សិស្សពូកែគណិតវិទ្យា

កម្រិតវិទ្យាល័យ

ន្ប ច័ន្តណាវិទ្ធិ

ប្រធានលំហាត់

លំហាត់ទី ៤២៤

គេមានទំនាក់ទំនង $(3-2i)Z+(3+2i)\overline{Z}-12=0\ (I)$ ។

ក- បង្ហាញថាសំណុំចំណុច M ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ដែលមានអាភិក Z ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង (I) គឺជាបន្ទាត់ L មួយដែលគេត្រូវកំណត់ ។

ខ- A និង B គឺជាពីរចំណុចដែលមានអាភិករៀងគ្នា $3+5i$ និង $-3+i$ ។
បង្ហាញថា បន្ទាត់ L ជាមេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[AB]$ ។

លំហាត់ទី ៤២៥

ពហុធា $f(z)=az^{2018}+bz^{2017}+cz^{2016}$ មានមេគុណជាចំនួនពិតមិនធំជាង 2019 និង $f\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)=2015+2019\sqrt{3}i$ ។ ចូររកសំណល់ពេលដែលគេចែក $f(1)$ និង 1000 ។

លំហាត់ទី ៤២៦

កំពូល M និង N របស់ត្រីកោណសម័ង្ស MNP ឋិតនៅលើរង្វង់ C ។ ចំណុច Q មួយផ្សេងពី N នៅលើរង្វង់ C ដែល $MQ=MN$ ។ បន្ទាត់ QP ប្រសព្វរង្វង់ C ជាលើកទីពីរត្រង់ R ។ ចូរគណនារង្វាស់ PR ។

លំហាត់ទី ៤២៧

តាង $m*n=\dfrac{m+n}{mn+4}$ ។
គណនា $A=((\cdots(2009*2008)*2007)*\cdots*1)*0)$ ។

លំហាត់ទី ៤២៨

តើមានចំនួនគត់ n ប៉ុន្មានចាប់ពី 1 ដល់ 2008 ដែល:
$2.6.10...(4n-2)$ ចែកដាច់នឹង $n!$ ។

លំហាត់ទី ៤២៩

មានចំនួនពិត 3គូគឺ $(a_1;b_1)$; $(a_2;b_2)$ និង $(a_3;b_3)$ ដែលបំពេញទំនាក់ទំនង :
$\begin{cases} a^3-3ab^2=2009 \\ b^3-3a^2b=2008 \end{cases}$ ។ គណនា $P=\left(1-\dfrac{a_1}{b_1}\right)\left(1-\dfrac{a_2}{b_2}\right)\left(1-\dfrac{a_3}{b_3}\right)$ ។

លំហាត់ទី ៤៣០

ចំពោះចំនួនគត់ n នីមួយៗមិនអវិជ្ជមាន គេបង្កើតចំនួនថ្មី $f(n)$ ។
ឧបមថា $f(0)=0$; $f(1)=1$ និង ចំពោះ $n\geq 2;\ f(n)-2f(n-1)+f(n-2)=(-1)^n(2n-4)$ ។ គណនា $f(2008)$ និង $f(2009)$ ។

លំហាត់ទី ៤៣១

គេឱ្យចំនួនពិត $x=k+\sqrt{k^2-1}$ ដែល k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានធំជាង 1 ។
ចំពោះ $n=1;2;3;...$ គេតាង A_n ជាផ្នែកគត់នៃ x^n ។
ចូរគណនា A_{2n} ជាអនុគមន៍នៃ A_n ។

លំហាត់ទី ៤៣២

ក្នុងចតុកោណព្នាយ $ABCD$ $(AD \parallel CB)$ មានផ្ទៃក្រឡា S ថេរ E ជាចំនុចប្រសព្វនៃអង្កត់ទ្រូងទាំងពីរ ។ តើចតុកោណព្នាយណាដែលមានផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABE ធំបំផុត ?

លំហាត់ទី ៤៣៣

តាង $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x dx$ ។ ចូរស្រាយបំភ្លឺថា $\frac{\pi}{2(n+1)} \le I_n^2 \le \frac{\pi}{2n}$ ។

លំហាត់ទី ៤៣៤

ចូរប្រៀបធៀបពីរចំនួន $A=\sqrt[3]{2008}+\sqrt[3]{2006}$ និង $B=2\sqrt[3]{2007}$ ។

លំហាត់ទី ៤៣៥

គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលមានផលគុណស្មើ 1 ។
រកតម្លៃធំបំផុតនៃផលគុណ $P=\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)$ ។

លំហាត់ទី ៤៣៦

រកចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដែល $n+S(n)=2009$ ។
$S(n)$ ជាផលបូកបណ្តាខ្ទង់ ទាំងអស់នៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

លំហាត់ទី ៤៣៧

គេឱ្យស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ជាចំនួនពិតដែលកំណត់ដោយ :

$$\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=1+a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n \ , \ (n\ge 1) \end{cases}$$ ។

គណនាផលបូក $S=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$ ។

លំហាត់ទី ៤៣៨

រកគ្រប់អនុគមន៍ $f:\Re\to\Re$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម :
$f[x(1+f(y))+f(y)]=x(1+y)+y$ គ្រប់ $x,y\in\Re$ ។

លំហាត់ទី ៤៣៩

ប្រមាណវិធី $*$ ត្រូវកំណត់នៅលើសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល បើ x និង y ជាពីរចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ $x*y$ ក៏ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែរ ។ ដោយសន្មត់ថា $*$ បំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ចំពោះគ្រប់ ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $x;y$ និង z ចូរគណនា $5*6$ ។

$$\begin{cases} x*(y+z)=(x*y)(x*z) & (1) \\ (x+y)*1=(x*1)+(y*1) & (2) \\ (x+y)*2=(x*2)+4(xy*1)+(y*2) & (3) \end{cases}$$ ។

លំហាត់ទី ៤៤០

ចំពោះ $P; R$ រៀងគ្នាជាកន្លះបរិមាត្រ និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណមួយ ចូរកំណត់ប្រភេទត្រីកោណនោះ ដើម្បីឱ្យផលធៀប $\frac{P}{R}$ មានតម្លៃធំបំផុត ។

លំហាត់ទី ៤៤១

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម

១) $S_n = lncos\frac{a}{2} + lncos\frac{a}{2^2} + \cdots + lncos\frac{a}{2^n}$

២) $P_n = \left(1+\frac{1}{cosa}\right)\left(1+\frac{1}{cos2a}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{cos2^n a}\right)$ ។

លំហាត់ទី ៤៤២

គេឱ្យចំនួនគត់ n ដែល $n \geq 2$ និងចំនួនមិនអវិជ្ជមាន $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ។

ចូរស្រាយបំភ្លឺថា $\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n}$ ។

លំហាត់ទី ៤៤៣

គេឱ្យ a, b, c ជាចំនួនពិត ខុសពី -1 និង 1 ដែល $a+b+c=abc$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}=\frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$ ។

លំហាត់ទី ៤៤៤

១. គេឱ្យ $x > -1$ និង $0 \leq n \leq 1$ ស្រាយថា $(1+x)^n \leq 1+nx$ ។

២. អនុវត្តវិសមភាពខាងលើ ចូរស្រាយថា

$\left[(sinx)^{2012}\right]^{(cosx)^{2012}} + \left[(cosx)^{2012}\right]^{(sinx)^{2012}} \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ ។

លំហាត់ទី ៤៤៥

ដោះស្រាយសមីការ

១) $\sqrt{3}cos^2x + 2sinxcosx - \sqrt{3}sin^2x - 1 = 0$

២) $\frac{16}{\sqrt{x-2010}} + \frac{1}{\sqrt{y-2012}} = 10 - \left(\sqrt{x-2010}+\sqrt{y-2012}\right)$ ។

លំហាត់ទី ៤៤៦

១. ចូរស្រាយបំភ្លឺទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស $\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}=2R$ ។

២. បង្ហាញថា បើ a^2, b^2, c^2 ជាតួបន្តគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ $cotA, cotB, cotC$ ក៏ជា

តួបន្តគ្នានៃស្វ៊ីតនពន្តដែរ ។

លំហាត់ទី ៤៤៧

$ABCD$ ជាការេ ជ្រុងមានរង្វាស់ស្មើ a ។ ចំណុច M នៃអង្កត់ទ្រូងមានចំណោលកែង P និង Q លើជ្រុង $[AB]$ និង $[AD]$ រៀងគ្នា ។ គេពិនិត្យសូលីត $\sum$ កកើតដោយពហុកោណ $PBCDQM$ ក្នុងរង្វិលជុំវិញអង្កត់ $[AB]$ ហើយសន្មត់យក $AP = x$ ដែល $0 \le x \le a$ ។

១) គណនាផ្ទៃក្រឡាសរុប S និងមាឌ V នៃសូលីត $\sum$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

២) កំណត់ទិសដៅអថេរភាពនៃ S និង V កាលណា x ប្រែប្រួលពី 0 ទៅ a ។

លំហាត់ទី ៤៤៨

គេអោយ a, b ជាពីរចំនួនពិតខុសគ្នា និង c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^4 - 2019a = b^4 - 2019b = c$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $-\sqrt{c} < ab < 0$ ។

លំហាត់ទី ៤៤៩

រកគ្រប់ចំនួនបឋម p ដោយដឹងថាមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន x, y, z ដែលធ្វើអោយ $x^p + y^p + z^p - x - y - z$ ជាផលគុណនៃបីចំនួនបឋមផ្សេងគ្នា ។

លំហាត់ទី ៤៥០

ត្រីកោណ ABC មាន $AB < AC$ ។ មេដ្យាទ័រនៃជ្រុង BC ជួបបន្ទាត់ AB និង AC ត្រង់ចំណុច P និង Q រៀងគ្នា ។ តាង H ជាអរតូសង់នៃត្រីកោណ ABC ។ M និង N ជាចំណុចកណ្ដាលនៃជ្រុង BC និង PQ រៀងគ្នា ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ HM និង AN ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុចមួយនៅលើរង្វង់ ។

លំហាត់ទី ៤៥១

រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y = \sqrt{log_x\left(x^3+1\right) log_{x+1} x - 2}$

ខ. $y = log_{x^2+1} \dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}$ ។

លំហាត់ទី ៤៥២

ស្រាយបញ្ជាក់ថា អង្កត់ទ្រូងនៃចតុកោណមួយកែងគ្នាលុះត្រាតែជ្រុងឈមនៃចតុកោណនោះ មានផលបូកការេស្មើគ្នា ។

លំហាត់ទី ៤៥៣

គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$, $u_0 = -2$ និង $u_1 = 2$ ។ គណនា u_n ។

លំហាត់ទី ៤៥៤

រកតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) ដែលកំណត់ដោយ $u_1 = 1$ និង $u_{n+1} = u_n(u_n + 2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

។

លំហាត់ទី ៤៥៥

ដោះស្រាយសមីការ

ក) $\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x=3^x+4^x+5^x$ ។

លំហាត់ទី ៤៥៦

ដោយមិនចាំបាច់ធ្វើប្រមាណវិធីគុណចូរស្រាយថា $2011\times2013<2012^2$ រួចទាញថា $log_{2011}2012>log_{2012}2013$ ។

លំហាត់ទី ៤៥៧

ដោះស្រាយសមីការ

ខ) $\frac{\left(1+2cosx+3cos^2x+4cos^3x+\cdots+ncos^{n-1}x\right)-(1+2+3+\cdots+n)cos^nx}{2\times1+3\times2cosx+4\times3cos^2x+\cdots+n(n-1)cos^{n-2}x+(n+1)ncos^{n-1}x}=\frac{1}{4}$ ។

លំហាត់ទី ៤៥៨

រកបណ្តាអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់

$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)cosy,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ និង $f(0)=2013$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2013$ ។

លំហាត់ទី ៤៦០

ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច C គេមានសមីការ $(E):\ z^3-(6+4i)z^2+(8+14i)z-12i=0$ ។

ក. ដោះស្រាយសមីការ (E) យក z_1 ជាឫសពិត និង z_2,z_3 ជាឫសពីរផ្សេងទៀតដែល $|z_2|<|z_3|$ ។

ខ. ក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o;\vec{i};\vec{j})$ គេឱ្យបីចំណុច $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ និង $M_3(z_3)$ ។ ស្រាយថា $M_1M_2M_3$ ជាត្រីកោណកែង ។ សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1-i\left(\sqrt{3}+2\right)$ និង $z_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

លំហាត់ទី ៤៦១

គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $A=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

ខ. $B=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\frac{n}{\sqrt{n^4+2}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$ ។

លំហាត់ទី ៤៦២

គេអោយចតុកោណប៉ោង $ABCD$ ដែលមាន O ជាចំណុចប្រសព្វរវាងអង្កត់ទ្រូងទាំងពីរ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $S_{OAB}\cdot S_{OCD}=S_{OBC}\cdot S_{OAD}$ ។

លំហាត់ទី ៤៦៣

ក. ស្រាយថា $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b ។

គណនា $A=\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$ រួចទាញថា $A^{a+b}\geq A^{2\sqrt{ab}}$ ។

ខ. ស្រាយថា $\dfrac{2}{e^2}\leq \displaystyle\int_0^2 e^{x-x^2}dx\leq 2\sqrt[4]{e}$ ។

លំហាត់ទី ៤៦៤

តាង $u_0,u_1,u_2,...,u_n$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលបំពេញទំនាក់ទំនង

$(3-u_{n+1})(6+u_n)=18$ និង $u_0=3$ ។ គណនា $\displaystyle\sum_{k=0}^{2011}\frac{1}{u_k}$ ។

លំហាត់ទី ៤៦៥

គេឱ្យ $sinx+siny+sinz=0$ ។ កំណត់តម្លៃអតិបរមា និង អប្បបរមានៃកន្សោម $M=sin^2x+sin^4y+sin^6z$ ។

លំហាត់ទី ៤៦៦

គណនា $I=\displaystyle\int_0^{\pi} e^{|cosx|}\left(2sin\left(\frac{1}{2}cosx\right)+3cosx\left(\frac{1}{2}cosx\right)sinx\right)dx$ ។

លំហាត់ទី ៤៦៧

ពីរចំនួន a និង b ត្រូវបានជ្រើសរើសដោយចៃដន្យចេញពីសំណុំនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ $N=\{1,2,3,...,30\}$ ។ ប្រូបាបដែល a^2-b^2 ចែកដាច់នឹង 3 ស្មើនឹង :

ក. $\dfrac{9}{87}$ ខ. $\dfrac{12}{87}$ គ. $\dfrac{15}{87}$ ឃ. $\dfrac{47}{87}$

លំហាត់ទី ៤៦៨

ចូរកំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k តូចជាងគេ ដោយដឹងថាមានចំនួនគត់ $x_1,x_2,x_3,...,x_k$ ដែល $x_1^3+x_2^3+x_3^3+\cdots+x_k^3=2002^{2002}$ ។

លំហាត់ទី ៤៦៩

គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដោយ $u_n=\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{k}{(k+1)!},\ k\in\mathbb{N}$ ។

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_1^n+u_2^n+\cdots+u_{2013}^n}$ ។

លំហាត់ទី ៤៧០

គេឱ្យ a,b និង c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=1$ ។

បង្ហាញថា $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{bc}\right)\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{ca}\right)\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{ab}\right)\geq 1728$ ។

លំហាត់ទី ៤៧១

គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = cosx + sinx$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។ រកតម្លៃ x ជាអនុគមន៍នៃ n ដើម្បីអោយ $y^{(n)} = 0$ និងអនុវត្តចំពោះ $n = 2013$ ។

លំហាត់ទី ៤៧២

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c គេបាន

$$\sqrt[3]{(x+a)(y+b)(z+c)} \geq \sqrt[3]{xyz} + \sqrt[3]{abc}$$ ។

ខ. ស្រាយថា $\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{2c+a+b}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c ។

លំហាត់ទី ៤៧៣

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + cos2x$ ។

លំហាត់ទី ៤៧៤

ក្នុងចតុមុខ $OABC$ យក E ជាចំណុចកណ្តាលនៃទ្រនុង AB ហើយ F និង P ចែកក្នុង OC និង OA តាមផលធៀប $\frac{FO}{FC} = \frac{2}{1}$ និង $\frac{PO}{PA} = \frac{1}{2}$ ។ យក Q នៅលើទ្រនុង BC ដែល $\overrightarrow{BQ} = t\overrightarrow{BC}$ ។ បើ PQ ប្រសព្វ EF ត្រង់ចំណុច M ។ បង្ហាញថា $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OE} + (1-k)\overrightarrow{OF}, (0 < k < 1)$ និង $\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OP} + (1-m)\overrightarrow{OQ}, (0 < m < 1)$ រួចកំណត់តម្លៃ t ។

លំហាត់ទី ៤៧៥

គូប $ABCDEFGH$ មួយមានរង្វាស់ជ្រុង a ។ I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ AB ហើយ J ជាចំណុចកណ្តាលនៃ EH ។ រករង្វាស់ខ្លីបំផុតពី I ទៅ J តាមមុខខាងនៃគូប ។

លំហាត់ទី ៤៧៦

ស្រាយបញ្ជាក់ថា លក្ខខណ្ឌចាំបាច់ និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីអោយត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ A គឺ $\frac{sinB + sinC}{cosB + cosC} = sinA$ ។

លំហាត់ទី ៤៧៧

គេគ្រោងថាឈ្នួលប្រចាំឆ្នាំនៃផ្ទះមួយកើនឡើង 6% រៀងរាល់ឆ្នាំ ។ គេសំគាល់ដោយ $f(n)$ ឈ្នួលប្រចាំឆ្នាំនៅឆ្នាំ $2002 + n$ $(n \in \mathbb{N})$ ។

១. សរសេរ $f(n+1)$ ជាអនុគមន៍នៃ n រួចសរសេរ $f(n)$ ជាអនុគមន៍នៃ $f(0)$ និង n ។

២. គេឧបមាថា $f(0) = 80000$៛ តើឈ្នួលប្រចាំឆ្នាំនៃផ្ទះមួយនៅឆ្នាំ 2008 ត្រូវជាប៉ុន្មាន ?

៣. តើចាប់ពីឆ្នាំណាទៅទើបឈ្នួលផ្ទះប្រចាំឆ្នាំ កើនលើសពីពីរដងនៃឈ្នួលផ្ទះប្រចាំឆ្នាំ

នៅឆ្នាំ 2002 ?

លំហាត់ទី ៤៧៨

ស៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ $x_1=1,x_2=1$ និង $x_{n+1}=x_n+x_{n-1}$ ចំពោះ $n\geq 2$ ។

១- បង្ហាញថា $x_{k+1}\cdot x_{k+2}-x_k\cdot x_{k+3}=(-1)^k$ ចំពោះ $\forall k\in\mathbb{N}$ ។

២- គេតាង $arccot$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ cot ។

បង្ហាញថា $arccotx_1-arccotx_3-arccotx_5-\cdots-arccotx_{2011}=arccotx_{2012}$ ។

លំហាត់ទី ៤៧៩

អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ $f(x)=cosx+cos\left(\sqrt{p}x\right)$ ដែល p ជាចំនួនបឋម ។ បង្ហាញថា f មិនមែនជាអនុគមន៍ខួបលើសំណុំចំនួនពិតទេ ។

លំហាត់ទី ៤៨០

គេឱ្យចំនួនពិត $u_1;u_2;\ldots$ បំពេញទំនាក់ទំនង

$u_{n+1}=\dfrac{u_n^2-u_{n-1}+2u_n}{u_{n-1}+1}$ និង $u_1=1;u_2=7$ ។ គណនាតម្លៃនៃ u_5 ។

លំហាត់ទី ៤៨១

រង្វង់ពីរកាត់គ្នាត្រង់ចំណុច A និង B ។ បន្ទាត់ចល័ត (MN) កាត់តាម A ហើយជួបរង្វង់ធំត្រង់ M និងរង្វង់តូចត្រង់ N ។ បង្ហាញថា $\dfrac{BM}{BN}$ មានតម្លៃថេរកាលណា (MN) វិលជុំវិញចំណុច A ។

លំហាត់ទី ៤៨២

គណនា $S_{2008}=(1\times3+2\times4+3\times5+\cdots+2008\times2010)-\left(1^2+2^2+\cdots+2008^2\right)$ ។

លំហាត់ទី ៤៨៣

ស៊ីតនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=1;u_2=1;u_3=-1$ និង $u_n=u_{n-1}\times u_{n-3}$ ចំពោះ $n\geq 4$ ។ រកម្លៃមួយតួដំបូង និងតួ 2008 នៃស៊ីត (u_n) ។

លំហាត់ទី ៤៨៤

គេមានសមភាព

$14^2=\left(6\times1^2+6\times1+2\right)^2$; $15^2=\left(6\times1^2+6\times1+3\right)^2$

$38^2=\left(6\times2^2+6\times2+2\right)^2$; $39^2=\left(6\times2^2+6\times2+3\right)^2$

$74^2=\left(6\times3^2+6\times3+2\right)^2$; $75^2=\left(6\times3^2+6\times3+3\right)^2$ ។

ដោយសង្កេតឧទាហរណ៍ខាងក្រោមនេះ ចូរទាញរករូបមន្តទូទៅ ហើយស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តទូទៅនោះផង :

$2^2+3^2+4^2+14^2=15^2$; $4^2+5^2+6^2+38^2=39^2$;

$6^2+7^2+8^2+74^2=75^2$ ។

លំហាត់ទី ៤៨៥

គេអោយអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^n x dx,\ n\in\mathbb{N}$ ។

ក- បង្ហាញថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ខ- គណនា $I_n+I_{n-2},\ (n\geq 2)$ រួចទាញថា $\frac{1}{2(n+1)}\leq I_n\leq\frac{1}{2(n-1)}$ ។

លំហាត់ទី ៤៨៦

គេអោយ $a_i, i=1,\ldots,6$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន ដែល $a_1+a_2+a_3-a_4-a_5-a_6=3$ និង $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2=9$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6\leq 1 \text{ ។}$$

លំហាត់ទី ៤៨៧

១. បើ $x+iy=\sqrt[3]{a+ib}$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=4\left(x^2-y^2\right)$ ។

២. បើ $x_p=cos\left(\frac{\pi}{2^p}\right)+isin\left(\frac{\pi}{2^p}\right)$ ចូរបង្ហាញថា $\lim_{n\to+\infty} x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_n=-1$ ។

លំហាត់ទី ៤៨៨

បង្ហាញថា $x^5-1=(x-1)\left[x^2+2xcos\frac{\pi}{5}+1\right]\left[x^2+2xcos\frac{3\pi}{5}+1\right]$ ។

លំហាត់ទី ៤៨៩

អនុគមន៍ $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ មានលេខមេគុណ a_i បំពេញលក្ខខណ្ឌ $0\leq a_i\leq a_0$ ដែល $i=1;2;3;\ldots;n$ ។ គេយក $(f(x))^2=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{n+1}x^{n+1}+\cdots+b_{2n}x^{2n}$ ។ បង្ហាញថា $b_{n+1}\leq\frac{1}{2}(f(1))^2$ ។

លំហាត់ទី ៤៩០

គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួន $x_1;x_2;x_3;\ldots$ ដែលកំណត់ដោយ $x_1=1;x_2=1$ និង $x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$ ចំពោះ $n\geq 3$ ។

ក. រកដប់តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនោះ ។

ខ. គេយក $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ 2 ។ បង្ហាញថា $A^n=\begin{bmatrix}x_{n+1}&x_n\\x_n&x_{n-1}\end{bmatrix}$ ចំពោះ $n=2;3;4;\ldots$ ។

លំហាត់ទី ៤៩១

ត្រីកោណ ABC មានមុំក្នុងទាំងបីជាមុំស្រួច ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ $\angle BAC$ ជួបជ្រុង

$[BC]$ ត្រង់ D ហើយជួបរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC ត្រង់ E ។ តាមចំណុច D គេគូសបន្ទាត់កែងនឹងជ្រុង $[AB]$ និង $[AC$ រៀងគ្នាត្រង់ចំណុច M និង N ។ បង្ហាញថា ចតុកោណ $AMEN$ និង ត្រីកោណ ABC មានផ្ទៃក្រឡាស្មើគ្នា ។

លំហាត់ទី ៤៩២

បង្ហាញថា $\sqrt{7}+\sqrt[3]{7}+\sqrt[4]{7}<7$ ហើយ $\sqrt{4}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[4]{4}>4$ ។

លំហាត់ទី ៤៩៣

គេឱ្យពហុធា $g(n)=n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ ចំពោះ $n=1;2;3;\ldots$ ។
បង្ហាញថា $g(n)$ មិនមែនជាការេនៃចំនួនគត់ វិជ្ជមានណាមួយឡើយ ។

លំហាត់ទី ៤៩៤

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ វិជ្ជមាន n គេមាន :
$f(n)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$ និង $g(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$ ។
បង្ហាញថា $f(n)=g(n)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ វិជ្ជមាន n ។

លំហាត់ទី ៤៩៥

គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមានពីរ : $X=111\cdots11$ ដែលមានលេខ 1 ចំនួន m ដង
និង $Y=100\cdots05$ ដែលមានលេខ 0 ចំនួន $m-1$ ដង ។
បង្ហាញថា $1+XY$ ជាការេនៃមួយចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយទាញរកឫសការេវិជ្ជមាននៃ $1+XY$ ។

លំហាត់ទី ៤៩៦

គេតាង $s(n)$ ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $0;1;1;2;2;3;3;4;4;\cdots;k;k;k+1;k+1;\cdots$ ។
ក. គណនា $s(n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។
ខ. បង្ហាញថា $s(a+b)-s(a-b)=ab$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b ដែល $a>b$ ។

លំហាត់ទី ៤៩៧

គេឱ្យត្រីកោណកែង ABC មួយ ដែលមាន $AC=1$, $\widehat{ACB}=90^0$ និង $\widehat{BAC}=x$ ។ D ជាចំណុចមួយនៃអ៊ីប៉ូតេនុស $[AB]$ ហើយដែល $AD=1$ ។ E ជាចំណុចមួយនៃ $[BC]$ ហើយដែល $\widehat{EDC}=x$ ។ បន្ទាត់ (EF) កែងនឹង $[BC]$ ត្រង់ E ហើយជួប $[AB]$ ត្រង់ F ។ គណនា $\lim\limits_{x\to 0}EF$ ។

លំហាត់ទី ៤៩៨

គេឱ្យចំនួនបឋមបីផ្សេងគ្នា p ; q និង r ។
បង្ហាញថា $\sqrt[3]{p}$; $\sqrt[3]{q}$ និង $\sqrt[3]{r}$ មិនមែនជា តួបី (មិនចាំបាច់បន្តបន្ទាប់គ្នា) នៃស្វ៊ីតនព្វន្តណាមួយឡើយ ។

លំហាត់ទី ៤៩៩

គេឱ្យ $N = \underbrace{44...4}_{2010}\underbrace{88...8}_{2009}9$ ។ គណនា $\sqrt{N}$ ។

លំហាត់ទី ៥០០

រកតម្លៃនៃ $M = \frac{1+2}{2} + \frac{1+2+3}{2^2} + \frac{1+2+3+4}{2^3} + \frac{1+2+3+4+5}{2^4} + \cdots$ ។

លំហាត់ទី ៥០១

តាង $\mathbb{N}$ ជាសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ជាអនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $f(x+1) = f(x) + x$ ចំពោះ $x \in \mathbb{N}$ និង $f(1) = 5$ ។ រកតម្លៃនៃ $f(2009)$ ។

លំហាត់ទី ៥០២

ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $x^5 + x = 2009$ មានឫសវិជ្ជមានតែមួយគត់ ហើយឫសនោះជាចំនួនអសនិទាន ។ គេឱ្យ $4,5^5 \approx 1845$; $4,6^5 \approx 2059$ ។

លំហាត់ទី ៥០៣

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a, b, c

នោះ $\frac{a}{10b+11c} + \frac{b}{10c+11a} + \frac{c}{10a+11b} \geq \frac{1}{7}$ ។

លំហាត់ទី ៥០៤

ចំណុច M, K, L ត្រូវគេដៅរៀងគ្នាលើជ្រុង AB , BC , CA នៃត្រីកោណ ABC ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា យ៉ាងតិចក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណមួយ ក្នុងចំណោមក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ MAL, KBM ឬ LCK មិនតិចជាង $\frac{1}{4}$ នៃក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។

លំហាត់ទី ៥០៥

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $\langle a_n \rangle_{n\geq 1}$ កំណត់ដោយ $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2}$ ចំពោះ $n \geq 1$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{a_j+1} < 1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ N ។

លំហាត់ទី ៥០៦

គេឱ្យចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប α, β, λ និង μ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $\alpha\mu = 1 + \beta\lambda$ ។ គេយក x_0 ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប a និង b ហើយយក y_0 ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ $\alpha a + \beta b$ និង $\lambda a + \mu b$ ។ ចូរប្រៀបធៀបចម្ងាយពីចំណុច $M_0(x_0, y_0)$ ទៅអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មួយ ។

លំហាត់ទី ៥០៧

គេឱ្យអនុគមន៍ពហុធា $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ដែលមានលេខមេគុណជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ។ គេដឹងថាមានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប x_0 ដែល $f(x_0) = p$ ជា

ចំនួនបឋម ។ បង្ហាញថា មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប β ច្រើនរាប់មិនអស់ដែល $f(\beta)$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

លំហាត់ទី ៥០៨

ស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ $x_1 = 1, x_2 = 1$ និង $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ ចំពោះ $n \geq 2$ ។

ស្វ៊ីត (y_n) កំណត់ដោយ $y_n = |x_{n+4}x_{n-2} - x_{n+2}x_n|$ ចំពោះ $n \geq 3$ ។

ស្វ៊ីត (z_n) កំណត់ដោយ $z_n - 9 = 4x_{n-2}x_nx_{n+2}x_{n+4}$ ចំពោះ $n \geq 3$ ។

១-បង្ហាញថា (y_n) ជាស្វ៊ីតថេរចំពោះ $n \geq 3$ ។ ទាញរកតម្លៃតួ $y_{3042011}$ ។

២- បង្ហាញថា តួនីមួយៗនៃស្វ៊ីត (z_n) ជាការេប្រាកដ ។

លំហាត់ទី ៥០៩

គេឱ្យ a និង X ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែល $a > 1, X > 0$ ។ k ជាចំនួនគត់ រ៉ឺឡាទីបមិនអវិជ្ជមាន និង c_j ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែល $0 \leq c_j < a$ ចំពោះ $j = 0, 1, ..., k$ ។

បង្ហាញថា X អាចសរសេរបានតែមួយបែបគត់ជារាង $X = \sum_{j=0}^{k} c_j a^j$ ។

លំហាត់ទី ៥១០

រង្វង់មួយមានផ្ចិត O និងកាំ R ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC មួយដែលមានបរិមាត្រ $2p$ ។ ត្រីកោណ ABC នេះចារឹកក្រៅរង្វង់មួយទៀតដែលមានផ្ចិត I និងកាំ r ។

បង្ហាញថា $4R + r = p\left(tan\dfrac{A}{2} + tan\dfrac{B}{2} + tan\dfrac{C}{2}\right)$ ។

លំហាត់ទី ៥១១

គេបានប្រើទ្រុងចំនួន 99 គ្រឿងសម្រាប់ដឹកជញ្ជូនកូនមាន់ចំនួន $7y38x5$ ក្បាល ទៅកាន់កសិដ្ឋាន មួយ ។ រកលេខ x និង y ក្នុងរបាប់គោលដប់ដោយដឹងថា ក្នុងទ្រុងនីមួយៗមានចំនួនកូនមាន់ស្មើៗគ្នា ។

លំហាត់ទី ៥១២

សមីការ $ax^2 + 2010x + c = x$ គ្មានឫសទេនៅក្នុងសំណុំចំនួនពិត ។

បង្ហាញថា សមីការ $a\left(ax^2 + 2010x + c\right) + 2010\left(ax^2 + 2010x + c\right) + c = x$ គ្មានឫសនៅក្នុងសំណុំចំនួនពិតដែរ ។

លំហាត់ទី ៥១៣

ពហុធា $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + 1$ មានលេខមេគុណ $a_1, a_2, ...,$ a_{n-1} ជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន ។គេដឹងថាពហុធា $P(x)$ មាន n ឫសសុទ្ធតែជាចំនួនពិត ។

បង្ហាញថា $P(2010) \geq \left(2\sqrt{2010}\right)^n$ ។

លំហាត់ទី ៥១៤

គេមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន r ដែលជាសំណល់ក្នុងវិធីចែកអឺគ្លីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b ។

១. បង្ហាញថា $2^r - 1$ ជាសំណល់ ក្នុងវិធីចែកអឺគ្លីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន $2^a - 1$ និង $2^b - 1$ ។

២. គេតាង μ ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ a និង b ។ បង្ហាញថា $2^\mu - 1$ ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ $2^a - 1$ និង $2^b - 1$ ។

លំហាត់ទី ៥១៥

រកសំណល់នៃវិធីចែក 2010^{2009} នឹង 13 ។

លំហាត់ទី ៥១៦

បង្ហាញថា $A = 1^{2008} + 2^{2008} + 3^{2008} + 4^{2008} - 5^{2008} - 6^{2008} - 7^{2008} - 8^{2008} - 9^{2008}$ ចែកដាច់នឹង 5 ។

លំហាត់ទី ៥១៧

រកតម្លៃធំបំផុតនៃ $A = sinx_1.sinx_2...sinx_{2010}$ ដោយដឹងថា $tanx_1.tanx_2...tanx_{2010} = 1$ ។

លំហាត់ទី ៥១៨

រកគ្រប់គូ (x, y) ជាឫសនៃសមីការ $2007^{sin^2 x} + 2007^{cos^2 x} = 2009 + cos2y$ ។

លំហាត់ទី ៥១៩

រកពហុធា $P(x)$ ដឺក្រេទី៤ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌពីរខាងក្រោម :

1) $P(0) = 0$

2) $P(x) - P(x-1) = x(x+1)(2x+1)$ គ្រប់ $x \in \Re$ ។

លំហាត់ទី ៥២០

តាង $a_1; a_2; a_3...$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ដែលបំពេញទំនាក់ទំនង $a_{n-1} + a_n = 2n$ ចំពោះគ្រប់ $n \ge 2$ ។ បើ $a_1 = 100$ គណនា a_{2009} ។

លំហាត់ទី ៥២១

កំណត់អនុគមន៍ $f : \Re \to \Re$ ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, y

$f[x - f(y)] = 1 - x - y$ ។

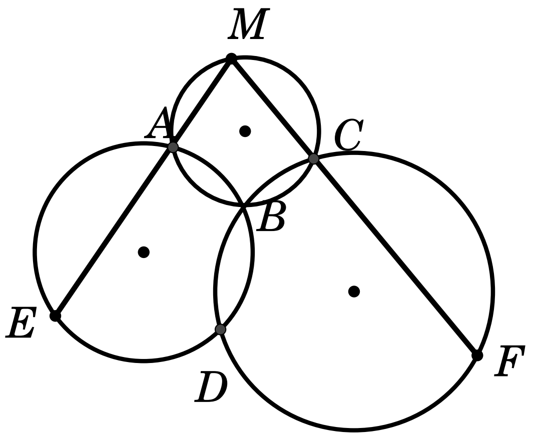
លំហាត់ទី ៥២២

គេឱ្យរង្វង់ផ្ចិត O កាំ r និងត្រីកោណ ABC ប្រែប្រួល ចារឹកក្រៅរង្វង់ ។ បន្ទាត់កាត់តាម O កាត់ AB, AC រៀងគ្នាត្រង់ M និង N ។ កំណត់ទីតាំងចំណុច A និង អង្កត់ MN ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ AMN មានតម្លៃ តូចបំផុត ។

លំហាត់ទី ៥២៣

គេឱ្យរង្វង់បីកាត់គ្នាពីរៗដូចរូបខាងក្រោម ។ សង់រូបឡើងវិញហើយបង្ហាញថាចំណុច E, D

និង F នៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។



លំហាត់ទី ៥២៤

បង្ហាញថា $1^{2009}+2^{2009}+3^{2009}+\cdots+(n-1)^{2009}+n^{2009}$ ចែកមិនដាច់នឹង $n+2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

លំហាត់ទី ៥២៥

គេមាន $f(x)=x^2-3x+3$ ។

ក. បង្ហាញថា បើ $f(x)=x$ នោះ $f(f(x))=x$ ។

ខ. រកឫសនៃសមីការ $f(x)=x$ ។ ទាញរកឫសនៃសមីការ $\left(x^2-3x+3\right)^2-3\left(x^2-3x+3\right)+3=x$ ។

លំហាត់ទី ៥២៦

គេតាង $n!=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times 2\times 1$ ។ បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេបាន :

$$1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+\cdots+\frac{(2009)(2010)\cdots(2009+n-1)}{n!}=\frac{(2010)(2011)\cdots(2009+n)}{n!}$$ ។

លំហាត់ទី ៥២៧

អនុគមន៍ g កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ $g(x+1)+g(x-1)=\sqrt{2}g(x)$ ។

ក. គេតាង $g(x)=p$ និង $g(x-1)=q$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

គណនា $g(x+1), g(x+2), g(x+3)$ និង $g(x+4)$ ជាអនុគមន៍នៃ p និង q ។

ខ. បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍ខួប ។

លំហាត់ទី ៥២៨

គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) ដែលកំណត់ដោយ $u_1=\dfrac{1}{2}$ និង $u_n=\left(\dfrac{2n-3}{2n}\right)u_{n-1}$ ចំពោះ $n=2;3;\ldots$ ។

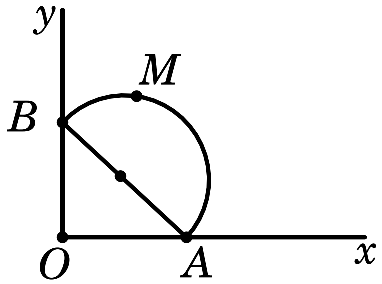
បង្ហាញថា $u_1+u_2+\cdots+u_n<1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

លំហាត់ទី ៥២៩

ត្រីកោណកែង ABC មួយមានអ៊ីប៉ូតេនុស $BC = a$ និងកម្ពស់ $AH = h$ ។ គេចែក $[BC]$ ជា n ចំណែកស្មើគ្នា ដែល n ជាចំនួនគត់សេស ។ គេយក $[PQ]$ ជាចំណែកដែលនៅកណ្ដាលគេ ហើយដែលរង្វាស់មុំ $P\widehat{A}Q = x$ ។

បង្ហាញថា $tanx = \dfrac{4nh}{a\left(n^2-1\right)}$ ។

លំហាត់ទី ៥៣០



គេឱ្យចំណុច M មួយនៃកន្លះរង្វង់ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$ ។ រកសំណុំចំណុច M កាលណា A ចល័តលើជ្រុង $[Ox)$ និង B ចល័តលើជ្រុង $[Oy)$ នៃមុំកែង xOy មួយដោយរក្សាប្រវែង AB ថេរ ។

លំហាត់ទី ៥៣១

បង្ហាញថា $3^{2n} + 2^{6n-5}$ ចែកដាច់នឹង 11 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

លំហាត់ទី ៥៣២

គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b ដែល $2a^2 + a = 3b^2 + b$ ។

បង្ហាញថា $a-b$; $2a+2b+1$; និង $3a+3b+1$ សុទ្ធតែជាការេប្រាកដ ។

លំហាត់ទី ៥៣៣

សំណុំ E_n មួយមាន n ធាតុដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ តាង $P(E_n)$ ជាសំណុំនៃសំណុំរងរបស់ E_n ហើយ $Card\left(P(E_n)\right)$ ជាចំនួនធាតុនៃ $P(E_n)$ ។ តាមវិចារដោយកំណើន បង្ហាញថា $Card\left(P(E_n)\right) = 2^n$ ។

លំហាត់ទី ៥៣៤

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC = a$; $AC = b$ ដែល

$a + b = (atanA + btanB)tan\dfrac{C}{2}$ ។ បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

លំហាត់ទី ៥៣៥

ស្វ៊ីត (x_n) មួយកំណត់ដោយ $x_1 = 1$ និង $x_{n+1} = 1 + x_1x_2\cdots x_n$ ចំពោះ $n = 1,2,\ldots$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

លំហាត់ទី ៥៣៦

១. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+2}$ (គេមិនអោយសង់ក្រាបតាង f ទេ) ។

២. g ជាអនុគមន៍បង្រួមនៃអនុគមន៍ f នៅលើ $[0;+\infty[$ ។ ពីអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f

បញ្ជាក់អថេរភាពនៃអនុគមន៍ g នៅលើ $[0;+\infty[$ ទាញរកអនុគមន៍ច្រាស g^{-1} នៃអនុគមន៍ g ។ សង់ខ្សែកោង (C') និង (C'') តាង g និង g^{-1} ។

លំហាត់ទី ៥៣៧

អនុគមន៍ $f(x;y)$ មួយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទាំងបីដូចខាងក្រោមចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន x និង y :

(i) $f(0;y)=1+y$

(ii) $f(x+1;0)=f(x;1)$

(iii) $f(x+1;y+1)=f(x;f(x+1;y))$ ។

ក. គណនា $f(1;n)$, $f(2;n)$ និង $f(3;n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. គណនា $f(4;2009)$ ។

លំហាត់ទី ៥៣៨

បើ $a+b+c=1$; $a^2+b^2+c^2=9$ និង $a^3+b^3+c^3=1$ ចូររក $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ។

លំហាត់ទី ៥៣៩

គេឱ្យចំណុច O ជាគល់តម្រុយនៃប្រព័ន្ធកូអរដោនេមានបីវិមាត្រ ហើយតាង A,B និង C ជាចំណុចនៅលើអ័ក្សវិជ្ជមាន x,y និង z រៀងគ្នា ។ បើ $OA=\sqrt[4]{75}$ និង $\angle BAC=30^0$ ចូរគណនា $100S_{\triangle ABC}$ ($S_{\triangle ABC}$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC) ។

លំហាត់ទី ៥៤០

ស្វ៊ីត $a_1,a_2,a_3,\ldots$ កំណត់ដោយ $a_1=1$ និង ចំពោះ $n\geq 2$,

$$a_n=(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})\times n \text{ ។}$$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា a_{2020} ចែកដាច់នឹង 2020^2 ។

លំហាត់ទី ៥៤១

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $cos\frac{\pi}{7}+cos\frac{3\pi}{7}+cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី ៥៤២

ដាក់ជាផលគុណកត្តា $a^{10}+a^5+1$ ។

លំហាត់ទី ៥៤៣

ដោះស្រាយសមីការ $x+3\left(2-3x^2\right)^2=2$ ។

លំហាត់ទី ៥៤៤

គេឱ្យ a,b,c,d ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} a^2+b^2=a+b & (1) \\ c^2+d^2=-(c+d) & (2) \end{cases}$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(a-c)^2+(b-d)^2\leq 8$ ។

លំហាត់ទី ៥៤៥

រកតម្លៃ $p\in\mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $(x-p)(x-2011)+1=(x+m)(x+n)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R};\ m,n\in\mathbb{Z}$ ។

លំហាត់ទី ៥៤៦

ផលគុណនៃ 7 នឹង ចំនួនដែលមាន 6 ខ្ទង់ $\overline{abcdef}$ ស្មើនឹងផលគុណនៃ 6 នឹង ចំនួនដែលមានលេខ 6 ខ្ទង់ $\overline{defabc}$ ។ រកចំនួនដែលមាន 6 ខ្ទង់ទាំងពីរ ។

លំហាត់ទី ៥៤៧

គេឱ្យ $x_0=2010$ និង $x_{n+1}=\dfrac{1+x_n}{1-x_n}$ ចំពោះ $n\geq 0$ ។ គណនា x_{2012} ។

លំហាត់ទី ៥៤៨

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់មាន 2013 ខ្ទង់ ស្មើនឹង
$494\underbrace{99\ldots9}_{2010}55\underbrace{00\ldots0}_{2011}$ ។

លំហាត់ទី ៥៤៩

គេឱ្យស្វ៊ីត Fibonacci ដែលកំណត់ដោយ $a_1=a_2=1$ និង $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ ។
ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\dfrac{3}{2^4}+\dfrac{5}{2^5}+\cdots+\dfrac{a_n}{2^n}<2$ ។

លំហាត់ទី ៥៥០

គេឱ្យអនុគមន៍ f ដោយ $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងខាងក្រោម

$$\begin{cases} f(1,1)=2 \\ f(m+1,n)=f(m,n)+m \\ f(m,n+1)=f(m,n)-n \end{cases}$$

គ្រប់ $m,n\in\mathbb{N}$ ។ រកគ្រប់គូចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $f(a,b)=2013$ ។

លំហាត់ទី ៥៥១

គេឱ្យទ្វាទេសកោណនិយ័ត $ABCDEFGHIJKL$ និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅទ្វាទេសកោណនិយ័ត (ពហុកោណនិយ័តមាន 12 ជ្រុងប៉ុនគ្នា) ។

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{AB}{AF}+\dfrac{AF}{AB}=4$

ខ) គណនាជាអនុគមន៍នៃ R ផលបូក $S=AB^2+AC^2+AD^2+AE^2+AF^2$ ។

លំហាត់ទី ៥៥២

គេឱ្យចំនួន $N=1+10^3+\dfrac{10^3\left(10^3-1\right)}{1\cdot 2}+\dfrac{10^3\left(10^3-1\right)\left(10^3-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{10^3\left(10^3-1\right)}{1\cdot 2}+10^3+1$ ។ តើ N មានប៉ុន្មានខ្ទង់ បើគេដឹងថា $lg2=0.3010$?

លំហាត់ទី ៥៥៣

គេឱ្យពហុធា $P(x)=\left(1+x+x^2+\cdots+x^{2010}\right)^2-x^{2010}$ ។
ចូរដាក់ $P(x)$ ជាផលគុណនៃពីរពហុធា ។

លំហាត់ទី ៥៥៤

តាង $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ដែល $f(0)=1$ និងចំពោះ $x,y\in\mathbb{R}$
$f(xy+1)=f(x).f(y)-f(y)-x+2$ ។ រក $f(2010)$ ។

លំហាត់ទី ៥៥៥

ចូរពិនិត្យមើលស្វ៊ីតខាងក្រោម

$u_1=1$

$u_2=3+5$

$u_3=7+9+11$

$u_4=13+15+17+19$

...

ស្រាយបញ្ជាក់ថា គ្រប់តួនៃស្វ៊ីត $\{u_n\}$ ជាគូបនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។

លំហាត់ទី ៥៥៦

គេអោយអនុគមន៍ $f(x)=\left(x^3+12x-31\right)^{2020}$ ។
ចូរគណនា $f(a)$ បើ $a=\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}+\sqrt[3]{8-16\sqrt{5}}$ ។

លំហាត់ទី ៥៥៧

ស្រាយបញ្ជាក់ថា វិសមភាព $\dfrac{cosA}{a^3}+\dfrac{cosB}{b^3}+\dfrac{cosC}{c^3}\ge\dfrac{3}{2abc}$ ពិតចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC ដែលមាន រង្វាស់ជ្រុង a,b,c និងមុំឈម $\angle A,\angle B,\angle C$ រៀងគ្នា ។

លំហាត់ទី ៥៥៨

គេអោយ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។
ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{a^2+1}{b+c}+\dfrac{b^2+1}{c+a}+\dfrac{c^2+1}{a+b}\ge 3$ ។

លំហាត់ទី ៥៥៩

គេអោយ $f(x)=-x^2-2ax-b\ (a\ne 0)$ ។
គេដឹងថា $f(1)=3$ និង តម្លៃអតិបរមានៃ f គឺ 4 ។ កំណត់តម្លៃ a និង b ។

(អាហារូបករណ៍ប្រទេសជប៉ុន)

លំហាត់ទី ៥៦០

តាង $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ ជាអនុគមន៍ដែល $f(0)=1$ និងចំពោះ $x,y\in\mathrm{R}$
$f(xy+1)=f(x).f(y)-f(y)-x+2$ ។ រក $f(2010)$ ។

លំហាត់ទី ៥៦១

១. ត្រីកោណ ABC មានមេដ្យាន AM ។ បង្ហាញសមភាព $AB^2+AC^2=2AM^2+\frac{BC^2}{2}$ ។

២. ត្រីកោណ ABC មាន G ជាទីប្រជុំទម្ងន់ ។ តាង $a=BC, b=CA, c=AB$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$ ។

លំហាត់ទី ៥៦១

ត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ A ។ ការេ $MNPQ$ ចារឹកក្នុងត្រីកោណកែង ABC ដែល M នៅលើ AB, N និង P នៅលើ BC និង Q នៅលើ CA ។ ដូចគ្នាការេដែលមានជ្រុង a_1,a_2,a_3 ចារឹកក្នុងត្រីកោណកែង QPC ,MBN និង AMQ រៀងគ្នា ដោយមានកំពូល 2 នៃការេនៅលើអ៊ីប៉ូតេនុស និង កំពូលមួយនៅលើជ្រុងមុំកែងនីមួយៗនៃត្រីកោណកែង ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}=\frac{1}{a_3^2}$ ។

លំហាត់ទី ៥៦២

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំនួនគត់តូចបំផុតដែលធំជាង $(\sqrt{3}+1)^{4020}$ ចែកដាច់នឹង 2^{2011} ។

លំហាត់ទី ៥៦៣

១. សរសេរ x^4+4y^4 ជាផលគុណនៃពីរពហុធាដឺក្រេទីពីរនៃ x និង y :

២. បង្ហាញថា n^4+4^n មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $n>1$ ។

លំហាត់ទី ៥៦៤

រកអនុគមន៍ g ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $g(x)+g\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដែល $x\neq 0, x\neq 1$ ។

លំហាត់ទី ៥៦៥

រកគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដើម្បីឱ្យ $n^2-19n+99$ ជាការេប្រាកដ ។

លំហាត់ទី ៥៦៦

គេឱ្យចំនួនពិត $x,y\in(-2,2)$ និង $xy=-1$ ។
ស្រាយបំភ្លឺថា $\frac{4}{4-x^2}+\frac{9}{9-y^2}\geq\frac{12}{5}$ ។

លំហាត់ទី ៥៦៧

ឧបមា ពហុធា $p(x)=x^5+x^2+1$ មានឫសប្រាំ r_1,r_2,r_3,r_4,r_5 និង $q(x)=x^2-2$ ។ ចូរគណនា $q(r_1)q(r_2)q(r_3)q(r_4)q(r_5)$ ។

លំហាត់ទី ៥៦៨

ក. រកចំនួនកុំផ្លិច z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $z^7+1=0$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $cos\frac{\pi}{7}-cos\frac{2\pi}{7}+cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី ៥៦៩

គេឱ្យ O ជាចំណុចប្រសព្វរវាងអង្កត់ទ្រូង AC និង BD នៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ដែលមាន $\angle CAB=\angle DBC=2\angle DBA$ ។ គណនាផលធៀបនៃមុំ $\angle ACB$ និង $\angle AOB$ ។

លំហាត់ទី ៥៧០

រកចំនួនគត់គូដែលមានលេខបួនខ្ទង់ខុសៗគ្នានៅចន្លោះ 2000 និង 5000 ។

លំហាត់ទី ៥៧១

គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b,a',b',d,d' ដែល $GCD(a,b)=d$ និង $GCD(a',b')=d'$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $GCD(aa',bb',ab',a'b)=dd'$ ។

លំហាត់ទី ៥៧២

គេឱ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n=\frac{n(n-1)}{2}cos\frac{n(n-1\pi)}{2}$ ។
គណនា $a_1+a_2+\cdots+a_{2020}$ ។

លំហាត់ទី ៥៧៣

គេឱ្យ $\triangle ABC$ កែងត្រង់ C និងមានប្រវែងជ្រុងទាំងបីជាចំនួនវិជ្ជមាន ។ កម្ពស់គូសចេញពីកំពូល C កាត់អ៊ីប៉ូតេនុស AB ត្រង់ចំណុច D ដែល $BD=24389$ ។ គណនា $sin\angle BAC$ ។

លំហាត់ទី ៥៧៤

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{N}$ ដោយ $f(1)=11, f(2)=22, f(3)=33, f(4)=44$ និង $f(n)=f(n-1)-f(n-2)+f(n-3)-f(n-4)$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 5$ ។ គណនា $f(2020)$ ។

លំហាត់ទី ៥៧៥

គេឱ្យចតុកោណព្នាយ $ABCD$ មានបាត $AD\parallel BC$ ។ E ជាចំណុចចល័តមួយនៅលើអង្កត់ AB ។ O_1 និង O_2 ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ $\triangle AED$ និង $\triangle BEC$ រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា O_1O_2 មានប្រវែងថេរ ។

លំហាត់ទី ៥៧៦

ក្នុងត្រីកោណកែង XYZ មួយមាន $\widehat{X}=90^0, YZ=x, ZX=y$ និង $XY=z$ ។ បង្ហាញថា $x^n>y^n+z^n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប n ដែល $n\geq 3$ ។

លំហាត់ទី ៥៧៧

គេបានបេះផ្លែស្វាយមករៀបគរជា 11 គំនរស្មើៗគ្នា ហើយនៅសល់ផ្លែស្វាយចំនួន 6 ផ្លែទៀត ។ តែបើគេយកផ្លែស្វាយទាំងនោះមករៀបជា 17 គំនរស្មើៗគ្នាវិញ នោះពុំមានផ្លែស្វាយនៅ

សល់ទេ ។ រកចំនួនផ្ទៃស្វាយតិចបំផុតដែលគេបានបេះ ។

លំហាត់ទី ៥៧៨

ចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មួយមានជ្រុង $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d$ វង្វាស់មុំ $A\hat{B}C=x$ និង $A\hat{D}C=y$ ។ រកលក្ខខណ្ឌដើម្បីឱ្យចតុកោណ $ABCD$ មានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា ។

លំហាត់ទី ៥៧៩

ស្វ៊ីតនៃចំនួន (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=1;\ u_2=1$ និង $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ ចំពោះ $n=3;4;...$។

តាង $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ និង $b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ។

១. បង្ហាញថា $u_n>a^{n-2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\ge 3$ ។

២. បង្ហាញថា $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(a^n-b^n)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន n ។

លំហាត់ទី ៥៨០

គណនាផលបូក $S=\dfrac{1}{2^1}-\dfrac{2^1}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}-\dfrac{4}{2^4}+\cdots-\dfrac{2010}{2^{2010}}+\dfrac{2011}{2^{2011}}$ ។

លំហាត់ទី ៥៨១

គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន $I_n=8^n+9^{3n+1}+25^{3n+1}$ ចំពោះ $n=0,1,2,...,2011$ ។

រក $gcd(I_0,I_1,I_2,...,I_{2011})$ ។

លំហាត់ទី ៥៨២

បង្ហាញថា ចំនួនគត់ $N=5^{5^{2011}}+5^{5^{2010}}+1$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

លំហាត់ទី ៥៨៣

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប :

$x^2+x+503=y^2$ ។

លំហាត់ទី ៥៨៤

រកគ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbf{R}-\left\{\dfrac{2}{3}\right\}\to\mathbf{R}$ ដែលបំពេញសមីការអនុគមន៍ខាងក្រោម :

$\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{2x}{3x-2}\right)+f(x)=503x$ ។

លំហាត់ទី ៥៨៥

គេឱ្យពហុធា $P(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{2011}\frac{1}{(2011+k+1)}x^4$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $P(x^2)=P^2(x)$ គ្មានឫសជាចំនួនពិត ។

លំហាត់ទី ៥៨៦

គេឱ្យចតុកោណ $ABCD$ ចារឹកក្នុងរង្វង់ ហើយមានផ្ទៃក្រឡា S ។
គេឱ្យ $AB=a, BC=b, CD=c, AD=d$ និង p ជាកន្លះបរិមាត្រ ។
ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ ។
ខ) បើ $S=\left(\frac{p}{2}\right)^2$ បង្ហាញថា $ABCD$ ជាការេ ។

លំហាត់ទី ៥៨៧

ក) រកតម្លៃនៃ $A=2011^3-2010.2011^3-2010^2.2011+2010^3$ ។
ខ) រកតម្លៃនៃ $B=403^5-402^2(403^3+2.403^2+3.403+4)$ ។

លំហាត់ទី ៥៨៨

គណនាផលបូកតួមិនកំណត់នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម :

$S=\frac{1^3}{3^1}+\frac{2^3}{3^2}+\frac{3^3}{3^3}+\frac{4^3}{3^4}+\frac{5^3}{3^5}+\cdots$ ។

លំហាត់ទី ៥៨៩

គេឱ្យ $f(n)=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{n^2-2n+1}}$ គ្រប់ $n\in\mathbf{N}$ ។
គណនាផលបូក $S=f(1)+f(3)+f(5)+\cdots+f(10^6-3)+f(10^6-1)$ ។

លំហាត់ទី ៥៩០

បន្ទាត់៣ផ្សេងគ្នា ត្រូវបានគូសនៅក្នុងប្លង់ ។ ឧបមាថាមាន n រង្វង់យ៉ាងពិតប្រាកដនៅក្នុងប្លង់ដែលប៉ះនឹងបន្ទាត់ទាំង៣ ។ រកតម្លៃដែលអាចមាននៃ n ដោយគូសរូបបញ្ជាក់ ។

លំហាត់ទី ៥៩១

តាង $u_0,u_1,u_2,...,u_n$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត ដែលបំពេញទំនាក់ទំនងខាងក្រោម :

$(3-u_{n+1})(6+u_n)=18$ និង $u_0=3$ ។ គណនា $\sum_{k=0}^{2011}\frac{1}{u_k}$ ។

លំហាត់ទី ៥៩២

ស្វ៊ែរ S_1 មួយមានកាំ r ចារឹកក្នុងកោនមួយមានមុំនៅត្រង់កំពូលនៃមុខកាត់តាមអ័ក្សស្មើ $\frac{\pi}{3}$ ។
ក) រកផលធៀប $\frac{V_1}{V}$ រវាងមាឌ V_1 និង មាឌ V នៃស្វ៊ែរ S_1 និង កោន ។
ខ) ហៅ S_2 ជាស្វ៊ែរនៅក្នុងកោន ប៉ះនឹងជនេត្រនៃកោន ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែរ S_1

S_3 ជាស្វ៊ែរនៅក្នុងកោន ប៉ះនឹងជនេត្រនៃកោន ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែរ S_2

....

S_{k+1} ជាស្វ៊ែរនៅក្នុងកោន ប៉ះនឹងជនេត្រនៃកោន ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែរ S_k

ស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ $n \in \mathbf{N}$ ផលបូកមាឌនៃស្វ៊ែរ $S_1, S_2, ..., S_n$ តូចជាង $\frac{1}{2}V$ ។

លំហាត់ទី ៥៩៣

គេឱ្យ $c > 0$ និង $a, b \geq c$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$ ។

លំហាត់ទី ៥៩៤

គណនាអាំងតេក្រាល $I(k) = \int_0^{\infty} \frac{sinkxcos^k x}{x} dx$ ដែល k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

លំហាត់ទី ៥៩៥

គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sinx)dx$ ។

លំហាត់ទី ៥៩៦

គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int \frac{dx}{cosx}$ ។

លំហាត់ទី ៥៩៥

i ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $i = \sqrt{-1}$ ។ បង្ហាញថា i^i ជាចំនួនពិត ។

លំហាត់ទី ៥៩៦

គេអោយ j និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និងយក $S_j = 1^j + 2^j + 3^j + \cdots + n^j$ ។ បង្ហាញថា

$\binom{k+1}{1} S_1 + \binom{k+2}{2} S_2 + \cdots + \binom{k+1}{k} S_k = (n+1)^{k+1} - (n+1)$ ។

លំហាត់ទី ៥៩៧

ប្រើអនុមាណរួមគណិតវិទ្យា បង្ហាញថា $133|(11)^{n+2} + 12^{2n+1}$ ។

លំហាត់ទី ៥៩៨

គេអោយ $0 \leq x, y, z \leq 1$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(2^x + 2^y + 2^z)(2^{-x} + 2^{-y} + 2^{-z}) \leq \frac{81}{8} \text{ ។}$$

លំហាត់ទី ៥៩៩

បើ $\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n-1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1} x + a_0 = 0$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយចន្លោះ $(0,1)$ ។

លំហាត់ទី ៦០០

បើ $f(x) = 0$ ជាសមីការពហុធាដែលមាន n ឫសចំនួនពិត ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $f'(x) = 0$ មានយ៉ាងហោច $(n-1)$ ឫសចំនួនពិត ។

លំហាត់ទី ៦០១

p ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $p^{n+1} + (p+1)^{2n-1}$ ចែកដាច់នឹង $p^2 + p + 1$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

លំហាត់ទី ៦០២

បើ p ជាចំនួនបឋម ស្រាយតាមអនុមាណរួមគណិតវិទ្យាថា $p|(n^p - n)$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

លំហាត់ទី ៦០៣

ដោះស្រាយសមីការ $8\sqrt{sinx} + 27\sqrt{cosx} = 97^{\frac{3}{4}},\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ។

លំហាត់ទី ៦០៤

ដោះស្រាយសមីការ $sinx + cosx = \sqrt{2 + sin^{2018}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$ $(*)$ ។

លំហាត់ទី ៦០៦

គេអោយ p និង q ជាចំនួនពិតដែល $p \neq 0$ ហើយ a, b, c ជាឫសនៃពហុធា $px^3 - px^2 + qx + q$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = -1$ ។

លំហាត់ទី ៦០៧

ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្តាក់

ស្រាយថាបើ $\phi(x) = \psi[f(x)]$ នោះ $\phi'(x) = \psi'[f(x)].f'(x)$ ។

លំហាត់ទី ៦០៨

ទ្រឹស្តីបទ Lebnitz

បើ $y = uv$ ដែល u, v ជាអនុគមន៍នៃ x ស្រាយបញ្ជាក់ថាដេរីវេទី n កំណត់ដោយ $y_n = (uv)_n = u_n v + {}^nC_1 u_{n-1} v_1 + {}^nC_2 u_{n-2} v_2 + \cdots + {}^nC_n v_n$ ។

លំហាត់ទី ៦០៩

ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព :

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2} \text{ ចំពោះ } n \geq 2 \text{ ។}$$

លំហាត់ទី ៦១០

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ច្រាស

ទ្រឹស្តីបទ :បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់មួយទល់មួយ កំណត់នៅលើចន្លោះ I និង f មានដេរីវេត្រង់ x_0 ដែល $f(x_0) \neq 0$ នោះអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ $f(x_0)$ ដែលដេរីវេរបស់វាត្រង់ $f(x_0)$ នោះគឺ $\frac{1}{f'(x_0)}$ ។

លំហាត់ទី ៦១១

ក) កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដោយដឹងថា $3^x + 3^y = 30$ និង $log_3 x - log_3 y = 1$ ។

ខ) ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនពិតនូវសមីការ $\sqrt{1-x^2}=3\cdot x-4\cdot x^3$ ។

លំហាត់ទី ៦១២

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ $a_1,a_2,b_1,b_2\in(1,\infty)$ វិសមភាពខាងក្រោមពិត :

$$\frac{1}{\sqrt{1+log_{a_1}\sqrt{b_1}}}+\frac{1}{\sqrt{1+log_{a_2}\sqrt{b_2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+log_{b_1}a_1^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+log_{b_2}a_2^2}}\le 2\cdot\sqrt{2}$$ ។

លំហាត់ទី ៦១៣

ដោះស្រាយវិសមីការ

$$log_{\sqrt{5}}\left(3^{x^2-x-1}+2\right)+log_5\left(3^{x^2-x-1}+2\right)+log_{25}\left(3^{x^2-x-1}+2\right)+log_{625}\left(3^{x^2-x-1}+2\right)+\ldots+log_{5^{2^k}}\left(3^{x^2-x-1}+2\right)+\ldots\le 4$$ ។

លំហាត់ទី ៦១៤

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $ln(1+x)\ge x-\frac{x^2}{2},\ (\forall)x\in[0,\infty)$ ។

ខ) គេអោយ $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}ln\left(1+\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)dx$ ។

លំហាត់ទី ៦១៥

គណនា $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt[3]{x+6}-\sqrt[4]{x-1}}{3^x+4^x-5^x}$ ។

លំហាត់ទី ៦១៦

ក) ចំពោះ $a>0$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2^a+3^a+\ldots+n^a}{n^{a+1}}=\frac{1}{a+1}$ ។

ខ) គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}+\ldots+\sqrt[4]{n}}{n\cdot\sqrt[4]{n^3}\left(\sqrt[4]{(n+1)^2+1}-\sqrt[4]{n^2+1}\right)}$ ។

លំហាត់ទី ៦១៧

រកគ្រប់ $b\in\mathbb{N}$ ដើម្បីអោយ $\sqrt[3]{2+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{b}}$ ជាចំនួនគត់ ។

លំហាត់ទី ៦១៨

គណនា $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{sin(2020x)}{(1+2^x)sinx}dx$ ។

លំហាត់ទី ៦១៩

គេអោយស្វ៊ីតចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ កំណត់ដោយ $a_0=1$ និង

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n & \text{បើ } a_n \text{ គូ}\\ \frac{1}{2}(a_n+2017) & \text{បើ } a_n \text{ សេស}\end{cases} \text{ ។}$$

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតខួប ។

ខ) ចូររក a_{2017} ។

លំហាត់ទី ៦២០

គេអោយ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតកំណត់ដោយ $a_0=0, a_1=1, a_2=2$ និង

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}+1$$

ចំពោះ $n\geq 3$ ។ រក a_{2023} ។

លំហាត់ទី ៦២១

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

លំហាត់ទី ៦២២

នៅដើមឆ្នាំ ២០១១ នេះ ចំនួនភ្ញៀវទេសចរដែលបានមកទស្សនាប្រាសាទអង្គរវត្តស្មើនឹង $pq\left(p^2-q^2\right)$ ដែល p និង q ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ហើយ $p>q$ ។ គេស្រង់ឈ្មោះទេសចរទាំងនោះដាក់ក្នុងបញ្ជីមួយដែលមានចុះលេខរៀងត្រឹមត្រូវ ។ បង្ហាញថា លេខរៀងរបស់ទេសចរចុងក្រោយគេបង្អស់ជាពហុគុណនៃ 3 ។

លំហាត់ទី ៦២៣

ចំណុច $M_i(x,y,z)$ មានកូអរដោនេជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3$ ។ បង្ហាញថា មានចំណុច $M_i(x,y,z)$ ច្រើនរាប់មិនអស់នៅក្នុងលំហ ។

លំហាត់ទី ៦២៤

ស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=1, u_2=1$ និង $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ ចំពោះ $n\geq 2$ ។ បង្ហាញថា $u_{2011}u_{2012}-u_{2010}u_{2013}=1$ ហើយ $u_{1042012}u_{1042013}-u_{1042011}u_{1042014}=-1$ ។

លំហាត់ទី ៦២៥

ស្វ៊ីត (I_k) កំណត់ដោយ $I_k=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^k x dx$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k ។

អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(k)=(k+1)I_kI_{k+1}$ ។

ក. កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង I_k និង I_{k+2} ។

ខ. ប្រៀបធៀប $f(k)$ និង $f(k+1)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k ។

គណនាតម្លៃ $f(2011)$ ។

លំហាត់ទី ៦២៦

$P_n(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $P_n(x) = -2xP_{n-1}(x) + P'_{n-1}(x)$ ។
១- បង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = e^{-x^2}$ កំណត់ដោយ $y^{(n)} = e^{-x^2}P_n(x)$ ។
២- ទាញបញ្ជាក់ថា $P_{n+1}(x) + 2xP_n(x) + 2nP_{n-1}(x) = 0$ ហើយ $P''_n(x) - 2xP'_n(x) + 2nP_n(x) = 0$ ។

លំហាត់ទី ៦២៧

.គេឱ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b។ កំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន x, y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $\dfrac{27xy}{(1+2ax)(1+2by)} = \dfrac{1}{ab} + \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$។

លំហាត់ទី ៦២៨

រកគ្រប់ចំនួនពិត x ផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមីការ $2|x - |x + |x-1||| > |x + |x - |x+1|||$។

លំហាត់ទី ៦២៩

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនធម្មជាតិ k : $(k!)^{k^2+k+1}$ ជាតួចែកនៃចំនួន $(k^3)!$។

លំហាត់ទី ៦៣០

ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើត្រីកោណ ABC មានជ្រុង និងមុំឈម A, B ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $(a^2+b^2)sin(A-B) = (a^2-b^2)sin(A+B)$ នោះវាជាត្រីកោណសមបាត ឬ ត្រីកោណកែង។

លំហាត់ទី ៦៣១

គេមានត្រីកោណ ABC។ គេជ្រើសរើសចំណុចនៅលើជ្រុង BC, CA, AB តាងដោយ D, E, F រៀងគ្នាដែល $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{CE}{EA} = \dfrac{AF}{FB} = k$ (k ជាចំនួនវិជ្ជមាន)។ តាង S ជាផ្ទៃក្រឡា $\triangle ABC$។ គណនាផ្ទៃក្រឡា $\triangle DEF$។

លំហាត់ទី ៦៣២

គេឱ្យ $a > 0, b > 0, C > 0$។
ស្រាយបញ្ជាក់ថា $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc$។

លំហាត់ទី ៦៣៣

គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន x, y, z ដែល $\dfrac{x+1}{y} + \dfrac{y+1}{z} + \dfrac{z+1}{x}$ ជាចំនួនគត់។ តាង d ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួន x, y, z។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $d \leq \sqrt[3]{xy+yz+zx}$។

លំហាត់ទី ៦៣៤

គេឱ្យស្វ៊ីតមិនកំណត់ $\{a_n\}$។ ស្រាយថាបើ $a_n + a_{n+2} > 2a_{n+1}$ ចំពោះ $n = 1, 2, ..$ នោះ $\dfrac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}}{n+1} \geq \dfrac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{n}$ ចំពោះ $n = 1, 2, ..$។

លំហាត់ទី ៦៣៥

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2sin\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{រ៉ាឌីកាល់}}$។

លំហាត់ទី ៦៣៦

គេឱ្យត្រីកោណមានមុំស្រួច ABC។ តាង D,F ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃ BC,AB។ ចំណោលកែងពីចំណុច C ទៅលើ AC និង ចំណោលកែង ត្រង់ចំណុច B ទៅលើ BC ជួបគ្នាត្រង់ N។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា DN មានប្រវែងស្មើនឹងកាំរង្វង់
ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC។

លំហាត់ទី ៦៣៧

រកចំនួនគត់ធំបំផុត តូចជាង $A=\frac{2013!+2010!}{2012!+2011!}$។

លំហាត់ទី ៦៣៨

រកគ្រប់តម្លៃនៃ b ដែល $B=11...1-bb...b$ ជាការេប្រាកដ ដោយដឹងថា លេខ 1 មាន 4024 ខ្ទង់ និង b មាន 2012 ខ្ទង់។

លំហាត់ទី ៦៣៩

ដោះស្រាយសមីការ $\left(x^{2012}+1\right)\left(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2010}\right)=2012x^{2011}$។

លំហាត់ទី ៦៤០

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x,y)=1-\frac{x}{y}$ ដែល $x>0$ និង $y>0$។ គេតាង

$$F_n(x)=\begin{cases} f(x,x) & \text{បើ } n=1 \\ f\left(F_{n-1}(x),x\right) & \text{បើ } n>1 \end{cases}$$ ។ គណនា $F_{2022}(2)$។

លំហាត់ទី ៦៤១

$\triangle ABC$ មានរង្វាស់ជ្រុង $AB=4$, $BC=7$ និង $AC=5$។ តាង $\alpha=\angle BAC$ ចូរគណនាតម្លៃនៃកន្សោម $sin^6\frac{\alpha}{2}+cos^6\frac{\alpha}{2}$។

លំហាត់ទី ៦៤២

គណនាផលបូក $f\left(\frac{1}{2020}\right)+f\left(\frac{2}{2020}\right)+\cdots+f\left(\frac{2019}{2020}\right)$ ដោយដឹងថា
$f(x)=\frac{4^x}{4^x+2};\ x\in\mathbb{R}$។

លំហាត់ទី ៦៤៣

ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{log_xa\cdot log_xa^2}+\frac{1}{log_xa^2\cdot log_xa^3}+\ldots+\frac{1}{log_xa^{n-1}\cdot log_xa^n}$$

$=\dfrac{n-1}{n}log_a^2x$។

លំហាត់ទី ៦៤៤

ដោះស្រាយសមីការ $cosxcos2xcos4xcos8x=\dfrac{1}{16}$។

លំហាត់ទី ៦៤៥

រកលេខខ្ទង់ចុងក្រោយនៃចំនួន 13^{13}។

លំហាត់ទី ៦៤៥

រកលេខខ្ទង់ចុងក្រោយនៃចំនួន $13^{13^{13}}$។

លំហាត់ទី ៦៤៦

រកលេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយនៃចំនួន $133333^{13333^{1333^{133^{13}}}}$។

លំហាត់ទី ៦៤៧

កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំនៃត្រីកោណ ABC ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច I។ M និង N ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃជ្រុង AB និង AC។ MN និង CI ជួបគ្នាត្រង់ P។ Q គឺជាចំណុចមួយដែល MN កែង PQ ហើយបន្ទាត់ BI និង NQ ស្របគ្នា។ រកមុំរវាង AC និង IQ។

លំហាត់ទី ៦៤៧

f ជាអនុគមន៍កំណត់ក្នុងសំណុំចំនួនពិតខុសពី 0 និង 1 ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម:

(i) $f(1-x)=\dfrac{1}{f(x)}$;

(ii) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{f(f(x))}$;

(iii) $f(f(f(x)))=x$។

១. ចូរគណនា $f(2), f(-1)$ និង $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$។

២. កំណត់អនុគមន៍ $f(x)$។

លំហាត់ទី ៦៤៨

កំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនគត់ (x,y) ដើម្បីឱ្យកន្សោម $\left(x^2+3y^2\right)\cdot 2^{\left(1-x^2-y^2\right)}$ មានតម្លៃអតិបរមា។ តើតម្លៃអតិបរមានោះគឺប៉ុន្មាន?

លំហាត់ទី ៦៤៩

ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ក្រាបនៃអនុគមន៍ប៉ារ៉ាបូល $y=\left(n^2+n\right)x^2-(2n+1)x+1$ កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ពីរចំណុច A_n និង B_n។ គណនា $\sum\limits_{n=1}^{2012}A_nB_n$។

លំហាត់ទី ៦៥០

គេឱ្យ x,y,z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+zx}+\frac{1}{z^2+xy}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$$ ។

លំហាត់ទី ៦៥១

គេឱ្យស្វ៊ីត $\{x_n\}$ ជាស្វ៊ីតបង្រួម កំណត់ដោយ $\begin{cases}x_1=1,\ x_2=2012\\ x_{n+1}=\sqrt[3]{x_{n+1}^2\cdot x_n}\end{cases}$ ។

គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty}x_n$ ។

លំហាត់ទី ៦៥២

ABC ជាត្រីកោណកែងមានជ្រុង $AB=13,BC=15,AC=14$ ។ ចំណុច D,E,F នៅលើជ្រុង AB,BC,CA រៀងគ្នា ដែល $\frac{AD}{AB}=x,\ \frac{BE}{BC}=y,\ \frac{CF}{CA}=z$ និង $x+y+z=\frac{2}{3},x^2+y^2+z^2=\frac{2}{5}$ ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ DEF ។

លំហាត់ទី ៦៥៣

ឧបមាថា $x_k,y_k\ (k=1,2,3,\dots,2012)$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន និង $x_1+x_2+\dots+x_{2012}=y_1+y_2+\dots+y_{2012}=1$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sum\limits_{k=1}^{2012}\frac{x_ky_k}{x_k+y_k}\leq\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី ៦៥៤

គេឱ្យ $P_n=\prod\limits_{k=0}^{n}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{3^k}+\left(\frac{1}{9}\right)^{3^k}\right]$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$ ។

លំហាត់ទី ៦៥៥

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃ x ដែល x និង y ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ $\frac{2011}{2012}<\frac{x}{y}<\frac{2012}{2013}$ ។

លំហាត់ទី ៦៥៦

សិស្សប្រុស និង សិស្សស្រីមួយក្រុមបានចូលរួមប្រកួត ញ៉ាំភីហ្សានៅផ្សារទំនើបមួយ។ គេដឹងថាក្នុងភីហ្សាមួយត្រូវគេកាត់ជា ១២ដុំតូចៗ។ សិស្សប្រុសម្នាក់អាចញ៉ាំអស់ ៦ឬ ៧ដុំ និង សិស្សស្រីម្នាក់អាចញ៉ាំអស់ ២ ឬ ៣ដុំ។ បើគេដាក់ភីហ្សា ៤ ឃើញថាមិនគ្រប់គ្រាន់ទេ តែបើគេដាក់ភីហ្សា ៥វិញនោះវាច្រើនពេក។ តើមានសិស្សប្រុស និង សិស្សស្រីប៉ុន្មាននាក់ដែលបានចូលរួមប្រកួត ។

លំហាត់ទី ៦៥៧

រកតម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x)=x\left(2011+\sqrt{2013-x^2}\right)$ ។

លំហាត់ទី ៦៥៨

គណនាផលបូក $S_{2012}=cosa+cos2a+cos3a+\cdots+cos2012a$ ។

លំហាត់ទី ៦៥៩

បង្ហាញថា $A = 6^{2012} + 13^{2012} - 2^{2012} - 17^{2012}$ ចែកដាច់នឹង 44 ។

លំហាត់ទី ៦៦០

ដោះស្រាយសមីការ $sin^2 x^2 + sin^2 2x^2 = sin^2 3x^2 + sin^2 4x^2$ ។

លំហាត់ទី ៦៦១

ប្រអប់មួយមានបាតជាចតុកោណកែងដែលមានអង្កត់ទ្រូងប្រវែង $D(a) = \dfrac{a^2 - \sqrt{a^4+4} + 2}{a}$ ដែល $a >$ ។ រកប្រវែងអតិបរមានៃអង្កត់ទ្រូងបាតប្រអប់។ លំហាត់ទី ៦៦២

រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x) = ln(\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}) + \sqrt{cosx}$។

លំហាត់ទី ៦៦៣

ពហុធា $r(x) = x^5 - 5x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ មានឫសប្រាំផ្សេងគ្នា a_1, a_2, a_3, a_4, a_5
ហើយ $s(x) = -x^2 + 5$ ជាពហុធាមួយផ្សេងទៀត។
គណនាផលគុណ $p = s(a_1)s(a_2)s(a_3)s(a_4)s(a_5)$ ។

លំហាត់ទី ៦៦៤

អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{a^x}{a^x + \sqrt{a}}$ ដែល a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានហើយខុសពី 1 ។ គណនាផលបូក $S = f\left(\dfrac{1}{2012}\right) + f\left(\dfrac{2}{2012}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{2011}{2012}\right)$ ។

លំហាត់ទី ៤២៤

គេមានទំនាក់ទំនង $(3-2i)Z+(3+2i)\overline{Z}-12=0\ (I)$ ។
ក- បង្ហាញថាសំណុំចំណុច M ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ដែលមានអាភិក Z ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង (I) គឺជាបន្ទាត់ L មួយដែលគេត្រូវកំណត់ ។
ខ- A និង B គឺជាពីរចំណុចដែលមានអាភិករៀងគ្នា $3+5i$ និង $-3+i$ ។
បង្ហាញថា បន្ទាត់ L ជាមេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[AB]$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក- បង្ហាញថាសំណុំចំណុច M ក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ដែលមានអាភិក Z ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង (I) គឺជាបន្ទាត់ L មួយដែលគេត្រូវកំណត់

•តាង $Z=x+iy$ នោះ $\overline{Z}=x-iy$

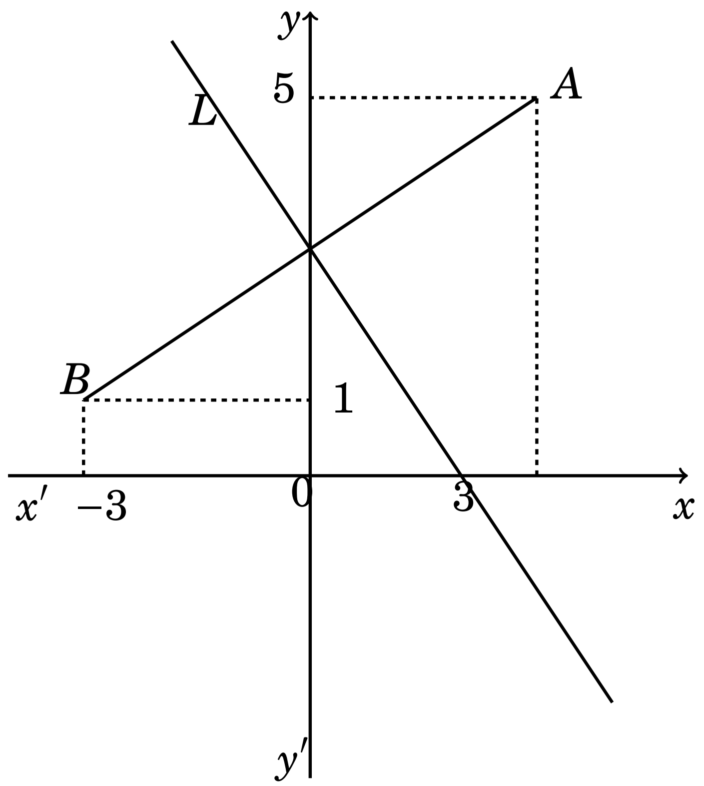
•ចំណុច M មានអាភិក $Z \Rightarrow M(x,y)$

•ជំនួសZ និង $\overline{Z}$ ចូលក្នុង (I) យើងបាន

$(3-2i)(x+iy)+(3+2i)(x-iy)-12=0$

$3x+3yi-2xi-2yi^2+3x-3yi+2xi-2yi^2-12=0$

$6x+4y-12=0 \Rightarrow y=-\dfrac{3}{2}x+3$



ដូចនេះ សំណុំចំណុច M ដែលមានអាភិក Z គឺជាបន្ទាត់ $L: y=-\frac{3}{2}x+3$

ខ- បង្ហាញថា បន្ទាត់ L ជាមេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[AB]$

ចំណុច A មានអាភិក $3+5i \Rightarrow A(3,5)$

ចំណុច B មានអាភិក $-3+i \Rightarrow B(-3,1)$

តាង $I(a,b)$ ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ $[AB]$

គេបាន $a=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{3-3}{2}=0,\ b=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{5+1}{3}=3$

នាំឱ្យ $I(0,3)$

•រកសមីការបន្ទាត់ $AB:\ y=mx+n$

$A(3,5)\in AB \Rightarrow 3m+n=5 \quad (1)$

$B(-3,1)\in AB \Rightarrow -3m+n=1 \quad (2)$

យក $(1)+(2)$ អង្គនិងអង្គយើងបាន $2n=6$ ឬ $n=3$

នោះ $m=\frac{2}{3}$

$AB:\ y=\frac{2}{3}x+3$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $m=\frac{2}{3}$

$L:\ y=-\frac{3}{2}x+3$ មានមេគុណប្រាប់ទិស $m'=-\frac{3}{2}$

$\Rightarrow m\cdot m'=-1$ គឺ $L\perp AB\ (II)$

យក $I(0,3)$ ជំនួសក្នុងសមីការបន្ទាត់ $L:\ 3=-\frac{3}{2}\times 0+3$ ពិត

នាំឱ្យ $I\in L \Rightarrow L\cap AB$ ត្រង់ចំណុចកណ្តាល $I\ (III)$

តាម (II) និង (III) គេបាន L កែងនឹង AB ត្រង់ចំណុចកណ្តាល I

ដូចនេះ បន្ទាត់ L ជាមេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ $[AB]$

លំហាត់ទី ៤២៥

ពហុធា $f(z)=az^{2018}+bz^{2017}+cz^{2016}$ មានមេគុណជាចំនួនពិតមិនធំជាង 2019 និង $f\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)=2015+2019\sqrt{3}i$ ។ ចូររកសំណល់ពេលដែលគេចែក $f(1)$ និង 1000 ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $\omega=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ នោះ $\omega=e^{\frac{i\pi}{3}}$ គឺជា Primitive 6th roots នៃចំនួនឯកតា

យើងបាន $f(\omega)=a\omega^{2018}+b\omega^{2017}+c\omega^{2016}$

$=a\omega^2+b\omega+c$

យើងចង់រក $f(1)=a+b+c$

- ពិនិត្យមើលផ្នែកពិតនៃចំនួនកុំផ្លិច

$Re(\omega^2)=-\frac{1}{2}$ នោះ $Re(\omega)=2$

នាំឱ្យ $-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+c=2015$

$\Leftrightarrow -a+b+2c=4030$

- ពិនិត្យមើលផ្នែកនិម្មិតនៃចំនួនកុំផ្លិច

យើងមាន $Im(\omega^2)=Im(\omega)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ នោះ $\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)=2019\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow a+b=4038$

ដោយ a និង b មិនធំជាង 2019 នោះយើងត្រូវយក $a=b=2019$

$\Rightarrow c=\frac{4030}{2}=2015$

$f(1)=4038+2015=6053$

គេបានសំណល់ពេលចែក $f(1)$ នឹង 1000 គឺ 53

រឺសនៃឯកតា

•(រឺសនៃឯកតា) គេអោយ $n\geq 2$ ជាចំនួនគត់ និងតាង $\zeta=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ $=cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+isin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ ។ គេថា $1,\ \zeta,\ \zeta^2,\dots,\zeta^{n-1}$ ជារឺសទី n នៃឯកតា ។

•បើ ζ ជារឺសទី n នៃឯកតា នោះ ζ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\zeta^n-1=0$ ។ បើ $\zeta\neq 1$ គេបាន $1+\zeta+\zeta^2+\cdots+\zeta^{n-1}=0$ ។

•គេអោយ $\zeta=e^{\frac{2\pi}{n}}$ នោះ $x^n-1=(x-1)(x-\zeta)\left(x-\zeta^2\right)\cdots\left(x-\zeta^{n-1}\right)$ ។

រឹសនៃឯកតា

•គេអោយ $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ នោះ $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=(x-1)(x-\zeta)\left(x-\zeta^2\right)\cdots\left(x-\zeta^{n-1}\right)$ ។

•$1+\zeta^m+\zeta^{2m}+\cdots+\zeta^{(n-1)m}$ គឺ n បើ $n|m$ និង 0 បើក្រៅពីនេះ ។ •(Primitive root of unity) ζ ជា primitive nth root of unity បើវាជារឹសទី n នៃឯកតា ហើយ $1,\ \zeta,\ \zeta^2,...,\zeta^{n-1}$ សុទ្ធតែខុសៗគ្នា ។

•(Primitive root of unity v2) $\zeta = e^{\frac{2\pi i k}{n}}$ ជា primitive nth root of unity លុះត្រាតែ $gcd(k,n)=1$ ។

•(ពហុធាស៊ីក្លូតូមីក, Cyclotomic polynomial) ពហុធាស៊ីក្លូតូមីកលំដាប់ n, $\Phi_n(x)$ គឺជាពហុធាដែលគ្រប់រឹសរបស់វាគឺជា the nth primitive roots of unity ។

•(Cyclotomic Polynomial facts) ពហុធាស៊ីក្លូតូមីកលំដាប់ n គឺជាពហុធាមិនអាចសម្រួលបានតែមួយគត់ មានមេគុណជាចំនួនគត់ ជាតួចែកនៃ x^n-1 តែមិនមែនជាតួចែកនៃ x^k-1 ចំពោះគ្រប់ $k<n$ ។

•ពហុធាស៊ីក្លូតូមីកលំដាប់ n គឺជាពហុធាមីនីម៉ាល់របស់ the nth primitive roots of unity, i.e ចំពោះគ្រប់ Primitive nth root ζ, $\Phi_n(x)$, គឺជាពហុធាម៉ូនិកមានមេគុណជាចំនួនគត់ដឺក្រេតូចបំផុត ហើយមាន ζ ជារឹស ។

•(Geometry) រឹសនៃឯកតាបង្កើតបានជាកំពូលនៃពហុកោណនិយ័តនៅលើរង្វង់ឯកតាក្នុងប្លង់កុំផ្លិច ។ ការគុណចំនួនកុំផ្លិចដោយ $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ គឺជារង្វិលតាមមុំ $\frac{2\pi}{n}$ ជៀបនឹងគល់តំរុយ ។

•(Trignometry) បើ $\zeta = e^{i\theta}$ នោះ $cos(\theta)=\frac{\zeta+\zeta^{-1}}{2}$ និង $sin(\theta)=\frac{\zeta-\zeta^{-1}}{2}$ ។

•(Roots of unity filter) គេអោយ $f(x)=\sum_i a_i x^i$ ជាណាហុធាមួយ នោះគេបាន

$$\frac{f(x)+f(\zeta x)+f\left(\zeta^2 x\right)+\cdots+f\left(\zeta^{n-1}x\right)}{n}=\sum_{n|i} a_i x^i$$ ។

The equation $x^n = 1$ has n roots which are called the **nth** roots of unity. $x^n = 1 =$

$cos0 + isin0 = cos2k\pi + isin2k\pi$, k is an integer.

$x = (co2k\pi + isin2k\pi)^{\frac{1}{n}}$

$x = cos\frac{2k\pi}{n} + isin\frac{2k\pi}{n}$ where $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$.

So each root of unity is $cos\frac{2k\pi}{n} + isin\frac{2k\pi}{n}$ where $0 \le k \le n-1$.

We know that complex numbers of the form $x + iy$ can be plotted on the complex plane(Argand Diagram). If we compare each root of unity with $x + iy$, we get $x = cos\frac{2k\pi}{n}$, $y = sin\frac{2k\pi}{n}$. Now, we see that the values of x and y satisfy the equation of unit circle with center $(0, 0)$ i.e $x^2 + y^2 = 1$.

From above it can be concluded that the roots are located on the circumference of unit circle with center at $(0, 0)$. If we join the points we always get a regular polygons of n sides.

I. Introduction/ facts you should know

1. (Roots of unity) Let $n \ge 2$ be an integer and let $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}} = cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Then $1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}$ are called the nth roots of unity.
2. If ζ is an nth root of unity, ζ satisfies $\zeta^n - 1 = 0$. If $\zeta \ne 1$, then $1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} = 0$.
3. Let $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Then $x^n - 1 = (x-1)(x-\zeta)\left(x-\zeta^2\right)\cdots\left(x-\zeta^{n-1}\right)$.
4. Let $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Then $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = (x-1)(x-\zeta)\left(x-\zeta^2\right)\cdots\left(x-\zeta^{n-1}\right)$.
5. $1 + \zeta^m + \zeta^{2m} + \cdots + \zeta^{(n-1)m}$ is n if $n|m$, and 0 otherwise.
6. (Primitive root of unity) ζ is a *primitive* nth root of unity if it is an nth root of unity and $1, \zeta, \ldots, \zeta^{n-1}$ are all distinct.
7. (Primitive root of unity v2) $\zeta = e^{\frac{2\pi ik}{n}}$ is a primitive nth root of unity iff $gcd(k, n) = 1$.

8. (Cyclotomic polynomial) The nth cyclotomic polynomial, $\Phi_n(x)$, is the polynomial whose roots are the nth primitive roots of unity.

9. (Cyclotomic polynomial facts) The nth cyclotomic polynomial is the unique irreducible polynomial with integer coefficients that is a divisor of $x^n - 1$ and not a divisor of $x^k - 1$ for any $k < n$.

The nth cyclotomic polynomial is the *minimal polynomial* for the nth primitive roots of unity, i.e. for each primitive nth root ζ, $\Phi_n(x)$, is the monic polynomial with integer coefficients of minimum degree with ζ as a root.

10. (Geometry) The roots of unity form the vertices of a regular $n-$gon on the unit circle in the complex plane. Multiplying complex number by $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ corresponds to rotations of $\frac{2\pi}{n}$ about the origin.

11. (Trigonometry) If $\zeta = e^{i\theta}$, then $cos(\theta) = \dfrac{\zeta + \zeta^{-1}}{2}$ and $sin(\theta) = \dfrac{\zeta - \zeta^{-1}}{2}$.

12. (Roots of unity filter) Let $f(x) = \sum_i a_i x^i$ be a polynomial and $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Then

$$\frac{f(x) + f(\zeta x) + f\left(\zeta^2 x\right) + \cdots + f\left(\zeta^{n-1} x\right)}{n} = \sum_{n|i} a_i x^i \ (1).$$

II. Problems for discussion

1. Let n be an odd positive integer, and let $\zeta = cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Evaluate

$$\frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+\zeta} + \frac{1}{1+\zeta^2} + \cdots + \frac{1}{1+\zeta^{n-1}}.$$

2. Verify (1).

3. Evaluate

$$\binom{2017}{0} + \binom{2017}{3} + \cdots + \binom{2017}{2016}.$$

4. (USAMO 1976) If $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ are polynomials such that $P\left(x^5\right) + xQ\left(x^5\right) + x^2 R\left(x^5\right)$ is divisible by $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, prove that $P(x)$ is divisible by $x - 1$.

5. Let a, b, c, d be positive integers, such that an $a \times b$ rectangle can be tiled with a combination of $c \times 1$ verticle strips, and $1 \times d$ horizontal strips. Prove that either a is divisible by c or b is divisible by d.

6. Show that if a rectangle can be tiled by smaller rectangles each of which has at least

one integer side, then the tiled rectangle has at least one integer side.

7. (IMO 1995) Let p be an odd prime. Find the number of $p-$elements subsets $\{1,\ldots,2p\}$ with sum divisible by p.

8. (China 2010) Let $M=\{1,2,\ldots,n\}$, each element of M is colored in either red, blue, or yellow. Set

A=$\{(x,y,z)\in M\times M\times M|x+y+z\equiv 0 \bmod n, x,y,z$ are of same color$\}$.

B=$\{(x,y,z)\in M\times M\times M|x+y+z\equiv 0 \bmod n, x,y,z$ are of pairwise distinct color.$\}$.

Prove that $2|A|\geq|B|$.

III. Additional Practice

9. (USAMO 1996) Prove that the average of the numbers $nsinn^0$ for $n=2,4,6,\ldots,180$ is $cot1^0$.

10. Prove that $cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ is a root of cubic polynomial with integer coefficients.

11. (Putnam) Let $P_0=(0,0)$. For $n=1,2,\ldots,8$, Let P_n be the rotation of point P_{n-1} 45 degrees counter-clockwise around the point $(n,0)$. Determine the coordinates of P_8.

12. (USAMO 1977) Find all pairs of positive integers (m,n) such that the polynomial $1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{mn}$ is divisible by the polynomial $1+x+x^2+\cdots+x^m$.

13. (Leningrad Mathematical Olympiad 1991) A sequence $a_1,a_2,\ldots,a_n$ is called $k-$balanced if $a_1+a_{k+1}+\cdots=a_2+a_{k+3}+\cdots=\cdots=a_k+_{2k}+\cdots$. Suppose the sequence $a_1,a_2,\ldots,a_{50}$ is $k-$balanced for $k=3,5,7,11,13,17$. Prove that all the values a_i are zero.

14. (India 2015) Let $\omega=e^{\frac{2\pi i}{5}}$. Show that there are no positive integers a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 such that the following is an integer:

$$(1+a_1\omega)(1+a_2\omega)(1+a_3\omega)(1+a_4\omega)(1+a_5\omega)(1+a_6\omega).$$

15. The set of integers is partitioned into a finite number of arithmetic progressions with each integer in one progression. Prove that some two of these progressions have the same common difference.

16. (Jim Propp) n light bulbs are located at the vertices of a regualr $n-$gon. Initially, exactly one bulb is turned on. You can choose any collection of bulbs whose positions are the vertices of a regular polygon, and if they are all on, you can turned them all off, or if they are all off, you can turn them all on. For what n can you eventually get

all of the bulbs on?

17. Let a_k, b_k, c_k be integers for $k = 1, \ldots, n$, and let $f(x)$ be the number of ordered triples (A, B, C) of subsets (possibly empty) of the set $S = \{1, \ldots, n\}$ that partition S for

$$\sum_{i \in S \setminus A} a_i + \sum_{i \in S \setminus B} b_i + \sum_{i \in S \setminus C} c_i = x \pmod 3$$

Suppose that $f(0) = f(1) = f(2)$.Prove that there exists $i \in S$ such that $3 | a_i + b_i + c_i$.

18. (IMO Shortlist 2007) Find all positive integers n such that you can color the numbers in the set $S = \{1, \ldots, n\}$ red or blue such that the set $S \times S \times S$ contains exactly 2007 monochromatic ordered triples (x, y, z) for which $n | x + y + z$.

19. If P is a nonzero polynomial with integers coefficients, show that there exists a complex number z with $|z| = 1$ and $|P(z)| \geq 1$.

20. Let

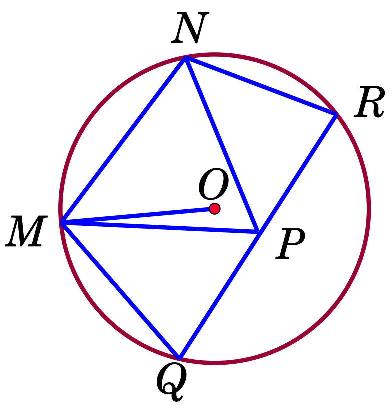
$$A(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^{3k}}{(3k)!}, \; B(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^{3k+1}}{(3k+1)!}, \; C(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^{3k+2}}{(3k+2)!}.$$

Evaluate $A(x)^3 + B(x)^3 + C(x)^3 - 3A(x)B(x)C(x)$.

លំហាត់ទី ៤២៦

កំពូល M និង N របស់ត្រីកោណសម័ង្ស MNP ឋិតនៅលើរង្វង់ C ។ ចំណុច Q មួយផ្សេងពី N នៅលើរង្វង់ C ដែល $MQ = MN$ ។ បន្ទាត់ QP ប្រសព្វរង្វង់ C ជាលើកទីពីរត្រង់ R ។ ចូរគណនារង្វាស់ PR ។

ដំណោះស្រាយ



តាង O ជាផ្ចិតរង្វង់ C មានកាំស្មើ 1 ឯកតា

ដោយ $MN = NP = MP = MQ$

នាំឱ្យចំណុច N,P,Q ឋិតនៅលើរង្វង់ផ្ចិត M តែមួយ
សន្មត់ $\angle PNQ=\alpha$ នោះ $\angle PMQ=2\alpha$
ដោយ $\triangle MNQ$ ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល M
នាំឱ្យ $\angle QNM=\angle NQM=60^0-\alpha$
ហើយ $\triangle MPQ$ ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល M
នោះ $\angle MPQ=\angle MQP=\dfrac{180^0-2\alpha}{2}=90^0-\alpha$
គេបាន $\angle NQR=\angle MQP-\angle NQM=90^0-\alpha-(60^0-\alpha)=30^0$
នាំឱ្យ $\angle NOR=2\angle NQR=60^0$
$\triangle NOR$ ជាត្រីកោណសម័ង្ស នោះ $NO=OR=NR=1$
ម្យ៉ាងទៀត $\angle NPR=\angle PNQ+\angle NQP=\alpha+30^0$ (1)
ហើយចតុកោណ $MNQR$ ចារឹកក្នុងរង្វង់ C តែមួយ យើងបាន
$\angle NRP=180^0-\angle NMQ=180^0-(60^0+2\alpha)=120^0-2\alpha$
នាំឱ្យ $\angle PNR=180^0-(\angle NRP+\angle NPR)$
$\Leftrightarrow \angle PNR=180^0-(120^0-2\alpha+\alpha+30^0)$
$\Leftrightarrow \angle PNR=30^0+\alpha$ (2)
តាម (1) និង (2) គេបាន $\angle NPR=\angle PNR$
នោះ $\triangle NPR$ ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល R
$\Rightarrow NR=PR$
តែ $NR=1$ (សម្រាយខាងលើ)
ដូចនេះ $PR=1$ ឯកតាប្រវែង

លំហាត់ទី ៤២៧

តាង $m*n=\dfrac{m+n}{mn+4}$ ។
គណនា $A=((\cdots(2009*2008)*2007)*\cdots*1)*0)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងសង្កេតឃើញថា $m*2=\dfrac{m+2}{2m+4}=\dfrac{1}{2}$

ដើម្បីបានចំនួនដែលយើងចង់រក គ្រាន់តែយក $\left(\dfrac{1}{2}*1\right)=\dfrac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+4}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

$$\left(\frac{1}{2}*1\right)*0=\frac{\frac{1}{3}+0}{4}=\frac{1}{12}$$

ដូចនេះ $A=\dfrac{1}{12}$

លំហាត់ទី ៤២៨

តើមានចំនួនគត់ n ប៉ុន្មានចាប់ពី 1 ដល់ 2008 ដែល:
$2.6.10...(4n-2)$ ចែកដាច់នឹង $n!$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$2.6.10...(4n-2)=2^n[1.3.5...(2n-1)]$$

$$=2^n\cdot\frac{1.2.3...(2n-1)(2n)}{2.4....(2n)}$$

$$=2^n\cdot\frac{1.2.3...(2n)}{2^n(1.2.3...n)}$$

$$=\frac{(2n)!}{n!}$$

ដោយសារ $2.6.10...(4n-2)$ ចែកដាច់នឹង $n!$

$$\Rightarrow \frac{(2n)!}{n!}\vdots n!$$

$$\Rightarrow \frac{(2n)!}{n!}=n!.k \text{ ដែល } k\in\mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow C(2n,n)=k\in\mathbb{N}^* \text{ ចំពោះ } n=\overline{1;2008}$$

ដូចនេះ មានចំនួនគត់ n ចំនួន 2008

លំហាត់ទី ៤២៩

មានចំនួនពិត 3គូគឺ $(a_1;b_1)$; $(a_2;b_2)$ និង $(a_3;b_3)$ ដែលបំពេញទំនាក់ទំនង :
$\begin{cases}a^3-3ab^2=2009\\ b^3-3a^2b=2008\end{cases}$ ។ គណនា $P=\left(1-\dfrac{a_1}{b_1}\right)\left(1-\dfrac{a_2}{b_2}\right)\left(1-\dfrac{a_3}{b_3}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

សម្មតិកម្ម $\begin{cases}a^3-3ab^2=2009\\ b^3-3a^2b=2008\end{cases}$

$$\begin{cases}(a^3-3ab^2)2008=2008.2009\\(b^3-3a^2b)2009=2008.2009\end{cases}$$

$(a^3-3ab^2)2008-(b^3-3a^2b)2009=0$

ចែកអង្គនឹង b^3 រួចតាង $t=\dfrac{a}{b}$

$(t^3-3t)2008-(1-3t^2)2009=0$ (1)

សមីការមានឫសបីគឺ $\left(\dfrac{a_1}{b_1}\right);\left(\dfrac{a_2}{b_2}\right);\left(\dfrac{a_3}{b_3}\right)$

គេបានសមីការ $\left(t-\dfrac{a_1}{b_1}\right)\left(t-\dfrac{a_2}{b_2}\right)\left(t-\dfrac{a_3}{b_3}\right)=0$ (2)

(1) និង (2) អោយ $t=1$

$2008.P=(-2)2008-(-2)2009$

ដូចនេះ $P=\dfrac{1}{1004}$

លំហាត់ទី ៤៣០

ចំពោះចំនួនគត់ n នីមួយៗមិនអវិជ្ជមាន គេបង្កើតចំនួនថ្មី $f(n)$ ។
ឧបមថា $f(0)=0$; $f(1)=1$ និង ចំពោះ $n\geq 2;\ f(n)-2f(n-1)+f(n-2)=(-1)^n(2n-4)$ ។ គណនា $f(2008)$ និង $f(2009)$ ។

ដំណោះស្រាយ

សម្មតិកម្ម $f(0)=0$

$f(1)=1$

$n=2: f(2)=2f(1)-f(0)+(4-4)=2$

$n=3: f(3)=2f(2)-f(1)-(6-4)=1$

$n=4: f(4)=2f(3)-f(2)+(8-4)=4$

$n=5: f(5)=2f(4)-f(3)-(10-4)=1$

សន្និដ្ឋាន : $f(n)=1$ បើ n សេស

$f(n)=n$ បើ n គូ

ស្រាយតាមវិចារកំណើន :

សំណើពិតចំពោះ $n=0;1;\cdots;k-1$

ស្រាយថាពិតដល់ $n=k$

$f(k)=2f(k-1)-f(k-2)+(-1)^k(2k-4)$

បើ k សេស : $f(k-1)=k-1$

និង $f(k-2)=1$

$\Rightarrow f(k)=2(k-1)-1-(2k-4)$

$f(k)=1$

ម្យ៉ាងទៀត បើ k គូ នោះ $f(k-1)=1$ និង $f(k-2)=k-2$

$\Rightarrow f(k)=2-(k-2)+2k-4$

$f(k)=k$

ដូចនេះ $f(2008)=2008$ និង $f(2009)=1$

លំហាត់ទី ៤៣១

គេឱ្យចំនួនពិត $x=k+\sqrt{k^2-1}$ ដែល k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានធំជាង 1 ។
ចំពោះ $n=1;2;3;...$ គេតាង A_n ជាផ្នែកគត់នៃ x^n ។
ចូរគណនា A_{2n} ជាអនុគមន៍នៃ A_n ។

ដំណោះស្រាយ

សម្មតិកម្ម : $x=k+\sqrt{k^2-1};\ k\in\mathbb{N}^*, k>1$

តាង $y=k-\sqrt{k^2-1}$

លក្ខខណ្ឌ $0<y<1$ គ្រប់ $k>1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=2k \\ xy=1 \end{cases}$$

ទាញបាន x,y ជាឫសនៃសមីការ :

$$t^2-2kt+1=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-2kx+1=0 \,|x^{n-2} \\ y^2-2ky+1=0 \,|y^{n-2} \end{cases}$$

បូកអង្គ : $x^n+y^2-2k\left(x^{n-1}+y^{n-1}\right)+\left(x^{n-2}+y^{n-2}\right)=0$

តាង $S_n=x^n+y^n$

$\Rightarrow S_n=2kS_{n-1}-S_{n-2};\ n\geq 2$

•ដោយ $S_0=2\in\mathbb{Z}$

$S_1=x+1=2k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow S_n=x^n+y^n\in\mathbb{Z}$

(តាមវិចារកំណើន)

ម្យ៉ាងទៀត : $0 < y < 1$

$\Rightarrow x^n < x^n + y^n < x^n + 1$

$\Rightarrow [x^n + 1] = x^n + y^n$

$\Rightarrow [x^n] + 1 = x^n + y^n$

រឺ $A_n + 1 = x^n + y^n$

គេបាន $(A_n + 1)^2 = (x^n + y^n)^2$

$A_n^2 + 2A_n + 1 = x^{2n} + y^{2n} + 2(xy)^n$

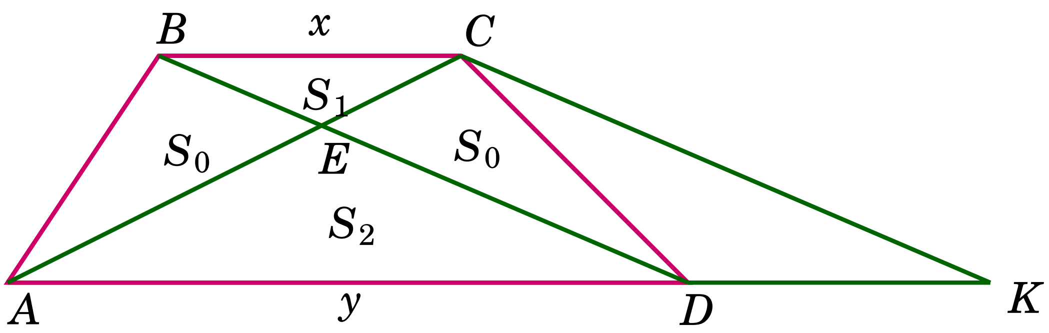
$= A_{2n} + 1 + 2(1)$

ដូចនេះ $A_{2n} = A_n^2 + 2A_n - 2$

លំហាត់ទី ៤៣២

ក្នុងចតុកោណព្នាយ $ABCD$ $(AD \parallel CB)$ មានផ្ទៃក្រឡា S ថេរ E ជាចំនុចប្រសព្វនៃអង្កត់ទ្រូងទាំងពីរ ។ តើចតុកោណព្នាយណាដែលមានផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABE ធំបំផុត ?

ដំណោះស្រាយ



តាម C គូសបន្ទាត់ស្របនឹង (BD) កាត់បន្លាយ (AD) ត្រង់ K

តាងផ្ទៃក្រឡា $\triangle ABE$; $\triangle BEC$ និង $\triangle AED$ រៀងគ្នាដោយ S_0 ; S_1 ; S_2 ហើយ $AD = y$; $BC = x$

$S_{ABC} = S_0 + S_1$

$S_{BCD} = S_1 + S_{CED}$

ដោយ $S_{ABC} = S_{BCD}$ $(BC \parallel AD)$

$\Rightarrow S_{CED} = S_0$

ទាញបាន : $S_{ABCD} = S_{\triangle ACK} = S$

យើងមាន $\dfrac{S_1}{S_0}=\dfrac{EC}{EA}$

$\dfrac{S_0}{S_2}=\dfrac{EC}{EA}$

$\Rightarrow \dfrac{S_1}{S_0}=\dfrac{S_0}{S_2}\Rightarrow S_0^2=S_1.S_2\ (*)$

ម្យ៉ាងទៀត $\triangle ACK$ ដូចនឹង $\triangle CEB$ និង $\triangle AED$

គេបាន $\dfrac{S_1}{S}=\left(\dfrac{BC}{AK}\right)^2=\dfrac{x^2}{(x+y)^2}\quad(1)$

$\dfrac{S_2}{S}=\left(\dfrac{AD}{AK}\right)^2=\dfrac{y^2}{(x+y)^2}\quad(2)$

$(1)\times(2):\ \dfrac{S_1S_2}{S_0^2}=\dfrac{x^2y^2}{(x+y)^4}$

$(*)\Rightarrow\left(\dfrac{S_0}{S}\right)^2=\dfrac{x^2y^2}{(x+y)^4}$

$\Rightarrow\dfrac{S_0}{S}=\dfrac{xy}{(x+y)^2}\ (3)$

តាមវិសមភាព Cauchy

$x^2+y^2\geq 2xy$

$(x+y)^2\geq 4xy$

$\dfrac{xy}{(x+y)^2}\leq\dfrac{1}{4}\ (4)$

(3) និង (4) : $S_0\leq\dfrac{1}{4}S$

S_0 ធំបំផុត : $S_0=\dfrac{1}{4}S$ ដូចនេះ ចតុកោណ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម ពេល S_{ABE} ធំបំផុត

លំហាត់ទី ៤៣៣

តាង $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^n xdx$ ។ ចូរស្រាយបំភ្លឺថា $\dfrac{\pi}{2(n+1)}\leq I_n^2\leq\dfrac{\pi}{2n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

លើចន្លោះ $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ យើងបាន $0<sinx<1$ ចំពោះ $\forall x\in\left(0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

យើងបាន $sin^{n+1}x < sin^n x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n+1}xdx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n xdx$

នោះ $I_{n+1} < I_n$ ចំពោះ $\forall n = 1,2,3,..$ (1)

យក $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n+2}xdx$

តាង $u = sin^{n+1}x$ នោះ $du = (n+1)sin^n xcosxdx$

និង $v = \int sinxdx$ នោះ $v = -cosx$

យើងបាន

$$I_{n+2} = \left[-sin^{n+1}xcosx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\left(1 - sin^2x\right)dx$$

$$= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$$

$\Rightarrow I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$ (2)

តាង $f(n) = (n+1)I_n \cdot I_{n+1} \Rightarrow f(n+1) = (n+2)I_{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)I_n$

$f(n+1) = (n+1)I_n \cdot I_{n+1}$

គេបាន $f(n) = f(n+1)$ ចំពោះគ្រប់ n និង $f(n) = f(0),\ \forall n$

$$f(0) = I_0.I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow f(n) = (n+1)I_n \cdot I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ (3)

តាម (1) នាំឱ្យ $(n+1)I_n \cdot I_{n+1} < (n+1)I_n^2$

តាម (3) នាំឱ្យ $\frac{\pi}{2(n+1)} < I_n^2$ (4)

ហើយ $f(n-1) = nI_n \cdot I_{n+1} = \frac{\pi}{2} > nI_n^2 \Rightarrow I_n^2 < \frac{\pi}{2n}$ (5)

តាម (4) និង (5) យើងទាញបាន $\frac{\pi}{2(n+1)} \le I_n^2 \le \frac{\pi}{2n}$ ពិត

លំហាត់ទី ៤៣៤

ចូរប្រៀបធៀបពីរចំនួន $A = \sqrt[3]{2008} + \sqrt[3]{2006}$ និង $B = 2\sqrt[3]{2007}$ ។

ដំណោះស្រាយ

$A = \sqrt[3]{2008} + \sqrt[3]{2006}$

$B = 2\sqrt[3]{2007}$

យើងមាន $\sqrt[3]{2008} - \sqrt[3]{2007} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2008}^2 + \sqrt[3]{2008}\cdots\sqrt[3]{2007} + \sqrt[3]{2007}^2}$ (1)

$\sqrt[3]{2007} - \sqrt[3]{2006} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2007}^2 + \sqrt[3]{2007}\cdot\sqrt[3]{2006} + \sqrt[3]{2006}^2}$ (2)

ដោយភាគបែងនៃ (1) ធំជាងភាគបែងនៃ (2)

$\Rightarrow \sqrt[3]{2008} - \sqrt[3]{2007} < \sqrt[3]{2007} - \sqrt[3]{2006}$

ដូចនេះ $A < B$

លំហាត់ទី ៨៣៥

គេឱ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a;b;c$ ដែលមានផលគុណស្មើ 1 ។

រកតម្លៃធំបំផុតនៃផលគុណ $P = \left(a-1+\dfrac{1}{b}\right)\left(b-1+\dfrac{1}{c}\right)\left(c-1+\dfrac{1}{a}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $abc = 1$ នោះ $\dfrac{1}{bc} = \dfrac{a}{abc} = a$

នោះ $\left(b-1+\dfrac{1}{c}\right) = b\left(1-\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{bc}\right)$

$= b\left(1-\dfrac{1}{b}+a\right)$

$\Rightarrow \left(a-1+\dfrac{1}{b}\right)\left(b-1+\dfrac{1}{c}\right) = \left(a-1+\dfrac{1}{b}\right)\cdot b\left(1-\dfrac{1}{b}+a\right)$

$= b\left[a^2 - \left(1-\dfrac{1}{b^2}\right)\right] \le a^2 b$

ស្រាយដូចគ្នា ចំពោះផលគុណ២កត្តាផ្សេងទៀត រួចគុណអង្គ :

$\left[\left(a-1+\dfrac{1}{b}\right)\left(b-1+\dfrac{1}{c}\right)\left(c-1+\dfrac{1}{a}\right)\right]^2 \le a^2b.b^2c.c^2a$

$P^2 \le (abc)^3 = 1$

ដូចនេះ $P_{max} = 1$

លំហាត់ទី ៤៣៦

រកចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដែល $n+S(n)=2009$ ។
$S(n)$ ជាផលបូកបណ្តាខ្ទង់ ទាំងអស់នៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

ដំណោះស្រាយ

សម្មតិកម្ម $n+S(n)=2009$

$$n=2009-S(n) \quad (1)$$

ទាញបាន $n\le 2008$

ដោយដឹងថាបណ្តាចំនួនតូចជាង ឬស្មើ 2008 មានតែចំនួន 1999 មានផលបូកខ្ទង់ធំបំផុត

$\Rightarrow S(n)\le S(1999)=28$

ពី (1) $n\ge 2009-28$

$$n\ge 1981 \quad (2)$$

គេបាន $1981\le n\le 2008$

តាង $n=\overline{19ab}$ ដែល $a;b\in\mathbb{N};\ 0\le a;b\le 9$ ព្រោះ $S(2008)=10;..;S(2000)=2$

$\Rightarrow n=2000;2001;...;2008$

$n+S(n)=2003$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

គេបាន $1981\le n\le 1999$

$n+S(n)=2009$

$\overline{19ab}+1+9+a+b=2009$

$1900+10a+b+10+a+b=2009$

$11a+2b=99$

$b=\dfrac{99-11a}{2}$

$b=49-5a+\dfrac{1-a}{2}$

$b\in\mathbb{N}$ នោះ $2|1-a$

$\Rightarrow a=1-2t\ ;\ t\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow b=49-5(1-2t)+t=44+11t$

$$\Rightarrow\begin{cases}0\le 1-2t\le 9\\ 0\le 44+11t\le 9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 \le t \le \frac{1}{2} \\ -4 \le t \le -\frac{35}{11} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -4 \le t \le -\frac{35}{11}$$

$$\Rightarrow t = -4$$

គេបាន $a = 9$; $b = 0$

ដូចនេះ $n = 1990$

លំហាត់ទី ៤៣៧

គេឱ្យស្វីត $\{a_n\}$ ជាចំនួនពិតដែលកំណត់ដោយ :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n \ , \ (n \ge 1) \end{cases}$$ ។

គណនាផលបូក $S = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

សម្មតិកម្ម : $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n \ , \ (n \ge 1) \end{cases}$

យើងមាន $a_{n+1} - 1 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$

$$\Rightarrow a_{n+2} - 1 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n a_{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1} - 1}{a_{n+2} - 1} = \frac{1}{a_{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_{n=2} - 1} = \frac{1}{a_{n+1}(a_{n+1} - 1)}$$

$$= \frac{a_{n+1} - (a_{n+1} - 1)}{a_{n+1}(a_{n+1} - 1)}$$

$$= \frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_{n+2} - 1}$$

$$n = 1 : \ \frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_2 - 1} - \frac{1}{a_3 - 1}$$

$$n=2:\ \frac{1}{a_3}=\frac{1}{a_3-1}-\frac{1}{a_4-1}$$

....

$$n=k:\ \frac{1}{a_{k+1}}=\frac{1}{a_{k+1}-1}-\frac{1}{a_{k+2}-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{k+1}}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{k+2}-1}$$

$a_1=1;\ a_2=1+a_1=2$

ដូចនេះ $S=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}=2$

លំហាត់ទី ៤៣៨

រកគ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម :

$f[x(1+f(y))+f(y)]=x(1+y)+y$ គ្រប់ $x,y\in\mathfrak{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បើ $f(y_1)=f(y_2)$ និង $x=1$

តាមសម្មតិកម្ម : $f[1(1+f(y_1))+f(y_1)]=f[1(1+f(y_2))+y_2]$

នោះ $(1+y_1)+y_1=(1+y_2)+y_2$

$$y_1=y_2$$

គេបាន f ជាអនុវត្តប្រកាន់ ។

•ចំពោះ $x=0$: នោះ

$$f[x(1+f(y))+f(y)]=x(1+y)+y$$

$$f[f(y)]=y \text{ គ្រប់ } y\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow f[f(x)]=x$ គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

•ចំពោះ $y=0$

$$f[x(1+f(0))+f(0)]=x=f[f(x)]$$

$x(1+f(0))+f(0)=f(x) \quad (1)$

(ព្រោះ f ជាអនុវត្តប្រកាន់)

តាង $f(0)=a$

$(1):\ x(1+a)+a=f(x)$

ពី $f[f(x)]=x$

$f(x)(1+a)+a=x$

$[x(1+a)+a](1+a)+a=x$

$x(1+a)^2+a(1+a)+a=x$

$(2a+a^2)(x+1)=0$ នោះ $\begin{cases} a=0 \\ a=-2 \end{cases}$

ដូចនេះ $f(x)=x$; $f(x)=-x-2$

លំហាត់ទី ៤៣៩

ប្រមាណវិធី $*$ ត្រូវកំណត់នៅលើសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល បើ x និង y ជាពីរចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ $x*y$ ក៏ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែរ ។ ដោយសន្មត់ថា $*$ បំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $x;y$ និង z ចូរគណនា $5*6$ ។

$$\begin{cases} x*(y+z)=(x*y)(x*z) & (1) \\ (x+y)*1=(x*1)+(y*1) & (2) \\ (x+y)*2=(x*2)+4(xy*1)+(y*2) & (3) \end{cases}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

សម្មតិកម្ម : $\begin{cases} x*(y+z)=(x*y)(x*z) & (1) \\ (x+y)*1=(x*1)+(y*1) & (2) \\ (x+y)*2=(x*2)+4(xy*1)+(y*2) & (3) \end{cases}$

តាម (2) : អោយ $x=y=1$

$2*1=(1*1)+(1*1)$

$2*1=2a$ ដែល $a=1*1$

ពី (2) អោយ $x=1$; $y=2$

$3*1=(1*1)+(2*1)$

$3*1=a+2a=3a$

....

$n*1=na$ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}^*$

តាម (1) : អោយ $x=n$; $y=z=1$

$n*2=(n*1)(n*1)$

$\quad\ =(na)^2$

ពី (1) : អោយ $x=n;y=1;z=2$

$n*3=(n*1)(n*2)$

$n*3=(na)^3$

....

$n*m=(na)^m$ គ្រប់ $n,m\in\mathbb{N}^*$

ដោយ $2*2=(2a)^2=4a^2$

តែតាម (3) : អោយ $x=y=1$

$(2*2)=(1*2)+4(1*1)+(1*2)$

$4a^2=a^2+4a+a^2$

$2a^2=4a\Rightarrow a=2$ ព្រោះ $a\neq 0$

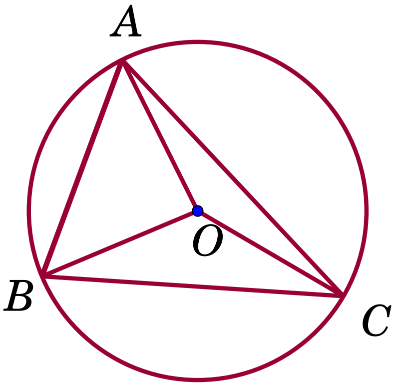
គេបាន $(n*m)=(2n)^m$

ដូចនេះ $5*6=10^6$

លំហាត់ទី ៨៨០

ចំពោះ P; R រៀងគ្នាជាកន្លះបរិមាត្រ និងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណមួយ ចូរកំណត់ប្រភេទត្រីកោណនោះ ដើម្បីឱ្យផលធៀប $\dfrac{P}{R}$ មានតម្លៃធំបំផុត ។

ដំណោះស្រាយ



តាង O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ $\triangle ABC$

កាំ R និង p ជាកន្លះបរិមាត្រនៃ $\triangle ABC$

$(2p)^2=(BC+CA+AB)^2$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz

$(BC+CA+AB)^2\le 3\left(BC^2+CA^2+AB^2\right)$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $BC^2+CA^2+AB^2=\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\right)^2$

$+\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)^2$

$$=6R^2-2\left(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}\right)$$

$$= 9R^2 - \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)^2 \quad (2)$$

(1) និង (2) គេបាន :

$$(2p)^2 \leq 3 \cdot 9R^2$$

$$\frac{P}{R} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ដូចនេះ $\frac{P}{R}$ ធំបំផុតពេល $\frac{P}{R} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

ជាសមភាពពេល $BC = CA = AB$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$

ដូចនេះ $\triangle ABC$ សម័ង្ស

លំហាត់ទី ៤៤១

គណនាតម្លៃនៃកន្សោម

១) $S_n = lncos\frac{a}{2} + lncos\frac{a}{2^2} + \cdots + lncos\frac{a}{2^n}$

២) $P_n = \left(1 + \frac{1}{cosa}\right)\left(1 + \frac{1}{cos2a}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{cos2^n a}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

១) $S_n = lncos\frac{a}{2} + lncos\frac{a}{2^2} + \cdots + lncos\frac{a}{2^n}$

យើងមាន $sin2x = 2sinxcosx$ នោះ $lnsin2x = ln2 + lnsinx + lncosx$

នាំឱ្យ $lncosx = lnsin2x - ln2 - lnsinx$

ជំនួស x ក្នុង (1) ដោយ $\frac{a}{2}, \frac{a}{2^2}, \ldots, \frac{a}{2^n}$ ជាបន្តបន្ទាប់

យើងបាន $lncos\frac{a}{2} = lnsina - lnsin\frac{a}{2} - ln2$

$$lncos\frac{a}{2^2} = lnsin\frac{a}{2} - lnsin\frac{a}{2^2} - ln2$$

....

$$lncos\frac{a}{2^n} = lnsin\frac{a}{2^{n-1}} - lnsin\frac{a}{2^n} - ln2$$

បូកអង្គ : $S_n = lnsina - lnsin\frac{a}{2^n} - nln2$

ដូចនេះ $S_n = ln\dfrac{sina}{2^n sin\frac{a}{2^n}}$

២) $P_n=\left(1+\frac{1}{cosa}\right)\left(1+\frac{1}{cos2a}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{cos2^na}\right)$

យើងមាន $1+\frac{1}{cos2x}=\frac{cos2x+1}{cos2x}=\frac{2cos^x.sin2x}{cos2x.sin2x}$

$$=\frac{2cos^2x\cdot sin2x}{cos2x(2sinxcosx)}=\frac{tan2x}{tanx}\ (2)$$

ជំនួស x ក្នុង (2) ដោយ $\frac{a}{2},a,2a,...,2^{n-1}a$ ជាបន្តបន្ទាប់យើងបាន

$$1+\frac{1}{cosa}=\frac{tana}{tan\frac{a}{2}}$$

$$1+\frac{1}{cos2a}=\frac{tan2a}{tana}$$

....

$$1+\frac{1}{cos2^na}=\frac{tan2^na}{tan2^{n-1}a}$$

គុណអង្គ និង អង្គយើងបាន $P_n=\frac{tan2^na}{tan\frac{a}{2}}$

ដូចនេះ $P_n=\frac{tan2^na}{tan\frac{a}{2}}$

លំហាត់ទី ៨៨២

គេឱ្យចំនួនគត់ n ដែល $n\ge 2$ និងចំនួនមិនអវិជ្ជមាន $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ ។

ចូរស្រាយបំភ្លឺថា $\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

•ចំពោះ $n=2$ យើងបាន $\frac{a_1+a_2}{2}\ge\sqrt{a_1\cdot a_2}$

$\Leftrightarrow a_1+a_2\ge 2\sqrt{a_1\cdot a_2}$

$\Leftrightarrow (a_1+a_2)^2\ge(2\sqrt{a_1\cdot a_2})^2$

$\Leftrightarrow a_1^2+2a_1a_2+a_2^2\ge 4a_1a_2$

$\Leftrightarrow a_1^2-2a_1a_2+a_2^2\ge 0$

$\Leftrightarrow (a_1-a_2)\ge 0$ ពិត

•ឧបមាថាពិតរហូតដល់ $n=k$ គេបាន

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k}{k} \ge \sqrt[k]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_k}\ (1)\ \text{ពិត}$$

•យើងនិងស្រាយថាពិតរហូតដល់ $n=k+1$

តាង $a_{k+1}=\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k}{k}$ នោះវិសមភាព (1) អាចសរសេរ

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k+\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k}{k}}{k+1} \ge$$

$$\sqrt[k+1]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_k\cdot\frac{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_k}{k}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k} \ge \sqrt[k+1]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_k\cdot\frac{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_k}{k}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[k+1]{\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k}{k}\right)^{k+1}} \ge \sqrt[k+1]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_k\cdot\frac{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_k}{k}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[k+1]{\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k}{k}\right)^{k}} \ge \sqrt[k+1]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_k}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k}{k}\right)^{k} \ge a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_k$$

$$\Rightarrow \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k}{k} \ge \sqrt[k]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_k}\ \text{ពិត}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1} \ge \sqrt[k+1]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_k\cdot a_{k+1}}\ \text{ពិត}$$

ដូចនេះ $\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n}$

លំហាត់ទី ៥៥៣

គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិត ខុសពី -1 និង 1 ដែល $a+b+c=abc$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\dfrac{a}{1-a^2}+\dfrac{b}{1-b^2}+\dfrac{c}{1-c^2}=\dfrac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $a=tanx$, $b=tany$, $c=tanz$

យើងបាន $a+b+c=abc \Leftrightarrow tanx+tany+tanz-tanxtanytanz=0$

យើងមាន $tan(x+y+z)=\dfrac{tanx+tany+tanz-tanxtanytanz}{1-tanxtany-tanytanz-tanztanx}$

នោះ $tan(z+y+z)=0$

ដោយ $tan(2x+2y+2z)=\dfrac{tan2x+tan2y+tan2z-tan2xtan2ytan2z}{1-tan2xtan2y-tan2ytan2z-tan2ztan2x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{tan2x+tan2y+tan2z-tan2xtan2ytan2z}{1-tan2xtan2y-tan2ytan2z-tan2ztan2x}=\dfrac{2tan(x+y+z)}{1-tan^2(x+y+z)}$

$\Leftrightarrow tan2x+tan2y+tan2z-tan2xtan2ytan2z=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2a}{1-a^2}+\dfrac{2b}{1-b^2}+\dfrac{2c}{1-c^2}=\left(\dfrac{2a}{1-a^2}\right)\cdot\left(\dfrac{2b}{1-b^2}\right)\cdot\left(\dfrac{2c}{1-c^2}\right)$

ដូចនេះ $\dfrac{a}{1-a^2}+\dfrac{b}{1-b^2}+\dfrac{c}{1-c^2}=\dfrac{4abc}{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)\left(1-c^2\right)}$

លំហាត់ទី ៨៨៨

១. គេឱ្យ $x>-1$ និង $0\leq n\leq 1$ ស្រាយថា $(1+x)^n\leq 1+nx$ ។

២. អនុវត្តវិសមភាពខាងលើ ចូរស្រាយថា

$\left[(sinx)^{2012}\right]^{(cosx)^{2012}}+\left[(cosx)^{2012}\right]^{(sinx)^{2012}}\geq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. គេឱ្យ $x>-1$ និង $0\leq n\leq 1$ ស្រាយថា $(1+x)^n\leq 1+nx$

•ចំពោះ $n=0$ យើងបាន $(1+x)^0\leq 1+0$ ពិត $\forall x>-1$

•ចំពោះ $n=1$ យើងបាន $(1+x)^1\leq 1+x$ ពិត $\forall x>-1$

•ចំពោះ $0<n<1$ យើងតាង $f(x)=(1+x)^n-(1+nx)$

$\Rightarrow f'(x)=n(1+x)^{n-1}-n=n\left[(1+x)^{n-1}-1\right]$

$f'(x)=0$ កាលណា $(1+x)^{n-1}=1\Leftrightarrow 1+x=1$ ឬ $x=0$

$f'(x)>0$ កាលណា $(1+x)^{n-1}>1\Leftrightarrow 1+x<1$ ឬ $x<0$

$f'(x)<0$ កាលណា $(1+x)^{n-1}<1\Leftrightarrow 1+x>1$ ឬ $x>0$

តារាងអថេរភាពនៃ f

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	0	↘	

$f(0)=(1+0)^n-(1+0)=0$

តាមតារាងនេះ យើងបាន $f(x)\leq 0,\ \forall x>-1$

នាំឱ្យ $(1+x)^n-(1+nx)\le 0,\ \forall x>-1$

ដូចនេះ $(1+x)^n\le 1+nx,\ \forall x>-1,\ 0\le n\le 1$

២. អនុវត្តវិសមភាពខាងលើ ចូរស្រាយថា

$$\left[(sinx)^{2012}\right]^{(cosx)^{2012}}+\left[(cosx)^{2012}\right]^{(sinx)^{2012}}\ge 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

តាង $a=(sinx)^{2012}$ និង $b=(cosx)^{2012}$ នោះ $a,b\in[0;1],\ \forall x\in\mathbb{R}$

វិសមភាពខាងលើទៅជា : $a^b+b^a>1,\ \forall a,b\in[0;1]$

•ករណី $a=0\Rightarrow b=1$ យើងបាន $0^1+1^0\ge 1$ ពិត

•ករណី $a=1\Rightarrow b=0$ យើងបាន $1^0+0^1\ge 1$ ពិត

•ករណី $a\in(0;1)\Rightarrow b\in(0;1)$ យើងបាន

$$\frac{1}{a^b}=\left(\frac{1}{a}\right)^b=\left(\frac{a+1-a}{a}\right)^b=\left(1+\frac{1-a}{a}\right)^b\le 1+b\left(\frac{1-a}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^b}\le 1+\frac{b-ab}{a}=\frac{a+b-ab}{a}$$

$$\Rightarrow a^b\ge\frac{a}{a+b-ab}\ (1)$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $b^a\ge\dfrac{b}{b+a-ab}\ (2)$

យក $(1)+(2)$ យើងបាន $a^b+b^a=\dfrac{a}{a+b-ab}+\dfrac{b}{a+b-ab}\ge\dfrac{a+b}{a+b}=1$

ដូចនេះ $\left[(sinx)^{2012}\right]^{(cosx)^{2012}}+\left[(cosx)^{2012}\right]^{(sinx)^{2012}}\ge 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$

លំហាត់ទី ៤៨៥

ដោះស្រាយសមីការ

១) $\sqrt{3}cos^2x+2sinxcosx-\sqrt{3}sin^2x-1=0$

២) $\dfrac{16}{\sqrt{x-2010}}+\dfrac{1}{\sqrt{y-2012}}=10-\left(\sqrt{x-2010}+\sqrt{y-2012}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ

១- $\sqrt{3}cos^2x+2sinxcosx-\sqrt{3}sin^2x-1=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\left(\frac{1+cos2x}{2}\right)+sin2x-\sqrt{3}\left(\frac{1-cos2x}{2}\right)-1=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}cos2x+sin2x=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}cos2x+\frac{1}{2}sin2x=\frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow sin\frac{\pi}{3}cos2x + cos\frac{\pi}{3}sin2x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = sin\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}+2k\pi \\ 2x+\frac{\pi}{3} = \pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12}+k\pi \\ y = \frac{\pi}{4}+k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

ដូចនេះ $x = -\frac{\pi}{12}+k\pi$ ឬ $y = \frac{\pi}{4}+k\pi$ ដែល $k \in \mathbb{Z}$

២) $\frac{16}{\sqrt{x-2010}} + \frac{1}{\sqrt{y-2012}} = 10 - \left(\sqrt{x-2010}+\sqrt{y-2012}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{16}{\sqrt{x-2010}} + \frac{1}{\sqrt{y-2012}} - 10 + \left(\sqrt{x-2010}+\sqrt{y-2012}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{16}{\sqrt{x-2010}} - 8 + \sqrt{x-2010} + \frac{1}{\sqrt{y-2012}} - 2 + \sqrt{y-2012} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{x-2010} - \frac{4}{\sqrt[4]{x-2010}}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{y-2012} - \frac{1}{\sqrt[4]{y-2012}}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{x-2010} = \frac{4}{\sqrt[4]{x-2010}} \\ \sqrt[4]{y-2012} = \frac{1}{\sqrt[4]{y-2012}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2010} = 4 \\ \sqrt{y-2012} = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x-2010 = 16 \\ y-2012 = 1 \end{cases}$

ដូចនេះ $x = 2026\ ; y = 2013$

លំហាត់ទី ៤៤៦

១. ចូរស្រាយបំភ្លឺទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = 2R$ ។

២. បង្ហាញថា បើ a^2, b^2, c^2 ជាតួបន្តគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ $cotA, cotB, cotC$ ក៏ជាតួបន្តគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែរ ។

ដំណោះស្រាយ

១. ស្រាយបំភ្លឺទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស $\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}=2R$

គេមាន a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុង និង S ជាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC

គេបាន $S=\frac{1}{2}bcsinA=\frac{1}{2}acsinB=\frac{1}{2}absinC$

នោះ $2S=bcsinA=acsinB=absinC$ (1)

R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC នោះ $S=\frac{abc}{4R}$

នោះ $2S=\frac{abc}{2R}$ (2)

ផ្ទឹម (1) និង (2) យើងបាន $bcsinA=acsinB=absinC=\frac{abc}{2R}$

ដូចនេះ $\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}=2R$

២. បង្ហាញថា បើ a^2,b^2,c^2 ជាតួបន្តគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ $cotA,cotB,cotC$ ក៏ជាតួបន្តគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែរ

យើងមាន a^2,b^2,c^2 ជាតួបន្តគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ $2b^2=a^2+c^2$

$\Rightarrow a^2+c^2-b^2=b^2$

$\Rightarrow \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{b^2}{2ac}$

នោះ $cosB=\frac{b^2}{2ac}$ ព្រោះ $cosB=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

ដោយ R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC នោះ $sinB=\frac{b}{2R}$

យើងបាន $cotB=\frac{cosB}{sinB}=\frac{\frac{b^2}{2ac}}{\frac{b}{2R}}=\frac{bR}{ac}$ (1)

ដូចគ្នាដែរ $cosA=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ និង $sinA=\frac{a}{2R}\Rightarrow cotA=\frac{R\left(b^2+c^2-a^2\right)}{abc}$

$cosC=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ និង $sinC=\frac{c}{2R}\Rightarrow cotB=\frac{R\left(b^2+a^2-c^2\right)}{abc}$

$cotA+cotB=\frac{R\left(b^2+c^2-a^2\right)}{abc}+\frac{R\left(b^2+a^2-c^2\right)}{abc}=2\left(\frac{bR}{ac}\right)$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $cotA+cotC=2cotB$

ដូចនេះ បើ a^2, b^2, c^2 ជាតួបន្តគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះ $cotA, cotB, cotC$ ក៏ជាតួបន្តគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តដែរ

លំហាត់ទី ៤៤៧

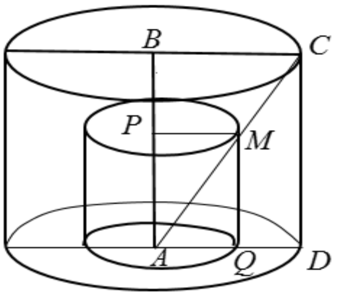
$ABCD$ ជាការេ ជ្រុងមានរង្វាស់ស្មើ a ។ ចំណុច M នៃអង្កត់ទ្រូងមានចំណោលកែង P និង Q លើជ្រុង $[AB]$ និង $[AD]$ រៀងគ្នា ។ គេពិនិត្យសូលីត $\sum$ កកើតដោយពហុកោណ $PBCDQM$ ក្នុងរង្វិលជុំវិញអង្កត់ $[AB]$ ហើយសន្មត់យក $AP = x$ ដែល $0 \le x \le a$ ។

១) គណនាផ្ទៃក្រឡាសរុប S និងមាឌ V នៃសូលីត $\sum$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។

២) កំណត់ទិសដៅអថេរភាពនៃ S និង V កាលណា x ប្រែប្រួលពី 0 ទៅ a ។

ដំណោះស្រាយ

១) គណនាផ្ទៃក្រឡាសរុប S និងមាឌ V នៃសូលីត $\sum$ ជាអនុគមន៍នៃ x



បើគេបង្វិលពហុកោណ $PBCDQM$ ជុំវិញ $[AB]$ គេបាន

•ជ្រុង $[CD]$ បង្កបានផ្ទៃ $2\pi \cdot BC \cdot CD = 2\pi a^2$ (1)

•ជ្រុង $[BC$ បង្កបានផ្ទៃ $\pi \cdot BC^2 = \pi a^2$ (2)

•ជ្រុង $[QM]$ បង្កបានផ្ទៃ $2\pi \cdot PM \cdot QM = 2\pi a^2$

ដោយ $APMQ$ ជាការេ នោះ $AP = PM = QM = x$

$\Rightarrow 2\pi \cdot PM \cdot QM = 2\pi x^2$ (3)

• ជ្រុង $[PM]$ បង្កបានផ្ទៃ $\pi \cdot PM^2 = \pi a^2$ (4)

យើងបានផ្ទៃសរុប $S = (1) + (2) + [(2) - (4)] + (3) + (4)$

$S = 2\pi a^2 + \pi a^2 + (\pi a^2 - \pi x^2) + 2\pi x^2 + \pi x^2$

ដូចនេះ $S = 2\pi(x^2 + 2a^2)$ ឯកតាផ្ទៃ

គណនាមាឌ V

យើងបាន V_1 ជាមាឌបង្កបានពីរង្វិល $ABCD$ ជុំវិញ AB

$\Rightarrow V_1 = \pi AD^2 \cdot DC = \pi a^3$

V_2 ជាមាឌបង្កបានពីរង្វិល $APMQ$ ជុំវិញ AB

$\Rightarrow V_2 = \pi AQ^2 \cdot QM = \pi x^3$

$V = V_1 - V_2 = \pi a^3 - \pi x^3 = \pi\left(a^3 - x^3\right)$

២) កំណត់ទិសដៅអថេរភាពនៃ S និង V កាលណា x ប្រែប្រួលពី 0 ទៅ a

$S = 2\pi\left(x^2 + 2a^2\right)$

•ដែនកំណត់ $\mathbb{D} = [0;a]$

•ដេរីវេ $S'(x) = 2\pi(2x) = 4\pi x \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{D}$

ដូចនេះ ផ្ទៃ S កើនលើចន្លោះ $[0;a]$

- កំណត់ទិសដៅអថេរភាពនៃ V

$V = \pi\left(a^3 - x^3\right)$

•ដែនកំណត់ $\mathbb{D} = [0;a]$

•ដេរីវេ $V'(x) = -3x^2 \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{D}$

ដូចនេះ V ចុះលើចន្លោះ $[0;a]$

លំហាត់ទី ៨៤៨

គេអោយ a, b ជាពីរចំនួនពិតខុសគ្នា និង c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^4 - 2019a = b^4 - 2019b = c$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $-\sqrt{c} < ab < 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

- គេមាន $a^4 - 2019a = b^4 - 2019b$

$2019(a-b) = a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)\left(a^2+b^2\right)$

តែ $a \neq b$ នោះ $(a+b)\left(a^2+b^2\right) = 2019$

នាំអោយ $a + b \neq 0$

យើងបាន $2c = a^4 - 2019a + b^4 - 2019b$

$$\begin{aligned} &= a^4 + b^4 - 2019(a-b) \\ &= a^4 + b^4 - (a+b)^2\left(a^2+b^2\right) \\ &= -2ab\left(a^2+ab+b^2\right) \end{aligned}$$

គេទាញបានថា $ab\left(a^2+ab+b^2\right) = -c < 0$ (1)

តែ $a^2 + ab + b^2 = \dfrac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + (a+b)^2\right) > 0$ (2)

តាម (1) និង (2) : $ab < 0$

យើងពិនិត្យមើល $a^2 + ab + b^2 = (a+b)^2 - ab > -ab$ (សមភាពមិនកើតមានទេ ព្រោះ $a + b \neq 0$)

នោះ $-c = ab\left(a^2+ab+b^2\right) < -(ab)^2$

នោះ $(ab)^2 < c$
នោះ $-\sqrt{c} < ab < \sqrt{c}$
ដូចនេះ $-\sqrt{c} < ab < 0$
របៀបផ្សេងទៀត
តាមច្បាប់សញ្ញាដេកាត (Descart's Rule of Signs) ពហុធា $p(x) = x^4 - 2019x - c$ មានឫសវិជ្ជមានមួយ និងឫសអវិជ្ជមានមួយ ។
នោះ a, b ត្រូវតែជាឫសជាចំនួនពិតនៃពហុធា $p(x)$
ដោយមួយក្នុងចំណោម a, b វិជ្ជមាន នោះ $ab < 0$
តាង $r \pm is$ ជាឫសកុំផ្លិចនៃពហុធា $p(x)$
តាមទ្រឹស្តីបទ Vietta

$$ab\left(r^2+s^2\right) = -c \qquad (1)$$

$$a+b+c+2r = 0 \qquad (2)$$

$$ab+2ar+2br+r^2+s^2 = 0 \qquad (3)$$

តាម (2) និង (3) : $r^2+s^2 = -2r(a+b)-ab = (a+b)^2 - ab \geq -ab$ (4)
បើ (4) ក្លាយជាសមភាព នោះ $a+b=0$
តាម (2): $r=0$ និងតាម (3): $s^2 = -ab$
គេបានឫសនៃ $P(x)$ គឺ $a, -a, ia, -ia$
យើងបាន $p(x) = x^4 + a^4$ ផ្ទុយពីការពិត
វិសមភាព (4) គឺដាច់ខាត (មិនអាចក្លាយជាសមភាព)
តាម (1): $c = -\left(r^2+s^2\right)ab > (ab)^2$
ដូចនេះ $-\sqrt{c} < ab < 0$

លំហាត់ទី ៤៤៩

រកគ្រប់ចំនួនបឋម p ដោយដឹងថាមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន x, y, z ដែលធ្វើអោយ $x^p + y^p + z^p - x - y - z$ ជាផលគុណនៃបីចំនួនបឋមផ្សេងគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $A = x^p + y^p + z^p - x - y - z$
- បើ $p = 2$ យើងយក $x = y = 4$ និង $z = 3$
$A = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
- បើ $p = 3$ យើងយក $x = 3, y = 2$ និង $z = 1$
$A = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

-បើ $p=5$ យើងយក $x=2, y=2$ និង $z=1$

$A=30=2\cdot3\cdot5$

ឧបមាថា យើងអាចរកចំនួនបឋម $p\geq5$ ដែល A ជាផលគុណនៃបីចំនួនបឋមផ្សេងគ្នា

សិក្សាពីភាពសមមូលចំពោះ 2 និង 3 គេឃើញថា A ចែកដាច់នឹង 2 ផងនិងចែកដាច់នឹង 3 ផង ។

តាមទ្រឹស្តីបទហ្វែរម៉ាត

$$x^p+y^p+z^p-x-y-z\equiv x+y+z-x-y-z=0\ (\bmod p)$$

តាមសម្មតិកម្ម យើងត្រូវដោះស្រាយសមីការ $x^p+y^p+z^p-x-y-z=6p$

បើក្នុងចំណោម x,y,z មានមួយធំជាងឬស្មើ 2 ចាត់ទុកថា $x\geq2$

នោះ $6p\geq x^p-x=x\left(x^{p-1}-1\right)\geq2\left(2^{p-1}-1\right)=2^p-2$

តែតាមកំណើន គេឃើញយ៉ាងងាយថា $2^n-2>6n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n\geq6$

នោះការឧបមាមិនពិត

គេមិនអាចរកចំនួនបឋម $p\geq5$ ដែល A ជាផលគុណនៃបីចំនួនបឋមផ្សេងគ្នា

ដូចនេះ $p=2, p=3$ និង $p=5$

លំហាត់ទី ៤៥០

ត្រីកោណ ABC មាន $AB<AC$ ។ មេដ្យាទ័រនៃជ្រុង BC ជួបបន្ទាត់ AB និង AC ត្រង់ចំណុច P និង Q រៀងគ្នា ។ តាង H ជាអរតូសង់នៃត្រីកោណ ABC ។ M និង N ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង BC និង PQ រៀងគ្នា ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ HM និង AN ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុចមួយនៅលើរង្វង់ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\angle APQ=\angle BPM=90^0-\angle CBA=\angle HCB$

និង $\angle AQP=\angle MQC=90^0-\angle QCM=90^0-\angle ACB=\angle CBH$

គេបាន $\triangle APQ\sim\triangle HCB$ (ករណី ម.ម)

M និង N ជាចំណុចកណ្តាលនៃ BC និង PQ រៀងគ្នា

នោះ $\triangle AQN\sim\triangle HBM$

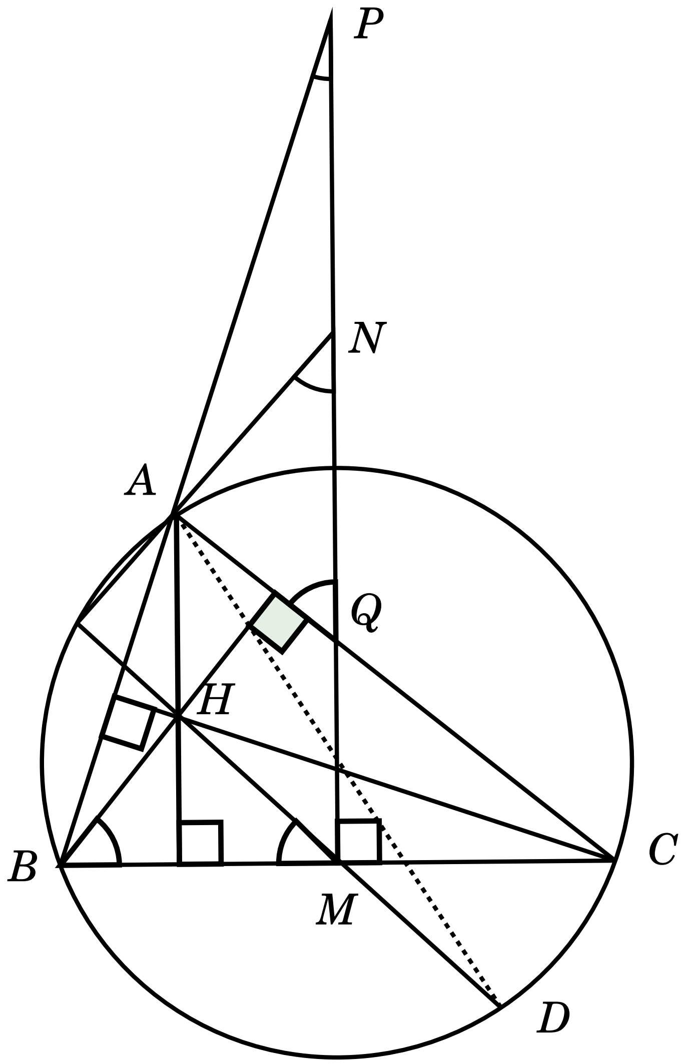
គេបាន $\angle ANQ=\angle HMB$

តាង L ជាចំណុចប្រសព្វរវាង AN និង HM

$\angle MLN=180^0-\angle LNM-\angle NML=180^0-\angle LMB-\angle NML=180^0-\angle NMB=90^0$

តាង D ជាចំណុចមួយនៅលើរង្វង់នៃត្រីកោណ ABC (D ជាចុងម្ខាងទៀតនៃអង្កត់ផ្ចិត)

D ជាចំណុចឆ្លុះនៃចំណុច H ធៀប M
នោះ D ជាចំណុចនៅលើបន្ទាត់ MH និង $\angle DLA = \angle MLA = \angle MLN = 90^0$
ប៉ុន្តែ DA ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC
លក្ខខណ្ឌ $\angle DLA = 90^0$ គ្រប់គ្រាន់អោយយើងអះអាងថា L នៅលើរង្វង់



លំហាត់ទី ៤៥១

រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :

ក. $y=\sqrt{log_x\left(x^3+1\right)log_{x+1}x-2}$

ខ. $y=log_{x^2+1}\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $y=\sqrt{log_x\left(x^3+1\right)log_{x+1}x-2}$

អនុគមន៍ y មានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x^3+1>0 \\ x+1>0 \\ x+1\neq 1 \\ log_x\left(x^3+1\right)log_{x+1}-2>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ log_{x+1}\left(x^3+1\right)\geq 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x^3+1\geq (x+1)^2 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x>0 & (1) \\ x\neq 1 & (2) \\ (x+1)\left(x^2-x+1\right)\geq (x+1)^2 & (3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ (x+1)\left(x^2-2x\right)\geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x\geq 2$

ដូចនេះ $\mathbb{D}=[2;+\infty)$

ខ. $y=log_{x^2+1}\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}$

អនុគមន៍មានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases} x^2+1>0 \\ x^2+1\neq 0 \\ 1-4x^2\geq 0 \\ x\neq 0 \\ \dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -\frac{1}{2} \le x < 0 \\ 0 < x \le \frac{1}{2} \end{cases} \\ \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} > 0 \ (1) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\left(1-\sqrt{1-4x^2}\right)\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x}{1+\sqrt{1-4x^2}} > 0$$

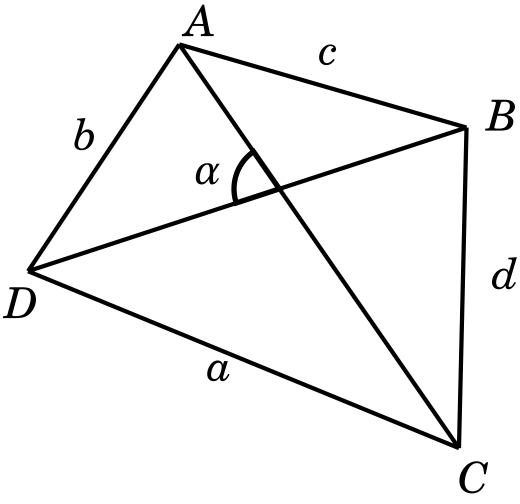
$$\Leftrightarrow x > 0$$

ដូចនេះ $\mathbb{D} = \left(0;\ \frac{1}{2}\right]$

លំហាត់ទី ៤៥២

ស្រាយបញ្ជាក់ថា អង្កត់ទ្រូងនៃចតុកោណមួយកែងគ្នាលុះត្រាតែជ្រុងឈមនៃចតុកោណនោះ មានផលបូកការេស្មើគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ



•យើងនិងស្រាយថាបើ $\alpha = 90^0$ នោះ $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

ក្នុងត្រីកោណកែង AOD : $b^2 = OD^2 + OA^2$

ក្នុងត្រីកោណកែង AOB : $c^2 = OA^2 + OB^2$

ក្នុងត្រីកោណកែង BOC : $d^2 = OB^2 + OC^2$

ក្នុងត្រីកោណកែង DOC : $a^2 = OD^2 + OC^2$

$\Rightarrow a^2+c^2=OD^2+OC^2+OA^2+OB^2$ និង $b^2+d^2=OD^2+OA^2+OB^2+OC^2$

គេបាន $a^2+c^2=b^2+d^2$ (1)

•យើងនិងស្រាយថាបើ $a^2+c^2=b^2+d^2$ នោះ $AC\perp BD$

បើ $a^2+c^2=b^2+d^2$ នោះ $DC^2+AB^2=AD^2+BC^2$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\right)^2+\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)^2=\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OC}\cdot\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\right)$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\right)=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$ (2)

តាម (1) និង (2) អង្កត់ទ្រូងនៃចតុកោណមួយកែងគ្នាលុះត្រាតែជ្រុងឈមនៃចតុកោណនោះ មានផលបូកការេស្មើគ្នា

លំហាត់ទី ៤៥៣

គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (u_n) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n, $u_{n+2}=2u_{n+1}-2u_n$, $u_0=-2$ និង $u_1=2$ ។ គណនា u_n ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $u_{n+2}=2u_{n+1}-2u_n$, $u_0=-2$ និង $u_1=2$

សមីការសំគាល់ $\lambda^2-2\lambda+2=0$ មានឫស $\lambda_1=1+i$, $\lambda_2=1-i$

យើងបាន $\lambda_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $\lambda_2=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\Rightarrow arg=\frac{\pi}{4}$ និង $r=\sqrt{2}$ យកអាគុយម៉ង់វិជ្ជមាន ។

យើងបាន $u_n=r^n\left(\alpha cosn\frac{\pi}{4}+\beta sinn\frac{\pi}{4}\right)$

ដោយ $u_0=-2$ និង $u_1=2$ យើងបាន

$$\begin{cases}\sqrt{2}^0\left(\alpha cos0+\beta sin0\right)=-2\\ \sqrt{2}^1\left(\alpha cos\frac{\pi}{4}+\beta sin\frac{\pi}{4}\right)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+0\cdot\beta=-2\\ \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha+\beta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \alpha=-2,\ \beta=4$

ដូចនេះ $u_n=\sqrt{2}\left(-2cosn\frac{\pi}{4}+4sinn\frac{\pi}{4}\right)$

លំហាត់ទី ៤៥៤

រកតួទី n នៃស្វ៊ីត (u_n) ដែលកំណត់ដោយ $u_1 = 1$ និង $u_{n+1} = u_n(u_n+2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $u_{n+1} = u_n(u_n+2)$

$\Leftrightarrow u_{n+1}+1 = (u_n+1)^2$

$\Leftrightarrow ln(u_{n+1}+1) = 2ln(u_n+1)$ (1)

តាងស្វ៊ីត (v_n) ដែល $v_n = ln(u_n+1)$, $n \in \mathbb{N}$

នោះ $v_{n+1} = ln(u_{n+1}+1)$

$(1) \Rightarrow v_{n+1} = 2v_n$

(v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន $v_1 = ln(u_1+1) = ln2$ និង $q = 2$

គេបាន $v_n = v_1 \times q^{n-1} = (ln2) \times 2^{n-1}$

តែ $v_n = ln(u_n+1)$ នោះ $u_n = e^{v_n} - 1$

$\Rightarrow u_n = e^{(ln2)\times 2^{n-1}} - 1$ ដូចនេះ $u_n = 2^{2^{n-1}} - 1$

លំហាត់ទី ៤៥៥

ដោះស្រាយសមីការ

ក) $\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x = 3^x + 4^x + 5^x$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាព Cauchy

$a+b \geq 2\sqrt{ab}, (a>0, b>0)$ ហើយ $a+b = 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a = b$

យើងបាន

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{15}{4}\right)^x} = 2\sqrt{3^{2x}} = 2\times 3^x$$

$$\left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{20}{3}\right)^x} = 2\sqrt{5^{2x}} = 2\times 5^x$$

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{20}{3}\right)^x} = 2\sqrt{4^{2x}} = 2\times 4^x$$

បូកអង្គ និង អង្គ យើងបាន $2\left[\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x\right]\geq 2(3^x+4^x+5^x)$

ជាសមភាព $2\left[\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x\right]=2(3^x+4^x+5^x)$

កាលណា $\left(\frac{12}{5}\right)^x=\left(\frac{15}{4}\right)^x=\left(\frac{20}{3}\right)^x$

$\Rightarrow x=0$

ដូចនេះ $x=0$

លំហាត់ទី ៤៥៦

ដោយមិនចាំបាច់ធ្វើប្រមាណវិធីគុណចូរស្រាយថា $2011\times 2013<2012^2$ រួចទាញថា $log_{2011}2012>log_{2012}2013$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន $2011\times 2013=(2012-1)(2012+1)=2012^2-1<2012^2$ ពិត

ទាញថា $log_{2011}2012>log_{2012}2013$

យើងមាន $2011\times 2013<2012^2$

$\Rightarrow log_{2012}2011+log_{2012}2013<log_{2012}2012^2=2$ (1)

ម្យ៉ាងទៀតតាមវិសមភាព Cauchy

$log_{2011}2012+log_{2012}2011>2\sqrt{log_{2011}2012\times log_{2012}2011}=2$ (2)

តាម (1) និង (2) : $log_{2011}2012+log_{2012}2011>log_{2012}2011+log_{2012}2011$

$\Rightarrow log_{2011}2012>log_{2012}2013$ ពិត

លំហាត់ទី ៤៥៧÷

ខ) $\dfrac{\left(1+2cosx+3cos^2x+4cos^3x+\cdots+ncos^{n-1}x\right)-(1+2+3+\cdots+n)cos^nx}{2\times1+3\times2cosx+4\times3cos^2x+\cdots+n(n-1)cos^{n-2}x+(n+1)ncos^{n-1}x}=\dfrac{1}{4}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $N=1+2cosx+3cos^2x+4cos^3x+\cdots+ncos^{n-1}x-\dfrac{n(n+1)}{2}cos^nx$

និង $D=2\times1+3\times2cosx+4\times3cos^2x+\cdots+n(n-1)cos^{n-2}x+(n+1)ncos^{n-1}x$ (1)

$\Rightarrow Dcosx=2cosx+6cos^2x+12cos^3x+\cdots+n(n-1)cos^{n-1}x+(n+1)ncos^nx$ (2)

យក $(1)-(2)$ យើងបាន :

$D(1-cosx)=2+4cosx+6cos^2x+\cdots+2ncos^{n-1}x-(n+1)ncos^nx$

$D(1-cosx)=2N\Rightarrow\dfrac{N}{D}=\dfrac{1-cosx}{2}$

យើងបាន (E) : $\dfrac{1-cosx}{2}=\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow 1-cosx=\dfrac{1}{2}$ ឬ $cosx=\dfrac{1}{2}=cos\dfrac{\pi}{3}$

ដូចនេះ $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

លំហាត់ទី ៤៥៨

រកបណ្តាអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)cosy,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ និង $f(0)=2013,\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2013$ ។

ដំណោះស្រាយ

$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)cosy,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ (1)

- យក $x=t-\frac{\pi}{2},\ y=\frac{\pi}{2}$

$(1)\Rightarrow f(t)+f(t-\pi)=2f\left(t-\frac{\pi}{2}\right)cos\frac{\pi}{2}=0$

$\Rightarrow f(t)+f(t-\pi)=0$

- យក $x=\frac{\pi}{2},y=t-\frac{\pi}{2}$

$(1)\Rightarrow f(t)+f(\pi-t)=2f\left(\frac{\pi}{2}\right)cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f(t)+f(\pi-t)=4026sint$

- យក $x=0,y=t-\pi$

$(1)\Rightarrow f(t-\pi)+f(\pi-t)=2f(0)cos(t-\pi)$

$\Rightarrow f(t-\pi)+f(\pi-t)=-4024cost$

យើងបាន $\begin{cases} f(t)+f(t-\pi)=0 & (2)\\ f(t)+f(\pi-t)=4026sint & (3)\\ f(t-\pi)+f(\pi-t)=-4024cost & (4)\end{cases}$

យក $(2)+(3)-(4)$ គេបាន $2f(t)=2(2013sint+2012cost)$

$f(t)=2013sint+2012cost$

ដូចនេះ $f(x)=2013sinx+2012cosx$

លំហាត់ទី ៤៥៩

ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិច C គេមានសមីការ (E): $z^3-(6+4i)z^2+(8+14i)z-12i=0$ ។

ក. ដោះស្រាយសមីការ (E) យក z_1 ជាឫសពិត និង z_2,z_3 ជាឫសពីរផ្សេងទៀតដែល $|z_2|<|z_3|$ ។

ខ. ក្នុងប្លង់ប្រដាប់ដោយតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(o;\vec{i};\vec{j})$ គេឱ្យបីចំណុច $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ និង $M_3(z_3)$ ។ ស្រាយថា $M_1M_2M_3$ ជាត្រីកោណកែង ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដោះស្រាយសមីការ (E) យក z_1 ជាឫសពិត និង z_2,z_3 ជាឫសពីរផ្សេងទៀតដែល $|z_2|<|z_3|$

សមីការ (E): $z^3-(6+4i)z^2+(8+14i)z-12i=0$

តាង $z=a$ ជាឫសពិតនៃសមីការ (E)

យើងបាន $a^3-(6+4i)a^2+(8+14i)a-12i=0$

$\Leftrightarrow a^3-6a^2-4a^2i+8a+14ai-12i=0$

$\Leftrightarrow (a^3-6a^2+8a)-(4a^2-14a+12)i=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3-6a^2+8a=0 \\ 4a^2-14a+12=0 \end{cases}$ រឺ $\begin{cases} a(a^2-6a+8)=0 & (1) \\ 2a^2-7a+6=0 & (2) \end{cases}$

$(1)\Rightarrow a=0,\ a=2,\ a=4$

$(2)\Rightarrow a=2,\ a=\dfrac{3}{2}$

$(1)\cap(2)$ យើងបាន (E) មានឫសពិត $z_1=2$

យក $\alpha,\ \beta,\ \lambda\in\mathbb{C}$ ដែល

$$(z-2)(\alpha z^2+\beta z+\lambda)=z^3-(6+4i)z^2+(8+14i)z-12i$$

$\alpha z^3-2\alpha z^2+\beta z^2+\lambda z-2\beta z-2\lambda=z^3-(6+4i)z^2+(8+14i)z-12i$

$\alpha z^3+(-2\alpha+\beta)z^2+(\lambda-2\beta)z-2\lambda=z^3-(6+4i)z^2+(8+14i)z-12i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ -2\alpha+\beta=-6-4i \\ \lambda-2\beta=8+14i \\ -2\lambda=-12i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-4-4i \\ \lambda=6i \end{cases}$

សមីការ (E) អាចសរសេរទៅជា $(z-2)\left[z^2-(4+4i)z+6i\right]=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z=2 & (3) \\ z^2-(4+4i)z+6i=0 & (4) \end{cases}$

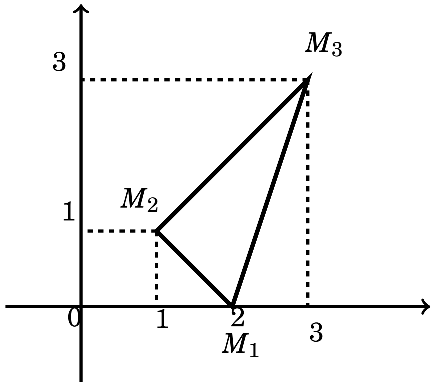
(4) មាន $\Delta=[-(4+4i)]^2-4(1)(6i)=32i-24i=[2(1+i)]^2$

(4) មានឫស $z'=\dfrac{4+4i-2-2i}{2}=1+i$ និង $z''=\dfrac{4+4i+2+2i}{2}=3+3i$

ដោយ $|z_2|<|z_3|$ នោះ $z_2=1+i$ និង $z_3=3+3i$

ដូចនេះ សមីការ (E) មានឫស $z_1=2,\ z_2=1+i$ និង $z_3=3+3i$

ខ. ស្រាយថា $M_1M_2M_3$ ជាត្រីកោណកែង



យើងមាន $M_1(2),\ M_2(1+i),\ M_3(3+3i)$

$M_1M_2=|1+i-2|=\sqrt{2}$

$M_2M_3=|3+3i-1-i|=2\sqrt{2}$

$M_1M_3=|3+3i-2|=\sqrt{10}$

$M_1M_2^2=\sqrt{2}^2=2$

$M_2M_3^2=(2\sqrt{2})^2=8$
$M_1M_3^2=(\sqrt{10})^2=10$
$M_1M_2^2+M_2M_3^2=2+8=10=M_1M_3^2$
តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ $M_1M_2^2+M_2M_3^2=M_1M_3^2$
ដូចនេះ $\triangle M_1M_2M_3$ ជាត្រីកោណកែងត្រង់ M_2

លំហាត់ទី ៤៦០

សរសេរចំនួនកុំផ្លិច $z_1=1-i\left(\sqrt{3}+2\right)$ និង $z_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ដំណោះស្រាយ

- ចំពោះ $z_1=1-i\left(\sqrt{3}+2\right)$

ម៉ូឌុល $r=\sqrt{1^2+\left[-(\sqrt{3}+2)\right]^2}=\sqrt{1+3+4\sqrt{3}+4}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$cos\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ និង $sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}=-\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$cos2\alpha=1-2sin^2\alpha=1-2\left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2=1-1-\dfrac{1}{2}\sqrt{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$sin2\alpha=2sin\alpha cos\alpha=2\left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)=-\dfrac{1}{2}$

ដោយ $cos2\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $sin2\alpha=-\dfrac{1}{2}$ នោះ $2\alpha=\dfrac{7\pi}{6}$

$\Rightarrow \alpha=\dfrac{7\pi}{12}$

ដូចនេះ $z_1=2\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(cos\dfrac{7\pi}{12}+isin\dfrac{7\pi}{12}\right)$

- ចំពោះ $z_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

ម៉ូឌុល $r=\sqrt{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}=2$

$cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$$cos2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha = 2\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ដោយ $cos2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $sin2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ នោះ $2\alpha = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8}$

ដូចនេះ $z_2 = 2\left(cos\frac{\pi}{8} + isin\frac{\pi}{8}\right)$

លំហាត់ទី ៤៦១

គណនាលីមីតខាងក្រោម

ក. $A = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

ខ. $B = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. $A = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$$A = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$A = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

ដូចនេះ $A = \frac{1}{2}$

ខ. $B = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$

តាង $\sum = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$

ដោយ $\epsilon = \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$ ជាផលបូក n តួនៃ $\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$

និង $\delta = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$ ជាផលបូក n តួនៃ $\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$

គេបាន $\epsilon < \sum < \delta$ ឬ $n \times \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} < \sum < n \times \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$

$$\Rightarrow \frac{n^2}{\sqrt{n^4\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}} < \sum < \frac{n^2}{\sqrt{n^4\left(1+\frac{1}{n^4}\right)}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2\sqrt{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}} < \lim_{n\to+\infty} \sum < \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2\sqrt{\left(1+\frac{1}{n^4}\right)}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}} < \lim_{n\to+\infty} \sum < \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n^4}\right)}}$$

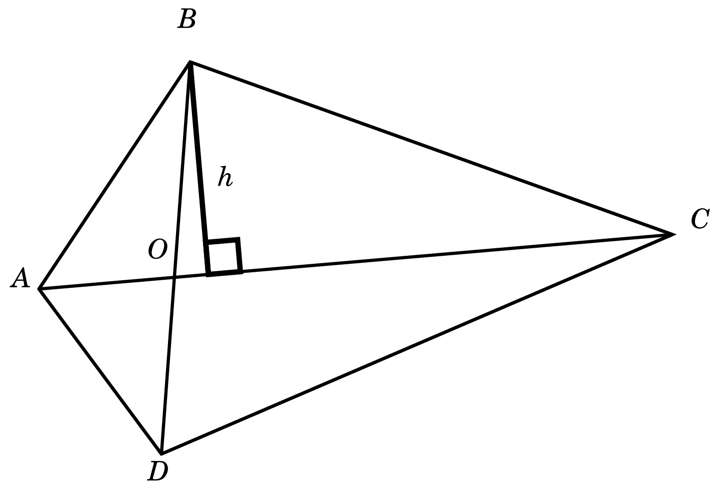
$$1 < \lim_{n\to+\infty} \sum < 1$$

ដូចនេះ $B = 1$

លំហាត់ទី ៤៦២

គេអោយចតុកោណប៉ោង $ABCD$ ដែលមាន O ជាចំណុចប្រសព្វរវាងអង្កត់ទ្រូងទាំងពីរ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $S_{OAB} \cdot S_{OCD} = S_{OBC} \cdot S_{OAD}$ ។

ដំណោះស្រាយ



តាង h ជាវង្វាស់កម្ពស់ដែលគូសចេញពីកំពូល B មកលើ AC

ដោយ h ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណ OAB និង OBC យើងបាន

$S_{OAB}=\frac{1}{2}h\cdot OA$ និង $S_{OBC}=\frac{1}{2}h\cdot OC$

នោះ $\frac{S_{OAB}}{S_{OBC}}=\frac{OA}{OC}$

ស្រដៀងគ្នាដែរ គេបាន $\frac{S_{OAD}}{S_{OCD}}=\frac{AO}{OC}$

$\Rightarrow\frac{S_{OAB}}{S_{OBC}}=\frac{S_{OAD}}{S_{OCD}}$

$\Rightarrow S_{OAB}\cdot S_{OCD}=S_{OBC}\cdot S_{OAD}$ ពិត

លំហាត់ទី ៤៦៣

ក. ស្រាយថា $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b ។ គណនា $A=\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$ រួចទាញថា $A^{a+b}\ge A^{2\sqrt{ab}}$ ។

ខ. ស្រាយថា $\frac{2}{e^2}\le\int_0^2 e^{x-x^2}dx\le 2\sqrt[4]{e}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b

ចំពោះ $a>0,b>0$ យើងមាន $(a-b)^2\ge 0$

$a^2-2ab+b^2\ge 0$

$a^2+2ab+b^2\ge 4ab$

$(a+b)^2\ge 2ab$

$\Leftrightarrow a+b\ge 2\sqrt{ab}$ ពិត

•គណនា $A=\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$ រួចទាញថា $A^{a+b}\ge A^{2\sqrt{ab}}$

តាង $y=(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$ នោះ $lny=\frac{1}{x}(e^x+x)$

$$\lim_{x\to 0}lny=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}ln(e^x+x)=\lim_{x\to 0}\frac{[ln(e^x+x)]'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{1}=2$$

ដូចនេះ $A=e^2$

យើងមាន $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ (សម្រាយខាងលើ) និង $A=e^2>1$

តាមលក្ខណៈអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល យើងបាន $A^{a+b}\ge A^{2\sqrt{ab}}$ ពិត

ខ. ស្រាយថា $\frac{2}{e^2} \le \int_0^2 e^{x-x^2}dx \le 2\sqrt[4]{e}$

យើងមាន $y = x - x^2$ ដែល $x \in [0;2]$

$y' = 1-2x$

$y' = 0$ កាលណា $1-2x=0$ ឬ $x = \frac{1}{2}$

x	0	$\frac{1}{2}$	2
fx	$+$	0	$-$
$f(x)$	0 ↗	$\frac{1}{4}$	↘ -2

តាមតារាងអថេរភាព $-2 \le x - x^2 \le \frac{1}{4}$ ចំពោះ $x \in [0;2]$

$\Rightarrow e^{-2} \le e^{x-x^2} \le e^{\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow \frac{1}{e^2} \le e^{x-x^2} \le \sqrt[4]{e}$

$\Rightarrow \int_0^2 \frac{1}{e^2}dx \le \int_0^2 e^{x-x^2} \le \int_0^2 \sqrt[4]{e}dx$

$\Leftrightarrow \left[\frac{x}{e^2}\right]_0^2 \le \int_0^2 e^{x-x^2}dx \le \left[\sqrt[4]{e}x\right]_0^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{e^2}(2-0) \le \int_0^2 e^{x-x^2}dx \le \sqrt[4]{e}(2-0)$

ដូចនេះ $\frac{2}{e^2} \le \int_0^2 e^{x-x^2}dx \le 2\sqrt[4]{e}$ ពិត

លំហាត់ទី ៩៦៩

តាង $u_0, u_1, u_2, ..., u_n$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតដែលបំពេញទំនាក់ទំនង

$(3-u_{n+1})(6+u_n) = 18$ និង $u_0 = 3$ ។ គណនា $\sum_{k=0}^{2011} \frac{1}{u_k}$ ។

ដំណោះស្រាយ

សម្មតិកម្ម $u_0, u_1, u_2, ..., u_n$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ (3-u_{n+1})(6+u_n)=18 \end{cases}$$

យើងមាន $(3-u_{n+1})(6+u_n)=18$

$3u_n - 6u_{n+1} - u_{n+1}\cdot u_n = 0$

ចែកអង្គនឹង $u_{n+1}\cdot u_n$

$\Rightarrow \dfrac{3}{u_{n+1}} - \dfrac{6}{u_n} - 1 = 0 \ (1)$

តាង $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ នោះ $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}}$

$(1) \Rightarrow 3v_{n+1} - 6v_n - 1 = 0$

$$v_{n+1} = 2v_n + \frac{1}{3}$$

$$v_{n+1} + \frac{1}{3} = 2\left(v_n + \frac{1}{3}\right)$$

តាង $a_n = v_n + \dfrac{1}{3} \Rightarrow a_{n+1} = 2a_n$

$\Rightarrow (a_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q=2$ និងតួទី1 $a_0 = v_0 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow a_n = a_0\cdot q^n = \dfrac{2}{3}\cdot 2^n$

គេបាន $v_n = \dfrac{1}{3}\cdot 2^{n+1} - \dfrac{1}{3}$

$$= \frac{1}{3}\left(2^{n+1}-1\right)$$

$$\sum_{k=0}^{2011}\frac{1}{u_k} = \sum_{k=0}^{2011} v_k$$

$$= \sum_{k=0}^{2011}\frac{1}{3}\left(2^{n+1}-1\right)$$

$$\sum_{k=0}^{2011}\frac{1}{u_k} = \frac{1}{3}\left(2+2^2+\cdots+2^{2012}-2012\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(2\cdot\frac{2^{2012}-1}{2-1} - 2012\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(2^{2013}-2014\right)$$

ដូចនេះ $\sum_{k=0}^{2011}\frac{1}{u_k}=\frac{1}{3}(2^{2013}-2014)$

លំហាត់ទី ៤៦៥

គេឱ្យ $sinx+siny+sinz=0$ ។ កំណត់តម្លៃអតិបរមា និង អប្បបរមានៃកន្សោម $M=sin^2x+sin^4y+sin^6z$ ។

ដំណោះស្រាយ

$\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ យើងបាន $\begin{cases}0\le sin^2x\le 1 & (1)\\ 0\le sin^4y\le sin^2y\le 1 & (2)\\ 0\le sin^6z\le sin^4z\le sin^2z\le 1 & (3)\end{cases}$

យក $(1)+(2)+(3)$ យើងបាន

$0\le sin^2x+sin^4y+sin^6z\le 1+sin^2y+sin^4z\le 1+sin^2y+sin^2z\ (4)$

តែតាមសម្មតិកម្ម $sinx+siny+sinz=0$

$\Rightarrow siny+sinz=-sinx$

$\Rightarrow sin^2y+2sinysinz+sin^2z=sin^2x$

$\Rightarrow sin^2y+sin^2z=sin^2x-2sinxysiny$

តាម $(4)\Rightarrow 0\le sin^2x+sin^4y+sin^6z\le 1+sin^2x-2sinysinz\le 1+2sin^2x\le 2$

$0\le sin^2x+sin^4y+sin^6z\le 2$

ដូចនេះ $\text{Max}(M)=2$ និង $\text{min}(M)=0$

លំហាត់ទី ៤៦៦

គណនា $I=\int_0^{\pi}e^{|cosx|}\left(2sin\left(\frac{1}{2}cosx\right)+3cosx\left(\frac{1}{2}cosx\right)sinx\right)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$I=\int_0^{\pi}e^{|cosx|}\left(2sin\left(\frac{1}{2}cosx\right)+3cosx\left(\frac{1}{2}cosx\right)sinx\right)dx$$

$$=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{cosx}sinxcos\left(\frac{1}{2}cosx\right)dx$$

ព្រោះ $\int_0^{2a} f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{បើ } f(2a-x) = -f(x) \\ 2\int_0^{a} f(x)dx & \text{បើ } f(2a-x) = f(x) \end{cases}$

តាង $t = cosx$ នោះ $dt = -sinxdx$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	1	0

$$I = 6\int_1^0 e^t cos\left(\frac{t}{2}\right)(-dt)$$

$$I = 6\int_0^1 e^t cos\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

$$= \frac{2}{5}\left[e^t\left(sin\left(\frac{t}{2}\right) + 2cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{24}{5}\left(ecos\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{e}{2}sin\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right)$$

លំហាត់ទី ៤៦៧

ពីរចំនួន a និង b ត្រូវបានជ្រើសរើសដោយចៃដន្យចេញពីសំណុំនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ $N = \{1,2,3,...,30\}$ ។ ប្រូបាបដែល $a^2 - b^2$ ចែកដាច់នឹង 3 ស្មើនឹង :

ក. $\frac{9}{87}$ ខ. $\frac{12}{87}$ គ. $\frac{15}{87}$ ឃ. $\frac{47}{87}$

ដំណោះស្រាយ

ចំនួនរបៀបនៃការជ្រើសរើសពីរលេខចេញពី 1,2,3,..,30 គឺ $\binom{2}{30} = 435$

$a^2 - b^2$ ចែកដាច់នឹង 3 កាលណា a,b សុទ្ធតែចែកដាច់នឹង 3 ឬ a,b សុទ្ធតែមិនចែកដាច់នឹង 3

ចំនួនករណីស្របគឺ $\binom{2}{10} + \binom{2}{20} = 235$

ប្រូបាបគឺ $\frac{235}{435} = \frac{47}{87}$

ដូចនេះ ចម្លើយ ឃ.

លំហាត់ទី ៤៦៨

ចូរកំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន k តូចជាងគេ ដោយដឹងថាមានចំនួនគត់ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ ដែល $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \cdots + x_k^3 = 2002^{2002}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងនិងបង្ហាញថា 2002^{2002} មិនអាចសរសេរជាផលបូកនៃបីគូបប្រាកដទេ

យើងមាន $2002 \equiv 4 \pmod 9$ នោះ $2002^3 \equiv 4^3 \equiv 1 \pmod 9$

គេបាន $2002^{2002} = \left(2002^3\right)^{667} \cdot 2002 \equiv 4 \pmod 9$

ម្យ៉ាងទៀត $x^3 \equiv 0, \pm 1 \pmod 9$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ x

នោះ $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ ចែកនឹង 9 មិនអាចមានសំណល់ 4 ទេ

ដូចនេះ 2002^{2002} មិនអាចជាផលបូកនៃបីគូបប្រាកដទេ

តែយើងនិងបង្ហាញថា 2002^{2002} អាចសរសេរជាផលបូកនៃបួនគូបប្រាកដបាន

យើងមាន $2002 = 1000 + 1000 + 1 + 1 = 10^3 + 10^3 + 1^3 + 1^3$

$$2002^{2002} = 2002^{2001} \cdot 2002 = \left(2002^{667}\right)^3 \cdot \left(10^3 + 10^3 + 1^3 + 1^3\right)$$

$$= \left(2002^{667} \cdot 10\right)^3 + \left(2002^{667} \cdot 10^3\right) + \left(2002^{667}\right)^3 + \left(2002^{667}\right)^3$$

នោះ 2002^{2002} អាចសរសេរជាផលបូកនៃបួនគូបប្រាកដបាន

ដូចនេះ ចំនួនគត់តូចបំផុតគឺ $k = 4$

លំហាត់ទី ៤៦៩

គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ដោយ $u_n = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{k}{(k+1)!}$, $k \in \mathbb{N}$ ។

គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_1^n + u_2^n + \cdots + u_{2013}^n}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ប្រៀបធៀប u_{n+1} និង u_n

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{k+1}{(k+2)!} > 0$ នោះ $u_{n+1} > u_n$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow u_{2013}^n < u_1^n + u_2^n + \cdots + u_{2013}^n < 2013 \cdot u_{2013}^n$$

$$\Rightarrow u_{2013} < \sqrt[n]{u_1^n + u_2^n + \cdots + u_{2013}^n} < \sqrt[n]{2013} \cdot u_{2013}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_{2013} < \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_1^n + u_2^n + \cdots + u_{2013}^n} < \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2013} \cdot u_{2013}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_{2013} < \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_1^n+u_2^n+\cdots+u_{2013}^n} < \lim_{n\to+\infty} 2013^{\frac{1}{n}}\cdot u_{2013}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_1^n+u_2^n+\cdots+u_{2013}^n} = u_{2013}\ (1)$$

រក u_{2013}

យើងមាន $\dfrac{k}{(k+1)!}=\dfrac{k+1}{k!(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)!}=\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}$

$$\Rightarrow u_{2013}=\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2012!}-\frac{1}{2013!}\right)$$

$$u_{2013}=1-\frac{1}{2013!}\ (2)$$

តាម (1) និង (2) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_1^n+u_2^n+\cdots+u_{2013}^n}=1-\dfrac{1}{2013!}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_1^n+u_2^n+\cdots+u_{2013}^n}=1-\dfrac{1}{2013!}$

លំហាត់ទី ៤៧០

គេឱ្យ a,b និង c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a+b+c=1$ ។ បង្ហាញថា $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{bc}\right)\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{ca}\right)\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{ab}\right)\geq 1728$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាព AM-GM យើងបាន

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{bc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{3bc}+\frac{1}{3bc}+\frac{1}{3bc}\geq 4\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{27ab^3c^3}}$$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{bc}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{ca}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}\right)\geq 4\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{27ab^3c^3}}\cdot 4\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{27ba^3c^3}}\cdot 4\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{27ca^3b^3}}$$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{bc}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{ca}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}\right)\geq=\frac{64}{\sqrt[4]{3^9(abc)^7}}\ (1)$$

តែ $\dfrac{1}{27}=\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3\geq abc\ (2)$

តាម (1) និង (2) យើងបាន

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{bc}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{ca}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}\right)\geq\frac{64}{\sqrt[4]{3^9\left(3^{-3}\right)^7}}=64\sqrt[4]{3^{12}}$$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{bc}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{ca}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}\right)\geq 1728 \text{ ពិត}$$

លំហាត់ទី ៤៧១

គណនាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y = cosx + sinx$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។ រកតម្លៃ x ជាអនុគមន៍នៃ n ដើម្បីអោយ $y^{(n)} = 0$ និងអនុវត្តចំពោះ $n = 2013$ ។

ដំណោះស្រាយ

យក $y_1 = cosx \Rightarrow y_1' = -sinx = cos\left(\frac{1\cdot\pi}{2} + x\right)$

$$\Rightarrow y_1'' = (-sinx)' = -cosx = cos\left(\frac{2\cdot\pi}{2} + x\right)$$

$$\Rightarrow y_1''' = (-cosx)' = sinx = cos\left(\frac{3\cdot\pi}{2} + x\right)$$

....

តាមគំរូយើងទាញបាន $y_1^{(n)} = cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2} + x\right)$

យក $y_2 = sinx \Rightarrow y_2' = cosx = sin\left(\frac{1\cdot\pi}{2} + x\right)$

$$\Rightarrow y_2'' = (cosx)' = -sinx = sin\left(\frac{2\cdot\pi}{2} + x\right)$$

$$\Rightarrow y_2''' = (-sinx)' = -cosx = sin\left(\frac{3\cdot\pi}{2} + x\right)$$

$$\Rightarrow y^{(4)} = (-cosx)' = sinx = sin\left(\frac{4\cdot\pi}{2} + x\right)$$

....

តាមគំរូយើងទាញបាន $y_2^{(n)} = sin\left(\frac{n\cdot\pi}{2} + x\right)$

ដូចនេះ $y^{(n)} = y_1^{(n)} + y_2^{(n)} = cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2} + x\right) + sin\left(\frac{n\cdot\pi}{2} + x\right)$

•រកតម្លៃ x ជាអនុគមន៍នៃ n ដើម្បីអោយ $y^{(n)} = 0$ និងអនុវត្តចំពោះ $n = 2013$

យើងមាន $y^{(n)} = cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2} + x\right) + sin\left(\frac{n\cdot\pi}{2} + x\right)$

$y^{(n)} = 0$ នោះ $cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2} + x\right) + sin\left(\frac{n\cdot\pi}{2} + x\right) = 0$

$\Rightarrow tan\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) = -1 = tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \frac{n\pi}{2} + x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + k\pi$

ដូចនេះ $x=-\dfrac{(2n+1)\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

អនុវត្តចំពោះ $n=2013$

យើងមាន $tan\left(\dfrac{n\pi}{2}+x\right)=-1=tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow tan\left(\dfrac{2013\pi}{2}+x\right)=tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow tan\left(1006\pi+\dfrac{\pi}{2}+x\right)=tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow tan\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{\pi}{2}+x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

ដូចនេះ $x=-\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

របៀបទី ២

$x=-\dfrac{(2n+1)\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ នោះ $x=-\dfrac{(2013\times2+1)\pi}{4}+k\pi$

$x=-\dfrac{4027\pi}{4}+k\pi$ ឬ $x=-\left(1006\pi+\dfrac{3\pi}{4}\right)+k\pi$

$\Rightarrow x=-\dfrac{3\pi}{4}+k\pi$ ព្រោះ $tan\left(1006\pi+\dfrac{3\pi}{4}\right)=tan\dfrac{3\pi}{4}$

លំហាត់ទី ៤៧២

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c គេបាន

$$\sqrt[3]{(x+a)(y+b)(z+c)}\geq\sqrt[3]{xyz}+\sqrt[3]{abc}\ ។$$

ខ. ស្រាយថា $\dfrac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\dfrac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\dfrac{2c+a+b}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c គេបាន

$$\sqrt[3]{(x+a)(y+b)(z+c)}\geq\sqrt[3]{xyz}+\sqrt[3]{abc}$$

យើងមាន $(x+a)(y+b)(z+c)=xyz+ayz+bxz+cxy+abz+acy+bcx+abc$

តាមវិសមភាព AM-GM យើងបាន

$ayz+bxz+cxy\geq 3\sqrt[3]{abcx^2y^2z^2}$ (1)

និង $abz+acy+bcx\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2xyz}$ (2)

យក (1)+(2) យើងបាន

$(x+a)(y+b)(z+c)\geq xyz+abc+\sqrt[3]{abcx^2y^2z^2}+\sqrt[3]{a^2b^2c^2xyz}$

$(x+a)(y+b)(z+c)\geq\left(\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{xyz}\right)^3$

ដូចនេះ $\sqrt[3]{(x+a)(y+b)(z+c)}\geq\sqrt[3]{xyz}+\sqrt[3]{abc}$

ខ. ស្រាយថា $\dfrac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\dfrac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\dfrac{2c+a+b}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c

តាង $T=\dfrac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\dfrac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\dfrac{2c+a+b}{2c^2+(a+b)^2}$

យក $S=a+b+c$ នោះយើងទាញបានថា

$T=\dfrac{(a+S)^2}{2a^2+(a-S)^2}+\dfrac{(b+S)^2}{2b^2+(b-S)^2}+\dfrac{2}{2c^2+(c-S)^2}$

យើងមាន $\dfrac{(a+S)^2}{2a^2+(a-S)^2}=\dfrac{a^2+2aS+S^2}{3a^2-2aS+S^2}$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3a^2+6aS+3S^2}{3a^2-6aS+S^2}=\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{8aS+2S^2}{3a^2-6aS+S^2}\right)$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{8aS+2S^2}{(3a-S)^2+2S^2}$

ដោយ $(3a-S)^2\geq 0$ នោះ $(3a-S)^2+2S^2\geq 2S^2$

នោះ $\dfrac{8aS+2S^2}{(3a-S)^2+2S^2}\leq\dfrac{8aS+2S^2}{2S^2}=1+\dfrac{4a}{S}=1+\dfrac{4a}{a+b+c}$

យើងទាញបាន $\dfrac{8aS+2S^2}{(3a-S)^2+2S^2}\leq\dfrac{4}{3}+\dfrac{4a}{a+b+c}$

ដូចគ្នាដែរ $\dfrac{(b+S)^2}{2b^2+(b-S)^2}\leq\dfrac{4}{3}+\dfrac{4b}{a+b+c}$, $\dfrac{(c+S)^2}{2c^2+(c-S)^2}\leq\dfrac{4}{3}+\dfrac{4c}{a+b+c}$

សរុបមក $T\leq\dfrac{4}{3}+\dfrac{4a}{a+b+c}+\dfrac{4}{3}+\dfrac{4b}{a+b+c}+\dfrac{4}{3}+\dfrac{4c}{a+b+c}$

$T\leq 8$ ពិត

ដូចនេះ $\dfrac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\dfrac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\dfrac{2c+a+b}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c

លំហាត់ទី ៤៧៣

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''-4y'+8y=e^{2x}+cos2x$ ។

ដំណោះស្រាយ

•សមីការសំគាល់ $\lambda^2-4\lambda+8=0$

មាន $\Delta'=(-2)^2-1\times8=-4=(2i)^2$

$\lambda=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(2i)^2}}{1}=2\pm2i$ នោះ $\alpha=2,\beta=2$

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូហ្សែន $y''-4y'+8=0$ គឺ $y_c=(Acos\beta x+Bsin\beta x)e^{\alpha x}$

នោះ $y_c=(Acos2x+Bsin2x)e^{2x},\ A,B\in\mathbb{R}$

•តាង $y_1=Ce^{2x}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y''-4y'+8y=e^{2x}$ (1)

$\Rightarrow y_1^{'}=2Ce^{2x},\ y_1^{''}=4Ce^{2x}$

យក $y_1,y_1^{'},y_1^{''}$ ជំនួសចូល (1)

$4Ce^{2x}-4\left(2Ce^{2x}\right)+8Ce^{2x}=e^{2x}$

នាំអោយ $C=\dfrac{1}{4}$ ហើយ $y_1=\dfrac{1}{4}e^{2x}$

•តាង $y_2=Dcos2x+Esin2x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ $y''-4y'+8y=sin2x$ (2)

$\Rightarrow y_2^{'}=-2Dsin2x+2Ecos2x,\ y_2^{''}=-4Dcos2x-4Esin2x$

យក $y_2.y_2^{'},y_2^{''}$ ជំនួសចូល (2)

$-4Dcos2x-4Esin2x-4(-2Dsin2x+2Ecos2x)+Dcos2x+Esin2x=sinx$

$(4D-8E)cos2x+(4E+8D)sin2x=sin2x$

យើងទាញបាន $\begin{cases}4D-8E=0\\8D+4E=1\end{cases}$

នាំអោយ $D=\dfrac{1}{10},\ E=\dfrac{1}{20}$

គេបាន $y_2=\dfrac{1}{10}cos2x+\dfrac{1}{20}sin2x$

$y_p=y_1+y_2=\dfrac{1}{4}e^{2x}+\dfrac{1}{10}cos2x+\dfrac{1}{20}sin2x$

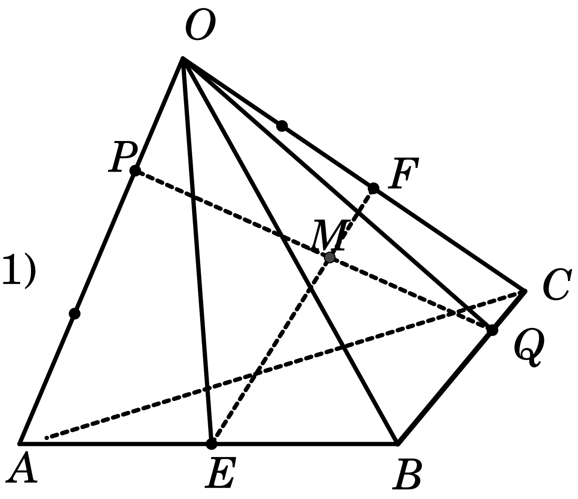
ចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺ $y=y_c+y_p$

ដូចនេះ $y=(Acos2x+Bsin2x)e^{2x}+\dfrac{1}{4}e^{2x}+\dfrac{1}{10}cos2x+\dfrac{1}{20}sin2x$

លំហាត់ទី ៤៧៤

ក្នុងចតុមុខ $OABC$ យក E ជាចំណុចកណ្ដាលនៃទ្រនុង AB ហើយ Fនិង P ចែកក្នុង OC និង OA តាមផលធៀប $\frac{FO}{FC}=\frac{2}{1}$ និង $\frac{PO}{PA}=\frac{1}{2}$ ។ យក Q នៅលើទ្រនុង BC ដែល $\overrightarrow{BQ}=t\overrightarrow{BC}$ ។ បើ PQ ប្រសព្វ EF ត្រង់ចំណុច M ។ បង្ហាញថា $\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OE}+(1-k)\overrightarrow{OF},(0<k<1)$ និង $\overrightarrow{OM}=m\overrightarrow{OP}+(1-m)\overrightarrow{OQ},(0<m<1)$ រួចកំណត់តម្លៃ t ។

ដំណោះស្រាយ



យើងមាន $PQ\cap EF=\{M\}$ នោះ

$$\begin{cases} M\in EF \\ M\in PQ \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FM}=k\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{OF},(0<k<1)$$
$$=k\left(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OF}\right)+\overrightarrow{OF}$$
$$=k\overrightarrow{OE}-k\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OF}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OE}+(1-k)\overrightarrow{OF},(0<k<1)$

ម្យ៉ាងទៀត $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QM}$

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OQ}+m\overrightarrow{QP}$$
$$=\overrightarrow{OQ}+m\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}\right)$$
$$=OQ+m\overrightarrow{OP}-m\overrightarrow{OQ}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{OM}=m\overrightarrow{OP}+(1-m)\overrightarrow{OQ},(0<m<1)$

•កំណត់តម្លៃ t

តាង $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{c}$ នោះ $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}$

ដោយ $\frac{FO}{FC}=\frac{2}{1}\Rightarrow\overrightarrow{OF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{c}$ និង $\frac{PO}{PA}=\frac{1}{2}\Rightarrow\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{a}$

ហើយ $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{b}+t\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}+t\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)$

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{b}+t\overrightarrow{c}-t\overrightarrow{b}=(1-t)\overrightarrow{b}+t\overrightarrow{c}$$

យើងបាន $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OE} + (1-k)\overrightarrow{OF} = \frac{k}{2}\vec{a} + \frac{k}{2}\vec{b} + \frac{2}{3}(1-k)\vec{c}$ (1)

និង $\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OP} + (1-m)\overrightarrow{OQ} = \frac{m}{3}\vec{a} + (1-m)(1-t)\vec{b} + (1-m)t\vec{c}$ (2)

ផ្ទឹម (1) និង (2) យើងបាន

$$\begin{cases} \frac{k}{2} = \frac{m}{3} & (3) \\ \frac{k}{2} = (1-m)(1-t) & (4) \\ \frac{2}{3}(1-k) = (1-m)t & (5) \end{cases}$$

តាម (3) និង (4) គេបាន $\frac{m}{2} = 1 - t - m + mt \Rightarrow m = \frac{3-3t}{4-3t}$

តាម (5) យើងបាន $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}m = \left(1 - \frac{3-3t}{4-3t}\right)t$

$6 - 4\left(\frac{3-3t}{4-3t}\right) = 9\left(\frac{4-3t-3+3t}{4-3t}\right)t$

$24 - 18t - 12 + 12t = 9t$

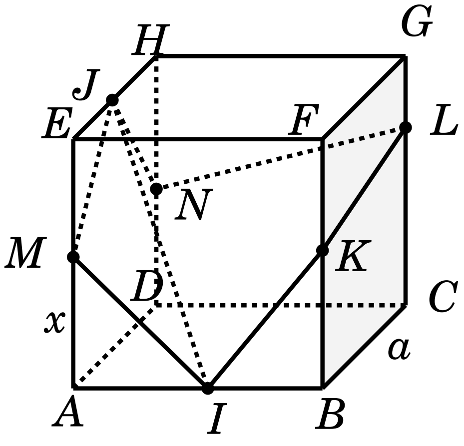
$-15t = -12$ នោះ $t = \frac{12}{15}$

ដូចនេះ: $t = \frac{4}{5}$

លំហាត់ទី ៤៧៥

គូប $ABCDEFGH$ មួយមានរង្វាស់ជ្រុង a ។ I ជាចំណុចកណ្តាលនៃ AB ហើយ J ជាចំណុចកណ្តាលនៃ EH ។ រករង្វាស់ខ្លីបំផុតពី I ទៅ J តាមមុខខាងនៃគូប ។

ដំណោះស្រាយ



ផ្លូវធ្វើដំណើរពី I ទៅ J កាត់តាមមុខខាងនៃគូបមានពីរគឺ $IMJ < IKLNJ$ (មើលរូបភាពជាក់ស្តែង)

ដូចនេះ យើងជ្រើសរើសយកផ្លូវ $IMJ = IM + MJ$

តាង $AM = x$ ដែល $0 < x < a \Rightarrow ME = a - x$

$IM^2 = \frac{a^2}{4} + x^2$ នោះ $IM = \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2}$

$MJ^2 = \frac{a^2}{4} + (a-x)^2$ នោះ $MJ = \sqrt{\frac{a^2}{4} + (a-x)^2}$

យើងយក $l(x) = IM + MJ$

$$l(x) = \sqrt{\frac{a^2}{4} + x^2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + (a-x)^2}$$

ដេរីវេ $l'(x) = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + a^2}} + \frac{2a - 2x}{\sqrt{4x^2 - 8ax + 5a^2}}$

$l'(x) = 0$ កាលណា$8a^3x = 4a^4$ ឬ $x = \frac{a}{2}$

តារាងអថេរភាព

x	0		$\frac{a}{2}$		a
$l(x)$		$-$	0	$+$	
$l(x)$		↘	អប្បបរមា	↗	

$l(x)$ ខ្លីបំផុត ចំពោះ $x = \frac{a}{2}$

រង្វាស់ខ្លីបំផុតពី I ទៅ J គឺ $l\left(\frac{a}{2}\right) = a\sqrt{2}$ ឯកតាប្រវែង

លំហាត់ទី ៤៧៦

ស្រាយបញ្ជាក់ថា លក្ខខណ្ឌចាំបាច់ និងគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីអោយត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ A គឺ $\frac{sinB + sinC}{cosB + cosC} = sinA$ ។

ដំណោះស្រាយ

•លក្ខខណ្ឌចាំបាច់

សម្មតិកម្ម $\triangle ABC$ កែងត្រង់ A

ស្រាយថា $\frac{sinB+sinC}{cosB+cosC}=sinA$

គេមាន $\angle A=90^0$ នោះ $sinA=1$

បើ $\angle A=90^0$ នោះ $\angle B+\angle C=90^0$

$\Rightarrow sinB=cosC$ និង $sinC=cosB$

នាំអោយ $sinB+sinC=cosB+cosC$

នាំអោយ $\frac{sinB+sinC}{cosB+cosC}=1=sinA$

•លក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់

សម្មតិកម្ម $\frac{sinB+sinC}{cosB+cosC}=1\ (1)$

ស្រាយថា $\triangle ABC$ កែងត្រង់ A

យើងមាន $\frac{sinB+sinC}{cosB+cosC}=\frac{2sin\frac{B+C}{2}cos\frac{B-C}{2}}{2cos\frac{B+C}{2}cos\frac{B-C}{2}}=tan\frac{B+C}{2}$

តែ $A+B+C=\pi$ នោះ $B+C=\pi-A$

$\Rightarrow \frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$

$tan\left(\frac{B+C}{2}\right)=tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=cot\frac{A}{2}\ (2)$

តាម (1) និង (2) : $\frac{cos\frac{A}{2}}{sin\frac{A}{2}}=sinA$

$\Leftrightarrow \frac{cos\frac{A}{2}}{sin\frac{A}{2}}=2sin\frac{A}{2}cos\frac{A}{2}$

$\Leftrightarrow 1=2sin^2\frac{A}{2}$ ឬ $1-2sin^2\frac{A}{2}=0$

នាំអោយ $cosA=0$ និង $\angle A=90^0$

$\triangle ABC$ កែងត្រង់ A

ដូចនេះ ត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ A លុះត្រាតែ $\frac{sinB+sinC}{cosB+cosC}=1$

លំហាត់ទី ៨៧៧

គេគ្រោងថាឈ្នួលប្រចាំឆ្នាំនៃផ្ទះមួយកើនឡើង 6% រៀងរាល់ឆ្នាំ ។ គេសំគាល់ដោយ $f(n)$ ឈ្នួលប្រចាំឆ្នាំនៅឆ្នាំ $2002+n$ $(n\in\mathbb{N})$ ។

១. សរសេរ $f(n+1)$ ជាអនុគមន៍នៃ n រួចសរសេរ $f(n)$ ជាអនុគមន៍នៃ $f(0)$ និង n ។

២. គេឧបមាថា $f(0)=80000$៖ តើឈ្នួលប្រចាំឆ្នាំនៃផ្ទះមួយនៅឆ្នាំ 2008 ត្រូវជាប៉ុន្មាន ?

៣. តើចាប់ពីឆ្នាំណាទៅទើបឈ្នួលផ្ទះប្រចាំឆ្នាំ កើនលើសពីពីរដងនៃឈ្នួលផ្ទះប្រចាំឆ្នាំនៅឆ្នាំ 2002 ?

ដំណោះស្រាយ

១. សរសេរ $f(n+1)$ ជាអនុគមន៍នៃ n រួចសរសេរ $f(n)$ ជាអនុគមន៍នៃ $f(0)$ និង n

$f(n+1)$ ជាឈ្នួលផ្ទះនៅឆ្នាំ $2002+(n+1)$ ដែលស្មើនឹងឈ្នួលផ្ទះ $f(n)$ នៅឆ្នាំ $2002+n$ បន្ថែម 6% មានន័យថាគុណ $f(n)$ នឹង 1.06 ។

$f(n+1)=f(n)\times(1.06)$

$f(n)$ ជាតួទី n ស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុង $q=1.06$ និងតួទី ១ $f(0)$ ។

យើងបាន $f(n)=f(0)(1.06)^n$

២. រកឈ្នួលផ្ទះនៅឆ្នាំ 2008

$2008=2002+6$

$f(6)=(1.06)^6\cdot f(0)$

$\quad=(1.06)^6\cdot 80000=113481$

៣. កំណត់ឆ្នាំដើម្បីអោយឈ្នួលផ្ទះកើនឡើងលើសពីពីរដងឈ្នួលផ្ទះនៅឆ្នាំ 2002:

$f(n)=(1.06)^n\cdot f(0)$

$f(n)\geq 2f(0)$

$\Leftrightarrow (1.06)^n\cdot f(0)\geq 2f(0)$

$(1.06)^n\geq 2$

$(1.06)^{11}=1.8983$

$(1.06)^{12}=2.0122$

ដូចនេះ ចាប់ពីឆ្នាំ $2002+12=2014$ ទៅទើបឈ្នួលផ្ទះកើនឡើងលើសពីពីរដងឈ្នួលផ្ទះនៅឆ្នាំ 2002

លំហាត់ទី ៤៧៨

ស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ $x_1=1, x_2=1$ និង $x_{n+1}=x_n+x_{n-1}$ ចំពោះ $n\geq 2$ ។
១- បង្ហាញថា $x_{k+1}\cdot x_{k+2}-x_k\cdot x_{k+3}=(-1)^k$ ចំពោះ $\forall k\in\mathbb{N}$ ។
២- គេតាង $arccot$ ជាអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ cot ។
បង្ហាញថា $arccotx_1-arccotx_3-arccotx_5-\cdots-arccotx_{2011}=arccotx_{2012}$ ។

ដំណោះស្រាយ

១- បង្ហាញថា $x_{k+1}\cdot x_{k+2}-x_k\cdot x_{k+3}=(-1)^k$ ចំពោះ $\forall k\in\mathbb{N}$

-ចំពោះ $k=1$ គេបាន $x_2\cdot x_3-x_1\cdot x_4=1\times 2-1\times 3=-1=(-1)^1$

-ឧបមាថាពិតដក់ $n=p$ គឺថា $x_{p+1}\cdot x_{p+2}-x_p\cdot x_{p+3}=(-1)^p$

-សិក្សាលើករណី $k=p+1$

$$x_{p+2}\cdot x_{p+3}-x_{p+1}\cdot x_{p+4}=x_{p+2}\left(x_{p+1}+x_{p+2}\right)-x_{p+1}\left(x_{p+2}+x_{p+3}\right)$$
$$=\left(x_{p+2}\right)^2-x_{p+1}\left(x_{p+1}+x_{p+2}\right)=\left(x_{p+2}\right)^2-x_{p+1}\cdot x_{p+2}$$
$$=\left(x_{p+2}-x_{p+1}\right)\left(x_{p+1}+x_{p+1}\right)-x_{p+1}x_{p+2}$$
$$=\left(x_{p+1}+x_p-x_{p+1}\right)\left(x_{p+3}\right)-x_{p+1}x_{p+2}$$
$$=x_px_{p+3}-x_{p+1}x_{p+2}$$
$$=(-1)\left(x_{p+1}\cdot x_{p+2}-x_p\cdot x_{p+3}\right)=(-1)(-1)^p=(-1)^{p+1}$$

ដូចនេះ $x_{k+1}x_{k+2}-x_kx_{k+3}=(-1)^k$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k

២- បង្ហាញថា $arccotx_1-arccotx_3-arccotx_5-\cdots-arccotx_{2011}=arccotx_{2012}$

គេដឹងថាបើ $a=cot\alpha, b=cot\beta\Rightarrow\alpha=arccota, \beta=arccotb$

$$cot(\alpha-\beta)=\frac{cot\alpha cot\beta+1}{cot\beta-cot\alpha}\Leftrightarrow\alpha-\beta=arccot\left(\frac{cot\alpha cot\beta+1}{cot\beta-cot\alpha}\right)$$

$$\Leftrightarrow arccota-arccotb=arccot\left(\frac{ab+1}{b-a}\right)$$

គេអាចសរសេរ

$$arccotx_{2i}-arccotx_{2i+1}=arccot\left(\frac{x_{2i}x_{2i+1}+1}{x_{2i+1}-x_{2i}}\right)$$
$$=arccot\left(\frac{x_{2i}x_{2i+1}+1}{x_{2i}+x_{2i-1}-x_{2i}}\right)$$
$$arccotx_{2i}-arccotx_{2i+1}=arccot\left(\frac{x_{2i}x_{2i+1}+1}{x_{2i-1}}\right)\quad(1)$$

តាមសំណួរទី ១ ខាងលើនិងយក $k=2i-1$ នោះគេបាន

$$x_{2i}\cdot x_{2i+1}-x_{2i-1}\cdot x_{2i+2}=-1\Rightarrow x_{2i}\cdot x_{2i+1}+1=x_{2i-1}\cdot x_{2i+2}$$

ដោយជួសតម្លៃ $i = 1,2,3,...,1005$ នោះគេបាន

$arccotx_1 - arccotx_3 = arccotx_4$ (ព្រោះ $x_2 = x_1$)

$arccotx_4 - arccotx_5 = arccotx_6$

....

$arccotx_{2010} - arccotx_{2011} = arccotx_{2012}$

បូកអង្គ និង អង្គគេបាន

$arccotx_1 - arccotx_3 - arccotx_5 - \cdots - arccotx_{2011} = arccotx_{2012}$

លំហាត់ទី ៤៧៩

អនុគមន៍ f កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ $f(x) = cosx + cos\left(\sqrt{p}x\right)$ ដែល p ជាចំនួនបឋម ។ បង្ហាញថា f មិនមែនជាអនុគមន៍ខួបលើសំណុំចំនួនពិតទេ ។

ដំណោះស្រាយ

ឧបមាថា f មានខួប T នោះគេបាន $f(x+T) = f(x)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

បានន័យថា $cos(x+T) + cos\left(x\sqrt{p} + T\sqrt{p}\right) = cosx + cos\left(x\sqrt{p}\right)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ពិនិត្យចំពោះ $x = 0$ គេបាន : $cosT + cosT\sqrt{p} = 2 \Leftrightarrow cosT = 1 \wedge cosT\sqrt{p} = 1$

$T = 2k\pi \wedge T\sqrt{p} = m2\pi, k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ ហើយ $\sqrt{p} = \dfrac{m2\pi}{k2\pi} = \dfrac{m}{k}$

ដោយ $\sqrt{p} \in \overline{\mathbb{Q}_+} \wedge \dfrac{m}{k} \in \mathbb{Q}_+$ គេបាន $\sqrt{p} = \dfrac{m}{k}$ ជាករណីមិនអាចកើតមាន ។

ដូចនេះ f មិនមែនជាអនុគមន៍ខួបលើសំណុំចំនួនពិតទេ

លំហាត់ទី ៤៨០

គេឱ្យចំនួនពិត $u_1;u_2;...$ បំពេញទំនាក់ទំនង

$u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - u_{n-1} + 2u_n}{u_{n-1} + 1}$ និង $u_1 = 1; u_2 = 7$ ។ គណនាតម្លៃនៃ u_5 ។

ដំណោះស្រាយ

សម្មតិកម្ម $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - u_{n-1} + 2u_n}{u_{n-1} + 1}$

$$\Rightarrow u_{n+1} + 1 = \frac{u_n^2 - u_{n-1} + 2u_n}{u_{n-1} + 1} + 1$$

$\Rightarrow u_{n+1}+1=\dfrac{(u_n+1)^2}{u_{n-1}+1}$

តាង $v_n=u_{n+1}$ នោះ $v_{n+1}=\dfrac{v_n^2}{v_{n-1}}$

$\Rightarrow v_n^2=v_{n+1}\times v_{n-1}$

$\Rightarrow (v_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $v_1=u_1+1=2$ និង $v_9=u_9+1=8$

គេបាន $v_5^2=v_1\times v_9=16$

$v_5=\pm 4$

តែ $v_5=v_1\cdot q^4$ នោះ v_5 និង v_1 មានសញ្ញាដូចគ្នា

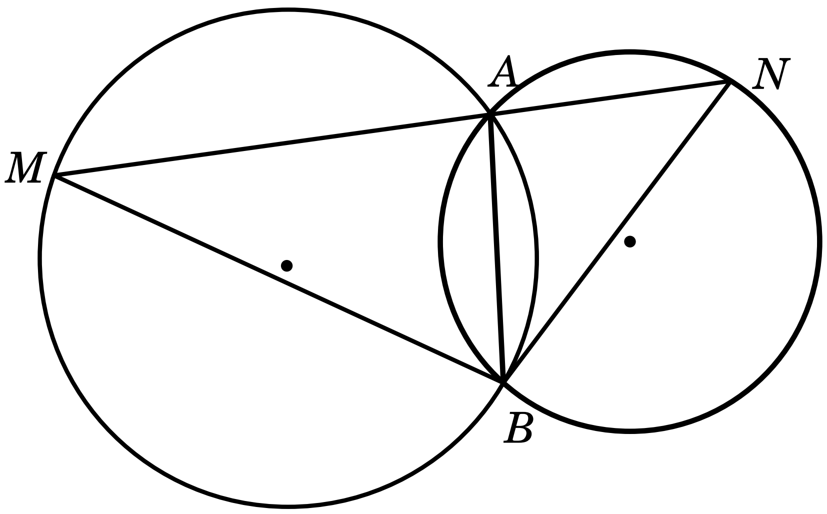
ទាញបាន $v_5=4$ ហើយ $u_5+1=4$

ដូចនេះ $u_5=3$

លំហាត់ទី ៤៨១

វង្វង់ពីរកាត់គ្នាត្រង់ចំណុច A និង B ។ បន្ទាត់ចល័ត (MN) កាត់តាម A ហើយជួបរង្វង់ធំត្រង់ M និងរង្វង់តូចត្រង់ N ។ បង្ហាញថា $\dfrac{BM}{BN}$ មានតម្លៃថេរកាលណា (MN) វិលជុំវិញចំណុច A ។

ដំណោះស្រាយ



ក្នុងរង្វង់ធំ $\widehat{AMB}=\dfrac{1}{2}\overparen{AB}$

ក្នុងរង្វង់តូច $\widehat{ANB} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$

តាមមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស : $\frac{BM}{sin\widehat{ANB}} = \frac{BN}{sin\widehat{AMB}}$

គេទាញបាន $\frac{BM}{BN} = \frac{sin\widehat{ANB}}{sin\widehat{AMB}}$ ពិត

លំហាត់ទី ៤៨២

គណនា $S_{2008} = (1\times3+2\times4+3\times5+\cdots+2008\times2010) - (1^2+2^2+\cdots+2008^2)$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$S = [1(2+1)+2(2+2)+3(2+3)+\cdots+2008(2+2008)]$$
$$-\left(1^2+2^2+\cdots+2008^2\right)$$
$$= 2(1+2+3+\cdots+2008)+\left(1^2+2^2+\cdots+2008^2\right)-\left(1^2+2^2+\cdots+2008^2\right)$$
$$= 2(1+2+3+\cdots+2008) = 2\cdot\frac{2008\times2009}{2}$$
$$= 2008\times2009$$

ដូចនេះ: $S = 2008^2 + 2008$

លំហាត់ទី ៤៨៣

ស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប (u_n) កំណត់ដោយ $u_1 = 1; u_2 = 1; u_3 = -1$ និង $u_n = u_{n-1}\times u_{n-3}$ ចំពោះ $n \geq 4$ ។ រកតម្លៃមួយតួដំបូង និងតួ 2008 នៃស្វ៊ីត (u_n) ។

ដំណោះស្រាយ

$u_1 = 1; u_2 = 1; u_3 = -1$

$u_4 = u_3\times u_1 = (-1)(1) = -1$

$u_5 = u_4\times u_2 = (-1)(1) = -1$

$u_6 = u_5\times u_3 = (-1)(-1) = 1$

$u_7 = u_6\times u_4 = 1(-1) = -1$

តាមរបៀបដូចគ្នា :

$u_8 = 1; u_9 = 1; u_{10} = -1; u_{11} = -1; u_{12} = -1; u_{13} = 1; u_{14} = -1$

$u_{15} = 1; u_{16} = 1; u_{17} = -1; u_{18} = -1; u_{19} = -1; u_{20} = 1; u_{21} = -1$

គេសង្កេតឃើញថា

$u_1=1;u_2=1;u_3=-1;u_4=-1;u_5=-1;u_6=1;u_7=-1$

$u_8=1;u_9=1;u_{10}=-1;u_{11}=-1;u_{12}=-1;u_{13}=1;u_{14}=-1$

$u_{15}=1;u_{16}=1;u_{17}=-1;u_{18}=-1;u_{19}=-1;u_{20}=1;u_{21}=-1$

គេបាន (u_n) ជាស្វីតខួបដែលខួបនីមួយៗមាន 7 តួ

$2008=7\times 286+6$ នេះបញ្ជាក់ថា u_{2008} ជាតួទី 6 នៅក្នុងខួបទី 287

ដូចនេះ $u_{2008}=1$

លំហាត់ទី ៤៨៤

គេមានសមភាព

$14^2=\left(6\times 1^2+6\times 1+2\right)^2;\ 15^2=\left(6\times 1^2+6\times 1+3\right)^2$

$38^2=\left(6\times 2^2+6\times 2+2\right)^2;\ 39^2=\left(6\times 2^2+6\times 2+3\right)^2$

$74^2=\left(6\times 3^2+6\times 3+2\right)^2;\ 75^2=\left(6\times 3^2+6\times 3+3\right)^2$ ។

ដោយសង្កេតឧទាហរណ៍ខាងក្រោមនេះ ចូរទាញរករូបមន្តទូទៅ ហើយស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តទូទៅនោះផង :

$2^2+3^2+4^2+14^2=15^2;\ 4^2+5^2+6^2+38^2=39^2;$

$6^2+7^2+8^2+74^2=75^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

$2^2+3^2+4^2+14^2=(2\times 1)^2+(2\times 1+1)^2+(2\times 1+2)^2+\left(6\times 1^2+6\times 1+2\right)^2$

$=15^2=\left(6\times 1^2+6\times 1+3\right)^2$ (គឺ $n=1$)

$4^2+5^2+6^2+38^2=(2\times 2)^2+(2\times 2+1)^2+(2\times 2+2)^2+\left(6\times 2^2+6\times 2+2\right)^2$

$=39^2=\left(6\times 2^2+6\times 2+3\right)^2$ (គឺ $n=2$)

$6^2+7^2+8^2+74^2=(2\times 3)^2+(2\times 3+1)^2+(2\times 3+2)^2+\left(6\times 3^2+6\times 3+2\right)^2$

$=75^2=\left(6\times 3^2+6\times 3+3\right)^2$ (គឺ $n=3$)

ជាទូទៅ : $(2n)^2+(2n+1)^2+(2n+2)^2+\left(6n^2+6n+2\right)^2=\left(6n^2+6n+3\right)^2$

ចំពោះ $n=1,2,3..$

- ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តទូទៅ :

$(2n)^2+(2n+1)^2+(2n+2)^2+\left(6n^2+6n+2\right)^2=36n^4+72n^3+72n^2+36n+9$

$\left(6n^2+6n+3\right)^2=36n^4+72n^3+72n^2+36n+9$

ដូចនេះ រូបមន្តពិតចំពោះ $n=1,2,3,...$

លំហាត់ទី ៤៨៥

គេអោយអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^n x dx,\ n \in \mathbb{N}$ ។

ក- បង្ហាញថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ខ- គណនា $I_n + I_{n-2},\ (n \geq 2)$ រួចទាញថា $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក- បង្ហាញថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ

ចំពោះ $0 < x < \frac{\pi}{4}$ គេបាន $0 < tanx < 1$

នោះ $tan^n x < tan^{n-1} x < \cdots < tanx$

ដូចនេះ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ

ខ- គណនា $I_n + I_{n-2},\ (n \geq 2)$ រួចទាញថា $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$

យើងមាន $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^n x dx$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^{n-2} x \cdot tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^{n-2} x \left(\frac{1}{cos^2 x} - 1 \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^{n-2} x \cdot \frac{dx}{cos^2 x} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^{n-2} x$$

$$= \left[\frac{tan^{n-1} x}{n-1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - I_{n-2}$$

ដូចនេះ $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$

ដោយ $I_n < I_{n-2}$ នោះ $I_n + I_n < I_n + I_{n-2}$

$\Rightarrow 2I_n < \frac{1}{n-1}$ ឬ $I_n < \frac{1}{2(n-1)}$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $I_{n+2} < I_n$ នោះ $I_{n+2} + I_n < I_n + I_n$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} < 2I_n$ ឬ $\frac{1}{2(n+1)} < I_n$ (2)

តាម (1) និង (2) យើងបាន
$$\frac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{2(n-1)}$$

លំហាត់ទី ៥៨៦

គេអោយ $a_i, i=1,...,6$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន ដែល $a_1+a_2+a_3-a_4-a_5-a_6=3$ និង $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2=9$ ។
ស្រាយបញ្ជាក់ថា
$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6 \le 1 \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz
$$\begin{aligned}3+a_4+a_5+a_6=a_1+a_2+a_3 &\le \sqrt{\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)}\\ &= \sqrt{3\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)}\\ &= \sqrt{3\left[9-\left(a_4^2+a_5^2+a_6^2\right)\right]}\\ &= \sqrt{27-\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(a_4^2+a_5^2+a_6^2\right)}\\ &\le \sqrt{27-(a_4+a_5+a_6)^2}\end{aligned}$$

យើងទាញបាន
$$(3+(a_4+a_5+a_6))^2 \le 27-(a_4+a_5+a_6)^2$$
$$\Leftrightarrow (a_4+a_5+a_6)^2+3(a_4+a_5+a_6)-9 \le 0$$
$$\Rightarrow a_4+a_5+a_6 \le \frac{-3+3\sqrt{5}}{2} \quad (1)$$
$$\Rightarrow \frac{a_4+a_5+a_6}{3} \le \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

តាមវិសមភាព AM-GM យើងបាន
$$\sqrt[3]{a_4a_5a_6} \le \frac{a_4+a_5+a_6}{3} \le \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad (2)$$ តាម (1) យើងបាន
$$a_1+a_2+a_3=3+(a_4+a_5+a_6) \le 3+\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}=\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$$

នាំអោយ $\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3} \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

តាមវិសមភាព AM-GM យើងបាន

$$\sqrt[3]{a_1a_2a_3} \le \frac{a_1+a_2+a_3}{3} \le \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (3)$$

តាម (2) និង (3) : $\sqrt[3]{a_1a_2a_3} \cdot \sqrt[3]{a_4a_5a_6} \le \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1$

នោះ $a_1a_2a_3a_4a_5a_6 \le 1$

សមភាពកើតមានកាលណា $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $a_4 = a_5 = a_6 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

លំហាត់ទី ៤៨៧

១. បើ $x+iy = \sqrt[3]{a+ib}$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 4\left(x^2-y^2\right)$ ។

២. បើ $x_p = cos\left(\frac{\pi}{2^p}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2^p}\right)$ ចូរបង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n = -1$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. បើ $x+iy = \sqrt[3]{a+ib}$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 4\left(x^2-y^2\right)$

យើងមាន $x+iy = \sqrt[3]{a+ib}$

$a+ib = (x+iy)^3$

$a+ib = x^3 + 3x^2iy + 3(iy)^2x + (iy)^3$

$a+ib = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2y - y^3\right)$

គេទាញបាន $a = x^3 - 3xy^2$, $b = 3x^2y - y^3$

$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = x^2 - 3y^2 + 3x^2 - y^2$

$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 4\left(x^2-y^2\right)$ ពិត

២. បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n = -1$

យើងមាន $x_p = cos\left(\frac{\pi}{2^p}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2^p}\right)$

តាមរូបមន្តអឺលែរ

$x_p = e^{i\cdot\frac{\pi}{2^p}}$

តាង $A = \lim\limits_{n\to+\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n$

រូបមន្តអឺលែរ

$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$

$$A=\lim_{n\to+\infty} e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2^2}}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2^3}}\cdots e^{i\cdot\frac{\pi}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty} e^{i\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty} e^{i\pi\left[1-\frac{1}{2^n}\right]}$$

$$\left[\because \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2^n}\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}\right]$$

$A=e^{i\pi}=cos\pi+isin\pi=-1$ ពិត

លំហាត់ទី ៤៨៨

បង្ហាញថា $x^5-1=(x-1)\left[x^2+2xcos\frac{\pi}{5}+1\right]\left[x^2+2xcos\frac{3\pi}{5}+1\right]$ ។

ដំណោះស្រាយ

បើ $x^5-1=0$ នោះ $x^5=1=cos0+isin0$

$x^5=cos2k\pi+isin2k\pi$

$$x=(cos2k\pi+isin2k\pi)^{\frac{1}{5}}=cos\frac{2k\pi}{5}+isin\frac{2k\pi}{5}$$

$$x=e^{i\frac{2k\pi}{5}}$$

ឱ្យតម្លៃ $k=0,1,2,3,4$ យើងទទួលបានឫសនៃសមីការដូចខាងក្រោម :

$x_0=1$

$$x_1=e^{i\frac{2\pi}{5}}=cos\frac{2\pi}{5}+isin\frac{2\pi}{5}$$

$$x_2=e^{i\frac{4\pi}{5}}=cos\frac{4\pi}{5}+isin\frac{4\pi}{5}$$

$$x_3 = e^{i\frac{6\pi}{5}} = cos\frac{6\pi}{5} + isin\frac{6\pi}{5}$$

$$= cos\left(2\pi - \frac{4\pi}{5}\right) + isin\left(2\pi - \frac{4\pi}{5}\right)$$

$$= cos\frac{4\pi}{5} - isin\frac{4\pi}{5} = e^{-i\frac{4\pi}{5}} = \overline{x_2} \quad \left[\begin{array}{l} \because cos(2\pi - \theta) = cos\theta \\ sin(2\pi - \theta) = -sin\theta \end{array}\right]$$

$$x_4 = e^{i\frac{8\pi}{5}} = cos\frac{8\pi}{5} + isin\frac{8\pi}{5} = cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) + isin\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$= cos\frac{2\pi}{5} - isin\frac{2\pi}{5} = e^{-i\frac{2\pi}{5}} = \overline{x_1}$$

x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 គឺជាឫសនៃសមីការ $x^5 - 1 = 0$

$$x^5 - 1 = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

$$= (x-1)\left(x - e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)\left(x - e^{\frac{4i\pi}{5}}\right)\left(x - e^{-\frac{4i\pi}{5}}\right)\left(x - e^{-\frac{2i\pi}{5}}\right)$$

$$= (x-1)\left[x^2 - x\left(e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}}\right) + 1\right]\left[x^2 - x\left(e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{-\frac{4i\pi}{5}}\right) + 1\right]$$

$$= (x-1)\left[x^2 - x \cdot 2cos\frac{4\pi}{5} + 1\right]\left[x^2 - x \cdot 2cos\frac{2\pi}{5} + 1\right]$$

$$= (x-1)\left[x^2 - 2x\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) + 1\right]\left[x^2 - 2x\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) + 1\right]$$

$$= (x-1)\left(x^2 + 2xcos\frac{3\pi}{5} + 1\right)\left(x^2 + 2xcos\frac{\pi}{5} + 1\right)$$

$$[\because cos(\pi - \theta) = -cos\theta]$$

លំហាត់ទី ៤៨៩

អនុគមន៍ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ មានលេខមេគុណ a_i បំពេញលក្ខខណ្ឌ $0 \le a_i \le a_0$ ដែល $i = 1;2;3;...;n$ ។ គេយក $(f(x))^2 = b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{n+1}x^{n+1}+\cdots+b_{2n}x^{2n}$ ។ បង្ហាញថា $b_{n+1} \le \frac{1}{2}(f(1))^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $b_{n+1} \le \frac{1}{2}(f(1))^2$

ដោយ $b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{n+1}x^{n+1}+\cdots+b_{2n}x^{2n} = \left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\right)^2$

នោះតាមរបៀបប្រដូចលេខមេគុណនៃ x^{n+1} គេបាន : $b_{n+1} = a_1a_n+a_2a_{n-1}+a_3a_{n-2}+\cdots+a_{n-1}a_2+a_na_1$

គេបាន $b_{n+1} \le a_1a_0+a_2a_0+a_3a_0+\cdots+a_{n-1}a_0+a_na_0$

$$\begin{aligned}
2b_{n+1} &\le a_1(a_0+a_n)+a_2(a_0+a_{n-1})+\cdots+a_{n-1}(a_0+a_2)+a_n(a_0+a_1)\\
&\le a_1(a_0+\cdots+a_n)+a_2(a_0+\cdots+a_n)+\cdots+a_{n-1}(a_0+\cdots+a_n)\\
&\quad +a_n(a_0+\cdots+a_n)\\
&\le (a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n)(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n)\\
&\le (a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 = (f(1))^2
\end{aligned}$$

នាំអោយ $b_{n+1} \le \frac{1}{2}(f(1))^2$ ពិត

លំហាត់ទី ៤៩០

គេមានស្វ៊ីតនៃចំនួន $x_1;x_2;x_3;...$ ដែលកំណត់ដោយ $x_1 = 1;x_2 = 1$ និង $x_n = x_{n-1}+x_{n-2}$ ចំពោះ $n \ge 3$ ។

ក. រកដប់តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនោះ ។

ខ. គេយក $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ជាម៉ាទ្រីសការេលំដាប់ 2 ។ បង្ហាញថា $A^n = \begin{bmatrix} x_{n+1} & x_n \\ x_n & x_{n-1} \end{bmatrix}$ ចំពោះ $n = 2;3;4;...$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដប់តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនោះ

$x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 2; x_4 = 3; x_5 = 5; x_6 = 8; x_7 = 13; x_8 = 21; x_9 = 34; x_{10} = 55$

ខ. បង្ហាញថា $A^n = \begin{bmatrix} x_{n+1} & x_n \\ x_n & x_{n-1} \end{bmatrix}$ ចំពោះ $n = 2;3;4;...$

- ចំពោះ $n = 2$:

$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot1+1\cdot1 & 1\cdot1+1\cdot0 \\ 1\cdot1+1\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2+1} & x_2 \\ x_2 & x_{2-1} \end{bmatrix}$ ពិត

- ឧបមាថាទំនាក់ទំនងពិតរហូតដល់ $n = p$: $A^p = \begin{bmatrix} x_{p+1} & x_p \\ x_p & x_{p-1} \end{bmatrix}$

- សិក្សាចំពោះ $n = p+1$:

$A^{p+1} = A^p \cdot A = \begin{bmatrix} x_{p+1} & x_p \\ x_p & x_{p-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p+1}+x_p & x_{p+1} \\ x_p+x_{p-1} & x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p+2} & x_{p+1} \\ x_{p+1} & x_p \end{bmatrix}$

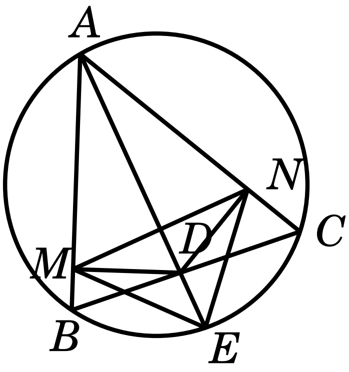
ពិត

ដូចនេះ $A^n = \begin{bmatrix} x_{n+1} & x_n \\ x_n & x_{n-1} \end{bmatrix}$ ចំពោះ $n = 2;3;4;...$

លំហាត់ទី ៤៩១

ត្រីកោណ ABC មានមុំក្នុងទាំងបីជាមុំស្រួច ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ $\angle BAC$ ជួបជ្រុង $[BC]$ ត្រង់ D ហើយជួបរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC ត្រង់ E ។ តាមចំណុច D គេគូសបន្ទាត់កែងនឹងជ្រុង $[AB]$ និង $[AC$ រៀងគ្នាត្រង់ចំណុច M និង N ។ បង្ហាញថា ចតុកោណ $AMEN$ និង ត្រីកោណ ABC មានផ្ទៃក្រឡាស្មើគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ



គេមាន $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \times AC\sin\alpha$

ដែល $\widehat{BAC} = \alpha$

ត្រីកោណកែង $AMD \cong AND$

ហើយគេបាន $AD \perp MN$

គេបាន $S_{AMEN} = \frac{1}{2}AE \times MN$

ម្យ៉ាងទៀត $\widehat{ACD} = \widehat{AEB}$

$\widehat{CAD} = \widehat{EAB}$

នោះ $\triangle ACD$ ដូច $\triangle AEB$ (ករណីទី១ ម.ម)

វិបាក $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$ នាំឱ្យ $AB \times AC = AE \times AD$ (1)

ចតុកោណ $ADMN$ ចារឹកក្នុងរង្វង់មានអង្កត់ផ្ចិត $[AD]$ មួយ ព្រោះ $\widehat{M} = \widehat{N} = 90^0$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស ក្នុង $\triangle AMN$: $\frac{MN}{\sin\alpha} = AD$

តាម (1) គេបាន $AB \times AC = AE \times \frac{MN}{\sin\alpha}$

$$\frac{1}{2}AB \times AC\sin\alpha = \frac{1}{2}AE \times MN$$

$$S_{ABC} = S_{AMEN}$$

លំហាត់ទី ៤៩២

បង្ហាញថា $\sqrt{7} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[4]{7} < 7$ ហើយ $\sqrt{4} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{4} > 4$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេដឹងថា : $\sqrt{7} < \sqrt{9}$; $\sqrt[3]{7} < \sqrt[3]{8}$; $\sqrt[4]{7} < \sqrt[4]{16}$

ដូចនេះ $\sqrt{7} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[4]{7} < \sqrt{9} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[4]{16} = 7$

តាមរបៀបដូចគ្នា : $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{1}$; $\sqrt[4]{4} > \sqrt[4]{1}$

ដូចនេះ $\sqrt{4} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[4]{4} > \sqrt{4} + \sqrt[3]{1} + \sqrt[4]{1} = 4$

លំហាត់ទី ៤៩៣

គេឱ្យពហុធា $g(n) = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ ចំពោះ $n = 1;2;3;...$ ។

បង្ហាញថា $g(n)$ មិនមែនជាការេនៃចំនួនគត់ រ៉ឺឡាទីបណាមួយឡើយ ។

ដំណោះស្រាយ

$(n^2+n)^2 = n^4+2n^3+n^2 < n^4+2n^3+2n^2+2n+1 < n^4+2n^3+3n^2+2n+1$

$(n^2+n)^2 < n^4+2n^3+2n^2+2n+1 < (n^2+n+1)^2$

ដោយ $(n^2+n)^2$ និង $(n^2+n+1)^2$ ជាការេនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបពីរតគ្នា នោះគេបាន :

$g(n)$ មិនមែនជាការេនៃចំនួនគត់ រ៉ឺឡាទីបណាមួយឡើយ ។

<u>របៀបទី ២</u>

$$g(n) = (n^4+2n^3+n^2)+(n^2+2n+1)$$
$$= n^2(n+1)^2+(n+1)^2$$
$$= (n+1)^2(n^2+1)$$

ដោយ n^2+1 គ្មានឫសនៅក្នុង $\mathbb{Z}$ នោះ n^2+1 មិនអាចជាការេនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបណាមួយឡើយ ។

ដូចនេះ $g(n)$ មិនមែនជាការេនៃចំនួនគត់ រ៉ឺឡាទីបណាមួយឡើយ

លំហាត់ទី ៤៩៤

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន n គេមាន :

$$f(n) = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$ និង $$g(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

។ បង្ហាញថា $f(n)=g(n)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន n ។

ដំណោះស្រាយ

- ចំពោះ $n=1$: $f(1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; $g(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $f(1)=g(1)$ ពិត

- ឧបមាថា សមភាពពិតដល់ $n=k$: $f(k)=g(k)$
- សិក្សាចំពោះ $n=k+1$

$$f(k+1)-f(k) = \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2(k+1)-1}-\frac{1}{2(k+1)}\right)-$$
$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}\right)$$
$$=\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2} \quad (1)$$

$$g(k+1)-g(k)=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k+2}\right)-\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)$$

$$=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\quad(2)$$

តាម (1) & (2) គេបាន $f(k+1)-f(k)=g(k+1)-g(k)$

ហើយ $f(k+1)=g(k+1)$ ពិត ព្រោះ $f(k)=g(k)$

ដូចនេះ $f(n)=g(n)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ វិជ្ជមាន n

របៀបទី ២

$$f(n)=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$f(n)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=g(n)$$

លំហាត់ទី ៤៩៥

គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមានពីរ : $X=111\cdots11$ ដែលមានលេខ 1 ចំនួន m ដង

និង $Y=100\cdots05$ ដែលមានលេខ 0 ចំនួន $m-1$ ដង ។

បង្ហាញថា $1+XY$ ជាការេនៃមួយចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយទាញរកឫសការេវិជ្ជមាននៃ $1+XY$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេបាន $X=1+10+10^2+\cdots+10^{m-1}=\dfrac{10^m-1}{9}$

$Y=10^m+5$

$$1+XY=1+\left(\frac{10^m-1}{9}\right)(10^m+5)$$

$$=\left(\frac{10^m+2}{3}\right)^2$$

$$=\left(\frac{10^m-10+12}{3}\right)^2$$

$$=\left(\frac{10\left(10^{m-1}-1\right)}{3}+4\right)^2$$

$1+XY=\left(3\left(10^{m-1}+10^{m-2}+\cdots+10^2+10\right)+4\right)^2$
$1+XY=(333\cdots34)^2$ ដែលមានលេខ 3 ចំនួន $m-1$ ដង
- រកឫសការេវិជ្ជមាននៃ $1+XY$: $\sqrt{1+XY}=333\cdots34$ ដែលមានលេខ 3 ចំនួន $m-1$ ដង

លំហាត់ទី ៤៩៦

គេតាង $s(n)$ ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត $0;1;1;2;2;3;3;4;4;\cdots;k;k;k+1;k+1;\cdots$ ។
ក. គណនា $s(n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។
ខ. បង្ហាញថា $s(a+b)-s(a-b)=ab$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វ៉ិឡាទីបវិជ្ជមាន a និង b ដែល $a>b$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា $s(n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n
- បើ n ជាចំនួនគត់គូ :

$$s(n)=\left(0+1+2+3+\cdots+\left(\frac{n}{2}-1\right)\right)+\left(1+2+3+\cdots+\frac{n}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(1+\frac{n}{2}-1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{1}{4}n^2$$

- បើ n ជាចំនួនគត់សេស :

$$s(n)=\left(0+1+2+3+\cdots+\frac{n-1}{2}\right)+\left(1+2+3+\cdots+\frac{n-1}{2}\right)$$
$$=2\times\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(1+\frac{n-1}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(n^2-1\right)$$

ដូចនេះ $s(n)=\frac{1}{4}n^2$ ចំពោះ n ជាចំនួនគត់គូ
$s(n)=\frac{1}{4}\left(n^2-1\right)$ ចំពោះ n ជាចំនួនគត់សេស

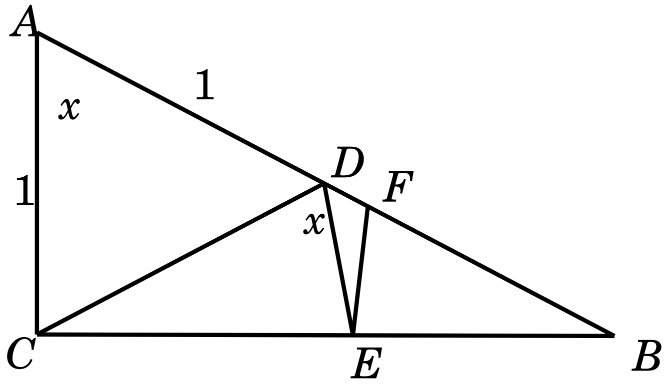
ខ. បង្ហាញថា $s(a+b)-s(a-b)=ab$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វ៉ិឡាទីបវិជ្ជមាន a និង b ដែល $a>b$
គេមាន $a+b+a-b=2a$ ជាចំនួនគត់គូ
នេះបញ្ជាក់ថា $a+b$ និង $a-b$ ជាចំនួនគត់ទាំងពីរ ឬ សេសទាំងពីរ
- បើ $a+b$ & $a-b$ ជាចំនួនគូ : $s(a+b)-s(a-b)=\frac{1}{4}(a+b)^2-\frac{1}{4}(a-b)^2=ab$
- បើ $a+b$ & $a-b$ ជាចំនួនសេស : $s(a+b)-s(a-b)=\frac{1}{4}\left((a+b)^2-1\right)-$

$$\frac{1}{4}\left((a-b)^2-1\right)=ab$$

លំហាត់ទី ៤៩៧

គេឱ្យត្រីកោណកែង ABC មួយ ដែលមាន $AC=1$, $\widehat{ACB}=90^0$ និង $\widehat{BAC}=x$ ។ D ជាចំណុចមួយនៃអ៊ីប៉ូតេនុស $[AB]$ ហើយដែល $AD=1$ ។ E ជាចំណុចមួយនៃ $[BC]$ ហើយដែល $\widehat{EDC}=x$ ។ បន្ទាត់ (EF) កែងនឹង $[BC]$ ត្រង់ E ហើយជួប $[AB]$ ត្រង់ F ។ គណនា $\lim\limits_{x\to0}EF$ ។

ដំណោះស្រាយ



ដោយ $(EF)\parallel(AC)$ គេបាន $\dfrac{EF}{AC}=\dfrac{BE}{BC}\Rightarrow EF=\dfrac{BE}{BC}$ ព្រោះ $AC=1$

តែ $\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{BE}{BE+EC}\Rightarrow\dfrac{BC}{BE}=\dfrac{BE+EC}{BE}=1+\dfrac{EC}{BE}$

$EF=1:\left(1+\dfrac{BE}{EC}\right)\quad(1)$

ក្នុង $\triangle ACD$: $\widehat{ACD}=\widehat{ADC}=90^0-\dfrac{x}{2}$

គេទាញបាន $\widehat{DCE}=\dfrac{x}{2}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសក្នុង $\triangle CDE$: $\dfrac{CE}{sinx}=\dfrac{DE}{sin\frac{x}{2}}$

$\dfrac{CE}{DE}=\dfrac{sinx}{sin\frac{x}{2}}=2cos\dfrac{x}{2}\Rightarrow CE=2cos\dfrac{x}{2}\cdot DE$

ក្នុង $\triangle BDE$: $\widehat{EBD}=90^0-x$; $\widehat{BDE}=90^0-\dfrac{x}{2}$

តាមទ្រឹស្ដីបទស៊ីនុសក្នុង $\triangle BDE : \dfrac{DE}{BE} = \dfrac{sin(90^0 - x)}{sin\left(90^0 - \dfrac{x}{2}\right)} = \dfrac{cosx}{cos\dfrac{x}{2}}$

$\Rightarrow BE = \dfrac{DEcos\dfrac{x}{2}}{cosx}$

តាម (1) គេបាន $EF = 1 : \left(1 + \dfrac{BE}{EC}\right) = \dfrac{1}{1 + 2cosx}$

គេបាន $\lim\limits_{x \to 0} EF = \lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{1 + 2cosx}\right) = \dfrac{1}{3}$

លំហាត់ទី ៤៩៨

គេឱ្យចំនួនបឋមបីផ្សេងគ្នា p ; q និង r ។
បង្ហាញថា $\sqrt[3]{p}$; $\sqrt[3]{q}$ និង $\sqrt[3]{r}$ មិនមែនជា តួបី (មិនចាំបាច់បន្តបន្ទាប់គ្នា) នៃស្វ៊ីតនព្វន្តណាមួយឡើយ ។

ដំណោះស្រាយ

ឧបមាថា $\sqrt[3]{p}$; $\sqrt[3]{q}$ និង $\sqrt[3]{r}$ ជាតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តណាមួយ

នោះមានចំនួនពិត a ; d និងចំនួនគត់ b ; c ដែល $\sqrt[3]{p} = a$; $\sqrt[3]{q} = a + bd$; $\sqrt[3]{r} = a + cd$

$d = \dfrac{\sqrt[3]{q} - \sqrt[3]{p}}{b} = \dfrac{\sqrt[3]{r} - \sqrt[3]{q}}{c}$

$c\left(\sqrt[3]{q} - \sqrt[3]{p}\right) = b\left(\sqrt[3]{r} - \sqrt[3]{q}\right)$

$(b - c)\sqrt[3]{p} = -c\sqrt[3]{q} + b\sqrt[3]{r}$

តាង $\alpha = b - c$; $\beta = -c$; $\gamma = b$ ដែលជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ។

គេបាន $\alpha\sqrt[3]{p} = \beta\sqrt[3]{q} + \gamma\sqrt[3]{r}$ ហើយ $\alpha^3 p = \beta^3 q + \gamma^3 r + 3\alpha\beta\gamma\sqrt[3]{pqr}$

$\sqrt[3]{pqr} = \dfrac{\alpha^3 p - \beta^3 q - \gamma^3 r}{3\alpha\beta\gamma}$ ដែលផ្ទុយពីការពិតព្រោះអង្គទី១ អសនិទាន តែអង្គទី២ សនិទាន

ដូចនេះ $\sqrt[3]{p}$; $\sqrt[3]{q}$ និង $\sqrt[3]{r}$ មិនមែនជាតួនៃស្វ៊ីតនព្វន្តណាមួយទេ

លំហាត់ទី ៤៩៩

គេឱ្យ $N = \underbrace{44...4}_{2010}\underbrace{88...8}_{2009}9$ ។ គណនា $\sqrt{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$N=\underbrace{44...4}_{2010}\underbrace{88...8}_{2009}9$$
$$=\underbrace{44...4}_{2010}\times10^{2010}+\underbrace{88...8}_{2009}\times10+9$$
$$=\frac{4}{9}\left(10^{2010}-1\right)\cdot10^{2010}+\frac{8}{9}\left(10^{2009}-1\right)\cdot10+9$$
$$=\frac{4}{9}\left[\left(10^{2010}\right)^2-10^{2010}\right]+\frac{8}{9}\left(10^{2010}-10\right)+9$$
$$=\frac{1}{9}\left[4\left(10^{2010}\right)^2+4\cdot10^{2010}+1\right]=\frac{1}{9}\left(2\cdot10^{2010}+1\right)^2$$

គេបាន $\sqrt{N}=\dfrac{2\cdot10^{2010}+1}{3}$

$$=\frac{2\left(10^{2010}-1\right)}{3}+1$$

ដូចនេះ $\sqrt{N}=\underbrace{666...6}_{2009}7$

លំហាត់ទី ៥០០

រកតម្លៃនៃ $M=\dfrac{1+2}{2}+\dfrac{1+2+3}{2^2}+\dfrac{1+2+3+4}{2^3}+\dfrac{1+2+3+4+5}{2^4}+\cdots$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$M=\frac{1+2}{2}+\frac{1+2+3}{2^2}+\frac{1+2+3+4}{2^3}+\frac{1+2+3+4+5}{2^4}+\cdots$$
$$\frac{M}{2}=\frac{1+2}{2^2}+\frac{1+2+3}{2^3}+\frac{1+2+3+4}{2^4}+\cdots$$
$$M-\frac{M}{2}=\frac{1+2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots$$
$$\frac{M}{2}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots$$
$$\Rightarrow\frac{M}{4}=\frac{3}{4}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots$$
$$\frac{M}{2}-\frac{M}{4}=\frac{3}{2}+0+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots$$

$$\frac{M}{4}=\frac{3}{2}+\frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}$$

ដូចនេះ $M=7$

លំហាត់ទី ៥០១

តាង $\mathbb{N}$ ជាសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ជាអនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $f(x+1)=f(x)+x$ ចំពោះ $x\in\mathbb{N}$ និង $f(1)=5$ ។ រកតម្លៃនៃ $f(2009)$ ។

ដំណោះស្រាយ

$f(1)=5: f(x+1)-f(x)=x$

$$f(2)-f(1)=1$$
$$f(3)-f(2)=2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(n)-f(n-1)=n-1$$

$$f(n)-f(1)=\frac{(n-1)n}{2}$$

$$f(2009)=5+\frac{2008\cdot 2009}{2}$$

ដូចនេះ $f(2009)=2017041$

លំហាត់ទី ៥០២

ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $x^5+x=2009$ មានឫសវិជ្ជមានតែមួយគត់ ហើយឫសនោះជាចំនួនអសនិទាន ។ គេឱ្យ $4,5^5\approx 1845$; $4,6^5\approx 2059$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាងអនុគមន៍ $f(x)=x^5+x-2009$

$f'(x)=5x^4+1>0$

អនុគមន៍ f កើនជានិច្ចលើ $\mathbb{R}$

$f(4,5)=4,5^5+4,5-2009$

$\quad\quad =1845+4,5-2009<0$

$f(4,6) = 4,6^5 + 4,6 - 2009$

$= 2059 + 4,6 - 2009 > 0$

គេបាន $f(4,5) \times f(4,6) < 0$

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល : $f(x) = 0$ មានឫសតែមួយគត់ x_0 ដែល $4,5 < x_0 < 4,6$ ។

ឧបមាថា $x_0 = \dfrac{p}{q}$ ជាចំនួនសនិទាន $p,q \in \mathbb{N}^*$; $(p;q) = 1$

សមីការទៅជា $\left(\dfrac{p}{q}\right)^5 + \dfrac{p}{q} - 2009 = 0$

$p^5 + p.q^4 = 2009q^5$

$p^5 = q^4(2009q - p) \vdots q$

$\Rightarrow p \vdots q$ មិនពិត

ដូចនេះ x_0 ជាចំនួនអសនិទាន

លំហាត់ទី ៥០៣

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a,b,c

នោះ $\dfrac{a}{10b+11c} + \dfrac{b}{10c+11a} + \dfrac{c}{10a+11b} \geq \dfrac{1}{7}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $x = 10$; $y = 11$; $x + y = 21$

ស្រាយថា $\dfrac{a}{xb+yc} + \dfrac{b}{xc+ya} + \dfrac{c}{xa+yb} \geq \dfrac{3}{x+y}$

តាង $A = xb + yc$

$B = xc + ya$

$C = xa + yb$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarzs

$$(a+b+c)^2 = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{A}} \cdot \sqrt{aA} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}} \cdot \sqrt{bB} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{C}} \cdot \sqrt{cC}\right)^2$$

$$(a+b+c)^2 \leq \left(\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C}\right)(Aa + Bb + Cc) \ (1)$$

ដោយ $Aa + Bb + Cc = (xb + yc)a + (xc + ya)b + (xa + yb)c$

$= x(ab + bc + ca) + y(ac + ab + bc)$

$= (ab + bc + ac)(x + y)$

ហើយ $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$; $(a+b+c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$

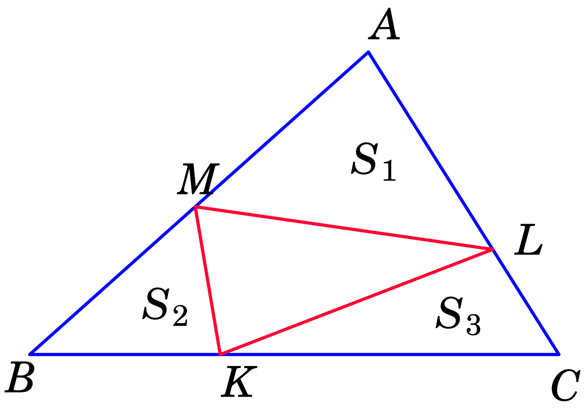
$(1) \Rightarrow \frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(x+y)(ab+bc+ca)}$

ដូចនេះ $\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C} \geq \frac{3}{x+y}=\frac{1}{7}$

លំហាត់ទី ៥០៨

ចំណុច M,K,L ត្រូវគេដៅរៀងគ្នាលើជ្រុង AB , BC , CA នៃត្រីកោណ ABC ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា យ៉ាងតិចក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណមួយ ក្នុងចំណោមក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ MAL, KBM ឬ LCK មិនតិចជាង $\frac{1}{4}$ នៃក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ។

ដំណោះស្រាយ



ស្រាយបញ្ជាក់ថា យ៉ាងតិចក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណមួយ ក្នុងចំណោមក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ MAL, KBM ឬ LCK មិនតិចជាង $\frac{1}{4}$ នៃក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC

តាង $S=S_{ABC}$; $S_1=S_{AML}$

$S_2=S_{BMK}$; $S_3=S_{LCK}$

យើងមាន $\frac{S_1}{S}=\frac{AM}{AB}\cdot\frac{AL}{AC}$

$\frac{S_2}{S}=\frac{BM}{AB}\cdot\frac{BK}{BC}$

$\frac{S_3}{S}=\frac{CL}{AC}\cdot\frac{CK}{BC}$

ឧបមា $\frac{S_1}{S}>\frac{1}{4}$; $\frac{S_2}{S}>\frac{1}{4}$; $\frac{S_3}{S}>\frac{1}{4}$ ព្រមគ្នា

នោះ $\frac{AM}{AB}\cdot\frac{AL}{AC}\cdot\frac{BM}{AB}\cdot\frac{BK}{BC}\cdot\frac{CL}{AC}\cdot\frac{CK}{BC}>\frac{1}{64}$

រឺ $\frac{AM}{AB}\cdot\frac{BM}{AB}\cdot\frac{AL}{AC}\cdot\frac{CL}{AC}\cdot\frac{BK}{BC}\cdot\frac{CK}{BC}>\frac{1}{64}$ (1)

តាមវិសមភាព Cauchy

$\sqrt{AM\cdot BM}\le\frac{AM+BM}{2}=\frac{AB}{2}$

រឺ $\frac{AM}{AB}\cdot\frac{BM}{AB}\le\frac{1}{4}$

ដូចគ្នា $\frac{AL}{AC}\cdot\frac{CL}{AC}\le\frac{1}{4}$; $\frac{BK}{BC}\cdot\frac{CK}{BC}\le\frac{1}{4}$

គុណអង្គ $\frac{AM}{AB}\cdot\frac{BM}{AB}\cdot\frac{AL}{AC}\cdot\frac{CL}{AC}\cdot\frac{BK}{BC}\cdot\frac{CK}{BC}\le\frac{1}{64}$

ផ្ទុយពី (1) $\Rightarrow$ ឧបមាពិត

លំហាត់ទី ៥០៥

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត $\langle a_n\rangle_{n\ge1}$ កំណត់ដោយ $a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{a_n^2+1}{2}$ ចំពោះ $n\ge 1$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{a_j+1}<1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ N ។

ដំណោះស្រាយ

- ចំពោះ $N=1$ ផលបូកគឺ $\frac{1}{a_1+1}=\frac{1}{3}<1$ ពិត

- ចំពោះ $N>1$:

តាមទំនាក់ទំនងកំណើន គេឃើញថា $a_j>1$ ចំពោះគ្រប់ j

$$a_{j+1}-a_j=\frac{a_j^2+1}{2}-a_j=\frac{(a_j-1)^2}{2};$$

$$a_{j+1}-1=\frac{a_j^2+1}{a_j}-1=\frac{a_j^2-1}{2}=\frac{(a_j-1)(a_j+1)}{2}$$

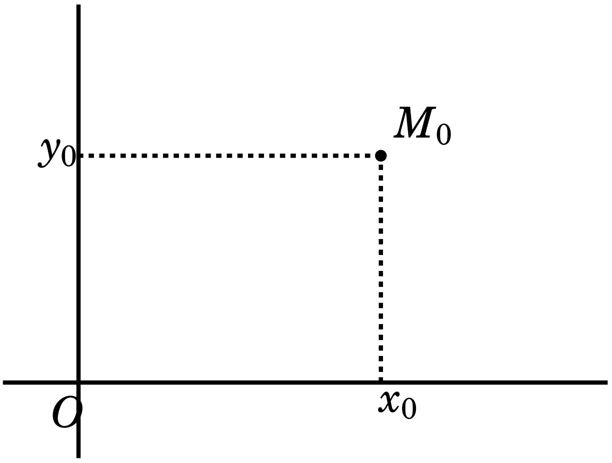
នាំឱ្យ $\frac{1}{a_j+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{a_j-1}{a_{j+1}-1}\right)$ ចំពោះគ្រប់ $j\ge1$

យើងបាន $\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{a_j+1}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{a_j-1}{a_{j+1}-1}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{(a_j-1)^2}{(a_{j+1}-1)(a_j-1)}$

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{a_j+1}=\sum_{j=1}^{N}\frac{a_{j+1}-a_j}{(a_{j+1}-1)(a_j-1)}$$
$$=\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{a_j-1}-\frac{1}{a_{j+1}-1}\right)$$
$$=\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_{N+1}-1}<\frac{1}{a_1-1}=1 \quad \text{ពិត}$$

លំហាត់ទី ៥០៦

គេឱ្យចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប α,β,λ និង μ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $\alpha\mu = 1+\beta\lambda$ ។ គេយក x_0 ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប a និង b ហើយយក y_0 ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ $\alpha a+\beta b$ និង $\lambda a+\mu b$ ។ ចូរប្រៀបធៀបចម្ងាយពីចំណុច $M_0(x_0,y_0)$ ទៅអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយអរត្តូណរម៉ាល់មួយ ។



ដោយ x_0 ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប a និង b ហើយយក y_0 ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ $\alpha a+\beta b$ និង $\lambda a+\mu b$

នោះគេបាន $(x_0|a \wedge x_0|b) \Rightarrow x_0|\left(\alpha a+\beta b\right)=A$ និង $(x_0|a \wedge x_0|b) \Rightarrow$ $x_0|\left(\lambda a+\mu b\right)=B$

ដូចនេះ $x_0|y_0 \quad (1)$

ម្យ៉ាងទៀត $y_0|A=\alpha a+\beta b \Rightarrow y_0|\left(\alpha\mu a+\beta\mu b\right)$

$y_0|B=\lambda a+\mu b \Rightarrow y_0|\left(\beta\lambda a+\beta\mu b\right)$

គេបាន $y_0|\left(\alpha\mu-\beta\lambda\right)b=b$ ព្រោះ $\alpha\mu-\beta\lambda=1$

ដោយ $(y_0|a \wedge y_0|b) \Rightarrow y_0|x_0 \quad (2)$

តាម $(1)\&(2) \Rightarrow x_0=y_0$

ដូចនេះ ចំណុច $M_0(x_0,y_0)$ មានចម្ងាយស្មើពីអ័ក្សទាំងពីរនៃតម្រុយអរត្តូណរម៉ាល់

លំហាត់ទី ៥០៧

គេឱ្យអនុគមន៍ពហុធា $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ ដែលមានលេខមេគុណជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ។ គេដឹងថាមានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប x_0 ដែល $f(x_0)=p$ ជាចំនួនបឋម ។ បង្ហាញថា មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប β ច្រើនរាប់មិនអស់ដែល $f(\beta)$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $f(x_0)=a_nx_0^n+a_{n-1}x_0^{n-1}+\cdots+a_1x_0+a_0=p$

គេពិនិត្យ $f(x_0+kp),k\in\mathbb{Z}$

$f(x_0+kp)=a_n(x_0+kp)^n+a_{n-1}(x_0+kp)^{n-1}+\cdots+a_1(x_0+kp)+a_0$

$=\left(a_nx_0^n+a_n\sum_{i=1}^{n}C(n,i)x_0^{n-i}(kp)^i\right)+$

$\left(a_{n-1}x_0^{n-1}+a_{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}C(n-1,i)x_0^{n-1-i}(kp)^i\right)+\cdots+(a_1x_0+a_1kp)+a_0$

$=\left(a_nx_0^n+a_{n-1}x_0^{n-1}+\cdots+a_1x_0+a_0\right)+\left(a_n\sum_{i=1}^{n}C(n,i)x_0^{n-i}(kp)^i+\cdots+a_1kp\right)$

$=p+p\left(a_n\sum_{i=1}^{n}C(n,i)x_0^{n-i}k^ip^{i-1}+a_{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}C(n-1,i)x_0^{n-1-i}k^ip^{i-1}+\cdots+a_1k\right)$

$f(x_0+kp)=p\left(1+a_n\sum_{i=1}^{n}C(n,i)x_0^{n-i}k^ip^{i-1}+a_{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}C(n-1,i)x_0^{n-1-i}k^ip^{i-1}\right.$
$\left.+\cdots+a_1k\right)$

គេទាញបាន $p|f(x_0+kp),k\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ មានចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប β ច្រើនរាប់មិនអស់ដែល $f(\beta)$ មិនមែនជាចំនួនបឋម

លំហាត់ទី ៥០៨

ស្វ៊ីត (x_n) កំណត់ដោយ $x_1=1,x_2=1$ និង $x_{n+1}=x_n+x_{n-1}$ ចំពោះ $n\geq 2$ ។

ស្វ៊ីត (y_n) កំណត់ដោយ $y_n=|x_{n+4}x_{n-2}-x_{n+2}x_n|$ ចំពោះ $n\geq 3$ ។

ស្វ៊ីត (z_n) កំណត់ដោយ $z_n-9=4x_{n-2}x_nx_{n+2}x_{n+4}$ ចំពោះ $n\geq 3$ ។

១-បង្ហាញថា (y_n) ជាស្វ៊ីតថេរចំពោះ $n\geq 3$ ។ ទាញរកតម្លៃតួ $y_{3042011}$ ។

២- បង្ហាញថា តួនីមួយៗនៃស្វ៊ីត (z_n) ជាការេប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

១-បង្ហាញថា (y_n) ជាស្វ៊ីតថេរចំពោះ $n \geq 3$

$y_n = |x_{n+4}x_{n-2} - x_{n+2}x_n|$

$= |(x_{n+3} + x_{n+2})x_{n-2} - x_{n+2}x_n| = |x_{n+3}x_{n-2} + x_{n+2}(x_{n-2} - x_n)|$

$= |x_{n+3}x_{n-2} + x_{n+2}(x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2})| = |x_{n+3}x_{n-2} - x_{n+2}x_{n-1}|$

$= |x_{n+3}(x_{n-1} - x_{n-3}) - x_{n+2}x_{n-1}| = |-x_{n+3}x_{n-3} - x_{n-1}(x_{n+2} - x_{n+3})|$

(ព្រោះ $x_{n-1} = x_{n-2} + x_{n-3} \Rightarrow x_{n-2} = x_{n-1} - x_{n-3}$)

$= |-x_{n+3}x_{n-3} - x_{n-1}(x_{n+2} - x_{n+2} - x_{n+1})|$

$= |x_{n+3}x_{n-3} - x_{n+1}x_{n-1}|$

$y_n = \left|x_{(n-1)+4}x_{(n-1)-2} - x_{(n-1)+2}x_{(n-1)}\right|, \ \forall n \geq 3$

ដូចនេះ (y_n) ជាស្វ៊ីតថេរចំពោះ $n \geq 3$

- ទាញរក $y_{3042011}$

$y_n = y_{n-1}, \ \forall n \geq 3 \Rightarrow y_{3042011} = y_{3042010} = \cdots = y_4 = y_3 = |x_7x_1 - x_5x_3| = |13 \cdot 1 - 5 \cdot 2| = 3$

២- បង្ហាញថា តួនីមួយៗនៃស្វ៊ីត (z_n) ជាការេប្រាកដ

គេមាន $y_n = y_{n-1} = \cdots = y_{3042011} = 3$ ហើយគេបាន :

$y_n = |x_{n+4}x_{n-2} - x_{n+2}x_n| = 3 \Rightarrow x_{n+4}x_{n-2} - x_{n+2}x_n = \pm 3 \Rightarrow x_{n+4}x_{n-2} = x_{n+2}x_n \pm 3$

ម្យ៉ាងទៀត $z_n - 9 = 4x_nx_{n+2}(x_nx_{n+2} \pm 3) \Rightarrow z_n = (\pm 3)^2 + 2(\pm 3)(2x_nx_{n+2}) + (2x_nx_{n+2})^2$

$z_n = (\pm 3 + 2x_nx_{n+2})^2$ ជាការេប្រាកដចំពោះគ្រប់ $n \geq 3$

លំហាត់ទី ៥០៩

គេឱ្យ a និង X ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែល $a > 1, X > 0$ ។ k ជាចំនួនគត់ រ៉ឺឡាទីប មិនអវិជ្ជមាន និង c_j ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែល $0 \leq c_j < a$ ចំពោះ $j = 0, 1, \ldots, k$ ។ បង្ហាញថា X អាចសរសេរបានតែមួយបែបគត់ជារាង $X = \sum_{j=0}^{k} c_j a^j$ ។

ដំណោះស្រាយ

- តាមវិធីចែកអឺគ្លីតបន្តបន្ទាប់គេបាន : $X = aq_0 + c_0, 0 \leq c_0 < a$

$q_0 = aq_1 + c_1, 0 \leq c_1 < a$

$q_1 = aq_2 + c_2, 0 \leq c_2 < a$

....

$q_{k-1} = a \times 0 + c_k, 0 < c_k < a$

គេបានស្វ៊ីតនៃផលចែក : $X > q_0 > q_1 > q_2 > \cdots > q_{k-1} > q_k = 0$

$X = aq_0 + c_0$

$= a(aq_1 + c_1) + c_0 = a^2 q_1 + ac_1 + c_0$

$= a^3 q_2 + c_2 a^2 + c_1 a + c_0$

....

$= a^k q_{k-1} + c_{k-1} a^{k-1} + \cdots + c_1 a + c_0$

$= c_k a^k + c_{k-1} a^{k-1} + \cdots + c_1 a + c_0, \ (c_{k-1} = c_k)$ ដែល $0 \le c_j < a, j = 0, 1, \ldots, k$

ដូចនេះ $X = c_k a^k + c_{k-1} a^{k-1} + \cdots + c_1 a + c_0 = \sum_{j=0}^{k} c_j a^j$

- បង្ហាញថា X អាចសរសេរបានតែមួយបែបគត់

ឧបមាថា X អាចសរសេរបានពីរបែប :

$X = c_k a^k + c_{k-1} a^{k-1} + \cdots + c_1 a + c_0, 0 \le c_j < a$

$X = c'_k a^k + c'_{k-1} a^{k-1} + \cdots + c'_1 a + c'_0, 0 \le c'_j < a$

គេបាន $\left(c_k - c'_k\right) a^k + \left(c_{k-1} - c'_{k-1}\right) a^{k-1} + \cdots + \left(c_1 - c'_1\right) a + \left(c_0 - c'_0\right) = 0$

បើ X អាចសរសេរបានពីរបែបនោះគេអាចរកបានចំនួនគត់ j ដែលតូចជាងគេ ហើយ $c_j \neq c'_j$ ហើយគេបាន :

$\left(c_k - c'_k\right) a^k + \left(c_{k-1} - c'_{k-1}\right) a^{k-1} + \cdots + \left(c_{j+1} - c'_{j+1}\right) a^{j+1} + \left(c_j - c'_j\right) a^j = 0$

$\Rightarrow a^j \left(\left(c_k - c'_k\right) a^{k-j} + \left(c_{k-1} - c'_{k-1}\right) a^{k-1-j} + \cdots + \left(c_{j+1} - c'_1\right) a^1 + \left(c_j - c'_j\right) \right) = 0$

$\Rightarrow \left(c_k - c'_k\right) a^{k-j} + \left(c_{k-1} - c'_{k-1}\right) a^{k-1-j} + \cdots + \left(c_{j+1} - c'_1\right) a = c'_j - c_j$

$\Rightarrow \left(\left(c_k - c'_k\right) a^{k-j-1} + \left(c_{k-1} - c'_{k-1}\right) a^{k-1-j-1} + \cdots + \left(c_{j+1} - c'_{j+1}\right) \right) a = c'_j - c_j$

$\Rightarrow a | \left(c'_j - c_j\right)$

តែ $(0 \le c_j < a) \wedge \left(0 \le c'_j < a\right) \Rightarrow \left(-a < c'_j - c_j < a\right)$

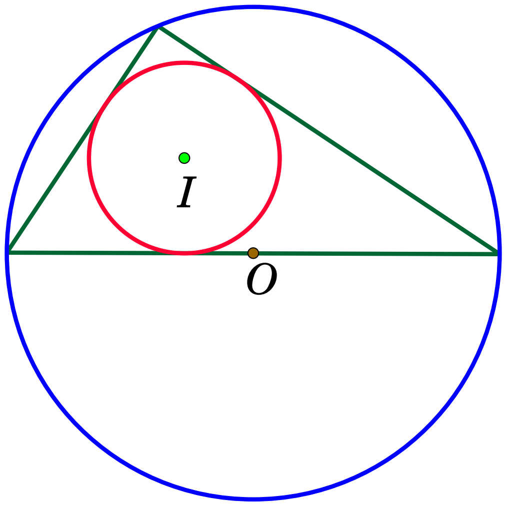
នេះបញ្ជាក់ថា $a | \left(c'_j - c_j\right)$ ជាករណីមិនអាចមាន ។

ដូចនេះ X អាចសរសេរបានតែមួយបែបគត់ជារាង $X = \sum_{j=0}^{k} c_j a^j$

លំហាត់ទី ៥១០

រង្វង់មួយមានផ្ចិត O និងកាំ R ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC មួយដែលមានបរិមាត្រ $2p$ ។ ត្រីកោណ ABC នេះចារឹកក្រៅរង្វង់មួយទៀតដែលមានផ្ចិត I និងកាំ r ។ បង្ហាញថា $4R+r=p\left(tan\frac{A}{2}+tan\frac{B}{2}+tan\frac{C}{2}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ



តាមរូបមន្តកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC គេបាន :

$$r=(p-a)tan\frac{A}{2}=(p-b)tan\frac{B}{2}=(p-c)tan\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{p-a}=tan\frac{A}{2},\frac{r}{p-b}=tan\frac{B}{2},\frac{r}{p-c}=tan\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow tan\frac{A}{2}+tan\frac{B}{2}+tan\frac{C}{2}=\frac{r}{p-a}+\frac{r}{p-b}+\frac{r}{p-c}$$

តាង $K=tan\frac{A}{2}+tan\frac{B}{2}+tan\frac{C}{2}$

$$K=\frac{r\left[3p^2-2(a+b+c)p+ab+bc+ca\right]}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{r\left(-p^2+ab+bc+ca\right)}{(p-a)(p-b)(p-c)}\quad(1)$$

តាមរូបមន្តផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC :

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr$$

$$\Rightarrow p(p-a)(p-b)(p-c)=p^2r^2$$

គេបាន $(p-a)(p-b)(p-c)=pr^2 \quad (2)$

តាម (1) និង (2) យើងបាន $K=\frac{r\left(-p^2+ab+bc+ca\right)}{pr^2}=\frac{-p^2+ab+bc+ca}{pr}$

តាមរូបមន្តផ្សេងទៀតនៃផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC :

$$S=\frac{abc}{4R}=pr$$

$$\Rightarrow 4Rpr=abc$$

តាម (2) :

$$abc+(p-a)(p-b)(p-c)=4Rpr+pr^2$$

$$abc+\left(p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p\right)-abc=pr(4R+r)$$

$$p\left(p^2-(a+b+c)p+ab+bc+ca\right)=pr(4R+r)$$

$$p^2-2p^2+ab+bc+ca=r(4R+r)$$

តាម (3) :

$$K=\frac{4(4R+r)}{pr}=\frac{4R+r}{p}$$

$$pK=4R+r$$

$$\Rightarrow p\left(tan\frac{A}{2}+tan\frac{B}{2}+tan\frac{C}{2}\right)=4R+r$$

ដូចនេះ $4R+r=p\left(tan\frac{A}{2}+tan\frac{B}{2}+tan\frac{C}{2}\right)$

លំហាត់ទី ៥១១

គេបានប្រើទ្រុងចំនួន 99 គ្រឿងសម្រាប់ដឹកជញ្ជូនកូនមាន់ចំនួន $7y38x5$ ក្បាល ទៅកាន់កសិដ្ឋាន មួយ ។ រកលេខ x និង y ក្នុងរបាប់គោលដប់ដោយដឹងថា ក្នុងទ្រុងនីមួយៗមានចំនួនកូនមាន់ស្មើៗគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

គេត្រូវរកលេខ x និង y ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោលដប់ដើម្បីឱ្យចំនួន $7y38x5$ ចែកដាច់នឹង 99 ។

គេមាន $gcd(9,11)=1$

ដើម្បីឱ្យ $7y38x5$ ចែកដាច់នឹង $99=9\times 11$ លុះត្រាតែ

$y+y+3+8+x\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,9)$ និង $5+8+y-x-3-7\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,11)$

$\Leftrightarrow (x+y\equiv 4\ (\mathrm{mod}\,9))\wedge(-x+y\equiv -3\ (\mathrm{mod}\,11))$

$\Leftrightarrow (x+y=9m+4)\wedge(-x+y=11n-3)$

ដោយ $0\le x,y\le 9\Rightarrow 0\le x+y\le 18, -9\le -x+y\le 9$ នោះគេទាញបាន :

$(x+y=4)\wedge(-x+y=3),(x+y=4)\wedge(-x+y=8),(x+y=13)\wedge(-x+y=-3),(x+y=13)\wedge(-x+y=8)$

ដូចនេះ $x=8, y=5$

លំហាត់ទី ៥១២

សមីការ $ax^2+2010x+c=x$ គ្មានឫសទេនៅក្នុងសំណុំចំនួនពិត ។
បង្ហាញថា សមីការ $a\left(ax^2+2010x+c\right)+2010\left(ax^2+2010x+c\right)+c=x$ គ្មានឫសនៅក្នុងសំណុំចំនួនពិតដែរ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា សមីការ $a\left(ax^2+2010x+c\right)+2010\left(ax^2+2010x+c\right)+c=x$ គ្មានឫសនៅក្នុងសំណុំចំនួនពិតដែរ

តាង $t(x)=ax^2+2010x+c$

ដោយសមីការ $t(x)=x$ គ្មានឫសជាចំនួនពិត នោះឬមួយ $t(x)<x$ ឬមួយ $t(x)>x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

គេទាញបាន ឬមួយ $t(t(x))<t(x)<x$ ឬមួយ $t(t(x))>t(x)>x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។ បានន័យថា :

- ឬមួយ $a\left(ax^2+2010x+c\right)+2010\left(ax^2+2010x+c\right)+c<x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។
- ឬមួយ $a\left(ax^2+2010x+c\right)+2010\left(ax^2+2010x+c\right)+c>x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ដូចនេះ សមីការ $a\left(ax^2+2010x+c\right)+2010\left(ax^2+2010x+c\right)+c=x$ គ្មានឫសនៅក្នុងសំណុំចំនួនពិតដែរ

លំហាត់ទី ៥១៣

ពហុធា $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+1$ មានលេខមេគុណ $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}$ ជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន ។
គេដឹងថាពហុធា $P(x)$ មាន n ឫសសុទ្ធតែជាចំនួនពិត ។
បង្ហាញថា $P(2010)\geq\left(2\sqrt{2010}\right)^n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយលេខមេគុណ $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}$ ជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន នោះ ឫស $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ជាចំនួនពិតមិនវិជ្ជមាន ។

តាង $\alpha_i=-x_i,\ i=1,2,\ldots,n$ នោះគេបាន $\alpha_i\geq 0$ ហើយ $P(x)=(x+\alpha_1)(x+$

$\alpha_2)\cdots(x+\alpha_n)$

$P(2010)=(2010+\alpha_1)(2010+\alpha_2)\cdots(2010+\alpha_n)$

ម្យ៉ាងទៀត $2010+\alpha_i\geq 2\sqrt{2010\cdot\alpha_i},\ i=1,2,...,n$

គេបាន $P(2010)=(2010+\alpha_1)(2010+\alpha_2)\cdots(2010+\alpha_n)$

$\geq 2^n\sqrt{2010^n\cdot\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_n}$

ដូចនេះ $P(2010)\geq\left(2\sqrt{2010}\right)^n$ ព្រោះ $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_n=1$

លំហាត់ទី ៥១៨

គេមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន r ដែលជាសំណល់ក្នុងវិធីចែកអឺគ្លីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b ។

១. បង្ហាញថា 2^r-1 ជាសំណល់ ក្នុងវិធីចែកអឺគ្លីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន 2^a-1 និង 2^b-1 ។

២. គេតាង μ ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ a និង b ។ បង្ហាញថា $2^\mu-1$ ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ 2^a-1 និង 2^b-1 ។

ដំណោះស្រាយ

១. បង្ហាញថា 2^r-1 ជាសំណល់ ក្នុងវិធីចែកអឺគ្លីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន 2^a-1 និង 2^b-1

តាមវិធីចែកអឺគ្លីត $a=bq+r, 0<r<b$ គេបាន :

$$2^a-1=2^{bq+r}-2^r+2^r-1=2^r\left(2^b-1\right)\left(\left(2^b\right)^{q-1}+\cdots+2^b+1\right)+(2^r-1)$$

$$=\left(2^b-1\right)\left(\left(2^{b(q-1)+r}+\cdots+2^{b+r}+2^r\right)\right)+(2^r-1), 0<2^r-1<2^b-1$$

ដូចនេះ 2^r-1 ជាសំណល់ ក្នុងវិធីចែកអឺគ្លីតនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន 2^a-1 និង 2^b-1

២. បង្ហាញថា $2^\mu-1$ ជាតួចែក រួមធំបំផុតនៃ 2^a-1 និង 2^b-1 :

តាង $r_0=a, r_1=b$ ។ តាមវិធីចែកអឺគ្លីតបន្តបន្ទាប់ :

$r_0=r_1q_1+r_2\,(0<r_2<r_1), r_1=r_2q_2+r_3\,(0\leq r_3<r_2),...,r_{n-3}=r_{n-2}q_{n-2}+r_{n-1}\,(0\leq r_{n-1}<r_{n-2}), r_{n-2}=r_{n-1}q_{n-1}$

គេបាន $gcd(a,b)=r_{n-1}=\mu$

តាង $R_0=2^a-1, R_1=2^b-1$ ។ តាមវិធីចែកអឺគ្លីតបន្តបន្ទាប់ និង លទ្ធផលខាងលើ

$R_0=R_1Q_1+R_2, R_2=2^{r_1}-1$

$R_1=R_2Q_2+R_3, R_3=2^{r_2}-1$

....

$R_{n-3}=R_{n-2}Q_{n-2}+R_{n-1}, R_{n-1}=2^{r_{n-1}}-1$

$R_{n-2} = R_{n-1}Q_{n-1}$

គេបាន $gcd(R_0, R_1) = 2^{\mu} - 1$

លំហាត់ទី ៥១៥

រកសំណល់នៃវិធីចែក 2010^{2009} នឹង 13 ។

ដំណោះស្រាយ

$2010^{2009} = (13 \times 154 + 8)^{2009}$

$\equiv 8^{2009} \pmod{13}$

ដោយ $(8;13) = 1$ តាម Fermat:

$8^{12} \equiv 1 \pmod{13}$

$\Rightarrow 8^{2009} = 8^{12\times 167+5}$

$\equiv 8^5 \pmod{13}$

$8^5 = (8^2)^2 \cdot 8$

$= (13 \times 5 - 1)^2 \cdot 8$

$\equiv 8 \pmod{13}$

ដូចនេះ 2010^{2009} ចែកនឹង 12 សំណល់ 8

លំហាត់ទី ៥១៦

បង្ហាញថា $A = 1^{2008} + 2^{2008} + 3^{2008} + 4^{2008} - 5^{2008} - 6^{2008} - 7^{2008} - 8^{2008} - 9^{2008}$ ចែកដាច់នឹង 5 ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $A = (1^{2008} - 6^{2008}) + (2^{2008} - 7^{2008}) + (3^{2008} - 8^{2008}) + (4^{2008} - 9^{2008}) - 5^{2008}$

$A = (1-6)k_1 + (2-7)k_2 + (3-8)k_3 + (4-9)k_4 - 5k_5$

$= (-5)k_1 + (-5)k_2 + (-5)k_3 + (-5)k_4 - 5k_5$

$= 5(-k_1 - k_2 - k_3 - k_4 - k_5)$

ដែល k_i ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន ។

$A = 5K$ ដែល K ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបអវិជ្ជមាន ។

លំហាត់ទី ៥១៧

រកតម្លៃធំបំផុតនៃ $A = sinx_1.sinx_2...sinx_{2010}$ ដោយដឹងថា $tanx_1.tanx_2...tanx_{2010} = 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $1 = sin^2x_1 + cos^2x_1 \geq 2sinx_1cosx_1$

$1 = sin^2x_2 + cos^2x_2 \geq 2sinx_2cosx_2$

....

$1 = sin^2x_{2010} + cos^2x_{2010} \geq 2sinx_{2010}cosx_{2010}$

គុណអង្គ : $1 \geq 2^{2010}.A.cosx_1.cosx_2...cosx_{2010}$

ដោយ $tanx_1.tanx_2...tanx_{2010} = 1$

$\Rightarrow A = cosx_1.cosx_2...cosx_{2010}$

គេបាន $1 \geq 2^{2010}.A^2$

$$A \leq \frac{1}{2^{1005}}$$

ដូចនេះ A ធំបំផុត $A = \frac{1}{2^{1005}}$

លំហាត់ទី ៥១៨

រកគ្រប់គូ (x, y) ជាឫសនៃសមីការ $2007^{sin^2x} + 2007^{cos^2x} = 2009 + cos2y$ ។

ដំណោះស្រាយ

$2007^{sin^2x} + 2007^{cos^2x} = 2009 + cos2y$

$2007^{sin^2x} + 2007^{1-sin^2x} - 2008 = 1 + cos2y$

$$2007^{sin^2x} + \frac{2007}{2007^{sin^2x}} - 2008 = 2cos^2y \quad (1)$$

តាង $u = 2007^{sin^2x}$; $x \in \mathbb{R}$

លក្ខខណ្ឌ $1 \leq U \leq 2007$

ពី (1) $U + \frac{2007}{U} - 2008 = 2cos^2y$

$$\frac{U^2 - 2008U + 2007}{U} = 2cos^2y$$

$$\frac{(U-1)(U-2007)}{U}=2cos^2y \quad (2)$$

ដោយ $1\le U\le 2007 \Rightarrow \frac{(U-1)(U-2007)}{U}\le 0$

ម្យ៉ាងទៀត $cos^2y\ge 0$

(2) ទៅជា $\begin{cases}(U-1)(U-2007)=0\\ cos^2y=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}U=1\\ cosy=0\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}U=2007\\ cosy=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2007^{sin^2x}=1\\ cosy=0\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}2007^{sin^2x}=2007\\ cosy=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}sinx=0\\ cosy=0\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}sinx=\pm 1\\ cosy=0\end{cases}$

$\begin{cases}x=k\pi\\ y=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ y=\frac{\pi}{2}+k'\pi\end{cases}$ ដែល $(k,k'\in\mathbb{Z})$

លំហាត់ទី ៥១៩

រកពហុធា $P(x)$ ដឺក្រេទី៤ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌពីរខាងក្រោម :

1) $P(0)=0$

2) $P(x)-P(x-1)=x(x+1)(2x+1)$ គ្រប់ $x\in\Re$ ។

ដំណោះស្រាយ

សម្មតិកម្ម $\begin{cases}1)\ P(0)=0\\ 2)\ p(x)-P(x-1)=x(x+1)(2x+1) \text{ គ្រប់ } x\in\Re\end{cases}$

មាន : $x=0:\ P(-1)=0$

$x=-1:\ P(-2)=0$

$\Rightarrow x=0;-1;-2$ ជាឫសនៃ $P(x)=0$

តែ $P(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី៤ គេបាន $P(x)=x(x+1)(x+2)(ax+b)$

$\Rightarrow P(x-1)=(x-1)x(x+1)[a(x-1)+b]$

$P(x)-P(x-1)=x(x+1)\left[(x+2)(ax+b)-(x-1)^2a-b(x-1)\right]$

តែ $P(x)-P(x)=x(x+1)(2x+1)$

ផ្ទឹមមេគុណ :

$2x+1=(x+2)(ax+b)-(x-1)^2a-(x-1)b$

$=ax^2+(2a+b)x+2b-ax^2+2ax-a-bx+b$

$=4ax+3b-a$

$\Rightarrow \begin{cases} 4a=2 \\ 3b-a=1 \end{cases}$ រឺ $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$

ដូចនេះ $P(x)=\frac{1}{2}x(x+1)^2(x+2)=\frac{1}{2}x^4+2x^3+\frac{5}{2}x^2+x$

លំហាត់ទី ៥២០

តាង $a_1;a_2;a_3...$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនគត់ដែលបំពេញទំនាក់ទំនង $a_{n-1}+a_n=2n$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 2$ ។ បើ $a_1=100$ គណនា a_{2009} ។

ដំណោះស្រាយ

សម្មតិកម្ម $\begin{cases} a_{n-1}+a_n=2n \ ; \ n\geq 2 \\ a_1=100 \end{cases}$

យើងបាន $a_n=2n-a_{n-1}$

$n=2: \ a_2=4-a_1=-96$

$n=3: \ a_3=6-a_2=102$

សង្កេត : $a_{n-1}+a_n=2n$

$\Rightarrow a_{n-2}+a_{n-1}=2(n-1)$

ដកអង្គ : $a_n-a_{n-2}=2$

រឺ $a_n=2+a_{n-2}$

$\Rightarrow a_n=4+a_{n-4}$

$a_n=4+a_{n-4}$

$=6+a_{n-6}$

$= 8 + a_{n-8}$

$= ....$

$$a_n = \begin{cases} n-2-96 = n-98 \text{ បើ } n \text{ គូ} \\ n-1+100 = n+99 \text{ បើ } n \text{ សេស} \end{cases}$$

គេបាន $a_{2009} = 2009 + 99$

ដូចនេះ $a_{2009} = 2108$

លំហាត់ទី ៥២១

កំណត់អនុគមន៍ $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ ដែលចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, y
$f[x - f(y)] = 1 - x - y$ ។

ដំណោះស្រាយ

$f[x - f(y)] = 1 - x - y \quad (1)$ $\bullet y = 0$ និង $x = a + f(0)$

$f(a + f(0) - f(0)) = 1 - a - f(0)$

$f(a) = 1 - a - f(0) \quad (2)$

$\bullet x = a$; $k = 1 - f(0)$ ថេរ

$\Rightarrow f(x) = -x + k \quad (3)$

គ្រប់ $x, y \in \mathbb{R}$:

$f(x - f(y)) = -(x - f(y)) + k$

$= -x + (-y + k) + k$

$= -x - y + 2k \quad (4)$

(1) និង (4) :

$1 - x - y = -x - y + 2k$

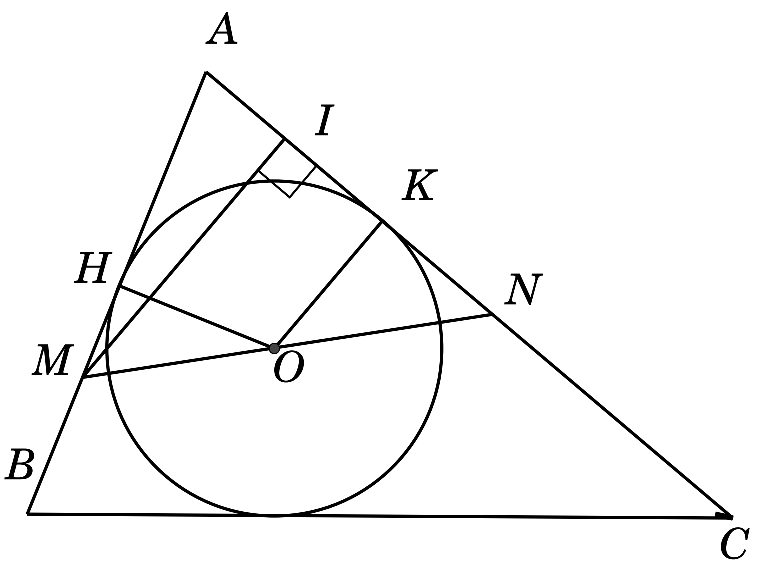
$\Rightarrow k = \dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ $f(x) = -x + \dfrac{1}{2}$; $x \in \mathbb{R}$

លំហាត់ទី ៥២២

គេឱ្យរង្វង់ផ្ចិត O កាំ r និងត្រីកោណ ABC ប្រែប្រួល ចារឹកក្រៅរង្វង់ ។ បន្ទាត់កាត់តាម O កាត់ AB, AC រៀងគ្នាត្រង់ M និង N ។ កំណត់ទីតាំងចំណុច A និង អង្កត់ MN ដើម្បីឱ្យផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ AMN មានតម្លៃ តូចបំផុត ។

ដំណោះស្រាយ



ឧបមាថា រង្វង់ផ្ចិត O ប៉ះ AB,AC ត្រង់ H,K រៀងគ្នា

$S_{AMN}=S_{AOM}+S_{AON}$

$=\frac{1}{2}r(AM+AN)$

$\Rightarrow S_{AMN}\geq r\sqrt{AM.AN}$ (1)

គូស $MI\perp AN,\ I\in AC$

$\Rightarrow MI\leq MA$

$(1): S_{AMN}\geq r\sqrt{MI.AN}$

$S_{MAN}\geq r\sqrt{2S_{AMN}}$

$\Rightarrow S_{AMN}\geq 2r^2$

ដូចនេះ S_{AMN} តូចបំផុតគឺ $S_{AMN}=2r^2$

សមភាព $\begin{cases}AM=AN\\AM=MI\end{cases}$ រឺ $\begin{cases}AM=AN\\\widehat{BAC}=90^0\end{cases}$

ទាញបាន $\triangle ABC$ កែងត្រង់ A នោះ $AHOK$ ជាការេជ្រុង r

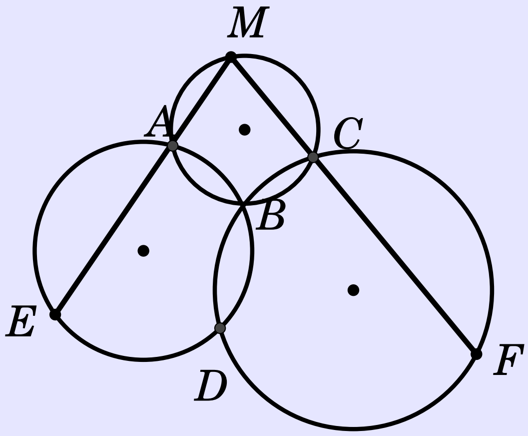
$\Rightarrow OA=r\sqrt{2}$

ដូចនេះ ចំណុច A នៅលើរង្វង់ផ្ចិត O កាំ $OA=r\sqrt{2}$ ។

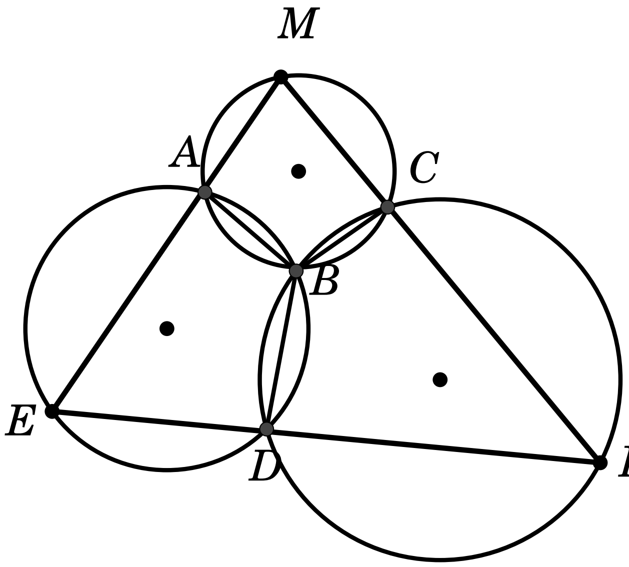
ដោយ $AM=AN$; $\triangle AMN$ កែងសមបាត នោះ $OA\perp MN$

លំហាត់ទី ៥២៣

គេឱ្យរង្វង់បីកាត់គ្នាពីរៗដូចរូបខាងក្រោម ។ សង់រូបឡើងវិញហើយបង្ហាញថាចំណុច E,D និង F នៅលើបន្ទាត់តែមួយ ។



ដំណោះស្រាយ



គេមាន

$\widehat{EDB}=\widehat{MAB}$

$\widehat{MAB}=\widehat{BCF}$

គេបាន $\widehat{EDB}=\widehat{BCF}$

តែ $\widehat{BCF}+\widehat{BDF}=180^0$

នោះ $\widehat{EDB}+\widehat{BDF}=180^0$

ដូចនេះ ចំណុច E,D និង F នៅលើបន្ទាត់តែមួយ

លំហាត់ទី ៥២៤

បង្ហាញថា $1^{2009}+2^{2009}+3^{2009}+\cdots+(n-1)^{2009}+n^{2009}$ ចែកមិនដាច់នឹង $n+2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន

$S_n=1^{2009}+2^{2009}+3^{2009}+\cdots+(n-1)^{2009}+n^{2009}$

$2S_n=\left(n^{2009}+2^{2009}\right)+\left((n-1)^{2009}+3^{2009}\right)+\cdots+\left(2^{2009}+n^{2009}\right)+1^{2009}+$

1^{2009}
$=(n+2)k_1+(n+2)k_2+\cdots+(n+2)k_{n-1}+2$
$=(n+2)k+2$ ដែល $k=k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}$
គេទាញបាន $2S_n$ ចែកមិនដាច់នឹង $n+2$
ដូចនេះ S_n ចែកមិនដាច់នឹង $n+2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n

លំហាត់ទី ៥២៥

គេមាន $f(x)=x^2-3x+3$ ។
ក. បង្ហាញថា បើ $f(x)=x$ នោះ $f(f(x))=x$ ។
ខ. រកឫសនៃសមីការ $f(x)=x$ ។ ទាញរកឫសនៃសមីការ $\left(x^2-3x+3\right)^2-3\left(x^2-3x+3\right)+3=x$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា បើ $f(x)=x$ នោះ $f(f(x))=x$
បើ $f(x)=x$ នោះ $f(f(x))=f(x)$
ដូចនេះ $f(f(x))=x$ ព្រោះ $f(x)=x$
ខ. រកឫសនៃសមីការ $f(x)=x$
សមីការ $f(x)=x$ អាចសរសេរជា $x^2-4x+3=x$ ដែលមានឫស $x_1=1$; $x_2=3$
♦ ទាញរកឫសនៃសមីការ $\left(x^2-3x+3\right)^2-3\left(x^2-3x+3\right)+3=x$
សមីការ $\left(x^2-3x+3\right)^2-3\left(x^2-3x+3\right)+3=x$ អាចសរសេរជា $f(f(x))=x$ ដែលជាសមីការវិបាកនៃសមីការ $f(x)=x$
គេទាញបាន $x_1=1$; $x_2=3$ ជាឫសនៃ $\left(x^2-3x+3\right)^2-3\left(x^2-3x+3\right)+3=x$
គឺ $x_1=1$; $x_2=3$ ជាឫសនៃ $x^4-6x^3+12x^2-10x+3=0$
$\left(x^2-4x+3\right)(x-1)^2=0$
សមីការមានឫស $x_1=1$; $x_2=3$

លំហាត់ទី ៥២៦

គេតាង $n!=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times2\times1$ ។ បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n គេបាន :

$$1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+\cdots+\frac{(2009)(2010)\cdots(2009+n-1)}{n!}=\frac{(2010)(2011)\cdots(2009+n)}{n!}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

- ចំពោះ $n=1$: $1+\dfrac{2009}{1}=\dfrac{2010}{1}$ ជាសមភាពដែលពិត

- ឧបមាថា សមភាពពិតដល់ $n=k$ មានន័យថា :

$$1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+\cdots+\frac{(2009)(2010)\cdots(2009+k-1)}{k!}$$
$$=\frac{(2010)(2011)\cdots(2009+k)}{(k)!}$$

- ពិនិត្យចំពោះ $n=k+1$

$$1+\frac{2009}{1!}+\frac{(2009)(2010)}{2!}+\cdots+\frac{(2009)(2010)\cdots(2009+k-1)}{k!}$$
$$+\frac{(2009)(2010)\cdots(2009+k)}{(k+1)!}$$
$$=\frac{(2010)(2011)\cdots(2009+k)}{(k)!}+\frac{(2009)(2010)\cdots(2009+k)}{(k+1)!}$$
$$=\frac{(2010)(2011)\cdots(2009+k)(k+1)}{(k+1)!}+\frac{(2009)(2010)\cdots(2009+k)}{(k+1)!}$$
$$=\frac{(2010)(2011)\cdots(2009+k)(2009+(k+1))}{(k+1)!}$$ គឺពិតចំពោះ $n=k+1$

លំហាត់ទី ៥២៧

អនុគមន៍ g កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដោយ $g(x+1)+g(x-1)=\sqrt{2}g(x)$ ។

ក. គេតាង $g(x)=p$ និង $g(x-1)=q$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

គណនា $g(x+1), g(x+2), g(x+3)$ និង $g(x+4)$ ជាអនុគមន៍នៃ p និង q ។

ខ. បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍ខួប ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា $g(x+1), g(x+2), g(x+3)$ និង $g(x+4)$ ជាអនុគមន៍នៃ p និង q

គេមាន $g(x+1)=\sqrt{2}g(x)-g(x-1)$

ដោយ $g(x-1)=q$; $g(x)=p$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ នោះគេបាន

$g(x+1)=\sqrt{2}p-q$

$g(x+2)=\sqrt{2}g(x+1)-g(x)=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}p-q\right)-p=p-\sqrt{2}q$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

$g(x+3)=\sqrt{2}g(x+2)-g(x+1)=\sqrt{2}\left(p-\sqrt{2}q\right)-\sqrt{2}p+q=-q$ ចំពោះគ្រប់

$x \in \mathbb{R}$

$g(x+4) = \sqrt{2}g(x+3) - g(x+2) = \sqrt{2}(-q) - p + \sqrt{2}q = -p = -g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

ខ. បង្ហាញថា g ជាអនុគមន៍ខួប

$g(x+5) = \sqrt{2}g(x+4) - g(x+3) = -\sqrt{2}p + q$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

$g(x+6) = \sqrt{2}g(x+5) - g(x+4) = \sqrt{2}\left(p - \sqrt{2}q\right) - \sqrt{2}q + p = q$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

$g(x+7) = \sqrt{2}g(x+6) - g(x+5) = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}q - p\right) - \left(-\sqrt{2}p + q\right) = q$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

$g(x+8) = \sqrt{2}g(x+7) - g(x+6) = \sqrt{2}q - \left(\sqrt{2}q - p\right) = p = g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ g ជាអនុគមន៍ខួប

របៀបទី ២ : តាមសំណួរខាងលើ $g(x+4) = -g(x)$ នោះគេអាចសរសេរ

$g(x+8) = g((x+4)+4)$

$g(x+8) = -g(x+4) = -(-g(x)) = g(x)$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ g ជាអនុគមន៍ខួប

លំហាត់ទី ៥២៨

គេមានស្វីតនៃចំនួនពិត (u_n) ដែលកំណត់ដោយ $u_1 = \dfrac{1}{2}$ និង $u_n = \left(\dfrac{2n-3}{2n}\right)u_{n-1}$ ចំពោះ $n = 2;3;\ldots$ ។

បង្ហាញថា $u_1 + u_2 + \cdots + u_n < 1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

ដំណោះស្រាយ

- ចំពោះ $k \geq 2$ គេបាន $2ku_k = 2ku_{k-1} - 3u_{k-1}$ ហើយ $u_{k-1} = 2(k-1)u_{k-1} - 2ku_k$

ដោយប្តូរតម្លៃ $k = 2;\ldots;n+1$

$u_1 = 2u_1 - 4u_2$

$u_2 = 4u_2 - 6u_3$

....

$u_{n-1} = 2(n-1)u_{n-1} - 2nu_n$

$u_n = 2nu_n - 2(n+1)u_{n+1}$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = 2u_1 - (2n+2)u_{n+1} = 1 - (2n+2)u_{n+1}$$

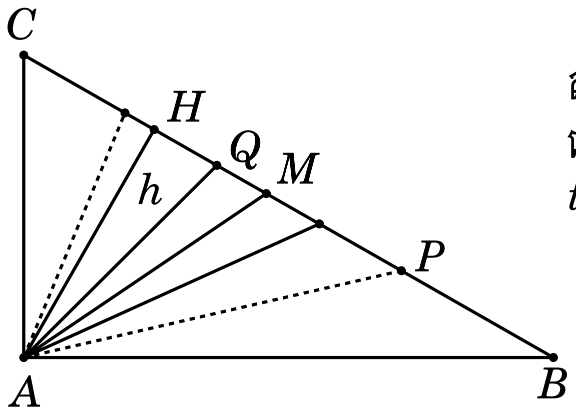
ដោយ $u_n > 0$ ចំពោះគ្រប់ n នោះ $u_1 + u_2 + \cdots + u_n < 1$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n

លំហាត់ទី ៥២៩

ត្រីកោណកែង ABC មួយមានអ៊ីប៉ូតេនុស $BC = a$ និងកម្ពស់ $AH = h$ ។ គេចែក $[BC]$ ជា n ចំណែកស្មើគ្នា ដែល n ជាចំនួនគត់សេស ។ គេយក $[PQ]$ ជាចំណែកដែលនៅកណ្ដាលគេ ហើយដែលវង្វាស់មុំ $P\widehat{A}Q = x$ ។

បង្ហាញថា $tanx = \dfrac{4nh}{a\left(n^2-1\right)}$ ។

ដំណោះស្រាយ



តាង M ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ $[BC]$ ។

គេបាន $x = P\widehat{A}Q = P\widehat{A}H - Q\widehat{A}H$

$$tanx = tan\left(P\widehat{A}H - Q\widehat{A}H\right) = \frac{tanP\widehat{A}H - tanQ\widehat{A}H}{1 + tanP\widehat{A}H \times tanQ\widehat{A}H}$$

តែ $tanP\widehat{A}H = \dfrac{HP}{HA}$; $tanQ\widehat{A}H = \dfrac{HQ}{HA}$

$$tanx = \frac{(HP - HQ)\times HA}{HA^2 + HP \times HQ} = \frac{PQ \times HA}{HA^2 + HP \times HQ} \quad (1)$$

ដោយ $HP = HM + MP = HM + \dfrac{a}{2n}$ និង $HQ = HM - MQ = HM - \dfrac{a}{2n}$

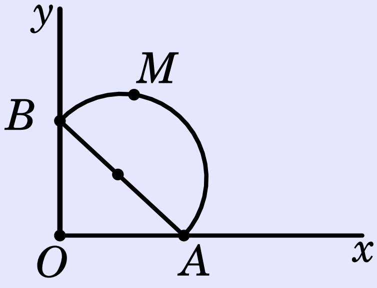
$$HM^2 = AM^2 - Ah^2 = \frac{a^2 - 4h^2}{4}$$

$$HP \times HQ = HM^2 - \frac{a^2}{4n^2} = \frac{a^2-4h^2}{4} - \frac{a^2}{4n^2} = \frac{a^2n^2 - 4n^2h^2 - a^2}{4n^2}$$

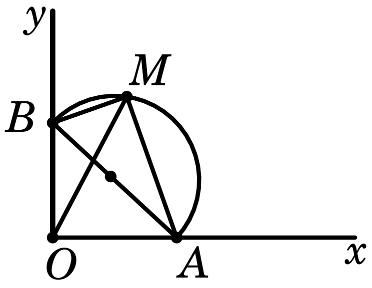
$$tanx = \frac{ah}{n} \times \frac{4n^2}{4n^2h^2 + a^2n^2 - 4n^2h^2 - a^2} = \frac{4nh}{a\left(n^2-1\right)}$$

លំហាត់ទី ៥៣០

គេឱ្យចំណុច M មួយនៃកន្លះរង្វង់ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត $[AB]$ ។ រកសំណុំចំណុច M កាលណា A ចល័តលើជ្រុង $[Ox)$ និង B ចល័តលើជ្រុង $[Oy)$ នៃមុំកែង xOy មួយដោយរក្សាប្រវែង AB ថេរ ។



ដំណោះស្រាយ



ចតុកោណ $AMBO$ ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយ ។
គេតាង $M\widehat{A}B = \alpha$ ថេរ , $AB = 2R$ ថេរ
គេបាន $M\widehat{O}B = M\widehat{A}B = \alpha$ ថេរ
បានន័យថា M នៅលើ $[OM)$ ដែល $M\widehat{O}y = \alpha$

លីមីត : - បើ $A = O$ នោះ $B = B_1$ ដែល $OB_1 = 2R$ ហើយ $M = M_1$ ដែល $OM_1 = 2R\cos\alpha$

- បើ $B = O$ នោះ $A = A_1$ ដែល $OA_1 = 2R$ ហើយ $M = M_2$ ដែល $OM_2 = 2R\sin\alpha$

សន្និដ្ឋាន :
សំណុំចំណុចនៃចំណុច M គឺជា $[M_1M_2]$ នៃ $[OM)$ ដែល $M\widehat{O}y = \alpha$, $OM_1 = 2R\cos\alpha$ និង $OM_2 = 2R\sin\alpha$ ។

លំហាត់ទី ៥៣១

បង្ហាញថា $3^{2n} + 2^{6n-5}$ ចែកដាច់នឹង 11 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $3^2 + 2^{6\times1-5} = 11$ ចែកដាច់នឹង 11 : ពិត
ឧបមាថាពិតដល់ $n = k$ គឺថា $3^{2k} + 2^{6k-5} = 11p,\ p \in \mathbb{Z}^+$
នាំឱ្យ $3^{2k} = 11p - 2^{6k-5},\ p \in \mathbb{Z}^+$
ពិនិត្យចំពោះ $n = k+1$ គេបាន $3^{2(k+1)} + 2^{6(k+1)-5} = 9\times3^{2k} + 2^6\times2^{6k-5}$
$= 9\times11p - 9\times2^{6k-5} + 2^6\times2^{6k-5} = 11\left(9p + 5\times2^{6k-5}\right)$ ចែកដាច់នឹង 11 : ពិត

ដូចនេះ $3^{2n}+2^{6n-5}$ ចែកដាច់នឹង 11 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n

លំហាត់ទី ៥៣២

គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន a និង b ដែល $2a^2+a=3b^2+b$ ។
បង្ហាញថា $a-b$; $2a+2b+1$; និង $3a+3b+1$ សុទ្ធតែជាការេប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $2a^2+a=3b^2+b$ នោះគេបាន :
$a^2=a-b+3a^2-3b^2=(a-b)(3a+3b+1)$
$b^2=a-b+2a^2-2b^2=(a-b)(2a+2b+1)$
បើ δ ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃ $3(a+b)+1$ & $2(a+b)+1$ នោះ
$\delta|(6a+6b+3-6a-6b-2)$ គឺ $\delta|1$
ដូចនេះ $PGCD(3(a+b)+1\&2(a+b)+1)=1$ ហើយ $PGCD\left(a^2;b^2\right)=a-b$
ម្យ៉ាងទៀត គេតាង $d=PGCD(a;b)$ នោះ $a=dp;\ b=dq$ ដែល
$PGCD(p;q)=1$
គេបាន $a^2=d^2p^2$; $b^2=d^2q^2$
ដោយ $PGCD\left(p^2;q^2\right)=1$ នោះ $d^2=PGCD\left(a^2;b^2\right)$
គេទាញបាន $a-b=d^2$; $3a+3b+1=p^2$; $2a+2b+1=q^2$

លំហាត់ទី ៥៣៣

សំណុំ E_n មួយមាន n ធាតុដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ តាង $P(E_n)$ ជាសំណុំនៃសំណុំរងរបស់ E_n ហើយ $Card(P(E_n))$ ជាចំនួនធាតុនៃ $P(E_n)$ ។ តាមវិចារដោយកំណើន បង្ហាញថា $Card(P(E_n))=2^n$ ។

ដំណោះស្រាយ

- ចំពោះ $n=1$: $E_1=\{a_1\}$ ហើយ $P(E_1)=\{\varnothing,\ a_1\}$ នោះគេបាន
$card(P(E_1))=2=2^1$
- ឧបមាថាសំណើពិតដល់ $n=k$: គេបាន $E_k=\{a_1,a_2,a_3,...,a_k\}$ ហើយ
$Card(P(E_k))=2^k$
- ពិនិត្យចំពោះ $n=k+1$: គេបាន $E_{k+1}=\{a_1,a_2,a_3,...,a_k,a_{k+1}\}=E_k\cup\{a_{k+1}\}$
ចំពោះ k ធាតុដំបូងគេអាចបង្កើតសំណុំរងបានចំនួន 2^k (តាមសម្មតិកម្មកំណើន)
គេបញ្ចូលធាតុ a_{k+1} ដែលនៅសល់ទៅក្នុងសំណុំរងនីមួយៗខាងលើ នោះគេនឹងបាន 2^k

សំណុំរងផ្សេងទៀត ។
សរុបមក គេបាន $Card(P(E_{k+1}))=2^k+2^k=2^{k+1}$: សំណើពិតដល់ $n=k+1$
ដូចនេះ $Card(P(E_n))=2^n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 1$

លំហាត់ទី ៥៣៨

ត្រីកោណ ABC មួយមានជ្រុង $BC=a$; $AC=b$ ដែល $a+b=(atanA+btanB)tan\frac{C}{2}$ ។ បង្ហាញថា ABC ជាត្រីកោណសមបាត ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $a+b=(atanA+btanB)tan\frac{C}{2}$ នោះគេបាន :

$acosAcosBcos\frac{C}{2}+bcosAcosBcos\frac{C}{2}=asinAcosBsin\frac{C}{2}+bcosAsinBsin\frac{C}{2}$

$acosB\left(cosAcos\frac{C}{2}-sinAsin\frac{C}{2}\right)+bcosA\left(cosBcos\frac{C}{2}-sinBsin\frac{C}{2}\right)=0$

$acosBcos\left(A+\frac{C}{2}\right)+bcosAcos\left(B+\frac{C}{2}\right)=0 \quad (1)$

ដោយ $A+B+C=\pi$ នោះ $\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}-\frac{B}{2}$

(1) អាចសរសេរ $acosBcos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)+bcosAcos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{B}{2}-\frac{A}{2}\right)=0$

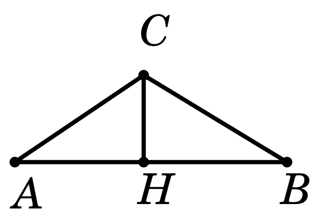
$-acosBsin\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)+bcosAsin\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)=0$

$sin\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)(-acosB+bcosA)=0$ សមមូល $sin\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)=0$ ឬ $-acosB+bcosA=0$

-ចំពោះ $sin\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)=0$ គេបាន $A=B$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសមបាតត្រង់កំពូល C ។

-ចំពោះ $-acosB+bcosA=0$



គេបាន $acosB=bcosA$ នាំឱ្យ $HA=HB$

ដូចនេះ ABC ជាត្រីកោណសមបាតត្រង់កំពូល C ។

លំហាត់ទី ៥៣៥

ស្វ៊ីត (x_n) មួយកំណត់ដោយ $x_1 = 1$ និង $x_{n+1} = 1 + x_1x_2\cdots x_n$ ចំពោះ $n = 1,2,\ldots$ ។ គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $x_{i+1} = 1 + x_1x_2\cdots x_i$ ចំពោះ $i = 1,2,\ldots$

$x_{i+1} - 1 = x_1x_2\cdots x_i = x_i((x_1x_2\cdots x_{i-1}+1)-1)$

$x_{i+1} - 1 = x_i(x_i - 1)$ ព្រោះ $x_i = x_1x_2\cdots x_{i-1}+1$

ចំពោះ $i = 2,3,\ldots$ គេបាន $x_i > 1$ គឺ $x_i - 1 > 0$

គេអាចសរសេរ $\dfrac{1}{x_{i+1}-1} = \dfrac{1}{x_i(x_i-1)} = \dfrac{1}{x_i-1} - \dfrac{1}{x_i}$, $i = 2,3,\ldots$

$\dfrac{1}{x_i} = \dfrac{1}{x_i-1} - \dfrac{1}{x_{i+1}-1}$, $i = 2,3,\ldots$

គេបាន $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x_k} = \dfrac{1}{x_1} + \sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{x_k} = \dfrac{1}{x_1} + \sum\limits_{k=2}^{n}\left(\dfrac{1}{x_k-1} - \dfrac{1}{x_{k+1}-1}\right)$

$S_n = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2-1} - \dfrac{1}{x_{n+1}-1} = 2 - \dfrac{1}{x_{n=1}-1}$ ព្រោះ $x_1 = 1, x_2 = 1+x_1 = 1+1 = 2$

តែ $x_{n+1} - 1 = x_1x_2\cdots x_n > x_1(1+x_1)^{n-1} = 2^{n-1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n-1} = +\infty$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-1) = +\infty$

នាំឱ្យ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{x_{n+1}-1} = 0$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2$

លំហាត់ទី ៥៣៦

១. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y = f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+2}$ (គេមិនអោយសង់ក្រាបតាង f ទេ) ។

២. g ជាអនុគមន៍បង្រួមនៃអនុគមន៍ f នៅលើ $[0;+\infty[$ ។ ពីអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f បញ្ជាក់អថេរភាពនៃអនុគមន៍ g នៅលើ $[0;+\infty[$ ទាញរកអនុគមន៍ច្រាស g^{-1} នៃអនុគមន៍ g ។ សង់ខ្សែកោង (C') និង (C'') តាង g និង g^{-1} ។

ដំណោះស្រាយ

១. សិក្សាអថេរភាពនៃអនុគមន៍ $y=f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}$ (មិនសង់ក្រាបតាង f)

♦ ដែនកំណត់

ចំពោះ $\forall x\in\mathbb{R}:\ x^2\ge 0$

$\Rightarrow x^2+2>0$

ដូចនេះ $\mathscr{D}=\mathbb{R}$

♦ ទិសដៅអថេរភាព

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2+2\right)-2x\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+2\right)^2}$$
$$=\frac{2x\left(x^2+2-x^2+1\right)}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{6x}{\left(x^2+2\right)^2}$$

- ចំណុចបរមា : ចំពោះ $\forall x\in\mathscr{D},\ \left(x^2+2\right)^2>0$ នោះ $f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $6x$ រឺដូច x

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

តាមតារាងសញ្ញានៃ $f'(x)$ អនុគមន៍ f មានអប្បបរមាមួយត្រង់ $x=0$ គឺ $f(0)=-\dfrac{1}{2}$ ។

-លីមីត និង អាស៊ីមតូត

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^2+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=1$$

បន្ទាត់ $(\Delta):\ y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេកនៃខ្សែកោង (C) តាង f ។ -កំណត់ទីតាំងធៀបរវាងខ្សែកោង (C) និង អាស៊ីមតូតដេក

តាង $h(x)=f(x)-1=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}-1=\dfrac{-3}{x^2+2}<0$ ចំពោះ $\forall x\in\mathscr{D}$ នោះខ្សែកោង (C) នៅក្រោមអាស៊ីមតូតដេក ។

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1 ↘		$-\frac{1}{2}$	↗	

២. ពីអថេរភាពនៃអនុគមន៍ f បញ្ជាក់អថេរភាពនៃអនុគមន៍ g នៅលើ $[0;+\infty[$ ទាញរក អនុគមន៍ច្រាស g^{-1} នៃអនុគមន៍ g

យើងបាន g ជាអនុគមន៍បង្រួមនៃអនុគមន៍ f នៅលើ $[0;+\infty[$

$g:[0;+\infty[\to[0;1[$

$$:x\mapsto g(x)=\frac{x^2-1}{x^2+2}$$

ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតនៅលើ $[0;+\infty[$ នោះ g ជាអនុវត្តន៍១ទល់១ពី $[0;+\infty[$ ទៅ $[0;1[$ ហើយមានអនុវត្តន៍ច្រាសមួយតាងដោយ g^{-1} កំណត់ដូចខាងក្រោម :

$g^{-1}:[0;1[\to[0;+\infty[$

$$:y\mapsto x=g^{-1}(y)$$

ចំពោះ $\forall y\in[0;1[,\ y=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}$

$\Leftrightarrow x^2y+2y=x^2-1$

$\Leftrightarrow x^2y-x^2=-1-2y$

$\Leftrightarrow (y-1)x^2=-1-2y$

$\Leftrightarrow x^2=\dfrac{-1-2y}{y-1},\ y\neq 1$

$\Leftrightarrow x^2=\dfrac{2y+1}{1-y}>0$

$\Rightarrow x=\sqrt{\dfrac{2y+1}{1-y}}$

យើងបាន :

$g^{-1}:[0;1[\to[0;+\infty[$

$$:y\mapsto x=g^{-1}(y)=\sqrt{\frac{2y+1}{1-y}}$$

ដោយប្តូរ x ជា y និង y ជា x វិញ

$g^{-1}:[0;1[\to[0;+\infty[$

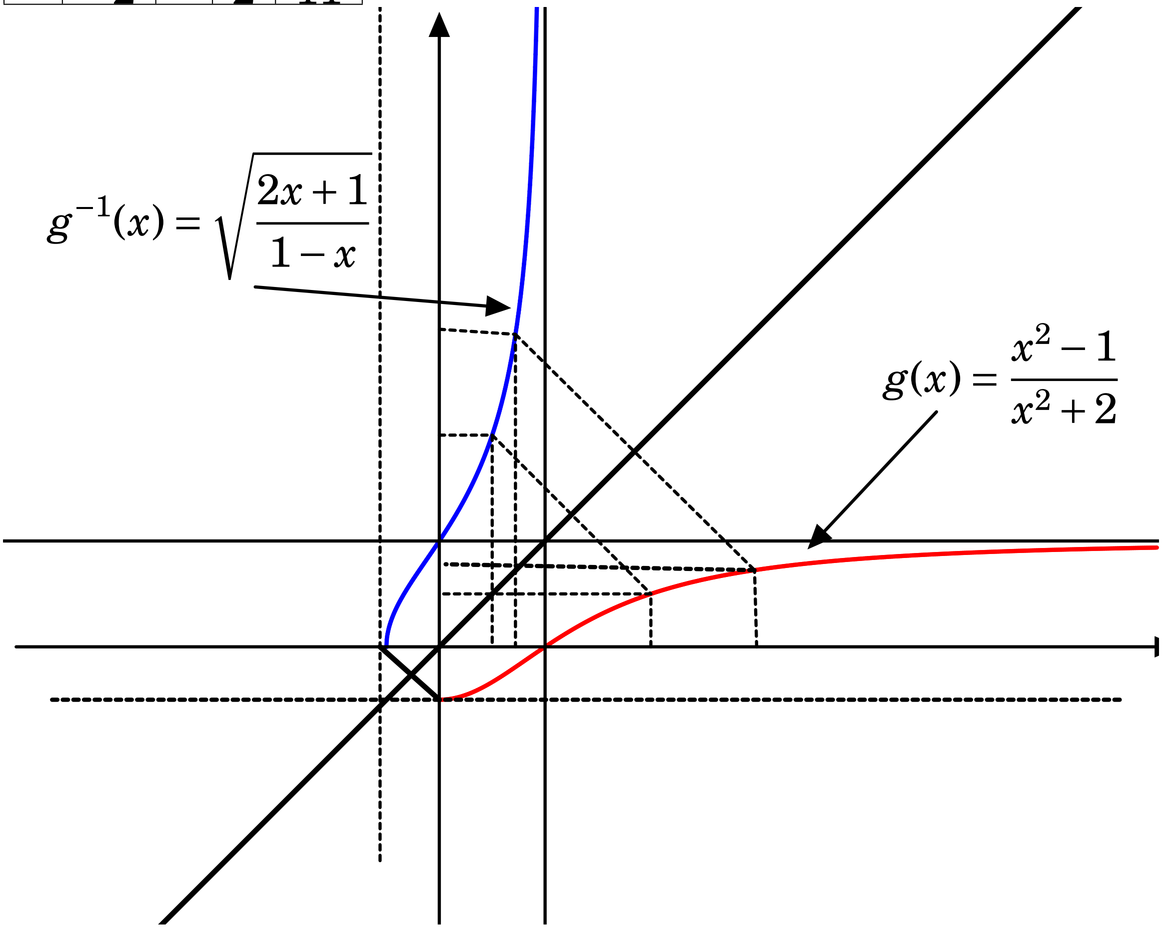
$:x\mapsto y=g^{-1}(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{1-x}}$

-សង់ខ្សែកោង (C') និង (C'') តាង g និង g^{-1}

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	0 $\qquad$ +
$g(x)$	$-\frac{1}{2}$ $\nearrow$ 1

តារាងតម្លៃនៃ $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}$

x	0	1	2	3
y	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{11}$



គេបានខ្សែកោង (C'') តាង g^{-1} ដោយធ្វើបំលែងឆ្លុះធៀបនឹងបន្ទាត់ពុះទី ១ មានសមីការ

$y = x$ នៃខ្សែកោង (C') តាង $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+2}$ ។

(C'') មានអាស៊ីមតូតឈរ $x = 1$ និងកាត់តាម $\left(-\frac{1}{2};0\right)$, $(0;1)$, $\left(\frac{1}{2};2\right)$ ។

លំហាត់ទី ៥៣៧

អនុគមន៍ $f(x;y)$ មួយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទាំងបីដូចខាងក្រោមចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន x និង y :

(i) $f(0;y) = 1+y$

(ii) $f(x+1;0) = f(x;1)$

(iii) $f(x+1;y+1) = f(x;f(x+1;y))$ ។

ក. គណនា $f(1;n)$, $f(2;n)$ និង $f(3;n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. គណនា $f(4;2009)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា $f(1;n)$, $f(2;n)$ និង $f(3;n)$ ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $f(1;n) = f(0;f(1;n-1)) = 1+f(1;n-1)$; $n \geq 1$

តាង $p_n = f(1;n)$ គេបាន $p_0 = f(1;0) = f(0;1) = 1+1 = 2;$

$p_n = p_{n-1}+1$ ចំពោះ $n \geq 1$

គេបាន (p_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $p_0 = 2; d = 1$

ដូចនេះ $f(1;n) = P_n = p_0 + nd = n+2$

គេមាន $f(2;n) = f(1;f(2;n-1)) = f(2;n-1)+2$; $n \geq 1$

តាង $q_n = f(2;n)$ គេបាន $q_0 = f(2;0) = f(1;1) = p_1 = 1+2 = 3$;

$q_n = q_{n-1}+2$

គេបាន (q_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមាន $q_0 = 3;\ d' = 2$

ដូចនេះ $f(2;n) = q_n = q_0 + nd' = 2n+3$

គេមាន $f(3;n) = f(2;f(3;n-1)) = 2f(3;n-1)+3$ ចំពោះ $n \geq 1$

$f(3;n)+3 = 2(f(3;n-1)+3)$

តាង $u_n = f(3;n)+3$ នោះគេបាន $u_0 = f(3;0)+3 = f(2;1)+3 = (2\times 1+3)+3 = 8$

គេបាន (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $u_0 = 8$; $q = 2$

ហើយ $u_n = u_0 q^n = 2^{n+3}$

ដូចនេះ $f(3;n) = 2^{n+3}-3$

ខ. គណនា $f(4;2009)$

គេមាន $f(4;n)=f(3;f(4;n-1))=2^{f(4;n-1)+3}-3$, $n\geq 1$

$f(4;0)=f(3;1)=2^4-3=2^{2^2}-3$ មាននិទស្សន្ត 2ចំនួន $0+2$ដង

$f(4;1)=2^{f(4;0)+3}-3=2^{16}-3=2^{2^{2^2}}-3$ មាននិទស្សន្ត 2 ចំនួន $1+2$ ដង

....

$f(4;n)=2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}-3$ មាននិទស្សន្ត 2 ចំនួន $n+2$ ដង

ដោយយក $n=2009$ នោះ $f(4;2009)=2^{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}$ មាននិទស្សន្ត 2 ចំនួន $2009+2=$ 2011 ដង

លំហាត់ទី ៥៣៨

បើ $a+b+c=1$; $a^2+b^2+c^2=9$ និង $a^3+b^3+c^3=1$ ចូររក $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$ ...(1)

តែ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$1^2=9+2(ab+bc+ca)$

$ab+bc+ca=-4$

ហើយ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$

$1-3abc=1[9-(ab+bc+ca)]$

$1-3abc=9-(-4)$

$abc=-4$

តាម (1) : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{-4}{-4}=1$

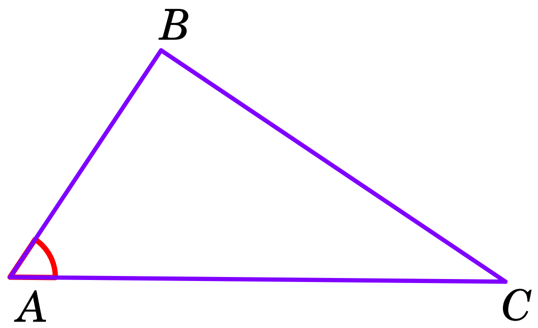
លំហាត់ទី ៥៣៩

គេឱ្យចំណុច O ជាគល់តម្រុយនៃប្រព័ន្ធកូអរដោនេមានបីវិមាត្រ ហើយតាង A,B និង C ជាចំណុចនៅលើអ័ក្សវិជ្ជមាន x,y និង z រៀងគ្នា ។ បើ $OA=\sqrt[4]{75}$ និង $\angle BAC=30^0$ ចូរគណនា $100S_{\triangle ABC}$ ($S_{\triangle ABC}$ ជាផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC) ។

ដំណោះស្រាយ

រំលឹក

១. ផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ABC



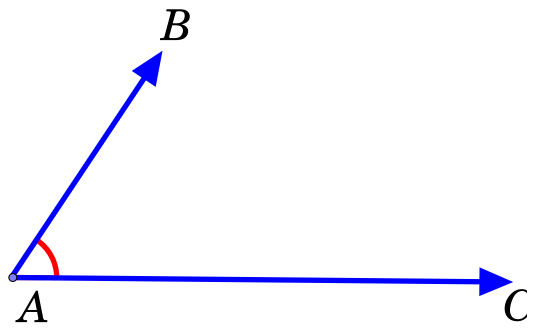
$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot sinA=\frac{1}{2}BA\cdot BC\cdot sinB=\frac{1}{2}CA\cdot CB\cdot sinC$$

២. ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ

ក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ (វិមាត្របី) បើគេមានបីចំណុច A,B និង C រត់មិនត្រង់គ្នា នោះផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC គឺ :

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}\right|$$

៣. ក) ផលគុណស្កាលែ(ប្រើមុំ)



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot cos\angle BAC$$

ខ) ផលគុណស្កាលែ (ប្រើកូអរដោនេ)
បើគេមានពីរវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{U}=(x_1,y_1,z_1)$ និង $\overrightarrow{V}=(x_2,y_2,z_2)$ នោះផលគុណស្កាលែ
$\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{V}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ ។

តាម $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot sin30^0}{2}$

ដោយ A,B និង C ជាចំណុចនៅលើអ័ក្សរ៉ឺផ្លមាន x,y និង z រៀងគ្នា យើងអាចយក
$A\left(\sqrt[4]{75},0,0\right)$; $B(0,b,0)$ និង $C(0,0,c)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt[4]{75},b,0\right)$ និង $\overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt[4]{75},0,c\right)$

តាមផលគុណស្កាលែ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|AB|\cdot|AC|\cdot cos30^0=\sqrt{75}$

នោះ $|AB|\cdot|AC|=10$

យើងបាន $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot sin30^0}{2}=\dfrac{10}{4}=\dfrac{5}{2}$

នាំឱ្យ $100S_{\triangle ABC}=100\times\dfrac{5}{2}=250$

លំហាត់ទី ៥៤០

ស៊ីត $a_1,a_2,a_3,\ldots$ កំណត់ដោយ $a_1=1$ និង ចំពោះ $n\geq 2$,

$$a_n=(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})\times n \text{ ។}$$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា a_{2020} ចែកដាច់នឹង 2020^2 ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $b_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ នោះ $b_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$

ដោយ $a_n=(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})\times n$ នោះ $b_n-b_{n-1}=b_{n-1}\times n$

គេទាញបានថា $b_n=(n+1)b_{n-1}$ ចំពោះ $n\geq 2$

ធ្វើបែបនេះជាបន្តទៀត គេបាន :

$b_n=(n+1)b_{n-1}=(n+1)nb_{n-2}=(n+1)n(n-1)b_{n-3}=\cdots=(n+1)n(n-1)\cdot 3b_1=\dfrac{1}{2}(n+1)!$

នាំឱ្យ $a_n=b_n-b_{n-1}=\dfrac{1}{2}(n+1)!-\dfrac{1}{2}n!=\dfrac{n}{2}\times n!$

ចំពោះ $n=2020$: $a_{2020}=\dfrac{2020}{2}\times 2020!=2020^2\times\dfrac{2019!}{2}$ ចែកដាច់នឹង 2020

លំហាត់ទី ៥៨១

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $cos\frac{\pi}{7}+cos\frac{3\pi}{7}+cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $z=cos\frac{\pi}{7}+isin\frac{\pi}{7}$

នោះ $z^7=cos\pi+isin\pi=-1$

ម្យ៉ាងទៀត $cos\frac{\pi}{7}+cos\frac{3\pi}{7}+cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{2}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+\frac{1}{2}\left(z^5+\frac{1}{z^5}\right)$

$$=\frac{z^{10}+z^8+z^6+z^4+z^2+1}{2z^5}$$

ដោយ $z^7+1=0$ នោះ $z^{10}=-z^3$ និង $z^8=-z$ ហើយគេបាន

$$z^{10}+z^8+z^6+z^4+z^2+1=z^6+z^4-z^3+z^2-z+1$$

$$=z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1+z^5=\frac{z^7+1}{z+1}+z^5=z^5$$

$\Rightarrow cos\frac{\pi}{7}+cos\frac{3\pi}{7}+cos\frac{5\pi}{7}=\frac{z^5}{2z^5}=\frac{1}{2}$ ពិត

លំហាត់ទី ៥៨២

ដាក់ជាផលគុណកត្តា $a^{10}+a^5+1$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $a^{10}+a^5+1=\frac{(a^5)^3-1}{a^5-1}$

$$=\frac{(a^3)^5-1}{(a-1)\left(a^4+a^3+a^2+a+1\right)}=\frac{(a^3-1)\left(a^{12}+a^9+a^6+a^3+1\right)}{(a-1)\left(a^4+a^3+a^2+a+1\right)}$$

តែ $\frac{a^{12}+a^9+a^6+a^3+1}{a^4+a^3+a^2+a+1}=a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1$

ដូចនេះ $a^{10}+a^5+1=\left(a^2+a+1\right)\left(a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1\right)$

លំហាត់ទី ៥៨៣

ដោះស្រាយសមីការ $x+3\left(2-3x^2\right)^2=2$ ។

ដំណោះស្រាយ

<u>របៀបទី ១</u>:

$x+3\left(2-3x^2\right)^2=2 \quad (1)$

តាង $y=2-3x^2$ នោះសមីការទៅជា $x+3y^2=2 \quad (2)$

គេបានប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x=2-3y^2 & (3) \\ y=2-3x^2 & (4) \end{cases}$

យក $(3)-(4)$: $x-y=-3\left(y^2-x^2\right)$

$\Leftrightarrow (x-y)(1-3x-3y)=0$

ចំពោះ $x-y=0$ នោះ $x=y$ ហើយតាម (2) គេបាន

$$3x^2+x-2=0 \quad (5)$$

ដោះស្រាយសមីការ (5) គេបាន $x_1=-1$ និង $x_2=\dfrac{2}{3}$

ចំពោះ $1-3x-3y=0$ នោះ $y=\dfrac{1-3x}{3}$ ហើយតាម (2) គេបាន

$$9x^2-3x-5=0 \quad (6)$$

ដោះស្រាយសមីការ (6) គេបាន $x_{3,4}=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{6}$

ដូចនេះ សមីការមានឫស $x_1=1,\ x_2=\dfrac{2}{3},\ x_3=\dfrac{1+\sqrt{21}}{6},\ x_4=\dfrac{1-\sqrt{21}}{6}$

<u>របៀបទី ២</u>:

$$x+3\left(2-3x^2\right)^2=2 \quad (2)$$

$\Leftrightarrow 27x^4-36x^2+x+10=0$

$\Leftrightarrow (x+1)\left(27x^3-27x^2-9x+10\right)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(3x-2)\left(9x^2-3x-5\right)=0$

- ចំពោះ $x+1=0$ នោះ $x=-1$
- ចំពោះ $3x-2=0$ នោះ $x=\dfrac{2}{3}$
- ចំពោះ $9x^2-3x-5=0$ នោះ $x_{3,4}=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{6}$

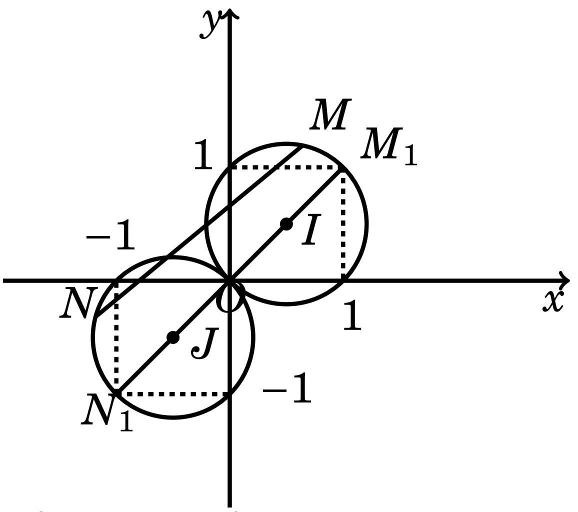
ដូចនេះ សមីការមានឫស $x_1=1,\ x_2=\dfrac{2}{3},\ x_3=\dfrac{1+\sqrt{21}}{6},\ x_4=\dfrac{1-\sqrt{21}}{6}$

លំហាត់ទី ៥៨៤

គេឱ្យ a,b,c,d ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\begin{cases} a^2+b^2=a+b & (1) \\ c^2+d^2=-(c+d) & (2) \end{cases}$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(a-c)^2+(b-d)^2\le 8$ ។

ដំណោះស្រាយ



តាម $(1):\Leftrightarrow \left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ ចំណុច $M(a;b)$ ស្ថិតនៅលើរង្វង់មានផ្ចិត $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ និងកាំ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$(2):\Leftrightarrow \left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ ចំណុច $N(c;d)$ ស្ថិតនៅលើរង្វង់មានផ្ចិត $J\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ និងកាំ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

គេបាន $\begin{cases} M_1N_1=M_1O+ON_1=2\sqrt{2} \\ MN\le M_1N_1 \end{cases}$ (តាមរូបជាក់ស្តែង)

$\Rightarrow \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\le 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow (a-c)^2+(b-d)^2\le 8$ ពិត

លំហាត់ទី ៥៨៥

រកតម្លៃ $p\in\mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $(x-p)(x-2011)+1=(x+m)(x+n)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R};\ m,n\in\mathbb{Z}$ ។

ដំណោះស្រាយ

សមីការ $(x-p)(x-2011)+1=(x+m)(x+n)$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\mathbb{R};\ m,n\in\mathbb{Z}$
គេបាន
$x^2-2011x-px+2011p+1=x^2+x(m+n)+mn$
ផ្ទឹមមេគុណគេបាន $\begin{cases} m+n=-(2011+p) & (1)\\ mn=2011p+1 & (2)\end{cases}$

$p=-2011-(m+n)$
$mn=-2011^2-2011(m+n)+1$
$\Rightarrow mn+2011m+2011^2+2011n=1$

(i) $\begin{cases} m+2011=1\\ n+2011=1\end{cases}$ ឬ $\begin{cases} m=-2010\\ n=-2010\end{cases}$

នោះ $p=-2011-(-4020)=2009$

(ii) $\begin{cases} m+2011=-1\\ n+2011=-1\end{cases}$ ឬ $\begin{cases} m=-2012\\ n=-2012\end{cases}$

នោះ $p=-2011-(-4024)=2013$
ដូចនេះ $p=\{2009,2013\}$

លំហាត់ទី ៥៤៦

ផលគុណនៃ 7 នឹង ចំនួនដែលមាន 6 ខ្ទង់ $\overline{abcdef}$ ស្មើនឹងផលគុណនៃ 6 នឹង ចំនួនដែលមានលេខ 6 ខ្ទង់ $\overline{defabc}$ ។ រកចំនួនដែលមាន 6 ខ្ទង់ទាំងពីរ ។

ដំណោះស្រាយ

សម្មតិកម្ម $7.\overline{abcdef}=6.\overline{defabc}$ (1)
តាង $x=\overline{abc},\ y=\overline{def}$
$(1)\Rightarrow 7.\left(10^3x+y\right)=6\left(10^3y+x\right)$

$6994x=5993y$

ដោយ $gcd(6994,5993)=13$

$538x=461y$

ដូចនេះ ចំនួនទាំងពីរគឺ 461538 និង 538461

លំហាត់ទី ៥៤៧

គេឱ្យ $x_0 = 2010$ និង $x_{n+1} = \dfrac{1+x_n}{1-x_n}$ ចំពោះ $n \geq 0$ ។ គណនា x_{2012} ។

ដំណោះស្រាយ

រក $x_1 = \dfrac{1+x_0}{1-x_0} = \dfrac{1+2010}{1-2010} = -\dfrac{2011}{2009}$

$$x_2 = \frac{1+x_1}{1-x_1} = \frac{1-\frac{2011}{2009}}{1+\frac{2011}{2009}} = \frac{-2}{4020} = -\frac{1}{2010}$$

$$x_3 = \frac{1+x_2}{1-x_2} = \frac{1-\frac{1}{2010}}{1+\frac{1}{2010}} = \frac{2009}{2011}$$

$$x_4 = \frac{1+x_3}{1-x_3} = \frac{1+\frac{2009}{2011}}{1-\frac{2009}{2011}} = \frac{4020}{2} = 2010$$

ទាញបាន $x_0 = x_4$

$\Rightarrow (x_n)$ មានខួបស្មើ 4 នោះ $x_{4k+4} = x_{4k},\ k = 0,1,2,\ldots$

ដូចនេះ $x_{2012} = x_0 = 2010$

លំហាត់ទី ៥៤៨

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ផលបូកនៃគ្រប់ចំនួនគត់មាន 2013 ខ្ទង់ ស្មើនឹង $494\underbrace{99\ldots9}_{2010}55\underbrace{00\ldots0}_{2011}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំនួនគត់មាន 2013 ខ្ទង់តូចបំផុតគឺ 10^{2012} និងធំបំផុតគឺ $10^{2013}-1$ នោះផលបូកចំនួនទាំង 2013 តួគឺ :

$S = 10^{2012}+(10^{2012}+1)+\cdots+(10^{2013}-2)+(10^{2013}-1)$ ជាផលបូកស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានចំនួនតួ $(10^{2013}-1)-10^{2010}+1 = 9.10^{2012}$

$$\Rightarrow S=\frac{9.10^{2012}}{2}\left(10^{2012}+10^{2013}-1\right)$$

$$S=45.10^{2011}\left(11.10^{2012}-1\right)$$

$$=495.10^{4023}-(100-55).10^{2011}$$

$$=494.10^{4023}+10^{4023}-10^{2013}+55.10^{2011}$$

$$=494.10^{4023}+10^{2013}\left(10^{2010}-1\right)+55.10^{2011}$$

$$=494.10^{4023}+\underbrace{99...9}_{2010}.10^{2013}+55.10^{2011}$$

ដូចនេះ $S=494\underbrace{99...9}_{2010}55\underbrace{00...0}_{2011}$

លំហាត់ទី ៥៤៩

គេឱ្យស្វ៊ីត Fibonacci ដែលកំណត់ដោយ $a_1=a_2=1$ និង $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}<2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្វ៊ីត Fibonacci ដែលកំណត់ដោយ $a_1=a_2=1$ និង $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$

រក $a_3=2,\ a_4=3,\ a_5=5,\ldots$

តាង $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}$ (1)

$$\frac{S}{2}=\frac{a_1}{2^2}+\frac{a_2}{2^3}+\frac{a_3}{2^4}+\cdots+\frac{an}{2^{n+1}} \quad (2)$$

$(1)+(2)$

$$\frac{3}{2}S=\frac{a_1}{2}+\frac{a_1+a_2}{2^2}+\frac{a_2+a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_{n-1}+a_n}{2^n}+\frac{a_n}{2^{n+1}}$$

ដោយប្រើ $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$

$$\frac{3}{2}S=\frac{a_1}{2}+\frac{a_3}{2^2}+\frac{a_4}{2^3}+\cdots+\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}+\frac{a_n}{2^{n+2}}$$

$$\Rightarrow\frac{3}{4}S=\frac{a_1}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\frac{a_4}{2^4}+\cdots+\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}+\frac{a_n}{2^{n+2}} \quad (3)$$

យក $(1)-(3)$: $\frac{1}{4}S=\frac{a_1}{4}+\frac{a_2}{4}-\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^{n+2}}$

$$S=a_1+a_2-\frac{2a_{n+1}+a_n}{2^n}$$

$$S = 2 - \frac{a_{n+1} + a_{n+1} + a_n}{2^n}$$

$$S = 2 - \frac{a_{n+3}}{2^n} < 2$$

ដូចនេះ $S < 2$

លំហាត់ទី ៥៥០

គេឱ្យអនុគមន៍ f ដោយ $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងខាងក្រោម

$$\begin{cases} f(1,1) = 2 \\ f(m+1,n) = f(m,n) + m \\ f(m,n+1) = f(m,n) - n \end{cases}$$

គ្រប់ $m,n \in \mathbb{N}$ ។ រកគ្រប់គូចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $f(a,b) = 2013$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$\begin{cases} f(1,1) = 2 \\ f(m+1,n) = f(m,n) + m \\ f(m,n+1) = f(m,n) - n \end{cases}$$

គ្រប់ $m,n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow f(a,b) = f(a-1,b) + (a-1)$$

$$= f(a-2,b) + (a-1) + (a-2)$$

$$= \ldots$$

$$= f(1,b) + (a-1) + (a-2) + \cdots + 1$$

$$= f(1,b) + \frac{(a-1)a}{2} \quad (1)$$ ហើយ $f(1,b) = f(1,b-1) - (b-1)$

$$= f(1,b-2) - (b-1) - (b-2)$$

$$= \ldots$$

$$= f(1,1) - (b-1) - (b-2) - \cdots - 1$$

$$= f(1,1) - \frac{(b-1)b}{2} \quad (2)$$

(1) និង (2) $f(a,b) = f(1,1) + \dfrac{(a-1)a}{2} - \dfrac{(b-1)b}{2}$

$$2013 = 2 + \frac{a^2 - b^2 + b - a}{2}$$
$$(a-b)(a+b-1) = 2\cdot 2011$$

ដោយ 2011 ជាចំនួនបឋម$\Rightarrow a - b < a + b - 1$

$$(i):\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b - 1 = 4022 \end{cases}$$
$$a = 2012,\ b = 2011$$
$$(ii):\begin{cases} a - b = 2 \\ a + b - 1 = 2011 \end{cases}$$
$$a = 1007,\ b = 1005$$

ដូចនេះ $\boxed{(a,b) = (2012,2011),(1007,1005)}$

លំហាត់ទី ៥៥១

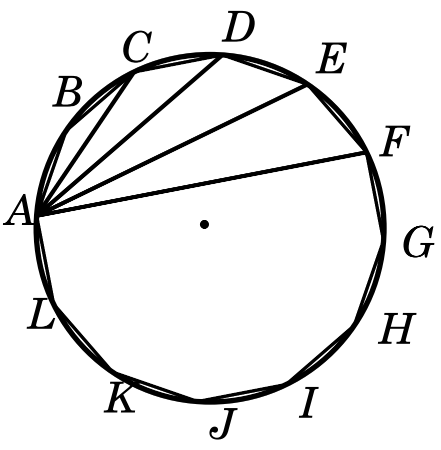
គេឱ្យឡាទេសកោណនិយ័ត $ABCDEFGHIJKL$ និង R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅឡាទេសកោណនិយ័ត (ពហុកោណនិយ័តមាន 12 ជ្រុងប៉ុនគ្នា) ។

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{AB}{AF} + \frac{AF}{AB} = 4$

ខ) គណនាជាអនុគមន៍នៃ R ផលបូក $S = AB^2 + AC^2 + AD^2 + AE^2 + AF^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{AB}{AF} + \frac{AF}{AB} = 4$



មាន $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

តាមទ្រឹស្តបទ sin ក្នុងត្រីកោណ ABC, AFG

$AB = 2R\sin\frac{\pi}{12}$, $AF = 2R\sin\frac{5\pi}{12}$

$\Rightarrow \frac{AB}{AF} + \frac{AF}{AB} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{5\pi}{12}} + \frac{\sin\frac{5\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}$

$\frac{\sin^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{\pi}{12}}{\frac{1}{2}\left[\cos\frac{4\pi}{12} - \cos\frac{6\pi}{12}\right]} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right)} = 4$

ដូច្នេះ $\boxed{\frac{AB}{AF} + \frac{AF}{AB} = 4}$

ខ) គណនាជាអនុគមន៍នៃ R ផលបូក $S = AB^2 + AC^2 + AD^2 + AE^2 + AF^2$

ដោយប្រើទ្រឹស្តីបទ sin គេបាន

$AC = 2R\sin\frac{2\pi}{12}$, $AD = 2R\sin\frac{3\pi}{12}$

និង $AE = 2R\sin\frac{4\pi}{12}$

$\Rightarrow S = AB^2 + AC^2 + AD^2 + AE^2 + AF^2$

$= 4R^2\left(\sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{5\pi}{6}\right)$

$= 4R^2\left(\sin^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{\pi}{12} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right)$

$= 4R^2 \cdot \frac{10}{4}$

ដូចនេះ $\boxed{S = 10R^2}$

លំហាត់ទី ៥៥២

គេឱ្យចំនួន $N = 1 + 10^3 + \frac{10^3(10^3-1)}{1\cdot 2} + \frac{10^3(10^3-1)(10^3-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{10^3(10^3-1)}{1\cdot 2} + 10^3 + 1$ ។ តើ N មានប៉ុន្មានខ្ទង់ បើគេដឹងថា $lg2 = 0.3010$?

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនខ្ទង់នៃ $N = 1 + 10^3 + \frac{10^3(10^3-1)}{1\cdot 2} + \frac{10^3(10^3-1)(10^3-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots +$

$$\frac{10^3\left(10^3-1\right)}{1\cdot 2}+10^3+1$$

តាង $n=10^3$ នោះ $C(n,0)=C(n,n)=1$

$$C(n,1)=C(n,n-1)=n$$

$$C(n,2)=\frac{n!}{(n-2)!2!}=\frac{(n-1)n}{1\cdot 2}$$

គេបាន $N=C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+\cdots+C(n,n)$

$$=(1+1)^n$$

$$lgN=lg2^n=nlg2$$

$$lgN=10^3(0.3010)\quad(lg2=0.3010)$$

$$N=10^301$$

ដូច្នេះ N មាន 302 ខ្ទង់

លំហាត់ទី ៥៥៣

គេឱ្យពហុធា $P(x)=\left(1+x+x^2+\cdots+x^{2010}\right)^2-x^{2010}$ ។
ចូរដាក់ $P(x)$ ជាផលគុណនៃពីរពហុធា ។

ដំណោះស្រាយ

$$P(x)=\left(1+x+x^2+\cdots+x^{2010}\right)^2-x^{2010}$$

$$P(x)=\left[\left(1+x+x^2+\cdots+x^{2009}\right)+x^{2010}\right]^2-x^{2010}$$

$$=\left(1+x+x^2+\cdots+x^{2009}\right)^2+x^{2\cdot 2010}$$

$$+2\cdot x^{2010}\left(1+x+x^2+\cdots+x^{2009}\right)-x^{2010}$$

$$=\left(1+x+x^2+\cdots+x^{2009}\right)\times\left(1+x+x^2+\cdots+x^{2009}+2\cdot x^{2010}\right)+$$

$$x^{2010}\left(x^{2010}-1\right)$$

$$=\left(1+x+x^2+\cdots+x^{2009}\right)\times\left(1+x+x^2+\cdots+x^{2009}+2\cdot x^{2010}\right)+$$

$$x^{2010}(x-1)\left(x^{2009}+\cdots+x^2+x+1\right)$$

ដូច្នេះ $P(x)=\left(1+x+x^2+\cdots+x^{2009}\right)\left(1+x+x^2+\cdots+x^{2011}\right)$

លំហាត់ទី ៥៥៤

តាង $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ដែល $f(0)=1$ និងចំពោះ $x,y\in\mathbb{R}$
$f(xy+1)=f(x).f(y)-f(y)-x+2$ ។ រក $f(2010)$ ។

ដំណោះស្រាយ

មាន $f(xy+1)=f(x).f(y)-f(y)-x+2$ (1) ចំពោះ $x,y\in\mathbb{R}$

ប្តូរអថេរ x និង y ជំនួសចូល (1) គេបាន

$$f(yx+1)=f(y).f(x)-f(x)-y+2 \ (2)$$

យក $(1)-(2):\ f(x)-f(y)+y-x=0$

ឱ្យ $y=0 \quad f(x)-f(0)-x=0$

ដោយ $f(0)=1 \quad f(x)x+1$

ដូច្នេះ $\boxed{f(2010)=2011}$

លំហាត់ទី ៥៥៥

ចូរពិនិត្យមើលស្វ៊ីតខាងក្រោម

$$u_1=1$$
$$u_2=3+5$$
$$u_3=7+9+11$$
$$u_4=13+15+17+19$$
$$\ldots$$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា គ្រប់តួនៃស្វ៊ីត $\{u_n\}$ ជាគូបនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា គ្រប់តួនៃស្វ៊ីត $\{u_n\}$ ជាគូបនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ

$$u_1=1$$
$$u_2=3+5$$
$$u_3=7+9+11$$
$$u_4=13+15+17+19$$
$$\ldots$$

តាងផលបូក $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$

$$=1+(3+5)+(7+9+11)+\cdots$$

ឧបមាថា S_n ជាផលបូកស្វ៊ីតនព្វន្តមាន k តួ

$$S_n=\frac{k}{2}[2\cdot 1+(k-1)\cdot 2]=k^2$$

ដែល $k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n}{2}(n+1)$

$\Rightarrow S_n = \left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2$

ទាញបាន $S_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2}$

$u_n = S_n - S_{n-1} = \left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2 - \left[\frac{n}{2}(n-1)\right]^2$

នោះ $u_n = n^3$

ដូចនេះ គ្រប់តួនៃស្វ៊ីត $\{u_n\}$ ជាគូបនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ

លំហាត់ទី ៥៥៦

គេអោយអនុគមន៍ $f(x) = (x^3+12x-31)^{2020}$ ។

ចូរគណនា $f(a)$ បើ $a = \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{8-16\sqrt{5}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(x) = (x^3+12x-31)^{2020}$ នោះ $f(a) = (a^3+12a-31)^{2020}$

ដោយ $a = \sqrt[3]{16+8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{8-16\sqrt{5}}$

$$a^3 = \left(\sqrt[3]{16+8\sqrt{3}}\right)^3 + 3\left(\sqrt[3]{16+8\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}\right)$$

$$\left(\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{8-16\sqrt{5}}\right) + \left(\sqrt[3]{16-8\sqrt{5}}\right)^3$$

$$= 16+8\sqrt{5}+3\left(\sqrt[3]{\left(16+8\sqrt{5}\right)\left(16-8\sqrt{5}\right)}\right)a+16-8\sqrt{5}$$

$$= 32+3a(-4)$$

នោះ $a^3+12a-31=1$

យើងបាន $f(a) = (1)^{2020} = 1$

ដូច្នេះ $f(a) = 1$

លំហាត់ទី ៥៥៧

ស្រាយបញ្ជាក់ថា វិសមភាព $\frac{cosA}{a^3} + \frac{cosB}{b^3} + \frac{cosC}{c^3} \geq \frac{3}{2abc}$ ពិតចំពោះគ្រប់ត្រីកោណ ABC ដែលមាន រង្វាស់ជ្រុង a,b,c និងមុំឈម $\angle A, \angle B, \angle C$ រៀងគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទ Cosinus:

$a^2=b^2+c^2-2bccosA$

$2bccosA=b^2+c^2-a^2$

$cosA=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

នោះ $\dfrac{cosA}{a^3}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2a^3bc}$

ដូចគ្នាដែរ $\dfrac{cosB}{b^3}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2b^3ac}$, $\dfrac{cosC}{c^3}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2c^3ab}$

យើងបាន $\dfrac{cosA}{a^3}+\dfrac{cosB}{b^3}+\dfrac{cosC}{c^3}=\dfrac{1}{2abc}\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{a^2}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{b^2}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{c^2}\right)$

$$\frac{cosA}{a^3}+\frac{cosB}{b^3}+\frac{cosC}{c^3}=\frac{1}{2abc}\left\{\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]+\left[\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2\right]+\left[\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{b}\right)^2\right]-3\right\}$$

តែចំពោះ $x>0$ គេមានវិសមភាព $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$

នោះ $\dfrac{cosA}{a^3}+\dfrac{cosB}{b^3}+\dfrac{cosC}{c^3}\geq\dfrac{1}{2abc}(2+2+2-3)$

$\dfrac{cosA}{a^3}+\dfrac{cosB}{b^3}+\dfrac{cosC}{c^3}\geq\dfrac{3}{2abc}$ ពិត

លំហាត់ទី ៥៥៨

គេអោយ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{a^2+1}{b+c}+\dfrac{b^2+1}{c+a}+\dfrac{c^2+1}{a+b}\geq 3$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមានវិសមភាពងាយ $a^2+1\geq 2a, b^2+1\geq 2b, c^2+1\geq 2c$

នោះ $\dfrac{a^2+1}{b+c}+\dfrac{b^2+1}{c+a}+\dfrac{c^2+1}{a+b}\geq\dfrac{2a}{b+c}+\dfrac{2b}{a+c}+\dfrac{2c}{a+b}$

យើងគ្រាន់តែស្រាយថា $\dfrac{2a}{b+c}+\dfrac{2b}{a+c}+\dfrac{2c}{a+b}\geq 3$ នោះយើងនិងអាចបញ្ជាក់បានថា វិសមភាពដើមពិត

$$\frac{2a}{b+c}+2+\frac{2b}{a+c}+2+\frac{2c}{a+b}+2\geq 9$$

$$(2a+2b+2c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq 9 \quad (1)$$

តាង $x=b+c, y=c+a, z=a+b$ វិសមភាព (1) សមមូលទៅជា

$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$ ជាវិបាកនៃវិសមភាព AM-GM

ដូច្នេះ $\boxed{\frac{a^2+1}{b+c}+\frac{b^2+1}{c+a}+\frac{c^2+1}{a+b}\geq 3}$ ពិត

លំហាត់ទី ៥៥៩

គេអោយ $f(x)=-x^2-2ax-b\ (a\neq 0)$ ។

គេដឹងថា $f(1)=3$ និង តម្លៃអតិបរមានៃ f គឺ 4 ។ កំណត់តម្លៃ a និង b ។

(អាហារូបករណ៍ប្រទេសជប៉ុន)

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $f(1)=3$ នោះ $-1-2a+b=3\quad ...(1)$

ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងលើជាប៉ារ៉ាបូល ដែលបែរភាពផតចុះក្រោម

តម្លៃអតិបរមា $y=4$ គឺជាអរដោនេនៃកំពូលប៉ារ៉ាបូល

កូអរដោនេកំពូល $V\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

$\Rightarrow \frac{4ac-b^2}{-4}=4$ ឬ $\frac{-4b-4a^2}{-4}=4$

$b+a^2=4\quad ...(2)$

តាម $(1): b=4+2a$ ជំនួសចូល (2)

$\Rightarrow 4+2a+a^2=4$

$a^2+2a=0$

$a(a+2)=0$

$a=0, a=-2$

•បើ $a=0$ នោះ $b=-2$

•បើ $a=-2$ នោះ $b=0$

ដូច្នេះ $\boxed{a=-2, b=0}$

លំហាត់ទី ៥៦០

តាង $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ ជាអនុគមន៍ដែល $f(0)=1$ និងចំពោះ $x,y\in\mathrm{R}$

$f(xy+1)=f(x).f(y)-f(y)-x+2$ ។ រក $f(2010)$ ។

ដំណោះស្រាយ

មាន $f(xy+1)=f(x).f(y)-f(y)-x+2 \quad ...(1)$

ចំពោះ $x,y\in R$

ប្តូរអថេរ x និង y ចូល (1) គេបាន

$f(yx+1)=f(y).f(x)-f(x)-y+2 \quad ...(2)$

យក $(1)-(2)$: $f(x)-f(y)+y-x=0$

ឱ្យ $y=0$ $\quad f(x)-f(0)=x-0$

ដោយ $f(0)=1$ $\quad f(x)=x+1$

ដូច្នេះ $\boxed{f(2010)=2011}$

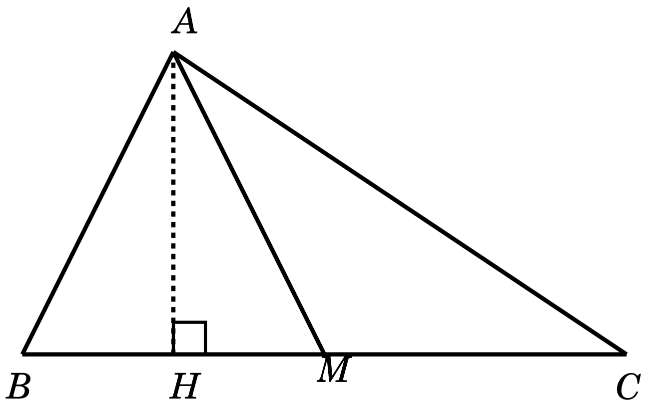
លំហាត់ទី ៥៦១

១. ត្រីកោណ ABC មានមេដ្យាន AM ។ បង្ហាញសមភាព $AB^2+AC^2=2AM^2+\dfrac{BC^2}{2}$ ។

២. ត្រីកោណ ABC មាន G ជាទីប្រជុំទម្ងន់ ។ តាង $a=BC, b=CA, c=AB$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $GA^2+GB^2+GC^2=\dfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. បង្ហាញសមភាព $AB^2+AC^2=2AM^2+\dfrac{BC^2}{2}$



តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ :

$AB^2=AH^2+BH^2$

$AC^2=AH^2+CH^2$

នោះ $AB^2+AC^2=2AH^2+BH^2+CH^2$

$AB^2+AC^2=2(AM^2-HM^2)+(BM-HM)^2+(CM+HM)^2$

$AB^2+AC^2=2AM^2-2HM^2+BM^2-2BM.HM+HM^2+CM^2+2CM.MH+MH^2$

$AB^2+AC^2=2AM^2+BM^2+CM^2$

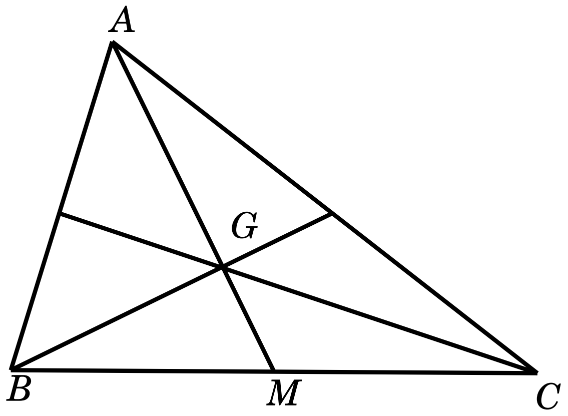
$AB^2+AC^2=2AM^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2$

$AB^2+AC^2=2AM^2+\frac{BC^2}{2}$ ពិត

២. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$

យើងមាន $GA=\frac{2}{3}AM$

$GA^2=\left(\frac{2}{3}AM\right)^2=\frac{4}{9}AM^2$



តាមទ្រឹស្តីបទមេដ្យាន $AM^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\frac{BC^2}{2}\right)$

$AM^2=\frac{1}{2}\left(c^2+b^2-\frac{a^2}{2}\right)$

នាំអោយ $GA^2=\frac{4}{9}\times\frac{1}{2}\left(c^2+b^2-\frac{a^2}{2}\right)$

$GA^2=\frac{2}{9}\left(c^2+b^2-\frac{a^2}{2}\right)$

ដូចគ្នាដែរ $GB^2=\frac{2}{9}\left(a^2+c^2-\frac{b^2}{2}\right)$, $GC^2=\frac{2}{9}\left(a^2+b^2-\frac{c^2}{2}\right)$

$GA^2+GB^2+GC^2=\frac{2}{9}\left(b^2+c^2-\frac{a^2}{2}+a^2+c^2-\frac{b^2}{2}+a^2+b^2-\frac{c^2}{2}\right)$

$GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$ ពិត

លំហាត់ទី ៥៦១

ត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ A ។ ការេ $MNPQ$ ចារឹកក្នុងត្រីកោណកែង ABC ដែល M នៅលើ AB, N និង P នៅលើ BC និង Q នៅលើ CA ។ ដូចគ្នាការេដែលមានជ្រុង a_1,a_2,a_3 ចារឹកក្នុងត្រីកោណកែង QPC ,MBN និង AMQ រៀងគ្នា ដោយមានកំពូល 2 នៃការេនៅលើអ៊ីប៉ូតេនុស និងកំពូលមួយនៅលើជ្រុងមុំកែងនីមួយៗនៃត្រីកោណកែង ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}=\frac{1}{a_3^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ត្រីកោណកែង QPC,BNM,MAQ និង ABC ដូចគ្នា នោះផលធៀបជ្រុងការេចារឹកក្នុងត្រីកោណកែងទាំងបួន សមាមាត្រគ្នានឹងជ្រុងត្រូវគ្នានៃត្រីកោណកែង ។

តាង a ជាជ្រុងការេ $MNPQ$

$$\frac{a_1}{a}=\frac{PQ}{AB}=\frac{a}{AB}\Rightarrow AB=\frac{a^2}{a_1}$$

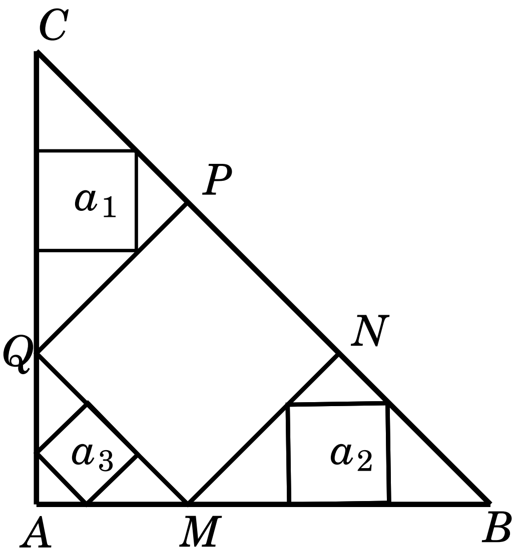
$$\frac{a_2}{a}=\frac{MN}{AC}=\frac{a}{AC}\Rightarrow AC=\frac{a^2}{a_2}$$

$$\frac{a_3}{a}=\frac{MQ}{BC}=\frac{a}{BC}\Rightarrow BC=\frac{a^2}{a_3}$$

ពីតាត់ត្រីកោណកែង $ABC:\ AB^2+AC^2=BC^2$

$$\Leftrightarrow \frac{a^4}{a_1^2}+\frac{a^4}{a_2^2}=\frac{a^4}{a_3^2}$$

ដូចនេះ $\boxed{\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}=\frac{1}{a_3^2}}$



លំហាត់ទី ៥៦២

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំនួនគត់តូចបំផុតដែលធំជាង $(\sqrt{3}+1)^{4020}$ ចែកដាច់នឹង 2^{2011} ។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី ១:

តាង $m=2010$ និង $I_m=(\sqrt{3}+1)^{2m}+(\sqrt{3}-1)^{2m}$

$$(\sqrt{3}+1)^{2m}=(\sqrt{3})^{2m}+\binom{1}{2m}(\sqrt{3})^{2m-1}+\cdots+\binom{2m-1}{2m}\sqrt{3}+1$$

$$(\sqrt{3}-1)^{2m}=(\sqrt{3})^{2m}-\binom{1}{2m}(\sqrt{3})^{2m-1}+\cdots-\binom{2m-1}{2m}\sqrt{3}+1$$

បូកអង្គ $I_m = 2\left(3^m + 3^{m-1} + \cdots + 1\right) \vdots 2$

$\Rightarrow I_m$ គត់

ដោយសារ $0 < \sqrt{3} - 1 < 1$ នោះ $(\sqrt{3}-1)^{2m} < 1$

ដូចនេះ I_m ត្រូវតែជាចំនួនគត់តូចបំផុតធំជាង $(\sqrt{3}+1)^{2m}$

របៀបទី ២:

តាង $I_m = (4+2\sqrt{3})^m + (4-2\sqrt{3})^m$

យក $a = 4+2\sqrt{3},\ b = 4-2\sqrt{3}$ នោះ $\begin{cases} a+b=8 \\ ab=4 \end{cases}$

a, b ជាឫសនៃសមីការ $x^2 - 8x + 4 = 0$

$$\begin{cases} a^2 - 8a + 4 = 0 | a^{m-1} \\ b^2 - 8b + 4 = 0 | b^{m-1} \end{cases}$$

បូកអង្គ $a^{m+1} + b^{m+1} = 8(a^m + b^m) - 4\left(a^{m-1} + b^{m-1}\right)$

$$I_{m+1} = 8I_m - 4I_{m-1}$$

មាន $I_0 = 2,\ I_1 = 8$ ជាចំនួនគត់

ឧបមាថា I_m ជាចំនួនគត់ នោះ $I_{m+1} = 8I_m - 4I_{m-1}$ ជាចំនួនគត់

ដោយ $0 < (4-2\sqrt{3})^m < 1$

I_m ត្រូវតែជាចំនួនគត់តូចបំផុតធំជាង $(\sqrt{3}+1)^{2m}$

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $I_m \vdots 2^{m+1}$

មាន $I_1 = 8 \vdots 2^{1+1}$

ឧបមា $I_k \vdots 2^{k+1}$ គ្រប់ $m = 1, 2, .., k$

យើងនិងស្រាយថា $I_{k+1} \vdots 2^{k+2}$

ពី $I_{k+1} = 8I_k - 4I_{k-1}$

មាន $I_{k-1} \vdots 2^k \Rightarrow 4I_{k-1} \vdots 2^{k+2}$

$I_k \vdots 2^{k+1} \Rightarrow 8I_k \vdots 2^{k+2}$

គេបាន $I_{k+1} \vdots 2^{k+2}$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{I_{2020} = (4+2\sqrt{3})^{2010} + (4-2\sqrt{3})^{2010} \vdots 2^{2011}}$

លំហាត់ទី ៥៦៣

១. សរសេរ $x^4 + 4y^4$ ជាផលគុណនៃពីរពហុធាដឺក្រេទីពីរនៃ x និង y :

២. បង្ហាញថា $n^4 + 4^n$ មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីប $n > 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. សរសេរ x^4+4y^4 ជាផលគុណនៃពីរពហុធាដឺក្រេទីពីរនៃ x និង y :

$x^4+4y^4=\left(x^4+4x^2y^2+4y^4\right)-4x^2y^2=\left(x^2+2y^2+2xy\right)\left(x^2+2y^2-2xy\right)$

២. បង្ហាញថា n^4+4^n មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n>1$

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n>1$ គេមានពីរករណី :

- បើ $n=2k$ ដែល $k=1,2,\ldots$ គេបាន $n^4+4^n=16\left(k^4+16k-1\right)$ ដែលមិនមែនជាចំនួនបឋមទេ ។

- បើ $n=2k+1$ ដែល $k=1,2,\ldots$ គេបាន $n^4+4^n=n^4+4^{2k+1}=n^4+4\left(2^k\right)^4$ $=\left(n^2+2^{2k+1}+n.2^{k+1}\right)\left(n^2+2^{2k+1}-n.2^{k+1}\right)$ ដែលមិនមែនជាចំនួនបឋមទេ ។

លំហាត់ទី ៥៦៤

រកអនុគមន៍ g ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $g(x)+g\left(\frac{1}{1-x}\right)=x$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ដែល $x\neq 0, x\neq 1$ ។

ដំណោះស្រាយ

-ជំនួស x ដោយ $\frac{1}{1-x}$ គេបាន $g\left(\frac{1}{1-x}\right)+g(1-\frac{1}{x})=\frac{1}{1-x}$

-ជំនួស x ដោយ $1-\frac{1}{x}$ គេបាន $g\left(1-\frac{1}{x}\right)+g(x)=1-\frac{1}{x}$

គេបាន $g(x)+g\left(1-\frac{1}{x}\right)=x,\quad -g\left(\frac{1}{1-x}\right)-g\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{1-x},$

$g\left(1-\frac{1}{x}\right)+g(x)=1-\frac{1}{x}$

ដោយបូកអង្គ និង អង្គ គេបាន $g(x)=\frac{1}{2}\left(x+1-\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}\right)$ ចំពោះ $x\neq 0, x\neq 1$ ។

លំហាត់ទី ៥៦៥

រកគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដើម្បីឱ្យ $n^2-19n+99$ ជាការេប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

$n^2-19n+99$ ជាការេប្រាកដលុះត្រាតែ

$$n^2-19n+99=k^2,\ k\in\mathbb{N}$$

$$n^2-19n+99-k^2=0$$

$\Delta = (-19)^2 - 4(1)(99 - k^2)$

$= 361 - 396 + 4k^2$

$= 4k^2 - 35$

n ជាចំនួនគត់លុះត្រាតែ $4k^2 - 35 = t^2,\ t \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow 4k^2 - t^2 = 35$

$\Leftrightarrow (2k - t)(2k + t) = 35$

ដោយ $k, t \in \mathbb{N}$ នោះ $2k - t < 2k + t$

ដោយ $35 = 1 \times 35 = 5 \times 7$

•ចំពោះ $35 = 1 \times 35$ គេបាន

$$\begin{cases} 2k - t = 1 \\ 2k + t = 35 \end{cases}$$

$4k = 36$

$k = 9$

$\Delta = 4(9)^2 - 35 = 289 = 17^2$

$n_1 = \dfrac{19 - 17}{2} = 1$

$n_2 = \dfrac{19 + 17}{2} = 18$

•ចំពោះ $35 = 5 \times 7$ គេបាន

$$\begin{cases} 2k - t = 5 \\ 2k + t = 7 \end{cases}$$

$4k = 12$

$k = 3,\ \Delta = 1$

$n_1 = \dfrac{19 - 1}{2} = 9$

$n_2 = \dfrac{19 + 1}{2} = 10$

ដូចនេះ $n \in \{1, 9, 10, 18\}$

របៀបទី ២

-ករណី $n = 1$ គេបាន $n^2 - 19n + 99 = 9^2$ ជាការេប្រាកដ

គេបាន $n = 1$ ជាចម្លើយ

- ករណី $2 \le n < 11$ គេបាន

$n^2 - 19n + 99 = (n-1)^2 - 17n + 98$ ជាការេប្រាកដបើ $-17n + 98 = 0$

$\Rightarrow n = \dfrac{98}{17} \notin \mathbb{N}$

$n^2 - 19n + 99 = (n-2)^2 - 15n + 95$ ជាការេប្រាកដបើ $-15n + 95 = 0$

$\Rightarrow n = \dfrac{19}{3} \notin \mathbb{N}$

$n^2 - 19n + 99 = (n-3)^2 - 13n + 90$ ជាការេប្រាកដបើ $-13n + 90 = 0$

$\Rightarrow n = \dfrac{90}{13} \notin \mathbb{N}$

$n^2 - 19n + 99 = (n-4)^2 - 11n + 83$ ជាការេប្រាកដបើ $-11n + 83 = 0$

$\Rightarrow n = \dfrac{83}{11} \notin \mathbb{N}$

$n^2 - 19n + 99 = (n-5)^2 - 9n + 74$ ជាការេប្រាកដបើ $-9n + 74 = 0$

$\Rightarrow n = \dfrac{74}{9} \notin \mathbb{N}$

$n^2 - 19n + 99 = (n-6)^2 - 7n + 63$ ជាការេប្រាកដបើ $-7n + 63 = 0$

$n = \dfrac{63}{9} = 7 \in \mathbb{N}$

គេបាន $n = 9$ ជាចម្លើយ

$n^2 - 19n + 99 = (n-7)^2 - 5n + 50$ ជាការេប្រាកដបើ $-5n + 50 = 0$

$\Rightarrow n = \dfrac{50}{5} = 10 \in \mathbb{N}$

គេបាន $n = 10$ ជាចម្លើយ

$n^2 - 19n + 99 = (n-8)^2 - 3n + 35$ ជាការេប្រាកដបើ $-3n + 35 = 0$

$\Rightarrow n = \dfrac{35}{3} \notin \mathbb{N}$

$n^2 - 19n + 99 = (n-9)^2 - n + 18$ ជាការេប្រាកដបើ $-n + 18 = 0$

$\Rightarrow n = 18 \in \mathbb{N}$

គេបាន $n = 18$ ជាចម្លើយ

$n^2 - 19n + 99 = (n-10)^2 + n - 1$ ជាការេប្រាកដបើ $n - 1 = 0$

$n = 1 \in \mathbb{N}$

គេបាន $n = 1$ ជាចម្លើយ

- ករណី $n > 11$

$n^2 - 19n + 99 = (n-10)^2 + n - 1$

$\Rightarrow n^2 - 19n + 99 > (n-10)^2$

$n^2 - 19n + 99 = (n-8)^2 - 3n + 35$

$\Rightarrow n^2 - 19n + 99 < (n-8)^2$

$\Rightarrow (n-10)^2 < n^2 - 19n + 99 < (n-8)^2$

$\Rightarrow n^2 - 19n + 99 = (n-9)^2$

$n^2 - 19n + 99 = n^2 - 18n + 81$

$\Rightarrow n = 18$

ដូចនេះ $n \in \{1, 9, 10, 18\}$

លំហាត់ទី ៥៦៦

គេឱ្យចំនួនពិត $x, y \in (-2, 2)$ និង $xy = -1$ ។

ស្រាយបំភ្លឺថា $\dfrac{4}{4-x^2} + \dfrac{9}{9-y^2} \geq \dfrac{12}{5}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះគ្រប់ $x, y \in (-2, 2)$ គេបាន

$\dfrac{4}{4-x^2} > 0, \ \dfrac{9}{9-y^2} > 0$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\frac{4}{4-x^2} + \frac{9}{9-y^2} \geq 2\sqrt{\left(\frac{4}{4-x^2}\right)\left(\frac{9}{9-y^2}\right)}$$

$$\geq \frac{12}{\sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2 + x^2y^2}}$$

$$\geq \frac{12}{\sqrt{37 - (9x^2 + 4y^2)}} \quad (1) \text{ ព្រោះ } xy = -1$$

ដោយ $9x^2 + 4y^2 \geq 2\sqrt{(9x^2)(4y^2)}$

≥ 12

$-(9x^2 + 4y^2) \leq -12$

$37 - (9x^2 + 4y^2) \leq 25$

$\sqrt{37 - (9x^2 + 4y^2)} \leq 5$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{37 - (9x^2 + 4y^2)}} \geq \frac{1}{5}$$

$$\frac{12}{\sqrt{37 - (9x^2 + 4y^2)}} \geq \frac{12}{5} \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន
$\frac{4}{4-x^2}+\frac{9}{9-y^2}\geq\frac{12}{5}$ ពិត

លំហាត់ទី ៥៦៧

ឧបមា ពហុធា $p(x)=x^5+x^2+1$ មានឫសប្រាំ r_1,r_2,r_3,r_4,r_5 និង $q(x)=x^2-2$ ។ ចូរគណនា $q(r_1)q(r_2)q(r_3)q(r_4)q(r_5)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន r_1,r_2,r_3,r_4,r_5 ជាឫសនៃ $p(x)$

$\Rightarrow p(x)=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4)(x-r_5)$

ដោយ $q(x)=x^2-2$

$$q(r_1)=r_1^2-2$$
$$q(r_2)=r_2^2-2$$
$$q(r_3)=r_3^2-2$$
$$q(r_4)=r_4^2-2$$
$$q(r_5)=r_5^2-2$$

$\Rightarrow q(r_1)q(r_2)q(r_3)q(r_4)q(r_5)=(r_1^2-2)(r_2^2-2)(r_3^2-2)(r_4^2-2)(r_5^2-2)$

$=(r_1-\sqrt{2})(r_1+\sqrt{2})(r_2-\sqrt{2})(r_2+\sqrt{2})(3_2-\sqrt{2})(r_3+\sqrt{2})(r_4-\sqrt{2})$
$(r_4+\sqrt{2})(r_5-\sqrt{2})(r_5+\sqrt{2})$

$=(\sqrt{2}-r_1)(-\sqrt{2}-r_1)(\sqrt{2}-r_2)(-\sqrt{2}-r_2)(\sqrt{2}-r_3)(-\sqrt{2}-r_3)$
$(\sqrt{2}-r_4)(-\sqrt{2}-r_4)(\sqrt{2}-r_5)(-\sqrt{2}-r_5)$

$=\left[(\sqrt{2}-r_1)(\sqrt{2}-r_2)(\sqrt{2}-r_3)(\sqrt{2}-r_4)(\sqrt{2}-r_5)\right]$
$\left[(-\sqrt{2}-r_1)(-\sqrt{2}-r_2)(-\sqrt{2}-r_3)(-\sqrt{2}-r_4)(-\sqrt{2}-r_5)\right]$

$=p(\sqrt{2})\times p(-\sqrt{2})$

$=\left[(\sqrt{2})^5+\sqrt{2}^2+1\right]\left[(-\sqrt{2})^5+(-\sqrt{2})^2+1\right]$ ព្រោះ $p(x)=x^5+x^2+1$

$=(4\sqrt{2}+2+1)(-4\sqrt{2}+1+1)$

$=(3+4\sqrt{2})(3-4\sqrt{2})$

$=9-32=-23$

ដូចនេះ $q(r_1)q(r_2)q(r_3)q(r_4)q(r_5)=-23$

លំហាត់ទី ៥៦៨

ក. រកចំនួនកុំផ្លិច z ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $z^7+1=0$ ។

ខ. ទាញបញ្ជាក់ថា $cos\frac{\pi}{7}-cos\frac{2\pi}{7}+cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកចំនួនកុំផ្លិច z

យើងមាន $z^7+1=0 \Rightarrow z^7=-1$

$\Rightarrow z$ ជាឫសទី 7 នៃ $-1=cos\pi+isin\pi$

គឺ $z_k=cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{7}\right)+isin\left(\frac{\pi+2k\pi}{7}\right)$ ដែល $k=0,1,..,6$

$k=0 \Rightarrow z_0=cos\frac{\pi}{7}+isin\frac{\pi}{7}$

$k=1 \Rightarrow z_1=cos\frac{3\pi}{7}+isin\frac{3\pi}{7}$

$k=2 \Rightarrow z_2=cos\frac{5\pi}{7}+isin\frac{5\pi}{7}$

$k=3 \Rightarrow z_3=cos\pi+isin\pi$

$k=4 \Rightarrow z_4=cos\frac{9\pi}{7}+isin\frac{9\pi}{7}$

$k=5 \Rightarrow z_5=cos\frac{11\pi}{7}+isin\frac{11\pi}{7}$

$k=6 \Rightarrow z_6=cos\frac{13\pi}{7}+isin\frac{13\pi}{7}$

ខ. ទាញថា $cos\frac{\pi}{7}-cos\frac{2\pi}{7}+cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$

គណនា $\left(cos\frac{\pi}{7}+isin\frac{\pi}{7}\right)+\cdots+\left(cos\frac{13\pi}{7}+isin\frac{13\pi}{7}\right)=0$

$\left(cos\frac{\pi}{7}+cos\frac{3\pi}{7}+cos\frac{5\pi}{7}+\cdots+cos\frac{13\pi}{7}\right)+$

$i\left(sin\frac{\pi}{7}+sin\frac{3\pi}{7}+sin\frac{5\pi}{7}+\cdots+sin\frac{13\pi}{7}\right)=0$

$\Rightarrow cos\frac{\pi}{7}+cos\frac{3\pi}{7}+cos\frac{5\pi}{7}+\cdots+cos\frac{13\pi}{7}=0$

$cos\frac{\pi}{7}+cos\frac{3\pi}{7}-cos\frac{2\pi}{7}-1-cos\frac{2\pi}{7}+cos\frac{3\pi}{7}+cos\frac{\pi}{7}=0$

$2cos\frac{\pi}{7}-2cos\frac{2\pi}{7}+2cos\frac{3\pi}{7}=1$

ដូចនេះ $cos\frac{\pi}{7}-cos\frac{2\pi}{7}+cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$

លំហាត់ទី ៥៦៩

គេឱ្យ O ជាចំណុចប្រសព្វរវាងអង្កត់ទ្រូង AC និង BD នៃប្រលេឡូក្រាម $ABCD$ ដែលមាន $\angle CAB=\angle DBC=2\angle DBA$ ។ គណនាផលធៀបនៃមុំ $\angle ACB$ និង $\angle AOB$ ។

ដំណោះស្រាយ

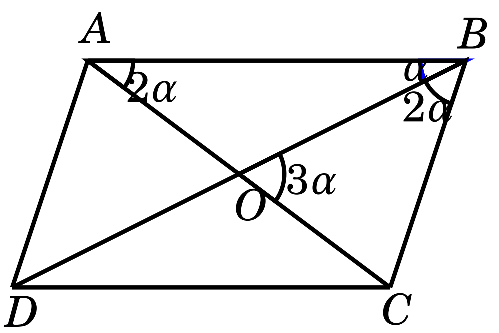
គណនា $\frac{\angle ACB}{\angle AOB}$

តាង $\angle DBA=\alpha,\ 0<\alpha<60^0$ យើងបាន

$\angle BAC=\angle DBC=2\alpha$

$\angle AOB=180^0-3\alpha$

$\angle ACB=180^0-5\alpha$



តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសចំពោះ $\triangle AOB$ និង $\triangle BOC$

$\frac{OA}{sin\alpha}=\frac{OB}{sin2\alpha}\Rightarrow\frac{OA}{OB}=\frac{sin\alpha}{sin2\alpha}$

$\frac{OC}{sin2\alpha}=\frac{OB}{sin(180^0-5\alpha)}\Rightarrow\frac{OC}{OB}=\frac{sin2\alpha}{sin5\alpha}$

ដោយ $OC=OA\Rightarrow\frac{sin\alpha}{sin2\alpha}=\frac{sin2\alpha}{sin5\alpha}$

$sin^2 2\alpha=sin\alpha sin5\alpha$

$1-cos^2 2\alpha=\frac{1}{2}(cos4\alpha-cos6\alpha)$

$2-2cos^2 2\alpha=2cos^2 2\alpha-1-\left(4cos^3 2\alpha-3cos2\alpha\right)$

$2-2cos^2 2\alpha=2cos^2 2\alpha-1-4cos^3 2\alpha+3cos2\alpha$

$4cos^3 2\alpha-4cos^2 2\alpha-3cos2\alpha+3=0$

$4cos^2 2\alpha(cos2\alpha-1)-3(cos2\alpha-1)=0$

$\left(4cos^2 2\alpha-3\right)(cos2\alpha-1)=0$

គេទាញបាន

$\bullet cos2\alpha - 1 = 0$

$cos2\alpha = 1 = cos0$

$2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ មិនយក

$\bullet 4cos^2 2\alpha - 3 = 0$

$cos^2 2\alpha = \frac{3}{4}$

$cos2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = cos30^0$

$2\alpha = 30^0$

$\Rightarrow \alpha = 15^0$

គេបាន $\frac{\angle ACB}{\angle AOB} = \frac{180^0 - 5\times 15^0}{180^0 - 3\times 15^0} = \frac{105^0}{135^0}$

ដូចនេះ $\frac{\angle ACB}{\angle AOB} = \frac{7}{9}$

លំហាត់ទី ៥៧០

រកចំនួនគត់គូដែលមានលេខបួនខ្ទង់ខុសៗគ្នានៅចន្លោះ 2000 និង 5000 ។

ដំណោះស្រាយ

ចំនួនគត់គូដែលមានលេខបួនខ្ទង់ខុសៗគ្នា នៅចន្លោះ 2000 និង 5000 មាន :

លេខខ្ទង់ពាន់ $2,3,4$ និង លេខខ្ទង់រាយ $0,2,4,6,8$

+ ករណីចំនួននោះផ្ដើមដោយលេខ 2 គេបាន

ព្រឹត្តិការណ៍ជ្រើសរើស លេខខ្ទង់ពាន់មាន 1 របៀប

លេខខ្ទង់រាយមាន 4 របៀប

លេខខ្ទង់ដប់មាន 8 របៀប

លេខខ្ទង់រយមាន 7 របៀប

តាមគោលការណ៍ផលគុណ $1\times 4\times 8\times 7 = 224$

+ ករណីចំនួននោះផ្ដើមដោយលេខ 3 គេបាន

ព្រឹត្តិការណ៍ជ្រើសរើស លេខខ្ទង់ពាន់មាន 1 របៀប

លេខខ្ទង់រាយមាន 5 របៀប

លេខខ្ទង់ដប់មាន 8 របៀប

លេខខ្ទង់រយមាន 7 របៀប

តាមគោលការណ៍ផលគុណ $1\times 5\times 8\times 7 = 280$

+ ករណីចំនួននោះផ្ដើមដោយលេខ 4

ដូចករណីចំនួននោះផ្ដើមដោយលេខ 2 ដែរ គឺ 224
ដូចនេះ ចំនួនគត់គូសរុប $224+280+224=728$ ចំនួន

លំហាត់ទី ៥៧១

គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b,a',b',d,d' ដែល $GCD(a,b)=d$ និង $GCD(a',b')=d'$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $GCD(aa',bb',ab',a'b)=dd'$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $GCD(a,b)=d \Rightarrow a=a_1d,\ b=b_1d$ ដែល $GCD(a_1,b_1)=1$

$GCD(a',b')=d' \Rightarrow a'=a_2d',\ b'=b_2d'$ ដែល $GCD(a_2,b_2)=1$

$\Rightarrow GCD(aa',bb',ab',a'b)=GCD(a_1a_1dd',b_1b_2dd',a_1b_2dd',a_2b_1dd')$

$=dd'GCD(a_1a_2,b_1b_2,a_1b_2,a_2b_1)$

ដោយ $GCD(a_1a_2,a_2b_1)=a_2$

$GCD(a_1b_2,b_1b_2)=b_2$

$\Rightarrow GCD(a_1a_2,b_1b_2,a_1b_2,a_2b_1)=GCD(a_2,b_2)=1$

ដូចនេះ $GCD(aa',bb',ab',a'b)=dd'$

លំហាត់ទី ៥៧២

គេឱ្យស្វ៊ីត (a_n) កំណត់ដោយ $a_n=\dfrac{n(n-1)}{2}cos\dfrac{n(n-1\pi)}{2}$ ។
គណនា $a_1+a_2+\cdots+a_{2020}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $a_n=\dfrac{n(n-1)}{2}cos\dfrac{n(n-1\pi)}{2}$

$$a_1=\frac{1(1-1)}{2}cos\frac{1(1-1)\pi}{2}=1\times 0$$

$$a_2=\frac{2(2-1)}{2}cos\frac{2(2-1)\pi}{2}=1\times 1\times(-1)=-1$$

$$a_3=\frac{3(3-1)}{2}cos\frac{3(3-1)\pi}{2}=3\times 1\times(-1)=-3$$

$$a_4=\frac{4(4-1)}{2}cos\frac{4(4-1)\pi}{2}=2\times 3\times 1=6$$

$$a_5=\frac{5(5-1)}{2}cos\frac{5(5-1)\pi}{2}=5\times 2\times 1$$

$$a_6=\frac{6(6-1)}{2}cos\frac{6(6-1)\pi}{2}=3\times5\times(-1)=-15$$
$$a_7=\frac{7(7-1)}{2}cos\frac{7(7-1)\pi}{2}=7\times3\times(-1)=-21$$
$$a_8=\frac{8(8-1)}{2}cos\frac{8(8-1)\pi}{2}=4\times7\times1=28$$

គេបាន $a_1+a_2+a_3+a_4=2$

$a_5+a_6+a_7+a_8=2$

....

$$a_{2017}=\frac{2017(2017-1)}{2}cos\frac{2017(2017-1)\pi}{2}=2017\times1008\times1$$
$$a_{2018}=\frac{2018(2018-1)}{2}cos\frac{2018(2018-1)\pi}{2}=1009\times2017\times(-1)$$
$$a_{2019}=\frac{2019(2019-1)}{2}cos\frac{2019(2019-1)\pi}{2}=2019\times1009\times(-1)$$
$$a_{2020}=\frac{2020(2020-1)}{2}cos\frac{2020(2020-1)\pi}{2}=1010\times2019\times1$$

$\Rightarrow a_{2017}+a_{2018}+a_{2019}+a_{2020}=2017(1008-1009)+2019(-1009+1010)=2$

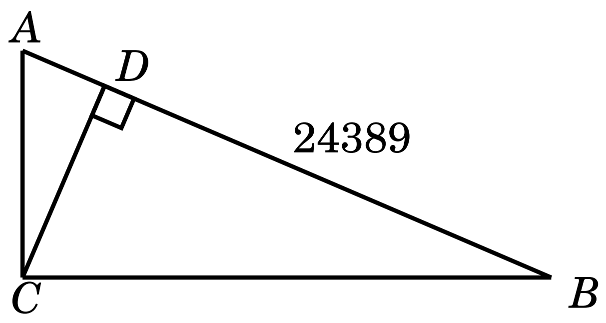
ដោយ $2020=4\times505$

ដូចនេះ $a_1+a_2+\cdots+a_{2020}=2\times505=1010$

លំហាត់ទី ៥៧៣

គេឱ្យ $\triangle ABC$ កែងត្រង់ C និងមានប្រវែងជ្រុងទាំងបីជាចំនួនវិជ្ជមាន ។ កម្ពស់គូសចេញពីកំពូល C កាត់អ៊ីប៉ូតេនុស AB ត្រង់ចំណុច D ដែល $BD=24389$ ។ គណនា $sin\angle BAC$ ។

ដំណោះស្រាយ



$$\sin\angle BAC = \sin(90^0 - \angle ABC)$$
$$= \cos\angle ABC$$
$$= \frac{BD}{BC} \quad (\triangle BDC \text{ កែងត្រង់ } D)$$
$$= \frac{24389}{BC} = \frac{29^3}{BC}$$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រក្នុងត្រីកោណកែង BDC

$BC^2 - CD^2 = BD^2 \Rightarrow CD$ ជាចំនួនគត់

$(BC - CD)(BC + CD) = 29^6$

ដោយ BC, CD ជាចំនួនគត់ នោះ $BC - CD, BC + CD$ ជាចំនួនគត់ដែរ ហើយដែល $BC - CD < BC + CD$

ម្យ៉ាងទៀត $29^6 = 1 \times 29^6 = 29 \times 29^5 = 29^2 \times 29^4$

- ចំពោះ $29^6 = 1 \times 29^6$ គេបាន

$$\begin{cases} BC - CD = 1 \\ BC + CD = 29^6 \end{cases}$$

$$2BC = 1 + 29^6$$
$$BC = \frac{1 + 29^6}{2} \in \mathbb{N}$$

តែ $\sin\angle BAC = \dfrac{BC}{AB}$

$$\Rightarrow \frac{29^3}{BC} = \frac{BC}{AB}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{BC^2}{29^3} = \frac{(1 + 29^6)^2}{4 \times 29^3} \notin \mathbb{N}$$

$$BC = \frac{29\left(1 + 29^4\right)}{2} \in \mathbb{N} \text{ (ស្រាយដូចគ្នា)}$$

- ចំពោះ $29^6 = 29^2 \times 29^4$ គេបាន

$$+\begin{cases} BC - CD = 29^2 \\ BC + CD = 29^4 \end{cases}$$

$$2BC = 29^2\left(1 + 29^2\right)$$
$$BC = \frac{29^2\left(1 + 29^2\right)}{2} \in \mathbb{N}$$

$$AB=\frac{BC^2}{29^3}=\frac{29^4\left(1+29^2\right)}{4\times 29^3}$$

$$AB=\frac{29\left(1+29^2\right)^2}{4}\in\mathbb{N}$$

$$AC^2=AB^2-BC^2$$

$$=\frac{29^2\left(1+29^2\right)^4}{4^2}-\frac{29^4\left(1+29^2\right)^2}{4}$$

$$=\frac{29^2\left(1+29^2\right)^2}{4}\left[\frac{\left(1+29^2\right)^2}{4}-29^2\right]$$

$$=\frac{29^2\left(1+29^2\right)^2}{4}\times\frac{\left(1-29^2\right)^2}{4}$$

$$AC=\frac{29\left(1+29^2\right)\left(1-29^2\right)}{4}\in\mathbb{N}$$

ករណីនេះ គេបាន

$$\sin\angle BAC=\frac{29^3\times 2}{29^2\left(1+29^2\right)}=\frac{29\times 2}{842}$$

$$=\frac{29}{421}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sin\angle BAC=\frac{29}{421}}$

លំហាត់ទី ៥៧៨

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើ $\mathbb{N}$ ដោយ $f(1)=11, f(2)=22, f(3)=33, f(4)=44$ និង $f(n)=f(n-1)-f(n-2)+f(n-3)-f(n-4)$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 5$ ។ គណនា $f(2020)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(n)=f(n-1)-f(n-2)+f(n-3)-f(n-4)$

$$f(n-1)=f(n-2)-f(n-3)+f(n-4)-f(n-5)$$

$$f(n)=-f(n-5)$$

$$f(n)=-[-f(n-5-5)]$$

$$f(n)=(-1)^2[f(n-5\times 2)]$$

$f(n)=(-1)^2[-f(n-5\times 2-5)]$

$f(n)=(-1)^3 f(n-5\times 3)$

ជាទូទៅ $f(n)=(-1)^k f(n-5\times k)$

$\Rightarrow f(2020)=(-1)^{403} f(2020-5\times 403)$

$=-f(5)$

$=-[f(4)-f(3)+f(2)-f(1)]$

$=-(44-33+22-11)$

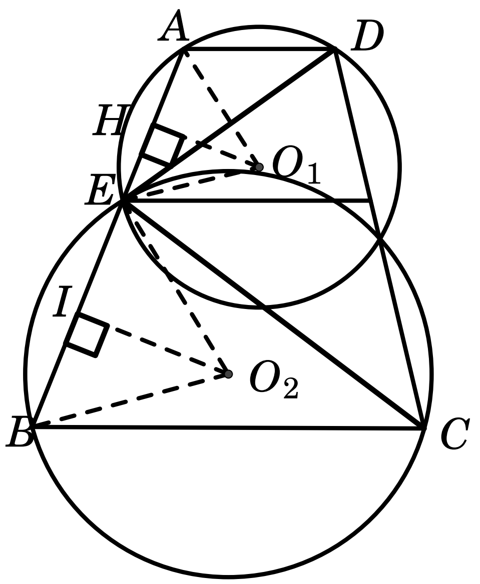
$=-22$

ដូចនេះ $\boxed{f(2020)=-22}$

លំហាត់ទី ៥៧៥

គេឱ្យចតុកោណព្នាយ $ABCD$ មានបាត $AD \parallel BC$ ។ E ជាចំណុចចល័តមួយនៅលើអង្កត់ AB ។ O_1 និង O_2 ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅ $\triangle AED$ និង $\triangle BEC$ រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា O_1O_2 មានប្រវែងថេរ ។

ដំណោះស្រាយ



បង្ហាញថា O_1O_2 មានប្រវែងថេរ

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុសចំពោះ $\triangle EAD$ និង $\triangle EBC$

$$\frac{ED}{sin\angle A}=2O_1E \Rightarrow ED=2.O_1E sin\angle A$$

$\frac{EC}{sin\angle B} = 2O_2E \Rightarrow EC = 2.O_2Esin\angle B$

$= 2O_2Esin\angle A$ ព្រោះ $\angle A + \angle B = 180^0$

$\Rightarrow \frac{ED}{EC} = \frac{2O_1Esin\angle A}{2O_2Esin\angle A} = \frac{O_1E}{O_2E}$

$\Rightarrow \frac{ED}{O_1E} = \frac{EC}{O_2E} \quad (1)$

តាង H,I ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃ AC,BE យើងបាន :

ΔO_1HE កែងត្រង់ H

$\Rightarrow \angle O_1EH = 90^0 - \angle EO_1H$

$= 90^0 - \angle EDA$

ΔO_2IE កែងត្រង់ I

$\Rightarrow \angle O_2EI = 90^0 - \angle EO_2I$

$= 90^0 - \angle ECB$

$\angle O_1EH + \angle O_2EI = 180^0 - (\angle EDA + \angle ECB)$

$180^0 - \angle O_1EO_2 = 180^0 - \angle DEC$

$\angle O_1EO_2 = \angle DEC \quad (2)$

តាម (1) និង (2) : $\Delta O_1EO_2 \sim \Delta DEC$ (ករណីដំនូចទី ២)

វិបាក $\frac{O_1O_2}{CD} = \frac{O_1E}{DE} = \frac{O_1E}{2O_1Esin\angle A}$

$= \frac{1}{2sin\angle A}$

$\Rightarrow O_1O_2 = \frac{CD}{2sin\angle A}$

ដោយ CD ថេរ និង $sin\angle A$ ថេរ

ដូចនេះ O_1O_2 មានប្រវែងថេរ

លំហាត់ទី ៥៧៦

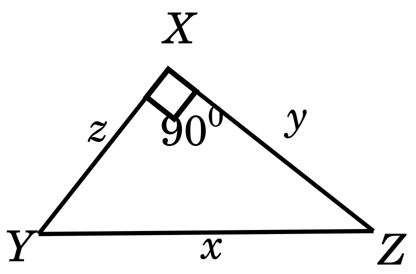
ក្នុងត្រីកោណកែង XYZ មួយមាន $\widehat{X} = 90^0, YZ = x, ZX = y$ និង $XY = z$ ។
បង្ហាញថា $x^n > y^n + z^n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប n ដែល $n \geq 3$ ។

ដំណោះស្រាយ

- ចំពោះ $n = 3$

គេមាន $x^2 = y^2 + z^2 \Rightarrow x^3 = xy^2 + xz^2$

តែ $x > y \Rightarrow xy^2 > y^3$ ហើយ $x > z \Rightarrow xz^2 > z^3$
គេទាញបាន $x^3 > y^3 + z^3$
-ឧបមាថា $x^k > y^k + z^k$ ចំពោះ $k \geq 3$
- ពិនិត្យចំពោះ $k+1$
$x^k > y^k + z^k \Rightarrow x^{k+1} > xy^k + xz^k$
តែ $x > y \Rightarrow xy^k > y^{k+1}$ ហើយ
$x > z \Rightarrow xz^k > z^{k+1}$
គេទាញបាន $x^{k+1} > y^{k+1} + z^{k+1}$ ពិត



លំហាត់ទី ៥៧៧

គេបានបេះផ្លែស្វាយមករៀបគរជា 11 គំនរស្មើៗគ្នា ហើយនៅសល់ផ្លែស្វាយចំនួន 6 ផ្លែទៀត ។ តែបើគេយកផ្លែស្វាយទាំងនោះមករៀបជា 17 គំនរស្មើៗគ្នាវិញ នោះពុំមានផ្លែស្វាយនៅសល់ទេ ។ រកចំនួនផ្លែស្វាយតិចបំផុតដែលគេបានបេះ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង M ជាចំនួនផ្លែស្វាយតិចបំផុតដែលគេបានបេះ
- ដោយដឹងថាបើគេរៀបគរជា 11 គំនរស្មើៗគ្នា ហើយនៅសល់ផ្លែស្វាយចំនួន 6 ផ្លែទៀត នោះគេបាន: $M \equiv 6 \pmod{11} \Rightarrow M = 11k + 6,\ k > 1$
- ដោយដឹងថាបើគេរៀបជា 17 គំនរស្មើៗគ្នា គ្មានសល់ផ្លែស្វាយទេ នោះគេបាន
$M \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow M = 11k + 6 \equiv 0 \pmod{17}$
$\Rightarrow 11k \equiv -6 \equiv 11 \pmod{17}$
តែ $gcd(11,17) = 1$ នោះ $k \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow k = 17m + 1,\ m \geq 1$
ដើម្បីបានចំនួនផ្លែស្វាយតិចបំផុតដែលគេបានបេះ គេគ្រាន់តែយក $m = 1$ ជាការស្រេច :
$m = 1 \Rightarrow k = 18$ ហើយ $M = 11 \cdot 18 + 6 = 204$ ផ្លែ

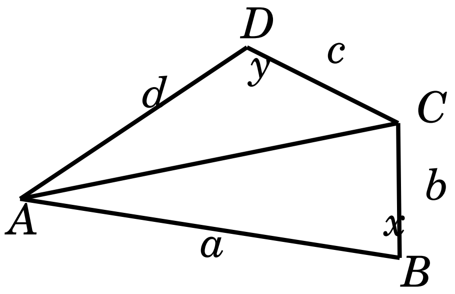
លំហាត់ទី ៥៧៨

ចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មួយមានជ្រុង $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ រង្វាស់មុំ $A\hat{B}C = x$ និង $A\hat{D}C = y$ ។ រកលក្ខខណ្ឌដើម្បីឱ្យចតុកោណ $ABCD$ មានផ្ទៃក្រឡាអតិបរមា ។

ដំណោះស្រាយ

- រកផ្ទៃក្រឡានៃ $ABCD$ ជាអនុគមន៍នៃ $a;b;c;d;x$ និង y

ចតុកោណ $ABCD$ មានផ្ទៃក្រឡា $S=\frac{1}{2}absinx+\frac{1}{2}cdsiny$



អង្កត់ទ្រូង $[AC]$ មានប្រវែង $L=a^2+b^2-2abcosx=c^2+d^2-2cdcosy$
ដោយរកដេរីវេធៀបនឹង x គេបាន :

$S'(x)=\frac{1}{2}abcosx+\frac{1}{2}cdcosy\cdot y' \quad (1)$

$L'(x)=2absinx=2cdsiny\cdot y'$

$$absinx=cdsiny\cdot y' \Rightarrow y'=\frac{absinx}{cdsiny}$$

តាម $(1)\Rightarrow S'(x)=\frac{1}{2}ab\times\frac{sinxcosy+cosxsiny}{siny}=\frac{1}{2}ab\times\frac{sin(x+y)}{siny}$

មានសញ្ញាដូច $sin(x+y)$

$S'(x)=0\Leftrightarrow sin(x+y)=0\Leftrightarrow x+y=\pi$

បើ $0<x+y<\pi\Leftrightarrow S'(x)>0$

បើ $2\pi>x+y>\pi\Leftrightarrow S'(x)<0$

បានន័យថា $S(x)$ មានអតិបរមាលុះត្រាតែ $x+y=\pi$

ដូចនេះ ចតុកោណ $ABCD$ មានផ្ទៃអតិបរមាលុះត្រាតែ $ABCD$ ចារឹកក្នុងរង្វង់

លំហាត់ទី ៥៧៩

ស្វ៊ីតនៃចំនួន (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=1;\ u_2=1$ និង $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ ចំពោះ $n=3;4;\ldots$ ។

តាង $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ និង $b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ។

១. បង្ហាញថា $u_n>a^{n-2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\geq 3$ ។

២. បង្ហាញថា $u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(a^n-b^n)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន n ។

ដំណោះស្រាយ

១. បង្ហាញថា $u_n > a^{n-2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 3$

- ចំពោះ $n = 3$ គេបាន $u_3 = 2$ ហើយ $a^{3-2} = a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$

បានន័យថា $u_3 > a^{3-2}$

- ឧបមាថា $u_p > a^{p-2}$ ចំពោះ $p \geq 3$

- សិក្សាចំពោះ $p+1$

តាមសម្មតិកម្មអនុមានរួម គេបាន $u_p > a^{p-2}$, $u_{p-1} > a^{p-3}$

ដោយបូកអង្គ និង អង្គ គេបាន $u_p + u_{p-1} > a^{p-2} + a^{p-3}$ ហើយ

$u_{p+1} > a^{p-2} + a^{p-3} \quad (1)$

តែគេដឹងថា $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ជាឫសនៃសមីការ $x^2 = x+1$ នោះគេបាន $a^2 = a+1$

ដោយគុណនឹង a^{p-3} គេបាន $a^{p-1} = a^{p-2} + a^{p-3} \quad (2)$

តាម (1) និង (2) $\Rightarrow u_{p+1} > a^{(p+1)-2}$

ដូចនេះ $u_n > a^{n-2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 3$

២. បង្ហាញថា $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន n

- ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $1 = u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(a-b) = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}(1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}) = 1$

- ឧបមាថា $u_k = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(a^k - b^k\right)$

- សិក្សាចំពោះ $k+1$

គេមាន $u_{k+1} = u_k + u_{k-1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(a^k + a^{k-1}\right) - \left(b^k + b^{k-1}\right)\right) \quad (3)$

តែ a និង b ជាឫសនៃសមីការ $x^2 = x+1$ នោះ $a^2 = a+1$ និង $b^2 = b+1$

គេបាន $a^{k+1} = a^k + a^{k-1}$ និង $b^{k+1} = b^k + b^{k-1}$

តាម (3) $\Rightarrow u_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(a^{k+1} - b^{k+1}\right)$

ដូចនេះ $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបវិជ្ជមាន n

លំហាត់ទី ៥៨០

គណនាផលបូក $S = \dfrac{1}{2^1} - \dfrac{2^1}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} - \dfrac{4}{2^4} + \cdots - \dfrac{2010}{2^{2010}} + \dfrac{2011}{2^{2011}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$S=\frac{1}{2^1}-\frac{2^1}{2^2}+\frac{3}{2^3}-\frac{4}{2^4}+\cdots-\frac{2010}{2^{2010}}+\frac{2011}{2^{2011}}\quad(1)$$

$$2S=1-\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}-\frac{4}{2^3}+\cdots-\frac{2010}{2^{2009}}+\frac{2011}{2^{2010}}\quad(2)$$

$(1)+(2)$:

$$3S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{2010}}+\frac{2011}{2^{2011}}$$

$$=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2011}}{1+\frac{1}{2}}+\frac{2011}{2^{2011}}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2^{2011}+1}{2^{2011}}\right)+\frac{2011}{2^{2011}}$$

$$=\frac{1}{3.2^{2011}}\left(2^{2012}+6035\right)$$

ដូចនេះ $\boxed{S=\frac{1}{9.2^{2011}}\left(2^{2012}+6035\right)}$

លំហាត់ទី ៥៨១

គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន $I_n=8^n+9^{3n+1}+25^{3n+1}$ ចំពោះ $n=0,1,2,...,2011$ ។ រក $gcd(I_0,I_1,I_2,...,I_{2011})$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $d=gcd(I_0,I_1,I_2,...,I_{2011})$

$\Rightarrow d|I_0$

ដោយ $I_n=8^n+9^{3n+1}+25^{3n+1}$ ចំពោះ $n=0,1,2,...,2011$

$I_0=1+9+25=35=5\times 7$

$\Rightarrow d|5\times 7$

ម្យ៉ាងទៀត $I_n=2^{3n}+9^{3n+1}+25^{3n+1}$

$I_n=2^{3n}+(10-1)^{3n+1}+26^{3n+1}$

$\equiv 2^{3n}+(-1)^{3n+1}\pmod 5$

$I_1\equiv 8+1\equiv 4\pmod 5$

$\Rightarrow d\nmid 5$

$I_n=8^n+9\times 9^{3n}+25\times 25^{3n}$

$\equiv 1+2\times 2^{3n}+4\times 4^{3n}$

$\equiv 1+2+4 \equiv 0 \pmod 7$

$\Rightarrow 7|I_n$ គ្រប់ $n = 0, 1, 2, \ldots, 2011$

ដូចនេះ $\boxed{d = 7}$

លំហាត់ទី ៥៨២

បង្ហាញថា ចំនួនគត់ $N = 5^{5^{2011}} + 5^{5^{2010}} + 1$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $x = 5^{5^{2010}}$

$$N = x^5 + x + 1$$
$$= x^5 - x^2 + x^2 + x + 1$$
$$= x^2(x-1)(x^2+x+1) + x^2 + x + 1$$
$$= (x^2+x+1)\left[x^2(x-1)+1\right]$$
$$= (x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$$

ដោយ $x^2+x+1, x^3-x^2+1 > 1$ ចំពោះ $x = 5^{5^{2010}}$

ដូចនេះ $\boxed{N \text{ មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ}}$

លំហាត់ទី ៥៨៣

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោមក្នុងសំណុំចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប :

$x^2 + x + 503 = y^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$x^2 + x + 503 = y^2$$
$$4x^2 + 4x + 2012 = 4y^2$$
$$4y^2 - (2x+1)^2 = 2011$$
$$(|2y| - |2x+1|)(|2y| + |2x+1|) = 2011$$

ដោយ 2011 ជាចំនួនបឋម

$$\begin{cases} |2y| - |2x+1| = 1 \\ |2y| + |2x+1| = 2011 \end{cases} +$$

$$4|y| = 2012$$
$$|y| = 503$$

$y=\pm 503$

គេបាន $|2x+1|=2|y|-1=1005$

$2x+1=\pm 1005$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=502 \\ x=-503 \end{array}\right.$

ដូចនេះ $(x,y)=(502,503)$
$=(502,-503)$
$=(-503,503)$
$=(-503,-503)$

លំហាត់ទី ៥៨៨

រកគ្រប់អនុគមន៍ $f:\mathbf{R}-\left\{\frac{2}{3}\right\}\to\mathbf{R}$ ដែលបំពេញសមីការអនុគមន៍ខាងក្រោម :

$\frac{1}{2}f\left(\frac{2x}{3x-2}\right)+f(x)=503x$ ។

ដំណោះស្រាយ

សម្មតិកម្ម $\frac{1}{2}f\left(\frac{2x}{3x-2}\right)+f(x)=503x \quad (1)$

តាង $u=\frac{2x}{3x-2}\Rightarrow x=\frac{2u}{3u-2}$

គេបាន $\frac{1}{2}f(u)+f\left(\frac{2u}{3u-2}\right)=\frac{1006}{3u-2}$

ឬ $\frac{1}{2}f(x)+f\left(\frac{2x}{3x-2}\right)=\frac{1006}{3x-2} \quad (2)$

$(1)-(2)$ គេបាន

$\frac{3}{4}f(x)=503x-\frac{503x}{3x-2}$

$\frac{3}{4}f(x)=\frac{1509x(x-1)}{3x-2}$

ដូចនេះ $f(x)=\frac{2012x(x-1)}{(3x-2)}$

លំហាត់ទី ៥៨៥

គេឱ្យពហុធា $P(x)=\sum_{k=0}^{2011}\frac{1}{(2011+k+1)}x^4$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $P(x^2)=P^2(x)$ គ្មានឫសជាចំនួនពិត ។

ដំណោះស្រាយ

សម្មតិកម្ម $P(x)=\sum_{k=0}^{2011}\frac{1}{(2011+k+1)}x^4$

តាង $a_k=\frac{1}{2011+k+1}>0$

$\Rightarrow P(x)=\sum_{k=0}^{2011}a_kx^k$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz

$$P^2(x)\left(\sum_{k=0}^{2011}\sqrt{a_k}.\sqrt{a_k}x^k\right)$$

$$\leq\left(\sum_{k=0}^{2011}a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{2011}a_k.x^{2k}\right)$$

$P^2(x)\leq P(1)\cdot P(x^2)$

ដោយ $P(1)\sum_{k=0}^{2011}a_k$

$$=\sum_{k=0}^{2011}\left(\frac{1}{2011+k+1}\right)<1$$

ដូចនេះ $P^2(x)<P(x^2)$ នោះសមីការ $P^2(x)=P(x^2)$ គ្មានឫស

លំហាត់ទី ៥៨៦

គេឱ្យចតុកោណ $ABCD$ ចារឹកក្នុងរង្វង់ ហើយមានផ្ទៃក្រឡា S ។

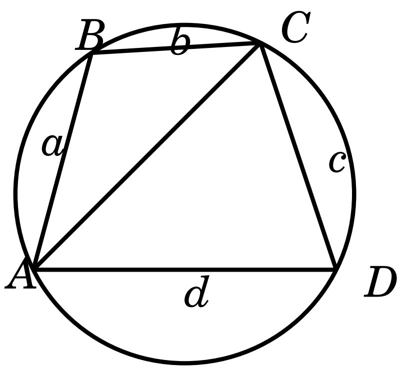
គេឱ្យ $AB=a,BC=b,CD=c,AD=d$ និង p ជាកន្លះបរិមាត្រ ។

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ ។

ខ) បើ $S=\left(\frac{p}{2}\right)^2$ បង្ហាញថា $ABCD$ ជាការេ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$



$$S=S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}$$
$$=\frac{1}{2}absinB+\frac{1}{2}cdsinD$$
$$=\frac{1}{2}sinB(ab+cd),\ B+D=\pi$$
$$4S=2sinB(ab+cd)\quad(1)$$
$$AC^2=a^2+b^2-2abcosB$$
$$AC^2=c^2+d^2-2cdcosD$$
$$=c^2+d^2+2cdcosB$$
$$\Rightarrow a^2+b^2-2abcosB=c^2+d^2+2cdcosB$$
$$2cosB(ab+cd)=a^2+b^2-c^2-d^2\quad(2)$$

លើកអង្គ (1) &(2) ជាការេ

$$4sin^2B(ab+cd)^2=16S^2$$
$$4cos^2B(ab+cd)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$$

$$4(ab+cd)^2=16S^2+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$$
$$16S^2=(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$$
$$=\left[(a+b)^2-(c-d)^2\right]\left[(c+d)^2-(a-b)^2\right]$$
$$=(2p-2d)(2p-2c)(2p-2a)(2p-2b)$$
$$=16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$

ដូចនេះ $\boxed{S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$

ខ) បើ $S=\left(\frac{p}{2}\right)^2$ បង្ហាញថា $ABCD$ ជាការេ

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}=\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow \sqrt[4]{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \frac{p}{2}$

ដោយ $\frac{p}{2} = \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)+(p-d)}{4}$

តាមវិសមភាព Cauchy

$\frac{p}{2} \geq \sqrt[4]{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

សមភាព : $p-a = p-b = p-c = p-d$

$\Rightarrow ABCD$ ជាការេ

លំហាត់ទី ៥៨៧

ក) រកតម្លៃនៃ $A = 2011^3 - 2010.2011^3 - 2010^2.2011 + 2010^3$ ។

ខ) រកតម្លៃនៃ $B = 403^5 - 402^2(403^3 + 2.403^2 + 3.403 + 4)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) រកតម្លៃនៃ $A = 2011^3 - 2010.2011^3 - 2010^2.2011 + 2010^3$

$A = 2011^3 - 2010.2011^3 - 2010^2.2011 + 2010^3$

$= 2011^2(2011 - 2010) + 2010^2(2010 - 2011)$

$= 2011^2 - 2010^2$

$= 2011 + 2011$

ដូចនេះ $\boxed{A = 4021}$

ខ) រកតម្លៃនៃ $B = 403^5 - 402^2(403^3 + 2.403^2 + 3.403 + 4)$

តាង $x = 403$

$B = x^5 - (x-1)^2(x^3 + 2x^2 + 3x + 4)$

$= x^5 - (x^2 - 2x + 1)(x^3 + 2x^2 + 3x + 1)$

$= x^5 - x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 4x^3 + 2x^4 + 6x^2 + 8x - x^3 - 2x^2 - 3x - 4$

$= 5x - 4$

$B = 5 \times 403 - 4$

ដូចនេះ $\boxed{B = 2011}$

លំហាត់ទី ៥៨៨

គណនាផលបូកតួមិនកំណត់នៃស្វ៊ីតខាងក្រោម :

$S=\frac{1^3}{3^1}+\frac{2^3}{3^2}+\frac{3^3}{3^3}+\frac{4^3}{3^4}+\frac{5^3}{3^5}+\cdots$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$S=\frac{1^3}{3^1}+\frac{2^3}{3^2}+\frac{3^3}{3^3}+\frac{4^3}{3^4}+\frac{5^3}{3^5}+\cdots$$

$$\frac{S}{3}=\frac{1}{3^2}+\frac{2^3}{3^3}+\frac{3^3}{3^4}+\frac{4^3}{3^5}+\frac{5^3}{3^6}+\cdots$$

$$S-\frac{S}{3}=\frac{2S}{3}=\frac{1}{3}+\frac{2^3-1}{3^3}+\frac{3^3-2^3}{3^3}+\cdots$$

$$\frac{2S}{9}=\frac{1}{3^2}+\frac{2^3-1^3}{3^3}+\frac{3^3-2^3}{3^3}+\cdots$$

$$\frac{2S}{3}-\frac{2S}{9}=\frac{1}{3}+\frac{2^3-2\cdot1^3}{3^2}+\frac{3^3-2\cdot2^3+1}{3^3}+\cdots$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3^2-2\cdot2^3+1^3}{3^3}+\cdots$$

$$=1+\frac{3^2-2\cdot2^3+1^3}{3^3}+\cdots$$

ដោយ $(k+1)^3-2k^3+(k-1)^3=6k$

$$\Rightarrow\frac{4S}{9}=1+\frac{6\cdot2}{3^3}+\frac{6\cdot3}{3^4}+\cdots$$

$$\Rightarrow\frac{4S}{27}=\frac{1}{3}+\frac{12}{3^4}+\frac{18}{3^5}+\cdots$$

$$\frac{4S}{9}-\frac{4S}{27}=\frac{8S}{27}=\frac{2}{3}+\frac{12}{3^3}+\frac{6}{3^4}+\frac{6}{3^5}+\cdots$$

$$\frac{8S}{27}=\frac{10}{9}+6\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\cdots\right)$$

$$=\frac{10}{9}+6\cdot\frac{\frac{1}{3^4}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{11}{9}$$

ដូចនេះ $\boxed{S=\frac{11}{9}}$

លំហាត់ទី ៥៨៩

គេឱ្យ $f(n)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{n^2-2n+1}}$ គ្រប់ $n\in\mathbf{N}$ ។
គណនាផលបូក $S=f(1)+f(3)+f(5)+\cdots+f(10^6-3)+f(10^6-1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $x=\sqrt[3]{n+1}$

$y=\sqrt[3]{n-1}$

$xy=\sqrt[3]{n^2-1}$

$\Rightarrow f(n)=\dfrac{1}{x^2+xy+y^2}$

$f(n)=\dfrac{x-y}{x^3-y^3}$

$=\dfrac{x-y}{n+1-n+1}$

$f(n)=\dfrac{1}{2}(x-y)$

ឬ $f(n)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}\right)$

$f(1)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{0}\right)$

$f(3)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right)$

$f(5)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{4}\right)$

....

$f(10^6-1)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{10^6}-\sqrt[3]{10^6-2}\right)$

បូកអង្គ $S=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{10^6}-0\right)=50$

ដូចនេះ $\boxed{S=50}$

លំហាត់ទី ៥៩០

បន្ទាត់៣ផ្សេងគ្នា ត្រូវបានគូសនៅក្នុងប្លង់ ។ ឧបមាថាមាន n រង្វង់យ៉ាងពិតប្រាកដនៅក្នុងប្លង់ដែលប៉ះនឹងបន្ទាត់ទាំង៣ ។ រកតម្លៃដែលអាចមាននៃ n ដោយគូសរូបបញ្ជាក់ ។

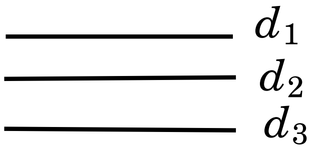
ដំណោះស្រាយ

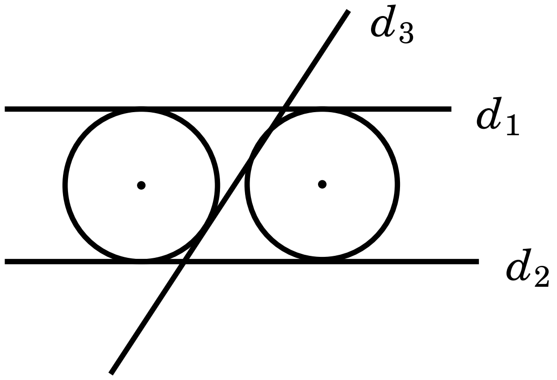
n រង្វង់ប៉ះនឹងបន្ទាត់ទាំង៣ នៅក្នុងប្លង់:

មាន៣ករណី :

- ករណីបន្ទាត់ទាំង 3 ស្របគ្នា :

គ្មានរង្វង់ប៉ះបន្ទាត់ទាំង 3 $\Rightarrow n = 0$

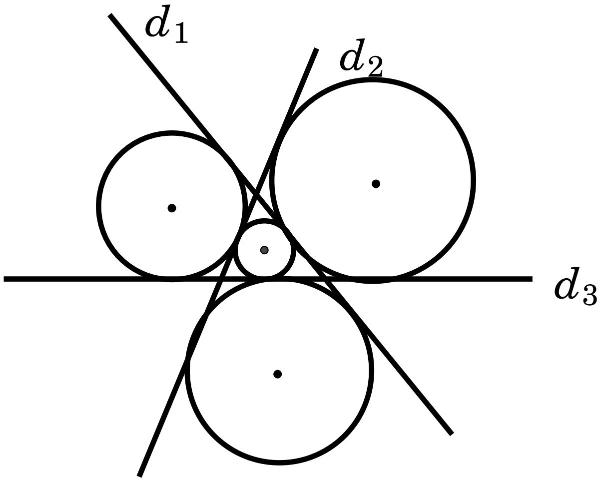




- ករណីបន្ទាត់ពីរស្របគ្នា កាត់ដោយបន្ទាត់ទីបី

$\Rightarrow$ មានរង្វង់ 2 ប៉ះនឹងបន្ទាត់ទាំង3

នោះ $n = 2$



- ករណីបន្ទាត់ទាំង3 កាត់គ្នា នោះមានរង្វង់4 ប៉ះនឹងរង្វង់ទាំង3 $\Rightarrow n = 4$

លំហាត់ទី ៥៩១

តាង $u_0, u_1, u_2, ..., u_n$ ជាស៊្វីតនៃចំនួនពិត ដែលបំពេញទំនាក់ទំនងខាងក្រោម :

$(3 - u_{n+1})(6 + u_n) = 18$ និង $u_0 = 3$ ។ គណនា $\sum_{k=0}^{2011} \frac{1}{u_k}$ ។

ដំណោះស្រាយ

សម្មតិកម្ម $u_0, u_1, u_2, ..., u_n$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ (3 - u_{n+1})(6 + u_n) = 18 \end{cases}$$

មាន $(3 - u_{n+1})(6 + u_n) = 18$

$$3u_n - 6u_{n+1} - u_{n+1} \cdot u_n = 0$$

ចែកអង្គនឹង $u_{n+1} \cdot u_n$

$$\Rightarrow \frac{3}{u_{n+1}} - \frac{6}{u_n} - 1 = 0 \quad (1)$$

តាង $v_n = \frac{1}{u_n} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}}$

$(1) \Rightarrow 3v_{n+1} - 6v_n - 1 = 0$

$$v_{n+1} = 2v_n + \frac{1}{3}$$

$$v_{n+1} + \frac{1}{3} = 2\left(v_n + \frac{1}{3}\right)$$

តាង $a_n = v_n + \frac{1}{3}$

$\Rightarrow a_{n+1} = 2a_n$

$\Rightarrow (a_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុង $q = 2$ និងតួទី ១ $a_0 = v_0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{3}$

$a_0 = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow a_n = a_0 \cdot q^n = \frac{2}{3} \cdot 2^n = \frac{1}{3} \cdot 2^{n+1}$$

គេបាន $v_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} - 1\right)$

$$\sum_{k=0}^{2011} \frac{1}{u_k} = \sum_{k=0}^{2011} v_k$$

$$= \sum_{k=0}^{2011} \frac{1}{3}\left(2^{n+1} - 1\right)$$

$$\sum_{k=0}^{2011} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{3}(2 + 2^2 + \cdots + 2^{2012} - 2012)$$

$= \frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{2^{2012}-1}{2-1} - 2012\right)$

$= \frac{1}{3}(2^{2013} - 2014)$ ដូចនេះ: $\boxed{\sum_{k=0}^{2011} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{3}(2^{2013} - 2014)}$

លំហាត់ទី ៥៩២

ស្វ៊ែរ S_1 មួយមានកាំ r ចារឹកក្នុងកោនមួយមានមុំនៅត្រង់កំពូលនៃមុខកាត់តាមអ័ក្សស្មើ $\frac{\pi}{3}$ ។

ក) រកផលធៀប $\frac{V_1}{V}$ រវាងមាឌ V_1 និង មាឌ V នៃស្វ៊ែរ S_1 និង កោន ។

ខ) ហៅ S_2 ជាស្វ៊ែរនៅក្នុងកោន ប៉ះនឹងជនេត្រនៃកោន ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែរ S_1

S_3 ជាស្វ៊ែរនៅក្នុងកោន ប៉ះនឹងជនេត្រនៃកោន ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែរ S_2

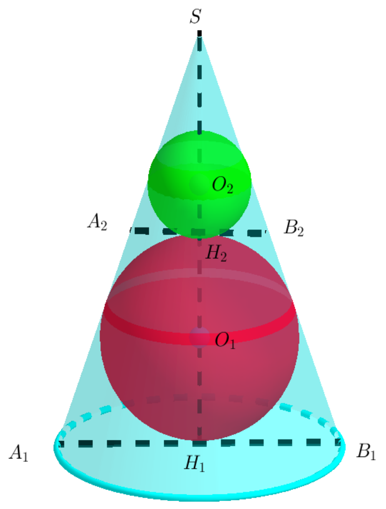
....

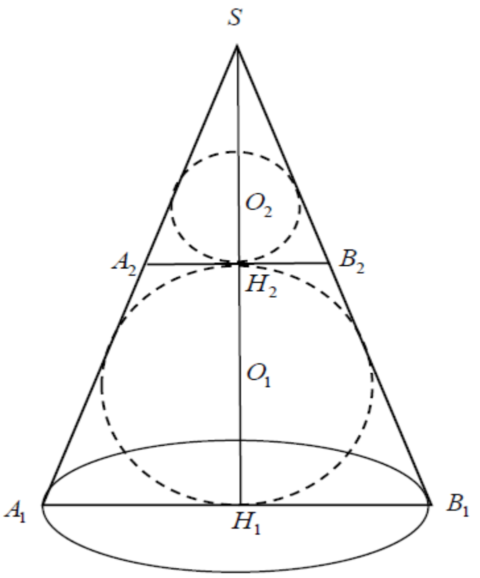
S_{k+1} ជាស្វ៊ែរនៅក្នុងកោន ប៉ះនឹងជនេត្រនៃកោន ហើយប៉ះនឹងស្វ៊ែរ S_k

ស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ $n \in \mathbf{N}$ ផលបូកមាឌនៃស្វ៊ែរ $S_1, S_2, ..., S_n$ តូចជាង $\frac{1}{2}V$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) រកផលធៀប $\frac{V_1}{V}$ រវាងមាឌ V_1 និង មាឌ V នៃស្វ៊ែរ S_1 និង កោន





តាង SA_1B_1 មុខកាត់តាមអ័ក្ស SH_1នៃកោន ដែលមុំ $A_1\widehat{S}B_1 = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \triangle SA_1B_1$ សម័ង្ស
ស្វ៊ែរ S_1 ចារឹកក្នុងកោន
តាង O_1 ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង $\triangle$ សម័ង្ស SA_1B_1
$\Rightarrow O_1$ ជាទីប្រជុំទម្ងន់
$\Rightarrow SH_1 = 3O_1H_1 = 3R$

$SH_1 = A_1B_1 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$A_1B-1 = \dfrac{6r}{\sqrt{3}} = 2r\sqrt{3}$

គេបាន $V = \dfrac{1}{3}\left(\pi \cdot \dfrac{A_1B_1^2}{4}\right) \cdot SH_1$

$= \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3r^2 \cdot 3r$

$= 3\pi r^2$

$V_1 = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ (មាឌស្វ៊ែរ S_1)

ដូចនេះ $\boxed{\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{4}{9}}$

ខ) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $V_1 + V_2 + \cdots + V_n < \dfrac{1}{2}V$ គ្រប់ $n \in \mathbf{N}$

តាងស្វ៊ែរ $S_1, S_2, \ldots, S_n$ មានមាឌរៀងគ្នា $V_1, V_2, \ldots, V_n$
$A_2B_2, A_3B_3, \ldots, A_nB_n$ បន្ទាត់រួមរវាងស្វ៊ែរ $S_2, S_3, \ldots, S_k$ រៀងគ្នានឹងស្វ៊ែរ $S_1, S_2, \ldots,$
S_k នោះ $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel \ldots \parallel A_nB_n$
យក $O_1, O_2, \ldots, O_n$ ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង $\triangle SA_1B_1, \triangle SA_2B_2, \ldots, \triangle SA_nB_n$
មានកាំរៀងគ្នា $r_1, r_2, \ldots, r_n$

យើងមាន $r = r_1 = O_1H_1 = \dfrac{1}{3}SH_1 = SH_2$

$r_2 = O_2H_2 = \dfrac{1}{3}SH_2 = \dfrac{1}{3}r$

$\Rightarrow r_3 = \dfrac{1}{3}r_2 = \dfrac{1}{3^2}r$

$r_4 = \dfrac{1}{3}r_3 = \dfrac{1}{3^3}r$

....

$$r_n=\frac{1}{3^{n-1}}r \text{ គ្រប់ } n\ge 2$$

គេបាន $V_1+V_2+\cdots+V_n=\frac{4}{3}\pi r^3+\frac{4}{3}\pi r_2^3+\cdots+\frac{4}{3}\pi r_n^3$

$$=\frac{4}{3}\pi\left[r^3+\left(\frac{1}{3}r\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{3^{n-1}}r\right)^3\right]$$

$$=\frac{4}{3}\pi r^3\left[1+\frac{1}{3^3}+\left(\frac{1}{3^3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3^3}\right)^{n-1}\right]$$

$$=\frac{4}{3}\pi r^3\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{27}}$$

$$=\frac{4}{3}\pi r^3\cdot\frac{27}{26}\left[1-\left(\frac{1}{3^3}\right)^n\right]$$

$$=\frac{18\pi r^3}{13}\left[1-\left(\frac{1}{3^3}\right)^n\right]<\frac{18\pi r^3}{13}$$

ដូចនេះ $\frac{\sum_{i=1}^n V_i}{V}<\frac{\frac{18\pi r^3}{13}}{3\pi r^3}=\frac{6}{13}<\frac{1}{2}$

$$\boxed{\sum_{i=1}^n V_i<\frac{1}{2}V}$$

លំហាត់ទី ៥៩៣

គេឱ្យ $c>0$ និង $a,b\ge c$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}$ ។

ដំណោះស្រាយ

វិសមភាពអាចសរសេរទៅជា $\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{a-c}{a}}+\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{b-c}{b}}\le 1$

ចំពោះ x,y វិជ្ជមាន គេមាន $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$ (វិសមភាព AM-GM)

នោះ $\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{a-c}{a}}+\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{b-c}{b}}\le\frac{\frac{c}{b}+\frac{a-c}{a}}{2}+\frac{\frac{c}{a}+\frac{b-c}{b}}{2}$

$$\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{a-c}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{b-c}{b}}\le\frac{\frac{c}{b}+1-\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+1-\frac{c}{b}}{2}=1$$ ពិត

ជាសមភាពកាលណា $\begin{cases}\frac{c}{b}=\frac{a-c}{a}\\ \frac{c}{a}=\frac{b-c}{b}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$

ឬ $a=b=2c$

លំហាត់ទី ៥៩៥

គណនាអាំងតេក្រាល $I(k)=\int_0^{\infty}\frac{\sin kx\cos^k x}{x}dx$ ដែល k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

ដំណោះស្រាយ

តាមទ្រឹស្តីបទទ្វេធា គេមាន $(e^{2ix}+1)^k=\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}e^{2rxi}$ (1)

តែ $(e^{2ix}+1)^k=e^{kix}(e^{ix}+e^{-ix})^k=(\cos kx+i\sin kx)2^k\cdot\cos^k x$ (2)

តាម (1) &(2) គេបាន

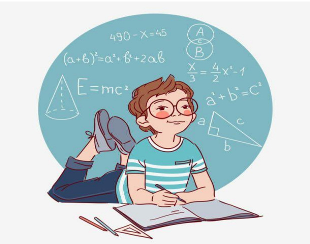
$$2^k\sin kx\cos^k x=\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\sin 2rx=\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}\sin 2rx$$

នាំអោយ $I(k)=\frac{1}{2^k}\int_0^{\infty}\frac{\sin 2rx}{x}dx$

តែ $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ នោះ $I(k)=\frac{\pi}{2^{k+1}}\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}$

$$I(k)=\frac{\pi}{2^{k+1}}\left[\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\cdots+\binom{k}{k}\right]=\frac{\pi}{2^{k+1}}(2^k-1)$$

ដូចនេះ $\boxed{I(k)=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)}$



$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\ldots??$$

យើងពិនិត្យអាំងតេក្រាលមួយចំនួនខាងក្រោម :

EX : គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

ក. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2},\ a>0$

ខ. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

គ. $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2},\ a>0$

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} &= \lim_{p\to+\infty}\int_0^{p} \frac{dx}{x^2+a^2}\\ &= \lim_{p\to+\infty}\left[\frac{1}{a}\cdot tan^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^p\\ &= \lim_{p\to+\infty}\frac{1}{a}\cdot tan^{-1}\frac{p}{a} = \frac{\pi}{2a}\end{aligned}$$

ខ. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}\\ &= \lim_{p\to-\infty}\int_p^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{p\to+\infty}\int_0^{p} \frac{dx}{x^2+1}\\ &= \lim_{p\to-\infty}\left(tan^{-1}a - tan^{-1}p\right) + \lim_{p\to+\infty}\left(tan^{-1}p - tan^{-1}a\right)\\ &= tan^{-1}a + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - tan^{-1}a = \pi\end{aligned}$$

គ. $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx &= \lim_{p\to+\infty}\int_0^{p} e^{-x} dx\\ &= \lim_{p\to+\infty}(1-e^{-p}) = 1\end{aligned}$$

EX : គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x.e^{-x^2} dx \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\int_{-\infty}^{+\infty} x.e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{a} xe^{-x^2}dx + \int_{a}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

ដោយ $\int_{-\infty}^{a} xe^{-x^2}dx = \lim_{p\to-\infty}\int_{p}^{a} xe^{-x^2}dx$

$= \lim_{p\to-\infty}\frac{\left(e^{p^2}-e^{-p^2}\right)}{2} = \frac{-e^{-a^2}}{2}$

និង $\int_{a}^{\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{p\to\infty}\int_{a}^{p} xe^{-x^2}dx$

$= \lim_{p\to\infty}\frac{\left(e^{-a^2}-e^{-p^2}\right)}{2} = \frac{e^{-a^2}}{2}$

នាំអោយ $\int_{-\infty}^{+\infty} x.e^{-x^2}dx = \left(\frac{-e^{-a^2}}{2}\right) + \left(\frac{e^{-a^2}}{2}\right) = 0$

EX : គណនា $\int_{0}^{+\infty} e^{-ax}cosbxdx$ រួចទាញរក $\int_{0}^{\infty}\frac{sinbx}{x}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\int_{0}^{+\infty} e^{-ax}cosbxdx = \lim_{p\to\infty}\int_{0}^{p} e^{-ax}cosbxdx$

$= \lim_{p\to\infty}\left[\frac{e^{-ax}(bsinbx - acosbx)}{a^2+b^2}\right]_0^p$

$= \lim_{p\to\infty}\left[\frac{e^{-ap}(bsinbp - acosbp)}{a^2+b^2} + \frac{a}{a^2+b^2}\right]$

$\Rightarrow \int_{0}^{\infty} e^{-ax}cosbxdx = \frac{a}{a^2+b^2}$ (ព្រោះ $\lim_{p\to\infty} e^{-ap} = 0$) (i)

តាង $I = \int_{0}^{\infty}\frac{e^{-ax}sinbx}{x}, a > 0 \quad (ii)$

ធ្វើដេរីវេក្រោមសញ្ញាអាំងតេក្រាល យើងបាន

$$\frac{dI}{db} = \int_{0}^{\infty} e^{-ax}cosbxdx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

អាំងតេក្រាលធៀប b:

$I = a\cdot\frac{1}{a}\cdot tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + C$

$I = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + C \quad (iii)$

បើ $b = 0$ តាម (ii), $I = 0$ ហើយតាម $(iii) \Rightarrow C = 0$

នាំអោយ $\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}sinbx}{x}dx = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$
ពេល $a \to 0$ យើងបាន
$$\int_0^{\infty}\frac{sinbx}{x}dx = \frac{\pi}{2} \text{ ឬ } -\frac{\pi}{2} \text{ អាស្រ័យ } b>0 \text{ ឬ } b<0 \text{ ។}$$
•ករណីពិសេស ចំពោះ $b=1$ នោះ $\int_0^{\infty}\frac{sinx}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ ។

សំគាល់ :គេអាចស្រាយ $\int_0^{\infty}\frac{sinx}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ ដោយប្រើបំលែងឡាប្លាស ឬ អនុគមន៍អថេរកុំផ្លិច ។

លំហាត់ទី ៥៩៥

គណនាអាំងតេក្រាល $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sinx)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sinx)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\left[sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(cosx)dx$$
នាំអោយ $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[ln(sinx)+ln(cosx)]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\left(\frac{sin2x}{2}\right)dx$
$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin2x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln2dx$$
◇ ចំពោះ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin2x)dx$
តាង $t=2x$ នោះ $dt = 2dx$
នោះ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin2x)dx = \int_0^{\pi} ln(sint)dt = \frac{1}{2}\cdot 2I = I$
នាំអោយ $2I = I - \frac{\pi}{2}ln2$
ដូចនេះ $\boxed{I = -\frac{\pi}{2}ln2}$

លំហាត់ទី ៥៩៦

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int \frac{dx}{cosx}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $I=\int \frac{dx}{cosx}=\int \frac{cosx}{cos^2x}dx$

$I=\int \frac{cosx}{1-sin^2x}dx$

តាង $t=sinx$ នោះ $dt=cosxdx$

$\Rightarrow I=\int \frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{1-t}\right)dt$

$I=\frac{1}{2}[ln|1+t|+ln|1-t|]=\frac{1}{2}ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|dt$

$I=\frac{1}{2}ln\left|\frac{1+sinx}{1-sinx}\right|=\frac{1}{2}ln\left|\frac{(1+sinx)^2}{cos^2x}\right|=ln\left|\frac{1+sinx}{cosx}\right|$

ដូចនេះ $\boxed{I=ln|secx+tanx|+c}$

លំហាត់ទី ៥៩៥

i ជាចំនួនកុំផ្លិចដែល $i=\sqrt{-1}$ ។ បង្ហាញថា i^i ជាចំនួនពិត ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្តអឺលែរ $e^{i\pi}=cos\pi+isin\pi$

$e^{i\pi}=-1+0i$

$e^{i\pi}=-1$

យើងមាន $-1=e^{i\pi}$

លើកស្វ័យគុណ $\frac{1}{2}$ លើអង្គទាំងពីរ គេបាន

$(-1)^{\frac{1}{2}}=e^{(i\pi)^{\frac{1}{2}}}\quad(1)$

តែ $(-1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-1}$

$(1)\Rightarrow i=e^{\frac{\pi}{2}i}$

$i^i=\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)=e^{\frac{\pi}{2}i^2}$

$i^i=e^{-\frac{\pi}{2}}$ ជាចំនួនពិត

លំហាត់ទី ៥៩៦

គេអោយ j និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន និងយក $S_j = 1^j + 2^j + 3^j + \cdots + n^j$ ។
បង្ហាញថា $\binom{k+1}{1}S_1 + \binom{k+2}{2}S_2 + \cdots + \binom{k+1}{k}S_k = (n+1)^{k+1} - (n+1)$
។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $(p+1)^{k+1} = \binom{k+1}{0}p^{k+1} + \binom{k+1}{1}p^k + \binom{k+1}{2}p^{k-1} + \cdots +$
$\binom{k+1}{k}p + \binom{k+1}{k+1}1$

$(p+1)^{k+1} = p^{k+1} + \binom{k+1}{1}p^k + \binom{k+1}{2}p^{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{k}p + 1$

យើងបាន

$\sum_{p=1}^{n}(p+1)^{k+1} = \sum_{p=1}^{n}\left[\binom{k+1}{0}p^k + 1 + \binom{k+1}{1}\sum_{p=1}^{n}p^k + \binom{k+1}{2}\sum_{p=1}^{n}p^{k-1}\right.$
$\left. + \cdots + \binom{k+1}{k}\sum_{p=1}^{n}p + \binom{k+1}{k+1}1\right]$

$\sum_{p=1}^{n}(p+1)^{k+1} = \sum_{p=1}^{n}p^{k+1} + \binom{k+1}{1}\sum_{p=1}^{n}p^k + \binom{k+1}{2}\sum_{p=1}^{n}p^{k-1} + \cdots +$
$\binom{k+1}{k}\sum_{p=1}^{n}p + \sum_{p=1}^{n}1$

$\sum_{p=1}^{n}(p+1)^{k+1} = \sum_{p=1}^{n}p^{k+1} + \binom{k+1}{1}\sum_{p=1}^{n}p^k + \binom{k+1}{2}\sum_{p=1}^{n}p^{k-1} + \cdots$
$+ \binom{k+1}{k}\sum_{p=1}^{n}p + n$

ដោយ $\sum_{p=1}^{n}p^k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k = S_k$

ដូចគ្នាដែរ $\sum_{p=1}^{n}p^{k-1} = S_{k-1}, \ldots, \sum_{p=1}^{n}p = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = S_1$

ហើយដោយ $\binom{k+1}{m}=\binom{k+1}{k+1-m}$

$$\Rightarrow \sum_{p=1}^{n}(p+1)^{k+1}=p^{k+1}+\binom{k+1}{1}S_1+\binom{k+1}{2}S_2+\cdots+\binom{k+1}{k}S_k+n \ (1)$$

តែ $\sum_{p=1}^{n}(p+1)^{k+1}=2^k+3^k+4^k+\cdots+n^k+(n+1)^{k+1}$

$$\sum_{p=1}^{n}(p+1)^{k+1}=\underbrace{1^{k+1}+2^{k+1}+3^{k+1}+\cdots+n^{k+1}}_{\sum_{p=1}^{n}p^{k+1}}-1+(n+1)^{k+1}$$

$$=\sum_{p=1}^{n}p^{k+1}-1+(n+1)^{k+1} \quad (2)$$

តាម (1) &(2)

$$\binom{k+1}{1}S_1+\binom{k+2}{2}S_2+\cdots+\binom{k+1}{k}S_k=(n+1)^{k+1}-(n+1)$$ ពិត

<u>កំណត់សំគាល់:</u> តាមរយៈលំហាត់ទី ៩៩៦ និងរូបមន្តផលបូក $S_1=\frac{n(n+1)}{2}$ យើងទាញបាន

$$S_2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$S_3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=S_1^2$$

$$S_4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)$$

$$S_5=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2\left(2n^2+2n-1\right)$$

$$S_6=\frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)\left(3n^4+6n^3-3n+1\right)$$

$$S_7=\frac{1}{24}n^2(n+1)^2\left(3n^4+6n^3-3n+1\right)$$

$$S_8=\frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)\left(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3\right)$$

$$S_9=\frac{1}{20}n^2(n+1)^2\left(2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3\right)$$

$$S_{10}=\frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)\left(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3\right.$$
$$\left.+2n^2-15n+5\right)$$

លំហាត់ទី ៥៩៧

ប្រើអនុមាណរួមគណិតវិទ្យា បង្ហាញថា $133|(11)^{n+2}+12^{2n+1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $P(n):\ 133|11^{n+2}+12^{2n+1}$

យក $f(n)=11^{n+2}+12^{2n+1}$

ចំពោះ $n=1,\ f(1)=11^3+12^3=23\times 133$

$\therefore\ P(n)$ ពិតចំពោះ $n=1$

យើងឧបមាថា ចំពោះ $n=k,\ f(k)=11^{k+2}+12^{2k+1}$ ចែកដាច់នឹង 133

ចំពោះ $n=k+1$ យើងបាន

$$f(k+1)=11^{k+1+2}+12^{2(k+1)+1}=11^{k+3}+12^{2k+3}$$

$f(k+1)-f(k)=11^{k+3}+12^{2k+3}-11^{k+2}-12^{2k+1}$

$=11^{k+2}(11-1)+12^{2k+1}(144-1)$

$=11^{k+2}\cdot 10+12^{2k+1}\cdot 143$

$=10\left(11^{k+2}+12^{2k+1}\right)+133\cdot 12^{2k+1}$

ដោយ $133|f(k)$ នោះ $133|f(k+1)$ ពិត

លំហាត់ទី ៥៩៨

គេអោយ $0\le x,y,z\le 1$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$(2^x+2^y+2^z)(2^{-x}+2^{-y}+2^{-z})\le\frac{81}{8}\ ។$$

ដំណោះស្រាយ

តាង $a=2^x, b=2^y, c=2^z\Rightarrow 1\le a,b,c\le 2$ ព្រោះ $0\le x,y,z\le 1$

$\Rightarrow (a-1)(a-2)\le 0$

$\Rightarrow a^2-3a+2\le 0\quad \Rightarrow a+\dfrac{2}{a}\le 3$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ $b+\dfrac{2}{b}\le 3,\ c+\dfrac{2}{c}\le 3$

យើងបាន $(a+b+c)+2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\le 9$

$$\Rightarrow 9\ge 2\sqrt{(a+b+c)\times 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$$

$\Rightarrow a+b+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le\frac{81}{8}$

$\Rightarrow (2^x+2^y+2^z)(2^{-x}+2^{-y}+2^{-z})\le\frac{81}{8}$ ពិត

លំហាត់ទី ៥៩៩

បើ $\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n-1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_0=0$ មានឫសយ៉ាងតិចមួយចន្លោះ $(0,1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $f(x)=\frac{a_0x^{n+1}}{n+1}+\frac{a_1x^n}{n}+...+\frac{a^{n-1}x^2}{2}+a_nx\ \forall x\in\mathbb{R}$

ដោយ f ជាពហុធាដឺក្រេទី $(n+1)$ នោះ f ជាប់និងមានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$

$\therefore f$ ជាប់លើ $[0,1]$ និងមានដេរីវេលើ $(0,1)$

ម្យ៉ាងទៀត $f(0)=0$ និង $f(1)=\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+...+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0\Rightarrow f(0)=f(1)$

$\therefore f$ ផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់លក្ខខណ្ឌនៃទ្រឹស្តីបទរ៉ូល

$\therefore$ នោះមានចំនួន $c\in(0,1)$ ដែល $f'(c)=0$

តែ $f'(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$

$\therefore\ f'(c)=0\Rightarrow a_0c^n+a_1c^{n-1}+...+a_{n-1}c+a_n=0$

$\therefore f'(x)=0$ មានឫសមួយនៅចន្លោះ $(0,1)$

លំហាត់ទី ៦០០

បើ $f(x)=0$ ជាសមីការពហុធាដែលមាន n ឫសចំនួនពិត ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $f'(x)=0$ មានយ៉ាងហោច $(n-1)$ ឫសចំនួនពិត ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $a_1,a_2,a_3,...,a_r$ ជាឫស r ខុសៗគ្នានៃសមីការ $f(x)=0$

យើងថា $a_1,a_2,a_3,...,a_r$ កើតមាន $n_1,n_2,n_3,...,n_r$ ដងរៀងគ្នា ដែល $n_1+n_2+n_3+...+n_r=n$

a_i ជាឫសដែលកើតឡើង n_i ដងនៃសមីការ $f(x)=0$ នោះ $(x-a_i)^{n_i}|f(x)$

$\Rightarrow (x-a_i)^{n_i-1}|f'(x)$

$\Rightarrow a_i$ ជាឫសដែលកើតឡើង (n_i-1) ដងនៃសមីការ $f'(x)=0$
បើ $n_i=1$ នោះ a_i មិនមែនជាឫសនៃសមីការ $f'(x)=0$
$\therefore\ f'(x)=$ មាន $(n-r)$ ឫសនៅក្នុងសំណុំ $\{a_1,a_2,...,a_r\}$
$f(x)$ ជាពហុធា និង $f(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌនៃទ្រឹស្តីបទរ៉ូលចំពោះចន្លោះ $[a_i,a_{i+1}]$
(ព្រោះ $i=1,2,3,..,r$ និង $f(a_i)=f(a_{i+1})=0$)
$\therefore$ កើតមានឫសចំនួនពិតយ៉ាងហោចមួយ
$c_i\in(a_i,a_{i+1})$; $i=1,2,..,r-1$ ចំពោះ $f'(x)=0$ i.e., $f'(x)=0$ មានយ៉ាងហោច $(r-1)$ ឫសចំនួនពិត
ដូចនេះ $f'(x)=0$ មានយ៉ាងហោច $(n-r)+(r-1)=n-1$ ឫសចំនួនពិត

លំហាត់ទី ៦០១

p ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $p^{n+1}+(p+1)^{2n-1}$ ចែកដាច់នឹង p^2+p+1 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

ដំណោះស្រាយ

យើងតាង $f(n)=p^{n+1}+(p+1)^{2n-1}$
ចំពោះ $n=1,\ f(1)=p^2+p+1$ ចែកដាច់នឹង p^2+p+1
ចំពោះ $n=k$ យើងឧបមាថា $f(k)$ ចែកដាច់នឹង p^2+p+1 គឺ $p^2+p+1|f(k)$
សិក្សាចំពោះ $n=k+1$

$$\begin{aligned}f(k+1)&=p^{k+2}+2p^{2(k+1)-1}=p^{k+2}+(p+1)^{2k+1}\\&=p^{k+1}p+(p+1)^{2k-1}(p+1)^2\\&=p^{k+1}p+(p+1)^{2k-1}\left(p^2+p+p+1\right)\\&=pf(k)+\left(p^2+p+1\right)(p+1)^{2k-1}\end{aligned}$$

ដោយ $p^2+p+1|f(k)$ នោះ $p^2+p+1|f(k+1)$ ពិត
ដូចនេះ $p^{n+1}+(p+1)^{2n-1}$ ចែកដាច់នឹង p^2+p+1 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

លំហាត់ទី ៦០២

បើ p ជាចំនួនបឋម ស្រាយតាមអនុមាណរួមគណិតវិទ្យាថា $p|(n^p-n)$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $f(n)=n^p-n$

ចំពោះ $n=1,\ f(1)=1^p-1=0$ ចែកដាច់នឹង p
ចំពោះ $n=2$ យើងបាន
$f(2)=2^p-2=(1+1)^p-2$
$={}^pC_0+{}^pC_1+{}^pC_2+\ldots+{}^pC_{p-1}+{}^pC_p-2$
$=1+{}^pC_1+{}^pC_2+\ldots+{}^pC_{p-1}+1-2$
$={}^pC_1+{}^pC_2+\ldots+{}^pC_{p-1}$
ចំពោះ $1\le r\le(p-1)$ យើងបាន ${}^pC_r=\dfrac{p(p-1)\ldots(p-r+1)}{1.2.3\ldots r}$
$\Rightarrow(1.2.3\ldots r)({}^pC_r)=p(p-1)\ldots(p-r+1)$
ដោយ $p|p(p-1)(p-2)\ldots(p-r+1)$ នោះ $p|(1.2.3\ldots r)({}^pC_r)$
តែ p ជាចំនួនបឋម $2\le k\le r(<p)$
$\therefore\ p|{}^pC_r$ ចំពោះ $1\le r\le p-1$
នាំអោយ $p|(2^p-p)$
ឧបមាថា ចំពោះ $n=m,\ p|f(m)$ ពិត
ចំពោះ $n=m+1$ យើងបាន
$f(m+1)=(m+1)^p-(m+1)$
$=(m^p-m)+{}^pC_1m^{p-1}+{}^pC_2m^{p-2}+\cdots+{}^pC_{p-1}m$
$=f(m)+{}^pC_1m^{p-1}+{}^pC_2m^{p-2}+\cdots+{}^pC_{p-1}m$
ដោយ $p|{}^pC_r$ ចំពោះ $1\le r\le p-1$ និង $p|f(m)$
នាំអោយ $p|f(m+1)$ ពិត
ដូចនេះ តាមអនុមាណរួមគណិតវិទ្យា $p|f(n)$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$

លំហាត់ទី ៦០៣

ដោះស្រាយសមីការ $8\sqrt{sinx}+27\sqrt{cosx}=97^{\frac{3}{4}},\ x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

លក្ខខណ្ឌ : $\begin{cases} sinx>0 \\ cosx>0 \end{cases}\ ;\ x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$
តាង $t=8\sqrt{sinx}+27\sqrt{cosx}$ ចំពោះ $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$
យើងបាន $t^2=64sinx+729cosx+432\sqrt{sinxcosx}$
$t^2=(388sinx+873cosx)-\left(18\sqrt{sinx}-12\sqrt{cosx}\right)^2$

នោះ $t^2 \le 388sinx + 873cosx$

$\le \sqrt{388^2+873^2}\cdot\sqrt{sin^2x+cos^2x} = \sqrt{97^3}$

នាំអោយ $t \le 97^{\frac{3}{4}}$

សមភាពកើតមានកាលណា :

$$\begin{cases} 18\sqrt{sinx} = 12\sqrt{cosx} \\ \dfrac{sinx}{388} = \dfrac{cosx}{873} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{sinx}}{\sqrt{cosx}} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{sinx}{cosx} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

គេទាញបាន $x = arctan\frac{3}{4}$

ដូចនេះ $x = arctan\frac{3}{4}$ ចំពោះ $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

លំហាត់ទី ៦០៤

ដោះស្រាយសមីការ $sinx + cosx = \sqrt{2+sin^{2018}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ $(*)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $sinx + cosx = \sqrt{2}sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$

និង $\sqrt{2+sin^{2018}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} \ge \sqrt{2}$

សមីការ $(*)$ ពិតកាលណា :

$$\begin{cases} \sqrt{2}sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \\ \sqrt{2+sin^{2018}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ sin^{2018}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

យើងបាន $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ sin^{2018}(2k\pi) = 0 \end{cases}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

<u>លំហាត់ទី ៦០៥</u> : បើឫសនៃពហុធា $x^2+ax+b+1=0$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ស្រាយបញ្ជាក់ថា a^2+b^2 មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

ដំណោះស្រាយ

តាង m និង n ជាឫសនៃពហុធា $x^2+ax+b+1=0$

នោះ $m+n=-a, mn=b+1$

យើងបាន $a^2+b^2=(m+n)^2+(mn-1)^2$

$$=m^2+2mn+n^2+m^2n^2-2mn+1$$

$$=\left(m^2+1\right)\left(n^2+1\right)$$

ដោយ a^2+b^2 ជាផលគុណនៃពីរចំនួនគត់ធំជាង 1 នោះ a^2+b^2 មិនមែនជាចំនួនបឋម

លំហាត់ទី ៦០៦

គេអោយ p និង q ជាចំនួនពិតដែល $p\neq 0$ ហើយ a,b,c ជាឫសនៃពហុធា px^3-px^2+qx+q ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=-1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $px^3-px^2+qx+q=p\left(x^3-x^2+\frac{q}{p}x+\frac{q}{p}\right)=p(x-a)(x-b)(x-c)$

យើងបាន $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=(a+b+c)\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right)=\frac{\frac{q}{p}}{-\frac{q}{p}}=-1$

លំហាត់ទី ៦០៧

ដេរីវេនៃអនុគមន៍បណ្ដាក់

ស្រាយថាបើ $\phi(x)=\psi[f(x)]$ នោះ $\phi'(x)=\psi'[f(x)].f'(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $f(x)=t$ នោះ $f(x+h)=t+\delta t$

យើងបាន $\phi'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\psi[f(x+h)]-\psi[f(x)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\psi(t+\delta t)-\psi(t)}{\delta t}\times\frac{\delta t}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\psi(t+\delta t)-\psi(t)}{\delta t}\times\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ដោយ $h\to 0,\ \delta t\to 0$

យើងបាន $\phi'(x)=\lim\limits_{\delta t\to 0}\dfrac{\psi(t+\delta t)-\psi(t)}{\delta t}\times\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\phi'(x)=\psi'(t).f'(x)$$

ដូចនេះ $\phi'(x)=\psi'[f(x)].f'(x)$

លំហាត់ទី ៦០៨

ទ្រឹស្តីបទ Lebnitz

បើ $y=uv$ ដែល u,v ជាអនុគមន៍នៃ x ស្រាយបញ្ជាក់ថាដេរីវេទី n កំណត់ដោយ $y_n=(uv)_n=u_nv+{}^nC_1{}_{n-1}v_1+{}^nC_2{}_{n-2}v_2+\cdots+{}^nC_nv_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $y=uv$

ធ្វើដេរីវេធៀប x ជាបន្តបន្ទាប់ យើងបាន

$$y_1=u_1v+uv_1$$
$$={}^1C_0u_1v+{}^1C_1uv_1$$
$$y_2=u_2v+2u_1v_1+uv_2$$
$$={}^2C_0u_2v+{}^2C_1u_1v_1+{}^2C_2uv_2$$

ទ្រឹស្តីបទនេះពិតចំពោះ $n=1$ និង $n=2$

ឧបមាថាទ្រឹស្តីបទនេះពិតរហូតដល់ $n=m$ គឺ

$$y_m=(uv)_m={}^mC_0u_mv+{}^mC_1u_{m-1}v_1+{}^mC_2u_{m-2}v_2+\cdots+{}^mC_muv_m$$

ធ្វើដេរីវេ y_m ធៀប x

$\dfrac{d}{dx}y_m=\dfrac{d}{dx}(uv)_m={}^mC_0(u_{m+1}v+u_mv_1)+{}^mC_1(u_mv_1+u_{m-1}v_2)$

$+{}^mC_2(u_{m-1}v_2+u_{m-2}v_3)+\cdots+{}^mC_m(u_1v_m+uv_{m+1})$

$={}^mC_0u_{m+1}v+({}^mC_0+{}^mC_1)u_mv_1+({}^mC_1+{}^mC_2)u_{m-1}v_2+\cdots+{}^mC_muv_{m+1}$

$y_{m+1}=(uv)_{m+1}={}^{m+1}C_0u_{m+1}v+{}^{m+1}C_1u_mv_1+{}^{m+1}C_2u_{m-1}v_2+\cdots$

$+{}^{m+1}C_muv_{m+1}\ \left[\because {}^mC_{r-1}+{}^mC_r={}^{m+1}C_r\right]$

នេះបញ្ជាក់ថា ទ្រឹស្តីបទពិតចំពោះ $n=m+1$ ដែរ

ដូចនេះ បើ $y=uv$ ដែល u,v ជាអនុគមន៍នៃ x ស្រាយបញ្ជាក់ថាដេរីវេទី n កំណត់ដោយ

$y_n=(uv)_n=u_nv+{}^nC_1{}_{n-1}v_1+{}^nC_2{}_{n-2}v_2+\cdots+{}^nC_nv_n$

ឧទាហរណ៍ : បើ $y=x^2e^{2x}$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(y_n)_0=2^{n-2}n(n-1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងយក $u=e^{2x}$ និង $v=x^2$

យើងបាន $u_1 = 2e^{2x}, u_2 = 2^2e^{2x}, u_3 = 2^3e^{2x}, \dots, u_{n-2} = 2^{n-2}e^2x,$
$u_{n-1} = 2^{n-1}e^{2x}, u_n = 2^ne^{2x}$ និង $v_1 = 2x, v_2 = 2, v_3 = 0$
តាមរូបមន្ត Lebnitz
យើងបាន $y_n = {}^nC_0^ne^{2x}\cdot x^2 + {}^nC_1^{n-1}e^{2x}\cdot 2x + {}^nC_2^{n-2}e^2x\cdot 2 +$
$${}^nC_3^{n-3}e^{2x}\cdot 0$$
$$\Rightarrow (y_n)_0 = {}^nC_2^{n-1}e^0 = \frac{n!}{(n-2)!2!}\times 2^{n-1}$$
$$\Rightarrow (y_n)_0 = 2^{n-1}\times\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!2} = 2^{n-2}n(n-1) \text{ ពិត}$$

លំហាត់ទី ៦០៩

ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព :
$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2} \text{ ចំពោះ } n \geq 2 \text{ ។}$$

ដំណោះស្រាយ

តាង $P(n):\ \dfrac{4^n}{n+1} < \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

ចំពោះ $n = 2:\ P(2):\ \dfrac{4^2}{2+1} < \dfrac{4!}{(2)^2}$ ឬ $\dfrac{16}{3} \leq \dfrac{24}{4}$ ពិត

ឧបមាថា $P(m)$ ពិតចំពោះ $n = m \geq 2$

i.e., $\dfrac{4^m}{m+1} < \dfrac{(2m)!}{(m!)^2} \qquad \dots(1)$

ដោយប្រើ (1) យើងនិងស្រាយថា $P(m+1)$ ពិត

ចំពោះ $n = m+1$ យើងបាន

$$\text{L.H.S.} = \frac{4^{m+1}}{m+2} = \frac{4^m}{m+1}\cdot\frac{4(m+1)}{m+2} < \frac{(2m)!}{(m!)^2}\cdot\frac{4(m+1)}{m+2}$$
$$= \frac{(2m)!(2m+1)(2m+2)4(m+1)(m+1)^2}{(2m+1)(2m+2)(m!)^2(m+1)^2(m+2)}$$
$$= \frac{(2(m+1))!}{((m+1)!)^2}\cdot\frac{2(m+1)^2}{(2m+1)(m+2)} < \frac{(2(m+1))!}{((m+1)!)^2}$$
$$\left[\because \frac{2(m+1)^2}{(2m+1)(m+2)} = \frac{2m^2+4m+2}{2m^2+5m+2}\right]$$

លំហាត់ទី ៦១០

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ច្រាស
ទ្រឹស្តីបទ :បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់មួយទល់មួយ កំណត់នៅលើចន្លោះ I និង f មានដេរីវេត្រង់ x_0 ដែល $f(x_0)\neq 0$ នោះអនុគមន៍ច្រាសនៃអនុគមន៍ f មានដេរីវេត្រង់ $f(x_0)$ ដែលដេរីវេរបស់វាត្រង់ $f(x_0)$ នោះគឺ $\dfrac{1}{f'(x_0)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

មុនស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ យើងគួរដឹងថាបើដែនកំណត់នៃ f គឺ X និងរ៉ង់របស់វាគឺ Y នោះអនុគមន៍ច្រាស gនៃ f ដែលជាទូទៅតាងដោយ f^{-1} ជាអនុគមន៍មានដែនកំណត់ Y និងរ៉ង់ X ដែល $f(x)=y\Leftrightarrow g(y)=x$ ។ ម្តងទៀត g កើតមានកាលណា f មួយទល់មួយ ។

តាង $y=f(x)$ និង $y_0=f(x_0)$

ដោយ f មានដេរីវេត្រង់ x_0 នោះ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$

ឬ $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)\left[f'(x_0)+\lambda(x)\right]$

ដែល $\lambda(x)\to 0$ ពេល $x\to x_0$

ម្យ៉ាងទៀត $g(y)-g(y_0)=(x-x_0)$ (តាមនិយមន័យនៃ g)

នោះ
$$\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}=\frac{x-x_0}{y-y_0}=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$$
$$=\frac{1}{f'(x_0)+\lambda(x)}$$

យើងមើលឃើញដោយងាយថា បើ $y\to y_0$ នោះ $x\to x_0$

ជាការពិត f ជាប់ត្រង់ x_0 នាំអោយ $g=f^{-1}$ ជាប់ត្រង់ $f(x_0)=y_0$ ហើយជាលទ្ធផល

$$g(y)\to g(y_0) \text{ ពេល } y\to y_0$$

នោះ
$$\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{1}{f'(x_0)+\lambda(x)}$$
$$=\frac{1}{f'(x_0)}$$

ដូចនេះ $g'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$ ឬ $g'\{f(x_0)\}=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

លំហាត់ទី ៦១១

ក) កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដោយដឹងថា $3^x+3^y=30$ និង $log_3 x-log_3 y=1$ ។
ខ) ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនពិតនូវសមីការ $\sqrt{1-x^2}=3\cdot x-4\cdot x^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) កំណត់ចំនួនពិត x និង y ដោយដឹងថា $3^x+3^y=30$ និង $log_3 x-log_3 y=1$

លក្ខខណ្ឌ : $x,y>0\Leftrightarrow x,y\in(0,\infty)$

$log_3 x-log_3 y=1\Leftrightarrow log_3\dfrac{x}{y}=1$

$$\left.\begin{matrix}3^x+3^y=30\\ x=3\cdot y\end{matrix}\right\}\Rightarrow 3^{3\cdot y}+3^y=30\quad(1)$$

តាង $a=3^y, a>0$

$(1)\Rightarrow a^3+a-30=0$

$\Rightarrow a^3-27+a-3=0$

$(a-3)\left(a^2+3a+10\right)=0$

$\Rightarrow a=3$

ដោយ $3^y=3$ នោះ $y=1, x=3$

ខ) ដោះស្រាយក្នុងសំណុំចំនួនពិតនូវសមីការ $\sqrt{1-x^2}=3\cdot x-4\cdot x^3$

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ $\begin{cases}1-x^2\ge 0\\ 3x-4x^3\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in[-1,1]\\ x\in\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]\end{cases}$

$\Rightarrow x\in\left[-1,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

លើកអង្គសងខាងជាការេ : $1-x^2=9\cdot x^2-24\cdot x^4+16\cdot x^6$

$16\cdot x^6-8\cdot x^4-16\cdot x^4+8\cdot x^2+2\cdot x^2-1=0$

$\Leftrightarrow 8\cdot x^4\left(2x^2-1\right)-8\cdot x^2\left(2x^2-1\right)+\left(2x^2-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(2\cdot x^2-1\right)\left(8\cdot x^4-8\cdot x^2+1\right)=0$

♦ ចំពោះ $2\cdot x^2-1=0\Rightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ដោយ $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\in\left[-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ជាចម្លើយ

$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\notin\left[-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ មិនមែនជាចម្លើយ

♦ ចំពោះ $8\cdot x^4-8\cdot x^2+1=0$

តាង $a=x^2, a\in(0,1]$

គេបាន $8\cdot a^2-8\cdot a+1=0\Rightarrow a=\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$

បើ $a=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ នោះ $x^2=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$x_1=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}>\frac{\sqrt{3}}{2}$ មិនមែនជាចម្លើយ

$x_2=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ជាចម្លើយ

បើ $a=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ នោះ $x^2=\frac{2\sqrt{2}}{4}\Rightarrow x_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$x_3=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$ ជាចម្លើយ

$x_4=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ជាចម្លើយ

ដូចនេះ សំណុំចម្លើយគឺ $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right\}$

លំហាត់ទី ៦១២

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ $a_1,a_2,b_1,b_2\in(1,\infty)$ វិសមភាពខាងក្រោមពិត :

$$\frac{1}{\sqrt{1+log_{a_1}\sqrt{b_1}}}+\frac{1}{\sqrt{1+log_{a_2}\sqrt{b_2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+log_{b_1}a_1^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+log_{b_2}a_2^2}}\le 2\cdot\sqrt{2}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះ $a_1, b_i \in (1,\infty), (\forall) i \in \{1,2\} \Rightarrow log_{a_1} b_1 > 0; log_{a_2} b_2 > 0$

$log_{a_1}\sqrt{b_1} = \frac{1}{2} log_{a_1} b_1$

$log_{b_1} a_1^2 = 2 \cdot log_{b_1} a_1$

យើងបាន

$$\frac{1}{\sqrt{1+log_{a_1}\sqrt{b_1}}} + \frac{1}{\sqrt{1+log_{b_1}a_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\cdot log_{a_1}b_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+2\cdot log_{b_1}a_1}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+log_{a_1}b_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{log_{a_1}b_1}}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{log_{a_1}b_1}}{\sqrt{2+log_{a_1}b_1}} \le \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad (1)$$

(ព្រោះ $\frac{x+y}{2} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, (\forall) x,y \in (0,\infty) \Leftrightarrow \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\sqrt{2}}{2}$)

ស្រាយដូចគ្នា $\frac{1}{\sqrt{1+log_{a_2}\sqrt{b_2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+log_{b_2}a_2^2}} \le \sqrt{2} \quad (2)$

បូក (1) និង (2)

$$\frac{1}{\sqrt{1+log_{a_1}\sqrt{b_1}}} + \frac{1}{\sqrt{1+log_{a_2}\sqrt{b_2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+log_{b_1}a_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+log_{b_2}a_2^2}} \le$$

$2 \cdot \sqrt{2}$ ពិត

លំហាត់ទី ៦១៣

ដោះស្រាយវិសមីការ

$$log_{\sqrt{5}}\left(3^{x^2-x-1}+2\right) + log_5\left(3^{x^2-x-1}+2\right) + log_{25}\left(3^{x^2-x-1}+2\right) + log_{625}\left(3^{x^2-x-1}+2\right) + \ldots + log_{5^{2^k}}\left(3^{x^2-x-1}+2\right) + \ldots \le 4$$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $3^{x^2-x-1}+2 = y$

វិសមីការទៅជា

$$log_{\sqrt{5}}y + log_5 y + log_{25}y + log_{625}y + \ldots + log_{5^{2^k}}y + \ldots \le 4$$

$$2log_5 y + log_5 y + \frac{1}{2}log_5 y + \frac{1}{4}log_5 y + \ldots + \frac{1}{2^k}log_5 y + \ldots \le 4$$

$$\left(2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\ldots\right)log_5 y \le 4 \quad (*)$$

ផលបូកស្វុីតធរណីមាត្រមិនកំណត់ មានតួទី ១ 2 និងផលធៀបរួម $\frac{1}{2}$ គឺ $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\ldots=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$

$(*)\Rightarrow 4log_5 y\le 4$ ឬ $log_5\left(3^{x^2-x-1}+2\right)\le 1$

នោះ: $0<3^{x^2-x-1}+2\le 5$

$3^{x^2-x-1}\le 3$

$x^2-x-1\le 1$

$(x-2)(x+1)\le 0$

ដូចនេះ: $x\in[-1,2]$

ចងចាំ!

- $log_{\alpha^m}\beta^n=\frac{n}{m}log_\alpha\beta$
- ផលបូក n តួនៃស្វុីតធរណីមាត្រកំណត់ : $S_n=\frac{u_1(r^n-1)}{r-1}=\frac{u_1(1-r^n)}{1-r}$
- ផលបូកនៃស្វុីតធរណីមាត្រមិនកំណត់ : $S_\infty=\frac{u_1}{1-r},\ |r|<1$ ។

លំហាត់ទី ៦១៤

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $ln(1+x)\ge x-\frac{x^2}{2},\ (\forall)x\in[0,\infty)$ ។

ខ) គេអោយ $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ ជាអនុគមន៍ជាប់ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}ln\left(1+\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $ln(1+x)\ge x-\frac{x^2}{2},\ (\forall)x\in[0,\infty)$

តាងអនុគមន៍ $g:\ [0,\infty)\to\mathbb{R},g(x)=ln(x+1)-x+\frac{x^2}{2}$

ដេរីវេ $g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1+x=\dfrac{x^2}{x+1}$

ដោយ $x\in[0,\infty)\Rightarrow g'(x)\geq 0$ នោះ g ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត

គេបាន $g(x)\geq g(0)=0,(\forall)x\in[0,\infty)$

នោះ $ln(x+1)-x+\dfrac{x^2}{2}\geq 0$

ដូចនេះ $ln(x+1)\geq x-\dfrac{x^2}{2},(\forall)x\in[0,\infty)$ ពិត

ខ) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} ln\left(1+\dfrac{1}{n}\cdot f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)dx$

តាមសំណួរ ក)$\Rightarrow ln\left(1+\dfrac{1}{n}\cdot f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right)\geq\dfrac{1}{n}\cdot f\left(\dfrac{k}{n}\right)-\dfrac{f^2\left(\dfrac{k}{n}\right)}{2},(\forall)k\in\{1,2,3,...,n\}$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n} ln\left(1+\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f^2\left(\frac{k}{n}\right)=a_n-\frac{1}{2n}b_n$$

ដែល $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}\cdot f\left(\dfrac{k}{n}\right)$, $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}f^2\left(\dfrac{k}{n}\right)$

ដោយ f ជាអនុគមន៍ជាប់$\Rightarrow f,f^2$ មានអាំងតេក្រាលនៅចន្លោះ $[0,1]$

$\Rightarrow a_n\to\int_0^1 f(x)dx$ និង $b_n\to\int_0^1 f^2(x)dx$ ហើយ $a_n-\dfrac{1}{2n}b_n\to\int_0^1 f(x)dx$

នោះ $\sum\limits_{k=1}^{n} ln\left(1+\dfrac{1}{n}\cdot f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right)\geq\int_0^1 f(x)dx \quad (1)$

ម្យ៉ាងទៀត $ln(x+1)\leq x,(\forall)x\in[0,\infty)\Rightarrow ln\left(1+\dfrac{1}{n}\cdot f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right)\leq\dfrac{1}{n}\cdot f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

នោះ $\sum\limits_{k=1}^{n} ln\left(1+\dfrac{1}{n}\cdot f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right)\leq\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}\cdot f\left(\dfrac{k}{n}\right)=a_n\to\int_0^1 f(x)dx \quad (2)$

តាម (1) និង (2) : $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} ln\left(1+\dfrac{1}{n}\cdot f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right)=\int_0^1 f(x)dx$ ពិត

លំហាត់ទី ៦១៥

គណនា $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-\sqrt[3]{x+6}-\sqrt[4]{x-1}}{3^x+4^x-5^x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យក $K = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{4x+1} - \sqrt[3]{x+6} - \sqrt[4]{x-1}}{3^x + 4^x - 5^x}$

តាង $y = x - 2 \to 0 \Rightarrow x = y + 2$

$$K = \lim_{y \to 0} \frac{\sqrt{4y+9} - \sqrt[3]{y+8} - \sqrt[4]{y+1}}{9 \cdot 3^y + 16 \cdot 4^y - 25 \cdot 5^y}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{3 \cdot \sqrt{\frac{4}{9} \cdot y + 1} - 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{y}{8} + 1} - \sqrt[4]{y+1}}{y} \cdot \frac{1}{\frac{9 \cdot 3^y}{y} + \frac{16 \cdot 4^y}{y} - \frac{25 \cdot 5^y}{y}}$$

$$= \lim_{y \to 0} \left[\frac{3\left(\sqrt{\frac{4}{9} \cdot y + 1} - 1\right)}{y} - 2 \cdot \frac{\sqrt[3]{\frac{y}{8} + 1} - 1}{y} - \frac{\sqrt[4]{y-1}}{y} \right] \cdot$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{1}{9 \cdot \frac{3^y - 1}{y} + 16 \cdot \frac{4^y}{-} 1y - 25 \cdot \frac{5^y - 1}{y}}$$

$$= \left(3 \cdot \lim_{y \to 0} \frac{\left(\sqrt{\frac{4}{9} \cdot y} - 1\right)}{\frac{4}{9} \cdot y} \cdot \frac{4}{9} - 2 \cdot \lim_{y \to 0} \frac{\sqrt[3]{\frac{y}{8} + 1} - 1}{\frac{1}{8} \cdot y} - \lim_{y \to 0} \frac{\sqrt[4]{y-1}}{y} \right) \cdot$$

$$\frac{1}{9 \cdot ln3 + 16 \cdot ln4 - 25 \cdot ln5}$$

$$= \left(3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{1}{9 \cdot ln3 + 32 \cdot ln2 - 25 \cdot ln5}$$

ដូចនេះ $K = \frac{1}{3(9 \cdot ln3 + 32 \cdot ln2 - 25 \cdot ln5)}$

លំហាត់ទី ៦១៦ ៖

ក) ចំពោះ $a > 0$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim_{n \to \infty} \frac{1 + 2^a + 3^a + \ldots + n^a}{n^{a+1}} = \frac{1}{a+1}$ ។

ខ) គណនា $\lim_{n \to \infty} \frac{1 + \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3} + \ldots + \sqrt[4]{n}}{n \cdot \sqrt[4]{n^3} \left(\sqrt[4]{(n+1)^2 + 1} - \sqrt[4]{n^2 + 1} \right)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ចំពោះ $a>0$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^a+3^a+\ldots+n^a}{n^{a+1}}=\dfrac{1}{a+1}$

តាងស្វ៊ីតចំនួនពិត $a_n=1+2^a+3^a+\ldots+n^a$ និង $b_n=n^{a+1}$, $a>0$

តាមទ្រឹស្តីបទ Stolz-Cesaro:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^a}{(n+1)^{a+1}-n^{a+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^a\cdot\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{a+1}-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^a\cdot\frac{1}{\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a+1}-1}{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{a+1}$$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^r-1}{x}=r, r>0$

ខ) គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}+\ldots+\sqrt[4]{n}}{n\cdot\sqrt[4]{n^3}\left(\sqrt[4]{(n+1)^2+1}-\sqrt[4]{n^2+1}\right)}$

តាមសំណួរ ក) យើងបាន $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}+\ldots+\sqrt[4]{n}}{n^{1+\frac{1}{4}}}=\dfrac{4}{5}$;

យើងគណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{(n+1)^2+1}-\sqrt[4]{n^2+1}\right)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\left(\sqrt[4]{(n+1)^2+1}\right)^3+\left(\sqrt[4]{(n+1)^2+1}\right)^2\cdot\left(\sqrt{n^4+1}\right)}{(n+1)^2-n^2}$$

$$+\frac{\left(\sqrt[4]{(n+1)^2+1}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{n^2+1}\right)^2+\left(\sqrt[4]{n^2+1}\right)^3}{(n+1)^2-n^2}=\frac{4}{2}=2$$

សរុបមក $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}+\ldots+\sqrt[4]{n}}{n\cdot\sqrt[4]{n^3}\left(\sqrt[4]{(n+1)^2+1}-\sqrt[4]{n^2+1}\right)}=\dfrac{4}{5}\cdot 2=\dfrac{8}{5}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}+\ldots+\sqrt[4]{n}}{n\cdot\sqrt[4]{n^3}\left(\sqrt[4]{(n+1)^2+1}-\sqrt[4]{n^2+1}\right)}=\dfrac{8}{5}$

លំហាត់ទី ៦១៧

រកគ្រប់ $b\in\mathbb{N}$ ដើម្បីអោយ $\sqrt[3]{2+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{b}}$ ជាចំនួនគត់ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $\alpha=\sqrt[3]{2+\sqrt{b}},\ \beta=\sqrt[3]{2-\sqrt{b}}$ និង $n=\alpha+\beta$

យើងបាន $n^3=(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3(\alpha+\beta)\alpha\beta=4+3n\sqrt[3]{4-b}$

នាំអោយ $4-b=\dfrac{1}{27}\left(n^2-\dfrac{4}{n}\right)^3=\dfrac{1}{27}\left(n^6-12n^3+48-\left(\dfrac{4}{n}\right)^3\right)$

បើ b និង n សុទ្ធតែជាចំនួនគត់ នោះ $\dfrac{4}{n}$ ត្រូវតែជាចំនួនគត់ ហើយ n អាច

យកតំលៃ $n=\pm1,\pm2,\ \pm4$

- បើ $n=-1,2$ ឬ 4 នោះ $n^2-\dfrac{4}{n}$ មិនចែកដាច់នឹង 3 ហើយ b ជាប្រភាគ ។
- បើ $n=1$ នោះ $b=5$
- បើ $n=-2$ នោះ $b=-4$
- បើ $n=4$ នោះ $b=-121$

តែ $b>0$ នោះចម្លើយតែមួយគត់គឺ $b=5$

ដូចនេះ $b=5$

លំហាត់ទី ៦១៨

គណនា $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{sin(2020x)}{(1+2^x)sinx}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{sin(2020x)}{(1+2^x)sinx}dx&=\int_0^{\pi}\frac{sin(2020x)}{(1+2^x)sinx}dx+\int_0^{\pi}\frac{sin(-2020x)}{(1+2^{-x})sin(-x)}dx\\&=\int_0^{\pi}\frac{sin(2020x)}{(1+2^x)sinx}dx+\int_0^{\pi}\frac{2^xsin(2020x)}{(1+2^x)sinx}dx\\&=\int_0^{\pi}\frac{sin(2020x)}{sinx}dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin(2020x)}{sinx}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin2020(\pi-x)}{sin(\pi-x)}\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin(2020x)}{sinx}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin(2020x)}{sinx}dx=0\end{aligned}$$

ដូចនេះ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{sin(2020x)}{(1+2^x)sinx}dx=0$

លំហាត់ទី ៦១៩

គេអោយស្វ៊ីតចំនួនពិតវិជ្ជមាន $a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ កំណត់ដោយ $a_0 = 1$ និង

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{បើ } a_n \text{ គូ} \\ \frac{1}{2}(a_n + 2017) & \text{បើ } a_n \text{ សេស} \end{cases}$$ ។

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតខួប ។

ខ) ចូររក a_{2017} ។

ដំណោះស្រាយ

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតខួប

យើងនិងស្រាយតាមអនុមាណរួមគណិតវិទ្យាថា គ្រប់តួ a_n គឺជាចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n < 2017$

- ចំពោះ $n = 0$: $a_0 = 1 < 2017$ ពិត

ឧបមាថា $a_n < 2017$ ពិត

យើងបាន $$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n < \frac{1}{2}\cdot 2017 < 2017 & \text{បើ } a_n \text{ គូ} \\ \frac{1}{2}(a_n + 2017) < \frac{1}{2}(2017 + 2017) < 2017 & \text{បើ } a_n \text{ សេស} \end{cases}$$

ក្នុងករណីទាំងពីរ a_{n+1} ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n < 2017$

នោះ គ្រប់តួ a_n គឺជាចំនួនគត់វិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_n < 2017$

ដោយសារតែតួ a_n នីមួយៗស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $\{1, 2, ..., 2017\}$ នោះតួទី ២០១៨ និងមានតម្លៃដូចតួណាមួយ ។

និងកើតមានសន្ទស្សន៍ r និង s ដែល $a_r = a_s$

តែតាមទំនាក់ទំនងកំណើនគេបាន $a_{r+1} = a_{s+1}, a_{r+2} = a_{s+2}$ ហើយទូទៅជាងនេះទៀតគឺ $a_{r+i} = a_{s+i}$ ចំពោះគ្រប់ $i \geq 0$

ដូចនេះ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតខួប ដែលមានខួប $s - r$

ខ) ចូររក a_{2017}

តាមទំនាក់ទំនងកំណើន យើងបាន $$a_n = \begin{cases} 2a_{n+1} & \text{បើ } a_n \text{ គូ} \\ 2a_{n+1} - 2017 & \text{បើ } a_n \text{ សេស} \end{cases}$$

នាំអោយ $a_0 = 2a_1 = 2^2a_2 = \cdots = 2^{2016}a_{2016} \mod 2017$
ដោយ 2017 ជាចំនួនបឋម នោះតាមទ្រឹស្តីបទ Fermat:

$$2^{2016} \equiv 1 \mod 2017$$

នោះ $a_{2016} \equiv a_0 = 1 \mod 2017$
តែ a_n សុទ្ធតែជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចជាង 2017
នាំអោយ $a_{2016} = 1$
យើងបាន $a_{2017} = \frac{1}{2}(1+2017) = 1009$
ដូចនេះ $a_{2017} = 1009$

លំហាត់ទី ៦២០

គេអោយ $\{a_n\}$ ជាស្វ៊ីតកំណត់ដោយ $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2$ និង

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + 1$$

ចំពោះ $n \geq 3$ ។ រក a_{2023} ។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះទំនាក់ទំនងកំណើន $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + 1$
យើងអាចសរសេរ $a_n - a_{n-2} = a_{n-1} - a_{n-3} + 1 = a_{n-2} - a_{n-4} + 2 = \cdots = a_2 - a_0 + (n-2) = n$

នោះ $a_{2n+1} = a_1 + \sum_{k=1}^{n}(a_{2k+1} - a_{2k-1})$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 1 + 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n = (n+1)^2$$

ដូចនេះ $a_{2023} = a_{2\cdot1011+1} = (1011+1)^2 = 1012^2$
គំនិត! សិស្សអាចប៉ាន់ស្មានចម្លើយ ដើម្បីរករូបមន្តមកគណនា ដោយរកប៉ុន្មានតួដំបូងនៃស្វ៊ីត :
តួនៃស្វ៊ីតមានដូចជា : $0, 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, , 30, 36, 42, 49, \ldots$
យោងលើការគណនានេះ តួដែលមានសន្ទស្សន៍សេសគឺ $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$
យើងអាចទាញសន្និដ្ឋានថា រូបមន្តគឺ $a_{2n+1} = (n+1)^2$ ។

លំហាត់ទី ៦២១

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន

ដំណោះស្រាយ

ឧបមាថា $\sqrt{3}$ ជាចំនួនសនិទាន
នោះ $\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ ដែល $(a,b)=1$
ដោយ $\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ នោះ $\sqrt{3}b=a$
លើកអង្គសងខាងជាការេ $3b^2=a^2$
▷ ករណី b ជាចំនួនគត់គូ
នោះ a ជាចំនួនគត់គូដែរ
នាំឱ្យគេមិនអាចទទួលបាន $(a,b)=1$
នាំឱ្យការឧបមាមិនពិត ក្នុងករណីនេះ
▷ ករណី b ជាចំនួនគត់សេស
នោះ $3b^2$ ជាចនួនគត់សេស ហើយ a^2 ត្រូវតែជាចំនួនគត់សេស
យក $a=2m+1, b=2n+1$ នោះយើងអាចសរសេរ $a^2=3b^2$ ឡើងវិញទៅជា

$$(2m+1)^2=3(2n+1)^2$$
$$4m^2+4m+1=12n^2+12n+3$$
$$2m^2+2m=6n^2+6n+1$$

ដោយអង្គទី១ ជាចំនួនគត់គូ និង អង្គទី២ ជាចំនួនគត់សេស នោះសមភាពខាងលើមិនពិត
នាំឱ្យការឧបមាមិនពិត ក្នុងករណីនេះ
សរុបមកទាំងពីរករណីខាងលើគឺមិនពិត
ដូចនេះ $\sqrt{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន

លំហាត់ទី ៦២២

នៅដើមឆ្នាំ ២០១១ នេះ ចំនួនភ្ញៀវទេសចរដែលបានមកទស្សនាប្រាសាទអង្គរវត្តស្មើនឹង $pq\left(p^2-q^2\right)$ ដែល p និង q ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ហើយ $p>q$ ។ គេស្រង់ឈ្មោះទេសចរទាំងនោះ
ដាក់ក្នុងបញ្ជីមួយដែលមានចុះលេខរៀងត្រឹមត្រូវ ។
បង្ហាញថា លេខរៀងរបស់ទេសចរចុងក្រោយគេបង្អស់ជាពហុគុណនៃ 3 ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា លេខរៀងនៃភ្ញៀវទេសចរចុងក្រោយគេបង្អស់ជាពហុគុណនៃ 3 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ $p,q,p>q$:
គេត្រូវតែបង្ហាញថា $A=pq\left(p^2-q^2\right)$ ជាពហុគុណនៃ 3 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ

$p,q,p>q$ ។
គេមាន $A=pq\left(p^2-q^2\right)=pq(p-q)(p+q)$
ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ p,q គេអាចមានពីរករណី :
$p=3a$ ឬ $p=3a+1$ ឬ $p=3a+2$ ដែល a ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ
$q=3b$ ឬ $q=3b+1$ ឬ $q=3b+2$ ដែល b ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ
គេសិក្សាករណីនីមួយៗដូចខាងក្រោម :
- បើ $p=3a \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ 3
- បើ $p=3a+1$
  - បើ $q=3b \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ 3
  - បើ $q=3b+1 \Rightarrow p-q=3(a-b) \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ 3
  - បើ $q=3b+2 \Rightarrow p-q=3(a+b+1) \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ 3
- បើ $p=3a+2$
  - បើ $q=3b \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ 3
  - បើ $q=3b+1 \Rightarrow p+q=3(a+b+1) \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ 3
  - បើ $q=3b+2 \Rightarrow p-q=3(a-b) \Rightarrow A$ ជាពហុគុណនៃ 3

ដូចនេះ លេខរៀងរបស់ទេសចរចុងក្រោយគេបង្អស់ជាពហុគុណនៃ 3

លំហាត់ទី ៦២៣

ចំណុច $M_i(x,y,z)$ មានកូអរដោនេជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3$ ។ បង្ហាញថា មានចំណុច $M_i(x,y,z)$ ច្រើនរាប់មិនអស់នៅក្នុងលំហ ។

ដំណោះស្រាយ

ដើម្បីបំបាត់ x^3 និង z^3 ពីអង្គទី២ គេអាចយក $z=-x$ ។
នោះគេបាន $2x^2+y^2=y^3 \Leftrightarrow 2x^2=(y-1)y^2$
$\Leftrightarrow x^2=\dfrac{y-1}{2}\cdot y^2$
សមីការផ្ទៀងផ្ទាត់លុះត្រាតែ $\dfrac{y-1}{2}$ ជាការេប្រាកដ គឺថា $\dfrac{y-1}{2}=k^2$,$k\in\mathbb{Z} \Rightarrow y=2k^2+1$
គេបាន $2x^2=\left(2k^2+1-1\right)\left(2k^2+1\right)^2$ ឬ $x^2=k^2\left(2k^2+1\right)^2$
ហើយ $x=\pm k\left(2k^2+1\right), y=2k^2+1, z=\pm k\left(2k^2+1\right)$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$ ។
ដូចនេះ មានចំណុច $M_i(x,y,z)$ ច្រើនរាប់មិនអស់នៅក្នុងលំហ

លំហាត់ទី ៦២៤

ស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1 = 1, u_2 = 1$ និង $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ ចំពោះ $n \geq 2$ ។ បង្ហាញថា $u_{2011}u_{2012} - u_{2010}u_{2013} = 1$ ហើយ $u_{1042012}u_{1042013} - u_{1042011}u_{1042014} = -1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដំបូងគេត្រូវបង្ហាញថា $u_{n+1}u_{n+2} - u_n u_{n+3} = (-1)^n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

- ចំពោះ $n = 1$ គេបាន $u_2u_3 - u_1u_4 = 1\cdot 2 - 1\cdot 3 = (-1)^1$ ពិត

- ឧបមាថាសមភាពពិតដល់ $n = p$ គឺថា $u_{p+1}u_{p+2} - u_p u_{p+3} = (-1)^p$

- សិក្សាចំពោះ $n = p+1$

$u_{p+1+1}u_{p+2+1} - u_{p+1}u_{p+3+1} = u_{p+2}u_{p+3} - u_{p+1}u_{p+4}$

$u_{p+2}u_{p+3} - u_{p+1}u_{p+4} = u_{p+2}\left(u_{p+2} + u_{p+1}\right) - u_{p+1}\left(u_{p+3} + u_{p+2}\right)$

$= \left(u_{p+2}\right)^2 + u_{p+2}u_{p+1} - u_{p+1}\left(u_{p+2} + u_{p+2} + u_{p+1}\right) = \left(u_{p+2}\right)^2 - \left(u_{p+1}\right)^2 - \left(u_{p+1}u_{p+2}\right)$

$= \left(u_{p+2} - u_{p+1}\right)\left(u_{p+2} + u_{p+1}\right) - \left(u_{p+1}u_{p+2}\right)$

$= \left(u_p + u_{p+1} - u_{p+1}\right)\left(u_{p+3}\right) - \left(u_{p+1}u_{p+2}\right) = u_p u_{p+3} - u_{p+1}u_{p+2}$

$= (-1)\left(u_{p+1}u_{p+2} - u_p u_{p+3}\right) = (-1)(-1)^p = (-1)^{p+1}$

បញ្ជាក់ថាសមភាពពិតចំពោះ $n = p+1$ ។

ដូចនេះ $u_{n+1}u_{n+2} - u_n u_{n+3} = (-1)^n$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

- បង្ហាញថា $u_{2011}u_{2012} - u_{2010}u_{2013} = 1$

ដោយយក $n = 2010$ នោះគេបាន $u_{2011}u_{2012} - u_{2010}u_{2013} = (-1)^{2010} = 1$

- បង្ហាញថា $u_{1042012}u_{1042013} - u_{1042011}u_{1042014} = -1$

ដោយយក $n = 1042011$ នោះ $u_{1042012}u_{1042013} - u_{1042011}u_{1042014} = (-1)^{1042011} = -1$

លំហាត់ទី ៦២៥

ស្វ៊ីត (I_k) កំណត់ដោយ $I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^k x dx$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k ។ អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(k) = (k+1)I_k I_{k+1}$ ។

ក. កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង I_k និង I_{k+2} ។

ខ. ប្រៀបធៀប $f(k)$ និង $f(k+1)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k ។ គណនាតម្លៃ $f(2011)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង I_k និង I_{k+2}

គេមាន $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{k-1}xsinxdx = \left[-cosxsin^{k-1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} +$

$(k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{k-2}xcos^2xdx$

$I_k = (k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{k-2}x\left(1-sin^2x\right)dx = (k-1)I_{k-2} - (k-1)I_k$

$\Rightarrow kI_k = (k-1)I_{k-2}$

$\Rightarrow (k+2)I_{k+2} = (k+1)I_{k+2-2} \Rightarrow (k+2)I_{k+2} = (k+1)I_k$

ខ. ប្រៀបធៀប $f(k)$ និង $f(k+1)$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ k

គេមាន

$f(k+1) = (k+1+1)I_{k+1}I_{k+1+1}$

$f(k+1) = (k+2)I_{k+1}I_{k+2} \quad (1)$

តែ $(k+2)I_{k+2} = (k+1)I_k \Rightarrow I_{k+2} = \dfrac{k+1}{k+2}I_k$

តាម (1) គេបាន $f(k+1) = (k+2)I_{k+1}\cdot\dfrac{k+1}{k+2}I_k$

$f(k+1) = (k+1)I_{k+1}I_k$

ដោយ $f(k) = (k+1)I_kI_{k+1}$ ហើយ $(k+1) = (k+1)I_kI_{k+1}$

នោះគេទាញបាន $f(k+1) = f(k), \forall k \in \mathbb{N}$

គណនាតម្លៃ $f(2011)$:

ដោយ $f(k+1) = f(k), \forall k \in \mathbb{N}$ នោះគេអាចសរសេរ :

$f(k) = f(k-1) = f(k-2) = \cdots = f(2) = f(1) = (1+1)I_1I_2 = 2I_1I_2 \quad (2)$

តែ $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx = [-cos]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xdx = (1/2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos2x)dx = (1/2)[x-(1/2)sin2x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

តាម (2) គេបាន $f(k) = \pi/2 \Rightarrow f(2011) = \pi/2$

លំហាត់ទី ៦២៦

$P_n(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $P_n(x)=-2xP_{n-1}(x)+P'_{n-1}(x)$ ។
១- បង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=e^{-x^2}$ កំណត់ដោយ $y^{(n)}=e^{-x^2}P_n(x)$ ។
២- ទាញបញ្ជាក់ថា $P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$ ហើយ $P''_n(x)-2xP'_n(x)+2nP_n(x)=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

$P_n(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $P_n(x)=-2xP_{n-1}(x)+P'_{n-1}(x)$ ។
១- បង្ហាញថាដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=e^{-x^2}$ កំណត់ដោយ $y^{(n)}=e^{-x^2}P_n(x)$
- ចំពោះ $n=1$ គេបាន $y'=(-2x)e^{-x^2}=e^{-x^2}P_1(x)$
- ឧបមាថាសមភាពពិតរហូតដល់ $n=k$ គឺថា $y^{(k)}=e^{-x^2}P_k(x)$ (1)
- សិក្សាចំពោះ $n=k+1$: រកដេរីវេអង្គទាំងពីររបស់ (1):
$y^{k+1}=e^{-x^2}\left(-2xP_k(x)+P'_k(x)\right)=e^{-x^2}P_{k+1}(x)$ ពិត
ដូចនេះ ដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $y=e^{-x^2}$ កំណត់ដោយ $y^{(n)}=e^{-x^2}P_n(x)$
២- ទាញបញ្ជាក់ថា $P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$ ហើយ $P''_n(x)-2xP'_n(x)+2nP_n(x)=0$
គេមាន $y'=(-2x)e^{-x^2}=-2xy\Rightarrow y'+2xy=0$ (2)
ដោយរកដេរីវេអង្គទាំងពីររបស់ (2) ចំនួន n ដង និង ប្រើរូបមន្ត Leibniz:
$(fg)^{(n)}=f^{(n)}g+C(n,1)f^{(n-1)}g'+\cdots+C(n,p)f^{(n-p)}g^{(p)}+\cdots+fg^{(n)}$
$=\sum_{i=0}^{n}C(n,i)f^{(n-i)}g^{(i)}$
គេបាន $y^{(n+1)}+2(xy)^{(n)}=y^{(n+1)}+2xy^{(n)}+2ny^{n-1}=0$
ឬ $e^{-x^2}(P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x))=0$
$\Rightarrow P_{n+1}(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$ (3)
តែគេមាន : $P_{n+1}(x)=-2xP_n(x)+P'_n(x)$
តាម (3) គេបាន $-2xP_n(x)+P'_n(x)+2xP_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0$
$P'_n(x)+2nP_{n-1}(x)=0\Rightarrow P'_n(x)=-2nP_{n-1}(x)$
$\Rightarrow P'_{n+1}(x)=-2(n+1)P_n(x)=-2nP_n(x)-2P_n(x)$ (4)
ដោយ $P_{n+1}(x)=-2xP_n(x)+P'_n(x)\Rightarrow P'_{n+1}(x)=-2xP'_n(x)-2P_n(x)+P''_n(x)$ (5)
តាម (4) និង (5) គេបាន $P''_n(x)-2xP'_n(x)+2nP_n(x)=0$

លំហាត់ទី ៦២៧

.គេឱ្យចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b។ កំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនពិតវិជ្ជមាន x, y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $\dfrac{27xy}{(1+2ax)(1+2by)} = \dfrac{1}{ab} + \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$។

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាពមធ្យមនព្វន្ត-មធ្យមធរណីមាត្រ យើងបាន៖

$1+2ax = 1+ax+ax \ge 3\left(a^2x^2\right)^{1/3}$

$1+2by = 1+by+by \ge 3\left(b^2y^2\right)^{1/3}$

និង $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} \ge 3\left(\dfrac{xy}{a^2b^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{27xy}{9(abxy)^{2/3}}$

តែ $9(abxy)^{2/3} = 3\left(a^2x^2\right)^{1/3}\cdot 3\left(b^2y^2\right)^{1/3}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{ab}+\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} \ge \dfrac{27xy}{(1+2ax)(1+2by)}$ (ចំពោះគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន a,b,x,y) (*)

វិសមភាព $(*)$ ក្លាយជាសមភាពកាលណា $ax=1, by=1$ និង $\dfrac{1}{ab}=\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$

គេបាន $x=y=\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}$

- បើ $a \ne b$ សមីការគ្មានចម្លើយ

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $x=y=\dfrac{1}{a}$

លំហាត់ទី ៦២៨

រកគ្រប់ចំនួនពិត x ផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមីការ $2|x-|x+|x-1||| > |x+|x-|x+1|||$។

ដំណោះស្រាយ

យើងតាងអង្គខាងឆ្វេង និង អង្គខាងស្តាំនៃវិសមីការដោយ $L(x)$ និង $P(x)$ ដែល $L(x) = 2|x-|f(x)||,\ P(x)=|x+|g(x)||$ ។

ដោយ $f(x) = 1+(x-1)+|x-1| \ge 1,\ g(x) = (x+1)-|x+1|-1 \le -1$

នោះ $f(x)$ មានតម្លៃវិជ្ជមាន និង $g(x)$ មានតម្លៃអវិជ្ជមាន

$\Rightarrow L(x) = 2|x-f(x)|,\ P(x) = |x-g(x)|$

យើងបាន $L(x) = 2|x-x+|x-1|| = 2|x-1|$

$P(x) = |x-x+|x+1|| = |x+1|$

វិសមីការដែលឱ្យមកគឺ $L(x)>P(x)$ នោះ $L(x)^2>P(x)^2$

$\Rightarrow 4(x-1)^2>(x+1)^2$

$\Rightarrow 4x^2-8x+4>x^2+2x+1$

$\Leftrightarrow 3x^2-10x+3>0$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$3x^2-10x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ដូចនេះ $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup(3,+\infty)$

លំហាត់ទី ៦២៩

ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនធម្មជាតិ k : $(k!)^{k^2+k+1}$ ជាតួចែកនៃចំនួន $\left(k^3\right)!$។

ដំណោះស្រាយ

ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n,l\geq 1$ យើងបាន៖

$$\binom{ln}{n}=\frac{(ln)!}{n!(ln-n)!}=\frac{(ln)(ln-1)!}{n(n-1)!(ln-n)!}=l\binom{ln-1}{n-1}\quad(1)$$

យើងកំណត់យកចំនួនគត់ធម្មជាតិ $n,m\geq 1$

ជំនួសតម្លៃជាបន្តបន្ទាប់ $l=1,2,3,\dots,m$ រួចគុណអង្គសងខាងនៃ (1)

$$\prod_{l=1}^{m}\binom{ln}{n}=\prod_{l=1}^{m}\left(l\binom{ln-1}{n-1}\right)$$

$$=\left(\prod_{l=1}^{m}l\right)\left(\prod_{l=1}^{m}\binom{ln-1}{n-1}\right)\quad(2)$$

យើងបំលែងអង្គខាងឆ្វេងនៃសមភាព (2)

$$\prod_{l=1}^{m}\binom{ln}{n}=\frac{n!}{n!0!}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!}\cdot\frac{(3n)!}{(2n)!n!}\cdots\frac{(mn)!}{n!((m-1)n)!}$$

$$=\frac{(mn)!}{(n!)^m}\quad(3)$$

តាម (2) និង (3) គេបាន $\dfrac{(mn)!}{(n!)^m\cdot m!}=\prod_{l=1}^{m}\binom{ln-1}{n-1}\quad(4)$

នោះចំពោះគូនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិ $m,n \geq 1$ ផលចែក $\dfrac{(mn)!}{(n!)^m \cdot m!}$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ
តាង k ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ
ជំនួសក្នុង (4) ដោយ $m=n=k$ និង $m=k^2, n=k$ គេបានពីរចំនួនគត់ធម្មជាតិតាង
ដោយ $A_1(k), A_2(k)$:

$$\frac{(k^2)!}{(k!)^k \cdot k!} = A_1(k),\ \frac{(k^3)!}{(k!)^{k^2} \cdot (k^2)!} = A_2(k)$$

គុណអង្គ និង អង្គយើងបាន៖

$$\frac{(k^3)!}{(k!)^{k^2+k+1}} = A_1(k) \cdot A_2(k)$$

ដូចនេះ $(k!)^{k^2+k+1}$ ជាតួចែកនៃចំនួន $(k^3)!$

<u>សំគាល់</u>:
តាម (4) ជំនួស $n=k, m=k^j$ និងយក $A_j(k)$ ជាលទ្ធផល

$$\Rightarrow \frac{(k^{j+1})!}{(k!)^{k^j} \cdot (k^j)!} = A_j(k) \quad (5)$$

យក $r \geq 1$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ និង ជំនួស $j=1,2,3,\dots,r$ រួចគុណ

$$\Rightarrow \frac{(k^2)!}{(k!)^k \cdot (k)!} \cdot \frac{(k^3)!}{(k!)^{k^2} \cdot (k^2)!} \cdot \frac{(k^4)!}{(k!)^{k^3} \cdot (k^3)!} \cdots \frac{(k^{r+1})!}{(k!)^{k^r} \cdot (k^r)!} = A_1(k) \cdot A_2(k) \cdot A_3(k) \cdots A_r(k)$$

$$\Rightarrow \frac{(k^{r+1})!}{(k!)^{1+k+k^2+\cdots+k^r}}$$

គេអាចបន្ថែមប្រធានថា $(k!)^{1+k+k^2+\cdots+k^r}$ គឺជាតួចែកនៃ $(k^{r+1})!$

លំហាត់ទី ៦៣០

ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើត្រីកោណ ABC មានជ្រុង និងមុំឈម A,B ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $(a^2+b^2)sin(A-B) = (a^2-b^2)sin(A+B)$ នោះវាជាត្រីកោណសមបាត ឬ ត្រីកោណកែង។

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \dfrac{sin(A-B)}{sin(A+B)}$

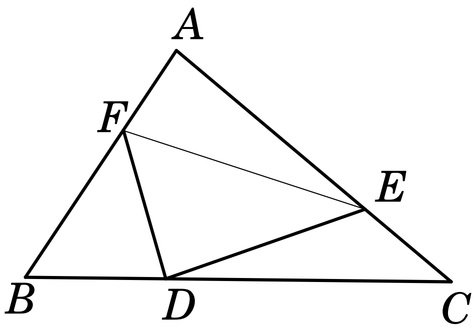
ឬ $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \dfrac{sinAcosB - cosAsinB}{sinAcosB + cosAsinB}$

$\Rightarrow \dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{sinAcosB}{cosAsinB}$
$\Rightarrow \dfrac{sin^2A}{sin^2B} = \dfrac{sinAcosB}{cosAsinB}$
គេបាន $sinAcosA = sinBcosB$
នោះ $sin2A = sin2B$
ដោយ $2A < 360^0, 2B < 360^0$ នោះតាម (1) : $2A$ និង $2B$ អាចស្មើគ្នា ឬ $2A$ និង $2B$ បូកគ្នាស្មើ 180^0
- បើ $2A = 2B$ នោះ $A = B$ (ត្រីកោណ ABC សមបាត)
- បើ $2A + 2B = 180^0$ នោះ $A + B = 90^0$ (ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណកែង)

លំហាត់ទី ៦៣១

គេមានត្រីកោណ ABC។ គេជ្រើសរើសចំណុចនៅលើជ្រុង BC, CA, AB តាងដោយ D, E, F រៀងគ្នាដែល $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{CE}{EA} = \dfrac{AF}{FB} = k$ (k ជាចំនួនវិជ្ជមាន)។ តាង S ជាផ្ទៃក្រឡា $\triangle ABC$។ គណនាផ្ទៃក្រឡា $\triangle DEF$។

ដំណោះស្រាយ



យើងមាន $S_{\triangle DEF} = S - (S_{\triangle AFE} + S_{\triangle BDF} + S_{\triangle CED})$
ដោយ $S_{\triangle AFE} = \dfrac{1}{2} \cdot AF \cdot AE \cdot sinA$
តែ $AF = \dfrac{k}{k+1}AB,\ AE = \dfrac{1}{k+1}AC$
$\Rightarrow S_{\triangle AFE} = \dfrac{k}{k+1} \cdot \dfrac{1}{k+1} \cdot AB \cdot AC \cdot sinA$
$\Rightarrow S_{\triangle AFE} = \dfrac{k}{(k+1)^2}S$ (ព្រោះ $S = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot sinA$)

ដូចគ្នាដែរ $S_{\triangle BDF}=\dfrac{k}{(k+1)^2}S,\ S_{\triangle CED}=\dfrac{k}{(k+1)^2}S$

យើងបាន $S_{\triangle DEF}=S-\dfrac{3k}{(k+1)^2}S=\dfrac{k^2-k+1}{(k+1)^2}S$

យើងអាចរក $\dfrac{S_{\triangle AFE}}{S}=\dfrac{AE\cdot AF}{AC\cdot AB}=\dfrac{1}{k+1}\cdot\dfrac{k}{k+1}=\dfrac{k}{(k+1)^2}$។

លំហាត់ទី ៦៣២

គេឱ្យ $a>0,b>0,C>0$។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\geq 6abc$។

ដំណោះស្រាយ យើងបាន $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)-6abc=$
$a\left(b^2+c^2\right)-2abc+b\left(c^2+a^2\right)-2abc+c\left(a^2+b^2\right)-2abc$
$=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\geq 0$
នោះ $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\geq 6abc$ ពិត
សំគាល់: គេអាចបង្កើតទូទៅកម្មះ
ចំពោះចំនួនវិជ្ជមាន $a_1,a_2,a_3,..,a_n$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a_2a_3...a_n(a_2+a_3+\cdots+a_n)+$
$a_3a_4...a_na_1(a_3+a_4+\cdots+a_n+a_1)+\cdots+$
$a_{n-1}a_1...a_{n-2}(a_{n-1}+a_1+\cdots+a_{n-2})\geq n(n-1)a_1a_2\cdots a_n$។

លំហាត់ទី ៦៣៣

គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន x,y,z ដែល $\dfrac{x+1}{y}+\dfrac{y+1}{z}+\dfrac{z+1}{x}$ ជាចំនួនគត់។ តាង d ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួន x,y,z។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $d\leq\sqrt[3]{xy+yz+zx}$។

ដំណោះស្រាយ យើងមាន d ជាតួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួន x,y,z
តាង $x=dm,\ y=dn,\ z=dp\ (m,n,p\in\mathbb{N})$
យើងបាន $\dfrac{x+1}{y}+\dfrac{y+1}{z}+\dfrac{z+1}{x}\dfrac{x^2z+y^2x+z^2y+xz+yx+zy}{xyz}$

$$=\frac{d^3\left(m^2p+n^2m+p^2n\right)+d^2(mn+mp+pn)}{d^3\cdot mnp}$$

ជាចំនួនគត់កាលណាភាគយកនៃអង្គខាងស្តាំចែកដាច់នឹង d^3។
នោះចំនួន $mn+mp+pn$ ចែកដាច់នឹង d

$\Rightarrow d \le mn + mp + pn = \dfrac{xy + yz + zx}{d^2}$

ដូចនេះ $d \le \sqrt[3]{xy + yz + zx}$

លំហាត់ទី ៦៣៨

គេឱ្យស្វ៊ីតមិនកំណត់ $\{a_n\}$។ ស្រាយថាបើ $a_n + a_{n+2} > 2a_{n+1}$ ចំពោះ $n = 1,2,..$ នោះ $\dfrac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}}{n+1} \ge \dfrac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{n}$ ចំពោះ $n = 1,2,..$។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $a_n + a_{n+2} > 2a_{n+1}$ នោះ $a_{n+2} - a_{n+1} > a_{n+1} - a_n$ (1)

តាង $b_{n+1} = a_{n+1} - a_n$ នោះ $b_{n+2} = a_{n+2} - a_{n+1}$

តាម (1) យើងអាចសរសេរ $b_{n+2} > b_{n+1}$

យើងបាន ស្វ៊ីត $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើន

- យើងបំលែងវិសមភាពដែលគេចង់អោយស្រាយទៅជា៖

$n(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}) > (n+1)(a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n})$ (2)

- យើងនិងស្រាយវិសមភាព (2) តាមវិចារកំណើន:

ចំពោះ $n = 1$: $a_1 + a_3 \ge 2a_2$ ពិត

ឧបមាថាវិសមភាពពិតរហូតដល់ n។ យើងនិងស្រាយបន្តថាវាពិតរហូតដល់ $n+1$ គឺស្រាយថា

$(n+1)(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1} + a_{2n+3}) > (n+2)(a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} + a_{2n+2})$ (3)

ឬគ្រាន់តែស្រាយថា $(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}) + (n+2)a_{2n+3} > (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}) + (n+2)a_{2n+2}$ (4)

តាម (4) យើងបាន៖

$(n+1)(a_{2n+3} - a_{2n+2}) \ge (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{2n} - a_{2n-1}) + (a_{2n+2} - a_{2n+1})$

ឬ $(n+1)b_{2n+3} \ge b_2 + b_4 + \cdots + b_{2n} + b_{2n+2}$ (5)

តែ $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតកើន នោះ $b_{2n+3} \ge b_2, b_{2n+3} \ge b_4, \ldots, b_{2n+3} \ge b_{2n+2}$

នាំអោយ (5) ពិត នោះ (4),(3) ពិត

នាំអោយ (2) ពិត

លំហាត់ទី ៦៣៥

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2sin\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{រ៉ាឌីកាល់}}$។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

នោះ $sin\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}=sin2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{\pi}{4}=sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$
$=cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

$\Rightarrow 2sin\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}=2cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\quad(1)$

តាង $a_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{រ៉ាឌីកាល់}}$ នោះ $a_1=\sqrt{2},\ a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$

ដោយ $a_1=\sqrt{2}=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2cos\frac{\pi}{4}=2cos\frac{\pi}{2^2}$

$a_2=\sqrt{2+2cos\frac{\pi}{2^2}}=\sqrt{2\left(1+cos\frac{\pi}{2^2}\right)}=\sqrt{2\cdot 2cos^2\frac{\pi}{2^3}}$

(ព្រោះ $1+cos\alpha=2cos^2\frac{\alpha}{2}$)

$\Rightarrow a_2=2cos\frac{\pi}{2^3}$

ឧបមាថាពិតដល់ n គឺ $a_n=2cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

យើងនិងស្រាយថាពិតរហូតដល់$n+1$ គឺ $a_{n+1}=2cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$

ដោយ $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ នោះ $a_{n+1}=\sqrt{2+2cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$

$\Rightarrow a_{n+1}=2cos\frac{\pi}{2^{n+2}}$ ពិត

នោះ $a_n=2cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\quad(2)$

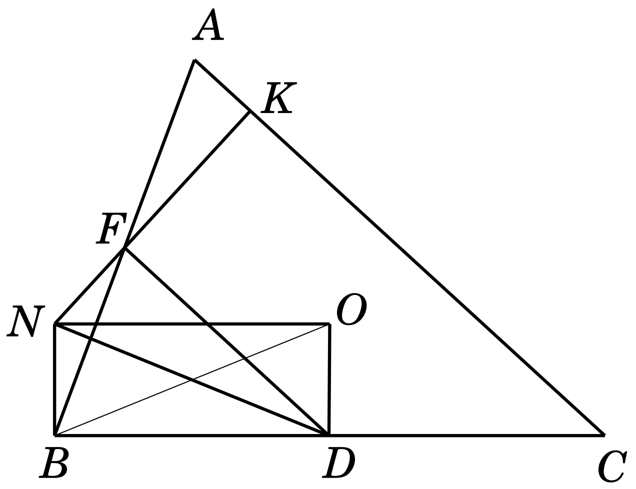
តាម (1)&(2) យើងបាន:

$$2sin\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{រ៉ាឌីកាល់}}$$ ពិត

លំហាត់ទី ៦៣៦

គេឱ្យត្រីកោណមានមុំស្រួច ABC។ តាង D,F ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃ BC,AB។ ចំណោលកែងពីចំណុច C ទៅលើ AC និង ចំណោលកែង ត្រង់ចំណុច B ទៅលើ BC ជួបគ្នាត្រង់ N។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា DN មានប្រវែងស្មើនឹងកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC។

ដំណោះស្រាយ



តាង Oនិង R ជាផ្ចិតនិង កាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ ត្រីកោណ ABC

ភ្ជាប់ OD,ON និង OF

យើងនិងបង្ហាញថា $BDON$ ជាតុកោណកែង នោះយើងនិងបាន$DN=BO=R$

ដោយ $\angle NBC=\angle NKC=90^0$ នោះចតុកោណ $BCKN$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់

យើងទាញបាន $\angle KNB=180^0-\angle BCA$

តែ $\angle BOA=2\angle BCA$ និង OF ពុះមុំ $\angle BOA$ នោះ $\angle BOF=\angle BCA$

យើងបាន $\angle FNB+\angle BOF=\angle KNB+\angle BCK=180^0$

នាំអោយយើងទាញបានថា B,O,F,N ស្ថិតនៅលើរង្វង់តែមួយ

នោះ $\angle BFO=\angle BNO$

តែ $\angle BFO=90^0$ (ព្រោះ OF កែង AB)

នោះ $\angle BNO = 90^0$ ហើយ NB, OD កែង BC
ដូចនេះ $BDON$ ជាចតុកោណកែង ហើយ $ND = R$
របៀបទី២៖ យើងអាចទាញសន្និដ្ឋានដោយប្រើត្រីកោណមាត្រ
យើងមាន $\angle NFB = \angle AFK = 90^0 - \angle A$ និង $\angle BNF = 180^0 - \angle B$ (ព្រោះ $BCKN$ ជាចតុកោណចារឹកក្នុងរង្វង់)
តាមទ្រឹស្តីបទ Sin ក្នុងត្រីកោណ BFN:

$$\frac{NB}{\sin\angle NFB} = \frac{BF}{\sin\angle BFN}$$

នោះ $NB = \dfrac{c\cos A}{2\sin C} = R\cos A$
តែ $BD = \dfrac{a}{2} = R\sin A$ នោះ $ND^2 = NB^2 + BD^2 = R^2$
ដូចនេះ $ND = R$

លំហាត់ទី ៦៣៧

រកចំនួនគត់ធំបំផុត តូចជាង $A = \dfrac{2013! + 2010!}{2012! + 2011!}$។

ដំណោះស្រាយ

$$A = \frac{2013! + 2010!}{2012! + 2011!} = \frac{2011!(2012\times 2013 + \frac{1}{2011})}{2011!(2012+1)}$$
$$= \frac{2012\times 2013}{2013} + \frac{1}{2011\times 2013}$$
$$= 2012 + \frac{1}{2011\times 2013} > 2012$$

ដូចនេះ ចំនួនគត់ធំបំផុត តូចជាង A គឺ 2012

លំហាត់ទី ៦៣៨

រកគ្រប់តម្លៃនៃ b ដែល $B = 11...1 - bb...b$ ជាការេប្រាកដ ដោយដឹងថា លេខ 1 មាន 4024 ខ្ទង់ និង b មាន 2012 ខ្ទង់។

ដំណោះស្រាយ

$B = \underbrace{11...1}_{4024} - \underbrace{bb...b}_{2012}$ ជាការេប្រាកដ

$$B=\frac{10^{4024}-1}{9}-\frac{b}{9}\left(10^{2012}-1\right)$$
$$=\frac{1}{9}\left(10^{4024}-b\times10^{2012}+b-1\right)$$

តាង $C=10^{4024}-b\times10^{2012}+b-1$

របៀបទី១: C ជាការេប្រាកដបើ $\Delta=b^2-4(b-1)=0$

$(b-2)^2=0$

ដូចនេះ $b=2$

របៀបទី២: C ជាការេប្រាកដបើលេខចុងអាច:

$b-1\in\{0,1,4,5,6,9\}$

$b\in\{1,2,5,6,7\}$

មានតែ $b=2$ ដែល C ជាការេប្រាកដ

លំហាត់ទី ៦៣៩

ដោះស្រាយសមីការ $\left(x^{2012}+1\right)\left(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2010}\right)=2012x^{2011}$។

ដំណោះស្រាយ

បើ $x\le0$ សមីការគ្មានឫស

បើ $x>0$ ចែកអង្គនឹង x^{2011} គេបាន

$$\left(x+\frac{1}{x^{2011}}\right)\left(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2010}\right)=2012$$

ពន្លាត: $x+x^3+x^5+\cdots+x^{2011}+\frac{1}{x^{2011}}+\frac{1}{x^{2009}}+\cdots+\frac{1}{x}=2012$

ដោយប្រើវិសមភាព Cauchy

$$\left.\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}\ge2 \\ x^3+\frac{1}{x^3}\ge2 \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{2011}+\frac{1}{x^{2011}}\ge2 \end{array}\right\}$$

$$x+x^3+x^5+\cdots+x^{2011}+\frac{1}{x^{2011}}+\frac{1}{x^{2009}}+\cdots+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}\ge2\times1006$$

សមភាពកើតឡើងពេល:

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{x} \\ x^3=\dfrac{1}{x^3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^{2011}=\dfrac{1}{x^{2011}} \end{array}\right\} \Rightarrow x=1$$

ដូចនេះ $x=1$ ជាឫសនៃសមីការ

លំហាត់ទី ៦៤០

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x,y)=1-\dfrac{x}{y}$ ដែល $x>0$ និង $y>0$។ គេតាង

$$F_n(x)=\begin{cases} f(x,x) & \text{បើ } n=1 \\ f\left(F_{n-1}(x),x\right) & \text{បើ } n>1 \end{cases}$$

។ គណនា $F_{2022}(2)$។

ដំណោះស្រាយ

យើងគណនាតួមួយចំនួននៃស្វ៊ីត $F_n(2)$

$$F_1(2)=f(2,2)=1-\frac{2}{2}=0$$

$$F_2(2)=f\left(F_1(2),2\right)=1-\frac{0}{2}=1$$

$$F_3(2)=f\left(F_2(2),2\right)=1-\frac{1}{2}$$

$$F_4(2)=f\left(F_3(2),2\right)=1-\frac{1-\frac{1}{2}}{2}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$F_n(2)=f\left(F_{n-1}(2),2\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\cdots(-1)^n\times\frac{1}{2^{n-2}}$$

យើងបាន

$$F_{2022}(2)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\cdots(-1)^{2022}\times\frac{1}{2^{2020}}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2^{2020}}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2021} - 1}{-\frac{1}{2} - 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2^{2021}+1}}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2^{2021}+1}{3 \times 2^{2020}}$$

លំហាត់ទី ៦៨១

$\triangle ABC$ មានរង្វាស់ជ្រុង $AB = 4,\ BC = 7$ និង $AC = 5$។ តាង $\alpha = \angle BAC$
ចូរគណនាតម្លៃនៃកន្សោម $sin^6\frac{\alpha}{2} + cos^6\frac{\alpha}{2}$។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $x^6 + y^6 = \left(x^2+y^2\right)^3 - 3x^2y^2\left(x^2+y^2\right)$

$$\Longrightarrow sin^6\frac{\alpha}{2} + cos^6\frac{\alpha}{2} = \left(sin^2\frac{\alpha}{2} + cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^3 - 3sin^2\frac{\alpha}{2}cos^2\frac{\alpha}{2}\left(sin^2\frac{\alpha}{2} + cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 1 - 3sin^2\frac{\alpha}{2}cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 3\left(\frac{sin\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4}sin^2\alpha$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\left(1 - cos^2\alpha\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}cos^2\alpha$$

អនុវត្តទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុសក្នុងត្រីកោណ ABC

$$cos\alpha = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}} = \frac{16+25-49}{2\cdot 4\cdot 5} = -\frac{1}{5}$$

យើងបាន $sin^6\frac{\alpha}{2} + cos^6\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$

របៀបទី ២:

យើងមាន $cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+cos\alpha}{2} = \frac{1-\frac{1}{5}}{2} = \frac{2}{5},\ sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\alpha}{2} = \frac{1+\frac{1}{5}}{2} = \frac{3}{5}$

យើងបាន $sin^6\frac{\alpha}{2} + cos^6\frac{\alpha}{2} = \left(sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^3 + \left(cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{7}{25}$

លំហាត់ទី ៦៤២

គណនាផលបូក $f\left(\frac{1}{2020}\right)+f\left(\frac{2}{2020}\right)+\cdots+f\left(\frac{2019}{2020}\right)$ ដោយដឹងថា $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2};\ x\in\mathbb{R}$។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$

នោះ $f(1-x)=\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{4}{4+2\cdot 4^x}=\frac{2}{2+4^x}$

យើងបាន $f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{2}{2+4^x}=1$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{1}{2020}\right)+f\left(\frac{2}{2020}\right)+\cdots+f\left(\frac{2019}{2020}\right)=\left(f(\frac{1}{2020})+f(\frac{2019}{2020})\right)$$
$$+\left(f(\frac{2}{2020})+f(\frac{2018}{2020})\right)+\cdots+\left(f(\frac{1009}{2020})+f(\frac{1011}{2020})\right)+f\left(\frac{1010}{2020}\right)$$
$$=1009\cdot 1+f\left(\frac{1}{2}\right)=1009+\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}+2}=1009,5$$

លំហាត់ទី ៦៤៣

ស្រាយបញ្ជាក់ថា
$$\frac{1}{log_xa\cdot log_xa^2}+\frac{1}{log_xa^2\cdot log_xa^3}+\ldots+\frac{1}{log_xa^{n-1}\cdot log_xa^n}$$
$$=\frac{n-1}{n}log_a^2x$$។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $log_xa^k=klog_xa$

$$\frac{1}{log_xa\cdot log_xa^2}+\frac{1}{log_xa^2\cdot log_xa^3}+\ldots+\frac{1}{log_xa^{n-1}\cdot log_xa^n}$$
$$=\frac{1}{log_xa\cdot 2log_xa}+\frac{1}{2log_xa\cdot 3log_xa}+\ldots+\frac{1}{(n-1)log_xa\cdot nlog_xa}$$
$$=\frac{1}{1\cdot 2log_x^2a}+\frac{1}{2\cdot 3log_x^2a}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot nlog_x^2a}$$

$$=\frac{1}{log_x^2 a}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)$$

តែ $\frac{1}{(k-1)\cdot k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$ នោះ $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{log_x a\cdot log_x a^2}+\frac{1}{log_x a^2\cdot log_x a^3}+...+\frac{1}{log_x a^{n-1}\cdot log_x a^n}$$

$$=\frac{1}{log_x^2 a}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{n-1}{n}\cdot log_a^2 x$$ ពិត

លំហាត់ទី ៦៨៨

ដោះស្រាយសមីការ $cosxcos2xcos4xcos8x=\frac{1}{16}$។

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន $16cosxcos2xcos4xcos8x=1$

$\Longrightarrow (2cosx)(2cos2x)(2cos4x)(2cos8x)=1$

គុណអង្គទាំងសងខាងដោយ $sinx\neq 0$

$\Longrightarrow (2sinxcosx)(2cos2x)(2cos4x)(2cos8x)=sinx$

$\Longrightarrow (2sin2xcos2x)(2cos4x)(2cos8x)=sinx$ (ព្រោះ $2sinxcosx=sin2x$)

$\Longrightarrow (2sin4xcos4x)(2cos8x)=sinx$

$\Longrightarrow 2sin8xcos8x=sinx$

$\Longleftrightarrow sin16x-sinx=0 \quad (1)$

តែដោយ $sin\alpha-sin\beta=2sin\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

នោះតាម (1) : $2sin\frac{15x}{2}cos\frac{17x}{2}=0$

- ចំពោះ $sin\frac{15x}{2}=0$ នោះ $\frac{15x}{2}=k\pi$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$

$\Longrightarrow x=\frac{2k\pi}{15}$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$

- ចំពោះ $cos\frac{17x}{2}=0$ នោះ $\frac{17x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$

$\Longrightarrow x=\frac{\pi+2k\pi}{17}$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $x=\frac{2k\pi}{15}$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$ និង $x=\frac{\pi+2k\pi}{17}$ ដែល $k\in\mathbb{Z}$
ហើយ $k\neq 15s$ និង $2k+1\neq 17s,\ s\in\mathbb{Z}$

លំហាត់ទី ៦៤៥

រកលេខខ្ទង់ចុងក្រោយនៃចំនួន 13^{13}។

ដំណោះស្រាយ

លេខខ្ទង់ខាងចុង ជាសំណល់នៃវិធីចែករវាង 13^{13} និង 10។
ដោយសារតែ 13 និង 10 ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា យើងអាចប្រើទ្រឹស្តីបទ Euler។
យើងរក $\varphi(10)$:
$$\varphi(10)=\varphi(2\cdot 5)=\left(2^1-2^0\right)\left(5^1-5^0\right)=4$$
តាមទ្រឹស្តីបទ Euler: $13^4\equiv 1\pmod{10}$
$$13^{13}=13^{12}\cdot 13\equiv 13\equiv 3\pmod{10}$$
ដូចនេះ លេខខុងចុងគឺលេខ 3

លំហាត់ទី ៦៤៥

រកលេខខ្ទង់ចុងក្រោយនៃចំនួន $13^{13^{13}}$។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $13^4\equiv 1\pmod{10}$
យើងនិងរក 13^{13} អោយពាក់ព័ន្ធនឹង 4
ដោយ $13\equiv 1\pmod 4$
នោះ $13^{13}\equiv 1\pmod 4$
យើងបាន $13^{13^{13}}=13^{4t+1},\ t\in\mathbb{N}$
$\Longrightarrow 13^{13^{13}}=13^{4t}\cdot 13\quad (1)$
តែ $13^{4t}\equiv 1\pmod{10}$ និង $13\equiv 3\pmod{10}$
តាម (1): $13^{13^{13}}\equiv 3\pmod{10}$
ដូចនេះ លេខខាងចុងគឺលេខ 3

លំហាត់ទី ៦៤៦

រកលេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយនៃចំនួន $133333^{13333^{1333^{133^{13}}}}$។

ដំណោះស្រាយ

លេខពីរខ្ទង់ខាងចុងអាចគិតដូចប្រមាណវិធីចែកចំនួនខាងលើនឹង 100។

ដោយ 133333 និង 100 ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា យើងអាចអនុវត្តទ្រឹស្តីបទ Euler។
យើងរក $\varphi(100)$:

$$\varphi(100)=\varphi\left(2^2\cdot 5^2\right)=\left(2^2-2^1\right)\left(5^2-5^1\right)=40$$ ។

យើងបន្តរក $\varphi(40)=16,\ \varphi(16)=8,\ \varphi(8)=4$
យើងបាន $133^{13}\equiv 133^1\equiv 5\ (\bmod 8)$
នោះ:

$$1333^{133^{13}}\equiv 1333^5\equiv 5^5\equiv 5\ (\bmod 16)$$

នោះ:

$$13333^{1333^{133^{13}}}\equiv 13333^5\equiv 13^5\equiv 13\ (\bmod 40)$$

នោះ:

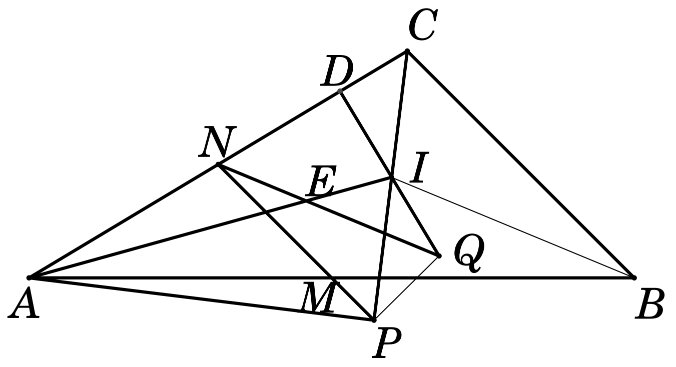
$$133333^{13333^{1333^{133^{13}}}}\equiv 33^{13}\equiv 33\cdot(-11)^6\equiv 33\cdot 21^8\equiv 13\ (\bmod 100)$$

ដូចនេះ លេខពីរខ្ទង់ខាងចុងគឺ 13

លំហាត់ទី ៦៤៧

កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំនៃត្រីកោណ ABC ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច I។ M និង N ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃជ្រុង AB និង AC។ MN និង CI ជួបគ្នាត្រង់ P។ Q គឺជាចំណុចមួយដែល MN កែង PQ ហើយបន្ទាត់ BI និង NQ ស្របគ្នា។ រកមុំរវាង AC និង IQ។

ដំណោះស្រាយ



តាង D ជាចំណុចប្រសព្វរវាង AC និង IQ
E ជាចំណុចប្រសព្វរវាង AC និង NQ
យើងមាន $MN\parallel BC$ នោះ: $\angle NCP=\angle BCP=\angle CPN$
យើងបាន ត្រីកោណ CPN ជាត្រីកោណសមបាត មាន $NP=NC=NA$

នោះ P ជាចំណុចមួយនៅលើរង្វង់មានអង្កត់ផ្ចិត AC ហើយ $\angle APC = 90^0$។
ដោយ $MN \parallel BC$ និង $BI \parallel NQ$ នោះ $\angle CBI = \angle PNQ$
- ត្រីកោណ AIP និង ត្រីកោណ NQP មាន:

$$\angle AIP = 180^0 - \angle AIC = \angle CAI + \angle ACI = \frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle ACB}{2}$$

$$= \frac{180^0 - \angle ABC}{2} = 90^0 - \angle CBI = 90^0 - \angle PNQ = \angle PQN$$

ម្យ៉ាងទៀត $\angle API = \angle NPQ = 90^0$
$\triangle API \sim \triangle NPQ$ (ករណីដំនូច ម.ម)
$\Longrightarrow \angle AIP = \angle NQP$ និង $\angle IAP = \angle QNP$ ហើយចតុកោណ $ANEP$ ដូចចតុកោណ $IQPE$។

$$\angle CID = \angle PIQ = \angle PEQ = 180^0 - \angle PEN = \angle PAN =$$

$$= \angle CAP = 90^0 - \angle ACP = 90^0 - \angle DCI$$

$$\Longrightarrow \angle CDI = 180^0 - \angle CID - \angle DCI = 90^0$$

ដូចនេះ មុំដែលសួររកគឺ 90^0

លំហាត់ទី ៦៤៧

f ជាអនុគមន៍កំណត់ក្នុងសំណុំចំនួនពិតខុសពី 0 និង 1 ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម:

(i) $f(1-x) = \dfrac{1}{f(x)}$;

(ii) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{f(f(x))}$;

(iii) $f(f(f(x))) = x$។

១. ចូរគណនា $f(2), f(-1)$ និង $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$។

២. កំណត់អនុគមន៍ $f(x)$។

ដំណោះស្រាយ

១. គណនា $f(2), f(-1)$ និង $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

យើងសង្កេតឃើញថាដោយសារទំនាក់ទំនង (iii) ត្រូវតែផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x នៅក្នុងដែនកំណត់ នោះតម្លៃ 0 និង 1 មិនអាចជារូបភាពនៃ f ទេ។

•ចំពោះ $x = \dfrac{1}{2}$

តាម (i) យើងបាន $f\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)}$

$\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=1$

$\Longrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ ឬ $f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$

តែតាមការសង្កេតខាងលើ $f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$

•ចំពោះ $x=2$

តាម (ii) យើងបាន $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f(2)}$

$\Longrightarrow f(f(2))=-1$

នោះតាម (iii) យើងបាន $f(f(f(2)))=f(-1)$

$\Longrightarrow f(-1)=2$

•ចំពោះ $x=-2$

តាម (i) យើងបាន $f(1-2)=\frac{1}{f(2)}\Longrightarrow f(-1)=2=\frac{1}{f(2)}$

$\Longrightarrow f(2)=\frac{1}{2}$

២. កំណត់អនុគមន៍ $f(x)$

ដើម្បីកំណត់អនុគមន៍ f យើងប្តូរ x ទៅជា $\frac{1}{x}$

$f\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}\Longrightarrow f\left(1-\frac{1}{x}\right)=f(f(x))$

$\Longrightarrow f\left(f\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)=f(f(f(x)))=x$

នោះតាម (iii) យើងបាន $f\left(f\left(f\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)\right)=f(x)$

$\Longrightarrow f(x)=1-\frac{1}{x}$

ដូចនេះ $f(x)=1-\frac{1}{x}$

លំហាត់ទី ៦៤៨

កំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនគត់ (x,y) ដើម្បីឱ្យកន្សោម $(x^2+3y^2)\cdot 2^{(1-x^2-y^2)}$ មានតម្លៃអតិបរមា។ តើតម្លៃអតិបរមានោះគឺប៉ុន្មាន?

ដំណោះស្រាយ

យើងបាន $(x^2+3y^2)\cdot 2^{(1-x^2-y^2)} = (x^2+y^2+2y^2)\cdot 2^{1-(x^2+y^2)}$

យើងតាង $x^2+y^2=k^2$ ជារង្វង់មានផ្ចិត $(0,0)$ និង កាំ k

យើងអាចសរសេរ $(x^2+3y^2)\cdot 2^{(1-x^2-y^2)} = (k^2+2y^2)2^{1-k^2}$

ដោយសារ 2^{1-k^2} ជាចំនួនគត់ នោះយើងបានតម្លៃអតិបរមានៃកន្សោមចំពោះ x,y នៃរង្វង់មានកាំ k កាលណា $y=\pm k$ និង $x=0$។

តម្លៃអតិបរមាគឺ $3k^2\cdot 2^{1-k^2} = \dfrac{6k^2}{2^{k^2}}$, $n=k^2$ ។

ដូច្នេះយើងគ្រាន់តែពិនិត្យមើលតម្លៃនៃ $\dfrac{6n}{2^n}$។

- បើ $n=1$ ឬ $n=2$ យើងបានតម្លៃគឺ 3
- ចំពោះ $n=1$ យើងបាន $k=1, y=\pm 1$
- ចំពោះ $n=2$ យើងបាន $k=\sqrt{2}$ មិនមាន x,y ជាចំនួនគត់

+ យើងនិងស្រាយថា $\dfrac{6n}{2^n}<3$ បើ $n\geq 3$

- ចំពោះ $n=3 \Longrightarrow \dfrac{6\times 3}{2^3}<3$ ពិត

ឧបមាវិសមភាពនេះពិតរហូតដល់ n

- ពិនិត្យចំពោះ $n+1$

$6(n+1)=6n+6<3\cdot 2^n+3\cdot 2=3(2^n+2)$

ហើយ $2^n+2=2\left(2^{n-1}+1\right)<2\cdot 2^n<2^{n+1}$ ព្រោះ $2^{n-1}+1<2^n$ ចំពោះ $n\geq 3$

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមាគឺ 3 ហើយកើតមានត្រង់ $(0,1)$ ឬ $(0,-1)$

លំហាត់ទី ៦៤៩

ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ក្រាបនៃអនុគមន៍ប៉ារ៉ាបូល $y=\left(n^2+n\right)x^2-(2n+1)x+1$ កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ពីរចំណុច A_n និង B_n។ គណនា $\sum\limits_{n=1}^{2012} A_nB_n$។

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ប៉ារ៉ាបូល $y=\left(n^2+n\right)x^2-(2n+1)x+1$
កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស គេបាន : $y=0$
$\Longrightarrow \left(n^2+n\right)x^2-(2n+1)x+1=0$
$\Delta=(2n+1)^2-4\left(n^2+n\right)=1$
ឫសសមីការ $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2n+1+1}{2\left(n^2+n\right)}=\dfrac{1}{n} \\ x=\dfrac{2n+1-1}{2\left(n^2+n\right)}=\dfrac{1}{n+1} \end{array}\right.$
តាង $A_n\left(\dfrac{1}{n},0\right)$, $B_n\left(\dfrac{1}{n+1},0\right)$
គេបាន $\sum_{n=1}^{2012} A_nB_n=\sum_{n=1}^{2012}\dfrac{1}{n(n+1)}$
$[A_nB_n]=\dfrac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{2012}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$
$=1-\dfrac{1}{2013}=\dfrac{2012}{2013}$
ដូចនេះ $\sum_{n=1}^{2012} A_nB_n=\dfrac{2012}{2013}$

លំហាត់ទី ៦៥០

គេឱ្យ x,y,z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា
$\dfrac{1}{x^2+yz}+\dfrac{1}{y^2+zx}+\dfrac{1}{z^2+xy}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

សម្មតិកម្ម $x,y,z>0$
តាវិសមភាព Cauchy : $x^2+zy\ge 2x\sqrt{zy}$
$\Longrightarrow \dfrac{1}{x^2+zy}\le\dfrac{1}{2x\sqrt{zy}}$
ឬ $\dfrac{1}{x^2+zy}\le\dfrac{\sqrt{zy}}{2xyz}$
ស្រាយដូចគ្នា $\dfrac{1}{y^2+zx}\le\dfrac{\sqrt{zx}}{2xyz}$

$$\frac{1}{z^2+xy} \le \frac{\sqrt{xy}}{2xyz}$$

បូកអង្គ តាង $S = \frac{1}{x^2+zy} + \frac{1}{y^2+zx} + \frac{1}{z^2+xy} \le \frac{1}{2xyz}(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})$ (1)

តាមវិសមភាព Cauchyម្តងទៀត :

$$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$$
$$\sqrt{yz} \le \frac{y+z}{2}$$
$$\sqrt{zx} \le \frac{z+x}{2}$$

បូកអង្គ : $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx} \le x+y+z$ (2)

(1)&(2): $S \le \frac{1}{2xyz}(x+y+z)$

ដូចនេះ $S \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}\right)$

លំហាត់ទី ៦៥១

គេឱ្យស្ទីត $\{x_n\}$ ជាស្ទីតបង្រួម កំណត់ដោយ $\begin{cases} x_1 = 1, \ x_2 = 2012 \\ x_{n+1} = \sqrt[3]{x_{n+1}^2 \cdot x_n} \end{cases}$ ។

គណនា $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $x_n > 0$ គ្រប់ $n = 1,2,\ldots$

នោះ $x_{n+2}^3 = x_{n+1}^2 \cdot x_n$

$\Longrightarrow 3lnx_{n+2} = 2lnx_{n+1} + lnx_n$

តាង $u_n = lnx_n$

គេបាន $3u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$

របៀបទី ១ : $3u_{n+2} - 3u_{n+1} = -u_{n+1} + u_n$

$$u_{n+2} - u_{n+1} = -\frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n)$$

តាង $v_n = u_{n+1} - u_n \Longrightarrow v_{n+1} = -\frac{1}{3}v_n$

$\Longrightarrow (v_n)$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ មានផលធៀបរួម $q=-\dfrac{1}{3}$ និងតួទី ១ : $v_1=u_2-u_1=lnx_2-lnx_1=ln2012-ln1=ln2012$

គេបាន $u_n=(u_n-u_{n-1})+(u_{n-1}-u_{n-2})+\cdots+(u_2-u_1)+u_1$

$$=v_{n-1}+v_{n-2}+\cdots+v_1+u_1$$

$$=v_1\cdot\frac{q^{n-1}-1}{q-1}+u_1$$

ឬ $lnx_n=ln2012\cdot\dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}-1}{-\frac{1}{3}-1}$

$\Longrightarrow x_n=e^{ln2012\left[-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{3}{4}\right]}$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty}x_n=e^{\frac{3}{4}ln2012}=2012^{\frac{3}{4}}$ ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$

<u>របៀបទី ២</u> : $3u_{n+2}-2u_{n+1}-u_n=0$

សមីការសំគាល់ $3r^2-2r-1=0$

$$r_1=1\ ,\ r_2=-\frac{1}{3}$$

គេបាន $u_n=A\cdot r_1^n+B\cdot r_2^n=A+B\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

ដោយ $u_1=lnx_1=0$

$u_2=lnx_2=ln2012$

គេបាន $\begin{cases}A-\frac{1}{3}B=0 & (1)\\ A+\frac{1}{9}B=ln2012 & (2)\end{cases}$

$(2)-(1):\dfrac{1}{9}B+\dfrac{1}{3}B=ln2012$

$$B=\frac{9}{4}ln2012$$

$(1)\Longrightarrow A=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{9}{4}ln2012=\dfrac{3}{4}ln2012$

គេបាន $u_n=\dfrac{3}{4}ln2012+\dfrac{9}{4}ln2012\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{4}ln2012$

នោះ $lnx_n = u_n \Longleftrightarrow x_n = e^{u_n}$

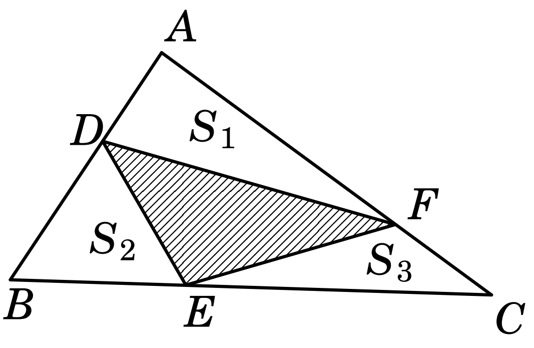
$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = e^{\lim_{n\to+\infty}} = e^{\frac{3}{4}ln2012}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n = e^{\frac{3}{4}ln2012} = 2012^{\frac{3}{4}}$

លំហាត់ទី ៦៥២

ABC ជាត្រីកោណកែងមានជ្រុង $AB = 13, BC = 15, AC = 14$ ។ ចំណុច D,E,F នៅលើជ្រុង AB,BC,CA រៀងគ្នា ដែល $\frac{AD}{AB} = x,\ \frac{BE}{BC} = y,\ \frac{CF}{CA} = z$ និង $x+y+z = \frac{2}{3}, x^2+y^2+z^2 = \frac{2}{5}$ ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ DEF ។

ដំណោះស្រាយ



យើងមាន $\frac{AD}{AB} = x,\ \frac{BE}{BC} = y,\ \frac{CF}{CA} = z$

$x+y+z = \frac{2}{3}, x^2+y^2+z^2 = \frac{2}{5}$

តាង $S_1 = S_{ADF}, S_2 = S_{DEF}, S_3 = S_{CEF}$

$S = S_{ABC}$ គេបាន

$$\frac{S_1}{S} = \frac{AD}{AB}\times\frac{AF}{AC} = \frac{AD}{AB}\left(\frac{AC-CF}{AC}\right) = x(1-z)$$

$$\frac{S_2}{S} = \frac{BD}{AB}\times\frac{BE}{BC} = \left(\frac{AB-AD}{AB}\right)\frac{BE}{BC} = (1-x)y$$

$$\frac{S_3}{S} = \frac{CF}{AC}\times\frac{CE}{BC} = \frac{CF}{AC}\left(\frac{BC-BE}{BC}\right) = z(1-y)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{S}(S_1+S_2+S_3) = x+y+z-(xy+yz+zx)$$

$$1-\frac{S_{DEF}}{S} = \frac{2}{3}-\frac{1}{2}\left[(x+y+z)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]$$

$$= \frac{2}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}-\frac{2}{5}\right)$$

$$\Longrightarrow S_{DEF} = \frac{16}{45} \cdot S$$

ដោយ $S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84, \left(p = \frac{13+14+15}{2} = 12\right)$

ដូចនេះ $S_{DEF} = \frac{16}{45} \times 84 = \frac{448}{15}$ ឯកតាផ្ទៃ

លំហាត់ទី ៦៥៣

ឧបមាថា x_k, y_k $(k = 1,2,3,...,2012)$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន និង $x_1 + x_2 + ... + x_{2012} = y_1 + y_2 + ... + y_{2012} = 1$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sum_{k=1}^{2012} \frac{x_k y_k}{x_k + y_k} \le \frac{1}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $x_k, y_k > 0$ និង $\sum_{k=1}^{2012} x_k = \sum_{k=1}^{2012} y_k = 1$

តាមវិសមភាព Cauchy : $x_k^2 + y_k^2 \ge 2x_k y_k$

$$(x_k + y_k)^2 \ge 4x_k y_k$$

$$\Longrightarrow \frac{x_k y_k}{x_k + y_k} \le \frac{x_k + y_k}{4}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{2012} \frac{x_k y_k}{x_k + y_k} \le \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{2012} (x_k + y_k) = \frac{1}{4}(1+1)$$

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{2012} \frac{x_k y_k}{x_k + y_k} \le \frac{1}{2}$

លំហាត់ទី ៦៥៤

គេឱ្យ $P_n = \prod_{k=0}^{n} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{3^k} + \left(\frac{1}{9}\right)^{3^k}\right]$ ។ គណនា $\lim_{n\to+\infty} P_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

សម្មតិកម្ម $P_n = \prod_{k=0}^{n} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{3^k} + \left(\frac{1}{9}\right)^{3^k}\right]$

តាង $S_k = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{3^k} + \left(\frac{1}{9}\right)^{3^k}$ និង $\left(\frac{1}{3}\right)^{3^k} = a$

$$\Longrightarrow S_k = 1 - a + a^2$$

$$S_k = \frac{(1+a)\left(1-a+a^2\right)}{(1+a)} = \frac{1+a^3}{1+a}$$

$$S_k = \frac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{3^{k+1}}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{3^k}}$$

គេបាន $P_n = \dfrac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{3}}{1+\frac{1}{3}} \times \dfrac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{3^2}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{3}} \times \cdots \times \dfrac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{3^{n+1}}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{3^n}}$

$$\Longrightarrow P_n = \frac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{3^{n+1}}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}\left[1+\left(\frac{1}{3}\right)^{3^{n+1}}\right]$$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \dfrac{3}{4}$ ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3^{n+1}} = 0$

លំហាត់ទី ៦៥៥

រកតម្លៃតូចបំផុតនៃ x ដែល x និង y ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ $\dfrac{2011}{2012} < \dfrac{x}{y} < \dfrac{2012}{2013}$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $\dfrac{2011}{2012} < \dfrac{x}{y} < \dfrac{2012}{2013}$

គេបាន $\begin{cases} 2011y < 2012x \\ 2013x < 2012y \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2011y + 1 \le 2012x & (1) \\ 2013x + 1 \le 2012y & (2) \end{cases} \begin{vmatrix} \times 2012 \\ \\ \times 2011 \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow + \begin{cases} 2011\times 2012y+2012\le 2012^2x \\ 2013\times 2011x+2011\le 2011\times 2012y \end{cases}$$

បូកអង្គ : $2013\times 2011x+4023\le 2012^2x$

$(2012^2-1)x+4023\le 2012^2x$

$-x+4023\le 0$

$x\le 4023$

ដូចនេះ x តូចបំផុត $x=4023$

លំហាត់ទី ៦៥៦

សិស្សប្រុស និង សិស្សស្រីមួយក្រុមបានចូលរួមប្រកួត ញ៉ាំភីហ្សានៅផ្សារទំនើបមួយ។ គេដឹងថាក្នុងភីហ្សាមួយត្រូវគេកាត់ជា ១២ដុំតូចៗ។ សិស្សប្រុសម្នាក់អាចញ៉ាំអស់ ៦ឬ ៧ដុំ និង សិស្សស្រីម្នាក់អាចញ៉ាំអស់ ២ ឬ ៣ដុំ។ បើគេដាក់ភីហ្សា ៤ ឃើញថាមិនគ្រប់គ្រាន់ទេ តែបើគេដាក់ភីហ្សា ៥វិញនោះវាច្រើនពេក។ តើមានសិស្សប្រុស និង សិស្សស្រីប៉ុន្មាននាក់ដែលបានចូលរួមប្រកួត ។

ដំណោះស្រាយ

តាង B ជាចំនួនសិស្សប្រុស , G ជាចំនួនសិស្សស្រី

•សិស្សប្រុស និង សិស្សស្រី អាចញ៉ាំភីហ្សាបានច្រើនបង្អស់បំផុត

គឺ $7B+3G<12\times 5$

ឬ $7B+3G\le 59$ (1)

•សិស្សប្រុស និង សិស្សស្រីអាំចញ៉ាំភីហ្សាបានតិចដុំបំផុត

គឺ $6B+2G>12\times 4$

ឬ $49\le 6B+2G$ (2)

$(1)+(2)$: $7B+3G+49\le 59+6B+2G$

$B+G\le 10 \quad (3)$

តាម (2) : $49\le 6B+2(10-B)$

$4B\ge 29$

$B\ge \frac{29}{4}$ ឬ $B\ge 8$

តែ $G\ge 1$

$\Longrightarrow B+G\ge 9$ ឬ $G\ge 9-B$

តាម (1) : $7B+3(9-B)\le 59$

$4B \le 32$ ឬ $B \le 8$

គេបាន $B = 8$ ទាញបាន $G = 1,\ G \ge 2$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $B = 8$ នាក់ និង $G = 1$ នាក់

លំហាត់ទី ៦៥៧

រកតម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x) = x\left(2011 + \sqrt{2013 - x^2}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

$f(x) = x\left(2011 + \sqrt{2013 - x^2}\right)$

ដែនកំណត់ : $2013 - x^2 \ge 0 \iff \mathbb{D} = \left[-\sqrt{2013}, \sqrt{2013}\right]$

ដោយសារ $f(-x) = -f(x)$ គ្រប់ $x \in \mathbb{D}$

នោះ f ជាអនុគមន៍សេស

- ករណី $x \in \left[0, \sqrt{2013}\right]$

$f(x) = x\left(\sqrt{2011} \cdot \sqrt{2011} + 1 \cdot \sqrt{2013 - x^2}\right)$

តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz

$f(x) \le x\sqrt{(2011+1)(2011+2013-x^2)}$

$f(x) \le x\sqrt{2012} \cdot \sqrt{4024 - x^2} \quad (1)$

តាម Cauchy $: x \cdot \sqrt{4024 - x^2} \le \dfrac{x^2 + 4024 - x^2}{2}$

$x \cdot \sqrt{4024 - x^2} \le 2012$

ពី (1) $f(x) \le \sqrt{2012} \cdot 2012$

នោះ $\boxed{\text{Max} f(x) = \sqrt{2012} \cdot 2012}$ ពេល $\begin{cases} \sqrt{2013 - x^2} = 1 \\ x = \sqrt{4024 - x^2} \end{cases}$

គេបាន $x = \sqrt{2012}$

- ករណី $x \in \left[-\sqrt{2013}, 0\right)$

ស្រាយដូចគ្នា : $f(x) \ge x\left(\sqrt{2011} \cdot \sqrt{4024 - x^2}\right)$

$f(x) \ge -\sqrt{2012} \cdot 2012$

នោះ $\boxed{\min f(x) = -\sqrt{2012} \cdot 2012}$ ពេល $x = -\sqrt{2012}$

លំហាត់ទី ៦៥៨

គណនាផលបូក $S_{2012} = cosa + cos2a + cos3a + \cdots + cos2012a$ ។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី ១ :

- បើ $a = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ នោះ $cosa = cos2a = \cdots = cos2012a = 1$

ដូចនេះ $S_{2012} = 2012$

- បើ $a \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow sin\frac{a}{2} \neq 0$ គេអាចសរសេរ

$$2sin\frac{a}{2}S_{2012} = 2sin\frac{a}{2}cosa + 2sin\frac{a}{2}cos2a + 2sin\frac{a}{2}cos3a + \cdots + 2sin\frac{a}{2}cos2012a$$

$$= \left(-sin\frac{a}{2} + sin\frac{3a}{2}\right) + \left(-sin\frac{3a}{2} + sin\frac{5a}{2}\right) + \cdots + \left(-sin\frac{4023a}{2} + sin\frac{4025a}{2}\right)$$

$$= sin\frac{4025a}{2} - sin\frac{a}{2} = 2sin\frac{2012a}{2}cos\frac{2013a}{2}$$

$$\Longrightarrow S_{2012} = \frac{sin\frac{2012a}{2}cos\frac{2013a}{2}}{sin\frac{a}{2}} = \frac{sin1006acos\frac{2013a}{2}}{sin\frac{a}{2}}, a \neq k2\pi$$

របៀបទី ២ :

$S_{2012} = cosa + cos2a + cos3a + \cdots + cos2012a$

$P_{2012} = sina + sin2a + sin3a + \cdots + sin2012a$

$S_{2012} + iP_{2012} = z + z^2 + \cdots + z^{2012}$ ដែល $z = cosa + isina$

$$\Longrightarrow 1 + S_{2012} + iP_{2012} = \frac{1 - z^{2013}}{1 - z}$$

$$= \frac{sin\frac{2013a}{2}}{sin\frac{a}{2}}\left[cos\frac{2012a}{2} + isin\frac{2012a}{2}\right]$$

$$\Longrightarrow 1+S_{2012}=\frac{sin\frac{2013a}{2}}{sin\frac{a}{2}}cos1006$$

$$S_{2012}=\frac{sin1006acos\frac{2013a}{2}}{sin\frac{a}{2}}$$ បើ $a\neq k2\pi$

បើ $a=k2\pi\Longrightarrow S_{2012}=2012$

លំហាត់ទី ៦៥៩

បង្ហាញថា $A=6^{2012}+13^{2012}-2^{2012}-17^{2012}$ ចែកដាច់នឹង 44 ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន $x^n-y^n=(x-y)\left(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+y^{n-1}\right)=(x-y)z$ ចែកដាច់នឹង $x-y$

គេបាន $\left(6^{2012}-2^{2012}\right)+\left(13^{2012}-17^{2012}\right)=4k-4l$ ចែកដាច់នឹង 4

តាមរបៀបដូចគ្នាដែរ $\left(6^{2012}-17^{2012}\right)+\left(13^{2012}-2^{2012}\right)=-11m+11n$ ចែកដាច់នឹង 11

ដោយ $A\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,4),\ A\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,11),\ GCD(4,11)=1$

ដូចនេះ $A=6^{2012}+13^{2012}-2^{2012}-17^{2012}$ ចែកដាច់នឹង 44

លំហាត់ទី ៦៦០

ដោះស្រាយសមីការ $sin^2x^2+sin^22x^2=sin^23x^2+sin^24x^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

សមីការអាចសរសេរ

$$\frac{1-cos2x^2}{2}+\frac{1-cos4x^2}{2}=\frac{1-cos6x^2}{2}+\frac{1-cos8x^2}{2}$$

$$\Longleftrightarrow cos2x^2+cos4x^2=cos6x^2+cos8x^2$$

$$\Longleftrightarrow cos3x^2cosx^2=cos7x^2cosx^2$$

$$\Longleftrightarrow cosx^2\left(cos7x^2-cos3x^2\right)=0$$

$$\Longleftrightarrow cosx^2sin2x^2sin5x^2=0\quad (E)$$

គេទាញបាន $cosx^2=0\Longleftrightarrow x_1^2=(2k+1)\frac{\pi}{2},k=0,1,2,\ldots$

$sin2x^2 = 0 \Longleftrightarrow x_2^2 = l\frac{\pi}{2}, l = 0,1,2,\ldots$ $sin5x^2 = 0 \Longleftrightarrow x_3^2 = m\frac{\pi}{5}, m = 0,1,2,\ldots$

- បើ $l = 2n+1 \Longrightarrow x_2^2 = (2n+1)\frac{\pi}{2} = x_1^2$
- បើ $l = 2n \Longrightarrow x_2^2 = n\pi = x_3^2$ នៅពេលដែល $m = 5p$

$(E) \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{(2k+1)\frac{\pi}{2}},\ x = \pm\sqrt{m\frac{\pi}{5}}$ ដែល $k = 0,1,2,\ldots$ និង $m = 0,1,2,\ldots$

លំហាត់ទី ៦៦១

ប្រអប់មួយមានបាតជាចតុកោណកែងដែលមានអង្កត់ទ្រូងប្រវែង $D(a) = \dfrac{a^2 - \sqrt{a^4+4}+2}{a}$ ដែល $a > 0$ ។ រកប្រវែងអតិបរមានៃអង្កត់ទ្រូងបាតប្រអប់។

ដំណោះស្រាយ

របៀបទី១ :

គេមាន

$$D(a) = \frac{a^2 - \sqrt{a^4+4}+2}{a} = \frac{(a^2+2)^2 - (a^4+4)}{a\left(a^2+2+\sqrt{a^4+4}\right)}$$

$$= \frac{4a^2}{a\left(a^2+2+\sqrt{a^4+4}\right)} = \frac{4}{\left(a^2+2+\sqrt{a^4+4}\right)/a}$$

$$= \frac{4}{a+\frac{2}{a}+\sqrt{a^2+\frac{4}{a^2}}}$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី គេបាន

$$a+\frac{2}{a} \ge 2\sqrt{2},\ a^2+\frac{4}{a^2} \ge 4 \Longrightarrow \sqrt{a^2+\frac{4}{a^2}} \ge 2$$

$$a+\frac{2}{a}+\sqrt{a^2+\frac{4}{a^2}} \ge 2\sqrt{2}+2 \Longrightarrow D(a) = \frac{4}{a+\frac{2}{a}+\sqrt{a^2+\frac{4}{a^2}}} \le \frac{4}{2\sqrt{2}+2} = 2\sqrt{2}-2$$

ដូចនេះ ប្រវែងអតិបរមានៃអង្កត់ទ្រូងរបស់បាតប្រអប់ $\text{Max}(D(a)) = 2\sqrt{2}-2$ ឯកតាប្រវែង

របៀបទី២ :

ដេរីវេ $D'(a)=\dfrac{-a^4+4+\left(a^2-2\right)\sqrt{a^4+4}}{a^2\left(\sqrt{a^4+4}\right)}$

$D'(a)$ យកសញ្ញាតាម $-a^4+4+\left(a^2-2\right)\sqrt{a^4+4}$

$=\left(a^2-2\right)\left(-a^2-2+\sqrt{a^4+4}\right)$

ដោយសារ $a^2+2=\sqrt{\left(a^2+2\right)^2}=\sqrt{a^4+4+4a^2}>\sqrt{a^4+4}$

$\Longrightarrow -a^2-2+\sqrt{a^4+4}<0,\ \forall a>0$

$\Longrightarrow D'(a)$ មានសញ្ញាដូច $2-a^2,\ \forall a>0$

$\Longrightarrow D'(a)=0 \Longleftrightarrow a^2-2=0$ ឬ $a=\sqrt{2}$

a	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$D'(a)$		$+$	0	$-$	
$D(a)$		$\nearrow$	$2\sqrt{2}-2$	$\searrow$	

ដូចនេះ: $D(a)$ អតិបរមាគឺ $D(a)=2\sqrt{2}-2$

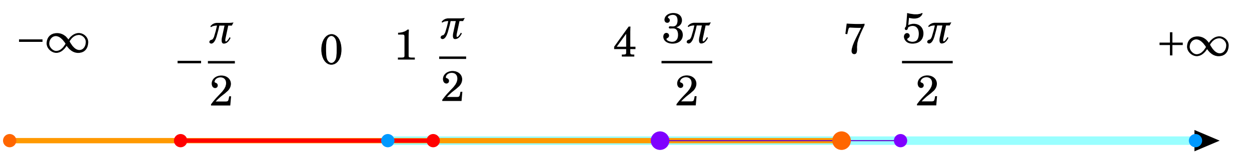
លំហាត់ទី ៦៦២

រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ $f(x)=ln(\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x})+\sqrt{cosx}$។

ដំណោះស្រាយ

អនុគមន៍ f មានន័យ $\Longleftrightarrow \begin{cases} x-1\geq 0 \ \Leftrightarrow x\geq 1 \\ 7-x\geq 0 \ \Leftrightarrow x\leq 7 \\ \sqrt{x-1}\geq\sqrt{7-x} \ \Leftrightarrow x\geq 4 \\ cosx\geq 0 \ \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \quad (*) \end{cases}$

$(*)\Longrightarrow x\in[\ldots,\ldots]\cup\ldots\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2}\right]\cup[\ldots,\ldots]\cup\ldots$



ដូចនេះ $\mathbb{D}=\left[\frac{3\pi}{2},7\right]$

លំហាត់ទី ៦៦៣

ពហុធា $r(x)=x^5-5x^3-3x^2+2x+1$ មានឫសប្រាំផ្សេងគ្នា a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 ហើយ $s(x)=-x^2+5$ ជាពហុធាមួយផ្សេងទៀត។
គណនាផលគុណ $p=s(a_1)s(a_2)s(a_3)s(a_4)s(a_5)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 ជាឫសនៃពហុធា $r(x)$ នោះគេបាន

$r(x)=x^5-5x^3-3x^2+2x+1=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)$

$=\prod_{i=1}^{5}(x-a_i)$

ផលគុណ $p=s(a_1)s(a_2)s(a_3)s(a_4)s(a_5)=\left(5-a_1^2\right)\left(5-a_2^2\right)\left(5-a_3^2\right)$
$\left(5-a_4^2\right)\left(5-a_5^2\right)$

$$p=\prod_{i=1}^{5}\left(\sqrt{5}-a_i\right)\times\prod_{i=1}^{5}\left(\sqrt{5}+a_i\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{5}\left(\sqrt{5}-a_i\right)\times(-1)\prod_{i=1}^{5}\left(-\sqrt{5}-a_i\right)=-r(\sqrt{5})r(-\sqrt{5})$$

$$=-\left((\sqrt{5})^5-5(\sqrt{5})^3-3(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}+1\right)\left((-\sqrt{5})^5-(-\sqrt{5})^3-3(-\sqrt{5})^2\right.$$
$$\left.-2\sqrt{5}+1\right)=-(-14+2\sqrt{5})(-14-2\sqrt{5})=-176$$

លំហាត់ទី ៦៦៤

អនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=\dfrac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$ ដែល a ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានហើយខុសពី 1 ។ គណនាផលបូក $S=f\left(\frac{1}{2012}\right)+f\left(\frac{2}{2012}\right)+\cdots+f\left(\frac{2011}{2012}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន

$$f(x)+f(1-x)=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}+\frac{1^{1-x}}{a^{1-x}+\sqrt{a}}$$

$$f(x)+f(1-x)=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{a^x+\sqrt{a}}=1$$

គេអាចសេរសេរ

$$f(\frac{1}{2012}+\frac{2011}{2012})=1$$

$$f(\frac{2}{2012}+\frac{2011}{2012})=1$$

$$f(\frac{3}{2012}+\frac{2009}{2012})=1$$

....

$$f(\frac{1005}{2012}+\frac{1007}{2012})=1$$

$$f(\frac{1006}{2012})=f(1/2)=\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}=1/2$$

ដោយបូកអង្គ និង អង្គ គេបាន

$$S=f\left(\frac{1}{2012}\right)+f\left(\frac{2}{2012}\right)+\cdots+f\left(\frac{2011}{2012}\right)=1005+1/2=100.5.5$$

ប្រលងជ្រើសរើសសិស្សពូកែរាជធានីភ្នំពេញ
ផ្នែកគណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា និង អក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី ១២
សម័យប្រលង ២០ កុម្ភៈ ២០២០
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យាទី ១ រយៈពេល ៣ ម៉ោង

I. រកចំនួនតួចែកវិជ្ជមាននៃចំនួន $A=\left[2019^3+3(2019\times 2020)+1\right]^2$ ។

II. តាង $x=1+\sqrt[6]{2}+\sqrt[6]{4}+\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{16}+\sqrt[6]{32}$ ។ រកតម្លៃនៃ $B=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{30}$ ។

III. តាង $a_1,a_2,a_3,\ldots$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនសនិទាន ដែល $a_1=2$ និង ចំពោះ $n\geq 1$,
$a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$ ។ កំណត់ a_{2020} ។

IV. រកតម្លៃធំបំផុត និង តម្លៃតូចបំផុតនៃ $y=\dfrac{3x^2+2x+2}{x^2+2x+2}$ ។

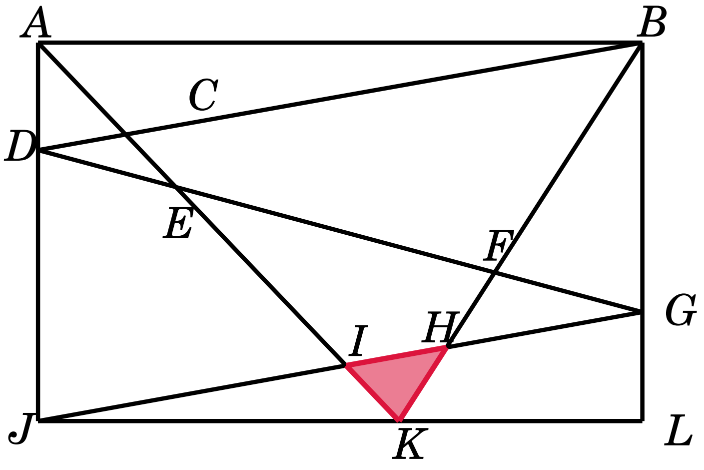
V. រកសមីការដឺក្រេទី២ ដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់ ហើយមានឫស $cos72^0$ និង $cos144^0$ ។

VI. ដោយមិនប្រើម៉ាស៊ីនគិតលេខ គណនា
$P=\dfrac{1}{cos^2 10^0}+\dfrac{1}{sin^2 20^0}+\dfrac{1}{sin^2 40^0}-\dfrac{1}{cos^2 45^0}$ ។

VII. ប្រៀបធៀប $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(2n-2k+1)(2n-k+1)}$ និង $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ ។

VIII. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt[3]{\dfrac{2}{1}}+\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}+\cdots+\sqrt[3]{\dfrac{1011}{1010}}-\dfrac{2019}{2}<\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{9096}$ ។

IX. ក្នុងរូបខាងស្តាំ បង្ហាញពីចតុកោណកែង $ABLJ$ ដែលផ្ទៃក្រឡានៃត្រីកោណ ACD ចតុកោណ $BCEF$ ចតុកោណ $DEIJ$ និង ត្រីកោណ FGH ស្មើនឹង $22cm^2$, $500cm^2, 482cm^2$ និង $22cm^2$ រៀងគ្នា ។
រកផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ HIK ជា cm^2 ។



អត្រាកំណែ

I. រកចំនួនតួចែកវិជ្ជមាននៃចំនួន $A=\left[2019^3+3(2019\times 2020)+1\right]^2$

តាង $a=2019$

$\Rightarrow \left[a^3+3a(a+1)+1\right]^2=(a+1)^6$

$\Rightarrow 2020^6=\left(2^2\times 5\times 101\right)^6=2^{12}\times 5^6\times 101^6$

ចំនួនតួចែកវិជ្ជមាន គឺ $(12+1)(6+1)(6+1)=637$

ដូចនេះ: ចំនួនតួចែកវិជ្ជមាននៃ A គឺ 637

II. រកតម្លៃនៃ B

$x=1+\sqrt[6]{2}+\sqrt[6]{4}+\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{16}+\sqrt[6]{32}$

តាង $a=\sqrt[6]{2}$

$\Rightarrow x=1+a+a^2+a^3+a^4+a^5$

$$\Rightarrow x=\frac{a^6-1}{a-1}=\frac{2-1}{\sqrt[6]{2}-1}=\frac{1}{\sqrt[6]{2}-1}$$

$$\Rightarrow B=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{30}=(1+\sqrt[6]{2}-1)^{30}$$

ដូចនេះ: តម្លៃនៃ $B=32$

III. កំណត់ a_{2020}

យើងមាន $a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$

$$\Rightarrow a_{n+2}=\frac{1+a_{n+1}}{1-a_{n+1}}=\frac{1+\dfrac{1+a_n}{1-a_n}}{1-\dfrac{1+a_n}{1-a_n}}=\frac{-1}{a_n}$$

$\Rightarrow a_{n+4} = \dfrac{-1}{a_{n+2}} = a_n,\ \forall n \geq 1$

គេបាន $a_4 = a_8 = a_{12} = \ldots = a_{2020}$

ដោយ $a_1 = 2 \Rightarrow a_2 = \dfrac{1+2}{1-2} = -3$

$a_3 = \dfrac{1-3}{1+3} = -\dfrac{1}{2},\ a_4 = \dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$

ដូចនេះ $\boxed{a_{2020} = \dfrac{1}{3}}$

IV. រកតម្លៃធំបំផុត និង តូចបំផុត

របៀបទី ១:

យើងមាន $y = \dfrac{3x^2+2x+2}{x^2+2x+2}$

$yx^2 + 2xy + 2y = 3x^2 + 2x + 2$

$(y-3)x^2 + 2x(y-1) + (2y-2) = 0$

$\Delta' = (y-1)^2 - (y-3)(2y-2)$

$= -y^2 + 6y - 5 = -(y-1)(y-5)$

សមីការមានឫសពិតលុះត្រាតែ $\Delta' \geq 0$

$\Leftrightarrow -(y-1)(y-5) \geq 0$

$\Leftrightarrow 1 \leq y \leq 5$

ឫសសមីការពេល $\Delta' = 0$ គឺ $x = -\dfrac{y-1}{y-3}$

ដូចនេះ $\text{Max}\,y = 5$ ពេល $x = -2$, $\min y = 1$ ពេល $x = 0$

របៀបទី ២:

យើងមាន $y = \dfrac{3x^2+2x+2}{x^2+2x+2}$

$y' = \dfrac{(6x+2)\left(x^2+2x+2\right) - (2x+2)\left(3x^2+2x+2\right)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow 4x^2 + 8x = 0$

$x = 0, x = -2$

តារាងអថេរភាព

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'			0		0		
y		↗		↘		↗	

$y(-2)=\dfrac{12-4+2}{4-4+2}=5$

$y(0)=1$

ដូចនេះ $\text{Max}y=5$ ពេល $x=-2$, $\min y=1$ ពេល $x=0$

V. រកសមីការដឺក្រេទី២

$$\begin{cases} S=cos144^0+cos72^0 \\ P=cos144^0cos72^0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S=2cos108^0cos36^0 \\ P=-cos36^0cos72^0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S=-2cos72^0cos36^0 \\ P=-cos72^0cos36^0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} cos36^0cos72^0 &= \frac{sin72^0}{2sin36^0}\times\frac{sin144^0}{2sin72^0} \\ &= \frac{sin36^0}{4sin36^0}=\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S=-\dfrac{1}{2} \\ P=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

សមីការដឺក្រេទី ២ មានរាង $x^2-Sx+P=0$

$\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}=0$

ដូចនេះ សមីការដឺក្រេទី២គឺ $4x^2+2x-1=0$

VI. គណនា $P=\dfrac{1}{cos^2 10^0}+\dfrac{1}{sin^2 20^0}+\dfrac{1}{sin^2 40^0}-\dfrac{1}{cos^2 45^0}$

របៀបទី ១:

ដោយដឹងថា ៖

$cos^2 45^0 = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{cos^2 10^0} = \dfrac{1}{sin^2 80^0}$

$\dfrac{1}{sin^2 20^0} = \dfrac{4cos^2 20^0}{sin^2 40^0} = \dfrac{2(1+cos40^0)4cos^2 40^0}{sin^2 80^0}$

$\dfrac{1}{sin^2 40^0} = \dfrac{4cos^2 40^0}{sin^2 80^0}$

តាង $S = \dfrac{1}{cos^2 10^0} + \dfrac{1}{sin^2 20^0} + \dfrac{1}{sin^2 40^0}$

$S = \dfrac{1}{sin^2 80^0}\left(1 + 8(1+cos40^0)cos^2 40^0 + 4cos^2 40^0\right)$

$S = \dfrac{1}{cos^2 10^0}\left(1 + 4cos^2 40^0(3+2cos40^0)\right)$

$S = \dfrac{1}{cos^2 10^0}\left(1 + 2(1+cos80^0)(3+2cos40^0)\right)$

$S = \dfrac{1}{cos^2 10^0}\left[7 + 6(cos80^0 + cos40^0) + 2\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]$

$S = \dfrac{1}{cos^2 10^0}\left(6 + 12cos60^0 cos20^0\right)$

$S = \dfrac{6}{cos^2 10^0}(2cos^2 10^0) = 12$

$\Rightarrow P = S - 2 = 12 - 2 = 10$

ដូចនេះ $\boxed{P = 10}$

<u>របៀបទី ២:</u>

តាង $S = \dfrac{1}{cos^2 10^0} + \dfrac{1}{sin^2 20^0} + \dfrac{1}{sin^2 40^0}$

$= \dfrac{1}{sin^2 80^0} + \dfrac{1}{sin^2 20^0} + \dfrac{1}{sin^2 40^0}$

$= \dfrac{2}{1-cos160^0} + \dfrac{2}{1-cos40^0} + \dfrac{2}{1-cos80^0}$

តាម $cos3\alpha = 4cos^3\alpha - 3cos\alpha$

យក $\alpha = 160^0, 40^0, 80^0 \Rightarrow cos(3\times 160^0) = cos120^0 = -\dfrac{1}{2}$

$cos(3\times 40^0) = -\dfrac{1}{2}$

$cos(3\times 80^0) = -cos60^0 = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow cos160^0, cos40^0, cos80^0$ ជាឫសនៃសមីការ $4t^3 - 3t + \frac{1}{2} = 0$

តាង $t_1 = cos160^0, t_2 = cos40^0, t_3 = cos80^0$

តាង $f(t) = 4t^3 - 3t + \frac{1}{2} = 4(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)$

$f(1) = 4(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)$

$\Rightarrow (1-t_1)(1-t_2)(1-t_3) = \frac{f(1)}{4} = \frac{3}{8}$

គេបាន $S = \frac{2}{1-t_1} + \frac{2}{1-t_2} + \frac{2}{1-t_3}$

$= \frac{2}{(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)}[3 - 2(t_1+t_2+t_3) + (t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1)]$

តាមទ្រឹស្តីបទ Viete:$t_1 + t_2 + t_3 = 0,\ t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -\frac{3}{4}$

$\Rightarrow S = \frac{2}{\frac{3}{8}}\left(3 - 2\times 0 - \frac{3}{4}\right) = 12$

VII. ប្រៀបធៀប $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(2n-2k+1)(2n-k+1)}$ និង $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

យើងមាន $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(2n-2k+1)(2n-k+1)}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n-k+1)-(2n-2k+1)}{(2n-2k+1)(2n-k+1)}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n-2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n-k+1)}$

$= \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-3} + \cdots + \frac{1}{3} + \frac{1}{1}\right) -$

$\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right)$

និង $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

$T_n - S_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) -$

$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n}\right)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$
$$\Rightarrow T_n - \frac{1}{T_n} = S_n$$

ដូចនេះ $\boxed{T_n = 2S_n}$

VIII. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt[3]{\frac{2}{1}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \cdots + \sqrt[3]{\frac{1011}{1010}} - \frac{2019}{2} < \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{9096}$

សង្កេត $\frac{3k+1}{3k} + \frac{3k+2}{3k+1} + \frac{3k+3}{3k+2} = 3 + \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2}$

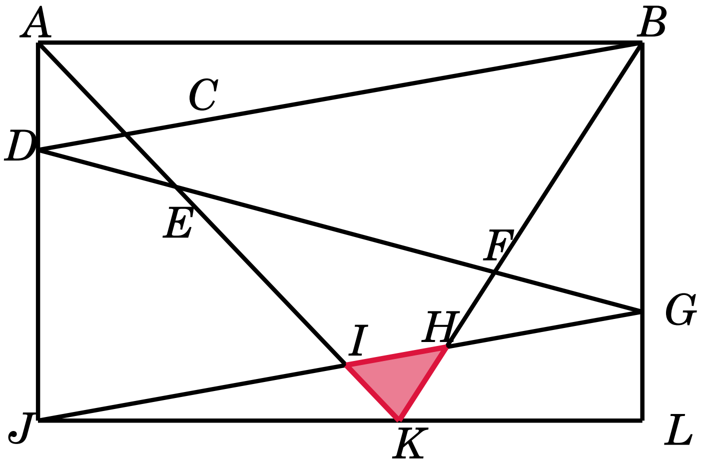
$$\Rightarrow \left(\frac{3k+1}{3k}\right)\left(\frac{3k+2}{3k+1}\right)\left(\frac{3k+3}{3k+2}\right) = \frac{k+1}{k}$$

តាមវិសមភាព Cauchy

$$\frac{3k+1}{3k} + \frac{3k+2}{3k+1} + \frac{3k+3}{3k+2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{k+1}{k}}$$
$$\Rightarrow 3\sum_{k=1}^{1010}\sqrt[3]{\frac{k+1}{k}} \leq \sum_{k=1}^{1010}\left(3 + \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2}\right)$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{1010}\sqrt[3]{\frac{k+1}{k}} \leq \sum_{k=1}^{1010}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2}\right)\right]$$
$$\leq 1010 + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{9096}$$
$$\sum_{k=1}^{1010}\sqrt[3]{\frac{k+1}{k}} - \frac{2019}{2} \leq 1010 - \frac{2019}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{9096}$$
$$\leq \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{9096}$$

ដូចនេះ $\boxed{\sqrt[3]{\frac{2}{1}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \cdots + \sqrt[3]{\frac{1011}{1010}} - \frac{2019}{2} < \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{9096}}$

IX. រកផ្ទៃក្រឡា $\triangle HIK$ ជា cm^2



តាង $S = S_{ABLJ}$

$\Rightarrow S_{ABK} = \frac{1}{2}S = S_{ABD} + S_{DGJ}$

ដោយ $S_{ABK} = S_{ABC} + S_{BCEF} + S_{EFHI} + S_{IHK} \quad (1)$

និង $S_{ABD} + S_{DGJ} = S_{ABC} + S_{ACD} + S_{DEIJ} + S_{EFHI} + S_{FGH} \quad (2)$

$(1) = (2)$

$\Rightarrow S_{BCEF} + S_{IHK} = S_{ACD} + S_{DEIJ} + S_{FGH}$

$\Rightarrow 500 + S_{IHK} = 22 + 482 + 22$

$\Rightarrow S_{IHK} = 526 - 500 = 26$

ដូចនេះ $\boxed{S_{IHK} = 26cm^2}$

ប្រលងជ្រើសរើសសិស្សពូកែរាជធានីភ្នំពេញ
ផ្នែកគណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា និង អក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី ១២
សម័យប្រលង ២០ កុម្ភៈ ២០២០
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យាទី ១ រយៈពេល ៣ ម៉ោង

I. រកពហុធាដឺក្រេតូចបំផុត ដោយមានមេគុណជាចំនួនគត់ហើយឫសមួយរបស់វា គឺ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ។

II. គេឱ្យ n ជាចំនួនដែលមានលេខដប់ខ្ទង់ មានទម្រង់ $\overline{2019x2020y}$ ដែល x,y ជាលេខ $0,1,2,...,9$ ។ រកគ្រប់គូ (x,y) ដែល n ចែកដាច់នឹង 33 ។

III. តាង m,n ជាចំនួនគត់ដែល $1<m\le n$ កំណត់ដោយ :
$f(m,n)=\left(1-\dfrac{1}{m}\right)\left(1-\dfrac{1}{m+1}\right)\left(1-\dfrac{1}{m+1}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ ។
បើ $S=f(2,2020)+f(3,2020)+\cdots+f(2020,2020)$ ។ រកតម្លៃនៃ $2S$ ។

IV. រកគូមានលំដាប់នៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x,y) ដែលបំពេញសមីការ
$x\sqrt{y}+y\sqrt{x}+\sqrt{2020xy}-\sqrt{2020x}-\sqrt{2020y}-2020=0$ ។

V. គេឱ្យអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ បំពេញទំនាក់ទំនង
$f(x)\cdot f(y)=f(2xy+3)+3f(x+y)-3f(x)+6x$ ដែល $x,y\in\mathbb{R}$ ។

VI. គេឱ្យផ្នែកទសភាគនៃ $M=\left(\sqrt{13}+\sqrt{11}\right)^6$ គឺ p ។ រកតម្លៃនៃ $M(1-p)$ ។

VII. គេឱ្យត្រីកោណ ABC និងកន្លះរង្វង់អង្កត់ផ្ចិត EF នៅលើជ្រុង BC ដែលប៉ះនឹងជ្រុង AB,AC រៀងគ្នាត្រង់ M និង N ។ បើ $BE=1,\ EF=24, FC=3$ រកបរិមាត្រ និង ផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ ABC ។

អត្រាកំណែ

I. រកពហុធាដឺក្រេតូចបំផុត ដោយមានមេគុណជាចំនួនគត់ហើយឫសមួយរបស់វា គឺ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$\sqrt[3]{3}^3=(x-\sqrt{2})^3$

$\Rightarrow 3=x^3-3x^2\sqrt{2}+6x-2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \left(x^3+6x-3\right)=\sqrt{2}\left(3x^2+2\right)$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេ

$\Rightarrow \left(x^3+6x-3\right)^2 = 2\left(3x^2+2\right)^2$

$\Rightarrow x^6+36x^2+9+12x^4-6x^3-36x = 18x^4+24x^2+8$

ដូចនេះ $\boxed{\text{សមីការដឺក្រេតូចបំផុតគឺ } x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1=0}$

II. រកចំនួន n ដែលចែកដាច់នឹង 33

យើងមាន $n=\overline{2019x2020y}\vdots 33$

$n\vdots 3$ $16+x+y\vdots 3$

$1+x+y\vdots 3$

$1+x+y=3k_1,\ k_1\in\mathbb{Z}\quad(1)$

$n\vdots 11$ $(2+1+x)-(9+2+2+y)\vdots 11$

$1+x-y\vdots 11$

$1+x-y=11k_2,\ \mathbb{Z}\quad(2)$

$(2)\Rightarrow -8\le 1+x-y=11k_2\le 10$

$\Rightarrow k_2=0 \Leftrightarrow y=x+1$

$(1)\Rightarrow 1+x+x+1=3k_1$

$\Rightarrow 2x+2=3k_1$

តែ $2\le 2x+2=3k_1\le 20$

$\Rightarrow \dfrac{2}{3}\le k_1\le \dfrac{20}{3}$

$\Rightarrow k_1=2,4,6$

គេបាន $x=\dfrac{3k_1-2}{2}=2,5,8$

ដោយ $y=x+1\Rightarrow y=3,6,9$

$(x,y)=(2,3),(5,6),(8,9)$

ដូចនេះ $\boxed{\text{មានចំនួនគត់ } n \text{ បីដែលចែកដាច់នឹង } 33}$

III. រកតម្លៃនៃ $2S$

មានចំនួនគត់ $1<m\le n$ និង

$$f(m,n)=\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$f(m,n)=\left(\frac{m-1}{m}\right)\left(\frac{m}{m+1}\right)\left(\frac{m+1}{m+2}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{m-1}{n}$$

$$f(2,n)+f(3,n)+\cdots+f(n,n)=\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}=\frac{n-1}{2}$$

$S = f(2,2020) + f(3,2020) + \cdots + f(2020,2020) = \dfrac{2019}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{2S = 2019}$

IV. រកគូមានលំដាប់នៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x, y) ដែលបំពេញសមីការ

$x\sqrt{y} + y\sqrt{x} + \sqrt{2020xy} - \sqrt{2020x} - \sqrt{2020y} - 2020 = 0$

គេបាន

$\sqrt{xy}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{2020}\right) - \sqrt{2020}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{2020}\right) = 0$

$\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{2020}\right)\left(\sqrt{xy} - \sqrt{2020}\right) = 0$

ដោយ $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{2020} > 0$

$\Rightarrow \sqrt{xy} - \sqrt{2020} = 0$

$\Rightarrow xy = 2020 = 2^2 \times 5 \times 101$

ដូចនេះ គូមានលំដាប់នៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x, y) គឺ

$(x, y) = (1,2020),(2,1010),(4,505),(5,404)$

$(10,202),(20,101),(101,20),(202,10)$

$(404,5),(505,4),(1010,2),(2020,1)$

V. រកតម្លៃនៃ $f(1009)$

គេមានទំនាក់ទំនង $f(x)\cdot f(y) = f(2xy+3) + 3f(x+y) - 3f(x) + 6x$ ដែល $x, y \in \mathbb{R}$

ប្តូរអថេរ x និង y គេបាន

$f(y)f(x) = f(2xy+3) + f(x+y) - 3f(y) + 6y$

ដកអង្គ និង អង្គនៃទំនាក់ទំនងទាំងពីរគេបាន

$0 = -3f(x) + 3f(y) + 6x - 6y$

$3f(x) - 6x = 3f(y) - 6y$

តាង $g(x) = f(x) - 2x$

$\Rightarrow g(x) = g(y) = k,\ k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x) = 2x + k$

ជំនួសចូលទំនាក់ទំនងដើម គេបាន

$(2x+k)(2y+k) = 2(2xy+3) + k + 3[2(x+y)+k] - 3(2x+k) + 6x$

$4xy + 2xk + 2yk + k^2 = 4xy + 6 + k + 6x + 6y + 3k - 6x - 3k + 6x$

$k^2 + 2k(x+y) = 6(x+y) + k + 6$

$k^2 - k - 6 + 2(x+y)(k-3) = 0$

$(k-3)(k+2+2x+2y) = 0$

$\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow k = 3$

$f(x) = 2x + 3$

ដូចនេះ $\boxed{f(1009) = 2021}$

VI. រកតម្លៃនៃ $M(1-p)$

យើងមាន $M = \left(\sqrt{13} + \sqrt{11}\right)^6$ ផ្នែកទសភាគនៃ M គឺ p

ដំបូងរក $\lfloor M \rfloor$ ដែល $\{M\} = p$

តាង $A = \sqrt{13} + \sqrt{11},\ B = \sqrt{13} - \sqrt{11}$

$\Rightarrow M = A^6,\ A + B = 2\sqrt{13},\ A \cdot B = 2$

$A^2 + B^2 = (A+B)^2 - 2AB = 4 \times 13 - 2 \times 2 = 48$

$$\begin{aligned} A^6 + B^6 &= \left(A^2\right)^3 + \left(B^2\right)^3 \\ &= \left(A^2 + B^2\right)\left(A^4 - A^2B^2 + B^4\right) \\ &= 48\left[\left(A^2 + B^2\right)^2 - 3A^2B^2\right] \\ &= 48\left(48^2 - 12\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \left(A^6 + B^6\right) \in \mathbb{N}$

ដោយ $0 < B = \sqrt{13} - \sqrt{11} < 1 \Rightarrow 0 < B^6 < 1$

$\Rightarrow \lfloor M \rfloor = A^6 + B^6 - 1$

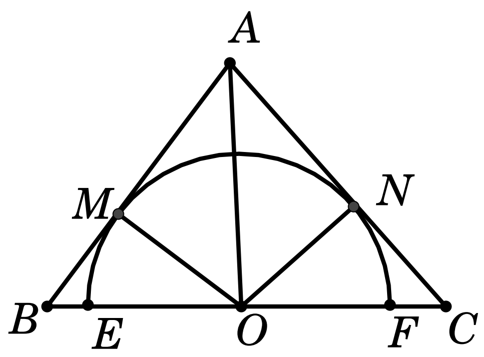
$P = \{M\} = M - \lfloor M \rfloor = A^6 - \left(A^6 + B^6 - 1\right)$

$\Rightarrow 1 - p = B^6$

$\Rightarrow M(1-p) = A^6B^6 = 2^6 = 64$

ដូចនេះ $\boxed{M(1-p) = 64}$

VII. រកបរិមាត្រត្រីកោណ ABC



មាន $BE = 1, EF = 24, FC = 3$

$\Rightarrow BC = 28, OB = 13, OC = 15$

$OE = OF = OM = ON = 12$

ត្រីកោណកែង OBM : $BM\sqrt{13^2 - 12^2} = 5$

ត្រីកោណកែង OCN : $CN = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$

តាង $AM = AN = x$

$\Rightarrow AB = x + 5,\ AC = x + 9$

ដោយ AO ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះ AO នៃ $\triangle ABC$

តាមទ្រឹស្តីបទកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុងត្រីកោណ

$$\frac{OB}{OC} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{13}{15} = \frac{x+5}{x+9}$$

$\Leftrightarrow x = 21$

$\Rightarrow AB = 26,\ AC = 30$

$p = AB + BC + CA = 26 + 28 + 30 = 84$

ដូចនេះ បរិមាត្រត្រីកោណ ABC គឺ $p = 84$ ឯកតាប្រវែង និង ផ្ទៃក្រឡា $S = 336$ ឯកតាផ្ទៃ

ប្រលងជ្រើសរើសសិស្សខេត្តសៀមរាប
ផ្នែកគណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា និង អក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី ១២
សម័យប្រលង ២៧ កុម្ភៈ ២០២០
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យាទី ១ រយៈពេល ៣ ម៉ោង

I. ១. បើ $x=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{1}$ ។ គណនា $S=\dfrac{3}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$ ។

២. បើ $a^x=b^y=(ab)^z$ ដែល $a>0,b>0,a\neq 1,b\neq 1$ ។
បង្ហាញថា $xy=z(x+y)$ ។

II. រកគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $n^4-4n^3+22n^2-36n+18$ ជាការេប្រាកដ ។

III. ១. គេមានស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=1$ និង $u_n=\left[\dfrac{2n^2}{3\left(n^2-1\right)}\right]u_{n-1}$ ។ តាង $v_n=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)u_n$ ។ គណនា v_n រួចកំណត់ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

២. បើ a,b,c ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $a^3+b^3+c^3=3$ ។
បង្ហាញថា $a^5+b^5+c^5\geq 3$ ។

IV. គេជួលទូកឆ្លងទន្លេ ។ ទូកដែលត្រូវជួលមានពីរប្រភេទ ។ ទូកធំអាចផ្ទុកមនុស្សបាន 12 នាក់ ។ ទូកតូចអាចផ្ទុកមនុស្សបាន 5 នាក់ ។ បើគេមានមនុស្ស 99 នាក់ តើគេត្រូវជួលទូកធំ ប៉ុន្មាន? ទូកតូចប៉ុន្មាន?

V. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយដែលមានជ្រុង a,b,c ឈមមុំរៀងគ្នា A,B,C និង m_a, m_b,m_c ជារង្វាស់មេដ្យានគូសចេញពីកំពូលរៀងគ្នា A,B,C ។

ក) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $m_a^2=\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$ ។

ខ) បង្ហាញថា $m_a^2+m_b^2+m_c^2=3R(2+2cosAcosBcosC)$ ដែល R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ។

VI. រកសំណល់ពេលចែក $\left(n^2+n+41\right)^2$ នឹង 12 ។

អត្រាកំណែ

I. ១. គណនា $S=\dfrac{3}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$

$$S=\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}=1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}-1=\left(1+\frac{1}{x}\right)^3-1$$

ដោយ $x=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{1}$ នោះ $\left(\sqrt[3]{2}-1\right)x=\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{1}\right)=$
$\sqrt[3]{2}^3-1=1$

នោះ $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}\Leftrightarrow \dfrac{1}{x}=\sqrt[3]{2}-1$

$\Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{x}=\sqrt[3]{2}$

$\Leftrightarrow \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3=2$ ហើយ $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3-1=1$

ដូចនេះ $\boxed{S=1}$

២. បង្ហាញថា $xy=z(x+y)$

តាង $a^x=b^y=(ab)^z=k,\ k>0$ និង $k\neq 1$

$a^x=k\Leftrightarrow x=log_a k,\ b^y=k\Leftrightarrow y=log_b k,\ (ab)^z=k\Leftrightarrow z=log_{ab}k$

តែ $xy=log_a k\times log_b k \quad (1)$

ដោយ $z(x+y)=log_{ab}k(log_a k+log_b k)=\dfrac{1}{log_k ab}\left(\dfrac{1}{log_a k}+\dfrac{1}{log_b k}\right)$

$=\dfrac{1}{log_a k+log_b k}\left(\dfrac{log_a k+log_b k}{log_k a\times log_k b}\right)$

$=log_a k\times log_b k \quad (2)$

តាម $(1)\&(2):\ xy=z(x+y)$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{xy=z(x+y)}$

II. រកគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដែល $n^4-4n^3+22n^2-36n+18$ ជាការេប្រាកដ

តាង $A=n^4-4n^3+22n^2-36n+18=n^4-4n^3+4n^2+18n^2-36n+18$

$A=\left(n^2-2n\right)^2+18\left(n^2-2n\right)+18,$ យក $n^2-2n=x$ និង $A=y^2$

$y^2=x^2+18x+18=x^2+2\times 9\times x+9^2-63=(x+9)^2-63$

$(x+9)^2-y^2=63$ ឬ $(x-y+9)(x+y+9)=63=1\times 63=3\times 21=7\times 9$

• $\begin{cases}x-y+9=1\\x+y+9=63\end{cases}$ នោះ $2x=64-18$ ហើយ $x=23$ និង $y=31$

• $\begin{cases}x-y+9=3\\x+y+9=21\end{cases}$ នោះ $2x=6$ ហើយ$x=3$ និង $y=9$

• $\begin{cases}x-y+9=7\\x+y+9=9\end{cases}$ នោះ $2x=-2$ ហើយ $x=-1$ និង $y=1$

បើ $x=23$ នោះ $n^2-2n=23$ ឬ $n^2-2n-23=0$ មាន $\Delta'=24$ (មិនអាចមាន $n\in\mathbb{Z}$)
បើ $x=3$ នោះ $n^2-2n=3$ ឬ $n^2-2n-3=0$ រាង $a-b+c=0$ នោះ $n=-1$ ឬ $n=3$
$\Rightarrow n=3$ ជាចម្លើយ
បើ $x=-1$ នោះ $n^2-2n=-1$ ឬ $(n-1)^2=0$ នោះ $n=1$
ដូចនេះ $\boxed{n=1 \text{ ឬ } n=3}$

III. ១. គណនា v_n រួចកំណត់ u_n ជាអនុគមន៍នៃ n
ដោយ $v_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)u_n$ នោះ $v_{n-1}=\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)u_{n-1}=\left(\frac{n}{n-1}\right)u_{n-1}$

$$v_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)u_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)\left[\frac{2n^2}{3\left(n^2-1\right)}u_{n-1}\right]=\frac{2}{3}\left(\frac{n}{n-1}\right)u_{n-1}$$

នោះ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុង $q=\frac{2}{3}$
តាមរូបមន្ត $v_n=v_1\times q^{n-1}$
តែ $v_1=2u_1=2$
$\Rightarrow v_n=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ហើយគេទាញបាន $u_n=\left(\frac{2n}{n+1}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$
ដូចនេះ $\boxed{v_n=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \text{ និង } u_n=\left(\frac{2n}{n+1}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$

២. បើ a,b,c ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ $a^3+b^3+c^3=3$ ។ បង្ហាញថា $a^5+b^5+c^5\geq 3$
យើងមាន $a^5+a^5+a^5+1+1\geq 5a^3 \quad (1)$ តាមវិសមភាពកូស៊ី
$b^5+b^5+b^5+1+1\geq 5b^3 \quad (2)$
$c^5+c^5+c^5+1+1\geq 5c^3 \quad (3)$

យក $(1)+(2)+(3):\ 3\left(a^5+b^5+c^5\right)+6\geq 5\left(a^3+b^3+c^3\right)$
តែ $a^3+b^3+c^3=3$ នោះ $3\left(a^5+b^5+c^5\right)+6\geq 15$
នោះ $a^5+b^5+c^5\geq 3$ ពិត
ដូចនេះ $\boxed{a^5+b^5+c^5\geq 3}$

IV. រកចំនួនទូកធំ និង ចំនួនទូកតូចដែលត្រូវជួល
តាង x ជាចំនួនទូកធំ $0<x\leq 8$, y ជាចំនួនទូកតូច $0<y\leq 19$

គេបាន $12x+5y=99 \quad (1)$

បើ $x=7, y=2$ នោះ $12\times 7+5\times 2=99 \quad (2)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

យក $(1)-(2)$ អង្គ និង អង្គ : $12(x-7)+5(y-2)=0$ ឬ $12(x-7)=-5(y-2)$

នោះ $y-2=12k,\ k\in\mathbb{Z}$ ឬ $x-7=5t,\ t\in\mathbb{Z}$ ឬ $x=7+5t$

តែ $0<x\le 8 \Leftrightarrow 0<7+5t\le 8$

$\Leftrightarrow -7<5t\le 1$

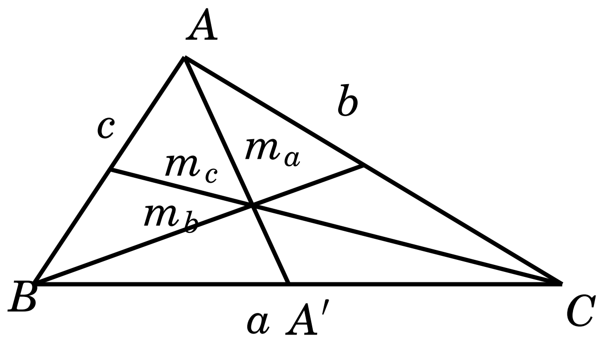
$\Leftrightarrow -\frac{7}{5}<t\le\frac{1}{5}$ នោះ $t=0$ ឬ $t=-1$

បើ $t=-1$ នោះ $x=2$ និង $y=15$

បើ $t=0$ នោះ $x=7$ និង $y=3$

ដូចនេះ គេអាចជួលទូកធំ 2 និង ទូកតូច 15 ឬ ទូកធំ 7 និងទូកតូច 3

V. ១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $m_a^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$



យើងមាន $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA'}$ និង $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA'}$

នោះ $2\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA'}+\overrightarrow{BA'}$

តែ A' ជាចំណុចកណ្តាលនៃ BC នោះ $\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CA'}=0$

នាំអោយ $2\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$4\overrightarrow{AA'}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ឬ $4m_a^2=c^2+b^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \quad (1)$

តែ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$ នោះ $\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ឬ $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=b^2+c^2-a^2 \quad (2)$

យក (2) ជំនួសក្នុង (1) : $4m_a^2=c^2+b^2+b^2+c^2-a^2=2b^2+2c^2-a^2$

ដូចនេះ $m_a^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$

២. បង្ហាញថា $m_a^2+m_b^2+m_c^2=3R(2+2cosAcosBcosC)$ ដែល R ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC

តាមសំនួរខាងលើ គេមាន $m_a^2=\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$, $m_b^2=\dfrac{2a^2+2c^2-b^2}{4}$, $m_c^2=\dfrac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$

នោះ $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\dfrac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)\quad(*)$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស $\dfrac{a}{sinA}=\dfrac{b}{sinB}=\dfrac{c}{sinC}=2R$

$\Rightarrow\dfrac{a^2}{sin^2A}=\dfrac{b^2}{sin^2B}=\dfrac{c^2}{sin^2C}=4R^2=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{sin^2A+sin^2B+sin^2C}$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=4R^2\left(sin^2A+sin^2B+sin^2C\right)\quad(**)$

យក $(**)$ ជំនួសចូល $(*)$ យើងបាន

$$\begin{aligned}m_a^2+m_b^2+m_c^2&=\frac{3}{4}\times4R^2\left(sin^2A+sin^2B+sin^2C\right)\\&=3R^2\left(\frac{1-cos2A}{2}+\frac{1-cos2B}{2}+\frac{1-cos2C}{2}\right)\\&=3R^2\left[2-\frac{1}{2}\times2cos(A+B)cos(A-B)-cos^2(A+B)\right]\\&=3R^2[2-cos(A+B)(cos(A-B)-cos(A+B))]\\&=3R^2[2-cos(A+B)\times2cosAcos(-B)]\end{aligned}$$

តែ $A+B+C=\pi$ នោះ $cos(A+B)=-cosC$

នោះ $m_a^2+m_b^2+m_c^2=3R^2(2+2cosAcosBcosC)$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{m_a^2+m_b^2+m_c^2=3R^2(2+2cosAcosBcosC)}$

VI. រកសំណល់ពេលចែក $\left(n^2+n+41\right)^2$ នឹង 12

ដោយ $n(n-1)(n+1)(n+2)$ ចែកដាច់នឹង 12 ផលគុណចំនួនគត់តគ្នា

$$\begin{aligned}\left(n^2+n+41\right)^2&\equiv\left(n^2+n+5\right)^2&&(\bmod 12)\\&\equiv\left(n^4+n^2+25+2n^3+10n^2+10n\right)&&(\bmod 12)\\&\equiv\left(n^4+11n^2+2n^3+10n+1\right)&&(\bmod 12)\\&\equiv\left[n\left(n^3+2n^2+11n+10\right)+1\right]&&(\bmod 12)\\&\equiv n\left[n^2(n+2)-(n+2)+1\right]&&(\bmod 12)\\&\equiv\left[n(n+2)(n^2-1)+1\right]&&(\bmod 12)\\&\equiv[(n-1)n(n+1)(n+2)+1]&&(\bmod 12)\\&\equiv1&&(\bmod 12)\end{aligned}$$

ដូចនេះ: សំណល់នៃការចែក $(n^2+n+41)^2$ នឹង 12 គឺ 1

ប្រលងជ្រើសរើសសិស្សខេត្តសៀមរាប
ផ្នែកគណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា និង អក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី ១២
សម័យប្រលង ២៧ កុម្ភៈ ២០២០
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យាទី ២ រយៈពេល ៣ ម៉ោង

I. ១. គណនា $|1-|1+x||$ បើ $x<-2$ ។
២. ដោះស្រាយសមីការ $2^x+3^x+6^x-4^x-9^x-1=0$ ។

II. ១. ក្នុងត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ $\angle A=2\angle B$ ។ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងឈមនៃមុំ A,B,C រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា $a^2=b(b+c)$ ។
២. ចូរកំណត់គ្រប់ត្រីកោណដែលមានជ្រុងជាចំនួនគត់តគ្នា និងមុំមួយរបស់វាស្មើនឹងទ្វេដង នៃមុំផ្សេងទៀត ។

III. ចូរបំពេញលេខក្នុងប្រអប់ $\dfrac{1}{\square\square\square\square}+\dfrac{1}{1988}=\dfrac{1}{\square\square\square\square}$ ។

IV. ១.បើ $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ ចែកមិនដាច់នឹង 3 ចូរបង្ហាញថា $S=\sum\limits_{k=1}^{9}a_k^2$ ចែកដាច់នឹង 3 ។
២. គណនាផលបូក
$$\sum=\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\cdots+\frac{2020}{2018!+2019!+2020!}$$ ។

V. គេអោយស្វ៊ីត $(a_n)_{n\geq 1}$ ដែល $a_1=2$ និង $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{a_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។ គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

VI. អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x)+f(y)=f(x+y)-xy-1$ គ្រប់ $x,y\in\mathbb{R}$ ។ បើ $f(1)=1$ ចូររកចំនួនគត់ n ដើម្បីអោយ $f(n)=n$ ។

អត្រាកំរែណ

I. ១. គណនា $|1-|1+x||$ បើ $x<-2$
គេមាន $x<-2$ នោះ $1+x<-1<0$

$\Rightarrow |1+x| = -(1+x) = -1-x$

គេបាន $|1-|1+x|| = |1-(-1-x)| = |2+x|$

តែ $x < -2 \Rightarrow x+2 < 0$

សរុបមក $|1-|1+x|| = -2-x$

ដូចនេះ $\boxed{|1-|1+x|| = -2-x \text{ បើ } x < -2}$

២. ដោះស្រាយសមីការ $2^x + 3^x + 6^x - 4^x - 9^x - 1 = 0$

សមីការអាចសរសេរ $2^x + 3^x + 2^x \times 3^x - (2^x)^2 - (3^x)^2 - 1 = 0$

តាង $a = 2^x, b = 3^x$ នោះ $a + b + ab - a^2 - b^2 - 1 = 0$

ឬ $a^2 + b^2 + 1 - a - b - ab = 0$

គុណអង្គទាំងសងខាងនឹង 2 គេបាន

$2a^2 + 2b^2 + 2 - 2a - 2b - 2ab = 0$

$a^2 - 2a + 1 + a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2b + 1 = 0$

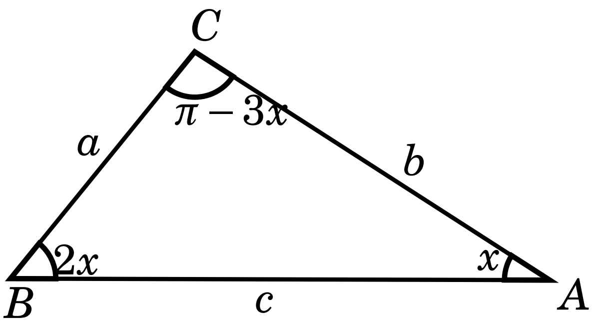
$(a-1)^2 + (a-b)^2 + (b-1)^2 = 0$

នោះ $\begin{cases} a-1=0 \\ a-b=0 \\ b-1=0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} a=1 \\ a=b \\ b=1 \end{cases}$

នាំអោយ $\begin{cases} 2^x = 1 = 2^0 \\ 3^x = 1 = 3^0 \end{cases}$

ដូចនេះ $\boxed{x = 0}$

II. ១. បង្ហាញថា $a^2 = b(b+c)$



តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស : $\dfrac{a}{sin2x} = \dfrac{b}{sinx} = \dfrac{c}{sin(\pi - 3x)} = \dfrac{c}{sin3x}$

$\dfrac{a}{2sinxcosx} = b = \dfrac{c}{3sinx - 4sin^3x}$

$\dfrac{a}{2cosx} = b = \dfrac{c}{3 - 4sin^2x}$

$\Rightarrow \dfrac{a}{2cosx} = b = \dfrac{c}{3-4\left(1-cos^2x\right)}$

ទាញបាន $\dfrac{a}{2cosx} = b$ និង $b = \dfrac{c}{4cos^2x-1}$

នោះ $cosx = \dfrac{a}{2b}$ និង $b = \dfrac{c}{4\left(\dfrac{a}{2b}\right)^2-1}$

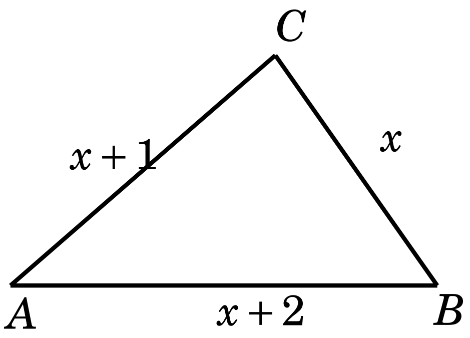
$\Rightarrow b = \dfrac{cb^2}{a^2-b^2}$

$\Rightarrow b\left(a^2-b^2\right) = cb^2$

$\Rightarrow a^2 = b(b+c)$ ពិត

ដូចនេះ $\boxed{a^2 = b(b+c)}$

២. កំណត់គ្រប់ត្រីកោណដែលមានជ្រុងជាចំនួនគត់តគ្នា និងមុំមួយរបស់វាស្មើនឹងទ្វេដង នៃមុំផ្សេងទៀត



តាង $x, x+1, x+2$ ជារង្វាស់ជ្រុងឈមនៃមុំ A,B,C រៀងគ្នាដែល $x \in \mathbb{N}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស $cosA = \dfrac{(x+1)^2+(x+2)^2-x^2}{2(x+1)(x+2)} = \dfrac{x+5}{2(x+2)}$

$$cosB = \dfrac{x^2+(x+2)^2-(x+1)^2}{2x(x+2)} = \dfrac{x+1}{2x}$$

$$cosC = \dfrac{x^2+(x+1)^2-(x+2)^2}{2x(x+1)} = \dfrac{x-3}{2x}$$

- ករណីមុំ $C = 2A$ នោះ $cosC = cos2A = 2cos^2A - 1$

$\Rightarrow \dfrac{x-3}{2x} = 2\left[\dfrac{x+5}{2(x+2)}\right]^2 - 1$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+2)^2 = x(x+5)^2 - 2x(x+2)^2$

$\Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 25x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow (x-4)\left(2x^2+7x+3\right) = 0$

បើ $x - 4 = 0$ នោះ $x = 4$

បើ $2x^2+7x+3=0$ គ្មាន $x\in\mathbb{N}$
នាំអោយគេទទួលបានត្រីកោណមានជ្រុង $4,5,6$
- ករណីមុំ $B=2A$ នោះ $cosB=cos2A=2cos^2A-1$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{2x}=\frac{2(x+5)^2}{4(x+2)^2}-1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)^2=x(x+5)^2-2x(x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^3+2x^2-9x+4=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(2x^2+5x-4\right)=0$$

បើ $x-1=0$ នោះ $x=1$
បើ $2x^2+5x-4=0$ គ្មាន $x\in\mathbb{N}$
ចំពោះ $x=1$ នោះ $x+(x+1)>(x+2)$ មិនផ្ទៀងផ្ទាត់
- ករណី $C=2B$ នោះ $cosC=cos2B=2cos^2B-1$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{2x}=\frac{2(x+1)^2}{4x^2}-1$$

$$\Leftrightarrow x(x-3)=(x+1)^2-2x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-5x-1=0$$ គ្មាន $x\in\mathbb{N}$

ដូចនេះ ត្រីកោណដែលមានមុំមួយស្មើទ្វេដងនៃមុំមួយទៀត គឺមានរង្វាស់ជ្រុង $4,5,6$

III. ចូរបំពេញលេខក្នុងប្រអប់ $\frac{1}{\square\square\square\square}+\frac{1}{1988}=\frac{1}{\square\square\square\square}$

គេមាន $1988=1\times 2^2\times 7\times 71$

ដោយ $\frac{1}{\square\square\square\square}+\frac{1}{1988}=\frac{1}{\square\square\square\square}$ នោះ $\frac{1}{\square\square\square\square}-\frac{1}{\square\square\square\square}=\frac{1}{1988}$

+ ដោយ $\frac{1}{2}-\frac{1}{7}=\frac{5}{14}$

គុណនឹង $\frac{1}{5\times 2\times 71}\Rightarrow \frac{1}{1420}-\frac{1}{4970}=\frac{1}{1988}$

$$\Rightarrow \frac{1}{4970}+\frac{1}{1988}=\frac{1}{1420}$$

+ ដោយ $1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$

គុណនឹង $\frac{1}{3\times 7\times 71}$ នោះ $\frac{1}{1491}-\frac{1}{5964}=\frac{1}{1988}$

$$\Rightarrow \frac{1}{5964}+\frac{1}{1988}=\frac{1}{1491}$$

+ ដោយ $\frac{1}{14}-\frac{1}{71}=\frac{57}{994}$

គុណនឹង $\frac{1}{57\times 2}\Rightarrow\frac{1}{1596}-\frac{1}{8094}=\frac{1}{1988}$

$\Rightarrow\frac{1}{8094}+\frac{1}{1988}=\frac{1}{1596}$

+ ដោយ $\frac{1}{28}-\frac{1}{71}=\frac{43}{1988}$

គុណនឹង $\frac{1}{43}\Rightarrow\frac{1}{1204}-\frac{1}{3053}=\frac{1}{1988}$

$\Rightarrow\frac{1}{3053}+\frac{1}{1988}=\frac{1}{1204}$

+ ដោយ $\frac{1}{4}-\frac{1}{7}=\frac{3}{28}$

គុណនឹង $\frac{1}{3\times 71}\Rightarrow\frac{1}{852}-\frac{1}{1491}=\frac{1}{1988}$

$\Rightarrow\frac{1}{1491}+\frac{1}{1988}=\frac{1}{852}$ មិនយកជាចម្លើយ

IV. ១. បង្ហាញថា $S=\sum_{k=1}^{9}a_k^2$ ចែកដាច់នឹង 3

បើ $a_k, k=1,2,3,\ldots,9$ ចែកមិនដាច់នឹង 3 បានន័យថា $a_k=3t_k\pm 1$ ឬ $a_k=3t_k\pm 2,\ t_k\in\mathbb{N}$

- ករណី $a_k=3t_k\pm 1$ នោះ $a_k^2=(3t_k\pm 1)^2=9t_k^2\pm 6t_k+1$

$a_k^2=3\left(3t_k^2\pm 2t_k\right)+1$

នោះ $a_k^2=3q_k+1$ ដែល $q_k=3t_k^2\pm 2t_k,\ q_k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow\sum_{k=1}^{9}a_k^2=\sum_{k=1}^{9}(3q_k+1)=\sum_{k=1}^{9}3q_k+\sum_{k=1}^{9}1$

$\Rightarrow\sum_{k=1}^{9}a_k^2=3\sum_{k=1}^{9}q_k+9=3\left(\sum_{k=1}^{9}q_k+3\right)$ ចែកដាច់នឹង 3

បើ $a_k, k=1,2,3,\ldots,9$ ចែកមិនដាច់នឹង 3 បានន័យថា $a_k=3t_k\pm 1$ ឬ $a_k=3t_k\pm 2,\ t_k\in\mathbb{N}$

- ករណី $a_k=3t_k\pm 2$ នោះ $a_k^2=(3t_k\pm 2)^2=9t_k^2\pm 12t_k+4$

$a_k^2=3\left(3t_k^2\pm 4t_k\right)+4$

នោះ $a_k^2=3s_k+1$ ដែល $s_k=3t_k^2\pm 4t_k,\ s_k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow\sum_{k=1}^{9}a_k^2=\sum_{k=1}^{9}(3s_k+4)=\sum_{k=1}^{9}3s_k+\sum_{k=1}^{9}4$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{9} a_k^2 = 3\sum_{k=1}^{9} s_k + 36 = 3\left(\sum_{k=1}^{9} s_k + 12\right)$$ ចែកដាច់នឹង 3

ដូចនេះ បើ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ចែកមិនដាច់នឹង 3 នោះ $S = \sum_{k=1}^{9} a_k^2$

ចែកដាច់នឹង 3

២. គណនាផលបូក

$$\sum = \frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \cdots + \frac{2020}{2018!+2019!+2020!}$$

យើងមាន $\frac{n}{(n-2)!+(n-1)!+n!} = \frac{1}{(n-2)!} \times \frac{n}{1+(n-1)+(n-1)n}$

$$= \frac{1}{(n-2)!} \times \frac{n}{n^2} = \frac{1}{(n-2)!} \times \frac{n-1}{n(n-1)}$$

$$= \frac{n-1}{n!} = \frac{n}{(n-1)!n} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$$

យើងបាន $\sum = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{2019!} - \frac{1}{2020!}$

ដូចនេះ $\boxed{\sum = \frac{1}{2!} - \frac{1}{2020!}}$

V. គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n

$a_1 = 2$ និង $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

សមីការសំគាល់ $x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$

នោះ $2x^2 = x^2 + 2$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

ដោយ $\frac{a_{n+1}+\sqrt{2}}{a_{n+1}-\sqrt{2}} = \frac{\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} + \sqrt{2}}{\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} - \sqrt{2}} = \frac{a_n^2 + 2\sqrt{2}a_n + \sqrt{2}^2}{a_n^2 - 2\sqrt{2}a_n + \sqrt{2}^2}$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}+\sqrt{2}}{a_{n+1}-\sqrt{2}} = \left(\frac{a_n+\sqrt{2}}{a_n-\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a_2+\sqrt{2}}{a_2-\sqrt{2}} = \left(\frac{a_1+\sqrt{2}}{a_1-\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a_3+\sqrt{2}}{a_3-\sqrt{2}} = \left(\frac{a_2+\sqrt{2}}{a_2-\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{a_1+\sqrt{2}}{a_1-\sqrt{2}}\right)^{2^2}$$

ឧបមាថា $\left(\frac{a_k+\sqrt{2}}{a_k-\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{a_1+\sqrt{2}}{a_1-\sqrt{2}}\right)^{2^{k-1}}$

យើងនិងស្រាយថា $\frac{a_{k+1}+\sqrt{2}}{a_{k+1}-\sqrt{2}} = \left(\frac{a_1+\sqrt{2}}{a_1-\sqrt{2}}\right)^{2^k}$

ដោយ $\frac{a_{k+1}+\sqrt{2}}{a_{k+1}-\sqrt{2}} = \left(\frac{a_k+\sqrt{2}}{a_k-\sqrt{2}}\right)^2 = \left[\left(\frac{a_1+\sqrt{2}}{a_1-\sqrt{2}}\right)^{2^{k-1}}\right]^2 = \left(\frac{a_1+\sqrt{2}}{a_1-\sqrt{2}}\right)^{2^k}$

ពិត

$$\Rightarrow \frac{a_n+\sqrt{2}}{a_n-\sqrt{2}} = \left(\frac{a_1+\sqrt{2}}{a_1-\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}} = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}} = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{2^{n-1}} = (\sqrt{2}+1)^{2^n}$$

$$\Rightarrow a_n+\sqrt{2} = (\sqrt{2}+1)^{2^n}(a_n-\sqrt{2}) = a_n(\sqrt{2}+1)^{2^n} - \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^{2^n}$$

$$\Leftrightarrow a_n\left[(\sqrt{2}+1)^{2^n}-1\right] = \sqrt{2}\left[1+(\sqrt{2}+1)^{2^n}\right]$$

ដូចនេះ $\boxed{a_n = \frac{\sqrt{2}\left[1+(\sqrt{2}+1)^{2^n}\right]}{(\sqrt{2}+1)^{2^n}-1}}$

VI. រកចំនួនគត់ n ដើម្បីអោយ $f(n)=n$

គេមាន $f(x)+f(y)=f(x+y)-xy-1$ គ្រប់ $x,y\in\mathbf{R}$

បើ $y=1$ នោះ $f(x)+f(1)=f(x+1)-x-1$

$f(x)+1=f(x+1)-x+1$ នោះ $f(x+1)-f(x)=x+2$

បើគ្រប់ $n\in\mathbf{Z}$ គេបាន $f(n)-f(n-1)=n+1 \Rightarrow f(k)-f(k-1)=k+1$

បើ $k=2$ នោះ $f(2)-f(1)=3$

បើ $k=3$ នោះ $f(3)-f(2)=4$

....

បើ $k=n$ នោះ $f(n)-f(n-1)=n+1$

$f(n)-f(1)=3+4+\cdots+(n+1)$

$$f(n)=f(1)+\frac{(n-1)(3+n+1)}{2}=1+\frac{(n-1)(n+4)}{2}$$

$f(n)=\dfrac{n^2+3n-2}{2}$

យើងបាន $f(n)=n$ គឺ $n^2+n-2=0$

ដូចនេះ: $\boxed{n=1 \text{ ឬ } n=-2}$

ប្រឡងជ្រើសរើសសិស្សពូកែវិទ្យាល័យបាក់ទូក
ផ្នែកគណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា និង អក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី ១២
សម័យប្រលង ១៦ មករា ២០២០
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យាទី ២ រយ:ពេល ៣ ម៉ោង

I. គណនាតម្លៃអប្បបរមានៃកន្សោម $M=x^2+x^2+y^2-3x-3y+2023$ ។

II. ចូររកខួប T នៃអនុគមន៍ $f(x)=tan\dfrac{x}{5}+sin\dfrac{2x}{3}$ ។

III. គេឱ្យស្វីត (u_n) កំណត់ចំពោះ $\forall n\in\mathbb{N}$ ដោយ $u_1=1, u_{n+1}=u_n+2^n$ ។ គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ ។

IV. គេឱ្យត្រីធា $f(x)=x^2-x-6$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ គេបាន $f(sinx), f(cosx)$ ជាចំនួនអវិជ្ជមានឬសូន្យ ។

V. គេឱ្យ $a_1=111111111, a_2=222222221, a_3=333333332$
$,a_4=444444443$ (1) ។
បង្ហាញថា $a_3^2>a_2^2+a_1^2$ និង $a_4^2>a_3^2+a_2^2$ រួចប្រៀបធៀប $A=\sqrt{a_3^2-a_2^2-a_1^2}$
និង $B=\sqrt{a_4^2-a_3^2-a_2^2}$ ។

VI. គេឱ្យ $f(z)=z^4+az^3+bz^2+cz+d$ ដែល $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ និង $z\in\mathbb{C}$ ។ កំណត់ a,b,c,d បើគេដឹងថា $f(i)=0$ និង $f(1+i)=1+2i$, $\left(i^2=-1\right)$ ។

VII. គេឱ្យចតុកោណស្មើ $ABCD$ មួយ មានរង្វង់កាំ R ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABD និង រង្វង់កាំ R' ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ។ គណនាផ្ទៃក្រឡាចតុកោណស្មើ $ABCD$ ជាអនុគមន៍នៃ R និង R' ។

អត្រាកំណែ

I. គណនាតម្លៃអប្បបរមានៃកន្សោម $M=x^2+x^2+y^2-3x-3y+2023$

$M=\left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2-2y+1\right)+(xy-x)-(y-1)+2020$

$M=(x-1)^2+(y-1)^2+x(y-1)-(y-1)+2020$
$M=(x-1)^2+(y-1)^2+(x-1)(y-1)+2020$
$M=\left[(x-1)^2+(y-1)^2+2(x-1)\left(\frac{y-1}{2}\right)+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2\right]+\frac{3}{4}(y-1)^2+$
2020
$M=\left((x-1)+\left(\frac{y-1}{2}\right)\right)^2+\frac{3}{4}(y-1)^2+2020$
យើងបាន $M\geq 2020$ បើ $x=y=1$
ដូចនេះ តម្លៃអប្បបរមាគឺ $M=2020$ ចំពោះ $x=y=1$

II. រកខួប T នៃអនុគមន៍ $f(x)=tan\frac{x}{5}+sin\frac{2x}{3}$
តាង $g(x)=tan\frac{x}{5}=tan\left(\frac{x}{5}+k\pi\right)=tan\frac{1}{5}(x+5k\pi)$
$\Rightarrow g(x)=g(x+5k\pi),\ k\in\mathbb{Z}$
នោះខួប $T_1=5\pi$
និង $h(x)=sin\frac{2x}{3}=sin\left(\frac{2x}{3}+2k\pi\right)=sin\frac{2}{3}(x+3k\pi)$
$\Rightarrow h(x)=h(x+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}$
នោះខួប $T_2=3\pi$
ខួប $T=PPCM(T_1,T_2)=PPCM(5\pi,3\pi)=15\pi$

III. គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$
យើងមាន $u_1=1, u_{n+1}=u_n+2^n$
$u_{n+1}=u_n+2^n \quad \Leftrightarrow u_n-u_{n-1}=2^{n-1}$
$u_{n-1}=u_{n-2}+2^{n-2} \quad \Leftrightarrow u_{n-1}-u_{n-2}=2^{n-2}$
$u_{n-2}=u_{n-3}+2^{n-3} \quad \Leftrightarrow u_{n-2}-u_{n-3}=2^{n-3}$
$u_{n-3}=u_{n-4}+2^{n-4} \quad \Leftrightarrow u_{n-3}-u_{n-4}=2^{n-4}$
$u_{n-4}=u_{n-5}+2^{n-5} \quad \Leftrightarrow u_{n-4}-u_{n-5}=2^{n-5}$
.... $\Leftrightarrow$ ....
$u_4=u_3+2^3 \quad \Leftrightarrow u_4-u_3=2^3$
$u_3=u_2+2^2 \quad \Leftrightarrow u_3-u_2=2^2$
$u_2=u_1+2^1 \quad \Leftrightarrow u_2-u_1=2^1$
ជាលទ្ធផល ផលសងខាងលើកំណត់បានក្នុងទំនាក់ទំនងខាងក្រោម
$u_n=(u_n-u_{n-1})+(u_{n-1}-u_{n-2})+(u_{n-2}-u_{n-3})+(u_{n-3}-u_{n-4})+\ldots+$

(u_5-u_4)
$+(u_4-u_3)+(u_3-u_2)+(u_2-u_1)+u_1$
យើងបាន $u_n=2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+2^{n-4}+2^{n-5}+...+2^3+2^2+2^1+u_1$
$u_n=2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+2^{n-4}+2^{n-5}+...+2^3+2^2+2^1+1$ ព្រោះ $u_1=1$
$\Rightarrow u_n$ ជាផលបូក n តួនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមានតួទី១ ស្មើនឹង 1 និង ផលធៀបរួម
$q=\dfrac{2^1}{1}=2$
យើងបាន $u_n=\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$
ដូចនេះ $u_n=2^n-1$
របៀបទី ២៖ យើងមាន $u_1=1, u_{n+1}=u_n+2^n$
$n=1\Rightarrow u_1=1$
$n=2\Rightarrow u_2=u_1+2^1=1+2=3=2^2-1$
$n=3\Rightarrow u_3=u_2+2^2=3+4=7=2^3-1$
$n=4\Rightarrow u_4=u_3+2^3=7+8=2^4-1$
$n=5\Rightarrow u_5=u_4+2^4=15+16=2^5-1$
....
....
....
តាមលំនាំគំរូនេះ យើងទាញបាន $u_n=2^n-1$
ទាញរក $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}(2^n-1)=\infty$

IV. ស្រាយបញ្ជាក់ថា គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$ គេបាន $f(sinx), f(cosx)$ ជាចំនួនអវិជ្ជមានឬសូន្យ
យើងបាន $f(x)=(x+2)(x-3)$
បើ $f(x)=0\Rightarrow x=-2, x=3$

តារាងសញ្ញា

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ចំពោះ $\forall x\in\alpha,\ -1\le sinx\le 1$ និង $-1\le cosx\le 1$
ដោយចន្លោះ $[-1,1]\subset[-2,3]$
ដូចនេះ $f(sinx)\le 0, f(cosx)\le 0$

V. បង្ហាញថា $a_3^2 > a_2^2 + a_1^2$ និង $a_4^2 > a_3^2 + a_2^2$ រួចប្រៀបធៀប $A = \sqrt{a_3^2 - a_2^2 - a_1^2}$ និង $B = \sqrt{a_4^2 - a_3^2 - a_2^2}$

យើងមាន

$a_1 = 111111111, a_2 = 222222221 = 2a_1 - 1, a_3 = 333333332 = 3a_1 - 1,$

$a_4 = 444444443 = 4a_1 - 1$

យើងបាន

$$a_3^2 - a_2^2 - a_1^2 = (3a_1 - 1)^2 - (2a_1 - 1)^2 - a_1^2$$
$$= 9a_1^2 - 6a_1 + 1 - 4a_1^2 + 4a_1 - 1 - a_1^2$$
$$= 4a_1^2 - 2a_1 = 2a_1(2a_1 - 1) > 0 \text{ ព្រោះ } 2a_1 > 1$$

ដូចនេះ $a_3^2 > a_2^2 + a_1^2$

$$a_4^2 - a_3^2 - a_2^2 = (4a_1 - 1)^2 - (3a_1 - 1)^2 - (2a_1 - 1)^2$$
$$= 16a_1^2 - 8a_1 + 1 - 9a_1^2 + 6a_1 - 1 - 4a_1^2 + 4a_1 - 1$$
$$= 3a_1^2 + 2a_1 - 1 = (a_1 + 1)(3a_1 - 1) > 0 \text{ ព្រោះ } 3a_1 > 1$$

ដូចនេះ $a_4^2 > a_3^2 + a_2^2$

រួចប្រៀបធៀប $A = \sqrt{a_3^2 - a_2^2 - a_1^2}$ និង $B = \sqrt{a_4^2 - a_3^2 - a_2^2}$

$$A^2 - B^2 = a_3^2 - a_2^2 - a_1^2 - a_4^2 + a_3^2 + a_2^2$$
$$= 2a_3^2 - a_1^2 - a_4^2$$
$$= 18a_1^2 - 12a_1 + 2 - a_1^2 - 16a_1^2 + 8a_1 - 1$$
$$= a_1^2 - 4a_1 + 1 = a_1(a_1 - 4) + 1 > 0 \text{ ព្រោះ } a_1 > 4$$

ដូចនេះ $A > B$

VI. កំណត់ a, b, c, d បើគេដឹងថា $f(i) = 0$ និង $f(1+i) = 1 + 2i, \left(i^2 = -1\right)$

រក $f(i) = i^4 + bi^3 + bi^2 + ci + d$

$$= 1 - ai - b + ci + d$$
$$= 1 - b + d + (c - a)i$$

បើ $f(i) = 0$ នោះ $\begin{cases} 1 - b + d = 0 \\ c - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = b - 1 \\ c = a \end{cases}$

រក $f(1+i)=(1+i)^4+a(1+i)^3+b(1+i)^2+a(1+i)+b-1$

$=\left(1+2i+i^2\right)^2+a\left(1+2i+i^2\right)^2(1+i)+b\left(1+2i+i^2\right)$

$+a(1+i)+b-1$

$=-4+2ai(1+i)+a(1+i)+2bi+b-1$

$=-4+2ai-2a+a+ai+2bi+b-1$

$=-5+3ai-a+2bi+b$

$=-5-a+b+(3a+2b)i$

បើ $f(1+i)=1+2i$ នោះ $\begin{cases}-5-a+b=1 & (1)\\ 3a+2b=2 & (2)\end{cases}$

$(1)\Rightarrow b=a+6$

$(2)\Rightarrow 3a+2a+12=2$

$\Rightarrow 5a=2-12=-10\Rightarrow a=-2$

$b=a+6=-2+6=4$

$c=a=-2, d=b-1=4-1=3$

ដូចនេះ $a=-2, b=4, c=-2, d=3$

VII. គណនាផ្ទៃក្រឡាចតុកោណស្មើ $ABCD$ ជាអនុគមន៍នៃ R និង R'

តាង $AC=x,\ BD=y$

O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABD

O' ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC

I ជាចំណុចប្រសព្វរវាងអង្កត់ទ្រូងចតុកោណស្មើ

$BI=BO+O'I\Rightarrow O'I=BI-BO'$

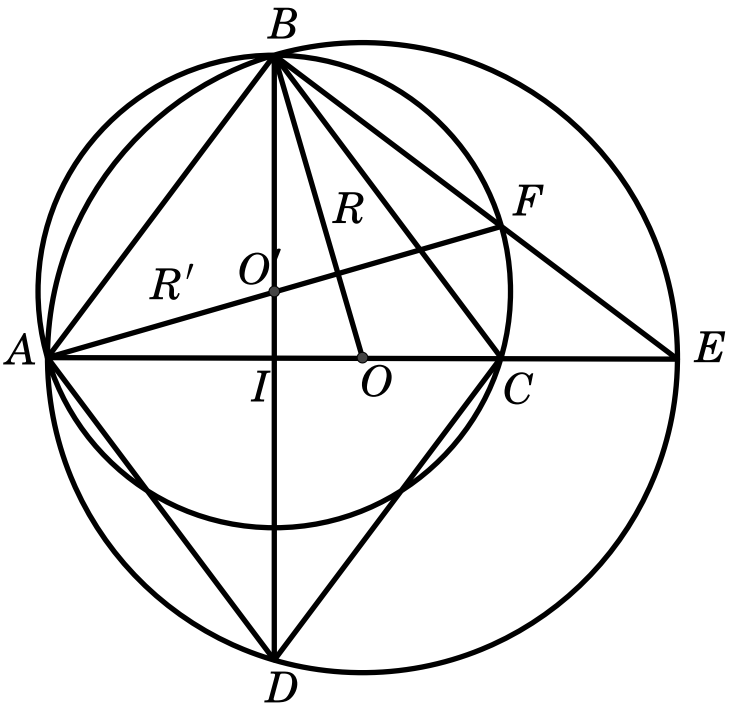
$BI=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}y$ និង $AO'=BO'=R'$

$\Rightarrow O'I=\frac{1}{2}y-R'$

ក្នុងត្រីកោណ AIO' កែងត្រង់កំពូល I

$AO'^2=AI^2+IO'^2$ (ទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ)

$R'^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2+\left(\frac{1}{2}y-R'\right)^2$



$$R'^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 - yR' + R'^2$$
$$0 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 - yR'$$
$$x^2 = 4yR' - y^2$$
$$x = 2\sqrt{yR' - \frac{1}{4}y^2}$$
$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABC} \Leftrightarrow \frac{AB \cdot AD \cdot BD}{4R} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R'}$$
$$\Leftrightarrow \frac{AB^2 \cdot y}{4R} = \frac{AB^2 \cdot x^2}{4R'}$$
$$\Leftrightarrow \frac{y}{R} = \frac{x}{R'} \Leftrightarrow x = \frac{y \cdot R'}{R}$$
$$\Leftrightarrow \frac{y \cdot R'}{R} = 2\sqrt{yR' - \frac{1}{4}y^2} \Leftrightarrow \frac{y^2 \cdot R'^2}{R^2} = 4\left(yR' - \frac{1}{4}y^2\right)$$
$$\Leftrightarrow y^2R'^2 + R^2y^2 = 4R^2 \cdot y$$
$$\Leftrightarrow y\left(R^2 + R'^2\right) = 4R'^2R'$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{4R^2R'}{R'^2 + R^2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{R'}{R}y = \frac{R'}{R} \cdot \frac{4R^2R'}{R'^2 + R^2} = \frac{4RR'^2}{R'^2 + R^2}$$

ផ្ទៃក្រឡាចតុកោណស្មើ $ABCD$: $S_{ABCD}=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}\cdot\frac{4RR^2}{R'^2+R^2}\cdot\frac{4R^2R'}{R'^2+R^2}=\frac{8R^3R'^3}{(R'^2+R^2)^2}$

ដូចនេះ $S_{ABCD}=\frac{8R^3R'^3}{(R'^2+R^2)^2}$ ឯកតាផ្ទៃ

ប្រលងជ្រើសរើសសិស្សពូកែវិទ្យាល័យបាក់ទូក
ផ្នែកគណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា និង អក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី ១២
សម័យប្រលង ១៦ មករា ២០២០
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យាទី ១ រយៈពេល ៣ ម៉ោង

I. ដោះស្រាយសមីការ $\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[6]{1-x^2}$ ។

II. គេឱ្យពហុធា $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ។ បើ x_1,x_2,x_3 ជាឫសនៃសមីការ $p(x)=0$ ហើយ $p'(x)$ ជាដេរីវេនៃ $p(x)$ ចូរស្រាយបំភ្លឺថា $\frac{x_1}{p'(x_1)}+\frac{x_2}{p'(x_2)}+\frac{x_3}{p'(x_3)}=0$ ។

III. គណនា $S=\sum_{k=1}^{2020}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$ ។

IV. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{x^2+(m+1)x+2}{x+1}$ កើនលើចន្លោះ $[0,+\infty)$ ។

V. គេឱ្យ $a,b,c,d\in\mathbb{N}$ ដោយដឹងថា $a\ge b\ge c\ge d$ ។
ចូរបង្ហាញថាសមីការ $x^4-ax^3-bx^2-cx-d=0$ គ្មានឫសជាចំនួនគត់ ។

VI. គេឱ្យ a,b,c,x,y,z ជាប្រាំមួយចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $x+y+z=a+b+c$ និង $xyz=abc$ ។ សន្មត់ថា $a\le x,y,z\le c$ និង $a<b<c$ ។
ចូរស្រាយថា $x=a,y=b$ និង $z=c$ ។

VII. គេឱ្យចតុកោណ $ABCD$ ចារឹកក្នុងរង្វង់មួយមាន $AB=a,BC=b,CD=c,DA=d$ និង $p=\frac{a+b+c+d}{2}$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ផ្ទៃក្រឡាចតុកោណ $ABCD$ នេះគឺ $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ ។

អត្រាកំណែ

I. ដោះស្រាយសមីការ $\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[6]{1-x^2}$

សមីការមានន័យលុះត្រាតែ $1-x^2\geq 0$

$\Rightarrow -1\leq x\leq 1$ ឬ $x\in[-1,1]$

សមីការអាចសរសេរទៅជា

$$\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[6]{1-x}\sqrt[6]{1+x}$$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $\sqrt[3]{1+x}$ យើងបាន

$$1-\frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}}=\frac{\sqrt[6]{1-x}\cdot\sqrt[6]{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}$$

$$1-\sqrt[6]{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}=\sqrt[6]{\frac{1-x}{1+x}}$$

តាង $t=\sqrt[6]{\frac{1-x}{1+x}}\Rightarrow 1-t^2=t$ ឬ $t^2+t-1=0$

$\Delta=1+4=5$

$$\Rightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$\Rightarrow t_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<0$ មិនយក

$\Rightarrow 0<t_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<1$ យក

$$\Rightarrow\sqrt[6]{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Rightarrow\frac{1-x}{1+x}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^6$$

$$\Rightarrow\frac{1-x}{1+x}=\frac{(\sqrt{5}-1)^6}{2^6}$$

ដូចនេះ $x=\dfrac{2^6-(\sqrt{5}-1)^6}{2^6+(\sqrt{5}-1)^6}$

II. ស្រាយបំភ្លឺថា $\frac{x_1}{p'(x_1)}+\frac{x_2}{p'(x_2)}+\frac{x_3}{p'(x_3)}=0$

បើ x_1,x_2,x_3 ជាឫសនៃសមីការ $p(x)=0$

នោះ $p(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$\Rightarrow p'(x)=(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_1)(x-x_1)+(x-x_1)(x-x_2)$

យើងបាន $p'(x_1)=(x_1-x_2)(x_1-x_3)$

$p'(x_2)=(x_2-x_1)(x_2-x_3)$

$p'(x_3)=(x_3-x_1)(x_3-x_1)$

នោះ $\dfrac{x_1}{p'(x_1)}+\dfrac{x_2}{p'(x_2)}+\dfrac{x_3}{p'(x_3)}=\dfrac{x_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\dfrac{x_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$

$+\dfrac{x_3}{(x_3-x_2)(x_3-x_1)}$

$$=\frac{x_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}-\frac{x_2}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)}+\frac{x_3}{(x_2-x_3)(x_1-x_3)}$$

$$=\frac{x_1(x_2-x_3)-x_2(x_1-x_3)+x_3(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)}$$

$$=\frac{x_1x_2-x_1x_3-x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3-x_2x_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)}$$

$$=\frac{0}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)}=0$$ ពិត

III. គណនា $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{2020}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$

តាង $a_k=\dfrac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$

$$=\frac{k+2}{k![1+(k+1)+(k+1)(k+2)]}$$

$$=\frac{k+2}{k!\left(1+k+1+k^2+3k+2\right)}$$

$$=\frac{k+2}{k!(k+2)^2}=\frac{1}{k!(k+2)}$$

$$=\frac{k+1}{(k+2)!}=\frac{(k+2)-1}{(k+2)!}$$

$$=\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}$$

$\Rightarrow S=\displaystyle\sum_{k=1}^{2020}\left[\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}\right]$

$\Rightarrow S=\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{3!}-\dfrac{1}{4!}+\cdots+\dfrac{1}{2021!}-\dfrac{1}{2022!}$

ដូចនេះ $S=\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{2022!}$

IV. កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+(m+1)x+2}{x+1}$ កើនលើចន្លោះ $[0,+\infty)$

អនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+(m+1)x+2}{x+1}$

ដែនកំណត់ $\mathbb{D}=\mathbb{R}-\{-1\}$

ដេរីវេ $f'(x)=\dfrac{x^2+2x+2m}{(x+1)^2}$

f កើនលើ $[0,+\infty)$ លុះត្រាតែ $f'(x)\geq 0$ លើ $[0,+\infty)$

$\Delta'=1-2m$

• ករណី $\Delta'\leq 0\Rightarrow 1-2m\leq 0\Rightarrow m\geq\dfrac{1}{2}$

$$\begin{cases}\Delta'\leq 0\\ a=1>0\end{cases}\Rightarrow f'(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{D}$$

$\Rightarrow f'(x)\geq 0$ លើ $[0,+\infty)$

• ករណី $\Delta'>0\Rightarrow 1-2m>0\Rightarrow m<\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\sqrt{\Delta'}=\sqrt{1-2m}$

$\Rightarrow x_1=-1-\sqrt{1-2m},x_2=-1+\sqrt{1+2m}$

តារាងសញ្ញា $f'(x)$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{1-2m}$		$-1+\sqrt{1-2m}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ចង់ឱ្យ f កើនលើ $[0,+\infty)$ ត្រូវឱ្យ $-1+\sqrt{1-2m}\leq 0$

$\Rightarrow\sqrt{1-2m}\leq 1\Rightarrow m\geq 0\Rightarrow 0\leq m<\dfrac{1}{2}$

ប្រជុំចម្លើយនៃករណីទាំងពីរ គេបាន $m\in[0,+\infty)$

ដូចនេះ $m\in[0,+\infty)$

V. បង្ហាញថាសមីការ $x^4-ax^3-bx^2-cx-d=0$ គ្មានឫសជាចំនួនគត់

ឧបមថា α ជាឫសគត់វិជ្ជមាននៃ $f(x)=0$

នោះ $f(x)=0$ យើងបាន

$$\alpha^4-a\alpha^3-b\alpha^2-c\alpha-d=0$$

ឬ $d=\alpha\left(\alpha^3-a\alpha^2-b\alpha-c\right)$

នោះ $\alpha|d\Rightarrow\alpha\leq d\quad(*)$

ដោយ $\alpha^3(\alpha-a)=\alpha^4-a\alpha^3=b\alpha^2+c\alpha+d>0$

នោះ $\alpha>a$

តែ $a\geq b\geq c\geq d$ នោះ $\alpha>d$ ផ្ទុយពីការពិត (តាម $(*)$)

សម្រាយបញ្ជាក់នេះ មានន័យថាសមីការ :

$x^3-ax^3-bx^2-cx-d=0$ គ្មានឫសជាចំនួនគត់

VI. ស្រាយថា $x=a,y=b$ និង $z=c$

ដោយ $a\leq x,y,z\leq c$ នោះ $\frac{c}{z}\geq 1$ និង $\frac{a}{x}\leq 1$

ដោយ $xyz=abc$ តាមវិសមភាព AM-GM គេបាន

$\frac{c}{z}+\frac{b}{y}+\frac{a}{x}\geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{xyz}}=3$

យើងទាញបាន $\frac{c}{z}-1\geq 1,\frac{c}{z}+\frac{b}{y}+\frac{a}{x}-3\geq 0$

ហើយដោយ $1-\frac{a}{x}\geq 0$ នោះ $\frac{c}{z}+\frac{b}{y}-2\geq 1-\frac{a}{x}\geq 0$

$T=(a+b+c)-(x+y+z)$

$=x\left(\frac{a}{x}-1\right)+y\left(\frac{b}{y}-1\right)+z\left(\frac{c}{z}-1\right)$

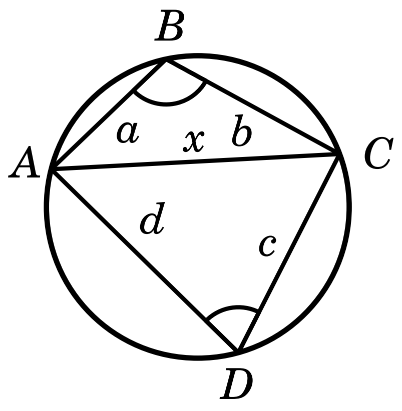
$=x\left(\frac{c}{z}+\frac{b}{y}+\frac{a}{x}-3\right)+(y-x)\left(\frac{c}{z}+\frac{b}{y}-2\right)+(z-y)\left(\frac{c}{z}-1\right)\geq 0$

ដោយ $a+b+c=x+y+z$ នោះ $T=0$

នោះវិសមភាពពិត លុះត្រាតែ $a=x,b=y,c=z$

ដូចនេះ $a=x,b=y,c=z$

VII. ស្រាយបញ្ជាក់ថា ផ្ទៃក្រឡា$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$



ចតុកោណ $ABCD$ ចារឹកក្នុងរង្វង់

យើងបាន $B+D=180^0 \Rightarrow B=180^0-D$

$$\Rightarrow \begin{cases} sinB = sin\left(180^0-D\right) \\ cosB = cos\left(180^0-D\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sinB = sinD \\ cosB = -cosD \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{ABC}+S_{ACD} \\ &= \frac{1}{2}absinB+\frac{1}{2}cdsinD \\ &= \frac{1}{2}absinB+\frac{1}{2}cdsinB \\ &= \frac{1}{2}(ab+cd)sinB \\ &= \frac{1}{2}(ab+cd)\sqrt{sin^2B} \\ &= \frac{1}{2}(ab+cd)\sqrt{1-cos^2B} \end{aligned}$$

តាង $x=AC$ តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស

ក្នុងត្រីកោណ ABC : $x^2=a^2+b^2-2abcosB \quad (1)$

ក្នុងត្រីកោណ ADC : $x^2=c^2+d^2-2cdcosD$

$$x^2=c^2+d^2+2cdcosB \quad (2)$$

តាម (1) និង(2)

$$a^2+b^2-2abcosB=c^2+d^2+2cdcosB$$

$$\Rightarrow cosB=\frac{\left(a^2+b^2\right)-\left(c^2+d^2\right)}{2(ab+cd)}$$

យើងបាន $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}(ab+cd)\sqrt{1-\left[\dfrac{\left(a^2+b^2\right)-\left(c^2+d^2\right)}{2(ab+cd)}\right]}$

$$=\frac{1}{2}(ab+cd)\frac{\sqrt{4(ab+cd)^2-\left[\left(a^2+b^2\right)-\left(c^2+d^2\right)\right]}}{2(ab+cd)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{4(ab+cd)^2-\left[\left(a^2+b^2\right)-\left(c^2+d^2\right)\right]}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\left[(c+d)^2-(a-b)^2\right]\left[(a+b)^2-(c-d)^2\right]}$$

$= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

ដូចនេះ $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

ប្រលងជ្រើសរើសសិស្សពូកែទូទាំងខេត្តតាកែវ
ផ្នែកគណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា និង អក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី ១២
សម័យប្រលង ០២ មីនា ២០២០
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យាទី ១ រយៈពេល ៣ ម៉ោង

I. ដោយមិនប្រើតារាងត្រីកោណមាត្រ និងមិនរកតម្លៃ $sin\dfrac{\pi}{10}$ ចូរគណនាតម្លៃ $A = 8sin^3\dfrac{\pi}{10} + 8sin^2\dfrac{\pi}{10}$ ។

II. គេឱ្យ $f(n) = \left(n^2+n+1\right)^2 + 1$ ដែល $n \in \mathbb{N}$ និង $n \geq 1$ ។ តាង $a_n = \dfrac{f(1)}{f(2)} \times \dfrac{f(3)}{f(4)} \times \cdots \times \dfrac{f(2n-1)}{f(2n+1)} = \prod_{i=1}^{n}\left(\dfrac{f(2i-1)}{f(2i+1)}\right)$ ។ គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{a_n}$ ។

III. គេឱ្យបីចំនួនវិជ្ជមាន a,b និង c ផ្ទៀងផ្ទាត់ $ab+bc+ca=1$ ។ គណនាតម្លៃនៃកន្សោម :

$$M = a\sqrt{\frac{\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)}{1+a^2}} + b\sqrt{\frac{\left(1+c^2\right)\left(1+a^2\right)}{1+b^2}} + c\sqrt{\frac{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}{1+c^2}}$$ ។

IV. ឧបមាថាឫសនៃសមីការ $x^{2020} = 1$ ក្នុងសំណុំចំនួនកុំផ្លិចតាងដោយ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2019}$ ។ តាង S និង P ជាផលបូកនិងផលគុណឫសទាំងអស់របស់សមីការខាងលើ និងយក $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{2019})$ ។ ចូរគណនា S,P និង $f(1)$ ។

V. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មាន $BC=a, AC=b$ និង $AB=c$ ។ រង្វង់ចារឹកក្នុងត្រីកោណ ABC មានផ្ចិត I និងកាំ r ហើយរង្វង់ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC មានកាំ R ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $IC^2 = ab - 4Rr$ ។

អត្រាកំណែ

I. គណនាតម្លៃ $A = 8sin^3\frac{\pi}{10} + 8sin^2\frac{\pi}{10}$

យើងមាន $cos\frac{4\pi}{10} = sin\frac{\pi}{10}$ (មុំបំពេញ)

$\Leftrightarrow 2cos^2\frac{2\pi}{10} - 1 = sin\frac{\pi}{10}$

$\Leftrightarrow 2\left(1 - 2sin^2\frac{\pi}{10}\right)^2 - 1 = sin\frac{\pi}{10}$

$\Leftrightarrow 2\left(1 - 4sin^2\frac{\pi}{10} + 4sin^4\frac{\pi}{10}\right) - 1 = sin\frac{\pi}{10}$

$\Leftrightarrow 8sin^4\frac{\pi}{10} - 8sin^2\frac{\pi}{10} - sin\frac{\pi}{10} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(sin\frac{\pi}{10}\right)\left(8sin^3\frac{\pi}{10} + 8sin^2\frac{\pi}{10} - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow 8sin^3\frac{\pi}{10} + 8sin^2\frac{\pi}{10} - 1 = 0$ (ព្រោះ $sin\frac{\pi}{10} \neq 1$)

$\Leftrightarrow 8sin^3\frac{\pi}{10} + 8sin^2\frac{\pi}{10} = 1$

ដូចនេះ $A = 1$

II. គណនា a_n ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរក $\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{a_n}$

យើងបាន $f(n) = \left(n^2 + n + 1\right)^2 + 1$

$= \left[\left(n^2 + 1\right) + n\right]^2 + 1$

$= \left(n^2 + 1\right)^2 + 2n\left(n^2 + 1\right) + n^2 + 1$

$f(n) = \left(n^2 + 1\right)\left[(n+1)^2 + 1\right]$

$$\Rightarrow \frac{f(2n-1)}{f(2n+1)} = \frac{\left(4n^2 - 4n + 1\right)\left(4n^2 + 1\right)}{\left(4n^2 + 1\right)\left(4n^2 + 4n + 2\right)} = \frac{(2n-1)^2 + 1}{(2n+1)^2 + 1}$$

នោះ $a_n = \frac{1^2 + 1}{3^2 + 1} \cdot \frac{3^2 + 1}{5^2 + 1} \cdot \frac{5^2 + 1}{7^2 + 1} \cdots \frac{(2n-3)^2 + 1}{(2n-1)^2 + 1} \cdot \frac{(2n-1)^2 + 1}{(2n+1)^2 + 1}$

$\Rightarrow a_n = \frac{1^2 + 1}{(2n+1)^2 + 1} = \frac{1}{2n^2 + 2n + 1}$

ដូចនេះ $a_n = \frac{1}{2n^2 + 2n + 1}$

ទាញរក $\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{a_n}$

$$\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2 + 2n + 1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{a_n}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

III. គណនាតម្លៃនៃកន្សោម M

ចំពោះ $a,b,c>0$ យើងតាង $a=tan\alpha, b=tan\beta, c=tan\gamma$ ដែល $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

ដោយ $ab+bc+ca=1$ យើងបាន

$tan\alpha tan\beta+tan\beta tan\gamma+tan\gamma tan\alpha=1$

$\Leftrightarrow tan\alpha tan\beta+tan\beta tan\gamma=1-tan\gamma tan\alpha$

$\Leftrightarrow (tan\alpha+tan\gamma)tan\beta=1-tan\gamma tan\alpha$

$\Leftrightarrow \dfrac{tan\alpha+tan\gamma}{1-tan\alpha tan\gamma}=\dfrac{1}{tan\beta}$

$\Leftrightarrow tan(\alpha+\gamma)=cot\beta$

$\Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$

យើងបាន $a\sqrt{\dfrac{\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)}{1+a^2}}=(tan\alpha)\sqrt{\dfrac{\left(1+tan^2\beta\right)\left(1+tan^2\gamma\right)}{1+tan^2\alpha}}$

$=\left(\dfrac{sin\alpha}{cos\alpha}\right)\sqrt{\dfrac{cos^2\alpha}{cos^2\beta cos^2\gamma}}$

$\Rightarrow a\sqrt{\dfrac{\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)}{1+a^2}}=\dfrac{sin\alpha}{cos\beta cos\gamma}=\dfrac{cos(\beta+\gamma)}{cos\beta cos\gamma}$

$\Rightarrow a\sqrt{\dfrac{\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)}{1+a^2}}=1-tan\beta tan\gamma=1-bc$

ដូចគ្នាដែរ $b\sqrt{\dfrac{\left(1+c^2\right)\left(1+a^2\right)}{1+b^2}}=1-ca, c\sqrt{\dfrac{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}{1+c^2}}=1-ab$

យើងទាញបាន $M=(1-bc)+(1-ca)+(1-ab)=3-1=2$

ដូចនេះ $M=2$

IV. គណនា S,P និង $f(1)$

យើងមាន $1=cos0+isin0$

នោះ $x_k=cos\dfrac{2k\pi}{2020}+isin\dfrac{2k\pi}{2020}$

បើ $k=0;\ x_0=1$

បើ $k=1;\ x_1=cos\dfrac{2\pi}{2020}+isin\dfrac{2\pi}{2020}$

បើ $k=2;\ x_2 = cos\dfrac{4\pi}{2020} + isin\dfrac{4\pi}{2020} = x_1^2$

បើ $k=3;\ x_3 = cos\dfrac{6\pi}{2020} + isin\dfrac{6\pi}{2020} = x_1^3$

....

បើ $k=2019;\ x_{2019} = cos\dfrac{2\cdot 2019\pi}{2020} + isin\dfrac{2\cdot 2019\pi}{2020} = x_1^{2019}$

យើងទាញបាន

$$S = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{2019}$$

$S = 1 + x_1^2 + x_1^3 + \cdots + x_1^{2019}$

$S = \dfrac{1-x_1^{2019}}{1-x_1} = \dfrac{1-1}{1-x_1} = 0,\ (x_1^{2019} = 1, x_1 \neq 1)$

$P = x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_{2019}$

$P = 1\cdot x_1 \cdot x_1^2 \cdot x_1^3 \cdots x_1^{2019} = x_1^{1+2+3+\cdots+2019}$

$P = x_1^{2019\cdot 1010} = \left(cos\dfrac{2\pi}{2020} + isin\dfrac{2\pi}{2020}\right)^{2019/cdot1010}$

$P = cos2019\pi + isin2019\pi = -1$

ម្យ៉ាងទៀត

$$x^{2020} - 1 = (x-1)\left(x^{2019} + x^{2018} + \cdots + 1\right)$$

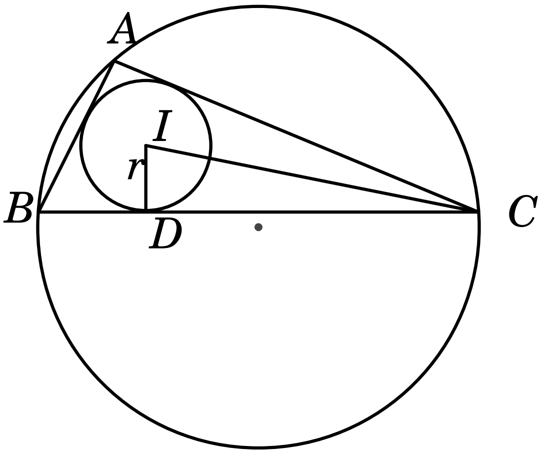
តែ $x^{2020} - 1 = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{2019})$

$\Rightarrow f(x) = x^{2019} + x^{2018} + x^{2017} + \cdots + 1$

$\Rightarrow f(1) = \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{2020} = 2020$

ដូចនេះ $S = 0, P = -1$ និង $f(1) = 2020$

V. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $IC^2 = ab - 4Rr$



តាង $\angle ACB = \alpha$ និង D ជាចំណុចដែលរង្វង់ប៉ះជ្រុង BC
ក្នុងត្រីកោណ CID យើងមាន :

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{ID}{IC}$$

$$\Rightarrow IC = \frac{ID}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow IC^2 = \frac{r^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

តែ $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$

$$= \frac{c^2-(a-b)^2}{4ab} = \frac{(c+a-b)(b+c-a)}{4ab}$$

យក $p = \frac{a+b+c}{2}$ នោះ $c+a-b = 2(p-b), b+c-a = 2(p-a)$

$$\Rightarrow IC^2 = \frac{abr^2}{(p-b)(p-a)}$$

តែ $S = pr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\Rightarrow (p-b)(p-a) = \frac{S^2}{p(p-c)}$$

$$\Rightarrow IC^2 = \frac{abr^2p(p-c)}{S^2} = \frac{abr^2p(p-c)}{p^2r^2}$$

$\Rightarrow IC^2 = ab - \frac{4Rrp}{p} = ab - 4Rr$ ពិត

ដូចនេះ $IC^2 = ab - 4Rr$

ប្រលងជ្រើសរើសសិស្សពូកែថ្នាក់ខេត្តតាកែវ
ផ្នែកគណិតវិទ្យា រូបវិទ្យា និង អក្សរសិល្ប៍ខ្មែរ ថ្នាក់ទី៩ និងថ្នាក់ទី ១២
សម័យប្រលង ០២ មីនា ២០២០
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យាទី ២ រយៈពេល ៣ ម៉ោង

I. ក. ដីចំការបីកន្លែង ចំការទី១មានរាងចតុកោណកែង ចំការទី២រាងការេ និងចំការទី៣មានរាងពហុកោណស្មើរស្មើជ្រុង ដែលមានចំនួនជ្រុងមិនកំណត់ ។ ចំការទាំងបីមានបរិមាត្រស្មើគ្នា ។ ចូរប្រៀបធៀបផ្ទៃក្រឡាចំការទាំងបី។

ខ. រកចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ដែលនាំឱ្យប្រភាគ $\dfrac{n^2+n+6}{n+1}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។

II. $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិចដែលកំណត់ដោយៈ
$z_n = 2\sqrt{2}(-1+i)$ ហើយគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n, z_{n+1} មានអាគុយម៉ង់នៅក្នុងចន្លោះ $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right], z_{n+1}^4 = z_n$ ។
១. កំណត់ម៉ូឌុល និងអាគុយម៉ង់នៃ z_1 ។
២. គេសន្មត់ $r_n = |z_n|$ និង $v_n = ln r_n$ ។
បង្ហាញថា $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលត្រូវបញ្ជាក់តួទី១ និងផលធៀបរួមរបស់វា ។

III. f ជាអនុគមន៍ដែលមានអថេរពិត x កំណត់ដោយ $y = f(x) = \left(x^2-3x+1\right)e^x$ ។
១. សិក្សាទិសដៅអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាងអនុគមន៍ f នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(0,\vec{i},\vec{j})$ ។
២. ក. បង្ហាញថា f ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ $y''-2y'+y=2e^x$ ។
ខ. គណនា $F(x)=2e^x+2y-y'$ និងបង្ហាញថាវាជាព្រីមីទីវមួយនៃអនុគមន៍ f ។ ៣. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកប្លង់ដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង និងអ័ក្ស $x'ox$ ដែល $x \geq 0$ ។

IV. នៅក្នុងតម្រុយអរតូណរម៉ាល់ $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ដែលមានទិសដៅវិជ្ជមាននៃលំហ គេឱ្យ ៤ចំណុច A,B,C និង D ដែលមានកូអរដោនេរៀងគ្នា $(-1,0,2);(3,2,-4);$ $(1,-4,2)$ និង $(5,-2,4)$ ។ I និង K ជាចំណុចកណ្តាលរៀងគ្នានៃអង្កត់ $[AB]$ និង $[CD]$ ហើយ $J\in[BC]$ ដែល $BJ=\dfrac{1}{4}\cdot BC$ ។
១. កំណត់កូអរដោនេនៃចំណុច I,J និង K ។

២. ក. បង្ហាញថាចំណុច I, J, K មិនរត់ត្រង់គ្នា ។

ខ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា ប្លង់ (IJK) មានសមីការ $8x+9y+5z-12=0$ ។

គ. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AD) និងបង្ហាញថា ប្លង់ (IJK) កាត់តាមបន្ទាត់ (AD) ត្រង់ចំណុច L មួយដែលគេត្រូវកំណត់កូអរដោនេ។

ឃ. បង្ហាញថា $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ ។

អត្រាកំណែ

I. ក. ប្រៀបធៀបផ្ទៃក្រឡាដីចំការ

តាង S_1 ផ្ទៃក្រឡាចំការរាងចតុកោណកែងដែលមាន x និង y ជាវិមាត្រ គឺ $S_1 = xy$

S_2 ផ្ទៃក្រឡាដីចំការការេដែលមាន a ជារង្វាស់ជ្រុងគឺ $S_2 = a^2$

S_3 ផ្ទៃក្រឡាដីចំការរាងពហុកោណស្មើរស្មើជ្រុង (រង្វង់កាំ r) គឺ $S_3 = \pi r^2$

យក p ជាបរិមាត្រនៃចំការ នោះ $2(x+y) = 4a = 2\pi r = p$

គេបាន $S_1 \le S_2 \le S_3$

ខ. រកចំនួនគត់ធម្មជាតិ n

តាង $N = \dfrac{n^2+n+6}{n+1} = n + \dfrac{6}{n+1}$

N ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានលុះត្រាតែ 6 ចែកដាច់នឹងចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n+1$ នោះគេបាន $n \in \{0,1,2,5\}$

II. ១. កំណត់ $|z_1|$ និង $arg(z_1)$

គេមាន $\begin{cases} z_0 = 2\sqrt{2}(-1+i) \\ z_{n+1}^4 = z_n,\ n \in \mathbb{N},\ arg(z_{n+1}) \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$

$$z_0 = 2\sqrt{2}(-1+i) = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 4\left(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$|z_0| = 4,\ arg(z_0) = \dfrac{3\pi}{4}$

ដោយ $z_{n+1}^4 = z_n$ នោះ $z_1^4 = z_0$ ឬ $z_1 = \sqrt[4]{z_0}$

$\bullet |z_1| = \left|\sqrt[4]{z_0}\right| = \sqrt[4]{|z_0|} = \sqrt[4]{4}$

$\bullet arg(z_1) = \dfrac{arg(z_0)}{4} + \dfrac{2k\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{2},\ k = 1 \Rightarrow arg(z_1) = \dfrac{11\pi}{16}$

ដូចនេះ $|z_1| = \sqrt[4]{4},\ arg(z_1) = \dfrac{11\pi}{16}$

២. បង្ហាញថា $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដោយបញ្ជាក់ v_0 និង q

$v_n = lnr_n = ln|z_n| \Rightarrow v_0 = lnr_0 = ln|z_0| = ln4 = 2ln2$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{ln|z_{n+1}|}{ln|z_n|} = \frac{ln\left|\sqrt[4]{z_n}\right|}{ln|z_n|} = \frac{1}{4}$: ថេរ

ដូចនេះ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រដែលមាន $v_0 = 2ln2, q = \frac{1}{4}$

III. ១. សិក្សាអថេរភាព និងសង់ខ្សែកោង (C) តាង f:

$C:\ y = f(x) = \left(x^2 - 3x + 1\right)e^x$

•ដែនកំណត់ : $D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

•លីមីត

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2 - 3x + 1\right)e^x = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)x^2e^x = 0$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)x^2e^x = +\infty$

ព្រោះ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^x = +\infty$

•ដេរីវេ និងសញ្ញា $f'(x)$

$f'(x) = \left(x^2 - 3x + 1\right)'e^x + (e^x)'\left(x^2 - 3x + 1\right) = \left(x^2 - x - 2\right)e^x$

$f''(x) = \left(x^2 + x - 3\right)e^x$

$f'(x)$ មានសញ្ញាដូច $x^2 - x - 2$, $x^2 - x - 2 = 0$ មាន $x = -1, x = 2$

•តារាងអថេរភាពនៃ f

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$f(-1)$	↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

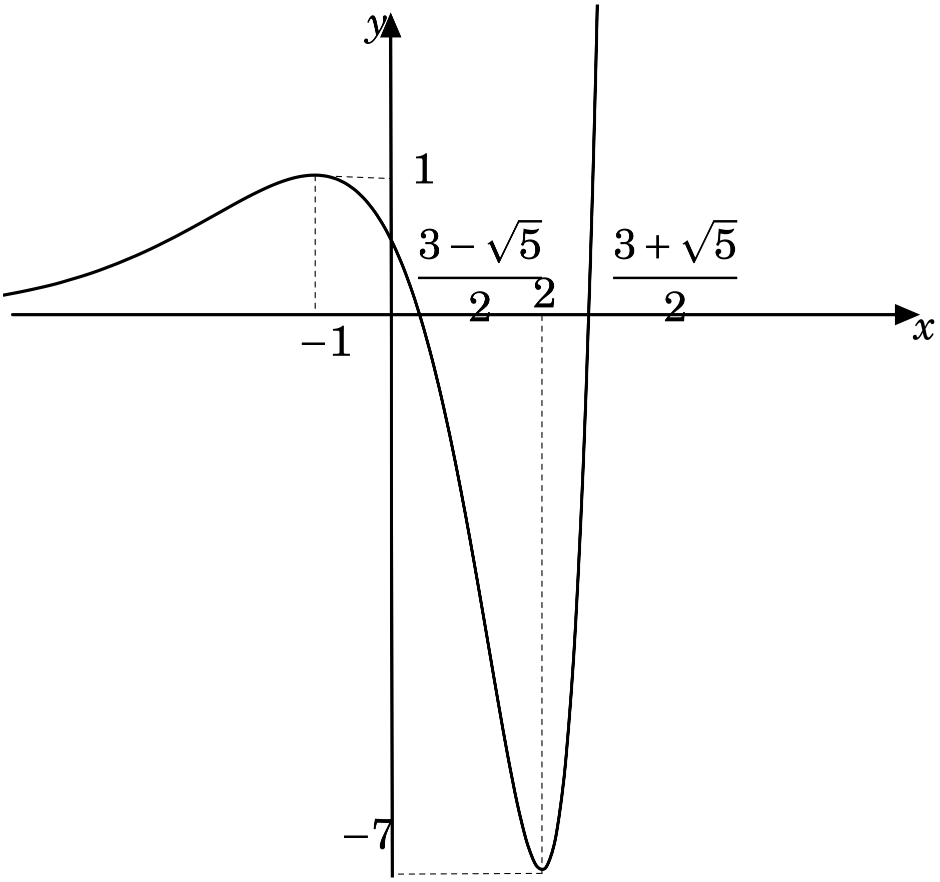
•សង់ខ្សែកោង (C): $y = f(x) = \left(x^2 - 3x + 1\right)e^x$

- ប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស $y'oy$: $x = 0, y = 1$

-ប្រសព្វជាមួយអ័ក្ស $x'ox$: $y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0,\ x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

- អាប់ស៊ីសចំណុចរបត់ : $y'' = 0 \Rightarrow x^2 - x - 3 = 0,\ x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

-អាស៊ីមតូតដេក :$y = 0$



២. ក. បង្ហាញថា f ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ $y''-2y'+y=2e^x$ (E)

$y=\left(x^2-3x+1\right)e^x,\ y'=\left(x^2-x-2\right)e^x,\ y''=\left(x^2+x-3\right)e^x$

$y''-2y'+y=\left(x^2+x-3-2x2+2x+4+x^2-3x+1\right)e^x=2e^x$

អនុគមន៍ $y=f(x)$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $y''-2y'+y=2e^x$

ដូចនេះ f ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ $y''-2y'+y=2e^x$

២. គណនា $F(x)$

$F(x)=2e^x+2y-y'=\left(2+2x^2-6x+2-x^2+x+2\right)e^x$

$F(x)=\left(x^2-5x+6\right)e^x$

បង្ហាញថា $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$:

យើងបាន

$$F'(x)=(2x-5+x^2-5x+6)e^x=\left(x^2-3x+1\right)e^x=f(x)$$

ដូចនេះ $F(x)$ ជាព្រីមីទីវមួយនៃ $f(x)$

៣. គណនាផ្ទៃក្រឡា

តាង A ជាផ្ទៃក្រឡាដែលកំណត់បានដោយខ្សែកោង C អ័ក្ស $x'ox$ ដែល $x\geq 0$

យើងបាន $A=\int_0^{\frac{3-\sqrt5}{2}} f(x)dx-\int_{\frac{3-\sqrt5}{2}}^{\frac{3+\sqrt5}{2}} f(x)dx$

តែ $\int f(x)dx=F(x)$

$\Rightarrow A=\left[\left(x^2-5x+6\right)e^x\right]_0^{\frac{3-\sqrt5}{2}}-\left[\left(x^2-5x+6\right)e^x\right]_0^{\frac{3+\sqrt5}{2}}$

$A=(4+2\sqrt5)e^{\frac{3-\sqrt5}{2}}+(\sqrt5-2)e^{\frac{3+\sqrt5}{2}}-6$ ឯកតាផ្ទៃ

ឬ តាង S ជាផ្ទៃក្រឡាដែលកំណត់បានដោយខ្សែកោង C អ័ក្ស $x'ox$ ដែល $x\ge 0$

គេបាន $S=A+\int_{\frac{3+\sqrt5}{2}}^{\alpha} f(x)dx=+\infty,\ \alpha>\frac{3+\sqrt5}{2}$ ផ្ទៃក្រឡាធំមិនកំណត់ ។

IV. ១. កំណត់កូអរដោនេចំណុច I,J និង K

$A(-1,0,2);\ B(3,2,-4);\ C(1,-4,2)$ និង $D(5,-2,4)$

I ជាចំណុចកណ្តាល $[AB]$ នោះ $I(1,1,-1)$

តាង $J\left(x_j,y_j,z_j\right)$

ដោយ $JB=\frac{1}{4}BC$

យើងបាន $\left(x_j-3,y_j-2,z_j+4\right)=\frac{1}{4}(-2,-6,6$

$\Rightarrow x_j-3=-\frac{1}{2},y_j-2=-\frac{3}{2},z_j+4=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow J\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$

K ជាចំណុចកណ្តាល $[CD]$ នោះ $K(3,-3,3)$

ដូចនេះ $I(1,1,-1),J\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$ និង $K(3,-3,3)$

២. ក.បង្ហាញថាចំណុច I,J,K មិនរត់ត្រង់គ្នា

យើងគណនា $\overrightarrow{IJ}\times\overrightarrow{IK}$

$\overrightarrow{IJ}=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$

$\overrightarrow{IK}=(2,-4,4)$

យើងបាន

$$\overrightarrow{IJ}\times\overrightarrow{IK}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ 2 & -4 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ -4 & 4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{3}{2}\\ 2 & 4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 2 & -4\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-2-6)\vec{i}-(6+3)\vec{j}+(-6+1)\vec{k}$$

$$=-8\vec{i}-9\vec{j}-5\vec{k}$$

ដោយ $\overrightarrow{IJ}\times\overrightarrow{IK}\neq\vec{0}$ នោះចំណុច I,J,K មិនរត់ត្រង់គ្នា ។

ខ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា ប្លង់ (IJK) មានសមីការ $8x+9y+5z-12=0$

ប្លង់ (IJK) កាត់តាមចំណុច $I(1,1,-1)$ និង មានវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់ $\vec{n}=\overrightarrow{IJ}\times\overrightarrow{IK}$ កំណត់ដោយ :

$$(IJK):\ a(x-x_I)+b(y-y_I)+c(z-z_I)=0$$

$$-8(x-1)-9(y-1)-5(z+1)=0$$

$$-8x-9y-5z+12=0$$

ដូចនេះ ប្លង់ (IJK) គឺ $8x+9y+5z-12=0$

គ. កំណត់សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AD) និងបង្ហាញថាប្លង់ (IJK) កាត់បន្ទាត់ (AD) ត្រង់ចំណុច L មួយដែលគេត្រូវកំណត់កូអរដោនេ

បន្ទាត់ (AD) កាត់តាមចំណុច $A(-1,0,2)$ និងមានវ៉ិចទ័រប្រាប់ទិស $\overrightarrow{AD}=(6,-2,2)$ មានសមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រកំណត់ដោយ :

$$(AD):\begin{cases}x=x_A+at\\ y=y_A+bt\\ z=z_A+ct\end{cases}\quad \text{ដែល } t\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow(AD):\begin{cases}x=-1+6t\\ y=0+(-2)t\\ z=2+2t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

ដូចនេះ សមីការប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបន្ទាត់ (AD) គឺ $x=-1+6t, y=-2t, z=2+2t$ ដែល $t\in\mathbb{R}$

•បង្ហាញថា ប្លង់ (IJK) កាត់ (AD) ត្រង់ L ដែលគេត្រូវកំណត់កូអរដោនេ

$L=(IJK)\cap(AD)$ នោះកូអរដោនេចំណុច L (បើមាន) ជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការ

$$\begin{cases}8x+9y+5z-12=0 & (1\\ (x,y,z)=(-1+6t,-2t,2+2t) & (2)\end{cases}$$

យក (2) ជំនួសចូល (1) សមីការអញ្ញាត t មានឫស $t=\frac{1}{4}$

នោះ (IJK) កាត់ (AD) ត្រង់ L

បើ $t=\frac{1}{4}$, $L\in(AD)$ គេបាន $L\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$

ដូចនេះ (IJK) កាត់ (AD) ត្រង់ចំណុច $L\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$

ឃ. បង្ហាញថា $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{AD}=(6,-2,2)\\ \overrightarrow{AL}=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{6}{\frac{3}{2}}=\frac{-2}{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$$

$$\overrightarrow{AD}=4\cdot\overrightarrow{AL}\ \Rightarrow\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

ដូចនេះ $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

ប្រលងជ្រើសរើសគ្រូបង្រៀនកម្រិតឧត្តម
បរិញ្ញាបត្រ+១ ជំនាន់ទី ២៨ ឆ្នាំ ២០១៩
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យាទី រយៈពេល ៣ ម៉ោង

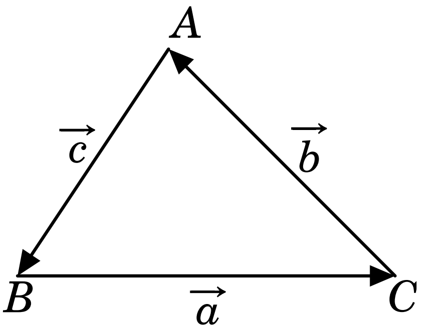
I. ១. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $(cos8x+cos2x)^2+(sin8x+sin2x)^2=4cos^3 3x$ ។ បន្ទាប់មករកតម្លៃ x ចំពោះ $(cos8x+cos2x)^2+(sin8x+sin2x)^2=3$ ដែល $0^0<x<180^0$ ។

២. គេឱ្យកន្សោម $S_n=\sum_{r=1}^{n} e^{rx}(r-re^{-x}+e^{-x})$ ដែល x ជាចំនួនពិត និង $x\neq 0$ ។ ចូរស្រាយតាមវិចារកំណើនថាផលបូក $S_n=ne^{nx}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ។

៣. គេឱ្យតួនៃស្វ៊ីត $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រវិជ្ជមានកើន និងតួនៃស្វ៊ីតនីមួយៗផ្សេងទៀតគឺ $y_1,y_2,y_3,...,y_n$ កំណត់ដោយ $y_r=logx_r+2000$ ចំពោះ $r=1,2,3,...,n$ ។ ចូរបង្ហាញថា $y_1,y_2,y_3,...,y_n$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តកើន ។

II. ១. គេឱ្យវ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំណុច A និង B រៀងគ្នា $\vec{a}=\vec{j}-4\vec{k}$ និង $\vec{b}=6\vec{i}-5\vec{j}-\vec{k}$ ។ ចូរបង្ហាញថា បន្ទាត់ AB ស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ បន្ទាប់មកសរសេរសមីការបន្ទាត់ AB ។

២. បង្ហាញថា ត្រីកោណ ABC ដូចរូប គេទាញបាន $\dfrac{a}{sinA}=\dfrac{b}{sinB}=\dfrac{c}{sinC}$ ។



III. ១. គេឱ្យ $B=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&2&0\end{bmatrix}$ ។ រក $det(B)$ និង $det\left(B^{-1}\right)$ រួចកំណត់ទំនាក់ទំនងរវាង $det(B)$ និង $det\left(B^{-1}\right)$ ។

២. គេឱ្យប្លង់ P_1,P_2 ប្រសព្វគ្នា និង $\vec{n_1},\vec{n_2}$ ជាវ៉ិចទ័រណរម៉ាល់រៀងគ្នានៃប្លង់ ។ បង្ហាញ

ថា មុំរវាងប្លង់ P_1, P_2 ស្មើនឹងមុំផ្គុំដោយ $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ រួចទាញរូបមន្តទូទៅសម្រាប់គណនាមុំរវាងប្លង់ពីរប្រសព្វគ្នា។

IV. ១. ចំពោះគ្រប់ $x \in [3,7]$ ចូរបង្ហាញថា $2\sqrt{2} < \int_3^7 \frac{dx}{\sqrt{lnx}} < 4$។

២. ប្រើស៊េរី Maclaurine ស្រាយបញ្ជាក់ថា $e^{ix} = cosx + isinx$ ។

៣. សរសេរ $\frac{2x^2 - x + 4}{(1+x^2)(2-x)}$ ជារាង $\frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{C}{2-x}$ ដែល A, B, C ជាចំនួនថេរ ហើយបន្ទាប់មកពន្លាត $\frac{2x^2 - 4x + 4}{(1+x^2)(2-x)}$ ជាដឺក្រេកើនរហូតដល់តួដែលមាន x^3 ។

V. ១. គេឱ្យអថេរចៃដន្យ X មានបំណែងចែកប្រូបាប

X	-2	-1	0	1	2
$P(X=x)$	0.2	a	0.1	b	0.4

គេដឹងថា $E(X) = 0.1$ រកតម្លៃនៃ a និង b ។

២. គេឱ្យកន្សោម $2x^3 + ax^2 + bx + c$ ។ បើគេចែកពហុធានេះជាមួយ $x-2$ និង $x+1$ គេបានសំណល់ដែលមានតម្លៃស្មើគ្នា។ បង្ហាញថា $a + b = -6$ ។

៣. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $yy' + y^2 = x$ ។

ដំណោះស្រាយ

I. ១. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(cos8x + cos2x)^2 + (sin8x + sin2x)^2 = 4cos^2 3x$

យើងបាន $(cos8x + cos2x)^2 + (sin8x + sin2x)^2 = cos^2 8x + 2cos8xcos2x$

$$+ cos^2 x + sin^2 8x + 2sin8xsin2x + sin^2 x$$

$$= 2 + 2(cos8xcos2x + sin8xsin2x)$$

$$= 2 + 2cos(8x - 2x)$$

$$= 2(1 + cos6x) = 4 \cdot \frac{1 + cos2 \cdot 3x}{2}$$

$= 4cos^2 3x$ ព្រោះ $cos^2 3x = \frac{1 + cos6x}{2}$

រកតម្លៃ x ចំពោះ $(cos8x + cos2x)^2 + (sin8x + sin2x)^2 = 3$ ដែល $0^0 < x < 180^0$

យើងអាចសរសេរ $4cos^2 3x = 3$

នោះ $cosx = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

•ចំពោះ $cos3x = \frac{\sqrt{3}}{2} = cos30^0$

$\Leftrightarrow 3x = \pm 30^0 + 360^0 k,\ (k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow x = \pm 10^0 + 120^0 k,\ (k \in \mathbb{Z})$

- បើ $x = 10^0 + 120^0 k$

យើងទាញបាន $x \in \{30^0, 130^0\}$

- បើ $x = -10^0 + 120^0 k$

យើងទាញបាន $x \in \{110^0\}$

•ចំពោះ $cos3x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = cos150^0$

$\Leftrightarrow 3x = \pm 150^0 + 360^0 m$

$\Rightarrow x = \pm 50^0 + 120^0 m,\ (m \in \mathbb{Z})$

- បើ $x = 50^0 + 120^0 m$

យើងទាញបាន $x \in \{50^0, 170^0\}$

- បើ $x = -50^0 + 120^0 m$

យើងទាញបាន $x \in \{70^0\}$

ដូចនេះ តម្លៃ x ដែលត្រូវរករួមមាន $\{10^0, 50^0, 110^0, 130^0, 170^0\}$

២. ស្រាយតាមវិចារកំណើនថាផលបូក $S_n = ne^{nx}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n

យើងមាន $S_n = \sum_{r=1}^{n} e^{rx}(r - re^{-x} + e^{-x})$ ចំពោះចំនួនពិត $x \neq 0$

- ចំពោះ $n = 1$ នោះ $S_1 = e^x(1 - e^{-x} + e^{-x}) = e^x = 1 \cdot e^{1 \cdot x}$ ពិត

- ចំពោះ $n = 2$ នោះ $S_2 = e^x(1 - e^{-x} + e^{-x}) + e^{2x}(2 - 2e^{-x} + e^{-x}) = e^x + 2e^{2x} - 2e^x + e^x = 2 \cdot e^{2 \cdot x}$ ពិត

- ឧបមាថាពិតរហូតដល់ $n = k$ គឺ $S_k = \sum_{r=1}^{k} e^{rx}(r - re^{-x} + e^{-x}) = k \cdot e^{kx}$

- សិក្សាករណី $n = k + 1$

$S_{k+1} = S_k + e^{(k+1)‘x}((k+1)‘ - (k+1)e^{-x} + e^{-x})$

$= ke^{kx} + (k+1)e^{(k+1)x} - (k+1)e^{kx} + e^{kx}$

$= (k+1)e^{(k+1)x}$ ពិត

៣. បង្ហាញថា $y - 1, y_2, y_3, ..., y_n$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តកើន

$x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រវិជ្ជមានកើន នោះគេទាញបាន $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n$

ផលធៀបរួម $q = \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$

ស្វ៊ីត $y_1, y_2, y_3, ..., y_r$ កំណត់ដោយ $y_r = log x_r + 2000$ ចំពោះ $r = 1,2,3,...,n$

យើងពិនិត្យមើល $y_{r+1} - y_r = log x_{r+1} - log x_r = log\frac{x_{r+1}}{x_r} = log q$

$\Rightarrow y_1, y_2, y_3, ..., y_r$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែលមានផលសងរួម $d = log q \quad (1)$

តែ $q > 1$ នោះ $log q > log 1 = 0 \quad (2)$

តាម $(1)\&(2) \Rightarrow y_1, y_2, y_3, ..., y_r$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តកើន

II. ១. បន្ទាត់ AB ស្របនឹងវ៉ិចទ័រ $2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ បន្ទាប់មកសរសេរសមីការបន្ទាត់ AB

វ៉ិចទ័រទីតាំងនៃចំណុច A និង B គឺ $\vec{a} = \vec{j} - 4\vec{k}$ និង $\vec{b} = 6\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$

យើងបាន $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \left(6\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}\right) - \left(\vec{j} - 4\vec{k}\right) = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$

ផលធៀប $\frac{2}{6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$ នោះវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{AB}$ និងវ៉ិចទ័រ $2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ កូលីនេអ៊ែរ ។

តាង K ជាចំណុចចល័តនៅលើបន្ទាត់ (AB) ហើយមានវ៉ិចទ័រទីតាំង $\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

យើងបាន $\vec{k} - \vec{a} = \lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}, (\lambda \in \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \vec{k} = \vec{a} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\1)\end{pmatrix}, (\lambda \in \mathbb{R}$

ដូចនេះ សមីការបន្ទាត់ AB គឺ $\vec{k} = \begin{pmatrix}0\\1\\-4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}, (\lambda \in \mathbb{R})$

ឬ $AB : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = -4 + \lambda \end{cases}, (\lambda \in \mathbb{R})$

២. បង្ហាញថា ត្រីកោណ ABC ដូចរូប គេទាញបាន $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC}$

យើងមាន $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \quad (1)$

គុណ (1) ដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{a}$

$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$

ឬ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$

គុណ (1) ដោយវ៉ិចទ័រ $\vec{c}$

នោះ $\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}+\vec{c}\times\vec{c}=\vec{0}$

ឬ $\vec{c}\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c}$

យើងទាញបានថា $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$

$\Rightarrow absinC=bcsinA=casinB$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{sinA}=\dfrac{b}{sinB}=\dfrac{c}{sinC}$ ពិត

គ. គណនា $det(B)$ និង $det\left(B^{-1}\right)$ រួចរកទំនាក់ទំនងរវាង $det(B)$ និង $det\left(B^{-1}\right)$

យើងមាន $B=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&2&1\end{bmatrix}$

យើងបាន $det(B)=(1+0+0)-(0+2+1)=-2$

យើងរកម៉ាទ្រីសប្រាស B^{-1}

តាម $B^{-1}=\dfrac{1}{det(B)}\cdot adj(B)=\dfrac{1}{det(B)}\cdot\left[B_{cof}\right]^T$

$C_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1$ $\qquad c_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=-1$

$C_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}=2$ $\qquad C_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}=-1$

$C_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1$ $\qquad C_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}=-2$

$C_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1$ $\qquad C_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=-1$

$C_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$

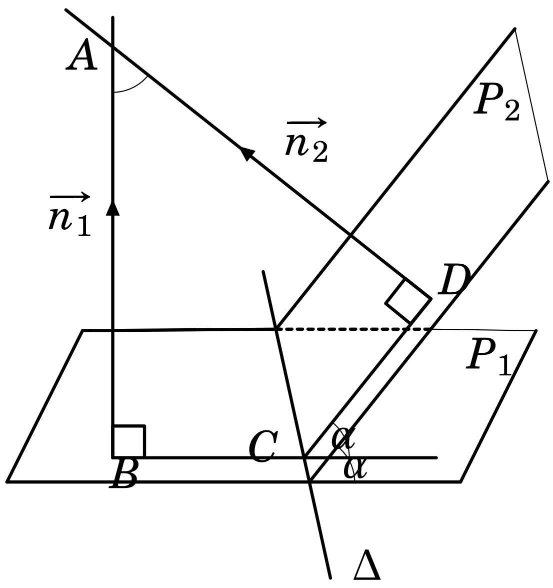
នោះ $B^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&-1&1\\-1&1&-1\\2&-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-1&1&0\end{bmatrix}$

នោះ $det\left(B^{-1}\right)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\left(0-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2}$

ដោយ $det(B)=-2,\ det\left(B^{-1}\right)=-\frac{1}{2}$

ទំនាក់ទំនងគឺ $det\left(B^{-1}\right)=\frac{1}{det(B)}$

ឃ. បង្ហាញថា មុំរវាងប្លង់ P_1,P_2 ស្មើនឹងមុំដែលផ្គុំឡើងដោយ $\overrightarrow{n_1}$ និង $\overrightarrow{n_2}$ រួចទាញរករូបមន្តទូទៅសម្រាប់គណនាមុំរវាងប្លង់ពីរប្រសព្វគ្នា



តាងΔ ជាបន្ទាត់ប្រសព្វរវាងប្លង់ P_1 និង P_2 ហើយ α ជាមុំរវាងប្លង់ទាំងពីរ

តាមចំណុច $C\in\Delta$ សង់បន្ទាត់ $CB\subseteq P_1$ និង $CD\subseteq P_2$

បន្ទាត់កែងនឹង P_1 ត្រង់ B និងបន្ទាត់កែងនឹង P_2 ត្រង់ D កាត់គ្នាត្រង់ A

$\Rightarrow AB\parallel\overrightarrow{n_1}$ និង $AD\parallel\overrightarrow{n_2}$

គេបាន $\angle BAD$ និង $\angle BCD$ ជាមុំមានជ្រុងត្រូវគ្នាកែងរៀងគ្នា

$\Rightarrow \angle BAD$ និង $\angle BCD$ ជាមុំបន្ថែមគ្នាព្រោះមុំមួយជាមុំស្រួច និងមុំមួយទៀតជាមុំកែង

$\Rightarrow \angle BAD+\angle BCD=180^0$

តែ $\angle BCD+\alpha=180^0$

$\Rightarrow \angle BAD=\alpha$ មានន័យថាមុំរវាងបន្ទាត់ AB និង AD ស្មើនឹងមុំរវាងប្លង់ទាំងពីរ

ដូចនេះ មុំរវាងប្លង់ P_1,P_2 ស្មើនឹងមុំដែលផ្គុំឡើងដោយ $\overrightarrow{n_1}$ និង $\overrightarrow{n_2}$

តាង $\overrightarrow{n_1}=(a_1,b_1,c_1)$' និង $\overrightarrow{n_2}=(a_2,b_2,c_2)$
យើងបាន $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|cos\alpha$
$\Rightarrow cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$
ដូចនេះ មុំរវាងប្លង់ពីរប្រសព្វគ្នាគឺ $\alpha=arccos\dfrac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$

III. ១. បង្ហាញថា $2\sqrt{2}<\displaystyle\int_3^7\frac{dx}{\sqrt{lnx}}<4$
ចំពោះគ្រប់ $x\in[3,7]:\ 3\le x\le 7$
នោះ $e<x<e^2$
$\Leftrightarrow lne<lnx<lne^2$ ឬ $1<lnx<2$
$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}<\dfrac{1}{\sqrt{lnx}}<1$
$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\displaystyle\int_3^7 dx<\int_3^7\frac{dx}{\sqrt{lnx}}<\int_3^7 dx$
$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}[x]_3^7<\displaystyle\int_3^7\frac{dx}{\sqrt{lnx}}<[x]_3^7$
$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}(7-3)<\displaystyle\int_3^7\frac{dx}{\sqrt{lnx}}<(7-3)$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}<\displaystyle\int_3^7\frac{dx}{\sqrt{lnx}}<4$ ពិត
២. ប្រើស៊េរី Maclaurine ស្រាយបញ្ជាក់ថា $e^{ix}=cosx+isinx$
តាមស៊េរី Maclaurine យើងមាន

$$e^{ix}=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)$$

$cosx=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots$
$sinx=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots$
$\Rightarrow cosx+isinx=\left(1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots\right)+i\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots\right)$
$\Rightarrow cosx+isinx=e^{ix}$ ពិត

៣. សរសេរ $\dfrac{2x^2-x+4}{(1+x^2)(2-x)}$ ជារាង $\dfrac{Ax+B}{1+x^2}+\dfrac{C}{2-x}$ ដែល A,B,C ជាចំនួនថេរ ហើយបន្ទាប់មកពន្លាត $\dfrac{2x^2-x+4}{(1+x^2)(2-x)}$ ជាដឺក្រេកើនរហូតដល់តួដែលមាន x^3

យើងបាន $\dfrac{2x^2-x+4}{(1+x^2)(2-x)}=\dfrac{Ax+B}{1+x^2}+\dfrac{C}{2-x}$

$\Leftrightarrow 2x^2-x+4=(2-x)(Ax+B)+C\left(1+x^2\right)$

$\Leftrightarrow 2x^2-x+4=(C-A)x^2+(2A-B)x+(2B+C)$

យើងទាញបាន $\begin{cases} C-A=2 \\ 2A-B=-1 \\ 2B+C=4 \end{cases}$

ដូចនេះ $A=0,B=1,C=2$

ចំពោះ $A=0,B=1,C=2$ យើងបាន $\dfrac{2x^2-x+4}{(1+x^2)(2-x)}=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{2}{2-x}$

តាមទ្វេធាញូតុន $(1+x)^n=1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2!}x^2+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots$

ចំពោះ $|x|<1$

យើងបាន

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2}&=\left(1+x^2\right)^{-1}=1+(-1)x^2+\frac{(-1)(-1-1)}{2!}x^4\\&+\frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!}x^6+\cdots\\&=1-x^2+x^4-x^6+\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{2-x}&=\frac{2}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)}=\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}\\&=1+(-1)\left(-\frac{x}{2}\right)+\frac{(-1)(-1)}{2!}\left(-\frac{x}{2}\right)^2\\&+\frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!}\left(-\frac{x}{2}\right)^3+\cdots\\&=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}+\cdots\end{aligned}$$

យើងបាន $\dfrac{2x^2-x+4}{(1+x^2)(2-x)}=(1+1)+\dfrac{x}{2}+\left(\dfrac{x^2}{4}-x^2\right)+\dfrac{x^3}{8}+\cdots$

ដូចនេះ $\frac{2x^2-x+4}{(1+x^2)(2-x)}=2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}x^2+\frac{x^3}{8}+\cdots$ ដែល $|x|<1$

របៀបទី២:

តាមរូបមន្តផលបូកស៊េរីធរណីមាត្រ $1+r+r^2+\cdots=\frac{1}{1-r}$ ចំពោះ $|r|<1$

នោះ $a+ar+ar^2+\cdots=\frac{a}{1-r}$

យើងបាន $\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=1+(-x^2)+(-x^2)^2+(-x^2)^3+\cdots=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$

និង $\frac{2}{2-x}=\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^3+\cdots=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}+\cdots$

ដែល $|x^2|<1$ និង $\left|\frac{x}{2}\right|<1 \Leftrightarrow |x|<1$

ដូចនេះ $\frac{2x^2-x+4}{(1+x^2)(2-x)}=2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}x^2+\frac{x^3}{8}+\cdots$ ដែល $|x|<1$

IV. ១. រកតម្លៃ a និង b

យើងមាន $\sum P(X=x)=0.2+a+0.1+b+0.4=1 \Rightarrow a+b=0.3 \quad (1)$

$E(X)=(-2)(0.2)+(-1)(a)+(0)(0.1)+(1)(b)+(2)(0.4)=0.1$

$\Rightarrow a-b=0.3 \quad (2)$

តាម (1) និង (2) យើងបាន

$$\begin{cases} a+b=0.3 \\ a-b=0.3 \end{cases}$$

ដូចនេះ $a=0.3, b=0$

២. បង្ហាញថា $a+b=-6$

តាង $P(x)=2x^3+ax^2+bx+c$

$P(x)$ ចែកនឹង $x+1, x-2$ បានសំណល់ដូចគ្នា

តាមទ្រឹស្តីបទសំណល់ យើងបាន $P(-1)=P(2)$

ឬ $-2+a-b+c=16+4a+2b+c$

$\Rightarrow a+b=-6$ ពិត

៣. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $yy'+y^2=x$

សមីការអាចសរសេរទៅជា $(y^2)'+2y^2=2x$

តាង $m=y^2$ នោះ $m'+2m=2x$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី១ មានមេគុណ

ថេរមិនអូម៉ូសែន
កត្តាអាំងតេក្រាល $IF = e^{\int 2dx} = e^{2x}$
យើងបាន $e^{2x}m' + 2me^{2x} = 2xe^{2x}$
$\Rightarrow \left(me^{2x}\right)' = 2xe^{2x}$
$\Leftrightarrow me^{2x} = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)e^{2x} + t,\ t \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow m = x - \dfrac{1}{2} + te^{-2x}$
$\Rightarrow y^2 = x - \dfrac{1}{2} + te^{-2x}$
ដូចនេះ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានចម្លើយ $y^2 = x - \dfrac{1}{2} + te^{-2x},\ t \in \mathbb{R}$

ប្រលងជ្រើសរើសសិស្សពូកែវិទ្យាល័យព្រះស៊ីសុវត្ថិ
សម្រាប់ឆ្នាំសិក្សា ២០១៩-២០២០
វិញ្ញាសា : គណិតវិទ្យា រយ:ពេល ៣ ម៉ោង

I. គេឱ្យស្ទីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_n = e^n + e^{-n}$ ។ គណនា $\sum_{k=0}^{2020} u_k$ ។

II. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = x^x$ ។ គណនា $f'(x)$ ។

III. គេមានសមីការដឺក្រេទី២ $2x^2 + 2x + cos\alpha = 0\ (0 < \alpha < \pi)$ ។
ក) កំណត់តម្លៃ α ដែលធ្វើឱ្យសមីការមានឫស ។
ខ) គណនាតម្លៃ α ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់កន្សោម $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ រួចទាញបង្ហាញថា $x_1^2 + x_2^2 < 1.9$ ។

IV. a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ ABC ។ បង្ហាញថា $\dfrac{sin(B-C)}{sin(B+C)} = \dfrac{b^2 - c^2}{a^2}$ ។

V. គេមានស្ទីត (u) កំណត់ដោយ $u_0 = a, \ldots, u_{n+1} = \dfrac{665}{666}u_n + 3$ ដែល $a \in \mathbb{R}$ និង $n \in \mathbb{N}$ ។
ក) តើ a មានតម្លៃស្មើប៉ុន្មានទើបស្ទីត (u) ជាស្ទីតថេរ ?
ខ) ករណី (u) មិនមែនជាស្ទីតថេរ គេពិនិត្យស្ទីត (v) កំណត់ដោយ $v_n = u_n - 1998$ ។

១. បង្ហាញថា (v) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនាតួ v_0 និងរេសុងវា។
២. គណនាជាអនុគមន៍នៃ n និង a តួទូទៅ u_n នៃស្វ៊ីត (u) និងផលបូក $S_n = u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$ ។

VI. $ABCDA'B'C'D'$ ជាគូបដែលជ្រុងមានប្រវែងស្មើ 1។
ក) $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}\right)$ ជាតម្រុយអរតូណរម៉ាល់មានទិសដៅវិជ្ជមាន។ ចូរកំណត់កូអរដោនេកំពូលទាំងអស់នៃគូប។
ខ) គណនារង្វាស់មុំផ្ចិតដោយបន្ទាត់ AC' និង $A'B$។
គ) តាង M,N,P ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃអង្កត់ $[A'B']$;$[BC]$;$[DD']$។ កំណត់សមីការប្លង់ (MNP) រួចគណនាចម្ងាយពី A ទៅប្លង់ (MNP)។
ឃ) កំណត់សមីការស្វ៊ែរចារឹកក្នុង និងក្រៅគូប $ABCDA'B'C'D'$។

VII. គណនា $S=\dfrac{3^2+1}{3^2-1}+\dfrac{5^2+1}{5^2-1}+\dfrac{7^2+1}{7^2-1}+\cdots+\dfrac{999^2+1}{999^2-1}$។

ដំណោះស្រាយ

I. គណនា $\sum\limits_{k=0}^{2020} u_k$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2020}\left(e^k+e^{-k}\right) &= \sum_{k=0}^{2020} e^k+\sum_{k=0}^{2020} e^{-k}\\ &=\left(1+e+e^2+\cdots+e^{2020}\right)+\left(1+e^{-1}+e^{-2}+\cdots+e^{-2020}\right)\\ &=\left(\frac{e^{2021}-1}{e-1}\right)+\left(\frac{e^{-2021}-1}{e-1}\right)\\ &=\frac{e^{2021}-1}{e-1}+\frac{e\left(e^{-2021}-1\right)}{e-1}\\ &=\frac{1}{e-1}\left(e^{2021}-e^{-2020}+e-1\right)\end{aligned}$$

II. គណនា $f'(x)$
យើងមាន $f(x)=x^x$
$lnf(x)=lnx^x$ ឬ $lnf(x)=xlnx$
យើងបាន $[lnf(x)]'=[xlnx]'$
$\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=(x)'lnx+(lnx)'\cdot x$

$\Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = lnx + 1$

នោះ $f'(x) = f(x)(lnx + 1)$

ដូចនេះ $f'(x) = x^x(lnx + 1)$

III. ក) កំណត់តម្លៃ α ដែលធ្វើឱ្យសមីការមានឫស

សមីការ $2x^2 + 2x + cos\alpha = 0$

$\Delta' = 1 - 2cos\alpha$

សមីការមានឫសកាលណា $\Delta' \geq 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2cos\alpha \geq 0$

$\Leftrightarrow \alpha \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right[$

ខ) គណនាតម្លៃ α

គេមានកន្សោម $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1}{\dfrac{cos\alpha}{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \ \Rightarrow \alpha = \dfrac{5\pi}{6}$

ដូចនេះ $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$

បង្ហាញថា $x_1^2 + x_2^2 < 1.9$

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$= (-1)^2 - 2 \cdot \dfrac{cos\alpha}{2}$

$= 1 - 2cos\alpha = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1.9$

ដូចនេះ $x_1^2 + x_2^2 < 1.9$

IV. បង្ហាញថា $\dfrac{sin(B-C)}{sin(B+C)} = \dfrac{b^2 - c^2}{a^2}$

យើងបាន $\dfrac{sin(B-C)}{sin(B+C)} = \dfrac{sinBcosC - sinCcosB}{sinBcosC + sinCcosB}$

ដោយ $\dfrac{a}{sinA} = \dfrac{b}{sinB} = \dfrac{c}{sinC} = k$

$$\Rightarrow \begin{cases} sinB = \dfrac{b}{k} \\ sinC = \dfrac{c}{k} \end{cases}$$

$cosB = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ និង $cosC = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$$\frac{sin(B-C)}{sin(B+C)} = \frac{\frac{b}{k}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) - \frac{c}{k}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)}{\frac{b}{k}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) + \frac{c}{k}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)}$$

$$= \frac{a^2+b^2-c^2-a^2-c^2+b^2}{a^2+b^2-c^2+a^2+c^2-b^2}$$

$= \dfrac{b^2-c^2}{a^2}$ ពិត

V. ក) កមណត់តម្លៃ a ដើម្បីឱ្យ (u) ជាស្វីតថេរ

(u) ជាស្វីតថេរ នោះ $u_0 = a = u_1 = u_2 = ... = u_n = u_{n+1} = ... = a$

$\Rightarrow a = \dfrac{665}{666}a + 3$

$\Rightarrow a - \dfrac{665}{666}a = 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{666}a = 3 \Rightarrow a = 1998$

ដូចនេះ $a = 1998$

ខ) ១. បង្ហាញថា (v) ជាស្វីតធរណីមាត្រ

យើងមាន $v_n = u_n - 1998$ នោះ $v_{n+1} = u_{n+1} - 1998$

$\Rightarrow v_{n+1} = \left(\dfrac{665}{666}u_n + 3\right) - 1998$

$\Rightarrow v_{n+1} = \dfrac{665}{666}u_n - 1995$

តែ $v_n = u_n - 1998$ នោះ $u_n = v_n + 1998$

យើងបាន $v_{n+1} = \dfrac{665}{666}(v_n + 1998) - 1995$

$\Rightarrow \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{665}{666}$ ថេរ

នោះ (v_n) ជាស្វីតធរណីមាត្រដែលមានរេសុង $q = \dfrac{665}{666}$ និង $v_0 = u_0 - 1998 = a - 1998$

២. គណនាជាអនុគមន៍នៃ n និង a តួទូទៅ u_n នៃស្វ៊ីត (u) និងផលបូក

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

យើងមាន $u_n = v_n + 1998$

តែ $v_n = v_0 \times q^n = (a-1998)\left(\frac{665}{666}\right)^n$

នោះ $u_n = (a-1998)\left(\frac{665}{666}\right)^n + 1998$

ដូចនេះ $u_n = (a-1998)\left(\frac{665}{666}\right)^n + 1998$

យើងបាន $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[(a-1998)\left(\frac{665}{666}\right)^n + 1998\right]$$

$$S_n = (a-1998)\left(\frac{665}{666}\right)^0 + 1998 + (a-1998)\left(\frac{665}{666}\right)^1$$

$$+1998 + (a-1998)\left(\frac{665}{666}\right)^2 + 1998 + (a-1998)\left(\frac{665}{666}\right)^n + 1998$$

$$= (a-1998)\left[\left(\frac{665}{666}\right)^0 + \left(\frac{665}{666}\right)^1 + \left(\frac{665}{666}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{665}{666}\right)^n\right]$$

$$+(n+1)\cdot 1998$$

$$= (a-1998)\frac{1-\left(\frac{665}{666}\right)^{n+1}}{1-\frac{665}{666}} + (n+1)\cdot 1998$$

$$= 666(a-1998)\left[1-\left(\frac{665}{666}\right)^{n+1}\right] + (n+1)\cdot 1998$$

VI. ក) កំណត់កូអរដោនេកំពូលទាំងអស់នៃគូប

$A(0,0,0); B(1,0,0); C(1,1,0); D(0,1,0)$

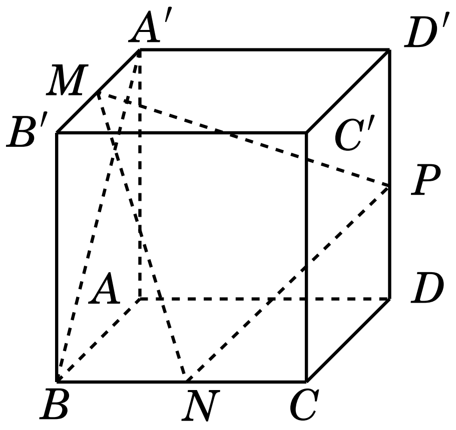
$A'(0,0,1); B'(1,0,1); C'(1,1,1); D'(0,1,1)$

ខ) គណនាវង្វាស់មុំ

$\overrightarrow{AC'} = (1,1,1);\ \overrightarrow{A'B} = (1,0,-1)$

$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{A'B} = 0$ នោះ $\overrightarrow{AC'} \perp \overrightarrow{A'B}$

ដូចនេះ $\left(\widehat{\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{A'B}}\right)=90^0$



គ) កំណត់សមីការប្លង់ (MNP)

M,N,P ជាចំណុចកណ្ដាលរៀងគ្នានៃអង្កត់ $[A'B'];[BC];[DD']$

នោះ $M\left(\frac{1}{2},0,1\right);N\left(1,\frac{1}{2},0\right);P\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)$; $\overrightarrow{MP}=\left(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right)$

$$\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1\\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\frac{3}{4}\vec{i}+\frac{3}{4}\vec{j}+\frac{3}{4}\vec{k}$$

យើងបាន $(MNP):\ \frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}(y-0)+\frac{3}{4}(z-1)=0$

ដូចនេះ សមីការប្លង់ $(MNP):\ 6x+6y+6z-9=0$

គណនាចម្ងាយពីចំណុច A ទៅប្លង់ (MNP)

$d(A,(MNP))=\frac{|0+0+0-9|}{\sqrt{36+36+36}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ឯកតាប្រវែង

ឃ) សរសេរសមីការស្វ៊ែរ

ស្វ៊ែរចារឹកក្នុងគូប

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

ស្វ៊ែរចារឹកក្នុងគូប

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

VII. គណនា $S=\frac{3^2+1}{3^2-1}+\frac{5^2+1}{5^2-1}+\frac{7^2+1}{7^2-1}+\cdots+\frac{999^2+1}{999^2-1}$

យើងបាន $S=\frac{3^2-1+2}{3^2-1}+\frac{5^2-1+2}{5^2-1}+\frac{7^2-1+2}{7^2-1}+\cdots+\frac{999^2-1+2}{999^2-1}$

$$S=\left(1+\frac{2}{3^2-1}\right)+\left(1+\frac{2}{5^2-1}\right)+\left(1+\frac{2}{7^2-1}\right)+\cdots+\left(1+\frac{2}{999^2-1}\right)$$

$$S\ =\ 499+\left(\frac{1}{3-1}-\frac{1}{3+1}\right)+\left(\frac{1}{5-1}-\frac{1}{5+1}\right)+\left(\frac{1}{7-1}-\frac{1}{7+1}\right)+\cdots+$$

$$\left(\frac{1}{999-1}-\frac{1}{999+1}\right)$$

$$S=499+\frac{1}{2}-\frac{1}{1000}$$

$$S=499+\frac{499}{1000}$$

ដូចនេះ $S=499\times\frac{1001}{1000}$

ចំណេះដឹងបន្ថែម

■ **ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម** : បើ $F(x)$ ជាប់គ្រប់ $x\in[a,b]$ និង $F'(x)$ កើតមានចំពោះគ្រប់ $x\in(a,b)$ នោះមានយ៉ាងហោចណាស់ចំនួន z មួយដែល $\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(z)$ ។

■ **ទ្រឹស្តីបទ** : The Chain Rule : បើ $f(u)$ និង $g(x)$ មានដេរីវេ នោះ $F(x)=f[g(x)]$ មានដេរីវេ និង $F'(x)=f'(u).g'(x)$ ដែល $u=g(x)$ ។

■ **ទ្រឹស្តីបទរ៉ូល** : ឧបមាថា f មានដេរីវេលើចន្លោះបើក (a,b) និងជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ។ បើ $f(a)$ និង $f(b)$ មានតម្លៃសូន្យទាំងពីរ នោះមានយ៉ាងហោចចំនួន c មួយនៅចន្លោះ (a,b) ដែល $f'(c)=0$ ។

■ អនុគមន៍កើន និង អនុគមន៍ចុះ

និយមន័យ

គេថាអនុគមន៍ f

i. កើននៅលើចន្លោះ I ប្រសិនបើចំពោះពីរចំនួន x_1 និង x_2 នៅចន្លោះ I

$x_1<x_2$ នាំអោយ $f(x_1)<f(x_2)$

ii. ចុះនៅលើចន្លោះ I ប្រសិនបើចំពោះពីរចំនួន x_1 និង x_2 នៅចន្លោះ I

$x_1<x_2$ នាំអោយ $f(x_1)>f(x_2)$

ទ្រឹស្តីបទ

ឧបមាថា f មានដេរីវេនៅលើចន្លោះបើ I

i បើ $f'(x)>0$ ចំពោះគ្រប់ x នៅចន្លោះ I នោះ f ជាអនុគមន៍កើននៅចន្លោះ I

ii បើ $f'(x)<0$ ចំពោះគ្រប់ x នៅចន្លោះ I នោះ f ជាអនុគមន៍ចុះនៅចន្លោះ I

iii បើ $f'(x)=0$ ចំពោះគ្រប់ x នៅចន្លោះ I នោះ f ជាអនុគមន៍ថេរនៅចន្លោះ I

■ ទំនាក់ទំនងរវាងឫស និង មេគុណ

1. បើ α,β ជាឫសនៃសមីការដឺក្រេទីពីរ $ax^2+bx+c=0$ នោះ

- $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$
- $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$
- $|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$ ដែល $D=\Delta=b^2-4ac$

2. បើ α,β,γ ជាឫសនៃសមីការដឺក្រេទី៣ $ax^3+bx^2+cx+d=0$ នោះ

- $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$
- $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$
- $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

3. បើ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ជាឫសនៃសមីការដឺក្រេទីបួន $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ នោះ

- $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-\dfrac{b}{a}$
- $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha=\dfrac{c}{a}$
- $\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta=-\dfrac{d}{a}$
- $\alpha\beta\gamma\delta=\dfrac{e}{a}$

4. ជាទូទៅ បើសមីការពហុធា $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3+}\cdots+a_n=0$ មាន n ឫសតាងដោយ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n$ នោះ

- $\sum\alpha_1=-\dfrac{a_1}{a_0}$
- $\sum\alpha_1\alpha_2=\dfrac{a_2}{a_0}$
- $\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-\dfrac{a_3}{a_0}$

$$\vdots \qquad \vdots$$

- $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}$

■ ច្បាប់សញ្ញារបស់ដេកាត Descarte's Rule of sign:

1. ចំនួនឫសវិជ្ជមានច្រើនបំផុតនៃសមីការពហុធា $f(x)=0$ គឺជាចំនួនដងនៃបម្រែបម្រួលសញ្ញានៃមេគុណពី $(+)$ ទៅ $(-)$ និង ពី $(-)$ ទៅ $(+)$ ។
ឧទាហរណ៍ ៖ $x^3+3x^2+7x-11=0$ មានសញ្ញានៃមេគុណគឺ$(+++-)$ ។ ដោយការប្រែ ប្រួលសញ្ញាមានតែម្តងគត់ នោះចំនួនឫសវិជ្ជមាន មានច្រើនបំផុតគឺមួយ ។

2. ចំនួនឫសអវិជ្ជមានច្រើនបំផុតនៃសមីការពហុធា $f(x)=0$ គឺជាចំនួនដងនៃបម្រែបម្រួល សញ្ញានៃមេគុណពី $(+)$ ទៅ $(-)$ និង ពី $(-)$ ទៅ $(+)$ នៅក្នុងសមីការ $f(-x)=0$ ។

■ ការអនុវត្ត Calculus ទៅក្នុងសមីការពហុធា

1. បើសមីការពហុធា $f(x)=0$ មានឫសពិតចំនួន n នោះសមីការ $f'(x)=0$ មានឫសពិតចំនួន $(n-1)$, $f''(x)$ មានឫសពិតចំនួន $(n-2),\ldots$, តែចម្រាសមកវិញអាចពិត ឬ មិនពិត ។
2. បើមានចំនួនពិតពីរ a និង b ដែល $f(a)$ និង $f(b)$ មានសញ្ញាផ្ទុយគ្នា នោះសមីការ $f(x)=0$ ត្រូវតែមានឫសពិតយ៉ាងហោចណាស់មួយ ឬមានឫសពិត ចំនួនសេសឫសស្ថិតនៅចន្លោះ a និង b ។
3. បើ $f(a)$ និង $f(b)$ មានសញ្ញាដូចគ្នា នោះអាចគ្មាន ឬមានឫស ចំនួនគូឫសនៃសមីការ $f(x)=$ ស្ថិតនៅចន្លោះ a និងb ។
4. បើ $f(a)=f(b)$ នោះនិងមានឫសពិតយ៉ាងហោចមួយនៃសមីការ $f(x)=0$ ស្ថិតនៅចន្លោះ a និង b ។
5. បើ α ជាឫសឌុបនៃសមីការ $f(x)=0$ នោះ α ក៏ជាឫសនៃសមីការ $f'(x)=0$ ។
6. បើ α ជាឫសរួមនៃសមីការ $f(x)=0$ និង $g(x)=0$ នោះ α ក៏ជាឫសរួមនៃសមីការ $f'(x)=0$ និង $g'(x)=0$ ។

■ វិសមភាព

1. លក្ខណៈគ្រឹះនៃវិសមភាព
   - បើ $a>b,\ b>c$ នោះ $a>c$
   - បើ $a>b$ នោះ $a+m>b+m$
   - បើ $a>b$ នោះ $am>bm$ បើ $m>0$ ហើយ $am<bm$ បើ $m<0$
   - បើ $a>b>0$ នោះ $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$
   - បើ $a_1>b_1, a_2>b_2,\ldots,a_n>b_n$ នោះ $a_1+a_2+\cdots+a_n>b_1+b_2+\cdots+b_n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន a និងb

- បើ $a_1 > b_1, a_2 > b_2, ..., a_n > b_n$ នោះ $a_1a_2...a_n > b_1b_2...b_n$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនវិជ្ជមាន a និងb ។
- បើ $a > b > 0$ និង $n > 0$ នោះ $a^n > b^n$ និង $a^{1/n} > b^{1/n}$ (ព្រោះ n វិជ្ជមាន នោះ $\frac{1}{n}$ វិជ្ជមាន)
- បើ $a > b > 0$ និង $x > 0$ នោះ $a^x > b^x$
- បើ $x > y > 0$ និង $a > 1$ នោះ $a^x > a^y$
- បើ $x > y > 0$ និង $0 < a < 1$ នោះ $a^x < a^y$
- បើ $x > y > 0$ និង $a > 1$ នោះ $log_a x > log_a y$
- បើ $x > y > 0$ និង $0 < a < 1$ នោះ $log_a x < log_a y$

2. បើ a, b, x ជាចំនួនវិជ្ជមាន នោះ $\begin{cases} \frac{a+x}{b+x} > \frac{a}{b} & \text{បើ } a > b \\ \frac{a+x}{b+x} < \frac{a}{b} & \text{បើ } a < b \end{cases}$

3. បើ $a, b > 0$ និង $a \neq b$ នោះមធ្យមនព្វន្តនៃ a និង b ធំជាងមធ្យមធរណីមាត្រនៃ a និង b , i.e.,
$\left(\frac{a+b}{2}\right) > \sqrt{ab}$ ។

4. បើ a_i, $i = 1, 2, 3, ..., n$ ដែលមិនដូចគ្នាទាំងអស់នោះមធ្យមនព្វន្តនៃបរិមាណ n ធំជាងមធ្យមធរណីមាត្រនៃបរិមាណ n, i.e,
$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} > (a_1a_2...a_n)^{1/n}$ ។
សំគាល់ ក្នុងពេលដែល $a_1 = a_2 = ... = a_n$ i.e, ចំនួនទាំងអស់ស្មើគ្នា នោះមធ្យមនព្វន្តនៃបរិមាណ n=មធ្យមធរណីមាត្រនៃបរិមាណ n ។

5. បើ $a > b > 0$ និង $a \neq b$ នោះ
   - $\frac{a^m + b^m}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^m$ បើ $m < 0$ ឬ $m > 1$
   - $\frac{a^m + b^m}{2} < \left(\frac{a+b}{2}\right)^m$ បើ $0 < m < 1$

   កត់សំគាល់ បើ a និង b ស្មើគ្នា នោះយើងអាចប្រើសញ្ញាស្មើ ។

6. បើ $a_i > 0$, $i = 1, 2, 3, .., n$ និង $m_1, m_2, ..., m_n$ ជាចំនួនសនិទានវិជ្ជមាន នោះ

- $\dfrac{a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m}{n}>\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^m$ បើ $m<0$ ឬ $m>1$
- $\dfrac{a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m}{n}<\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^m$ បើ $0<m<1$

7. Weighted-Mean

- $a_i>0,\ i=1,2,3,\ldots,n$ និង $m_1,m_2,\ldots,m_n$ ជាចំនួនសនិទានវិជ្ជមាន នោះ
$\left(\dfrac{m_1a_1+m_2a_2+\cdots+m_na_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}\right)\geq\left(a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots a_n^{m_n}\right)^{1/(m_1+m_2+\cdots+m_n)}$
សមភាពកើតមានចំពោះ $a_1=a_2=\ldots=a_n$
- $a_1,a_2,\ldots,a_n$ និង $b_1,b_2,\ldots,b_n$ ជាពីរសំណុំនៃចំនួនសនិទាន ហើយចំនួនទាំងឡាយនៅក្នុងសំណុំទី១ មិនស្មើនឹងចំនួនណាមួយផ្សេងទៀតឡើយ នោះចំពោះគ្រប់ចំនួនសនិទាន m
$\dfrac{b_1a_1^m+b_2a_2^m+\cdots+b_na_n^m}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\lesseqgtr\left(\dfrac{b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\right)^m$
អាស្រ័យលើ m ស្ថិតនៅ ឬ មិនស្ថិតនៅចន្លោះ 0 និង 1 ។

8. Cauchy-Schwarz Inequality
$a_1,a_2,\ldots,a_n$ និង $b_1,b_2,\ldots,b_n$ ជាចំនួនពិត នោះ
$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leq\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)$ ។
សមភាពកើតមានកាលណា $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\ldots=\dfrac{a_n}{b_n}$ ។

9. Tchebychef's Inequality
$a_1,a_2,\ldots,a_n$ និង $b_1,b_2,..,b_n$ ជាចំនួនពិត ។

- បើ $a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_n$ និង $b_1\leq b_2\leq\ldots\leq b_n$ នោះ
$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)\leq n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)$
- បើ $a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_n$ និង $b_1\geq b_2\geq\ldots\geq b_n$ នោះ
$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)\geq n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)$

10. Weierstress's Inequality
បើ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ជាចំនួនវិជ្ជមានតូចជាងឯកតា និង $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ នោះ
$(1-s_n)<(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)<\dfrac{1}{1+s_n}$
និង $(1+s_n)<(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)<\dfrac{1}{1-s_n}$

11. Holder's Inequality

សំណើ ១១.១ បើ a និង b ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន និង p,q ជាចំនួនពិតផ្ទៀងផ្ទាត់ $p,q>1$ ហើយ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ នោះ $ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

តាង $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>}0$ ជាអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល $f(x)=e^x$ ចំពោះ $x\in\mathbb{R}$

យើងបាន $f''(x)=e^x>0$ នោះ f ជាអនុគមន៍ផត i.e., ចំពោះគ្រប់ $t\in[0,1]$

$$f(tx+(1-t)y)\leq tf(x)+(1-t)f(y),\text{ ចំពោះគ្រប់ } x,y\in\mathbb{R}$$

តាង $x=plna, y=qlnb$ និង $t=\frac{1}{p}$ នោះ $1-t=\frac{1}{q}$

នាំអោយ $ab=e^{ln(ab)}=e^{lna+lnb}$

$ab=e^{\frac{1}{p}\cdot plna+\frac{1}{q}\cdot qlnb}\leq\frac{1}{p}e^{plna}+\frac{1}{q}e^{qlnb}$

$ab\leq\frac{1}{p}e^{lna^p}+\frac{1}{q}e^{lnb^q}=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$

ទ្រឹស្តីបទ ១១.១ បើ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ និង $b_1,b_2,\ldots,b_n$ ជាចំនួនពិត នោះ

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leq\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \text{ ។}$$

សំណើ១១.២ (Minkowski inequality) បើ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ និង $b_1,b_2,\ldots,b_n$ ជាចំនួនពិត និង $p\geq1$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{1/p}\leq\left(\sum_{k=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_i|^p\right)^{1/p} \text{ ។}$$

ទ្បេម ២.១ គេអោយ (a_n) និង (b_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតដែល $a_n\leq b_n$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq1$ ។ បើ $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ និង $\lim_{n\to\infty}b_n=b$ នោះ $a\leq b$ ។

■ សញ្ញាស៊ិចម៉ា

1. គេអោយស្វ៊ីត $a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots$ ។ គេអាចសរសេរផលបូក n តួដំបូងដោយប្រើ សញ្ញាផលបូក ឬ សញ្ញាស៊ិចម៉ា គឺសញ្ញា $\sum$ (ស៊ិចម៉ាធំ) ដូចខាងក្រោម :

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n \text{ ។}$$

2. លក្ខណៈនៃផលបូក

គេអោយ $a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots$ និង $b_1,b_2,b_3,b_4,\ldots$ ជាស្វ៊ីត ។ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់

វិជ្ជមាន n និង ចំនួនពិត c គេបាន

- $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$
- $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$
- $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$

យើងអាចប្រើលក្ខណៈមួយចំនួនដូចខាងក្រោមផងដែរ :

- $\sum_{k=1}^{n+m}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=n+1}^{n+m}a_k$
- $\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1+m}^{n+m}a_{k-m}$
- $\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_{n-k+1}=\sum_{k=0}^{n-1}a_{n-k}$
- $\sum_{k=m}^{n}c=c\cdot(n-m+1)=c\cdot$ (ចំនួនលេខដែលត្រូវបូកនៅក្នុងផលបូក) ចំពោះចំនួនថេរ c

■ ទ្រឹស្តីបទទ្វេធា

$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3+\cdots,$
$x^2<a^2$

■ ស៊េរីពន្លាត Taylor

អនុគមន៍ $f(x)$ អាចពន្លាតត្រង់ $x=a$ បើអនុគមន៍ជាប់ និងដេរីវេកើតមាន និង កំណត់ត្រង់ $x=a$ ។

$$f(x)=f(a)+f'(a)\frac{(x-a)}{1!}+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!}+\cdots$$
$$+f^{n-1}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}+R_n \text{ ។}$$

■ ស៊េរីពន្លាត Maclaurine

ស៊េរី Maclaurine ជាករណីពិសេសនៃស៊េរីពន្លាត Taylor ចំពោះ $a=0$ ។

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$$ ។

លំហាត់សម្រាប់ស្រាវជ្រាវបន្ថែម

លំហាត់ទី 1) គណនាចំនួនខាងក្រោម

១. $\sqrt{25^{\frac{1}{log_6 5}}+49^{\frac{1}{log_6 7}}}$

២. គណនា $log56$ ជាអនុគមន៍នៃ a និង b ដែល $a=log2$ $;b=log_2 7$ ។

លំហាត់ទី 2) ចូរដោះស្រាយសមីការ និង វិសមីការខាងក្រោម

១. $2.9^{log_2\left(\frac{x}{2}\right)}=x^{log_2 6}-x^2$

២. $5^x\cdot\sqrt[x]{8^{x-1}}=500$

៣. $x^2+(x+1)^2\le\frac{1}{x^2+x+1}$

៤. $log_n x+log_{\sqrt{n}}x+log_{\sqrt[3]{n}}x+\cdots+log_{\sqrt[n]{n}}x=\frac{n+1}{2}$

៥. $x^{log^2 x-3logx+1}>1000$

៦. $x=2^{log_5(x+3)}$

លំហាត់ទី 3) ប្រសិនបើស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ត្រូវបានកំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើន $a_1=1$; $a_{n+1}=\frac{6a_n}{3a_n+4}$ $(n=1,2,3,\ldots)$ ។ ចូររកតួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ។

លំហាត់ទី 4) ពិនិត្យស្វ៊ីត $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{3}{4},\frac{2}{4},\frac{1}{4},\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5},\ldots$ ។

ក/ តើ $\frac{18}{25}$ ជាតួទីប៉ុន្មាននៃស្វ៊ីតនេះ ?

ខ/ រកផលបូកតួនៃស្វ៊ីតនេះរហូតដល់តួទី 666 ។

លំហាត់ទី 5) ចូររកដែនកំណត់ រួចសិក្សាភាពគូភាពសេសនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម

១. $f(x)=\frac{|x^2-4|}{|x+4|+|x-4|}$

២. $f(x)=\sqrt{\frac{1-|x|}{2-|x|}}$

លំហាត់ទី 6) គេឱ្យប៉ារ៉ាបូល $y=x^2+2px+q$ មានកំពូលនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។ ចូររកតំលៃនៃ p និង q ។

លំហាត់ទី 7) គេឱ្យ $I_n = \int_0^{2\pi} |sint|\,cosntdt$ ។ គណនា $I_0 + I_2 + I_3$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ ។

លំហាត់ទី 8) ស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^3} \le 2 - \frac{1}{n^2}$ ដោយប្រើអនុមាណរួមគណិតវិទ្យា ។

លំហាត់ទី 9) ១. គណនាដេរីវេ $y = x^{\frac{1}{x}}$ ។
២.គណនាដេរីវេ $y = x^{x^2}$ ។

លំហាត់ទី 10) ១. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង $x^2 + 3xy - y^2 = 3$ ត្រង់ចំណុច $(1;2)$ ។
២. រកសមីការបន្ទាត់ប៉ះខ្សែកោង $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ ត្រង់ចំណុច $A(a; (2-\sqrt{a})^2)$ ដែល $0 < a < 4$ ។

លំហាត់ទី 11) ១. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} sin2x + cosy = 1 \\ siny + cos2x = 1 \end{cases}$ $(0^0 \le x < 360^0,\ 0^0 \le y < 360^0)$ ។
២. ចំពោះត្រីកោណ ABC យក $BC = a, CA = b$ និង $AB = c$ ។ បង្ហាញថាបើ $a < \frac{a+b+c}{3}$ នោះ $\angle A < 60^0$ ។

លំហាត់ទី 12) បើ $x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}} = 3$ ចូរគណនា $x^{\frac{3}{4}} + x^{-\frac{3}{4}}$ ដែល $x > 0$ ។

លំហាត់ទី 13) គេឱ្យស្វ៊ីត $\{a_n\} = \{2, 3, 7, 18, 44, 101, ...\}$ ។
ក/ កំណត់តួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ។
ខ/ កំណត់ផលបូកតួទូទៅដំបូងនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ។

លំហាត់ទី 14) ស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ត្រូវបានកំណត់ដោយទំនាក់ទំនងកំណើនដូចខាងក្រោម $a_1 = p,\ 2a_{n+1} + a_n - 3n - 2 = 0$ (p ជាចំនួនថេរវិជ្ជមាន) ។ ចូររកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$ ។

លំហាត់ទី 15) គេឱ្យបីវ៉ិចទ័រ $\vec{a} = (1;2;-1)$, $\vec{b} = (-1;0;2)$ និង $\vec{c} = (3;1;0)$ ។ ចូររកមាឌតេត្រាអែតដែលផ្គុំឡើងដោយវ៉ិចទ័រទាំងបី ។

លំហាត់ទី 16) ក្រុមហ៊ុនមួយចង់លើកទឹកចិត្តបុគ្គលិកជាច្រើនអ្នកនៅជំណាច់ឆ្នាំដោយមានការចាប់ឆ្នោតដើម្បីទទួលប្រាក់រង្វាន់តាមលេខសន្លឹកឆ្នោត ។ អ្នកដែលចាប់បានសន្លឹកឆ្នោតលេខ 1 ទទួលបានទឹកប្រាក់ 300$ ហើយអ្នកដែលចាប់បានសន្លឹកឆ្នោតលេខ 2 ទទួលបានទឹកប្រាក់ 70% នៃទឹកប្រាក់សន្លឹកឆ្នោត
លេខ 1 បើគេធ្វើរបៀបនេះជា
បន្តបន្ទាប់ តើក្រុមហ៊ុនចំណាយសរុបអស់ប៉ុន្មាន ក្នុងករណីដូចខាងក្រោម :
ក/ បុគ្គលិកមាន 10 នាក់
ខ/ បុគ្គលិកមានច្រើនមិនកំណត់ ។

លំហាត់ទី 17) អនុគមន៍ផ្គត់ផ្គង់មួយកំណត់ដោយ $P=\sqrt{2-2sinx}$, $(0\le x\le 90^0)$ ។ ចូររកភាពលើសរបស់អ្នកផលិត $(P.S)$ ត្រង់ $x=\frac{\pi}{6}$ ។

លំហាត់ទី 18) ឧបមាថានៅក្នុងថ្នាក់មួយមាននិស្សិត 30 នាក់។ បើតាមគេធ្វើការអង្កេតបានឱ្យដឹងថា មាននិស្សិតចំនួន 20 នាក់ ចូលចិត្តលេងកីឡាហែលទឹក និង 16 នាក់ចូលចិត្តវាយសី ។
តាង $U=\{$និស្សិតនៅក្នុងថ្នាក់$\}$, $A=\{$និស្សិតលេងកីឡាហែលទឹក$\}$
និង $B=\{$និស្សិតលេងកីឡាវាយសី$\}$។
ដោយតាង $n(A\cap B)=x$ ។
ក/ ពន្យល់ពីសំណុំ $A\cup B$ និងរក $n(A\cup B)$ ជាអនុគមន៍នៃ x ។
ខ/ កំណត់តម្លៃធំបំផុត និងតូចបំផុតនៃ x ។

លំហាត់ទី 19) តាង A,B,C ជាត្រីកោណដែលមានជ្រុង a,b,c រៀងគ្នា ដែល $a+b=4c$ ។ បង្ហាញថា $cot\frac{A}{2}cot\frac{B}{2}=\frac{5}{3}$ ។

លំហាត់ទី 20) កំលាំងកកិតមួយសមាមាត្រទៅនឹងល្បឿនដែលមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $ma=-kx-lv$ ដែល l ជាមេគុណកកិត $(l>0)$ និង $v=x'(t)$ ។
ចូរដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនេះ ។

លំហាត់ទី 21) គេឱ្យ $f(a)=\int_0^{\pi}|1+acosx|sin^2xdx$ ។
ក/ បង្ហាញថា $f(-a)=f(a)$ ។
ខ/ កំណត់តម្លៃ $f(a)$ បើ $|a|\le 1$ ។
គ/ កំណត់តម្លៃ $f(\sqrt{2})$ ។

លំហាត់ទី 22) ១. រកអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\forall x,y\in\mathbb{R}:\ f\left((x-y)^2\right)=x^2-$

$2y\cdot f(x)+(f(y))^2$ ។
២. រកអនុគមន៍ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $g(x+1)=g(x)+1$ ដែល $x\in\mathbb{N}$, $g(1)=5$។ គណនា $g(2013)$ ។

លំហាត់ទី 23) ដោះស្រាយសមីការ : $(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)=0$ រួចកំនត់តំលៃ k ដើម្បីអោយសមីការ $(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)=k$ មានរឺស ។

លំហាត់ទី 24) ដោះស្រាយវិសមីការ : $log_2\dfrac{x+1}{x+3}<log_{\sqrt{2}}\dfrac{x-1}{x+3}$ ។

លំហាត់ទី 25) គណនា :
ក- $I=\int_1^2 2(2x+1)\left(x^2+x-3\right)dx$
ខ- $J=\int_0^{\frac{\pi}{3}} cosxdx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} cosxdx+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} cosxdx$

លំហាត់ទី 26) គេអោយខ្សែកោង (C_m) តាងអនុគមន៍ $f_m(x)=x^3-mx+2$ ។
១- បង្ហាញថាខ្សែកោង (C_m) កាត់តាមចំនុចនឹង I មួយដែលគេដឹង គណនាកូអរដោនេវា ។
២- កំនត់តំលៃ m ដែលធ្វើអោយ (C_m) មានអតិបរមាស្មើ 4 ។ ក្នុងករណីនេះ សិក្សាអថេរភាព និង សង់ខ្សែកោង (C) នៃអនុគមន៍ y ។ បង្ហាញថា ចំនុចរបត់ I ជាផ្ចិតឆ្លុះ ។
៣- បន្ទាត់ (D) មួយប៉ះខ្សែកោង (C) ត្រង់ចំនុចអតិបរមា ។
ក- សរសេរសមីការនៃបន្ទាត់ (D)
ខ- គណនាក្រឡាផ្ទៃដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) បន្ទាត់ (D) និង បន្ទាត់សមីការ $x=-1$ និង $x=2$ ។

លំហាត់ទី 27) គេអោយពីរ៉ាមីតចតុមុខនិយ័ត $SABCD$ បាត $ABCD$ ជាការេ ជ្រុងមានរង្វាស់ a ។ មុខខាងផ្គុំជាមួយប្លង់បាតបានមុំ 60^0 ។
ក- គណនារង្វាស់កំពស់ និង អាប៉ូតែមនៃពីរ៉ាមីតនោះ ។
ខ- គណនាក្រឡាផ្ទៃទាំងអស់នៃពីរ៉ាមីតនោះ ។
គ- ប្លង់មួយកាត់តាម $[AB]$ កាត់ $[SC]$ និង $[SD]$ រៀងគ្នាត្រង់ M និង N ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា មុខកាត់ $ABMN$ ជាចតុកោណព្នាយសមបាត ។

លំហាត់ទី 28) រកលេខពីរខ្ទង់ចុងក្រោយនៃចំនួន 3^{999} ។

លំហាត់ទី 29) ១/ គេអោយ $log_{10}2 = 0,3010$ និង $log_{10}3 = 0,4771$ ។ រកចំនួនខ្ទង់នៃចំនួន 3^{80} និង ចំនួនខ្ទង់នៃចំនួន 6^{50} រួចប្រៀបធៀប 3^{80} និង 6^{50} ។
២/ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $log_2 9$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

លំហាត់ទី 30) ស៊ីត $\{a_n\}$ បំពេញលក្ខខណ្ឌខាងក្រោមចំពោះ $n = 1;2;3;...$
ដោយ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(a_k + \frac{1}{k+1}\right) = 2^n + 1 - \frac{1}{n+1}$ ។
១/ គណនាតួទី n នៃស៊ីត $\{a_n\}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។
២/ គណនា $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ។

លំហាត់ទី 31) បង្ហាញថា ចំនួន $\underbrace{11...11}_{2005 \text{ លេខ } 1} \cdot \underbrace{10...05}_{2004 \text{ លេខ } 0} + 1$ ជាការេប្រាកដ ។

លំហាត់ទី 32) សរសេរសមីការទូទៅនៃប៉ារ៉ាបូលដែលមានកំនុំ $F(3;-1)$ ហើយមានបន្ទាត់ប្រាប់ទិស (D) សមីការ $x - 2y + 1 = 0$ ។ សង់ក្រាបប៉ារ៉ាបូលនេះ ។

លំហាត់ទី 33) ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ស្រាយបញ្ជាក់ថា $n^5 - n$ ជាពហុគុណនៃ 30 ។

លំហាត់ទី 34) រកតម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃអនុគមន៍ $f(x) = sin^4x - sinxcosx + cos^4x$ ។

លំហាត់ទី 35) រកគ្រប់អនុគមន៍ចំនួនពិត $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ :

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{x + y} \text{ ដែល } x, y \in \mathbb{R}, x + y \neq 0 \text{ ។}$$

លំហាត់ទី 36) គេអោយ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2n-k}{k}}{\binom{2n-k}{n}} \cdot \frac{(2n-4k+1)}{(2n-2k+1)} \cdot 2^{n-2k} = \frac{\binom{n}{m}}{\binom{2n2-m}{n-m}} \cdot 2^{n-2m}$ ចំពោះចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន $m \leq n$ ។

លំហាត់ទី 37) (ទូទៅកម្ម ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម) ឧបមាថា f និង g ទាំងពីរផ្ទៀងផ្ទាត់សម្មតិកម្មទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើ g' មិនមានឫសនៅចន្លោះ (a,b) នោះមានយ៉ាងហោចណាស់ចំនួន c មួយនៅចន្លោះ (a,b) ដែល

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ ។}$$

លំហាត់ទី 38) ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ

$$\begin{cases} 4^{|x^2-8x+12|-log_4 7} = 7^{2y-1} \\ |y-3|-3|y|-2(y+1)^2 \geq 1 \end{cases}$$ ។

លំហាត់ទី 39) ដោះស្រាយវិសមីការ

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2+x}-\frac{1}{3+x}+\frac{1}{4+x}-\frac{1}{5+x}+\frac{1}{6+x}-\frac{1}{7+x}>0$$ ។

លំហាត់ទី 40) ស្រាយបញ្ជាក់ថាឫសទាំងអស់នៃសមីការ $x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ មិនអាចជាចំនួនពិតទេ បើ $2a^2<5b$ ។

លំហាត់ទី 41) បើ $a>0$ ដោះស្រាយសមីការ

$$\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^{x^2-2x}+\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)^{x^2-2x}=2a$$ ។

លំហាត់ទី 42) ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ចំនួន $\underbrace{44\ldots4}_{n \text{ ដង}}\underbrace{888\ldots8}_{n \text{ ដង}}9$ ជាការេប្រាកដ ។

លំហាត់ទី 43) ស្រាយបញ្ជាក់ សមភាពខាងក្រោម

$$\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{2n \text{ ដង}}-\underbrace{22\ldots2}_{n \text{ ដង}}}=\underbrace{3\ldots\ldots3}_{n \text{ ដង}}$$ ។

លំហាត់ទី 44) ស្រាយបញ្ជាក់ថា គ្មានពហុធាដែលមានមេគុណជាចំនួនគត់ផ្ទៀងផ្ទាត់ $P(1)=21$ និង $P(13)=87$ ឡើយ ។

លំហាត់ទី 45) គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{2-\sqrt[3]{x}}{x-8}$;

ខ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(3x-1)^{30}(2x+5)^{20}}{(2x+1)^{50}}$;

គ) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tan\frac{\pi x}{2}$ ។

(អាហារូបករណ៍គុយបា ២០២០)

លំហាត់ទី 46) ១. រកកូអរដោនេផ្ចិត កំពូល កំណុំ និងសមីការអាស៊ីមតូតរបស់អ៊ីពែបូល ដែលមានសមីការ (H): $4x^2-y^2=16$ ។
២. សង់អ៊ីពែបូល (H) ។

លំហាត់ទី 47) ឡានដឹកអ្នកដំណើរមួយមានកៅអីអង្គុយចំនួន 6 តម្រៀបជា 3 ជួរ ដោយនៅជួរមុខ មានកៅអីចំនួន 2 ជួរកណ្តាលមានកៅអីចំនួន 2 និង ជួរចុងក្រោយមានកៅអីចំនួន 2។ អ្នកដំណើរ 6 នាក់ $A;B;C;D;E$ និង F (ក្នុងនោះអ្នកដំណើរ $A;E$ ជាអ្នកចេះបើកបរ) ឡើងជិះលើរថយន្តដោយចៃដន្យ។

ក) តើអ្នកដំណើរទាំងនោះអាចអង្គុយបានប៉ុន្មានរបៀប ?

ខ) រកប្រូបាបដែល $A;E$ អង្គុយជាប់គ្នា។

(អាហារូបករណ៍គុយបា ២០២០)

លំហាត់ទី 48) គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ មានក្រាប (C)។

ក) រកដែនកំណត់នៃ f។ រកលីមីតចុងដែនកំណត់ និងទាញរកសមីការអាស៊ីមតូតនៃ (C)។

ខ) សិក្សាអថេរភាពនៃ f។ គណនា $f(2); f(-2)$។

គ) សង់ក្រាប (C) និង អាស៊ីមតូត។ (គេឱ្យ $ln3 = 1.1$)

(អាហារូបករណ៍គុយបា ២០២០)

លំហាត់ទី 49) គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2\left[1+cot^2(2x)\right]}$;

ខ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 - cos^2\dfrac{4}{\sqrt{x}}\right)x$។

(ប្រលងធមាសលើកទី២ វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ២០២០)

លំហាត់ទី 50) គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម:

ក) $I = \displaystyle\int \left(sin^2x \cdot cos2x \cdot cosx\right)dx$;

ខ) $J = \displaystyle\int \frac{1}{sinx}dx$។

(ប្រលងធមាសលើកទី២ វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ២០២០)

លំហាត់ទី 51) គេឱ្យ $secx + \dfrac{1}{cotx} = 3$។ គណនា $secx - \dfrac{1}{cotx}$។

(ប្រលងធមាសលើកទី២ វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ២០២០)

លំហាត់ទី 52) គេឱ្យស្វ៊ីតមួយកំណត់ដោយ $\{a_n\}$: $a_1 = 10,\ a_{n+1} = 3a_n + 4n - 9$។ កំណត់តួទី n នៃស្វ៊ីត $\{a_n\}$។

(ប្រលងឆមាសលើកទី២ វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ២០២០)

លំហាត់ទី 53) គេឱ្យស្វ៊ីត $\{u_n\}$ កំណត់ដោយ $u_1 = -1, u_2 = 1$ និង $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ ដែល $n = 1, 2, 3, \ldots$។

១. គេតាង $a_n = u_{n+1} - 2u_n$ និង $b_n = u_{n+1} - 3u_n$។ បង្ហាញថា $\{a_n\}$ និង $\{b_n\}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ។

២. ទាញរកតួ $\{u_n\}$ ជាអនុគមន៍នៃ n។

(ប្រលងឆមាសលើកទី២ វិទ្យាស្ថានជាតិអប់រំ ២០២០)

លំហាត់ទី 54) ដោះស្រាយវិសមីការ $\sqrt{2(5^x + 24)} - \sqrt{5^x - 7} \geq \sqrt{5^x + 7}$។

(ប្រលងអាហារូបករណ៍ថៃ ២០១៧)

លំហាត់ទី 55) គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ក្នុង $\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$។ ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ f។

(ប្រលងអាហារូបករណ៍ថៃ ២០១៧)

លំហាត់ទី 56) នៅលើក្រដាសកាតុង 100 រាងការេប៉ុនគ្នា និងដូចគ្នាមានចុះលេខពី 1 ដល់ 100។

គណនាប្រូបាបដើម្បីចាប់បាន៖

ក) យកបានក្រដាសកាតុងដែលគ្មានលេខ 5។

ខ) យកបានក្រដាសកាតុងដែលមានលេខរៀងចែកដាច់នឹង 2 ឬ ចែកដាច់នឹង 5 ឬ ចែកដាច់នឹង 2ផង និងចែកដាច់នឹង 5 ផង។

(ប្រលងអាហារូបករណ៍ថៃ ២០១៧)

លំហាត់ទី 57) ចំពោះអ៊ីពែបូល $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

១. បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបអ៊ីពែបូលដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស m គឺ $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$។

២. បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបអ៊ីពែបូលត្រង់ចំណុច $P(x_1, y_1)$ គឺ $\dfrac{x_1 x}{a^2} - \dfrac{y_1 y}{b} = 1$។

(ប្រលងអាហារូបករណ៍ថៃ ២០១៧)

លំហាត់ទី 58) គណនាលីមីតខាងក្រោម:

ក) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^{2017}+1}{x^{2015}+1}$;

ខ) $\lim_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+5x-3}$;

គ) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1+2x^2-cosx}{x^2}$;

ឃ) $\lim_{x\to 2}\dfrac{3x-6}{sin\pi x}$។

(ប្រលងអាហារូបករណ៍ថៃ ២០១៨)

លំហាត់ទី 59) គេចង់បង្កើតលេខសំងាត់របស់សោមួយដោយមានលេខចំនួន ៤ ខ្ទង់ ខុសពីសូន្យ (ពីលេខ ១ ដល់លេខ ៩)។

១. តើគេអាចជ្រើសរើសលេខសំងាត់នេះបានប៉ុន្មានរបៀប?

២. គេជ្រើសរើសលេខសម្ងាត់មួយដោយចៃដន្យ។ ចូររកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍៖

ក. លេខសម្ងាត់ជាលេខគូ។

ខ. លេខសម្ងាត់ទាំង ៤ ខ្ទង់ជាលេខគូ។

គ. លេខសម្ងាត់ទាំង ៤ខ្ទង់ មានលេខ១ តែម្តងគត់។

ឃ. លេខសម្ងាត់ទាំង៤ ខ្ទង់ខុសៗគ្នា។

(ប្រលងអាហារូបករណ៍ថៃ ២០១៨)

លំហាត់ទី 60) គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+2xcos\alpha+1}{x+2sin\alpha}$។ បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $\alpha\in\mathbb{R}$ អនុគមន៍ f មានអតិបរមាមួយ និង អប្បបរមាមួយ។

(ប្រលងអាហារូបករណ៍ថៃ ២០១៨)

លំហាត់ទី 61) រកសមីការប៉ារ៉ាបូលដែលមានអ័ក្សឆ្លុះ ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីសហើយក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូលកាត់តាមចំណុច $(4,-2)$, $(0,0)$ និង $(3,-3)$ រួចសង់ក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូល។

(ប្រលងអាហារូបករណ៍ថៃ ២០១៨)

លំហាត់ទី 62) ត្រីកោណ MNP នៅក្នុងប្លង់កុំផ្លិចដែលកំពូល M,N និង P តាងចំនួនកុំផ្លិច W,W^2 និង W^3 រៀងគ្នា។ បើ $MN=MP$:

១. ចូររកទីតាំងរបស់ចំណុច M។
២. បើ $\angle NMP = 90^0$ ចូររកចំនួនកុំផ្លិច W។
៣. សរសេរ W ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

(ប្រលងអាហារូបករណ៍វៀតណាម ២០១៦)

លំហាត់ទី 63) គេឱ្យសមីការ $2x^2 + y^2 = 8$ និង $y^2 = 6x$។
១. រកកូអរដោនេចំណុចប្រសព្វនៃខ្សែកោងទាំងពីរ។
២. រកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោងទាំងពីរត្រង់ចំណុចប្រសព្វនោះ។
៣. បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោងទាំងពីរត្រង់ចំណុចប្រសព្វនេះកែងគ្នា។

(ប្រលងអាហារូបករណ៍វៀតណាម ២០១៦)

លំហាត់ទី 64) គេឱ្យអនុគមន៍ f ដែលកំណត់ដោយ $f(x) = x + 1 + 2ln\dfrac{x}{x-1}$ មានក្រាប (C)។
១. រកលីមីតនៃ f ត្រង់ចំណុចចុងសងខាងនៃដែនកំណត់ រួចទាញរកអាស៊ីមតូតនៃក្រាប (C)។
២. រកសមីការអាស៊ីតូតទ្រេត (Δ) នៃក្រាប (C) រួចសិក្សាទីតាំងនៃ (C) ធៀបនឹង (Δ)។
៣. សិក្សាអថេរភាពនៃ f រួចសង់ក្រាប (C)។
៤. គណនាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកនៃប្លង់ដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោង (C) បន្ទាត់ (Δ) បន្ទាត់ $x = 2, x = 3$។

(ប្រលងអាហារូបករណ៍វៀតណាម ២០១៦)

លំហាត់ទី 65) គេបង្កើតចំនួនមានលេខ 3 ខ្ទង់ផ្សេងគ្នាដោយយកចេញពីលេខ $1,2,3,4$។ រកប្រូបាបនៃព្រឹត្តិការណ៍ខាងក្រោម:
១. ចំនួននោះជាពហុគុណនៃ 3។
២. ចំនួននោះជាពហុគុណនៃ 2។
៣. ចំនួននោះជាពហុគុណនៃ 2 ឬ ពហុគុណនៃ 3។

(ប្រលងអាហារូបករណ៍វៀតណាម ២០១៦)

លំហាត់ទី 66) រកគ្រប់ចម្លើយនៃសមីការ $sik\theta = sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$ ។

លំហាត់ទី 67) រកគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 1$ ដែល $\binom{n}{k}$ ជាចំនួនសេសចំពោះគ្រប់ k, $0 \leq k \leq n$ ។

លំហាត់ទី 68) គណនាផលគុណមិនកំណត់ $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{9}}\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{27}}\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{81}}\ldots$ ។

លំហាត់ទី 69) ចំពោះចំនួនពិត x, $\{x\}$ តាងអោយ $x-[x]$ ដែល $[x]$ ជាចំនួនគត់ធំបំផុតតូចជាង x។ បង្ហាញថា $\lim_{x\to+\infty}\{(2+\sqrt{3})^n\}=1$។

លំហាត់ទី 70) ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n នៅក្នុងរបាប់គោល b គឺ $n = 1254_b$ ហើយចំនួន $2n$ នៅក្នុងរបាប់ដូចគ្នានេះគឺ $2n = 2541_b$ ។ កំណត់តម្លៃ n និង b នៅក្នុងរបាប់គោលដប់។

លំហាត់ទី 71) ឧបមាថា a,b និង c ជាចំនួនគត់ផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\begin{cases} a+b+c=4 \\ a^2+b^2+c^2=1690 \\ a^3+b^3+c^3=10108 \end{cases}$$ ។

រកចំនួនគត់ធំបំផុតក្នុងចំណោមចំនួនទាំងបី ។

លំហាត់ទី 72) រកគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m,s និង t ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $m! = 4s! + 10t!$ ។
(សំគាល់ : $1! = 1, 2! = (1)(2) = 2, 3! = (1)(2)(3) = 6$, -ល-)

លំហាត់ទី 73) បង្ហាញថា $\dfrac{(3\sqrt{3}+5)^{1/3}+(3\sqrt{3}-5)^{1/3}}{2^{2/3}\sqrt{3}} = 1$ ។

លំហាត់ទី 74) រកតម្លៃនៃ xyz បើគេដឹងថា

$$x+y+z=1$$
$$x^2+y^2+z^2=2$$
$$x^3+y^3+z^3=3$$ ។

លំហាត់ទី 75) រកគ្រប់ចំនួនមិនអវិជ្ជមាន x,y និង z ដែល $\begin{cases} z^x = y^{2x} \\ 2^z = 2\cdot 4^x \\ x+y+z=16 \end{cases}$ ។