន្ធគោល 10 ចូរកំណត់លេខ x និង y បើ $\overline{2x9y}=2^x.9^y$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $9^4=6561$ នោះ $1\leq y\leq 3$

ដោយ $2^x.9^y$ ជាចំនួនគត់គូ នោះ $\overline{2x9y}$ ជាចំនួនគត់គូដែរ

គេទាញបាន $y=2$

គេបាន $\overline{2x92}=81\cdot 2^x$

ដោយ $\overline{2x92}$ មានលេខខាងចុង 2 នោះ 2^x មានលេខខាងចុង 2 ដែរ

ដោយ $0\leq x\leq 9 \Rightarrow x\in\{1,5,9\}$

បើ $x=1\Rightarrow 2192=81\times 2$ មិនពិត

បើ $x=5\Rightarrow 2592=81\times 2^5$ ពិត

បើ $x=9\Rightarrow 2992=81\times 2^9$ មិនពិត

ដូចនេះ $x=5, y=2$

៥៨ ក្នុងប្រព័ន្ធគោល ចូរកំណត់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ x ដែលផលគុណគ្រប់ខ្ទង់ទាំងអស់របស់វា ស្មើនឹង $x^2-10x-22$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $x=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_0}=a_n\times 10^n+a_{n-1}\times 10^{n-1}+\cdots+a_0$, $x>0$, $x\in N$

តាមសម្មតិកម្ម $a_n\times a_{n-1}\times\cdots\times a_0=x^2-10x-22$

គេមាន $a_i\leq 9\ (i=0,1,2,\cdots,n)$

នោះ $\prod_{i=0}^{n}a_i\leq 9^n<10^na_n<x$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ll

$\Leftrightarrow x^2 - 10x - 22 < x$

$\Leftrightarrow x^2 - 11x - 22 < 0$

តាង $f(x) = x^2 - 11x - 22$ ដែល $f(x) < 0$

គេបានតារាង

x	0 $\qquad$ $\frac{11+\sqrt{209}}{2}$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x) < 0$	$-$ $\qquad$ $+$

តាមតារាង $x \in \left(0, \frac{11+\sqrt{209}}{2}\right)$

ម្យ៉ាងទៀត $a_n \times a_{n-1} \times \cdots \times a_0 > 0$

$g(x) = x^2 - 10x - 22 > 0$

គេបានតារាង

x	0 $\qquad$ $5+\sqrt{47}$ $\qquad$ $+\infty$
$g(x) > 0$	$\qquad$ $+$

តាមតារាងគេបាន $x \in \left(5+\sqrt{47}, +\infty\right)$

នាំអោយ $5+\sqrt{47} < x < \frac{11+\sqrt{209}}{2}$

តែ x ជាចំនួនគត់ នោះ $x = 12$

ដូចនេះ $x = 12$

៥៩ ក) ដោះស្រាយសមីការ $\sin x + \cos x = \sqrt{2 + \sin^{2018}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$ ។

ខ) ដោះស្រាយសមីការ $8\sqrt{\sin x} + 27\sqrt{\cos x} = 97^{\frac{3}{4}}$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ដោះស្រាយសមីការ $\sin x + \cos x = \sqrt{2 + \sin^{2018}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$

គេមាន $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$ និង $\sqrt{2 + \sin^{2018}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \ge \sqrt{2}$

គេបាន $\begin{cases}\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\\ \sqrt{2+\sin^{2018}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1\\ \sin^{2018}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0\end{cases}$

$\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\\ \sin^{2018}(k2\pi)=0\end{cases}$

ដូចនេះ សមីការមានរឹស $x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in Z$

ខ) ដោះស្រាយសមីការ $8\sqrt{\sin x}+27\sqrt{\cos x}=97^{\frac{3}{4}}$, $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

គេមាន $\begin{cases}\sin x>0\\ \cos x>0\end{cases}$, $\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

តាង $y=8\sqrt{\sin x}+27\sqrt{\cos x}$ ដែល $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$y^2=64\sin x+729\cos x+432\sqrt{\sin x\cos x}$$

$$=(388\sin x+873\cos x)-\left(18\sqrt{\sin x}-12\sqrt{\cos x}\right)^2$$

$$\Rightarrow y^2\le 388\sin x+873\cos x\le\sqrt{388^2+873^2}\cdot\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}=\sqrt{97^3}$$

$$\Rightarrow y\le 97^{\frac{3}{4}}$$

សមភាពកើតមានកាលណា $\begin{cases}18\sqrt{\sin x}=12\sqrt{\cos x}\\ \dfrac{\sin x}{388}=\dfrac{\cos x}{873}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}}=\dfrac{12}{18}=\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{388}{873}=\dfrac{4}{9}\end{cases}$

នាំអោយ $x=\arctan\left(\dfrac{4}{9}\right)$

ដូចនេះសមីការមានចម្លើយ $x=\arctan\left(\dfrac{4}{9}\right)$

៦០ ដោះស្រាយសមីការ $\sqrt{x-1+\sqrt[3]{(x^2-1)(x+1)}}+\sqrt{x+1+\sqrt[3]{(x^2-1)(x+1)}}=\sqrt{2x^3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

សមីការមានន័យកាលណា $x\ge 0$

តាង $x-1=a$ និង $x+1=b$

សមីការអាចសរសេរជា $\sqrt{a+\sqrt[3]{a^2b}}+\sqrt{b+\sqrt[3]{ab^2}}=\sqrt{2x^3}$ (1)

ចំពោះ $\sqrt{a+\sqrt[3]{a^2b}}+\sqrt{b+\sqrt[3]{ab^2}}$

$$=\sqrt{a+\sqrt[3]{a^2b}+b+\sqrt[3]{ab^2}+2\sqrt{\left(a+\sqrt[3]{a^2b}\right)\left(b+\sqrt[3]{ab^2}\right)}}$$

$$=\sqrt{a+\sqrt[3]{a^2b}+b+\sqrt[3]{ab^2}+2\sqrt{ab+a\sqrt[3]{ab^2}+b\sqrt[3]{b^2a}+ab}}$$

$$=\sqrt{a+\sqrt[3]{a^2b}+b+\sqrt[3]{ab^2}+2\left(\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}\right)}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3}\ (2)$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន

$$\sqrt{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3}=\sqrt{2x^3}$$

$$\sqrt{\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}\right)^3}=\sqrt{2x^3}$$

$$\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}\right)^3=2x^3$$

$$\Leftrightarrow 2x+3\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}+\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}=2x^3$$

$$\Leftrightarrow 2x+3\sqrt[3]{(x-1)(x+1)}\left[\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}\right]=2x^3$$

តែ $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{2}.x$

នាំអោយ $2x+3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot x=2x^3$

$$x\left[3\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{x^2-1}-2\left(x^2-1\right)\right]=0$$

$$x\cdot\sqrt[3]{x^2-1}\left[3\cdot\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}\right]=0$$

យើងទាញបាន

$(i)\ x=0$

$(ii)\ \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)}=0$ នោះ $x=1$ ($x=-1$ មិនយកព្រោះ $x\geq 0$)

$(iii)\ 3\cdot\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}=0$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

$$27.2=8\left(x^2-1\right)^2$$

$$\left(x^2-1\right)^2=\frac{27}{4}$$

$$x^2-1=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

នាំអោយ $x^2=\dfrac{2+3\sqrt{3}}{2}$

ដូចនេះសមីការមានចម្លើយ $x=0, x=1$ និង $x=\sqrt{\dfrac{2+3\sqrt{3}}{2}}$

៦១ គេអោយ $f\left(x\right)=a\sin x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+a-\dfrac{3}{a}+\dfrac{1}{2}$, $a\in R$, $a\neq 0$ ។

ក) បើ $f\left(x\right)\geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in R$ ចូររករ៉ង់នៃ a ។

ខ) បើ $a\geq 2$ ហើយមាន $x\in R$ ដែល $f\left(x\right)\leq 0$ ។ រករ៉ង់នៃ a ។

ដំណោះស្រាយ

ក) បើ $f\left(x\right)\geq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in R$ ចូររករ៉ង់នៃ a

យើងមាន $f\left(x\right)=\sin^2 x+a\sin x+a-\dfrac{3}{a}$

តាង $t=\sin x$ $\left(-1\leq t\leq 1\right)$នោះ $g\left(t\right)=t^2+at+a-\dfrac{3}{a}$

លក្ខខណ្ឌចាំបាច់ និង គ្រប់គ្រាន់ដើម្បីអោយ $f\left(x\right)\leq 0$ ចំពោះគ្រប់ $x\in R$ គឺ

$$\begin{cases} g\left(-1\right)=1-\dfrac{3}{a}\leq 0 \\ g\left(1\right)=1+2a-\dfrac{3}{a}\leq 0 \end{cases}$$

ដូចនេះ រ៉ង់នៃ a គឺ (0,1]

ខ) រករ៉ង់នៃ a

ដោយ $a\geq 2$ នោះ $-\dfrac{a}{2}\leq -1$

យើងបាន $g\left(t\right)_{\min}=1-\dfrac{3}{a}$

លក្ខខណ្ឌចាំបាច់ និង គ្រប់គ្រាន់ដើម្បីអោយ $f\left(x\right)\leq 0$, $\exists x\in R$ គឺ $1-\dfrac{3}{a}\leq 0$ ឬ $0<a\leq 3$

ដូចនេះ រ៉ង់នៃ a គឺ $\left[2,3\right]$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ॥

(៦២) គេអោយ a,b ជាចំនួនពិត និង $f(x)=ax+b$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $|f(x)|\le 1$ ចំពោះគ្រប់ $x\in[0,1]$ ។ រកតម្លៃអតិបរមានៃ ab ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $a=f(1)-f(0)$ និង $b=f(0)$

$$ab=f(0)\big(f(1)-f(0)\big)=-\left(f(0)-\frac{1}{2}f(1)\right)^2+\frac{1}{4}\big(f(1)\big)^2$$

$$\le\frac{1}{4}\big(f(1)\big)^2\le\frac{1}{4}$$

បើ $2f(0)=f(1)=\pm1$ គេបាន $a=b=\pm\frac{1}{2}$ និង $ab=\frac{1}{4}$

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមានៃ ab គឺ $\frac{1}{4}$

(៦៣) បង្ហាញថា $\log_5 2$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $p:\log_5 2$ ជាចំនួនអសនិទាន

$\overline{P}:\log_5 2$ ជាចំនួនសនិទាន

ឧបមាថា $\overline{P}$ ពិត នោះ $\log_5 2=\frac{m}{n}$ ដែល m និង n ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា

$\Rightarrow 2=5^{\frac{m}{n}}$ ឬ $2^n=5^m$ (ផ្ទុយពីការពិតព្រោះអង្គទី១ ជាចំនួនគូ និង អង្គទី២ ជាចំនួនសេស)

$\Rightarrow$ $\overline{P}$ ជាសំណើរមិនពិត មានន័យថា P ជាសំណើរពិត

ដូចនេះ $\log_5 2$ ជាចំនួនអសនិទាន

(៦៤) រកចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុត n ដែលជាពហុគុណនៃ 15 ហើយខ្ទង់នីមួយៗរបស់វាមានតែលេខ 0 ឬលេខ 8 ។

ដំណោះស្រាយ

n ជាពហុគុណនៃ 15 នោះ n ជាពហុគុណនៃ 3 និង 5

n ជាពហុគុណនៃ 5 នោះ n បញ្ចប់ដោយលេខ 0 ខាងចុងព្រោះខ្ទង់របស់វាគ្មានលេខ 5

ឧបមាថា n មាន k ខ្ទង់លេខ 8 នោះផលបូកខ្ទង់របស់វាគឺ $8k$ ចំនួននេះជាពហុគុណនៃ 3

គេបាន k ជាពហុគុណនៃ 3 ហើយ $k=3$ ព្រោះ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុត

ដូចនេះ $n=8880$

៦៥ គេឲ្យពីរចំនួនវិជ្ជមាន a និង b ផ្ទៀងផ្ទាត់ $ab > 2017a + 2019b$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a + b > \left(\sqrt{2017} + \sqrt{2019}\right)^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន :

$$ab > 2017a + 2019b \text{ នោះ } \begin{cases} a > 2017 \cdot \dfrac{a}{b} + 2019 \\ b > 2017 + 2019 \cdot \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

$$a + b > 2017 + 2017 \cdot \frac{a}{b} + 2019 + 2019 \cdot \frac{b}{a} \quad (1)$$

តាមវិសមភាពកូស៊ីចំពោះពីរចំនួនវិជ្ជមាន គេបាន :

$$2017 \cdot \frac{a}{b} + 2019 \cdot \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{2017 \cdot \frac{a}{b} \cdot 2019 \cdot \frac{b}{a}}$$
$$\geq 2\sqrt{2017 \cdot 2019} \quad (2)$$

តាម (1) និង (2):

$$a + b > 2017 + 2\sqrt{2017 \cdot 2019} + 2019$$
$$> \left(\sqrt{2017} + \sqrt{2019}\right)^2$$

ដូចនេះ $a + b > \left(\sqrt{2017} + \sqrt{2019}\right)^2$

៦៦ គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_0 = 1, a_1 = 1$ និង $a_n = a_{n-1} + \dfrac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$ $, n \geq 2$ ហើយ ស្វ៊ីត (b_n) កំណត់ដោយ $b_0 = 1, b_1 = 3$ និង $b_n = b_{n-1} + \dfrac{b_{n-1}^2}{b_{n-2}}$ $, n \geq 2$ ។ គណនា $\dfrac{b_n}{a_n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន :

$$a_n = a_{n-1} + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}} \text{ នោះ } \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$$

$$u_n = u_{n-1} + 1 \text{ (តាង } u_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \text{)}$$

$\Rightarrow (u_n)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី ១ $u_1 = \dfrac{a_1}{a_0} = 1$ និង ផលសងរួម $d = 1$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

$u_n = u_1 + (n-1)d = 1 + n - 1$

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = n$ ឬ $a_n = na_{n-1} = n(n-1)a_{n-2} = \cdots = n!$

$b_n = b_{n-1} + \frac{b_{n-1}^2}{b_{n-2}}$ នោះ $\frac{b_n}{b_{n-1}} = 1 + \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$

$v_n = 1 + v_{n-1}$ (តាង $v_n = \frac{b_n}{b_{n-1}}$)

$\Rightarrow (v_n)$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានតួទី១ $v_1 = \frac{b_1}{b_0} = 3$ និង ផលសងរួម $r = 1$

$v_n = v_1 + (n-1)r = 3 + n - 1 = n + 2$

$\frac{b_n}{b_{n-1}} = n + 2$ ឬ $b_n = (n+2)b_{n-1} = (n+2)(n+1)b_{n-2} = \cdots = \frac{(n+2)!}{2}$

$\Rightarrow \frac{b_n}{a_n} = \frac{(n+2)!}{2n!} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

ដូចនេះ $\frac{b_n}{a_n} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

៦៧ ΔABC ជាត្រីកោណសមបាតដែលមានមុំកំពូល $\angle ACB = 106^0$ ។ M ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណដែល $\angle MAC = 7^0$ និង $\angle MCA = 23^0$ ។ គណនា $\angle MBC$ ។

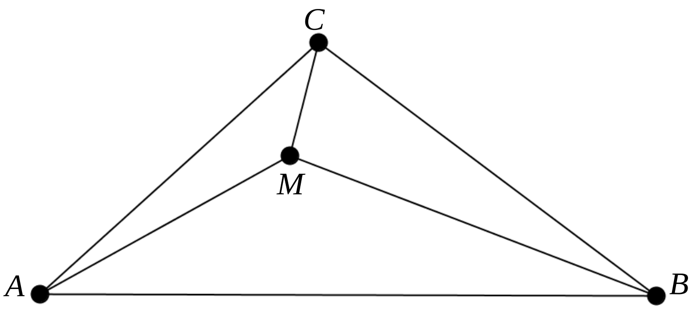
ដំណោះស្រាយ

របៀបទី ១

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសចំពោះ ΔAMC

$\frac{AC}{\sin M} = \frac{MC}{\sin A}$ ឬ $\frac{AC}{\sin(180^0 - 7^0 - 23^0)} = \frac{MC}{\sin 7^0}$

$$\frac{AC}{\sin 150^0} = \frac{MC}{\sin 7^0} \Rightarrow \frac{AC}{MC} = \frac{\sin 150^0}{\sin 7^0}$$



តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសចំពោះ ΔBMC

$$\frac{BC}{\sin M}=\frac{MC}{\sin B} \text{ ឬ } \frac{AC}{\sin M}=\frac{MC}{\sin\left(180^0-83^0-M\right)}$$

$$\frac{AC}{\sin M}=\frac{MC}{\sin\left(97^0-M\right)}\Rightarrow\frac{AC}{MC}=\frac{\sin M}{\sin\left(97^0-M\right)}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2\sin 7^0}=\frac{\sin M}{\sin\left(97^0-M\right)}$$

$$\sin\left(97^0-M\right)=2\sin 7^0\sin M$$

$$\sin\left(90^0+7^0-M\right)=2\sin 7^0\sin M$$

$$\cos\left(7^0-M\right)=2\sin 7^0\sin M$$

$$\cos 7^0\cos M+\sin 7^0\sin M=2\sin 7^0\sin M$$

$$\cos 7^0\cos M-\sin 7^0\sin M=0$$

$$\cos\left(7^0+M\right)=0$$

$\Rightarrow 7^0+M=90^0$ ឬ $M=83^0$ (ព្រោះ M ជាមុំក្នុងត្រីកោណ)

ដូចនេះ $M=83^0$

របៀបទី ២

តាង $CA=CB=1$ (រូបដូចរបៀបទី ១)

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសក្នុង ΔAMC

$$\frac{1}{\sin M}=\frac{MC}{\sin A} \text{ ឬ } \frac{1}{\sin\left(180^0-7^0-23^0\right)}=\frac{MC}{\sin 7^0}$$

$$\frac{1}{\sin 150^0}=\frac{MC}{\sin 7^0}$$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសចំពោះ ΔBMC

$$MB^2=MC^2+BC^2-2.MC.BC.\cos C$$

$$=4\sin^2 7^0+1-4\sin 7^0\cos\left(106^0-23^0\right)$$

$$=4\sin^2 7^0+1-4\cos\left(90^0-7^0\right)$$

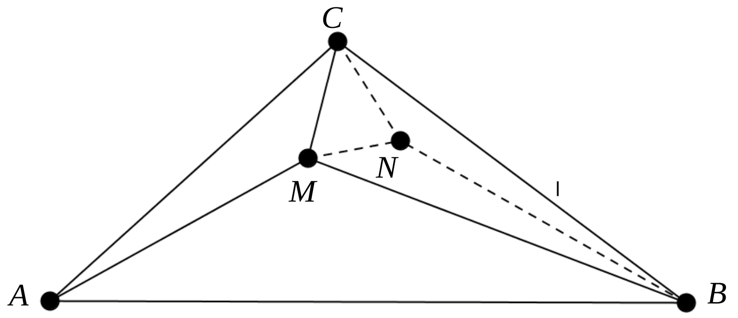
$$=4\sin^2 7^0+1-4\sin^2 7^0=1$$

$$\Rightarrow MB=1$$

គេបាន ΔBMC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល B

រិបាក $\angle BMC = \angle MCB = 83^0$

របៀបទី ៣



តាង N ជាចំណុចមួយនៅក្នុង ΔABC ដែល $\angle NBC = 7^0, \angle NCB = 23^0$ យើងបាន :

$\Delta AMC \cong \Delta BNC$ (ព្រោះត្រីកោណទាំងពីរមាន $\angle MAC = \angle NBC$

$, \angle MCA = \angle NCB, CA = CB$)

រិបាក $CM = CN$

តែ $\angle MCN = 106^0 - 2.23^0 = 60^0$

នោះ ΔMCN ជាត្រីកោណសម័ង្ស

រិបាក $NC = NM, \angle CNM = 60^0$

$\angle BNC = 108^0 - 7^0 - 23^0 = 150^0$

$\angle BNM = 360^0 - 60^0 - 150^0 = 150^0$

នាំឲ្យ $\angle BNC = \angle BNM$

ត្រីកោណ BNC និង BNM មាន :

BN ជាជ្រុងរួម

$NC = NM$ (សម្រាយខាងលើ)

នាំឲ្យ $\Delta BNC \cong \Delta BNM$

រិបាក $\angle BMN = 23^0$

$\angle BMC = 60^0 + 23^0 = 83^0$

ដូចនេះ $\angle BMC = 83^0$

៦៨ គណនា $M = \dfrac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)\cdots(94^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)\cdots(88^4+324)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន :

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

$$x^4+324=x^4+4.3^4$$
$$=x^4+2.x^2.\left(2.3^2\right)+\left(2.3^2\right)^2-2.x^2.\left(2.3^2\right)$$
$$=\left(x^2+2.3^2\right)^2-\left(2.3.x\right)^2$$
$$=\left(x^2+2.3^2-2.3.x\right)\left(x^2+2.3^2+2.3.x\right)$$
$$=\left(x^2-6x+18\right)\left(x^2+6x+18\right)$$
$$=\left[x\left(x-6\right)+18\right]\left[x\left(x+6\right)+18\right]$$

$$\Rightarrow M=\frac{\left(10.4+18\right)\left(10.16+18\right)\left(22.16+18\right)\left(22.28+18\right)\cdots\left(94.88+18\right)\left(94.100+18\right)}{\left(4.\left(-2\right)+18\right)\left(4.10+18\right)\left(16.10+18\right)\left(16.22+18\right)\cdots\left(88.82+18\right)\left(88.94+18\right)}$$

$$=\frac{94.100+18}{4.\left(-2\right)+18}=\frac{9,418}{10}=941.8$$

ដូចនេះ $M=941.8$

៦៩ ត្រីកោណ ABC មាន $\angle C$ ជាមុំទាល ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{\tan A+\tan B}{2}\geq\tan\frac{A+B}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន :

$$\tan A+\tan B=\frac{\sin\left(A+B\right)}{\cos A\cos B}=\frac{\sin\left(A+B\right)}{\frac{1}{2}\left[\cos\left(A-B\right)+\cos\left(A+B\right)\right]}$$
$$=\frac{2\sin\left(A+B\right)}{\cos\left(A-B\right)+\cos\left(A+B\right)}\quad(1)$$

ដោយ $\angle C$ ជាមុំទាល នោះ $0<A-B<A+B<90^0$

$0<\cos\left(A-B\right)+\cos\left(A+B\right)\leq1+\cos\left(A+B\right)$ ព្រោះ $\cos\left(A-B\right)\leq1$

$$\Rightarrow\frac{2\sin\left(A+B\right)}{\cos\left(A-B\right)+\cos\left(A+B\right)}\geq\frac{2\sin\left(A+B\right)}{1+\cos\left(A+B\right)}$$
$$\geq\frac{4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\cos^2\frac{A+B}{2}}=2\tan\frac{A+B}{2}\quad(2)$$

តាម (1) និង (2) :

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ॥

$\tan A+\tan B\geq 2\tan\frac{A+B}{2}$ ឬ $\frac{\tan A+\tan B}{2}\geq\tan\frac{A+B}{2}$

ដូចនេះ $\frac{\tan A+\tan B}{2}\geq\tan\frac{A+B}{2}$

៧០ គេឲ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(1)=211, f(2)=375, f(3)=420$, $f(4)=523$ និង $f(n)=f(n-1)-f(n-2)+f(n-3)-f(n-4)$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 5$ ។ រក $f(2017)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន :

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2)+f(n-3)-f(n-4)$$

$$f(n-1)=f(n-2)-f(n-3)+f(n-4)-f(n-5)$$

បូកអង្គ និង អង្គ:

$$f(n)=-f(n-5)\Rightarrow f(n)=(-1)^k f(n-5k)$$

ដោយ $2017=5\times 403+2$

$$\Rightarrow f(2017)=(-1)^{403} f(2017-5\times 403)=-f(2)=-375$$

ដូចនេះ $f(2017)=-375$

៧១ គេឲ្យ a,b និង c ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $c=(a+bi)^3-47i$ ដែល $i^2=-1$ ។ គណនា c ។

ដំណោះស្រាយ

$c=(a+bi)^3-47i$ នោះ $c+47i=a^3+3a^2bi+3ab^2i^2+b^3i^3$

$$c+47i=\left(a^3-3ab^2\right)+\left(3a^2b-b^3\right)i$$

គេទាញបាន :

$$\begin{cases} c=a^3-3ab^2 & (1)\\ 3a^2b-b^3=47 & (2)\end{cases}$$

(2): $\left(3a^2-b^2\right)b=47$

ដោយ a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ 47 ចែកដាច់នឹង b

គេបាន $b=1, b=47$ ព្រោះ 47 ជាចំនួនបឋម

ចំពោះ $b=1$ នោះ $(2): 3a^2-1=47$ ឬ $3a^2=48$

$$a^2=16$$

$$a=4$$

$$(1): c=4^3-3(4)(1)^2=52$$

ចំពោះ $b=47$ នោះ $(2): 3a^2(47)-47^3=47$

ឬ $3a^2=2210$ មិនអាចព្រោះ 2210 ចែកមិនដាច់នឹង 3

ដូចនេះ $c=52$

៧២ រកចំនួនគត់ដែលធំជាងគេ ហើយតូចជា $\frac{m}{100}$ ដោយដឹងថា

$\frac{1}{2!17!}+\frac{1}{3!16!}+\frac{1}{4!15!}+\cdots+\frac{1}{9!10!}=\frac{m}{2!17!}$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$\frac{1}{2!17!}+\frac{1}{3!16!}+\cdots+\frac{1}{9!10!}=\frac{m}{1!18!}$$

នោះ $\frac{19!}{2!17!}+\frac{19!}{3!16!}+\cdots+\frac{19!}{9!10!}=\frac{19!m}{1!18!}$

$$c(19,2)+c(19,3)+\cdots+c(19,9)=19m \quad (1)$$

តែ $c(19,0)+c(19,1)+\cdots+c(19,19)=(1+1)^{19}=2^{19}$ (ទ្វេធាញូតុន)

$$1+19+c(19,2)+c(19,3)+\cdots+c(19,17)+19+1=2^{19}$$

$$c(19,2)+c(19,3)+\cdots+c(19,17)=2^{19}-40 \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន :

$38m=2^{19}-40$ ឬ $m=\frac{2^{19}-40}{38}=\frac{262,164}{38}=13,796$

$$\frac{m}{100}=137.96$$

ដូចនេះ ចំនួនគត់ដែលធំជាងគេ ហើយតូចជាង $\frac{m}{100}$ គឺ 137

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

(៧៣) គេឲ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_1=1$ និង $5^{a_{n+1}-a_n}-1=\dfrac{1}{n+\frac{2}{3}}, n\geq 1$ ហើយ a_m ជាចំនួនគត់ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m ។ រកតម្លៃតូចបំផុតនៃ m ។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី ១

យើងមាន :

$5^{a_{n+1}-a_n}-1=\dfrac{1}{n+\frac{2}{3}}$ ឬ $5^{a_{n+1}-a_n}=\dfrac{3}{3n+2}+1$

$$5^{a_{n+1}-a_n}=\frac{3+3n+2}{3n+2}$$

$$5^{a_{n+1}-a_n}=\frac{3n+5}{3n+2}$$

នាំអោយ $a_{n+1}-a_n=\log_5\left(\dfrac{3n+5}{3n+2}\right)$

$$a_{n+1}-a_n=\log_5(3n+5)-\log_5(3n+2)$$

យក $n=1,2,....,m$ គេបាន :

$$\begin{cases} a_2-a_1=\log_5 8-\log_5 5 \\ a_3-a_2=\log_5 11-\log_5 8 \\ .... \\ a_m-a_{m-1}=\log_5(3m+2)-\log_5(3m-1) \end{cases}$$

បូកអង្គ និង អង្គ :

$a_m-a_1=\log_5(3m+2)-\log_5 5$ ឬ $a_m=\log_5(3m+2)$ ព្រោះ $a_1=1$

a_m ជាចំនួនគត់លុះត្រាតែ $3m+2=5,5^2,......$

· ចំពោះ $3m+2=5$ នោះ $m=1$ មិនយក (ព្រោះ $m>1$)

· ចំពោះ $3m+2=5^2$ នោះ $3m=23$ មិនយក (ព្រោះ m ជាចំនួនគត់)

· ចំពោះ $3m+2=5^3$ នោះ $m=41$ ជាចម្លើយ

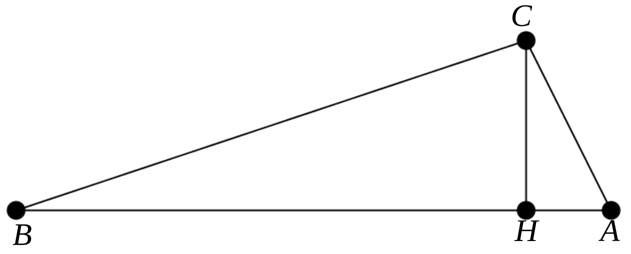
ដូចនេះ $m=41$

របៀបទី ២ ប្រើវិចារអនុមាណរួមគណិតវិទ្យា

៧៤ ត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ C និងមានកម្ពស់ CH ។ រកប្រវែងជ្រុងនៃត្រីកោណ ABC សុទ្ធតែជាចំនួនគត់ និង $BH=29^3$ ។ គណនា $\cos B$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $\cos B$



$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c}$ (ត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ C)

$\cos B=\frac{BH}{BC}=\frac{29^3}{a}$ (ត្រីកោណ BCH កែងត្រង់ H)

គេបាន $\frac{a}{c}=\frac{29^3}{a}$ ឬ $a^2=29^3c$ (ទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា a ចែកដាច់នឹង 29^2)

$\Rightarrow\frac{a}{29^2}=\frac{29c}{a}=k$ (k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន)

$\Rightarrow\begin{cases}a=29^2k\\29c=ak=29^2k^2\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}a=29^2k\\c=29k^2\end{cases}$

តែត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ C នោះ $BC^2+AC^2=AB^2$

$$a^2+b^2=c^2$$
$$29^4k^2+b^2=29^2k^4$$

$\Rightarrow b^2$ ចែកដាច់នឹង 29^2k^2 គឺ $b^2=29^2k^2l^2$ (l ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន)

$\Rightarrow 29^4k^2+29^2k^2l^2=29^2k^4$ ឬ $29^2+l^2=k^2$

$k^2-l^2=29^2$

$(k-l)(k+l)=1\times29^2$

$\begin{cases}k-l=1\\k+l=29^2\end{cases}$

$\Rightarrow 2k=29^2+1=481+1=482$ ឬ $k=421$

$\Rightarrow a=29^2\times421$

$\Rightarrow\cos B=\frac{29^3}{29^2\times421}=\frac{29}{421}$

ដូចនេះ $\cos B=\frac{29}{421}$

៧៥ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $-1<\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}\right)-\ln n\le\frac{1}{2}, n=1,2,\cdots$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងនិងស្រាយថា $\frac{x}{x+1}<\ln(x+1)<x,\ x>0\quad(1)$

តាង $h(x)=x-\ln(1+x)$

$$g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$$

នោះចំពោះ $x>0$ គេបាន $h'(x)=1-\frac{1}{1+x}>0$

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}>0$$

នាំអោយ $h(x)>h(0)=0$, $g(x)>g(0)=0$

គេបាន $\frac{x}{x+1}<\ln(x+1)<x,\ x>0$ ពិត

តាង $x=\frac{1}{n}$ រួចជំនួសចូល (1) យើងបាន

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

តាង $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n$

នោះ $x_n-x_{n-1}=\frac{n}{n^2+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$

$$<\frac{n}{n^2+1}-\frac{1}{n}$$

$$=-\frac{1}{n(n^2+1)}<0$$

នាំអោយ $x_n<x_{n-1}<\cdots<x_1=\frac{1}{2}$

ដោយ $\ln n=(\ln n-\ln(n-1))+(\ln(n-1)-\ln(n-2))+\cdots+(\ln 2-\ln 1)+\ln 1$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

យើងបាន $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{k^2+1}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)+\frac{n}{n^2+1}$$

$$>\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{k^2+1}-\frac{1}{k}\right)$$

$$=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\left(k^2+1\right)k}$$

$$\geq-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)k}$$

$$=-1+\frac{1}{n}>-1$$

ដូចនេះ $-1<\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}\right)-\ln n\leq\frac{1}{2},n=1,2,\cdots$

៧៦ រកគ្រប់គូ (p,q) ជាចំនួនបឋមផ្ទៀងផ្ទាត់ $pq\mid 5^p+5^q$ ។

ដំណោះស្រាយ

- បើ $2\mid pq$ នោះយើងឧបមាថា $p=2$

គេបាន $q\mid 5^q+25$

តាមទ្រឹស្តីបទ ហ្វែរម៉ាត $q\mid 5^q-5$ នោះ $q\mid 30$

ចម្លើយគឺ $(2,3)$ និង $(2,5)$ ព្រោះ $(2,2)$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

- បើ $5\mid pq$ នោះយើងឧបមាថា $p=5$

គេបាន $5q\mid 5^q+5^5$

តាមទ្រឹស្តីបទហ្វែរម៉ាត $q\mid 5^{q-1}-1$ នោះ $q\mid 313$

ចម្លើយគឺ $(5,5)$ និង $(5,313)$

តែយើងមាន $pq\mid 5^{p-1}+5^{q-1}$ ហើយ $5^{p-1}+5^{q-1}\equiv 0\ (\text{mod } p)\ (1)$

តាមទ្រឹស្តីបទហ្វែរម៉ាត $5^{p-1}\equiv 1\,(\text{mod } p)\quad(2)$

នោះតាម (1) និង (2) $5^{q-1}\equiv -1\ (\text{mod } p)\quad(3)$

យើងកំណត់ $p-1=2^k(2r-1),q-1=2^l(2s-1)$ ដែល k,l,r,s ជាចំនួនគត់

បើ $k\leq l$ នោះតាម (2) និង (3) យើងបាន

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ll

$$1=1^{2^{l-k}(2s-1)}\equiv\left(5^{p-1}\right)^{2^{l-k}(2s-1)}$$
$$=5^{2^{l}(2r-1)(2s-1)}=\left(5^{q-1}\right)^{2r-1}\equiv(-1)^{2r-1}$$
$$\equiv-1\,(\text{mod }p)$$

ផ្ទុយពីការពិតដែល $p\neq 2$ នោះ $k>l$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ គេបាន $k<l$ ផ្ទុយពីការពិត

ដូចនេះ គូនៃចំនួនបឋមដែលអាចមានគឺ $(2,3),(3,2),(2,5),(5,2),(5,5),(5,313)$ និង $(313,5)$

៧៧ ពហុធាចំនួនពិត $\varphi(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ មានរឹសបីវិជ្ជមាន និង $\varphi(0)<0$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2b^3+9a^2d-7abc\leq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង x_1,x_2,x_3 ជារឹសវិជ្ជមានទាំងបីនោះ

តាមទ្រឹស្តីបទវៀែត យើងបាន $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a}\\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}\end{cases}$

ដោយ $\varphi(0)<0$ នោះគេបាន $d<0$ ហើយ $a>0$

យើងចង់ស្រាយថា $2b^3+9a^2d-7abc\leq 0 \quad (1)$

ចែកអង្គទាំងពីរដោយ a^3 យើងបាន

$$7\left(-\frac{b}{a}\right)\frac{c}{a}\leq 2\left(-\frac{b}{a}\right)^3+9\left(-\frac{d}{a}\right)$$

$\Leftrightarrow 7(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\leq 2(x_1+x_2+x_3)^3+9x_1x_2x_3$

$\Leftrightarrow x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2\leq 2\left(x_1^3+x_2^2+x_3^3\right)$ ជាអ្វីដែលត្រូវស្រាយ

ដោយ x_1,x_2,x_3 សុទ្ធតែវិជ្ជមាន នោះ $(x_1-x_2)\left(x_1^2-x_2^2\right)\geq 0$

នោះ $x_1^2x_2+x_2^2x_1\leq x_1^3+x_2^3$

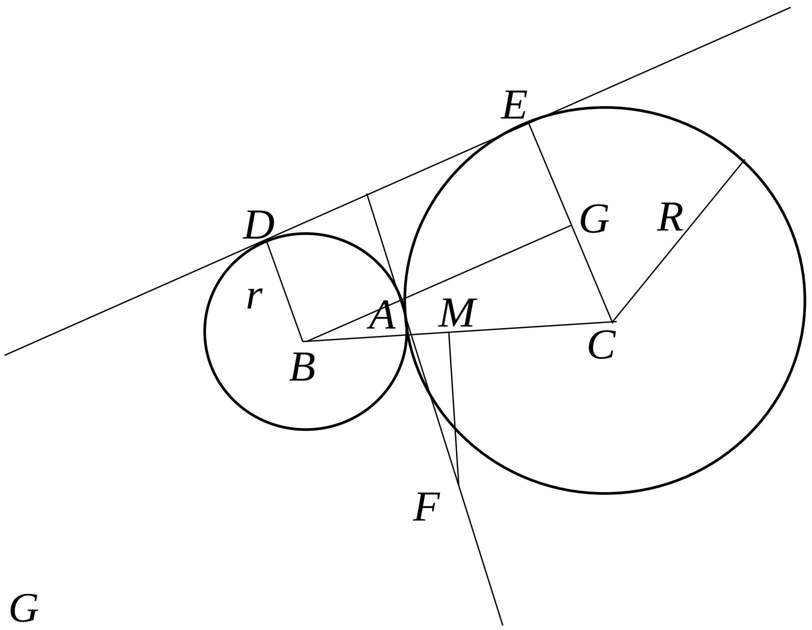
ដូចគ្នាដែរ $x_2^2x_3+x_3^2x_2\leq x_2^3+x_3^3$ និង $x_3^2x_1+x_1^2x_3\leq x_1^3+x_3^3$

បូកបញ្ចូលគ្នា គេបាន $x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2\leq 2\left(x_1^3+x_2^2+x_3^3\right)$ ពិត

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ ប៉ាក់ទូក II

៧៨ រង្វង់ពីរមានកាំ $(R > r)$ មានផ្ចិត C និង B រៀងគ្នា ប៉ះគ្នាខាងក្រៅត្រង់ចំណុច A ។ បន្ទាត់ប៉ះរួមមួយមិនកាត់តាម A ប៉ះរង្វង់ផ្ចិត C ត្រង់ E និង រង្វង់ផ្ចិត B ត្រង់ D ។ បន្ទាត់មួយកាត់តាម A ហើយកែងបន្ទាត់ DE រួចទៅជួបមេដ្យាទ័រនៃ BC ត្រង់ F ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $BC = 2AF$ ។

ដំណោះស្រាយ



សង់ $GB \perp CE$ ត្រង់ G

ត្រីកោណ GBC និងត្រីកោណ MFA មាន

$\angle GBC = \angle MFA$ (មុំមានជ្រុងត្រូវគ្នាកែងរៀងគ្នា)

$\Rightarrow \Delta GBC \sim \Delta MFA$ (ករណីដំនូច ម.ម)

ផលធៀបដំនូច $\dfrac{BC}{AF} = \dfrac{GC}{MA} = \dfrac{R-r}{MA}$

តែ $AM + r = R - AM$ នោះ $AM = \dfrac{R-r}{2}$

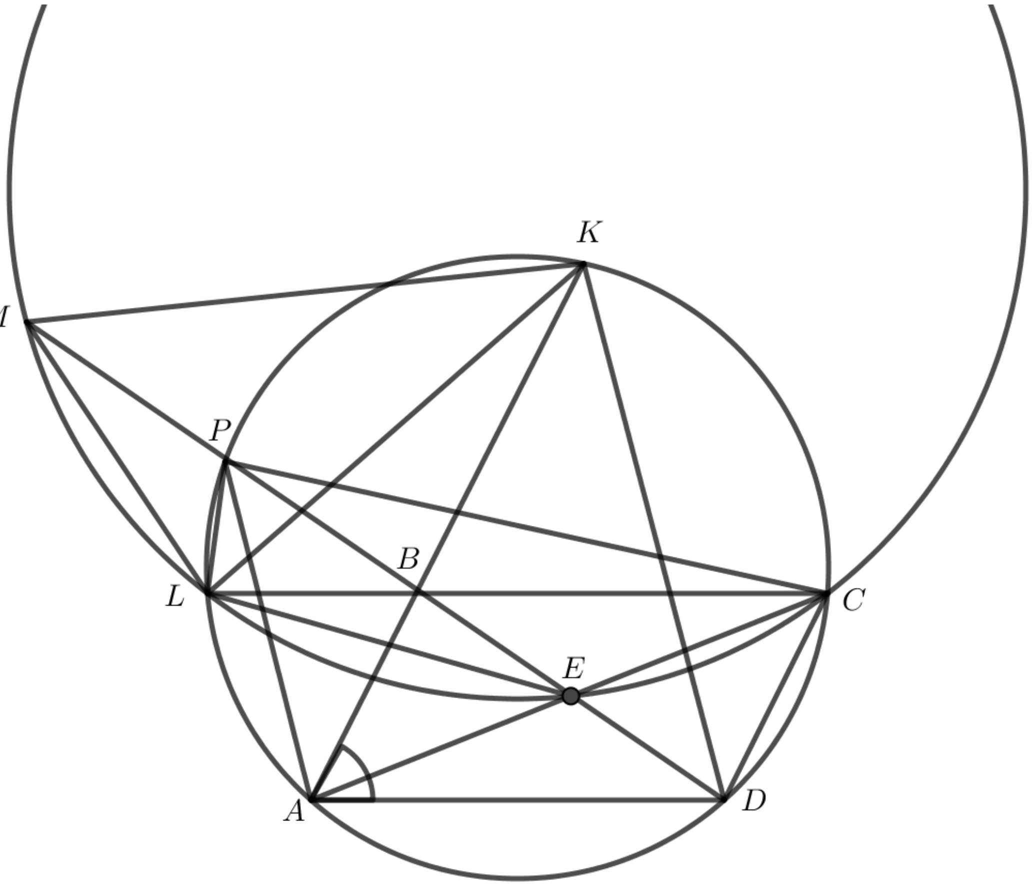
នាំអោយ $\dfrac{BC}{FA} = 2 \times \dfrac{R-r}{R-r} = 2$

ដូចនេះ $BC = 2AF$

៧៩ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាមដែលមាន $\angle BAD = 60^0$ និង E ជាចំណុចប្រសព្វរវាងអង្កត់ទ្រូងរបស់វា ។ រង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ACD ជួបបន្ទាត់ BA ត្រង់ $K \neq A$ និងជួបបន្ទាត់ BD ត្រង់ $P \neq D$ ហើយជួបបន្ទាត់ BC ត្រង់ $L \neq C$ ។ បន្ទាត់ EP ប្រសព្វជាមួយរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ CEL ត្រង់ E និង M ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ត្រីកោណ KLM និង ត្រីកោណ CAP ប៉ុនគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ll



គេមាន $\Delta KBL \sim \Delta CBA, \Delta MBL \sim \Delta CBE$ និង $\Delta APE \sim \Delta DEC$

ផលធៀបដំនូច $\dfrac{KL}{AC} = \dfrac{BL}{AB}, \dfrac{ML}{EC} = \dfrac{BL}{BE}, \dfrac{AP}{CD} = \dfrac{AE}{DE}$

នាំអោយ $\dfrac{ML}{AP} = \dfrac{EC \times BL \times DE}{BE \times AE \times CD}$

តែ E ជាចំណុចប្រសព្វនៃអង្កត់ទ្រូងប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ នោះ $BE = DE, AE = EC$

គេទាញបាន $\dfrac{ML}{AP} = \dfrac{BL}{CD} = \dfrac{BL}{AB} = \dfrac{KL}{AC} \quad (1)$

យើងមាន $\angle LPD = \angle LCD = \angle BAD = 60^0$

យើងរក $\angle KLM = \angle KLP + \angle MLP = \angle KLP + 60^0 - \angle LMP$

$= \angle KLP + 60^0 - \angle LME$

$= \angle KLP + 60^0 - \angle LCE$

$= \angle KLP + \angle ACD$

$= \angle KLP + \angle KLC$ (ព្រោះ $AB \| CD$ និង $KC = AD$)

$= \angle CLP = \angle CAP$ (មុំចារិកស្កាត់ធ្នូរួម CP) (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $\Delta KLM \sim \Delta CAP$

តែ $DL = AC$ (អង្កត់ទ្រូងចតុកោណព្នាយសមបាត $ADCL$)

$DK = AC$ (អង្កត់ទ្រូងចតុកោណព្នាយសមបាត $ADCK$)

នោះ $DL = AC = DK$ ហើយមុំ $\angle BAD = 60$ ត្រូវស្កាត់ដោយធ្នូ DK

នាំអោយ ΔKDL ជាត្រីកោណសម័ង្ស ដែលមាន $KL = DK = AC$

ដូចនេះ ΔKLM ប៉ុន ΔCAP

៨០ គេអោយ x_0 ជារឹសនៃសមីការ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(ad \neq 0)$ ។ តាង

$\alpha = \max\left\{\left|\frac{b}{a}\right|;\left|\frac{c}{a}\right|;\left|\frac{d}{a}\right|\right\}$ និង $\beta = \max\left\{\left|\frac{a}{d}\right|;\left|\frac{b}{d}\right|;\left|\frac{c}{d}\right|\right\}$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{1+\beta} < |x_0| < 1 + \alpha$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) យើងស្រាយថា $1 + \alpha > |x_0|$

គេមាន x_0 ជារឹសនៃសមីការ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

នោះ $ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = 0 \quad (1)$

ដោយ $ad \neq 0$ នោះ $a \neq 0$ និង $d \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0^3 + \frac{b}{a}x_0^2 + \frac{c}{a}x_0 + \frac{d}{a} = 0 \\ \frac{a}{d}x_0^3 + \frac{b}{d}x_0^2 + \frac{c}{d}x_0 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_0^3 = \frac{b}{a}x_0^2 + \frac{c}{a}x_0 + \frac{d}{a} \\ -1 = \frac{a}{d}x_0^3 + \frac{b}{d}x_0^2 + \frac{c}{d}x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x_0|^3 = \left|\frac{b}{a}x_0^2 + \frac{c}{a}x_0 + \frac{d}{a}\right| \quad (2) \\ 1 = \left|\frac{a}{d}x_0^3 + \frac{b}{d}x_0^2 + \frac{c}{d}x_0\right| \quad (3) \end{cases}$$

តាម $(2) \Rightarrow |x_0|^3 \leq \left|\frac{b}{a}\right|x_0^2 + \left|\frac{c}{a}\right||x_0| + \left|\frac{d}{a}\right| \leq \alpha\left(x_0^2 + |x_0| + 1\right)$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

$$\Rightarrow |x_0|^3 \le \alpha\left(x_0^2 + |x_0| + 1\right)$$

$$\alpha \ge \frac{|x_0|^3}{x_0^2 + |x_0| + 1}$$

$$\Rightarrow \alpha + 1 \ge \frac{|x_0|^3 + |x_0|^2 + |x_0| + 1}{|x_o|^2 + |x_0| + 1} = |x_0| + \frac{1}{|x_0|^2 + |x_0| + 1}$$

$\Rightarrow \alpha + 1 > |x_0|$ ពិត

ខ) យើងស្រាយថា $\frac{1}{1+\beta} < |x_0|$

តាម $(3) \Rightarrow 1 \le \left|\frac{a}{d}\right||x_0|^3 + \left|\frac{b}{d}\right||x_0|^2 + \left|\frac{c}{d}\right||x_0| \le \beta\left(|x_0|^3 + |x_0|^2 + |x_0|\right)$

$$\Rightarrow \beta \ge \frac{1}{|x_0|^3 + |x_0|^2 + |x_0|}$$

$$\Rightarrow \beta + 1 \ge \frac{1 + |x_0| + |x_0|^2 + |x_0|^3}{|x_0|^3 + |x_0|^2 + |x_0|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\beta} \le \frac{|x_0| + |x_0|^2 + |x_0|^3}{1 + |x_0| + |x_0|^2 + |x_0|^3}$$

តែ $d \ne 0$ គេបាន $x_0 \ne 0$ យើងបាន

$$\frac{1}{1+\beta} < \frac{|x_0| + |x_0|^2 + |x_0|^3 + |x_0|^4}{1 + |x_0| + |x_0|^2 + |x_0|^3}$$

$$\frac{1}{1+\beta} < |x_0|$$

សរុបមក $\frac{1}{1+\beta} < |x_0| < 1 + \alpha$

៨១ រកចំនួនពិត a, b, c នៃអនុគមន៍ $f(x) = ax^2 + bx + c$ ដោយដឹងថា $|f(x)| \le 1, \forall |x| \le 1$ ហើយ $T = \frac{8}{3}a^2 + 2b^2$ មានតម្លៃអតិបរមា ។

ដំណោះស្រាយ

តាមសម្មតិកម្ម $\begin{cases}|f(0)|\le 1\\ |f(1)|\le 1\\ |f(-1)|\le 1\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}|c|\le 1 & (1)\\ |a+b+c|\le 1 & (2)\\ |a-b+c|\le 1 & (3)\end{cases}$

តាម (1) និង (2) គេបាន $|a+b+c|+|-c|\le 2$

ហើយ $|a+b+c|+|-c|\ge|a+b+c-c|$

នាំអោយ $2\ge|a+b|\quad(4)$

តាម (1) និង (3) គេបាន $2\ge|a-b|\ (5)$

តាម (4) និង (5) គេទាញបាន $\begin{cases}4\ge|a+b|^2\\ 4\ge|a-b|^2\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}4\ge a^2+b^2+2ab\\ 4\ge a^2+b^2-2ab\end{cases}$

$\Rightarrow 8\ge 2a^2+2b^2$

$\Rightarrow 4\ge a^2+b^2\quad(6)$

តាម (6) គេបាន $T=\frac{8}{3}a^2+2b^2\le\frac{8}{3}a^2+\frac{8}{3}b^2\le\frac{8}{3}\left(a^2+b^2\right)\le\frac{8}{3}\cdot 4$

$\Rightarrow T\le\frac{24}{3}$

សមភាពកើតមានកាលណា $\begin{cases}b=0\\ a^2+b^2=4\\ (a+b+c)(-c)\ge 0\\ |c|=1\\ |a+b+c|=1\end{cases}$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ |a|=2 \\ |c|=1 \\ (a+c)c \le 0 \\ |a+c|=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=0 \\ a=2 \\ c=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=0 \\ a=-2 \\ c=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

ដូចនេះ $(a,b,c)=(2,0,-1)$ និង $(a,b,c)=(-2,0,1)$

៨២ គេអោយ $x_1,x_2,\cdots,x_n \ge 1$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2^{n-1} \ge \frac{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)}{1+x_1x_2\cdots x_n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះ $a \ge 1, b \ge 1$ គេបាន $(a-1)(b-1) \ge 0$

$ab+1 \ge a+b$

$2ab+2 \ge a+b+ab+1$

$2(ab+1) \ge (a+1)(b+1)$

យើងបាន $(1+x_1)(1+x_2) \le 2(1+x_1x_2)$

$(1+x_3)(1+x_1x_2) \le 2(1+x_1x_2x_3)$

$(1+x_4)(1+x_1x_2x_3) \le 2(1+x_1x_2x_3x_4)$

....

$(1+x_n)(1+x_1x_2\cdots x_{n-1}) \le 2(1+x_1x_2\cdots x_n)$

នាំអោយ $2^{n-1} \ge \frac{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)}{1+x_1x_2\cdots x_n}$ ពិត

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

(៨៣) គេអោយ $a_i > 0\left(i=1,2,\cdots,n\right)$ ដែល $n\in N, n>2$ ។ តាង $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a_1}{S-a_1}+\frac{a_2}{S-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{S-a_n}\geq\frac{n}{n-1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន $\frac{a_1-S+S}{S-a_1}+\frac{a_2-S+S}{S-a_2}+\cdots+\frac{a_n-S+S}{S-a_n}\geq\frac{n}{n-1}$

$$-1+\frac{S}{S-a_1}-1+\frac{S}{S-a_2}+\cdots-1+\frac{S}{S-a_n}\geq\frac{n}{n-1}$$

$$S\left(\frac{1}{S-a_1}+\frac{1}{S-a_2}+\cdots+\frac{1}{S-a_n}\right)\geq\frac{n}{n-1}+n$$

$$S\left(\frac{1}{S-a_1}+\frac{1}{S-a_2}+\cdots+\frac{1}{S-a_n}\right)\geq\frac{n^2}{n-1}$$

យើងនិងស្រាយថា $\left(n-1\right)S\left(\frac{1}{S-a_1}+\frac{1}{S-a_2}+\cdots+\frac{1}{S-a_n}\right)\geq n^2$ ពិត

គេមាន $\left(n-1\right)S=\left[\left(S-a_1\right)+\left(S-a_2\right)+\cdots+\left(S-a_n\right)\right]$

តាង $T=\left(n-1\right)S\left(\frac{1}{S-a_1}+\frac{1}{S-a_2}+\cdots+\frac{1}{S-a_n}\right)$

$$T=\left[\left(S-a_1\right)+\left(S-a_2\right)+\cdots+\left(S-a_n\right)\right]\left(\frac{1}{S-a_1}+\cdots+\frac{1}{S-a_n}\right)$$

យក $x_1=S-a_1, x_2=S-a_2,\cdots,x_n=S-a_n$

នាំអោយ $\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2$ ឬ $T\geq n^2$ ពិត

ដូចនេះ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a_1}{S-a_1}+\frac{a_2}{S-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{S-a_n}\geq\frac{n}{n-1}$

(៨៤) ត្រីកោណ ABC មានមុំទាំងបីជាមុំស្រួច ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan^8 A+\tan^8 B+\tan^8 C\geq 9\tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយត្រីកោណ ABC មានមុំស្រួចទាំងបីនោះ $A,B,C\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

តាង $x=\tan A, y=\tan B, z=\tan C$

ប្រើសមភាពដែលគេស្គាល់ស្រាប់គឺ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

គេបាន $x+y+z=xyz \quad (1)$

តាមវិសមភាពកូស៊ី $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz} \quad (2)$

តាម (1) និង (2) នោះ $xyz\geq 3\sqrt[3]{xyz}$

នាំអោយ $(xyz)^2\geq 27$

តាមវិសមភាពកូស៊ី $x^8+y^8+z^8\geq 3\sqrt[3]{(xyz)^8}$

$$\geq 3.(xyz)^2.\sqrt[3]{(xyz)^2}$$

$$\geq 3(xyz)^2.\sqrt[3]{27}$$

នាំអោយ $x^8+y^8+z^8\geq 9x^2y^2z^2$ ពិត

៨៥ គេអោយ $a>0,b>0,x>0,y>0$ ដែល $x>y$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left(a^x+b^x\right)^y<\left(a^y+b^y\right)^x$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះ $a>0,b>0\,,x>y>0$ គេចង់ស្រាយថា $\left(a^x+b^x\right)^y<\left(a^y+b^y\right)^x \quad (1)$

គេបាន $a^{xy}\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^x\right]^y<a^{xy}\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^y\right]^x$

$$\Leftrightarrow\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^x\right]^y<\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^y\right]^x \quad (2)$$

តាង $\frac{b}{a}=c>0$ នោះ $\left(1+c^x\right)^y<\left(1+c^y\right)^x$

ឬ $\left(1+c^x\right)^{\frac{1}{x}}<\left(1+c^y\right)^{\frac{1}{y}}$ (លើកស្វ័យគុណ $\frac{1}{xy}$)

គេបាន $\ln\left[\left(1+c^x\right)^{\frac{1}{x}}\right]<\ln\left[\left(1+c^y\right)^{\frac{1}{y}}\right]$

$$\frac{\ln\left(1+c^x\right)}{x}<\frac{\ln\left(1+c^y\right)}{y} \quad (3)$$

តាង $f(t)=\frac{\ln\left(1+c^t\right)}{t}$ ដែល $t>0$

$$f'(t)=\frac{\frac{1}{1+c^t}\cdot c^t\ln c^t-\ln\left(1+c^t\right)}{t^2}$$

$$=\frac{c^t\ln c^t-\left(1+c^t\right)\ln\left(1+c^t\right)}{t^2\left(1+c^t\right)}$$

នោះ $f'(t)<0\,;\forall t>0$

អនុគមន៍ $f(t)$ ជាអនុគមន៍ចុះ

ចំពោះ $x>y>0$ គេបាន $f(x)<f(y)$

នាំអោយ $\left(a^x+b^x\right)^y<\left(a^y+b^y\right)^x$ ពិត

៨៦ ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n\geq 2$ គេបាន $2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាព Bernoulli គេបាន $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1+n\cdot\frac{1}{n}>2$ ពិត (1)

តាង $U_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ និង $V_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\,;n\geq 2$

តាមវិសមភាពកូស៊ីដែលមាន $(n+1)$ តួ

$x_1=1,x_2=\cdots=x_{n+1}=1+\frac{1}{n}$ គេបាន

$$1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left[\frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}\right]^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

នាំអោយ $U_n<U_{n+1}$ ចំពោះ $n\geq 2$

ស្រដៀងគ្នាដែរ $V_{n+1}<V_n\,;n\geq 2$

ស្វ៊ីត (U_n) ជាស្វ៊ីតចុះ និងស្វ៊ីត (V_n) ជាស្វ៊ីតកើន

នាំអោយ $U_n<V_n$ ហើយ $U_n<V_m\,;m,n\geq 2$

នោះ $U_n<V_{10}<3\,;n\geq 2$ ពិត (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ll

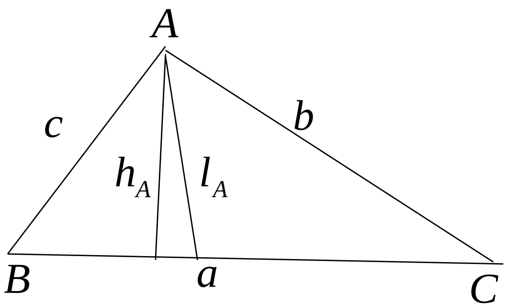
(៨៧) R និង r ជាកាំនៃរង្វង់ចារិកក្រៅ និង ចារិកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ។ h_A ជាកម្ពស់ដែលគូសចេញពីកំពូល A ។ l_A, l_B ជាកន្លះបន្ទាត់ពុំនៃមុំ A និង B ។

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{h_A}{l_A} \geq \sqrt{\frac{2r}{R}}$ ។

ខ) គេអោយ $C = \frac{\pi}{2}$ ហើយ I ជាចំណុចប្រសព្វរវាង l_A និង l_B ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $l_A . l_B = 2IA.IB$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{h_A}{l_A} \geq \sqrt{\frac{2r}{R}}$



ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $ABC : S = \frac{1}{2} a h_A = \frac{1}{2}(b+c) l_A \sin\frac{A}{2} = \frac{abc}{4R} = pr$

នោះ $\frac{h_A}{l_A} = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{a} = \frac{2R(\sin B + \sin C)\sin\frac{A}{2}}{2R\sin A}$

$$\frac{h_A}{l_A} = \frac{\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \cos\frac{B-C}{2} \quad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{2r}{R} = \frac{abc}{2pR^2} = \frac{8R^3 \sin A \sin B \sin C}{2R^3(\sin A + \sin B + \sin C)}$

ដោយ $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$\sin A \sin B \sin C = 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

នាំអោយ $\frac{2r}{R} = 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$\frac{2r}{R}=4\cos\frac{B+C}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right]$$

ដើម្បីបាន $\frac{h_A}{l_A}\geq\sqrt{\frac{2r}{R}}$ យើងត្រូវស្រាយថា

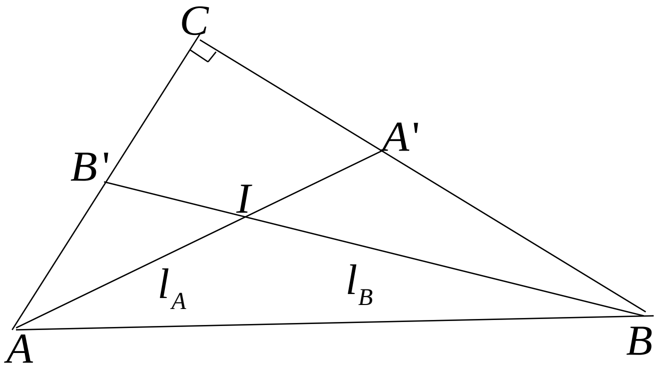
$$\cos^2\frac{B-C}{2}\geq 4\cos\frac{B+C}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right]$$

$$\cos^2\frac{B-C}{2}-4\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}+4\cos^2\frac{B+C}{2}\geq 0$$

នាំអោយ $\left(\cos\frac{B-C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\right)^2\geq 0$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{h_A}{l_A}\geq\sqrt{\frac{2r}{R}}$

ខ)ស្រាយបញ្ជាក់ថា $l_A.l_B=2IA.IB$



តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ AIB យើងបាន

$$\frac{IA}{\sin\frac{B}{2}}=\frac{IB}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{c}{\sin\left(\pi-\frac{A+B}{2}\right)}=\frac{c}{\sin\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow\frac{IA.IB}{\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}}=\frac{c^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow IA.IB=2c^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\quad(1)$$

ក្នុងត្រីកោណ BCB' និង ត្រីកោណ ACA' គេបាន

$$\cos\frac{B}{2}=\frac{a}{l_B},\ \cos\frac{A}{2}=\frac{b}{l_A}$$

នាំអោយ $l_A.l_B.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}=ab\ (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន $ab.IA.IB=2c^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}(l_A.l_B)$

$4R^2\sin A\sin B.IA.IB=2R^2\sin A\sin B(l_A.l_B)$ (ព្រោះ $C=2R$)

នាំអោយ $l_A.l_B=2IA.IB$ ពិត

៨៨ ក) គេអោយ $u>0,v>0$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{u^2+v^2}{u+v}\geq\frac{u+v}{2}$ ។

តើពេលណាទើបសញ្ញា $(=)$ កើតមាន?

ខ) គេអោយ $x,y,z>0$ ។ តាង $S=\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}$ និង

$T=\frac{y^2}{x+y}+\frac{z^2}{y+z}+\frac{x^2}{z+x}$ ។ ចូរស្រាយថា $S=T$ និងទាញឲ្យបាន $S\geq\frac{x+y+z}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{u^2+v^2}{u+v}\geq\frac{u+v}{2}$

តាមវិសមភាព Bunhiyacopsky យើងបាន

$$|(u.1+v.1)|\leq\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{u^2+v^2}$$

$$(u+v)^2\leq 2(u^2+v^2)$$

ដោយ $u>0,v>0$ គេបាន $\frac{u^2+v^2}{u+v}\geq\frac{u+v}{2}$ ពិត

ខ) ស្រាយថា $S=T$ និងទាញឲ្យបាន $S\geq\frac{x+y+z}{2}$

យើងបាន $S-T=\frac{x^2-y^2}{x+y}+\frac{y^2-z^2}{y+z}+\frac{z^2-x^2}{z+x}$

$$=x-y+y-z+z-x=0$$

នាំអោយ $S=T$ ពិត

យើងបាន $S+T=\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x}$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

$$\geq \frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{z+x}{2}$$

នាំអោយ $2S \geq x+y+z$

$$S \geq \frac{x+y+z}{2}$$ ពិត

៨៩ ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $15x^2-7y^2=9$ គ្មានចម្លើយជាចំនួនគត់ទេ ។

ដំណោះស្រាយ

ឧបមាថាសមីការ $15x^2-7y^2=9$ មានចម្លើយ

នោះ $y=3y_1$

គេបានសមីការថ្មី $15x^2-63y_1^2=9$

$$5x^2-21y^2=3$$

នោះ $x=3x_1$

គេបាន $45x_1^2-21y_1^2=3$

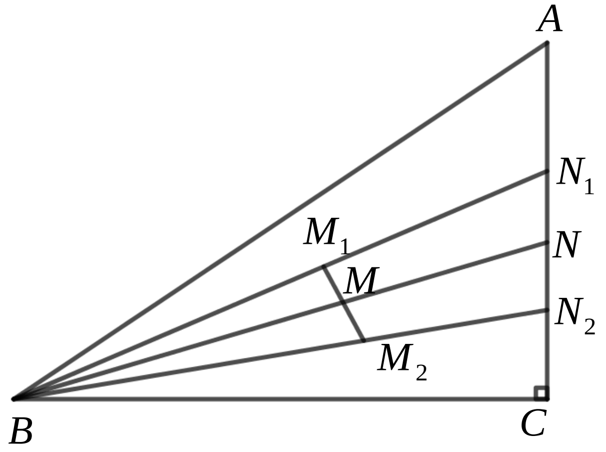
$$15x_1^2-7y_1^2=1$$

$\Rightarrow y_1^2 \equiv -1 \pmod 3$ ផ្ទុយពីការពិត ព្រោះ $y_1^2 \equiv 0 \pmod 3$ ឬ $y_1^2 \equiv 1 \pmod 3$

ដូចនេះ សមីការ $15x^2-7y^2=9$ មានចម្លើយជាចំនួនគត់ទេ

៩០ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C ។ M_1 និង M_2 ជាចំណុចសេរីនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ។ M ជាចំណុចកណ្តាលនៃ M_1M_2 ។ បន្លាយនៃ BM_1, BM និង BM_2 ប្រសព្វ AC ត្រង់ N_1, N និង N_2 រៀងគ្នា ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{M_1N_1}{BM_1}+\frac{M_2N_2}{BM_2} \geq 2\frac{MN}{BM}$ ។

ដំណោះស្រាយ



តាង H_1, H_2, H ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃ M_1, M_2, M រៀងគ្នាមកលើជ្រុង BC

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

គេបាន $\dfrac{M_1N_1}{BM_1}=\dfrac{H_1C}{BH_1}$, $\dfrac{M_2N_2}{BM_2}=\dfrac{H_2C}{BH_2}$

$$\frac{MN}{BM}=\frac{HC}{BH}=\frac{H_1C+H_2C}{BH_1+BH_2}$$

យើងកំណត់យក $BC=1, BH_1=x, BH_2=y$ យើងបាន

$$\frac{M_1N_1}{BM_1}=\frac{H_1C}{BH_1}=\frac{1-x}{x}$$

$$\frac{M_2N_2}{BM_2}=\frac{H_2C}{BH_2}=\frac{1-y}{y}$$

នាំអោយ $\dfrac{MN}{BM}=\dfrac{HC}{BH}=\dfrac{1-x+1-y}{x+y}$

យើងត្រូវស្រាយថា $\dfrac{1-x}{x}+\dfrac{1-y}{y}\ge 2\dfrac{1-x+1-y}{x+y}$ ឬ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{4}{x+y}$

$(x-y)^2\ge 0$ ពិត

ដូចនេះ $\dfrac{M_1N_1}{BM_1}+\dfrac{M_2N_2}{BM_2}\ge 2\dfrac{MN}{BM}$

៩១ ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\ln k\le\int_k^{k+1}\ln x dx\le\ln(k+1)$, $k>0$ ។

ខ) ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n\ge 1$ ស្រាយថា $(n-1)!\le n^n e^{1-n}<n!$ ។

គ) គេដឹងថា $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ ដែល $a>0$ ។

ទាញរក $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\ln k\le\int_k^{k+1}\ln x dx\le\ln(k+1)$, $k>0$

ចំពោះ $k\le x\le k+1$ គេបាន $\ln k\le\ln x\le\ln(k+1)$

នាំអោយ $\int_k^{k+1}\ln k dx\le\int_k^{k+1}\ln x dx\le\int_k^{k+1}\ln(k+1)dx$

$$\ln k[x]_k^{k+1}\le\int_k^{k+1}\ln x dx\le\ln(k+1)[x]_k^{k+1}$$

$$\ln k\left[(k+1)-k\right]\le\int_k^{k+1}\ln x dx\le\ln(k+1)(k+1-k)$$

នាំអោយ $\ln k \le \int_k^{k+1} \ln x dx \le \ln(k+1)$, $k>0$ ពិត

ខ) ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n \ge 1$ ស្រាយថា $(n-1)! \le n^n e^{1-n} < n!$

យើងមាន $\ln k \le \int_k^{k+1} \ln x dx \le \ln(k+1)$, $k>0$

អោយតម្លៃ $k = 1, 2, \cdots, n-1$

$$\begin{cases} \ln 1 \le \int_1^2 \ln x dx \le \ln 2 \\ \ln 2 \le \int_2^3 \ln x dx \le \ln 3 \\ \ln 3 \le \int_3^4 \ln x dx \le \ln 4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \ln(n-1) \le \int_{n-1}^{n} \ln x dx \le \ln n \end{cases}$$

បូកបញ្ចូលគ្នាយើងបាន $\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln(n-1) \le \int_1^n \ln x dx \le \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n$

$$\ln(n-1)! \le \int_1^n \ln x dx \le \ln n! \quad (1)$$

តែ $\int_1^n \ln x dx = \left[x \ln x - x \right]_1^n = n(\ln n - 1) + 1$

តាម (1) គេបាន $\ln(n-1)! \le n \ln + 1 - n \le \ln n!$

$$\ln(n-1)! \le \ln\left(n^n . e^{1-n}\right) \le \ln n!$$

នាំអោយ $(n-1)! \le n^n . e^{1-n} \le n!$ ពិត

គ) ទាញរក $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

គេមាន $(n-1)! \le n^n . e^{1-n} \le n!$ នោះ $\frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{n} \le e^{1-n} \le \frac{n!}{n^n}$

ចំពោះ $\frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{n} \le e^{1-n}$ នោះ $\frac{n!}{n^n} \le \frac{ne}{e^n}$

នាំអោយ $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n^n} \le \frac{\sqrt[n]{ne}}{e}$

គេបាន $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{ne}}{e}=\frac{1}{e}\quad(2)$

ចំពោះ $\frac{n!}{n^n}\geq\frac{e}{e^n}$ នោះ $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n^n}\geq\frac{\sqrt[n]{e}}{e}$

គេបាន $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n^n}\geq\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{e}}{e}=\frac{1}{e}\ (4)$

តាម (2) និង (3) យើងបាន $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n^n}=\frac{1}{e}$

៩២ គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\frac{4x-2}{(x^2+1)(x+2)}$ ។

ក) រកពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីអោយ $f(x)=\frac{2ax}{x^2+1}-\frac{b}{x+2}$ ។

ខ) ចំពោះតម្លៃ a និង b ដែលរកឃើញ ចូរគណនា $\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_0^{\varepsilon}f(x)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) រកពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីអោយ $f(x)=\frac{2ax}{x^2+1}-\frac{b}{x+2}$

យើងបាន $f(x)=\frac{2ax(x+2)-(x+2)(x^2+1)}{(x^2+1)(x+2)}$

$$=\frac{(2a-b)x^2+4ax-b}{(x^2+1)(x+2)}$$

តែ $f(x)=\frac{2ax}{x^2+1}-\frac{b}{x+2}$

គេទាញបាន $\begin{cases}2a-b=0\\4a=4\\b=2\end{cases}$

ដូចនេះ $a=1$ និង $b=2$

ខ) ចំពោះតម្លៃ a និង b ដែលរកឃើញ ចូរគណនា $\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_0^{\varepsilon}f(x)dx$

ចំពោះ $a=1,b=2$ គេបាន $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x+2}$

នោះ $\int_0^{\varepsilon} f(x)dx = \int_0^{\varepsilon}\left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{x+2}\right)dx$

$$= \left[\ln(x^2+1) - 2\ln(x+2)\right]_0^{\varepsilon}$$

$$= \ln\frac{x^2+1}{(x+2)^2}\Big|_0^{\varepsilon}$$

$$= \ln\frac{\varepsilon^2+1}{(\varepsilon+2)^2} - \ln\frac{1}{4} = \ln\frac{4(\varepsilon^2+1)}{(\varepsilon+2)^2}$$

ដូចនេះ $\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_0^{\varepsilon} f(x)dx = \ln 4$

៩៣ គេអោយចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n \geq 0$ ។

គេតាង $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-2nx}}{e^{2x}+1}dx$ ។

ក) គណនា I_0 ។

ខ)ទាញរក $I_{n+1} + I_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ) ស្រាយបញ្ជាក់ថា គ្រប់ $x \geq 0$ គេបានវិសមភាព $\frac{e^{-2(n+1)x}}{2} \leq \frac{e^{-2nx}}{e^{2x}+1} \leq \frac{e^{-2nx}}{2}$ ។

ទាញរកតម្លៃអមនៃ I_n រួចកំណត់តម្លៃ $\lim_{n\to+\infty} I_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) គណនា I_0

គេមាន $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-2nx}}{e^{2x}+1}dx$

បើ $n=0$ នោះ $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{e^{2x}+1}dx = \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}dx$

$$I_0 = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(e^{-2x}+1)}{e^{-2x}+1} = -\frac{1}{2}\left[\ln(e^{-2x}+1)\right]_0^1$$

$$I_0 = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+e^{-2}}{2} = 2\ln\frac{2e^2}{1+e^2}$$

ខ)ទាញរក $I_{n+1} + I_n$ ជាអនុគមន៍នៃ n

គេបាន $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{e^{-2(n+1)x} + e^{-2nx}}{e^{2x}+1}dx$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

$$=\int_0^1 \frac{e^{-2(n+1)x}\left(e^{2x}+1\right)}{e^{2x}+1}dx$$

$$=\int_0^1 e^{-2(n+1)x}dx=\left.\frac{e^{-2(n+1)x}}{-2(n+1)}\right|_0^1$$

នាំអោយ $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{e^{2(n+1)}-1}{e^{2(n+1)}}\right)$

ដូចនេះ $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{e^{2(n+1)}-1}{e^{2(n+1)}}\right)$

គ) ស្រាយបញ្ជាក់ថា គ្រប់ $x\geq 0$ គេបានវិសមភាព $\frac{e^{-2(n+1)x}}{2}\leq\frac{e^{-2nx}}{e^{2x}+1}\leq\frac{e^{-2nx}}{2}$

គ្រប់ $x\geq 0$ គេបាន $e^{2x}\geq 1$ នោះ $2\leq e^{2x}+1\leq 2e^{2x}$

$\Rightarrow\frac{1}{2e^{2x}}\leq\frac{1}{e^{2x}+1}\leq\frac{1}{2}$

គ្រប់ $x\geq 0$, $e^{-2nx}>0$ នោះ $\frac{e^{-2nx}}{2e^{2x}}\leq\frac{e^{-2nx}}{e^{2x}+1}\leq\frac{e^{-2nx}}{2}$

នោះ $\frac{e^{-2(n+1)x}}{2}\leq\frac{e^{-2nx}}{e^{2x}+1}\leq\frac{e^{-2nx}}{2}$ ពិត

ទាញរកតម្លៃអមនៃ I_n រួចកំណត់តម្លៃ $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

តាមសម្រាយខាងលើ គេមាន $\frac{e^{-2(n+1)x}}{2}\leq\frac{e^{-2nx}}{e^{2x}+1}\leq\frac{e^{-2nx}}{2}$

យើងបាន $\int_0^1\frac{e^{-2(n+1)x}}{2}dx\leq\int_0^1\frac{e^{-2nx}}{e^{2x}+1}dx\leq\int_0^1\frac{e^{-2nx}}{2}dx$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4(n+1)}e^{-2(n+1)x}\Big|_0^1\leq I_n\leq -\frac{1}{2n}e^{-2nx}\Big|_0^1$$

នាំអោយ $\frac{1-e^{-2(n+1)}}{4(n+1)}\leq I_n\leq\frac{1-e^{-2n}}{4n}$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-e^{-2(n+1)}}{4(n+1)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-e^{-2n}}{4n}=0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

៩៤ គេអោយ p,q ជាពីរចំនួនពិតផ្សេងគ្នា ។ រកតម្លៃអតិបរមានៃអនុគមន៍
$y=\sqrt{x^2-2px+2p^2}+\sqrt{x^2-2qx+2q^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេអាចសរសេរ $y=\sqrt{(x-p)^2+p^2}+\sqrt{(x-q)^2+q^2}$

យើងតាងចំណុច $M\left(x-p,|p|\right)$ និង $N\left(x-q,-|q|\right)$

គេបាន $y=OM+ON\geq MN$

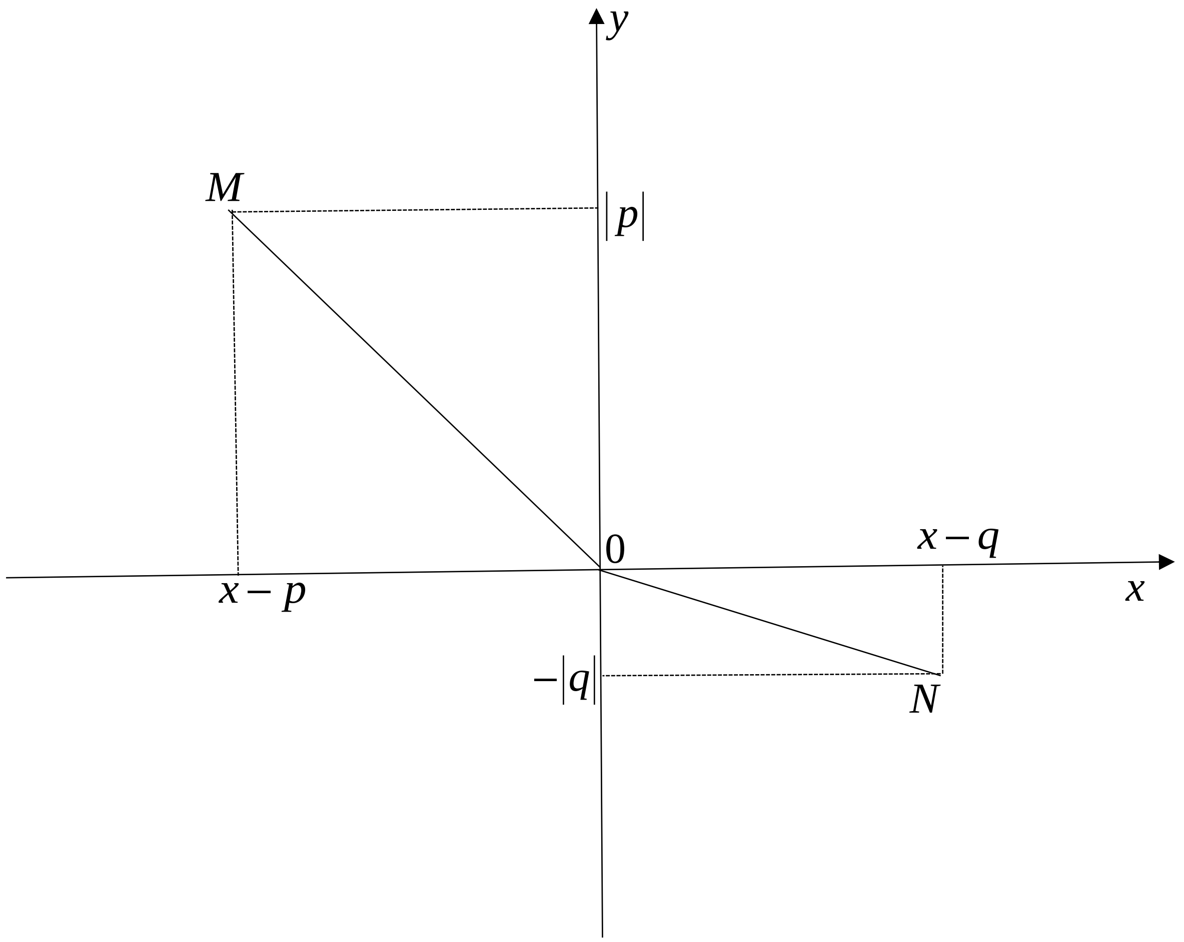
សញ្ញា $(=)$ កើតមានកាលណា M,O,N រត់ត្រង់គ្នា

នោះគេបាន $S_{\Delta OMN}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ x-p & |p| & 1\\ x-q & -|q| & 1\end{vmatrix}=0$

នាំអោយ $-|q|(x-p)-|p|(x-q)=0$

$$(|p|+|q|)x=|p|q+|q|p$$

$$x=\frac{p|q|+q|p|}{|p|+|q|}$$



$\min y = MN = \sqrt{(x-p-x+q)^2+(|p|+|q|)^2}$

ដូចនេះ $\min y = \sqrt{(p-q)^2+(|p|+|q|)^2}$

៩៦ ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\ln x \le x-1$ ចំពោះ $x>0$ ។

ខ) តាង $t_i = \dfrac{nx_i}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$ ដែល $x_i>0\,,(i=1,2,\cdots,n)$ ។

ដោយប្រើវិសមភាព $\ln x \le x-1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt[n]{x_1.x_2\cdots x_n} \le \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\ln x \le x-1$ ចំពោះ $x>0$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=x-1-\ln x,\ x>0$

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

$f'(x)=0$ កាលណា $x=1$

តារាងសញ្ញាដេរីវេ

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$

អនុគមន៍ $f(x)$ មានអប្បបរមាត្រង់ $x=1$ ដែល $f(1)=0$

នោះ $f(x)\ge f(1)=0$

$x-1-\ln x\ge 0$

ដូចនេះ $\ln x \le x-1$

ខ) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt[n]{x_1.x_2\cdots x_n} \le \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

គេមាន $x_i>0$ នោះ $t_i>0$

តាមសម្រាយខាងលើ $\ln x \le x-1$ យើងបាន

$\ln t_1 \le t_1-1$

$\ln t_2 \le t_2-1$

....

$\ln t_n \le t_n-1$

នាំអោយ $\ln t_1+\ln t_2+\cdots+\ln t_n \le (t_1+t_2+\cdots+t_n)-n$

$\ln(t_1.t_2\cdots t_n)\le(t_1+t_2+\cdots+t_n)-n$

នោះ $\ln\dfrac{n^n x_1.x_2\cdots x_n}{\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)}\le n\dfrac{\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)}{x_1+x_2+\cdots+x_n}-n=0$

$$\frac{n^n.x_1\cdot x_2\cdots x_n}{\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)^n}\le 1$$

នាំអោយ $\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}\le\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ ពិត

៩៧ គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

ក) $I=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin^2 x}{3^x+1}\right)dx$ ខ) $J=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx$

គ) $K=\displaystyle\int_0^1\left(\arcsin x\right)^2dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) $I=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin^2 x}{3^x+1}\right)dx$

យើងបាន $I=\displaystyle\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin^2 x}{3^x+1}dx+\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{3^x+1}dx$

ចំពោះ $\displaystyle\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin^2 x}{3^x+1}dx$

តាង $x=-t$ នោះ $dx=-dt$

$$\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=-\pi\to t=\pi\end{cases}$$

នោះ $\displaystyle\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin^2 x}{3^x+1}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\left(-t\right)\left(-dt\right)}{3^{-t}+1}=\int_0^{\pi}\frac{3^t\sin^2 tdt}{3^t+1}=\int_0^{\pi}\frac{3^x\sin^2 x}{3^x+1}dx$

នាំអោយ $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{3^x\sin^2 xdx}{3^x+1}+\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{3^x+1}dx$

$$I=\int_0^{\pi}\sin^2 xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(1-\cos 2x\right)dx$$

$$I=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

ដូចនេះ $I=\dfrac{\pi}{2}$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ll

ខ) $J=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\,dx$

យើងបាន $J=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}\,dx$

$J=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$

ចំពោះ $-\pi\le x\le\pi$ នោះ $-\frac{\pi}{2}\le\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}$

តាង $t=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$ នោះ $dt=\frac{dx}{2}$

$$\begin{cases}x=\pi\Rightarrow t=\frac{3\pi}{4}\\ x=-\pi\Rightarrow t=-\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

$$J=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}2\sqrt{2}\left|\cos t\right|dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{2}\cos t\,dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}2\sqrt{2}\cos t\,dt$$

$$=2\sqrt{2}\left[\sin t\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-2\sqrt{2}\left[\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$=2\sqrt{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)$$

$$=4\sqrt{2}$$

ដូចនេះ $J=4\sqrt{2}$

គ) $K=\int_0^1\left(\arcsin x\right)^2dx$

តាង $u=\left(\arcsin x\right)^2$ នោះ $du=2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$dv=dx$ នោះ $v=x$

យើងបាន $K=x\left(\arcsin x\right)^2\Big|_0^1-\int_0^1\arcsin x\cdot\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\int_0^1\arcsin x\cdot\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

តាង $u=\arcsin x$ នោះ $du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$dv=\dfrac{2xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ នោះ $v=-2\sqrt{1-x^2}$

$$\int_0^1 \arcsin x\cdot\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-2\sqrt{1-x^2}.\arcsin x\Big|_0^1+2\int_0^1 dx$$

$=2x\,|_0^1=2$

ដូចនេះ $K=\dfrac{\pi^2}{4}-2$

៩៨ x,y,z ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $xyz=1, x+\dfrac{1}{z}=5$ និង $y+\dfrac{1}{x}=29$ ។ គេយក $z+\dfrac{1}{y}=\dfrac{m}{n}$ ដែល m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នា ។ គណនា $m+n$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន $\left(x+\dfrac{1}{z}\right)\left(y+\dfrac{1}{x}\right)\left(z+\dfrac{1}{y}\right)=5\cdot 29\cdot\dfrac{m}{n}$

$$xyz+x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xyz}=\frac{145m}{n}$$

$$1+x+y+z+(29-y)+\left(\frac{m}{n}-z\right)+(5-x)+1=\frac{145m}{n}$$

នាំអោយ $36+\dfrac{m}{n}=\dfrac{145m}{n}$

$$\frac{144m}{n}=36$$

នោះ $\dfrac{m}{n}=\dfrac{36}{144}=\dfrac{1}{4}$

ដូចនេះ $m+n=5$

៩៩ គេអោយ (a,b,c) ជាចម្លើយពិតនៃប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}x^3-xyz=2\\ y^3-xyz=6\\ z^3-xyz=20\end{cases}$ ។

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ॥

តម្លៃធំបំផុតដែលអាចនៃ $a^3+b^3+c^3$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $\frac{m}{n}$ ដែល m,n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នា ។ ចូររក $m+n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x^3-xyz=2 \\ y^3-xyz=6 \\ z^3-xyz=20 \end{cases} \quad (1)$

តាមប្រព័ន្ធសមីការ (1) គេទាញបាន $a^3=c^3-18$ និង $b^3=c^3-14$

យើងបាន $20=c^3-\sqrt[3]{c^3-18}\cdot\sqrt[3]{c^3-14}c$

$$20=c^3-\sqrt[3]{\left(c^3-18\right)\left(c^3-13\right)c^3}$$

នាំអោយ $c^3\left(c^3-18\right)\left(c^3-14\right)=\left(c^3-20\right)^3$

$$c^9-32c^6+252c^3=c^9-60c^6+1200c^3-8000$$

$$28c^6-948c^3+8000=0$$

ឬ $7c^6-237c^3+2000=0$

ដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទីពីរដែលមានអថេរ c^3 យើងបាន

$$c^3=\frac{237\pm\sqrt{237^2-56000}}{14}=\frac{237\pm13}{14}$$

ដើម្បីបាន $a^3+b^3+c^3$ ធំបំផុត យើងយក $c^3=\frac{237+13}{14}=\frac{125}{7}$

នោះ $a^3+b^3+c^3=\left(c^3-18\right)+\left(c^3-14\right)+c^3=3c^3-32=3\cdot\frac{125}{7}-32=\frac{151}{7}$

ដូចនេះ $m+n=158$

១០០ a,b,x,y ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់

$$ax+by=3,$$
$$ax^2+by^2=7,$$
$$ax^3+by^3=16,$$
$$ax^4+by^4=42$$

។

ចូររក ax^5+by^5 ។

ដំណោះស្រាយ

យើងពិនិត្យមើលដូចតទៅ

$$(ax+by)(x+y)=ax^2+by^2+xy(a+b)$$
$$(ax^2+by^2)(x+y)=ax^3+by^3+xy(ax+by)$$
$$(ax^3+by^3)(x+y)=ax^4+by^4+xy(ax^2+by^2)$$
$$(ax^4+by^4)(x+y)=ax^5+by^5+xy(ax^4+by^4)$$

បើយើងយក $C=x+y$ និង $D=xy$ ជំនួសចូលសមីការទាំងបួនខាងលើ យើងបាន

$$\begin{cases}3C=7+D(a+b)\\7C=16+3D\\16C=42+7D\\42C=ax^5+by^5+16D\end{cases}$$

តម្លៃ ax^5+by^5 ជាប់ទាក់ទិននឹង C,D

យើងដោះស្រាយបាន $C=-14$ និង $D=-38$

ដូចនេះ $ax^5+by^5=20$

១០១ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ d ជាចំនួនមានលេខមួយខ្ទង់ (គិតក្នុងប្រព័ន្ធគោល ១០) ។ រក n ដោយដឹងថា $\dfrac{n}{810}=0.d25d25d25\cdots$ ។

ដំណោះស្រាយ

អង្គខាងស្តាំជាចំនួនទសភាគខួប

តាង $x=0.d25d25d25\cdots$ នោះ $d25=1000x-x=999x$

គេបាន $x=\dfrac{d25}{999}$

នាំអោយ $\dfrac{n}{810}=\dfrac{d25}{999}$

$$3^3.37.n=2.3^4.5.(d25)$$

នោះ $37n=2.3.5.(d25)$

គេសង្កេតឃើញថា $d25$ មានពីរខ្ទង់ចុងក្រោយគឺ 25 នោះ $d25$ ត្រូវតែជាពហុគុណនៃ 25

$d25$ ក៏ជាពហុគុណនៃ 37

ចំនួនតែមួយគត់ដែលអាចជាពហុគុណនៃ 25 និង 37 គឺ 925

នាំអោយ $d=9$ និង $n=750$

ដូចនេះ $n=750$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ॥

១០២ គេអោយ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ តាង $p(n)$ ជាផលគុណខ្ទង់ដែលមិនសូន្យនៃ n ។ (បើ n មានតែមួយខ្ទង់ នោះ $p(n)$ ស្មើនឹងខ្ទង់នោះ) ។ គេតាង

$S = p(1) + p(2) + \cdots + p(999)$ ។ រកកត្តាបឋមធំបំផុតនៃ S ។

យើងយក $T = p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(99)$

$$p(1) + p(2) + \cdots + p(9) = 1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$$

ហើយ $p(10) + p(11) + \cdots + p(19) = 46$

$$p(20) + p(21) + \cdots + p(29) = 2.46$$

$$p(30) + p(31) + \cdots + p(39) = 3.46$$

....

$$p(90) + p(91) + \cdots + p(99) = 9.46$$

នោះ $T = 45 + 46(1 + 2 + 3 + \cdots + 9) = 45 + 46.45 = 45.47$

យើងបាន $T = p(1) + p(2) + \cdots + p(99)$

$$T = p(101) + p(102) + \cdots + p(199)$$

$$2T = p(201) + p(202) + \cdots + p(299)$$

....

$$9T = p(901) + p(902) + \cdots + p(999)$$

នាំអោយ $S = p(100) + p(200) + \cdots + p(900) + T + 2T + \cdots + 9T$

$$S = (1 + 2 + 3 + \cdots + 9) + T(1 + 2 + 3 + \cdots + 9)$$

$$S = 45 + 46T$$

$$S = 45 + 46.45.47$$

នោះ $S = 45.2163 = 45.21.103$

ដូចនេះ 103ជាកត្តាបឋមធំបំផុតនៃ S

១០៣ ស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួមួយមានផលបូកតួស្មើ 2005 ។ ស៊ីតធរណីមាត្រអនន្តតួថ្មីមួយត្រូវបានបង្កើតដោយយកតួនៃស៊ីតមុនលើកជាការេ ហើយផលបូកតួថ្មីស្មើ 10 ដងនៃផលបូកស៊ីតដើម។ ផលធៀបរួមនៃស៊ីតដើមអាចសរសេរជាទម្រង់ $\frac{m}{n}$ ដែល m, n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នា ។ ចូររក $m + n$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង a ជាតួដំបូងនៃស៊ីតដើម ហើយ r ជាផលធៀបរួមដែល $|r| < 1$

ផលបូកតួនៃស៊ីតដើម $\frac{a}{1-r} = 2005 \quad (1)$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ॥

ផលបូកតួនៃស្វ៊ីតថ្មី $\dfrac{a^2}{1-r^2}=20050 \quad (2)$

តាម (1) និង (2) យើងបានសមីការ $\dfrac{2005^2(1-r)^2}{1-r^2}=20050$

នាំអោយ $2005(1-r)^2=10(1-r^2)=10(1-r)(1+r)$

$$2005(1-r)=10(1+r)$$

$$2015r=1995$$

$$r=\frac{1995}{2015}=\frac{399}{403}$$

ដោយ $\gcd(399,403)=1$ នោះ $m=399,\ n=403$

ដូចនេះ $m+n=802$

១០៨ រកចំនួនគត់ដែលនៅជិត $1000\sum_{n=3}^{10000}\dfrac{1}{n^2-4}$ បំផុត ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\dfrac{1}{n^2-4}=\dfrac{A}{n-2}+\dfrac{B}{n+2}$ ដែល $n\geq 3$

$$A(n+2)+B(n-1)=1$$

$$(A+B)n+(2A-2B)=1$$

នោះ $\begin{cases}A+B=0\\2A-2B=1\end{cases}$

នាំអោយ $A=\dfrac{1}{4},B=-\dfrac{1}{4}$

យើងបាន $1000\sum_{n=3}^{10000}\dfrac{1}{n^2-4}=1000\times\dfrac{1}{4}\sum_{n=3}^{10000}\left(\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$$=250\left(\sum_{n=3}^{10000}\frac{1}{n-2}-\sum_{n=3}^{10000}\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=250\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{9998}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\cdots-\frac{1}{10002}\right)$$

$$=250\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9999}-\frac{1}{10000}-\frac{1}{10001}-\frac{1}{10002}\right)$$

$$= 250\left(\frac{25}{12} - \frac{1}{9999} - \frac{1}{10000} - \frac{1}{10001} - \frac{1}{10002}\right)$$

$$= 520.\overline{83} - 250\left(\frac{1}{9999} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{10001} + \frac{1}{10002}\right)$$

ដោយហេតុថា $250\left(\frac{1}{9999} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{10001} + \frac{1}{10002}\right) < \frac{1}{10}$

នោះ $1000\sum_{n=3}^{10000}\frac{1}{n^2-4} > 250.5$

ដូចនេះ 251 ជាចំនួនគត់ដែលនៅជិត $1000\sum_{n=3}^{10000}\frac{1}{n^2-4}$ បំផុត

១០៥ បើគេបន្ថែម k ទៅលើចំនួន 36,300,596 គេនិងទទួលបានចំនួនថ្មីចំនួនបីដែលជាការេនៃបីតួបន្ត គ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ។ រកតម្លៃ k ។

ដំណោះស្រាយ

តាមសម្មតិកម្ម យើងអាចសរសេរបានថា $\begin{cases} 36+k=a^2 & (1) \\ 300+k=(a+d)^2 & (2) \\ 596+k=(a+2d)^2 & (3) \end{cases}$

យក $(2)-(1): 2ad+d^2=264$

យក $(3)-(1): 4ad+4d^2=560$

នាំអោយ $2d^2=32$

នោះ $d=\pm 4$ និង $a=\pm 31$

គេបាន $36+k=a^2=961$

ដូចនេះ $k=925$

១០៦ m ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ $a_0,a_1,\cdots,a_m$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែល $a_0=37, a_1=72$ $, a_m=0$ និង $a_{k+1}=a_{k-1}-\frac{3}{a_k}$ ចំពោះ $k=1,2,\cdots,m-1$ ។ ចូររក m ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $a_m=0$ នោះ $a_{m-2}=\frac{3}{a_{m-1}}$

នាំអោយ $a_{m-1}a_{m-2}=3 \ (1)$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

ហើយ $a_{m-1}=a_{m-3}-\dfrac{3}{a_{m-2}}$ នោះ $a_{m-1}a_{m-2}=a_{m-2}a_{m-3}-3 \quad (2)$

តាម (1) និង (2): $a_{m-2}a_{m-3}=6 \quad (3)$

ហើយ $a_{m-2}=a_{m-4}-\dfrac{3}{a_{m-3}}$ នោះ $a_{m-2}a_{m-3}=a_{m-3}a_{m-4}-3 \quad (4)$

តាម (3) និង (4): $a_{m-3}a_{m-4}=9$

យើងអាចទាញសន្និដ្ឋានថា $a_{m-k}a_{m-k-1}=3k$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k

យើងយក $k=m-1$ នោះ $a_1a_0=3(m-1)$

នាំអោយ $3(m-1)=37.72$

ដូចនេះ $m=888$

១០៧ គេអោយ $(1+\sin t)(1+\cos t)=\dfrac{5}{4}$ និង $(1-\sin t)(1-\cos t)=\dfrac{m}{n}-\sqrt{k}$ ដែល k,m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ m,n បឋមរវាងគ្នា ។ ចូររក $k+m+n$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $\alpha=\dfrac{m}{n}-\sqrt{k}$

យើងមាន $(1+\sin t)(1+\cos t)=\dfrac{5}{4}$

$$1+\sin t+\cos t+\sin t\cos t=\frac{5}{4}$$

$$(1-\sin t)(1-\cos t)=\alpha$$

$$1-\sin t-\cos t+\sin t\cos t=\alpha$$

នាំអោយ $2+2\sin t\cos t=\dfrac{5}{4}+\alpha \quad (1)$

ម្យ៉ាងទៀត $(1+\sin t)(1+\cos t)(1-\sin t)(1-\cos t)=\dfrac{5}{4}\alpha$

$$(1-\sin^2 t)(1-\cos^2 t)=\frac{5}{4}\alpha$$

$$\cos^2 t\sin^2 t=\frac{5}{4}\alpha$$

នោះ $\sin t\cos t=\dfrac{\sqrt{5\alpha}}{2} \quad (2)$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

តាម (1) និង (2) យើងបាន $2+\sqrt{5\alpha}=\dfrac{5}{4}+\alpha$

ឬ $5\alpha=\left(\alpha-\dfrac{3}{4}\right)^2$

$$\alpha^2-\frac{13}{2}\alpha+\frac{9}{16}=0$$

យើងទាញបាន $\alpha=\dfrac{13}{4}-\sqrt{10}$

នាំអោយ $m=13, n=4, k=10$

ដូចនេះ $k+m+n=27$

១០៨ គេអោយ $x=\dfrac{\sum_{n=1}^{44}\cos n^0}{\sum_{n=1}^{44}\sin n^0}$ ។ រកចំនួនគត់ធំបំផុតដែលមិនធំជាង $100x$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $x=\dfrac{\sum_{n=1}^{44}\cos n^0}{\sum_{n=1}^{44}\sin n^0}=\dfrac{\sum_{n=46}^{89}\sin n^0}{\sum_{n=1}^{44}\sin n^0}=\dfrac{\sum_{n=1}^{44}\sin(n+45)^0}{\sum_{n=1}^{44}\sin n^0}$

តែ $\sin(n+45)^0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin n^0+\cos n^0\right)$

$$\Rightarrow x=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=1}^{44}\left(\sin n^0+\cos n^0\right)}{\sum_{n=1}^{44}\sin n^0}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sum_{n=1}^{44}\sin n^0+\sum_{n=1}^{44}\cos n^0\right)}{\sum_{n=1}^{44}\sin n^0}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+x)$$

នោះ $\sqrt{2}x=1+x$

នាំអោយ $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1\approx 2.414$

នោះ $100x\approx 241.4$

ដូចនេះ ចំនួនគត់ដែលមិនធំជាង $100x$ គឺ 241

១០៩ ជាចំនួនកុំផ្លិចមួយដែលមានផ្នែកនិម្មិត 164 ហើយ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានមួយដែល

$\frac{z}{z+n}=4i$ ។ ចូររក n ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $z=a+164i$ ដែល a ជាចំនួនពិត

យើងបាន $a+164i=z$

$$a+164i=4i(z+n)$$

$$a+164i=4i(a+n+164i)$$

$$a+164i=-656+4i(a+n)$$

គេទាញបាន $a=-656$ និង $164=4(a+n)$

ដូចនេះ $n=697$

១១០ គេអោយ $P_0(x)=x^3+313x^2-77x-8$ ។ ចំពោះចំនួនគត់ $n\geq 1$ គេកំណត់ $P_n(x)=P_{n-1}(x-n)$ ។ រកមេគុណនៃ x នៅក្នុង $P_{20}(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $P_n(x)=P_{n-1}(x-n)$

$$P_{20}(x)=P_{19}(x-20)$$
$$=P_{18}((x-20)-19)$$
$$=P_{17}((x-20)-19-18)$$
$$\vdots$$
$$=P_0(x-(20+19+18+\cdots+2+1))$$
$$=(x-210)^3+313(x-210)^2-77(x-210)-8$$

ដើម្បីរកមេគុណនៃ x យើងប្រើទ្វេធាញូតុន

មេគុណនៃ x នៅក្នុងពន្លាត $(x-210)^3$ គឺ $3(-210)^2$

មេគុណនៃ x នៅក្នុងពន្លាត $(x-210)^2$ គឺ -2.201

មេគុណនៃ x នៅក្នុង $P_{20}(x)$ គឺ $3(-210)^2-2.313.210-77=763$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

១១១ តាង P ជាផលគុណនៃរឹសមិនពិតនៃសមីការ $x^4-4x^3+6x^2-4x=2005$ ។
ចូរកំណត់ $\lfloor P \rfloor$។
សំគាល់ $\lfloor P \rfloor$ តាងអោយចំនួនគត់ធំបំផុតដែលតូចជាងឬស្មើ P ។
ដំណោះស្រាយ
មេគុណនៃពហុធា $p(x)=x^4-4x^3+6x^2-4x$ គឺ $1,-4,6,-4$
ចំនួនទាំងនេះជាមេគុណទ្វេធា $\pm\binom{4}{k}$ ចំពោះ $k=0,1,2,3$
យើងបាន $p(x)+1=x^4-4x^3+6x^2-4x+1=(x-1)^4$
រឹសមិនពិតដែលត្រូវរក ជារឹសនៃសមីការ $(x-1)^4=2006$
យើងតាង $y=x-1$ នោះ $y^4=2006$
y ទាំងបួនដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការគឺ $y=\pm\sqrt[4]{2006}\pm i\sqrt[4]{2006}$
នាំអោយ $x=1\pm\sqrt[4]{2006}$ និង $x=1\pm i\sqrt[4]{2006}$
យើងបាន $P=\left(1+i\sqrt[4]{2006}\right)\left(1-i\sqrt[4]{2006}\right)=1+\sqrt{2006}$
ដោយ $40=\sqrt{1600}<\sqrt{2006}<\sqrt{2500}=50$
នោះ $44=\sqrt{1936}<\sqrt{2006}<\sqrt{2025}=45$
$45<1+\sqrt{2006}<46$
ដូចនេះ $\lfloor P \rfloor=45$

១១២ គេអោយ $P(z)=z^3+az^2+bz+c$ ដែល a,b,c ជាចំនួនពិត ។ ω ជាចំនួនកុំផ្លិចមួយដែលធ្វើអោយរឹសទាំងបីនៃ $P(z)$ មានតម្លៃ $\omega+3i,\omega+9i$ និង $2\omega-4$ ដែល $i^2=-1$ ។ ចូររក $|a+b+c|$ ។
ដំណោះស្រាយ
តាង $\omega=u+vi$ ដែល u,v ជាចំនួនពិត
យើងបាន $a=-\left[(\omega+3i)+(\omega+9i)+(2\omega-4)\right]=4-12i-4\omega \quad (1)$

$$b=(\omega+3i)(\omega+9i)+(\omega+9i)(2\omega-4)+(2\omega-4)(\omega+3i)$$
$$=5\omega^2-8\omega+36\omega i-48i-27 \ (2)$$

តាម $(1): v=-3$
យក $\omega=u-3i$ ជំនួសចូល (2) យើងបាន

$$b=5(u-3i)^2-8(u-3i)+36(u-3i)i-48i-27$$

ដោយ b ជាចំនួនពិតនោះ $6u-24=0$
នោះ $u=4$
គេបាន $w=4-3i$
រឹសទាំងបីនៃ $P(z)$ រួមមាន $r_1=4, r_2=4+6i$ និង $r_3=4-6i$

$$a=-(r_1+r_2+r_3)=-12$$
$$b=r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=84$$
$$c=-(r_1r_2r_3)=-208$$

ដូចនេះ $|a+b+c|=136$

១១៣ រកគ្រប់ចំនួនពិត x, y និង z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $(x+1)yz=12, (y+1)zx=4$ និង $(z+1)xy=4$ ។
ដំណោះស្រាយ
យើងមាន $(x+1)yz=12\ (1)$

$$(y+1)zx=4\ (2)$$
$$(z+1)xy=4\ (3)$$

យើងបាន $xz+xyz=xy+xyz=4$

$$x(y-z)=0$$

បើ $x=0$ នោះតាម (2) $0=4$ មិនពិត
បើ $y=z$ នោះតាម $(1):(x+1)z^2=12$ និង $(z+1)zx=4$
នាំអោយ $z^3+z^2-8z-12=0$

$$(z-3)(z+2)^2=0$$

ដូចនេះ $(x,y,z)=\left(\frac{1}{3},3,3\right)$ និង $(x,y,z)=(2,-2,-2)$

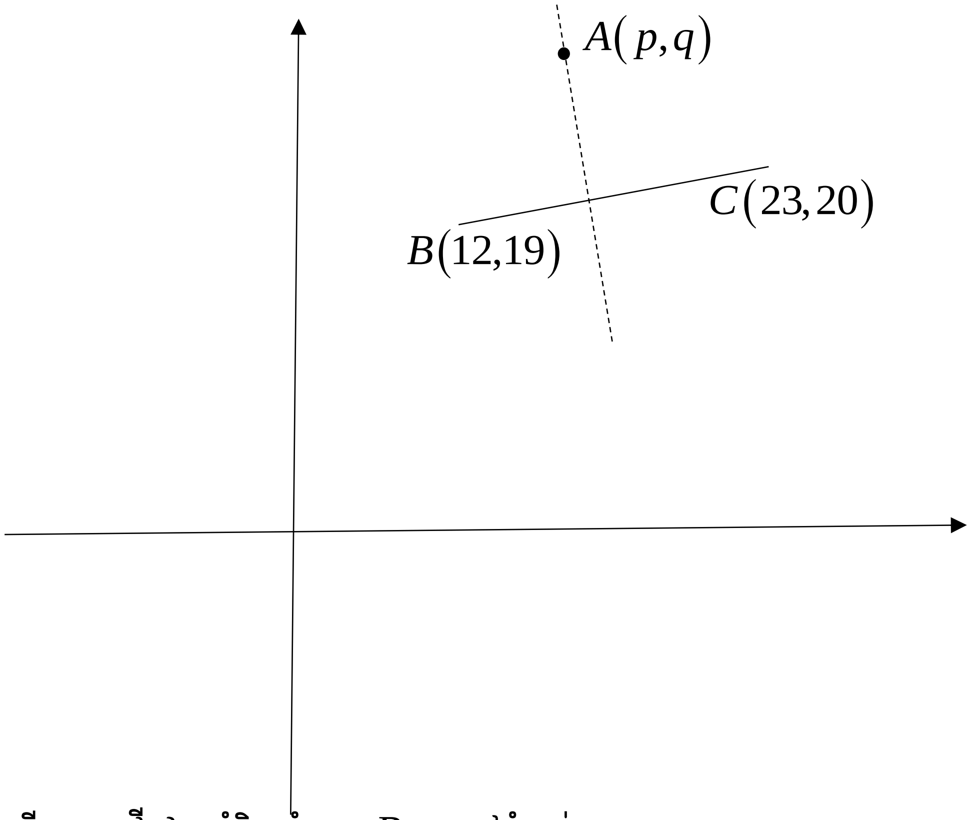
១១៤ ត្រីកោណ ABC ស្ថិតនៅក្នុងប្លង់កាតេស្យង់ មានក្រឡាផ្ទៃ 70 ។ កូអរដោនេចំណុច $B(12,19)$ និងចំណុច $C(23,20)$ ហើយចំណុច $A(p,q)$ ។ បន្ទាត់មួយត្រួតលើមេដ្យាននៃជ្រុង BC មានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ -5 ។ រកតម្លៃធំបំផុតដែលអាចនៃ $p+q$ ។
ដំណោះស្រាយ
ចំណុចកណ្ដាល BC គឺ $I\left(\frac{35}{2},\frac{39}{2}\right)$
តាង (l) ជាបន្ទាត់ដែលកាត់តាមចំណុច I

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ॥

សមីការបន្ទាត់ $(l): y-\frac{39}{2}=-5\left(x-\frac{35}{2}\right)$

$y=-5x+107$

គេបានកូអរដោនេចំណុច $A(p,q)=A(p,-5p+107)$



យើងបង្កើតត្រីកោណថ្មីដោយរំកិលកំពូល B មកនៅចំគល់តម្រុយ

ត្រីកោណថ្មី $A'B'C'$ មានកំពូល $A'(p-12,-5p+88), B'(0,0)$ និង $C'(11,1)$

$S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|p-12-11(-5p+88)\right| = \frac{1}{2}\left|56p-980\right|$

នាំអោយ $\frac{1}{2}\left|56p-980\right|=70$

នោះ $56p-980=\pm 140$

បើ $p=20$ នោះ $p+q=-4\times 20+107=27$

បើ $p=15$ នោះ $p+q=-4\times 15+107=47$

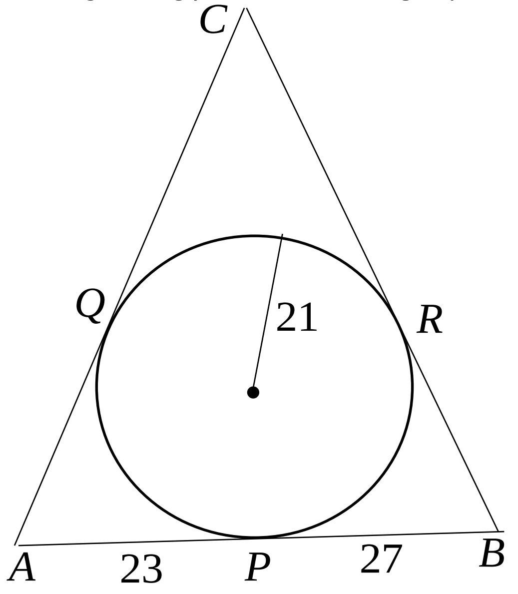
ដូចនេះ តម្លៃធំបំផុតដែលអាច $p+q=47$

១១៥ រង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC ប៉ះជ្រុង AB ត្រង់ P និងមានកាំស្មើ 21 ។ គេអោយ $AP=23$ និង $PB=27$ ។ រកបរិមាត្រនៃត្រីកោណ ABC ។

ដំណោះស្រាយ

តាង O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង

Q និង R ជាចំណុចប៉ះរវាងរង្វង់នឹងជ្រុង AC,BC រៀងគ្នា



តាង $x=CQ$

$AP=AQ=23$ (បន្ទាត់ប៉ះគូសចេញពីចំណុច A តែមួយ)

$BP=BR=27$ (បន្ទាត់ប៉ះគូសចេញពីចំណុច B តែមួយ)

$CQ=CR=x$ (បន្ទាត់ប៉ះគូសចេញពីចំណុច C តែមួយ)

បរិមាត្រត្រីកោណ ABC គឺ $2p=2.(23+27+x)=100+2x$

តាមរូបមន្តហេរ៉ុង

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-x-23)(p-x-27)(p-23-27)}=\sqrt{(50+x)(27)(23)x}\ (1)$$

ម្យ៉ាងទៀត $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta AOC}+S_{\Delta BOC}+S_{\Delta AOB}$

$$=\frac{1}{2}(21)\left[(23+x)+(27+x)+(23+27)\right]=21.(50+x)\ (2)$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន $\sqrt{(50+x)(27)(23)x}=21(50+x)$

នាំអោយ $x=\frac{245}{2}$

ដូចនេះ បរិមាត្រ $2p=100+245=345$

១១៦ គេអោយស៊ីត $\{a_n\}$ កំណត់ដោយ $a_1 = a_2 = 1$ និង $a_n = 7a_{n-1} - a_{n-2}, n \geq 3$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_n + a_{n+1} + 2$ ជាការេប្រាកដចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

ដំណោះស្រាយ

សមីការសំគាល់ $\lambda^2 - 7\lambda + 1 = 0$ មានរឹស $\lambda_1 = \frac{7+\sqrt{45}}{2} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ និង

$$\lambda_2 = \frac{7-\sqrt{45}}{2} = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

យើងបាន $a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$

បើ $n = 1 \Rightarrow 1 = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2$

បើ $n = 2 \Rightarrow 1 = C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2$

$$a_n + a_{n+1} + 2 = \lambda_1^{n-1}C_1\left(\lambda_1 + \lambda_1^2\right) + \lambda_2^{n-1}C_2\left(\lambda_2 + \lambda_2^2\right) + 2$$

$$= \lambda_1^{n-1} + \lambda_2^{n-1} + 2$$

$$= \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)^{n-1} + \left(\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)^{n-1} + 2$$

$$= \left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]^2 = x_n^2$$

ដែល $x_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$ ជាចម្លើយនៃស៊ីត $\{x_n\}$ នៃចំនួនគត់

$x_1 = 2, x_2 = 3, x_n = 3x_{n-1} - x_{n-2}, n \geq 3$

ដូចនេះ $a_n + a_{n+1} + 2$ ជាការេប្រាកដចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n

១១៧ តាង I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្នុងត្រីកោណ ABC ។ រង្វង់ផ្ចិត I ប៉ះជ្រុង AB, BC និង AC រៀងគ្នាត្រង់ចំណុច D, E និង F រៀងគ្នា ។ បន្ទាត់ EF ប្រសព្វជាមួយបន្ទាត់ AI, BI និង DI រៀងគ្នាត្រង់ចំណុច M, N និង K ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $DM.KE = DN.KF$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំណុច I, D, E និង B នៅលើរង្វង់តែមួយ

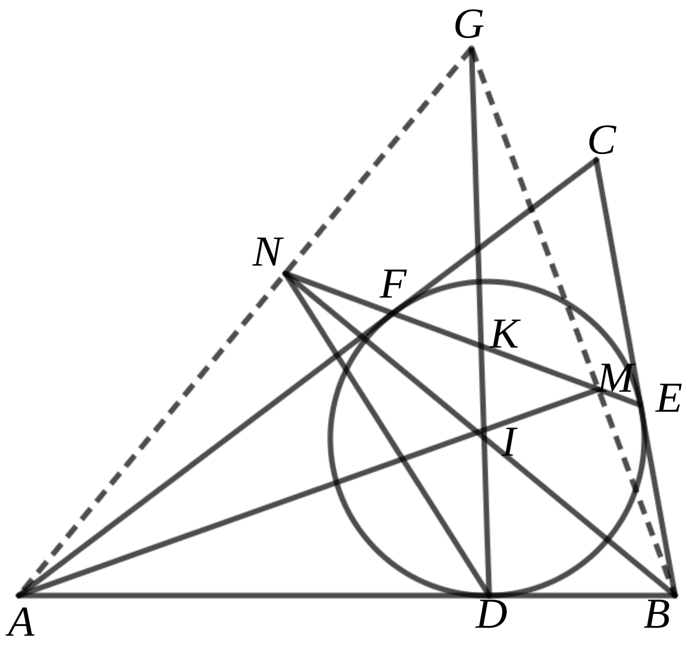
$\angle AID = 90^0 - \angle IAD$

$\angle MED = \angle FDA = 90^0 - \angle IAD$

នោះ $\angle AID = \angle MED$ ហើយចំណុច I, D, E និង M នៅលើរង្វង់តែមួយ

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

នាំអោយប្រាំចំណុច I,D,B,E និង M នៅលើរង្វង់តែមួយ និង $\angle IMB=\angle IEB=90^0$
នោះ $AM\perp BM$



ដូចគ្នាដែរ I,D,A,N និង F នៅលើរង្វង់តែមួយហើយ $BN\perp AN$
យក G ជាចំណុចប្រសព្វរវាង AN និង BM
I ជាអរតូសង់នៃ ΔGAB ហើយ $ID\perp AB$នោះចំណុច G,I និង D កូលីនេអ៊ែរគ្នា
ដោយចំណុច G,N,D និង B នៅលើរង្វង់តែមួយ នោះ $\angle ADN=\angle G$
ដូចគ្នាដែរ $\angle BDM=\angle G$ នោះ DK ពុះមុំ $\angle MDN$

តាមទ្រឹស្តីកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\frac{DM}{DN}=\frac{KM}{KN}\quad(1)$

ចំណុច I,D,E និង M នៅលើរង្វង់តែមួយ ហើយ I,D,N និង F នៅលើរង្វង់តែមួយ
គេបាន $KM.KE=KI.KD=KF.KN$

នាំអោយ $\frac{KM}{KN}=\frac{KF}{KE}\quad(2)$

តាម (1) និង (2): $\frac{DM}{DN}=\frac{KF}{KE}$

នោះ $DM.KE=DN.KF$ ពិត

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ॥

១១៨ គេអោយ x,y,z ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$ ។ តាង h ជាតួចែករួមធំបំផុត នៃ x,y,z ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $hxyz$ និង $h(y-x)$ ជាការេប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $x=ha, y=hb, z=hc$ ដែល a,b,c ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានហើយ $\gcd(a,b,c)=1$

យក $\gcd(a,b)=g$ នោះ $a=ga', b=gb'$ ដែល a',b' ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល

$\gcd(a',b')=\gcd(a'-b',b')=\gcd(a',a'-b')=1$

យើងបាន $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$

$$c(b-a)=ab$$

$$c(b'-a')=a'b'g$$

គេទាញបាន $g\mid c$ និង $\gcd(a,b,c)=g=1$

ដោយ $\gcd(a,b)=1$ និង $\gcd(b-a,ab)=1$

នោះ $b-a=1$ និង $c=ab$

យើងបាន $hxyz=h^4abc=\left(h^2ab\right)^2$ និង $h(y-x)=h^2$

ដូចនេះ $hxyz$ និង $h(y-x)$ ជាការេប្រាកដ

១១៩ គេតាង $\lfloor x\rfloor$ តាងអោយផ្នែកគត់នៃ x និង $\{x\}$ ជាផ្នែកទសភាគនៃ x ។ ឧទាហរណ៍ $\lfloor 2.1\rfloor=1$ និង $\{x\}=0.1$ ។

សំគាល់ ៖ $0\le\{x\}<1$, $x-1<\lfloor x\rfloor\le x$ និង $\lfloor x\rfloor\le x<\lfloor x\rfloor+1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់លក្ខណៈខាងក្រោម

ក) $\lfloor x+n\rfloor=\lfloor x\rfloor+n$, $\forall x\in R, \forall n\in Z$

ខ) $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\le\lfloor x+y\rfloor\le\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$

គ) $\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=\begin{cases}0 , x\in Z\\ -1, x\notin Z\end{cases}$

ឃ) $\left\lfloor\frac{\lfloor x\rfloor}{n}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor, \forall x\in R,\forall n\in Z$

ង) $\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=\lfloor 2x\rfloor-\lfloor x\rfloor, x\in R$

ច) $\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 2y\rfloor\ge\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+\lfloor x+y\rfloor ,\forall x,y\ge 0$

ដំណោះស្រាយ

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ॥

ក) $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$, $\forall x \in R, \forall n \in Z$

តាង $\lfloor x \rfloor = a$ នោះ $x = a + t$ ដែល $0 \le t < 1$ និង $a \in Z$

$\lfloor x \rfloor + n = a + n$ (1)

$x + n = a + t + n = (a+n) + t$

នាំអោយ $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor (a+n)+t \rfloor = a + n$ (2)

តាម (1) និង (2): $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$, $\forall x \in R, \forall n \in Z$

ខ) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \le \lfloor x+y \rfloor \le \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

គេមាន $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor \lfloor x \rfloor + \{x\} + \lfloor y \rfloor + \{y\} \rfloor$

$= \lfloor \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \{x\} + \{y\} \rfloor$

ដោយ $o \le \{x\} < 1, 0 \le \{y\} < 1$ នោះ $0 \le \{x\} + \{y\} < 2$

នាំអោយ $\lfloor x+y \rfloor \le \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ (1)

តាង $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ជាអនុគមន៍មិនចុះ និង $\lfloor y \rfloor \le y < \lfloor y \rfloor + 1$

យើងបាន $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = \lfloor x + \lfloor y \rfloor \rfloor \le \lfloor x+y \rfloor \le \lfloor x + (\lfloor y \rfloor) + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ (2)

តាម (1) និង (2) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \le \lfloor x+y \rfloor \le \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

គ) $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 , x \in Z \\ -1, x \notin Z \end{cases}$

- បើ $x = m \in Z$ គេបាន $\lfloor x \rfloor = \lfloor m \rfloor = m, \lfloor -x \rfloor = \lfloor -m \rfloor = -m$

នាំអោយ $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = 0$

- បើ $x \notin Z$ គេបាន $x = m + h$ ដែល $0 \le h < 1$

  $-x = -m - 1 + (1-h)$ ដែល $0 \le 1 - h < 1$

$\lfloor x \rfloor = \lfloor m+h \rfloor = m$, $\lfloor -x \rfloor = \lfloor -m-1+(1-h) \rfloor = -m-1$

នោះ $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$

ដូចនេះ $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 , x \in Z \\ -1, x \notin Z \end{cases}$

ឃ) $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$, $\forall x \in R, \forall n \in Z$

តាង $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = m$ នោះ $m \le \frac{x}{n} < m + 1$

$\Rightarrow mn \le x < (m+1)n$

$\Rightarrow mn \le \lfloor x \rfloor < (m+1)n$ $(m, n \in Z)$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ll

គេបាន $m\le\frac{\lfloor x\rfloor}{n}<m+1$ នោះ $\left\lfloor\frac{\lfloor x\rfloor}{n}\right\rfloor=m \ (1)$

ម្យ៉ាងទៀត $x=\lfloor x\rfloor+\{x\}$ ដែល $0\le\{x\}<1$

ហើយ $\lfloor x\rfloor=mn+r$ ដែល $0\le r<n-1$

គេបាន $\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor=m+\left\lfloor\frac{r+\{x\}}{n}\right\rfloor=m\,(2)$

តាម (1) និង (2) យើងបាន $\left\lfloor\frac{\lfloor x\rfloor}{n}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor, \forall x\in R,\forall n\in Z$

ង) $\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=\lfloor 2x\rfloor-\lfloor x\rfloor, x\in R$

ករណីទី ១ $\{x\}<\frac{1}{2}$ នោះ $\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor,\lfloor 2x\rfloor=2\lfloor x\rfloor$

នាំអោយ $\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=\lfloor 2x\rfloor-\lfloor x\rfloor$ ពិត

ករណីទី ២ $\{x\}\ge\frac{1}{2}$ នោះ $\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor+1,\lfloor 2x\rfloor=2\lfloor x\rfloor+1$

នាំអោយ $\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor=\lfloor 2x\rfloor-\lfloor x\rfloor$ ពិត

ច) $\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 2y\rfloor\ge\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+\lfloor x+y\rfloor, \forall x,y\ge 0$

តាង α និង β ជាផ្នែកទសភាគនៃ x និង y

នោះ $x=\lfloor x\rfloor+\alpha,\ y=\lfloor y\rfloor+\beta$

ករណីទី ១ $\alpha+\beta<1$ នោះ $\lfloor x+y\rfloor=\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor$ និង $\lfloor 2x\rfloor=2\lfloor x\rfloor, \lfloor 2y\rfloor=2\lfloor y\rfloor$

នាំអោយ $2\lfloor x\rfloor+2\lfloor y\rfloor\ge 2\lfloor x\rfloor+2\lfloor y\rfloor$ ពិត

ករណីទី ២ $1\le\alpha+\beta<2$ នោះ $\lfloor x+y\rfloor=\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$

ដោយ $2\le 2\alpha+2\beta$ នោះក្នុងចំណោម $2\alpha,2\beta$ មានមួយធំជាង 1

កំណត់យក $2\alpha\ge 1$ នោះ $\lfloor 2\alpha\rfloor=2\lfloor\alpha\rfloor+1$ ហើយ $\lfloor 2y\rfloor=2\lfloor y\rfloor$

នាំអោយ $\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 2y\rfloor\ge\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+\lfloor x+y\rfloor, \forall x,y\ge 0$ ពិត

ចំណេះដឹងបន្ថែម

ចំពោះចំនួនពិត x មានចំនួនគត់ n មួយដែល $n\le x<n+1$

n ហៅថាផ្នែកគត់នៃ x ឬ floor function ដែលកំណត់សរសេរ $\lfloor x\rfloor=n$

ផលសង $x-\lfloor x\rfloor$ ហៅថាផ្នែកទសភាគនៃ x ដែលកំណត់ដោយ $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$

ចំនួនគត់ $\lfloor x \rfloor + 1$ ហៅថា Ceiling function ដែលតំណាងដោយ $\lceil x \rceil$

ឧទាហរណ៍ $\lfloor -3.9 \rfloor = -4, \{-3.9\} = .1$ និង $\lceil -3.9 \rceil = -3$

លក្ខណៈ

ក) បើ a និង b ជាចំនួនគត់ ហើយ $b > 0$ និង q ជាផលចែកពេល a ចែកនឹង b នោះ $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ ។

ខ) ចំពោះចំនួនពិតវិជ្ជមាន x និងចំនួនគត់ n ។ ចំនួនពហុគុណវិជ្ជមាននៃ n ដែលមិនធំជាង x គឺ $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$ ។

១២០ ចូររកចំនួនគត់វិជ្ជមាន n និងមុំស្រួចទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC បើគេមានសមភាព

$$\sqrt[2020]{\tan^n A} + \sqrt[2020]{\tan^n B} + \sqrt[2020]{\tan^n C} = \frac{n\left(3\sqrt{3}-1\right)+6060}{2018}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយមុំទាំងបី A, B, C ជាមុំស្រួច នោះ $\tan A > 0, \tan B > 0$ និង $\tan C > 0$

យើងមាន $\begin{cases} \tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C \\ \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A.\tan B.\tan C} \end{cases}$

$$\Rightarrow \tan A.\tan B.\tan C \geq 3\sqrt{3} \qquad (1)$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី យើងបាន

$$\sqrt[2020]{\tan^n A} + \sqrt[2020]{\tan^n B} + \sqrt[2020]{\tan^n C} \geq 3\left(\tan A.\tan B.\tan C\right)^{\frac{n}{6060}} \geq 3\left(3\sqrt{3}\right)^{\frac{n}{6060}} \quad (2)$$

តាមវិសមភាព Bernoulli យើងបាន

$$3\left(3\sqrt{3}\right)^{\frac{n}{6060}} = 3\left[1+\left(3\sqrt{3}-1\right)\right]^{\frac{n}{6060}} \geq 3\left[1+\frac{n}{6060}\left(3\sqrt{3}-1\right)\right]$$

$$= \frac{n\left(3\sqrt{3}-1\right)+6060}{2020} \qquad (3)$$

តាម (2) និង (3) យើងបាន

$$\sqrt[2020]{\tan^n A} + \sqrt[2020]{\tan^n B} + \sqrt[2020]{\tan^n C} \geq \frac{n\left(3\sqrt{3}-1\right)+6060}{2018}$$

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

តាម $(1),(2)$ និង (3) សមភាពកើតមាកាលណា $\begin{cases} \dfrac{n}{6060}=1 \\ \tan A=\tan B=\tan C \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=6060 \\ A=B=C=\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

ដូចនេះ $n=6060,\ A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$

ដំណឹងសិក្សា

យើងខ្ញុំមានក្រុមគ្រូបង្រៀនដែលទទួលបង្រៀនសិស្សដល់ផ្ទះនៅរាជធានីភ្នំពេញគ្រប់មុខវិជ្ជាពីថ្នាក់ទី ៧ដល់ថ្នាក់ទី ១២ ក្នុងតម្លៃសមរម្យ ។ កម្មវិធីបង្រៀនមានដូចជា ត្រៀមប្រលងសញ្ញាបត្របឋមភូមិ សញ្ញាបត្រមធ្យមសិក្សាទុតិយភូមិ(បាក់ឌុប) អាហារូបករណ៍ ត្រៀមប្រលងពេទ្យ ត្រៀមប្រលងគយនិង ត្រៀមប្រលងសិស្សពូកែ ទំនាក់ទំនងសិក្សាតាមរយៈលេខទូរសព្ទ

098 35 92 94 ឬ 092 42 83 25!

លំហាត់ស្រាវជ្រាវត្រៀមប្រលង

លំហាត់ទី ០១៖ គេអោយ $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left|\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}\right|<\sqrt{2}$ ។

លំហាត់ទី ០២៖ បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ,$n^2+2n+12$ មិនមែនជាពហុគុណនៃ 121 ទេ ។

លំហាត់ទី ០៣៖ ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $x^3+11^3=y^3$ គ្មានចម្លើយជាចំនួនគត់ x,y ទេ។

លំហាត់ទី ០៤៖ a,b,c are the three sides of triangle ABC. l_A,l_B,l_C are the three angle bisectors of ΔABC. Prove that $\frac{l_A+l_B}{c}+\frac{l_B+l_C}{a}+\frac{l_C+l_A}{b}\le 3\sqrt{3}$.

លំហាត់ទី ០៥៖ Let m_a,m_b,m_c be the medians of a triangle ABC. R is the radius of the circumscribe circle of triangle ABC. Prove that $m_a m_b m_c\le\frac{27R^3}{8}$.

លំហាត់ទី ០៦៖ ចំណុច M និង N នៅលើអ៊ីប៉ូតេនុសនៃត្រីកោណកែង ABC ដែល $BC=BM$ និង $AC=AN$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\angle MCN=45^0$ ។

លំហាត់ទី ០៧៖ Find all integers a,b,c for which $(x-a)(x-10)+1=(x+b)(x+c)$ for all x.

លំហាត់ទី ០៨៖ Find the smallest prime factor of $101^{303}+303^{101}$.

លំហាត់ទី ០៩៖ រកគ្រប់ចំនួនគត់ x,y,z ដែល $x^2+y^2+z^2=2(yz+1)$ និង $x+y+z=4018$ ។

លំហាត់ទី ១០៖ គេអោយ $ABCDE$ ជាបញ្ចកោណប៉ោងដែលមាន $AB=AE=CD=1$ និង $\angle ABC=\angle DEA=90^0$ ហើយ $BC+DE=1$ ។ ចូរគណនាក្រឡាផ្ទៃបញ្ចកោណ ។

លំហាត់ទី ១១៖ ចូររកដោយធ្វើសម្រាយបញ្ជាក់គ្រប់ចម្លើយនៃសមីការ $2^n=a!+b!+c!$ ។

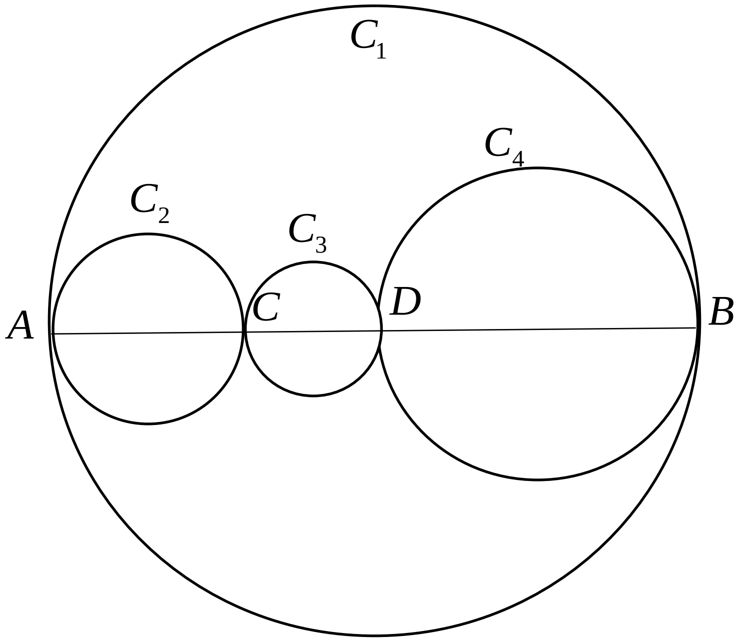
លំហាត់ទី ១២៖ Let ABC be a triangle with sides BC,CA,AB of length a,b,c respectively. Let D,E be the midpoints of the sides AC,AB respectively. Prove that BD is perpendicular to CE if, and only if $b^2+c^2=5a^2$.

លំហាត់ទី ១៣៖ គេអោយ $x_1,x_2,\cdots,x_n$ និង $y_1,y_2,\cdots,y_n$ ជាចំនួនពិតសេរី(ចំនួនពិតណាមួយក៏បាន) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ និង $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=1$ ។

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក II

បង្ហាញថា $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \le 2\left|1-\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right|$ រួចរកលក្ខខណ្ឌចាំបាច់ និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីអោយសមភាពកើតឡើង។

លំហាត់ទី ១៤៖ រង្វង់ C_1, C_2, C_3, C_4 មានអង្កត់ផ្ចិត AB, AC, CD, DB រៀងគ្នា ។ បរិមាត្ររង្វង់ C_1 គឺ 2016 ។ គណនាផលបូកបរិមាត្ររង្វង់ទាំងបួន ។



លំហាត់ទី ១៥៖ a,b,c ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$ab + ac = 144$$
$$ab + bc = 209$$
$$ac + bc = 221$$

រកតម្លៃនៃ $a^2 + b^2 + c^2$ ។

លំហាត់ទី ១៦៖ នៅក្នុងប្រមាណវិធីខាងក្រោម អក្សរផ្សេងគ្នាតំណាងអោយលេខផ្សេងគ្នា។ តើចំនួនដែលមានប្រាំខ្ទង់ $SIXTY$ ជាលេខអ្វី?

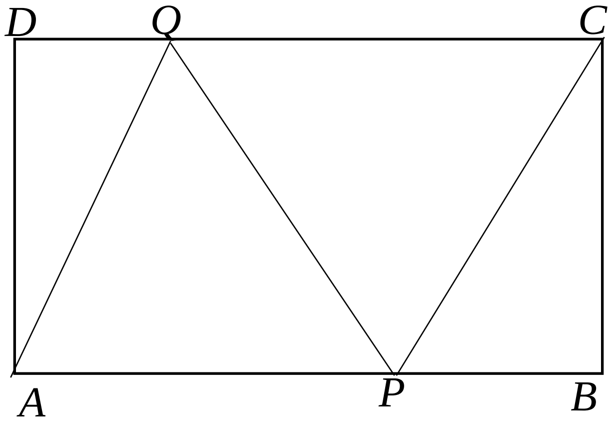
$$\begin{array}{r} FORTY \\ TEN \\ TEN \\ \hline SIXTY \end{array}$$

លំហាត់ទី ១៧៖ រកចំនួនគត់ដែលនៅក្បែរ $10\sqrt{0.7} + 10\sqrt{2.8}$ បំផុត ។

លំហាត់ទី ១៨៖ ប្រសិនបើផលបូក និង ផលគុណនៃចំនួនពិតវិជ្ជមានស្មើ 13ដូចគ្នា។ រក ផលបូកការេនៃចំនួនទាំងពីរ ។

លំហាត់ទី ១៩៖ ចំនួន 123456789101112.... ដោយប្រើចំនួនគត់ធម្មជាតិ $1,2,3,\cdots$ ។ គេសរសេររហូតបានលេខដែលមាន 201ខ្ទង់ ។ចូររកសំណល់ពេលគេចែកវានឹង 9 ។

លំហាត់ទី ២០៖ $ABCD$ ជាចតុកោណកែងដែលមាន $AB=34$ និង $BC=12$ ។ P និង Q ជាចំណុចនៅលើជ្រុង AB និង CD រៀងគ្នា ដែល $\angle CPQ$ និង $\angle PQA$ ជាមុំកែង។ រកផលបូកនៃប្រវែងពីរដែលអាចកើតមាននៃជ្រុង AP ។



លំហាត់ទី ២១៖ គេអោយ x,y,z ជាចំនួនគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $x^2+y-z=124$ និង $x+y^2-z=100$ ។ រកតម្លៃនៃ $x+y+z$ ។

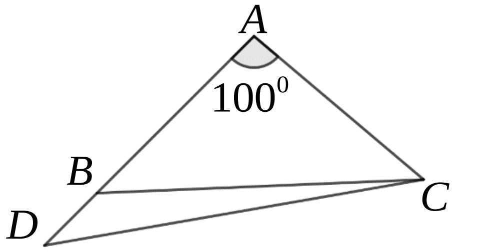
លំហាត់ទី ២២៖ a,b ជាចំនួនគត់ហើយ $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ ជាឫសមួយនៃសមីការ $x^2+ax+b=0$ ។ រកតម្លៃនៃ $a-b$ ។

លំហាត់ទី ២៣៖ រកចំនួនគត់ n តូចបំផុតដែល

$$2n.\left(45-\sqrt{2016}\right)>1$$ ។

លំហាត់ទី ២៤៖ គេអោយ x,y,z ជាចំនួនពិតដែល $x+y+z=1$ និង $xy+yz+zx=\frac{1}{3}$ ។ រកតម្លៃនៃ $\frac{4x}{y+1}+\frac{16y}{z+1}+\frac{64z}{x+1}$ ។

លំហាត់ទី ២៥៖ ABC ជាត្រីកោណសមបាតមួយដែលមាន $BA=BC$ និង $\angle ABC=100^0$ ។ បើ D ជាចំណុចមួយនៅលើ BA ត្រូវបានគេសង់យ៉ាងណាឲ្យបាន $BD=AC$ ។ ចូររក $\angle BDC$ ។



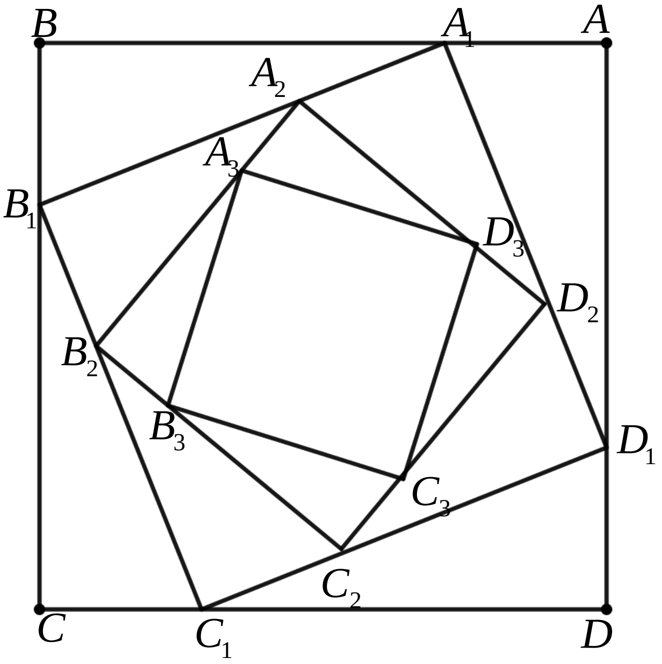
លំហាត់ទី ២៦៖ រកគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\frac{1}{n^2+5n+6}+\frac{1}{n^2+7n+12}+\frac{1}{n^2+9n+20}=\frac{1}{270}$$ ។

លំហាត់ទី ២៧៖ ABC ជាត្រីកោណសមបាតមួយដែលមាន $AB=AC=3$ ។ k ចំណុចផ្សេងគ្នាស្ថិតនៅលើជ្រុង BC តាងដោយ $P_1,P_2,\cdots,P_k$ ។ តាង $x_i=AP_i^2+BP_i.P_iC$ ដែល $i=1,2,3,\cdots,k$ ។ រកតម្លៃនៃ k បើ $x_1+x_2+\cdots+x_k=1080$ ។

លំហាត់ទី ២៨៖ គេអោយ $n_1,n_2,\cdots,n_9$ ជាប្រាំបួនចំនួនគត់វិជ្ជមានខុសៗគ្នា ដែល $n_1<n_2<\cdots<n_9$ ហើយ $n_1+n_2+\cdots+n_9=180$ ។ ឧបមាថាផលបូក $n_1+n_2+n_3+n_4+n_5$ មានតម្លៃអតិបរមា ។ រកតម្លៃអតិបរមាដែលអាចនៃ n_9-n_1 ។

លំហាត់ទី ២៩៖ ក្នុងរូបខាងក្រោម ការេ $ABCD$ មានក្រឡាផ្ទៃ 512 ។ គេសង់ការេ $A_1B_1C_1D_1$ នៅខាងក្នុងការេ $ABCD$ ដោយយក $AA_1=\frac{1}{4}AB, BB_1=\frac{1}{4}BC$, $CC_1=\frac{1}{4}CD$ និង $DD_1=\frac{1}{4}AD$ ។ បន្ទាប់មកគេសង់ការេមួយទៀត $A_2B_2C_2D_2$ នៅខាងក្នុងការេ $A_1B_1C_1D_1$ ដោយយក $A_1A_2=\frac{1}{4}A_1B_1, B_1B_2=\frac{1}{4}B_1C_1, C_1C_2=\frac{1}{4}C_1D_1$ និង $D_1D_2=\frac{1}{4}D_1A_1$ ។ គេបន្តការសង់របៀបនេះទៀតបានការេ $A_3B_3C_3D_3$ ។ រកក្រឡាផ្ទៃការេ $A_3B_3C_3D_3$ ។



ចម្លើយលំហាត់ស្រាវជ្រាវមានក្នុងសៀវភៅបន្ត...

ឯកសារយោង

1. www.google.com
2. Vietnamese mathematical documents
3. Mathematical Olympiad in China
4. Infinity
5. A Gentle Introduction to the American Invitational Mathematics Examination
6. Number Theory ,Titu Andreescu
7. Putnam and Beyond, Titu Andreescu
8. Singapore Mathematical Olympiad

រក្សាសិទ្ធិដោយបណ្ណាគារ បាក់ទូក ॥