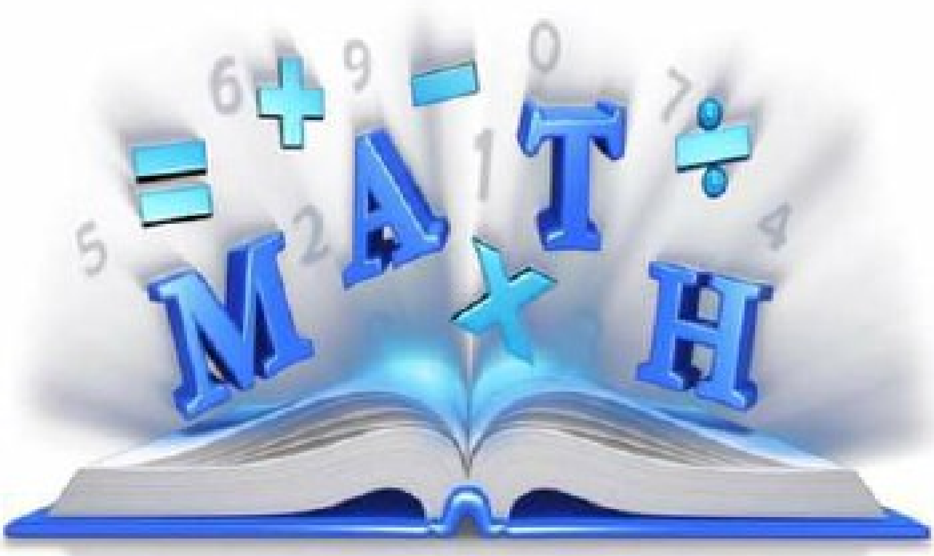
គណិតវិភាគ



ផលិតឆ្នាំ ២០១៧

លំហាត់ទី០១៖ គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ

$$u_n = \sqrt{2 \times \sqrt{2 \times \sqrt{2 \times \ldots \times \sqrt{2}}}}$$

មានឫសការេចំនួន n , $n \in IN^*$។

1. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន។
2. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់។

ដំណោះស្រាយ៖

1. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន

គេមាន $u_n = \sqrt{2 \times \sqrt{2 \times \sqrt{2 \times \ldots \times \sqrt{2}}}}$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{8}} \times \ldots \times 2^{\frac{1}{2^n}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$$

តាង $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ ជាផលបូកតួស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ដែល $q = \frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow S_n = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\frac{1}{2^n} - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right) = 1 - \frac{1}{2^n}$$

យើងបាន $u_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}}$

$$u_{n+1} = 2^{1-\frac{1}{2^{n+1}}}$$

យក $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{1-\frac{1}{2^{n+1}}}}{2^{1-\frac{1}{2^n}}} = 2^{-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^n}}$

$$= 2^{\frac{1}{2^{n+1}}} = \sqrt[2^{n+1}]{2}$$

ចំពោះ $n \in IN^*$ នោះ $n+1>n$

បើ $n=1$: $2>1$ ឬ $\sqrt[2^{n+1}]{2} > \sqrt[2^{n+1}]{1} = 1$

ដោយ $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ ឬ $u_{n+1} > u_n$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន។

2. បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់

យើងមាន $u_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}}$

ចំពោះ $n \in IN^*$: $u_n > 0$, នោះ ស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម (1)

ចំពោះ $n \in IN^*$: $2^{1-\frac{1}{2^n}} < 2^1$ ឬ $u_n < 2$

នោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើ (2) ។

តាម (1) & (2) គេអាចទាញបាន ស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់។

ដូចនេះ ស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់។

លំហាត់ទី០២÷ គេមានស្វ៊ីត (u_n) មួយកំណត់ដោយ ៖

$$u_{n+1} = \frac{eu_n + 2}{e} \quad (e = 2.718281\ldots)$$

បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន។

ដំណោះស្រាយ៖ បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន

គេមាន $u_{n+1} = \frac{eu_n + 2}{e}$

$$eu_{n+1} = eu_n + 2$$

$$e(u_{n+1} - u_n) = 2$$

$$\Longrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{2}{e} > 0$$

ដោយ $u_{n+1} - u_n > 0$ ឬ $u_{n+1} > u_n$

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន។

លំហាត់ទី០៣: បង្ហាញថាស្វ៊ីត $(u_n)_{n\in IN^*}$ ជាស្វ៊ីតទាល់។

ដោយ $u_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$, $n \in IN^*$ ។

ដំណោះស្រាយ: បង្ហាញថាស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់

គេមាន $u_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$

$$= \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{6} \times \frac{n+1}{n} \times \frac{2n+1}{n}$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

ចំពោះ $n \in IN^*$ យើងបាន ៖

$\frac{1}{n} > 0$ នោះ $u_n > \frac{1}{6}(1)(2) = \frac{1}{3}$

នោះ $u_n > \frac{1}{3}$ នោះយើងបាន (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោមត្រង់ $\frac{1}{3}$ ។ (1)

តាមវិសមភាព $AM \geq GM$ យើងបាន

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(2+\frac{1}{n}\right)}{2}\geq\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(2+\frac{1}{n}\right)\geq 2\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}$$

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{2}{n}\leq 2 \quad ,n\in IN^*$

$$3+\frac{2}{n}\leq 5$$

នោះ៖ $2\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}\leq 5$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\leq\frac{25}{4}$$

គុណអង្គសងខាង នឹង $\frac{1}{6}$ យើងបាន ៖

$$\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\leq\frac{25}{24}$$

$\Rightarrow u_n\leq\frac{25}{24}$ នោះ៖ (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើត្រង់ $\frac{25}{24}$ ។ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ ។

ដូចនេះ៖ (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់។

លំហាត់ទី០៤÷ គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ៖

$$\begin{cases}u_1=-1\\ u_{n+1}=\dfrac{n}{2(n+1)}u_n+\dfrac{3(2+n)}{2(n+1)}\end{cases}$$

បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន $\forall n\in IN^*$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន $\forall n \in IN^*$

យើងមាន $u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(2+n)}{2(n+1)}$

យក $u_{n+1} - u_n = \frac{n}{2(n+1)}u_n + \frac{3(2+n)}{2(n+1)} - u_n$

$$= \frac{nu_n + 3(2+n) - 2u_n(1+n)}{2(n+1)}$$

$$= \frac{nu_n + 6 + 3n - 2u_n - 2nu_n}{2(n+1)}$$

$$= \frac{3(n+2) - 2u_n - nu_n}{2(n+1)}$$

$$= \frac{3(n+2) - u_n(n+2)}{2(n+1)}$$

$$= \frac{(n+2)(3-u_n)}{2(n+1)}$$

ចំពោះ $\forall n \in IN^*$ គេមាន $\begin{cases}(n+2) > 0 \\ 2(n+1) > 0\end{cases}$

ដើម្បីឲ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើនកាលណា $3 - u_n > 0$

នោះយើងត្រូវស្រាយថា $u_n < 3$

ចំពោះ $n \in IN^*$ នោះប្រសិនបើ

$n = 1$, $3 - u_1 = 3 - (-1) = 4 > 0$, $u_1 < 3$ ពិត

ឧបមារថាពិតដល់ $n = k$, $u_k < 3$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថាពិតរហូតដល់ $n = k+1, u_{k+1} < 3$

យើងមាន $u_k < 3$

$$\frac{k}{2(k+1)}u_k < \frac{3k}{2(k+1)}$$

$$\frac{k}{2(k+1)}u_k + \frac{3(2+k)}{2(k+1)} < \frac{3k}{2(k+1)} + \frac{3(2+k)}{2(k+1)}$$

$$u_{k+1} < \frac{3k+6+3k}{2(k+1)}$$

$$u_{k+1} < \frac{6(k+1)}{2(k+1)} = 3 \text{ ពិត}$$

នោះ $u_n < 3$

យើងបាន $3 - u_n > 0$

គេទាញបាន $u_{n+1} - u_n > 0$

ដូចនេះ (u_n) ជាស៊ីតកើន។

លំហាត់ទី០៥៖ បង្ហាញថាស៊ីត $\{U_n\}_{n\in IN^*}$ ដែលមានតួទូទៅ

$U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ជាស៊ីតចុះ។

ដំណោះស្រាយ៖ បង្ហាញថាស៊ីត $\{U_n\}_{n\in IN^*}$ ជាស៊ីតចុះ

យើងមាន $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$\Longrightarrow U_{n+1} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$$

យក $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

$$= \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}$$

$$= \frac{(n+2-n-1)(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(n+1-n)(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}$$

$$= \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

ចំពោះ $\forall x \in IN^*$ យើងមាន

$n+2 > n$

$\sqrt{n+2} > \sqrt{n}$

$\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1} > \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$

$\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} < 1 \Leftrightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

ដូចនេះ (U_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

លំហាត់ទី០៦៖ បង្ហាញថាស្វ៊ីត (U_n) ជាស្វ៊ីតទាល់។

ដែល $U_n = \frac{3n}{n^2+1}$, $n \in IN$

ដំណោះស្រាយ៖ បង្ហាញថាស្វ៊ីត (U_n) ជាស្វ៊ីតទាល់

យើងមាន $U_n = \frac{3n}{n^2+1}$, $n \in IN$

$$U_n = \frac{3n}{n^2+1} \geq 0 \ , \ n \in IN \quad (1)$$

តាមវិសមភាព $Cauchy$ យើងមាន៖

$a^2+b^2 > 2ab$

$\Longrightarrow n^2+1 > 2n$

$\Rightarrow \frac{3n}{n^2+1} < \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2} \quad (2)$

តាម (1) & (2) គេទាញបាន

$0 \le u_n < \frac{3}{2}$

ដូចនេះ (U_n) ជាស្វ៊ីតទាល់

លំហាត់ទី០៧៖ គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីត (U_n) កំណត់ដោយ

$$\begin{cases} U_0 = -4 \\ U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n - 3 \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីត

គេមាន $\begin{cases} U_0 = -4 \\ U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n - 3 \end{cases}$

តាង $V_n = U_n - a$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ V_{n+1} &= U_{n+1} - a \\ &= \frac{2}{3}U_n - 3 - a \\ &= \frac{2}{3}U_n - \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}a - a - 3 \\ &= \frac{2}{3}(U_n - a) - \frac{a}{3} - 3 \end{aligned}$$

ដើម្បីឲ្យស្វ៊ីត (V_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រកាលណា $-\frac{a}{3} - 3 = 0$

$$\Rightarrow a = -9$$

យើងបាន $V_n = U_n + 9 \Rightarrow V_0 = U_0 + 9 = -4 + 9 = 5$

ដោយ $V_{n+1} = \frac{2}{3}V_n \Rightarrow q = \frac{2}{3}$

តែ $V_n = V_0 . q^n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$

គេបាន $5\left(\frac{2}{3}\right)^n = U_n + 9 \Longrightarrow U_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 9$

ដូចនេះ: $U_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 9$

លំហាត់ទី០៨៖ គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីត (U_n) កំណត់ដោយ៖

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាតួទី n នៃស្វ៊ីត (U_n)

យើងមាន $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$

សមីការសម្គាល់ស្វ៊ីត (u_n) គឺ $r^2 = r + 6$

$\Longrightarrow r^2 - r - 6 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 25 = 5^2$

$\Longrightarrow\ r_1 = \frac{1-5}{2} = -2\ ,\quad r_2 = \frac{1+5}{2} = 3$

តាងស្វ៊ីតជំនួយដូចខាងក្រោម៖

$\begin{cases} X_n = u_{n+1} + 2u_n \\ Y_n = u_{n+1} - 3u_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X_{n+1} = u_{n+2} + 2u_{n+1}\ (1) \\ Y_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1}\ (2) \end{cases}$

តាម (1) : $X_{n+1} = u_{n+2} + 2u_{n+1}$

$= u_{n+1} + 6u_n + 2u_{n+1}$

$= 3u_{n+1} + 6u_n$

$= 3(u_{n+1} + 2u_n)$

$X_{n+1} = 3X_n$

នាំឲ្យ (X_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = 3$

តាមរូបមន្ត $X_n = X_0.q^n$, $X_0 = u_1 + 2u_0 = 1 + 2 = 3$

$$X_n = 3(3)^n \quad (i)$$

តាម (2) : $Y_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1}$

$$= u_{n+1} + 6u_n - 3u_{n+1}$$
$$= 6u_n - 2u_{n+1}$$
$$= -2(u_{n+1} - 3u_n)$$
$$= -2Y_n$$

នាំឲ្យ (Y_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ដែលមានរេសុង $q = -2$

តាមរូបមន្ត $Y_n = Y_0 q^n$, $Y_0 = u_1 - 3u_0 = 1 - 3 = -2$

$$Y_n = -2(-2)^n \quad (ii)$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន

$$\begin{cases} X_n = 3(3)^n \\ Y_n = -2(-2)^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{n+1} + 2u_n = 3(3)^n \\ u_{n+1} - 3u_n = -2(-2)^n \end{cases}$$

ដោយ ប្តូកបំបាត់ u_{n+1} យើងទទួលបាន $-5u_n = -3(3)^n - 2(-2)^n$

នោះ $u_n = -\frac{1}{5}(-3(3)^n - 2(-2)^n)$

ដូចនេះ $u_n = -\frac{1}{5}[-3(3)^n - (-2)^n]$

លំហាត់ទី០៩៖ ប្រើទ្រឹស្តីស្វ៊ីតម៉ូណូតូន និងស្វ៊ីតទាល់បង្ហាញថាស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតរួម។

ដោយ $u_n = \frac{n}{n+1}\left(2 - \frac{1}{n^2}\right)$, $n \in IN^*$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតរួម

យើងមាន $u_n = \frac{n}{(n+1)}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)$ $, n \in IN^*$

$$= \frac{n(2n^2-1)}{n^2(n+1)} = \frac{2n^2-1}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{2(n+1)^2-1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{2n^2+4n+1}{(n+1)(n+2)}$$

យក $u_{n+1} - u_n = \frac{2n^2+4n+1}{(n+1)(n+2)} - \frac{2n^2-1}{n(n+1)}$

$$= \frac{n(2n^2+4n+1)}{n(n+1)(n+2)} - \frac{(2n^2-1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{2n^3+4n^2+n-2n^3-4n^2+n+2}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{2n+2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+2)} > 0 \, , \forall x \in IN^*$$

នាំឲ្យ $u_{n+1} - u_n > 0$ នោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតកើន (1) ។

ម្យ៉ាងទៀត ៖ $u_n = \frac{n}{n+1}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)$ $, \frac{n}{n+1} < 1 \, , \forall n \in IN^*$

នាំឲ្យ $u_n < 2 - \frac{1}{n^2}$

$u_n < 2 \, , \frac{1}{n^2} > 0$

ដោយ $u_n < 2$ នោះគេបាន (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់លើ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន៖ (u_n) ជាស្វ៊ីតរួម។

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតរួម។

លំហាត់ទី១០៖ ប្រើទ្រឹស្តីស្វ៊ីតម៉ូណូតូន និងស្វ៊ីតទាល់បង្ហាញថា (u_n)ជាស្វ៊ីតរួម។

ដែល $u_n = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\ , n \geq 2$

ដំណោះស្រាយ៖ បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតរួម

យើងមាន $u_n = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$$= \left(\frac{2^2-1}{2^2}\right)\left(\frac{3^2-1}{3^2}\right)\times\ldots\times\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)\ldots.(n-1)(n+1)}{(n!)^2}$$

$$= \frac{1\times 2\times 3\times 4\times\ldots\times(n-1)n(n+1)}{(n!)^2}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n!)^2} = \frac{(n!)(n+1)}{(n!)^2} = \frac{n+1}{n!}$$

នោះ $u_{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)!}$

យក $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+2}{(n+1)!}}{\frac{n+1}{n!}} = \frac{(n+2)n!}{(n+1)(n+1)!} = \frac{n+2}{(n+1)^2} < 1\ , \forall n \in IN^*$

គេទាញបាន (u_n) ជាស្វ៊ីតចុះ គ្រប់ $n \in IN^*$ (1) ។

ហើយ $u_n = \frac{n+1}{n!} > 0\ , n \in IN^*$

នោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ក្រោម។ (2)

តាម (1) និង (2) នោះ (u_n) ជាស្វ៊ីតរួម។

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតរួម ។

លំហាត់ទី១១៖ គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}, \quad n \in IN^* \end{cases}$$

គណនា $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាលីមីត

យើងមាន $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}, \quad n \in IN^* \end{cases}$

ពិនិត្យ ៖ $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$

$$u_{n+1}^2 = u_n^2 + \frac{1}{2^n}$$

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{1}{2^n}$$

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ $, n = 1,2,3,4, \ldots$

$n = 1$: $u_2^2 - u_1^2 = \frac{1}{2}$

$n = 2$: $u_3^2 - u_2^2 = \frac{1}{2^2}$

$n = 3$: $u_4^2 - u_3^2 = \frac{1}{2^3}$

... ...

$n = k \ : \ u_{k+1}^2 - u_k^2 = \frac{1}{2^k}$

បូកពីលើរហូតដល់ក្រោម យើងបាន

$u_{k+1}^2 - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^k}$

$u_{k+1}^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2^n} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} + 1$

$= 1 - \left(\frac{1}{2^k} - 1\right)$

$= 2 - \frac{1}{2^k} \Rightarrow u_{k+1} = \sqrt{2 - \frac{1}{2^k}} \Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{2 - \frac{1}{2^n}}$

$\Rightarrow u_n = \sqrt{2 - \frac{1}{2^{n-1}}}$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{2 - \frac{1}{2^{n-1}}} = 2 \ , \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0\right)$

ដូចនេះ: $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$

លំហាត់ទី១២៖ ចូរគណនាលីមីតស្វ៊ីត

(1). $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1}$

(2). $\lim_{n \to +\infty} \left(\cos\frac{a}{2} \times \cos\frac{a}{2^2} \times \ldots \times \cos\frac{a}{2^n}\right) \ , a \in]0, \pi[$

(3). $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}\right)$

(4). $\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{2} \times \sqrt[4]{2} \times \sqrt[8]{2} \times \ldots \times \sqrt[n]{2}\right)$

ដំណោះស្រាយ៖ គណនាលីមីត

(1). $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$

យើងមាន $-1\le \sin n! \le 1$

$$-\sqrt[3]{n^2}\le \sqrt[3]{n^2}\sin n! \le \sqrt[3]{n^2}$$

$$-\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}\le \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}\le \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}$$

$$-\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}\le \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}\le \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}$$

$$0\le \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}\le 0$$

ដូចនេះ: $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=0$

(2). $\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{a}{2}\times\cos\frac{a}{2^2}\times\dots\times\cos\frac{a}{2^n}\right)$

$let\ : S=\cos\frac{a}{2}\times\cos\frac{a}{2^2}\times\dots\times\cos\frac{a}{2^n}$

$by : 2\sin a\cos a=\sin 2a \ \Longrightarrow \cos a=\frac{\sin 2a}{2\sin a}$

$we\ have : \cos\frac{a}{2^n}=\frac{1}{2}.\frac{\sin\frac{a}{2^{n-1}}}{\sin\frac{a}{2^n}}$

$if\ n=1\ : \cos\frac{a}{2}=\frac{1}{2}.\frac{\sin a}{\sin\frac{a}{2}}$

$if\ n=2\ : \cos\frac{a}{2^2}=\frac{1}{2}.\frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin\frac{a}{2^2}}$

……………………………

$if\ \ n=n\ : \cos\frac{a}{2^n}=\frac{1}{2}.\frac{\sin\frac{a}{2^{n-1}}}{\sin\frac{a}{2^n}}$

$$we\ have : S_n = \frac{\sin a}{\sin\frac{a}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin\frac{a}{2^2}} \times \dots \times \frac{\sin\frac{a}{2^{n-1}}}{\sin\frac{a}{2^n}} \times \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2^n}\sin a}{\sin\frac{a}{2^n}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2^n}\sin a}{\sin\frac{a}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{a}{2^n}\left(\frac{\sin a}{a}\right)}{\sin\frac{a}{2^n}}$$

$$let\ t = \frac{a}{2^n}\ , when\ n \to +\infty\ \ \Rightarrow t \to 0$$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\sin t}\left(\frac{\sin a}{a}\right)\right) = \frac{\sin a}{a}$$

$$\boxed{So\ ,\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{a}{2}\times\cos\frac{a}{2^2}\times\dots\times\cos\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin a}{a}}$$

(3). $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$

តាង $S_n = \frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}$

យើងមាន $\frac{n}{n^2+1} \le \frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2+n}$

$$\frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2+2} < \frac{n}{n^2+n}$$

$$\frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2+3} < \frac{n}{n^2+n}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2+n} \le \frac{n}{n^2+n}$$

យើងបាន $\frac{n^2}{n^2+1} \le S_n \le \frac{n^2}{n^2+n}$

$$\frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \le S_n \le \frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \le \lim_{n\to+\infty} S_n \le \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)$$

$$1 \le \lim_{n\to+\infty} S_n \le 1$$

ដូចនេះ: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=1$

(4). $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{2}\times\ldots\times\sqrt[n]{2})$

តាង $S_n=\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{2}\times\ldots\times\sqrt[n]{2}$

$$=2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{4}}\times2^{\frac{1}{8}}\times\ldots\times2^{\frac{1}{n}}$$

$$=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$$

$$=2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2^n}-1}{\frac{1}{2}-1}}=2^{1-\frac{1}{2^n}}$$

$$\Longrightarrow\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}2^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}=2$$

ដូចនេះ: $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{2}\times\ldots\times\sqrt[n]{2})=2$

លំហាត់ទី១៣ ៖ បង្ហាញថា ស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ ៖

$$u_n=\frac{\sin 1^0}{2}+\frac{\sin 2^0}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n^0}{n^2}$$

ជាស្វ៊ីត Cauchy ។ $(n\in IN^*)$

ដំណោះស្រាយ: បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីត Cauchy

គេមាន $u_n=\frac{\sin 1^0}{2}+\frac{\sin 2^0}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n^0}{n^2}$

យើងឲ្យ $u_{n+p}=u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\ ,p\in IN^*$

$$=u_n+\frac{\sin(n+1)^0}{(n+1)^2}+\frac{\sin(n+2)^0}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{\sin(n+p)^0}{(n+p)^2}$$

យើងបាន $|u_{n+1}-u_n|=\left|\frac{\sin(n+1)^0}{(n+1)^2}+\frac{\sin(n+2)^0}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{\sin(n+p)^0}{(n+p)^2}\right|$

$$\leq\left|\frac{\sin(n+1)^0}{(n+1)^2}\right|+\left|\frac{\sin(n+2)^0}{(n+2)^2}\right|+\cdots+\left|\frac{\sin(n+p)^0}{(n+p)^2}\right|$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}$$, ព្រោះ $\sin a \leq 1$

$$< \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}$$

$$= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}$$

$$< \frac{1}{n}, \quad \left(\frac{1}{n+p}>0, \forall n \in IN^* \text{ និង } \forall p \in IN^*\right)$$

នោះ $|u_{n+1}-u_n| < \frac{1}{n}$

$\forall \varepsilon > 0$ ដើម្បីបាន $|u_{n+p}-u_n| < \varepsilon$,យើងគ្រាន់តែយក $\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

កំណត់យក $\delta = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ ។

$\forall \varepsilon > 0 , \exists \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \in IN , \forall n, n+p > \delta , |u_{n+p}-u_n| < \varepsilon$

នាំឲ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតកូស៊ី (Cauchy)

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតកូស៊ី (Cauchy) ។

លំហាត់ទី១៤៖ គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ ៖

$$u_n = \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} , n \geq 1$$

បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកូស៊ី (Cauchy) ។

ដំណោះស្រាយ៖ បង្ហាញថា (u_n) ជាស្វ៊ីតកូស៊ី (Cauchy)

យើងមាន $u_n = \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$,

យើងឲ្យ $u_{n+p} = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}\ , n \geq 1$

$$= u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}$$

យើងបាន $|u_{n+1} - u_n|$

$$= \left|\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}\right|$$

$$\leq \left|\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right| + \left|\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right| + \cdots + \left|\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}\right|$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}$$

គេបាន $|u_{n+1} - u_n| < \frac{1}{n+1}$

$\forall \varepsilon > 0$ ដើម្បីឲ្យបាន $|u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$ យើងគ្រាន់តែយក $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$

$$\Longrightarrow n = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]\ , \forall n, n+p > \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]\ , |u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$

នោះ នាំឲ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតកូស៊ី (Cauchy)

ដូចនេះ (u_n) ជាស្វ៊ីតកូស៊ី (Cauchy) ។

លំហាត់ទី១៤៖ បង្ហាញថា ចំពោះ $\forall n \in IN^*$៖

$$A.\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}=0 \quad , \quad B=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n!}=0$$

ដំណោះស្រាយ៖

$A.$ បង្ហាញថា $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}=0$

យើងមាន $\frac{n}{2^n}>0\ ,\forall n\in IN^*$

ម្យ៉ាងទៀត $\frac{n}{(1+1)^n}=\frac{n}{1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n}$

$$\le\frac{n}{C_n^2}=\frac{n}{\frac{n!}{(n-2)!\,2!}}$$

$$=\frac{n(n-2)!\,2!}{n!}$$

$$=\frac{2n}{n(n-1)}=\frac{2}{n-1}$$

នោះគេបាន $\lim_{n\to+\infty}0<\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}<\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n-1}$

$$0<\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}<0$$

យើងទាញបាន $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}=0$ ពិត ។

ដូចនេះ៖ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}=0$

$B.$ បង្ហាញថា $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n!}=0$

ចំពោះ $\forall n\in IN$ នោះ៖ $\frac{2^n}{n!}>0$

ម្យ៉ាងវិញទៀត៖ $\frac{2^n}{n!}=\frac{2^n}{1\times2\times3\times\ldots\times n}$

$$=\frac{2}{1}\times\frac{2}{2}\times\frac{2}{3}\times\ldots\times\frac{2}{n}$$

$$< 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \ldots \times \frac{2}{3}$$

$$= 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

នោះ $0 < \frac{2^n}{n!} < 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

យើងបាន $\lim_{n\to+\infty} 0 < \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} < \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

$$0 < \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} < 0$$

នោះយើងទាញបាន $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ ពិត។

ដូចនេះ $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$