

# គណិតវិទ្យា



អាន. គិត. យល់

## សំហាត់ល្អៗ និងចម្លើយ



៤០០ សំហាត់-ចម្លើយ

តើមានសំហាត់ណាខ្លះ

ដែលអ្នកមិនធ្លាប់ឮឆ្លើយ?

ចោះកុម្មុលើកទី២ ៖ ១២/១២/១២

# គណិតវិទ្យា

## លំហាត់ល្អៗ និងចម្លើយ

### ៤០០ លំហាត់-ចម្លើយ

ស្នេហាទៅលំហាត់ល្អៗ និងចម្លើយ នេះជាកម្មសិទ្ធិរបស់ :

- ឈ្មោះ : ..... ភេទ .....

- សព្វថ្ងៃជា ..... នៅ .....

- បានបត់ចម្លងនៅថ្ងៃទី ..... ខែ ..... ឆ្នាំ 201... តម្លៃ .....

- អាសយដ្ឋាន .....

- លេខទូរស័ព្ទទំនាក់ទំនង .....

ផ្តល់សិទ្ធិចម្លងសម្រាប់តែការសិក្សាប៉ុណ្ណោះ



**ការប្តេជ្ញា**

**សូមស្វាគមន៍ :**

សួស្តី! លោកគ្រូ-អ្នកគ្រូ និងប្អូនសិស្សានុសិស្ស ជាទីស្រឡាញ់ និងជាទីរាប់អាន។ សៀវភៅដែលអ្នកកំពុងតែកាន់ អាននេះ គឺជាការប្រមូលផ្តុំ និងការបង្កើតថ្មី នូវលំហាត់ល្អៗជាច្រើនរហូតដល់ ៤០០ លំហាត់។ លំហាត់នីមួយៗសុទ្ធតែមាន លក្ខណៈពិសេសផ្សេងៗពីគ្នាទៅតាមសមត្ថភាពពីថ្នាក់ទី ៧ ដល់ថ្នាក់ទី ១២។ វាមានបង្ហាញពីកម្រិតសមត្ថភាព និង ដំណោះស្រាយប្រកបទៅដោយ ល្បិច វិធីសាស្ត្រ បច្ចេកទេស ... ។

**គោលបំណងដើម្បី :**

- ប្រមូលផ្តុំលំហាត់ល្អៗដាក់ក្នុងសៀវភៅតែមួយទុកជាឯកសារ និងជាការកម្សាន្តលេង ពេលអន្សូក ។
- សិស្សានុសិស្សត្រៀមប្រឈមប្រឆាំងនានា អាហារូបករណ៍ ជាពិសេសប្រឈមសិស្សពូកែ ។
- សម្រួលដល់លោកគ្រូ-អ្នកគ្រូ ដែលមានការស្រាវជ្រាវ ចង់ពង្រឹង និងពង្រីកសមត្ថភាពផ្ទាល់ខ្លួនបន្ថែមទៀត ។
- បង្ហាញឡើងវិញនូវលំហាត់ល្អៗ ក្នុងសម័យអតីតកាល ដែលស្ទើរតែបាត់បង់ ។
- អភិវឌ្ឍន៍ចំណេះដឹង និងសមត្ថភាពផ្ទាល់ខ្លួន ដើម្បីក្លាយជាបុគ្គលមានសមត្ថភាព ។

**សំណូមពរ :**

ជាសំណូមពររបស់ខ្ញុំ ដែលជាអ្នករៀបរៀង សូមអ្នកអាន ឬអ្នកស្រាវជ្រាវ ដោះស្រាយលំហាត់ណា ដែលអ្នកចង់ ដោះស្រាយ មិនចាំបាច់ធ្វើតាមលំដាប់លេខរៀងទេ។ បើពុំដឹងពីកម្រិតសមត្ថភាពទេ សូមមើលការបង្ហាញពីកម្រិតសមត្ថភាព នៅបន្ទាប់ពីលំហាត់ទាំងអស់។ ជាពិសេសសូមធ្វើលំហាត់ទាំងនេះនៅពេលដែលអ្នកមានអារម្មណ៍ល្អ ព្រោះវាត្រូវការការគិត ច្រើន។ សូមបញ្ចេញឱ្យអស់ពីលទ្ធភាព និងសមត្ថភាពខ្លួនឯងជាមុនសិន មុននឹងផ្ទៀងផ្ទាត់មើលចម្លើយ ដែលមាននៅក្នុង សៀវភៅនេះ។ បើមានចម្ងល់មិនយល់ ឬមានបញ្ហា សូមទាក់ទងទៅកាន់មិត្តភក្តិរបស់អ្នកដែលមានសមត្ថភាព ឬអ្នករៀបរៀង នៅពេលវេលាសមរម្យ។

**ការរិះគន់ :**

ទោះបីជាខ្ញុំខិតខំ ប្រឹងប្រែង ប្រិតប្រៀង យ៉ាងណាក៏ដោយ ក៏កំហុសត្រូវតែកើតមានជាក់ជាមិនខានឡើយ។ នេះគឺ ដោយសារចំណេះដឹងនៅមានកម្រិត ទាំងផ្នែកបច្ចេកទេសគរុកោសល្យ អក្ខរាវិរុទ្ធ រចនាបថ និងបច្ចេកទេសកុំព្យូទ័រ ឬរឿងរាវ បច្ចេកទេសផ្សេងៗទៀត។ ទោះបីជាមានកំហុសឆ្គងយ៉ាងដូចម្តេចក៏ដោយ សូមមិត្តអ្នកអានមេត្តាអធ្យាស្រ័យ អភ័យទោស ដល់ខ្ញុំផង ហើយខ្ញុំសូមរងចាំ ការរិះគន់យ៉ាងរីករាយ ពីសំណាក់មិត្តអ្នកអានគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានទាំងអស់ ដើម្បីឱ្យការបោះពុម្ព សៀវភៅនេះលើកក្រោយ កាន់តែប្រសើរជាងមុន។

**ជូនពរ :**

សូមមិត្តអ្នកអាន មានសុខភាពល្អបរិបូណ៌ រៀនសូត្របានពូកែ និងស្រាវជ្រាវទទួលបានជោគជ័យ ។

ស្វាយរៀង. ថ្ងៃទី ១២ ខែ ធ្នូ ឆ្នាំ ២០១២

យុវនិស្សិត ឯកទេស គណិតវិទ្យា : **ប្រិស ដារ៉ា**

*សូមអរគុណ !*



**បទពិសោធន៍ នៃការសិក្សា គណិតវិទ្យា**

ជាការពិតការសិក្សាគណិតវិទ្យា វាពុំមែនជាការងាយស្រួលនោះទេ ជាពិសេសគឺការសិក្សាដើម្បីឱ្យក្លាយខ្លួនជាសិស្ស ពូកែតែម្តង។ វាទាមទារឱ្យយើងមានការតស៊ូ ព្យាយាម អំណត់ អត់ធុត់ ជាច្រើនទាំងកាយ និងចិត្ត តែពុំមែនមានន័យថា យើងមិនអាចធ្វើបាននោះទេ។ ពេលសិក្សាយើងត្រូវចែកឱ្យដាច់ថា “**តើយើងរៀនយកចេះ ឬរៀនយកជាប់ ?**” ។ កាលណា យើងចង់ក្លាយខ្លួនទៅជាសិស្សពូកែគណិតវិទ្យា យើងត្រូវរៀនយកចេះ គឺមានន័យថាយើងត្រូវយល់ឱ្យច្បាស់ អំពីមេរៀន រូបមន្ត ឬលំហាត់ដែលយើងបានរៀនរួច មិនមែនរៀនបន្តបង្អួចខ្លួនឯងនោះទេ។ ការរៀនបន្តខ្លួនឯង នឹងធ្វើឱ្យយើង ក្លាយទៅជា មនុស្សស្លាក់ស្ដើរ រហូតដល់មានពេលខ្លះ មិនហ៊ានថាខ្លួនឯងខុស ឬត្រូវ ក៏មាន។ សកម្មភាពបែបនេះ នឹងធ្វើឱ្យយើងទទួលបាន បរាជ័យក្នុងការសិក្សា នាំឱ្យយើងមានអនាគតមិនល្អ។

ក្នុងនាមជាអ្នកធ្លាប់ឆ្លងកាត់ការសិក្សា ហើយក៏ធ្លាប់ទទួលបានទាំងបរាជ័យ និងជោគជ័យ ក្នុងការសិក្សាផ្នែក គណិតវិទ្យា ខ្ញុំសូមបង្ហាញអំពីបទពិសោធន៍បរាជ័យរបស់ខ្ញុំដូចតទៅ :

- មិនយល់ពីរបៀបនៃការប្រឡង ឬរបៀបនៃការសរសេរវិញ្ញាសា។
- មិនបានពង្រឹងសមត្ថភាពខ្លួនឯង លើលំហាត់នីមួយៗឱ្យបានច្បាស់លាស់ (មើលងាយលំហាត់) ។
- ចាំតែទទួលបានការបង្ហាត់បង្រៀនពីគ្រូ មិនបានស្វ័យសិក្សា មិនបានធ្វើការស្រាវជ្រាវលើលំហាត់ផ្សេងៗ។
- មានមោទនភាពជ្រុលលើខ្លួនឯង ... ។

សកម្មភាពទាំងអស់ខាងលើនេះហើយ ដែលធ្វើឱ្យខ្ញុំទទួលបានបរាជ័យក្នុងការសិក្សាគណិតវិទ្យា ។

សូមកុំបោះបង់ចោលការតាំងចិត្ត នៅពេលដែលយើងចាប់ផ្តើមដំបូង ហើយយើងជួបលំហាត់សិស្សពូកែសុទ្ធតែលំបាក នោះវាជារឿងធម្មតាទេ ព្រោះយើងមិនទាន់មានបទពិសោធន៍គ្រាប់គ្រាន់ដើម្បីដោះស្រាយវា។ យើងត្រូវគិតក្នុងចិត្តថា “**លំហាត់ដែលធ្វើចេញគឺជាលំហាត់ដែលធ្លាប់ជួប**” ។ ឃ្លានេះគឺចង់មានន័យថា សិស្សពូកែគណិតវិទ្យាស្ទើរតែទាំងអស់សុទ្ធតែ ជាអ្នកមានបទពិសោធន៍ធ្លាប់ជួបលំហាត់ច្រើន ដូចនេះធ្វើឱ្យគេអាចដឹងអំពីវិធី ល្អៗ ឬបច្ចេកទេសដើម្បីដោះស្រាយលំហាត់ ទាំងនោះ ។ កាលណាយើងដោះស្រាយលំហាត់សិស្សពូកែបានកាន់តែច្រើន នោះធ្វើឱ្យយើងដឹងពីវិធីដោះស្រាយកាន់តែច្រើន ដែរ។ ដើម្បីក្លាយខ្លួនទៅជាសិស្សពូកែគណិតវិទ្យា អ្នកមិនត្រូវមានគំនិតដូចខាងក្រោម :

- គេរៀនចេះមកពីគេជាកូនអ្នកមាន មានលុយរៀនគូ ឬជួលគ្រូបង្រៀន ។
- លំហាត់គេជួបល្អៗ ទាញចេញពីអ៊ុនធឺណែត រីឯយើងគ្មានលទ្ធភាពដូចគេ ។
- គេជាមនុស្សមានដុំតាំងពីកំណើត សុខភាពគេល្អ ... ។

សូមកុំមានគំនិតបែបនេះ វាគ្មានប្រយោជន៍អ្វីសម្រាប់យើងទេ ក្រៅពីធ្វើឱ្យយើងតូចចិត្តលើខ្លួនឯង។

ចាប់ពីពេលនេះតទៅយើងត្រូវខំរៀនសូត្របន្ថែមទៀត ត្រូវស្រាវជ្រាវ ដោះស្រាយលំហាត់ឱ្យបានច្រើន ចៀសវាង ការខ្ជិល។ **បិសាចខ្ជិលខ្លាចការធ្វើការងារជាទំលាប់ណាស់** ដូចនេះសូមកុំឱ្យបិសាចខ្ជិលចូលខ្លួនរបស់យើង គឺយើងត្រូវមាន ផែនការរៀនសូត្រឱ្យបានច្បាស់លាស់ ហើយអនុវត្តការរៀនសូត្រទាំងនោះឱ្យក្លាយទៅជាទម្លាប់។

ជាចុងក្រោយសូមជូនពរដល់មិត្តអ្នកអានទាំងអស់ មានសុខភាពល្អ ដើម្បីរៀនសូត្រក្លាយទៅជាមនុស្សមានសមត្ថភាព និងទទួលបានជោគជ័យ ដើម្បីអភិវឌ្ឍប្រទេសជាតិយើងឱ្យមានភាពរីកចម្រើន។



**សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ**

សូមអរគុណជូនដល់លោកកឡឹក ជា ចំរើន និងអ្នកម្តាយ ពេជ្រ សោភ័ណ្ឌ ដែលលោកទាំងពីរបានផ្តល់កំណើតដល់កូន ហើយបីបាច់ថែរក្សាចិញ្ចឹមកូន ជួយឱ្យកូនបានសិក្សារហូតបានក្លាយជាគ្រូបង្រៀនម្នាក់ ។ សូមជូនពរលោកទាំងពីរមានព្រះជន្មយឺនយូរ ប្រកបដោយសុខភាពល្អ ដើម្បីជួយផ្តល់ភាពកក់ក្តៅដល់កូនចៅជំនាន់ក្រោយ ។ អរគុណដល់បងប្អូនប្រុសស្រីទាំង ០៤ នាក់ ដែលបានជួយផ្គត់ផ្គង់ និងជ្រោមជ្រែងការរៀនសូត្ររបស់ខ្ញុំ ទាំងថវិការ និងសម្ភារៈ ជាពិសេសគឺកុំព្យូទ័រ ធ្វើឱ្យខ្ញុំអាចពង្រឹង និងពង្រីកចំណេះដឹងផ្នែកវិទ្យាសាស្ត្របានប្រសើរជាងមុន ។ ជូនពរដល់ដល់បងប្អូនទាំង ៤ មានសុខភាពល្អ និងប្រកបរបរកាក់កបកើនចំណូល ។

សូមអរព្រះគុណដល់ព្រះតេជគុណ ភីម សុភណ្ឌ ជាគ្រូចៅអធិការវត្តព្រៃវង់ ដែលព្រះអង្គបានអនុញ្ញាតឱ្យខ្ញុំព្រះករុណា ស្នាក់អាស្រ័យនៅក្នុងវត្ត និងប្រើប្រាស់អគ្គិសនី ក្នុងការរៀបចំមេរៀន ព្រមទាំងបានជួយផ្គត់ផ្គង់ខាងភស្តុភារសម្ភារៈផ្សេងៗ ។ សូមប្រគេនពរដល់ព្រះតេជគុណមានព្រះជន្មយឺនយូរ ។

សូមអរគុណដល់អ្នកគ្រូ Niko ជាអ្នកស្ម័គ្រចិត្តជនជាតិជប៉ុន ដែលអ្នកគ្រូបានផ្តល់កម្លាំងចិត្ត និងលើកទឹកចិត្តដល់រូបខ្ញុំក្នុងការប្រកបរបរជាគ្រូបង្រៀន និងជួយឧបត្ថម្ភដល់រូបខ្ញុំនូវថវិកាមួយចំនួនធំ ។ សូមជូនពរអ្នកគ្រូមានសុខភាពល្អ ជាពិសេសនេះពេលអ្នកគ្រូធ្វើដំណើរមាតុភូមិនិវត្តន៍ទៅកាន់ប្រទេសជប៉ុនវិញ សូមមានសុវត្ថិភាពខ្ពស់បំផុត ។

សូមអរគុណ ដល់មជ្ឈមណ្ឌលគរុកោសល្យភូមិភាគ ក៏ដូចជាអនុវិទ្យាល័យអនុវត្ត ដែលបានផ្តល់ជា ទីកន្លែង និងអគ្គិសនី ដើម្បីរៀបចំមេរៀន ។ សូមអរគុណដល់អ្នកគ្រូ វណ្ណី ផល្លា ជាគ្រូឧទេសគណិតវិទ្យា , អ្នកគ្រូ ជា សុគន្ធារី ជាគ្រូគំរូគណិតវិទ្យា ។ អរគុណដល់ គរុសិស្សថ្នាក់ឯកទេស គណិតវិទ្យា-រូបវិទ្យា រួមជំនាន់ទី២១ មាន :

- |                         |                       |                           |
|-------------------------|-----------------------|---------------------------|
| ១. លោក អាន សុខគន្ធា     | ២. កញ្ញា ផល ស្រីធា    | ៣. កញ្ញា ឆាយ សុគន្ធាមុំ   |
| ៤. កញ្ញា ផាត់ សុវណ្ណារី | ៥. កញ្ញា ស៊ិន សុគន្ធា | ៦. លោក សុខា កុសល្យ        |
| ៧. លោក ឯម សុខសុវណ្ណ     | ៨. កញ្ញា គង់ វត្តធី   | ៩. លោក កុន អិត            |
| ១០ លោក យន់ ម៉ារ៉ូ       | ១១ លោក អុល អេន        | ១២ លោក គឹម ផាន់ណា         |
| ១៣ កញ្ញា វ៉ាន់ ចន្ទា    | ១៤ កញ្ញា ស្លឹក យ៉ាត   | ១៥. កញ្ញា ស៊ីម ស៊ីណាត     |
| ១៦ លោក ពួក សុខសាន្ត     | ១៧. លោក តេង សារី      | ១៨ លោក ជីម សារ៉ាត់        |
| ១៩ លោក រាជ វុត្តា       | ២០. លោក វ៉ន លីណា      | ២១ លោក មាស ភារម្យ         |
| ២២ កញ្ញា យ៉ោក បុប្ផ     | ២៣ លោក ហួន ស៊ុញ       | ២៤ គរុសិស្ស ប្រើស ដារ៉ា ។ |



គណៈកម្មាធិការ អាន. គិត. យល់

សូមស្វាគមន៍ការមកដល់

បំណងចិត្ត



យោបល់ខ្ញុំ  
សូមធ្វើលំហាត់ណាដែលអ្នកចង់ធ្វើ!  
សូមធ្វើលំហាត់ទាំងនេះនៅពេលអ្នកមានអារម្មណ៍ល្អ!  
បើធ្វើមិនចេញពេលនេះ សូមទុកធ្វើពេលក្រោយ!  
សូមប្រឹងប្រែងដើម្បីរកគាត់ដ៏ល្អរបស់អ្នក!



តារាងបង្ហាញពីកម្រិតសមត្ថភាពដោះស្រាយលំហាត់ :

| លេខរៀង<br>លំហាត់ | សមត្ថភាព<br>ថ្នាក់ទី | លេខរៀង<br>លំហាត់ | សមត្ថភាព<br>ថ្នាក់ទី | លេខរៀង<br>លំហាត់ | សមត្ថភាព<br>ថ្នាក់ទី | លេខរៀង<br>លំហាត់ | សមត្ថភាព<br>ថ្នាក់ទី | លេខរៀង<br>លំហាត់ | សមត្ថភាព<br>ថ្នាក់ទី |
|------------------|----------------------|------------------|----------------------|------------------|----------------------|------------------|----------------------|------------------|----------------------|
| ១                | ៩                    | ៣៦               | ១១                   | ៧១               | ១២                   | ១០៦              | ៩                    | ១៤១              | ៩                    |
| ២                | ៩                    | ៣៧               | ១១                   | ៧២               | ៩                    | ១០៧              | ១២                   | ១៤២              | ៩                    |
| ៣                | ៩                    | ៣៨               | ១០                   | ៧៣               | ១២                   | ១០៨              | ១២                   | ១៤៣              | ១០                   |
| ៤                | ៩                    | ៣៩               | ១១                   | ៧៤               | ៩                    | ១០៩              | ១០                   | ១៤៤              | ១០                   |
| ៥                | ៩                    | ៤០               | ៩                    | ៧៥               | ៩                    | ១១០              | ១០                   | ១៤៥              | ១០                   |
| ៦                | ៩                    | ៤១               | ១០                   | ៧៦               | ៩                    | ១១១              | ៨                    | ១៤៦              | ៩                    |
| ៧                | ១០                   | ៤២               | ១០                   | ៧៧               | ៩                    | ១១២              | ៩                    | ១៤៧              | ៩                    |
| ៨                | ១០                   | ៤៣               | ១១                   | ៧៨               | ៩                    | ១១៣              | ៩                    | ១៤៨              | ៩                    |
| ៩                | ១១                   | ៤៤               | ៩                    | ៧៩               | ៩                    | ១១៤              | ៩                    | ១៤៩              | ៩                    |
| ១០               | ៩                    | ៤៥               | ៩                    | ៨០               | ៩                    | ១១៥              | ៩                    | ១៥០              | ៩                    |
| ១១               | ៩                    | ៤៦               | ៩                    | ៨១               | ១០                   | ១១៦              | ៩                    | ១៥១              | ៩                    |
| ១២               | ៩                    | ៤៧               | ៩                    | ៨២               | ៩                    | ១១៧              | ៩                    | ១៥២              | ៩                    |
| ១៣               | ៩                    | ៤៨               | ១០                   | ៨៣               | ៩                    | ១១៨              | ៩                    | ១៥៣              | ៩                    |
| ១៤               | ៩                    | ៤៩               | ១០                   | ៨៤               | ៩                    | ១១៩              | ១២                   | ១៥៤              | ៩                    |
| ១៥               | ៩                    | ៥០               | ១២                   | ៨៥               | ៩                    | ១២០              | ៩                    | ១៥៥              | ៩                    |
| ១៦               | ៩                    | ៥១               | ៩                    | ៨៦               | ១២                   | ១២១              | ៩                    | ១៥៦              | ៩                    |
| ១៧               | ៩                    | ៥២               | ១០                   | ៨៧               | ៩                    | ១២២              | ៩                    | ១៥៧              | ១០                   |
| ១៨               | ៩                    | ៥៣               | ៩                    | ៨៨               | ៩                    | ១២៣              | ១០                   | ១៥៨              | ១០                   |
| ១៩               | ១០                   | ៥៤               | ១២                   | ៨៩               | ៩                    | ១២៤              | ៩                    | ១៥៩              | ៩                    |
| ២០               | ៩                    | ៥៥               | ១២                   | ៩០               | ៩                    | ១២៥              | ៩                    | ១៦០              | ៧                    |
| ២១               | ៩                    | ៥៦               | ១០                   | ៩១               | ៩                    | ១២៦              | ៩                    | ១៦១              | ៧                    |
| ២២               | ៩                    | ៥៧               | ១២                   | ៩២               | ១២                   | ១២៧              | ១១                   | ១៦២              | ៧                    |
| ២៣               | ១០                   | ៥៨               | ១២                   | ៩៣               | ៩                    | ១២៨              | ១២                   | ១៦៣              | ៩                    |
| ២៤               | ១០                   | ៥៩               | ១០                   | ៩៤               | ៩                    | ១២៩              | ១២                   | ១៦៤              | ៩                    |
| ២៥               | ១២                   | ៦០               | ១០                   | ៩៥               | ៩                    | ១៣០              | ១០                   | ១៦៥              | ៩                    |
| ២៦               | ៩                    | ៦១               | ៩                    | ៩៦               | ៩                    | ១៣១              | ៩                    | ១៦៦              | ១០                   |
| ២៧               | ៩                    | ៦២               | ៩                    | ៩៧               | ៩                    | ១៣២              | ៩                    | ១៦៧              | ៩                    |
| ២៨               | ៩                    | ៦៣               | ៩                    | ៩៨               | ៩                    | ១៣៣              | ៩                    | ១៦៨              | ៩                    |
| ២៩               | ១០                   | ៦៤               | ១២                   | ៩៩               | ៩                    | ១៣៤              | ៩                    | ១៦៩              | ៩                    |
| ៣០               | ៩                    | ៦៥               | ១២                   | ១០០              | ៨                    | ១៣៥              | ១០                   | ១៧០              | ៩                    |
| ៣១               | ៩                    | ៦៦               | ៩                    | ១០១              | ៩                    | ១៣៦              | ៩                    | ១៧១              | ៩                    |
| ៣២               | ៩                    | ៦៧               | ៩                    | ១០២              | ៩                    | ១៣៧              | ៩                    | ១៧២              | ៩                    |
| ៣៣               | ៩                    | ៦៨               | ៩                    | ១០៣              | ៩                    | ១៣៨              | ១០                   | ១៧៣              | ៩                    |
| ៣៤               | ១១                   | ៦៩               | ១០                   | ១០៤              | ៩                    | ១៣៩              | ៩                    | ១៧៤              | ៩                    |
| ៣៥               | ១១                   | ៧០               | ១២                   | ១០៥              | ៩                    | ១៤០              | ៩                    | ១៧៥              | ៩                    |

| លេខរៀង<br>សំណាង | សមត្ថភាព<br>ថ្នាក់ទី | លេខរៀង<br>សំណាង | សមត្ថភាព<br>ថ្នាក់ទី | លេខរៀង<br>សំណាង | សមត្ថភាព<br>ថ្នាក់ទី | លេខរៀង<br>សំណាង | សមត្ថភាព<br>ថ្នាក់ទី | លេខរៀង<br>សំណាង | សមត្ថភាព<br>ថ្នាក់ទី |
|-----------------|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------|----------------------|
| ១៧៦             | ៩                    | ២១១             | ៩                    | ២៤៦             | ៧                    | ២៨១             | ៩                    | ៣១៦             | ៩                    |
| ១៧៧             | ៩                    | ២១២             | ៩                    | ២៤៧             | ៩                    | ២៨២             | ៩                    | ៣១៧             | ៩                    |
| ១៧៨             | ៩                    | ២១៣             | ៩                    | ២៤៨             | ៧                    | ២៨៣             | ៩                    | ៣១៨             | ៩                    |
| ១៧៩             | ៩                    | ២១៤             | ៩                    | ២៤៩             | ៧                    | ២៨៤             | ៩                    | ៣១៩             | ៩                    |
| ១៨០             | ៩                    | ២១៥             | ៩                    | ២៥០             | ១០                   | ២៨៥             | ៩                    | ៣២០             | ៩                    |
| ១៨១             | ៩                    | ២១៦             | ៩                    | ២៥១             | ១០                   | ២៨៦             | ៩                    | ៣២១             | ១០                   |
| ១៨២             | ១០                   | ២១៧             | ៩                    | ២៥២             | ៩                    | ២៨៧             | ៩                    | ៣២២             | ៩                    |
| ១៨៣             | ១០                   | ២១៨             | ៩                    | ២៥៣             | ១២                   | ២៨៨             | ៩                    | ៣២៣             | ៩                    |
| ១៨៤             | ៩                    | ២១៩             | ៩                    | ២៥៤             | ១២                   | ២៨៩             | ៩                    | ៣២៤             | ៩                    |
| ១៨៥             | ៩                    | ២២០             | ៩                    | ២៥៥             | ៩                    | ២៩០             | ៩                    | ៣២៥             | ៩                    |
| ១៨៦             | ៩                    | ២២១             | ៧                    | ២៥៦             | ៩                    | ២៩១             | ១០                   | ៣២៦             | ៩                    |
| ១៨៧             | ៩                    | ២២២             | ៩                    | ២៥៧             | ៩                    | ២៩២             | ៩                    | ៣២៧             | ៩                    |
| ១៨៨             | ១០                   | ២២៣             | ៩                    | ២៥៨             | ១២                   | ២៩៣             | ៩                    | ៣២៨             | ៩                    |
| ១៨៩             | ១០                   | ២២៤             | ៩                    | ២៥៩             | ១០                   | ២៩៤             | ៩                    | ៣២៩             | ៩                    |
| ១៩០             | ១០                   | ២២៥             | ៩                    | ២៦០             | ១០                   | ២៩៥             | ៨                    | ៣៣០             | ៩                    |
| ១៩១             | ៩                    | ២២៦             | ៩                    | ២៦១             | ៩                    | ២៩៦             | ៩                    | ៣៣១             | ១០                   |
| ១៩២             | ៩                    | ២២៧             | ៩                    | ២៦២             | ៩                    | ២៩៧             | ៩                    | ៣៣២             | ៩                    |
| ១៩៣             | ៩                    | ២២៨             | ១១                   | ២៦៣             | ៩                    | ២៩៨             | ៩                    | ៣៣៣             | ១២                   |
| ១៩៤             | ៩                    | ២២៩             | ១០                   | ២៦៤             | ៩                    | ២៩៩             | ៩                    | ៣៣៤             | ៩                    |
| ១៩៥             | ៩                    | ២៣០             | ៧                    | ២៦៥             | ៩                    | ៣០០             | ៩                    | ៣៣៥             | ៩                    |
| ១៩៦             | ៩                    | ២៣១             | ១០                   | ២៦៦             | ៩                    | ៣០១             | ៩                    | ៣៣៦             | ៩                    |
| ១៩៧             | ៩                    | ២៣២             | ៩                    | ២៦៧             | ៩                    | ៣០២             | ១០                   | ៣៣៧             | ៩                    |
| ១៩៨             | ១១                   | ២៣៣             | ១១                   | ២៦៨             | ៧                    | ៣០៣             | ៩                    | ៣៣៨             | ៩                    |
| ១៩៩             | ១១                   | ២៣៤             | ១០                   | ២៦៩             | ៩                    | ៣០៤             | ៩                    | ៣៣៩             | ៩                    |
| ២០០             | ៩                    | ២៣៥             | ៩                    | ២៧០             | ៩                    | ៣០៥             | ៩                    | ៣៤០             | ៩                    |
| ២០១             | ៩                    | ២៣៦             | ៩                    | ២៧១             | ១១                   | ៣០៦             | ៩                    | ៣៤១             | ៩                    |
| ២០២             | ៩                    | ២៣៧             | ៩                    | ២៧២             | ៩                    | ៣០៧             | ៩                    | ៣៤២             | ៩                    |
| ២០៣             | ៩                    | ២៣៨             | ៩                    | ២៧៣             | ៩                    | ៣០៨             | ៩                    | ៣៤៣             | ៩                    |
| ២០៤             | ៩                    | ២៣៩             | ៩                    | ២៧៤             | ១០                   | ៣០៩             | ៩                    | ៣៤៤             | ៩                    |
| ២០៥             | ៩                    | ២៤០             | ៩                    | ២៧៥             | ១០                   | ៣១០             | ៩                    | ៣៤៥             | ៩                    |
| ២០៦             | ៩                    | ២៤១             | ៩                    | ២៧៦             | ១០                   | ៣១១             | ៩                    | ៣៤៦             | ៩                    |
| ២០៧             | ៩                    | ២៤២             | ៩                    | ២៧៧             | ៩                    | ៣១២             | ៩                    | ៣៤៧             | ៩                    |
| ២០៨             | ១០                   | ២៤៣             | ៩                    | ២៧៨             | ១០                   | ៣១៣             | ៩                    | ៣៤៨             | ៩                    |
| ២០៩             | ៩                    | ២៤៤             | ៩                    | ២៧៩             | ៩                    | ៣១៤             | ៩                    | ៣៤៩             | ៩                    |
| ២១០             | ១០                   | ២៤៥             | ៩                    | ២៨០             | ១០                   | ៣១៥             | ៩                    | ៣៥០             | ៩                    |

លេខបន្តបន្ទាប់ពីកម្រិតថ្នាក់ទី ៩ ទាំងអស់

**សំណួរ**

១. រកគ្រប់គូនៃចំនួនគតិវិជ្ជមាននៃ  $a, b$  ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ ទំនាក់ទំនង :  $a^2 + b^2 = a + b + 8$  ។
២. ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $E$  ជាការប្រាកដ ដែល  $E = (x+1000)(x+2000)(x+3000)(x+4000)+1000^4$  ។
៣. រកលេខនៅខាងរាយនៃចំនួន :  $A = 3^{2011} \cdot 7^{2012} + 3^{2013} \cdot 7^{2014}$  ។
៤. គណនាកន្សោម :  $P = \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$  ។
៥. គណនាតម្លៃ  $x$  ដើម្បីឱ្យ  $F$  មានតម្លៃអប្បបរមា (តូចបំផុត) ដែល :  $F = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$  ។
៦. គណនា  $x^2 + y^2$  ដោយដឹងថា  $x^3 + y^3 = 8100$  និង  $x + y = 30$  ។
៧. ស្រាយបំភ្លឺថា :  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} < 1$  ដែល  $n$  ជាចំនួនគតិវិជ្ជមាន ហើយធំជាង 1 ។
៨. គេឱ្យ  $n$  ជាចំនួនគតិវិជ្ជមាន ដែល  $n$  ចែកនឹង 7 ឱ្យសំណល់ 5 ហើយ  $n$  ចែកនឹង 8 ឱ្យសំណល់ 3 ។  
ក. តើ  $n$  ចែកនឹង 56 ឱ្យសំណល់ប៉ុន្មាន ?                      ខ. រកចំនួន  $n$  នោះដោយដឹងថា  $5616 < n < 5626$  ។
៩. គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត  $a_n = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}$  ដែល  $n \geq 1$   
បង្ហាញថា  $A = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{20}}$  ជាចំនួនគត់ ។
១០. គណនាតម្លៃលេខនៃកន្សោមលេខ  $A = \sqrt[3]{182 + \sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182 - \sqrt{33125}}$  ។
១១. គេឱ្យពីរចំនួនគតិវិជ្ជមាន  $x, y$  ដែលមាន  $2xy - y = 4x^2 - 2x - 1$  ។ គណនា  $A = \sqrt{x^{2011}} + \sqrt{y^{2011}}$  ។
១២. គេឱ្យ  $f(x) = x^{2011} - 13x^{2010} + 13x^{2009} - 13x^{2008} + \dots - 13x^2 + 13x - 1$  ។ គណនា  $f(12)$  ។
១៣. បរិមាត្រនៃប្រលេឡូក្រាម  $ABCD$  មានរង្វាស់ស្មើនឹង  $48cm$  ។ រង្វាស់កម្ពស់នៃប្រលេឡូក្រាមនេះមានសមាមាត្រ  $5:7$  ។ គណនារង្វាស់ជ្រុងនៃប្រលេឡូក្រាម  $ABCD$  នោះ ។
១៤. រកសមីការមេដ្យាទ័រនៃអង្កត់  $[AB]$  ដោយដឹងថា  $A(2, 3)$  និង  $B(4, 4)$  ។
១៥. ផង់មួយមានឃ្លីពណ៌ក្រហម 2 ឃ្លីពណ៌លឿង 4 និងឃ្លីពណ៌ខៀវ 6 ។ គេចាប់យកឃ្លី 2 ដោយចៃដន្យ ។ រកប្រូបាបចាប់បានឃ្លី 2 មិនមែនពណ៌ខៀវ ។
១៦. គណនាកន្សោម  $A = \frac{(6+12+18+\dots+96)^2}{(12+24+36+\dots+192)^2} + \frac{3}{4}$  ។
១៧. គេឱ្យ  $x > y > 0$  និង  $2x^2 + 2y^2 = 5xy$  គណនា  $E = \frac{x+y}{x-y}$  ។
១៨. សម្រួលកន្សោម  $E = \sqrt{2x^2 - y^2 + 2x\sqrt{x+y} \cdot \sqrt{x-y}} - \sqrt{(x+y)(x-y)}$  ដែល  $x > y > 0$  ។
១៩. ដោយដឹងថា  $\sin a - \cos a = \sqrt{2} \sin(45^\circ - a)$  និង  $\sqrt{3} \cos a + \sin a = 2 \cos(30^\circ - a)$  ។  
ចូរគណនាផលគុណ : ក.  $A = (1 - \cot 1^\circ)(1 - \cot 2^\circ)(1 - \cot 3^\circ) \times \dots \times (1 - \cot 44^\circ)$   
ខ.  $B = (\sqrt{3} + \tan 1^\circ)(\sqrt{3} + \tan 2^\circ)(\sqrt{3} + \tan 3^\circ) \times \dots \times (\sqrt{3} + \tan 29^\circ)$  ។

- ២០.** បើគេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន  $a, b, c$  ។ ចូរបង្ហាញថា :  $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$  ។
- ២១.** គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន  $a, b, c$  ។ បង្ហាញថា :  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$  ។
- ២២.** រកបូលគតិវិជ្ជមាននៃសមីការ :  $2(x+y)+16=3xy$  ។
- ២៣.** ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ :  $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$  មានបូលជានិច្ច ដែលនៅក្នុងសមីការនេះមាន  $x$  ជាអព្យាក្រឹត និង  $a, b, c$  ជាចំនួនពិត ។
- ២៤.** គេឱ្យទំនាក់ទំនង :  $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$  ។  
ក. គណនា  $f(x) + f(y)$  ដោយដឹងថា  $x+y=1$  ។  
ខ. ទាញរកផលបូក  $S = f\left(\frac{1}{2011}\right) + f\left(\frac{2}{2011}\right) + f\left(\frac{3}{2011}\right) + \dots + f\left(\frac{2010}{2011}\right)$  ។
- ២៥.** គណនាលីមីត :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$  ។
- ២៦.** គណនា :  $A = 2010(2011^{2010} + 2011^{2009} + 2011^{2008} + \dots + 2011^2 + 2012) + 1$  ។
- ២៧.** គេឱ្យពីរចំនួន  $a$  និង  $b$  ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់  $a-b=1$  ។ បង្ហាញថា  $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4) - (a^8-b^8) = 0$  ។
- ២៨.** គណនា  $A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{2011}\right)$  ។
- ២៩.** ដោះស្រាយសមីការ :  $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$  ។
- ៣០.** បើ  $abc=1$  សូមបង្ហាញឱ្យជឿថា  $\frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1} = 1$  ។
- ៣១.** គណនា  $S = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$  ។
- ៣២.** សូមបង្ហាញឱ្យគេជឿថា :  $2002^{2003} - 2002^{1979}$  ចែកដាច់នឹង 6 ។
- ៣៣.** គ្រប់ចំនួនពិត  $a, b, c$  ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់  $a+b+c=1$  ។ បង្ហាញឱ្យគេជឿថា  $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$  ។
- ៣៤.** គ្រប់ចំនួនពិត  $a, b, c, \dots, x, y$  វិជ្ជមាន និងខុសពី 1 ។ សូមបង្ហាញឱ្យគេជឿថា :  
 $\log_a b \times \log_b c \times \log_c d \times \dots \times \log_x y \times \log_y a = 1$  ។
- ៣៥.** យើងមាន  $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$  ។ បង្ហាញថា  $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$  ។
- ៣៦.** ដោះស្រាយសមីការ  $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = 14$  ។
- ៣៧.** គ្រប់  $a$  និង  $b$  ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន និងខុសពី 1 ។ សូមបង្ហាញថា :  
 $(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b) \cdot \log_b a - 1 = \log_a b$  ។
- ៣៨.** សូមបង្ហាញថា :  $\frac{1+\cos a}{1-\cos a} - \frac{1-\cos a}{1+\cos a} = \frac{4\cot a}{\sin a}$  ។
- ៣៩.** ដោះស្រាយសមីការ :  $5^{\log x} = 50 - x^{\log 5}$  ។

៤០. គេបោះគ្រាប់ឡកឡាក់មួយតែម្តងគត់ ។ គណនាប្រូបាបដែលបោះបានលេខសេស ឬ លេខធំជាង 5 ។
៤១. ដោះស្រាយសមីការ  $\sqrt{x+\sqrt{4x+\sqrt{16x+\dots+\sqrt{4^n x+3}}}}=\sqrt{x}+1$  ។
៤២. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគតិវិជ្ជមាន  $n$  គេឱ្យ  $f(n)=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{n^2-2n+1}}$  ។ គណនាផលបូក  $f(1)+f(3)+f(5)+\dots+f(999997)+f(999999)$  ។
៤៣. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ :  $a/\begin{cases} 5(\log_y x + \log_x y) = 26 \\ xy = 64 \end{cases} \quad b/\begin{cases} 4^x \cdot 5^y = \frac{1}{400} \\ 5^x \cdot 6^y = \frac{1}{900} \end{cases}$  ។
៤៤. គេឱ្យ  $a$  និង  $n$  ជាចំនួនវិជ្ជមាន ហើយ  $n$  គត់ ដែលផលគុណ  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \times \dots \times a_n = 1$  ។ សូមបង្ហាញថា  $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3) \times \dots \times (1+a_n) \geq 2^n$  ។
៤៥. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ  $a/\begin{cases} 7x^3 - 3x^2y - 21xy^2 + 26y^3 = 342 \\ 9x^3 - 21x^2y + 33xy^2 - 28y^3 = 344 \end{cases} \quad b/\begin{cases} 4^x \cdot 3^{y+1} + 27^y = 171 \\ 8^x + 2^x \cdot 3^{1+2y} = 172 \end{cases}$  ។
៤៦. ចំនួនមួយមានលេខប្រាំខ្ទង់ដែលលេខខ្ទង់វារៀបតាមលំដាប់គឺ  $x, x+1, x+2, 3x, x+3$  ហើយគេដឹងថា ចំនួននោះជាការប្រាកដ ។ ចូររកចំនួននោះ ។
៤៧. គណនាផលបូក  $S = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}$  ។
៤៨. ស្រាយបញ្ជាក់ថា :  $f(n)=3^{2n}+7$  ចែកដាច់នឹង 8 ដែល  $n$  ជាចំនួនគត់ ។
៤៩. មាន  $f(x)=2x+1$  និង  $g[f(x)]=x^2+3x+1$  ។ សូមគណនា  $g(3)$  ។
៥០. គ្រប់ចំនួនគតិវិជ្ជមាន  $n$  ស្រាយបំភ្លឺថា  $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$  ក៏ជាចំនួនគតិវិជ្ជមានដែរ ។
៥១. គណនាផលបូក  $S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2010 \cdot 2011}$  ។
៥២. គេឧបមាថា  $x^2+x+1=0$  ។ ចូរគណនា  $x^{2011} + \frac{1}{x^{2011}}$  ។
៥៣. ចំនួនមួយជាការប្រាកដមានរាង  $\overline{abcd}$  ។ ដោយដឹងថា  $\overline{ab}-\overline{cd}=1$  ចូររកចំនួន  $\overline{abcd}$  នោះ ។
៥៤. សូមបង្ហាញថា  $n! > 3^n$  ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន  $n \geq 7$  ។
៥៥. អនុគមន៍  $f$  កំណត់ដោយ  $f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}$  ចំពោះគ្រប់  $x \geq 0$  និង  $a > 0$  ។  
សូមបង្ហាញឱ្យឃើញថា  $f$  ជាអនុគមន៍ខ្ទប់លើចន្លោះ  $[0, +\infty)$  ។
៥៦. ចំពោះ  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$  ( $n!$  អានថា  $n$  ហ្វាក់តូរ្យែល) ។ បង្ហាញថា  $0! = 1$  ។
៥៧. បង្ហាញថា  $F = \frac{21n+4}{14n+3}$  ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ  $n$  ។
៥៨. រកចំនួនគត់ធម្មជាតិតូចបំផុត ដែលមាន 6 ជាលេខនៅខ្ទង់ឯកតា (ខ្ទង់រាយ) ហើយបើប្តូរលេខ 6 ទៅខាងមុខគេ បំផុតវិញ នោះគេនឹងបានចំនួនថ្មី ដែលស្មើនឹង 4 ដងនៃចំនួនដើម ។

៥៩. គេឱ្យលក្ខខណ្ឌបី ដែលបុរសបីនាក់  $A, B, C$  ទៅស្នើដណ្តឹងនារីបីនាក់ 1, 2, 3 ជាគូអនាគត ដូចខាងក្រោម :

- ក. បើបុរស  $A$  ជាគូនឹងនារី 1 នោះ បុរស  $B$  ជាគូនឹងនារី 2
  - ខ. បើបុរស  $A$  ជាគូនឹងនារី 3 នោះ បុរស  $C$  ជាគូនឹងនារី 1
  - គ. បើបុរស  $B$  មិនជាគូនឹងនារី 3 នោះ បុរស  $C$  ជាគូនឹងនារី 1 ។
- សំណួរសួរថា តើបុរសណា ជាគូនឹងនារីណា ?

៦០. រក 11 ចំនួនមិនអវិជ្ជមាន ដែលចំនួននីមួយៗ ស្មើនឹងការេនៃផលបូកនៃ 10 ចំនួនផ្សេងទៀត ។

៦១. គេឱ្យ  $a, b, c$  ជាចំនួនពិត ផ្ទៀងផ្ទាត់  $\begin{cases} a+b+c=0 \\ ab+bc+ca=0 \end{cases}$  ។ គណនា  $A=(a-1)^{2010}+(b-1)^{2011}+(a-1)^{2012}$  ។

៦២. គណនាផលបូក  $S = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1+\frac{1}{2010^2}+\frac{1}{2011^2}}$  ។

៦៣. ដោះស្រាយសមីការមាន  $x$  ជាចំនួនគត់: ក.  $x^{2010}+x^{2011}+x^{2012}+x^{2013}=4$

$$\text{ខ. } x^{2010}+x^{2011}+x^{2012}+x^{2013}=0 \quad \text{។}$$

៦៤. ដោះស្រាយសមីការ :  $2x9y=2^x \cdot 9^y$  ។ (គេសរសេរ  $2x9y$  បញ្ជាក់ថាជាលេខខ្ទង់មានន័យថា  $0 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq 9$ ) ។

៦៥. រកគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ  $N = \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$  ដែលនាំឱ្យ  $\frac{2a_1 a_2 a_3 \dots a_n 1}{1a_1 a_2 a_3 \dots a_n 2} = \frac{21}{12}$  ។

៦៦. គណនាផលបូក :  $S = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$  ។

៦៧. សម្រួលកន្សោម :  $(2+\sqrt{3})^{2011} \cdot (2-\sqrt{3})^{2012} + \sqrt{3}$  ។

៦៨. សូមបង្ហាញឱ្យឃើញថា  $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1} = \frac{8}{x^8-1}$  ។

៦៩. ចំពោះ  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$  ។ គណនាផលបូក  $S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}$  ។

៧០. កំណត់លេខខាងចុងនៃផលបូក :  $\Sigma = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2010^2 + 2011^2$  ។

៧១. កំណត់លេខខាងចុងនៃផលបូក :  $\Sigma = 1! + 2! + 3! + \dots + 2010! + 2011!$  ។

៧២. គេឱ្យ  $(a + \sqrt{a^2+1})(b + \sqrt{b^2+1}) = 1$  ។ គណនាតម្លៃ  $A = a^{2012} + ab^{2011}$  ។

៧៣. ដោះស្រាយសមីការ :  $2011^{\log_{2012} x} + x^{\log_{2012} 2011} = 4022$  ។

៧៤. គេឱ្យ  $ab=1$  ។ ស្រាយបញ្ជាក់ឱ្យឃើញថា :  $a^5 + b^5 = (a^3 + b^3)(a^2 + b^2) - (a+b)$  ។

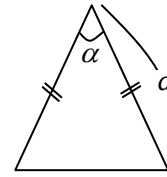
៧៥. គេឱ្យ  $x, y$  និង  $z$  ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់  $\begin{cases} x^2 + 2y + 1 = 0 \\ y^2 + 2z + 1 = 0 \\ z^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$  ។ គណនាកន្សោម :  $A = x^{2010} + y^{2011} + x^{2012}$  ។

៧៦. ពីសមាមាត្រ  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ។ បង្ហាញថា  $\frac{ad+bc}{2ab} = \frac{2cd}{ad+bc}$  ។

៧៧.  $a$  និង  $b$  ជាពីរចំនួនគតិវិជ្ជមាន ។ ចូរសម្រួលកន្សោម :  $A = \left( \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{2} \right) \left( \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{2} \right) \left( \frac{a^2 + b^2}{2011ab} \right)^{-1}$  ។

៧៨. គេឱ្យ  $a+b+c=1$ ,  $a^2+b^2+c^2=1$  និង  $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=m$  ។ ចូរគណនា  $P=xy+yz+zx$  ។

៧៩. គេឱ្យត្រីកោណសមបាទមួយ ដែលមានមុំមួយមានរង្វាស់ស្មើ  $\alpha$  និងជ្រុងពីរដែលអមនឹងមុំនេះ មានរង្វាស់ស្មើគ្នា ហើយស្មើ  $a$  ។  
គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណនេះ ជាអនុគមន៍នៃ  $\alpha$  និង  $a$  ។



៨០. ប្រៀបធៀបចំនួន ក.  $\sqrt{6}+\sqrt{5}$  និង  $\sqrt{21}$  ខ.  $1+^{201}\sqrt{11+\sqrt{72}}$  និង  $2^{201}\sqrt{3+\sqrt{2}}$  ។

៨១. រកតម្លៃគត់នៃ  $x$ ,  $y$  និង  $z$  ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ :  $x+y+z+4=2\sqrt{x-2}+4\sqrt{y-3}+6\sqrt{z-5}$  ។

៨២. គេឱ្យ  $\begin{cases} ax^3=by^3=cz^3 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \end{cases}$  ។ ស្រាយបំភ្លឺថា  $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$  ។

៨៣. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ទីប្រជុំទម្ងន់  $G$  ផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ  $O$  និងអរតូសង់នៃត្រីកោណ  $H$  នៃត្រីកោណមួយ ជាបីចំណុចរត់ត្រង់គ្នា ។

៨៤. គេឱ្យ  $P=a^2b^2+5a^2+9b^2-6ab^2-30a+45$  ។ ចំពោះគ្រប់តម្លៃនៃចំនួនពិត  $a$  និង  $b$  បង្ហាញថា  $P \geq 0$  ។

៨៥. សូមបង្ហាញឱ្យឃើញថា  $39^{51}+51^{39}$  ចែកដាច់នឹង 45 ។

៨៦. គណនា  $A=101 \cdot 10001 \cdot 100000001 \times \dots \times \underbrace{1000\dots001}_{\text{មាន } 2^n - 1 \text{ ដងនៃលេខ } 0}$  ។

៨៧. គណនាតម្លៃ  $n$  ដែលនាំឱ្យ  $\frac{3}{2011} + \frac{9}{2011} + \frac{15}{2011} + \dots + \frac{6n-3}{2011} = \frac{300}{2011}$  ។

៨៨. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ក.  $\begin{cases} x^2=2x-y \\ y^2=2y-z \\ z^2=2z-x \end{cases}$  ខ.  $\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=-\frac{1}{12} \\ \frac{1}{c}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{7}{12} \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{5}{12} \end{cases}$  ។

៨៩. ដោះស្រាយសមីការ:  $\frac{x-4}{2007} + \frac{x-3}{2008} + \frac{x-2}{2009} + \frac{x-1}{2010} = 4$  ។

៩០. ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $\frac{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}-\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ។

៩១. សម្រួលកន្សោម  $B = \left( \frac{2\sqrt{x}+x}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \div \left( 1 - \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \right)$  ។

៩២. គេឱ្យបីចំនួនរួមមាន :  $A = \underbrace{888\dots88}_{\text{មាន } n \text{ តួនៃលេខ } 8}$   $B = \underbrace{222\dots222}_{\text{មាន } n+1 \text{ តួនៃលេខ } 2}$  និង  $C = \underbrace{444\dots444}_{\text{មាន } 2n \text{ តួនៃលេខ } 4}$

ស្រាយបញ្ជាក់ឱ្យឃើញថា  $A+B+C+7$  ជាការេប្រាកដ ។

៩៣. កាលណាបាតនៃត្រីកោណមួយកើនឡើង 10% តើកម្ពស់នៃត្រីកោណនោះត្រូវថយចុះប៉ុន្មានភាគរយ ដើម្បីឱ្យវានៅតែរក្សាក្រឡាផ្ទៃឱ្យនៅដដែល ។

៩៤. គេឱ្យ  $a$ ,  $b$  និង  $c$  ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ស្រាយថា :  $ab+bc+ac \leq a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ac)$  ។

៩៥. គេឱ្យបីចំនួន  $a, b$  និង  $c$  ដែល  $a+b+c=0$  និង  $abc \neq 0$  ។ គណនា  $E$  ដែល

$$E = \frac{2011}{b^2 - a^2 + c^2} - \frac{2011}{b^2 - a^2 - c^2} + \frac{2011}{a^2 + b^2 - c^2} \quad ?$$

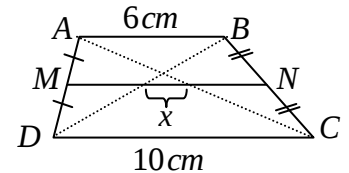
៩៦. បង្ហាញថា  $2010 \cdot 2012(2011^2 + 1)(2011^4 + 1)(2011^8 + 1)(2011^{16} + 1) = (2011^{32} - 1)$  ។

៩៧. គេឱ្យ  $ABC$  ជាត្រីកោណមួយ ដែលមាន  $[AM]$  ជាមេដ្យាន ។ បំភ្លឺថា  $2AM < AB + AC$  ។

៩៨. ត្រីកោណមួយមានរង្វាស់ជ្រុង  $x, x+a$  និង  $x+2a$  ដែល  $x > 0$  និង  $a$  ជាចំនួនគតិវិជ្ជមាន ។ រកគ្រប់រង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណនេះ ដែលតូចជាង ឬស្មើ 10 ដើម្បីឱ្យវាជាត្រីកោណកែង ។

៩៩. ត្រីកោណមួយមានរង្វាស់ជ្រុង 3, 4, 5 ។ ត្រីកោណនេះជាត្រីកោណចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ ។ តាង  $A, B, C$  ជាក្រឡាផ្ទៃផ្នែកបង្ក ដែលនៅក្នុងរង្វង់ និងក្រៅត្រីកោណ ហើយ  $C$  ជាផ្នែកក្រឡាផ្ទៃដែលធំជាងគេ ។ គណនា  $A+B$  ជាអនុគមន៍នឹង  $C$  ។

១០០. គេឱ្យចតុកោណ  $ABCD$  ជាចតុកោណញ្ជាយ និងមាន  $MN$  ជាបាតមធ្យមនៃចតុកោណញ្ជាយនេះ ។ គណនាប្រវែងបាតមធ្យមនៅចន្លោះអង្កត់ទ្រូង  $x$  ដូចរូប? បើគេដឹងថា បាតតូច  $AB=6cm$  និងបាតធំ  $CD=10cm$  ។



១០១. ចូរគណនាផលបូក  $S = \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1000^2}{1999 \cdot 2001}$  ។

១០២. ស្រាយបញ្ជាក់ឱ្យជឿថា  $\underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}}}_{\text{មាន } n \text{ រ៉ាឌីកាល់}} + \underbrace{\sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots + \sqrt{30}}}}}_{\text{មាន } n \text{ រ៉ាឌីកាល់}} < 9$

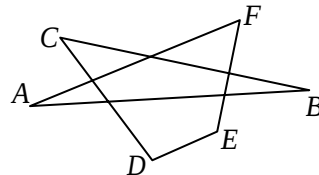
១០៣. ក. ចូរគណនាផលបូក  $S = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2)$

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $4S+1$  ជាការេប្រាកដ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគតិវិជ្ជមាន  $n$  ។

១០៤. គេឱ្យ  $0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{12}$  ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_9}{x_3 + x_6 + x_9} + \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{12}}{x_4 + x_8 + x_{12}} < 7$  ។

១០៥. បើ  $x, y$  ជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់  $x^2 + 3xy + y^2 = 60$  ។ រកតម្លៃធំបំផុតនៃផលគុណ  $xy$  ។

១០៦. រកផលបូករង្វាស់មុំ (គិតជាដឺក្រេ) នៃមុំ  $A, B, C, D, E$  និង  $F$  នៅក្នុងរូបខាងស្តាំ ។



១០៧. ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន  $A = 111\dots11222\dots22$  ដែលមានចំនួនគូនៃលេខ 1 និងលេខ 2 ស្មើគ្នាគឺ 2011 គូ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $A$  ជាផលគុណនៃពីរចំនួនគត់តគ្នា ។

១០៨. ឧបមាថា  $x_1, x_2$  ជាឫសនៃសមីការ :  $2011x^2 - (t-2011)x - 2011 = 0$  ។ រកតម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម :

$$H = (x_2 - x_1)^2 + 4 \left( \frac{x_1 - x_2}{2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right)^2 \quad ?$$

១០៩. គណនាតម្លៃលេខនៃ  $A = \sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\dots}}}}}$  ។

១១០. គេមានពហុធា  $p(x)$  ។ គេដឹងថាសំណល់នៃវិធីចែករវាង  $p(x)$  និង  $x$  ស្មើ 1 ហើយសំណល់នៃវិធីចែករវាង  $p(x)$  និង  $x-1$  ស្មើ 2 ។ រកសំណល់នៃវិធីចែករវាង  $p(x)$  និង  $x(x-1)$  ។ (អ្នកអាចប្រៀបធៀបជាមួយលំហាត់ទី៨ ទំព័រទី១)
១១១. ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន  $5^{2011} + 5^{2012} + 5^{2013}$  ចែកដាច់នឹង 31 ។
១១២. រកលេខនៃតួចុងក្រោយបង្អស់នៃចំនួន  $2^{3^4}$  ។
១១៣. រកលេខនៃតួចុងក្រោយបង្អស់នៃចំនួន  $123456789^{2011}$
១១៤. ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន  $A = \sqrt[3]{\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)^3}$  ជាចំនួនគតិវិជ្ជមាន ។
១១៥. បញ្ជាក់តម្លៃនៃចំនួនពិត  $x$  ដោយប្រើសញ្ញាវិសមភាព។ ដោយដឹងថា  $x$  ជាចំនួនដែលមានផ្នែកគត់មានលេខពីរខ្ទង់ កាលណាគេសរសេរវាជាចំនួនទសភាព ។
១១៦. ក. ប្រៀបធៀបចំនួន  $(1+2000^2)$  និង  $(2001^2 - 2 \cdot 2000)$   
ខ. ដោយមិនប្រើ  $2000^2 = 4000000$  និង  $2001^2 = 4004001$  គណនា  $A = \sqrt{1+2000^2 + \left(\frac{2000}{2001}\right)^2} + \frac{2000}{2001}$  ។
១១៧. គេឱ្យទំនាក់ទំនង  $\sqrt{x^2 + 3\sqrt{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + 3\sqrt{x^2 y^4}} = a$  ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $a^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$  ។
១១៨. ប្រៀបធៀបចំនួន  $\sqrt{2001} + \sqrt{2002}$  និង  $2\sqrt{2002}$  ។
១១៩. ស្រាយបញ្ជាក់ថា :  $A = \underbrace{111...111}_{2n \text{ នៃលេខ } 1} + \underbrace{444...44}_{n \text{ នៃលេខ } 4} + 1$  ជាការប្រាកដនៃចំនួនគត់ ។
១២០. សម្រួលកន្សោម :  $E = \frac{1}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2} \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) + \frac{2}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{q}}\right)$  ដែល  $(p, q > 0)$  ។
១២១. គណនាតម្លៃលេខនៃកន្សោម :  $A = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$  ។
១២២. ស្រាយបញ្ជាក់ថា :  $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$  ។
១២៣. គណនាតម្លៃលេខនៃកន្សោម  $S = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}}$  ។
១២៤. ឧបមាថា  $a \neq 0, b \neq 0$  និង  $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = 2011$  ។ គណនាតម្លៃនៃ  $\frac{b+c}{a+b}$  ។
១២៥. ដោះស្រាយសមីការ :  $\frac{x-1}{1991} + \frac{x-5}{1987} + \frac{x-7}{1999} + \frac{x-11}{1981} = 4$  ។
១២៦. ដោះស្រាយសមីការ :  $x^{2000} + \sqrt{6}x^{1998} = (\sqrt{2} + \sqrt{3})x^{1999}$  ។
១២៧. ដោះស្រាយសមីការ :  $\log_2 \log_3 \log_4 x = 2$  ។
១២៨. គណនាផលបូក  $A = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111...11}_{n \text{ នៃលេខ } 1}$  ។
១២៩. ដោះស្រាយសមីការ : ក.  $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$  ខ.  $(x^x)^x = x^{(x^x)}$  ។

១៣០. គេឱ្យ  $a, b, c$  ជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការ 
$$\begin{cases} a+b^2+2ac=29 \\ b+c^2+2ab=18 \\ c+a^2+2bc=25 \end{cases}$$
 ។ ចូរគណនា  $a+b+c$  ។

១៣១. គណនាផលបូក  $S=1+2+3+\dots+2011$  ។ (ដោះស្រាយពុំតាមរូបមន្តស្តីត) ។

១៣២. ថ្នាក់ទី 9B មានសិស្សសរុប 28 នាក់។ សិស្សប្រុសមានកម្ពស់មធ្យម  $1.68m$  និងសិស្សស្រីមានកម្ពស់មធ្យមគឺ  $1.60m$  ។ បើដឹងថាកម្ពស់មធ្យមរបស់សិស្សនៅក្នុងថ្នាក់ទាំងអស់គឺ  $1.66m$  ។ រកចំនួនសិស្សស្រីនៅក្នុងថ្នាក់។

១៣៣. គណនាកន្សោម  $A=(a+b+c)^2-(-a+b+c)^2+(a+b-c)^2-(a-b+c)^2$  ។

១៣៤. គេឱ្យ  $a+b+c=0$  ។ បង្ហាញថា  $\frac{2011}{b^2+c^2-a^2}+\frac{2011}{c^2+a^2-b^2}+\frac{2011}{a^2+b^2-c^2}=0$  ។

១៣៥. កំណត់តម្លៃ  $a$  និង  $b$  ដើម្បីឱ្យពហុធា  $x^4+2x^3+ax^2+bx+1$  ជាការេនៃត្រីធាដឺក្រេទី 2  $x^2+px+q$  ។

១៣៦. ចូរស្រាវប័ក្ខិថា  $\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}}+\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}=2\sqrt{3}$  ។

១៣៧. គណនា  $E=\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$  ។

១៣៨. កំណត់តម្លៃ  $m$  និង  $n$  ដើម្បីឱ្យសមីការ  $\frac{1}{x-3}+\frac{m}{x-4}=\frac{n}{(x-3)(x-4)}$  មានឫសច្រើនរាប់មិនអស់ ។

១៣៩. កំណត់តម្លៃ  $a$  ដើម្បីឱ្យប្រព័ន្ធសមីការ  $\begin{cases} x+y=a \\ 2x-y=3 \end{cases}$  មានឫសផ្ទៀងផ្ទាត់  $x>y$  ។

១៤០. គេឱ្យ  $a, b, c$  ផ្ទៀងផ្ទាត់  $a+b+c=0$  និង  $ab+bc+ca=0$  ។ គណនា  $D=(a-1)^{2010}+(b-1)^{2011}+(c-1)^{2012}$  ។

១៤១. គណនា  $S=(1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\dots+2010\cdot2012)-(1^2+2^2+3^2+\dots+2010^2)$  ។

១៤២. បង្ហាញថា  $A=9^{2011}+8^{2011}+7^{2011}+6^{2011}+5^{2011}-1^{2011}-2^{2011}-3^{2011}-4^{2011}$  ចែកដាច់នឹង 5 ។

១៤៣. គេឱ្យអនុគមន៍ពីរ  $f$  និង  $g$  កំណត់ដោយ :  $f:x\rightarrow f(x)=px-2$  ដែល  $p$  ជាប៉ារ៉ាម៉ែត្រពិត និង  $g:x\rightarrow g(x)=4x+3$  ។

ក. គណនា  $f\circ g$  និងគណនា  $g\circ f$  ។

ខ. កំណត់តម្លៃ  $p$  ដើម្បីឱ្យគេបាន  $f\circ g=g\circ f$  ។

១៤៤. គេមាន  $P_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\times\dots\times\cos\frac{x}{2^n}$  ។ បង្ហាញថា  $P_n=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}$  ។

១៤៥. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការក្នុង  $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$  នៃប្រព័ន្ធសមីការ  $\begin{cases} x^2-y^2=5440 \\ PGCD(x,y)=8 \end{cases}$  ។

១៤៦. ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ នៃសមីការ  $xy=3x+2y+37$  ។

១៤៧. បំភ្លឺថាចំនួន  $N=(4n+3)^2-25$  ចែកដាច់នឹង 8 ។

១៤៨. ស្រាយបំភ្លឺថា បើគេមានសមភាព  $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ad+bc)^2$  នោះគេត្រូវបាន  $a, b, c$  និង  $d$  ជាតួនៃសមាមាត្រមួយ។

១៤៩. គេឱ្យ  $ax+by=0$  ។ បង្ហាញថា  $\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{x^2}{x^2+y^2}=1$  ។

១៥០. គេឱ្យ  $a+b+c=0$  និង  $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$  ដែល  $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$  ។ គណនាតម្លៃនៃ  $K = \frac{a^2+b^2+c^2}{2011}$  ។
១៥១. បង្ហាញថា  $A = 2011\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$  ជាចំនួនគត់ ។
១៥២. ដោះស្រាយសមីការ  $\sqrt{x^2+4x+4} = \sqrt{x^2+2x+1}$  ។
១៥៣. គណនាបីចំនួនគត់តាម បើគេដឹងថា ផលចែកនៃផលគុណចំនួនទាំងបី នឹងពាក់កណ្តាលការេនៃផលបូកចំនួនទាំងបី ស្មើ  $\frac{130}{21}$  ។
១៥៤. បើ  $x^2yz^3 = 7^3$  និង  $xy^2 = 7^9$  ។ ចូរគណនាតម្លៃលេខនៃ  $xyz$  ។
១៥៥. រកតម្លៃលេខនៃ  $\frac{2^{2012}-2^{2011}}{2^{2012}+2^{2011}}$  ។
១៥៦. ចំពោះ  $a \neq b \neq c$  គណនាកន្សោម  $H = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$  ។
១៥៧. គេដាក់កូនឈើ 40 ដើម ព័ទ្ធជុំវិញចម្ការមួយមានរាងជាចតុកោណកែង ។ តើចម្ការនោះអាចមានក្រឡាផ្ទៃធំបំផុតប៉ុន្មាន ? បើគេដឹងថា គម្លាតពីដើមឈើមួយទៅដើមឈើមួយទៀតមានប្រវែង  $2m$  ។
១៥៨. បង្ហាញថាចំនួន  $\sqrt{3}$  ពុំមែនជាចំនួនសនិទាន ។ (ចំនួនសនិទាន ជាចំនួនមានទម្រង់ជាប្រភាគ  $\frac{a}{b}$  ដែល ... ) ។
១៥៩. បើ  $x$  និង  $y$  ជាចំនួនពិត ចូរដោះស្រាយសមីការ  $x^2+y^2=0$  ។
១៦០. គណនា  $A=2\frac{3}{4}$        $B=2\cdot\frac{3}{4}$        $C=2\times\frac{3}{4}$        $D=2\left(\frac{3}{4}\right)$        $E=2+\frac{3}{4}$  ។
១៦១. គណនា  $A=2^{2^2}$        $B=(2^2)^2$        $C=2^{2^2}$        $D=2^{2+2}$        $E=2\cdot 2^2$  ។
១៦២. សរសេរជាទម្រង់ប្រភាគនៃ  $A=1.\overline{2}$        $B=0.\overline{12}$        $C=0.1\overline{2}$        $D=1.2\overline{0}$  ។
១៦៣. គេមានការេមួយមានជ្រុង  $a$  ។ គណនាអង្កត់ទ្រូង និងចម្ងាយខ្លីបំផុតពីចំណុចប្រសព្វរវាងអង្កត់ទ្រូងទៅជ្រុងការេ ។
១៦៤. គេមានត្រីកោណ  $ABC$  កែងត្រង់កំពូល  $B$  ហើយមានប្រវែងជ្រុង  $AB=1$  ។  
 $D$  ជាចំណុចមួយនៅលើជ្រុង  $[BC]$  ដែល  $AD=CD=2$  ។ គណនា  $AC$  ។
១៦៥. ដោះស្រាយសមីការ  $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)x - 2011 = 0$  ។
១៦៦. ដោះស្រាយសមីការ  $(x^2+2x+4)(x^2+2x+3)=x^2+2x+7$  ។
១៦៧. ឧបមាថាសមីការ  $ax^2+bx+c=0$  មានឫស  $x_1$  និង  $x_2$  ។ តាង  $S_n = x_1^n + x_2^n$  ដែល  $n$  ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។  
 ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $aS_{n+1}+bS_n+cS_{n-1}=0$  ។
១៦៨. គេឱ្យ  $\frac{x^2+2y^2}{306} = \frac{x^2-2y^2}{294}$  ។ គណនា  $\frac{x^2}{y^2}$  ។
១៦៩. គណនា  $A = (x+2)^2 - 2(x+2)(x-8) + (x-8)^2$  ចំពោះ  $x = 2011^{2012}$  ។
១៧០. គេឱ្យ  $a, b$  និង  $c$  ជាបីចំនួនខុសពីសូន្យ ដែល  $a+b+c=1$  និង  $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$  ។  
 ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $a^2+b^2+c^2=1$  ។

១៧១. រកពីរចំនួនពិតដែលមានផលបូកស្មើ 13 ហើយផលបូកច្រមាស់របស់វាស្មើនឹង  $\frac{13}{40}$  ។

១៧២. គេឱ្យសមីការ  $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=k$  ។

ក. ដោះស្រាយសមីការ ចំពោះ  $k=3$  ។

ខ. កំណត់តម្លៃ  $k$  ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫស ។

១៧៣. ប្រៀបធៀបពីរចំនួន :  $200^{300}$  និង  $300^{200}$  ។

១៧៤. ប្រៀបធៀបចំនួន  $31^{11}$  និង  $17^{14}$  ។

១៧៥. បើ  $a$  ជាឫសនៃសមីការ  $x^{2011}=1$  ហើយ  $a \neq 1$  ។ ចូរគណនា  $1+a+a^2+a^3+\dots+a^{2010}$  ។

១៧៦. គណនាផលបូក  $S=3+3^2+3^3+\dots+3^n$  ។ (ពុំដោះស្រាយតាមរូបមន្តស្វ៊ីតធរណីមាត្រ) ។

១៧៧. គណនា  $A=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\times\dots\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$  ។

១៧៨. កំណត់តម្លៃ  $m$  នៃប្រព័ន្ធសមីការ  $\begin{cases} 2x-4y=7 \\ 3x+y=m \end{cases}$  ដើម្បីឱ្យមានឫស  $x>0$  និង  $y<0$  ។

១៧៩. គណនា  $E=\sqrt{1+2+3+\dots+2009+2010+2011+2010+2009+\dots+3+2+1}$  ។

១៨០. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ  $\begin{cases} a+b+c=3 \\ b+a+d=4 \\ a+c+d=5 \\ b+c+d=6 \end{cases}$  ។

១៨១. បង្ហាញថា  $\sqrt{7}+\sqrt[3]{7}+\sqrt[4]{7}<7$  ហើយ  $\sqrt{4}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{4}>4$  ។

១៨២. គេឱ្យពហុធា  $f(x)=x^n-4x^2+1$  ដែល  $n$  ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ( $n \in \mathbb{N}$ ) ។ កំណត់តម្លៃ  $n$  ដើម្បីឱ្យវិធីចែកនៃពហុធាខាងលើ និងពហុធា  $(x-3)$  មានសំណល់ស្មើ 46 ។

១៨៣. ដោះស្រាយសមីការ : 
$$\frac{x}{2+\frac{x}{2+\frac{x}{2+\frac{x}{1+\sqrt{1+x}}}}}=1$$
 ។

១៨៤. កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់  $n$  ដែលធ្វើឱ្យ  $B=4^{27}+4^{1016}+4^n$  ជាការប្រាកដនៃមួយចំនួនគត់ ។

១៨៥. ដោះស្រាយសមីការ  $\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=\frac{x^2+x+1}{x}$  ។

១៨៦. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ : ក.  $\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=12 \\ \frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=3 \end{cases}$  ខ.  $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3 \\ \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=3 \\ \frac{1}{xyz}=1 \end{cases}$  ។

១៨៧. គេឱ្យ  $4^a+4^{-a}=23$  ។ គណនា  $2^a+2^{-a}$  ។

១៨៨. រកចំនួនលទ្ធភាពទាំងអស់ ក្នុងការបង្កើតលេខទូរស័ព្ទ ដែលមានក្បាលប្រព័ន្ធ : ក. 011 ខ. 097 ។

- រៀបរៀងដោយ: គុណសិស្ស ប្រិស ដារ៉ា  
www.facebook.com/7khmer  
b : Entertainment And Knowledge

**២១០.** គេមានសមីការ  $(m+1)x^2 - (m+3)x + 3 - m = 0$  ។

ក. កំណត់តម្លៃ  $m$  ដើម្បីឱ្យ  $x=1$  ជាឫសនៃសមីការខាងលើ រួចគណនាឫសមួយទៀត ។

ខ. កំណត់តម្លៃ  $m$  ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសខុប រួចគណនាឫសខុបទាំងនោះ ។

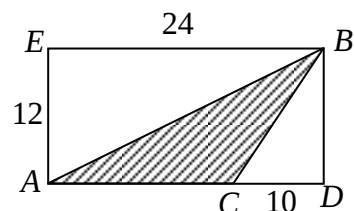
**២១១.** រកពីរចំនួន  $x$  និង  $y$  ដោយស្គាល់ផលបូក និងផលគុណ :  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$  ។

**២១២.** ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ  $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$

**២១៣.** ដូចម្តេចដែលហៅថាបាតមធ្យមនៃត្រីកោណ ? បង្ហាញថាបាតមធ្យមនៃត្រីកោណ ស្មើនឹងពាក់កណ្តាលបាតមួយនៃត្រីកោណនោះ ។

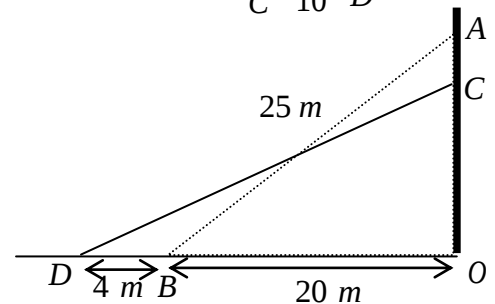
**២១៤.** តើមានចំនួនគត់  $n$  ប៉ុន្មានខ្លះដែលផ្ទៀងផ្ទាត់  $\frac{2}{7} < \frac{n}{12} < \frac{4}{5}$  ?

**២១៥.** ត្រីកោណ  $ABC$  ត្រូវបានកាត់ចេញពីក្រដាសរាងជាចតុកោណកែង ដូចរូបខាងស្តាំ ។ តើក្រដាសដែលនៅសល់មានប៉ុន្មានភាគ ?



**២១៦.** ទាញរក  $\frac{1}{x+2012} = ?$  បើដឹងថា  $\frac{1}{x+2011} = 2011$  ។

**២១៧.** រថរំដកមួយមានប្រវែង  $25m$  ត្រូវបានផ្អែកចុងខាងលើ ទៅលើជញ្ជាំងឈរមួយ ដែលចម្ងាយពីជញ្ជាំងទៅចុងរថរំដកខាងក្រោមមានប្រវែង  $20m$  ។ បើគេបង្ខិតរថចេញពីជញ្ជាំងថែម  $4m$  ទៀត តើចុងរថរំដកធ្លាក់ចុះចំនួនប៉ុន្មាន  $m$  ? (សូមមើលរូបខាងស្តាំ)



**២១៨.** ត្រីកោណ  $ABC$  មួយកែងត្រង់  $A$  ហើយមានបរិមាត្រ  $60 cm$  និងមានផ្ទៃក្រឡា  $120 cm^2$  ។ ចូរគណនារង្វាស់ជ្រុងនីមួយៗនៃត្រីកោណ  $ABC$  ។

**២១៩.** បង្ហាញថាត្រីកោណដែលមានរង្វាស់មុំទាំងបី  $\alpha$  ,  $2\alpha$  និង  $3\alpha$  ជាត្រីកោណកែង ។

**២២០.** បើគេដឹងថា  $f(x) \cdot f(x+1) = 9$  និង  $f(3) = 81$  ។ ចូររក  $f(9)$  ។

**២២១.** សុខធ្វើដំណើរដោយមធ្យោបាយបីប្រភេទគឺ រថយន្តបាន  $\frac{3}{8}$  ហើយម៉ូតូបាន  $\frac{3}{5}$  នៃចម្ងាយផ្លូវទាំងអស់ ។

ក. រកប្រភាគតាងចម្ងាយផ្លូវដែលសុខត្រូវដើរ ។

ខ. រកចម្ងាយផ្លូវទាំងអស់បើសុខដើរបាន  $2 km$  ។

**២២២.** ក. សរសេរ  $45m$  ជាភាគរយនៃ  $1km$  ។

ខ. សរសេរ  $1kg$  ជាភាគរយនៃ  $800g$  ។

**២២៣.** អង្កត់  $MN$  មានរង្វាស់  $18cm$  ។  $I$  ជាចំណុចមួយនៅលើ  $MN$  ហើយ  $MI \neq NI$  ។  $A$  និង  $B$  ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃ  $MI$  និង  $NI$  ។ គណនា  $AB$  ។

**២២៤.** ស្រាយបញ្ជាក់ថា ផលបូកមុំក្នុងពីរនៃត្រីកោណ ស្មើមុំក្រៅមួយនៃត្រីកោណ ដែលមិនជាប់មុំទាំងពីរនោះ ។

**២២៥.** គណនាតម្លៃនៃកន្សោម  $A = \left[ \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7} + 4\sqrt{3}}}} - 4 \right]^{2012^{2012}}$  ។

២២៦. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z = 7 \\ 2^{-x} + 2^{-y} + 2^{-z} = \frac{7}{4} \\ x + y + z = 3 \end{cases} \quad \text{។}$$

២២៧.  $a$  និង  $b$  ជាពីរចំនួនគតិវិជ្ជមានដែល  $a + \sqrt{b} = \sqrt{15} + \sqrt{216}$  ។ ចូរគណនា  $\left(\frac{2a}{b}\right)^{2011}$  ។

២២៨. គេដឹងថា  $\log 2 = 0.3010...$  ។ ចូររកចំនួនខ្ទង់នៃផ្នែកគតិវិជ្ជមាននៃ  $A = 2^{2011}$  ។

២២៩. ដោះស្រាយសមីការ  $\frac{3\sqrt{x}-5}{2} - \frac{2\sqrt{x}-7}{3} = \sqrt{x}-1$  ។

២៣០. ប្រៀបធៀបចំនួន  $ab$  និង  $PGCD(a,b) \times PPCM(a,b)$  ចំពោះ  $a=90$  ,  $b=280$  ។

២៣១. ផ្ទៀងផ្ទាត់កលកូណៈភាព :  $(1 + \sin x + \cos x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$  ។

២៣២. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy - z^2 + 6z = 13 \end{cases} \quad \text{។}$$

២៣៣. គេមាននិមិត្តសញ្ញាលោការីត :  $\text{Log} x$  ,  $\log x$  ,  $\lg x$  ,  $\ln x$  ,  $\log_{10} x$  ,  $\log_e x$  ។ តើនិមិត្តសញ្ញាណាខ្លះជាលោការីតទស្សភាគ (លោការីតគោល 10) ហើយលោការីតណាខ្លះជាលោការីតនេពែ (លោការីតគោល  $e$ ) ?

២៣៤. ត្រីកោណមួយមានរង្វាស់ជ្រុង 7 , 8 និង 11 ។ រកក្រឡាផ្ទៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណនេះ ។

២៣៥. គេមានបីចំនួន  $a, b, c$  ផ្ទៀងផ្ទាត់  $a+b+c=1$  ,  $a^2+b^2+c^2=1$  និង  $a^3+b^3+c^3=1$  ។ គណនាតម្លៃលេខនៃកន្សោម  $P = a^{2010} + b^{2011} + c^{2012}$  ។

២៣៦. បង្ហាញថា :  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1 \geq a + b + c + d$  ។

២៣៧. អាយុឪពុកតិចជាងផលបូកអាយុកូនទាំងបី 3 ឆ្នាំ ។ បើដឹងថា : អាយុឪពុក និងកូនទាំងបីសមាមាត្រនឹងចំនួន : 15 , 7 , 5 , 4 ។ រកអាយុម្តាក់ៗ ។

២៣៨. ប្រៀបធៀបពីរចំនួន :  $\left(\frac{9}{25}\right)^{60}$  និង  $\left(\frac{225}{625}\right)^{50}$  ។

២៣៩. គេឱ្យសមាមាត្រ  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ស្រាយបំភ្លឺថាគេបាន :  $\frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$  ។

២៤០. រកពីរចំនួនគតិវិជ្ជមានត្រឹមត្រូវ ដោយដឹងថាផលដកការេនៃចំនួនទាំងពីរស្មើនឹង 321 ។

២៤១. ក្មេងលេងប៊ូប៊ីនាក់គឺ A , B និង C មានប៊ូសមាមាត្រនឹង 3 , 4 , 5 ។ ក្រោយពេលឈប់លេងប៊ូអ្នកទាំងបីមានសមាមាត្រ 15 , 16 , 17 ។ តើក្មេងណាឈ្នះ ក្មេងណាចាញ់ ?

២៤២. ដោះស្រាយសមីការ  $\frac{x}{3} - \frac{x}{6} + \frac{x}{9} - \frac{x}{12} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$  ។

២៤៣. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases} x + xy + y = 1 \\ y + yz + z = 4 \\ z + zx + x = 9 \end{cases}$$

២៤៤. ប្រៀបធៀបចំនួន  $2^{2^{2^{2^2}}}$  មានលេខ 2 ចំនួន 1001 ដង និង  $3^{3^{3^{3^3}}}$  មានលេខ 3 ចំនួន 1000 ដង ។

- ២៤៥.** ដោះស្រាយសមីការ :  $x = \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{4-x} + \sqrt{4-x} \cdot \sqrt{5-x} + \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{3-x}$  ។
- ២៤៦.** បុរសម្នាក់ធ្វើដំណើរពីរាជធានីភ្នំពេញទៅកាន់ខេត្តស្វាយរៀង ។ ក្រោយឆ្លងសាឡាងអ្នកលឿងគាត់ធ្វើដំណើរបន្តដល់ត្រង់ចំណុចមួយ គាត់បានចោលភ្នែកឃើញបង្គោលប្រាប់ចម្ងាយដាក់ថា "ស្វាយជ្រំ 17km" និងបង្គោលបន្ទាប់ដាក់ថា "ស្វាយរៀង 25km" ។ សំណួរសួរថា តើចម្ងាយពី ស្វាយជ្រំ ទៅស្វាយរៀងមានប្រវែងប៉ុន្មាន km ?
- ២៤៧.** ចាប់មួយហ្វូងហើរទំលើផ្កាឈូកនៃស្រះមួយ ។ បើចាប់មួយទំលើផ្កាឈូកមួយ នោះមានចាប់មួយគ្មានផ្កាឈូកទំ ។ តែបើចាប់ពីរទំលើផ្កាឈូកមួយ នោះមានផ្កាឈូកមួយគ្មានចាប់ទំ ។ ចូររកចំនួនចាប់ និងចំនួនផ្កាឈូក ។
- ២៤៨.** សត្វខ្វែកទំលើមែកខ្វាវ បាក់មែកប្រាវងាប់បីរស់ពីរ ចុះបើសត្វ 120 ងាប់ប៉ុន្មាន ? រស់ប៉ុន្មាន ?
- ២៤៩.** ដាវី មានអាយុតាងដោយ  $x$  បើគិតគូរឱ្យខ្ចីចំនួន  $x$  ជាពហុគុណនៃ 8 ដោយដឹងថា  $x$  ធំជាង 10 និងតូចជាង 20 ។ តើសព្វថ្ងៃ ដាវីស្រីមានអាយុប៉ុន្មាន ?
- ២៥០.** កសិកម្មក់មានចំណីសម្រាប់ផ្គត់ផ្គង់គោរបស់គាត់ 40 ក្បាលបាន 35 ថ្ងៃ ។ បើគាត់ទិញគោ 10 ក្បាលបន្ថែមទៀត តើគាត់អាចផ្គត់ផ្គង់ចំណីដដែលឱ្យគោបានប៉ុន្មានថ្ងៃ ?
- ២៥១.** គេឱ្យប្រើចំនួនពិត  $a_1, a_2$  និង  $a_3$  ដែល  $a_1 = \sin a_1$  ,  $a_2 = \cos a_1 \cdot \sin a_2$  និង  $a_3 = \cos a_1 \cdot \cos a_2$  ។ បង្ហាញថា  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$  ។
- ២៥២.** គណនាផលគុណ  $P_n = (1-x+x^2)(1-x^2+x^4)(1-x^4+x^8) \times \dots \times (1-x^{2^n}+x^{2^{n+1}})$  ។
- ២៥៣.** បើ  $a > 0, b > 0$  និង  $c > 0$  បង្ហាញថា  $\frac{3}{a+b+c} < \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$  ។
- ២៥៤.** គណនាផលបូក  $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!$  ដែល  $n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$  ។
- ២៥៥.** គណនាផលបូក  $\sum_{n=1}^{9999} \left( \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt[4]{n} + \sqrt[4]{n+1})} \right)$  ។
- ២៥៦.** សម្រួលកន្សោម :  $A = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}$  ។
- ២៥៧.** ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើគេមាន  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  នោះគេបាន :  $\left( \frac{a-b}{c-d} \right)^4 = \frac{a^4 + b^4}{c^4 + d^4}$  ។
- ២៥៨.** គេមាន  $6^2 - 5^2 = 11$  ,  $56^2 - 45^2 = 1111$  ,  $556^2 - 445^2 = 111111$  ,  $5556^2 - 4445^2 = 11111111$  , ... ។  
ពីការបង្ហាញឧទាហរណ៍ខាងលើចូររករូបមន្តទូទៅ និងស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនោះផង ។
- ២៥៩.** គណនាផលបូក :  $S = \cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \dots + \cos^2 89^\circ$  ។
- ២៦០.** គណនាផលបូក :  $S = \sin^2 0^\circ + \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \dots + \sin^2 90^\circ$  ។
- ២៦១.** ចូរកំណត់តម្លៃ  $a$  និង  $b$  ដើម្បីឱ្យចំនួន  $\overline{abba}$  ជាគូបប្រាកដនៃមួយចំនួនគត់ ។
- ២៦២.** ក. កំណត់តម្លៃលេខនៃអញ្ញាត  $a, b, c$  និង  $d$  នៃចំនួន  $\overline{abcd}$  ដោយដឹងថា  $\overline{abcd} \times 9 = \overline{dcba}$  ។  
ខ. បញ្ជាក់ថា  $\overline{abcd}$  និង  $\overline{dcba}$  សុទ្ធតែជាការប្រាកដនៃមួយចំនួនគត់ ។
- ២៦៣.** ពីរចំនួនដែលជាការប្រាកដ ដោយដឹងថាផលគុណវា លើសផលបូកវាចំនួន 4844 ។



២៨១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ :  $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ xy = 2 \end{cases}$  ។

២៨២. ដោះស្រាយសមីការ  $(3^{2011} - 3^{2010})(3^{2009} - 3^{2008}) = 4 \times 3^x$  ។

២៨៣. សរសេរ  $N$  ជាផលគុណកត្តាដ៏ក្រៃទី១ ដែល  $N = (3a-1)^2 - 4(a^2 + 6a + 9)$  ។

២៨៤. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំនួន  $N = 4(4a+1)^2 - 100$  ចែកដាច់នឹង 32 ។

២៨៥. គេឱ្យ  $a+b=1$  ។ ចូរគណនាតម្លៃលេខនៃកន្សោម  $P = 2(a^3 + b^3) - 3(a^2 + b^2) + 1$  ។

២៨៦. រកពីរចំនួនគតិវិជ្ជមាន  $a$  និង  $b$  ដោយដឹងថា  $a^2 - b^2 = 24$  ។

២៨៧. ការពិរមានផលដកក្រឡាផ្ទៃស្មើ  $1152m^2$  និងមានផលដកប្រវែងជ្រុងស្មើ  $16m$  ។ គណនាជ្រុងការេនីមួយៗ ។

២៨៨. គណនាកន្សោម  $A = \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(2-x)(3-x)} + \frac{3}{(1-x)(x-3)}$  ។

២៨៩. រកមួយចំនួន ដោយដឹងថា បីដងនៃចំនួននេះ និងការេនៃចំនួនដដែលនេះ ជាចំនួនផ្ទុយគ្នា ។

២៩០. គេមានចំនួន  $N = 12345678910111213...998999$  ដែលចំនួននេះសរសេរពីលេខ 1 ដល់លេខ 999 ។  
តើលេខប៉ុន្មាននៅត្រង់ទីតាំងតួទី 2011 រាប់ពីខាងឆ្វេងដៃ ?

២៩១. គេឱ្យអនុគមន៍  $f$  កំណត់  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$  ដោយ  $x(2x+1)f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x+1$  ។ ចូរគណនា ផលបូក  
 $S = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2011)$  ។

២៩២. ប្រអប់មួយមានរាងជាប្រលេពីប៉ែតកែង មានវិមាត្រ  $180mm, 600mm, 90mm$  ។ រកចំនួនគូបតិចបំផុតដែល  
អាចរៀបបំពេញក្នុងប្រអប់នេះ ។

២៩៣. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ  $\begin{cases} 2x + 2y = 3xy \\ 6x + y = 4xy \end{cases}$  ។

២៩៤. រកពីរចំនួនគត់  $a$  និង  $b$  ដែល  $a > b$  ។ បើគេដឹងថា ផលបូករបស់វាជាពហុគុណនៃ 15 ហើយផលដកការេរបស់  
វាស្មើនឹង 45 ។

២៩៥.  $x, y, z$  ជាចំនួនសនិទានខុសពីសូន្យ ។ បើ  $A = \frac{y}{z} + \frac{z}{y}$ ,  $B = \frac{z}{x} + \frac{x}{z}$ ,  $C = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$  ។ បង្ហាញថា តម្លៃនៃ  
 $A^2 + B^2 + C^2 - ABC$  មិនអាស្រ័យនឹង  $x, y, z$  ។

២៩៦. យុវជនបីនាក់គឺ  $A, B, C$  ធ្វើការរត់ប្រណាំងគ្នាមួយ  $100m$  ។ ពេលរត់ប្រណាំងគេសង្កេតឃើញថា :  
ខណៈពេល  $A$  រត់ដល់ទី  $B$  នៅខ្វះ  $10m$  ទៀត និងខណៈពេល  $B$  រត់ដល់ទី  $C$  នៅខ្វះ  $10m$  ទៀត ។ គេសន្មត  
ថាអ្នកទាំងបីរត់ក្នុងល្បឿនថេរ ។ សួរថា ខណៈពេលដែល  $A$  រត់ដល់ទី  $C$  នៅចម្ងាយប៉ុន្មានម៉ែត្រ ពី  $A$  ?

២៩៧. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ :  $\begin{cases} -x + y + z = xyz \\ x - y + z = xyz \\ x + y - z = xyz \end{cases}$  ។

២៩៨. គេមាន  $a, b, c$  ជាបីចំនួនខុសគ្នា ។ គណនាផលបូក  $S = \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$  ។

**២៩៩.** រកគ្រប់បណ្តាញនៃចំនួនគតិវិជ្ជមាន  $(x, y)$  ផ្សេងផ្ទាត់សមីការ  $x^2 + x + 13 = y^2$  ។

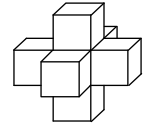
**៣០០.** គេមានចំនួន  $A = 2^n \cdot 5^{2n+1}$  ដែល  $n$  ជាចំនួនគតិវិជ្ជមាន។ តើចំនួន  $A$  បញ្ចប់ដោយលេខសូន្យ  $(0)$  ប៉ុន្មាន ?

**៣០១.** គេឱ្យបីចំនួនវិជ្ជមាន  $a, b, c$  ។ ដោះស្រាយសមីការ  $\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ac} + \frac{x-c}{ab} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$  ។

**៣០២.** រកបួសគូបនៃ  $Z = \left(8, \frac{\pi}{4}\right)$  ។

**៣០៣.** គេមានគូបចំនួន 7 មានទំហំប៉ុនៗគ្នាៗ ហើយផ្គុំភ្ជាប់គ្នាបានដូចរូបសូលីតខាងស្តាំ :

ដោយដឹងថាសូលីតនេះមានមាឌ  $448\text{cm}^3$  ចូររកផ្ទៃក្រឡាទាំងអស់របស់សូលីតនេះ ។



**៣០៤.** គេមានត្រីកោណ  $ABC$  មួយ និងមាន  $[AM]$  ជាមេដ្យាន ។ បង្ហាញឱ្យឃើញថា  $2AM < AB + AC$  ។

**៣០៥.** អ្នកបើកបរម្នាក់ចេញពីទីក្រុង  $A$  ទៅទីក្រុង  $B$  ដោយល្បឿនថេរជាមធ្យមរាល់ថ្ងៃ។ គាត់ចាប់អារម្មណ៍ឃើញថា :  
បើគាត់បន្ថែមល្បឿន  $3\text{km/h}$  នោះគាត់ទៅដល់គោលដៅ មុនពេលកំណត់ 1 ម៉ោង។ តែបើគាត់បន្ថយល្បឿន  $2\text{km/h}$  នោះគាត់ទៅដល់គោលដៅ ក្រោយពេលកំណត់ 1 ម៉ោងដែរ។ គណនា រយៈពេលធម្មតា ល្បឿនធម្មតា និងចម្ងាយពីទីក្រុង  $A$  ទៅទីក្រុង  $B$  ។

**៣០៦.** មួយចំនួនមានផលគុណខ្លួនឯងស្មើនឹងផលបូកខ្លួនឯង។ គណនាមួយចំនួននោះ ។

**៣០៧.** ក្នុងកិច្ចប្រជុំមួយមានមនុស្ស 10 នាក់ បានចូលរួម ហើយអ្នកទាំងនោះបានចាប់ដៃស្វាគមន៍គ្នាទៅវិញទៅមក។ បើដឹងថាអ្នកទាំងអស់បានចាប់ដៃគ្នា គ្រប់ៗគ្នា។ ចូររកចំនួននៃការចាប់ដៃគ្នាទាំងអស់ ។

**៣០៨.** ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន  $2^9 + 3^9$  ចែកដាច់នឹង 35 ។

**៣០៩.** សម្រួលប្រភាគសនិទាន :  $E = \frac{a^2 - 3ab + 2b^2}{a^2 - 5ab + 6b^2}$  ។

**៣១០.** ត្រីកោណមួយមានបរិមាត្រ  $24\text{ cm}$  ។ បើប្រវែងជ្រុងទាំងបីសមាមាត្ររៀងគ្នាគឺ  $3:4:5$  ចូរគណនារង្វាស់ជ្រុងនីមួយៗរបស់វា ។

**៣១១.** ចំនួនគត់មួយមានលេខពីរខ្ទង់ ដែលមានផលបូកលេខតាមខ្ទង់ស្មើនឹង 9 ។ បើគេដូរខ្ទង់រាយទៅជាខ្ទង់ដប់វិញ នោះគេបានចំនួនថ្មីច្រើនជាងចំនួនចាស់ 63 ។ គណនាចំនួនគត់នោះ ។

**៣១២.** បរិមាត្រនៃប្រលេឡូក្រាម  $ABCD$  មានរង្វាស់ស្មើ  $48\text{ cm}$  ។ រង្វាស់កម្ពស់នៃប្រលេឡូក្រាមសមាមាត្រ  $5:7$  ។ គណនារង្វាស់ជ្រុងនៃប្រលេឡូក្រាម  $ABCD$  ។

**៣១៣.** រកតម្លៃ  $x$  ដែលធ្វើឱ្យកន្សោម  $P = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$  មានតម្លៃតូចបំផុត ? រកតម្លៃតូចបំផុតនោះ ។

**៣១៤.** មនុស្សមួយក្រុមឡើងជិះឡាន។ បើម្នាក់អង្គុយកៅអីមួយ នោះនៅសល់មនុស្ស 4 នាក់គ្មានកន្លែងអង្គុយ។ តែបើមនុស្សពីរនាក់ អង្គុយកៅអីមួយ នោះនៅសល់កៅអី 4 គ្មានមនុស្សអង្គុយ។ រកចំនួនមនុស្ស និងចំនួនកៅអី ។

**៣១៥.** ផលបូកនៃពីរចំនួនស្មើនឹង 1 ។ បង្ហាញថាផលគុណវាតូចជាង ឬស្មើនឹង  $\frac{1}{4}$  ។

**៣១៦.** ការេមួយមានក្រឡាផ្ទៃ  $100\text{ cm}^2$  ចារឹកក្នុងកន្លះរង្វង់មួយ។ រកក្រឡាផ្ទៃនៃការេដែលចារឹកក្នុងរង្វង់ទាំងមូល ។

**៣១៧.** កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត  $a$  និង  $b$  ដោយដឹងថា  $a^2 + b^2 = 0$  ។

**៣១៨.** ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ : 
$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \\ xy + yz + zx = 26 \end{cases}$$
 ។

**៣១៩.** គណនាតម្លៃគត់កន្សោមលេខ :  $E = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$  ។

**៣២០.** ពីរចំនួនមានផលបូកស្មើ 12 និងមានផលគុណស្មើ 4 ។ គណនាផលបូកចម្រាស់ចំនួនទាំងពីរតាមពីរបៀបផ្សេងគ្នា ។

**៣២១.** បើ  $x^2 + 3x + 8$  ជាកត្តាមួយនៃកន្សោម  $x^4 + rx^2 + s$  ចូរគណនារក  $r$  និង  $s$  ។

**៣២២.** គណនា  $A = 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n$  ។

**៣២៣.** គេមាន  $S = (1+2)(1+2^2)(1+2^4)(1+2^8) \times \dots \times (1+2^{1024})$  ។ ចូរគណនា  $1024\sqrt{S+1}$  ។

**៣២៤.** ដោយមិនប្រើម៉ាស៊ីនគិតលេខ ចូរគណនារកតម្លៃនៃ  $A = \frac{2012}{1234568^2 - 1234567 \times 1234569}$  ។

**៣២៥.** រកចំនួនគតិវិជ្ជមាន  $n$  ដើម្បីឱ្យ  $4+n^4$  ជាចំនួនបឋម ។

**៣២៦.** រកលេខខាងចុងនៃផលគុណ  $7^{2012} \times 2013^{2010} \times 7^{2000} \times 2013^{2012}$  ។

**៣២៧.** គណនារកលេខខាងចុងនៃ  $A$  ដែល  $A = 2012^{2013}$  ។

**៣២៨.** រកគ្រប់ចំនួនគតិវិជ្ជមាន  $n$  ដែលធ្វើឱ្យ  $2^n - 1$  ចែកដាច់នឹង 7 ។

**៣២៩.** បង្ហាញថា  $12^{2012} - 2^{2008}$  ចែកដាច់នឹង 10 ។

**៣៣០.** គេមានចំនួន  $A$  ដែល  $A = n^5 - n$  ។ បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគតិវិជ្ជមាន  $n$  នោះ  $A$  ចែកដាច់នឹង 30 ។

**៣៣១.** គេឱ្យ  $f$  ជាអនុគមន៍ពហុធាកំណត់ដោយ  $f(x) = x^3 - 3x$  ។ ចូរគណនា  $f(x)$  ចំពោះ

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$
 ។

**៣៣២.** រកពីរចំនួនគតិវិជ្ជមាន  $a$  និង  $b$  ដែលមានផលបូកស្មើ 92 និង  $a+1$  ជាពហុគុណនៃ  $b$  ។

**៣៣៣.** ចំពោះចំនួនគតិវិជ្ជមាន  $n$ , គេឱ្យ  $P = (n+1)(n+2)(n+3) \times \dots \times (n+n)$  និង  $P' = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)$  ។ បង្ហាញថា  $P$  ចែកដាច់នឹង  $P'$  និងរកផលចែករវាង ។

**៣៣៤.** គេឱ្យ  $2a3 + 326 = 5b9$  ដែល  $2a3$  និង  $5b9$  ជាចំនួនមានលេខបីខ្ទង់ ។ បើ  $5b9$  ចែកដាច់នឹង 9 គណនា  $a+b$  ។

**៣៣៥.** ឧបមាថា  $a^2 + a = -1$  ចូរគណនាតម្លៃលេខនៃកន្សោម  $A = a^4 + 2a^3 + 4a^2 + 3a + 3$  ។

**៣៣៦.** គណនាកន្សោម  $A$  ដោយឱ្យលទ្ធផលជាផលគុណបឋមកត្តា ដែល  $A = \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{12} + \sqrt{8} + 3 + \sqrt{6}}$  ។

**៣៣៧.** គណនាតម្លៃលេខនៃ  $S = \frac{2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 200^2}{3^2 + 6^2 + 9^2 + \dots + 300^2}$  ។

**៣៣៨.** ត្រីកោណកែងមួយមានអ៊ីប៉ូតេនុសស្មើ 13 cm និងផលបូកជ្រុងពីរទៀតស្មើ 17 cm ។ រករង្វាស់ជ្រុងមុំកែងទាំងពីរ ។

**៣៣៩.** ស្រាយបញ្ជាក់ថា :  $3^{\sqrt{2}} > 2^{\sqrt{3}}$  ។

**៣៤០.** បង្ហាញថា  $A < 6$  ដែល  $A = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}} + \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \dots + \sqrt[3]{24}}}}$  ។

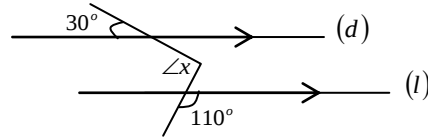
៣៤១. ដោះស្រាយសមីការ :  $\frac{x-4}{2008} + \frac{x-3}{2009} - \frac{x-2}{2010} - \frac{x-1}{2011} = 0$  ។

៣៤២. រកបីចំនួនគតិវិជ្ជមានខុសគ្នា  $x, y$  និង  $z$  ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការ  $\begin{cases} x+y=6 \\ y+z=10 \end{cases}$  ។

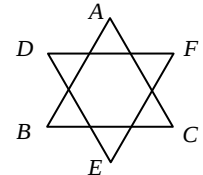
៣៤៣. ដោះស្រាយសមីការ :  $\sqrt{x+1} = x-1$  ។

៣៤៤. គេមានបន្ទាត់ពីរស្របគ្នាគឺ  $(d) \parallel (l)$  ។

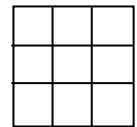
គណនាមុំ :  $\angle x$  នៃរូបខាងស្តាំ ។



៣៤៥. គេមានត្រីកោណសម័ង្សពីរ គឺ  $\triangle ABC$  និង  $\triangle DEF$  ដែលមានរង្វាស់ជ្រុងស្មើ  $3\text{ cm}$  ដូចគ្នា ។ ត្រីកោណទាំងពីរផ្គុំគ្នាដូចរូបខាងស្តាំ បានត្រីកោណសម័ង្សតូចៗចំនួន ៦ ដែលមានរង្វាស់ជ្រុងស្មើ  $1\text{ cm}$  ដូចគ្នា ។ គណនាក្រឡាផ្ទៃនៃរូបខាងស្តាំ ។



៣៤៦. គេមានចំនួន  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$  ។ ចូរយកលេខទាំងនេះទៅបំពេញក្នុងប្រអប់ការេខាងស្តាំ ដើម្បីឱ្យផលបូកជួរដេក ស្មើផលបូកជួរឈរ ស្មើផលបូកអង្កត់ទ្រូង ស្មើនឹង  $15$  ។



៣៤៧. ត្រីកោណមួយមានរង្វាស់ជ្រុង  $a, b$  និង  $c$  ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់  $\frac{a}{24} = \frac{b}{18} = \frac{c}{12}$  ។

ក. គណនារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ បើគេដឹងថា  $b+c=10\text{ cm}$  ។

ខ. គណនារង្វាស់កម្ពស់នៃត្រីកោណ ដែលត្រូវនឹងជ្រុង  $a$  ។

៣៤៨. ក្នុងថ្នាក់រៀនមួយគេរៀបសិស្សជាក្រុម ។ បើរៀបសិស្ស ៨ នាក់ក្នុងមួយក្រុម នៅសល់សិស្ស ៤ នាក់ទៀត ។ តែបើរៀបសិស្ស ៩ នាក់ក្នុងមួយក្រុម នោះនៅខ្វះសិស្ស ២ នាក់ទៀត ។ រកចំនួនសិស្សក្នុងថ្នាក់រៀននោះ ។

៣៤៩. រកមួយចំនួនបើដឹងថា ចំនួននោះមិនធំជាងពីរ ហើយក៏មិនតូចជាងពីរដែរ ។

៣៥០. រកមួយចំនួន ដែលមានផលបូកស្មើផលគុណនៃខ្លួនឯង ។

៣៥១. មធ្យមនៃពីរចំនួនស្មើ  $2012$  និងមធ្យមនៃបីចំនួនក៏ស្មើនឹង  $2012$  ដែរ ។ ចូររកចំនួនទី ៣ ។

៣៥២.  $x$  ជាចំនួនគតិវិជ្ជមាន មានលេខពីរខ្ទង់ ។ ចូរគណនា  $x$  បើដឹងថា  $44$  ចែកដាច់នឹង  $x$  សល់សំណល់  $10$  ។

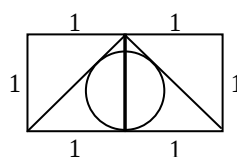
៣៥៣. ដោះស្រាយសមីការ  $\overline{HE}^2 = \overline{SHE}$  ។

៣៥៤. កំណត់តម្លៃ  $a$  និង  $b$  ដើម្បីឱ្យកន្សោម  $ax^3 + bx^2 + 54x + 27$  អាចសរសេរជាគូបនៃទ្វេធាមួយបាន ។ រួចកំណត់ទ្វេធានោះ ។

៣៥៥. ត្រីកោណ  $ABC$  កែងត្រង់  $A$  មានអ៊ីប៉ូតេនុស  $BC = 17\text{ cm}$  និង  $AB + AC = 23\text{ cm}$  ។ គណនា  $AB$  និង  $AC$  ។

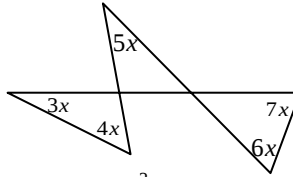
៣៥៦. គេឱ្យប្រព័ន្ធសមីការ  $\begin{cases} 3x+7y=m \\ 2x+5y=20 \end{cases}$  ។ កំណត់តម្លៃ  $m$  ដើម្បីឱ្យគូចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការវិជ្ជមាន ។

៣៥៧. គណនាកាំរង្វង់នៃរូបខាងស្តាំ :



៣៥៨. គណនាចំនួនគត់ធម្មជាតិ  $n$  ដែលធ្វើឱ្យចំនួន  $n+13$  និងចំនួន  $n-76$  ជាការេប្រាកដ ។

៣៥៩. គណនាតម្លៃមុំ  $x$  គិតជាដឺក្រេ នៃរូបខាងស្តាំ :



៣៦០. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ ដែលមានសមីការនីមួយៗគឺ  $\frac{2x^2}{1+x^2} = y$  (1) ,  $\frac{2y^2}{1+y^2} = z$  (2) ,  $\frac{2z^2}{1+z^2} = x$  (3) ។

៣៦១. ស្រាយបញ្ជាក់ឱ្យឃើញថា ផលបូកមុំក្នុងទាំងបីនៃត្រីកោណស្មើនឹង  $180^\circ$  ។

៣៦២. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ពីទ្រឹស្តីបទពីតាក្រី ដែលថាក្នុងត្រីកោណកែង  $a^2 + b^2 = c^2$  មាន  $c$  ជាអ៊ីប៉ូតេនុស ។

៣៦៣. ចូររកចំនួនមួយដែលមានលេខបួនខ្ទង់គឺ  $\overline{abca}$  ដោយដឹងថា  $\overline{abca} = (5c+1)^2$  ។

៣៦៤. គេមានពីរចំនួន  $a > b > 0$  ។ បង្ហាញថា គ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ  $n$  នោះគេបាន  $a^n > b^n$  ។

៣៦៥. គណនាផលគុណ  $P = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{12}}{4} \times \dots \times \frac{\sqrt{9900}}{100}$  ។

៣៦៦. ដាក់កន្សោម  $P = (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$  ជាផលគុណកត្តា ។

៣៦៧. គេឱ្យ  $a > b > 0$  ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ  $3a^2 + 3b^2 = 10ab$  ។ គណនាតម្លៃនៃកន្សោម  $P = \frac{a-b}{a+b}$  ។

៣៦៨. គេឱ្យកន្សោម  $A = \frac{x-1}{x-3}$  ។ កំណត់តម្លៃ  $x$  វិជ្ជមាន ដើម្បីឱ្យ  $A$  ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

៣៦៩. បង្ហាញថា បើ  $a+b+c=0$  ហើយ  $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$  នោះគេបាន  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$  ។

៣៧០. ដោះស្រាយសមីការ  $(x+2012)^{2012} - x^{2012} = 0$  ។

៣៧១. គណនាតម្លៃនៃកន្សោម  $A = (x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1)^{2012}$  ចំពោះ  $x = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1}}$  ។

៣៧២. សួនច្បារមួយមានរាងជាតុកោណកែង ដែលមានផ្ទៃក្រឡា  $720 \text{ m}^2$  ។ បើគេន្ថែមបណ្តោយ  $6 \text{ m}$  និងបន្ថយទទឹង  $4 \text{ m}$  នោះផ្ទៃក្រឡារបស់សួន មិនមានការផ្លាស់ប្តូរទេ ។ គណនាវិមាត្រនៃសួនច្បារនោះ ។

៣៧៣. គេឱ្យពីរចំនួនដែលតូច ឬធំជាងគ្នា 3 ឯកតា ។ បើដឹងថាផលបូកការេនៃចំនួនទាំងពីរស្មើ 89 ចូររកចំនួនទាំងពីរ ។

៣៧៤. គណនាតម្លៃ  $x, y$  ដែល  $y \geq 0$  ពីសមីការ :  $x^2 - 4x + y - 6\sqrt{y} + 13 = 0$  ។

៣៧៥. ក. ប្រៀបធៀប  $3 - \sqrt{3}$  និង  $\sqrt{6(2 - \sqrt{3})}$  ។

ខ. ប្រៀបធៀប  $\frac{1}{4}\sqrt{48}$  និង  $\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}$  ។

៣៧៦. ដោះស្រាយសមីការ  $(x-2)^4 + (x-3)^4 = 1$  ។

៣៧៧. រកចំនួនដែលមានលេខពីរខ្ទង់  $\overline{AB}$  ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់  $\overline{AB}^2 - \overline{BA}^2 = 1980$  ។

៣៧៨. បើ  $ab = 4, ac = 5, bc = 20$  ។ គណនា  $a, b, c$  ។

៣៧៩. គណនា  $A = (2025 - 1^2)(2025 - 2^2)(2025 - 3^2) \times \dots \times (2025 - 50^2)$  ។

៣៨០. តើចំនួន  $P = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 100$  បញ្ចប់ដោយលេខសូន្យចំនួនប៉ុន្មានខ្ទង់ ?

**៣៨១.** តើចំនួន 2012! មានលេខសូន្យនៅខាងចុងប៉ុន្មាន ?

**៣៨២.** គណនា  $N = \sqrt{4+\sqrt{15}} + \sqrt{4-\sqrt{15}} - 2\sqrt{3-\sqrt{5}}$  ។

**៣៨៣.** ក្នុងចំណោមមួយមានឃ្លីពណ៌ស និងឃ្លីពណ៌ខ្មៅចំនួន 12 គ្រាប់ ។ រកចំនួនឃ្លី ស ដើម្បីឱ្យប្រូបាប នៃឃ្លីខ្មៅស្មើ  $\frac{1}{3}$  ។

**៣៨៤.** គេឱ្យ  $\triangle ABC$  ដែលមានមេដ្យាន  $AM$  ,  $BN$  និង  $CP$  ។

ក. ស្រាយបំភ្លឺថា  $AM + BN + CP < AB + BC + AC$  ។

ខ. ស្រាយបំភ្លឺថា  $AM + BN + CP > \frac{AB + BC + AC}{2}$  ។

**៣៨៥.** គេឱ្យបីចំនួនគតិវិជ្ជាទីបត្តា  $a$  ,  $b$  ,  $c$  ដែល  $a < b < c$  ។

ក. គណនាផលបូក  $S = a + b + c$  ជាអនុគមន៍នៃ  $b$  ។

ខ. ទាញរកតម្លៃនៃ  $a$  ,  $b$  ,  $c$  ដោយដឹងថា  $S = -333$  ។

**៣៨៦.** កុកមួយហើរជួបក្រសាមួយហ្វូងក៏ស្រែកសួរថា "សួស្តីមិត្តទាំង 100 " ។ មេខ្យល់នៃហ្វូងក្រសាបានឆ្លើយតបវិញថា "ទេចំនួនពួកយើងមិនគ្រប់ 100 ទេ" ។ ចំនួនពួកយើងបូកចំនួនពួកយើង បន្ថែមពាក់កណ្តាលនៃចំនួនពួកយើង ហើយថែម  $\frac{1}{4}$  នៃពួកយើង ព្រមទាំងមិត្តឯទៀតទើបគ្រប់ 100 ។ ចូររកចំនួនក្រសាក្នុងហ្វូងទាំងអស់ ។

**៣៨៧.** ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz \\ x^{2011} + y^{2011} + z^{2011} = 3^{2012} \end{cases}$$
 ។

**៣៨៨.** បរិមាត្រនៃត្រីកោណ  $ABC$  មួយមានរង្វាស់ស្មើ 80 cm ។ បើជ្រុងទាំងបីមានសមាមាត្ររៀងគ្នា 5 , 7 , 4 ។ ចូរគណនារង្វាស់ជ្រុងនីមួយៗ ។

**៣៨៩.** គេឱ្យ  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$  ។ គណនាតម្លៃនៃកន្សោម  $P = \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2}$  ។

**៣៩០.** ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ 
$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - 2\sqrt{y+1} = 2 \\ 2\sqrt{x+3} - \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$$
 ។

**៣៩១.** គេមាន  $a > 1$  ,  $b > 1$  និង  $a > b$  ។ ចូរប្រៀបធៀប  $\frac{a-1}{b-1}$  ,  $\frac{a}{b}$  និង  $\frac{a+1}{b+1}$  ។

**៣៩២.** ប្រៀបធៀប  $A = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$  និង  $B = \sqrt{51+10\sqrt{2}} - \sqrt{51-10\sqrt{2}}$  ។

**៣៩៣.** ដោះស្រាយសមីការ  $\frac{1+x}{x} + \frac{2+x}{x} + \frac{3+x}{x} + \dots + \frac{2013+x}{x} = 0$  ។

**៣៩៤.** ក. ដាក់ជាផលគុណកត្តានូវសមភាព  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$  ។

ខ. បង្ហាញថាបីចំនួនពិតមិនសូន្យ  $a$  ,  $b$  ,  $c$  ហើយមានពីរចំនួនផ្ទុយគ្នាមួយយ៉ាងតិចក្នុងចំណោម  $a$  ,  $b$  ,  $c$  នោះ

គេបានទំនាក់ទំនង  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$  ។

**៣៩៥.** ដោះស្រាយសមីការ  $3^{2+x} + 3^{2-x} = 30$  ។

**៣៩៦.** សម្រួលប្រភាគ  $A = \frac{|x-1|+|x|+x}{3x^2-4x+1}$  ដោយ  $x < 0$  ។

**៣៩៧.** ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ 
$$\begin{cases} \frac{x+y}{xyz} = \frac{1}{2} \\ \frac{y+z}{xyz} = \frac{5}{6} \\ \frac{x+z}{xyz} = \frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{។}$$

**៣៩៨.** ត្រីកោណកែងមួយមានរង្វាស់ជ្រុង ជាបីចំនួនគូតគ្នា ។ គណនាបរិមាត្រ និងក្រឡាផ្ទៃរបស់ត្រីកោណនេះ ។

**៣៩៩.** សម្រួលកន្សោម  $F = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$  ។

**៤០០.** គណនាចម្ងាយពីចំណុច  $A(6, 6)$  ទៅបន្ទាត់  $(D): y = -x + 4$  ក្នុងតម្រុយអរតូណរមេ ។

**៤០១.**

**៤០២.** ដាក់កន្សោម  $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+24$  ជាផលគុណកត្តា ។

**៤០៣.** គេមានបីចំនួន  $a, b, c$  ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  និង  $a^3 + b^3 + c^3 = 1$  ។

ស្រាយបញ្ជាក់ឱ្យឃើញថា :  $a + b^2 + c^3 = 1$  ។

**៤០៤.** គេឱ្យ  $ax + by + cz = 0$  និង  $a + b + c = \frac{1}{2005}$  ។ គណនា  $A = \frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y-z)^2 + ac(x-z)^2 + ab(x-y)^2}$  ។

**៤០៥.** ចូរកំណត់តម្លៃ  $x$  និង  $y$  ដើម្បីឱ្យចំនួន  $N = 3 \times 82y$  ចែកដាច់នឹង 3 ផង និងចែកដាច់នឹង 11 ផង ។

**៤០៦.** គេមានចំនួន  $A = 2^{2004}$  ។ ចូររកលេខ : ក. មួយខ្ទង់ខាងចុង ខ. ពីរខ្ទង់ខាងចុង គ. បីខ្ទង់ខាងចុង ។

**៤០៧.** គណនាផលបូក  $S_n = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{n}{10^n}$  ។

**៤០៨.** ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ : 
$$\begin{cases} (3x+y)^{x-y} = 9 \\ \sqrt{x-y} \sqrt{324} = 18x^2 + 12xy + 2y^2 \end{cases} \quad \text{។}$$

**៤០៩.** គេឱ្យ  $a$  ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ បង្ហាញថា  $\forall n \in \mathbb{N}, (a+1)^{n+1} - a(n+1) - 1$  ជាពហុគុណនៃ  $a^2$  ។

**៤១០.** ដាក់កន្សោមខាងស្តាំជាផលគុណកត្តាដឺក្រេទី 1 :  $(a^2 - 4b^2) + 2(a^3 + 2a^3)x + a^4 - b^4 = 0$  ។

**៤១១.** ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $4a^4 - 4a^3 + 5a^2 - 4a + 1 \geq 0$  ,  $a$  ជាចំនួនពិត ។

**៤១២.** គេឱ្យសមីការ  $(x+a+b)(x+b+c)(x+c+a)(a+b+c) = abcx$  ។ ដោះស្រាយសមីការបើ  $a=2, b=3, c=4$  ។

**៤១៣.** គេឱ្យ  $x, y, z$  ជាបីចំនួនវិជ្ជមានមិនសូន្យ ។ ចូរបង្ហាញថា  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{9}{x^2 + y^2 + z^2}$  ។

**៤១៤.** នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរមេគេឱ្យបីចំណុច  $A(1,2), B(2,3), C(3,4)$  ។ បន្ទាត់  $(D)$  និង  $(L)$  កាត់តាម  $C$  ។

ក. សរសេរសមីការបន្ទាត់  $(AB)$  ខ. រកសមីការបន្ទាត់  $(D)$  ស្របនឹង  $(AB)$  គ. រកបន្ទាត់  $(L)$  កែងនឹង  $(AB)$  ។

**៤១៥.** ដោះស្រាយសមីការ  $\frac{x+1}{x^2+2x} + \frac{x+6}{x^2+12x+35} = \frac{x+2}{x^2+4x+3} + \frac{x+5}{x^2+10x+24}$  ។

**៤១៦.** ដោះស្រាយសមីការ  $(24x-1)(12x-1)(8x-1)(6x-1) = 330$  ។

**៤១៧.** ដោះស្រាយសមីការ  $(x^2 + 3x - 4)^3 + (2x^2 - 5x + 3)^3 = (3x^2 - 2x - 1)^3$  ។

- ឯកទេស: គណិតវិទ្យា-រូបវិទ្យា

៤៣៥. គេឱ្យត្រីកោណសមបាត  $COB$  ដែលមានបាត  $OB$  និងកម្ពស់  $OA$  ។ ស្រាយថា  $AC^2 + OB^2 = AB^2 + OC^2$  ។
៤៣៦.  $ABC$  ជាត្រីកោណកែងត្រង់កំពូល  $A$  មានបរិមាត្រស្មើ  $12\text{ cm}$  និងមានក្រឡាផ្ទៃស្មើ  $6\text{ cm}^2$  ។ គណនារង្វាស់ជ្រុងនីមួយៗ នៃត្រីកោណកែង  $ABC$  នេះ ។
៤៣៧. រកចំនួនគត់ដែលនៅចន្លោះ  $40$  និង  $50$  ដោយដឹងថា បើគេប្តូរលំដាប់លេខ នោះគេនឹងបានជួបចំនួនថ្មីមួយទៀតដែលស្មើនឹង  $\frac{32}{23}$  នៃចំនួននោះ ។
៤៣៨. តាមចំណុច  $O$  ក្នុងត្រីកោណសម័ង្ស  $ABC$  គេគូសអង្កត់កែងទៅនឹងជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណនោះ ។ បង្ហាញថាផលបូកចម្ងាយពីចំណុច  $O$  ទៅជ្រុងទាំងបីស្មើនឹងរង្វាស់កម្ពស់នៃត្រីកោណនោះ ។
៤៣៩. បំបាត់វ៉ាឌីកាល់ពីភាគបែង  $A = \frac{20}{3 + \sqrt{5} + \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}}$  ។
៤៤០. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ 
$$\begin{cases} x + y = -3 \\ x + z = -2 \\ xy + yz + zx = 2 \end{cases}$$
 ។
៤៤១. គេឱ្យត្រីកោណ  $ABC$  មានរង្វាស់ជ្រុង  $a, b, c$  និងត្រីកោណ  $A'B'C'$  មានរង្វាស់ជ្រុង  $a', b', c'$  ។ ឧបមាថា  $\Delta ABC$  ដូចនឹង  $\Delta A'B'C'$  បង្ហាញថា  $\sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} = \sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')}$  ។
៤៤២.  $ABC$  ជាត្រីកោណកែងត្រង់  $A$  ដែលមាន  $BC = 2a$  និង  $\angle B = 60^\circ$  ។ កំណត់តម្លៃ  $a$  ដើម្បីឱ្យតម្លៃបរិមាត្រស្មើនឹងតម្លៃផ្ទៃក្រឡា ។
៤៤៣. នៅមានលំហាត់បន្តជាច្រើនទៀត... ។

**១. រកគ្រប់គូនៃចំនួនគតិវិជ្ជមាននៃ  $a, b$**

យើងមាន :  $a^2 + b^2 = a + b + 8$

យើងបាន :  $4a^2 + 4b^2 = 4a + 4b + 32$

$$4a^2 - 4a + 1 + 4b^2 - 4b + 1 = 34$$

$$(2a-1)^2 + (2b-1)^2 = 34$$

ដោយ  $34 < 36 = 6^2$  ហើយ  $2a-1$  និង  $2b-1$  ជាចំនួនសេស

នោះ 34 ជាផលបូកការេចំនួនសេសតូចជាង 6 ។

ចំនួនសេសតូចជាង 6 មាន 1, 3, 5

មានតែ  $3^2 + 5^2 = 34$  ឬ  $5^2 + 3^2 = 34$  យើងបាន :

•  $2a-1=3$  និង  $2b-1=5$  នោះ  $a=2, b=3$  ឬ

•  $2a-1=5$  និង  $2b-1=3$  នោះ  $a=3, b=2$

ដូចនេះ គូចំនួនផ្ទៀងផ្ទាត់គឺ :  $\begin{cases} a=2, b=3 \\ a=3, b=2 \end{cases}$  ។

**២. ស្រាយបញ្ជាក់ថា E ជាការប្រាកដ យើងមាន :**

$$E = (x+1000)(x+2000)(x+3000)(x+4000) + 1000^4$$

តាង  $y=1000$  យើងបាន :

$$\begin{aligned} E &= (x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y) + y^4 \\ &= (x+y)(x+4y)(x+2y)(x+3y) + y^4 \\ &= (x^2 + 4xy + xy + 4y^2)(x^2 + 3xy + 2xy + 6y^2) + y^4 \\ &= (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4 \\ &= (x^2 + 5xy + 5y^2 - y^2)(x^2 + 5xy + 5y^2 + y^2) + y^4 \\ &= [(x^2 + 5xy + 5y^2)^2 - y^4] + y^4 \\ &= (x^2 + 5xy + 5y^2)^2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ  $E = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2$  ជាការប្រាកដ ។

**៣. រកលេខនៅខាងរយនៃចំនួន A :**

$$\text{យើងមាន } A = 3^{2011} \cdot 7^{2012} + 3^{2013} \cdot 7^{2014}$$

• ពិនិត្យលេខចុងស្វ័យគុណនៃ 3 :

$$3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81$$

$$3^5 = 243, 3^6 = 729, 3^7 = 2187, 3^8 = 6561, \dots$$

យើងទាញបានទូទៅ ស្វ័យគុណនៃ 3 : យើងមាន  $3^{4k+A}, k \in \mathbb{N}$

-បើ  $A=0$  នោះលេខចុងនៃ  $3^{4k+A}$  គឺ : 1

-បើ  $A=1$  នោះលេខចុងនៃ  $3^{4k+A}$  គឺ : 3

-បើ  $A=2$  នោះលេខចុងនៃ  $3^{4k+A}$  គឺ : 9

-បើ  $A=3$  នោះលេខចុងនៃ  $3^{4k+A}$  គឺ : 7

$$\text{នាំឱ្យ } 3^{2011} = 3^{4 \cdot 502 + 3} \text{ មានលេខចុង } 7$$

$$3^{2013} = 3^{4 \cdot 503 + 1} \text{ មានលេខចុង } 3$$

• ពិនិត្យលេខចុងស្វ័យគុណនៃ 7 :

$$7^1 = 7, 7^2 = 49, 7^3 = 343, 7^4 = 2401$$

$$7^5 = 16807, 7^6 = \dots 9, 7^7 = \dots 3, 7^8 = \dots 1, \dots$$

យើងទាញបានទូទៅ ស្វ័យគុណនៃ 7 : យើងមាន  $7^{4k+A}, k \in \mathbb{N}$

-បើ  $A=0$  នោះលេខចុងនៃ  $7^{4k+A}$  គឺ : 1

-បើ  $A=1$  នោះលេខចុងនៃ  $7^{4k+A}$  គឺ : 7

-បើ  $A=2$  នោះលេខចុងនៃ  $7^{4k+A}$  គឺ : 9

-បើ  $A=3$  នោះលេខចុងនៃ  $7^{4k+A}$  គឺ : 3

$$\text{នាំឱ្យ } 7^{2012} = 7^{4 \cdot 503 + 0} \text{ មានលេខចុង } 1$$

$$7^{2014} = 7^{4 \cdot 503 + 2} \text{ មានលេខចុង } 9$$

យើងបាន :

$$\text{លេខចុង } A = \text{លេខចុង } 7 \times \text{លេខចុង } 1 + \text{លេខចុង } 3 \times \text{លេខចុង } 9$$

$$= \text{លេខចុង } 7 + \text{លេខចុង } 7$$

$$= \text{លេខចុង } 4$$

ដូចនេះ ចំនួន A មានលេខ 4 នៅខាងចុង ។

**៤. គណនាកន្សោម P : យើងមានកន្សោម**

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{2-2\sqrt{2}+1}}{\sqrt{9-12\sqrt{2}+8}} - \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}}{\sqrt{9+12\sqrt{2}+8}} \\ &= \frac{\sqrt{\sqrt{2}^2 - 2\sqrt{2} + 1^2}}{\sqrt{3^2 - 12\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2}} - \frac{\sqrt{\sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2} + 1^2}}{\sqrt{3^2 + 12\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}{\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}} - \frac{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}}{\sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{3-2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}+1}{3+2\sqrt{2}} \\ &= \frac{(\sqrt{2}-1)(3+2\sqrt{2}) - (\sqrt{2}+1)(3-2\sqrt{2})}{3^2 - (2\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{3\sqrt{2} + 4 - 3 - 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 4 - 3 + 2\sqrt{2}}{9 - 8} = 2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ កន្សោម  $P = 2$  ។

**៥. គណនាតម្លៃ  $x$  ដើម្បីឱ្យ  $F$  មានតម្លៃអប្បបរមា**

យើងមាន :

$$\begin{aligned} F &= (x-1)(x+2)(x+3)(x+6) \\ &= (x-1)(x+6)(x+2)(x+3) \\ &= (x^2+6x-x-6)(x^2+3x+2x+6) \\ &= (x^2+5x-6)(x^2+5x+6) \\ &= (x^2+5x)^2-36 \end{aligned}$$

ដោយ  $(x^2+5x)^2 \geq 0$  នោះ  $(x^2+5x)^2-36 \geq -36$

នាំឱ្យ  $F$  មានតម្លៃអប្បបរមាគឺ  $F = -36$

យើងបាន  $(x^2+5x)^2-36 = -36$

$$(x^2+5x)^2 = 0$$

$$x^2+5x = 0$$

$$x(x+5) = 0$$

នាំឱ្យ  $x = 0$  ,  $x = -5$

ដូចនេះ តម្លៃគណនាបានគឺ  $x = 0$  ,  $x = -5$  ។

**៦. គណនាតម្លៃនៃ  $x^2 + y^2$  :**

យើងមាន :  $x + y = 30$

$$(x+y)^3 = 30^3$$

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 27000$$

$$x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = 27000$$

ដោយ  $x^3 + y^3 = 8100$  និង  $x + y = 30$

យើងបាន :  $8100 + 3xy \cdot 30 = 27000$

$$90xy = 27000 - 8100$$

$$xy = \frac{18900}{90} = 210$$

តែ  $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

$$8100 = 30(x^2 - 210 + y^2)$$

$$(x^2 - 210 + y^2) = 270$$

$$x^2 + y^2 = 270 + 210$$

$$x^2 + y^2 = 480$$

ដូចនេះ តម្លៃគណនាបានគឺ :  $x^2 + y^2 = 480$  ។

**៧. ស្រាយបំភ្លឺថា :  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} < 1$**

ពិនិត្យ :  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$

តាមលំនាំខាងលើគេអាចបំបែកបាន ដូចខាងក្រោម :

$$\begin{aligned} \text{បូកអង្គនឹងអង្គ} \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2 \cdot 3} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3 \cdot 4} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{n \cdot (n+1)} &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \end{aligned} \right. \\ \hline \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \\ \text{ឬ } \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

ចំពោះ  $n$  ជាចំនួនគតិវិជ្ជមានហើយធំជាង 1

គេបាន  $n < n+1$  ឬ  $\frac{n}{n+1} < 1$

នាំឱ្យ  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} < 1$

ដូចនេះ  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} < 1$  ។

**៨. ក. រកសំណល់បើ  $n$  ចែកនឹង 56**

សម្មតិកម្ម :  $n$  ចែកនឹង 7 ឱ្យសំណល់ 5

បើតាង  $q_1 \in \mathbb{N}$  ជាផលចែក នោះគេបាន  $n = 7q_1 + 5$

$n$  ចែកនឹង 8 ឱ្យសំណល់ 3

បើតាង  $q_2 \in \mathbb{N}$  ជាផលចែក នោះគេបាន  $n = 8q_2 + 3$

យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ  $\begin{cases} n = 7q_1 + 5 \\ n = 8q_2 + 3 \end{cases} \times 8$

ដកអង្គនឹងអង្គ  $\begin{cases} 8n = 56q_1 + 40 \\ 7n = 56q_2 + 21 \end{cases}$   
 $n = 56(q_1 - q_2) + 19$

បើតាង  $q$  ជាចំនួនគតិវិជ្ជមានជាតិ ដែល  $q = q_1 - q_2$

យើងបាន  $n = 56q + 19$

ដូចនេះ តម្លៃសំណល់ដែល  $n$  ចែកនឹង 56 គឺ 19 ។

**ខ. រកចំនួន  $n$  : ដោយ  $5616 < n < 5626$**

នាំឱ្យ  $5616 < 56q + 19 < 5626$

$$5597 < 56q < 5607$$

$$99.946 < q < 100.125$$



ហើយ  $\frac{1}{2x-1}$  ជាចំនួនគត់លុះត្រាតែ  $2x-1=1$

នាំឱ្យ  $x=1$  ទាញបាន  $y=2x-\frac{1}{2x-1}$

$$=2\cdot 1-\frac{1}{2\cdot 1-1}=2-1=1$$

យើងបាន :  $A=\sqrt{x^{2011}}+\sqrt{y^{2011}}=\sqrt{1^{2011}}+\sqrt{1^{2011}}=2$

ដូចនេះ គណនាបាន  $A=\sqrt{x^{2011}}+\sqrt{y^{2011}}=2$  ។

**១២.** គណនា  $f(12)$  : យើងមាន :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{2011} - 13x^{2010} + 13x^{2009} - 13x^{2008} + \\ &\quad + \dots - 13x^2 + 13x - 1 \\ &= x^{2011} - 12x^{2010} - x^{2010} + 12x^{2009} + \\ &\quad + x^{2009} - 12x^{2008} - x^{2008} + \\ &\quad + \dots - 12x^2 - x^2 + 12x + x - 1 \\ &= x^{2010}(x-12) - x^{2009}(x-12) + \\ &\quad + x^{2008}(x-12) - x^{2007}(x-12) + \\ &\quad + \dots - x(x-12) + (x-1) \\ &= (x-12)(x^{2010} - x^{2009} + x^{2008} - x^{2007} + \\ &\quad + \dots - x) + (x-1) \end{aligned}$$

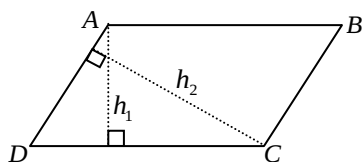
ចំពោះ  $x=12$  ជំនួសចូល យើងបាន :

$$f(12) = (12-12)(12^{2010} - 12^{2009} + 12^{2008} - 12^{2007} + \dots - 12) + (12-1)$$

$$f(12) = 0 + 11 = 11$$

ដូចនេះ ក្រោយពីគណនា  $f(12)=11$  ។

**១៣.** គណនារង្វាស់ជ្រុងនៃប្រលេឡូក្រាម  $ABCD$



យើងមានរូបមន្តក្រឡាផ្ទៃប្រលេឡូក្រាម

$$S_{ABCD} = AB \cdot h_1 \quad \text{ឬ} \quad S_{ABCD} = AD \cdot h_2$$

ទាញបាន  $AB \cdot h_1 = AD \cdot h_2$

បានសមាមាត្រ  $\frac{h_1}{h_2} = \frac{AD}{AB}$

សម្មតិកម្ម សមាមាត្រកម្ពស់  $5:7$  មានន័យថា  $\frac{h_1}{h_2} = \frac{5}{7}$

នាំឱ្យ  $\frac{AD}{AB} = \frac{5}{7}$  សមមូល  $\frac{AD}{5} = \frac{AB}{7} = \frac{AD+AB}{12}$

តែប្រលេឡូក្រាមមានបរិមាត្រ  $48cm$

នាំឱ្យ  $2(AB+AD)=48$  នោះ  $AB+AD=24$

យើងបាន  $\frac{AD}{5} = \frac{AB}{7} = \frac{AD+AB}{12} = \frac{24}{12} = 2$

ទំនាក់ទំនងសមាមាត្រ  $\frac{AD}{5} = 2 \Rightarrow AD=10cm$

$$\frac{AB}{7} = 2 \Rightarrow AB=14cm$$

ដូចនេះ រង្វាស់ជ្រុងប្រលេឡូក្រាមគឺ  $10cm$  និង  $14cm$  ។

**១៤.** រកសមីការមេដ្យាទ័រនៃអង្កត់  $[AB]$

សមីការមេដ្យាទ័រនៃអង្កត់  $[AB]$  ជាសមីការបន្ទាត់ដែល

កាត់តាមចំណុចកណ្តាលអង្កត់  $[AB]$  ហើយកែងនឹងអង្កត់  $[AB]$  ។

យើងមាន :  $A(2, 3)$  និង  $B(4, 4)$

នាំឱ្យកូអរដោនេចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់  $[AB]$  គឺ :

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right) = I\left(\frac{2+4}{2}, \frac{3+4}{2}\right) = I\left(3, \frac{7}{2}\right)$$

-បន្ទាត់  $(AB)$  កាត់តាម  $A(2, 3)$  នោះ  $A \in (AB)$

នាំឱ្យកូអរដោនេចំណុច  $A$  ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ:

$$3 = 2a + b \quad \text{អាចសរសេរជា} \quad 2a + b = 3 \quad (1)$$

-បន្ទាត់  $(AB)$  កាត់តាម  $B(4, 4)$  នោះ  $B \in (AB)$

នាំឱ្យកូអរដោនេចំណុច  $B$  ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ:

$$4 = 4a + b \quad \text{អាចសរសេរជា} \quad 4a + b = 4 \quad (2)$$

យកសមីការ  $(2)-(1)$  យើងបាន :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 4a + b = 4 & (2) \\ -2a + b = 3 & (1) \end{cases} \\ &\hline &2a = 1 \end{aligned} \quad \text{នាំឱ្យ} \quad a = \frac{1}{2}$$

-សមីការមេដ្យាទ័រត្រូវរកមានរាង  $y = a'x + b'$

ដោយ  $y = a'x + b' \perp (AB)$  នោះ  $a \times a' = -1$

$$\text{ឬ} \quad \frac{1}{2} \times a' = -1 \Rightarrow a' = -2$$

ហើយ មេដ្យាទ័រកាត់ចំណុចកណ្តាល  $I$  នោះ  $I \in (y = a'x + b')$

យើងបាន :  $\frac{7}{2} = (-2) \cdot 3 + b' \Rightarrow b' = \frac{7}{2} + 6 = \frac{19}{2}$

នាំឱ្យសមីការមេដ្យាទ័រដែលត្រូវរកអាចសរសេរ :  $y = -2x + \frac{19}{2}$

ដូចនេះ សមីការមេដ្យាទ័រនៃអង្កត់  $[AB]$  គឺ :  $y = -2x + \frac{19}{2}$  ។

**១៥. កប្បបាចចាប់បានឃ្លី២ មិនមែនពណ៌ខៀវ**

ព្រឹត្តិការណ៍ចាប់មិនបានឃ្លីពណ៌ខៀវ មានន័យថា :

បានឃ្លីក្រហមទាំង២ ឬ លឿងទាំង២ ឬ ក្រហម១លឿង១

-ប្រូបាបចាប់បានឃ្លីក្រហមទាំង២គឺ  $P(\text{ក.ក}) = \frac{2}{12} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{66}$

-ប្រូបាបចាប់បានឃ្លីលឿងទាំង២គឺ  $P(\text{ល.ល}) = \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} = \frac{1}{11}$

-ប្រូបាបចាប់បានឃ្លីក្រហម១លឿង១គឺ :

$P(\text{ក1.ល1}) = P(\text{ក.ល}) + P(\text{ល.ក}) = \left(\frac{2}{12} \times \frac{4}{11}\right) + \left(\frac{4}{12} \times \frac{2}{11}\right) = \frac{4}{33}$

នាំឱ្យ ប្រូបាបចាប់បានឃ្លី២មិនមែនពណ៌ខៀវគឺ :

$P(\text{មិនមែនខៀវ}) = P(\text{ក.ក}) + P(\text{ល.ល}) + P(\text{ក1.ល1})$

$$= \frac{1}{66} + \frac{1}{11} + \frac{4}{33}$$

$$= \frac{1+6+8}{66} = \frac{15}{66} = \frac{5}{22}$$

ដូចនេះ ប្រូបាបចាប់មិនបានឃ្លីពណ៌ខៀវគឺ  $P = \frac{5}{22}$  ។

**១៦. គណនាកន្សោម  $A$  : យើងមាន**

$$A = \frac{(6+12+18+\dots+96)^2}{(12+24+36+\dots+192)^2} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{(6+12+18+\dots+96)^2}{(2 \cdot 6+2 \cdot 12+2 \cdot 18+\dots+2 \cdot 96)^2} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{(6+12+18+\dots+96)^2}{[2(6+12+18+\dots+96)]^2} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{(6+12+18+\dots+96)^2}{2^2(6+12+18+\dots+96)^2} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

ដូចនេះ ក្រោយពីគណនា  $A=1$  ។

**១៧. គណនា  $E = \frac{x+y}{x-y}$**

ចំពោះ  $E = \frac{x+y}{x-y}$  សមមូល  $E^2 = \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}$

យើងមាន :  $2x^2 + 2y^2 = 5xy$

នាំឱ្យ  $2x^2 + 2y^2 = 5xy$

$2(x^2 + y^2) = 5xy$

$x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy \quad (*)$

-ថែម  $2xy$  លើអង្គទាំងពីរនៃសមីការ  $(*)$

យើងបាន  $x^2 + 2xy + y^2 = \frac{5}{2}xy + 2xy$

សមមូល  $(x+y)^2 = \frac{9}{2}xy$

-ថែម  $-2xy$  លើអង្គទាំងពីរនៃសមីការ  $(*)$

យើងបាន  $x^2 - 2xy + y^2 = \frac{5}{2}xy - 2xy$

សមមូល  $(x-y)^2 = \frac{1}{2}xy$

យើងបាន :  $E^2 = \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} = \frac{\frac{9}{2}xy}{\frac{1}{2}xy} = 9$

ទាញបាន  $E = \sqrt{9} = 3$  ព្រោះ  $x > y > 0$  នោះ  $E > 0$

ដូចនេះ ក្រោយពីគណនា  $E=3$  ។

**១៨. សម្រួលកន្សោម  $E$  : យើងមាន**

$$E = \sqrt{2x^2 - y^2 + 2x\sqrt{x+y} \cdot \sqrt{x-y} - \sqrt{(x+y)(x-y)}}$$

$$= \sqrt{(x^2 - y^2) + 2x\sqrt{(x^2 - y^2)} + x^2 - \sqrt{(x^2 - y^2)}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{(x^2 - y^2)}^2 + 2x\sqrt{(x^2 - y^2)} + x^2 - \sqrt{(x^2 - y^2)}}$$

$$= \sqrt{[\sqrt{(x^2 - y^2)} + x]^2 - \sqrt{(x^2 - y^2)}}$$

$$= \sqrt{(x^2 - y^2) + x - \sqrt{(x^2 - y^2)}} = x$$

ដូចនេះ ក្រោយពីសម្រួលរួច  $E=x$  ។

**១៩. គណនាផលគុណ**

ក.  $A = (1 - \cot 1^\circ)(1 - \cot 2^\circ)(1 - \cot 3^\circ) \times \dots \times (1 - \cot 44^\circ)$

តាមរូបមន្ត  $\frac{\cos a}{\sin a} = \cot a$  យើងបាន

$$A = \left(1 - \frac{\cos 1^\circ}{\sin 1^\circ}\right) \left(1 - \frac{\cos 2^\circ}{\sin 2^\circ}\right) \left(1 - \frac{\cos 3^\circ}{\sin 3^\circ}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{\cos 44^\circ}{\sin 44^\circ}\right)$$

$$A = \left(\frac{\sin 1^\circ - \cos 1^\circ}{\sin 1^\circ}\right) \left(\frac{\sin 2^\circ - \cos 2^\circ}{\sin 2^\circ}\right) \left(\frac{\sin 3^\circ - \cos 3^\circ}{\sin 3^\circ}\right) \times \dots \times \left(\frac{\sin 44^\circ - \cos 44^\circ}{\sin 44^\circ}\right)$$

ដោយដឹងថា  $\sin a - \cos a = \sqrt{2} \sin(45^\circ - a)$

$$A = \left(\frac{\sqrt{2} \sin 44^\circ}{\sin 1^\circ}\right) \left(\frac{\sqrt{2} \sin 43^\circ}{\sin 2^\circ}\right) \left(\frac{\sqrt{2} \sin 42^\circ}{\sin 3^\circ}\right) \times \dots \times \left(\frac{\sqrt{2} \sin 1^\circ}{\sin 44^\circ}\right)$$

$$A = \sqrt{2}^{44} \times \left(\frac{\sin 44^\circ}{\sin 1^\circ}\right) \left(\frac{\sin 43^\circ}{\sin 2^\circ}\right) \left(\frac{\sin 42^\circ}{\sin 3^\circ}\right) \times \dots \times \left(\frac{\sin 1^\circ}{\sin 44^\circ}\right)$$

ក្រោយពីសម្រួល យើងបាន  $A = 2^{22} = 4\,194\,304$

ដូចនេះ លទ្ធផលនៃផលគុណគឺ  $A = 2^{22} = 4\,194\,304$  ។

ខ.  $B = (\sqrt{3} + \tan 1^\circ)(\sqrt{3} + \tan 2^\circ)(\sqrt{3} + \tan 3^\circ) \times \dots \times (\sqrt{3} + \tan 29^\circ)$

តាមរូបមន្ត  $\frac{\sin a}{\cos a} = \tan a$  យើងបាន

$$B = \left(\sqrt{3} + \frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ}\right) \left(\sqrt{3} + \frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ}\right) \times \dots \times \left(\sqrt{3} + \frac{\sin 29^\circ}{\cos 29^\circ}\right)$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{3} \cos 1^\circ + \sin 1^\circ}{\cos 1^\circ}\right) \left(\frac{\sqrt{3} \cos 2^\circ + \sin 2^\circ}{\cos 2^\circ}\right) \times \dots \times \left(\frac{\sqrt{3} \cos 29^\circ + \sin 29^\circ}{\cos 29^\circ}\right)$$

ដោយដឹងថា  $\sqrt{3} \cos a + \sin a = 2 \cos(30^\circ - a)$

$$B = \left(\frac{2 \cos 29^\circ}{\cos 1^\circ}\right) \left(\frac{2 \cos 28^\circ}{\cos 2^\circ}\right) \left(\frac{2 \cos 27^\circ}{\cos 3^\circ}\right) \times \dots \times \left(\frac{2 \cos 1^\circ}{\cos 29^\circ}\right)$$

$$B = 2^{29} \left(\frac{\cos 29^\circ}{\cos 1^\circ}\right) \left(\frac{\cos 28^\circ}{\cos 2^\circ}\right) \left(\frac{\cos 27^\circ}{\cos 3^\circ}\right) \times \dots \times \left(\frac{\cos 1^\circ}{\cos 29^\circ}\right)$$

ក្រោយពីសម្រួល យើងបាន  $B = 2^{29} = 536\,870\,912$

ដូចនេះ លទ្ធផលនៃផលគុណគឺ  $B = 2^{29} = 536\,870\,912$  ។

**២០. បញ្ជាក់ថា:  $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$**

ដោយ  $a, b, c$  ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន យើងបាន :

$$\begin{aligned} & \bullet (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \\ & \sqrt{a}^2 - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \sqrt{b}^2 \geq 0 \\ & (a+b) \geq 2\sqrt{ab} \quad (i) \end{aligned}$$

ដូចគ្នានេះដែរ យើងបាន :

$$\bullet (b+c) \geq 2\sqrt{bc} \quad (ii)$$

$$\bullet (c+a) \geq 2\sqrt{ca} \quad (iii)$$

ដោយគុណអង្គនឹងអង្គនៃ (i)×(ii)×(iii) យើងបាន :

$$(a+b) \times (b+c) \times (c+a) \geq 2\sqrt{ab} \times 2\sqrt{bc} \times 2\sqrt{ca}$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{ab \cdot bc \cdot ca}$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

ដូចនេះ យើងឃើញថា  $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$  មែន ។

**២១. បង្ហាញថា  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$  :**

ដោយ  $a, b, c$  ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន យើងបាន :

$$\bullet (a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (i)$$

$$\bullet (b-c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow b^2 - 2bc + c^2 \geq 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 \geq 2bc \quad (ii)$$

$$\bullet (c-a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow c^2 - 2ca + a^2 \geq 0 \Leftrightarrow c^2 + a^2 \geq 2ca \quad (iii)$$

ដោយបូកអង្គនឹងអង្គនៃ (i)+(ii)+(iii) យើងបាន :

$$(a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

ដូចនេះ យើងឃើញថា  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$  មែន ។

**២២. រកបួសគត់របស់សមីការ**

យើងមាន  $2(x+y)+16=3xy$

$$2x+2y+16=3xy$$

$$3xy-2x-2y=16$$

$$3xy-2x-2y+\frac{4}{3}=16+\frac{4}{3} \quad \left(\text{ថែម } \frac{4}{3}\right)$$

$$x(3y-2)-\frac{2}{3}(3y-2)=\frac{48+4}{3}$$

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)(3y-2)=\frac{52}{3}$$

$$3\left(x-\frac{2}{3}\right)(3y-2)=52$$

$$(3x-2)(3y-2)=52$$

ដោយចង់រកតែបួសគត់នៃ  $x$  និង  $y$  ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

ហើយ  $52 = \begin{cases} 1 \times 52 \\ 2 \times 26 \\ 4 \times 13 \end{cases}$  ឬ  $52 = \begin{cases} 52 \times 1 \\ 26 \times 2 \\ 13 \times 4 \end{cases}$

ដូចនេះ គូប្រសព្វតំដែលរកឃើញរួមមាន:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=18 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} x=18 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$$

ដូចនេះ សមីការមានបួសជានិច្ច ។

ដូចនេះ យើងទាញបានផលបូក  $S = 1005$  ។

**២៥. គណនាលីមីត**  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$

តាង  $y = x^x$  នាំឱ្យ  $\ln y = \ln x^x$  សមមូល  $\ln y = x \ln x$   
យើងអាចបំប្លែងបាន  $\ln y = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$  (សក្ខខណ្ឌ  $x > 0$ )

យើងបាន  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$  (រាងមិនកំណត់)

-យើងអាចដោះស្រាយតាមរបៀបទី១ (ដោះដោយតាង) :

តាង  $u = \frac{1}{x}$  នាំឱ្យ  $x = \frac{1}{u}$  បើ  $x \rightarrow 0^+$  នោះ  $u \rightarrow +\infty$   
(បានជាហ៊ានដាក់  $x \rightarrow 0^+$  ព្រោះ  $x > 0$  ខិតជិតពីខាងស្តាំ)

យើងបាន :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{1}{u}}{u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u^{-1}}{u} = - \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$$

(ព្រោះតាមរូបមន្ត  $\frac{1}{a} = a^{-1}$  ,  $\log_a b^x = x \log_a b$  ,  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ )

$$\text{នាំឱ្យ } \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = 0 \Leftrightarrow \ln(\lim_{x \rightarrow 0} y) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1 \quad \forall$$

- យើងអាចដោះស្រាយតាមរបៀបទី២ (ឡូព័តាល់) :

$$\text{ចំពោះ } \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

(ធ្វើដេរីវេទាំងភាគយក និងភាគបែង)

$$\text{នាំឱ្យ } \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = 0 \Leftrightarrow \ln(\lim_{x \rightarrow 0} y) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1 \quad \forall$$

ដូចនេះ ក្រោយពីគណនាលើក្រោយបាន  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$  ។

**២៦. គណនា**  $A$  : យើងមាន

$$A = 2010(2011^{2010} + 2011^{2009} + 2011^{2008} + \dots + 2011^2 + 2012) + 1$$

$$A = (2011-1)(2011^{2010} + 2011^{2009} + 2011^{2008} + \dots + 2011^2 + 2011 + 1) + 1$$

$$A = (2011^{2011} - 1^{2011}) + 1 = 2011^{2011} - 1 + 1 = 2011^{2011}$$

ដូចនេះ គណនាបាន  $A = 2011^{2011}$  ។

**២៧. បង្ហាញថា**

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4) - (a^8-b^8) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ពិនិត្យ } a^8 - b^8 &= (a^4 - b^4)(a^4 + b^4) \\ &= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \\ &= (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \end{aligned}$$

តែបម្រាប់ :  $a-b=1$

យើងបាន  $a^8 - b^8 = (a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$  នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} (a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4) - (a^8-b^8) &= 0 \\ (a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4) - (a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

ដូចនេះ  $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4) - (a^8-b^8) = 0$  ។

**២៨. គណនា**  $A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{2011}\right)$

$$\begin{aligned} A &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{2011}\right) \\ &= \left(\frac{2-1}{2}\right) \times \left(\frac{3-1}{3}\right) \times \left(\frac{4-1}{4}\right) \times \dots \times \left(\frac{2011-1}{2011}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2010}{2011} = \frac{1}{2011} \end{aligned}$$

ដូចនេះ ក្រោយពីគណនា  $A = \frac{1}{2011}$  ។

**២៩. ដោះស្រាយសមីការ** :  $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

$$\text{យើងមាន : } 4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$$

$$4x^4 - 4x^2 - x^2 + 1 = 0$$

$$4x^2(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = 0$$

$$(x^2 - 1)(4x^2 - 1) = 0$$

$$(x-1)(x+1)(2x-1)(2x+1) = 0$$

ផលគុណកត្តាស្មើ ០ លុះត្រាកត្តានីមួយៗស្មើ ០ :

$$\text{យើងបាន : } \bullet x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$\bullet x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$\bullet 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$\bullet 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ សមីការមានឫសបួនគឺ  $x = \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$  ។

**៣០. បង្ហាញថា**  $\frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1} = 1$

ពិនិត្យអង្គទីមួយ :

- $\frac{1}{ab+a+1} = \frac{1}{ab+a+1}$
- $\frac{1}{bc+b+1} = \frac{1}{bc+b+1} \times \frac{a}{a} = \frac{a}{abc+ab+a}$   
 $= \frac{a}{1+ab+a}$  ព្រោះ  $abc=1$
- $\frac{1}{ca+c+1} = \frac{1}{ca+c+1} \times \frac{ab}{ab} = \frac{ab}{a \cdot abc+abc+ab}$   
 $= \frac{ab}{a+1+ab}$  ព្រោះ  $abc=1$

យើងបាន :  $\frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1}$   
 $= \frac{1}{1+a+ab} + \frac{a}{1+a+ab} + \frac{ab}{1+a+ab}$   
 $= \frac{1+a+ab}{1+a+ab} = 1$

ដូចនេះ  $\boxed{\frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1} = 1 \text{ ពិតមែន }} \quad \forall$

**៣១. គណនា**

$S = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$

ពិនិត្យ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(n+1)n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \\ &= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{(n+1)n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)n}(n+1-n)} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)n}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+1)n}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

យើងបាន :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & + \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ & \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right. \\ & \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}} = \frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}} \\ & \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{100}} \\ & \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

ដូចនេះ  $\boxed{S = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}} = \frac{9}{10}} \quad \forall$

**៣២. បង្ហាញថា**  $2002^{2003} - 2002^{1979}$  ចែកដាច់នឹង 6

យើងមាន :

$$\begin{aligned} & 2002^{2003} - 2002^{1979} \\ &= 2002^{1979}(2002^{24} - 1) \\ &= 2002^{1979}(2002 - 1)(2002^{23} + 2002^{22} + \dots + 2002 + 1) \\ &= 2 \cdot 2002^{1978} \cdot 2001(2002^{23} + 2002^{22} + \dots + 2002 + 1) \\ &= 2 \cdot 2002^{1978} \cdot 3 \cdot 667(2002^{23} + 2002^{22} + \dots + 2002 + 1) \\ &= 6 \cdot 2002^{1978} \cdot 667(2002^{23} + 2002^{22} + \dots + 2002 + 1) \end{aligned}$$

តាមលទ្ធផល ចំនួន  $2002^{2003} - 2002^{1979}$  ជាពហុគុណនៃ 6

ដូចនេះ  $\boxed{\text{ចំនួន } 2002^{2003} - 2002^{1979} \text{ ចែកដាច់នឹង } 6} \quad \forall$

**៣៣. បង្ហាញថា**  $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$

យើងមាន  $a+b+c=1$  លើកជាការេ យើងបាន

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 1 \\ & a^2 + b^2 + c^2 = 1 - 2ab - 2bc - 2ca \quad (i) \end{aligned}$$

គ្រប់ចំនួនពិត  $a, b, c$  នោះយើងបានវិសមភាព :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ b^2 + c^2 \geq 2bc \\ c^2 + a^2 \geq 2ca \end{cases}$$

$$2a^2 + 2b^2 + c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca \quad (ii)$$

ដោយយក (i)+(ii) នោះយើងបាន :

$$+ \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 - 2ab - 2bc - 2ca & (i) \\ 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca & (ii) \end{cases}$$

$$\frac{3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq 1}{3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq 1}$$

ទាញបាន  $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$

ដូចនេះ ឃើញថា  $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$  ប្រាកដមែន ។

**៣៤. បង្ហាញថា**  $\log_a b \times \log_b c \times \log_c d \times \dots \times \log_x y \times \log_y a = 1$

តាមរូបមន្តប្តូរគោល  $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$  យើងបាន :

$$\log_a b \times \log_b c \times \log_c d \times \dots \times \log_x y \times \log_y a = 1$$

$$\frac{\log b}{\log a} \times \frac{\log c}{\log b} \times \frac{\log d}{\log c} \times \dots \times \frac{\log y}{\log x} \times \frac{\log a}{\log y} = 1$$

$$1 = 1$$

ដូចនេះ  $\log_a b \times \log_b c \times \log_c d \times \dots \times \log_x y \times \log_y a = 1$  ។

**៣៥. បង្ហាញថា**  $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$

យើងមាន :  $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

នាំឱ្យបាន :  $f(y) = \log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$

យើងបាន :  $f(x) + f(y) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$

$$= \log\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right]$$

$$= \log\left(\frac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy}\right)$$

$$= \log\left(\frac{(1+xy)+(x+y)}{(1+xy)-(x+y)}\right)$$

ដោយចែកទាំងភាគយក និងភាគបែងនឹង  $(1+xy)$

នាំឱ្យបាន :  $f(x) + f(y) = \log\left(\frac{(1+xy)+(x+y)}{(1+xy)-(x+y)} \cdot \frac{(1+xy)}{(1+xy)}\right)$

$$= \log\left(\frac{1+\frac{x+y}{1+xy}}{1-\frac{x+y}{1+xy}}\right) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

ដូចនេះ ឃើញថា  $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$  មែន ។

**៣៦. ដោះស្រាយសមីការ**  $(\sqrt{7+\sqrt{48}})^x + (\sqrt{7-\sqrt{48}})^x = 14$

ឃើញថា :  $(\sqrt{7+\sqrt{48}})(\sqrt{7-\sqrt{48}}) = \sqrt{49-48} = 1$

ទាញបាន  $(\sqrt{7+\sqrt{48}}) = \frac{1}{(\sqrt{7-\sqrt{48}})} = (\sqrt{7-\sqrt{48}})^{-1}$

យើងបានសមីការថ្មី (ជំនួស  $\sqrt{7+\sqrt{48}}$  ដោយ  $\frac{1}{\sqrt{7-\sqrt{48}}}$ )

$$\left(\frac{1}{\sqrt{7-\sqrt{48}}}\right)^x + (\sqrt{7-\sqrt{48}})^x = 14$$

តាង  $t = (\sqrt{7-\sqrt{48}})^x$

សមីការទៅជា  $\frac{1}{t} + t = 14$  សមមូល  $t^2 - 14t + 1 = 0$

មាន  $\Delta' = (-7)^2 - 1 = 48$

នាំឱ្យ  $t_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{48}}{1} = 7 - \sqrt{48} = (\sqrt{7-\sqrt{48}})^2$

$$t_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{48}}{1} = 7 + \sqrt{48} = \frac{1}{7 - \sqrt{48}}$$

$$= (7 - \sqrt{48})^{-1}$$

$$= (\sqrt{7-\sqrt{48}})^{-2}$$

ចំពោះ  $t_1 = (\sqrt{7-\sqrt{48}})^2$

នោះ  $(\sqrt{7-\sqrt{48}})^x = (\sqrt{7-\sqrt{48}})^2$

ទាញបាន  $x = 2$

ចំពោះ  $t_2 = (\sqrt{7-\sqrt{48}})^{-2}$

នោះ  $(\sqrt{7-\sqrt{48}})^x = (\sqrt{7-\sqrt{48}})^{-2}$

ទាញបាន  $x = -2$

ដូចនេះ សមីការមានឫស  $x = 2 \vee x = -2$  ។

**៣៧. បង្ហាញថា :**

$$(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b) \cdot \log_b a - 1 = \log_a b$$

ពិនិត្យ :

$$\begin{aligned} & (\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b) \cdot \log_b a - 1 \\ &= \left( \frac{\log b}{\log a} + \frac{\log a}{\log b} + 2 \right) \left( \frac{\log b}{\log a} - \frac{\log b}{\log ab} \right) \cdot \frac{\log a}{\log b} - 1 \\ &= \left( \frac{\log^2 a + 2 \log a \log b + \log^2 b}{\log a \log b} \right) \left( 1 - \frac{\log a}{\log ab} \right) - 1 \\ &= \left( \frac{(\log a + \log b)^2}{\log a \log b} \right) \left( 1 - \frac{\log a}{\log a + \log b} \right) - 1 \\ &= \left( \frac{(\log a + \log b)^2}{\log a \log b} \right) \left( \frac{\log a + \log b - \log a}{\log a + \log b} \right) - 1 \\ &= \left( \frac{(\log a + \log b)^2}{\log a \log b} \right) \left( \frac{\log b}{\log a + \log b} \right) - 1 \\ &= \left( \frac{\log a + \log b}{\log a} \right) - 1 = 1 + \log_a b - 1 = \log_a b \end{aligned}$$

ដូចនេះ ក្រោយពីបង្ហាញរួចហើយថា

$$(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b) \cdot \log_b a - 1 = \log_a b$$

**៣៨. បង្ហាញថា**  $\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a} - \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} = \frac{4 \cot a}{\sin a}$

ពិនិត្យ ព្រមទាំងគណនាអង្គទីមួយ យើងបាន :

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \cos a}{1 - \cos a} - \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} \\ &= \frac{(1 + \cos a)^2 - (1 - \cos a)^2}{(1 - \cos a)(1 + \cos a)} \\ &= \frac{(1 + \cos a - 1 + \cos a)(1 + \cos a + 1 - \cos a)}{(1 - \cos a)(1 + \cos a)} \\ &= \frac{2 \cos a \times 2}{1 - \cos^2 a} = \frac{4 \cos a}{\sin^2 a} = \frac{4}{\sin a} \cdot \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{4 \cot a}{\sin a} \end{aligned}$$

ដូចនេះ  $\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a} - \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} = \frac{4 \cot a}{\sin a}$  ពិតមែន ។

**៣៩. ដោះស្រាយសមីការ :**  $5^{\log x} = 50 - x^{\log 5}$

ពិនិត្យ  $5^{\log x}$  បំពាក់លោការីតនេពែរ គេបាន

$$\ln 5^{\log x} = \log x \cdot \ln 5$$

ហើយ  $5^{\log x}$  បំពាក់លោការីតនេពែរ គេបាន

$$\ln x^{\log 5} = \log 5 \cdot \ln x$$

ឃើញថា  $\log x \cdot \ln 5 = \log 5 \cdot \ln x$

នាំឱ្យ  $5^{\log x} = x^{\log 5}$

ជំនួស  $x^{\log 5}$  ដោយ  $5^{\log x}$

យើងបានសមីការ  $5^{\log x} = 50 - 5^{\log x}$

$$2 \times 5^{\log x} = 50 \Leftrightarrow 5^{\log x} = 25$$

$$5^{\log x} = 25 \Leftrightarrow 5^{\log x} = 5^2$$

ទាញបាន  $\log x = 2 \Rightarrow x = 10^2 = 100$  ។

ដូចនេះ សមីការមានឫសគឺ  $x = 100$  ។

**៤០. គណនាប្រូបាបដែលបោះបានលេខសេស ឬ លេខធំជាង 5**

- គ្រាប់ឡកឡាក់មានមុខ 6 នាំឱ្យចំនួនករណីអាចស្មើ 6

- លេខសេសរួមមាន : 1, 3, 5 មាន 3 ករណី

នាំឱ្យប្រូបាបបោះបានលេខសេសគឺ  $P(\text{សេស}) = \frac{3}{6}$

- លេខធំជាង 5 គឺមានតែលេខ 6 មាន 1 ករណី

នាំឱ្យប្រូបាបបោះបានលេខធំជាង 5 គឺ  $P(\text{លេខធំជាង 5}) = \frac{1}{6}$

យើងបាន : ប្រូបាបដែលបោះបានលេខសេស ឬ លេខធំជាង 5

គឺ  $P(\text{សេស})$  ឬ  $P(\text{លេខធំជាង 5}) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

ដូចនេះ ប្រូបាបបោះបានលេខសេស ឬ លេខធំជាង 5 ស្មើនឹង  $\frac{2}{3}$  ។

**៤១. ដោះស្រាយសមីការ**

យើងមាន  $\sqrt{x + \sqrt{4x + \sqrt{16x + \dots + \sqrt{4^n x + 3}}} = \sqrt{x} + 1$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេ និងគណនាជាបន្តបន្ទាប់ យើងបាន :

នាំឱ្យយើងបាន :

ករណី  $y = x^5$  នោះ  $x \cdot x^5 = 64 \Leftrightarrow x^6 = 2^6 \Rightarrow x = 2$

នាំឱ្យ  $y = x^5 \Leftrightarrow y = 2^5 \Rightarrow y = 32$

ដូចនេះ

ប្រព័ន្ធសមីការមានគូដឆ្លើយពីរគឺ :  
 $(x = 32, y = 2)$  ឬ  $(x = 2, y = 32)$  ។

$b/ \begin{cases} 4^x \cdot 5^y = \frac{1}{400} & (*) \\ 5^x \cdot 6^y = \frac{1}{900} & (**) \end{cases}$

តាម (\*) :  $4^x \cdot 5^y = \frac{1}{400}$  (បំពាក់  $\ln$  លើអង្គទាំងពីរ)

$$\ln(4^x \cdot 5^y) = \ln\left(\frac{1}{400}\right)$$

$$\ln 4^x + \ln 5^y = \ln 1 - \ln 400$$

$$x \ln 4 + y \ln 5 = 0 - \ln 20^2$$

$$x \ln 4 + y \ln 5 = -2[\ln(4 \cdot 5)]$$

$$x \ln 4 + y \ln 5 = -2 \ln 4 - 2 \ln 5 \quad (i)$$

តាម (\*\*) :  $5^x \cdot 6^y = \frac{1}{900}$  (បំពាក់  $\ln$  លើអង្គទាំងពីរ)

$$\ln(5^x \cdot 6^y) = \ln\left(\frac{1}{900}\right)$$

$$\ln 5^x + \ln 6^y = \ln 1 - \ln 900$$

$$x \ln 5 + y \ln 6 = 0 - \ln 30^2$$

$$x \ln 5 + y \ln 6 = -2[\ln(5 \cdot 6)]$$

$$x \ln 5 + y \ln 6 = -2 \ln 5 - 2 \ln 6 \quad (ii)$$

តាម (i) និង (ii) យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases} x \ln 4 + y \ln 5 = -2 \ln 4 - 2 \ln 5 \\ x \ln 5 + y \ln 6 = -2 \ln 5 - 2 \ln 6 \end{cases}$$

ដោះស្រាយតាមដេទែមីណង :

$$D = \ln 4 \ln 6 - \ln^2 5$$

$$D_x = (-\ln 4 - 2 \ln 5) \ln 6 - (-2 \ln 5 - 2 \ln 6) \ln 5$$

$$= -2 \ln 4 \ln 6 - 2 \ln 5 \ln 6 + 2 \ln^2 5 + 2 \ln 5 \ln 6$$

$$= -2 \ln 4 \ln 6 + 2 \ln^2 5$$

$$= -2(\ln 4 \ln 6 - \ln^2 5)$$

$$D_y = \ln 4(-2 \ln 5 - 2 \ln 6) - \ln 5(-2 \ln 4 - 2 \ln 5)$$

$$= -2 \ln 4 \ln 5 - 2 \ln 4 \ln 6 + 2 \ln 5 \ln 4 + 2 \ln^2 5$$

$$= -2 \ln 4 \ln 6 + 2 \ln^2 5$$

$$= -2(\ln 4 \ln 6 - \ln^2 5)$$

នាំឱ្យ  $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2(\ln 4 \ln 6 - \ln^2 5)}{(\ln 4 \ln 6 - \ln^2 5)} = -2 \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2(\ln 4 \ln 6 - \ln^2 5)}{(\ln 4 \ln 6 - \ln^2 5)} = -2 \end{cases}$

ដូចនេះ

ប្រព័ន្ធសមីការមានគូដឆ្លើយពីរគឺ :  
 $x = -2, y = -2$  ។

#### ៤៤. បង្ហាញថា

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\dots(1+a_n) \geq 2^n$$

ដោយ  $a$  ជាចំនួនវិជ្ជមាន នោះយើងបាន :

$$\begin{cases} 1+a_1 \geq 2\sqrt{a_1} \\ 1+a_2 \geq 2\sqrt{a_2} \\ 1+a_3 \geq 2\sqrt{a_3} \\ \dots\dots\dots \\ 1+a_n \geq 2\sqrt{a_n} \end{cases} \times$$

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\dots(1+a_n) \geq 2^n \sqrt{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$$

សម្មតិកម្ម ផលគុណ  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \times \dots \times a_n = 1$

នោះយើងបាន  $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\dots(1+a_n) \geq 2^n$

ដូចនេះ  $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\dots(1+a_n) \geq 2^n$  ។

#### ៤៥. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$a/ \begin{cases} 7x^3 - 3x^2y - 21xy^2 + 26y^3 = 342 \\ 9x^3 - 21x^2y + 33xy^2 - 28y^3 = 344 \end{cases}$

ដោយបូកអង្គនឹងអង្គ យើងបាន :

$$\begin{aligned} &+ \begin{cases} 7x^3 - 3x^2y - 21xy^2 + 26y^3 = 342 \\ 9x^3 - 21x^2y + 33xy^2 - 28y^3 = 344 \end{cases} \\ \hline &16x^3 - 24x^2y + 12xy^2 - 2y^3 = 686 \\ &8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 = 343 \\ &(2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot y + 3 \cdot (2x) \cdot y^2 - y^3 = 7^3 \\ &\quad\quad\quad (2x-y)^3 = 7^3 \\ &\quad\quad\quad 2x-y = 7 \quad (i) \end{aligned}$$

ដោយដកអង្គនឹងអង្គ យើងបាន :

$$\begin{array}{r} 7x^3 - 3x^2y - 21xy^2 + 26y^3 = 342 \\ - \quad 9x^3 - 21x^2y + 33xy^2 - 28y^3 = 344 \\ \hline -2x^3 + 18x^2y - 54xy^2 + 54y^3 = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3 = 1 \\ x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot (3y) + 3 \cdot x \cdot (3y)^2 - (3y)^3 = 1 \\ (x - 3y)^3 = 1^3 \end{array}$$

$$x - 3y = 1 \quad (ii)$$

តាមរយៈ (i) និង (ii) យើងបានប្រព័ន្ធសមីការថ្មី៖

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \text{ សមមូល } \begin{cases} 2x - y = 7 \\ -2x + 6y = -2 \end{cases}$$

$$\text{នាំឱ្យ } x = 1 + 3y = 1 + 3 = 4 \quad 5y = 5 \Rightarrow y = 1$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយ  $x = 4 \wedge y = 1$  ។

$$b/ \begin{cases} 4^x \cdot 3^{y+1} + 27^y = 171 \\ 8^x + 2^x \cdot 3^{1+2y} = 172 \end{cases} \text{ យើងអាចសរសេរជា}$$

$$\begin{cases} (2^x)^2 \cdot 3 \cdot 3^y + (3^y)^3 = 171 \\ (2^x)^3 + 2^x \cdot 3 \cdot (3^y)^2 = 172 \end{cases} \text{ រៀបឱ្យតាមលំដាប់}$$

ដោយបូកអង្គនឹងអង្គ :

$$\begin{array}{r} 3 \cdot (2^x)^2 \cdot 3^y + (3^y)^3 = 171 \\ + \quad (2^x)^3 + 3 \cdot 2^x \cdot (3^y)^2 = 172 \\ \hline (2^x)^3 + 3 \cdot (2^x)^2 \cdot 3^y + 3 \cdot 2^x \cdot (3^y)^2 + (3^y)^3 = 343 \\ (2^x + 3^y)^3 = 7^3 \\ 2^x + 3^y = 7 \quad (i) \end{array}$$

ដោយដកអង្គនឹងអង្គ :

$$\begin{array}{r} 3 \cdot (2^x)^2 \cdot 3^y + (3^y)^3 = 171 \\ - \quad (2^x)^3 + 3 \cdot 2^x \cdot (3^y)^2 = 172 \\ \hline (3^y)^3 - 3 \cdot 2^x \cdot (3^y)^2 + 3 \cdot (2^x)^2 \cdot 3^y - (2^x)^3 = -1 \\ (3^y - 2^x)^3 = (-1)^3 \\ 3^y - 2^x = -1 \quad (ii) \end{array}$$

ដោយយក (i)+(ii) យើងបាន :

$$\begin{array}{r} 2^x + 3^y = 7 \\ + \quad 3^y - 2^x = -1 \\ \hline 2 \cdot 3^y = 2 \cdot 3 \\ 3^y = 3 \Rightarrow y = 1 \end{array}$$

ចំពោះ  $y = 1$  នោះ  $2^x + 3^y = 7$

$$2^x = 7 - 3$$

$$2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយ  $x = 2$  និង  $y = 1$  ។

### ៤៦. រកចំនួនមានលេខប្រាំខ្ទង់នោះ

-ចំនួនតាមខ្ទង់នីមួយៗត្រូវតែ ធំជាង 0 (ព្រោះខ្ទង់ដើមគឺ  $x$  បើ

$x = 0$  វាពុំមែនជាលេខប្រាំខ្ទង់ទេ វាគឺជាលេខបួនខ្ទង់) និងតូចជាង ១០

ស្មើ 9 (ព្រោះ បើធំជាង៩ វាជាលេខច្រើនខ្ទង់ នាំឱ្យចំនួនខ្ទង់លើសពី៩) ។

យើងមានចំនួន :  $x, x+1, x+2, 3x, x+3$  នាំឱ្យ

$$\begin{cases} 0 < x \leq 9 \\ 0 < x+1 \leq 9 \\ 0 < x+2 \leq 9 \\ 0 < 3x \leq 9 \\ 0 < x+3 \leq 9 \end{cases} \text{ សមមូល } \begin{cases} 0 < x \leq 9 \\ 0 < x \leq 8 \\ 0 < x \leq 7 \\ 0 < x \leq 3 \\ 0 < x \leq 6 \end{cases}$$

តាមរយៈលក្ខខណ្ឌទាំង៥ខាងលើ លក្ខខណ្ឌរួមគឺ  $0 < x \leq 3$

មានន័យថា :  $x = \{1, 2, 3\}$

ចំពោះ  $x = 1$  ចំនួននោះគឺ 12334 មិនយក (ព្រោះមិនជាការប្រកាស)

ចំពោះ  $x = 2$  ចំនួននោះគឺ 23465 មិនយក (ព្រោះមិនជាការប្រកាស)

ចំពោះ  $x = 3$  ចំនួននោះគឺ  $34596 = 186^2$  (ជាការប្រកាស)

ដូចនេះ ចំនួនមានលេខប្រាំខ្ទង់នោះគឺ 34596 ។

### ៤៧. គណនាផលបូក $S$ : យើងមាន

$$S = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}$$

ពិនិត្យ រួចបូកអង្គនឹងអង្គ នៃកន្សោមខាងក្រោម

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$$

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{4}-\sqrt{3})(\sqrt{4}+\sqrt{3})=1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} = \sqrt{4}-\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{2025}-\sqrt{2024})(\sqrt{2025}+\sqrt{2024})=1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2024}} = \sqrt{2025}-\sqrt{2024}$$

$$S = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}} = \sqrt{2025} - 1 = 45 - 1 = 44$$

ដូចនេះ ផលបូកគណនាបាន  $S = 44$  ។

**៤៨. ស្រាយបញ្ជាក់ថា :  $f(n)=3^{2n}+7$  ចែកដាច់នឹង 8**

យើងមាន  $f(n)=3^{2n}+7$

ចំពោះ  $n=0: f(0)=3^0+7=1+7=8$  ចែកដាច់នឹង 8

$n=1: f(1)=3^2+7=9+7=16$  ចែកដាច់នឹង 8

.....

ឧបមាថា វាពិតដល់  $n=k: f(k)=3^{2k}+7$  ចែកដាច់នឹង 8

យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថា  $n=k+1$  ក៏ចែកដាច់នឹង 8 ដែរ

ចំពោះ  $n=k+1: f(k+1)=3^{2(k+1)}+7$

$$=3^{2k+2}+7$$

$$=9 \cdot 3^{2k}+7$$

$$=8 \cdot 3^{2k}+(3^{2k}+7)$$

ដោយ  $8 \cdot 3^{2k}$  ចែកដាច់នឹង 8 (ព្រោះ  $8 \cdot 3^{2k}$  ជាពហុគុណនៃ 8)

និង  $3^{2k}+7$  ចែកដាច់នឹង 8 (ឧបមាថាពិត ខាងលើ)

នាំឱ្យ  $f(k+1)=8 \cdot 3^{2k}+(3^{2k}+7)$  ចែកដាច់នឹង 8

ដូចនេះ  $f(n)=3^{2n}+7$  ចែកដាច់នឹង 8 គ្រប់  $n$  ជាចំនួនគត់ ។

**យើងអាចបកស្រាយតាមវិធីម្យ៉ាងទៀត**

$9 \equiv 1 [8]$  (មានន័យថា 9 ចែកដាច់នឹង 8 ឱ្យសំណល់ 1)

$9^n \equiv 1^n [8]$  (អាចលើកជាស្វ័យគុណបាន គ្រប់  $n$  ជាចំនួនគត់)

$3^{2n} \equiv 1 [8]$  (ព្រោះ  $9=3^2$  ហើយ  $1^n=1$ )

$3^{2n}+7 \equiv 1+7 [8]$  សមមូល  $3^{2n}+7 \equiv 8 [8]$

តែ  $8 \equiv 0 [8]$  នាំឱ្យ  $3^{2n}+7 \equiv 0 [8]$  ដែរ

ដូចនេះ  $f(n)=3^{2n}+7$  ចែកដាច់នឹង 8 គ្រប់  $n$  ជាចំនួនគត់ ។

**៤៩. គណនា  $g(3)$  :**

យើងមាន  $f(x)=2x+1$

ឱ្យ  $f(x)=3$  សមមូល  $2x+1=3 \Rightarrow x=1$

ហើយមាន  $g[f(x)]=x^2+3x+1$

នាំឱ្យ  $g(3)=1^2+3 \cdot 1+1$  (ព្រោះ  $f(x)=3$  និង  $x=1$ )

$$g(3)=5$$

ដូចនេះ ក្រោយពីគណនា  $g(3)=5$  ។

**៥០. ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$  ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន**

តាង  $A=\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$

$$\begin{aligned} \text{យើងបាន } A &= \frac{2n+3n^2+n^3}{6} \\ &= \frac{n(2+3n+n^2)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

បើ  $A$  ជាចំនួនគត់ លុះត្រាតែ  $n(n+1)(n+2)$  ចែកដាច់នឹង 6

មានន័យថា  $n(n+1)(n+2)$  ចែកដាច់នឹង 2 ផង និង 3 ផង

-បើ  $n$  ជាចំនួនគត់ នោះ  $n, (n+1), (n+2)$  ជាបីចំនួនគត់តាម

-បីចំនួនគត់តាមរយៈហេតុអ្វី ក៏មានចំនួនគត់មួយដែរ

នាំឱ្យ  $n(n+1)(n+2)$  ចែកដាច់នឹង 2

-បីចំនួនគត់តាមរយៈហេតុអ្វី ក៏មានចំនួនមួយជាពហុគុណ

នៃ 3 ដែរ នាំឱ្យ  $n(n+1)(n+2)$  ចែកដាច់នឹង 2

នោះយើងបាន  $n(n+1)(n+2)$  ចែកដាច់នឹង 6

ដូចនេះ គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន  $n$  នោះ  $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$  ក៏ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែរ ។

**៥១. គណនា  $S=\frac{1}{1 \cdot 2}+\frac{1}{2 \cdot 3}+\frac{1}{3 \cdot 4}+\dots+\frac{1}{2010 \cdot 2011}$**

ពិនិត្យ :  $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$

តាមលំនាំខាងលើគេអាចបំបែកបាន ដូចខាងក្រោម :

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2 \cdot 3} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3 \cdot 4} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{2010 \cdot 2011} &= \frac{1}{2010} - \frac{1}{2011} \end{aligned} \right\} \text{បូកអង្គនឹងអង្គ} \\ \hline \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2010 \cdot 2011} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2011} \end{aligned}$$

$$\text{ឬ } \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2010 \cdot 2011} = \frac{2010}{2011}$$

ដូចនេះ  $\boxed{\text{ក្រោយពីគណនាផលបូក } S = \frac{2010}{2011} \quad \text{។}}$

**៥២. គណនា**  $x^{2011} + \frac{1}{x^{2011}}$

យើងមាន  $x^2 + x + 1 = 0$  ទាញបាន  $x + \frac{1}{x} = -1$  នោះ

$$\begin{aligned} \bullet \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) &= (-1)(-1) \Leftrightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = -1 \\ \bullet \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) &= (-1)(-1) \Leftrightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 2 \\ \bullet \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) &= (-1) \cdot 2 \Leftrightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} + x^2 + \frac{1}{x^2} = -2 \Leftrightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = -1 \\ \bullet \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) &= (-1)(-1) \Leftrightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} + x^3 + \frac{1}{x^3} = 1 \Leftrightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = -1 \\ \bullet \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^5 + \frac{1}{x^5}\right) &= (-1)(-1) \Leftrightarrow x^6 + \frac{1}{x^6} + x^4 + \frac{1}{x^4} = 1 \Leftrightarrow x^6 + \frac{1}{x^6} = 2 \end{aligned}$$

តាមលំនាំនេះ យើងអាចទាញបានតួទូទៅគឺ :

$$\bullet x^n + \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -1 & \text{បើ } n \neq 3k \\ 2 & \text{បើ } n = 3k \end{cases} \quad \text{ដែល } k \text{ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ}$$

ដោយ  $2011 = 3 \cdot 670 + 1$  មានទម្រង់ខុសពី  $3k$

នាំឱ្យ  $x^{2011} + \frac{1}{x^{2011}} = -1$

ដូចនេះ  $\boxed{\text{ក្រោយពីគណនា ឃើញថា } x^{2011} + \frac{1}{x^{2011}} = -1 \quad \text{។}}$

**៥៣. រកចំនួន  $\overline{abcd}$  នោះ**

តាមបម្រាប់ប្រធាន ចំនួន  $\overline{abcd}$  ជាការប្រាកដ

យើងបាន  $\overline{abcd} = n^2$  ដែល  $n$  ជាចំនួនគត់

យើងសរសេរបាន  $\overline{ab00} + \overline{cd} = n^2$

នោះទាញបាន  $100\overline{ab} + \overline{cd} = n^2 \quad (1)$

បម្រាប់បន្ថែម  $\overline{ab} - \overline{cd} = 1$  ឬ  $\overline{ab} = 1 + \overline{cd} \quad (2)$

យក (2) ជំនួសក្នុង (1) :

$$100(1 + \overline{cd}) + \overline{cd} = n^2$$

$$100 + 100\overline{cd} + \overline{cd} = n^2$$

$$101\overline{cd} = n^2 - 100$$

$$\overline{cd} = \frac{(n-10)(n+10)}{101}$$

-យល់ថា :  $\overline{cd}$  ជាចំនួនគត់ នោះត្រូវតែមានកត្តាមួយ ក្នុងចំណោមកត្តា  $(n-10)$  និង  $(n+10)$  ដែលត្រូវតែចែកដាច់នឹង 101 ព្រោះ 101 ជាចំនួនបឋម ។ នោះយើងទាញបាន :

$$n-10=101 \text{ ឬ } n+10=101$$

នាំឱ្យ  $n=111$  ឬ  $n=91$

-ចំពោះ  $n=111$  មិនយក ព្រោះ  $n^2$  ជាលេខ៤ខ្ទង់ នោះ  $n < 100$

-ចំពោះ  $n=91$  នោះ  $n^2 = 8281$  យក

ដូចនេះ  $\boxed{\text{ចំនួននោះគឺ } \overline{abcd} = n^2 = 8281 \quad \text{។}}$

**៥៤. បង្ហាញថា**  $n! > 3^n$  **ចំពោះ**  $n \geq 7$

យើងមាន  $n! > 3^n$

-ចំពោះ  $n=7$  នោះ  $7! = 5040 > 3^7 = 2187$  : ពិត

-ចំពោះ  $n=8$  នោះ  $8! = 40320 > 3^8 = 6561$  : ពិត

-ឧបមាថាវាពិតរហូតដល់  $n=k$  នោះ  $k! > 3^k$  : ពិត

-យើងនឹងស្រាយបញ្ជាក់ថា វានៅតែពិតចំពោះ  $n=k+1$

យើងបាន  $(k+1)! > 3^{k+1}$

$$(k+1) \cdot k! > 3 \cdot 3^k$$

ដោយ  $k! > 3^k$  ហើយ  $(k+1) > 3$

នោះយើងបាន  $(k+1) \cdot k! > 3 \cdot 3^k$  គឺជាការពិត

ដូចនេះ  $\boxed{\text{ឃើញថា } n! > 3^n \text{ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន } n \geq 7 \quad \text{។}}$

-ព្រោះបើ  $k! > 3^k$  និង  $(k+1) > 3$  នាំឱ្យ  $(k+1)k! > 3 \cdot 3^k$

ឬ  $(k+1)! > 3^{k+1}$  ។

**៥៥. បង្ហាញឱ្យឃើញថា**  $f$  **ជាអនុគមន៍ខួប**

អនុគមន៍  $f$  មានដែនកំណត់  $D = [0, +\infty)$

ចំពោះ គ្រប់  $x \in D$  នោះ  $x+2a \in D$  ព្រោះ  $a > 0$

យើងមាន :  $f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}$

នាំឱ្យ  $f(x+2a) = f((x+a)+a)$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - f(x+a)^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}\right) - \left(\frac{1}{4} + \sqrt{f(x) - f(x)^2} + f(x) - f(x)^2\right)} \\
 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2} - \frac{1}{4} - \sqrt{f(x) - f(x)^2} - f(x) + f(x)^2} \\
 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f(x)^2} \\
 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{2} + f(x) - \frac{1}{2} \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

ព្រោះ  $f(x) \geq \frac{1}{2}$  ចំពោះ  $x \geq 0$

យើងបាន  $f(x+2a) = f(x)$  ចំពោះ គ្រប់  $x \in [0, +\infty)$

ដូចនេះ អនុគមន៍  $f$  ជាអនុគមន៍ខួបនៅលើ  $[0, +\infty)$  ។

**៥៦. បង្ហាញឱ្យឃើញថា**  $0! = 1$

យើងមាន :  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$

វាពិតចំពោះ  $n$  ជាចំនួនគតិវិជ្ជមាន

មានន័យថា  $n = \{1, 2, 3, \dots\}$

យើងអាចសរសេរបានដូចម្តងខាងក្រោម :

$$n! = n \times (n-1)!$$

ព្រោះដោយសារ  $(n-1)! = (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$

$$\text{យើងទាញបាន } (n-1)! = \frac{n!}{n}$$

គណនាតម្លៃជាលេខ ចំពោះ  $n = 1$

$$\text{នាំឱ្យ } (1-1)! = \frac{1!}{1} \Leftrightarrow 0! = \frac{1}{1} = 1$$

ដូចនេះ ឃើញថា  $0! = 1$  ពិតប្រាកដមែន ។

ព្រោះ  $1! = 1$

**៥៧. បង្ហាញថា**  $F = \frac{21n+4}{14n+3}$  **ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន**

តាង  $d$  ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ  $21n+4$  និង  $14n+3$

យើងបាន  $21n+4 = ad$  ដែល  $a$  ជាចំនួនគតិវិជ្ជមាន

$14n+3 = bd$  ដែល  $b$  ជាចំនួនគតិវិជ្ជមាន

$$\begin{aligned}
 \text{ចងជាប្រព័ន្ធ} \quad &\begin{cases} 21n+4 = ad & (\times 2) \\ 14n+3 = bd & (\times 3) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} 42n+8 = 2ad & (i) \\ 42n+9 = 3bd & (ii) \end{cases}
 \end{aligned}$$

ដោយយក  $(ii) - (i)$  យើងបាន :

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} 42n+9 = 3bd \\ 42n+8 = 2ad \end{cases} \\
 &\hline
 &1 = (3b-2a)d
 \end{aligned}$$

ដោយ  $a$  និង  $b$  ជាចំនួនគត់ នោះ  $3b-2a$  ក៏ជាចំនួនគត់ដែរ

ហើយ  $d$  ជាតួចែករួមធំបំផុត ត្រូវតែជាចំនួនគត់

-យល់ថា : ផលគុណពីរចំនួនគត់ស្មើ 1 មានតែមួយករណីគត់

គឺចំនួនគត់នីមួយៗស្មើគ្នា ហើយស្មើនឹង 1 ។

ទាញបាន  $d = 1$

ដូចនេះ  $F = \frac{21n+4}{14n+3}$  ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន ។

**៥៨. រកចំនួនគត់ចម្បងជាតួចប់ផុត**

-តាមបម្រាប់ : យើងពុំដឹងចំនួនខ្ទង់ នៃចំនួននោះទេ

តែវាមានលេខ 6 នៅខ្ទង់ឯកតា (ខ្ទង់រាយ)

-យើងអាចតាងចំនួននោះដោយ :  $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n 6}$  ដែលទីនេះ

$0 \leq a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \leq 9$  និង  $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$  ជាចំនួនគត់

-យើងបានចំនួនថ្មី  $\overline{6 a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$

-តាមបម្រាប់យើងបានទំនាក់ទំនង :

$$\begin{aligned}
 4 \times \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n 6} &= \overline{6 a_1 a_2 a_3 \dots a_n} \\
 4(\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n 0} + 6) &= \overline{6000 \dots 0} + \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} \\
 4(\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} \times 10 + 6) &= 6 \times 10^n + \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}
 \end{aligned}$$

ដើម្បីឱ្យងាយស្រួលក្នុងការសរសេរ តាង  $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} = A$

យើងបាន :  $4(10A+6) = 6 \cdot 10^n + A$

$$40A+24 = 6 \cdot 10^n + A$$

$$39A = 6 \cdot 10^n - 24$$

$$A = \frac{2 \cdot 10^n - 8}{13} = \frac{2(10^n - 4)}{13}$$

-ដោយ  $A$  ជាចំនួនគត់ ហើយ 2 ចែកមិនដាច់នឹង 13 នោះ

មានតែ  $10^n - 4$  ចែកដាច់នឹង 13

-យើងនឹងឱ្យតម្លៃ  $n$  បន្តបន្ទាប់តូចបំផុតដើម្បីឱ្យ  $13|10^n - 4$   
(មានន័យថា 13 ជាតួចែកនៃ  $10^n - 4$ )

-ចំពោះ  $n = 1 : 10 - 4 = 6$  ចែកមិនដាច់នឹង 13

$n = 2 : 100 - 4 = 96$  ចែកមិនដាច់នឹង 13

$n = 3 : 1000 - 4 = 996$  ចែកមិនដាច់នឹង 13

$n = 4 : 10000 - 4 = 9996$  ចែកមិនដាច់នឹង 13

$n = 5 : 100000 - 4 = 99996$  ចែកដាច់នឹង 13

.....

-ចំពោះ  $n = 5$  យើងបាន  $A = \frac{2(10^5 - 4)}{13} = 15384$

ដូចនេះ ចំនួននោះគឺ 153846 ។

### ៥៩. តើបុរសណា ជាគូនឹងនារីណា ?

-ឃើញថាមានបុរសបីនាក់ចូលស្តីដណ្តឹងនារីបីនាក់ ។ បុរសដែលចូលស្តីដណ្តឹងដំបូង មានជម្រើសបី បុរសចូលស្តីបន្ទាប់មានជម្រើសពីរ និងបុរសចុងក្រោយមានជម្រើសតែមួយគត់  
-តាមគោលការណ៍ផលគុណ : ចំនួនជម្រើសទាំងអស់គឺ

$3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$  ជម្រើស ដែលជម្រើសទាំងនោះរួមមាន:

- 1) A ជាគូនឹង1 .B ជាគូនឹង2 .C ជាគូនឹង3 (ខុសលក្ខខណ្ឌ គ)
- 2) A ជាគូនឹង1 .B ជាគូនឹង3 .C ជាគូនឹង2 (ខុសលក្ខខណ្ឌ ក)
- 3) A ជាគូនឹង2 .B ជាគូនឹង1 .C ជាគូនឹង3 (ខុសលក្ខខណ្ឌ គ)
- 4) A ជាគូនឹង2 .B ជាគូនឹង3 .C ជាគូនឹង1 (ខុសលក្ខខណ្ឌ គ)
- 5) A ជាគូនឹង3 .B ជាគូនឹង1 .C ជាគូនឹង2 (ខុសលក្ខខណ្ឌ ខ)
- 6) A ជាគូនឹង3 .B ជាគូនឹង2 .C ជាគូនឹង1

-ឃើញថាដើម្បីគោរពតាមលក្ខខណ្ឌមានតែមួយជម្រើសមួយគត់គឺ:

A ជាគូនឹង3 .B ជាគូនឹង2 .C ជាគូនឹង1

ដូចនេះ គូស្វាមីភរិយាថ្មី ដែលគោរពតាមលក្ខខណ្ឌគឺ :

បុរស A ជាគូនឹងនារី3 បុរស B ជាគូនឹងនារី2 បុរស C ជាគូនឹងនារី1 ។

### ៦០. រក 11 ចំនួននោះ ដែលមិនអវិជ្ជមាន

តាង 11 ចំនួននោះដោយ :  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{11} \geq 0$

តាមបម្រាប់ប្រធាន យើងបាន :

$$x_1 = (x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{11})^2 \quad (1)$$

$$x_2 = (x_1 + x_3 + x_4 + \dots + x_{11})^2 \quad (2)$$

$$x_3 = (x_1 + x_2 + x_4 + \dots + x_{11})^2 \quad (3)$$

.....

$$x_{11} = (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{10})^2 \quad (11)$$

-ដោយដកអង្គនិងអង្គនៃ (1) -(2) យើងបាន :

$$x_1 - x_2 = (x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{11})^2 - (x_1 + x_3 + x_4 + \dots + x_{11})^2$$

តាមរូបមន្ត  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  នោះ

$$x_1 - x_2 = [(x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{11}) - (x_1 + x_3 + x_4 + \dots + x_{11})] \times [(x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{11}) + (x_1 + x_3 + x_4 + \dots + x_{11})]$$

$$= (x_2 - x_1)(x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \dots + 2x_{11})^2$$

$$= -(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \dots + 2x_{11})^2$$

$$(x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \dots + 2x_{11})^2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)(1 + x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \dots + 2x_{11})^2 = 0$$

$$\text{នាំឱ្យ } (x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\text{ហើយ } (1 + x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \dots + 2x_{11})^2 \neq 0$$

ដោយយក (1) -(3) , (1) -(4) , ... , (1) -(11) តាម

លំនាំខាងលើនោះយើងបាន :  $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_{11}$

$$\text{នាំឱ្យ } x_1 = (x_1 + x_1 + x_1 + \dots + x_1)^2$$

$$x_1 = (10x_1)^2$$

$$x_1 = 100x_1^2$$

$$x_1(1 - 100x_1) = 0$$

$$\text{ទាញបាន } x_1 = 0 \quad , \quad 1 - 100x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{100}$$

ដូចនេះ ចំនួនទាំង 11 ដែលរកឃើញគឺ

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_{11} = 0 \quad \text{ឬ}$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_{11} = \frac{1}{100} \quad ។$$

**៦១. គណនា**  $A = (a-1)^{2010} + (b-1)^{2011} + (a-1)^{2012}$

គេឱ្យ  $a, b, c$  ផ្ទៀងផ្ទាត់  $\begin{cases} a+b+c=0 \\ ab+bc+ca=0 \end{cases}$

ចំពោះ  $a+b+c=0$

$$(a+b+c)^2 = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = 0$$

ដោយ  $ab+bc+ca=0$  នោះយើងបាន

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

-យល់ថា : ផលបូកការេនៃមួយចំនួនពិតស្មើ ០ មានន័យថា

ចំនួនពិតទាំងនោះមានតម្លៃស្មើៗគ្នា ហើយស្មើនឹង ០

-នាំឱ្យ  $a=b=c=0$

គេបាន :  $A = (a-1)^{2010} + (b-1)^{2011} + (a-1)^{2012}$

$$= (0-1)^{2010} + (0-1)^{2011} + (0-1)^{2012}$$

$$= 1 + (-1) + 1 = 1$$

ដូចនេះ ក្រោយពិតណាស់ឃើញថា  $A=1$  ។

**៦២. គណនា**

$$S = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2010^2} + \frac{1}{2011^2}}$$

ឃើញថា  $S$  ជាផលបូកមានតួទូទៅគឺ  $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$

ដែលមានចំនួនតួសរុប ២០១០ តួ

$$\text{គេអាចសរសេរជា } S = \sum_{n=1}^{2010} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$$

$$S = \sum_{n=1}^{2010} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{2010} \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 + n^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{2010} \sqrt{\frac{n^2(n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 2n + 1) + n^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{2010} \sqrt{\frac{n^4 + 2n^3 + n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{2010} \sqrt{\frac{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{2010} \sqrt{\frac{n^4 + n^3 + n^2 + n^3 + n^2 + n + n^2 + n + 1}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{2010} \sqrt{\frac{n^2(n^2 + n + 1) + n(n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 1)}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{2010} \sqrt{\frac{(n^2 + n + 1)^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{2010} \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{2010} \frac{n(n+1) + 1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{2010} \left[ 1 + \frac{1}{n(n+1)} \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{2010} 1 + \sum_{n=1}^{2010} \frac{1}{n(n+1)} = 2010 + \sum_{n=1}^{2010} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\text{យើងបាន } S = 2010 + \sum_{n=1}^{2010} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 2010 + \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2011} \right)$$

$$= 2011 - \frac{1}{2011} = \frac{2011^2 - 1^2}{2011}$$

$$= \frac{(2011-1)(2011+1)}{2011} = \frac{2010 \cdot 2012}{2011}$$

ដូចនេះ ក្រោយពិតណាស់ផលបូក  $S = \frac{2010 \cdot 2012}{2011}$  ។

\* មូលហេតុ  $\sum_{n=1}^{2010} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2011} \right)$  មើលលំហាត់ទី៥១ ។

**៦៣. ដោះស្រាយសមីការ :**

$$\text{ក. } x^{2010} + x^{2011} + x^{2012} + x^{2013} = 4$$

$$(x^{2010} - 1) + (x^{2011} - 1) + (x^{2012} - 1) + (x^{2013} - 1) = 0$$

តាមរូបមន្ត:  $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$

$$\bullet x^{2010} - 1 = (x-1)(x^{2009} + x^{2008} + \dots + x + 1)$$

$$\bullet x^{2011} - 1 = (x-1)(x^{2010} + x^{2009} + \dots + x + 1)$$

$$\bullet x^{2012} - 1 = (x-1)(x^{2011} + x^{2010} + \dots + x + 1)$$

$$\bullet x^{2013} - 1 = (x-1)(x^{2012} + x^{2011} + \dots + x + 1)$$

ដើម្បីឱ្យងាយសម្រួលក្នុងការសរសេរ យើងតាង

$$X = x^{2009} + x^{2008} + \dots + x + 1 \text{ នោះយើងបាន}$$

$$+ \begin{cases} x^{2010} - 1 = (x-1)X \\ x^{2011} - 1 = (x-1)(x^{2010} + X) \\ x^{2012} - 1 = (x-1)(x^{2011} + x^{2010} + X) \\ x^{2013} - 1 = (x-1)(x^{2012} + x^{2011} + x^{2010} + X) \end{cases}$$

$$(x^{2010}-1)+(x^{2011}-1)+(x^{2012}-1)+(x^{2013}-1)=$$

$$(x-1)(x^{2012}+2x^{2011}+3x^{2010}+4x)$$

$$\text{នាំឱ្យ } (x-1)(x^{2012}+2x^{2011}+3x^{2010}+4x)=0$$

$$\text{ទាញបាន : } \bullet x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$\bullet x^{2012}+2x^{2011}+3x^{2010}+4x \neq 0$$

ព្រោះ  $x$  ជាចំនួនគត់

ដូចនេះ សមីការមានឫស  $x=1$  ។

$$\text{ខ. } x^{2010}+x^{2011}+x^{2012}+x^{2013}=0$$

$$x^{2010}(1+x+x^2+x^3)=0$$

$$\text{ទាញបាន : } \bullet x^{2010}=0 \Rightarrow x=0$$

$$\bullet 1+x+x^2+x^3 \neq 0 \text{ (ព្រោះ } x \text{ ជាចំនួនគត់)}$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស  $x=0$  ។

**៦៤. ដោះស្រាយសមីការ :**  $\overline{2x9y} = 2^x \cdot 9^y$

-លក្ខខណ្ឌ  $0 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq 9$  និង  $x, y$  ជាចំនួនគត់

-ពិនិត្យ  $2^x$  ជាចំនួនគត់ នោះ  $2^x \cdot 9^y$  ជាចំនួនគត់ដែរ

នាំឱ្យ  $\overline{2x9y}$  ជាចំនួនគត់ មានន័យថា  $y$  ជាចំនួនគត់ ឬ 0 (1)

-ពិនិត្យ បើ  $y > 4$  នោះ  $9^4 = 6561 > \overline{2x9y}$  នាំឱ្យ

$y$  ជាចំនួនគត់តូចជាង៤ មានន័យថា  $y = \{0, 1, 2, 3\}$  (2)

-តាម (1) និង (2) ទាញបាន  $y = 0$  ឬ  $y = 2$

-ចំពោះ  $y = 0$  នោះ  $\overline{2x90} = 2^x \cdot 1 \Leftrightarrow \overline{2x90} = 2^x$

តែ  $2^x$  ជាចំនួនមិនមានលេខ 0 នៅខាងចុងជាដាច់ខាត

នាំឱ្យ  $\overline{2x90} = 2^x$  ជាករណីមិនពិត គ្រប់  $x$  ជាចំនួនគត់

-ចំពោះ  $y = 2$  នោះ  $\overline{2x92} = 2^x \cdot 9^2 \Leftrightarrow \overline{2x92} = 81 \cdot 2^x$

ដោយចំនួន  $81 \cdot 2^x$  ជាពហុគុណនៃ៩ នោះ  $\overline{2x92}$  ជាពហុគុណ

នៃ៩ ដែរ មានន័យថា  $\overline{2x92}$  ចែកដាច់នឹង៩ ។

-ហើយ  $\overline{2x92}$  ចែកដាច់នឹង៩ លុះត្រាតែផលបូកលេខតាមខ្ទង់

គឺ  $2+x+9+2=13+x=1+3+x=4+x$  ចែកដាច់នឹង៩

មានតែ ចំនួនគត់  $x=5$  តែមួយគត់ដែលនាំឱ្យ  $4+x$

ចែកដាច់នឹង៩ ( ព្រោះ  $0 \leq x \leq 9$  )

$$\text{-ផ្ទៀងផ្ទាត់ : } \overline{2x9y} = 2^x \cdot 9^y$$

$$2592 = 2^5 \cdot 9^2$$

$$2592 = 32 \cdot 81$$

$$2592 = 2592$$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ  $x=5, y=2$  ។

( កុំឃើញរឿងថាពិបាក គេគ្រាន់តែសម្រាយឱ្យយើងយល់ពី

មូលហេតុរបស់វាបានច្បាស់លាស់ប៉ុណ្ណោះ )

**៦៥. រកគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ**  $N = \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$

$$\text{យើងមាន } \frac{\overline{2a_1 a_2 a_3 \dots a_n 1}}{1a_1 a_2 a_3 \dots a_n 2} = \frac{21}{12} \text{ ដែល}$$

$N = \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$  មានចំនួន  $n$  តួ នាំឱ្យយើងបាន :

$$\bullet \overline{2a_1 a_2 a_3 \dots a_n 1} = 2 \cdot 10^{n+1} + 10(\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}) + 1$$

$$= 2 \cdot 10^{n+1} + 10N + 1$$

$$\bullet \overline{1a_1 a_2 a_3 \dots a_n 2} = 1 \cdot 10^{n+1} + 10(\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}) + 2$$

$$= 10^{n+1} + 10N + 2$$

$$\text{យើងបាន } \frac{2 \cdot 10^{n+1} + 10N + 1}{10^{n+1} + 10N + 2} = \frac{21}{12} \text{ នាំឱ្យ}$$

$$21(10^{n+1} + 10N + 2) = 12(2 \cdot 10^{n+1} + 10N + 1)$$

$$21 \cdot 10^{n+1} + 210N + 42 = 24 \cdot 10^{n+1} + 120N + 12$$

$$210N - 120N = 24 \cdot 10^{n+1} - 21 \cdot 10^{n+1} + 12 - 42$$

$$90N = 3 \cdot 10^{n+1} - 30$$

$$N = \frac{30 \cdot 10^n - 30}{90}$$

$$N = \frac{10^n - 1}{3}$$

$$\text{ពិនិត្យ } 10^n = \underbrace{100 \dots 000}_{n \text{ ដងលេខ } 0} \text{ នាំឱ្យ } 10^n - 1 = \underbrace{99 \dots 999}_{n \text{ ដងលេខ } 9}$$

$$\text{យើងបាន } N = \frac{10^n - 1}{3} = \frac{99 \dots 999}{3} = \underbrace{33 \dots 333}_{n \text{ ដងលេខ } 3}$$

នេះមានន័យថា  $N = \{ 3, 33, 333, 3333, \dots \}$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ : បើ  $N = 3$  ,  $\frac{231}{132} = \frac{21 \times 11}{12 \times 11} = \frac{21}{12}$  ពិត

ដូចនេះ គ្រប់ចំនួនគត់រកបានគឺ  $N = \underbrace{33...333}_n$  ដងលេខ 3 ។

**៦៦. គណនាផលបូក :**

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

ពិនិត្យ :  $\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2) - n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$

ទាញបាន  $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$

តាមលំនាំនេះ យើងអាចសរសេរបានដូចខាងក្រោម :

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right] \\ \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right] \\ \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} \right] \\ \dots \\ \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] \end{array} \right.$$

$$S = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$$

$$S = \frac{1}{2} \left[ \frac{n^2 + 3n + 2 - 2}{2(n^2 + 3n + 2)} \right]$$

$$S = \frac{n^2 + 3n}{4(n^2 + 3n + 2)}$$

ដូចនេះ ក្រោយពីគណនាឃើញថា  $S = \frac{n^2 + 3n}{4(n^2 + 3n + 2)}$  ។

**៦៧. សម្រួលកន្សោម :**  $(2 + \sqrt{3})^{2011} \cdot (2 - \sqrt{3})^{2012} + \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \text{តាង } E &= (2 + \sqrt{3})^{2011} \cdot (2 - \sqrt{3})^{2012} + \sqrt{3} \\ &= (2 + \sqrt{3})^{2011} \cdot (2 - \sqrt{3})^{2011} \cdot (2 - \sqrt{3}) + \sqrt{3} \\ &= [(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})]^{2011} \cdot (2 - \sqrt{3}) + \sqrt{3} \\ &= (4 - 3)^{2011} \cdot (2 - \sqrt{3}) + \sqrt{3} \\ &= 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ សម្រួលបាន  $(2 + \sqrt{3})^{2011} \cdot (2 - \sqrt{3})^{2011} + \sqrt{3} = 2$  ។

**៦៨. បង្ហាញថា :**  $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1} = \frac{8}{x^8-1}$

ពិនិត្យ :  $\left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1}$   
 $= \left( \frac{(x+1) - (x-1)}{(x-1)(x+1)} \right) - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1}$   
 $= \frac{2}{x^2-1} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1}$   
 $= \frac{2(x^2+1) - 2(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)} - \frac{4}{x^4+1}$   
 $= \frac{2x^2+2-2x^2+2}{x^4-1} - \frac{4}{x^4+1}$   
 $= \frac{4}{x^4-1} - \frac{4}{x^4+1} = \frac{4(x^4+1) - 4(x^4-1)}{(x^4-1)(x^4+1)}$   
 $= \frac{4x^4+4-4x^4+4}{x^8-1} = \frac{8}{x^8-1}$

ដូចនេះ  $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1} = \frac{8}{x^8-1}$  ។

**៦៩. គណនាផលបូក**  $S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}$

ពិនិត្យ :  $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)!}$   
 $= \frac{(n+1)}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$   
 $= \frac{(n+1)}{(n+1) \cdot n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

( ព្រោះ  $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$  ឧទា.  $5! = 5 \cdot 4!$  )

ឃើញថា គេអាចបំបែក  $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

យើងអាចបំបែកតួនីមួយៗ រួចបូកអង្គនិងអង្គ ដូចខាងក្រោម:

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \\ \frac{2}{3!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \\ \frac{3}{4!} = \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \\ \dots \\ \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \end{array} \right.$$


---


$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$S = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

ដូចនេះ 
$$S = 1 - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!} \quad \text{។}$$

**៧០. កំណត់លេខចុងនៃ**  $\Sigma = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2010^2 + 2011^2$   
(យល់ដឹង: គេសរសេរ  $[13^2] = 9$  មានន័យ លេខខាងចុងនៃ  $13^2 = 169$  មានលេខ 9 នៅខាងចុង ។)

ពិនិត្យ

$$[1^2] = [11^2] = [21^2] = \dots = [2001^2] = 1$$

$$[2^2] = [12^2] = [22^2] = \dots = [2002^2] = 4$$

$$[3^2] = [13^2] = [23^2] = \dots = [2003^2] = 9$$

$$[4^2] = [14^2] = [24^2] = \dots = [2004^2] = 6$$

$$[5^2] = [15^2] = [25^2] = \dots = [2005^2] = 5$$

$$[6^2] = [16^2] = [26^2] = \dots = [2006^2] = 6$$

$$[7^2] = [17^2] = [27^2] = \dots = [2007^2] = 9$$

$$[8^2] = [18^2] = [28^2] = \dots = [2008^2] = 4$$

$$[9^2] = [19^2] = [29^2] = \dots = [2009^2] = 1$$

$$[10^2] = [20^2] = [30^2] = \dots = [2010^2] = 0$$

ដោយផលបូកលេខចុងៗ នៃដប់ៗតួជាបន្តបន្ទាប់ស្មើគ្នា គឺ

$$1 + 4 + 9 + 6 + 5 + 6 + 9 + 4 + 1 + 0 = 45 \text{ ហើយ}$$

$$\Sigma = \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2010^2}_{\text{មាន } 201 \text{ នៃដប់ៗតួ}} + 2011^2$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } [\Sigma] &= [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2010^2] + [2011^2] \\ &= [201 \times 45] + [2011^2] \\ &= [5 + 1] = 6 \end{aligned}$$

ដូចនេះ 
$$\boxed{\text{លេខខាងចុងនៃ } \Sigma \text{ គឺ } [\Sigma] = 6} \quad \text{។}$$

**៧១. កំណត់លេខចុងនៃ**  $\Sigma = 1! + 2! + 3! + \dots + 2010! + 2011!$

(អ្នកគួរគិតថា មួយចំនួនដែលគុណនឹង 10 ឬ បានពីផលគុណនៃ 2 និង 5 សុទ្ធសឹងតែផ្តល់ ចំនួនដែលមានលេខ 0 ខាងចុង)

រូបមន្ត ហ្វាក់តូរ្យែល  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$

យើងបាន :

$$\begin{aligned} [1!] &= 1 & [2!] &= 2 & [3!] &= 6 & [4!] &= 4 & [5!] &= 0 \\ [6!] &= 0 & [7!] &= 0 & [8!] &= 0 & [9!] &= 0 & & \dots \end{aligned}$$

យើងពិនិត្យឃើញថា លេខខាងចុងនៃចំនួនទាំងឡាយ ដែល

ធំជាង 4 សុទ្ធតែជាលេខសូន្យដូចគ្នា ទាំងអស់ នាំឱ្យ :

$$\Sigma = 1! + 2! + 3! + \dots + 2010! + 2011!$$

$$\begin{aligned} [\Sigma] &= [1!] + [2!] + [3!] + \dots + [2010!] + [2011!] \\ &= [1 + 2 + 6 + 4 + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 + 0] \\ &= 3 \end{aligned}$$

ដូចនេះ 
$$\boxed{\text{លេខខាងចុងនៃ } \Sigma \text{ គឺ } [\Sigma] = 3} \quad \text{។}$$

**៧២. គណនាតម្លៃ**  $A = a^{2012} + ab^{2011}$

យើងមាន  $(a + \sqrt{a^2 + 1})(b + \sqrt{b^2 + 1}) = 1 \quad (*)$

-គុណ (\*) នឹង  $(a - \sqrt{a^2 + 1})$  នោះយើងបាន :

$$\begin{aligned} (a - \sqrt{a^2 + 1})(a + \sqrt{a^2 + 1})(b + \sqrt{b^2 + 1}) &= (a - \sqrt{a^2 + 1}) \\ (a^2 - a^2 - 1)(b + \sqrt{b^2 + 1}) &= (a - \sqrt{a^2 + 1}) \\ -b - \sqrt{b^2 + 1} &= a - \sqrt{a^2 + 1} \quad (1) \end{aligned}$$

-គុណ (\*) នឹង  $(b - \sqrt{b^2 + 1})$  វិញម្តង នោះយើងបាន :

$$\begin{aligned} (a + \sqrt{a^2 + 1})(b + \sqrt{b^2 + 1})(b - \sqrt{b^2 + 1}) &= (b - \sqrt{b^2 + 1}) \\ (a + \sqrt{a^2 + 1})(b^2 - b^2 - 1) &= (b - \sqrt{b^2 + 1}) \\ -a - \sqrt{a^2 + 1} &= b - \sqrt{b^2 + 1} \quad (2) \end{aligned}$$

-តាម (1) និង (2) ចងជាប្រព័ន្ធ បូកអង្គ និងសម្រួល

$$\begin{aligned} \text{យើងបាន : } &+ \begin{cases} -b - \sqrt{b^2 + 1} = a - \sqrt{a^2 + 1} \\ -a - \sqrt{a^2 + 1} = b - \sqrt{b^2 + 1} \end{cases} \\ &-a - b = a + b \\ &-2a = 2b \\ &a = -b \end{aligned}$$

-នាំឱ្យ  $A = a^{2012} + ab^{2011}$

$$= a^{2012} + a(-a)^{2011} = a^{2012} + a(-a)^{2011}$$

$$= a^{2012} + a \cdot (-1)^{2011} \cdot a^{2011} = a^{2012} + (-1) \cdot a^{2012}$$

$$= a^{2012} - a^{2012} = 0$$

ដូចនេះ 
$$\boxed{\text{ក្រោយពីគណនា បានផលមក } A = 0} \quad \text{។}$$

**៧៣. ដោះស្រាយសមីការ :**

យើងមាន  $2011^{\log_{2012} x} + x^{\log_{2012} 2011} = 4022$

-តាង  $A = 2011^{\log_{2012} x}$

នាំឱ្យ  $\log_{2012} A = \log_{2012} 2011^{\log_{2012} x}$   
 $\log_{2012} A = \log_{2012} x \cdot \log_{2012} 2011$  (i)

-តាង  $B = x^{\log_{2012} 2011}$

នាំឱ្យ  $\log_{2012} B = \log_{2012} x^{\log_{2012} 2011}$   
 $\log_{2012} B = \log_{2012} 2011 \cdot \log_{2012} x$  (ii)

ដោយផ្ទៀងផ្ទាត់ (i) និង (ii)

យើងបាន  $\log_{2012} A = \log_{2012} B$  សមមូល  $A = B$

-សមីការទៅជា  $2011^{\log_{2012} x} + 2011^{\log_{2012} x} = 4022$   
 $2 \cdot 2011^{\log_{2012} x} = 2 \cdot 2011$   
 $2011^{\log_{2012} x} = 2011^1$   
 $\log_{2012} x = 1$   
 $x = 2012$

ដូចនេះ ក្រោយពីដោះស្រាយសមីការមានឫស  $x = 2012$  ។

**៧៤. ស្រាយថា  $a^5 + b^5 = (a^3 + b^3)(a^2 + b^2) - (a + b)$**

ពិនិត្យ  $(a^3 + b^3)(a^2 + b^2) - (a + b)$   
 $= (a^5 + a^3b^2 + a^2b^3 + b^5) - (a + b)$   
 $= a^5 + b^5 + a^2b^2(a + b) - (a + b)$   
 $= a^5 + b^5 + (a + b)(a^2b^2 - 1)$

ដោយសម្មតិកម្ម គេឱ្យ  $ab = 1$  នោះ  $a^2b^2 = 1$

យើងបាន  $(a^3 + b^3)(a^2 + b^2) - (a + b)$   
 $= a^5 + b^5 + (a + b)(1 - 1)$   
 $= a^5 + b^5 + 0 = a^5 + b^5$

ដូចនេះ ឃើញថា  $a^5 + b^5 = (a^3 + b^3)(a^2 + b^2) - (a + b)$  ។

**៧៥. គណនាកន្សោម :  $A = x^{2010} + y^{2011} + x^{2012}$**

យើងមាន  $\begin{cases} x^2 + 2y + 1 = 0 \\ y^2 + 2z + 1 = 0 \\ z^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$  (បូកអង្គនិងអង្គ)  
 $\hline x^2 + 2y + 1 + y^2 + 2z + 1 + z^2 + 2x + 1 = 0$

ឬ  $(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) + (z^2 + 2z + 1) = 0$   
 $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 0$

ដោយ  $(x + 1)^2 \geq 0$  ,  $(y + 1)^2 \geq 0$  ,  $(z + 1)^2 \geq 0$

មានតែមួយករណីគត់ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការខាងលើគឺ  
 តម្លៃនៃកត្តានីមួយៗស្មើ ០

យើងបាន:  $\begin{cases} (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ (y + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \\ (z + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow z + 1 = 0 \Rightarrow z = -1 \end{cases}$

នាំឱ្យ  $A = x^{2010} + y^{2011} + x^{2012}$   
 $= (-1)^{2010} + (-1)^{2011} + (-1)^{2012}$   
 $= 1 + (-1) + 1 = 1$

ដូចនេះ ក្រោយពីគណនាឃើញថា  $A = 1$  ។

**៧៦. បង្ហាញថា  $\frac{ad + bc}{2ab} = \frac{2cd}{ad + bc}$**

យើងមាន  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  នាំឱ្យ  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  យើងបាន :

$\frac{a}{c} = \frac{ad}{cd} = \frac{ab}{cb}$  (1) ហើយ  $\frac{b}{d} = \frac{bc}{dc} = \frac{ab}{ad}$  (2)

នាំឱ្យ  $\frac{ad}{cd} = \frac{bc}{dc} = \frac{ad + bc}{cd + dc} = \frac{ad + bc}{2cd}$  (i)  
 $\frac{ab}{cb} = \frac{ab}{ad} = \frac{ab + ab}{cb + ad} = \frac{2ab}{cb + ad}$  (ii)

តាម (1) នោះ (i) = (ii) យើងបាន :

$\frac{ad + bc}{2cd} = \frac{2ab}{cb + ad}$  នាំឱ្យ  $\frac{ad + bc}{2ab} = \frac{2cd}{cb + ad}$

ដូចនេះ ឃើញថា  $\frac{ad + bc}{2ab} = \frac{2cd}{ad + bc}$  ។

**៧៧. សម្រួលកន្សោម**

$A = \left( \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{2} \right) \left( \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{2} \right) \left( \frac{a^2 + b^2}{2011ab} \right)^{-1}$   
 $= \left[ \left( \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 - \sqrt{2}^2 \right] \left( \frac{a^2 + b^2}{2011ab} \right)^{-1}$   
 $= \left[ \left( \sqrt{\frac{a}{b}} \right)^2 + 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} + \left( \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 - 2 \right] \left( \frac{a^2 + b^2}{2011ab} \right)^{-1}$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{a}{b} + 2\sqrt{\frac{ab}{ba}} + \frac{b}{a} - 2 \right) \left( \frac{a^2 + b^2}{2011ab} \right)^{-1} \\
 &= \left( \frac{a}{b} + 2 + \frac{b}{a} - 2 \right) \left( \frac{2011ab}{a^2 + b^2} \right) \\
 &= \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \left( \frac{2011ab}{a^2 + b^2} \right) \\
 &= \left( \frac{a^2 + b^2}{ab} \right) \left( \frac{2011ab}{a^2 + b^2} \right) = 2011
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ ក្រោយពីសម្រួល  $A = 2011$  ។

**៧៨. គណនា**  $P = xy + yz + zx$

យើងមាន  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = m$

ទាញបាន  $x = am$  ,  $y = bm$  ,  $z = cm$

នាំឱ្យ  $P = xy + yz + zx$   
 $= (am)(bm) + (bm)(cm) + (cm)(am)$   
 $= abm^2 + bcm^2 + cam^2$   
 $= (ab + bc + ca)m^2$

យើងមាន  $a + b + c = 1$   
 $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 1$

តែសម្មតិកម្មបន្ថែមពី  $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 1$   
 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

នាំឱ្យ  $1 + 2(ab + bc + ca) = 1$   
 $2(ab + bc + ca) = 0$   
 $ab + bc + ca = 0$

យើងបាន  $P = (ab + bc + ca)m^2$   
 $= 0 \cdot m^2 = 0$

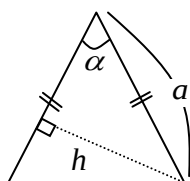
ដូចនេះ ឃើញថា  $P = xy + yz + zx = 0$  ។

**៧៩. គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណនេះ ជាអនុគមន៍នៃ  $\alpha$  និង  $a$**

យើងមាន ត្រីកោណសមបាទ

ដោយធ្វើចំណោលកែងពីមុំពុំមែន  $\alpha$

នោះយើងបានរូបដូចខាងស្តាំ



ក្នុងត្រីកោណកែងធំមាន  $\sin \alpha = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \sin \alpha$

ក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ = (បាត x កម្ពស់) / 2

នាំឱ្យ  $S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot a \sin \alpha = \frac{1}{2}a^2 \sin \alpha$

ដូចនេះ ផ្ទៃត្រីកោណសមបាទនេះគឺ  $S = \frac{1}{2}a^2 \sin \alpha$  ។

**៨០. ប្រៀបធៀបចំនួន**

ក.  $\sqrt{6} + \sqrt{5}$  និង  $\sqrt{21}$

ឧបមាថា :  $\sqrt{6} + \sqrt{5} > \sqrt{21}$

$6 + 2\sqrt{30} + 5 > 21$  (លើកជាការេ)

$2\sqrt{30} > 10$

$4 \times 30 > 100$  (លើកជាការេម្តងទៀត)

$120 > 100$  ពិតប្រាកដមែន

នាំឱ្យការឧបមាគឺត្រឹមត្រូវ មានន័យថា  $\sqrt{6} + \sqrt{5} > \sqrt{21}$

ដូចនេះ ក្រោយពីប្រៀបធៀបគឺ  $\sqrt{6} + \sqrt{5} > \sqrt{21}$  ។

ខ.  $1 + {}^{201}\sqrt{11 + \sqrt{72}}$  និង  $2^{201}\sqrt{3 + \sqrt{2}}$

ពិនិត្យ :  $1 + {}^{201}\sqrt{11 + \sqrt{72}}$   
 $= 1 + {}^{201}\sqrt{9 + 2 + \sqrt{4 \cdot 18}}$   
 $= 1 + {}^{201}\sqrt{\sqrt{9}^2 + 2\sqrt{9} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2}^2}$   
 $= 1 + {}^{201}\sqrt{(3 + \sqrt{2})^2}$

ដោយ  $(1 - {}^{201}\sqrt{3 + \sqrt{2}})^2 > 0$

$1 - 2^{201}\sqrt{3 + \sqrt{2}} + {}^{201}\sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} > 0$

$1 + {}^{201}\sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} > 2^{201}\sqrt{3 + \sqrt{2}}$

ឬអាចសរសេរ  $1 + {}^{201}\sqrt{11 + \sqrt{72}} > 2^{201}\sqrt{3 + \sqrt{2}}$

ដូចនេះ លទ្ធផល  $1 + {}^{201}\sqrt{11 + \sqrt{72}} > 2^{201}\sqrt{3 + \sqrt{2}}$  ។

**៨១. រកតម្លៃគត់នៃ  $x, y$  និង  $z$**

យើងមាន សមីការ

$$\begin{aligned} x+y+z+4 &= 2\sqrt{x-2}+4\sqrt{y-3}+6\sqrt{z-5} \\ \Leftrightarrow x-2\sqrt{x-2}+y-4\sqrt{y-3}+z-6\sqrt{z-5}+4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)-2\sqrt{x-2}+1+(y-3)-4\sqrt{y-3}+4+ \\ &\quad +(z-5)-6\sqrt{z-5}+9=0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x-2}-1)^2+(\sqrt{y-3}-2)^2+(\sqrt{z-5}-3)^2 &= 0 \end{aligned}$$

ដោយ  $\begin{cases} (\sqrt{x-2}-1)^2 \geq 0 \\ (\sqrt{y-3}-2)^2 \geq 0 \\ (\sqrt{z-5}-3)^2 \geq 0 \end{cases}$  ដើម្បីឱ្យផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ

ខាងលើគឺមានតែមួយករណីគត់គឺ :

$$\begin{cases} (\sqrt{x-2}-1)^2 = 0 \\ (\sqrt{y-3}-2)^2 = 0 \\ (\sqrt{z-5}-3)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}-1=0 \\ \sqrt{y-3}-2=0 \\ \sqrt{z-5}-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x-2}=1 \\ \sqrt{y-3}=2 \\ \sqrt{z-5}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ y-3=4 \\ z-5=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=7 \\ z=14 \end{cases}$$

ដូចនេះ តម្លៃគត់ដែលរកឃើញ  $(x, y, z) = (3, 7, 14)$  ។

**៨២. ស្រាយបំភ្លឺថា  $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$**

យើងមាន  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

នាំឱ្យ  $\frac{ax^2}{ax^3} + \frac{by^2}{by^3} + \frac{cz^2}{cz^3} = 1$

ដោយ  $ax^3 = by^3 = cz^3$  យើងបាន

$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{ax^3} = 1 \text{ ទាញបាន } \sqrt[3]{a} = \frac{\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}}{x} \quad (1)$$

$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{by^3} = 1 \text{ ទាញបាន } \sqrt[3]{b} = \frac{\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}}{y} \quad (2)$$

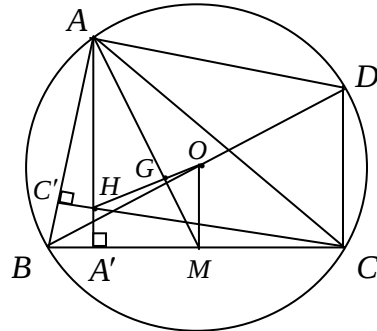
$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{cz^3} = 1 \text{ ទាញបាន } \sqrt[3]{c} = \frac{\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}}{z} \quad (3)$$

ដោយយក (1)+(2)+(3) យើងបាន

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} &= \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \cdot \sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} \\ &= \sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ ឃើញថា  $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$  ។

**៨៣. ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $H, G$  និង  $O$  ជាបីចំណុចរត់ត្រង់គ្នា**



(មើលទៅរូបដូចស្តុកស្ត្រាញ តែបើគ្រប់គ្រងបាន គ្មានអ្វីពិបាក!!!)

-ឧបមាថា  $O$  ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ  $ABC$  និង  $H$  ជាអរតូសង់នៃត្រីកោណ (ចំណុចប្រសព្វកម្ពស់ទាំងបី)

ហើយ  $[BD]$  ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់ផ្ចិត  $O$

យើងបាន  $\hat{BAD} = \hat{BCD} = 90^\circ$  (មុំចារឹកកន្លះរង្វង់)

ទាញបាន  $[AB] \perp [AD]$  និង  $[BC] \perp [CD]$

ហើយ  $[AB] \perp [CH]$  និង  $[BC] \perp [AH]$

នាំឱ្យ  $[AD] \parallel [CH]$  និង  $[CD] \parallel [AH]$

យើងបាន  $AHCD$  ជាប្រលេឡូក្រាម នោះ  $[AH] = [CD]$  (1)

-យក  $[AM]$  ជាមេដ្យាននៃត្រីកោណ  $ABC$  នាំឱ្យ

$M$  ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង  $[BC]$

យើងបាន  $[OM]$  ជាបាតមធ្យមនៃ  $\triangle ABC$

នាំឱ្យ  $[OM]$  ស្របនឹង  $[CD]$  និង  $[OM] = \frac{1}{2}[CD]$  (2)

តាម (1)&(2) :  $[OM] = \frac{1}{2}[AH]$  ឬ  $\frac{AH}{MO} = 2$  (3)

-ត្រីកោណ  $AHG$  និង  $\triangle MOC$  មាន :

មុំ  $\hat{AHG} = \hat{MOC}$  មុំឆ្លាស់ក្នុង (ព្រោះ  $[OM]$  ស្រប  $[AH]$ )

មុំ  $\hat{AGH} = \hat{MGO}$  មុំទល់កំពូល

នាំឱ្យ ត្រីកោណ  $AHG$  និង  $\triangle MOC$  ជាត្រីកោណ ដូចគ្នា

តាមករណី ម.ម (មុំពីរប៉ុនរៀងគ្នា)

វិបាក :  $\sim \frac{\Delta AHG}{\Delta MOG} \Rightarrow \frac{AH}{MO} = \frac{AG}{MG}$  (4)

តាម (3)&(4) : នាំឱ្យ  $\frac{AG}{MG} = 2$  or  $AG = 2MG$

នេះបញ្ជាក់ឱ្យឃើញថា  $G$  ពិជាទីប្រជុំទំងន់របស់  $\triangle ABC$

ដូចនេះ  $H, G$  និង  $O$  ជាបីចំណុចរត់ត្រង់គ្នាប្រាកដមែន ។

**៨៤. បង្ហាញថា**  $P \geq 0$  យើងមាន :

$$\begin{aligned} P &= a^2b^2 + 5a^2 + 9b^2 - 6ab^2 - 30a + 45 \\ &= a^2b^2 - 6ab^2 + 9b^2 + 5a^2 - 30a + 45 \\ &= b^2(a^2 - 6a + 9) + 5(a^2 - 6a + 9) \\ &= (a^2 - 6a + 9)(b^2 + 5) \\ &= (a - 3)^2(b^2 + 5) \end{aligned}$$

ដោយ  $(a - 3)^2 \geq 0$  គ្រប់  $a$  ជាចំនួនពិត

$(b^2 + 5) > 0$  គ្រប់  $b$  ជាចំនួនពិត

នាំឱ្យផលគុណ  $(a - 3)^2(b^2 + 5) \geq 0$  ជានិច្ច

ដូចនេះ ក្រោយពីបង្ហាញឃើញថា  $P \geq 0$  ជានិច្ច ។

**៨៥. បង្ហាញថា**  $39^{51} + 51^{39}$  ចែកដាច់នឹង 45

- ពិនិត្យ  $39^1$  លេខចុងគឺ 9       $39^2$  លេខចុងគឺ 1
- $39^3$  លេខចុងគឺ 9       $39^4$  លេខចុងគឺ 1

មានទម្រង់  $9^n = \begin{cases} \dots 9 & \text{បើ } n \text{ ជាចំនួនគត់សេស} \\ \dots 1 & \text{បើ } n \text{ ជាចំនួនគត់គូ} \end{cases}$

នាំឱ្យ ចំនួន  $39^{51}$  ជាចំនួនដែលមានលេខ 9 នៅខាងចុង ។

- ពិនិត្យ  $51^1$  លេខចុងគឺ 1       $51^2$  លេខចុងគឺ 1
- $51^3$  លេខចុងគឺ 1       $51^4$  លេខចុងគឺ 1

ឃើញថា ស្វ័យគុណនៃ 51 ជាចំនួនដែលមានលេខ 1 ចុងជានិច្ច

នាំឱ្យ ចំនួន  $51^{39}$  ជាចំនួនដែលមានលេខ 1 នៅខាងចុង ។

-យើងបានផលបូក  $39^{51} + 51^{39}$  ជាចំនួនមានលេខ 0 ចុង

នាំឱ្យ ផលបូក  $39^{51} + 51^{39}$  ជាចំនួនចែកដាច់នឹង 5 (\*)

-ម្យ៉ាងទៀត

•  $39^{51} = (13 \times 3)^{51} = 13^{51} \cdot 3^{51} = 13^{51} \cdot 3^{49} \cdot 3^2 = 13^{51} \cdot 3^{49} \cdot 9$

នាំឱ្យ ចំនួន  $39^{51}$  ចែកដាច់នឹង 9

•  $51^{39} = (17 \times 3)^{39} = 17^{39} \cdot 3^{39} = 17^{39} \cdot 3^{37} \cdot 3^2 = 17^{39} \cdot 3^{37} \cdot 9$

នាំឱ្យ ចំនួន  $51^{39}$  ចែកដាច់នឹង 9

យើងបានផលបូក  $39^{51} + 51^{39}$  ចែកនឹង 9 (\*\*)

-តាមរយៈ (\*) និង (\*\*) :  $39^{51} + 51^{39}$  ចែកដាច់នឹង  $9 \times 5$

ដូចនេះ  $39^{51} + 51^{39}$  ចែកដាច់នឹង 45 ។

**៨៦. គណនា**  $A$  : យើងមាន

$A = 101 \cdot 10001 \cdot 100000001 \times \dots \times \underbrace{1000\dots 001}_{\text{មាន } 2^n - 1 \text{ ដងនៃលេខ } 0}$

$= (100 + 1)(10000 + 1)(100000000 + 1) \times \dots \times \underbrace{(1000\dots 00 + 1)}_{\text{មាន } 2^n \text{ ដងនៃលេខ } 0}$

$= (10^2 + 1)(10^4 + 1)(10^8 + 1) \times \dots \times (10^{2^n} + 1)$

$= \frac{1}{(10^2 - 1)}(10^2 - 1)(10^2 + 1)(10^4 + 1)(10^8 + 1) \times \dots \times (10^{2^n} + 1)$

$= \frac{1}{(10^2 - 1)}(10^4 - 1)(10^4 + 1)(10^8 + 1) \times \dots \times (10^{2^n} + 1)$

$= \frac{1}{(10^2 - 1)}(10^8 - 1)(10^8 + 1) \times \dots \times (10^{2^n} + 1)$

$= \dots$

$= \frac{1}{(10^2 - 1)}(10^{2^n} - 1)(10^{2^n} + 1)$

$= \frac{1}{99}(10^{2^{n+1}} - 1)$

$= \frac{1}{99}(\underbrace{1000\dots 00 - 1}_{\text{មាន } 2^{n+1} \text{ ដងនៃលេខ } 0})$

$= \frac{1}{99}(\underbrace{999\dots 99}_{\text{មាន } 2^{n+1} \text{ ដងនៃលេខ } 9})$

$= 10101\dots 01$  ( មាន  $2^{n+1} - 1$  ខ្ទង់ )

ដូចនេះ  $A = 10101\dots 01$  ( មាន  $2^{n+1} - 1$  ខ្ទង់ ) ។

ឧទាហរណ៍:  $101 \times 10001 = 1010101$  ពិត ។

**៨៧. គណនាតម្លៃ  $n$  : យើងមាន**

$$\begin{aligned} \frac{3}{2011} + \frac{9}{2011} + \frac{15}{2011} + \dots + \frac{6n-3}{2011} &= \frac{300}{2011} \\ \frac{3+9+15+\dots+(6n-3)}{2011} &= \frac{300}{2011} \\ 3+9+15+\dots+(6n-3) &= 300 \\ 3[1+3+5+\dots+(2n-1)] &= 3 \cdot 100 \\ 1+3+5+\dots+(2n-1) &= 100 \\ n^2 &= 10^2 \\ n &= 10 \end{aligned}$$

អ្នកត្រូវចាំថា  $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

ដូចនេះ តម្លៃគណនាបានគឺ  $n = 10$  ។

**៨៨. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ :**

$$\begin{aligned} \text{ក. } \begin{cases} x^2 = 2x - y \\ y^2 = 2y - z \\ z^2 = 2z - x \end{cases} &\text{ យើងបាន:} \\ \begin{cases} x^2 - 2x = -y \\ y^2 - 2y = -z \\ z^2 - 2z = -x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 1 - y \\ y^2 - 2y + 1 = 1 - z \\ z^2 - 2z + 1 = 1 - x \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 1 - y \\ y^2 - 2y + 1 = 1 - z \\ z^2 - 2z + 1 = 1 - x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 1 - y \\ (y-1)^2 = 1 - z \\ (z-1)^2 = 1 - x \end{cases} \\ \begin{cases} (1-x)^2 = (1-y) \\ (1-y)^2 = (1-z) \\ (1-z)^2 = (1-x) \end{cases} & \end{aligned}$$

ដោយតាង  $A=1-x$  ,  $B=1-y$  ,  $C=1-z$

$$\text{យើងបាន: } \begin{cases} A^2 = C & (1) \\ C^2 = B & (2) \\ B^2 = A & (3) \end{cases}$$

-តាម (1):  $A^2 = C$

-តាម (2):  $C^2 = B \Rightarrow A^4 = B$

-តាម (3):  $B^2 = A \Rightarrow A^8 = A$

នាំឱ្យ  $A^8 = A \Leftrightarrow A^8 - A = 0$

$$A(A^7 - 1) = 0$$

នោះ  $A=0$  ឬ  $A^7 - 1 = 0 \Leftrightarrow A^7 = 1 \Rightarrow A=1$

-ចំពោះ  $A=0$  យើងបាន:

$$C = A^2 = 0^2 = 0 \text{ ហើយ } B = A^4 = 0^4 = 0$$

$$\text{នាំឱ្យ } \begin{cases} A=1-x \\ B=1-y \\ C=1-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=1-x \\ 0=1-y \\ 0=1-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

-ចំពោះ  $A=1$  យើងបាន:

$$C = A^2 = 1^2 = 1 \text{ ហើយ } B = A^4 = 1^4 = 1$$

$$\text{នាំឱ្យ } \begin{cases} A=1-x \\ B=1-y \\ C=1-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=1-x \\ 1=1-y \\ 1=1-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

-យកកូដមើលនៃតម្លៃ  $A, B, C$  ជំនួសរក  $x, y, z$

$$\text{ដូចនេះ: } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \quad \text{។}$$

$$\text{ខ. } \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = -\frac{1}{12} & (1) \\ \frac{1}{c} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{7}{12} & (2) \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{5}{12} & (3) \end{cases}$$

$$\text{ដោះស្រាយដោយបូកអង្គនីមួយៗនៃសមីការ (1) \& (2) យើងបាន:}$$

-ដោយបូកអង្គនីមួយៗនៃសមីការ (1) \& (2) យើងបាន :

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b} - \frac{1}{12} + \frac{7}{12} \Leftrightarrow \frac{2}{b} = \frac{6}{12} \Rightarrow b = \frac{2 \cdot 12}{6} = 4$$

-ដោយបូកអង្គនីមួយៗនៃសមីការ (1) \& (3) យើងបាន :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a} - \frac{1}{12} + \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{2}{a} = \frac{4}{12} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot 12}{4} = 6$$

-ដោយបូកអង្គនីមួយៗនៃសមីការ (1) \& (3) យើងបាន :

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{c} - \frac{7}{12} + \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{2}{c} = \frac{12}{12} \Rightarrow c = \frac{2 \cdot 12}{12} = 2$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានកូដមើល  $(a, b, c) = (6, 4, 2)$  ។

**៨៩. ដោះស្រាយសមីការ យើងមានសមីការ**

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{2007} + \frac{x-3}{2008} + \frac{x-2}{2009} + \frac{x-1}{2010} &= 4 \\ \frac{x-4}{2007} - 1 + \frac{x-3}{2008} - 1 + \frac{x-2}{2009} - 1 + \frac{x-1}{2010} - 1 &= 0 \\ \left(\frac{x-4}{2007} - 1\right) + \left(\frac{x-3}{2008} - 1\right) + \left(\frac{x-2}{2009} - 1\right) + \left(\frac{x-1}{2010} - 1\right) &= 0 \\ \left(\frac{x-4-2007}{2007}\right) + \left(\frac{x-3-2008}{2008}\right) + \left(\frac{x-2-2009}{2009}\right) + \left(\frac{x-1-2010}{2010}\right) &= 0 \\ \left(\frac{x-2011}{2007}\right) + \left(\frac{x-2011}{2008}\right) + \left(\frac{x-2011}{2009}\right) + \left(\frac{x-2011}{2010}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$(x-2011)\left(\frac{1}{2007}+\frac{1}{2008}+\frac{1}{2009}+\frac{1}{2010}\right)=0$$

នាំឱ្យ  $x-2011=0 \Rightarrow x=2011$

ហើយ  $\left(\frac{1}{2007}+\frac{1}{2008}+\frac{1}{2009}+\frac{1}{2010}\right) \neq 0$

ដូចនេះ សមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ  $x=2011$  ។

**៩០.** ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $\frac{\sqrt[4]{8}-\sqrt{2}+1}{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}-\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

តាង  $n=\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}-\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}$ ,  $n>0$  នោះ

$$n^2=\left(\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}-\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)+\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)-2\sqrt{\left(\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)}$$

$$=2\sqrt[4]{8}-2\sqrt{\left(\sqrt[4]{8}\right)^2-\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^2}$$

$$n^2=2\sqrt[4]{8}-2\sqrt{\left(\sqrt[4]{8}\right)^2-\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^2}$$

$$=2\sqrt[4]{8}-2\sqrt{\sqrt{8}-\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

$$=2\sqrt[4]{8}-2\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}$$

$$=2\sqrt[4]{8}-2\sqrt{\sqrt{2}+1}$$

$$=2\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)$$

ទាញរក  $n$  វិញ យើងបាន:

$$n^2=2\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)$$

$$n=\sqrt{2\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)} \quad \text{ព្រោះ } n>0 \text{ ពុំមែន } \pm \text{ ទេ}$$

$$=\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}$$

ដោយផ្អែកតាមរូបសំណាក  $n$  យើងបាន :

$$\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}-\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}$$

នាំឱ្យ 
$$\frac{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}-\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}=\frac{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ដូចនេះ  $\frac{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}-\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$  ។

**៩១.** សម្រួលកន្សោម

$$\begin{aligned} B &= \left( \frac{2\sqrt{x}+x}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \div \left( 1 - \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \left( \frac{2\sqrt{x}+x}{\sqrt{x^3}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \div \left( 1 - \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \left( \frac{2\sqrt{x}+x}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \div \left( 1 - \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \frac{(2\sqrt{x}+x) - (x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \div \frac{(x+\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}+2)}{x+\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{2\sqrt{x}+x-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \div \frac{x+\sqrt{x}+1-\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \div \frac{x-1}{x+\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \times \frac{x+\sqrt{x}+1}{x-1} = \frac{1}{x-1}, 0 < x \neq 1 \end{aligned}$$

ដូចនេះ ក្រោយពីសម្រួល  $B=\frac{1}{x-1}$  ។

**៩២.** ស្រាយបញ្ជាក់ឱ្យឃើញថា  $A+B+C+7$  ជាការប្រាកដ

-តាង  $x=\underbrace{111\dots11}_{\text{មាន } n \text{ តួនៃលេខ } 1}$  នាំឱ្យ  $\underbrace{999\dots99}_{\text{មាន } n \text{ តួនៃលេខ } 1}=9x$

ទាញបាន :  $10^n-1=9x \Rightarrow 10^n=9x+1$  (សូមគិត)

-យើងបាន  $A=\underbrace{888\dots88}_{\text{មាន } n \text{ តួនៃលេខ } 1}=8 \cdot \underbrace{(111\dots11)}_{\text{មាន } n \text{ តួនៃលេខ } 1}=8x$

ហើយ  $B=\underbrace{222\dots222}_{\text{មាន } n+1 \text{ តួនៃលេខ } 2}=\underbrace{222\dots220}_{\text{មាន } n \text{ តួនៃលេខ } 2}+2$

$$=\underbrace{222\dots22}_{\text{មាន } n \text{ តួនៃលេខ } 2} \times 10 + 2 = 2x \times 10 + 2 = 20x + 2$$

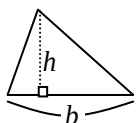
និង  $C=\underbrace{444\dots444}_{\text{មាន } 2n \text{ តួនៃលេខ } 4}=\underbrace{444\dots44}_{\text{មាន } n \text{ តួនៃលេខ } 4} \times 10^n + \underbrace{444\dots44}_{\text{មាន } n \text{ តួនៃលេខ } 4}$

$$=4x(9x+1)+4x=36x^2+4x+4x=36x^2+8x$$

នាំឱ្យ  $A+B+C+7$   
 $= 8x + (20x+2) + (36x^2+8x) + 7$   
 $= 36x^2 + 36x + 9$   
 $= (6x)^2 + 2 \cdot 6x \cdot 3 + 3^2$   
 $= (6x+3)^2 = \underbrace{(666...66+3)}_{\text{មាន } n \text{ តួនៃលេខ } 6}^2 = \underbrace{666...69}_{\text{មាន } n-1 \text{ តួនៃលេខ } 6}^2$

ដូចនេះ  $A+B+C+7$  ជាការប្រាកដ ។

**៩៣. រកភាគរយនៃកម្ពស់ដែលត្រូវថយចុះ**



ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ  $S = \frac{1}{2}bh$

-តាង  $x$  ជាភាគរយនៃកម្ពស់ដែលត្រូវថយចុះ  
 -បាតត្រីកោណថ្មីបន្ទាប់ពីកើន 10% គឺ  $(b+10\%b)$   
 -កម្ពស់ត្រីកោណថ្មីក្រោយពីថយចុះ  $x$  គឺ  $(h-xh)$   
 នាំឱ្យក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណថ្មីគឺ  $S' = \frac{1}{2}\left(b + \frac{10}{100}b\right)(h-xh)$   
 -តាមបម្រាប់ប្រធានក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណទាំងពីរស្មើគ្នា  
 យើងបាន  $\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(b+0.1b)(h-xh)$   
 $1 = 1.1(1-x) \Leftrightarrow 1 = 1.1 - 1.1x$   
 $\Rightarrow x = \frac{1.1-1}{1.1} = \frac{0.1}{1.1} \approx 0.09091 = 9.09\%$

ដូចនេះ កម្ពស់ត្រូវថយចុះ  $\frac{1}{11}$  or 9.09% ។

**៩៤. ប្រាយថា  $ab+bc+ac \leq a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ac)$**

-គ្រប់  $a, b$  និង  $c$  ជាចំនួនពិតយើងបាន:

•  $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+b^2 \geq 2ab$  (1)

•  $(b-c)^2 \geq 0 \Rightarrow b^2+c^2 \geq 2bc$  (2)

•  $(a-c)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+c^2 \geq 2ac$  (3)

ដោយយក (1)+(2)+(3): យើងបាន

$2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ac)$

$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$  (\*)

-ម្យ៉ាងទៀត  $a, b$  និង  $c$  ជាអន្តរាគមន៍នៃត្រីកោណ

យើងបាន :

•  $a < b+c \Rightarrow a^2 < ab+ac$  (4)

•  $b < a+c \Rightarrow b^2 < ab+bc$  (5)

•  $c < a+b \Rightarrow c^2 < ac+bc$  (6)

ដោយយក (5)+(6)+(7): យើងបាន

$a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ac)$  (\*\*)

-តាមរយៈ (\*)&(\*\*) យើងបាន :

$ab+bc+ac \leq a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ac)$

ដូចនេះ  $ab+bc+ac \leq a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ac)$  ។

**៩៥. គណនា  $E$  : យើងមាន**

$E = \frac{2011}{b^2-a^2+c^2} - \frac{2011}{b^2-a^2-c^2} + \frac{2011}{a^2+b^2-c^2}$

-តាមសម្មតិកម្ម  $a+b+c=0$  យើងទាញបាន:

•  $a+b+c=0 \Leftrightarrow b+c=-a$

$(b+c)^2 = (-a)^2 \Leftrightarrow b^2+2bc+c^2 = a^2$

នាំឱ្យ  $b^2-a^2+c^2 = -2bc$  (1)

•  $a+b+c=0 \Leftrightarrow a+c=-b$

$(a+c)^2 = (-b)^2 \Leftrightarrow a^2+2ac+c^2 = b^2$

នាំឱ្យ  $b^2-a^2-c^2 = 2ac$  (2)

•  $a+b+c=0 \Leftrightarrow a+b=-c$

$(a+b)^2 = (-c)^2 \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 = c^2$

នាំឱ្យ  $a^2+b^2-c^2 = -2ab$  (3)

-តាម (1), (2)& (3) យើងបាន

$E = \frac{2011}{b^2-a^2+c^2} - \frac{2011}{b^2-a^2-c^2} + \frac{2011}{a^2+b^2-c^2}$

$E = \frac{2011}{-2bc} - \frac{2011}{2ac} + \frac{2011}{-2ab}$

$= -\frac{2011}{2bc} - \frac{2011}{2ac} - \frac{2011}{2ab}$

$= \frac{-2011a-2011b-2011c}{2abc}$

$= -2011 \left( \frac{a+b+c}{2abc} \right) = 0$

ព្រោះ  $a+b+c=0$  និង  $abc \neq 0$

ដូចនេះ ក្រោយពីគណនាឃើញថា  $E=0$

**៩៦. បង្ហាញថា**

$2010 \cdot 2012(2011^2 + 1)(2011^4 + 1)(2011^8 + 1)(2011^{16} + 1) = (2011^{32} - 1)$   
ពិនិត្យអង្គទី១ : (ដោយប្រើរូបមន្ត  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ )

$$\begin{aligned} & 2010 \cdot 2012(2011^2 + 1)(2011^4 + 1)(2011^8 + 1)(2011^{16} + 1) \\ &= (2011 - 1)(2011 + 1)(2011^2 + 1)(2011^4 + 1)(2011^8 + 1)(2011^{16} + 1) \\ &= (2011^2 - 1)(2011^2 + 1)(2011^4 + 1)(2011^8 + 1)(2011^{16} + 1) \\ &= (2011^4 - 1)(2011^4 + 1)(2011^8 + 1)(2011^{16} + 1) \\ &= (2011^8 - 1)(2011^8 + 1)(2011^{16} + 1) \\ &= (2011^{16} - 1)(2011^{16} + 1) \\ &= (2011^{32} - 1) \end{aligned}$$

ដូចនេះ ក្រោយពីការបង្ហាញ ឃើញថា

$$2010 \cdot 2012(2011^2 + 1)(2011^4 + 1)(2011^8 + 1)(2011^{16} + 1) = (2011^{32} - 1)$$

**៩៧. បំភ្លឺថា  $2AM < AB + AC$**

-យក  $N$  កណ្តាល  $[AC]$

នាំឱ្យ  $AN = \frac{AC}{2}$  (1)

-បម្រាប់  $[AM]$  ជាមេដ្យាន

នាំឱ្យ  $M$  កណ្តាល  $[BC]$

ទាញបាន  $MN$  ជាបាតមធ្យមនៃត្រីកោណ  $ABC$

ហើយ  $MN = \frac{AB}{2}$  (2)

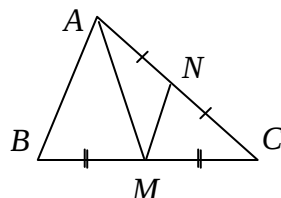
-តាមច្បាប់វិសមភាពក្នុងត្រីកោណ  $AMN$

គេបាន :  $AM < MN + AN$  (3)

-ដោយយក (1)&(2) ជំនួសក្នុង (3)

យើងបាន  $AM < \frac{AB}{2} + \frac{AC}{2} \Leftrightarrow 2AM < AB + AC$

ដូចនេះ ឃើញថា  $2AM < AB + AC$  ប្រាកដមែន ។



**៩៨. រកគ្រប់រង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណកែង**

-ដោយ  $a$  ជាចំនួនគតិវិជ្ជមាន

នោះយើងបានរង្វាស់ជ្រុង  $x < x + a < x + 2a$

-ដោយវាជាត្រីកោណកែង តាមពិសោធន៍

យើងបាន  $x^2 + (x+a)^2 = (x+2a)^2$

$$x^2 + x^2 + 2ax + a^2 = x^2 + 4ax + 4a^2$$

$$x^2 - 2ax - 3a^2 = 0$$

មាន  $\Delta' = (-a)^2 - (-3a^2) = a^2 + 3a^2 = 4a^2$

នាំឱ្យ  $x = \frac{-(-a) + \sqrt{4a^2}}{1} = a + 2a = 3a$  យក

$x = \frac{-(-a) - \sqrt{4a^2}}{1} = a - 2a = -a$  មិនយក

-យើងបានរង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណគឺ  $3a, 4a, 5a$

រង្វាស់ជ្រុងវែងជាងគេ គឺតូចជាង ឬស្មើ 10 មានន័យថា

$$5a \leq 10 \Rightarrow a \leq 2$$

ហើយ  $a$  ជាចំនួនគតិវិជ្ជមាន នោះ  $a=1$  និង  $a=2$

• ចំពោះ  $a=1$  នោះត្រីកោណមានរង្វាស់ជ្រុង 3, 4, 5

• ចំពោះ  $a=2$  នោះត្រីកោណមានរង្វាស់ជ្រុង 6, 8, 10

ដូចនេះ រង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណកែងតូចជាង ឬស្មើ 10 គឺ: 3, 4, 5 និង 6, 8, 10 ។

**៩៩. គណនា  $A+B$  ជាអនុគមន៍នឹង  $C$**

ពិនិត្យសក្ខណៈជ្រុងរបស់ត្រីកោណ

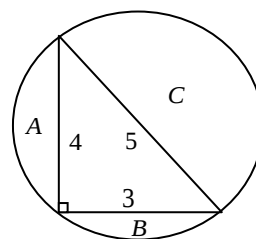
-តាមពិសោធន៍ ឃើញថា:

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \text{ មានន័យថាវាជាត្រីកោណកែង}$$

-ហើយវាជាត្រីកោណជារឹកក្នុងរង្វង់នោះយើងទាញថា

ប្រវែងជ្រុងវែងជាងគេមានរង្វាស់ស្មើ 5 ជាអង្កត់ឱ្យផ្ចិត

-យើងគូសរូបបញ្ចប់ដូចខាងក្រោម:



រង្វង់នេះមាន កាំ  $R = \frac{5}{2}$

-ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ  $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$  ឯកតាផ្ទៃ

-ក្រឡាផ្ទៃរង្វង់  $S = \pi R^2 = \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25\pi}{4}$  ឯកតាផ្ទៃ

-ក្រឡាផ្ទៃផ្នែក  $C$  គឺ  $C = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{S}{2} = \frac{25\pi}{8}$  ឯកតាផ្ទៃ

នាំឱ្យ  $A+B = S - (S_{\Delta} + C)$

$$= \frac{25\pi}{4} - \left(6 + \frac{25\pi}{8}\right) = \frac{25\pi}{8} - 6 = C - 6$$

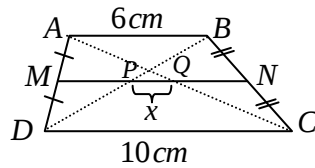
ដូចនេះ  $A+B = C - 6$  ។

**១០០ គណនាប្រវែងបាតមធ្យមនៅចន្លោះអង្កត់ទ្រូង x**

-តាង P និង Q ជាចំណុច

ប្រសព្វរវាងអង្កត់ទ្រូង និង

បាតមធ្យម យើងបាន :



-MP ជាបាតមធ្យមនៃ  $\triangle DAB$  ព្រោះ MP កាត់តាមចំណុច  
ចំណុចកណ្តាល AD ហើយស្របនឹង AB (បាតមធ្យមធុតុ.ញាយ)

$$\text{នាំឱ្យ } MP = \frac{AB}{2} = \frac{6\text{ cm}}{2} = 3\text{ cm}$$

-MQ ជាបាតមធ្យមនៃ  $\triangle DAC$  ព្រោះ MQ កាត់តាមចំណុច  
ចំណុចកណ្តាល AD ហើយស្របនឹង CD (បាតមធ្យមធុតុ.ញាយ)

$$\text{នាំឱ្យ } MQ = \frac{CD}{2} = \frac{10\text{ cm}}{2} = 5\text{ cm}$$

-យើងបាន  $x = PQ = MQ - MP = 5\text{ cm} - 3\text{ cm} = 2\text{ cm}$

ដូចនេះ ប្រវែងចន្លោះអង្កត់ទ្រូងគឺ  $x = 2\text{ cm}$  ។

**១០១ គណនាផលបូក**  $S = \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1000^2}{1999 \cdot 2001}$

-ពិនិត្យ រាងទូទៅនៃតួនិមួយៗរបស់ S

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} &= \frac{4n^2}{4(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{2n^2 + n + 2n^2 - n}{4(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{n(2n+1) + n(2n-1)}{4(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{n(2n+1)}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{n(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{n}{(2n-1)} + \frac{n}{(2n+1)} \right] \end{aligned}$$

យើងឱ្យតម្លៃ  $n = 1, 2, 3, \dots, 1000$  យើងបាន :

$$\begin{aligned} \text{បើ } n=1: & \quad \frac{1^2}{1 \cdot 3} = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{1} + \frac{1}{3} \right] \\ \text{បើ } n=2: & \quad \frac{2^2}{3 \cdot 5} = \frac{1}{4} \left[ \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \right] \\ \text{បើ } n=3: & \quad \frac{3^2}{5 \cdot 7} = \frac{1}{4} \left[ \frac{3}{5} + \frac{3}{7} \right] \\ & \quad \dots \\ \text{បើ } n=1000: & \quad \frac{1000^2}{1999 \cdot 2001} = \frac{1}{4} \left[ \frac{1000}{1999} + \frac{1000}{2001} \right] \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{1000}{1999} + \frac{1000}{2001} \right)$$

$$4S = \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{1000}{1999} + \frac{1000}{2001} \right)$$

$$4S = 1 + \underbrace{\left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) + \left( \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \right) + \dots + \left( \frac{999}{1999} + \frac{1000}{1999} \right)}_{\text{មាន 999 តួនៃផលបូក}} + \frac{1000}{2001}$$

មាន 999 តួនៃផលបូក

$$4S = 1 + \underbrace{(1+1+1+\dots+1)}_{\text{មាន 999 តួនៃផលបូក}} + \frac{1000}{2001}$$

$$4S = 1000 + \frac{1000}{2001} = \frac{2001000 + 1000}{2001} = \frac{2002000}{2001}$$

$$\Rightarrow S = \frac{4 \cdot 500500}{4 \cdot 2001} = \frac{500500}{2001}$$

ដូចនេះ ផលបូកគណនាបានគឺ  $S = \frac{500500}{2001}$  ។

**១០២ ស្រាយបញ្ជាក់ថា :**

$$\sqrt{6} + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}} + \sqrt{30} + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots + \sqrt{30}}} < 9$$

យើងពិនិត្យមើលអង្គទី១ ដូចបង្ហាញខាងក្រោម :

$$\text{-ចំពោះ } \sqrt{6} + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}} < \sqrt{6} + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{9}}}$$

$$\text{តែ } \sqrt{6} + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{9}}} = 3 \text{ (បញ្ចេញពីវិធីកាត់)}$$

$$\text{នាំឱ្យបាន : } \sqrt{6} + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}} < 3 \quad (i)$$

$$\text{-ចំពោះ } \sqrt{30} + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots + \sqrt{30}}} < \sqrt{30} + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots + \sqrt{36}}}$$

$$\text{តែ } \sqrt{30} + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots + \sqrt{36}}} = 6 \text{ (បញ្ចេញពីវិធីកាត់)}$$

$$\text{នាំឱ្យបាន : } \sqrt{30} + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots + \sqrt{30}}} < 6 \quad (ii)$$

-ដោយបូកអង្គនិងអង្គ : (i) + (ii) យើងបាន :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \sqrt{6} + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}} &< 3 & (i) \\ \sqrt{30} + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots + \sqrt{30}}} &< 6 & (ii) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\sqrt{6} + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}} + \sqrt{30} + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots + \sqrt{30}}} < 9$$

ដូចនេះ យើងអាចស្រាយបញ្ជាក់បានថា :

$$\sqrt{6} + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}} + \sqrt{30} + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots + \sqrt{30}}} < 9$$

បញ្ជាក់ : ការដោះស្រាយខាងលើគឺមាន n វិធីកាត់ដូចគ្នា ។

(អ្នកអាចសង្ខេបការដោះស្រាយឱ្យខ្លីជាងនេះក៏បាន)

**១០៣ ក. ចូរគណនាផលបូក**

$S = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2)$   
យើងពិនិត្យតួនីមួយៗនៃ  $S$  មានរាងជា  $k(k+1)(k+2)$   
តែ  $k(k+1)(k+2)$

$$\begin{aligned} &= k(k+1)(k+2) \times \frac{1}{4} \times 4 \\ &= \frac{1}{4} k(k+1)(k+2)(4+k-k) \\ &= \frac{1}{4} k(k+1)(k+2)[(k+3)-(k-1)] \\ &= \frac{1}{4} [(k+3)k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)(k+2)] \\ &= \frac{1}{4} [k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2)] \end{aligned}$$

ដោយតម្លៃ  $k=1, 2, 3, \dots, n$  យើងបាន :

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot 3 &= \frac{1}{4} [1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3] \\ 2 \cdot 3 \cdot 4 &= \frac{1}{4} [2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4] \\ 3 \cdot 4 \cdot 5 &= \frac{1}{4} [3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5] \\ &\dots\dots\dots \\ n(n+1)(n+2) &= \frac{1}{4} [n(n+1)(n+2)(n+3) - \\ &\quad (n-1)n(n+1)(n+2)] \end{aligned} \right. \\ &\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2)}{1} = \\ &\quad \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

ដូចនេះ ក្រោយពីគណនា  $S = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$

**ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $4S+1$  ជាការប្រាកដ**

យើងមាន  $S = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$   
នាំឱ្យ  $4S+1 = 4 \times \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$   
 $= n(n+3)(n+1)(n+2) + 1$   
 $= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1$   
បើតាង  $t = n^2 + 3n$  យើងងាយស្រួលគុណ នោះ

$$\begin{aligned} 4S+1 &= t(t+2)+1 \\ &= t^2 + 2t + 1 \\ &= (t+1)^2 \end{aligned}$$

ឬអាចសរសេរបាន:  $4S+1 = [(n^2 + 3n) + 1]^2$

ដូចនេះ  $4S+1$  ជាការប្រាកដ ។

**១០៤ ស្រាយបញ្ជាក់ថា :**

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_9}{x_3 + x_6 + x_9} + \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{12}}{x_4 + x_8 + x_{12}} < 7$$

យើងមាន :  $0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{12}$

នាំឱ្យ  $x_1 + x_2 + x_3 < x_3 + x_3 + x_3 = 3x_3$  (1)

$x_4 + x_5 + x_6 < x_6 + x_6 + x_6 = 3x_6$  (2)

$x_7 + x_8 + x_9 < x_9 + x_9 + x_9 = 3x_9$  (3)

ដោយយក (1)+(2)+(3) យើងបាន :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 < 3x_3 \\ + \quad x_4 + x_5 + x_6 < 3x_6 \\ x_7 + x_8 + x_9 < 3x_9 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_9 < 3(x_3 + x_6 + x_9)$$

ឬសរសេរបាន :  $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_9}{x_3 + x_6 + x_9} < 3$  (i)

ហើយ  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < x_4 + x_4 + x_4 + x_4 = 4x_4$  (4)

$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 < x_8 + x_8 + x_8 + x_8 = 4x_8$  (5)

$x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} < x_{12} + x_{12} + x_{12} + x_{12} = 4x_{12}$  (6)

ដោយយក (4)+(5)+(6) យើងបាន :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 4x_4 \\ + \quad x_5 + x_6 + x_7 + x_8 < 4x_8 \\ x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} < 4x_{12} \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{12} < 4(x_4 + x_8 + x_{12})$$

ឬសរសេរបាន :  $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{12}}{x_4 + x_8 + x_{12}} < 4$  (ii)

ជាលទ្ធផលគ្រាន់តែយក (i)+(ii) ជាការស្រេច

$$\begin{cases} \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_9}{x_3 + x_6 + x_9} < 3 \\ + \quad \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{12}}{x_4 + x_8 + x_{12}} < 4 \end{cases}$$

ដូចនេះ

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_9}{x_3 + x_6 + x_9} + \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{12}}{x_4 + x_8 + x_{12}} < 7$$

**១០៥ រកតម្លៃធំបំផុតនៃផលគុណ  $xy$**

យើងមាន  $x^2 + 3xy + y^2 = 60$

អាចថែមថយ  $x^2 - 2xy + y^2 + 5xy = 60$

$$(x - y)^2 + 5xy = 60$$

$$xy = \frac{60 - (x - y)^2}{5}$$

$$xy = 12 - \frac{(x - y)^2}{5}$$

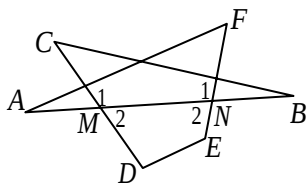
ដោយ  $(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{(x - y)^2}{5} \geq 0$

នាំឱ្យ  $xy = 12 - 0 = 12$  ជាតម្លៃធំបំផុត ចំពោះ  $x = y$

ដូចនេះ តម្លៃផលគុណធំបំផុតនៃផលគុណ  $xy = 12$  ។

**១០៦ រកផលបូករង្វាស់មុំ  $A, B, C, D, E$  និង  $F$**

ថែមចំណុច  $M$  និង  $N$  ត្រង់ប្រសព្វដូចរូប :



ពិនិត្យផលបូកមុំក្នុងនៃ :

-ត្រីកោណ  $ANF$  :  $A + N_1 + F = 180^\circ$  (1)

-ត្រីកោណ  $BMC$  :  $B + M_1 + C = 180^\circ$  (2)

-ចតុកោណ  $DMNE$  :  $D + M_2 + N_2 + E = 360^\circ$  (3)

ដោយបូក (1)+(2)+(3) យើងបានផលបូកមុំ :

$$A + B + C + D + E + F + M_1 + M_2 + N_1 + N_2 = 720^\circ$$

តែមុំ  $M_1 + M_2 = 180^\circ$  ,  $N_1 + N_2 = 180^\circ$

នាំឱ្យ  $A + B + C + D + E + F + 180^\circ + 180^\circ = 720^\circ$

ឬ  $A + B + C + D + E + F = 360^\circ$

ដូចនេះ ផលបូកមុំ  $A + B + C + D + E + F = 360^\circ$  ។

**១០៧ ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $A$  ជាផលគុណនៃពីរចំនួនគត់គ្នា**

យើងមាន  $A = 111...11222...22$  មាន 2011 តួដូចគ្នា

(ពិនិត្យដោយយកចិត្តទុកដាក់ពីមួយចំណុចទៅមួយចំណុច)

យើងអាចបំបែក  $A$  ជាទម្រង់ងាយដូចខាងក្រោម :

$$A = 111...11222...22$$

$$= 111...11 \cdot 10^{2011} + 2(111...11)$$

$$= (111...11)(10^{2011} + 2)$$

$$= \frac{1}{9}(999...99)(10^{2011} + 2)$$

$$= \frac{1}{9}(999...99)(10^{2011} - 1 + 3)$$

$$= \frac{1}{9}(999...99)(999...99 + 3)$$

$$= \frac{1}{3}(999...99) \times \frac{1}{3}(999...99 + 3)$$

$$= (333...33)(333...33 + 1)$$

ដែលមាន លេខ 3 ចំនួន 2011 តួ

ដូចនេះ

$$A = 111...11222...22 = (333...33)(333...33 + 1)$$

ដែលមានចំនួនតួនៃលេខ 1, 2 និងលេខ 3 ស្មើគ្នាគឺ 2011 តួ ។

**១០៨ រកតម្លៃតូចបំផុតនៃកន្សោម  $H$  :**

បើ  $x_1, x_2$  ជាឫសមីការ  $2011x^2 - (t - 2011)x - 2011 = 0$

តាមរូបមន្ត ផលបូកផលគុណឫស យើងបាន :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{t - 2011}{2011}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2011}{2011} = -1$$

យើងមាន :  $H = (x_2 - x_1)^2 + 4\left(\frac{x_1 - x_2}{2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)^2$

$$H = (x_2 - x_1)^2 + 4\left(\frac{x_1 - x_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}\right)^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + 4(x_2 - x_1)^2 \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{x_1 x_2}\right)^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 \left[1 + 4\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{x_1 x_2}\right)^2\right]$$

$$= (x_2^2 - 2x_1 x_2 + x_1^2) \left[1 + 4\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{x_1 x_2}\right)^2\right]$$

$$= [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] \left[1 + 4\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{x_1 x_2}\right)^2\right]$$

$$\begin{aligned} H &= \left[ \left( \frac{t-2011}{2011} \right)^2 - 4(-1) \right] \left[ 1 + 4 \left( \frac{-1}{2} + \frac{1}{-1} \right)^2 \right] \\ &= \left[ \left( \frac{t-2011}{2011} \right)^2 + 4 \right] \cdot 10 \\ &= 10 \left( \frac{t-2011}{2011} \right)^2 + 40 \end{aligned}$$
$$\text{ដោយ } \left(\frac{t-2011}{2011}\right)^2 \geq 0 \text{ នាំឱ្យ } 10\left(\frac{t-2011}{2011}\right)^2 + 40 \geq 40$$

|        |                                           |   |
|--------|-------------------------------------------|---|
| ដូចនេះ | តម្លៃតូចបំផុតនៃ $H = 40$ ចំពោះ $t = 2011$ | ។ |
|--------|-------------------------------------------|---|

**១០៩** ➤ គណនាតម្លៃលេខនៃ  $A = \sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\ldots}}}}}$

**យើងមាន :**  $A = \sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3...}}}}}$

$$A^2 = 3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\ldots}}}}$$

$$A^4 = 9 \times 5 \sqrt{3 \sqrt{5 \sqrt{3 \sqrt{5 \sqrt{3 \dots}}}}}$$

$$A^4 = 45 \cdot \sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\ldots}}}}}$$

$$A^4 = 45A$$

អាចសរសេរ  $A^4 - 45A = 0 \Leftrightarrow A(A^3 - 45) = 0$

នាំឱ្យបាន •  $A=0$  មិនយកព្រោះ  $A>0$

- $A^3 - 45 = 0 \Rightarrow A = \sqrt[3]{45}$  យក

ដូចនេះ ក្រោយពិគណនា  $A = \sqrt[3]{45}$  ។

**១១០** រកសំណល់នៃវិធីចែករវាង  $p(x)$  និង  $x(x-1)$   
 (អ្នកត្រូវចាំថា : សំណល់នៃវិធីចែក  $f(x)$  និង  $(x-a)$  គឺ  $r = f(a)$   
 ដែល  $f(x)$  ជាពហុធា និង  $r = f(a)$  ជាសំណល់ ។)

បម្រាប់  $p(x)$  ចែកនឹង  $x$  បានសំណល់ 1

មានន័យថា  $p(0)=1$

ហើយ  $p(x)$  ចែកនឹង  $x-1$  បានសំណល់ 2

មានន័យថា  $p(1)=2$

-ដីក្រុនៃសំណល់ចែក ត្រូវតែជាដីក្រុនៃតួចែក

ដោយ  $x(x-1)$  ជាពហុធានីក្រេទី2 នោះ សំណល់ជាពហុធានីក្រេទី1 មានរាងជា  $r(x)=ax+b$  ។

-ឧបមាថា  $q(x)$  ជាផលចែកនៃ  $p(x)$  នឹង  $x(x-1)$

យើងបាន :  $p(x) = x(x-1) q(x) + ax + b$

-ចំពោះ  $p(0)=1$  និង  $p(1)=2$  យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ:

$$\begin{cases} p(0)=1 \\ p(1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0(0-1)q(x)+a \cdot 0+b=1 \\ 1(1-1)q(x)+a \cdot 1+b=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=1 \\ a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=1 \end{cases}$$

នោះសំណល់គឺ  $r(x) = ax + b = x + 1$

|        |                                 |   |
|--------|---------------------------------|---|
| ដូចនេះ | សំណល់នៃវិធីចែកគឺ $r(x) = x + 1$ | ។ |
|--------|---------------------------------|---|

**១១១** ស្រាយបញ្ជាក់  $5^{2011} + 5^{2012} + 5^{2013}$  ចែកជាចំនួន 31

យើងមាន  $5^{2011} + 5^{2012} + 5^{2013}$   
 $= 5^{2011}(1 + 5 + 5^2)$   
 $= 31 \cdot 5^{2011}$

ដូចនេះ  $5^{2011} + 5^{2012} + 5^{2013}$  ចែកដាច់នឹង 31 ។

**១១២** រកលេខនៃតួចុងក្រោយបង្អស់នៃចំនួន  $2^{34}$

ពិនិត្យស្វ័យគុណនៃ 2 ដូចខាងក្រោម :

$$\begin{array}{lll} \left[ 2^1 \right] = 2 & \left[ 2^5 \right] = 2 & \left[ 2^9 \right] = 2 \\ \left[ 2^2 \right] = 4 & \left[ 2^6 \right] = 4 & \left[ 2^{10} \right] = 4 \\ \left[ 2^3 \right] = 8 & \left[ 2^7 \right] = 8 & \left[ 2^{11} \right] = 8 \quad \dots \\ \left[ 2^4 \right] = 6 & \left[ 2^8 \right] = 6 & \left[ 2^{12} \right] = 6 \end{array}$$

ឃើញថា លេខចុងស្វ័យគុណនៃ 2 មានខួបស្មើ 4 វិលទៅមក

ហើយ  $3^4 = 81$

$$\text{နာ်ချ် } [2^{81}] = [2^{80} \cdot 2] = [2^{80}] \cdot [2] = [2^{4 \cdot 20}] \cdot [2] = [6 \cdot 2] = 2$$

ដូចនេះ ចំនួន  $2^{34}$  មានលេខ 2 នៅខាងចុងគេបង្អស់ ។

សម្គាល់ : គេកំណត់សរសេរ  $[2^{11}] = 8$  មានន័យថា

លេខខាងចុងនៃ  $[2^{11}]$  គឺលេខ 8 ។

**១១៣) រកលេខនៃតួចុងក្រោយបង្អស់នៃចំនួន**  $123456789^{2011}$

លេខខាងចុងនៃចំនួន  $123456789^{2011}$  គឺអាស្រ័យលើលើស្វ័យគុណលេខខាងចុងនៃចំនួននេះប៉ុណ្ណោះ មានន័យថា លេខខាងចុង  $123456789^{2011} =$  លេខខាងចុង  $9^{2011}$

-ពិនិត្យលេខខាងចុងស្វ័យគុណនៃលេខ 9 :

$$[9^1] = 9, [9^2] = 1, [9^3] = 9, [9^4] = 1, \dots$$

$$[9^n] = \begin{cases} 9 & \text{បើ } n \text{ សេស} \\ 1 & \text{បើ } n \text{ គូ} \end{cases}$$

យើងបាន  $[9^{2011}] = 9$  ព្រោះ 2011 ជាចំនួនសេស

ដូចនេះ លេខខាងចុងបង្អស់នៃ  $123456789^{2011}$  គឺ 9 ។

**១១៤) ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន A ជាចំនួនគតិវិជ្ជមាន**

$$\text{យើងមាន } A = \sqrt[3]{\frac{1}{3}(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2}+1)^3}$$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[3]{\frac{1}{3}(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2}+1)^3} \\ &= \sqrt[3]{\frac{1}{3}(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2^3} + 3 \cdot \sqrt[3]{2^2} + 3 \cdot \sqrt[3]{2} + 1)} \\ &= \sqrt[3]{\frac{1}{3}(\sqrt[3]{2}-1)(2 + 3 \cdot \sqrt[3]{2^2} + 3 \cdot \sqrt[3]{2} + 1)} \\ &= \sqrt[3]{(\sqrt[3]{2}-1)(1 + \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2})} \\ &= \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^3} + \sqrt[3]{2^2} - 1 - \sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2}} \\ &= \sqrt[3]{2-1} = 1 \end{aligned}$$

ដូចនេះ  $A=1$  ជាចំនួនគតិវិជ្ជមាន ។

**១១៥) បញ្ជាក់តម្លៃនៃចំនួនពិត x ដោយប្រើសញ្ញាវិសមភាព**

-បម្រាប់ :  $x$  ជាចំនួនពិត

មានន័យថា  $x$  អាចជាចំនួនវិជ្ជមាន ឬអវិជ្ជមាន

-សម្មតិកម្ម :  $x$  ជាចំនួនដែលមានផ្នែកគត់មានលេខពីរខ្ទង់ មានន័យថា  $10 \leq x < 100$  (ទម្រង់នេះធ្វើឱ្យ  $x$  ជាចំនួនដែលមានផ្នែកគត់មានលេខពីរខ្ទង់ជានិច្ច)

-បើតម្លៃ  $x$  អវិជ្ជមានយើងបាន  $-10 \geq x > -100$

ដូចនេះ តម្លៃនៃចំនួនពិតបញ្ជាក់បានគឺ :  
 $10 \leq x < 100$  ឬ  $-10 \geq x > -100$  ។

**១១៦) ក.ប្រៀបធៀបចំនួន**  $(1+2000^2)$  និង  $(2001^2 - 2 \cdot 2000)$

$$\begin{aligned} \text{ពិនិត្យ : } & 2001^2 - 2 \cdot 2000 \\ &= (1+2000)^2 - 2 \cdot 2000 \\ &= 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2000 + 2000^2 - 2 \cdot 2000 \\ &= 1 + 2000^2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ  $(1+2000^2) = (2001^2 - 2 \cdot 2000)$  ។

**ខ. គណនា**  $A = \sqrt{1+2000^2 + \left(\frac{2000}{2001}\right)^2} + \frac{2000}{2001}$

$$\text{យើងមាន : } A = \sqrt{1+2000^2 + \left(\frac{2000}{2001}\right)^2} + \frac{2000}{2001}$$

ដោយ  $(1+2000^2) = (2001^2 - 2 \cdot 2000)$  យើងបាន :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{2001^2 - 2 \cdot 2000 + \left(\frac{2000}{2001}\right)^2} + \frac{2000}{2001} \\ &= \sqrt{\left(2001 - \frac{2000}{2001}\right)^2} + \frac{2000}{2001} \\ &= 2001 - \frac{2000}{2001} + \frac{2000}{2001} \\ &= 2001 \end{aligned}$$

ដូចនេះ ក្រោយពីគណនាឃើញថា  $A = 2001$  ។

**១១៧) ស្រាយបញ្ជាក់ថា**  $a^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$

$$\text{យើងមាន : } \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} = a$$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} \\ &= \sqrt{\sqrt[3]{x^6} + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{\sqrt[3]{y^6} + \sqrt[3]{x^2 y^4}} \\ &= \sqrt{\sqrt[3]{x^4}(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})} + \sqrt{\sqrt[3]{y^4}(\sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{x^2})} \\ &= \sqrt[3]{x^2} \sqrt{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})} + \sqrt[3]{y^2} \sqrt{(\sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{x^2})} \\ &= \sqrt{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})} \cdot (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}) \\ &= \sqrt{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})^3} \end{aligned}$$

ចំពោះ  $a = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}}$

យើងអាចទាញបានជា :  $a^2 = (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})^3$

ឬ  $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}$

តាមរូបមន្ត :  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

យើងបាន :  $a^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$

ដូចនេះ យើងស្រាយបានថា  $a^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$  ។

**១១៨** > ប្រៀបធៀបចំនួន  $\sqrt{2001} + \sqrt{2002}$  និង  $2\sqrt{2002}$

យើងដឹងថា  $\sqrt{2001} < \sqrt{2002}$

ថែមអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនឹង  $\sqrt{2002}$  យើងបាន :

$\sqrt{2001} + \sqrt{2002} < \sqrt{2002} + \sqrt{2002}$

សមមូល  $\sqrt{2001} + \sqrt{2002} < 2\sqrt{2002}$

ដូចនេះ ប្រៀបធៀបបាន  $\sqrt{2001} + \sqrt{2002} < 2\sqrt{2002}$  ។

**១១៩** > ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $A$  ជាការប្រាកដនៃចំនួនគត់

យើងមាន  $A = \underbrace{111\dots111}_{2n \text{ នៃលេខ } 1} + \underbrace{444\dots44}_{n \text{ នៃលេខ } 4} + 1$

$A = \frac{1}{9} \underbrace{(999\dots999)}_{2n \text{ នៃលេខ } 9} + \frac{4}{9} \underbrace{(999\dots99)}_{n \text{ នៃលេខ } 9} + 1$

$A = \frac{1}{9}(10^{2n} - 1) + \frac{4}{9}(10^n - 1) + 1$

$= \frac{1}{9} \cdot 10^{2n} - \frac{1}{9} + \frac{4}{9} \cdot 10^n - \frac{4}{9} + 1$

$= \frac{1}{9} \cdot 10^{2n} + \frac{4}{9} \cdot 10^n + \frac{4}{9}$

$= \frac{1}{9}(10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 4)$

$= \frac{1}{3^2}(10^n + 2)^2 = \left[ \frac{1}{3}(10^n - 1 + 3) \right]^2$

$= \left( \frac{10^n - 1}{3} + 1 \right)^2 = \left( \frac{999\dots99}{3} + 1 \right)^2$

$= \underbrace{(333\dots33 + 1)}_{n \text{ នៃលេខ } 3}^2 = \underbrace{333\dots34^2}_{(n-1) \text{ នៃលេខ } 3}$

ដូចនេះ ចំនួន  $A$  ជាការប្រាកដនៃចំនួនគត់ ។

**១២០** > សម្រួលកន្សោម  $E$  :

យើងមាន :

$E = \frac{1}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2} \cdot \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) + \frac{2}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^3} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{q}} \right)$

$= \frac{1}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2} \cdot \left( \frac{p+q}{pq} \right) + \frac{2}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^3} \cdot \left( \frac{\sqrt{p} + \sqrt{q}}{\sqrt{pq}} \right)$

$= \frac{1}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2} \left( \frac{p + 2\sqrt{pq} + q - 2\sqrt{pq}}{pq} \right) + \frac{2}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 \sqrt{pq}}$

$= \frac{1}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2} \left( \frac{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 - 2\sqrt{pq}}{pq} \right) + \frac{2}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 \sqrt{pq}}$

$= \frac{1}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2} \left( \frac{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2}{pq} - \frac{2\sqrt{pq}}{pq} \right) + \frac{2}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 \sqrt{pq}}$

$= \frac{1}{pq} - \frac{2}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 \sqrt{pq}} + \frac{2}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 \sqrt{pq}}$

$= \frac{1}{pq}$

ដូចនេះ សម្រួលបាន  $E = \frac{1}{pq}$  ។

**១២១** > សម្រួលកន្សោម  $E$  :

យើងមាន :  $A = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$

(ស្រដៀងលំហាត់លេខ ១០ ទំព័រ 1)

តាមរូបមន្ត :  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

យើងបាន :

$A^3 = \left( 3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}} \right) + \left( 3 - \sqrt{9 + \frac{125}{27}} \right) +$

$+ 3\sqrt[3]{\left( 3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}} \right) \left( 3 - \sqrt{9 + \frac{125}{27}} \right)} A$

$= 6 + 3\sqrt[3]{3^2 - \left( \sqrt{9 + \frac{125}{27}} \right)^2} A$

$= 6 + 3\sqrt[3]{-\frac{125}{27}} A$

នាំឱ្យបាន :  $A^3 = 6 - 5A$

$$A^3 + 5A - 6 = 0$$

$$A^3 - A + 6A - 6 = 0$$

$$A(A^2 - 1) + 6(A - 1) = 0$$

$$(A - 1)(A^2 + A + 6) = 0$$

នាំឱ្យ  $A - 1 = 0 \Rightarrow A = 1$

ហើយ  $A^2 + A + 6 > 0$

$$\text{ព្រោះ} \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = 1 - 24 < 0 \end{cases}$$

ដូចនេះ ក្រោយពីសម្រួលបែបបច្ចេកទេស  $A = 1$  ។

**១២២** ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

តាង  $A = \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$

$$A^3 = \sqrt{2} - 1$$

$$= \frac{(\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{2^2})}{(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{2^2})}$$

$$A^3 = \frac{\sqrt{2}^3 - 1^3}{(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})} = \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}}$$

ហើយ  $B = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

$$B = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{9}}(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{9}(1+\sqrt[3]{2})}(1+\sqrt[3]{2})(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{9}(1+\sqrt[3]{2})}(1^3 + \sqrt[3]{2^3})$$

$$B = \frac{3}{\sqrt[3]{9}(1+\sqrt[3]{2})}$$

$$B^3 = \frac{27}{9(1+\sqrt[3]{2})^3} = \frac{3}{1+3 \cdot 1^2 \cdot \sqrt[3]{2} + 3 \cdot 1 \cdot \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2^3}}$$

$$= \frac{3}{3+3\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$$

ឃើញថា  $A^3 = B^3 \Rightarrow A = B$

ដូចនេះ ស្រាយបានថា  $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$  ។

**១២៣** គណនាតម្លៃលេខនៃកន្សោម  $S$  :

យើងមាន :  $S = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}}$  ,  $S > 0$

នាំឱ្យ  $S^2 = 6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}}$

$$S^2 = 6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}}$$

$$S^2 = 6 + S$$

$$S^2 - S - 6 = 0$$

$$\text{មាន } \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 25 = 5^2$$

$$\text{យើងបាន } \begin{cases} S_1 = \frac{-(-1)-5}{2(1)} = -2 \\ S_2 = \frac{-(-1)+5}{2(1)} = 3 \end{cases}$$

ចំពោះ  $S_1 = -2$  មិនយក ព្រោះ  $S > 0$

ដូចនេះ តម្លៃលេខគណនាបានគឺ  $S = 3$  ។

**១២៤** គណនាតម្លៃនៃ  $\frac{b+c}{a+b}$  :

យើងមាន  $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = 2011$  ដែល  $a \neq 0, b \neq 0$

$$\text{ទាញបាន } \frac{b}{a} = 2011 \Rightarrow b = 2011a$$

$$\text{ហើយ } \frac{c}{b} = 2011 \Rightarrow c = 2011b$$

$$\text{នាំឱ្យ } \frac{b+c}{a+b} = \frac{2011a+2011b}{a+b} = \frac{2011(a+b)}{a+b} = 2011$$

ដូចនេះ តម្លៃគណនាបានគឺ  $\frac{b+c}{a+b} = 2011$  ។

**១២៥** ដោះស្រាយសមីការ

$$\text{យើងមាន } \frac{x-1}{1991} + \frac{x-5}{1987} + \frac{x-7}{1999} + \frac{x-11}{1981} = 4$$

$$\frac{x-1}{1991} - 1 + \frac{x-5}{1987} - 1 + \frac{x-7}{1999} - 1 + \frac{x-11}{1981} - 1 = 0$$

$$\frac{x-1-1991}{1991} + \frac{x-5-1987}{1987} + \frac{x-7-1999}{1999} + \frac{x-11-1981}{1981} = 0$$

$$\frac{x-1992}{1991} + \frac{x-1992}{1987} + \frac{x-1992}{1999} + \frac{x-1992}{1981} = 0$$

$$(x-1992) \left( \frac{1}{1991} + \frac{1}{1987} + \frac{1}{1999} + \frac{1}{1981} \right) = 0$$

នាំឱ្យ  $x-1992=0 \Rightarrow x=1992$

ដូចនេះ សមីការមានឫស  $x=1992$  ។

**១២៦) ដោះស្រាយសមីការ**

យើងមានសមីការ  $x^{2000} + \sqrt{6}x^{1998} = (\sqrt{2} + \sqrt{3})x^{1999}$

ទាញបាន  $x^{2000} - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x^{1999} + \sqrt{6}x^{1998} = 0$   
 $[x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6}]x^{1998} = 0$

នាំឱ្យ  $x^{1998} = 0 \Rightarrow x = 0$

$x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$

សមីការនេះមាន  $S = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ,  $P = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$

យើងបាន  $\sqrt{2}$  និង  $\sqrt{3}$  ជាឫសនៃសមីការ

ដូចនេះ សមីការមានឫសបីគឺ  $x = \{0, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$  ។

**១២៧) ដោះស្រាយសមីការ  $\log_2 \log_3 \log_4 x = 2$**

យើងមាន  $\log_2 \log_3 \log_4 x = 2$

យើងបាន  $\log_2 \log_3 \log_4 x = 2 \log_2 2$

$\log_2 \log_3 \log_4 x = \log_2 2^2$

$\log_3 \log_4 x = 4$

$\log_3 \log_4 x = 4 \log_3 3$

$\log_4 x = 3^4$

$\log_4 x = 81 \log_4 4$

$x = 4^{81}$

ដូចនេះ សមីការមានឫស  $x = 4^{81}$  ។

(រូបមន្តលោការីត  $\log_a x = k \Leftrightarrow x = a^k$ )

**១២៨) គណនាផលបូក  $A = 1 + 11 + 111 + \dots + 111\dots 11$**

យើងមាន  $A = 1 + 11 + 111 + \dots + 111\dots 11$  តួចុងមានលេខ

1 ចំនួន  $n$  ដង យើងអាចសរសេរ :

$9A = 9 + 99 + 999 + \dots + 999\dots 99$  (តួចុងមាន  $n$  ដងលេខ 9)

$9A = (10-1) + (100-1) + (1000-1) + \dots + (10^n - 1)$

$9A = 10 + 100 + 1000 + \dots + 10^n - n$  (\*)

ដោយគុណ (\*) នឹង 10 យើងបាន :

$90A = 100 + 1000 + 10000 + \dots + 10^{n+1} - 10n$  (\*\*)

យើងយក (\*\*) - (\*) យើងបាន :

$$\begin{cases} 90A = 100 + 1000 + 10000 + \dots + 10^{n+1} - 10n \\ 9A = 10 + 100 + 1000 + \dots + 10^n - 10 \end{cases}$$

$$81A = 10^{n+1} - 9n - 10$$

ឬអាចសរសេរ :  $A = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$

ដូចនេះ ផលបូកគឺ  $A = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$  ។

**១២៩) ដោះស្រាយសមីការ ក.  $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$**

អ្នកត្រូវចាំ រូបមន្ត :  $[f(x)]^{u(x)} = [f(x)]^{v(x)}$   
 នាំឱ្យបាន  $\begin{cases} f(x) > 0 \\ [f(x)-1][u(x)-v(x)] = 0 \end{cases}$

យើងមាន :  $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$

អាចសរសេរ  $x^{\sqrt{x}} = x^{\frac{x}{2}}$

នាំឱ្យបាន  $\begin{cases} x > 0 \\ [x-1]\left[\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right] = 0 \end{cases}$

យើងបាន •  $x-1=0 \Rightarrow x=1$

•  $\sqrt{x} - \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = \frac{x^2}{4}$

ឬ  $4x = x^2 \Leftrightarrow 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(4-x) = 0$

នាំឱ្យ  $x=0$ ,  $x=4$

ចំពោះ  $x=0$  មិនយក ព្រោះ  $x > 0$

ដូចនេះ សមីការមានឫស  $x=1 \vee x=4$  ។

ខ.  $(x^x)^x = x^{(x^x)}$  (លំនាំដូចសំណួរ ក.)

យើងបាន :  $x^{x \cdot x} = x^{(x^x)} \Leftrightarrow x^{x^2} = x^{(x^x)}$

នាំឱ្យបាន  $\begin{cases} x > 0 \\ [x-1][x^2 - x^x] = 0 \end{cases}$

យើងបាន •  $x-1=0 \Rightarrow x=1$

•  $x^2 - x^x = 0 \Leftrightarrow x^2 = x^x \Rightarrow x=2$

ដូចនេះ សមីការមានឫស  $x=1$  ឬ  $x=2$  ។

**១៣០** គណនា  $a+b+c$

$$\text{យើងមាន } \begin{cases} a+b^2+2ac=29 \\ b+c^2+2ab=18 \\ c+a^2+2bc=25 \end{cases}$$

ដោយបូកអង្គនិងអង្គ យើងបាន :

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac+a+b+c &= 72 \\ (a+b+c)^2+(a+b+c) &= 72 \\ (a+b+c)^2+(a+b+c)-72 &= 0 \end{aligned}$$

តាង  $t=a+b+c$  យើងបាន :

$$\text{សមីការឆ្លើយសរសេរ និងងាយគិត } t^2+t-72=0$$

$$\text{មាន } \Delta=1+288=289=17^2$$

$$\text{នាំឱ្យ } \begin{cases} t=\frac{-1-17}{2}=-9 \\ t=\frac{-1+17}{2}=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=-9 \\ a+b+c=8 \end{cases}$$

ដូចនេះ គណនាបាន  $(a+b+c)=\{-9, 8\}$  ។

**១៣១** គណនាផលបូក  $S=1+2+3+\dots+2011$

$$\text{យើងមាន } S=1+2+3+\dots+2011 \quad (1)$$

$$\text{ប្តូរសរសេរ } S=2011+2010+2009+\dots+1 \quad (2)$$

ដោយយក (1)+(2) យើងបាន :

$$\begin{aligned} &+ \begin{cases} S=1+2+3+\dots+2011 \\ S=2011+2010+2009+\dots+1 \end{cases} \\ \hline 2S &= 2012+2012+2012+\dots+2012 \\ &\text{ដែលមានលេខ } 2012 \text{ ចំនួន } 2011 \text{ ដង} \end{aligned}$$

យើងបាន :

$$\begin{aligned} 2S &= 2012 \times 2011 \\ S &= \frac{2012 \times 2011}{2} = 1006 \times 2011 = 2023066 \end{aligned}$$

ដូចនេះ ផលបូកគណនាបានគឺ  $S=2023066$  ។

**១៣២** រកចំនួនសិស្សស្រីនៅក្នុងថ្នាក់

តាង  $x$  ជាចំនួនសិស្សប្រុស

$y$  ជាចំនួនសិស្សស្រី ដែល  $x>0, y>0$

បម្រាប់ : កម្ពស់ មធ្យមសិស្សប្រុស  $1.68m$

កម្ពស់ មធ្យមសិស្សស្រី  $1.60m$

កម្ពស់ មធ្យមសិស្សនៅក្នុងថ្នាក់  $1.66m$

យើងបានសមីការ :  $1.68x+1.60y=1.66 \cdot 28$

$$1.68x+1.60y=46.48 \quad (1)$$

សិស្សសរុបក្នុងថ្នាក់ :  $x+y=28$

$$\text{ឬ } 1.68x+1.68y=28 \cdot 1.68$$

$$1.68x+1.68y=47.04 \quad (2)$$

ដោយយក (2)-(1) យើងបាន :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 1.68x+1.68y=47.04 \\ 1.68x+1.60y=46.48 \end{cases} \\ \hline &0.08y=0.56 \Rightarrow y=\frac{0.56}{0.08}=7 \end{aligned}$$

ដូចនេះ ចំនួនសិស្សស្រីនៅក្នុងថ្នាក់គឺ 7 នាក់ ។

**១៣៣** គណនាកន្សោម  $A$

យើងមាន :

$$A=(a+b+c)^2-(-a+b+c)^2+(a+b-c)^2-(a-b+c)^2$$

ដោយប្រើរូបមន្ត  $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$  យើងបាន :

$$\begin{aligned} A &= [(a+b+c)-(-a+b+c)][(a+b+c)+(-a+b+c)] + \\ &\quad + [(a+b-c)-(a-b+c)][(a+b-c)+(a-b+c)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= [a+b+c+a-b-c][a+b+c-a+b+c] + \\ &\quad + [a+b-c-a+b-c][a+b-c+a-b+c] \end{aligned}$$

$$A=(2a)(2b+2c)+(2b-2c)(2a)$$

$$A=2a(2b+2c+2b-2c)=2a \times 4b=8ab$$

ដូចនេះ កន្សោមដែលគណនាបានគឺ  $A=8ab$  ។

**១៣៤** បង្ហាញថា  $\frac{2011}{b^2+c^2-a^2}+\frac{2011}{c^2+a^2-b^2}+\frac{2011}{a^2+b^2-c^2}=0$

យើងមាន  $a+b+c=0$  នាំឱ្យ :

$$\begin{aligned} \bullet b+c &= -a \Leftrightarrow (b+c)^2 = (-a)^2 \\ &\Leftrightarrow b^2+2bc+c^2 = a^2 \\ &\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2 = -2bc \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet c+a &= -b \Leftrightarrow (c+a)^2 = (-b)^2 \\ &\Leftrightarrow c^2+2ca+a^2 = b^2 \\ &\Leftrightarrow c^2+a^2-b^2 = -2ca \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet a + b = -c &\Leftrightarrow (a+b)^2 = (-c)^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = -2ab \quad (3) \end{aligned}$$

តាមរយៈ (1) , (2) & (3) យើងបាន :

$$\begin{aligned} &\frac{2011}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{2011}{c^2 + a^2 - b^2} + \frac{2011}{a^2 + b^2 - c^2} \\ &= \frac{2011}{-2bc} + \frac{2011}{-2ca} + \frac{2011}{-2ab} \\ &= \frac{2011a + 2011b + 2011c}{-2abc} \\ &= \frac{2011(a+b+c)}{-2abc} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ដូចនេះ  $\boxed{\frac{2011}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{2011}{c^2 + a^2 - b^2} + \frac{2011}{a^2 + b^2 - c^2} = 0}$  ។

**១៣៥ កំណត់តម្លៃ a និង b**

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន : } (x^2 + px + q)^2 &= x^4 + p^2x^2 + q^2 + 2px^3 + 2qx^2 + 2pqx \\ &= x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2 \end{aligned}$$

$$\text{បម្រាប់ : } x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + 1 = (x^2 + px + q)^2$$

យើងបាន

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + 1 &= x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2 \end{aligned}$$

$$\text{ទាញបាន : } \begin{cases} 2p = 2 \\ p^2 + 2q = a \\ 2pq = b \\ q^2 = 1 \end{cases} \text{ សមមូល } \begin{cases} p = 1 \\ p^2 + 2q = a \\ 2pq = b \\ q = \pm 1 \end{cases}$$

$$\text{ចំពោះ } \begin{cases} p^2 + 2q = a \\ 2pq = b \end{cases}$$

-ករណី  $p=1 \& q=1$

$$\text{នាំឱ្យ } \begin{cases} 1^2 + 2 \cdot 1 = a \\ 2 \cdot 1 \cdot 1 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

-ករណី  $p=1 \& q=-1$

$$\text{នាំឱ្យ } \begin{cases} 1^2 + 2 \cdot (-1) = a \\ 2 \cdot 1 \cdot (-1) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

ដូចនេះ  $\boxed{\text{តម្លៃកំណត់បានគឺ } \begin{cases} (a=3, b=2) \\ (a=-1, b=-2) \end{cases}}$  ។

**១៣៦ ចូរស្រាប័ក្តីថា**  $\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}} + \sqrt[4]{49-20\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}$

ពិនិត្យ :

$$\begin{aligned} &\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}} + \sqrt[4]{49-20\sqrt{6}} \\ &= \sqrt[4]{25+20\sqrt{6}+24} + \sqrt[4]{25-20\sqrt{6}+24} \\ &= \sqrt[4]{5^2+20\sqrt{6}+(2\sqrt{6})^2} + \sqrt[4]{5^2-20\sqrt{6}+(2\sqrt{6})^2} \\ &= \sqrt[4]{(5+2\sqrt{6})^2} + \sqrt[4]{(5-2\sqrt{6})^2} \\ &= \sqrt{5+2\sqrt{6}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} \\ &= \sqrt{\sqrt{3}^2+2\sqrt{6}+\sqrt{2}^2} + \sqrt{\sqrt{3}^2-2\sqrt{6}+\sqrt{2}^2} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

ដូច្នេះ  $\boxed{\text{យើងបំភ្លឺបានថា } \sqrt[4]{49+20\sqrt{6}} + \sqrt[4]{49-20\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}}$  ។

**១៣៧ គណនា E :**

$$\begin{aligned} E &= \left(\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2 \\ &= \left[\left(\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}\right) - \left(\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}}\right)\right] \times \\ &\quad \left[\left(\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}\right) + \left(\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}}\right)\right] \\ &= \left(\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}\right) \times \\ &\quad \left(\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}}\right) \\ &= \left(-2\sqrt{3+\sqrt{5}}\right) \left(2\sqrt{3-\sqrt{5}}\right) \\ &= -4\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} \\ &= -4\sqrt{9-5} = -4\sqrt{4} = -8 \end{aligned}$$

ដូចនេះ  $\boxed{\text{គណនាបាន } E = -8}$  ។

**១៣៨ កំណត់តម្លៃ m និង n**

$$\text{យើងមាន } \frac{1}{x-3} + \frac{m}{x-4} = \frac{n}{(x-3)(x-4)}$$

ប្រភាគមានន័យកាលណា  $x \neq 3, x \neq 4$

តម្រូវភាគបែង រួចលុបភាគបែងចោល យើងបាន :

$$\begin{aligned}x - 4 + m(x - 3) &= n \\x - 4 + mx - 3m &= n \\x + mx &= n + 3m + 4 \\x &= \frac{n + 3m + 4}{1 + m}\end{aligned}$$

ដើម្បីឱ្យប្រភាគ  $x$  មានតម្លៃច្រើនរាប់មិនអស់ លុះត្រាតែ ភាគយកស្មើសូន្យ និងភាគបែងស្មើសូន្យ ដូចគ្នា

-យើងបាន :

$$\begin{cases} n + 3m + 4 = 0 \\ 1 + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -3m - 4 \\ m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 \\ m = -1 \end{cases}$$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បានគឺ  $m = n = -1$  ។

### ១៣៩ កំណត់តម្លៃ $a$

យើងមានប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases} x + y = a & (1) \\ 2x - y = 3 & (2) \end{cases}$$

ដោយបូកអង្គនិងអង្គ :

$$\begin{aligned}&+ \begin{cases} x + y = a \\ 2x - y = 3 \end{cases} \\&\hline 3x = a + 3 \Rightarrow x = \frac{a + 3}{3}\end{aligned}$$

តាមសមីការ (1):  $y = a - x = a - \frac{a + 3}{3} = \frac{2a - 3}{3}$

ដើម្បីឱ្យផ្ទៀងផ្ទាត់  $x > y$

យើងបាន :

$$\frac{a + 3}{3} > \frac{2a - 3}{3}$$

$$a + 3 > 2a - 3$$

$$a < 6$$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បានគឺ  $a < 6$  ។

### ១៤០ គណនា $D = (a-1)^{2010} + (b-1)^{2011} + (c-1)^{2012}$

សម្មតិកម្ម  $a + b + c = 0$  និង  $ab + bc + ca = 0$

នាំឱ្យបាន  $(a + b + c)^2 = 0$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2 \times 0 = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

យើងបានដឹងហើយថា បើ  $a, b, c$  នោះ

$$a^2 \geq 0, b^2 \geq 0 \text{ \& } c^2 \geq 0$$

-មានតែមួយករណីគត់ដែលធ្វើឱ្យ  $a^2 + b^2 + c^2 = 0$

គឺមានន័យថា  $a^2 = 0, b^2 = 0 \text{ \& } c^2 = 0$

នាំឱ្យ  $a = 0, b = 0 \text{ \& } c = 0$

យើងបាន :

$$\begin{aligned}D &= (a-1)^{2010} + (b-1)^{2011} + (c-1)^{2012} \\&= (0-1)^{2010} + (0-1)^{2011} + (0-1)^{2012} \\&= (-1)^{2010} + (-1)^{2011} + (-1)^{2012} = 1 - 1 + 1 = 1\end{aligned}$$

ដូចនេះ គណនាបាន  $D = 1$  ។

### ១៤១ គណនា $S$ :

យើងមាន :

$$S = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + 2010 \cdot 2012) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2010^2)$$

ពិនិត្យ

$$\begin{aligned}&1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + 2010 \cdot 2012 \\&= (2-1)(2+1) + (3-1)(3+1) + (4-1)(4+1) + \dots + (2011-1)(2011+1) \\&= (2^2 - 1) + (3^2 - 1) + (4^2 - 1) + \dots + (2011^2 - 1) \\&= 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 2011^2 - 2010\end{aligned}$$

នាំឱ្យ

$$\begin{aligned}S &= (2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 2011^2 - 2010) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2010^2) \\&= 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 2011^2 - 2010 - 1^2 - 2^2 - 3^2 - \dots - 2010^2 \\&= 2011^2 - 2010 - 1^2 \\&= 2011^2 - 2011 \\&= 2011(2011 - 1) \\&= 2011 \times 2010 = 4042110\end{aligned}$$

ដូចនេះ គណនាបានគឺ  $S = 2011 \cdot 2010 = 4042110$  ។

### ១៤២ បង្ហាញថា $A$ ចែកដាច់នឹង 5 :

យើងមាន :

$$\begin{aligned}A &= 9^{2011} + 8^{2011} + 7^{2011} + 6^{2011} + 5^{2011} - 1^{2011} - 2^{2011} - 3^{2011} - 4^{2011} \\A &= (9^{2011} - 4^{2011}) + (8^{2011} - 3^{2011}) + (7^{2011} - 2^{2011}) + (6^{2011} - 1^{2011}) + 5^{2011}\end{aligned}$$

តាមរូបមន្ត :

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1})$$

យើងឃើញថា :

$$\begin{aligned}\bullet 9^{2011} - 4^{2011} &= (9 - 4)(9^{2010} \cdot 4 + 9^{2009} \cdot 4^2 + \dots + 9 \cdot 4^{2010}) \\&= 5k_1, \quad k_1 = (9^{2010} \cdot 4 + 9^{2009} \cdot 4^2 + \dots + 9 \cdot 4^{2010})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet 8^{2011} - 3^{2011} &= (8-3)(8^{2010} \cdot 3 + 8^{2009} \cdot 3^2 + \dots + 8 \cdot 3^{2010}) \\
 &= 5k_2, \quad k_2 = (8^{2010} \cdot 3 + 8^{2009} \cdot 3^2 + \dots + 8 \cdot 3^{2010}) \\
 \bullet 7^{2011} - 2^{2011} &= (7-2)(7^{2010} \cdot 2 + 7^{2009} \cdot 2^2 + \dots + 7 \cdot 2^{2010}) \\
 &= 5k_3, \quad k_3 = (7^{2010} \cdot 2 + 7^{2009} \cdot 2^2 + \dots + 7 \cdot 2^{2010}) \\
 \bullet 6^{2011} - 1^{2011} &= (6-1)(6^{2010} \cdot 1 + 6^{2009} \cdot 1^2 + \dots + 6 \cdot 1^{2010}) \\
 &= 5k_4, \quad k_4 = (6^{2010} \cdot 1 + 6^{2009} \cdot 1^2 + \dots + 6 \cdot 1^{2010}) \\
 \bullet 5^{2011} &= 5 \cdot 5^{2010} \\
 &= 5k_5, \quad k_5 = 5^{2010}
 \end{aligned}$$

យើងបាន :  $A = 5k_1 + 5k_2 + 5k_3 + 5k_4 + 5k_5$

$$= 5(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5)$$

ឃើញថា  $A$  ជាពហុគុណនៃ 5 មានន័យថា  $A$  ចែកដាច់នឹង 5

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា  $A$  ចែកដាច់នឹង 5 ។

### ១៤៣ ក. គណនា fog និងគណនា gof

យើងមាន  $f: x \rightarrow f(x) = px - 2$

$g: x \rightarrow g(x) = 4x + 3$

$$\begin{aligned}
 \text{នាំឱ្យ } fog &= f[g(x)] \\
 &= f[4x + 3] \\
 &= p(4x + 3) - 2 \\
 &= 4px + 3p - 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ហើយ } gof &= g[f(x)] \\
 &= g[px - 2] \\
 &= 4(px - 2) + 3 \\
 &= 4px - 8 + 3 \\
 &= 4px - 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ដូចនេះ } \text{គណនាបាន } fog &= 4px + 3p - 2 \\
 \text{ហើយ } gof &= 4px - 5
 \end{aligned}$$

ខ. គណនា p ដើម្បីឱ្យ fog = gof

យើងមាន fog = 4px + 3p - 2 និង gof = 4px - 5

$$\text{នាំឱ្យ } fog = gof$$

$$\begin{aligned}
 \text{នោះ } 4px + 3p - 2 &= 4px - 5 \\
 3p &= -5 + 2 \\
 p &= -1
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ តម្លៃគណនាបានគឺ  $p = -1$  ។

### ១៤៤ បង្ហាញថា $P_n = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}}$

យើងមាន  $P_n = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2^3} \times \dots \times \cos \frac{x}{2^n}$

តាមរូបមន្ត :  $\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$

យើងឱ្យតម្លៃ  $a = x, \frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \frac{x}{8}, \dots, \frac{x}{2^{n-1}}$

$$\begin{cases}
 \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\
 \sin \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \\
 \times \left\{ \begin{aligned}
 \sin \frac{x}{4} &= 2 \sin \frac{x}{8} \cos \frac{x}{8} \\
 &\vdots \\
 \sin \frac{x}{2^{n-1}} &= 2 \sin \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^n}
 \end{aligned} \right.
 \end{cases}$$

$$\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} \underbrace{\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \times \dots \times \cos \frac{x}{2^n}}_{P_n}$$

$$\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} P_n$$

$$\text{ទាញបាន } P_n = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}}$$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា  $P_n = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}}$  ។

### ១៤៥ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការក្នុង $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\text{យើងមាន : } \begin{cases} x^2 - y^2 = 5440 & (1) \\ PGCD(x, y) = 8 & (2) \end{cases}$$

-តាម (2) :  $PGCD(x, y) = 8$  មានន័យថា

$x = 8a$  &  $y = 8b$  ដែល  $a, b$  ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា

ហើយ  $a > b$  ព្រោះ  $x^2 - y^2 = 5440 > 0$

-តាម (1) :  $x^2 - y^2 = 5440$

$$(x - y)(x + y) = 5440$$

$$(8a - 8b)(8a + 8b) = 5440$$

$$8^2(a - b)(a + b) = 5440$$

$$(a-b)(a+b)=85$$

ដោយ  $a, b$  ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ និងដោះស្រាយក្នុង  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

យើងបានផលគុណកត្តានៃ  $85 = \begin{cases} 1 \times 85 \\ 5 \times 17 \end{cases}$  ដោយ  $a > b$

នោះយើងបាន :  $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=85 \end{cases} \text{ (i) } \text{ or } \begin{cases} a-b=5 \\ a+b=17 \end{cases} \text{ (ii)}$

$$(i) : \begin{cases} + \\ a-b=1 \\ a+b=85 \end{cases} \Rightarrow 2a=86 \Rightarrow a=43$$

$$\text{ហើយ } b=85-a=85-43=42$$

$$(ii) : \begin{cases} + \\ a-b=5 \\ a+b=17 \end{cases} \Rightarrow 2a=22 \Rightarrow a=11$$

$$\text{ហើយ } b=17-a=17-11=6$$

-ចំពោះ  $a=43, b=42$

$$\text{នាំឱ្យ } \begin{cases} x=8a=8 \cdot 43=344 \\ y=8b=8 \cdot 42=336 \end{cases}$$

-ចំពោះ  $a=11, b=6$

$$\text{នាំឱ្យ } \begin{cases} x=8a=8 \cdot 11=88 \\ y=8b=8 \cdot 6=48 \end{cases}$$

ដូចនេះ  $\boxed{\text{ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយពីរគឺ}} \\ \boxed{(x,y)=(344,336) \text{ ឬ } (x,y)=(88,48)} \quad \forall$

### ១៤៦ ដោះស្រាយសមីការក្នុងសំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ

យើងមាន :  $xy=3x+2y+37$

$$xy-3x-2y=37$$

$$xy-3x-2y+6=37+6$$

$$x(y-3)-2(y-3)=43$$

$$(y-3)(x-2)=43$$

ដោយដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ

មានន័យថា  $(y-3)$  និង  $(x-2)$  ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ

ហើយផលគុណចំនួនធម្មជាតិស្មើ 43 មានតែពីរករណីគឺ

$$43 = \begin{cases} 43 \times 1 \\ 1 \times 43 \end{cases} \text{ យើងបានកត្តានិមួយៗគឺ :}$$

$$\bullet \begin{cases} y-3=43 \\ x-2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=46 \\ x=3 \end{cases}$$

$$\text{ឬ } \bullet \begin{cases} y-3=1 \\ x-2=43 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=45 \end{cases}$$

ដូចនេះ  $\boxed{\text{សមីការមានចម្លើយ } (x=3, y=46) \text{ ឬ } (x=45, y=4)} \quad \forall$

### ១៤៧ បំភ្លឺថាចំនួន $N=(4n+3)^2-25$ ចែកដាច់នឹង 8

យើងមាន :  $N=(4n+3)^2-25$

$$=(4n+3)^2-5^2$$

$$=(4n+3-5)(4n+3+5)$$

$$=(4n-2)(4n+8)$$

$$=2(2n-1) \times 4(n+2)$$

$$=8(2n-1)(n+2)$$

ឃើញថា  $N$  ជាពហុគុណនៃ 8 មានន័យថា  $N$  ចែកដាច់នឹង 8

ដូចនេះ  $\boxed{\text{ឃើញថា } N=(4n+3)^2-25 \text{ ចែកដាច់នឹង } 8} \quad \forall$

### ១៤៨ បំភ្លឺថាចំនួន $a, b, c$ និង $d$ ជាតួនៃ សមាមាត្រ

សម្មតិកម្ម  $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ad+bc)^2$

$$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=a^2d^2+2adbc+b^2c^2$$

$$a^2c^2-2adbc+b^2d^2=0$$

$$(ac-bd)^2=0$$

$$ac-bd=0$$

$$ac=bd$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

ដូចនេះ  $\boxed{\text{យើងបានតួនៃសមាមាត្រ } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}} \quad \forall$

### ១៤៩ បង្ហាញថា $\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{x^2}{x^2+y^2}=1 \quad (*)$

សម្មតិកម្ម :  $ax+by=0$

នាំឱ្យ  $x=-\frac{by}{a} \Leftrightarrow x^2=\frac{b^2y^2}{a^2}$

យកតម្លៃ  $x^2=\frac{b^2y^2}{a^2}$  ជំនួសចូល  $(*)$  យើងបាន :

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{\frac{b^2 y^2}{a^2}}{\frac{b^2 y^2}{a^2} + y^2} &= 1 \\ \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{\frac{a^2}{b^2 y^2 + a^2 y^2}}{\frac{a^2}{b^2 y^2 + a^2 y^2}} &= 1 \\ \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2 y^2}{a^2} \times \frac{a^2}{b^2 y^2 + a^2 y^2} &= 1 \\ \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2 + a^2) y^2} &= 1 \\ \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} &= 1 \\ \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} &= 1 \end{aligned}$$

1=1 ពិត

ដូចនេះ ឃើញថា  $\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{x^2}{x^2+y^2} = 1$  ។

**១៥០** គណនាតម្លៃនៃ  $K = \frac{a^2+b^2+c^2}{2011}$

សម្មតិកម្ម :  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$   
 $\frac{bc+ac+ab}{abc} = 0$

នាំឱ្យ  $ab+bc+ac=0$  ដែល  $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

សម្មតិកម្មបន្ថែម :  $a+b+c=0$

នាំឱ្យ  $(a+b+c)^2 = 0$   
 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=0$   
 $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=0$   
 $a^2+b^2+c^2+2 \times 0 = 0$   
 $a^2+b^2+c^2=0$

ព្រោះ  $ab+bc+ac=0$

យើងបាន :  $K = \frac{a^2+b^2+c^2}{2011} = \frac{0}{2011} = 0$

ដូចនេះ តម្លៃគណនាបានគឺ  $K=0$  ។

**១៥១** បង្ហាញថា  $A$  ជាចំនួនគត់

យើងមាន :

$$\begin{aligned} A &= 2011\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}} \\ &= 2011\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{\sqrt{20^2-12\sqrt{5}+3^2}}}} \\ &= 2011\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}}} \\ &= 2011\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-2\sqrt{5}+3}} \\ &= 2011\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{\sqrt{5^2-2\sqrt{5}+1^2}}} \\ &= 2011\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} \\ &= 2011\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{5}+1} = 2011\sqrt{1} = 2011 \end{aligned}$$

ដូចនេះ ឃើញថា  $A=2011$  ជាចំនួនគត់ ។

**១៥២** ដោះស្រាយសមីការ

យើងមាន :  $\sqrt{x^2+4x+4} = \sqrt{x^2+2x+1}$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេ នោះយើងបាន :

$$\begin{aligned} x^2+4x+4 &= x^2+2x+1 \\ 2x &= -3 \\ x &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+4\left(-\frac{3}{2}\right)+4} &= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+2\left(-\frac{3}{2}\right)+1} \\ \sqrt{\frac{9}{4}-6+4} &= \sqrt{\frac{9}{4}-3+1} \\ \sqrt{\frac{9}{4}-2} &= \sqrt{\frac{9}{4}-2} \\ \sqrt{\frac{1}{4}} &= \sqrt{\frac{1}{4}} \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស  $x = -\frac{3}{2}$  ។

(បើមិនឱ្យលក្ខខណ្ឌ ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់ឱ្យត្រឹម)

**១៥៣ គណនាបំណុលកត់ត្រា**

តាង  $n$  ជាចំនួនទី២ នោះចំនួនទី១គឺ  $(n-1)$  និងទី៣គឺ  $(n+1)$

ដែល  $n$  ជាចំនួនគតិវិជ្ជមាន

-តាមបម្រាប់ប្រធានយើងសរសេរបាន :

$$\frac{(n-1)n(n+1)}{\left(\frac{(n-1)+n+(n+1)}{2}\right)^2} = \frac{130}{21}$$

$$\frac{(n-1)n(n+1)}{\left(\frac{3n}{2}\right)^2} = \frac{130}{21}$$

$$n(n-1)(n+1) = \frac{130}{21} \times \left(\frac{9n^2}{4}\right)$$

$$n(n^2 - 1) = \frac{195}{14} n^2$$

$$14(n^2 - 1) = 195n$$

$$14n^2 - 195n - 14 = 0$$

$$\text{មាន } \Delta = 195^2 - 4 \cdot 14 \cdot (-14)$$

$$= 38025 + 784 = 38809 = 197^2$$

$$\text{នាំឱ្យ } \bullet n_1 = \frac{-(-195) - 197}{2 \cdot 14} = -\frac{1}{14} \quad \text{មិនយក}$$

$$\bullet n_2 = \frac{-(-195) + 197}{2 \cdot 14} = 14$$

-ចំពោះ  $n = 14$

យើងបាន ចំនួនទី១គឺ  $n-1 = 14-1 = 13$

ចំនួនទី៣គឺ  $n+1 = 14+1 = 15$

ដូចនេះ ចំនួនគត់ទាំងបីគឺ 13, 14, 15 ។

**១៥៤ គណនាតម្លៃលេខនៃ xyz**

សម្មតិកម្ម :  $x^2yz^3 = 7^3$  (i) និង  $xy^2 = 7^9$  (ii)

ដោយយក (1)×(2) យើងបាន :

$$\begin{cases} x^2yz^3 = 7^3 \\ xy^2 = 7^9 \end{cases} \Rightarrow x^3y^3z^3 = 7^{12} \Rightarrow xyz = \sqrt[3]{7^{12}} = 7^{\frac{12}{3}} = 7^4$$

ដូចនេះ តម្លៃនៃ  $xyz = 7^4$  ។

**១៥៥ រកតម្លៃលេខនៃ**  $\frac{2^{2012} - 2^{2011}}{2^{2012} + 2^{2011}}$

$$\text{យើងមាន } \frac{2^{2012} - 2^{2011}}{2^{2012} + 2^{2011}} = \frac{2^{2011}(2-1)}{2^{2011}(2+1)} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{\text{តម្លៃនៃ } \frac{2^{2012} - 2^{2011}}{2^{2012} + 2^{2011}} = \frac{1}{3}} \quad \text{។}$$

**១៥៦ គណនាកន្សោម H :**

$$\text{យើងមាន } H = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

កន្សោមនេះមានភាគបែងរួម  $(a-b)(a-c)(b-c)$  នោះ

$$H = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} - \frac{b^2}{(b-c)(a-b)} + \frac{c^2}{(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{a^2b - a^2c - ab^2 + b^2c + ac^2 - bc^2}{(a^2 - ac - ab + bc)(b-c)}$$

$$= \frac{a^2b - a^2c - ab^2 + b^2c + ac^2 - bc^2}{a^2b - a^2c - abc + ac^2 - ab^2 + abc + b^2c - bc^2}$$

$$= \frac{a^2b - a^2c - ab^2 + b^2c + ac^2 - bc^2}{a^2b - a^2c - ab^2 + b^2c + ac^2 - bc^2} = 1$$

ដូចនេះ ក្រោយពីគណនា តម្លៃ  $H = 1$  ។

**១៥៧ រកក្រឡាផ្ទៃបំផុតនៃចម្ការ**

តាង  $a$  ជាប្រវែងទទឹង និង  $b$  ជាប្រវែងបណ្តោយ

បម្រាប់ : កូនឈើមាន 40 ដើម

គម្លាតនៃកូនឈើ 2m

នាំឱ្យ ចម្ការមានបរិមាត្រ  $P = 2 \times 40m$

តែ  $P = 2(a+b)$

$$\text{យើងបាន } 2(a+b) = 2 \times 40m \Leftrightarrow a+b = 40m$$

-ចំពោះចតុកោណកែងដែលមានបរិមាត្រដូចគ្នា គឺចតុកោណ

កែងមានទទឹងស្មើបណ្តោយមានផ្ទៃបំផុត ។

$$\text{នោះ } a=b \Rightarrow a+a=40 \Rightarrow a=20m$$

នាំឱ្យ ក្រឡាផ្ទៃធំបំផុតគឺ :

$$S_{Max} = ab = aa = a^2 = (20m)^2 = 400 m^2$$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃធំបំផុតនៃចម្ការគឺ  $S_{Max} = 400 m^2$  ។

### ១៥៨ បង្ហាញថាចំនួន $\sqrt{3}$ ពុំមែនជាចំនួនសនិទាន

(ចំនួនសនិទានជាចំនួនមានទម្រង់ជាប្រភាគ  $\frac{a}{b}$  ហើយ  $a$  និង  $b$  ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា (បឋមរវាងគ្នាគឺជាចំនួនដែលមិនមានករណីបំផុតនៃ  $a$  និង  $b$  ស្មើ 1))

-ឧបមាថា  $\sqrt{3}$  ជាចំនួនសនិទាន

នាំឱ្យ  $\sqrt{3}$  មានទម្រង់ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន

-តាង  $\sqrt{3} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow 3 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 3b^2$

-ឃើញថា  $a^2$  ជាពហុគុណនៃ 3 នោះ  $a$  ក៏ជាពហុគុណនៃ 3 ដែរ មានន័យថា  $a = 3k$ ,  $k$  ជាចំនួនគត់

-នាំឱ្យ  $a^2 = 3b^2 \Leftrightarrow (3k)^2 = 3b^2 \Leftrightarrow b^2 = 3k^2$

-ឃើញថា  $b^2$  ជាពហុគុណនៃ 3 នោះ  $b$  ក៏ជាពហុគុណនៃ 3 ដែរ មានន័យថា  $b = 3p$ ,  $p$  ជាចំនួនគត់

-នាំឱ្យ  $\sqrt{3} = \frac{a}{b} = \frac{3k}{3p} = \frac{k}{p}$  អាចសម្រួលបាន មានន័យថា

វាពុំបានគោរពតាមលក្ខខណ្ឌចំនួនសនិទាន នោះវាពុំមែនជាចំនួនសនិទានទេ (អញ្ចឹងមានតែ ជាចំនួនអសនិទាន)

ដូចនេះ ចំនួន  $\sqrt{3}$  ពុំមែនជាចំនួនសនិទាន ។

(ខាងលើនេះបកស្រាយតាមសំណើផ្ទុយ តក្កវិទ្យា)

### ១៥៩ ដោះស្រាយសមីការ $x^2 + y^2 = 0$

សម្មតិកម្ម:  $x$  និង  $y$  ជាចំនួនពិត នោះ  $x^2 \geq 0$  និង  $y^2 \geq 0$   
មានតែមួយករណីគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ  $x^2 + y^2 = 0$  គឺ  $x = 0$  &  $y = 0$

ដូចនេះ សមីការមានឬ  $x = 0$  &  $y = 0$  ។

(លំហាត់ខាងលើត្រូវការចំណេះដឹង ពុំមែនបច្ចេកទេសទេ)

### ១៦០ គណនា $A, B, C, D$ និង $E$ :

$$A = 2\frac{3}{4} = \frac{(2 \times 4) + 3}{4} = \frac{8 + 3}{4} = \frac{11}{4}$$

$$B = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$C = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{1 \times 4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$D = 2\left(\frac{3}{4}\right) = (2)\frac{(3)}{(2)(2)} = \frac{(3)}{(2)} = \frac{3}{2}$$

$$E = 2 + \frac{3}{4} = \frac{2 \times 4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8 + 3}{4} = \frac{11}{4}$$

### ១៦១ គណនា $A, B, C, D$ និង $E$ :

$$A = 2^{2^2} = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$B = (2^2)^2 = (4)^2 = 4 \cdot 4 = 16$$

$$C = 2^{2^2} = 2^4 = 16$$

$$D = 2^{2+2} = 2^4 = 16$$

$$E = 2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 4 = 8$$

### ១៦២ សរសេរជាទម្រង់ប្រភាគនៃ $A, B, C$ :

$$A = 1.\bar{2} \text{ មានន័យថា } A = 1.222222222222...$$

$$\text{នាំឱ្យ } 10A = 12.222222222222...$$

សិក្សាផលដក

$$\begin{array}{r} 10A = 12.222222222222... \\ - A = 1.222222222222... \\ \hline 9A = 11 \end{array} \Rightarrow A = \frac{11}{9}$$

$$B = 0.\bar{12} \text{ មានន័យថា } B = 0.121212121212...$$

$$\text{នាំឱ្យ } 100B = 12.121212121212...$$

សិក្សាផលដក

$$\begin{array}{r} 100B = 12.121212121212... \\ - B = 0.121212121212... \\ \hline 99B = 12 \end{array} \Rightarrow B = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

$C = 0.1\bar{2}$  មានន័យថា  $C = 0.122222222222...$

នាំឱ្យ  $10C = 0.122222222222...$

សិក្សាផលដក

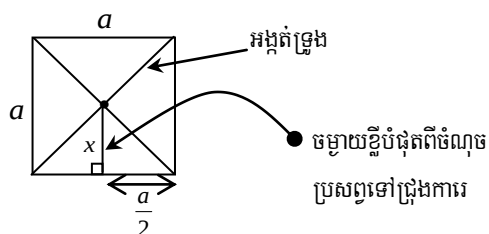
$$\begin{cases} 10C = 1.222222222222... \\ C = 0.122222222222... \end{cases} \Rightarrow \boxed{C = \frac{1.1}{9} = \frac{11}{90}}$$

$D = 1.2\bar{0}$  មានន័យថា

$$D = 1.2000000... = 1.2 = \frac{12}{10} = \boxed{\frac{6}{5}} \quad \forall$$

### ១៦៣ គណនាអង្កត់ទ្រូង និងចម្ងាយខ្ទប់ផុតពីចំណុច

ប្រសព្វរវាងអង្កត់ទ្រូងទៅជ្រុងការេ



-បើ  $d$  ជាប្រវែងអង្កត់ទ្រូងការេដែលមានជ្រុង  $a$  :

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាក្រី :  $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

នាំឱ្យ  $d = \sqrt{2a^2} \Rightarrow d = a\sqrt{2}$  ព្រោះ  $d > 0$

ដូចនេះ អង្កត់ទ្រូងការេ  $d = a\sqrt{2}$  ឯកតាប្រវែង ។

-ចម្ងាយខ្ទប់ផុតពីចំណុចប្រសព្វរវាងអង្កត់ទ្រូងទៅជ្រុងការេ គឺជាប្រវែងអង្កត់ដែលភ្ជាប់ពីចំណុចប្រសព្វនោះទៅចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុងការេនោះ ។

បើ  $x$  ជាប្រវែងខ្ទប់ផុតនោះ (តាមទ្រឹស្តីបទពីតាក្រី)

$$\text{យើងបាន : } x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

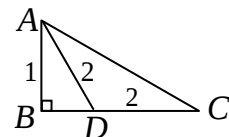
$$\begin{aligned} \text{ឬ } x &= \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ ចម្ងាយខ្ទប់ផុតគឺ  $x = \frac{a}{2}$  ឯកតាប្រវែង ។

### ១៦៤ គណនា AC

$ABC$  និង  $ABD$  ជាត្រីកោណកែង

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាក្រី :



-ចំពោះត្រីកោណកែង  $ABD$

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 + BD^2 \\ \Rightarrow BD^2 &= AD^2 - AB^2 \\ \Rightarrow BD &= \sqrt{AD^2 - AB^2} \\ \Rightarrow BD &= \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

-ចំពោះត្រីកោណកែង  $ABC$

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2} \\ &= \sqrt{AB^2 + (BD + DC)^2} \\ &= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3} + 2)^2} = \sqrt{1 + 3 + 4\sqrt{3} + 4} \\ &= \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \end{aligned}$$

ដូចនេះ ប្រវែង  $AC = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$  ។

### ១៦៥ ដោះស្រាយសមីការ

យើងមានសមីការ :

$$\begin{aligned} &(\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}})x - 2011 = 0 \\ &(\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}})(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}})})x - 2011 = 0 \\ &(\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2^2 - (\sqrt{2 + \sqrt{3}})^2})x - 2011 = 0 \\ &(\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2^2 - (\sqrt{2 + \sqrt{3}})^2})x - 2011 = 0 \\ &(\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 - 2 - \sqrt{3}})x - 2011 = 0 \\ &(\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}})x - 2011 = 0 \\ &(\sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})})x = 2011 \\ &(\sqrt{4 - 3})x = 2011 \end{aligned}$$

$$x = 2011$$

ដូចនេះ ឬសនៃសមីការ  $x = 2011$  ។

**១៦៦) ដោះស្រាយសមីការ**

យើងមានសមីការ :

$$\begin{aligned}(x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x + 3) &= x^2 + 2x + 7 \\ (x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x + 3) &= (x^2 + 2x + 3) + 4 \\ (x^2 + 2x + 4) - (x^2 + 2x + 3) &= 4 \\ (x^2 + 2x + 3)[(x^2 + 2x + 4) - 1] &= 4 \\ (x^2 + 2x + 3)^2 &= 2^2 \\ (x^2 + 2x + 3) &= \pm 2\end{aligned}$$

-ចំពោះ  $x^2 + 2x + 3 = 2$

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 1 &= 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow x+1 &= 0 \\ \Rightarrow x &= -1\end{aligned}$$

-ចំពោះ  $x^2 + 2x + 3 = -2$

$$x^2 + 2x + 1 = -4 \Leftrightarrow (x+1)^2 = -2$$

ដោយ  $(x+1)^2 \geq 0$

នាំឱ្យ  $(x+1)^2 = -2$  ជាសមីការគ្មានឫស

ដូចនេះ សមីការមានឫស  $x = -1$  ។

**១៦៧) ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $aS_{n+1} + bS_n + cS_{n-1} = 0$**

ដោយ  $x_1$  និង  $x_2$  ជាឫសនៃសមីការ  $ax^2 + bx + c = 0$

នោះវាផ្ទៀងផ្ទាត់ : 
$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \end{cases}$$

យើងអាចគុណថែម 
$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = 0 & | x_1^{n-1} \\ ax_2^2 + bx_2 + c = 0 & | x_2^{n-1} \end{cases}$$

យើងបាន 
$$\begin{aligned}&\begin{cases} ax_1^{2+n-1} + bx_1^{1+n-1} + cx_1^{n-1} = 0 \\ ax_2^{2+n-1} + bx_2^{1+n-1} + cx_2^{n-1} = 0 \end{cases} \\ &+ \begin{cases} ax_1^{n+1} + bx_1^n + cx_1^{n-1} = 0 \\ ax_2^{n+1} + bx_2^n + cx_2^{n-1} = 0 \end{cases} \\ &\hline a(x_1^{n+1} + x_2^{n+1}) + b(x_1^n + x_2^n) + c(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) &= 0 \end{aligned}$$

ដោយ  $S_n = x_1^n + x_2^n$  នោះ  $S_{n-1} = x_1^{n-1} + x_2^{n-1}$

ហើយ  $S_{n+1} = x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$

ដូចនេះ យើងបាន  $aS_{n+1} + bS_n + cS_{n-1} = 0$  ។

**១៦៨) គណនា  $\frac{x^2}{y^2}$**

$$\begin{aligned}\text{គេឱ្យ } \frac{x^2 + 2y^2}{306} &= \frac{x^2 - 2y^2}{294} \\ 294(x^2 + 2y^2) &= 306(x^2 - 2y^2) \\ 6 \times 49(x^2 + 2y^2) &= 6 \times 51(x^2 - 2y^2) \\ 49x^2 + 92y^2 &= 51x^2 - 102y^2 \\ 49x^2 - 51x^2 &= -92y^2 - 102y^2 \\ -2x^2 &= -200y^2 \\ \frac{x^2}{y^2} &= \frac{-200}{-2} \\ \frac{x^2}{y^2} &= 100\end{aligned}$$

ដូចនេះ គណនាបាន  $\frac{x^2}{y^2} = 100$  ។

**១៦៩) គណនា A :**

គេឱ្យ  $A = (x+2)^2 - 2(x+2)(x-8) + (x-8)^2$

តាមរូបមន្ត  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

យើងបាន 
$$\begin{aligned}A &= [(x+2) - (x-8)]^2 \\ &= [(x+2) - (x-8)]^2 \\ &= [x+2 - x+8]^2 \\ &= 10^2 = 100\end{aligned}$$

ចំពោះ  $x = 2011^{2012}$  គ្មានទាក់ទងនឹងតម្លៃរបស់ A

ដូចនេះ យើងគណនាបាន  $A = 100$  ។

**១៧០) ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$**

គេឱ្យ  $a + b + c = 1$

នាំឱ្យ 
$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= 1^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc &= 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc) &= 1 \quad (1)\end{aligned}$$

សម្មតិកម្មបន្ថែម  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

$$\frac{bc + ac + ab}{abc} = 0$$

$\Rightarrow bc + ac + ab = 0$  ,  $abc \neq 0$

នាំឱ្យសមីការ (1) ទៅជា :

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2 \times 0 = 1$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

ដូចនេះ យើងឃើញថា  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  ពិតមែន ។

### ១៧១ រកពីរចំនួនពិត

តាង  $a$  និង  $b$  ជាពីរចំនួនពិតដែលត្រូវរកនោះ

តាមបម្រាប់ :  $a + b = 13$  (1)

ហើយផលបូកចម្រាស់គឺ  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{13}{40}$  (2)

តាម (2):  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{13}{40} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{13}{40}$

ទាញបានផលគុណ  $ab = 40$  (3)

តាម (1) & (3) យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ:  $\begin{cases} a+b=13 \\ ab=40 \end{cases}$

ដោយស្គាល់ផលបូក និងផលគុណយើងបានសមីការដឺក្រេទី២

ដែលមាន  $a$  និង  $b$  ជាឫស គឺសមីការ :  $x^2 - 13x + 40 = 0$

មាន  $\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40 = 169 - 160 = 9 = 3^2$

នាំឱ្យ  $\begin{cases} a = \frac{-(-13)-3}{2 \cdot 1} = \frac{10}{2} = 5 \\ b = \frac{-(-13)+3}{2 \cdot 1} = \frac{16}{2} = 8 \end{cases}$

ឬ  $\begin{cases} b = \frac{-(-13)-3}{2 \cdot 1} = \frac{10}{2} = 5 \\ a = \frac{-(-13)+3}{2 \cdot 1} = \frac{16}{2} = 8 \end{cases}$

ដូចនេះ ពីរចំនួនពិតរកបាន  $\begin{cases} a=5 \\ b=8 \end{cases}$  ឬ  $\begin{cases} a=8 \\ b=5 \end{cases}$  ។

### ១៧២ ក. ដោះស្រាយសមីការ ចំពោះ $k = 3$

គេឱ្យ  $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = k$

$[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)] = 3$

$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 3$

$[(x^2 + 5x + 5) - 1][(x^2 + 5x + 5) + 1] = 3$

$(x^2 + 5x + 5)^2 - 1^2 = 3$

$(x^2 + 5x + 5)^2 - 2^2 = 0$

$(x^2 + 5x + 5 - 2)(x^2 + 5x + 5 + 2) = 0$

$(x^2 + 5x + 3)(x^2 + 5x + 7) = 0$

នាំឱ្យកត្តានិមួយៗស្មើសូន្យ យើងបាន :

•  $x^2 + 5x + 3 = 0$

មាន  $\Delta = 25 - 12 = 13$

នាំឱ្យ  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$

•  $x^2 + 5x + 7 = 0$

មាន  $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 25 - 28 = -3 < 0 \end{cases}$

នាំឱ្យ សមីការគ្មានឫស

ដូចនេះ ចំពោះ  $k = 3$  សមីការមានឫស  $x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$  ។

### ខ. កំណត់តម្លៃ $k$ ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫស

ពីសម្រាយខាងលើពិនិត្យត្រង់កន្សោម :

$$(x^2 + 5x + 5)^2 - 1^2 = k$$

$$(x^2 + 5x + 5)^2 = k + 1$$

ដោយ  $(x^2 + 5x + 5)^2 \geq 0$

នាំឱ្យ  $k + 1 \geq 0 \Leftrightarrow k \geq -1$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បានគឺ  $k \geq -1$  ។

### ១៧៣ ប្រៀបធៀបពីរចំនួន $200^{300}$ និង $300^{200}$

ពិនិត្យ :  $200^{300} = (200^3)^{100} = (8000000)^{100}$

ហើយ  $300^{200} = (300^2)^{100} = (90000)^{100}$

តាមរយៈលទ្ធផលបង្ហាញថា  $(8000000)^{100} > (90000)^{100}$

ដូចនេះ ទាញបានថា  $200^{300} > 300^{200}$  ។

### ១៧៤ ប្រៀបធៀបពីរចំនួន $31^{11}$ និង $17^{14}$

ពិនិត្យ :  $31^{11} < 32^{11} = 2^{55} = 2^{55}$  នោះ  $31^{11} < 2^{55}$

ហើយ  $17^{14} > 16^{14} = 2^{56} = 2^{56}$  នោះ  $17^{14} > 2^{56}$

ដោយ  $31^{11} < 2^{55} < 2^{56} < 17^{14}$

ដូចនេះ ប្រៀបធៀបបាន  $31^{11} < 17^{14}$  ។

**១៧៥** ▶ **គណនា**  $1+a+a^2+a^3+\dots+a^{2010}$

បម្រាប់ :  $a$  ជាបួសនៃសមីការ  $x^{2011}=1$

មានន័យថា វាផ្ទៀងផ្ទាត់  $a^{2011}=1$

យើងបាន :  $a^{2011}-1=0$

$$(a-1)(a^{2011}+a^{2010}+a^{2009}+\dots+a+1)=0$$

ឬអាចសរសេរ :  $(a-1)(1+a+a^2+a^3+\dots+a^{2010})=0$

សម្មតិកម្ម :  $a \neq 1$  នោះ  $a-1 \neq 0$

ដូច្នេះមានតែកត្តា  $(1+a+a^2+a^3+\dots+a^{2010})=0$

ដែលនាំឱ្យផលគុណ  $(a-1)(1+a+a^2+a^3+\dots+a^{2010})=0$

ដូចនេះ គណនាបាន  $1+a+a^2+a^3+\dots+a^{2010}=0$  ។

**១៧៦** ▶ **គណនា**  $S=3+3^2+3^3+\dots+3^n$

យើងមាន :  $S=3+3^2+3^3+\dots+3^n$  (1)

យក(1)×3:  $3S=3^2+3^3+\dots+3^{n+1}$  (2)

ដោយយក (2)-(1) យើងបាន :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3S=3^2+3^3+3^4+\dots+3^{n+1} \\ S=3+3^2+3^3+\dots+3^n \end{cases} \\ & \hline 2S=3^{n+1}-3 \end{aligned} \Rightarrow S=\frac{3^{n+1}-3}{2}$$

ដូចនេះ គណនាបាន  $S=\frac{3^{n+1}-3}{2}$  ។

**១៧៧** ▶ **គណនា**  $A$  :

ពិនិត្យតួនិមួយៗមានរាង

$$\begin{aligned} \left(1-\frac{1}{n^2}\right) &= \frac{n^2-1}{n^2} \\ &= \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

យើងមាន :

$$A=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\times\dots\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

ដោយបំបែកកត្តានិមួយៗយើងបាន :

$$\begin{aligned} A &= \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\times\dots\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \left(\frac{2-1}{2}\cdot\frac{2+1}{2}\right)\left(\frac{3-1}{3}\cdot\frac{3+1}{3}\right)\left(\frac{4-1}{4}\cdot\frac{4+1}{4}\right)\times\dots \\ & \quad \times\dots\times\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\times\dots\times\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right) \\ & \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_1 \underbrace{\hspace{1cm}}_1 \underbrace{\hspace{1cm}}_1 \underbrace{\hspace{1cm}}_1 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\dots\times\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

ដូចនេះ ក្រោយពីគណនា  $A=\frac{n+1}{2n}$  ។

**១៧៨** ▶ **កំណត់តម្លៃ**  $m$  :

$$\text{យើងមាន : } \begin{cases} 2x-4y=7 \\ 3x+y=m \end{cases}$$

ដោយដោះស្រាយតាមដេទែមីណង់ យើងបាន :

$$D=ab'-a'b=2+12=14$$

$$D_x=cb'-c'b=7+4m$$

$$\Rightarrow x=\frac{D_x}{D}=\frac{7+4m}{14}$$

$$D_y=ac'-a'c=2m-21$$

$$\Rightarrow y=\frac{D_y}{D}=\frac{2m-21}{14}$$

ដើម្បីឱ្យមានបួស  $x>0$  និង  $y<0$  លុះត្រាតែ :

$$\begin{cases} \frac{7+4m}{14}>0 \\ \frac{2m-21}{14}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7+4m>0 \\ 2m-21<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>-\frac{7}{4} \\ m<\frac{21}{2} \end{cases}$$

ឬ អាចសរសេរសរុបយ៉ាងខ្លីគឺ  $-\frac{7}{4}<m<\frac{21}{2}$

ដូចនេះ តម្លៃដែលកំណត់បានគឺ  $-\frac{7}{4}<m<\frac{21}{2}$  ។

**១៧៩ គណនា  $E$  :**

យើងមាន

$$E = \sqrt{1+2+3+\dots+2009+2010+2011+2010+2009+\dots+3+2+1}$$

តាង  $S = 1+2+3+\dots+2010$

យើងបាន  $E = \sqrt{S+2011+S} = \sqrt{2S+2011}$

$$+ \begin{cases} S = 1 + 2 + 3 + \dots + 2010 \\ S = 2010 + 2009 + 2008 + \dots + 1 \end{cases}$$

ដោយ 
$$\frac{2S = 2011+2011+2011+\dots+2011}{\text{មាន } 2011 \text{ ចំនួន } 2010 \text{ ដង}}$$

នាំឱ្យ  $2S = 2011 \times 2010$

យើងបាន 
$$E = \sqrt{2S+2011}$$
  

$$= \sqrt{2011 \times 2010 + 2011}$$
  

$$= \sqrt{2011(2010+1)}$$
  

$$= \sqrt{2011 \times 2011} = \sqrt{2011^2} = 2011$$

ដូចនេះ ក្រោយពីគណនា  $E = 2011$  ។

**១៨០ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ :**

ដោយបូកសមីការទាំងបួនបញ្ចូលគ្នា យើងបាន :

$$+ \begin{cases} a+b+c=3 & (1) \\ b+a+d=4 & (2) \\ a+c+d=5 & (3) \\ b+c+d=6 & (4) \end{cases}$$

$$3a+3b+3c+3d=18 \Rightarrow a+b+c+d=6 (*)$$

ដោយយកសមីការ (\*) ដកសមីការនីមួយៗបន្តបន្ទាប់

$$\begin{array}{rcl} (*) & - & \begin{cases} a+b+c+d=6 \\ a+b+c=3 \end{cases} & (*) & - & \begin{cases} a+b+c+d=6 \\ b+a+d=4 \end{cases} \\ (1) & & d=3 & (2) & & c=2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (*) & - & \begin{cases} a+b+c+d=6 \\ a+c+d=5 \end{cases} & (*) & - & \begin{cases} a+b+c+d=6 \\ b+c+d=6 \end{cases} \\ (3) & & b=1 & (4) & & a=0 \end{array}$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយគឺ  
 $(a, b, c, d) = (0, 1, 2, 3)$  ។

**១៨១ បង្ហាញថា :  $\sqrt{7} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[4]{7} < 7$**

យើងដឹងហើយថា :  $\sqrt{7} < \sqrt{9} = 3$  នោះ  $\sqrt{7} < 3$  (1)

$$\sqrt[3]{7} < \sqrt[3]{8} = 2 \text{ នោះ } \sqrt[3]{7} < 2 \quad (2)$$

$$\sqrt[4]{7} < \sqrt[4]{16} = 2 \text{ នោះ } \sqrt[4]{7} < 2 \quad (3)$$

ដោយយក : (1)+(2)+(3) : យើងបាន :

$$+ \begin{cases} \sqrt{7} < 3 \\ \sqrt[3]{7} < 2 \\ \sqrt[4]{7} < 2 \end{cases}$$

$$\sqrt{7} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[4]{7} < 7$$

ដូចនេះ ឃើញថា  $\sqrt{7} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[4]{7} < 7$  ។

**ចំណែក ២ ការបង្ហាញថា  $\sqrt{4} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{4} > 4$**

យើងមាន :  $\sqrt{4} = 2$  (1)

$$\sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{1} = 1 \text{ នោះ } \sqrt[3]{4} > 1 \quad (2)$$

$$\sqrt[4]{4} > \sqrt[4]{1} = 1 \text{ នោះ } \sqrt[4]{4} > 1 \quad (3)$$

ដោយយក : (1)+(2)+(3) : យើងបាន :

$$+ \begin{cases} \sqrt{4} = 2 \\ \sqrt[3]{4} > 1 \\ \sqrt[4]{4} > 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{4} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{4} > 4$$

ដូចនេះ ឃើញថា  $\sqrt{4} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{4} > 4$  ។

**១៨២ កំណត់តម្លៃ  $n$  :**

តាង  $g(x)$  ជាផលចែកនៃ  $f(x) = x^n - 4x^2 + 1$  ជាមួយ  
 $(x-3)$  ដែលមានសំណល់ស្មើ 46

យើងបាន :  $(x^n - 4x^2 + 1) = (x-3) \times g(x) + 46$

បើយើងឱ្យតម្លៃ  $x=3$  នោះសមីការទៅជា :

$$(3^n - 4 \cdot 3^2 + 1) = (3-3) \times g(3) + 46$$

$$3^n - 35 = 0 + 46$$

$$3^n = 46 + 35$$

$$3^n = 81 \Leftrightarrow 3^n = 3^4 \Rightarrow n = 4$$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បានគឺ  $n = 4$  ។

**១៨៣ ដោះស្រាយសមីការ :**

$$\text{យើងមានសមីការ : } \frac{x}{2 + \frac{x}{2 + \frac{x}{2 + \frac{x}{1 + \sqrt{1+x}}}}} = 1$$

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ  $1+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

ពិនិត្យ ទ្រង់ទ្រាយកន្ទុយចុងក្រោយគេ :

$$\begin{aligned} 2 + \frac{x}{1 + \sqrt{1+x}} &= \frac{2(1 + \sqrt{1+x}) + x}{1 + \sqrt{1+x}} \\ &= \frac{2 + 2\sqrt{1+x} + x}{1 + \sqrt{1+x}} \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{1+x} + x + 1}{1 + \sqrt{1+x}} \\ &= \frac{1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{1+x} + (\sqrt{1+x})^2}{1 + \sqrt{1+x}} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{1+x})^2}{1 + \sqrt{1+x}} \\ &= 1 + \sqrt{1+x} \end{aligned}$$

បើយើងយកលទ្ធផលនេះទៅជំនួស វានឹងក្លាយទៅជាទម្រង់

ដដែលៗវិញ ។ បើជំនួសបន្តបន្ទាប់ ចុងក្រោយយើងបាន :

$$\begin{aligned} \frac{x}{1 + \sqrt{1+x}} &= 1 \\ x &= 1 + \sqrt{1+x} \\ x - 1 &= \sqrt{1+x} \\ (x - 1)^2 &= (\sqrt{1+x})^2 \end{aligned}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 1 + x$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

-ចំពោះ  $x = 0$  មិនយក ព្រោះពេលផ្ទៀងផ្ទាត់  $0 \neq 1$

-ចំពោះ  $x = 3$  យក ព្រោះពេលផ្ទៀងផ្ទាត់  $1 = 1$

ដូចនេះ សមីការមានឫស  $x = 3$  ។

**១៨៤ កំណត់គ្រប់ចំនួនគត់  $n$**

$B = 4^{27} + 4^{1016} + 4^n$  ជាការប្រាកដនៃចំនួនគត់

-ករណី :  $4^n$  ជាតួចុង យើងបាន :

$$\begin{aligned} B &= 4^{27} + 4^{1016} + 4^n \\ &= 4^{27}(1 + 4^{989} + 4^{n-27}) \\ &= (2^{27})^2 [1^2 + 2^{1978} + (2^{n-27})^2] \\ &= (2^{27})^2 [1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2^{1977} + (2^{n-27})^2] \end{aligned}$$

ដើម្បីឱ្យបំពេញរាង  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  លុះត្រាតែ

$$2^{n-27} = 2^{1977}$$

$$\Rightarrow n - 27 = 1977$$

$$n = 2004$$

-ករណី :  $4^n$  ជាតួកណ្តាល យើងបាន :

$$\begin{aligned} B &= 4^{27} + 4^n + 4^{1016} \\ &= 4^{27}(1 + 4^{n-27} + 4^{989}) \\ &= (2^{27})^2 [1^2 + 2^{2n-54} + (2^{989})^2] \\ &= (2^{27})^2 [1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2^{2n-55} + (2^{989})^2] \end{aligned}$$

ដើម្បីឱ្យបំពេញរាង  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  លុះត្រាតែ

$$2^{2n-55} = 2^{989}$$

$$\Rightarrow 2n - 55 = 989$$

$$n = \frac{1044}{2}$$

$$n = 522$$

ដូចនេះ តម្លៃដែលកំណត់បានគឺ  $n = 2004, n = 522$  ។

**១៨៥ ដោះស្រាយសមីការ :**

$$\text{យើងមាន : } \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2 + x + 1}{x}, \quad x \neq 0$$

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} = x + 1 + \frac{1}{x}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = x + \frac{1}{x}$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - 2 = x + \frac{1}{x}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

បើតាង  $t = x + \frac{1}{x}$  យើងបានសមីការដឺក្រេទី២ :

$$t^2 - 2 = t$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

មាន  $a - b + c = 1 - (-1) - 2 = 0$  ជាករណីពិសេស

នាំឱ្យ  $t_1 = -1$  ,  $t_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{(-2)}{1} = 2$

-ចំពោះ  $t_1 = -1$  យើងបាន :

$$x + \frac{1}{x} = -1$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

ដោយ  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$  ,  $\frac{3}{4} > 0$

នោះ  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$  នាំឱ្យសមីការគ្មានឫស

-ចំពោះ  $t_2 = 2$  យើងបាន :

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

ដូចនេះ ក្រោយពីដោះស្រាយ សមីការមានឫស  $x = 1$  ។

### ១៨៦) ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\text{ក. } \begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ xy + yz + zx = 12 & (2) \\ \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} = 3 & (3) \end{cases}$$

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ :  $x \neq 0$  ,  $y \neq 0$  ,  $z \neq 0$

តាម (1) :  $x + y + z = 6$

$$(x + y + z)^2 = 6^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 36$$

ដោយ (2):  $xy + yz + zx = 12$

នាំឱ្យ  $x^2 + y^2 + z^2 + 2 \times 12 = 36$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 12$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 24 \quad (*)$$

ហើយ (2):  $2xy + 2yz + 2zx = 24 \quad (**)$

យើងយក (\*)-(\*\*) នោះយើងបាន :

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 24 \\ 2xy + 2yz + 2zx = 24 \end{cases}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2 = 0$$

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$$

ដោយ  $(x-y)^2 \geq 0$  ,  $(y-z)^2 \geq 0$  ,  $(z-x)^2 \geq 0$

ដើម្បីឱ្យសមីការផ្សេងៗមានតែមួយករណីគត់ គឺកត្តា

នីមួយៗស្មើសូន្យ មានន័យថា :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z$$

តាម (3):  $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} = 3$  ដោយ  $x = y = z$

យើងបាន  $\frac{2}{x} + \frac{2}{x} + \frac{2}{x} = 3$

$$\frac{2+2+2}{x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{6}{3} \Rightarrow x = 2$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានឫស  $x = y = z = 2$  ។

$$\text{ខ. } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3 & (1) \\ \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 3 & (2) \\ \frac{1}{xyz} = 1 & (3) \end{cases}$$

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ :  $x \neq 0$  ,  $y \neq 0$  ,  $z \neq 0$

-តាម (1):  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$  សមមូល  $\frac{xy + yz + zx}{xyz} = 3$

នាំឱ្យ  $xy + yz + zx = 3$  ព្រោះ (3):  $\frac{1}{xyz} = 1$

-តាម (2):  $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 3$

$$\frac{x+y+z}{xyz} = 3 \Rightarrow x+y+z=3 \quad (1)$$

នាំឱ្យ  $(x+y+z)^2 = 3^2$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 9$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2 \times 3 = 9$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3 \quad (2)$$

ដោយយក (2)-2×(1) យើងបាន :

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ - \quad 2x + 2y + 2z = 6 \\ \hline x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - 2z = -3 \\ (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (z^2 - 2z + 1) = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 0 \end{array}$$

ដោយ  $(x-1)^2 \geq 0$  ,  $(y-1)^2 \geq 0$  ,  $(z-1)^2 \geq 0$

ដើម្បីឱ្យសមីការផ្ទៀងផ្ទាត់មានតែមួយករណីគត់ គឺកត្តា  
នីមួយៗស្មើសូន្យ មានន័យថា :

$$\begin{cases} x-1=0 \\ y-1=0 \\ z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានឫស  $x = y = z = 1$  ។

**១៨៧** ▶ **គណនា**  $2^a + 2^{-a}$  :

យើងមាន  $4^a + 4^{-a} = 23$

$$\begin{aligned} (2^a)^2 + 2 + (2^{-a})^2 &= 23 + 2 \\ (2^a + 2^{-a})^2 &= 25 \\ 2^a + 2^{-a} &= \sqrt{25} \\ 2^a + 2^{-a} &= 5 \end{aligned}$$

សម្គាល់ : ខណៈបំពាក់កាឡីកាល់ពុំមែន  $\pm \sqrt{25}$  ទេ ព្រោះ

$$2^a + 2^{-a} > 0 \text{ ជានិច្ច (ជាអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល)}$$

ដូចនេះ ក្រោយពីគណនា  $2^a + 2^{-a} = 5$  ។

**១៨៨** ▶ **រកចំនួនលទ្ធភាពទាំងអស់នៃការបង្កើតលេខទូរស័ព្ទ**

យើងបានដឹងហើយថា នៅប្រទេសកម្ពុជាយើងមានប្រព័ន្ធទូរស័ព្ទជាច្រើន ។  
ប្រព័ន្ធខ្លះមានលេខ ៦ខ្ទង់ ខ្លះទៀតមាន លេខ ៧ខ្ទង់ ហើយភ្ជាប់ជាមួយក្បាល  
ប្រព័ន្ធ ។ តើចំនួននៃ ការបង្កើតលេខទូរស័ព្ទ យ៉ាងណាដែរ ?

ក. 011

ដោយប្រព័ន្ធ 011 មានលេខ 6ខ្ទង់ភ្ជាប់ជាមួយក្បាលប្រព័ន្ធ

ហើយមានទម្រង់ជា : 011 xxx xxx

-ជម្រើសនៅតាមខ្ទង់នីមួយៗមាន 10លេខដូចគ្នាគឺ :

{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

(តាមគោលការណ៍រំបាប់ )

នាំឱ្យ ចំនួនលេខទាំងអស់គឺ :

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6 = 1\,000\,000$$

ដូចនេះ ចំនួនលទ្ធភាពនៃការបង្កើតលេខទូរស័ព្ទរបស់  
ប្រព័ន្ធ 011 គឺ 1 000 000 លេខ ។

ខ. 097

ដូចគ្នានឹងប្រព័ន្ធ 011 ដែរគ្រាន់តែប្រព័ន្ធទូរស័ព្ទ 097 មាន៧ខ្ទង់

មានទម្រង់ 097 xxx xxxx

នាំឱ្យ ចំនួនលេខទាំងអស់គឺ :

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^7 = 10\,000\,000$$

ដូចនេះ ចំនួនលទ្ធភាពនៃការបង្កើតលេខទូរស័ព្ទរបស់  
ប្រព័ន្ធ 097 គឺ 10 000 000 លេខ ។

**១៨៩** ▶ **រកចំនួនរបៀបនៃការបង្កើតលេខ៤ខ្ទង់**

យើងមានលេខទាំងបួនគឺ 1, 2, 4 និង 9

យើងនឹងបង្កើតលេខ៤ខ្ទង់ដែលមាន៤លេខខាងលើ ដោយគិត

តាមវិធីដូចខាងក្រោម :

-ខ្ទង់ដំបូងមាន៤ជម្រើស ខ្ទង់ទីពីរមាន៣ជម្រើស

ខ្ទង់ទីបីមាន២ជម្រើស និងខ្ទង់ចុងក្រោយមាន១ជម្រើស

-តាមគោលការណ៍រំបាប់ ចំនួនរបៀប =  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 12$

ដូចនេះ ចំនួនរបៀបក្នុងការបង្កើតលេខ៤ខ្ទង់  
ខុសគ្នាមាន 12 របៀប ។

**១៩០ > ស្រាយបញ្ជាក់ថា :  $(b-a)(b-c) = pq - 6$**

-សម្មតិកម្ម :  $a, b$  ជាឫសនៃសមីការ  $x^2 + px + 1 = 0$

$$\text{នាំឱ្យ } \begin{cases} a+b = -p & (1) \\ ab = 1 & (2) \end{cases}$$

-សម្មតិកម្ម :  $b, c$  ជាឫសនៃសមីការ  $x^2 + qx + 2 = 0$

$$\text{នាំឱ្យ } \begin{cases} b+c = -q & (3) \\ bc = 2 & (4) \end{cases}$$

-ទាញបាន  $(a+b)(b+c) = (-p)(-q) = pq$

$$\text{ហើយ } ab + bc = 1 + 2 = 3$$

$$\text{ឬ } 2(ab + bc) = 6$$

$$\begin{aligned} -\text{ពិនិត្យ } pq - 6 &= (a+b)(b+c) - 6 \\ &= (a+b)(b+c) - 2(ab + bc) \\ &= ab + ac + b^2 + bc - 2ba - 2bc \\ &= b^2 - ba - bc + ac \\ &= b(b-a) - c(b-a) \\ &= (b-a)(b-c) \end{aligned}$$

ដូចនេះ ឃើញថា  $(b-a)(b-c) = pq - 6$  ។

**១៩១ > ស្រាយបញ្ជាក់ថា យើងបាន  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$**

សម្មតិកម្ម :  $a + b + c = abc$  នាំឱ្យ  $\frac{a+b+c}{abc} = 1$

$$\text{យើងមាន } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$$

តាមរូបមន្ត  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$

$$\text{នាំឱ្យ } \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 = 4$$

$$\left( \frac{1}{a} \right)^2 + \left( \frac{1}{b} \right)^2 + \left( \frac{1}{c} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \right) = 4$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \left( \frac{c+a+b}{abc} \right) = 4$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \cdot 1 = 4$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$$

ដូចនេះ ឃើញថា  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$  ។

**១៩២ > រកពីរចំនួននោះ :**

តាង  $x, y$  ជាពីរចំនួនដែលត្រូវរកនោះ

តាមបម្រាប់ប្រធាន : ផលបូក = ផលគុណ = ផលចែក

$$\text{យើងបាន : } x + y = xy = \frac{x}{y}$$

$$-\text{ពិនិត្យសមភាព : } xy = \frac{x}{y} \Leftrightarrow y = \frac{1}{y}$$

$$\text{នាំឱ្យ } y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{1} \Rightarrow y = \pm 1$$

$$-\text{ពិនិត្យសមភាព : } x + y = xy$$

ចំពោះ  $y = 1$  នោះ  $x + 1 = x$  គ្មានតម្លៃ  $x$  ផ្សេងផ្ទាល់

$$\text{ចំពោះ } y = -1 \text{ នោះ } x - 1 = -x \Leftrightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ ពីរចំនួននោះគឺ  $\frac{1}{2}$  និង  $-1$  ។

**១៩៣ > គណនាផលគុណ  $P$  :**

$$\text{យើងមាន : } P = (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \times \dots \times (1+x^{2^n})$$

$$-\text{ពិនិត្យ : } a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$\text{នាំឱ្យ } (a+b) = \frac{a^2 - b^2}{(a-b)}$$

តាមរូបមន្តខាងលើយើងបាន :

$$\begin{aligned} P &= (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \times \dots \times (1+x^{2^n}) \\ &= \left( \frac{1-x^2}{1-x} \right) \left( \frac{1-x^4}{1-x^2} \right) \left( \frac{1-x^8}{1-x^4} \right) \times \dots \times \left( \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^n}} \right) \\ &= \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \text{ ដែល } x \neq 1 \end{aligned}$$

ដូចនេះ ផលគុណគណនាបានគឺ  $P = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$  ។

**១៩៤ > គណនាផលបូក  $S$  :**

យើងមាន :

$$S = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2011}$$

$$\text{ពិនិត្យ : } S_k = 1 + 2 + 3 + \dots + k$$

នាំឱ្យ

$$+ \begin{cases} S_k = 1 + 2 + 3 + \dots + k \\ S_k = k + (k-1) + \dots + 2 + 1 \end{cases}$$

$$2S_k = \underbrace{(k+1) + (k+1) + (k+1) + \dots + (k+1)}_{\text{មាន } k \text{ ដងនៃ } (k+1)}$$

ទាញបាន :  $2S_k = k(k+1) \Leftrightarrow S_k = \frac{k(k+1)}{2}$

យើងបាន :  $S = \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \frac{1}{S_4} + \dots + \frac{1}{S_{2011}}$

ដោយ  $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$

$$S = \frac{1}{\frac{2(2+1)}{2}} + \frac{1}{\frac{3(3+1)}{2}} + \frac{1}{\frac{4(4+1)}{2}} + \dots + \frac{1}{\frac{2011(2011+1)}{2}}$$

$$S = \frac{2}{2(2+1)} + \frac{2}{3(3+1)} + \frac{2}{4(4+1)} + \dots + \frac{2}{2011(2011+1)}$$

$$S = 2 \left( \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{2011 \cdot 2012} \right)$$

ហើយពិនិត្យតួនិមួយៗនៃ  $S$  មានទម្រង់ :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

នាំឱ្យ

$$S = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} \right)$$

$$= 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2012} \right) = 1 - \frac{1}{1006} = \frac{1005}{1006}$$

ដូចនេះ ផលបូកគណនាបានគឺ  $S = \frac{1005}{1006}$  ។

**១៩៥** គណនាផលបូក  $S$  ចំពោះ  $x = 95$  :

យើងមាន  $S = \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2+7x+12} + \frac{1}{x^2+9x+20}$

ដោយ  $x^2+x = x(x+1)$

$$x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$$

$$x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$$

$$x^2+7x+12 = (x+3)(x+4)$$

$$x^2+9x+20 = (x+4)(x+5)$$

នោះ  $S = \left( \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} \right) + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \left( \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} \right)$

$$S = \frac{x+2+x}{x(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{x+5+x+3}{(x+3)(x+4)(x+5)}$$

$$+ \frac{2}{(x+3)(x+4)(x+5)}$$

$$S = \frac{2}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{2}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{2x+6+x}{x(x+2)(x+3)} + \frac{2}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{3}{x(x+3)} + \frac{2}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{3x+15+2x}{x(x+3)(x+5)} = \frac{5}{x(x+5)}$$

ចំពោះ  $x = 95$  យើងបាន :

$$S = \frac{5}{x(x+5)} = \frac{5}{95(95+5)} = \frac{5}{5 \cdot 19 \cdot 100} = \frac{1}{1900}$$

ដូចនេះ ផលបូកគណនាបានគឺ  $S = \frac{1}{1900}$  ។

**១៩៦** បង្ហាញឱ្យឃើញពីសមភាព

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} = \frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca}$$

-ចំពោះ  $abc = 1$  ពិនិត្យ :

$$\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca}$$

$$= \left( \frac{1}{1+a+ab} \cdot \frac{c}{c} \right) + \left( \frac{1}{1+b+bc} \cdot \frac{a}{a} \right) + \left( \frac{1}{1+c+ca} \cdot \frac{b}{b} \right)$$

$$= \frac{c}{c+ac+abc} + \frac{a}{a+ab+abc} + \frac{b}{b+bc+cab}$$

$$= \frac{c}{c+ac+1} + \frac{a}{a+ab+1} + \frac{b}{b+bc+1}$$

$$= \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1}$$

ដូចនេះ យើងបានសមភាពប្រាកដមែន ។

យើងមានសមីការ : 
$$\begin{cases} 3^\pi x + 3^{-\pi} y = 2 \\ 2 \cdot 3^\pi x - 3^{-\pi} y = 1 \end{cases}$$

ដោះស្រាយតាមដេរីវេមីណង់ យើងបាន :

$$\begin{aligned} D &= ab' - a'b \\ &= 3^\pi (-3^{-\pi}) - (2 \cdot 3^\pi) \cdot 3^{-\pi} \\ &= -3^{\pi-\pi} - 2 \cdot 3^{\pi-\pi} \\ &= -1 - 2 = -3 \\ D_x &= cb' - c'b \\ &= (2)(-3^{-\pi}) - 1 \cdot (3^{-\pi}) \\ &= -2 \cdot 3^{-\pi} - 3^{-\pi} \\ &= -3 \cdot 3^{-\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_y &= cb' - c'b \\ &= 3^\pi (1) - 2 \cdot 3^\pi \cdot (2) \\ &= 3^\pi - 4 \cdot 3^\pi \\ &= -3 \cdot 3^\pi \end{aligned}$$

នាំឱ្យ  $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-3 \cdot 3^{-\pi}}{-3} = 3^{-\pi}$

$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-3 \cdot 3^\pi}{-3} = 3^\pi$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយ

$x = 3^{-\pi} , \quad y = 3^\pi$  ។

**២០២** បង្ហាញថា ក.  $x^2 + y^2 \geq 2xy$

ដោយ  $x$  និង  $y$  ជាចំនួនពិតនោះយើងបាន :

$$\begin{aligned} (x-y)^2 &\geq 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 &\geq 0 \\ x^2 + y^2 &\geq 2xy \end{aligned}$$

ដូចនេះ ឃើញថា  $x^2 + y^2 \geq 2xy$  ។

បង្ហាញថា ខ.  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

នៅក្នុងសំណួរ ក. ឃើញថា  $x^2 + y^2 \geq 2xy$

សម្មតិកម្ម  $x$  និង  $y$  មានសញ្ញាដូចគ្នា នោះមានន័យថា

$xy > 0$  ជានិច្ច ពេលចែកនឹង  $xy$  វិសមីការ មិនប្តូរទិសដៅ

យើងបាន  $\frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} \geq \frac{2xy}{xy} \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

ដូចនេះ ឃើញថា  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$  ។

**២០៣** សម្រួលកន្សោម  $E$  &  $F$  :

យើងមាន  $E = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \\ &= \frac{\sqrt{a}^2 + 2\sqrt{ab} + \sqrt{b}^2 - 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \\ &= \frac{\sqrt{a}^2 - 2\sqrt{ab} + \sqrt{b}^2}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \\ &= \sqrt{a} - \sqrt{b} \end{aligned}$$

ហើយ  $F = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \end{aligned}$$

ដូចនេះ  $E = \sqrt{a} - \sqrt{b} , \quad F = \sqrt{a} + \sqrt{b}$  ។

គណនា  $E + F$  និង  $E \cdot F$

$$\begin{aligned} E + F &= (\sqrt{a} - \sqrt{b}) + (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \\ &= \sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{a} + \sqrt{b} = 2\sqrt{a} \\ E \cdot F &= (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \\ &= \sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2 = a - b \end{aligned}$$

ដូចនេះ  $E + F = 2\sqrt{a} \quad \& \quad E \cdot F = a - b$  ។

**២០៤** គណនាតម្លៃនៃកន្សោម  $A$  :

យើងមាន :

$$\begin{aligned} A &= x^n - 100x^{n-1} + x^{n-2} - 100x^{n-3} + x^{n-4} - 100x^{n-5} \\ &= (x^n - 100x^{n-1}) + (x^{n-2} - 100x^{n-3}) + (x^{n-4} - 100x^{n-5}) \\ &= x^n - 100x^{n-1} + x^{n-2} - 100x^{n-3} + x^{n-4} - 100x^{n-5} \\ &= x^{n-1}(x - 100) + x^{n-3}(x - 100) + x^{n-5}(x - 100) \\ &= (x - 100)(x^{n-1} + x^{n-3} + x^{n-5}) \end{aligned}$$

ចំពោះ  $x = 100$

នាំឱ្យ  $A = (100 - 100)(100^{n-1} + 100^{n-3} + 100^{n-5}) = 0$

ដូចនេះ តម្លៃគណនាបានគឺ  $A = 0$  ។

**២០៥ > គណនាតម្លៃនៃកន្សោម A :**

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } A &= \sqrt[3]{22 + \sqrt{30 - \sqrt{20 + \sqrt{27 - \sqrt[3]{8}}}}} \\ &= \sqrt[3]{22 + \sqrt{30 - \sqrt{20 + \sqrt{27 - \sqrt[3]{8}}}}} \\ &= \sqrt[3]{22 + \sqrt{30 - \sqrt{20 + \sqrt{27 - 2}}}} \\ &= \sqrt[3]{22 + \sqrt{30 - \sqrt{20 + 5}}} \\ &= \sqrt[3]{22 + \sqrt{30 - 5}} \\ &= \sqrt[3]{22 + 5} \\ &= 3 \end{aligned}$$

ដូចនេះ គណនាបាន  $A = 3$  ។

**២០៦ > គណនាតម្លៃនៃ a និង b**

បម្រាប់ a និង b ជាចំនួនគត់

ដោយ  $a^2 - b^2 = 321 > 0$  មានន័យថា a ជាចំនួនធំជាង

b ហើយសន្និដ្ឋានថា  $b = a - 1$  ព្រោះ វាជាចំនួនគត់តត្បា

យើងបាន :  $a^2 - (a - 1)^2 = 321$

$$a^2 - (a - 1)^2 = 321$$

$$a^2 - (a^2 - 2a + 1) = 321$$

$$a^2 - a^2 + 2a - 1 = 321$$

$$a = \frac{322}{2} = 161$$

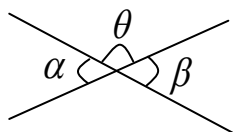
នាំឱ្យ  $b = a - 1 = 161 - 1 = 160$

ដូចនេះ តម្លៃគណនាបានគឺ  $a = 161, b = 160$  ។

**២០៧ > មុំទល់កំពូលជាអ្វី?**

មុំទល់កំពូល ជាមុំមានកំពូលរួមគ្នា ហើយជ្រុងនៃមុំនីមួយៗ

ផ្គុំគ្នាបង្កើតបានបន្ទាត់ពីរកាត់គ្នា និងរង្វាស់មុំទាំងពីរប៉ុនគ្នា ។



យើងនឹងស្រាយថា មុំទល់កំពូល

$\alpha$  និង  $\beta$  ជាមុំប៉ុនគ្នា

ដោយ  $\alpha + \theta = 180^\circ$  និង  $\beta + \theta = 180^\circ$  ព្រោះជាមុំរាប

សិក្សាផលដក :

$$\begin{aligned} - \begin{cases} \alpha + \theta = 180^\circ \\ \beta + \theta = 180^\circ \end{cases} \\ \hline \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta \end{aligned}$$

ដូចនេះ មុំទល់កំពូល  $\alpha = \beta$  ។

**២០៨ > រកចំនួនគតិវិជ្ជមាន n :**

យើងមាន :  $x^2 + x + 6 = n^2$

គុណនឹង 4 :  $4x^2 + 4x + 24 = 4n^2$

$$(4x^2 + 4x + 1) + 23 = 4n^2$$

$$(2n)^2 - (2x + 1)^2 = 23$$

$$(2n - 2x - 1)(2n + 2x + 1) = 1 \times 23$$

បម្រាប់ : x និង n ជាចំនួនគត់

ហើយ  $n > x$  នោះយើងបាន :

$$\begin{aligned} + \begin{cases} 2n - 2x - 1 = 1 \\ 2n + 2x + 1 = 23 \end{cases} \\ \hline 4n = 24 \Rightarrow n = 6 \end{aligned}$$

-ចំពោះ  $n = 6$  យើងបានសមីការ :

$$x^2 + x + 6 = 6^2$$

$$x^2 + x - 30 = 0$$

ដោយ  $5 + (-6) = -1$  &  $5(-6) = -30$

តាមទ្រឹស្តីបទវិញ្ញាត នោះ 5 & -6 ជាឫសគត់នៃសមីការ

ដូចនេះ តម្លៃដែលកំណត់បានគឺ  $n = 6$  ។

**២០៩ > ប្រែប្រួលកន្សោម  $\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$  និង  $\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}$**

$$\begin{aligned} \text{ពិនិត្យ : } \frac{(a+b)^2}{a^2-b^2} &= \frac{(a+b)^2}{(a-b)(a+b)} \\ &= \frac{(a+b)}{(a-b)} \\ &= \frac{(a+b)}{(a-b)} + \frac{(a-b)}{(a-b)} = \frac{a^2-b^2}{(a-b)^2} \end{aligned}$$

ចំពោះ គ្រប់ចំនួនពិត a និង b ដែល  $a \neq b$  នោះ :

$$\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2} > \frac{a^2-b^2}{(a-b)^2} \Leftrightarrow a^2+b^2 > a^2-b^2 \Rightarrow 2b^2 > 0 \text{ ពិត}$$

ដោយ  $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{a^2-b^2}{(a-b)^2} < \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}$

ដូចនេះ  $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} < \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}$  ។

**២១០** ក. កំណត់តម្លៃ  $m$  ដើម្បីឱ្យ  $x=1$  ជាឫស

យើងមាន :  $(m+1)x^2 - (m+3)x + 3 - m = 0$  (\*)

បើ  $x=1$  ជាឫសនៃសមីការយើងបាន :

$$\begin{aligned}(m+1)1^2 - (m+3)1 + 3 - m &= 0 \\ m+1 - m - 3 + 3 - m &= 0 \\ 1 - m &= 0 \\ m &= 1\end{aligned}$$

ចំពោះ  $m=1$  សមីការកា (\*) ទៅជា :

$$\begin{aligned}(1+1)x^2 - (1+3)x + 3 - 1 &= 0 \\ 2x^2 - 4x + 2 &= 0 \\ x^2 - 2x + 1 &= 0\end{aligned}$$

មាន  $a+b+c=1+(-2)+1=0$  (ជាករណីពិសេស)

នាំឱ្យ  $x_1=1$  ,  $x_2=\frac{c}{a}=\frac{1}{1}=1$

ដូចនេះ  $\boxed{\text{តម្លៃ } m=1 \text{ និងឫសមួយទៀតគឺ } x=1}$  ។

**ខ. កំណត់តម្លៃ  $m$  ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសខុប**

សមីការ  $(m+1)x^2 - (m+3)x + 3 - m = 0$  (\*)

មាន  $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\begin{aligned}&= [-(m+3)]^2 - 4(m+1)(3-m) \\ &= m^2 + 6m + 9 - 12m + 4m^2 - 12 + 4m \\ &= 5m^2 - 2m - 3\end{aligned}$$

ដើម្បីឱ្យសមីការមានឫសខុប លុះត្រាតែ  $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$

នាំឱ្យ  $\begin{cases} m+1 > 0 \\ 5m^2 - 2m - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ 5m^2 - 2m - 3 = 0 \end{cases}$

សម្រាប់ :  $5m^2 - 2m - 3 = 0$  មាន  $a+b+c=0$

នាំឱ្យសមីការមានឫស :  $m_1=1$  ,  $m_2=\frac{c}{a}=\frac{-3}{5}$

យើងនឹងរក ឫសខុបចំពោះតម្លៃ  $m$  នីមួយៗដែលរកបាន

-ចំពោះ  $m_1=1$ : ដូចមាននៅសំណួរ ក. បង្ហាញរួច

នោះសមីការមានឫសគឺ  $x_1=x_2=1$

-ចំពោះ  $m_2=\frac{-3}{5}$  សមីការ (\*) ទៅជា :

$$\begin{aligned}\left(-\frac{3}{5}+1\right)x^2 - \left(-\frac{3}{5}+3\right)x + 3 - \left(-\frac{3}{5}\right) &= 0 \\ \frac{2}{5}x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{18}{5} &= 0 \\ \frac{2}{5}(x^2 - 6x + 9) &= 0 \\ (x^2 - 6x + 9) &= 0 \\ (x-3)^2 &= 0\end{aligned}$$

នាំឱ្យ សមីការមានឫសគឺ  $x_1=x_2=3$

ដូចនេះ  $\boxed{\text{តម្លៃកំណត់បាន } m_1=1, m_2=\frac{c}{a}=\frac{-3}{5} \text{ និងឫសខុប } x_1=x_2=1 \text{ ឬ } x_1=x_2=3}$  ។

**២១១** រកពីរចំនួន  $x$  និង  $y$

យើងស្គាល់ :  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$  យើងបាន

$$\begin{aligned}-\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2xy = 24 \end{cases} \\ \hline x^2 - 2xy + y^2 = 1 \\ (x-y)^2 = 1 \\ x-y = \pm 1\end{aligned}$$

-ចំពោះ  $x-y=1 \Rightarrow x=y+1$

នាំឱ្យ  $(y+1)y=12 \Leftrightarrow y^2+y-12=0$

មាន  $y_1 = \frac{-1-\sqrt{1^2-4(-12)}}{2} = \frac{-1-\sqrt{49}}{2} = \frac{-8}{2} = -4$

$y_2 = \frac{-1+\sqrt{1^2-4(-12)}}{2} = \frac{-1+\sqrt{49}}{2} = \frac{6}{2} = 3$

បើ  $y_1=-4 : x=\frac{12}{-4}=-3$  ហើយ  $y_2=3 : x=\frac{12}{3}=4$

-ចំពោះ  $x-y=-1 \Rightarrow x=y-1$

នាំឱ្យ  $(y-1)y=12 \Leftrightarrow y^2-y-12=0$

មាន  $y_3 = \frac{-(-1)-\sqrt{1^2-4(-12)}}{2} = \frac{1-7}{2} = -3$

$$y_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{1^2 - 4(-14)}}{2} = \frac{1+7}{2} = 4$$

បើ  $y_3 = -3$ :  $x = \frac{12}{-3} = -4$  ហើយ  $y_4 = 4$ :  $x = \frac{12}{4} = 3$

ដូចនេះ

ពីរចំនួនដែលកំណត់បានគឺ :

$$\begin{cases} x=3, y=4 \\ x=-3, y=-4 \end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases} x=4, y=3 \\ x=-4, y=-3 \end{cases} \quad ។$$

### ២១២ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

យើងមាន  $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 & (1) \\ x^2 + y^2 + xy = 7 & (2) \end{cases}$

តាង  $S = x + y$  និង  $P = xy$

តាម (1) :  $x^2 + 2xy + y^2 - 2xy + x + y = 8$   
 $(x + y)^2 - 2xy + (x + y) = 8$   
 $S^2 - 2P + S = 8 \quad (3)$

តាម (2) :  $x^2 + y^2 + xy = 7$   
 $x^2 + 2xy + y^2 - 2xy + xy = 7$   
 $(x + y)^2 - xy = 7$   
 $S^2 - P = 7$   
 $P = S^2 - 7 \quad (4)$

យក (4) ជំនួសក្នុង (3) យើងបាន :

$$\begin{aligned} S^2 - 2P + S &= 8 \\ S^2 - 2(S^2 - 7) + S &= 8 \\ S^2 - 2S^2 + 14 + S &= 8 \\ -S^2 + S + 6 &= 0 \\ S^2 - S - 6 &= 0 \end{aligned}$$

នាំឱ្យ  $S_1 = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases}$

តាម (4) បើ  $\begin{cases} S = -2 : P = (-2)^2 - 7 = -3 \\ S = 3 : P = (3)^2 - 7 = 2 \end{cases}$

-ចំពោះ  $S = -2$  &  $P = -3$  យើងបាន  $\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -3 \end{cases}$

$x$  &  $y$  ជាឫសនៃសមីការ  $X^2 + 2X - 3 = 0$

មាន  $a + b + c = 0$  នោះសមីការមានឫស :

$x = 1, y = -3$  ឬ  $x = -3, y = 1$

-ចំពោះ  $S = 3$  &  $P = 2$  យើងបាន  $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$

$x$  &  $y$  ជាឫសនៃសមីការ  $X^2 - 3X + 2 = 0$

មាន  $a + b + c = 0$  នោះសមីការមានឫស :

$x = 1, y = 2$  ឬ  $x = 2, y = 1$

ដូចនេះ

ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយបួនគូ :

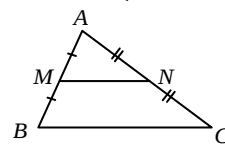
$x = 1, y = -3$  ឬ  $x = -3, y = 1$

$x = 1, y = 2$  ឬ  $x = 2, y = 1$  ។

### ២១៣ បាតមធ្យមនៃត្រីកោណគឺជាអ្វី?

បាតមធ្យមនៃត្រីកោណ គឺជាអង្កត់ដែលគូសភ្ជាប់ពីចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុងពីររបស់ត្រីកោណ ហើយវាស្របនឹងជ្រុងទី៣នៃត្រីកោណនេះ និងមានតម្លៃស្មើពាក់កណ្តាលជ្រុងទី៣ ។

យើងនឹងបង្ហាញថា  $MN = \frac{BC}{2}$



តាមនិយមន័យ

$AM = \frac{AB}{2}$  ,  $AN = \frac{AC}{2}$  និងមាន  $MN$  ស្របនឹង  $BC$

-ត្រីកោណ :  $\triangle ABC$  &  $\triangle AMN$  មាន :

មុំ  $\angle AMN = \angle ABC$  , មុំ  $\angle ANM = \angle ACB$  (មុំត្រូវគ្នា)

នាំឱ្យ  $\frac{\triangle AMN}{\triangle ABC} \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$

នាំឱ្យ  $MN = \frac{BC \cdot AM}{AB} = \frac{BC \cdot \frac{AB}{2}}{AB} = \frac{BC}{2}$

ដូចនេះ

បាតមធ្យមនៃត្រីកោណគឺជាអង្កត់ដែលគូសភ្ជាប់ពីចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុងទី៣ ដែលស្របនឹងវា ។

### ២១៤ រកចំនួនគត់ $n$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{2}{7} < \frac{n}{12} < \frac{4}{5}$

យើងមាន  $\frac{2}{7} < \frac{n}{12} < \frac{4}{5}$  ឬអាចសរសេរ  $\frac{24}{7} < n < \frac{48}{5}$

សមមូល  $3 + \frac{3}{7} < n < 9 + \frac{3}{5}$

នាំឱ្យ ចំនួនគត់ផ្ទៀងផ្ទាត់គឺ  $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$

ដូចនេះ

ចំនួនគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់គឺ

$$n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

។

### ២១៥ រកភាគដែលនៅសល់

- ត្រីកោណកែង  $AEB$  :

$$S_{AEB} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 24 = 144$$

- ត្រីកោណកែង  $BDC$  :

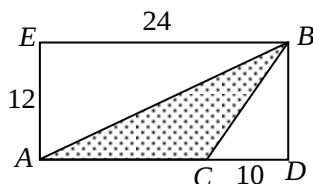
$$S_{BDC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$$

$$\text{ភាគនៅសល់} = S_{AEB} + S_{BDC} = 144 + 60 = 204 \text{ ភាគ}$$

ដូចនេះ

ភាគដែលនៅសល់គឺ 204 ភាគ

។



### ២១៦ ទាញរក $\frac{1}{x+2012} = ?$

$$\text{យើងមាន : } \frac{1}{x+2011} = 2011$$

$$\text{សមមូល } x+2011 = \frac{1}{2011} \text{ ឬ } x = \frac{1}{2011} - 2011$$

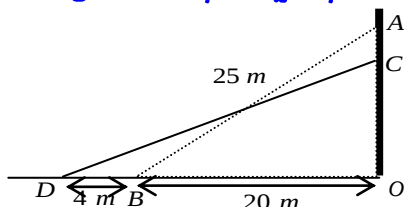
$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } \frac{1}{x+2012} &= \frac{1}{\frac{1}{2011} - 2011 + 2012} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2011} + 1} = \frac{1}{\frac{1+2011}{2011}} = \frac{2011}{2012} \end{aligned}$$

ដូចនេះ

$$\text{ទាញបាន } \frac{1}{x+2012} = \frac{2011}{2012}$$

។

### ២១៧ រកប្រវែងដែលចុងរាងកាយក្នុង



$$\text{ប្រវែងចុងរាងកាយក្នុងគឺ } AC = AO - CO$$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាក័រ

- ចំពោះត្រីកោណកែង  $AOB$  មាន :

$$AO^2 = AB^2 - OB^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow AO &= \sqrt{AB^2 - OB^2} \\ &= \sqrt{25^2 - 20^2} = \sqrt{625 - 400} = \sqrt{225} \\ &= 15 \text{ m} \end{aligned}$$

- ចំពោះត្រីកោណកែង  $COB$  មាន :

$$CO^2 = CB^2 - OB^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow CO &= \sqrt{CB^2 - OB^2} \\ &= \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{625 - 576} = \sqrt{49} \\ &= 7 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\text{យើងបាន } AC = AO - CO = 15 \text{ m} - 7 \text{ m} = 8 \text{ m}$$

ដូចនេះ

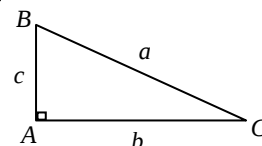
ប្រវែងចុងរាងកាយក្នុងគឺ  $AC = 8 \text{ m}$

។

### ២១៨ គណនារង្វាស់ជ្រុងនីមួយៗនៃត្រីកោណ

តាងរូបត្រីកោណនោះដូចរូបខាងក្រោម :

តាមបម្រាស់ប្រធាន



$$\text{- បរិមាត្រ } a + b + c = 60 \text{ cm}$$

$$\text{- ក្រឡាផ្ទៃ } \frac{1}{2}bc = 120 \Leftrightarrow bc = 240 \text{ cm}^2$$

$$\text{- តាមពីតាក័រ } a^2 = b^2 + c^2$$

$$\text{សរុបមកយើងបានប្រព័ន្ធសមីការ } \begin{cases} a + b + c = 60 & (1) \\ bc = 240 & (2) \\ a^2 = b^2 + c^2 & (3) \end{cases}$$

$$\text{តាម (1): } a + b = 60 - c$$

$$(b + c)^2 = (60 - a)^2$$

$$b^2 + c^2 + 2bc = 3600 - 120a + a^2$$

$$b^2 + c^2 = 3600 - 120a + a^2 - 2bc \quad (4)$$

ដោយយក (2) និង (3) ជំនួសក្នុង (4)

$$a^2 = 3600 - 120a + a^2 - 2 \cdot 240$$

$$120a = 3600 - 480$$

$$a = \frac{3120}{120} = 26$$

$$\text{នាំឱ្យ } \begin{cases} b + c = 60 - 26 = 34 \\ bc = 240 \end{cases}$$

តាមរឿង  $b$  និង  $c$  ជាឫសនៃសមីការ :

$$x^2 - 34x + 240 = 0$$

$$\text{មាន } \Delta' = b'^2 - ac = (-17)^2 - 240 = 289 - 240 = 7^2$$

$$\text{នាំឱ្យ } b = \frac{-(-17) - 7}{1} = 10, c = \frac{-(-17) + 7}{1} = 24$$

$$\text{ឬអាច } c = \frac{-(-17) - 7}{1} = 10, b = \frac{-(-17) + 7}{1} = 24$$

ដូចនេះ រង្វាស់ជ្រុងនីមួយៗរបស់ត្រីកោណគឺ  
10cm , 24cm , 26cm ។

### ២១៩) បង្ហាញថាត្រីកោណមានមុំទាំងបីជាត្រីកោណកែង

បម្រាប់មុំទាំងបីគឺ  $\alpha$  ,  $2\alpha$  និង  $3\alpha$

ដោយយើងដឹងថាផលបូកមុំក្នុងនៃត្រីកោណស្មើ  $180^\circ$

$$\text{យើងបាន } \alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180^\circ$$

$$6\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

មុំទាំងបីនៃត្រីកោណនេះគឺ

$$\alpha = 30^\circ, 2\alpha = 60^\circ, 3\alpha = 90^\circ$$

ត្រីកោណនេះមានមុំមួយមានរង្វាស់  $90^\circ$  វាជាត្រីកោណកែង

ដូចនេះ ត្រីកោណមានមុំទាំងបីជាត្រីកោណកែង ។

### ២២០) រក $f(9)$

យើងមាន  $f(x) \cdot f(x+1) = 9$  និង  $f(3) = 81$  នាំឱ្យ

$$f(3) \cdot f(4) = 9 \Rightarrow f(4) = \frac{9}{f(3)} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$$

$$f(4) \cdot f(5) = 9 \Rightarrow f(5) = \frac{9}{f(4)} = \frac{9}{1/9} = 81$$

$$f(5) \cdot f(6) = 9 \Rightarrow f(6) = \frac{9}{f(5)} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$$

$$f(6) \cdot f(7) = 9 \Rightarrow f(7) = \frac{9}{f(6)} = \frac{9}{1/9} = 81$$

$$f(7) \cdot f(8) = 9 \Rightarrow f(8) = \frac{9}{f(7)} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$$

$$f(8) \cdot f(9) = 9 \Rightarrow f(9) = \frac{9}{f(8)} = \frac{9}{1/9} = 81$$

ដូចនេះ រកបាន  $f(9) = 81$  ។

### ២២១) ក. រកប្រភាគតាងចម្ងាយផ្លូវដែលសុខដើរដើរ

$$\text{-បម្រាប់ : សុខធ្វើដំណើរដោយរថយន្តបាន } \frac{3}{8} = \frac{15}{40}$$

$$\text{សុខធ្វើដំណើរដោយម៉ូតូបាន } \frac{3}{5} = \frac{24}{40}$$

$$\text{នាំឱ្យ ការធ្វើដំណើរតាមរថយន្ត និងម៉ូតូគឺ: } \frac{15}{40} + \frac{24}{40} = \frac{39}{40}$$

$$\text{នោះ ការធ្វើដំណើរដោយថ្មើជើងគឺ } \frac{40}{40} - \frac{39}{40} = \frac{1}{40}$$

ដូចនេះ ប្រភាគតាងការធ្វើដំណើរដោយថ្មើជើងគឺ  $\frac{1}{40}$  ។

### ខ. រកចម្ងាយផ្លូវទាំងអស់បើសុខដើរបាន 2 km

$$\text{សុខដើរបាន 2 km ត្រូវនឹងប្រភាគ } \frac{1}{40}$$

$$\text{មានន័យថា } \frac{1}{40} = 2 \text{ km ចម្ងាយផ្លូវទាំងអស់គឺ}$$

$$\frac{40}{40} = 40 \times 2 \text{ km} = 80 \text{ km}$$

ដូចនេះ ចម្ងាយផ្លូវទាំងអស់គឺ 80 km ។

### ២២២) ក. សរសេរ 45m ជាភាគរយនៃ 1km

$$\text{ដោយ } 1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

$$\text{យើងបាន } 45 \times \frac{1}{1000} = \frac{45}{1000} = \frac{4.5}{100} = 4.5\%$$

ដូចនេះ យើងសរសេរបាន 4.5% ។

### ខ. សរសេរ 1kg ជាភាគរយនៃ 800g

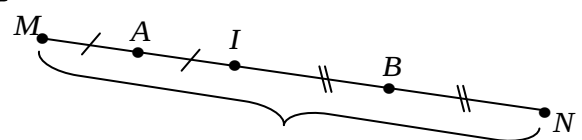
$$\text{ដោយ } 1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$$

$$\text{យើងបាន } 1000 \times \frac{1}{800} = \frac{1000}{8} \times \frac{1}{100} = \frac{125}{100} = 125\%$$

ដូចនេះ យើងសរសេរបាន 125% ។

### ២២៣) គណនាប្រវែង AB :

$$\text{បម្រាប់ : } MN = 18 \text{ cm}$$



$$\text{យើងបាន : } AB = AI + BI$$

ដោយ  $A$  និង  $B$  ជាចំណុចកណ្តាល រៀងគ្នានៃ  $MI$  និង  $NI$

នាំឱ្យ  $AI = \frac{MI}{2}$  និង  $BI = \frac{NI}{2}$

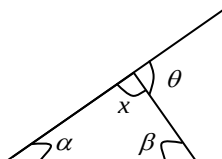
នោះ  $AB = \frac{MI}{2} + \frac{NI}{2}$   
 $= \frac{MI + NI}{2} = \frac{MN}{2} = \frac{18cm}{2} = 9cm$

ដូចនេះ ប្រវែងគណនាបានគឺ  $AB = 9cm$  ។

**២២៤** ស្រាយបញ្ជាក់ថាផលបូកមុំក្នុងពីរស្មើមុំក្រៅមួយ

ឧបមាថា យើងមានត្រីកោណ និង

មុំ ដូចរូបខាងស្តាំ



យើងនឹងបង្ហាញថា  $\alpha + \beta = \theta$

-ផលបូកមុំក្នុងនៃត្រីកោណស្មើ  $180^\circ$

នោះ  $\alpha + \beta + x = 180^\circ$

-ហើយមុំ  $x + \theta = 180^\circ$  ព្រោះវាជាមុំរាប

សិក្សាផលដក :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + x = 180^\circ \\ x + \theta = 180^\circ \end{cases}$$

$$\alpha + \beta - \theta = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = \theta$$

ដូចនេះ ផលបូកមុំក្នុងពីរនៃត្រីកោណស្មើមុំក្រៅមួយ  
 ដែលមិនជាប់នឹងវា

**២២៥** គណនាតម្លៃនៃកន្សោម  $A$  :

យើងមាន :

$$A = \left[ \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}} - 4} \right]^{2011 \cdot 2012}$$

ពិនិត្យ :

$$\begin{aligned} &\sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}} - 4} \\ &= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{2^2 + 4\sqrt{3} + \sqrt{3}^2}} - 4} \\ &= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2}} - 4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10(2 + \sqrt{3})}} - 4} \\ &= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{28 - 10\sqrt{3}}} - 4} \\ &= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{5^2 - 10\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}} - 4} \\ &= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5(5 - \sqrt{3})^2} - 4} \\ &= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5(5 - \sqrt{3})} - 4} \\ &= \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 25 - 5\sqrt{3}}} - 4 \\ &= \sqrt{4 + \sqrt{25}} - 4 \\ &= \sqrt{4 + 5} - 4 \\ &= -1 \end{aligned}$$

នាំឱ្យ  $A = [-1]^{2011 \cdot 2012}$

ដោយ ស្វ័យគុណនៃ 2011 ជាចំនួនមានលេខ 1 ចុងជានិច្ច

នាំឱ្យ  $A = 2011^{2012} = \dots 1$  ជាចំនួនសេស

យើងបាន  $A = [-1]^{2011 \cdot 2012} = -1$

ដូចនេះ តម្លៃគណនាបានគឺ  $A = -1$  ។

**២២៦** ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

វិធីការសមីការដឺក្រេទី៣ : តាមទ្រឹស្តីបទវ៉ែត សមីការ មានរាង  
 $X^3 - SX^2 + RX - P = 0$  ដែល  $a, b, c$  ជាឫស :  
 $\begin{cases} S = a + b + c \\ R = ab + ac + bc \\ P = abc \end{cases}$  ។ អ្នកអាចផ្ទៀងផ្ទាត់រាងខាងលើ  
 ដោយការពន្លាតកន្សោម  $(x-a)(x-b)(x-c) = 0$  ។

យើងមាន  $\begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z = 7 \\ 2^{-x} + 2^{-y} + 2^{-z} = \frac{7}{4} \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z = 7 \\ \frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^y} + \frac{1}{2^z} = \frac{7}{4} \\ 2^{x+y+z} = 2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z = 7 \\ \frac{2^y 2^z + 2^x 2^z + 2^x 2^y}{2^x 2^y 2^z} = \frac{7}{4} \\ 2^x 2^y 2^z = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z = 7 \\ 2^y 2^z + 2^x 2^z + 2^x 2^y = \frac{7}{4} \times 8 \\ 2^x 2^y 2^z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z = 7 \\ 2^y 2^z + 2^x 2^z + 2^x 2^y = 14 \\ 2^x 2^y 2^z = 8 \end{cases}$$

ដើម្បីងាយស្រួល យើងតាង  $a = 2^x$  ,  $b = 2^y$  ,  $c = 2^z$

យើងបានប្រព័ន្ធថ្មី  $\begin{cases} a + b + c = 7 \\ bc + ac + ab = 14 \\ abc = 8 \end{cases}$  តាមទ្រឹស្តីបទវ៉ែត

$a, b, c$  ជាឫសនៃសមីការ  $X^3 - 7X^2 + 14X - 8 = 0$

(មានវិធីដោះស្រាយសមីការដឺក្រេទី៣តាម Cadan ប៉ុន្តែពុំមានក្នុងកម្មវិធីសិក្សារបស់ក្រសួងអប់រំ ដូចនេះយើងនៅតែដោះស្រាយដោយរបៀបទាញឫសងាយ ។ សូមចងចាំថា វាពុំមែនឫសសមត្ថភាពរបស់យើងទេ ព្រោះគេរៀបចំលំហាត់បានល្អណាស់ )

សមីការខាងលើមានឫសងាយ :  $X = 1$

ក្រោយពីចែកពហុធា  $X^3 - 7X^2 + 14X - 8 = 0$  និង  $X = 1$

យើងបាន :  $(X - 1)(X^2 - 6X + 8) = 0$

$(X - 1)(X - 2)(X - 4) = 0$

នាំឱ្យ  $\begin{cases} X - 1 = 0 \\ X - 2 = 0 \\ X - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = a = 1 \\ X = b = 2 \\ X = c = 4 \end{cases}$

យើងបាន  $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2^0 \\ 2^y = 2^1 \\ 2^z = 2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានឫស  $\{x, y, z\} = \{0, 1, 2\}$  ។

**២២៧** គណនា  $\left(\frac{2a}{b}\right)^{2011}$

គេឱ្យ  $a + \sqrt{b} = \sqrt{15} + \sqrt{216}$   
 $a + \sqrt{b} = \sqrt{9} + \sqrt{36 \cdot 6} + 6$   
 $= \sqrt{3^2 + 6\sqrt{6} + 6^2}$   
 $= \sqrt{(3 + \sqrt{6})^2}$   
 $= 3 + \sqrt{6}$

កន្សោមនៃអង្គទាំងពីរមានទម្រង់ដូចគ្នា និង  $a$  និង  $b$  ជាពីរចំនួនគតិវិជ្ជមាន នាំឱ្យយើងទាញបានករណីតែមួយគត់គឺ :

$a = 3$  &  $b = 6$

ចំពោះ  $a = 3$  &  $b = 6$  យើងបាន :

$$\left(\frac{2a}{b}\right)^{2011} = \left(\frac{2 \cdot 3}{6}\right)^{2011} = \left(\frac{6}{6}\right)^{2011} = 1^{2011} = 1$$

ដូចនេះ គណនាបាន  $\left(\frac{2a}{b}\right)^{2011} = 1$  ។

**២២៨** រកចំនួនខ្ទង់ផ្នែកគត់នៃចំនួន  $A = 2^{2011}$

យើងមាន :  $A = 2^{2011}$  ដោយបំបែកលោការីតគោល 10

យើងបាន :  $\log A = \log 2^{2011}$

$\log A = 2011 \cdot \log 2$

បម្រាប់ :  $\log 2 \approx 0.301$

នាំឱ្យ  $\log A = 2011 \cdot 0.301$

$\log A = 605.311$

ដោយចំនួន  $605 < 605.311 < 606$

នាំឱ្យ  $605 < \log A < 606$

$10^{605} < A < 10^{606}$

ដោយ  $10^{605}$  ជាចំនួនមានលេខ 606 ខ្ទង់ ហើយចំនួន

$10^{606}$  ជាចំនួនមានលេខ 607 ខ្ទង់

ទាញបាន  $A$  ជាចំនួនដែលមានលេខ 606 ខ្ទង់

ដូចនេះ  $A = 2^{2011}$  ជាចំនួនដែលមានផ្នែកគត់ 606 ខ្ទង់ ។

**២២៩** ដោះស្រាយសមីការ  $\frac{3\sqrt{x}-5}{2} - \frac{2\sqrt{x}-7}{3} = \sqrt{x}-1$

យើងមាន  $\frac{3\sqrt{x}-5}{2} - \frac{2\sqrt{x}-7}{3} = \sqrt{x}-1$  ,  $x \geq 0$

$$\frac{3(3\sqrt{x}-5)}{6} - \frac{2(2\sqrt{x}-7)}{6} = \frac{6(\sqrt{x}-1)}{6}$$

$$3(3\sqrt{x}-5) - 2(2\sqrt{x}-7) = 6(\sqrt{x}-1)$$

$$9\sqrt{x} - 15 - 4\sqrt{x} + 14 = 6\sqrt{x} - 6$$

$$5\sqrt{x} - 1 = 6\sqrt{x} - 6$$

$$\sqrt{x} = 5$$

$$x = 25$$

ចំពោះ  $x = 25$  ក្រោយពីផ្ទៀងផ្ទាត់  $4=4$  ពិត

ដូចនេះ សមីការមានឫស  $x = 25$  ។

**២៣០** ប្រៀបធៀប  $ab$  និង  $PGCD(a,b) \times PPCM(a,b)$

យើងមាន  $a = 90$ ,  $b = 280$  ដោយបំបែកជាកត្តាបឋម :

$$\begin{array}{r|l} a=90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} b=280 & 2 \\ 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

នាំឱ្យ  $a = 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$  និង  $b = 280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$

យើងបាន : •  $ab = 90 \times 280 = 25200$

•  $PGCD(a,b) = 2 \times 5 = 10$

•  $PPCM(a,b) = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2520$

នោះ  $PGCD(a,b) \times PPCM(a,b) = 10 \times 2520 = 25200$

ឃើញថា  $ab = PGCD(a,b) \times PPCM(a,b) = 25200$

ដូចនេះ យើងប្រៀបធៀបបាន  
 $ab = PGCD(a,b) \times PPCM(a,b)$  ។

**២៣១** ផ្ទៀងផ្ទាត់កលក្នុងភាព

$$(1 + \sin x + \cos x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$$

ពិនិត្យ :  $(1 + \sin x + \cos x)^2$

$$\text{តាមរូបមន្ត } (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

ដោយពន្លាតតាមរូបមន្តខាងលើ យើងបាន :

$$\begin{aligned} & (1 + \sin x + \cos x)^2 \\ &= 1^2 + \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x + 2\cos x + 2\sin x \cos x \\ &= 1^2 + 1 + 2\sin x + 2\cos x + 2\sin x \cos x \\ &= 2(1 + \sin x + \cos x + \sin x \cos x) \\ &= 2[(1 + \sin x) + (\cos x + \sin x \cos x)] \\ &= 2[(1 + \sin x) + \cos x(1 + \sin x)] \\ &= 2(1 + \sin x)(1 + \cos x) \end{aligned}$$

ព្រោះ ដោយសារ  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

នាំឱ្យ  $(1 + \sin x + \cos x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$

ដូចនេះ  $(1 + \sin x + \cos x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$  ។

**២៣២** ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

យើងមាន  $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy - z^2 + 6z = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = z^2 - 6z + 13 \end{cases}$

ដោយស្គាល់ផលបូក និងផលគុណ យើងបង្កើតបានសមីការ

$$X^2 - 4X + (z^2 - 6z + 13) = 0 \text{ ដែលមាន } x \text{ \& } y \text{ ជាឫស}$$

មាន  $\Delta' = b'^2 - ac$

$$= (-2)^2 - (z^2 - 6z + 13)$$

$$= 4 - z^2 + 6z - 13$$

$$= -z^2 + 6z - 9$$

$$= -(z^2 - 6z + 9)$$

$$= -(z - 3)^2$$

ដោយ  $-(z - 3)^2 \leq 0$  មានតែមួយករណីគត់ ដែលនាំឱ្យ

សមីការមានឫសគឺ  $-(z - 3)^2 = 0$  នោះ  $z = 3$

-ចំពោះ  $z = 3$  យើងបានសមីការថ្មី :

$$X^2 - 4X + (3^2 - 6 \cdot 3 + 13) = 0$$

$$X^2 - 4X + 4 = 0$$

$$(X - 2)^2 = 0$$

សមីការមានឫសឌុប  $X_1 = X_2 = 2$

យើងបានឫសនៃសមីការគឺ :  $\begin{cases} X_1 = x = 2 \\ X_2 = y = 2 \end{cases}$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយ  $x = 2, y = 2, z = 3$  ។

**២៣៣** បែងចែកនិមិត្តសញ្ញាលោការីត

យើងមាននិមិត្តសញ្ញាលោការីតដូចខាងក្រោម :

$$\text{Log} x, \log x, \lg x, \ln x, \log_{10} x, \log_e x$$

តាមការប្រើប្រាស់ របស់អ្នកគណិតវិទ្យានិមិត្តសញ្ញា :

- លោការីតទស្សភាគ ឬ លោការីតគោល ១០ រួមមាន :

$$\log x, \lg x, \log_{10} x$$

- លោការីតនេពែ ឬ លោការីតគោល  $e$  រួមមាន :

$$\text{Log} x, \ln x, \log_e x$$

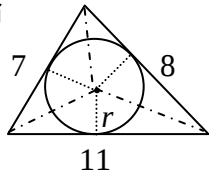
(សំបាត់ខាងលើ គ្រាន់តែចង់បង្ហាញពីនិមិត្តសញ្ញាលោការីត)

**២៣៤ រកក្រឡាផ្ទៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណនេះ**

-តាមរូបមន្តហេរុង ផ្ទៃនៃត្រីកោណគឺ

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ដែលមាន  $a, b, c$  ជារង្វាស់ជ្រុង



ហើយ  $p = \frac{a+b+c}{2}$  ជាកន្លះបរិមាត្រ

-សម្មតិកម្ម : ត្រីកោណមានរង្វាស់ជ្រុង 7, 8 និង 11

$$\text{នោះ } p = \frac{7+8+11}{2} = 13$$

$$\begin{aligned} \text{យើងបាន : } S_{\Delta} &= \sqrt{13(13-7)(13-8)(13-11)} \\ &= \sqrt{13 \times 6 \times 5 \times 2} \\ &= 2\sqrt{13 \times 15} \end{aligned}$$

-ផ្ទៃត្រីកោណធំ បានពីផលបូកផ្ទៃត្រីកោណតូចៗបីដែលមានរង្វាស់ជ្រុងនីមួយៗជាបាត និងកាំរង្វង់  $r$  នៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ជាកម្ពស់ យើងបាន :

$$\begin{aligned} S_{\Delta} &= \left( \frac{1}{2} \times 7 \times r \right) + \left( \frac{1}{2} \times 8 \times r \right) + \left( \frac{1}{2} \times 11 \times r \right) \\ &= \frac{7r}{2} + \frac{8r}{2} + \frac{11r}{2} = 13r \end{aligned}$$

$$\text{នាំឱ្យ } 13r = 2\sqrt{13 \times 15} \Rightarrow r = \frac{2\sqrt{13 \times 15}}{13}$$

-ផ្ទៃរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណគឺ  $S_o = \pi r^2$

$$\begin{aligned} S_o &= \pi \left( \frac{2\sqrt{13 \times 15}}{13} \right)^2 \\ &= \pi \cdot \frac{4 \times 13 \times 15}{13^2} = \frac{60\pi}{13} \end{aligned}$$

ដូចនេះ ផ្ទៃក្រកឡារង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណគឺ  $S_o = \frac{60\pi}{13}$  ។

**២៣៥ គណនាតម្លៃនៃកន្សោម  $P = a^{2010} + b^{2011} + c^{2012}$**

តាមរូបមន្តឯកលក្ខណៈភាព

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(a+c)$$

សម្មតិកម្ម :  $a+b+c=1$  និង  $a^3+b^3+c^3=1$

$$\text{នាំឱ្យ } 1^3 = 1 + 3(a+b)(b+c)(a+c)$$

$$3(a+b)(b+c)(a+c) = 0$$

$$(a+b)(b+c)(a+c) = 0$$

$$\text{ទាញបាន } \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ a+c=0 \end{cases}$$

-ចំពោះ  $a+b=0$  តាមបម្រាប់  $a+b+c=1$  នោះ  $c=1$

ហើយ  $a^2+b^2+c^2=1$  នោះ  $a^2+b^2=0$  ទាញបាន

$a=0, b=0$  យើងគណនាតម្លៃនៃកន្សោម :

$$P = a^{2010} + b^{2011} + c^{2012} = 0^{2010} + 0^{2011} + 1^{2012} = 1$$

-ចំពោះ  $b+c=0$  តាមបម្រាប់  $a+b+c=1$  នោះ  $a=1$

ហើយ  $a^2+b^2+c^2=1$  នោះ  $b^2+c^2=0$  ទាញបាន

$b=0, c=0$  យើងគណនាតម្លៃនៃកន្សោម :

$$P = a^{2010} + b^{2011} + c^{2012} = 1^{2010} + 0^{2011} + 0^{2012} = 1$$

-ចំពោះ  $a+c=0$  តាមបម្រាប់  $a+b+c=1$  នោះ  $b=1$

ហើយ  $a^2+b^2+c^2=1$  នោះ  $a^2+c^2=0$  ទាញបាន

$a=0, c=0$  យើងគណនាតម្លៃនៃកន្សោម :

$$P = a^{2010} + b^{2011} + c^{2012} = 0^{2010} + 1^{2011} + 0^{2012} = 1$$

សរុបក ទោះជាករណីណាក៏ដោយ  $P=1$  ជានិច្ច

ដូចនេះ តម្លៃគណនាបានគឺ  $P=1$  ។

**២៣៦ បង្ហាញថា  $a^2+b^2+c^2+d^2+1 \geq a+b+c+d$**

យើងមាន  $a^2+b^2+c^2+d^2+1 \geq a+b+c+d$

$$a^2 - a + b^2 - b + c^2 - c + d^2 - d + 1 \geq 0$$

$$\left( a^2 - a + \frac{1}{4} \right) + \left( b^2 - b + \frac{1}{4} \right) + \left( c^2 - c + \frac{1}{4} \right) + \left( d^2 - d + \frac{1}{4} \right) \geq 0$$

$$\left( a - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( b - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( c - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( d - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0$$

$$\text{ដោយ } \left( a - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0, \left( b - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0, \left( c - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0, \left( d - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0$$

$$\text{នាំឱ្យ } \left( a - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( b - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( c - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( d - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0 \text{ ពិតជានិច្ច}$$

ដូចនេះ  $a^2+b^2+c^2+d^2+1 \geq a+b+c+d$  ។

### ២៣៧ រកអាយុម្នាក់ៗ

តាង  $a$  ជាអាយុឪពុក និង  $b, c, d$  ជាអាយុកូនទាំងបី  
បម្រាប់ : អាយុអ្នកទាំងបួនមានសមាមាត្រ 15, 7, 5, 4

បើតាង  $x$  ជាផលធៀបសមាមាត្រអាយុអ្នកទាំងបួន

$$\text{យើងបាន : } \frac{a}{15} = \frac{b}{7} = \frac{c}{5} = \frac{d}{4} = x$$

$$\text{ទាញបាន : } \frac{a}{15} = x \Rightarrow a = 15x \quad \frac{b}{7} = x \Rightarrow b = 7x$$

$$\frac{c}{5} = x \Rightarrow c = 5x \quad \frac{d}{4} = x \Rightarrow d = 4x$$

សម្មតិកម្ម : អាយុឪពុកតិចជាងផលបូកអាយុកូនទាំងបី 3 ឆ្នាំ

$$\text{យើងបាន } a + 3 = b + c + d$$

$$15x + 3 = 7x + 5x + 4x$$

$$x = 3$$

$$\text{នាំឱ្យ : } \frac{a}{15} = 3 \Rightarrow a = 45 \quad \frac{b}{7} = 3 \Rightarrow b = 21$$

$$\frac{c}{5} = 3 \Rightarrow c = 15 \quad \frac{d}{4} = 3 \Rightarrow d = 12$$

$$\text{ផ្ទៀងផ្ទាត់ : } 45 + 3 = 21 + 15 + 12 \Leftrightarrow 48 = 48 \text{ ពិត}$$

ដូចនេះ ឪពុកមានអាយុ 45 ឆ្នាំ និងកូនទាំងបីមានអាយុ  
រៀងគ្នាគឺ : 21 ឆ្នាំ, 15 ឆ្នាំ, 12 ឆ្នាំ ។

### ២៣៨ ប្រៀបធៀបពីរចំនួន $\left(\frac{9}{25}\right)^{60}$ និង $\left(\frac{225}{625}\right)^{50}$

$$\text{ពិនិត្យ : } \left(\frac{9}{25}\right)^{60} = \left(\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)^{60} = \left(\frac{3}{5}\right)^{2 \times 60} = \left(\frac{3}{5}\right)^{120}$$

$$\text{ហើយ } \left(\frac{225}{625}\right)^{50} = \left(\left(\frac{15}{25}\right)^2\right)^{50} = \left(\frac{3}{5}\right)^{2 \times 50} = \left(\frac{3}{5}\right)^{100}$$

$$\text{ដោយ } \left(\frac{3}{5}\right)^{120} < \left(\frac{3}{5}\right)^{100} \text{ ព្រោះវាមានគោល } \frac{3}{5} < 1$$

$$\text{នាំឱ្យ } \left(\frac{9}{25}\right)^{60} = \left(\frac{3}{5}\right)^{120} < \left(\frac{3}{5}\right)^{100} = \left(\frac{225}{625}\right)^{50}$$

ដូចនេះ ក្រោយពីប្រៀបធៀប  $\left(\frac{9}{25}\right)^{60} < \left(\frac{225}{625}\right)^{50}$  ។

(សំបាត់ខាងលើមានច្រើននាក់ណាស់ ដែលច្រើនក្លែងក្លាយជា គោលតូចជាង 1)

### ២៣៩ ស្រាយបំភ្លឺថាគេបាន $\frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$

$$\text{យើងមានសមាមាត្រ : } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ សមមូល } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad (1)$$

$$\text{-គុណ (1) នឹង } \frac{b}{d} \text{ យើងបាន : } \frac{ab}{cd} = \frac{b^2}{d^2} \quad (2)$$

$$\text{-គុណ (1) នឹង } \frac{a}{c} \text{ យើងបាន : } \frac{a^2}{c^2} = \frac{ab}{cd} \quad (3)$$

តាម (2) និង (3) យើងបានផលធៀបស្មើគ្នាគឺ :

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{ab}{cd} = \frac{b^2}{d^2} \text{ ឬអាចសរសេរ } \frac{a^2}{c^2} = \frac{2ab}{2cd} = \frac{b^2}{d^2}$$

$$\text{យើងបាន } \frac{a^2}{c^2} = \frac{2ab}{2cd} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{c^2 + 2cd + d^2} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$$

$$\text{នាំឱ្យ } \frac{2ab}{2cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} \Leftrightarrow \frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា  $\frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$  ។

### ២៤០ រកពីរចំនួនគតិវិជ្ជមានតត្បាញ

តាង  $x$  ជាចំនួនទី 1 នោះចំនួនទី 2 បន្ទាប់គឺ  $x+1$

តាមបម្រាប់ប្រធានយើងបាន :

$$(x+1)^2 - x^2 = 321$$

$$x^2 + 2x + 1 - x^2 = 321$$

$$2x = 321 - 1$$

$$x = \frac{320}{2} = 160$$

ដោយ  $x = 160$  ជាចំនួនទី 1 នោះចំនួនទី 2 គឺ  $x+1 = 161$

ដូចនេះ ចំនួនគតិវិជ្ជមានតត្បាញនោះគឺ 160 និង 161 ។

### ២៤១ តើក្មេងណាឈ្នះ ហើយក្មេងណាចាញ់

តាង  $N$  ជាចំនួនឃ្លីសរុប មានន័យថា  $A+B+C=N$

-មុនពេលលេង យើងមានសមាមាត្រ :

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5}$$

តាមលក្ខណៈសមាមាត្រយើងអាចសរសេរបាន :

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = \frac{A+B+C}{3+4+5} = \frac{N}{12}$$

ទាញបាន :

$$\begin{aligned} \bullet \frac{A}{3} = \frac{N}{12} &\Rightarrow A = \frac{3N}{12} = \frac{12N}{48} \\ \bullet \frac{B}{4} = \frac{N}{12} &\Rightarrow B = \frac{4N}{12} = \frac{16N}{48} \\ \bullet \frac{C}{5} = \frac{N}{12} &\Rightarrow C = \frac{5N}{12} = \frac{20N}{48} \end{aligned}$$

-ក្រោយពេលលេង យើងមានសមាមាត្រ :

$$\frac{A}{15} = \frac{B}{16} = \frac{C}{17}$$

តាមលក្ខណៈសមាមាត្រយើងអាចសរសេរបាន :

$$\frac{A}{15} = \frac{B}{16} = \frac{C}{17} = \frac{A+B+C}{15+16+17} = \frac{N}{48}$$

ទាញបាន :

$$\begin{aligned} \bullet \frac{A}{15} = \frac{N}{48} &\Rightarrow A = \frac{15N}{48} \\ \bullet \frac{B}{16} = \frac{N}{48} &\Rightarrow B = \frac{16N}{48} \\ \bullet \frac{C}{17} = \frac{N}{48} &\Rightarrow C = \frac{17N}{48} \end{aligned}$$

-ប្រៀបធៀបមុនពេលលេង និងក្រោយពេលលេង :

ក្មេង A :  $\frac{12N}{48} < \frac{15N}{48}$  មានន័យថា A ឈ្នះ

ក្មេង B :  $\frac{16N}{48} = \frac{16N}{48}$  មានន័យថា B រួចខ្លួន

ក្មេង C :  $\frac{20N}{48} > \frac{17N}{48}$  មានន័យថា C ចាញ់

ដូចនេះ ក្មេង : A ឈ្នះ , B រួចខ្លួន និង C ចាញ់ ។

### ២៤២ ដោះស្រាយសមីការ

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} - \frac{x}{6} + \frac{x}{9} - \frac{x}{12} &= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ -\frac{x}{3} \left( -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) &= \left( -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \\ -\frac{x}{3} &= 1 \Rightarrow x = -3 \end{aligned}$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស  $x = -3$  ។

### ២៤៣ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ :

យើងមាន :

$$\begin{cases} x + xy + y = 1 \\ y + yz + z = 4 \\ z + zx + x = 9 \end{cases} \text{ យើងបាន}$$

$$\begin{cases} x + xy + y = 1 \\ y + yz + z = 4 \\ z + zx + x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + xy + y + 1 = 1 + 1 \\ y + yz + z + 1 = 4 + 1 \\ z + zx + x + 1 = 9 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(y+1) + (y+1) = 2 \\ y(z+1) + (z+1) = 5 \\ z(x+1) + (x+1) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+1)(x+1) = 2 \text{ (i)} \\ (z+1)(y+1) = 5 \text{ (ii)} \\ (x+1)(z+1) = 10 \text{ (iii)} \end{cases}$$

ដោយគុណសមីការ : (i) × (ii) × (iii) បញ្ចូលគ្នា យើងបាន

$$(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2 = 100$$

$$(x+1)(y+1)(z+1) = \pm 10$$

-ចំពោះ  $(x+1)(y+1)(z+1) = 10$  (\*)

ចែកសមីការ (\*) និងសមីការ (i), (ii), (iii) យើងបាន :

$$\begin{cases} \frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{(y+1)(x+1)} = \frac{10}{2} \\ \frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{(z+1)(y+1)} = \frac{10}{5} \\ \frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{(x+1)(z+1)} = \frac{10}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+1 = 5 \\ x+1 = 2 \\ y+1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 4 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

-ចំពោះ  $(x+1)(y+1)(z+1) = -10$  (\*\*)

ចែកសមីការ (\*\*) និងសមីការ (i), (ii), (iii) យើងបាន :

$$\begin{cases} \frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{(y+1)(x+1)} = \frac{-10}{2} \\ \frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{(z+1)(y+1)} = \frac{-10}{5} \\ \frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{(x+1)(z+1)} = \frac{-10}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+1 = -5 \\ x+1 = -2 \\ y+1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -6 \\ x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយពីរគឺ :

$$(x, y, z) = (1, 0, 4) \text{ ឬ } (x, y, z) = (-3, -2, -6) \text{ ។}$$

### ២៤៤ ប្រៀបធៀបចំនួន :

យើងមាន  $2^{2^{2^{-2}}}$  មានលេខ 2 ចំនួន 1001 ដង

ហើយ  $3^{3^{3^{-3}}}$  មានលេខ 3 ចំនួន 1000 ដង

ពិនិត្យ :  $2^{2^2} = 2^4 = 16$  ហើយ  $3^3 = 27$

ឃើញថា  $16 < 27 \Rightarrow 2^{2^2} < 3^3$

យើងដឹងថា  $2^{2^{2^2}}$  តូចជាង  $3^{3^{3^3}}$  ដែលមាន 998 ដង

ជាស្វ័យគុណបន្តបន្ទាប់ដូចគ្នា

នោះយើងបាន  $16^{2^{2^{2^2}}} < 27^{3^{3^{3^3}}}$  ដែលមានលេខ 2 និងលេខ 3

ចំនួន 998 ដងជាស្វ័យគុណបន្តបន្ទាប់ដូចគ្នា

ដោយ  $16^{2^{2^{2^2}}} \text{ (មាន 998 ដងលេខ 2)} = 2^{2^{2^{2^2}}} \text{ (មាន 1001 ដងលេខ 2)}$

$27^{3^{3^{3^3}}} \text{ (មាន 998 ដងលេខ 3)} = 3^{3^{3^{3^3}}} \text{ (មាន 1000 ដងលេខ 3)}$

ដូចនេះ  $2^{2^{2^{2^2}}} \text{ (មាន 1001 ដងលេខ 2)} < 3^{3^{3^{3^3}}} \text{ (មាន 1000 ដងលេខ 3)}$

### ២៤៥ ដោះស្រាយសមីការ

$x = \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{4-x} + \sqrt{4-x} \cdot \sqrt{5-x} + \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{3-x}$   
(វាជាសមីការអសនិទាន ចាំបាច់ត្រូវយកចម្លើយដែលរកឃើញមកផ្ទៀងផ្ទាត់)

សមីការមានន័យកាលណា :

$$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \leq 4 \\ x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow x \leq 3$$

-ដើម្បីកុំឱ្យវែងពេក និងពិបាកក្នុងការសរសេរ :

យើងតាង  $4-x=t \Rightarrow \begin{cases} x=4-t \\ 3-x=t-1 \\ 5-x=t+1 \end{cases}$  យើងបាន :

$4-t = \sqrt{t-1} \cdot \sqrt{t} + \sqrt{t} \cdot \sqrt{t+1} + \sqrt{t+1} \cdot \sqrt{t-1}$

$4-t = \sqrt{(t-1)t} + \sqrt{t(t+1)} + \sqrt{(t+1)(t-1)}$

$4-t = \sqrt{t^2-t} + \sqrt{t^2+t} + \sqrt{t^2-1}$

$(4-t) - \sqrt{t^2-1} = \sqrt{t^2-t} + \sqrt{t^2+t}$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេ យើងបាន :

$(4-t) - \sqrt{t^2-1} = \sqrt{t^2-t} + \sqrt{t^2+t}$

$(4-t)^2 - 2(4-t)\sqrt{t^2-1} + t^2 - 1 = 2t^2 + 2t\sqrt{t^2-1}$

$(4-t)^2 + t^2 - 1 - 2t^2 = 2t\sqrt{t^2-1} + 2(4-t)\sqrt{t^2-1}$

$15-8t = 8\sqrt{t^2-1}$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេម្តងទៀតយើងបាន :

$225 - 240t + 64t^2 = 64t^2 - 64$

$240t = 289$

$t = \frac{289}{240}$

នាំឱ្យ  $x = 4-t = 4 - \frac{289}{240} = \frac{960-289}{240} = \frac{671}{240} < 3$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ ចំពោះ  $x = \frac{671}{240}$

$\sqrt{3-x} \cdot \sqrt{4-x} + \sqrt{4-x} \cdot \sqrt{5-x} + \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{3-x}$

$= \sqrt{\frac{49}{240}} \cdot \sqrt{\frac{289}{240}} + \sqrt{\frac{289}{240}} \cdot \sqrt{\frac{529}{240}} + \sqrt{\frac{529}{240}} \cdot \sqrt{\frac{49}{240}}$

$= \sqrt{\frac{7^2 \cdot 17^2}{240^2}} + \sqrt{\frac{17^2 \cdot 23^2}{240^2}} + \sqrt{\frac{23^2 \cdot 7^2}{240^2}}$

$= \frac{7 \cdot 17}{240} + \frac{17 \cdot 23}{240} + \frac{23 \cdot 7}{240}$

$= \frac{119+391+161}{240} = \frac{671}{240}$

ដោយ  $x = \frac{671}{240}$  នោះ  $\frac{671}{240} = \frac{671}{240}$  ពិត

ដូចនេះ សមីការមានឫស  $x = \frac{671}{240}$  ។

### ២៤៦ រកចម្ងាយពីស្វាយជ្រំទៅស្វាយរៀង

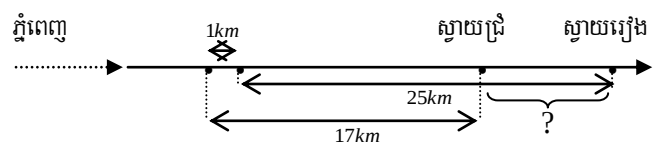
-សម្មតិកម្ម : បង្គោលចម្ងាយទី១ដាក់ថា "ស្វាយជ្រំ 17km"

មានន័យថាធ្វើដំណើរ 17km ទៀត ដល់ស្វាយជ្រំ

ហើយ បង្គោលចម្ងាយទី២បន្ទាប់ដាក់ថា "ស្វាយរៀង 25km"

មានន័យថាធ្វើដំណើរ 25km ទៀត ដល់ស្វាយរៀង ។

យើងអាចគូសរូបងាយមើល



តាមរូបយើងអាចបកស្រាយបានយ៉ាងងាយថា

ចម្ងាយពីស្វាយជ្រំ ទៅស្វាយរៀងគឺ :

$(25+1) - 17 = 26 - 17 = 9km$

ដូចនេះ ចម្ងាយពីស្វាយជ្រំទៅស្វាយរៀងគឺ 9km ។

**២៤៧ > រកចំនួនចាប់ និងចំនួនផ្កាឈូក**

តាង  $x$  ជាចំនួនចាប់ និង  $y$  ជាចំនួនផ្កាឈូក

-តាមសម្មតិកម្ម : ចាប់មួយទំផ្កាឈូកមួយ នោះសល់ចាប់ មួយគ្មានផ្កាឈូកទំ យើងបានសមីការ :

$$x-1=y \quad (i)$$

-ហើយ បើចាប់ពីរទំផ្កាឈូកមួយ នោះនៅសល់ផ្កាឈូកមួយ គ្មានចាប់ទំ យើងបានសមីការ :

$$\frac{x}{2}=y-1 \quad (ii)$$

-តាមសមីការ (i) & (ii) យើងចង់ជាប្រព័ន្ធសមីការគឺ :

$$\begin{cases} x-1=y \\ \frac{x}{2}=y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x=2y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ -x+2y=2 \end{cases}$$

ដោយបូកអង្គ និងអង្គនៃសមីការទាំងពីរ យើងបាន :

$$+\begin{cases} x-y=1 \\ -x+2y=2 \end{cases} \Rightarrow y=3 \Rightarrow x=y+1=3+1=4$$

ដូចនេះ ចាប់មានចំនួន 4 ក្បាល , ផ្កាឈូកមានចំនួន 3 ទង ។

**២៤៨ > រកចំនួនសត្វខ្នែកដែលងាប់ និង រស់**

-យើងគួរប្រតិបត្តិការ ក្រៅពីសត្វខ្នែកងាប់ និងរស់វាគ្មានអ្វី ទៀតទេ ហើយសម្មតិកម្មនិយាយថា ងាប់បីរស់ពីរ នោះ យើងអាចសន្និដ្ឋានបានថា សត្វទាំងអស់មានចំនួន 5 ក្បាល ។  
(ក្រៅពីងាប់ និងរស់គ្មានអ្វីទៀតឡើយ )

-ពិចារណាថា : បើសត្វ 5 ងាប់ 3 នោះសត្វ 120 ងាប់ប៉ុន្មាន?

$$\text{នាំឱ្យ ចំនួនសត្វងាប់} = \frac{120 \times 3}{5} = 72 \text{ ក្បាល}$$

បើសត្វ 5 រស់ 2 នោះសត្វ 120 រស់ប៉ុន្មាន?

$$\text{នាំឱ្យ ចំនួនសត្វរស់} = \frac{120 \times 2}{5} = 48 \text{ ក្បាល}$$

ដូចនេះ ចំនួនសត្វខ្នែកដែលងាប់មាន 72 ក្បាល  
ហើយចំនួនសត្វខ្នែកដែលរស់មាន 48 ក្បាល ។

**២៤៩ > រកអាយុរបស់ដាវីស្រីសព្វថ្ងៃ**

-សម្មតិកម្ម : អាយុរបស់ដាវីតាងដោយ  $x$  ហើយ  $x$  ជា ពហុគុណនៃ មានន័យថា  $x$  អាចមានតម្លៃ ជាច្រើនដូចជា :  
 $0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, \dots$

ក្នុងចំណោមលេខទាំងអស់ខាងលើ មានតែលេខ 16 ទេដែល គោរពតាមលក្ខខណ្ឌ ធំជាង 10 និងតូចជាង 20  
នាំឱ្យតម្លៃ  $x$  មានតែមួយគត់គឺ 16

ដូចនេះ សព្វថ្ងៃដាវីស្រីមានអាយុ 16 ឆ្នាំ ។

**២៥០ > រកចំនួនថ្លៃដែលគាត់ផ្គត់ផ្គង់ចំណីដដែលឱ្យគោ**

-យើងសង្កេតឃើញថា កាលណាចំនួនគោកាន់តែច្រើន នោះរយៈពេលស៊ីកាន់តែថយចុះ វាជាសមាមាត្រប្រាស នាំឱ្យ ចំនួនថ្លៃដែលត្រូវផ្គត់ផ្គង់គឺ :

$$\frac{40}{(40+10)} \times 35 = \frac{35 \times 40}{(40+10)} = \frac{1400}{50} = 28 \text{ ថ្លៃ}$$

(ពុំមែន  $\frac{(40+10) \times 35}{40} = 43.75$  ថ្លៃនោះទេ )

ដូចនេះ ចំនួនថ្លៃដែលត្រូវផ្គត់ផ្គង់គឺ 28 ថ្លៃ ។

**២៥១ > បង្ហាញថា  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$**

យើងមាន :

$$\begin{aligned} a_1 &= \sin a_1 & \Rightarrow a_1^2 &= \sin^2 a_1 \\ a_2 &= \cos a_1 \cdot \sin a_2 & \Rightarrow a_2^2 &= \cos^2 a_1 \cdot \sin^2 a_2 \\ a_3 &= \cos a_1 \cdot \cos a_2 & \Rightarrow a_3^2 &= \cos^2 a_1 \cdot \cos^2 a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= \sin^2 a_1 + \cos^2 a_1 \cdot \sin^2 a_2 + \cos^2 a_1 \cdot \cos^2 a_2 \\ &= \sin^2 a_1 + \cos^2 a_1 (\sin^2 a_2 + \cos^2 a_2) \\ &= \sin^2 a_1 + \cos^2 a_1 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{ព្រោះ } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

ដូចនេះ ឃើញថា  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$  ប្រាកដមែន ។

**២៥២ គណនាផលគុណ  $P_n$**

$$\begin{aligned} \text{ពិនិត្យ : } 1+a^2+a^4 &= (1+2a^2+a^4)-a^2 \\ &= (1+2a^2+a^4)-a^2 \\ &= (1+a^2)^2-a^2 \\ &= (1+a^2-a)(1+a^2+a) \\ &= (1-a+a^2)(1+a+a^2) \end{aligned}$$

$$\text{នាំឱ្យ } (1-a+a^2) = \frac{1+a^2+a^4}{1+a+a^2}$$

បើប្តូរ  $a$  ជា  $x^{2^k}$  យើងបាន :

$$(1-x^{2^k}+x^{2^{k+1}}) = \frac{1+x^{2^{k+1}}+x^{2^{k+2}}}{1+x^{2^k}+x^{2^{k+1}}}$$

យើងឱ្យតម្លៃ  $k=0, 1, 2, 3, \dots, n$

$$\begin{aligned} \text{បើ } k=0 : & \quad (1-x+x^2) = \frac{1+x^2+x^4}{1+x+x^2} \\ \text{បើ } k=1 : & \quad (1-x^2+x^4) = \frac{1+x^4+x^8}{1+x^2+x^4} \\ \text{បើ } k=2 : & \quad (1-x^4+x^8) = \frac{1+x^8+x^{16}}{1+x^4+x^8} \\ & \dots\dots\dots \\ \text{បើ } k=n : & \quad (1-x^{2^n}+x^{2^{n+1}}) = \frac{1+x^{2^{n+1}}+x^{2^{n+2}}}{1+x^{2^n}+x^{2^{n+1}}} \end{aligned}$$

$$(1-x+x^2)(1-x^2+x^4)(1-x^4+x^8)\dots(1-x^{2^n}+x^{2^{n+1}}) = \frac{1+x^{2^{n+1}}+x^{2^{n+2}}}{1+x+x^2}$$

$$\text{ឬអាចសរសេរ } P_n = \frac{1+x^{2^{n+1}}+x^{2^{n+2}}}{1+x+x^2}$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{\text{គណនាបាន } P_n = \frac{1+x^{2^{n+1}}+x^{2^{n+2}}}{1+x+x^2}} \quad \checkmark$$

**២៥៣ បង្ហាញថា  $\frac{3}{a+b+c} < \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$**

តាមបម្រាស់  $a>0, b>0$  និង  $c>0$

នាំឱ្យ

$$a+b+c > a+b \Rightarrow \frac{1}{a+b+c} < \frac{1}{a+b} \quad (1)$$

$$a+b+c > b+c \Rightarrow \frac{1}{a+b+c} < \frac{1}{b+c} \quad (2)$$

$$a+b+c > c+a \Rightarrow \frac{1}{a+b+c} < \frac{1}{c+a} \quad (3)$$

ដោយបូកអង្គនិងអង្គនៃវិសមភាព : (1)+(2)+(3)

យើងបាន :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{a+b+c} &< \frac{1}{a+b} \\ \frac{1}{a+b+c} &< \frac{1}{b+c} \\ \frac{1}{a+b+c} &< \frac{1}{c+a} \end{aligned} \right. \\ & \frac{3}{a+b+c} < \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{\text{ឃើញថា } \frac{3}{a+b+c} < \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}} \quad \checkmark$$

**២៥៤ គណនាផលបូក  $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!$**

$$\text{ពិនិត្យ : } (k+1)! = (k+1) \cdot k!$$

$$(k+1)! = k \cdot k! + k!$$

$$\text{នាំឱ្យ } k \cdot k! = (k+1)! - k!$$

បើឱ្យតម្លៃ  $k=1, 2, 3, 4, \dots, n$  យើងបាន :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} 1 \cdot 1! &= 2! - 1! \\ 2 \cdot 2! &= 3! - 2! \\ 3 \cdot 3! &= 4! - 3! \\ 4 \cdot 4! &= 5! - 4! \\ &\dots\dots\dots \\ n \cdot n! &= (n+1)! - n! \end{aligned} \right. \\ & 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1! \end{aligned}$$

$$\text{ដូចនេះ } \boxed{\text{ក្រោយពីគណនាឃើញថា } S_n = (n+1)! - 1} \quad \checkmark$$

**២៥៥ គណនាផលបូក  $\sum_{n=1}^{9999} \left( \frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1})} \right)$**

$$\text{ពិនិត្យ : } (\sqrt[4]{n+1} + \sqrt[4]{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$\text{តែ } (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1$$

$$\text{នាំឱ្យ } (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$\text{យើងបាន } (\sqrt[4]{n+1} + \sqrt[4]{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$\text{ទាញបាន } (\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}) = \frac{1}{(\sqrt[n+1]{n+1} + \sqrt[n]{n})(\sqrt[n+1]{n+1} + \sqrt[n]{n})}$$

យើងបាន :

$$\sum_{n=1}^{9999} \left( \frac{1}{(\sqrt[n+1]{n+1} + \sqrt[n]{n})(\sqrt[n+1]{n+1} + \sqrt[n]{n})} \right) = \sum_{n=1}^{9999} (\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n})$$

បើឱ្យតម្លៃ  $n=1, 2, 3, \dots, 9999$  យើងបាន :

$$\begin{aligned} & \left( \sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{1} \right) \\ & \left( \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2} \right) \\ & \left( \sqrt[4]{4} - \sqrt[4]{3} \right) \\ & \dots\dots\dots \\ & \left( \sqrt[4]{10000} - \sqrt[4]{9999} \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{9999} (\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}) = \sqrt[4]{10000} - \sqrt[4]{1}$$

$$\sum_{n=1}^{9999} (\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}) = 10 - 1 = 9$$

ដូចនេះ  $\sum_{n=1}^{9999} \left( \frac{1}{(\sqrt[n+1]{n+1} + \sqrt[n]{n})(\sqrt[n+1]{n+1} + \sqrt[n]{n})} \right) = 9$  ។

**២៥៦** សម្រួលកន្សោម  $A = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}$

ដោយ  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3abc$$

$$= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c)$$

$$= (a+b+c) \left[ (a+b)^2 - (a+b)c + c^2 \right] - 3ab(a+b+c)$$

$$= (a+b+c) \left[ a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab \right]$$

$$= (a+b+c) (a^2 + b^2 - ac - bc + c^2 - ab)$$

$$= (a+b+c) (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} \\ &= \frac{(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)} \\ &= a + b + c \end{aligned}$$

ដែល  $(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \neq 0$

ដូចនេះ ក្រោយពីសម្រួល  $A = a + b + c$  ។

**២៥៧** ស្រាយបញ្ជាក់ថាគេបាន  $\left( \frac{a-b}{c-d} \right)^4 = \frac{a^4 + b^4}{c^4 + d^4}$

យើងមាន

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Leftrightarrow \frac{a^4}{c^4} = \frac{b^4}{d^4} = \frac{a^4 + b^4}{c^4 + d^4} \quad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀត  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d}$

$$\text{សមមូល } \left( \frac{a}{c} \right)^4 = \left( \frac{b}{d} \right)^4 = \left( \frac{a-b}{c-d} \right)^4 \quad (2)$$

$$\text{តាម (1) \& (2) } \frac{a^4}{c^4} = \frac{b^4}{d^4} = \left( \frac{a}{c} \right)^4 = \left( \frac{b}{d} \right)^4$$

$$\text{នាំឱ្យ } \frac{a^4 + b^4}{c^4 + d^4} = \left( \frac{a-b}{c-d} \right)^4$$

ដូចនេះ  $\boxed{\text{ស្រាយបានថា } \left( \frac{a-b}{c-d} \right)^4 = \frac{a^4 + b^4}{c^4 + d^4}} \quad \checkmark$

**២៥៨** រករូបមន្តទូទៅ

យើងមានឧទាហរណ៍ :

$$6^2 - 5^2 = 11$$

$$56^2 - 45^2 = 1111$$

$$556^2 - 445^2 = 111111$$

$$5556^2 - 4445^2 = 11111111$$

.....

យើងឃើញថា លេខ 1 កើនឡើងទ្វេដងជានិច្ច

ដូចនេះ តាមលំនាំគំរូខាងលើនេះយើងទាញបានរូបមន្តទូទៅ

$$\underbrace{555\dots56^2}_{\text{មាន } n \text{ ខ្ទង់}} - \underbrace{444\dots45^2}_{\text{មាន } n \text{ ខ្ទង់}} = \underbrace{111\dots111}_{\text{មាន } 2n \text{ ខ្ទង់}}$$

ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តខាងលើ

$$\text{តាង } A_n = 555\dots56^2 - 444\dots45^2$$

$$= (555\dots55 + 1)^2 - (444\dots44 + 1)^2$$

$$= \left( \frac{5}{9} \cdot 111\dots11 + 1 \right)^2 - \left( \frac{4}{9} \cdot 111\dots11 + 1 \right)^2$$

$$= \left[ \frac{5}{9} (10^n - 1) + 1 \right]^2 - \left[ \frac{4}{9} (10^n - 1) + 1 \right]^2$$

$$\begin{aligned}
 A_n &= \left[ \frac{5}{9}(10^n - 1) + 1 \right]^2 - \left[ \frac{4}{9}(10^n - 1) + 1 \right]^2 \\
 &= \left[ \frac{5}{9}(10^n - 1) + 1 - \frac{4}{9}(10^n - 1) - 1 \right] \times \\
 &\quad \times \left[ \frac{5}{9}(10^n - 1) + 1 + \frac{4}{9}(10^n - 1) + 1 \right] \\
 &= \left[ \frac{1}{9}(10^n - 1) \right] [10^n - 1 + 2] \\
 &= \frac{1}{9}(10^n - 1)(10^n + 1) \\
 &= \frac{1}{9}(10^{2n} - 1) \\
 &= \frac{1}{9}(999...999) \quad \text{ដែលមានលេខ } 9 \text{ ចំនួន } 2n \\
 &= 111...11 \quad \text{ដែលមានលេខ } 1 \text{ ចំនួន } 2n
 \end{aligned}$$

ដូចនេះ ជាការពិត រូបបម្រួលនេះពិតជាត្រឹមត្រូវគឺ

$$\underbrace{555...56^2}_{\text{មាន } n \text{ ខ្ទង់}} - \underbrace{444...45^2}_{\text{មាន } n \text{ ខ្ទង់}} = \underbrace{111...111}_{\text{មាន } 2n \text{ ខ្ទង់}}$$

**២៥៩** ▶ **គណនា**  $S = \cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \dots + \cos^2 89^\circ$

តាមរូបមន្ត  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$

ឬ  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

នាំឱ្យ  $\cos 1^\circ = \cos(90^\circ - 89^\circ) = \sin 89^\circ$

$\cos 2^\circ = \cos(90^\circ - 88^\circ) = \sin 88^\circ$

.....

$\cos 44^\circ = \cos(90^\circ - 46^\circ) = \sin 46^\circ$

នោះយើងបាន :

$\cos^2 1^\circ = \sin^2 89^\circ$  ,

$\cos^2 2^\circ = \sin^2 88^\circ$

.....

$\cos^2 44^\circ = \sin^2 46^\circ$

នោះយើងបាន :

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \begin{array}{l} \cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ \\ \cos^2 2^\circ + \cos^2 88^\circ \\ \cos^2 3^\circ + \cos^2 87^\circ \\ \dots\dots\dots \\ \cos^2 44^\circ + \cos^2 46^\circ \\ \cos^2 45^\circ \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 1^\circ + \sin^2 1^\circ = 1 \\ \cos^2 2^\circ + \sin^2 2^\circ = 1 \\ \cos^2 3^\circ + \sin^2 3^\circ = 1 \\ \dots\dots\dots \\ \cos^2 44^\circ + \sin^2 44^\circ = 1 \\ \cos^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \end{array} \right. \\
 &\frac{S}{44 + \frac{1}{2}} = \frac{44 + \frac{1}{2}}{44 + \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

នោះ  $S = 44 + \frac{1}{2} = \frac{88+1}{2} = \frac{89}{2}$

ដូចនេះ គណនាបាន  $S = \frac{89}{2}$  ។

**២៦០** ▶ **គណនា**

$S = \sin^2 0^\circ + \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \dots + \sin^2 90^\circ$

(ស្រដៀងលំហាត់ទី២៥៩)

តាមរូបមន្ត  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$

យើងបាន :

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \begin{array}{l} \sin^2 0^\circ + \sin^2 90^\circ \\ \sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ \\ \sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ \\ \dots\dots\dots \\ \sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ \\ \sin^2 45^\circ \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 0^\circ + \cos^2 0^\circ = 1 \\ \sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ = 1 \\ \sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ = 1 \\ \dots\dots\dots \\ \sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ = 1 \\ \sin^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \end{array} \right. \\
 &\frac{S}{45 + \frac{1}{2}} = \frac{45 + \frac{1}{2}}{45 + \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

នោះ  $S = 45 + \frac{1}{2} = \frac{90+1}{2} = \frac{91}{2}$

ដូចនេះ គណនាបាន  $S = \frac{91}{2}$  ។

**២៦១ > កំណត់តម្លៃ  $a$  &  $b$**

យើងមានចំនួន  $\overline{abba}$  ដែល  $1 \leq a \leq 9$  ,  $0 \leq b \leq 9$

$$\begin{aligned}\overline{abba} &= 1000a + 100b + 10b + a \\ &= 1001a + 110b \\ &= 11(91a + 10b)\end{aligned}$$

សម្មតិកម្ម  $\overline{abba}$  ជាគូបប្រាកដនៃចំនួនគត់ នោះយើងបាន

$$\begin{aligned}\overline{abba} &= k^3 \\ 11(91a + 10b) &= k^3 \\ 91a + 10b &= \frac{k^3}{11}\end{aligned}$$

ដោយ  $a$  &  $b$  ជាចំនួនគត់ នោះ  $91a + 10b$  ជាចំនួនគត់ដែរ

នាំឱ្យ  $k^3$  ចែកដាច់នឹង 11 នោះ  $k = 11n$  ,  $n$  គតិវិជ្ជមាន

យើងបាន  $k^3 = (11n)^3$  ដែល  $n = 1, 2, 3, \dots$

តែបើ  $n = 2$  នោះ  $k^3 = (22)^3 = 10648 > \overline{abba}$

នាំឱ្យ ចំនួនគតិវិជ្ជមាន  $n$  មានតម្លៃតែមួយគត់គឺ  $n = 1$

យើងបាន  $\overline{abba} = k^3 = (11 \times 1)^3 = 11^3 = 1331$

ទាញបាន តម្លៃ  $a = 1$  ,  $b = 3$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បានគឺ  $a = 1$  ,  $b = 3$  ។

**២៦២ > ក. កំណត់តម្លៃលេខនៃអញ្ចាត  $a, b, c$  និង  $d$**

យើងមានចំនួន  $\overline{abcd}$  និង  $\overline{dcba}$  តាមខ្ទង់នីមួយៗនោះ

$$1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9, 0 \leq c \leq 9, 1 \leq d \leq 9$$

$$\text{គេឱ្យ } \overline{abcd} \times 9 = \overline{dcba} \quad (1)$$

តាមទំនាក់ទំនង(1) នាំឱ្យកំណត់បានតម្លៃ  $a = 1$  តែមួយគត់

(ព្រោះបើ  $a > 1$  នោះលទ្ធផលជាលេខ ប្រាំខ្ទង់ )

$$\text{-ចំពោះ } a = 1 \text{ យើងបាន } \overline{1bcd} \times 9 = \overline{dc b1} \quad (2)$$

តាមទំនាក់ទំនង(2) នាំឱ្យកំណត់បានតម្លៃ  $d = 9$  តែមួយគត់

(ព្រោះមានតែករណីនេះទើប  $9 \times 9 = 81$  មានលេខ 1 ចុង)

$$\text{-ចំពោះ } d = 9 \text{ យើងបាន } \overline{1bc9} \times 9 = \overline{9cb1} \quad (3)$$

តាមទំនាក់ទំនង (3) ទាញបាន  $b = 0$

(ព្រោះ  $b \times 9$  មិនត្រូវមានត្រាទុកទេ )

$$\text{-ចំពោះ } b = 0 \text{ យើងបាន } \overline{10c9} \times 9 = \overline{9c01} \quad (4)$$

តាមទំនាក់ទំនង(4) ទាញបាន  $c = 8$  ព្រោះ  $8 \times 9 = 72$

ហើយថែមត្រាទុក 8 គឺ  $72 + 8 = 80$  មានលេខ 0 នៅចុង

$$\text{-ចំពោះ } c = 8 \text{ យើងបាន } 1089 \times 8 = 9801$$

ដូចនេះ តម្លៃកំណត់បានគឺ  $a = 1, b = 0, c = 8, d = 9$

**ខ. បញ្ជាក់ថា  $\overline{abcd}$  និង  $\overline{dcba}$  សុទ្ធតែជាការប្រាកដ**

$$\text{ដោយ } \overline{abcd} = 1089 = 33^2$$

$$\text{ហើយ } \overline{dcba} = 9801 = 99^2$$

ដូចនេះ ចំនួន  $\overline{abcd}$  និង  $\overline{dcba}$  សុទ្ធតែជាការប្រាកដ ។

**២៦៣ > រកពីរចំនួនជាការប្រាកដ**

តាង  $a = k^2$  ជាចំនួនទី 1 និង  $b = n^2$  ជាចំនួនទី 2 ដែល

$k$  &  $n$  ជាចំនួនគត់ ហើយ  $k > n$  ឬ  $k < n$

$$\text{តាមបម្រាបប្រធាន } ab - (a + b) = 4844$$

$$\text{យើងបាន : } ab - a - b = 4844$$

$$ab - a - b + 1 = 4844 + 1$$

$$a(b - 1) - (b - 1) = 4845$$

$$(a - 1)(b - 1) = 4845$$

$$\begin{array}{r|l} \text{ដោយ } a = k^2 \text{ និង } b = n^2 \text{ នោះយើងបាន :} & 4845 \\ (a - 1)(b - 1) = 4845 & 1615 \quad 5 \\ (k^2 - 1)(n^2 - 1) = 4845 & 323 \quad 17 \\ (k + 1)(k - 1)(n + 1)(n - 1) = 4845 & 19 \quad 19 \\ & 1 \end{array}$$

តែ  $4845 = 3 \times 5 \times 17 \times 19$  ជាផលគុណនៃបួនចំនួនគត់

ដែលមានតែមួយបែបគត់

$$\text{ដោយ } 3 \times 5 = (4 - 1)(4 + 1) \text{ និង } 17 \times 19 = (18 - 1)(18 + 1)$$

$$\text{នោះ } (k + 1)(k - 1)(n + 1)(n - 1) = (4 + 1)(4 - 1)(18 + 1)(18 - 1)$$

$$\text{-ចំពោះ } k > n \text{ ទាញបាន } k = 18, n = 4$$

$$\text{-ចំពោះ } k < n \text{ ទាញបាន } k = 4, n = 18$$

នាំឱ្យ 
$$\begin{cases} a = k^2 = 18^2 = 324 \\ b = n^2 = 4^2 = 16 \end{cases}$$

ឬ 
$$\begin{cases} a = k^2 = 4^2 = 16 \\ b = n^2 = 18^2 = 324 \end{cases}$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ :  $324 \times 16 - (324 + 16) = 4844$  ពិត

ហើយ  $16 \times 324 - (16 + 324) = 4844$  ពិត

ដូចនេះ ពីរចំនួនដែលជាការប្រាកដគឺ 324 & 16 ។

### ២៦៤ គណនារង្វាស់ជ្រុងនីមួយៗរបស់ត្រីកោណ

តាង  $a, b, c$  ជារង្វាស់ជ្រុងនៃ

ត្រីកោណកែង ដែល  $c$  ជាអ៊ីប៉ូតេនុស

-តាមពីតាក្រី :  $a^2 + b^2 = c^2$  (1)

-បម្រាប់ក្រឡាផ្ទៃស្មើ  $24cm^2$  នាំឱ្យ  $\frac{1}{2}ab = 24$  (2)

-បម្រាប់បរិមាត្រស្មើ  $24cm$  នាំឱ្យ  $a + b + c = 24$  (3)

តាម (3) :  $a + b = 24 - c$  លើកជាការេ

$$a^2 + 2ab + b^2 = 24^2 - 48c + c^2$$

$$(a^2 + b^2) + 2ab = 576 - 48c + c^2 \quad (4)$$

ដោយយក (1) & (2) ជំនួសក្នុង (4) យើងបាន :

$$c^2 + 2 \cdot 48 = 576 - 48c + c^2$$

$$96 = 576 - 48c$$

$$48c = 576 - 96 \Rightarrow c = \frac{480}{48} = 10cm$$

ចំពោះ  $c = 10$  នោះ  $a + b = 14$  និង  $ab = 48$

តាមរំលឹកយើងបានសមីការ :  $x^2 - 14x + 48 = 0$  ដែល

មាន  $a$  និង  $b$  ជាឫសនៃសមីការ

$$\Delta' = b'^2 - ac = 49 - 48 = 1$$

$$\text{នោះ } a = \frac{7-1}{1} = 6, \quad b = \frac{7+1}{1} = 8 \quad \text{ឬ } a = 8, b = 6$$

ដូចនេះ រង្វាស់ជ្រុងនីមួយៗនៃត្រីកោណកែងគឺ :

6cm , 8cm , 10cm

។

### ២៦៥ រកចំនួនទាំងពីរនោះ

តាង  $x$  ជាចំនួនទី 1 ដែល  $x$  ជាចំនួនបឋម នោះចំនួនទី 2 គឺ

$x+1$  ហើយ  $x+1$  ជាការប្រាកដ នោះ  $x+1 = n^2$

យើងបាន  $n^2 - 1 = x$  សមមូល  $(n-1)(n+1) = x$

តែ  $x$  ជាចំនួនបឋម នាំឱ្យផលគុណរបស់  $x$  គឺ  $x = x \cdot 1$

យើងបាន  $(n-1)(n+1) = 1 \cdot x$

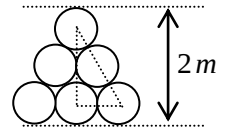
$$\text{ទាញបាន : } \begin{cases} n-1=1 \\ n+1=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=2 \\ n+1=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=2 \\ 3=x \end{cases}$$

ដូចនេះ ចំនួនទី 1 គឺ 3 និងចំនួនទី 2 គឺ 4 ។

### ២៦៦ រកកាំរង្វង់

តាង  $r$  ជាកាំរង្វង់ដែលត្រូវរក

ដោយភ្ជាប់ផ្ចិតរង្វង់ទាំងបីដូចរូប



នោះយើងបានត្រីកោណកែង ដែលមានទំនាក់ទំនងជាមួយ  $r$

តាមពីតាក្រីយើងបាន :

$$(2-2r)^2 + (2r)^2 = (4r)^2$$

$$4 - 8r + 4r^2 + 4r^2 = 16r^2$$

$$8r^2 + 8r - 4 = 0$$

$$2r^2 + 2r - 1 = 0$$

តាម  $\Delta' = b'^2 - ac = 1 + 2 = 3$

$$\text{នាំឱ្យ } r_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} < 0 \quad \text{មិនយក}$$

$$r_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{ឯកតាប្រវែង}$$

ដូចនេះ កាំរង្វង់ដែលត្រូវរកគឺ :  $r = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$  ។

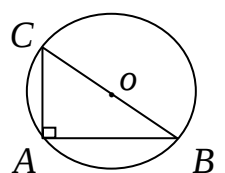
### ២៦៧ ស្រាយថាត្រីកោណចារឹកកន្លះរង្វង់ជាត្រីកោណកែង

(មុនបកស្រាយ អ្នកត្រូវស្គាល់ មុំចារឹក

និង មុំផ្ចិតជាមុនសិន : មុំចារឹក ជាមុំមានកំពូល

លើរង្វង់ និងជ្រុងទាំងពីរកាត់រង្វង់ ឯមុំផ្ចិតជាមុំ

ដែលមានកំពូលលើផ្ចិតរង្វង់ ។



-ទំនាក់ទំនងរវាងមុំផ្ចិត និងមុំចារឹកគឺ

បើ  $\theta$  ជាមុំផ្ចិត និង  $\alpha$  ជាមុំចារឹកដែលមានឆ្នូតរួម  
នោះយើងបានទំនាក់ទំនង :  $\alpha = \frac{\theta}{2}$  ។

-ត្រីកោណចារឹកកន្លះរង្វង់ ជាត្រីកោណដែលមានជ្រុងមួយ  
ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់ ចែករង្វង់ជាពីរផ្នែកប៉ុនគ្នា

-(មើលរូប) មុំ  $\theta$  និង  $\angle A$  មានឆ្នូតរួម  $BC$   
នាំឱ្យ  $\angle A = \frac{\theta}{2}$  ដោយ  $\theta$  ជាមុំរាប នោះ  $\theta = 180^\circ$

យើងបាន :  $\angle A = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$  ជាមុំកែង ។

នាំឱ្យ ត្រីកោណចារឹកកន្លះរង្វង់មានមុំកែងជានិច្ច

ដូចនេះ ត្រីកោណចារឹកកន្លះរង្វង់ជាត្រីកោណកែងជានិច្ច ។

### ២៦៨ រកចំនួនជ្រុងច្រើនបំផុតនៃពហុកោណ

-ទំនាក់ទំនងរវាងចំនួនជ្រុង និងមុំនៃពហុកោណគឺ :

បើពហុកោណមួយមាន  $n$  ជ្រុងនោះផលបូកមុំក្នុងទាំងអស់  
នៃពហុកោណគឺ :  $180^\circ(n-2)$

តាមបម្រាប់យើងបាន :

$$180^\circ(n-2) < 2011^\circ$$

$$n-2 < \frac{2011^\circ}{180^\circ}$$

$$n < \frac{2011}{180} + 2$$

$$n < \frac{1980+31}{180} + 2$$

$$n < 11 + \frac{31}{180} + 2$$

$$n < 13 + \frac{31}{180}$$

តែ  $n$  ជាចំនួនជ្រុង ដែលជាចំនួនគត់ នោះ  $n=13$

ផ្ទៀងផ្ទាត់  $180^\circ(13-2) < 2011^\circ \Leftrightarrow 1980^\circ < 2011^\circ$  ពិត

ដូចនេះ ពហុកោណនេះអាចមានជ្រុងច្រើនបំផុតចំនួន 13 ។

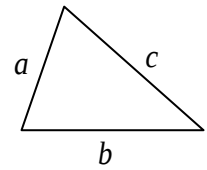
### ២៦៩ ស្រាយថាជ្រុងនីមួយៗនៃត្រីកោណតូចជាងកន្លះ

#### បរិមាត្ររបស់វាជានិច្ច

ឧបមាថាយើងមានត្រីកោណ

ដែលមានរង្វាស់ជ្រុង  $a, b, c$

និងមានកន្លះបរិមាត្រ  $\frac{a+b+c}{2}$



-តាមវិសមភាពនៃត្រីកោណ យើងបាន :

$$\bullet a < b+c \Leftrightarrow 2a < a+b+c \Rightarrow a < \frac{a+b+c}{2}$$

$$\bullet b < a+c \Leftrightarrow 2b < a+b+c \Rightarrow b < \frac{a+b+c}{2}$$

$$\bullet c < a+b \Leftrightarrow 2c < a+b+c \Rightarrow c < \frac{a+b+c}{2}$$

ដូចនេះ រង្វាស់ជ្រុងនីមួយៗនៃត្រីកោណតូចជាងកន្លះ  
បរិមាត្ររបស់វាជានិច្ច ។

### ២៧០ រកចំនួនដងនៃការជក់បារីរបស់បុរសនោះ

-បារី 10 ដើម  $\rightarrow$  ជក់បាន 10 ដង

នៅសល់កន្ទុយបារីចំនួន 10 កន្ទុយ = 3 ដើម និង 1 កន្ទុយ

-បារី 3 ដើម និង 1 កន្ទុយ  $\rightarrow$  ជក់បាន 3 ដង

នៅសល់កន្ទុយបារីចំនួន 4 កន្ទុយ = 1 ដើម និង 1 កន្ទុយ

-បារី 1 ដើម និង 1 កន្ទុយ  $\rightarrow$  ជក់បាន 1 ដង

នៅសល់ កន្ទុយបារីចំនួន 2 កន្ទុយ ខ្លីកន្ទុយបារីគេ 1

នាំឱ្យបាន 3 កន្ទុយ = 1 ដើម  $\rightarrow$  ជក់បាន 1 ដង

នៅសល់កន្ទុយបារី 1 យកសងគេវិញ នោះបារីអស់គ្មានសល់

នាំឱ្យចំនួនដងនៃការជក់បារីគឺ  $= 10+3+1+1=15$  ដង

ដូចនេះ បុរសនោះត្រូវជក់ចំនួន 15 ដងទើបអស់បារីគាត់ ។

### ២៧១ ដោះស្រាយសមីការ : ក. $3^x + 4^x = 5^x$

យើងសង្កេតឃើញថា  $x=2$  ជាឫសនៃសមីការ

ព្រោះ  $3^2 + 4^2 = 5^2 \Leftrightarrow 9+16=25 \Leftrightarrow 25=25$  ពិត

យើងនឹងបង្ហាញថាសមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ  $x=2$

សមីការខាងលើអាចសរសេរ :  $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$

-ករណី  $x > 2$  យើងបាន  $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2$

ហើយ  $\left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2$

ដោយបូកអង្គ និងអង្គ  $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2$

សមមូល  $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < 1$

នាំឱ្យ  $x > 2$  មិនមែនជាឫសនៃសមីការ ។

-ករណី  $x < 2$  យើងបាន  $\left(\frac{3}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^2$

ហើយ  $\left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{4}{5}\right)^2$

ដោយបូកអង្គ និងអង្គ  $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2$

សមមូល  $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1$

នាំឱ្យ  $x < 2$  មិនមែនជាឫសនៃសមីការ ។

ដូចនេះ សមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ  $x = 2$  ។

**ដោះស្រាយសមីការ : ខ.**  $3^x + 4^x + 5^x = 6^x$

យើងសង្កេតឃើញថា  $x = 3$  ជាឫសនៃសមីការ ព្រោះ

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3 \Leftrightarrow 216 = 216 \text{ ពិត}$$

យើងនឹងបង្ហាញថាសមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ  $x = 3$

សមីការខាងលើអាចសរសេរ :  $\left(\frac{3}{6}\right)^x + \left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x = 1$

-ករណី  $x > 3$  យើងបាន  $\left(\frac{3}{6}\right)^x < \left(\frac{3}{6}\right)^3$

ហើយ  $\left(\frac{4}{6}\right)^x < \left(\frac{4}{6}\right)^3$

ហើយនិង  $\left(\frac{5}{6}\right)^x < \left(\frac{5}{6}\right)^3$

ដោយបូកអង្គ និងអង្គ នោះយើងបាន :

$$\left(\frac{3}{6}\right)^x + \left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x < \left(\frac{3}{6}\right)^3 + \left(\frac{4}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

សមមូល  $\left(\frac{3}{6}\right)^x + \left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x < 1$

នាំឱ្យ  $x > 3$  មិនមែនជាឫសនៃសមីការ ។

-ករណី  $x < 3$  យើងបាន  $\left(\frac{3}{6}\right)^x > \left(\frac{3}{6}\right)^3$

ហើយ  $\left(\frac{4}{6}\right)^x > \left(\frac{4}{6}\right)^3$

ហើយនិង  $\left(\frac{5}{6}\right)^x > \left(\frac{5}{6}\right)^3$

ដោយបូកអង្គ និងអង្គ នោះយើងបាន :

$$\left(\frac{3}{6}\right)^x + \left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x > \left(\frac{3}{6}\right)^3 + \left(\frac{4}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

សមមូល  $\left(\frac{3}{6}\right)^x + \left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x > 1$

នាំឱ្យ  $x < 3$  មិនមែនជាឫសនៃសមីការ ។

ដូចនេះ សមីការមានឫសតែមួយគត់គឺ  $x = 3$  ។

**២៧២** ▶ បង្ហាញថា គេទាញបាន  $x = y = z$

យើងមានសមភាព

$$(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2 = (y+z-2x)^2 + (z+x-2y)^2 + (x+y-2z)^2$$

$$\text{ពិនិត្យ } (y+z-2x)^2 + (z+x-2y)^2 + (x+y-2z)^2$$

$$\text{តាមរូបមន្ត: } (a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

នោះយើងបានកត្តានិមួយៗគឺ :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (y+z-2x)^2 = y^2 + z^2 + 4x^2 + 2yz - 4xy - 4xz \\ (z+x-2y)^2 = z^2 + x^2 + 4y^2 + 2xz - 4yz - 4xy \\ (x+y-2z)^2 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz - 4yz \end{cases} \\ & \hline (y+z-2x)^2 + (z+x-2y)^2 + (x+y-2z)^2 = \\ & 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 6xy - 6yz - 6xz \end{aligned} \quad (1)$$

ពិនិត្យ :

$$\begin{aligned} & (y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2 \\ & = y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2xz + x^2 + x^2 - 2xy + y^2 \\ & = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \end{aligned} \quad (2)$$

ដោយធ្វើការផ្ទឹម (1) & (2) នោះយើងបាន

$$6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 6xy - 6yz - 6xz =$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2xz$$

ក្រោយពីធ្វើការទូទាត់ យើងបានលទ្ធផលគឺ :

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4xy - 4yz - 4xz = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2xz = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2xz + x^2 = 0$$

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$$

ផលបូកខាងលើផ្សេងផ្ទាត់មានតែមួយករណីគឺ :

$$\begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ (y-z)^2 = 0 \\ (z-x)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ y=z \\ z=x \end{cases}$$

នាំឱ្យយើងបាន :  $x = y = z$

ដូចនេះ គេទាញបាន  $x = y = z$  ។

**២៧៣** គណនា  $S = ab + cd$

យើងមាន :

$$S = ab + cd = \frac{2011(ab + cd)}{2011}$$

$$= \frac{2011ab + 2011cd}{2011}$$

$$= \frac{(c^2 + d^2)ab + (a^2 + b^2)cd}{2011}$$

$$= \frac{abc^2 + abd^2 + a^2cd + b^2cd}{2011}$$

$$= \frac{(abc^2 + a^2cd) + (abd^2 + b^2cd)}{2011}$$

$$= \frac{ac(bc + ad) + bd(ad + bc)}{2011}$$

$$= \frac{(bc + ad) \times 0}{2011} = 0$$

ព្រោះ សម្មតិកម្ម  $ac + bd = 0$

ដូចនេះ គណនាបាន  $S = 0$  ។

**២៧៤** ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $\frac{1}{\sin 2a} = \cot a - \cot 2a$

ពិនិត្យ :  $\cot a - \cot 2a$

$$= \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\cos 2a}{\sin 2a}$$

(រូបមន្ត  $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$  ,  $\sin 2a = 2\sin a \cos a$  )

$$= \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{2\cos^2 a - 1}{2\sin a \cos a}$$

$$= \frac{2\cos^2 a - 2\cos^2 a + 1}{2\sin a \cos a}$$

$$= \frac{1}{\sin 2a}$$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា  $\frac{1}{\sin 2a} = \cot a - \cot 2a$  ។

**ខ. គណនាផលបូក**

$$S_n = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin \frac{a}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{a}{2^2}} + \frac{1}{\sin \frac{a}{2^3}} + \dots + \frac{1}{\sin \frac{a}{2^n}}$$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់សំណួរ ក. យើងបាន :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin a} = \cot \frac{a}{2} - \cot a \\ \frac{1}{\sin \frac{a}{2}} = \cot \frac{a}{4} - \cot \frac{a}{2} \\ \frac{1}{\sin \frac{a}{2^2}} = \cot \frac{a}{8} - \cot \frac{a}{4} \\ \dots \dots \dots \frac{1}{\sin \frac{a}{2^n}} = \cot \frac{a}{2^{n+1}} - \cot \frac{a}{2^n} \end{cases}$$

$$S_n = \cot \frac{a}{2^{n+1}} - \cot a$$

ដូចនេះ ក្រោយពីគណនា  $S_n = \cot \frac{a}{2^{n+1}} - \cot a$  ។

**២៧៥** ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $1 + \frac{1}{\cos x} = \frac{\cot \frac{x}{2}}{\cot x}$

ពិនិត្យ :  $1 + \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x + 1}{\cos x}$

( រូបមន្ត  $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \Rightarrow \cos 2a + 1 = 2\cos^2 a$  )

$$1 + \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x + 1}{\cos x} = \frac{2\cos^2 \frac{x}{2}}{\cos x} = \frac{2\cos^2 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}}{\cos x \sin \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\cos \frac{x}{2} \sin x}{\cos x \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$= \tan x \cot \frac{x}{2} = \frac{\cot \frac{x}{2}}{\cot x}$$

ដូចនេះ

$$\boxed{\text{ស្រាយបានថា } 1 + \frac{1}{\cos x} = \frac{\cot \frac{x}{2}}{\cot x}}$$

។

## ខ. គណនាផលគុណ

$$P_n = \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos \frac{x}{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos \frac{x}{2^2}}\right) \times \dots \times \left(1 + \frac{1}{\cos \frac{x}{2^n}}\right)$$

តាមសម្រាយបញ្ជាក់សំណួរ ក. យើងបាន :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{\cos x} = \frac{\cot \frac{x}{2}}{\cot x} \\ 1 + \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\cot \frac{x}{4}}{\cot \frac{x}{2}} \\ \times \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{\cos \frac{x}{4}} = \frac{\cot \frac{x}{8}}{\cot \frac{x}{4}} \\ \dots \dots \dots \\ 1 + \frac{1}{\cos \frac{x}{2^n}} = \frac{\cot \frac{x}{2^{n+1}}}{\cot \frac{x}{2^n}} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$P_n = \frac{\cot \frac{x}{2^{n+1}}}{\cot x} = \tan x \cot \frac{x}{2^{n+1}}$$

ដូចនេះ

$$\boxed{\text{ក្រោយពីគណនា } P_n = \tan x \cot \frac{x}{2^{n+1}}}$$

។

## ២៧៦ > គណនា $x, y, z$ និង $t$

សម្មតិកម្ម បើយើងឱ្យផលធៀប  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{t}{6} = a$

ដែល  $a > 0$  ព្រោះ បួនចំនួន  $x, y, z$  និង  $t$  វិជ្ជមាន

ទាញបាន :  $x = 2a, y = 3a, z = 4a, t = 6a$

នាំឱ្យ  $\frac{yzt}{x} + \frac{ztx}{y} + \frac{txy}{z} + \frac{xyz}{t} = 14625$  បានជា

$$\frac{72a^3}{2a} + \frac{48a^3}{3a} + \frac{36a^3}{4a} + \frac{24a^3}{6a} = 14625$$

$$36a^2 + 16a^2 + 9a^2 + 4a^2 = 14625$$

$$65a^2 = 14625$$

$$a^2 = 225 \Rightarrow a = 15$$

យើងបាន :

$$\begin{cases} x = 2a \\ y = 3a \\ z = 4a \\ t = 6a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \times 15 \\ y = 3 \times 15 \\ z = 4 \times 15 \\ t = 6 \times 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 45 \\ z = 60 \\ t = 90 \end{cases}$$

ដូចនេះ

$$\boxed{\text{គណនាបាន } x = 30, y = 45, z = 60, t = 90}$$

។

## ២៧៦ > ក. កំណត់តម្លៃ $x$ ដើម្បីឱ្យ $P$ មានតម្លៃអប្បបរមា

យើងមាន :  $P = x^2 + x + 1$  (ដោយធ្វើការថែមថយតួ)

$$P = x^2 + x + 1$$

$$= x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{4}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

ដើម្បីឱ្យ  $P$  មានតម្លៃអប្បបរមា លុះត្រាតែកន្សោម

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ

$$\boxed{\text{តម្លៃ } x = -\frac{1}{2} \text{ ធ្វើឱ្យ } P = \frac{3}{4} \text{ មានតម្លៃអប្បបរមា}}$$

។

## ខ. កំណត់តម្លៃ $x$ ដើម្បីឱ្យ $Q$ មានតម្លៃអតិបរមា

យើងមាន  $Q = 2 + x - x^2$  អាចសរសេរ :

$$Q = 2 - x^2 + x = 2 - (x^2 - x)$$

$$Q = 2 - \left( x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} \right)^2 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right)$$

$$= 2 - \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{9}{2} - \left( x - \frac{1}{2} \right)^2$$

ដើម្បីឱ្យ  $Q$  មានតម្លៃអតិបរមា លុះត្រាតែកន្សោម

$$\left( x - \frac{1}{2} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

ដូចនេះ តម្លៃ  $x = \frac{1}{2}$  ធ្វើឱ្យ  $Q = \frac{9}{4}$  មានតម្លៃអតិបរមា ។

### ២៧៨ រកចំនួនគត់តូចបំផុត $n$

បើ  $a, b, c, d, e$  ជាចំនួនគត់

តាមបម្រាប់យើងបាន :

$$\begin{cases} n = 2a + 1 \\ n = 3b + 2 \\ n = 4c + 3 \\ n = 5d + 4 \\ n = 6e + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2a + 1 \\ n = 3b + 2 \\ n = 4c + 3 \\ n = 5d + 4 \\ n = 6e + 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} n+1 = 2a+2 \\ n+1 = 3b+3 \\ n+1 = 4c+4 \\ n+1 = 5d+5 \\ n+1 = 6e+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+1 = 2(a+1) \\ n+1 = 3(b+1) \\ n+1 = 4(c+1) \\ n+1 = 5(d+1) \\ n+1 = 6(e+1) \end{cases}$$

នាំឱ្យ  $n+1$  ត្រូវតែចែកដាច់ជាមួយ  $2, 3, 4, 5, 6$

មានន័យថា  $n+1$  ជាពហុគុណនៃ  $2, 3, 4, 5, 6$

សម្មតិកម្ម រកតែតម្លៃ  $n$  ដែលតូចបំផុត

នាំឱ្យ  $n+1 = PPCM(2, 3, 4, 5, 6) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$

ទាញបាន  $n = 60 - 1 = 59$

ដូចនេះ ចំនួនគត់តូចបំផុតដែលត្រូវរកគឺ  $n = 59$  ។

### ២៧៩ រកចំនួនគត់តូចបំផុត $n$

បើ  $a, b, c, d, e$  ជាចំនួនគត់

តាមបម្រាប់យើងបាន :

$$\begin{cases} n = 2a + 1 \\ n = 3b + 1 \\ n = 4c + 1 \\ n = 5d + 1 \\ n = 6e + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n - 1 = 2a \\ n - 1 = 3b \\ n - 1 = 4c \\ n - 1 = 5d \\ n - 1 = 6e \end{cases}$$

នាំឱ្យ  $n-1$  ត្រូវតែចែកដាច់ជាមួយ  $2, 3, 4, 5, 6$

មានន័យថា  $n-1$  ជាពហុគុណនៃ  $2, 3, 4, 5, 6$

ដោយ  $PPCM(2, 3, 4, 5, 6) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$

នាំឱ្យពហុគុណបន្តបន្ទាប់នៃ  $2, 3, 4, 5, 6$  គឺ :

$$\{ 60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, \dots \}$$

នោះនាំឱ្យ

$$n-1 = \{ 60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, \dots \}$$

$$n = \{ 61, 121, 181, 241, 301, 361, 421, \dots \}$$

តែសម្មតិកម្ម  $n$  ចែកដាច់នឹង  $7$

ហើយ ក្នុងចំណោមតម្លៃ  $n$  នីមួយៗ តាមលំដាប់ពីតូចទៅធំ

មានតែតម្លៃ  $301$  ទេ ដែលតូចជាងគេ និង ចែកដាច់នឹង  $7$

ដូចនេះ ចំនួនគត់តូចបំផុតដែលត្រូវរកគឺ  $n = 301$  ។

### ២៨០ ស្រាយបញ្ជាក់ថាកន្សោម $E$ មានតម្លៃថេរ

រំលឹក  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

យើងមាន

$$E = \cos^6 x + \sin^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= (\cos^2 x)^3 + (\sin^2 x)^3 + 3\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) + 3\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= \cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= \cos^4 x + 2\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$$

$$= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2$$

$$= 1^2$$

$$= 1$$

ដូចនេះ

គ្រប់តម្លៃរបស់  $x$  យើងបានតម្លៃ  $E = 1$  ថេរជានិច្ច ។

**២៨១) ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ**

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 & (1) \\ xy = 2 & (2) \end{cases}$$

តាមសមីការ (2) ទាញបាន  $x = \frac{2}{y}$  (3) ជំនួសក្នុង (1)

$$\text{យើងបាន } \left(\frac{2}{y}\right)^3 + y^3 = 9$$

$$\frac{8}{y^3} + y^3 = 9$$

$$8 + y^6 = 9y^3$$

$$y^6 - 9y^3 + 8 = 0$$

$$\text{តាង } y^3 = t \Rightarrow y^6 = t^2$$

$$\text{យើងបាន } t^2 - 9t + 8 = 0$$

$$\text{សមីការមាន } a + b + c = 1 + (-9) + 8 = 0$$

$$\text{នាំឱ្យ } t = 1, t = 8$$

$$\text{ចំពោះ } t = 1 \Leftrightarrow y^3 = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{នោះតាម (3) : } x = \frac{2}{y} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{ចំពោះ } t = 8 \Leftrightarrow y^3 = 8 \Rightarrow y = 2$$

$$\text{នោះតាម (3) : } x = \frac{2}{y} = \frac{2}{2} = 1$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានគូចម្លើយ  
( $x = 2, y = 1$ ) , ( $x = 1, y = 2$ ) ។

**២៨២) ដោះស្រាយសមីការ :**

$$\text{យើងមាន } (3^{2011} - 3^{2010})(3^{2009} - 3^{2008}) = 4 \times 3^x$$

$$3^{2010}(3-1) \cdot 3^{2008}(3-1) = 4 \times 3^x$$

$$2 \times 2 \times 3^{2010+2008} = 4 \times 3^x$$

$$3^{4018} = 3^x$$

$$\Rightarrow 4018 = x$$

ដូចនេះ សមីការមានឫស  $x = 4018$  ។

**២៨៣) សរសេរ N ជាផលគុណកត្តាដ៏ក្របី១**

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } N &= (3a-1)^2 - 4(a^2 + 6a + 9) \\ &= (3a-1)^2 - 2^2(a+3)^2 \\ &= [(3a-1) - 2(a+3)][(3a-1) + 2(a+3)] \\ &= (3a-1-2a-6)(3a-1+2a+6) \\ &= (a-7)(5a+5) \end{aligned}$$

ដូចនេះ សរសេរបាន  $N = (a-7)(5a+5)$  ។

**២៨៤) ស្រាយថា N ចែកដាច់នឹង 32 :**

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } N &= 4(4a+1)^2 - 100 \\ &= 2^2(4a+1)^2 - 10^2 \\ &= [2(4a+1) - 10][2(4a+1) + 10] \\ &= (8a+2-10)(8a+2+10) \\ &= (8a-8)(8a+12) \\ &= 8(a-1) \times 4(2a+3) \\ &= 32(a-1)(2a+3) \end{aligned}$$

ដោយ  $N = 32(a-1)(2a+3)$  ជាពហុគុណនៃ 32

ដូចនេះ N ជាចំនួនត្រូវតែចែកដាច់នឹង 32 ។

**២៨៥) គណនាតម្លៃលេខនៃកន្សោម P :**

គេឱ្យ  $a + b = 1$  និងកន្សោម

$$\begin{aligned} P &= 2(a^3 + b^3) - 3(a^2 + b^2) + 1 \\ &= 2(a+b)(a^2 - ab + b^2) - 3(a^2 + b^2) + 1 \\ &= 2(a^2 - ab + b^2) - 3(a^2 + b^2) + 1 \\ &= 2a^2 - 2ab + 2b^2 - 3a^2 - 3b^2 + 1 \\ &= -a^2 - 2ab - b^2 + 1 \\ &= -(a^2 + 2ab + b^2) + 1 \\ &= -(a+b)^2 + 1 \\ &= -1^2 + 1 \\ &= -1 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ដូចនេះ តម្លៃលេខនៃកន្សោមគណនាបាន  $P = 0$  ។

**២៨៦ រកពីរចំនួនគតិជ្ជមាន  $a$  និង  $b$  :**

យើងមាន  $a^2 - b^2 = 24$

យើងបាន  $(a-b)(a+b) = 24$

បើ  $a$  និង  $b$  ជាចំនួនគតិនោះ  $(a-b)$  និង  $(a+b)$  ក៏ជាចំនួនគតិដែរ ដែលយើងនឹងរកផលគុណពីរចំនួនគតិស្មើ 24

$$\text{ដោយ } 24 = \begin{cases} 1 \times 24 \\ 2 \times 12 \\ 3 \times 8 \\ 4 \times 6 \end{cases} \text{ និង } (a-b) < (a+b)$$

នាំឱ្យ  $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=24 \end{cases}$  មិនយកព្រោះ  $a$  និង  $b$  មិនជាចំនួនគតិ

ឬ  $\begin{cases} a-b=2 \\ a+b=12 \end{cases}$  ដោះស្រាយបានគូចម្លើយ  $a=7, b=5$

ឬ  $\begin{cases} a-b=3 \\ a+b=8 \end{cases}$  មិនយកព្រោះ  $a$  និង  $b$  មិនជាចំនួនគតិ

ឬ  $\begin{cases} a-b=4 \\ a+b=6 \end{cases}$  ដោះស្រាយបានគូចម្លើយ  $a=5, b=1$

ដូចនេះ សមីការមានគូចម្លើយ  $\begin{cases} a=7 \\ b=5 \end{cases}$  ឬ  $\begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases}$  ។

**២៨៧ គណនាជ្រុងរបស់ការេនីមួយៗ**

តាង  $a$  ជារង្វាស់ជ្រុងការេធំ (គិតជា  $m$ )

$b$  ជារង្វាស់ជ្រុងការេតូច (គិតជា  $m$ )

តាមបម្រាប់ប្រធាន យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1152 \\ a - b = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)(a+b) = 1152 \\ a - b = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16(a+b) = 1152 \\ a - b = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 72 \\ a - b = 16 \end{cases}$$

ដោះស្រាយតាមវិធីបូកបំបាត់ យើងបាន :

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} a+b=72 \\ a-b=16 \end{cases} \\ \hline 2a=88 \Rightarrow a=44 \end{array} \quad \text{នោះ } b=44-16=28$$

ដូចនេះ ប្រវែងជ្រុងការេនីមួយៗគឺ  $44 m, 28 m$  ។

**២៨៨ គណនាកន្សោម  $A$**

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(2-x)(3-x)} + \frac{3}{(1-x)(x-3)} \\ &= \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{2}{(x-2)(x-3)} - \frac{3}{(x-1)(x-3)} \\ &= \frac{(x-3) + 2(x-1) - 3(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{x-3+2x-2-3x+6}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \end{aligned}$$

ដូចនេះ កន្សោមគណនាបានគឺ  $A = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$  ។

**២៨៩ រកមួយចំនួននោះ**

តាង  $x$  ជាមួយចំនួនដែលត្រូវរកនោះ

តាមបម្រាប់ប្រធាន យើងបានតម្លៃ  $3x$  ផ្ទុយពី  $x^2$

មានន័យថា  $3x = -x^2$

ដោះស្រាយ  $3x = -x^2$

$$3x + x^2 = 0$$

$$x(3+x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3+x=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3 \end{cases}$$

ចំពោះ  $x=0$  មិនយកព្រោះ 0 គ្មានចំនួនផ្ទុយទេ

ដូចនេះ ចំនួនដែលត្រូវរកនោះគឺ  $-3$  ។

**២៩០ រកលេខដែលនៅត្រង់ទីតាំងតូទី 2011**

យើងមានលេខសរសេរពី 1 ដល់លេខ 999 គឺ

$$N = 12345678910111213...998999$$

ដើម្បីរកលេខនៅត្រង់ទីតាំងតូទី 2011

យើងសិក្សាតាមផ្នែកដូចបង្ហាញខាងក្រោម :

- ពីលេខ 1 → 9 មានចំនួនតួ :  $9 \times 1 = 9$  តួ
- ពីលេខ 10 → 99 មានចំនួនតួ :  $90 \times 2 = 180$  តួ
- ពីលេខ 100 → 199 មានចំនួនតួ :  $100 \times 3 = 300$  តួ
- ពីលេខ 200 → 299 មានចំនួនតួ :  $100 \times 3 = 300$  តួ
- ពីលេខ 300 → 399 មានចំនួនតួ :  $100 \times 3 = 300$  តួ
- ពីលេខ 400 → 499 មានចំនួនតួ :  $100 \times 3 = 300$  តួ
- ពីលេខ 500 → 599 មានចំនួនតួ :  $100 \times 3 = 300$  តួ
- ពីលេខ 600 → 699 មានចំនួនតួ :  $100 \times 3 = 300$  តួ

បើយើងសរុបតួពីលេខ 1 → 699 វាមានចំនួនតួគឺ

$$9 + 180 + 6 \times 300 = 1989 \text{ តួ}$$

យើងត្រូវការ 22 តួទៀត ដើម្បីបន្ថែមឱ្យគ្រប់តួទី 2011

ហើយតួបន្តបន្ទាប់ទៀត បន្ទាប់ពី 699 នោះគឺ :

700701702703704705706707708709800...999 .

↑ តួទី 1990      ↑ តួទី 2000      ↑ តួទី 2011

ដូចនេះ លេខដែលនៅត្រង់ទីតាំងតួទី 2011 គឺលេខ 7 ។

### ២៩១ គណនាផលបូក S :

$$S = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2011)$$

យើងមាន  $x(2x+1)f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x+1$  (1)

បើយើង ជំនួស  $x$  ដោយ  $\frac{1}{x}$  នោះយើងបាន :

$$\frac{1}{x} \left( 2 \cdot \frac{1}{x} + 1 \right) f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1/x}\right) = \frac{1}{x} + 1$$

$$\frac{1}{x} \left( \frac{2+x}{x} \right) f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{1+x}{x}$$

$$\frac{2+x}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{1+x}{x} \quad (2)$$

ដោយគុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (2) នឹង  $\frac{x^2}{2+x}$  ដើម្បី

ឱ្យមេគុណនៃ  $f\left(\frac{1}{x}\right)$  ស្មើនឹង 1 យើងបាន :

$$\frac{x^2}{2+x} \left[ \frac{2+x}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) \right] = \left( \frac{x^2}{2+x} \right) \left( \frac{1+x}{x} \right)$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x^2}{2+x} f(x) = \frac{x+x^2}{2+x} \quad (3)$$

ដោយយកសមីការ (1)-(3) នោះយើងបាន :

$$\begin{cases} x(2x+1)f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x+1 \\ - \left[ f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x^2}{2+x} f(x) = \frac{x+x^2}{2+x} \right] \end{cases}$$

$$\left[ x(2x+1) - \frac{x^2}{2+x} \right] f(x) = (x+1) - \left( \frac{x+x^2}{2+x} \right)$$

$$\frac{(2x^2+x)(2+x) - x^2}{2+x} f(x) = \frac{(x+1)(2+x) - (x+x^2)}{2+x}$$

$$(4x^2 + 2x^3 + 2x + x^2 - x^2) f(x) = x^2 + 3x + 2 - x - x^2$$

$$(4x^2 + 2x^3 + 2x) f(x) = 2x + 2$$

$$2x(x^2 + 2x + 1) f(x) = 2(x+1)$$

$$f(x) = \frac{2(x+1)}{2x(x+1)^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

ដោយឱ្យតម្លៃ  $x = \{1, 2, 3, \dots, 2011\}$  យើងបាន :

$$\begin{cases} f(1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ f(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ + \left\{ \begin{aligned} f(3) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &\dots\dots\dots \\ f(2011) &= \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012} \end{aligned} \right. \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{1} - \frac{1}{2012}$$

$$S = \frac{2012-1}{2012} = \frac{2011}{2012}$$

ដូចនេះ ផលបូកគណនាបាន  $S = \frac{2011}{2012}$  ។

**២៩២ រកចំនួនគូបតិចបំផុតដែលត្រូវរៀបក្នុងប្រអប់**

ដើម្បីឱ្យបានចំនួនគូបតិចបំផុតរៀបនៅក្នុងប្រអប់ នោះមាន  
របស់គូបត្រូវធំបំផុត។ នោះយើងត្រូវរកជ្រុងគូបធំបំផុត  
ដែលវិមាត្រទាំងបីរបស់ប្រអប់ចែកដាច់ នឹងជ្រុងរបស់គូប។  
-មានន័យថា ជ្រុងរបស់គូបជាតួចែករួមធំបំផុត នៃវិមាត្រ  
របស់ប្រអប់ ដែលយើងនឹងកំណត់  
-បើតាង  $a$  ជាជ្រុងរបស់គូប (គិតជា  $mm$ )

$$\text{នាំឱ្យ } a = PGCD(180, 60, 90) = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

$$\begin{aligned} \text{ព្រោះ } 180 &= 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ 600 &= 2^3 \times 3 \times 5^2 \\ 90 &= 2 \times 3^2 \times 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ មាឌគូបស្មើ } V &= 30^3 = 27000 \text{ mm}^3 \\ \text{មាឌប្រអប់ស្មើ } V &= 180 \cdot 600 \cdot 90 = 9720000 \text{ mm}^3 \\ \text{យើងបាន ចំនួនគូបដែលរៀបបានគឺ } &\frac{9720000}{27000} = 360 \text{ គូប} \end{aligned}$$

ដូចនេះ ចំនួនគូបតិចបំផុតដែលអាចរៀបបានគឺ 360 គូប។

**២៩៣ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ**

$$\begin{cases} 2x + 2y = 3xy & (1) \\ 6x + y = 4xy & (2) \end{cases}$$

ដោយសិក្សាផលដកសមីការ :  $2 \times (2) - (1)$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 12x + 2y = 8xy \\ 2x + 2y = 3xy \end{cases} \\ &\hline &10x = 5xy \Leftrightarrow 10 = 5y \\ &\Rightarrow y = 2 \end{aligned}$$

ចំពោះ  $y = 2$  តាមសមីការ (1) យើងបាន :

$$\begin{aligned} 2x + 2 \times 2 &= 3x \times 2 \\ 2x + 4 &= 6x \\ 4x &= 4 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយ  $x = 1, y = 2$ ។

**២៩៤ រកពីរចំនួនគត់  $a$  និង  $b$**

តាមបម្រាប់ : យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a + b = 15n \\ a^2 - b^2 = 45 \end{cases} \text{ ដែល } n = \{1, 2, 3, \dots\} \text{ ព្រោះ } a > b \\ &\begin{cases} a + b = 15n \\ (a + b)(a - b) = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 15n \\ 15n(a - b) = 45 \end{cases} \\ &\begin{cases} a + b = 15n \\ n(a - b) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 15n \\ a - b = \frac{3}{n} \end{cases} \end{aligned}$$

បើ  $a$  និង  $b$  ជាចំនួនគត់នោះ  $a - b$  ក៏ជាចំនួនគត់ដែរ  
នោះ  $\frac{3}{n}$  ជាចំនួនគត់ មានន័យថា 3 ត្រូវតែចែកដាច់នឹង  $n$

យើងទាញបានតម្លៃ  $n$  គឺ  $n = 1$  ឬ  $n = 3$

$$\begin{aligned} \text{-ចំពោះ } n = 1 : &\begin{cases} a + b = 15 \\ a - b = 3 \end{cases} \text{ ដោះស្រាយតាមបូកបំបាត់} \\ &+ \begin{cases} a + b = 15 \\ a - b = 3 \end{cases} \\ &\hline &2a = 18 \Rightarrow a = 9 \text{ ហើយ } b = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{-ចំពោះ } n = 3 : &\begin{cases} a + b = 45 \\ a - b = 1 \end{cases} \text{ ដោះស្រាយតាមបូកបំបាត់} \\ &+ \begin{cases} a + b = 45 \\ a - b = 1 \end{cases} \\ &\hline &2a = 46 \Rightarrow a = 23 \text{ ហើយ } b = 22 \end{aligned}$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយពីរគូគឺ  
 $(a = 9, b = 6)$  ឬ  $(a = 23, b = 22)$  ។

**២៩៥ បង្ហាញថា  $A^2 + B^2 + C^2 - ABC$  មិនអាស្រ័យ  
នឹង  $x, y, z$**

យើងមាន

$$\begin{aligned} A &= \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \Leftrightarrow A^2 = \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right)^2 = \left(\frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{z}{y}\right)^2 + 2 \\ B &= \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \Leftrightarrow B^2 = \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right)^2 = \left(\frac{z}{x}\right)^2 + \left(\frac{x}{z}\right)^2 + 2 \\ C &= \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Leftrightarrow C^2 = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } & A^2 + B^2 + C^2 \\ &= \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{y^2} + 2 + \frac{z^2}{x^2} + \frac{x^2}{z^2} + 2 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 \\ &= 6 + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{z^2}{x^2} + \frac{x^2}{z^2} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \end{aligned}$$

ហើយ

$$\begin{aligned} ABC &= \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \\ &= \left(\frac{y}{x} + \frac{xy}{z^2} + \frac{z^2}{xy} + \frac{x}{y}\right) \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \\ &= \left(1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{z^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2} + 1\right) \\ &= 2 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{z^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2} \end{aligned}$$

យើងបាន  $A^2 + B^2 + C^2 - ABC$

$$\begin{aligned} &= 6 + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{z^2}{x^2} + \frac{x^2}{z^2} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \\ &\quad \left(2 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{z^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2}\right) \\ &= 4 \end{aligned}$$

ដូចនេះ  $A^2 + B^2 + C^2 - ABC = 4$  មិនអាស្រ័យ  $x, y, z$  ។

### ២៩៦ រកចម្ងាយគម្លាតពី C ទៅ A ខណៈពេល A រត់ដល់ទី

តាង  $V_A, V_B, V_C$  ជាល្បឿនរៀងគ្នានៃ  $A, B, C$

$t$  ជារយៈពេលដែល A រត់ដល់ទី

$t'$  ជារយៈពេលដែល B រត់ដល់ទី

បម្រាប់ : ខណៈពេល A រត់ដល់ទី B នៅខ្លះ 10 m

នាំឱ្យ  $V_A \cdot t = 100$  (1) និង  $V_B \cdot t = 90$  (2)

យើងធ្វើផលធៀប (1) និង (2) យើងបាន :

$$\frac{V_A \cdot t}{V_B \cdot t} = \frac{100}{90} \Leftrightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{10}{9} \Rightarrow V_B = \frac{9V_A}{10} \quad (i)$$

បម្រាប់បន្ត : ខណៈពេល B រត់ដល់ទី C នៅខ្លះ 10 m

នាំឱ្យ  $V_B \cdot t' = 100$  (3) និង  $V_C \cdot t' = 90$  (4)

យើងធ្វើផលធៀប (3) និង (4) យើងបាន :

$$\frac{V_B \cdot t'}{V_C \cdot t'} = \frac{100}{90} \Leftrightarrow \frac{V_B}{V_C} = \frac{10}{9} \Rightarrow V_B = \frac{10V_C}{9} \quad (ii)$$

ដោយផ្អែក (i) & (ii) នោះយើងបាន :

$$\frac{9V_A}{10} = \frac{10V_C}{9} \Rightarrow V_A = \frac{100V_C}{81}$$

បើ  $t$  ជារយៈពេលដែល A រត់ដល់ទី នោះ

$$V_A \cdot t = 100 \Leftrightarrow t = \frac{100}{V_A}$$

បើ  $d$  ជាចម្ងាយដែល C រត់បានក្នុងរយៈពេល  $t$  នោះ

$$d = V_C \cdot t = V_C \cdot \frac{100}{V_A} = V_C \cdot \frac{100}{\frac{100V_C}{81}} = 81 \text{ m}$$

មានន័យថា ខណៈពេល  $t$  ដែល A រត់ដល់ទីចម្ងាយ 100 m

ឃើញថា C រត់បានតែចម្ងាយ 81 m ប៉ុណ្ណោះ

នាំឱ្យ គម្លាតពី C ទៅ A គឺ  $100 \text{ m} - 81 \text{ m} = 19 \text{ m}$

ដូចនេះ ចម្ងាយគម្លាតពី C ទៅ A គឺ 19 m ។

### ២៩៧ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} -x + y + z = xyz & (1) \\ x - y + z = xyz & (2) \\ x + y - z = xyz & (3) \end{cases}$$

ផ្អែម (1) & (2) យើងបាន :

$$-x + y + z = x - y + z \Rightarrow x = y \quad (i)$$

ផ្អែម (2) & (3) យើងបាន :

$$x - y + z = x + y - z \Rightarrow y = z \quad (ii)$$

ផ្អែម (1) & (3) យើងបាន :

$$-x + y + z = x + y - z \Rightarrow z = x \quad (iii)$$

តាម (i), (ii) និង (iii) យើងបាន  $x = y = z$

ដោយយក  $x = y = z$  ជំនួសក្នុងសមីការ (1) យើងបាន :

$$-x + x + x = x \cdot x \cdot x$$

$$x = x^3$$

$$x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

$$x(x-1)(x+1) = 0$$

នាំឱ្យ 
$$\begin{cases} x=0 \\ x-1=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានក្រុមចម្លើយបីគឺ

$(x=y=z=0)$  ឬ  $(x=y=z=1)$  ឬ  $(x=y=z=-1)$

### ២៩៨ > គណនាផលបូក $S$ :

តែឱ្យ  $a \neq b \neq c$

$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{a}{(a-b)(a-c)} - \frac{b}{(b-c)(a-b)} + \frac{c}{(a-c)(b-c)} \\ &= \frac{a(b-c) - b(a-c) + c(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)} \\ &= \frac{ab - ac - ab + bc + ac - bc}{(a-b)(b-c)(a-c)} \\ &= \frac{0}{(a-b)(b-c)(a-c)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ដូចនេះ តម្លៃផលបូកគណនាបានគឺ  $S = 0$  ។

### ២៩៩ > រកគ្រប់បណ្តាញនៃចំនួនគតិវិជ្ជមាន $(x, y)$

យើងមាន  $x^2 + x + 13 = y^2$

នាំឱ្យ  $y^2 - x^2 - x = 13$  (គុណអង្គទាំងពីរនឹង 4)

$$4y^2 - 4x^2 - 4x = 52$$

$$4y^2 - 4x^2 - 4x - 1 = 52 - 1$$

$$4y^2 - (4x^2 + 4x + 1) = 51$$

$$(2y)^2 - (2x+1)^2 = 51$$

$$(2y-2x-1)(2y+2x+1) = 51$$

ដោយ  $(x, y)$  ជាចំនួនគតិវិជ្ជមាន

នាំឱ្យ  $(2y-2x-1) < (2y+2x+1)$

ហើយផលគុណពីរកត្តានៃចំនួនគតិស្មើនឹង 51 គឺ :

$$51 = \begin{cases} 1 \times 51 \\ 3 \times 17 \end{cases}$$

-ចំពោះ  $1 \times 51 = 51$  យើងផ្តើមកត្តាត្រូវគ្នា :

យើងបាន 
$$\begin{cases} 2y - 2x - 1 = 1 \\ 2y + 2x + 1 = 51 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y - 2x = 2 \\ 2y + 2x = 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 25 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 25 \end{cases}$$

$$2y = 26 \Rightarrow y = 13$$

នោះ  $x = y - 1 = 13 - 1 = 12$

-ចំពោះ  $3 \times 17 = 51$  យើងផ្តើមកត្តាត្រូវគ្នា :

យើងបាន 
$$\begin{cases} 2y - 2x - 1 = 3 \\ 2y + 2x + 1 = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y - 2x = 4 \\ 2y + 2x = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - x = 2 \\ y + x = 8 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} y - x = 2 \\ y + x = 8 \end{cases}$$

$$2y = 10 \Rightarrow y = 5$$

នោះ  $x = y - 2 = 5 - 2 = 3$

ដូចនេះ គូចម្លើយនៃចំនួនគតិវិជ្ជមាន មានពីរគូគឺ :

$$(x=12, y=13) \text{ ឬ } (x=3, y=5)$$

។

### ៣០០ > តើចំនួន $A$ បញ្ចប់ដោយលេខសូន្យ $(0)$ ប៉ុន្មាន ?

យើងមាន  $A = 2^n \cdot 5^{2n+1}$

$$= 2^n \cdot 5^{n+(n+1)}$$

$$= 2^n \cdot 5^n \cdot 5^{n+1}$$

$$= 10^n \cdot 5^{n+1}$$

ដោយ -ស្វ័យគុណនៃ 5 ជាចំនួនមានលេខ 5 ខាងចុងជានិច្ច

នាំឱ្យ  $5^{n+1}$  ជាចំនួនដែលមានលេខ 5 ខាងចុងជានិច្ច

-ហើយ  $10^n$  មានលេខ 0 ចំនួន  $n$  ដង

នាំឱ្យផលគុណ  $10^n \cdot 5^{n+1}$  មានលេខ 0 ចំនួន  $n$  ដង

ដូចនេះ ចំនួន  $A = 2^n \cdot 5^{2n+1}$  បញ្ចប់ដោយលេខ 0

ចំនួន  $n$  ដង

។

**៣០១) ដោះស្រាយសមីការ**

$$\begin{aligned}\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ac} + \frac{x-c}{ab} &= 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \\ \frac{a(x-a) + b(x-b) + c(x-c)}{abc} &= 2\left(\frac{bc+ac+ab}{abc}\right) \\ a(x-a) + b(x-b) + c(x-c) &= 2(ab+bc+ac) \\ ax - a^2 + bx - b^2 + cx - c^2 &= 2ab + 2bc + 2ac \\ (a+b+c)x &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \\ (a+b+c)x &= (a+b+c)^2 \\ x &= \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)} \\ x &= (a+b+c)\end{aligned}$$

ដូចនេះ សមីការមាន  $x = a + b + c$  ជាបួស ។

**៣០២) រកបួសគូបនៃ  $Z$  :**

យើងមាន  $Z = \left(8, \frac{\pi}{4}\right)$  មានទម្រង់  $Z = (r, \alpha)$

ដែល  $r$  ជាម៉ូឌុល និង  $\alpha$  ជាអាកុយម៉ង់

បួសគូបនៃ  $Z$  គឺ

$$Z_k = \left(\sqrt[3]{r}, \frac{\alpha + 2k\pi}{3}\right) \text{ ដែល } k = \{0, 1, 2\}$$

$$\begin{aligned}\text{-ចំពោះ } k=0 : Z_0 &= \left(\sqrt[3]{8}, \frac{(\pi/4) + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}\right) \\ &= \left(2, \frac{\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{-ចំពោះ } k=1 : Z_1 &= \left(\sqrt[3]{8}, \frac{(\pi/4) + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3}\right) \\ &= \left(2, \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right) = \left(2, \frac{3\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

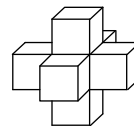
$$\begin{aligned}\text{-ចំពោះ } k=2 : Z_2 &= \left(\sqrt[3]{8}, \frac{(\pi/4) + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3}\right) \\ &= \left(2, \frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right) = \left(2, \frac{17\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

ដូចនេះ បួសគូបនៃ  $Z$  គណនាបានគឺ :

$$Z_0 = \left(2, \frac{\pi}{12}\right), Z_1 = \left(2, \frac{3\pi}{4}\right), Z_2 = \left(2, \frac{17\pi}{12}\right) \quad ។$$

**៣០១) រកក្រឡាផ្ទៃទាំងអស់របស់សូលីត :**

យើងមានគូប 7 ផ្គុំគ្នាបំប្លែងជា



សូលីតមានមាឌ  $448 \text{ cm}^3$

$$\text{នាំឱ្យគូបនីមួយៗមានមាឌ } V = \frac{448 \text{ cm}^3}{7} = 64 \text{ cm}^3$$

$$\text{ទាញបានទ្រនុងរបស់គូប } a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{64 \text{ cm}^3} = 4 \text{ cm}$$

គូបនីមួយៗមានផ្ទៃ  $6a^2$

-គិតថា : គូប៧ មានគូបមួយនៅកណ្តាលគេ បាត់ផ្ទៃអស់

និងគូប៦ ទៀតបាត់ផ្ទៃអស់១ដូចគ្នា នាំឱ្យផ្ទៃសូលីត :

$$\begin{aligned}S &= 7 \times 6a^2 - (6a^2) - (6 \cdot a^2) \\ &= 42a^2 - 12a^2 \\ &= 30a^2, \quad (a = 4 \text{ cm}) \\ &= 30 \cdot (4 \text{ cm})^2 = 30 \times 16 \text{ cm}^2 = 480 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

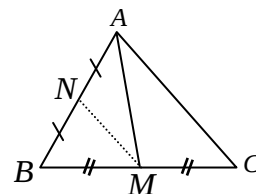
ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាទាំងអស់របស់សូលីតគឺ  $S = 480 \text{ cm}^2$  ។

**៣០៤) បង្ហាញថា  $2AM < AB + AC$**

-យើងមាន  $[AM]$  ជាមេដ្យាន

នាំឱ្យ ចំណុច  $M$  កណ្តាល  $BC$

-យកចំណុច  $N$  កណ្តាល  $AB$



$$\text{នាំឱ្យ } AN = \frac{AB}{2} \quad (1)$$

-ក្នុងត្រីកោណ  $ABC$  មាន  $MN$  ជាបាតមធ្យម

$$\text{នាំឱ្យ } MN = \frac{AC}{2} \quad (2)$$

-ដោយបូក (1)+(2) យើងបាន :

$$AN + MN = \frac{AB}{2} + \frac{AC}{2}$$

-តែ ក្នុងត្រីកោណ  $AMN$  តាមវិសមភាពនៃត្រីកោណ

យើងបាន  $AM < AN + MN$  នោះយើងទាញបាន :

$$AM < \frac{AB}{2} + \frac{AC}{2} \Leftrightarrow 2AM < AB + AC$$

ដូចនេះ យើងបើកបញ្ជាក់  $2AM < AB + AC$  ។

**៣០៥ គណនាល្បឿន រយៈពេល និងចម្ងាយ**

រំលឹករូបមន្ត ចម្ងាយចរិះ :  $d = v \times t$

តាមបម្រាប់ប្រធាន :

-បើបន្ថែមល្បឿន  $3\text{km/h}$  ទៅដល់មុនពេលកំណត់  $1\text{ h}$

នាំឱ្យបាន :  $(v+3)(t-1)=d$  (1)

-បើបន្ថយល្បឿន  $2\text{km/h}$  ទៅដល់ក្រោយពេលកំណត់  $1\text{ h}$

នាំឱ្យបាន :  $(v-2)(t+1)=d$  (2)

តាម (1) & (2) យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases} (v+3)(t-1)=d \\ (v-2)(t+1)=d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} vt-v+3t-3=d \\ vt+v-2t-2=d \end{cases}$$

$$\begin{cases} -v+3t-3=d-vt \\ v-2t-2=d-vt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -v+3t-3=0 \\ v-2t-2=0 \end{cases}$$

ព្រោះ  $d = v \times t$

បូកអង្គនិងអង្គ : 
$$+ \begin{cases} -v+3t-3=0 \\ v-2t-2=0 \end{cases}$$

$$\frac{t-5=0}{t-5=0} \Rightarrow t=5\text{ h}$$

ចំពោះ  $v-2t-2=0$

$v-2 \times (5)-2=0$

$v-12=0 \Rightarrow v=12\text{ km/h}$

នាំឱ្យ  $d = v \times t = 12 \times 5 = 60\text{ km}$

ដូចនេះ យើងគណនាបាន ល្បឿន  $v=12\text{km/h}$   
រយៈពេល  $t=5\text{h}$  ចម្ងាយចរិះ  $d=60\text{km}$  ។

**៣០៦ គណនាមួយចំនួននោះ**

តាង  $x$  ជាមួយចំនួនដែលត្រូវរកនោះ

តាមបម្រាប់ប្រធាន យើងបាន :  $x \times x = x + x$

ឬ  $x^2 = 2x$  នាំឱ្យ  $x^2 - 2x = 0$

$x(x-2)=0$  ទាញបាន  $\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

ដូចនេះ ចំនួនដែលត្រូវគណនាគឺ  $0$  ឬ  $2$  ។

**៣០៧ រកចំនួននៃការចាប់ដៃគ្នាទាំងអស់**

ការចាប់ដៃពុំមានច្រំដែលឡើយ នោះយើងគិតឃើញថា :

អ្នកទី១ ចាប់បាន៩ ដង , អ្នកទី២ ចាប់បាន៨ ដង

អ្នកទី៣ ចាប់បាន៧ ដង , អ្នកទី៤ ចាប់បាន៦ ដង ...

រហូតដល់អ្នកទី១០ បាន ០ ដង

នាំឱ្យ ចំនួនដងនៃការចាប់ដៃគ្នាគឺ :

$9+8+7+6+5+4+3+2+1+0=45$  ដង

-អ្នកអាចធ្វើតាមរបៀបម្យ៉ាងទៀតគឺ :

មនុស្សមាន ១០នាក់ ហើយចាប់ដៃគ្នាពីរៗនាក់ មានន័យថា:

វាជាបន្សំ នៃ១០ធាតុ ជ្រើសរើសយក២ធាតុ

នាំឱ្យ  $C(10, 2) = \frac{10!}{(10-2)!2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 2!} = 45$  ដង

ដូចនេះ ចំនួនដងនៃការចាប់ដៃទាំងអស់គឺ 45 ។

**៣០៨ ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $2^9 + 3^9$  ចែកដាច់នឹង 35**

យើងមាន  $2^9 + 3^9 = (2^3)^3 + (3^3)^3$

$$= (2^3 + 3^3)(2^6 - 2^3 \cdot 3^3 + 3^6)$$

$$= (8 + 27)(2^6 - 2^3 \cdot 3^3 + 3^6)$$

$$= 35(2^6 - 2^3 \cdot 3^3 + 3^6)$$

ឃើញថាលទ្ធផលនៃ  $2^9 + 3^9$  ជាពហុគុណនៃ 35

នោះ  $2^9 + 3^9$  ត្រូវតែចែកដាច់នឹង 35

ដូចនេះ ចំនួន  $2^9 + 3^9$  ចែកដាច់នឹង 35 ។

**៣០៩ សម្រួលប្រភាគសនិទាន  $E$  :**

យើងមាន  $E = \frac{a^2 - 3ab + 2b^2}{a^2 - 5ab + 6b^2}$

$$= \frac{(a-b)(a-2b)}{(a-2b)(a-3b)} = \frac{a-b}{a-3b}$$

ដូចនេះ យើងសម្រួលបាន  $E = \frac{a-b}{a-3b}$  ។

**៣១០ គណនារង្វាស់ជ្រុងនីមួយៗ**

តាង  $x, y, z$  ជារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ គិតជា  $cm$

តាមបម្រាប់ប្រធាន យើងបាន  $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$

តាមលក្ខណៈសមាមាត្រ យើងបានផលធៀប

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{3+4+5} = \frac{24}{12} = 2$$

ព្រោះ បរិមាត្រ  $x+y+z = 24$  ( $cm$ )

$$\text{យើងបាន } \frac{x}{3} = 2 \Rightarrow x = 6 \text{ (cm)}$$

$$\frac{y}{4} = 2 \Rightarrow y = 8 \text{ (cm)}$$

$$\frac{z}{5} = 2 \Rightarrow z = 10 \text{ (cm)}$$

ដូចនេះ រង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណគឺ  $6cm, 8cm, 10cm$  ។

**៣១១ គណនាចំនួនគត់នោះ**

តាង  $\overline{ab}$  ជាចំនួនគត់ដែលមានលេខពីរខ្ទង់នោះ

នាំឱ្យយើងបាន :  $0 < a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$

តាមបម្រាប់ប្រធាន យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases} a+b=9 \\ \overline{ba}-\overline{ab}=63 \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{ពិនិត្យ } \overline{ba}-\overline{ab} &= (10b+a)-(10a+b) \\ &= 10b+a-10a-b \\ &= -9a+9b \\ &= 9(-a+b) \end{aligned}$$

នោះយើងបាន ប្រព័ន្ធសមីការ (\*) ទៅជា :

$$\begin{cases} a+b=9 \\ 9(-a+b)=63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=9 \\ -a+b=7 \end{cases} + \begin{cases} a+b=9 \\ -a+b=7 \end{cases}$$

$$\text{តាមវិធីបូកបំបាត់} \quad \frac{2b=16}{2b=16} \Rightarrow b=8$$

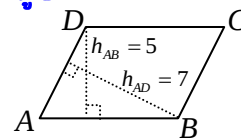
$$\text{ទាញបាន } a=9-b \Leftrightarrow a=9-8 \Rightarrow a=1$$

ដូចនេះ ចំនួនគត់នោះគឺ  $\overline{ab}=18$  ។

**៣១២ គណនារង្វាស់ជ្រុងនៃប្រលេឡូក្រាម ABCD :**

តាង  $h_{AB} = 5$  ត្រូវនឹងបាត  $AB$

$h_{AD} = 7$  ត្រូវនឹងបាត  $AD$



យើងបាន ផ្ទៃក្រឡាប្រលេឡូក្រាម  $ABCD$  គឺ

$$S_{ABCD} = AB \cdot h_{AB} \quad \text{ឬ} \quad S_{ABCD} = AD \cdot h_{AD}$$

$$\text{នាំឱ្យ } AB \cdot h_{AB} = AD \cdot h_{AD} \quad \text{ទាញបាន } \frac{h_{AB}}{h_{AD}} = \frac{AD}{AB}$$

តាមបម្រាប់ សមាមាត្រកម្ពស់  $5:7$  គឺ  $\frac{h_{AB}}{h_{AD}} = \frac{5}{7}$

$$\text{នាំឱ្យ } \frac{AD}{AB} = \frac{5}{7} \Leftrightarrow 5AB = 7AD$$

$$\Rightarrow 5AB - 7AD = 0 \quad (1)$$

$$\text{បម្រាប់បរិមាត្រ } 2(AB + AD) = 48 \text{ (cm)}$$

$$AB + AD = 24 \quad (2)$$

តាម (1) & (2) យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases} 5AB - 7AD = 0 \\ AB + AD = 24 \end{cases} \quad \text{បូកបំបាត់ដោយយកសមីការ (2) \times 7}$$

$$\begin{aligned} &+ \begin{cases} 5AB - 7AD = 0 \\ 7AB + 7AD = 168 \end{cases} \\ \text{យើងបាន } &\frac{12AB = 168}{12AB = 168} \Rightarrow AB = 14 \end{aligned}$$

$$\text{ដោយ } 5AB = 7AD \Rightarrow AD = \frac{5AB}{7} = \frac{5 \times 14}{7} = 10$$

ដូចនេះ រង្វាស់ជ្រុងប្រលេឡូក្រាមក្រោយពីគណនាបាន គឺ :  $AB = 14 \text{ cm}, AD = 10 \text{ cm}$  ។

**៣១៣ រកតម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ P មានតម្លៃតូចបំផុត**

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } P &= (x-1)(x+2)(x+3)(x+6) \\ &= [(x-1)(x+6)][(x+2)(x+3)] \\ &= (x^2+5x-6)(x^2+5x+6) \\ &= (x^2+5x)^2 - 6^2 \\ &= (x^2+5x)^2 - 36 \end{aligned}$$

$$\text{ដោយ } (x^2+5x)^2 \geq 0 \quad \text{នាំឱ្យ } (x^2+5x)^2 - 36 \geq -36$$

$$\text{នោះតម្លៃ } P = (x^2+5x)^2 - 36 \Rightarrow P \geq -36$$

មានន័យថា  $P$  មានតម្លៃតូចបំផុតស្មើ  $-36$

ចំពោះ  $x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x+5) = 0$

នាំឱ្យ  $x = 0$  ,  $x = -5$

ដូចនេះ  $x = 0$  ,  $x = -5$  ជាតម្លៃដែលធ្វើឱ្យ  
 $P = -36$  ជាតម្លៃតូចបំផុត ។

### ៣១៤ រកចំនួនមនុស្ស និងចំនួនកៅអី

-របៀបទី១ : (តាមប្រព័ន្ធសមីការ)

តាង  $x$  ជាចំនួនមនុស្ស និង  $y$  ជាចំនួនកៅអី  
 ដែល  $x$  និង  $y$  ជាចំនួនគត់

តាមប្រមាបប្រធាន យើងបានប្រព័ន្ធសមីការ  $\begin{cases} x - y = 4 \\ y - 4 = \frac{x}{2} \end{cases}$

ទាញឱ្យងាយ  $\begin{cases} x - y = 4 \\ x - 2y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + y \\ x = 2y - 8 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$

ដោយផ្អែម (1) & (2) នោះយើងបាន :

$$2y - 8 = 4 + y$$

$$2y - y = 4 + 8$$

$$y = 12$$

តាម (1) :  $x = 4 + y \Leftrightarrow x = 4 + 12 \Rightarrow x = 16$

ដូចនេះ មនុស្សមានចំនួន 16 នាក់ , កៅអីមានចំនួន 12 ។

-របៀបទី២ : (តាមសមីការ)

តាង  $x$  ជាចំនួនមនុស្ស នោះចំនួនកៅអីគឺ  $x - 4$

ដែល  $x$  ជាចំនួនគត់

តាមប្រមាបប្រធានយើងបានសមីការ :

$$\frac{x}{2} = (x - 4) - 4$$

$$x = 2x - 16$$

$$x = 16$$

នាំឱ្យ ចំនួនកៅអីគឺ  $x - 4 = 16 - 4 = 12$

ដូចនេះ មនុស្សមានចំនួន 16 នាក់ , កៅអីមានចំនួន 12 ។

### ៣១៥ បង្ហាញថាផលគុណនៃពីរចំនួននោះតូចជាង ឬស្មើ $\frac{1}{4}$

តាង  $a$  និង  $b$  ជាពីរចំនួននោះ

តាមប្រមាប  $a + b = 1$  (លើកអង្គទាំងពីរជាការេ)

យើងបាន  $(a + b)^2 = 1^2$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 1$$

$$2ab = 1 - (a^2 + b^2) \quad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀត បើ  $a$  និង  $b$  ជាពីរចំនួននោះយើងបាន :

$$(a - b)^2 \geq 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 2ab \leq (a^2 + b^2) \quad (2)$$

ដោយបូកអង្គនិងអង្គនៃ (1) និង (2) យើងបាន :

$$\begin{aligned} &+ \begin{cases} 2ab = 1 - (a^2 + b^2) \\ 2ab \leq (a^2 + b^2) \end{cases} \\ \hline &4ab \leq 1 \Rightarrow ab \leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ដូចនេះ ផលគុណនៃពីរចំនួននោះតូចជាង ឬស្មើ  $\frac{1}{4}$  ។

### ៣១៦ រកផ្ទៃការេដែលចារឹកក្នុងរង្វង់ទាំងមូល

តាង  $s$  និង  $a$  ជាផ្ទៃ និងជ្រុង នៃការេតូច

$S$  និង  $b$  ជាផ្ទៃ និងជ្រុង នៃការេធំ

តាមប្រមាប :  $s = 100 \text{ cm}^2$

នាំឱ្យ  $a^2 = s = 100$  នោះ  $a = 10 \text{ cm}$

តាមទ្រឹស្តីបទពីរតាគីរ  $r$  ជាប្រវែងអ៊ីប៉ូតេនុស (កាំរង្វង់)

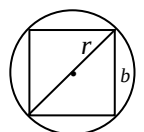
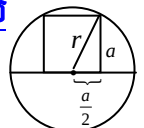
នោះ  $r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 + 10^2 = 125 \text{ cm}^2$

និង  $(2r)^2 = b^2 + b^2 \Leftrightarrow 4r^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2r^2$

យើងបាន ផ្ទៃក្រឡាការេធំគឺ  $S = b^2$

នាំឱ្យ  $S = 2r^2 \Leftrightarrow S = 2 \cdot 125 \Rightarrow S = 250 \text{ cm}^2$

ដូចនេះ ផ្ទៃការេចារឹកក្នុងរង្វង់ទាំងមូលគឺ  $S = 250 \text{ cm}^2$  ។



**៣១៧ កំណត់តម្លៃនៃចំនួនពិត  $a$  និង  $b$  :**

យើងមាន  $a^2 + b^2 = 0$

គ្រប់តម្លៃនៃចំនួនពិត  $a$  និង  $b$  នោះយើងបាន :

$$a^2 \geq 0, \quad b^2 \geq 0$$

នាំឱ្យ  $a^2 + b^2 \geq 0$

ចំពោះ  $a^2 + b^2 = 0$  មានករណីតែមួយគត់ដែលផ្សេងផ្ទុក

គឺ  $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$  (គ្មានករណីណាផ្សេងទៀតឡើយ)

ដូចនេះ ចំនួនពិតកំណត់បានគឺ  $a=0$  និង  $b=0$  ។

**៣១៨ ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ**

យើងមាន  $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} & (1) \\ xy + yz + zx = 26 & (2) \end{cases}$

តាមសមាមាត្រនោះយើងបាន

$$\begin{aligned} (1): \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} &= \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{x+y+z}{9} \\ \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} &= \frac{x+y+z}{9} \\ \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} &= \frac{(x+y+z)^2}{81} \\ \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} &= \frac{x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)}{81} \\ \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} &= \frac{x^2+y^2+z^2+2 \times 26}{81} \\ \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} &= \frac{x^2+y^2+z^2+52}{81} \quad (i) \end{aligned}$$

ព្រោះតាម(2) :  $xy + yz + zx = 26$

តែតាមសមាមាត្រ

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} &= \frac{x^2+y^2+z^2}{4+9+16} \\ \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} &= \frac{x^2+y^2+z^2}{29} \quad (ii) \end{aligned}$$

តាម (i) និង (ii) នោះយើងបាន :

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2 + 52}{81} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{29}$$

$$29(x^2 + y^2 + z^2 + 52) = 81(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$29(x^2 + y^2 + z^2) + 29 \times 52 = 81(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$81(x^2 + y^2 + z^2) - 29(x^2 + y^2 + z^2) = 29 \times 52$$

$$52(x^2 + y^2 + z^2) = 29 \times 52$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 29$$

នោះយើងបាន :  $\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} = \frac{29}{29} = 1$

នាំឱ្យយើងទាញបាន :

$$\frac{x^2}{4} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$$

$$\frac{z^2}{16} = 1 \Leftrightarrow z^2 = 16 \Rightarrow z = \pm 4$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយត្រូវគ្នាគឺ :

$$(x, y, z = -2, -3, -4) \text{ ឬ } (x, y, z = 2, 3, 4) \quad ។$$

**៣១៩ គណនាតម្លៃគត់ នៃកន្សោមលេខ  $E$  :**

យើងមាន  $E = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } E^3 &= \left( \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \right)^3 \\ &= (2+\sqrt{5}) + 3\left( \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \right)^2 \left( \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \right) + \\ &\quad + 3\left( \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \right) \left( \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \right)^2 + (2-\sqrt{5}) \\ &= 4 + 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \left( \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \right) \\ &= 4 + 3\sqrt[3]{2^2 - \sqrt{5}^2} E \\ E^3 &= 4 - 3E \end{aligned}$$

យើងបាន  $E^3 + 3E - 4 = 0$

$$(E-1)(E^2+E-4)=0 \quad \text{នាំឱ្យ} \begin{cases} E-1=0 \\ E^2+E-4=0 \end{cases}$$

ក្រោយពីដោះស្រាយមានតែតម្លៃគត់  $E=1$  ប៉ុណ្ណោះ

ដូចនេះ គណនាតម្លៃគត់បានគឺ  $E=1$  ។

**៣២០ គណនាផលបូកចម្រាស់នៃចំនួនទាំងពីរ**

តាង  $a$  និង  $b$  ជាពីរចំនួននោះ

នាំឱ្យផលបូកចម្រាស់ចំនួនទាំងពីរគឺ  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

-របៀបទី១ : យើងគណនា តាមតម្រូវភាគបែងរួមគឺ  $ab$

$$\text{នាំឱ្យ } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$$

ដោយបម្រាប់ ផលបូក  $a+b=12$  និងផលគុណ  $ab=4$

$$\text{គេបាន } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{12}{4} = 3 \text{ នោះ } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 3$$

-របៀបទី២ : ដោយចែកអង្គ និងអង្គ

$$\text{យើងមាន } a+b=12$$

ដោយចែកអង្គទាំងពីរនឹង  $ab$  យើងបាន :

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{12}{ab} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{12}{4} = 3 \text{ ព្រោះ } ab=4$$

ដូចនេះ ផលបូកចម្រាស់ចំនួនទាំងពីរគឺ  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 3$  ។

**៣២១ គណនារក  $r$  និង  $s$  :**

បើ  $x^2+3x+8$  ជាកត្តាមួយនៃកន្សោម  $x^4+rx^2+s$  នោះ

$$\begin{aligned} x^4+rx^2+s &= (x^2+3x+8)(x^2+ax+b) \\ &= x^4+ax^3+bx^2+3x^3+3ax^2+3bx+8x^2+8ax+8b \\ &= x^4+(a+3)x^3+(b+3a+8)x^2+ \\ &\quad +(3b+8a)x+8b \end{aligned}$$

ដោយផ្ទៀងផ្ទាត់មេគុណត្រូវគ្នានៃ  $x$  នោះគេបាន :

$$\begin{cases} a+3=0 \\ r=b+3a+8 \\ 3b+8a=0 \\ s=8b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ r=b-9+8 \\ 3b-24=0 \\ s=8b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ r=7 \\ b=8 \\ s=64 \end{cases}$$

$$\text{គេបាន } x^4+7x^2+64=(x^2+3x+8)(x^2-3x+8)$$

ដូចនេះ តម្លៃគណនាបានគឺ  $r=7$  និង  $s=64$  ។

**៣២២ គណនា  $A$  :**

$$\text{យើងមាន } A=2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n$$

$$\begin{aligned} &= (2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times \dots \times (2 \times n) \\ &= (2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2)(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n) \\ &= 2^n \cdot n! \end{aligned}$$

$$\text{ព្រោះ } \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_n = 2^n$$

$n$  ដងនៃលេខ 2

$$\text{និង } n!=1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

ដូចនេះ តម្លៃដែលគណនាបាន  $A=2^n \cdot n!$  ។

**៣២៣ គណនា  $^{1024}\sqrt{S+1}$  :**

យើងមាន

$$\begin{aligned} S &= (1+2)(1+2^2)(1+2^4)(1+2^8) \times \dots \times (1+2^{1024}) \\ &= (2-1)(1+2)(1+2^2)(1+2^4) \times \dots \times (1+2^{1024}) \\ &= (2^2-1)(1+2)(1+2^2)(1+2^4) \times \dots \times (1+2^{1024}) \\ &= (2^4-1)(1+2)(1+2^2)(1+2^4) \times \dots \times (1+2^{1024}) \\ &= (2^8-1)(1+2)(1+2^2)(1+2^4) \times \dots \times (1+2^{1024}) \\ &= \dots \\ &= (2^{1024}-1)(1+2^{1024}) \\ &= 2^{2048}-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } ^{1024}\sqrt{S+1} &= ^{1024}\sqrt{2^{2048}-1+1} \\ &= ^{1024}\sqrt{2^{2048}} \\ &= ^{1024}\sqrt{(2^2)^{1024}} = 2^2 = 4 \end{aligned}$$

ដូចនេះ គណនាបាន  $^{1024}\sqrt{S+1}=4$  ។

**៣២៤ គណនា  $A$  :**

$$\begin{aligned} \text{មាន } A &= \frac{2012}{1234568^2 - 1234567 \times 1234569} \\ &= \frac{2012}{1234568^2 - (1234568-1)(1234568+1)} \\ &= \frac{2012}{1234568^2 - (1234568^2 - 1)} = \frac{2012}{1} = 2012 \end{aligned}$$

ដូចនេះ គណនាបាន  $A=2012$  ។

**៣២៥ រកចំនួនគតិវិជ្ជមាន  $n$  :**

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } 4+n^4 &= (n^4+4n^2+4)-4n^2 \\ &= (n^2+2)^2-(2n)^2 \\ &= (n^2+2-2n)(n^2+2+2n) \\ &= (n^2-2n+2)(n^2+2n+2) \end{aligned}$$

ដោយ  $n \in \mathbb{N}$  នោះត្រូវតែ  $(n^2-2n+2) < (n^2+2n+2)$

បើ  $4+n^4$  ជាចំនួនបឋម នោះវាជាផលគុណពីរកត្តា ដែលកត្តាទី១ស្មើនឹង 1 និងកត្តាទី២ស្មើនឹងខ្លួនឯង យើងបាន :

$$\begin{aligned} \begin{cases} n^2-2n+2=1 \\ n^2+2n+2=4+n^4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} n^2-2n+1=0 \\ n^4-n^2-2n+2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} (n-1)^2=0 \\ n^2(n^2-1)-2(n-1)=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} n-1=0 \\ (n-1)(n^3-n^2-2)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} n=1 \\ (n-1)^2(n^2+2n+2)=0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} n=1 \\ n^2+2n+2=0 \end{cases} \end{aligned}$$

ចំពោះ  $n^2+2n+2=0$  មាន :

$$\Delta' = 1-2 = -1 < 0 \text{ នាំឱ្យសមីការគ្មានឫស}$$

ដូចនេះ ចំនួនគតិវិជ្ជមានដែលរកបានគឺ  $n=1$  ។

**៣២៦ រកលេខខាងចុងនៃផលគុណ :**

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } &7^{2012} \times 2013^{2010} \times 7^{2000} \times 2013^{2012} \\ &= 7^{2012} \times 7^{2000} \times 2013^{2010} \times 2013^{2002} \\ &= 7^{2012+2000} \times 2013^{2010+2002} \\ &= 7^{4012} \times 2013^{4012} \\ &= (7 \times 2013)^{4012} \\ &= 14091^{4012} \\ &= \dots 1 \end{aligned}$$

ស្វ័យគុណនៃមួយចំនួនដែលមានលេខខាងចុង ស្មើនឹងមួយ ចំនួនដែលមានលេខខាងចុងនៅខាងចុងជានិច្ច ។

ដូចនេះ លេខខាងចុងនៃផលគុណគឺ 1 ។

**៣២៧ គណនារកលេខខាងចុងនៃ  $A$  :**

$$\text{មាន } A = 2012^{2013} = (2010+2)^{2013}$$

ដោយ 2010 មានលេខខាងចុង 0 នោះលេខខាងចុងនៃ

$(2010+2)^{2013}$  អាស្រ័យលើលេខខាងចុងនៃ  $2^{2013}$

-ពិនិត្យ លក្ខណៈទូទៅចំពោះស្វ័យគុណនៃ 2 គឺ :

ចំពោះ  $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$  នោះលេខចុង

នៃ  $2^n$  គឺ 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ... មានទម្រង់ទូទៅ

គឺ :  $2^n$  មានលេខខាងចុង 2 បើ  $n=4k+1, k \in \mathbb{N}$

$2^n$  មានលេខខាងចុង 4 បើ  $n=4k+2, k \in \mathbb{N}$

$2^n$  មានលេខខាងចុង 8 បើ  $n=4k+3, k \in \mathbb{N}$

$2^n$  មានលេខខាងចុង 6 បើ  $n=4k, k \in \mathbb{N}$

ដោយ  $2013=4 \times 503+1$  មានទម្រង់  $n=4k+1$

នាំឱ្យ  $2^{2013} = 2^{4 \times 503+1}$  មានលេខខាងចុងគឺ 2

ដូចនេះ លេខខាងចុងនៃ  $A$  គឺ 2 ។

**៣២៨ រកគ្រប់ចំនួនគតិវិជ្ជមាន  $n$  :**

ចំពោះ  $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$  នោះយើងបាន

$2^n$  គឺ 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ... ហើយ

សំណល់ចែកនៃ  $2^n$  នឹង 7 គឺ 2, 4, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 1, ...

ដែលសំណល់នៃផលចែកនេះមានទម្រង់ទូទៅគឺ :

-បើ  $n=3k+1, k \in \mathbb{N}$  នោះ  $2^n \div 7$  មានសំណល់ 2

-បើ  $n=3k+2, k \in \mathbb{N}$  នោះ  $2^n \div 7$  មានសំណល់ 4

-បើ  $n=3k, k \in \mathbb{N}$  នោះ  $2^n \div 7$  មានសំណល់ 1

ចំពោះករណី  $2^n \div 7$  មានសំណល់ 1 ដែល  $n=3k$

នាំឱ្យ  $2^n - 1 \div 7$  មានសំណល់ 0 ដែល

មានន័យថា  $2^n - 1$  ចែកដាច់នឹង 7 ក្នុងករណី  $n=3k$

ដូចនេះ  $2^n - 1$  ចែកដាច់នឹង 7 កាលណា  $n$  ជាពហុគុណនៃ 3 ។

**៣២៩ បង្ហាញថា  $12^{2012} - 2^{2008}$  ចែកដាច់នឹង 10 :**

ដើម្បីឱ្យ  $12^{2012} - 2^{2008}$  ចែកដាច់នឹង 10 យើងគ្រាន់តែបង្ហាញថាផលរកដំនៃ  $12^{2012} - 2^{2008}$  មានលេខសូន្យនៅខាងចុង ។  
លេខចុងនៃ  $12^{2012} - 2^{2008}$  អាស្រ័យលើលេខចុងនៃ  $2^{2012} - 2^{2008}$  -សិក្សាស្វ័យគុណនៃ 2 គឺ :

ចំពោះ  $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$  នោះលេខចុងនៃ  $2^n$  គឺ 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ... មានទម្រង់ទូទៅគឺ :  $2^n$  មានលេខខាងចុង 2 បើ  $n=4k+1, k \in \mathbb{N}$   
 $2^n$  មានលេខខាងចុង 4 បើ  $n=4k+2, k \in \mathbb{N}$   
 $2^n$  មានលេខខាងចុង 8 បើ  $n=4k+3, k \in \mathbb{N}$   
 $2^n$  មានលេខខាងចុង 6 បើ  $n=4k, k \in \mathbb{N}$

ដោយ  $2^{2012} = 2^{4 \times 503}$  មានទម្រង់  $2^{4k}$

នាំឱ្យ  $2^{2012}$  ជាចំនួនមានលេខ 6 នៅខាងចុង

និង  $2^{2008} = 2^{4 \times 502}$  មានទម្រង់  $2^{4k}$

នាំឱ្យ  $2^{2008}$  ជាចំនួនមានលេខ 6 នៅខាងចុងដែរ

យើងបានផលដកនៃ  $12^{2012} - 2^{2008}$  មានលេខ 0 នៅខាងចុង

ដូចនេះ  $12^{2012} - 2^{2008}$  ចែកដាច់នឹង 10 ។

**៣៣០ បង្ហាញថា  $A$  ចែកដាច់នឹង 30 :**

ចំពោះ គ្រប់ចំនួនគតិវិជ្ជមាន  $n$  យើងបាន :

$$\begin{aligned} A &= n^5 - n \\ &= n(n^4 - 1) \\ &= n(n^2 - 1)(n^2 + 1) \\ &= n(n-1)(n+1)((n^2 - 4) + 5) \\ &= n(n-1)(n+1)(n^2 - 4) + 5n(n-1)(n+1) \\ &= n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) + 5n(n-1)(n+1) \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5(n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

ដោយ  $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$  ជាប្រាំចំនួនតួគ្នា

នោះចំនួននេះ ត្រូវចែកដាច់នឹង 2, 3 និង 5

ឬចំនួននេះត្រូវចែកដាច់នឹង 6 និង 5

ហើយ  $5(n-1)n(n+1)$  មាន  $(n-1)n(n+1)$  ជាបីចំនួនគត់តួគ្នានោះ  $5(n-1)n(n+1)$  ត្រូវតែចែកដាច់នឹង 2, 3 និង 5 ឬចំនួននេះត្រូវតែចែកដាច់នឹង 6 និង 5

ដោយ  $PGCD(6,5)=1$  នោះចំនួនដែលចែកដាច់នឹង

6 និង 5 ជាចំនួនដែលចែកដាច់នឹង 30

ដូចនេះ  $A = n^5 - n$  ចែកដាច់នឹង 30 ។

**៣៣១ គណនា  $f(x)$  :**

យើងមាន  $f(x) = x^3 - 3x$

ចំពោះ  $x = \sqrt[3]{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$  នាំឱ្យ

$$\begin{aligned} x^3 &= \left( \sqrt[3]{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \right)^3 \\ &= (\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 3\sqrt[3]{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \times x \\ &= 2\sqrt{3} + 3\sqrt[3]{3^2 - 2^2} \times x \\ &= 2\sqrt{3} + 3x \end{aligned}$$

ទាញបាន  $x^3 - 3x = 2\sqrt{3}$  នោះ  $f(x) = x^3 - 3x = 2\sqrt{3}$

ដូចនេះ  $f(x) = 2\sqrt{3}$  ។

**៣៣២ រកពីរចំនួនគត់  $a$  និង  $b$  :**

បម្រាប់  $a+b=92$  នាំឱ្យ  $a+1+b=93$

ដោយ  $a+1$  ជាពហុគុណនៃ  $b$  នោះ  $a+1=kb, k \in \mathbb{N}$

យើងបាន  $kb+b=93 \Leftrightarrow (k+1)b=93$

នាំឱ្យ  $b = \frac{93}{k+1}$  ដោយ  $b$  ជាចំនួនគតិវិជ្ជមាន

នោះ 93 ត្រូវតែចែកដាច់នឹង  $k+1$

$$\text{ដោយ } 93 = \begin{cases} 1 \times 93 \\ 3 \times 31 \end{cases} \text{ នោះ } k+1 = \begin{cases} 1 \\ 3 \\ 31 \end{cases} \Rightarrow k = \begin{cases} 0 \\ 2 \\ 30 \end{cases}$$

-ចំពោះ  $k=0$  នោះ  $b=93$  មិនយក ព្រោះ  $a+b=92$

-ចំពោះ  $k=92$  នោះ  $b=1$

-ចំពោះ  $k = 2$  នោះ  $b = 31$

-ចំពោះ  $k = 30$  នោះ  $b = 3$

$$\text{យើងបាន } b = \begin{cases} 1 \\ 31 \\ 3 \end{cases} \text{ នាំឱ្យ } a = 92 - b = \begin{cases} 92 - 1 = 91 \\ 92 - 31 = 61 \\ 92 - 3 = 89 \end{cases}$$

ដូចនេះ ចំនួនគតិវិជ្ជមានដែលរកឃើញ  $(a = 91, b = 1)$   
 $(a = 61, b = 31)$  និង  $(a = 89, b = 3)$  ។

**ព្រឹត្តិការណ៍ បង្ហាញថា  $P$  ចែកដាច់នឹង  $P'$  :**

$$\text{មាន } P = (n+1)(n+2)(n+3) \times \dots \times (n+n)$$

ហើយ  $P' = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)$  នោះយើងបាន :

$$\begin{aligned} n! \cdot P &= n! \cdot (n+1)(n+2)(n+3) \times \dots \times (n+n) \\ &= 1 \times 2 \times \dots \times n(n+1)(n+2)(n+3) \times \dots \times (n+n) \\ &= 1 \times 2 \times \dots \times n(n+1)(n+2)(n+3) \times \dots \times (2n) \\ &= (1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1))(2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)) \\ &= P' \times ((2 \times 1)(2 \times 2)(2 \times 3) \times \dots \times (2 \times n)) \\ &= P' \times (1 \times 2 \times \dots \times n)(2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2) \end{aligned}$$

$$n! \cdot P = P' \times n! \times 2^n$$

$$P = 2^n \times P'$$

តាមលទ្ធផលបង្ហាញថា  $P$  ចែកដាច់នឹង  $P'$  បានផលចែក  $2^n$

ដូចនេះ  $P$  ចែកដាច់នឹង  $P'$  បានផលចែក  $2^n$  ។

**ព្រឹត្តិការណ៍ គណនា  $a+b$  :**

យើងមាន  $\overline{2a3} + 326 = \overline{5b9}$  ដែល  $0 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$

បម្រាប់ប្រធាន :  $\overline{5b9}$  ចែកដាច់នឹង 9

នាំឱ្យ  $5+b+9$  ចែកដាច់នឹង 9 នោះមានតែ  $b = 4$

ព្រោះ  $5+4+9=18$  ចែកដាច់នឹង 9

យើងបាន  $\overline{2a3} + 326 = 549$

$$\overline{2a3} = 223 \text{ ទាញបាន } a = 2$$

នាំឱ្យ  $a+b = 2+4 = 6$

ដូចនេះ យើងគណនាបាន  $a+b = 6$  ។

**ព្រឹត្តិការណ៍ គណនាកន្សោម  $A$  :**

យើងមាន  $a^2 + a = -1$  និង

$$\begin{aligned} A &= a^4 + 2a^3 + 4a^2 + 3a + 3 \\ &= a^4 + 2a^3 + a^2 + 3a^2 + 3a + 3 \\ &= (a^4 + 2a^3 + a^2) + (3a^2 + 3a) + 3 \\ &= (a^2 + a)^2 + 3(a^2 + a) + 3 \\ &= (-1)^2 + 3(-1) + 3 \\ &= 1 - 3 + 3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ដូចនេះ កន្សោម  $A = 1$  ត្រូវបានគណនា ។

**ព្រឹត្តិការណ៍ គណនា  $A$  ឱ្យលទ្ធផលជាផលគុណបីកត្តា :**

$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } A &= \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{12}+\sqrt{8}+3+\sqrt{6}} \\ &= \frac{\sqrt{2}-2}{(\sqrt{12}+\sqrt{8})+(3+\sqrt{6})} \\ &= \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{4}(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \\ &= \frac{\sqrt{2}-2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{4}+\sqrt{3})} \\ &= \frac{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{4}-\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})} \\ &= \frac{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{4}-\sqrt{3})}{(3-2)(4-3)} \\ &= (\sqrt{2}-2)(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{4}-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

ដូចនេះ គណនាបាន  $A = (\sqrt{2}-2)(\sqrt{3}-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})$  ។

**ព្រឹត្តិការណ៍ គណនាតម្លៃលេខនៃកន្សោម  $E$  :**

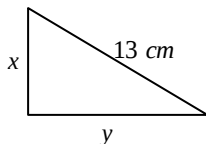
$$\begin{aligned} \text{យើងមាន } S &= \frac{2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 200^2}{3^2 + 6^2 + 9^2 + \dots + 300^2} \\ &= \frac{2^2(1+2^2+3^2+\dots+100^2)}{3^2(1+2^2+3^2+\dots+100^2)} \\ &= \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

ដូចនេះ តម្លៃលេខគណនាបាន  $E = \frac{4}{9}$  ។

**៣៣៨ > រករង្វាស់ជ្រុងមុំកែងទាំងពីរ :**

តាង  $x$  និង  $y$  ជារង្វាស់ជ្រុងមុំកែង

ដែល  $x > 0, y > 0$  គិតជា  $cm$



តាមបម្រាបយើងបាន :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13^2 \\ x + y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ x + y = 17 \end{cases}$$

ចំពោះ  $x + y = 17$  លើកអង្កទាំងទាំងពីរជាការេ

$$x^2 + 2xy + y^2 = 289$$

$$2xy = 289 - (x^2 + y^2)$$

$$xy = \frac{289 - 169}{2} = 60$$

$$\text{ដោយ } \begin{cases} x + y = 17 = 5 + 12 \\ xy = 60 = 5 \times 12 \end{cases}$$

នោះ  $x = 5, y = 12$  ឬ  $x = 12, y = 5$

ដូចនេះ ជ្រុងមុំកែងទាំងពីរ  $5cm$  និង  $12cm$  ។

**៣៣៩ > ស្រាយបញ្ជាក់ថា  $3^{\sqrt{2}} > 2^{\sqrt{3}}$  :**

$$\text{ពិនិត្យ } 9 > 8 \Leftrightarrow 3^2 > 2^3 \Rightarrow (3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} > (2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} (*)$$

$$\text{និង } 2^{\sqrt{9}} > 2^{\sqrt{6}} \Rightarrow (2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} > (2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{2}} (**)$$

តាមទំនាក់ទំនង (\*) និង (\*\*) យើងបាន :

$$(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} > (2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{2}} \text{ ទាញបាន } 3^{\sqrt{2}} > 2^{\sqrt{3}}$$

ដូចនេះ  $3^{\sqrt{2}} > 2^{\sqrt{3}}$  ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

**៣៤០ > បង្ហាញថា  $A < 6$  :**

$$A = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}} + \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \dots + \sqrt[3]{24}}}}$$

$$\text{ដោយ } \begin{cases} \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}} < \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{9}}} = 3 \\ \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \dots + \sqrt[3]{24}}} < \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \dots + \sqrt[3]{27}}} = 3 \end{cases}$$

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}} + \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \dots + \sqrt[3]{24}}} < 6$$

$$A < 6$$

ដូចនេះ  $A < 6$  ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

**៣៤១ > ដោះស្រាយសមីការ :**

$$\frac{x-4}{2008} + \frac{x-3}{2009} - \frac{x-2}{2010} - \frac{x-1}{2011} = 0$$

$$\frac{x-2012+2008}{2008} + \frac{x-2012+2009}{2009} - \frac{x-2012+2010}{2010} - \frac{x-2012+2011}{2011} = 0$$

$$\frac{x-2012}{2008} + 1 + \frac{x-2012}{2009} + 1 - \frac{x-2012}{2010} - 1 - \frac{x-2012}{2011} - 1 = 0$$

$$\frac{x-2012}{2008} + \frac{x-2012}{2009} - \frac{x-2012}{2010} - \frac{x-2012}{2011} = 0$$

$$(x-2012) \left( \frac{1}{2008} + \frac{1}{2009} - \frac{1}{2010} - \frac{1}{2011} \right) = 0$$

$$\text{នាំឱ្យ } x - 2012 = 0 \Rightarrow x = 2012$$

$$\text{ហើយ } \frac{1}{2008} + \frac{1}{2009} - \frac{1}{2010} - \frac{1}{2011} \neq 0$$

ដូចនេះ  $x = 2012$  ជាឫសនៃសមីការ ។

**៣៤២ > រកបីចំនួនគតិវិជ្ជមានខុសគ្នា  $x, y$  និង  $z$  :**

$$\text{យើងមាន } \begin{cases} x + y = 6 \\ y + z = 10 \end{cases}$$

យើងឱ្យតម្លៃនៃ  $x$  ដើម្បីគណនាតម្លៃរបស់  $y$  និង  $z$  :

ដោយ  $x + y = 6$  នាំឱ្យ  $0 < x < 6$  នោះ :

បើ  $x = 1$  យើងបាន  $y = 5$  និង  $z = 5$  (មិនយក)

$x = 2$  យើងបាន  $y = 4$  និង  $z = 6$  (យក)

$x = 3$  យើងបាន  $y = 3$  និង  $z = 7$  (មិនយក)

$x = 4$  យើងបាន  $y = 2$  និង  $z = 8$  (យក)

$x = 5$  យើងបាន  $y = 1$  និង  $z = 9$  (យក)

ដូចនេះ បីចំនួនគតិវិជ្ជមានខុសគ្នាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់គឺ :  
 $(x = 2, y = 4, z = 6), (x = 4, y = 2, z = 8)$   
 $(x = 5, y = 1, z = 9)$  ។

**៣៤៣ > ដោះស្រាយសមីការ :**

$$\sqrt{x+1} = x-1 \text{ លើកអង្កទាំងពីរជាការេ}$$

$$x+1 = x^2 - 2x + 1$$

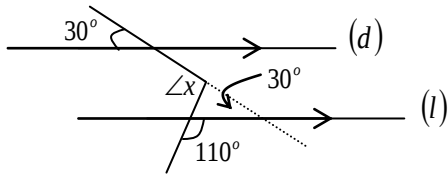
$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ មិនយក ព្រោះមិនផ្ទៀងផ្ទាត់}$$

$$x = 3 \text{ យក}$$

ដូចនេះ សមីការមាន  $x = 3$  ជាឫស ។

**៣៤៤ គណនាមុំ  $\angle x$  :**



បន្ទាយជ្រុងនៃមុំ  $\angle x$  ឱ្យកាត់បន្ទាត់  $(l)$

នោះយើងបានត្រីកោណមួយ នៅក្នុងបន្ទាត់ស្រប ដែលមាន

មុំ  $\angle x$  ជាមុំក្រៅនៃត្រីកោណនេះ មានរង្វាស់ស្មើផលបូកមុំក្នុងពីរដែលមិនជាប់នឹងវា ។

យើងបាន :  $\angle x = 30^\circ + (180^\circ - 110^\circ) = 100^\circ$  ។

ដូចនេះ មុំ  $\angle x = 100^\circ$  ត្រូវបានគណនាបង្ហាញ ។

**៣៤៥ គណនាផ្ទៃក្រឡានៃរូប :**

រំលឹក ត្រីកោណសម័ង្សដែលមានជ្រុង  $a$  នោះកម្ពស់របស់វាគឺ :  $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times a$

ក្រឡាផ្ទៃរូបនេះ បានពីផ្ទៃត្រីកោណធំមួយនិងត្រីកោណតូចបី ដែលស្មើទៅនឹងត្រីកោណសម័ង្ស ។

បើ  $S_{AB}$  ជាផ្ទៃត្រីកោណធំ (Big = ធំ)

និង  $S_{AS}$  ជាផ្ទៃត្រីកោណតូច (Small = តូច)

$$\begin{aligned} \text{នាំឱ្យ } S &= S_{AB} + 3S_{AS} \\ &= \left( \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 \times 3 \right) + 3 \left( \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \times 1 \right) \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \\ &= 3\sqrt{3} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃនៃរូបគឺ  $S = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$  ។

**៣៤៦ បំពេញលេខក្នុងប្រអប់ :**

យើងអាចបំពេញបានតាមបម្រាប់ប្រធាន ដូចខាងក្រោម :

|      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| 2    | 7    | 6    | → 15 |
| 9    | 5    | 1    | → 15 |
| 4    | 3    | 8    | → 15 |
| ↓ 15 | ↓ 15 | ↓ 15 | ↘ 15 |

**៣៤៧ ក. គណនារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ**

យើងមាន :  $\frac{a}{24} = \frac{b}{18} = \frac{c}{12}$  និង  $b + c = 10 \text{ cm}$

តាមលក្ខណៈសមាមាត្រយើងបាន :

$$\frac{b}{18} = \frac{c}{12} = \frac{b+c}{18+12} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

$$\text{នាំឱ្យ } \frac{a}{24} = \frac{b}{18} = \frac{c}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ទាញបាន } \begin{cases} \frac{a}{24} = \frac{1}{3} \\ \frac{b}{18} = \frac{1}{3} \\ \frac{c}{12} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 24 \\ 3b = 18 \\ 3c = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 6 \\ c = 4 \end{cases}$$

ដូចនេះ រង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណដែលគណនាបានគឺ :

$$a = 8 \text{ cm}, b = 6 \text{ cm}, c = 4 \text{ cm}$$

**ខ. គណនារង្វាស់កម្ពស់ដែលត្រូវនឹងជ្រុង  $a$  :**

យើងគូសរូបបានតាមលទ្ធផល :

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាក័រ

យើងបាន :

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 4^2 \\ (8-x)^2 + h^2 = 6^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + h^2 = 16 & (1) \\ 64 - 16x + x^2 + h^2 = 36 & (2) \end{cases}$$

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) យើងបាន :

$$\begin{aligned} 64 - 16x + 16 &= 36 \\ -16x &= 80 - 36 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-44}{-16} \Rightarrow x = \frac{11}{4}$$

ចំពោះ  $x = \frac{11}{4}$  នោះ  $h^2 = 16 - x^2$

$$\text{នាំឱ្យ } h = \sqrt{16 - \left(\frac{11}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{256 - 121}{16}} = \frac{\sqrt{135}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

ដូចនេះ កម្ពស់នៃត្រីកោណគឺ  $h = \frac{3\sqrt{15}}{4} \text{ cm}$  ។

**៣៤៨ រកចំនួនសិស្សនៅក្នុងថ្នាក់រៀននោះ**

តាង  $x$  ជាចំនួនសិស្ស នៅក្នុងថ្នាក់រៀននោះ (គិតជា នាក់)

តាមបម្រាប់ប្រធាន យើងសរសេរបានសមីការ :

$$\begin{aligned}\frac{x-4}{8} &= \frac{x+2}{9} \\ 9x-36 &= 8x+16 \\ 9x-8x &= 16+36 \\ x &= 52\end{aligned}$$

ដូចនេះ ចំនួនសិស្សនៅក្នុងថ្នាក់គឺ 52 នាក់ ។

**៣៤៩ រកមួយចំនួននោះ**

តាង  $A$  ជាចំនួននោះ

$$\text{តាមបម្រាប់យើងបាន : } \begin{cases} A \leq 4 \\ A \geq 4 \end{cases} \Rightarrow A = 4$$

ដូចនេះ ចំនួនដែលត្រូវរកនោះគឺ 4 ។

**៣៥០ រកមួយចំនួននោះ**

តាង  $x$  ជាចំនួនដែលត្រូវរកនោះ

តាមបម្រាប់ប្រធាន យើងបាន :

$$x \times x = x + x$$

$$x^2 = 2x$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$\text{នាំឱ្យ } \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \text{ នោះ } \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

ដូចនេះ ចំនួនដែលត្រូវរកនោះគឺ  $x = 0$  ,  $x = 2$  ។

**៣៥១ រកចំនួនទី១, ទី២, ទី៣ រៀងគ្នា**

តាង  $a$  ,  $b$  ,  $c$  ជាចំនួនទី១ , ទី២ , ទី៣ រៀងគ្នា

តាមបម្រាប់ប្រធាន :

$$\frac{a+b}{2} = 2012 \Rightarrow a+b = 4024$$

$$\text{ហើយ } \frac{a+b+c}{3} = 2012$$

$$\text{នោះ } a+b+c = 3 \times 2012$$

$$4024 + c = 6036$$

$$c = 6036 - 4024$$

$$c = 2012$$

ដូចនេះ ចំនួនទី៣ នោះគឺ 2012 ។

**៣៥២ គណនាចំនួនពីរខ្ទង់  $x$  :**

បម្រាប់ : 44 ចែកដាច់នឹង  $x$  សល់សំណល់ 10

បើ  $k$  ជាផលចែករវាង 44 និង  $x$  ដែល  $k \in \mathbb{N}$

$$\text{យើងបាន : } 44 = kx + 10 \Rightarrow kx = 34$$

$$\text{ដោយ } 34 = 2 \times 17 \text{ នោះ } kx = 2 \times 17$$

តែ  $x$  ជាលេខពីរខ្ទង់ នោះត្រូវតែ  $x = 17$  ,  $k = 2$

ដូចនេះ ចំនួនពីរខ្ទង់នៃ  $x$  គឺ  $x = 17$  ។

**៣៥៣ ដោះស្រាយសមីការ  $\overline{HE}^2 = \overline{SHE}$  :**

$$\text{ពិនិត្យសមីការ : } \overline{HE}^2 = \overline{SHE}$$

ការេនៃមួយចំនួននៅរក្សាលេខខាងចុងនៅតែ  $E$  ដដែល

$$\text{នាំឱ្យ } E = \{0, 1, 5, 6\}$$

-បើ  $E = 0$  នោះ  $\overline{HE}^2$  ត្រូវមានលេខសូន្យពីរនៅខាងចុង

តែ  $\overline{HE}^2 = \overline{SHE}$  មានលេខខាងចុងមិនដូចគ្នា នោះ  $E \neq 0$

-យើងផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះ  $E = \{1, 5, 6\}$  តាមតម្លៃ  $H$  ដែល

លទ្ធផលរបស់  $\overline{HE}^2$  ត្រឹមតែជាលេខបីខ្ទង់ប៉ុណ្ណោះ យើងបាន:

$$21^2 = 441 \text{ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ , } 31^2 = 961 \text{ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់}$$

$$15^2 = 225 \text{ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ , } 25^2 = 625 \text{ ផ្ទៀងផ្ទាត់}$$

$$16^2 = 256 \text{ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់ , } 26^2 = 676 \text{ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់}$$

ឃើញថា  $\overline{HE}^2 = \overline{SHE}$  ផ្ទៀងផ្ទាត់ដោយ  $25^2 = 625$

ដូចនេះ  $E = 5$  ,  $H = 2$  ,  $S = 6$  ។



**៣៥៨** គណនាចំនួនគត់ធម្មជាតិ  $n$  :

បម្រាប់  $n+13$  និង  $n-76$  ជាការប្រាកដ

$$\text{នាំឱ្យ } \begin{cases} n+13 > 0 \\ n-76 > 0 \end{cases} \Rightarrow n > 76$$

$$\text{តាង } n+13=a^2 \text{ (1) និង } n-76=b^2 \text{ (2)}$$

ដែល  $a$  និង  $b$  ជាចំនួនគត់ ហើយ  $a > b$

ដោយយក (1)-(2) យើងបាន :

$$\begin{array}{r} n+13=a^2 \\ -n-76=b^2 \\ \hline 89=a^2-b^2 \end{array}$$

$$\text{អាចសរសេរ : } (a-b)(a+b)=89$$

មានន័យថា 89 ជាផលគុណនៃពីរចំនួនគត់ :

ដោយដឹងថា  $1 \times 89 = 89$  (ព្រោះ 89 ជាចំនួនបឋម)

$$\text{យើងផ្តើមបាន } \begin{cases} a-b=1 \\ a+b=89 \end{cases} \text{ (ដោយប្តូកអង្គនិងអង្គ)}$$

$$\text{យើងបាន : } \begin{array}{r} a-b=1 \\ +a+b=89 \\ \hline 2a=90 \end{array} \Rightarrow a=45$$

$$\text{នាំឱ្យ } n+13=45^2 \text{ នោះ } n+13=2025 \text{ ឬ } n=2012$$

(មិនបាច់សិក្សា  $b$  ព្រោះគោលបំណងចង់រកតម្លៃ  $n$ )

ដូចនេះ ចំនួនគត់ធម្មជាតិគណនាបានគឺ  $n=2012$  ។

**៣៥៩** គណនាតម្លៃនៃមុំ  $x$  :

តាមច្បាប់ផលបូកមុំក្នុង

នៃត្រីកោណ យើងបាន :

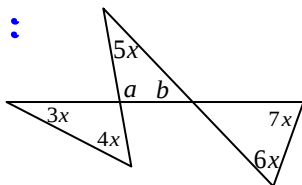
$$\begin{array}{r} 3x+4x+a=180^\circ \\ +6x+7x+b=180^\circ \\ \hline 20x+a+b=180^\circ \end{array} \quad (1)$$

$$\text{ហើយ } 5x+a+b=180^\circ \Rightarrow a+b=180^\circ-5x \quad (2)$$

យើងយក (2) ជំនួសក្នុង (1) នោះយើងនឹងបាន :

$$20x+180^\circ-5x=360^\circ \text{ ឬ } 15x=180^\circ \Rightarrow x=12^\circ$$

ដូចនេះ តម្លៃមុំគណនាបានគឺ  $x=12^\circ$  ។



**៣៦០** ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\text{មាន } \frac{2x^2}{1+x^2}=y \text{ (1) , } \frac{2y^2}{1+y^2}=z \text{ (2) , } \frac{2z^2}{1+z^2}=x \text{ (3)}$$

$$\text{យើងដឹងថា } (1-x)^2 \geq 0$$

$$\text{នោះ } 1-2x+x^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 1+x^2 \geq 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{2x^2}{1+x^2} \leq x \quad (4)$$

តាមលំនាំដូចគ្នានេះ យើងក៏បាន :

$$\frac{2y^2}{1+y^2} \leq y \text{ (5) និង } \frac{2z^2}{1+z^2} \leq z \text{ (6)}$$

យើងជំនួស: (1) ក្នុង (4) , (2) ក្នុង (5) និង (3) ក្នុង (6)

$$\text{យើងបាន } \begin{cases} y \leq x \\ z \leq y \\ x \leq z \end{cases} \Rightarrow x=y=z$$

$$\begin{aligned} \text{តាម (1) : } \frac{2x^2}{1+x^2} &= y \Leftrightarrow \frac{2x^2}{1+x^2} = x \\ 2x^2 &= x+x^3 \\ x^3-2x^2+x &= 0 \\ x(x^2-2x+1) &= 0 \\ x(x-1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{នាំឱ្យ } x=0, x=1$$

$$\text{យើងបាន : } x=y=z=0, x=y=z=1$$

$$\text{ដូចនេះ } x=y=z=0, x=y=z=1 \quad \text{។}$$

**៣៦១** ស្រាយបញ្ជាក់ផលបូកមុំក្នុងនៃត្រីកោណស្មើ  $180^\circ$

គូសបន្ទាត់កាត់កំពូល  $A$  ហើយស្របនឹងជ្រុង  $BC$

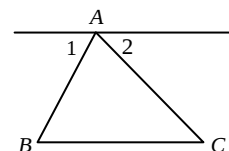
$$\text{នាំឱ្យ } B=A_1 \text{ (មុំឆ្លាស់ក្នុង)}$$

$$C=A_2 \text{ (មុំឆ្លាស់ក្នុង)}$$

$$\text{តែ } A+A_1+A_2=180^\circ \text{ (មុំរាប)}$$

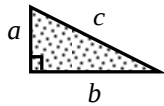
$$\text{នោះយើងបាន } A+B+C=180^\circ \text{ (ជាផលបូកមុំក្នុង } \Delta \text{)}$$

ដូចនេះ ផលបូកមុំក្នុងត្រីកោណទាំងអស់ស្មើ  $180^\circ$  ។



**៣៦២** ▶ ស្រាយបញ្ជាក់ពីទ្រឹស្តីបទពីតាក្រ  $a^2 + b^2 = c^2$  :

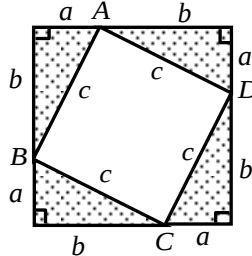
-យើងមានត្រីកោណកែងដែលមានរង្វាស់ជ្រុង  $a, b, c$  ហើយ  $c$  ជាអ៊ីប៉ូតេនុស



-យើងផ្ដុំត្រីកោណនេះបានដូចរូបខាងក្រោម :

-ចតុកោណខាងក្រៅ ជាការមានរង្វាស់ជ្រុង  $a+b$  នាំឱ្យ :

$$\begin{aligned}\text{ផ្ទៃកាត់} &= (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{។}\end{aligned}$$



-  $ABCD$  ជាការព្រោះ ផលបូកមុំស្រួចពីរដែលនៅជាប់មុំនៃចតុកោណនេះ ជាមុំបំពេញគ្នានាំឱ្យ : ផ្ទៃកាត់តូច  $= c^2$

-ត្រីកោណកែងនីមួយៗមាន ក្រឡាផ្ទៃ  $= \frac{1}{2}ab$

-តាមរូបដែលផ្ដុំ យើងបានទំនាក់ទំនងរវាងក្រឡាផ្ទៃ :

$$\begin{aligned}\text{ផ្ទៃកាត់} &= \text{ផ្ទៃកាត់តូច} + \text{ផ្ទៃត្រីកោណតូចទាំងបួន} \\ a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 4\left(\frac{1}{2}ab\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2ab \\ a^2 + b^2 &= c^2 + 2ab - 2ab \\ a^2 + b^2 &= c^2\end{aligned}$$

ដូចនេះ ទ្រឹស្តីបទពីតាក្រត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

**៣៦៣** ▶ រកមួយចំនួនដែលមានលេខបួនខ្ទង់  $\overline{abca}$  :

យើងមាន  $\overline{abca} = (5c+1)^2$  នោះ  $a, b, c$  ជាចំនួនគត់

នាំឱ្យ  $0 < a \leq 9, 0 \leq b \leq 9, 0 \leq c \leq 9$  (1)

ហើយ  $10000 > \overline{abca} > 961$

$$\begin{aligned}100^2 &> (5c+1)^2 > 31^2 \\ 100 &> 5c+1 > 31\end{aligned}$$

ចំពោះ  $5c+1 > 31 \Leftrightarrow 5c > 30 \Rightarrow c > 6$  (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន  $6 < c \leq 9 \Rightarrow c = \{7, 8, 9\}$

ចំពោះ  $c = 7$  នាំឱ្យ  $(5c+1)^2 = 1296$  មិនយក

ចំពោះ  $c = 8$  នាំឱ្យ  $(5c+1)^2 = 1681$  យក

ចំពោះ  $c = 9$  នាំឱ្យ  $(5c+1)^2 = 2116$  មិនយក

(បានជាយក  $(5c+1)^2 = 1681$  ព្រោះលេខ  $\overline{abca}$

មានទម្រង់ដូចលេខ 1681 ដែល  $a=1, b=6, c=8$

ដូចនេះ ចំនួនមានលេខបួនខ្ទង់នោះគឺ 1681 ។

**៣៦៤** ▶ បង្ហាញថា  $\forall n \in \mathbb{N}$  នោះគេបាន  $a^n > b^n$  :

ពិនិត្យ :  $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^n)$

សម្មតិកម្ម :  $a > b > 0$  នាំឱ្យ  $a-b > 0$  និង  $a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^n > 0$

នាំឱ្យផលគុណ  $(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^n) > 0$

យើងបាន  $a^n - b^n > 0$  ទាញបាន  $a^n > b^n$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា  $a^n > b^n$  ។

**៣៦៥** ▶ គណនាផលគុណ  $P = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{12}}{4} \times \dots \times \frac{\sqrt{9900}}{100}$

យើងគណនាផលគុណ  $P$  បានដូចខាងក្រោម :

$$\begin{aligned}P &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{12}}{4} \times \dots \times \frac{\sqrt{9900}}{100} \\ &= \frac{\sqrt{1 \times 2}}{2} \times \frac{\sqrt{2 \times 3}}{3} \times \frac{\sqrt{3 \times 4}}{4} \times \dots \times \frac{\sqrt{99 \times 100}}{100} \\ &= \frac{\sqrt{1} \times \sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{4}}{4} \times \dots \times \frac{\sqrt{99} \times \sqrt{100}}{100} \\ &= \frac{\sqrt{1} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{4^2} \times \dots \times \sqrt{99^2} \times \sqrt{100}}{2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 100} \\ &= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 99 \times 10}{2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 100} \\ &= \frac{10}{100} = \frac{1}{10}\end{aligned}$$

ដូចនេះ គណនាបានផលគុណ  $P = \frac{1}{10}$  ។

ការងារលំបាក គឺជាសត្រូវនៃការព្យាយាម ...

**៣៦៦) ដាក់កន្សោម P ជាផលគុណក្នុង :**

យើងមាន  $P = (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$

តាង  $a = x-y$  ,  $b = y-z$  ,  $c = z-x$

យើងបាន  $P = a^3 + b^3 + c^3$

ដោយ  $a+b+c = x-y+y-z+z-x$

$a+b+c = 0$

$a+b = -c$

$(a+b)^3 = -c^3$

$a^2 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -c^3$

$a^2 + b^3 + c^3 = -3a^2b - 3ab^2$

$a^2 + b^3 + c^3 = -3ab(a+b)$

យើងបាន :

$P = -3(x-y)(y-z)(x-y+y-z)$

$P = -3(x-y)(y-z)(x-z)$

$P = 3(x-y)(y-z)(z-x)$

ដូចនេះ ដាក់បាន  $P = 3(x-y)(y-z)(z-x)$  ។

**៣៦៧) គណនាតម្លៃនៃកន្សោម  $P = \frac{a-b}{a+b}$  :**

សម្មតិកម្ម  $3a^2 + 3b^2 = 10ab$

យើងមាន  $P = \frac{a-b}{a+b}$  ដែល  $a > b > 0$  នោះ  $P > 0$

នាំឱ្យ  $P^2 = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a^2 + b^2 + 2ab}$

$P^2 = \frac{3a^2 + 3b^2 - 6ab}{3a^2 + 3b^2 + 6ab}$

យើងបាន  $P^2 = \frac{10ab - 6ab}{10ab + 6ab} = \frac{4ab}{16ab} = \frac{1}{4}$

ទាញបាន  $P = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$  (ព្រោះ  $P > 0$ )

ដូចនេះ គណនាបាន  $P = \frac{1}{2}$  ។

**៣៦៨) កំណត់ x វិជ្ជមាន ដើម្បីឱ្យ A ជាចំនួនគតិវិជ្ជមាន :**

យើងមាន  $A = \frac{x-1}{x-3}$

$A = \frac{(x-3)+2}{x-3} = 1 + \frac{2}{x-3}$

-ដើម្បីឱ្យ A ជាចំនួនគតិវិជ្ជមាន លុះត្រាតែ  $\frac{2}{x-3}$  ជាចំនួន

គតិវិជ្ជមានដែរ នាំឱ្យ 2 ត្រូវចែកដាច់នឹង  $x-3$

-ដោយតួចែកវិជ្ជមាននៃ 2 គឺ 1 ឬ 2 នោះយើងបាន :

$\begin{cases} x-3=1 \\ x-3=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+3 \\ x=2+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=5 \end{cases}$

ដូចនេះ កំណត់បានតម្លៃ  $x = 4$  ,  $x = 5$  ។

**៣៦៩) បង្ហាញថាគេបាន  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$  :**

សម្មតិកម្ម :  $a+b+c = 0$  នោះ  $a+b = -c$

យើងបាន :

$(a+b)^3 = -c^3$

$a^2 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -c^3$

$a^2 + b^3 + c^3 = -3a^2b - 3ab^2$

$a^2 + b^3 + c^3 = -3ab(a+b)$

$a^2 + b^3 + c^3 = -3ab(-c)$

$a^2 + b^3 + c^3 = 3abc$

ដូចនេះ បង្ហាញបានថា  $a^2 + b^3 + c^3 = 3abc$  ។

**៣៧០) ដោះស្រាយសមីការ  $(x+2012)^{2012} - x^{2012} = 0$**

យើងបាន :

$(x+2012)^{2012} - x^{2012} = 0$

$(x+2012)^{2012} = x^{2012}$

$x+2012 = \pm x$

-ចំពោះ  $x+2012 = x$  សមីការគ្មានឫស

-ចំពោះ  $x+2012 = -x$  នាំឱ្យ  $x = -1006$

ដូចនេះ សមីការមានឫស  $x = -1006$  ។

**៣៧១) គណនាតម្លៃ**  $A = (x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1)^{2012}$

យើងមាន :  $x = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1}}$

តាង  $X = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1}$   

$$= \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1 - (\sqrt{\sqrt{2}+1}-1)}{(\sqrt{\sqrt{2}+1}-1)(\sqrt{\sqrt{2}+1}+1)}$$
  

$$= \frac{2}{(\sqrt{2}+1-1)} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

នាំឱ្យ  $x = \frac{2}{X} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

យើងបាន  $A = (\sqrt{2}^4 - \sqrt{2}^3 - \sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2} - 1)^{2012}$   

$$= (4 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} - 1)^{2012}$$
  

$$= 1^{2012} = 1$$

ដូចនេះ គណនាបាន  $A = 1$  ។

**៣៧២) គណនាវិមាត្រនៃសួនច្បារនោះ :**

តាង  $a$  ជាបណ្តោយ និង  $b$  ជាទទឹង នៃសួន

តាមសម្មតិកម្ម : សួនមានផ្ទៃក្រឡា  $720 \text{ m}^2$

យើងបាន  $ab = 720$  នាំឱ្យ  $a = \frac{720}{b}$

ម្យ៉ាងទៀត  $(a+6)(b-4) = ab$   

$$ab - 4a + 6b - 24 = ab$$
  

$$-4a + 6b = 24$$
  

$$2a - 3b = -12$$

យើងបាន  $2 \times \frac{720}{b} - 3b = -12$

$2 \times \frac{240}{b} - b = -4$

$480 - b^2 = -4b$

$b^2 - 4b - 480 = 0$

មាន  $\Delta' = (-2)^2 - (-480) = 484 = 22^2$

នោះ  $b = \frac{-(-2) - 22}{1} = -20 < 0$  មិនយក

$b = \frac{-(-2) + 22}{1} = 24$

ចំពោះ  $b = 24$  នោះ  $a = \frac{720}{b} = \frac{720}{24} = 30$

ដូចនេះ គណនាបានវិមាត្ររបស់សួនគឺ  $30\text{m}$  និង  $24\text{m}$  ។

**៣៧៣) រកចំនួនទាំងពីរ :**

តាង  $x$  និង  $x+3$  ជាចំនួនទាំងពីរនោះ

តាមបម្រាប់ប្រធាន យើងបាន :

$x^2 + (x+3)^2 = 89$

$x^2 + x^2 + 6x + 9 = 89$

$2x^2 + 6x - 80 = 0$

$x^2 + 3x - 40 = 0$

$(x+8)(x-5) = 0$

នាំឱ្យ  $\begin{cases} x+8=0 \\ x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8 \\ x=5 \end{cases}$

-ចំពោះ  $x = -8$  នាំឱ្យ  $x+3 = -8+3 = -5$

-ចំពោះ  $x = 5$  នាំឱ្យ  $x+3 = 5+3 = 8$

ដូចនេះ ចំនួនទាំងពីរនោះគឺ  $-8, -5$  ឬ  $5, 8$  ។

**៣៧៤) គណនាតម្លៃ  $x, y$  ពីសមីការ :**

យើងមានសមីការ  $x^2 - 4x + y - 6\sqrt{y} + 13 = 0$

$(x^2 - 4x + 4) + (y - 6\sqrt{y} + 9) = 0$

$(x-2)^2 + (\sqrt{y}-3)^2 = 0$

ផលបូកនៃការេស្មើ ០ លុះត្រាការេទាំងពីរស្មើ ០ :

យើងបាន  $\begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ (\sqrt{y}-3)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \\ \sqrt{y}-3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 9 \end{cases}$

ដូចនេះ តម្លៃគណនាបានគឺ  $x = 2, y = 9$  ។

ចំណាំ : បើមាន  $A^2 + B^2 = 0$  នោះយើងបាន :

$A = 0$  និង  $B = 0$

ព្រោះថា  $A^2 \geq 0, B^2 \geq 0$  ។

**ព្រះបាទ** ក. ប្រៀបធៀប  $3-\sqrt{3}$  និង  $\sqrt{6(2-\sqrt{3})}$  :

$$\begin{aligned}\text{ពិនិត្យ } \sqrt{6(2-\sqrt{3})} &= \sqrt{12-6\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{9-6\sqrt{3}+3} \\ &= \sqrt{3^2-6\sqrt{3}+\sqrt{3}^2} \\ &= \sqrt{(3-\sqrt{3})^2} = 3-\sqrt{3}\end{aligned}$$

ដូចនេះ ប្រៀបធៀបបាន  $3-\sqrt{3} = \sqrt{6(2-\sqrt{3})}$  ។

**ខ. ប្រៀបធៀប**  $\frac{1}{4}\sqrt{48}$  និង  $\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}$

$$\text{ពិនិត្យ } \frac{1}{4}\sqrt{48} = \frac{1}{4}\sqrt{16 \times 3} = \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}\text{ហើយ } \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{7+4\sqrt{3}} \\ &= \sqrt[4]{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})} \\ &= \sqrt[4]{49-48} = \sqrt[4]{1} = \sqrt{1}\end{aligned}$$

$$\text{ដោយសារ } \sqrt{3} > \sqrt{1}$$

$$\text{នាំឱ្យ } \frac{1}{4}\sqrt{48} > \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}$$

ដូចនេះ  $\frac{1}{4}\sqrt{48} > \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}$  ។

**ព្រះបាទ** ដោះស្រាយសមីការ  $(x-2)^4 + (x-3)^4 = 1$  :

$$\text{យើងមានសមីការ } (x-2)^4 + (x-3)^4 = 1$$

$$\text{តាង } t = x-2 \text{ នាំឱ្យ } x-3 = t-1$$

$$\text{យើងបានសមីការទៅជា } t^4 + (t-1)^4 = 1$$

$$t^4 + (t-1)^2(t-1)^2 = 1$$

$$t^4 + (t^2-2t+1)(t^2-2t+1) = 1$$

$$t^4 + t^4 - 2t^3 + t^2 - 2t^3 + 4t^2 - 2t + t^2 - 2t + 1 = 1$$

$$2t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t = 0$$

$$2t(t^3 - 2t^2 + 3t - 2) = 0$$

$$2t(t-1)(t^2 - t + 2) = 0$$

$$\text{នាំឱ្យ } \begin{cases} t=0 \\ t-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases}$$

$$\text{ហើយ } t^2 - t + 2 \text{ មាន } \Delta = 1-8 = -7 < 0 \text{ គ្មានឫស}$$

$$\text{-ចំពោះ } t=0 : 0 = x-2 \Rightarrow x=2$$

$$\text{-ចំពោះ } t=1 : 1 = x-2 \Rightarrow x=3$$

ដូចនេះ សមីការមានឫសពីរគឺ  $x=2, x=3$  ។

**ព្រះបាទ** រកចំនួនដែលមានលេខពីរខ្ទង់  $\overline{AB}$  :

$$\text{យើងមាន } \overline{AB}^2 - \overline{BA}^2 = 1980$$

$$(10A+B)^2 - (10B+A)^2 = 1980$$

$$(10A+B-10B-A)(10A+B+10B+A) = 1980$$

$$(9A-9B)(11A+11B) = 1980$$

$$99(A-B)(A+B) = 99 \times 20$$

$$(A-B)(A+B) = 20$$

$$A^2 - B^2 = 20$$

ឃើញថា ការេនៃ  $A$  និងការេនៃ  $B$  មានលេខចុងដូចគ្នា

ដោយ  $0 < A \leq 9, 0 < B \leq 9$  យើងបាន :

-បើ  $A^2 = 81 \Rightarrow B^2 = 61$  មិនយក 61 មិនជាការេប្រាកដ

-បើ  $A^2 = 64 \Rightarrow B^2 = 44$  មិនយក 44 មិនជាការេប្រាកដ

-បើ  $A^2 = 49 \Rightarrow B^2 = 29$  មិនយក 29 មិនជាការេប្រាកដ

-បើ  $A^2 = 36 \Rightarrow B^2 = 16$  យក (ជាការេប្រាកដដូចគ្នា)

យើងបាន  $A=6, B=4$

ដូចនេះ ចំនួនមានលេខពីរខ្ទង់នោះគឺ  $\overline{AB} = 64$  ។

**ព្រះបាទ** គណនា  $a, b, c$  :

$$\text{យើងមាន } \begin{cases} ab = 4 & (i) \\ ac = 5 & (ii) \\ bc = 20 & (iii) \end{cases} \text{ នាំឱ្យ } (abc)^2 = 400$$

$$\text{ចំពោះ } (abc)^2 = 400 \text{ ទាញបាន } abc = \pm 20 (*)$$

$$\text{-យក } \frac{(*)}{(i)} : \frac{abc}{ab} = \frac{\pm 20}{4} \Leftrightarrow c = \pm 5$$

$$\text{-យក } \frac{(*)}{(ii)} : \frac{abc}{ac} = \frac{\pm 20}{5} \Leftrightarrow b = \pm 4$$

$$\text{-យក } \frac{(*)}{(iii)} : \frac{abc}{bc} = \frac{\pm 20}{20} \Leftrightarrow a = \pm 1$$

ដូចនេះ គណនាបាន  $a=-1, b=-4, c=-5$   
 $a=1, b=4, c=5$  ។

**៣៧៩ > គណនា A : យើងមាន**

$$A = (2025 - 1^2)(2025 - 2^2)(2025 - 3^2) \times \dots \times (2025 - 50^2)$$

ដោយ  $2025 = 45^2$  នោះយើងសរសេរបាន :

$$A = (45^2 - 1^2)(45^2 - 2^2)(45^2 - 3^2) \times \dots \times (45^2 - 50^2)$$

ក្នុងចំណោម កត្តាពី  $(45^2 - 1^2)$  រហូតដល់  $(45^2 - 50^2)$

$$\text{ប្រាកដជាមានកត្តាមួយគឺ } (45^2 - 45^2) = 0$$

នាំឱ្យ A ជាផលគុណ ដែលមាន 0 ជាកត្តា នោះ  $A = 0$

ដូចនេះ គណនាបាន  $A = 0$  ។

**៣៨០ > រកចំនួនលេខសូន្យនៅខាងចុងរបស់ P :**

យើងមាន  $P = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 100$

ចំនួនលេខសូន្យខាងចុងរបស់ P កើតពីចំនួនជាតហុគុណនៃ 5

នោះយើងគ្រាន់តែរកចំនួនដែលជាតហុគុណនៃ 5 ក្នុងចំណោម

លេខពី 1 រហូតដល់ 100 មានន័យថាយើងកំពុងរកចំនួន

លេខនៅខាងចុងទាំងអស់របស់ P

លេខដែលជាតហុគុណ 5 មាន :

5 , 10 , 15 , ... , 100 មាន 20 លេខ

តែចំពោះលេខ 25 , 50 , 75 , 100 កើតពីតហុគុណនៃ 5

ដល់ទៅ 2 ដង ខុសពីចំនួនផ្សេងទៀត នោះមានលេខ 5

ចំនួន 4 ទៀត

សរុបតហុគុណនៃ 5 គឺ  $20 + 4 = 24$  នៃលេខ 5

ដូចនេះ P មានលេខសូន្យនៅខាងចុងចំនួន 24 ។

\*\*\*សម្គាល់ : អ្នកអាចធ្វើតាមរបៀបដូចខាងក្រោម :

-បើ  $n_1$  ជាចំនួនតហុគុណនៃ 5

$$\text{នោះ } 5n_1 \leq 100 \text{ គណនាបាន } n_1 = 20$$

-បើ  $n_2$  ជាចំនួនតហុគុណនៃ  $5^2 = 25$

$$\text{នោះ } 25n_2 \leq 100 \text{ គណនាបាន } n_2 = 4$$

យើងបាន ចំនួនលេខសូន្យទាំងអស់  $n_1 + n_2 = 20 + 4 = 24$

**៣៨១ > រកចំនួនលេខសូន្យនៅខាងចុងនៃ 2012!**

$$\text{ដោយ } 2012! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2012$$

ចំនួនលេខសូន្យនៅខាងចុងនៃចំនួន 2012! បង្កើតលេខដែល

ជាតហុគុណនៃ 5 ,  $5^2$  ,  $5^3$  ,  $5^4$

(មិនយក 5 ព្រោះ  $5^5 = 3125 > 2012$ )

-តាង  $n_1$  ជាចំនួនតហុគុណនៃ 5

$$\text{នោះ } 5n_1 \leq 2012 \text{ គណនាបាន } n_1 = 402$$

-តាង  $n_2$  ជាចំនួនតហុគុណនៃ  $5^2 = 25$

$$\text{នោះ } 25n_2 \leq 2012 \text{ គណនាបាន } n_2 = 80$$

-តាង  $n_3$  ជាចំនួនតហុគុណនៃ  $5^3 = 125$

$$\text{នោះ } 125n_3 \leq 2012 \text{ គណនាបាន } n_3 = 16$$

-តាង  $n_4$  ជាចំនួនតហុគុណនៃ  $5^4 = 625$

$$\text{នោះ } 625n_4 \leq 2012 \text{ គណនាបាន } n_4 = 3$$

យើងបាន ចំនួនលេខសូន្យទាំងអស់នៃចំនួន 2012! គឺ

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 402 + 80 + 16 + 3 = 501$$

ដូចនេះ ចំនួន 2012! បញ្ចប់ដោយលេខសូន្យចំនួន 501 ។

**៣៨២ > គណនា N : យើងមាន**

$$\begin{aligned} N &= \sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{4 - \sqrt{15}} - 2\sqrt{3 - \sqrt{5}} \\ &= \sqrt{\frac{8 + 2\sqrt{15}}{2}} + \sqrt{\frac{8 - 2\sqrt{15}}{2}} - 2\sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2}{2}} + \sqrt{\frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}{2}} - 2\sqrt{\frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{2}} \\ &= \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{\sqrt{2}} + \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{\sqrt{2}} - \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 2}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ គណនាបាន  $N = \sqrt{2}$  ។

**៣៨៣ រកចំនួនឃ្លីពណ៌ ស :**

តាង  $x$  ជាចំនួនឃ្លីពណ៌ ស នោះចំនួនឃ្លីពណ៌ខ្មៅគឺ  $12 - x$

$$\text{ប្រូបាបចាប់បានឃ្លីពណ៌ខ្មៅគឺ } P(x) = \frac{12 - x}{12} \quad (1)$$

$$\text{តែសម្មតិកម្ម ប្រូបាបឃ្លីពណ៌ខ្មៅគឺ } P(x) = \frac{1}{3} \quad (2)$$

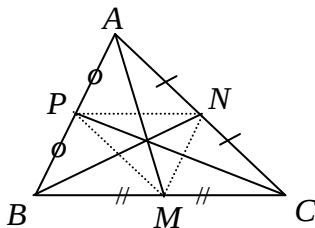
តាម (1) និង (2) យើងបាន :

$$\begin{aligned} \frac{12 - x}{12} &= \frac{1}{3} \Leftrightarrow 12 - x = \frac{12}{3} \\ &\Rightarrow x = 12 - 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

ដូចនេះ ឃ្លីពណ៌ ស មានចំនួន 8 គ្រាប់ ។

**៣៨៤ ក. ស្រាយថា  $AM + BN + CP < AB + BC + AC$**

តាមបម្រាបប្រធានយើងគូសរូបបាន :



ដោយ  $AM$  ,  $BN$  និង  $CP$  ជាមេដ្យាននៃ  $\triangle ABC$  នោះ

$M$  ,  $N$  ,  $P$  ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃ  $BC$  ,  $AC$  ,  $AB$

$$PA = \frac{AB}{2} , MB = \frac{BC}{2} , NC = \frac{AC}{2} \quad (*)$$

ម្យ៉ាងទៀត យើងបាន បាតមធ្យម ចំនួនបីគឺ :

$$PM = \frac{AC}{2} , MN = \frac{AB}{2} , NP = \frac{BC}{2} \quad (**)$$

-តាមច្បាប់វិសមភាពក្នុង  $\triangle AMP$  :  $AM < PA + PM$

$$\text{តាម } (*) \text{ និង } (**) \text{ យើងបាន } AM < \frac{AB}{2} + \frac{AC}{2} \quad (1)$$

-តាមច្បាប់វិសមភាពក្នុង  $\triangle BMN$  :  $BN < MB + MN$

$$\text{តាម } (*) \text{ និង } (**) \text{ យើងបាន } BN < \frac{BC}{2} + \frac{AB}{2} \quad (2)$$

-តាមច្បាប់វិសមភាពក្នុង  $\triangle CPN$  :  $CP < NP + NC$

$$\text{តាម } (*) \text{ និង } (**) \text{ យើងបាន } CP < \frac{BC}{2} + \frac{AC}{2} \quad (3)$$

យើងបូកអង្គ និងអង្គនៃវិសមីការ (1), (2) និង (3) :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} AM < \frac{AB}{2} + \frac{AC}{2} \\ + BN < \frac{BC}{2} + \frac{AB}{2} \\ CP < \frac{BC}{2} + \frac{AC}{2} \end{cases} \\ \hline &AM + BN + CP < AB + BC + AC \end{aligned}$$

ដូចនេះ  $AM + BN + CP < AB + BC + AC$  ។

**ខ. ស្រាយថា  $AM + BN + CP > \frac{AB + BC + AC}{2}$**

-តាមច្បាប់វិសមភាពក្នុង  $\triangle ABM$  :  $AM > AB - MB$

$$\text{តាម } (*) \text{ អាចសរសេរ } AM > AB - \frac{BC}{2} \quad (i)$$

-តាមច្បាប់វិសមភាពក្នុង  $\triangle BNC$  :  $BN > BC - NC$

$$\text{តាម } (*) \text{ អាចសរសេរ } BN > BC - \frac{AC}{2} \quad (ii)$$

-តាមច្បាប់វិសមភាពក្នុង  $\triangle ACP$  :  $CP > AC - PA$

$$\text{តាម } (*) \text{ អាចសរសេរ } CP > AC - \frac{AB}{2} \quad (iii)$$

យើងបូកអង្គ និងអង្គនៃវិសមីការ (i), (ii) និង (iii) :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} AM > AB - \frac{BC}{2} \\ + BN > BC - \frac{AC}{2} \\ CP > AC - \frac{AB}{2} \end{cases} \\ \hline &AM + BN + CP > \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{AC}{2} \end{aligned}$$

អាចសរសេរ  $AM + BN + CP > \frac{AB + BC + AC}{2}$

ដូចនេះ  $AM + BN + CP > \frac{AB + BC + AC}{2}$  ។

**\*\*\*សម្គាល់ :** វិសមភាពក្នុងត្រីកោណមួយគឺ :

-ផលបូកជ្រុងពីរត្រូវ > ជ្រុងមួយទៀត

- ផលដកជ្រុងពីរត្រូវ < ជ្រុងមួយទៀត ។

**៣៨៥** ក. គណនា  $S = a + b + c$  ជាអនុគមន៍នៃ  $b$  :

យើងមាន  $a, b, c$  ជាបីចំនួនគតិវិជ្ជាទីបត្តា

នាំឱ្យ យើងបាន  $a = b - 1$  និង  $c = b + 1$

យើងបាន  $S = a + b + c$

$$= (b - 1) + b + (b + 1)$$

$$= 3b$$

ដូចនេះ គណនាបាន  $S = 3b$  វាជាអនុគមន៍នៃ  $b$  ។

**ខ. ទាញរកតម្លៃនៃ  $a, b, c$  ដោយដឹងថា  $S = -333$**

យើងមាន  $S = 3b$  តែយើងដឹងថា  $S = -333$

នាំឱ្យ  $3b = -333$  ទាញបាន  $b = -111$

នោះយើងបាន  $a = b - 1$  ឬ  $a = -111 - 1 = -112$

និង  $c = b + 1$  ឬ  $c = -111 + 1 = -110$

ដូចនេះ គណនាបាន  $a = -112, b = -111, c = -110$

**៣៨៦** រកចំនួនក្រសាក្នុងប្លង់ទាំងអស់ :

តាង  $x$  ជាចំនួនក្រសាក្នុងទាំងអស់នៅក្នុងប្លង់

តាមបម្រាប់ ដែលជាពាក្យសម្តីរបស់មេខ្យល់នៃប្លង់ក្រសាក

យើងសរសេរបានសមីការដូចខាងក្រោម :

$$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100$$

$$4x + 4x + 2x + x + 4 = 400$$

$$11x = 396$$

$$x = 36$$

ផ្ទៀងផ្ទាត់ :  $36 + 36 + 18 + 9 + 1 = 100$

$$100 = 100 \quad \text{ពិត}$$

ដូចនេះ ចំនួនក្រសាកនៅក្នុងប្លង់ទាំងអស់មានចំនួន 36 ។

**៣៨៧** ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz & (1) \\ x^{2011} + y^{2011} + z^{2011} = 3^{2012} & (2) \end{cases}$$

តាម (1) :  $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2xy + 2yz + 2xz$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2 = 0$$

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$$

ផលបូកនៃច្រើនការស្មើសូន្យ លុះត្រា ការស្មើមួយៗស្មើសូន្យ

$$\begin{cases} (x - y)^2 = 0 \\ (y - z)^2 = 0 \\ (z - x)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z$$

តាម (2) :  $x^{2011} + y^{2011} + z^{2011} = 3^{2012}$

$$\text{យើងបាន } x^{2011} + x^{2011} + x^{2011} = 3^{2012}$$

$$3x^{2011} = 3^{2012}$$

$$x^{2011} = 3^{2011}$$

$$x = 3$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានឬស  $x = y = z = 3$  ។

**៣៨៨** គណនារង្វាស់ជ្រុងនីមួយៗ :

សម្មតិកម្ម : ត្រីកោណ ABC មានបរិមាត្រ 80 cm

តាង  $a, b, c$  ជារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ ABC

យើងបាន  $a + b + c = 80$

ដោយជ្រុងទាំងបីមានសមាមាត្ររៀងគ្នា 5, 7, 4

តាមលក្ខណៈសមាមាត្រ យើងសរសេរបាន :

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{4} = \frac{a + b + c}{5 + 7 + 4} = \frac{80}{16} = 5$$

$$\begin{cases} \frac{a}{5} = 5 \\ \frac{b}{7} = 5 \\ \frac{c}{4} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 25 \\ b = 35 \\ c = 20 \end{cases}$$

ដូចនេះ ជ្រុងទាំងបីមានរង្វាស់ 25cm, 35cm, 20cm ។

**៣៨៩** គណនាតម្លៃនៃកន្សោម  $P = \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} :$

យើងមាន  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{c}$$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^3 = \left(-\frac{1}{c}\right)^3$$

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{3}{ab}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = -\frac{1}{c^3}$$

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = -\frac{3}{ab}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = -\frac{3}{ab}\left(-\frac{1}{c}\right)$$

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$$

$$abc\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = 3$$

$$\frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ab}{c^2} = 3$$

$$P = 3$$

ដូចនេះ គណនាបានតម្លៃនៃកន្សោម  $P = 3$  ។

**៣៩០** ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ :

យើងមានប្រព័ន្ធសមីការ  $\begin{cases} \sqrt{x+3} - 2\sqrt{y+1} = 2 & (1) \\ 2\sqrt{x+3} - \sqrt{y+1} = 4 & (2) \end{cases}$

យើងយក (1) - 2×(2) នោះយើងបាន :

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - 2\sqrt{y+1} = 2 \\ 4\sqrt{x+3} - 2\sqrt{y+1} = 8 \\ -3\sqrt{x+3} = -6 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+3} = 2 \Leftrightarrow x+3 = 4 \Rightarrow x = 1$$

យកតម្លៃ  $x = 1$  ជំនួសក្នុងសមីការ (1) យើងបាន

(1):  $\sqrt{1+3} - 2\sqrt{y+1} = 2 \Leftrightarrow 2 - 2\sqrt{y+1} = 2$

$$\Rightarrow -2\sqrt{y+1} = 0 \Rightarrow \sqrt{y+1} = 0$$

$$\Rightarrow y+1 = 0 \Rightarrow y = -1$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយ  $x = 1, y = -1$  ។

**៣៩១** ប្រៀបធៀប  $\frac{a-1}{b-1}, \frac{a}{b}$  និង  $\frac{a+1}{b+1}$

យើងមាន  $a > 1, b > 1$  និង  $a > b$

យើងបាន  $ab + a > ab + b$

$$a(b+1) > b(a+1)$$

$$\frac{a}{b} > \frac{a+1}{b+1} \quad (1)$$

ហើយ  $a > b$  នោះ  $-a < -b$

$$ab - a < ab - b$$

$$a(b-1) < b(a-1)$$

$$\frac{a}{b} < \frac{a-1}{b-1} \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) យើងបាន  $\frac{a+1}{b+1} < \frac{a}{b} < \frac{a-1}{b-1}$

ដូចនេះ យើងប្រៀបធៀបបាន  $\frac{a+1}{b+1} < \frac{a}{b} < \frac{a-1}{b-1}$  ។

**៣៩២** ប្រៀបធៀប A និង B :

$$A = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$$

$$= \sqrt[3]{2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1}$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{2^3}+3\sqrt{2^2}+3\sqrt{2}+1^3} - \sqrt[3]{\sqrt{2^3}-3\sqrt{2^2}+3\sqrt{2}-1^3}$$

$$= \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3} - \sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3}$$

$$= \sqrt{2}+1 - (\sqrt{2}-1) = 2$$

$$B = \sqrt{51+10\sqrt{2}} - \sqrt{51-10\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{50+10\sqrt{2}+1} - \sqrt{50-10\sqrt{2}+1}$$

$$= \sqrt{(5\sqrt{2})^2+2\cdot 5\sqrt{2}+1} - \sqrt{(5\sqrt{2})^2-2\cdot 5\sqrt{2}+1}$$

$$= \sqrt{(5\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(5\sqrt{2}-1)^2}$$

$$= (5\sqrt{2}+1) - (5\sqrt{2}-1) = 2$$

ក្រោយពីគណនា ឃើញថា  $A = 2$  និង  $B = 2$  ដែរ

នាំឱ្យ យើងបាន  $A = B = 2$

ដូចនេះ ប្រៀបធៀបបាន  $A = B$  ។

**ព្រះបាទ ជ័យវរ្ម័នៈ**

យើងមាន  $\frac{1+x}{x} + \frac{2+x}{x} + \frac{3+x}{x} + \dots + \frac{2013+x}{x} = 0$

$$\left(\frac{1}{x} + 1\right) + \left(\frac{2}{x} + 1\right) + \left(\frac{3}{x} + 1\right) + \dots + \left(\frac{2013}{x} + 1\right) = 0$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x} + \dots + \frac{2013}{x} + 2013 = 0$$

$$(1+2+3+\dots+2013)\frac{1}{x} = -2013$$

$$x = \frac{1+2+3+\dots+2013}{-2013}$$

តែ  $1+2+3+\dots+2013 = \frac{2013}{2}(1+2013)$

$$= 2013 \times 1007.$$

យើងបាន  $x = \frac{2013 \times 1007}{-2013} = -1007$

ដូចនេះ សមីការមានឫស  $x = -1007$  ។

**ព្រះបាទ ក. ដាក់ជាផលគុណកត្តា :**

យើងមាន  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$  យើងបាន

$$\frac{bc+ac+ab}{abc} = \frac{1}{a+b+c}$$

$$(bc+ac+ab)(a+b+c) = abc$$

$$(a+b)(bc+ac+ab) + c(bc+ac+ab) - abc = 0$$

$$(a+b)(bc+ac+ab) + (bc^2+ac^2+abc-abc) = 0$$

$$(a+b)(bc+ac+ab) + (bc^2+ac^2) = 0$$

$$(a+b)(bc+ac+ab) + (a+b)c^2 = 0$$

$$(a+b)(bc+ac+ab+c^2) = 0$$

$$(a+b)(b(c+a) + (a+c)c) = 0$$

$$(a+b)(a+c)(b+c) = 0$$

ដូចនេះ យើងដាក់ជាផលគុណកត្តាបាន  $(a+b)(a+c)(b+c) = 0$  ។

**ខ. មានចំនួនផ្ទុយគ្នាមួយយ៉ាងតិចក្នុងចំណោម  $a, b, c$  :**

តាមសម្រាយនៅក្នុងសំណួរ ក. យើងបាន :

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - \left(\frac{1}{a+b+c}\right) = (a+b)(b+c)(a+c)$$

បើ  $a, b, c$  មានចំនួនផ្ទុយគ្នាមួយយ៉ាងតិចគឺ :

- $a = -b \Rightarrow (a+b) = 0$
- $b = -c \Rightarrow (b+c) = 0$
- $c = -a \Rightarrow (a+c) = 0$

បើមានករណីមួយយ៉ាងតិច ក្នុងចំណោមករណីខាងលើនោះ

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - \left(\frac{1}{a+b+c}\right) = 0$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

ដូចនេះ បើមានពីរចំនួនផ្ទុយគ្នាមួយយ៉ាងតិចក្នុងចំណោម  $a, b, c$  នោះយើងបានទំនាក់ទំនង :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

**ព្រះបាទ ជ័យវរ្ម័នៈ**

យើងមានសមីការ  $3^{2+x} + 3^{2-x} = 30$

$$3^2 \times 3^x + 3^2 \times 3^{-x} = 30$$

$$9(3^x + 3^{-x}) = 30$$

$$3^x + 3^{-x} = \frac{10}{3}$$

$$3^x + \frac{1}{3^x} = \frac{10}{3}$$

តាង  $t = 3^x$  ដែល  $t > 0$  (ព្រោះ  $3^x > 0$ )

យើងបាន  $t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3t^2 - 10t + 3 = 0$

មាន  $\Delta' = 25 - 9 = 16$  នោះ  $\begin{cases} t_1 = \frac{-(-5)-4}{3} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \\ t_2 = \frac{-(-5)+4}{3} = 3 \end{cases}$

-ចំពោះ  $t_1 = 3^{-1} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-1} \Rightarrow x = -1$

-ចំពោះ  $t_2 = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

ដូចនេះ សមីការមានឫសពីរគឺ  $x = -1$  ឬ  $x = 1$  ។

**ព័ត៌មាន ៦ សម្រួលប្រភាគ :**

យើងមាន  $A = \frac{|x-1| + |x| + x}{3x^2 - 4x + 1}$  ដោយ  $x < 0$

នាំឱ្យ  $|x-1| = -(x-1)$  ហើយ  $|x| = -x$

$$\begin{aligned} \text{យើងបាន } A &= \frac{-(x-1) - x + x}{3x^2 - 4x + 1} = \frac{-(x-1)}{3x^2 - 4x + 1} \\ &= \frac{-(x-1)}{3x(x-1) - (x-1)} = \frac{-(x-1)}{(x-1)(3x-1)} \\ &= -\frac{1}{3x-1} = \frac{1}{1-3x} \end{aligned}$$

ដូចនេះ សម្រួលប្រភាគបាន  $A = \frac{1}{1-3x}$  ។

**ព័ត៌មាន ៧ ដោះស្រាយសមីការ :** យើងមាន

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xyz} = \frac{1}{2} & (1) \\ \frac{y+z}{xyz} = \frac{5}{6} & (2) \\ \frac{x+z}{xyz} = \frac{2}{3} & (3) \end{cases}$$

$$\frac{2(x+y+z)}{xyz} = \frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{2(x+y+z)}{xyz} = \frac{3+5+4}{6}$$

$$\frac{x+y+z}{xyz} = 1 \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} (4)-(1): \frac{z}{xyz} = \frac{1}{2} &\Rightarrow xy = 2 \\ (4)-(2): \frac{x}{xyz} = \frac{1}{6} &\Rightarrow yz = 6 \\ (4)-(3): \frac{y}{xyz} = \frac{1}{3} &\Rightarrow xz = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (xyz)^2 = 36$$

$$xyz = \pm 6, \quad \frac{xyz}{xy} = \frac{\pm 6}{2} \Rightarrow z = \pm 3$$

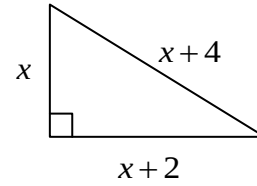
$$\frac{xyz}{yz} = \frac{\pm 6}{6} \Rightarrow x = \pm 1, \quad \frac{xyz}{xz} = \frac{\pm 6}{3} \Rightarrow y = \pm 2$$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានគូចម្លើយ :

$$x=1, y=2, z=3 \quad \text{ឬ}$$

$$x=-1, y=-2, z=-3 \quad \text{។}$$

**ព័ត៌មាន ៨ គណនាបរិមាត្រ និងក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណនេះ :**



តាង  $x, x+2, x+4$  ជាជ្រុងនៃត្រីកោណកែងនេះ

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាក័រ យើងបាន :

$$x^2 + (x+2)^2 = (x+4)^2$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = x^2 + 8x + 16$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x^2 - 6x + 2x - 12 = 0$$

$$(x-6)x + 2(x-6) = 0$$

$$(x-6)(x+2) = 0$$

$$\text{នាំឱ្យ } \begin{cases} x-6=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=-2 \end{cases} \text{ មិនយក}$$

$$\text{ចំពោះ } x=6 \text{ នោះ } \begin{cases} x+2=6+2=8 \\ x+4=6+4=10 \end{cases}$$

ឃើញថា ត្រីកោណនេះមានប្រវែងជ្រុង 6, 8, 10

នាំឱ្យ បរិមាត្រ  $P = 6 + 8 + 10 = 24$  ឯកតាប្រវែង

$$\text{ក្រឡាផ្ទៃ } S = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24 \text{ ឯកតាផ្ទៃក្រឡា}$$

ដូចនេះ គណនាបាន បរិមាត្រស្មើ 24 ឯកតាប្រវែង  
ក្រឡាផ្ទៃស្មើ 24 ឯកតាផ្ទៃក្រឡា ។

**ព័ត៌មាន ៩ សម្រួលកន្សោម  $F = \frac{x^2-1}{|x-1|}$**

-ករណី  $x > 1$  នាំឱ្យ  $|x-1| = x-1$

$$\text{យើងបាន } F = \frac{x^2-1}{|x-1|} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \boxed{x+1}$$

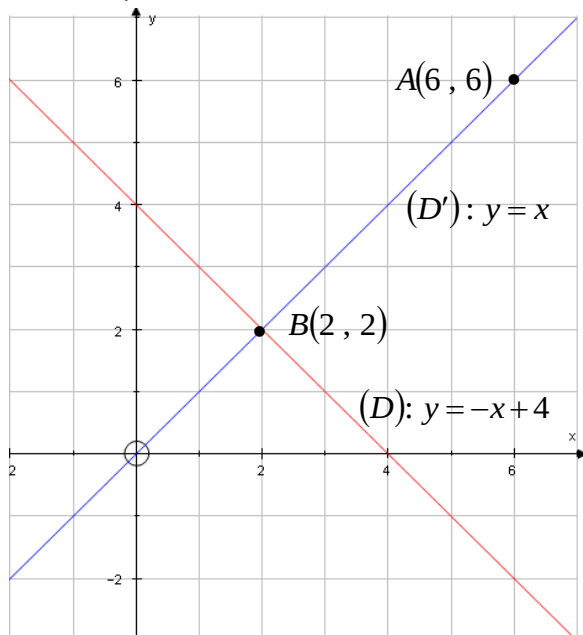
-ករណី  $x=1$  នាំឱ្យ  $F$  គ្មានន័យ ។

-ករណី  $x < 1$  នាំឱ្យ  $|x-1| = -(x-1)$

$$\text{យើងបាន } F = \frac{x^2-1}{|x-1|} = \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = \boxed{-(x+1)} \quad \text{។}$$

**៤០០ គណនាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅបន្ទាត់ (D) :**

យើងមានចំណុច  $A(6, 6)$  និងបន្ទាត់  $(D): y = -x + 4$



-រកបន្ទាត់ដែលកាត់តាម  $A(6, 6)$  និងកែងនឹង  $(D)$

បន្ទាត់ត្រូវរកមានរាង  $(D'): y = ax + b$

$$\text{ដោយ } (D') \perp (D) \Rightarrow a = \frac{-1}{a'} = \frac{-1}{-1} = 1$$

ហើយ  $(D')$  កាត់តាម  $A(6, 6)$  នោះ  $x = 6, y = 6$

$$\text{យើងបាន } (D'): 6 = 1 \times 6 + b \Rightarrow b = 0$$

ដូចនេះ បន្ទាត់  $(D'): y = x$

-រកចំណុចដែល  $(D)$  ប្រសព្វនឹង  $(D')$  តាងដោយ  $B$  :

ផ្អែមសមីការអាប់ស៊ីស យើងបាន :

$$-x + 4 = x \Leftrightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2.$$

ចំពោះ  $x = 2 \Rightarrow y = 2$  នាំឱ្យចំណុច  $B(2, 2)$

-រកចម្ងាយពីចំណុច  $A(6, 6)$  ទៅបន្ទាត់  $(D): y = -x + 4$

មានន័យថា រកចម្ងាយពី  $A(6, 6)$  ទៅចំណុច  $B(2, 2)$

$$\begin{aligned} d = AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(2 - 6)^2 + (2 - 6)^2} \\ &= \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

ដូចនេះ ចម្ងាយរកបានគឺ  $d = 4\sqrt{2}$  ឯកតាប្រវែង ។

**៤០១ .....(នៅមានបន្ត)**