លំហាត់ពីនេះ-ពីនោះ

Let’s Do The Math

+∞

−∞

ភាគ១

- ១០០លំហាត់មានដំណោះស្រាយ
- ដកស្រង់ចេញពីសៀវភៅល្អៗ និងវិញ្ញាសាសិស្សពូកែ
- សម្រាប់ថ្នាក់ទី ៩, ១០, ១១, ១២

FB Page:ពិភពគុនគណិតវិទ្យា

រៀបរៀងដោយ សារ៉េន សុទ្ធា

លំហាត់ពីនេះ-ពីនោះ

រៀបរៀងដោយ

សារ៉េន សុទ្ធា

(និស្សិតគណិតវិទ្យានៃRUPP)

Facebook: Sothea Saren

Facebook Page: ពិភពគុនគណិតវិទ្យា

Tel: 011 72 42 26 / 069 89 89 34

Email: sotheasaren@gmail.com

រាជធានីភ្នំពេញ គ.ស ២០១៩

រក្សាសិទ្ធ©

អារម្ភកថា

សួស្តីប្រិយមិត្ត អ្នកសិក្សាទាំងអស់គ្នាជាទីស្រឡាញ់!

សៀវភៅ លំហាត់ពីនេះ-ពីនោះ ភាគ១ គឺជាស្នាដៃថ្មីមួយទៀតដែលខ្ញុំបាទរៀបរៀងឡើង ក្នុងគោលបំណងទុកជាឯកសារសម្រាប់សិស្ស សិក្សា និងពង្រីកចំណេះបន្ថែមលើមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា។

កម្រងលំហាត់ដែលមាននៅក្នុងសៀវភៅនេះ សុទ្ធតែជាលំហាត់ដែលខ្ញុំបាទដកស្រង់ចេញពីវិញ្ញាសាសិស្សពូកែ និងសៀវភៅគណិតវិទ្យាល្អៗរបស់សាស្ត្រាចារ្យល្បីៗនៅកម្ពុជា ព្រមទាំងឯកសារបរទេសមួយចំនួនផងដែរ ។ ខ្ញុំបាទក៏បានធ្វើការចែករំលែកលំហាត់ទាំងនេះអមជាមួយដំណោះស្រាយលើទំព័រFacebook ពិភពគុនគណិតវិទ្យា ដែរ ដោយធ្វើការបង្ហោះម្តងមួយលំហាត់ ឬ ពីរលំហាត់។ តែដើម្បីឲ្យមានភាពងាយស្រួលដល់អ្នកសិក្សា ខ្ញុំក៏សម្រេចចិត្តប្រមូលលំហាត់ដែលធ្លាប់បង្ហោះកន្លងមក យកមករៀបរៀងជាសៀវភៅឡើងទុកជាឯកសា ។

សូមមិត្តអ្នកអានមេត្តាអធ្យាស្រ័យរាល់កំហុសឆ្គងនានាដែលកើតឡើងដោយអចេតនា ហើយខ្ញុំបាទក៏សូមស្វាគមន៍រាល់មតិរិះគន់នានាក្នុងន័យស្ថាបនាពីបណ្តាលោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និងមិត្តអ្នកសិក្សាទាំងអស់ដោយក្តីរីករាយ។

ជាចុងក្រោយ ខ្ញុំបាទសូមជូនពរដល់មិត្តអ្នកសិក្សាទាំងអស់ ឲ្យមានសុខភាពល្អ ទទួលបានជោគជ័យក្នុងការសិក្សា និងសូមសម្រេចរាល់បំណងប៉ងប្រាថ្នា។

រាជធានីភ្នំពេញ ថ្ងៃទី១៨ ឧសភា ២០១៩

អ្នករៀបរៀង និង ស្រាវជ្រាវ

និស្សិត សារ៉ើន សុទ្ធា

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

ខ្ញុំបាទសូមសម្តែងនូវការដឹងគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅចំពោះ

- អ្នកមានគុណទាំងពីរដែលបានផ្តល់កំណើត និងបានចិញ្ចឹមបីបាច់ថែរក្សា និង ទំនុកបម្រុងដល់រូបកូនតាំងតែពីតូច រហូតដល់ធំដឹងក្តី ។
- លោកគ្រូ អ្នកគ្រូ និង សាស្ត្រាចារ្យទាំងអស់ដែលបានបង្រៀនផ្តល់ចំណេះដឹងទូទៅ និង ទូន្មានប្រៀនប្រដៅដល់រូបខ្ញុំ តាំងពីបឋមសិក្សាមករហូតដល់សាកលវិទ្យាល័យ និងពេលបច្ចុប្បន្ន ។
- បណ្តាមិត្តភក្តិប្រុសស្រី សិស្សច្បង និងសិស្សប្អូនទាំងអស់ដែលតែងតែលើកទឹកចិត្ត ជម្រុញ និងជួយគាំទ្រដល់ខ្ញុំបាទគ្រប់ពេលវេលា។
- អ្នកគាំទ្រទាំងអស់គ្នា ដែលតែងតែជួយ like, comment, share លើទំព័រFacebook ពិភពគុនគណិតវិទ្យា កន្លងមក។

មាតិកា

អារម្ភកថា.......... i
សេចក្ដីថ្លែងអំណរគុណ.......... iii
ផ្នែកប្រធានលំហាត់.......... 1
ផ្នែកដំណោះស្រាយ 21

គ្មានផ្នែកណាមួយនៃសៀវភៅនេះ
ត្រូវបានបោះពុម្ពផ្សាយ ឬ ថតចម្លង
ឡើងវិញដោយគ្មានការអនុញ្ញាតិពី
អ្នករៀបរៀងឡើយ

ផ្នែកប្រធានលំហាត់

លំហាត់ទី១

គេមាន $f(x)=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}-\frac{16}{1-x^{16}}$ ។

គណនាតម្លៃនៃ $f(x)$ ចំពោះ $x=\sqrt{2019}$ ។

លំហាត់ទី២

គេមាន $g(x)=\sqrt[3]{x+\frac{x+1}{3}\sqrt{\frac{8x-1}{3}}}+\sqrt[3]{x-\frac{x+1}{3}\sqrt{\frac{8x-1}{3}}}$ ។

គណនាតម្លៃនៃ $g(x)$ ចំពោះ $x=\sqrt[3]{2019}$ ។

លំហាត់ទី៣

រកគូនៃចំនួនគត់ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $a^2+b^2=a+b+8$ ។

លំហាត់ទី៤

រកគ្រប់អនុគមន៍ $f(x)$ ដោយដឹងថា $f(x+4)=x^2-3x+10$ ។

លំហាត់ទី៥

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f(x)$ ដោយដឹងថា $f\left(\frac{x+1}{x}\right)=1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}$ ចំពោះ

គ្រប់ចំនួនពិត $x\neq 0$ ។

លំហាត់ទី៦

គេមាន $f(\ln x)=x^2+x+1$ ចំពោះ $x>0$ ។ ចូរកំណត់ $f(x)$ ។

លំហាត់ទី៧

គេមានត្រីកោណ ABC មួយមានមុំស្រួច និងមានរង្វាស់ជ្រុង a,b,c រៀងគ្នា។ តាង S ជាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ។

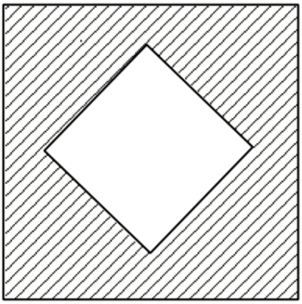
បង្ហាញថា $\sqrt{a^2b^2-4S^2}+\sqrt{a^2c^2-4S^2}=a^2$ ។

លំហាត់ទី៨

ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។ គេគូសកម្ពស់ $[AH]$ នៃត្រីកោណ ABC រួចគូសមេដ្យាន $[AM]$ នៃត្រីកោណ AHC ។ រកប្រវែង AM បើគេដឹងថា $AB=5cm$ និង $AH=4cm$ ។

លំហាត់ទី៩

នៅក្នុងរូបខាងក្រោម ជ្រុងការេតូចស្មើពាក់កណ្ដាលជ្រុងការេធំ។



រកផលធៀបក្រលាផ្ទៃឆូតនិងក្រលាផ្ទៃការេធំ។

លំហាត់ទី១០

គណនា $S=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx$ ។

លំហាត់ទី១១

ក. ចូរស្រាយថា $\cos(2nx)=\dfrac{1}{2\sin x}[\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x]$

ខ. ចូរគណនា $S_n=\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+...+\cos(2nx)$

គ. ទាញរកផលបូក $T_n=\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+...+\cos^2(nx)$

ឃ. គណនា $U_n=\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x+...+\sin^2(nx)$ ។

លំហាត់ទី១២

គណនាផលបូក

ក. $S=1+2+3+...+n \quad (n\in\mathbb{N})$

ខ. $S=1^2+2^2+3^2+...+n^2 \quad (n\in\mathbb{N})$

គ. $S=1^3+2^3+3^3+...+n^3 \quad (n\in\mathbb{N})$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=(3+2\sqrt{2})^x+(3-2\sqrt{2})^x$ ។

ក. ចូរស្រាយថា f ជាអនុគមន៍គូ។

ខ. ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ចូរបង្ហាញថា $f(x)\geq 2$ ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=34$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេមាន x_1 និង x_2 ជាឫសនៃសមីការ $x^2-x-3=0$ ។ ដោយពុំចាំបាច់ដោះស្រាយសមីការខាងលើ ចូរកំណត់តម្លៃនៃ $x_1^2+x_2^2$ ។

លំហាត់ទី១៥

បើ x_1 និង x_2 ជាឬសនៃសមីការ $x^2-4x+2=0$ ។

ចូរសរសេរសមីការដឺក្រេទីពីរដែលមានឬស

ក. $x_1+2; x_2+2$

ខ. $\frac{1}{x_1};\frac{1}{x_2}$

គ. $x_1^2;x_2^2$

ឃ. $(x_1+2x_2);(2x_1+x_2)$ ។

លំហាត់ទី១៦

បង្ហាញថាចំនួន $A=2019\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$ ជាចំនួនគត់។

លំហាត់ទី១៧

ប្រៀបធៀបពីរចំនួនខាងក្រោម

ក. $(30000)^{20000}$ និង $(20000)^{30000}$ ។

ខ. 31^{11} និង 17^{14} ។

លំហាត់ទី១៨

គេមាន $H=\frac{2.000007}{(1.000007)^2+2.000007}$ និង $E=\frac{2.000003}{(1.000003)^2+2.000003}$

ចូរបង្ហាញថា $E>H$ ។

លំហាត់ទី១៩

បង្ហាញថា $\sqrt{2018}+\sqrt{2020}<2\sqrt{2019}$ ។

លំហាត់ទី២០

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន $A=2^{12}+3^{12}$ ចែកដាច់នឹង 97 ។

លំហាត់ទី២១

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន $A=113^n-168^n-141^n+427^n$ ចែកដាច់នឹង 7 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

លំហាត់ទី២២

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន $A=831^n-743^n+709^n-610^n$ ចែកដាច់នឹង 187 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

លំហាត់ទី២៣

គេមាន $A=(1-3\sqrt{3})\sqrt{26+2\sqrt{26+2\sqrt{28+6\sqrt{3}}}}-1$ និង

$B=\sqrt{3}(2\sqrt{27}-\sqrt{48}+\sqrt{3})$ ។ បង្ហាញថា A ចែកដាច់នឹង B ។

លំហាត់ទី២៤

ដោះស្រាយសមីការ $2^{\cos^2 x}+2^{\sin^2 x}=3$ ។

លំហាត់ទី២៥

គេឲ្យសមីការ $x^2-mx+4m=0$ ។

ចូរកំណត់ $m\in\mathbb{N}$ ដើម្បីឲ្យសមីការមានឫសពីរ $x_1,x_2\in\mathbb{N}$ ។

លំហាត់ទី២៧

ចូរដោះស្រាយសមីការ $(\sqrt{x})^x=x^{\sqrt{x}}$ ។

លំហាត់ទី២៨

ចូរដោះស្រាយសមីការ $\frac{x-1}{2018}+\frac{x-2}{2017}+\frac{x-3}{2016}+\frac{x-4}{2015}=4$ ។

លំហាត់ទី២៩

សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម

$$A=\sqrt{2019\sqrt{2019}}\cdot\sqrt{2019-\sqrt{2019^2-\sqrt{2019}}}\cdot\sqrt{2019+\sqrt{2019^2-\sqrt{2019}}}$$

លំហាត់ទី៣០

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A=673\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}}$

ជាចំនួនគត់។

លំហាត់ទី៣១

គេមាន S_m និង S_n ជាផលបូកតួ m ដំបូង និង n តួដំបូងរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ

ដែល $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2},(m\neq n)$ ។តាងតួទី m គឺ u_m និងតួទី n គឺ u_n ។

បង្ហាញថា $\frac{u_m}{u_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$ ។

លំហាត់ទី៣២

គេឲ្យ A,B,C ជារង្វាស់មុំក្នុងត្រីកោណមួយ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $\cot A,\cot B,\cot C$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះគេបាន

$\sin^2 A,\sin^2 B,\sin^2 C$ ក៏ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែរ ។

លំហាត់ទី៣៣

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2+b^2+1\geq ab+a+b$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ a និង b ។

លំហាត់ទី៣៤

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}}+\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}=2\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៣៥

គេដាក់ស្វ៊ីតលេខសេសជាក្រុមដើម្បីឲ្យក្រុមទី n មាន n តួ គឺ

$\{1\},\{3,5\},\{7,9,11\},\{13,15,17,19\},\ldots$ ។

ក. ចូររកតួចុងក្រោយនៃក្រុមទី n ។

ខ. តើក្រុមទីប៉ុន្មានដែលមានលេខ 999 ? តើលេខ 999 ឡើងនៅតួទីប៉ុន្មាននៅក្នុងក្រុមនោះ?

គ. ចូរគណនាផលបូកតួនៃក្រុមទី n ។

លំហាត់ទី៣៦

គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc=1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{1}{1+a+ab}+\dfrac{1}{1+b+bc}+\dfrac{1}{1+c+ca}=1$ ។

លំហាត់ទី៣៧

ដោះស្រាយសមីការ $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^x=10$ ។

លំហាត់ទី៣៨

ដោះស្រាយសមីការ $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=14$ ។

លំហាត់ទី៣៩

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}$ ។

ចូរសរសេរ $w=\frac{z^2}{1+z^3}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

លំហាត់ទី៤០

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ z និង w ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

១. $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$ ។

២. $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$ ដែល $w\neq 0$ ។

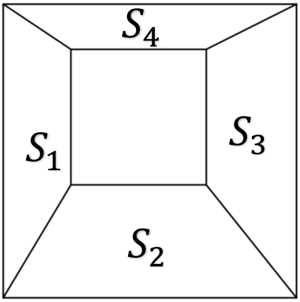
លំហាត់ទី៤១

ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

$\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x-\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៤២

គេមានការេពីរ។ គេដាក់ការេតូចក្នុងការេធំដោយឲ្យជ្រុងរបស់វាស្របគ្នា (ដូចរូប) ។ស្រាយបញ្ជាក់ថាផលបូកក្រឡាផ្ទៃ $S_1+S_3=S_2+S_4$ ។



លំហាត់ទី៤៣

ឧបមាថាសមីការ $x^2+px+1=0$ មានឬស a,b ហើយសមីការ

$x^2+qx+2=0$ មានឬស b,c ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(b-c)(b-a)=pq-6$ ។

លំហាត់ទី៤៤

គេឲ្យ $a,b>0$ និង $n\in\mathbb{Z}$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\geq 2^{n+1}$ ។

លំហាត់ទី៤៥

គេឲ្យសមីការ $x^2+2ax+k=0$ មានឬសមួយស្មើ $(a-b)\neq 0$ ។

ចូររកតម្លៃ k ។

លំហាត់ទី៤៦

រកគ្រប់គូនៃចំនួនគត់វិជ្ជមានទីប (x,y) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី៤៧

គេឲ្យបីចំនួន a,b,c ដែល $abc\leq 1$ ។ បង្ហាញថា $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq a+b+c$ ។

លំហាត់ទី៤៨

គេឲ្យបីចំនួន $a,b,c\geq 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ ។

លំហាត់ទី៤៩

ស្រាយថាបើ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណមួយនោះគេទាញបានវិសមភាព $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ac)$ ។

លំហាត់ទី៥០

គេឲ្យបីចំនួន $a,b,c>0$ ដែល $abc=1$ ។

បង្ហាញថា $\dfrac{b+c}{\sqrt{a}}+\dfrac{a+c}{\sqrt{b}}+\dfrac{a+b}{\sqrt{c}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$ ។

លំហាត់ទី៥១

បង្ហាញថា $A=\underbrace{111...11}_{2n}-\underbrace{222...22}_{n}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនមួយ។

លំហាត់ទី៥២

គេមានសមីការ $x^3+3mx^2+2(6m-7)x+10m-16=0$ ។

កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យសមីការនេះមានឫសបី x_1,x_2,x_3 បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ។

លំហាត់ទី៥៣

តាង S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ។

បង្ហាញថា $S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$ ។

លំហាត់ទី៥៤

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=2^{x^2-3x+4}+2^{2+3x-x^2}$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f(x)\geq 16$ ។

ខ. រកតម្លៃ x ដើម្បីឲ្យ $f(x)=20$ ។

លំហាត់ទី៥៥

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{1\times 2}+\frac{2}{1\times 2\times 3}+...+\frac{2019}{1\times 2\times 3\times ...\times 2020}<1$ ។

លំហាត់ទី៥៦

បង្ហាញថាគ្មានចំនួនគត់ណាមួយដែល $a^2+b^2-8c=6$ នោះទេ។

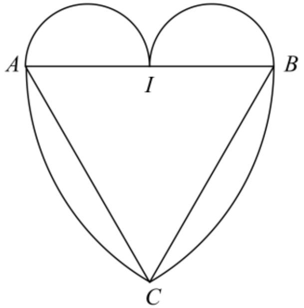
លំហាត់ទី៥៧

សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម

$A=(\log_a b+\log_b a+2)(\log_a b-\log_{ab} b)\log_b a-1$ ។

លំហាត់ទី៥៨

គេឲ្យត្រីកោណសម័ង្ស ABC ដែលជ្រុងមានរង្វាស់ស្មើ $2a$ ។ I ជាចំនុចកណ្តាល $[AB]$ ។ នៅខាងក្រៅត្រីកោណ ABC គេសង់កន្លះរង្វង់ពីរដែលមាន $[AI]$ និង $[BI]$ ជាអង្កត់ផ្ចិត រួចសង់ធ្នូនៃរង្វង់ដែលមានផ្ចិត A កាំ AB ដែលខណ្ឌដោយចំនុច B និង C និងសង់ធ្នូនៃរង្វង់ដែលមានផ្ចិត B កាំ AB ដែលខណ្ឌដោយចំនុច A និង C ។ គេបានរូបមួយរាងបេះដូង (ដូចរូបខាងក្រោម)។ ចូរគណនាផ្ទៃក្រឡារូបរាងបេះដូងនេះ។



លំហាត់ទី៥៩

ក្នុងការសាកសួរសិស្ស 200 នាក់ បានឲ្យនឹងថា សិស្ស 120 នាក់ចុះឈ្មោះរៀនភាសាអង់គ្លេស សិស្ស 90 នាក់ចុះឈ្មោះរៀនភាសាបារាំង និង សិស្ស 50 នាក់ចុះឈ្មោះរៀនទាំងពីរមុខ។ តើមានសិស្សប៉ុន្មាននាក់ ដែលមិនបានចុះឈ្មោះរៀនមុខវិជ្ជាទាំងពីរ?

លំហាត់ទី៦០

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z_n = 1 + i\dfrac{\sqrt{2n^2+2n+1}}{n(n+1)}$ ដែល $n \in \mathbb{N}$ ។

១. ចូរស្រាយថា $Z_n \times \overline{Z_n} = \dfrac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$ ។

២. តាង $S_n = \sum_{k=1}^{n} |Z_k|$ ។ ស្រាយថា $S_n = n + 1 - \dfrac{1}{n+1}$ ។

លំហាត់ទី៦១

ដោះស្រាយសមីការ $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 3$ ។

លំហាត់ទី៦២

គេឲ្យបួនចំនួនគត់ a, b, c, d ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b = c+d$ និង $ab+1 = cd$ ។ បង្ហាញថា $c = d$ ។

លំហាត់ទី៦៣

គេឲ្យ a, b, c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a^2 = b^2 + c^2$ ។

ក. ប្រៀបធៀប a និង $b+c$ ។

ខ. ប្រៀបធៀប a^3 និង $b^3 + c^3$ ។

លំហាត់ទី៦៤

គេឲ្យ $a_1,a_2,...,a_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a_1\times a_2\times...\times a_n=1$ ។

បង្ហាញថា $(2+a_1)(2+a_2)...(2+a_n)\geq 3^n$ ។

លំហាត់ទី៦៥

ស្រាយថាបើ $\dfrac{a(b+c-a)}{\log a}=\dfrac{b(a+c-b)}{\log b}=\dfrac{c(a+b-c)}{\log c}$

នោះគេបាន $a^b b^a=c^b b^c=a^c c^a$ ។

លំហាត់ទី៦៦

ចូររកចំនួនគត់ x ដែល $700<x<800$ ដោយដឹងថាផលបូកគ្រប់ខ្ទង់នៃ x ស្មើ 17 និងបើគេប្តូរលេខខ្ទង់រយទៅខាងស្តាំនៃចំនួននោះ គេបានចំនួនថ្មីមួយតិចជាងចំនួនដើម 441 ។

លំហាត់ទី៦៧

ឧបមាថា x_1 និង x_2 ឫសនៃសមីការ $x^2-2x-1=0$ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $A=12x_1^7+169x_2^4$ ។

លំហាត់ទី៦៨

ស្រាយថាសមីការ $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)=0$

មានឫសជានិច្ច ដែល x ជាអញ្ញាតិ និង $a,b,c\in\mathbb{R}$ ។

លំហាត់ទី៦៩

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍នេះ ។

ខ. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $-1<a<1$ និង $-1<b<1$

ចូរបង្ហាញថា $f(a)+f(b)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$ ។

លំហាត់ទី៧០

ដោះស្រាយវិសមីការ $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\cos x}>\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\sin x}$ ។

លំហាត់ទី៧១

គេឲ្យ $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$ ។

ក. គណនា $f(x)+f(y)$ ដោយដឹងថា $x+y=1$ ។

ខ. ទាញរកផលបូក $S=f\left(\frac{1}{2019}\right)+f\left(\frac{2}{2019}\right)+\ldots+f\left(\frac{2018}{2019}\right)$ ។

លំហាត់ទី៧២

គេឲ្យ p ជាចំនួនពិតដែល $p+\frac{1}{p}$ ជាចំនួនគត់មួយ។

ស្រាយថា $p^n+\frac{1}{p^n}$ ជាចំនួនគត់ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

លំហាត់ទី៧៣

គេឲ្យសាបីចំនួនដែលផ្ទៀងផ្ទាត់បីលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម

(1) $a+b+c=1$

(2) $a^2+b^2+c^2=1$

(3) $a^3+b^3+c^3=1$

គណនាតម្លៃនៃ $A=a^{2018}+b^{2019}+c^{2020}$ ។

លំហាត់ទី៧៤

គេឲ្យសមីការ $ax^2+bx+c=0$ ដែល a និង c ខុសពីសូន្យ ហើយ α និង β សាប្ញសនៃសមីការ។ គេតាង $S_n=\alpha^n+\beta^n$ ដែល $n\in\mathbb{N}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $aS_n+bS_{n-1}+cS_{n-2}=0$ ។

លំហាត់ទី៧៥

ក. បង្ហាញថា $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ សាស្វ៊ីតនព្វន្តលុះត្រាតែ $2a_{p+q}=a_{2p}+a_{2q}$ ដែល $p,q\in\mathbb{N}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ សាស្វ៊ីតធរណីមាត្រលុះត្រាតែ $a_{p+q}^2=a_{2p}\times a_{2q}$ ដែល $p,q\in\mathbb{N}$ ។

លំហាត់ទី៧៦

គេឲ្យខ្សែកោង $(C): f(x)=x^2+ax+b\ln x$ និងបន្ទាត់ $(L): y=3x+1$ ។ ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យខ្សែកោង(C) ប៉ះនឹងបន្ទាត់ (L) ត្រង់ចំនុច $A(1,4)$ ។

លំហាត់ទី៧៧

គេឲ្យ $a \geq 1$ និង $b \geq 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \leq 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}$ ។

លំហាត់ទី៧៨

ដោះស្រាយសមីការ $\cos x + \sin x - \sin x \cos x = 1$ ។

លំហាត់ទី៧៩

គេឲ្យ A, B, C ជារង្វាស់មុំទាំងបីនៃត្រីកោណមួយ។

បង្ហាញថា $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៨០

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = x + iy$ ដែល $x, y \in \mathbb{R}$ ។

ចូរស្រាយថា $|z+1| = |z+i|$ លុះត្រាតែ $x = y$ ។

លំហាត់ទី៨១

គេឲ្យស៊ីត $0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots, r, r, r+1, r+1, \ldots$ ។

ក. គណនា $f(n)$ ផលបូក n តួដំបូងនៃស៊ីតនេះ។

ខ. គេឲ្យ s, t ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $s > t$ ។

បង្ហាញថា $f(s+t) - f(s-t) = st$ ។

លំហាត់ទី៨២

បើ $\forall n\in\mathbb{N}$ គេមាន $a_1+a_2+a_3+...+a_n=n$ ។

ស្រាយថា $a_1^4+a_2^4+a_3^4+...+a_n^4\geq n$ ។

លំហាត់ទី៨៣

គេឲ្យ $\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{2^2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}=2\cos\frac{\pi}{2^3}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^4}$ ។

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើ ចូររករូបមន្តទូទៅ និងស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនោះផង។

លំហាត់ទី៨៤

គេឲ្យ $a=2x+5$, $b=4x+3$ និង $c=10x+4$ ។

រក x ដើម្បីឲ្យ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។

លំហាត់ទី៨៥

គេមានកន្សោម $P_n=\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot...\cdot\cos\frac{x}{2^n}$ ។

បង្ហាញថា $P_n=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}$ ។

លំហាត់ទី៨៦

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ z_1 និង z_2 ដែល $z_1\neq z_2$ ហើយ $|z_1|=|z_2|=1$ ។

ចូរស្រាយថាគ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច w គេបាន $\frac{w+z_1z_2\overline{w}-(z_1+z_2)}{z_1-z_2}$ ជាចំនួននិមិត្ត។

លំហាត់ទី៨៧

ឧបមាថា x_1,x_2,x_3,x_4 ជាឫសនៃសមីការ $x^4-3x^3+2x^2-x-1=0$ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $A=x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4$ ។

លំហាត់ទី៨៨

គេឲ្យ $x^2+y^2=1$ និង $bx^2=ay^2$ ដែល $a,b\neq 0$ ។

ស្រាយបំភ្លឺថា $\dfrac{x^{2020}}{a^{1010}}+\dfrac{y^{2020}}{b^{1010}}=\dfrac{2}{(a+b)^{1010}}$ ។

លំហាត់ទី៨៩

រកគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $n^4-4n^3+22n^2-36n+18$ ជាការេប្រាកដ។

លំហាត់ទី៩០

គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ចូរបង្ហាញថា $(n+1)^n\geq 2\times4\times6\times\ldots\times 2n$ ។

លំហាត់ទី៩១

គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ចូរបង្ហាញថា $n^n\geq 1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)$ ។

លំហាត់ទី៩២

ដោះស្រាយសមីការ $\dfrac{3^{x^2-x}}{3^x}+\dfrac{4^{x^2-x}}{4^x}+\dfrac{5^{x^2-x}}{5^x}=\dfrac{6^{x^2-x}}{6^x}$ ។

លំហាត់ទី៩៣

គ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច z និង w ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$ ។

លំហាត់ទី៩៤

ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b,c ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$ ។

លំហាត់ទី៩៥

រកត្រីធាតុ (x,y,z) ជាចំនួនពិតរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}\dfrac{4y^2}{4y^2+1}=y\\ \dfrac{4z^2}{4z^2+1}=z\\ \dfrac{4x^2}{4x^2+1}=x\end{cases}$ ។

លំហាត់ទី៩៦

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (x_n) កំណត់ដោយ $x_1=0$ និង

$x_{n+1}=5x_n+\sqrt{24x_n^2+1}$ គ្រប់ $n=1,2,3,..$ ។

ចូរស្រាយថាគ្រប់តួទាំងអស់នៃស្វ៊ីតសុទ្ធតែជាចំនួនគត់។

លំហាត់ទី៩៧

គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1=2$ និង $2u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{n(n+1)\cdot 2^n}$ ។

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

លំហាត់ទី៩៨

ដោះស្រាយសមីការ $3^{\sin 2x+2\cos^2 x}+3^{1-2\sin 2x+2\sin^2 x}=28$ ។

លំហាត់ទី៩៩

គេឲ្យអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)...(x-2019)$ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $f'(1)$ ។

លំហាត់ទី១០០

គេឲ្យ បីចំនួនដាស៊ីតនព្វន្ត និងបីចំនួនទៀតដាស៊ីតធរណីមាត្រ។ ដោយដឹងថា ផលបូកតួដែលមានតួទីដូចគ្នាគឺ $85, 76, 84$ រៀងគ្នា ហើយផលបូកតួទាំងបីនៃស៊ីតនព្វន្តគឺ 126 ចូរគណនាតួទាំង 6 ។

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

លំហាត់ទី១

គេមាន $f(x)=\dfrac{2}{1-x^2}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\dfrac{8}{1+x^8}-\dfrac{16}{1-x^{16}}$ ។

គណនាតម្លៃនៃ $f(x)$ ចំពោះ $x=\sqrt{2019}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ $f(x)$ ចំពោះ $x=\sqrt{2019}$

គេមាន $f(x)=\dfrac{2}{1-x^2}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\dfrac{8}{1+x^8}-\dfrac{16}{1-x^{16}}$

$$f(x)=\frac{2+2x^2+2-2x^2}{(1-x^2)(1+x^2)}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}-\frac{16}{1-x^{16}}$$

$$f(x)=\frac{4}{1-x^4}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}-\frac{16}{1-x^{16}}$$

$$f(x)=\frac{4+4x^4+4-4x^4}{(1-x^4)(1+x^4)}+\frac{8}{1+x^8}-\frac{16}{1-x^{16}}$$

$$f(x)=\frac{8}{1-x^8}+\frac{8}{1+x^8}-\frac{16}{1-x^{16}}$$

$$f(x)=\frac{16}{(1-x^8)(1+x^8)}-\frac{16}{1-x^{16}}$$

$$f(x)=\frac{16}{1-x^{16}}-\frac{16}{1-x^{16}}$$

$$f(x)=0$$

ដូចនេះ $f(\sqrt{2019})=0$ ។

លំហាត់ទី២

គេមាន $g(x)=\sqrt[3]{x+\frac{x+1}{3}\sqrt{\frac{8x-1}{3}}}+\sqrt[3]{x-\frac{x+1}{3}\sqrt{\frac{8x-1}{3}}}$ ។

គណនាតម្លៃនៃ $g(x)$ ចំពោះ $x=\sqrt[3]{2019}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ $g(x)$ ចំពោះ $x=\sqrt[3]{2019}$

គេមាន $g(x)=\sqrt[3]{x+\frac{x+1}{3}\sqrt{\frac{8x-1}{3}}}+\sqrt[3]{x-\frac{x+1}{3}\sqrt{\frac{8x-1}{3}}}$

តាង $a=\sqrt{\frac{8x-1}{3}}$ នាំឲ្យ $a^2=\frac{8x-1}{3}$

គេបាន $x=\frac{3a^2+1}{8}$ ជំនួសក្នុង $g(x)$

$$g(x)=\sqrt[3]{\frac{3a^2+1}{8}+\frac{\frac{3a^2+1}{8}+1}{3}\cdot a}+\sqrt[3]{\frac{3a^2+1}{8}-\frac{\frac{3a^2+1}{8}+1}{3}\cdot a}$$

$$g(x)=\sqrt[3]{\frac{3a^2+1}{8}+\frac{a^2+3}{8}\cdot a}+\sqrt[3]{\frac{3a^2+1}{8}-\frac{a^2+3}{8}\cdot a}$$

$$g(x)=\sqrt[3]{\frac{3a^2+1+a^3+3a}{8}}+\sqrt[3]{\frac{3a^2+1-a^3-3a}{8}}$$

$$g(x)=\sqrt[3]{\frac{(a+1)^3}{8}}+\sqrt[3]{\frac{(1-a)^3}{8}}$$

$$g(x)=\frac{a+1}{2}+\frac{1-a}{2}$$

$g(x)=\frac{2}{2}=1$

ដូចនេះ $g(\sqrt[3]{2019})=1$ ។

លំហាត់ទីព

រកគូនៃចំនួនគត់ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $a^2+b^2=a+b+8$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកគូនៃចំនួនគត់ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាព $a^2+b^2=a+b+8$

គេបាន $4(a^2+b^2)=4(a+b+8)$

$$4a^2+4b^2=4a+4b+32$$

$$4a^2+4b^2=4a+4b+32$$

$$4a^2-4a+1+4b^2-4b+1=32+1+1$$

សមមូល $(2a-1)^2+(2b-1)^2=34=3^2+5^2$

នាំឲ្យ $\begin{cases}2a-1=3\\2b-1=5\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}2a-1=5\\2b-1=3\end{cases}$

$\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}$ ឬ $\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$

ដូចនេះគូនៃចំនួនគត់ (a,b) គឺ $(a=2,b=3)$ ឬ $(a=3,b=2)$ ។

លំហាត់ទី៤

រកគ្រប់អនុគមន៍ $f(x)$ ដោយដឹងថា $f(x+4)=x^2-3x+10$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកគ្រប់អនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f(x+4)=x^2-3x+10$ (1)

តាង $t=x+4 \Rightarrow x=t-4$ ជំនួសក្នុង (1)

គេបាន $f(t)=(t-4)^2-3(t-4)+10$

$$f(t)=t^2-8t+16-3t+12+10$$

$$f(t)=t^2-11t+38$$

ជំនួស t ដោយ x

ដូចនេះ $f(x)=x^2-11x+38$ ។

លំហាត់ទី៥

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f(x)$ ដោយដឹងថា $f\left(\frac{x+1}{x}\right)=1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x\neq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f(x)$

គេមាន $f\left(\frac{x+1}{x}\right)=1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}$ (1)

តាង $t=\frac{x+1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{t-1}$ ជំនួសក្នុង (1)

គេបាន $f(t)=1+2(t-1)+4(t-1)^2$

$$f(t)=1+2t-2+4t^2-8t+4$$

$$f(t)=4t^2-6t+3$$

ជំនួស t ដោយ x

ដូចនេះ $f(x)=4x^2-6x+3$ ។

លំហាត់ទី៦

គេមាន $f(\ln x)=x^2+x+1$ ចំពោះ $x>0$ ។ ចូរកំណត់ $f(x)$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ $f(x)$

គេមាន $f(\ln x)=x^2+x+1$ ចំពោះ $x>0$ (1)

តាង $t=\ln x\Rightarrow x=e^t$ ជំនួសក្នុង (1)

គេបាន $f(t)=(e^t)^2+e^t+1$

$$f(t)=e^{2t}+e^t+1$$

ជំនួស t ដោយ x

ដូចនេះ $f(t)=e^{2x}+e^x+1$ ។

លំហាត់ទី៧

គេមានត្រីកោណ ABC មួយមានមុំស្រួច និងមានរង្វាស់ជ្រុង a,b,c រៀងគ្នា។ តាង S ជាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ។

បង្ហាញថា $\sqrt{a^2b^2-4S^2}+\sqrt{a^2c^2-4S^2}=a^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមរូបមន្តក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ

$S=\frac{1}{2}ab\sin C$ នាំឲ្យ $2S=ab\sin C$ នាំឲ្យ $4S^2=a^2b^2\sin^2 C$

$S=\frac{1}{2}ac\sin B$ នាំឲ្យ $2S=ac\sin B$ នាំឲ្យ $4S^2=a^2c^2\sin^2 B$

គេបាន

$$\sqrt{a^2b^2-4S^2}+\sqrt{a^2c^2-4S^2}=\sqrt{a^2b^2-a^2b^2\sin^2 C}+\sqrt{a^2c^2-a^2c^2\sin B}$$

$$=ab\sqrt{1-\sin^2 C}+ac\sqrt{1-\sin^2 B}=ab\cos C+ac\cos B$$

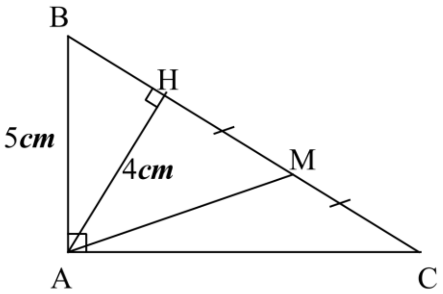
$$=ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+b^2-c^2+a^2+c^2-b^2}{2}$$

ដូចនេះ $\sqrt{a^2b^2-4S^2}+\sqrt{a^2c^2-4S^2}=a^2$ ។

លំហាត់ទី៨

ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។ គេគូសកម្ពស់ $[AH]$ នៃត្រីកោណ ABC រួចគូសមេដ្យាន $[AM]$ នៃត្រីកោណ AHC ។ រកប្រវែង AM បើគេដឹងថា $AB = 5cm$ និង $AH = 4cm$ ។

ដំណោះស្រាយ



រកប្រវែង AM

ក្នុងត្រីកោណកែង AHB មាន

$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3cm$

តាមទំនាក់ទំនងមាត្រក្នុងត្រីកោណកែង ABC

$$BH \times BC = AB^2 \Rightarrow BC = \frac{AB^2}{BH} = \frac{25}{3}cm$$

ម៉្យាងទៀត $CH = BC - BH = \frac{25}{3} - 3 = \frac{16}{3}cm$

$$HM = \frac{1}{2}CH = \frac{1}{2} \times \frac{16}{3} = \frac{8}{3}cm$$

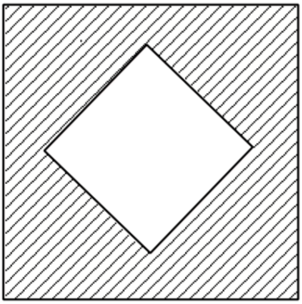
ក្នុងត្រីកោណកែង AHM មាន

$$AM=\sqrt{AH^2+HM^2}=\sqrt{4^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{144+64}{9}}=\frac{4}{3}\sqrt{13}cm$$

ដូចនេះ $AM=\frac{4}{3}\sqrt{13}cm$ ។

លំហាត់ទី៩

នៅក្នុងរូបខាងក្រោម ជ្រុងការេតូចស្មើពាក់កណ្ដាលជ្រុងការេធំ។



រកផលធៀបក្រលាផ្ទៃឆូតនិងក្រលាផ្ទៃការេធំ។

ដំណោះស្រាយ

រកផលធៀបក្រលាផ្ទៃឆូតនិងក្រលាផ្ទៃការេធំ

តាង a ជារង្វាស់ជ្រុងការេតូច $(a>0)$

នោះ $2a$ ជារង្វាស់ជ្រុងការេធំ

យក S ជាក្រលាផ្ទៃការេធំ

S' ជាក្រលាផ្ទៃឆូត

គេបាន $S=(2a)^2=4a^2$

$S'=4a^2-a^2=3a^2$

នាំឲ្យ ផលធៀបក្រលាផ្ទៃឆូតនិងក្រលាផ្ទៃការេធំកំណត់ដោយ

$$\frac{S'}{S}=\frac{3a^2}{4a^2}=\frac{3}{4}$$

ដូចនេះ ផលធៀបក្រលាផ្ទៃឆូតនិងក្រលាផ្ទៃការេធំគឺ $\frac{3}{4}$ ។

លំហាត់ទី១០

គណនា $S=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+...+\cos nx$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $S=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+...+\cos nx$

ដោយគុណអង្គទាំងពីរនឹង $2\sin\frac{x}{2}$ គេបាន

$$2\sin\frac{x}{2}S=2\sin\frac{x}{2}\cos x+2\sin\frac{x}{2}\cos 2x+2\sin\frac{x}{2}\cos 3x+...+2\sin\frac{x}{2}\cos nx$$

តាមរូបមន្ត $2\sin b\cos a=\sin(a+b)-\sin(a-b)$

នាំឲ្យ $2\sin\frac{x}{2}\cos nx=\sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)-\sin\left(nx-\frac{x}{2}\right)$

$$=\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x-\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)x$$

ដោយឲ្យតម្លៃ n ចាប់ពី1ដល់ n គេបាន

$$2\sin\frac{x}{2}\cos x=\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{x}{2}$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos 2x=\sin\frac{5}{2}x-\sin\frac{3}{2}x$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos 3x=\sin\frac{7}{2}x-\sin\frac{5}{2}x$$

....

$$2\sin\frac{x}{2}\cos nx=\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x-\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)x$$

បូកអង្គនិងអង្គ គេបាន

$$2\sin\frac{x}{2}S=\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}$$

$$2\sin\frac{x}{2}S=2\cos\left(\frac{n+1}{2}\right)x\sin\frac{nx}{2}$$

$$S=\frac{2\cos\left(\frac{n+1}{2}\right)x\sin\frac{nx}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

ដូចនេះ $S=\dfrac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\right)x\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ ។

លំហាត់ទី១១

ក. ចូរស្រាយថា $\cos(2nx)=\dfrac{1}{2\sin x}[\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x]$

ខ. ចូរគណនា $S_n=\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+...+\cos(2nx)$

គ. ទាញរកផលបូក $T_n=\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+...+\cos^2(nx)$

ឃ. គណនា $U_n=\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x+...+\sin^2(nx)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ចូរស្រាយថា $\cos(2nx)=\dfrac{1}{2\sin x}[\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x]$

គេមាន

$$\frac{1}{2\sin x}[\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x]=\frac{1}{2\sin x}[\sin(2nx+x)-\sin(2nx-x)]$$

$$=\frac{1}{2\sin x}[\sin 2nx\cos x+\cos 2nx\sin x-(\sin 2nx\cos x-\cos 2nx\sin x)]$$

$$=\frac{1}{2\sin x}(2\sin x\cos 2nx)=\cos(2nx)$$

ដូចនេះ $\cos(2nx)=\dfrac{1}{2\sin x}[\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x]$ ។

ខ. ចូរគណនា $S_n=\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+...+\cos(2nx)$

តាមសម្រាយខាងលើ គេមាន

$$\cos(2nx)=\frac{1}{2\sin x}[\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x]$$

ដោយឲ្យតម្លៃ n ចាប់ពី1ដល់ n គេបាន

$$\cos 2x = \frac{1}{2\sin x}(\sin 3x - \sin x)$$
$$\cos 4x = \frac{1}{2\sin x}(\sin 5x - \sin 3x)$$
$$\cos 6x = \frac{1}{2\sin x}(\sin 7x - \sin 5x)$$

....

$$\cos(2nx) = \frac{1}{2\sin x}[\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x]$$

បូកអង្គនឹងអង្គ គេបាន

$$S_n = \frac{1}{2\sin x}[\sin(2n+1)x - \sin x]$$

$$S_n = \frac{2\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x}$$

ដូចនេះ $S_n = \dfrac{\cos(n+1)x\sin nx}{\sin x}$ ។

គ. ទាញរកផលបូក $T_n = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + ... + \cos^2(nx)$

គេមាន $T_n = \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + ... + \cos^2(nx)$

$$2T_n = 2\cos^2 x + 2\cos^2 2x + 2\cos^2 3x + ... + 2\cos^2(nx)$$

$$2T_n = 1 + \cos 2x + 1 + \cos 4x + 1 + \cos 6x + ... + 1 + \cos(2nx)$$

$$2T_n = \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + ... + \cos(2nx) + n$$

$$2T_n = \frac{\cos(n+1)x\sin nx}{\sin x} + n$$

$$T_n = \frac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x} + \frac{n}{2}$$

ដូចនេះ $T_n = \dfrac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x} + \dfrac{n}{2}$ ។

ឃ. គណនា $U_n = \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + ... + \sin^2(nx)$

គេមាន $U_n = \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + ... + \sin^2(nx)$

$$U_n = 1-\cos^2 x + 1-\cos^2 2x + 1-\cos^2 3x + ... + 1-\cos^2(nx)$$

$$U_n = n-[\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + ... + \cos^2(nx)]$$

$$U_n = n - \frac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x} - \frac{n}{2}$$

$$U_n = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x}$$

ដូចនេះ $U_n = \dfrac{n}{2} - \dfrac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x}$ ។

លំហាត់ទី១២

គណនាផលបូក

ក. $S = 1+2+3+...+n \quad (n \in \mathbb{N})$

ខ. $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$

គ. $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 \quad (n \in \mathbb{N})$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក

ក. $S = 1+2+3+...+n \quad (n \in \mathbb{N})$

គេមាន $S = 1+2+3+...+n$

ឬ $S=n+(n-1)+(n-2)+...+1$

ដោយបូកអង្គនឹងអង្គ គេបាន

$2S=(n+1)+(n+1)+(n+1)+...(n+1)$ (n តួ)

$2S=n(n+1)$

ដូចនេះ $S=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ។

២. $S=1^2+2^2+3^2+...+n^2$ $(n\in\mathbb{N})$

គេមាន $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$

ដោយឲ្យតម្លៃ k ពី1 ដល់ n គេបាន

$2^3-1^3=3\times1^2+3\times1+1$

$3^3-2^3=3\times2^2+3\times2+1$

$4^3-3^3=3\times3^2+3\times3+1$

....

$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$

ដោយបូកអង្គនឹងអង្គ គេបាន

$$(n+1)^3-1=3(1^2+2^2+3^2+...+n^2)+3(1+2+3+...+n)$$
$$+(1+1+1+...+1)$$

$$(n+1)^3-1=3S+3\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$3S=(n+1)^3-1-3\frac{n(n+1)}{2}-n$$

$$3S = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$3S = n^3 + 3n^2 + 2n - 3\frac{n(n+1)}{2}$$

$$3S = \frac{2n^3 + 6n^2 + 4n - 3n(n+1)}{2}$$

$$3S = \frac{2n^3 + 6n^2 + 4n - 3n^2 - 3n}{2}$$

$$3S = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2}$$

$$3S = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2}$$

$$3S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

ដូចនេះ $S = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ។

គ. $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 \quad (n \in \mathbb{N})$

គេមាន $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

ដោយឲ្យតម្លៃ k ពី1 ដល់ n គេបាន

$$2^4 - 1^4 = 4\times1^3 + 6\times1^2 + 4\times1 + 1$$

$$3^4 - 2^4 = 4\times2^3 + 6\times2^2 + 4\times2 + 1$$

$$4^4 - 3^4 = 4\times3^3 + 6\times3^2 + 4\times3 + 1$$

....

$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

ដោយបូកអង្គនឹងអង្គ គេបាន

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2)$$
$$+4(1+2+3+...+n) + (1+1+1+...+1)$$

$$(n+1)^4 - 1 = 4S + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$[(n+1)^2 - 1][(n+1)^2 + 1] = 4S + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$$

$$4S = n(n+2)(n^2 + 2n + 2) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n$$

$$4S = n[(n+2)(n^2 + 2n + 2) - (n+1)(2n+1) - 2(n+1) - 1]$$

$$4S = n(n^3 + 2n^2 + 2n + 2n^2 + 4n + 4 - 2n^2 - 3n - 1 - 2n - 2 - 1)$$

$$4S = n(n^3 + 2n^2 + n)$$

$$4S = n^2(n^2 + 2n + 1)$$

$$4S = n^2(n+1)^2$$

គេបាន $S = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

ដូចនេះ $S = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=(3+2\sqrt{2})^x+(3-2\sqrt{2})^x$ ។

ក. ចូរស្រាយថា f ជាអនុគមន៍គូ។

ខ. ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ចូរបង្ហាញថា $f(x)\geq 2$ ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=34$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ចូរស្រាយថា f ជាអនុគមន៍គូ។

គេមាន $f(x)=(3+2\sqrt{2})^x+(3-2\sqrt{2})^x$ មានដែនកំណត់ $D=\mathbb{R}$

ចំពោះ $x\in D$ នាំឲ្យ $-x\in D$

គេបាន $f(-x)=(3+2\sqrt{2})^{-x}+(3-2\sqrt{2})^{-x}$

ដោយ $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=9-8=1$

នាំឲ្យ $3+2\sqrt{2}=\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}$

$3-2\sqrt{2}=\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}$

គេទាញបាន $f(-x)=\left(\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}\right)^{-x}+\left(\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}\right)^{-x}$

$f(-x)=(3+2\sqrt{2})^x+(3-2\sqrt{2})^x=f(x)$

ដូចនេះ f ជាអនុគមន៍គូ។

ខ. ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x បង្ហាញថា $f(x)\geq 2$

ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x គេបាន $(3+2\sqrt{2})^x>0$ និង $(3-2\sqrt{2})^x>0$

តាមវិសមភាព $AM-GM$ គេបាន

$$(3+2\sqrt{2})^x+(3-2\sqrt{2})^x\geq 2\sqrt{(3+2\sqrt{2})^x(3-2\sqrt{2})^x}$$

$$(3+2\sqrt{2})^x+(3-2\sqrt{2})^x\geq 2\sqrt{[(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})]^x}$$

$$(3+2\sqrt{2})^x+(3-2\sqrt{2})^x\geq 2\sqrt{(9-8)^x}$$

$$(3+2\sqrt{2})^x+(3-2\sqrt{2})^x\geq 2\sqrt{1}$$

$$(3+2\sqrt{2})^x+(3-2\sqrt{2})^x\geq 2$$

ដូចនេះ $f(x)\geq 2$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ $f(x)=34$

ដោយ $f(x)=(3+2\sqrt{2})^x+(3-2\sqrt{2})^x$

គេបាន $(3+2\sqrt{2})^x+(3-2\sqrt{2})^x=34$

តាង $t=(3+2\sqrt{2})^x>0$ នោះ $(3-2\sqrt{2})^x=\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^x}=\dfrac{1}{t}$

គេបានសមីការទៅជា $t+\dfrac{1}{t}=34$

សមមូល $t^2-34t+1=0$

$\Delta'=17^2-1=288$

នាំឲ្យ $t_1=17-\sqrt{288}=17-12\sqrt{2}=(3-2\sqrt{2})^2$

$t_2=17+\sqrt{288}=17+12\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^2$

- ចំពោះ $t_1=(3-2\sqrt{2})^2$

គេទាញបាន $(3+2\sqrt{2})^x=(3-2\sqrt{2})^2=\dfrac{1}{(3+2\sqrt{2})^2}=(3-2\sqrt{2})^{-2}$

នាំឲ្យ $x=-2$

- ចំពោះ $t_2=(3+2\sqrt{2})^2$

គេទាញបាន $(3+2\sqrt{2})^x=(3+2\sqrt{2})^2$

នាំឲ្យ $x=2$

ដូចនេះ $x=-2, x=2$ ។

លំហាត់ទី១៤

គេមាន x_1 និង x_2 ជាឫសនៃសមីការ $x^2-x-3=0$ ។ ដោយពុំចាំបាច់ដោះស្រាយសមីការខាងលើ ចូរកំណត់តម្លៃនៃ $x_1^2+x_2^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃនៃ $x_1^2+x_2^2$

គេមាន x_1 និង x_2 ជាឫសនៃសមីការ $x^2-x-3=0$

គេបាន $S=x_1+x_2=-1$ និង $P=x_1\cdot x_2=-3$

នាំឲ្យ $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-1)^2-2(-3)=1+6=7$

ដូចនេះ $x_1^2+x_2^2=7$ ។

លំហាត់ទី១៥

បើ x_1 និង x_2 ជាឫសនៃសមីការ $x^2-4x+2=0$ ។

ចូរសរសេរសមីការដឺក្រេទីពីរដែលមានឫស

ក. $x_1+2; x_2+2$

ខ. $\frac{1}{x_1}; \frac{1}{x_2}$

គ. $x_1^2; x_2^2$

ឃ. $(x_1+2x_2); (2x_1+x_2)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមាន x_1 និង x_2 ជាឫសនៃសមីការ $x^2-4x+2=0$

គេបាន $S=x_1+x_2=4$ និង $P=x_1\cdot x_2=2$

សមីការដឺក្រេទីពីរដែលមាន x_1 និង x_2 ជាឫសមានរាង $x^2-Sx+P=0$

សរសេរសមីការដឺក្រេទីពីរដែលមានឫស

ក. $x_1+2; x_2+2$

គេមាន

$$S=(x_1+2)+(x_2+2)=x_1+x_2+4=4+4=8$$

$$P=(x_1+2)(x_2+2)=x_1x_2+2x_1+2x_2+4=x_1x_2+2(x_1+x_2)+4$$

$$P=2+2\cdot 4+4=14$$

គេបានសមីការ $x^2-8x+14=0$

ដូចនេះ សមីការដែលមានឫស $x_1+2; x_2+2$ គឺ $x^2-8x+14=0$ ។

ខ. $\frac{1}{x_1};\frac{1}{x_2}$

គេមាន

$$S=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{4}{2}=2$$

$$P=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{2}$$

គេបានសមីការ $x^2-2x+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow 2x^2-4x+1=0$

ដូចនេះ សមីការដែលមានឫស $\frac{1}{x_1};\frac{1}{x_2}$ គឺ $2x^2-4x+1=0$ ។

គ. $x_1^2;x_2^2$

គេមាន

$$S=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4^2-2\cdot 2=12$$

$$P=x_1^2\cdot x_2^2=(x_1x_2)^2=2^2=4$$

គេបានសមីការ $x^2-12x+4=0$

ដូចនេះ សមីការដែលមានឫស $x_1^2;x_2^2$ គឺ $x^2-12x+4=0$ ។

ឃ. $(x_1+2x_2);(2x_1+x_2)$

គេមាន

$$S=(x_1+2x_2)+(2x_1+x_2)=3(x_1+x_2)=3\times 4=12$$

$$P=(x_1+2x_2)(2x_1+x_2)=2x_1^2+x_1x_2+4x_1x_2+2x_2^2$$

$$P=2(x_1^2+x_2^2)+5x_1x_2=2(x_1+x_2)^2-4x_1x_2+5x_1x_2$$

$P = 2(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 = 2\cdot 4^2 + 2 = 34$

គេបានសមីការ $x^2 - 12x + 34 = 0$

ដូចនេះ សមីការដែលមានឫស $(x_1 + 2x_2);(2x_1 + x_2)$ គឺ

$x^2 - 12x + 34 = 0$ ។

លំហាត់ទី៦

បង្ហាញថាចំនួន $A = 2019\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$ ជាចំនួនគត់។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាចំនួន $A = 2019\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$ ជាចំនួនគត់

គេបាន

$$A = 2019\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$$

$$= 2019\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{20 - 12\sqrt{5} + 9}}}$$

$$= 2019\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2}}}$$

$$= 2019\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - (2\sqrt{5} - 3)}}$$

$$= 2019\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}$$

$$= 2019\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{5 - 2\sqrt{5} + 1}}$$

$$= 2019\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}$$

$$= 2019\sqrt{\sqrt{5}-(\sqrt{5}-1)^2}$$

$$= 2019\sqrt{1}$$

$$= 2019$$

ដូចនេះ $A = 2019\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$ ជាចំនួនគត់។

លំហាត់ទី១៧

ប្រៀបធៀបពីរចំនួនខាងក្រោម

ក. $(30000)^{20000}$ និង $(20000)^{30000}$ ។

ខ. 31^{11} និង 17^{14} ។

ដំណោះស្រាយ

ប្រៀបធៀបពីរចំនួនខាងក្រោម

ក. $(30000)^{20000}$ និង $(20000)^{30000}$

ដោយ $(30000)^{20000} = (3\times 10000)^{2\times 10000}$

នាំឲ្យ $(30000)^{20000} = [(3\times 10000)^2]^{10000} = (9\times 10^8)^{10000}$

ម្យ៉ាងទៀត $(20000)^{30000} = [(20000)^3]^{10000} = (8\times 10^{12})^{10000}$

គេត្រូវប្រៀបធៀបពីរចំនួនថ្មីគឺ 9×10^8 និង 8×10^{12}

ដោយ $8\times 10^{12} > 9\times 10^8$

នាំឲ្យ $(20000)^{30000} > (30000)^{20000}$

ដូចនេះ $(20000)^{30000} > (30000)^{20000}$ ។

ខ. 31^{11} និង 17^{14}

គេមាន $31 < 32$

នាំឲ្យ $31 < 2^5$

$\Rightarrow 31^{11} < 2^{55} \quad (1)$

ម្យ៉ាងទៀត $17 > 16$

នាំឲ្យ $17 > 2^4$

$\Rightarrow 17^{14} > 2^{56} \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេទាញបាន

$31^{11} < 2^{55} < 2^{56} < 17^{14}$

ដូចនេះ $31^{11} < 17^{14}$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេមាន $H = \dfrac{2.000007}{(1.000007)^2 + 2.000007}$ និង $E = \dfrac{2.000003}{(1.000003)^2 + 2.000003}$

ចូរបង្ហាញថា $E > H$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $E > H$

តាង $a = 1.000007$

និង $b = 1.000003$

គេបាន $H=\dfrac{a+1}{a^2+a+1}$ និង $E=\dfrac{b+1}{b^2+b+1}$

ឧបមាថា $E>H$

គេបាន $\dfrac{b+1}{b^2+b+1}>\dfrac{a+1}{a^2+a+1}$

$$\frac{b+1}{b^2+b+1}-\frac{a+1}{a^2+a+1}>0$$

$$\frac{(b+1)(a^2+a+1)-(a+1)(b^2+b+1)}{(a^2+a+1)(b^2+b+1)}>0$$

$$\frac{ba^2+ab+b+a^2+a+1-(ab^2+ab+a+b^2+b+1)}{(a^2+a+1)(b^2+b+1)}>0$$

$$\frac{ba^2+a^2-ab^2-b^2}{(a^2+a+1)(b^2+b+1)}>0$$

$$\frac{ab(a-b)+a^2-b^2}{(a^2+a+1)(b^2+b+1)}>0$$

$$\frac{ab(a-b)+(a-b)(a+b)}{(a^2+a+1)(b^2+b+1)}>0$$

$$\frac{(a-b)(ab+a+b)}{(a^2+a+1)(b^2+b+1)}>0$$

ដោយ $a=1.000007$ និង $b=1.000003$

នាំឲ្យ $a>b\Rightarrow a-b>0$

គេបាន $\dfrac{(a-b)(ab+a+b)}{(a^2+a+1)(b^2+b+1)}>0$ ពិត

នាំឲ្យ $E>H$ ពិត

ដូចនេះ $E>H$ ។

លំហាត់ទី០៩

បង្ហាញថា $\sqrt{2018}+\sqrt{2020}<2\sqrt{2019}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sqrt{2018}+\sqrt{2020}<2\sqrt{2019}$

គេមាន $2019^2-1<2019^2$

នាំឲ្យ $(2019-1)(2019+1)<2019^2$

$2018\times2020<2019^2$

គេបាន $\sqrt{2018\times2020}<2019$

$2\sqrt{2018\times2020}<2\times2019$

$2\times2019+2\sqrt{2018\times2020}<2\times2019+2\times2019$

$4038+2\sqrt{2018\times2020}<4\times2019$

$2018+2020+2\sqrt{2018\times2020}<4\times2019$

$(\sqrt{2018})^2+2\sqrt{2018\times2020}+(\sqrt{2020})^2<4\times2019$

$(\sqrt{2018}+\sqrt{2020})^2<4\times2019$

នាំឲ្យ $\sqrt{2018}+\sqrt{2020}<2\sqrt{2019}$

ដូចនេះ $\sqrt{2018}+\sqrt{2020}<2\sqrt{2019}$ ។

លំហាត់ទី២០

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន $A=2^{12}+3^{12}$ ចែកដាច់នឹង 97 ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន $A=2^{12}+3^{12}$ ចែកដាច់នឹង 97

គេមាន $A=2^{12}+3^{12}$

$$A=(2^4)^3+(3^4)^3$$

$$A=(2^4+3^4)(2^8-2^4\cdot 3^4+3^8)$$

$$A=(16+81)(2^8-2^4\cdot 3^4+3^8)$$

$$A=97(2^8-2^4\cdot 3^4+3^8)$$

ដូចនេះចំនួន $A=2^{12}+3^{12}$ ចែកដាច់នឹង 97 ។

លំហាត់ទី២១

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន $A=113^n-168^n-141^n+427^n$ ចែកដាច់នឹង 7 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

ដំណោះស្រាយ

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន A ចែកដាច់នឹង 7

គេមាន $A=113^n-168^n-141^n+427^n$

តាមរូបមន្ត $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+b^{n-1})$

គេបាន $A=113^n-168^n-141^n+427^n$

$A=427^n-168^n-(141^n-113^n)$

$A=(427-168)m_1-(141-113)m_2$

$A=259m_1-28m_2$

$A=7(37m_1-4m_2)$ ដែល m_1 និង m_2 ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ

ដូចនេះ ចំនួន A ចែកដាច់នឹង 7 ។

លំហាត់ទី២២

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន $A=831^n-743^n+709^n-610^n$ ចែកដាច់នឹង 187 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថាចំនួន A ចែកដាច់នឹង187

ដោយ $187=11\times17$ ដែល11 និង17 ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា

គេត្រូវស្រាយថាចំនួន A ចែកដាច់នឹង11ផង និង17 ផង

តាមរូបមន្ត $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+b^{n-1})=(a-b)N$

ដែល $N=a^{n-1}+a^{n-2}b+...+b^{n-1}$

គេបាន $A=831^n-743^n+709^n-610^n$

$A=(831^n-743^n)+(709^n-610^n)$

$A=(831-743)N_1+(709-610)N_2$

$A = 88N_1 + 99N_2$

$A = 11(8N_1 + 9N_2)$ ដែល N_1 និង N_2 ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ

នាំឲ្យ A ចែកដាច់នឹង 11

ម៉្យាងទៀត $A = 831^n - 743^n + 709^n - 610^n$

$A = (831^n - 610^n) - (743^n - 709^n)$

$A = (831 - 610)N_3 - (743 - 709)N_4$

$A = 221N_3 - 34N_4$

$A = 17(13N_3 - 2N_4)$ ដែល N_3 និង N_4 ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ

នាំឲ្យ A ចែកដាច់នឹង 17

ដោយចំនួន A ចែកដាច់នឹង 11 ផង និង 17 ផង

ដូចនេះ ចំនួន A ចែកដាច់នឹង 187 ។

លំហាត់ទី២៣

គេមាន $A = (1 - 3\sqrt{3})\sqrt{26 + 2\sqrt{26 + 2\sqrt{28 + 6\sqrt{3}}}} - 1$ និង

$B = \sqrt{3}(2\sqrt{27} - \sqrt{48} + \sqrt{3})$ ។ បង្ហាញថា A ចែកដាច់នឹង B ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា A ចែកដាច់នឹង B

$A = (1 - 3\sqrt{3})\sqrt{26 + 2\sqrt{26 + 2\sqrt{28 + 6\sqrt{3}}}} - 1$

$$=(1-3\sqrt{3})\sqrt{26+2\sqrt{26+2\sqrt{(1+3\sqrt{3})^2}}}-1$$

$$=(1-3\sqrt{3})\sqrt{26+2\sqrt{26+2+6\sqrt{3}}}-1$$

$$=(1-3\sqrt{3})\sqrt{26+2\sqrt{28+6\sqrt{3}}}-1$$

$$=(1-3\sqrt{3})\sqrt{26+2\sqrt{(1+3\sqrt{3})^2}}-1$$

$$=(1-3\sqrt{3})\sqrt{26+2+6\sqrt{3}}-1$$

$$=(1-3\sqrt{3})\sqrt{28+6\sqrt{3}}-1$$

$$=(1-3\sqrt{3})\sqrt{(1+3\sqrt{3})^2}-1$$

$$=(1-3\sqrt{3})(1+3\sqrt{3})-1=1-27-1=-27$$

$$B=\sqrt{3}(2\sqrt{27}-\sqrt{48}+\sqrt{3})=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}(2\sqrt{9}-\sqrt{16}+1)=3(6-4+1)=9$$

ដោយ $A=-27=(-3)9=-3B$

ដូចនេះ A ចែកដាច់នឹង B ។

លំហាត់ទី២៤

ដោះស្រាយសមីការ $2^{\cos^2 x}+2^{\sin^2 x}=3$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ $2^{\cos^2 x}+2^{\sin^2 x}=3$

ដោយ $\cos^2 x+\sin^2 x=1\Rightarrow \sin^2 x=1-\cos^2 x$

នាំឲ្យ $2^{\cos^2 x}+2^{1-\cos^2 x}=3$

$$2^{\cos^2 x}+\frac{2}{2^{\cos^2 x}}=3$$

តាង $u=2^{\cos^2 x}>0$

នាំឲ្យ $u+\dfrac{2}{u}=3$

$$u^2+2=3u$$
$$u^2-3u+2=0$$
$$(u-2)(u-1)=0$$

គេបាន $u=2, u=1$

- ករណី $u=2$

គេទាញបាន $2^{\cos^2 x}=2$

$$\cos^2 x=1$$
$$\cos x=\pm 1$$

នាំឲ្យ $x=k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

- ករណី $u=1$

គេទាញបាន $2^{\cos^2 x}=1=2^0$

$$\cos^2 x=0$$
$$\cos x=0$$

នាំឲ្យ $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

ដូចនេះ សរុបមក ឬសនៃសមីការគឺ $x=\dfrac{k\pi}{2} \quad (k\in\mathbb{Z})$ ។

លំហាត់ទី២៥

គេឲ្យសមីការ $x^2 - mx + 4m = 0$ ។

ចូរកំណត់ $m \in \mathbb{N}$ ដើម្បីឲ្យសមីការមានឫសពីរ $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ $m \in \mathbb{N}$ ដើម្បីឲ្យសមីការមានឫសពីរ $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$

របៀបទី១

គេមាន $x^2 - mx + 4m = 0$

គេបាន $\Delta = (-m)^2 - 4(1)(4m) = m^2 - 16m$

នាំឲ្យ $x_1 = \dfrac{m + \sqrt{m^2 - 16m}}{2}$ ដាឫសគត់វិជ្ជមានលុះត្រាតែ

$$m + \sqrt{m^2 - 16m} = 2k \quad , k > 0$$

$$\sqrt{m^2 - 16m} = 2k - m$$

$$\left(\sqrt{m^2 - 16m}\right)^2 = (2k - m)^2$$

$$m^2 - 16m = 4k^2 - 4mk + m^2$$

$$-16m = 4k^2 - 4mk$$

$$m(4k - 16) = 4k^2$$

$$m = \frac{4k^2}{4k - 16}$$

$$m = \frac{k^2}{k-4} = \frac{k^2 - 16 + 16}{k-4} = \frac{(k-4)(k+4) + 16}{k-4} = k + 4 + \frac{16}{k-4}$$

គេបាន $m \in \mathbb{N}$ លុះត្រាតែ $k-4$ ជាតួចែកនៃ 16

$k-4=1 \Leftrightarrow k=5$ នាំឲ្យ $m=25$ នាំឲ្យ $x_1=5, x_2=20$

$k-4=2 \Leftrightarrow k=6$ នាំឲ្យ $m=18$ នាំឲ្យ $x_1=6, x_2=12$

$k-4=4 \Leftrightarrow k=8$ នាំឲ្យ $m=16$ នាំឲ្យ $x_1=8, x_2=8$

$k-4=8 \Leftrightarrow k=12$ នាំឲ្យ $m=18$ នាំឲ្យ $x_1=6, x_2=12$

$k-4=16 \Leftrightarrow k=20$ នាំឲ្យ $m=25$ នាំឲ្យ $x_1=5, x_2=20$

ដូចនេះ $m \in \{16, 18, 25\}$ ។

របៀបទី២

ឧបមាថាសមីការមានឫសពីរក្នុង $\mathbb{N}$ ដែល $x_1 \le x_2$

គេបាន ផលបូកឫស $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m$

ផលគុណឫស $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 4m$

ដោយ $x_1 \le x_2$

$x_1 + x_2 \le 2x_2$

$m \le 2x_2$

$$\frac{m}{2} \le x_2 \le x_1 + x_2$$

$$\frac{m}{2} \le x_2 \le m$$

$$\frac{m}{2} x_1 \le x_1 x_2 \le m x_1$$

$\frac{m}{2}x_1 \le 4m \le mx_1$

$\frac{x_1}{2} \le 4 \le x_1$

គេបាន $4 \le x_1 \le 8$

បើ $x_1 = 4$ នាំឲ្យ $16 - 4m + 4m = 0 \Leftrightarrow 16 = 0$ មិនពិត

បើ $x_1 = 5$ នាំឲ្យ $25 - 5m + 4m = 0 \Leftrightarrow m = 25$

បើ $x_1 = 6$ នាំឲ្យ $36 - 6m + 4m = 0 \Leftrightarrow m = 18$

បើ $x_1 = 7$ នាំឲ្យ $49 - 7m + 4m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{49}{3}$ មិនយក

បើ $x_1 = 8$ នាំឲ្យ $64 - 8m + 4m = 0 \Leftrightarrow m = 16$

ដូចនេះ $m \in \{16, 18, 25\}$ ។

របៀបទី៣

ឧបមាថាសមីការមានឫសពីរក្នុង $\mathbb{N}$ ដែល $x_1 \le x_2$

គេបាន ផលបូកឫស $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = m$

ផលគុណឫស $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 4m$

ទាញរកទំនាក់ទំនងរវាង x_1 និង x_2 ដែលគ្មាន m

គេមាន $x_1\cdot x_2=4m$

$x_1\cdot x_2=4(x_1+x_2)$

$x_1\cdot x_2=4x_1+4x_2$

$x_1\cdot x_2-4x_2=4x_1$

$x_2(x_1-4)=4x_1$

នាំឲ្យ $x_2=\dfrac{4x_1}{x_1-4}=\dfrac{4x_1-16+16}{x_1-4}=\dfrac{4(x_1-4)+16}{x_1-4}=4+\dfrac{16}{x_1-4}$

គេបាន $x_2\in\mathbb{N}$ លុះត្រាតែ x_1-4 ជាតួចែកនៃ16

$x_1-4=1\Leftrightarrow x_1=5$ នាំឲ្យ $25-5m+4m=0\Leftrightarrow m=25$

$x_1-4=2\Leftrightarrow x_1=6$ នាំឲ្យ $36-6m+4m=0\Leftrightarrow m=18$

$x_1-4=4\Leftrightarrow x_1=8$ នាំឲ្យ $64-8m+4m=0\Leftrightarrow m=16$

$x_1-4=8\Leftrightarrow x_1=12$ នាំឲ្យ $144-12m+4m=0\Leftrightarrow m=18$

$x_1-4=16\Leftrightarrow x_1=20$ នាំឲ្យ $400-20m+4m=0\Leftrightarrow m=25$

ដូចនេះ $m\in\{16,18,25\}$ ។

របៀបទីពីរ

គេមាន $x^2-mx+4m=0$

$x^2=mx-4m$

$x^2=m(x-4)$

$m=\dfrac{x^2}{x-4}$

នាំឲ្យ $m=\dfrac{x^2-16+16}{x-4}=\dfrac{(x-4)(x+4)+16}{x-4}=x+4+\dfrac{16}{x-4}$

គេបាន $m\in\mathbb{N}$ លុះត្រាតែ $x-4$ ជាតួចែកនៃ16

$x-4=1\Leftrightarrow x=5$ នាំឲ្យ $25-5m+4m=0\Leftrightarrow m=25$

$x-4=2\Leftrightarrow x=6$ នាំឲ្យ $36-6m+4m=0\Leftrightarrow m=18$

$x-4=4\Leftrightarrow x=8$ នាំឲ្យ $64-8m+4m=0\Leftrightarrow m=16$

$x-4=8\Leftrightarrow x=12$ នាំឲ្យ $144-12m+4m=0\Leftrightarrow m=18$

$x-4=16\Leftrightarrow x=20$ នាំឲ្យ $400-20m+4m=0\Leftrightarrow m=25$

ដូចនេះ $m\in\{16,18,25\}$ ។

របៀបទី៥

គេអាចបកស្រាយលំហាត់ខាងលើតាមក្រាភិចបាន

គេមាន $x^2-mx+4m=0$

$$x^2=mx-4m$$

$$x^2=m(x-4)$$

នាំឲ្យ $m=\dfrac{x^2}{x-4}$

គេសង់ក្រាប $(C): f(x)=\dfrac{x^2}{x-4}$ និងបន្ទាត់ $(D): y=m$

គេមាន $f(x)=\dfrac{x^2}{x-4}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2x(x-4)-x^2}{(x-4)^2}=\frac{2x^2-8x-x^2}{(x-4)^2}=\frac{x^2-8x}{(x-4)^2}=\frac{x(x-8)}{(x-4)^2}$$

បើ $f'(x)=0\Leftrightarrow x(x-8)=0\Leftrightarrow x=0, x=8$

$f'(x)$ យកសញ្ញាតាម $x(x-8)$

x		0		8	
$x(x-8)$	$+$	0	$-$	0	$+$

តម្លៃបរមា $x=0 \Rightarrow f(0)=0$

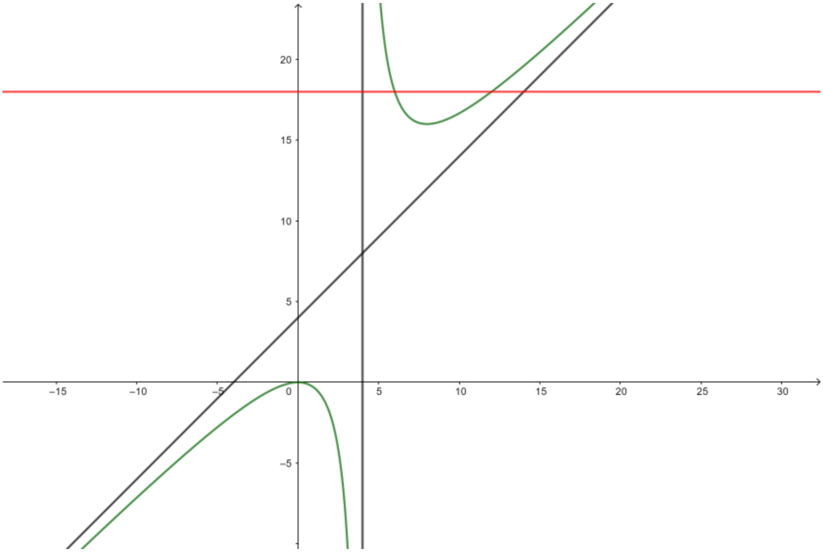
$x=8 \Rightarrow f(8)=16$

អាស៊ីមតូត $x=4$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ

$y=x+4$ ជាអាស៊ីមតូតទ្រេត

តារាងអថេរភាព

x		0		4		8	
$f'(x)$	$+$		$-$	‖	$-$		$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	0	$\searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	16	$\nearrow +\infty$



តាមក្រាភិច បន្ទាត់ (D) កាត់ (C) ដែល $x_1, x_2 > 0$ ក្នុងនោះគេបាន

$4 < x_1 \le 8$

បើ $x_1 = 5$ នាំឲ្យ $m = 25$

បើ $x_1 = 6$ នាំឲ្យ $m = 18$

បើ $x_1 = 7$ នាំឲ្យ $m \notin \mathbb{N}$

បើ $x_1 = 8$ នាំឲ្យ $m = 16$

ដូចនេះ $m \in \{16, 18, 25\}$ ។

លំហាត់ទី២៦

ដោយមិនប្រើម៉ាស៊ីនគិតលេខ ចូរគណនាផលបូក

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{9999}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាផលបូក $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{9999}$

គេមាន $S = \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{5\times 7} + \dots + \frac{1}{99\times 101}$

ដោយ $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$ នាំឲ្យ

$$S = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right)$$

$$S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)$$

$$S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{101}\right)$$

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{101-1}{101}\right)$$

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{100}{101}\right)$$

$$S=\frac{50}{101}$$

ដូចនេះ $S=\dfrac{50}{101}$ ។

លំហាត់ទី២៧

ចូរដោះស្រាយសមីការ $(\sqrt{x})^{x}=x^{\sqrt{x}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

សមីការអាចសរសេរជា $x^{\frac{1}{2}x}=x^{\sqrt{x}}$ ឬ $x^{\frac{x}{2}}=x^{\sqrt{x}}$

សម្គាល់ $[f(x)]^{u(x)}=[f(x)]^{v(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\ [f(x)-1][u(x)-v(x)]=0\end{cases}$

គេទាញបាន $\begin{cases}x>0\\ (x-1)(\dfrac{x}{2}-\sqrt{x})=0\end{cases}$

- $x-1=0\Leftrightarrow x=1$

- $\frac{x}{2}-\sqrt{x}=0$

$$\frac{x}{2}=\sqrt{x}$$

$$\frac{x^2}{4}=x$$

$$\frac{x}{4}(x-4)=0$$

គេបាន $x=0$ (មិនយកព្រោះ $x>0$)

$$x-4=0 \Leftrightarrow x=4$$

ដូចនេះ ឬសនៃសមីការខាងលើគឺ $x=1, x=4$ ។

លំហាត់ទី២៨

ចូរដោះស្រាយសមីការ $\frac{x-1}{2018}+\frac{x-2}{2017}+\frac{x-3}{2016}+\frac{x-4}{2015}=4$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ $\frac{x-1}{2018}+\frac{x-2}{2017}+\frac{x-3}{2016}+\frac{x-4}{2015}=4$

គេបាន

$$\frac{x-1}{2018}+\frac{x-2}{2017}+\frac{x-3}{2016}+\frac{x-4}{2015}=1+1+1+1$$

$$\left(\frac{x-1}{2018}-1\right)+\left(\frac{x-2}{2017}-1\right)+\left(\frac{x-3}{2016}-1\right)+\left(\frac{x-4}{2015}-1\right)=0$$

$$\frac{x-2019}{2018}+\frac{x-2019}{2017}+\frac{x-2019}{2016}+\frac{x-2019}{2015}=0$$

$$(x-2019)\left(\frac{1}{2018}+\frac{1}{2017}+\frac{1}{2016}+\frac{1}{2015}\right)=0$$

ដោយ $\frac{1}{2018}+\frac{1}{2017}+\frac{1}{2016}+\frac{1}{2015}\neq 0$

នាំឲ្យ $x-2019=0$

សមមូល $x=2019$

ដូចនេះ ឫសនៃសមីការគឺ $x=2019$ ។

លំហាត់ទី២៩

សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម

$$A=\sqrt{2019\sqrt{2019}}\cdot\sqrt{2019-\sqrt{2019^2-\sqrt{2019}}}\cdot$$
$$\sqrt{2019+\sqrt{2019^2-\sqrt{2019}}}$$

ដំណោះស្រាយ

សម្រួលកន្សោម

$$A=\sqrt{2019\sqrt{2019}}\cdot\sqrt{2019-\sqrt{2019^2-\sqrt{2019}}}\cdot\sqrt{2019+\sqrt{2019^2-\sqrt{2019}}}$$
$$=\sqrt{2019\sqrt{2019}}\cdot\sqrt{\left(2019-\sqrt{2019^2-\sqrt{2019}}\right)\left(2019+\sqrt{2019^2-\sqrt{2019}}\right)}$$
$$=\sqrt{2019\sqrt{2019}}\cdot\sqrt{2019^2-(2019^2-\sqrt{2019})}$$
$$=\sqrt{2019\sqrt{2019}}\cdot\sqrt{2019^2-2019^2+\sqrt{2019})}$$
$$=\sqrt{2019\sqrt{2019}}\cdot\sqrt{\sqrt{2019}}$$
$$=\sqrt{2019\sqrt{2019}\cdot\sqrt{2019}}$$

$= \sqrt{2019 \cdot 2019}$

$= \sqrt{2019^2}$

$= 2019$

ដូចនេះ $A = 2019$ ។

លំហាត់ទី៣០

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A = 673\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}}$ ជាចំនួនគត់។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា A ជាចំនួនគត់

$$A = 673\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}}$$

$$= 673\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{4+4\sqrt{3}+3}}}}$$

$$= 673\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{2^2+4\sqrt{3}+\sqrt{3}^2}}}}$$

$$= 673\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}}}}$$

$$= 673\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10(2+\sqrt{3})}}}$$

$$= 673\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-20-10\sqrt{3}}}}$$

$$= 673\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{28-10\sqrt{3}}}}$$

$$=673\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{25-10\sqrt{3}+3}}}$$

$$=673\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{5^2-10\sqrt{3}+\sqrt{3}^2}}}$$

$$=673\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{(5-\sqrt{3})^2}}}$$

$$=673\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5(5-\sqrt{3})}}$$

$$=673\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+25-5\sqrt{3}}}$$

$$=673\sqrt{4+\sqrt{25}}$$

$$=673\sqrt{4+5}$$

$$=673\sqrt{9}$$

$$=673\times 3$$

$=2019$ ជាចំនួនគត់

ដូចនេះ A ជាចំនួនគត់ ។

លំហាត់ទី៣១

គេមាន S_m និង S_n ជាផលបូកតួ m ដំបូង និង n តួដំបូងរៀងគ្នានៃស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ ដែល $\dfrac{S_m}{S_n}=\dfrac{m^2}{n^2},(m\neq n)$ ។ តាងតួទី m គឺ u_m និងតួទី n គឺ u_n ។

បង្ហាញថា $\dfrac{u_m}{u_n}=\dfrac{2m-1}{2n-1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{u_m}{u_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$

គេមាន $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2},(m\neq n)$

តាមរូបមន្តផលបូកស្វ៊ីតនព្វន្ត

$$S_m=\frac{m}{2}(u_1+u_m)$$

$$S_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)$$

នោះគេបាន $\frac{\frac{m}{2}(u_1+u_m)}{\frac{n}{2}(u_1+u_n)}=\frac{m^2}{n^2}$

សមមូល $\frac{u_1+u_m}{u_1+u_n}=\frac{m}{n}$

តាង d ជាផលសងរួមនៃស្វ៊ីតនព្វន្តខាងលើ នោះ

តាមរូបមន្ត $u_m=u_1+(m-1)d$

$$u_n=u_1+(n-1)d$$

គេទាញបាន

$$\frac{u_1+u_1+(m-1)d}{u_1+u_1+(n-1)d}=\frac{m}{n}$$

$$\frac{2u_1+dm-d}{2u_1+dn-d}=\frac{m}{n}$$

$$n(2u_1+dm-d)=m(2u_1+dn-d)$$

$$2nu_1+dmn-nd-2mu_1+dmn-dm$$

$2nu_1 - dn = 2mu_1 - dm$

$2nu_1 - 2mu_1 = dn - dm$

$2u_1(n-m) = d(n-m)$

$2u_1 = d$

$u_1 = \frac{d}{2}$

គេបាន

$u_m = u_1 + (m-1)d = \frac{d}{2} + (m-1)d = \frac{d}{2}(1+2m-2) = \frac{d}{2}(2m-1)$

$u_n = u_1 + (n-1)d = \frac{d}{2} + (n-1)d = \frac{d}{2}(1+2n-2) = \frac{d}{2}(2n-1)$

នាំឲ្យ $\frac{u_m}{u_n} = \frac{\frac{d}{2}(2m-1)}{\frac{d}{2}(2n-1)} = \frac{2m-1}{2n-1}$ ។

ដូចនេះ $\frac{u_m}{u_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$ ។

លំហាត់ទី៣២

គេឲ្យ A, B, C ជារង្វាស់មុំក្នុងត្រីកោណមួយ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $\cot A, \cot B, \cot C$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះគេបាន

$\sin^2 A, \sin^2 B, \sin^2 C$ ក៏ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែរ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $\cot A, \cot B, \cot C$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះគេបាន

$\sin^2 A, \sin^2 B, \sin^2 C$ ក៏ជាស្វ៊ីតនព្វន្តដែរ ។

ដោយ A, B, C ជារង្វាស់មុំក្នុងត្រីកោណ

នោះគេបាន $A+B+C=\pi \Rightarrow A+B=\pi-C$ ឬ $B+C=\pi-A$

នាំឲ្យ $\begin{cases} \sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C \\ \sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A \end{cases}$

បើ $\cot A, \cot B, \cot C$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះគេបាន

$2\cot B=\cot A+\cot C$

$\cot B-\cot A=\cot C-\cot B$

$$\frac{\cos B}{\sin B}-\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\cos C}{\sin C}-\frac{\cos B}{\sin B}$$

$$\frac{\sin A\cos B-\sin B\cos A}{\sin A\sin B}=\frac{\sin B\cos C-\sin C\cos B}{\sin B\sin C}$$

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin A}=\frac{\sin(B-C)}{\sin C}$$

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin(B+C)}=\frac{\sin(B-C)}{\sin(A+B)}$$

$$\sin(A-B)\sin(A+B)=\sin(B-C)\sin(B+C)$$

តាមរូបមន្ត $\sin p\sin q=\frac{1}{2}[\cos(p-q)-\cos(p+q)]$

គេបាន

$$\frac{1}{2}[\cos(-2B)-\cos(2A)]=\frac{1}{2}[\cos(-2C)-\cos(2B)]$$

$$\cos(2B)-\cos(2A)=\cos(2C)-\cos(2C)$$

$1-2\sin^2 B-(1-2\sin^2 A)=1-2\sin^2 C-(1-2\sin^2 B)$

$2\sin^2 A-2\sin^2 B=2\sin^2 B-2\sin^2 C$

$2\sin^2 A+2\sin^2 C=4\sin^2 B$

$2(\sin^2 A+\sin^2 C)=4\sin^2 B$

$\sin^2 A+\sin^2 C=2\sin^2 B$

ដូចនេះ បើ $\cot A,\cot B,\cot C$ សាស្វ៊ីតនព្វន្ត នោះគេបាន

$\sin^2 A,\sin^2 B,\sin^2 C$ ក៏សាស្វ៊ីតនព្វន្តដែរ ។

លំហាត់ទី៣៣

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2+b^2+1\geq ab+a+b$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ a និង b ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^2+b^2+1\geq ab+a+b$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ a និង b

គេមាន $\begin{cases}(a-b)^2\geq 0\\(a-1)^2\geq 0\\(b-1)^2\geq 0\end{cases}$

បូកអង្គនឹងអង្គ គេបាន $(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\geq 0$

$a^2-2ab+b^2+a^2-2a+1+b^2-2b+1=0$

$2a^2-2ab+2b^2-2a-2b+2\geq 0$

$2(a^2-ab+b^2-a-b+1)\geq 0$

$a^2-ab+b^2-a-b+1\geq 0$

$a^2+b^2+1\ge ab+a+b$

ដូចនេះ $a^2+b^2+1\ge ab+a+b$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ a និង b ។

លំហាត់ទី៣៤

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}}+\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}=2\sqrt{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}}+\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}=2\sqrt{3}$ ។

គេបាន

$$\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}}+\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}=\sqrt[4]{25+20\sqrt{6}+24}+\sqrt[4]{25-20\sqrt{6}+24}$$

$$=\sqrt[4]{5^2+2\cdot5\cdot2\sqrt{6}+(2\sqrt{6})^2}+\sqrt[4]{5^2-2\cdot5\cdot2\sqrt{6}+(2\sqrt{6})^2}$$

$$=\sqrt[4]{(5+2\sqrt{6})^2}+\sqrt[4]{(5-2\sqrt{6})^2}$$

$$=\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}$$

$$=\sqrt{3+2\sqrt{6}+2}+\sqrt{3-2\sqrt{6}+2}$$

$$=\sqrt{\sqrt{3}^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}^2}+\sqrt{\sqrt{3}^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}^2}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$=2\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}}+\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}=2\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៣៥

គេដាក់ស៊ីតលេខសេសជាក្រុមដើម្បីឲ្យក្រុមទី n មាន n តួ គឺ

$\{1\},\{3,5\},\{7,9,11\},\{13,15,17,19\},...$ ។

ក. ចូររកតួចុងក្រោយនៃក្រុមទី n ។

ខ. តើក្រុមទីប៉ុន្មានដែលមានលេខ 999 ? តើលេខ 999 ឡើងនៅតួទីប៉ុន្មាននៅក្នុងក្រុមនោះ?

គ. ចូរគណនាផលបូកតួនៃក្រុមទី n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកតួចុងក្រោយនៃក្រុមទី n

គេសង្កេតឃើញថា ក្រុមទី 1 មាន 1 តួ ក្រុមទី 2 មាន 2 តួ ក្រុមទី 3 មាន 3 តួ នោះក្រុមទី n មាន n តួ។

គេទាញបានចំនួនតួទាំងអស់ចាប់ពីក្រុមទី 1 ដល់ក្រុមទី n ស្មើនឹង

$$1+2+3+4+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

នាំឲ្យតួចុងក្រោយនៃក្រុមទី n គឺតួទី $\frac{n(n+1)}{2}$ នៃស៊ីត

គេបាន តួចុងក្រោយនៃក្រុមទី n គឺ

$$2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]-1=n(n+1)-1=n^2+n-1$$

ដូចនេះ តួចុងក្រោយនៃក្រុមទី n គឺ n^2+n-1 ។

ខ. តើក្រុមទីប៉ុន្មានដែលមានលេខ 999 ?

សន្មតថា 999 ស្ថិតនៅក្នុងក្រុមទី p

គេបាន 999 ត្រូវតូចជាងឬស្មើតួចុងក្រោយនៃក្រុមទី p

គេបាន $999 \le p^2+p-1$

ឬ $p^2+p-1000 \ge 0$

$$\Delta = 1^2-4(1)(-1000)=1+4000=4001$$

$$p_1=\frac{-1-\sqrt{4001}}{2}<0$$ មិនយក

$$p_2=\frac{-1+\sqrt{4001}}{2}\approx 31.12>31$$

មានន័យថាចំនួន 999 ស្ថិតនៅក្នុងក្រុមទី 32

ដូចនេះ ចំនួន 999 ស្ថិតនៅក្នុងក្រុមទី 32 ។

តើលេខ 999 ឡើងនៅតួទីប៉ុន្មាននៅក្នុងក្រុមនោះ?

ដោយ តួចុងក្រោយនៃក្រុមទី 32 គឺ $32^2+32-1=1055$

តាង u_1 ជាតួទី 1 នៃក្រុមទី 32

គេបាន $1055=u_1+31d$

ដោយ $d=2$

នាំឲ្យ $u_1=1055-31d=1055-31(2)=993$

នោះ $999=993+(n-11)d$

នាំឲ្យ $n=\frac{999-993}{2}+1=4$

ដូចនេះ 999 ស្ថិតនៅតួទី 4 នៃក្រុមទី 32 ។

គ. គណនាផលបូកតួនៃក្រុមទី n

គេដឹងថា

ក្រុម n មាន n តួ

តួទី n នៃក្រុមទី n គឺ n^2+n-1

ផលសងរួមនៃស្វ៊ីតគឺ $d=2$

តាង a_1 ជាតួទី1 នៃក្រុមទី n

គេបាន $a_n=a_1+(n-1)d$

$$n^2+n-1=a_1+2(n-1)$$

$$n^2+n-1=a_1+2n-2$$

$$a_1=n^2+n-1+2n+2$$

$$a_1=n^2-n+1$$

គេបានផលបូកតួនៃក្រុមទី n កំណត់ដោយ

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

$$S_n=\frac{n}{2}(n^2-n+1+n^2+n-1)$$

$$S_n=\frac{n}{2}(2n^2)$$

$$S_n=n^3$$

នូចនេះ ផលបូកតួនៃក្រុមទី n កំណត់ដោយ n^3 ។

លំហាត់ទី៣៦

គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc=1$ ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{1}{1+a+ab}+\dfrac{1}{1+b+bc}+\dfrac{1}{1+c+ca}=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{1}{1+a+ab}+\dfrac{1}{1+b+bc}+\dfrac{1}{1+c+ca}=1$ ។

គេមាន a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $abc=1$

គេបាន $\dfrac{1}{1+a+ab}+\dfrac{1}{1+b+bc}+\dfrac{1}{1+c+ca}$

$$=\frac{c}{c+ac+abc}+\frac{a}{a+ab+abc}+\frac{1}{1+c+ca}$$

$$=\frac{c}{c+ac+1}+\frac{a}{a+ab+1}+\frac{1}{1+c+ca}$$

$$=\frac{c}{c+ac+1}+\frac{1}{1+c+ca}+\frac{a}{a+ab+1}$$

$$=\frac{1+c}{1+c+ca}+\frac{a}{a+ab+1}$$

$$=\frac{1+c}{1+c+ca}+\frac{ac}{ac+abc+c}$$

$$=\frac{1+c}{1+c+ac}+\frac{ac}{1+c+ac}$$

$$=\frac{1+c+ac}{1+c+ac}=1$$

ដូចនេះ $\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=1$ ។

លំហាត់ទី៣៧

ដោះស្រាយសមីការ $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^x=10$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^x=10$

ដោយ $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x(\sqrt{3}-\sqrt{2})^x=(3-2)^x=1$

នាំឲ្យ $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^x=\frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x}$

តាង $t=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x>0 \ \Rightarrow (\sqrt{3}-\sqrt{2})^x=\frac{1}{t}$

គេបាន $t+\frac{1}{t}=10 \Leftrightarrow t^2-10t+1=0$

$\Delta'=(-5)^2-1=24$

នាំឲ្យ $\left[\begin{array}{l} t_1=5-\sqrt{24}=5-2\sqrt{6}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 \\ t_2=5+\sqrt{24}=5+2\sqrt{6}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 \end{array}\right.$

- ចំពោះ $t=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

គេបាន $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=\frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}$

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-2} \Leftrightarrow x=-2$$

- ចំពោះ $t=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$

គេបាន $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow x=2$

ដូចនេះ $x=-2, x=2$ ។

លំហាត់ទី៣៨

ដោះស្រាយសមីការ $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=14$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=14$

ដោយ $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=(4-3)^x=1$

តាង $t=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x>0 \Rightarrow \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=\frac{1}{t}$

គេបាន $t+\frac{1}{t}=14 \Leftrightarrow t^2-14t+1=0$

$\Delta'=(-7)^2-1=48=(4\sqrt{3})^2$

នាំឲ្យ $\left[\begin{array}{l} t_1=7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2 \\ t_2=7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2 \end{array}\right.$

- ចំពោះ $t=(2-\sqrt{3})^2$

គេបាន $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=(2-\sqrt{3})^2=(2+\sqrt{3})^{-2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x=-2 \Leftrightarrow x=-4$

- ចំពោះ $t=(2+\sqrt{3})^2$

គេបាន $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=(2+\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x=2 \Leftrightarrow x=4$

ដូចនេះ $x=-4, x=4$ ។

លំហាត់ទីពាន

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}$ ។

ចូរសរសេរ $w=\frac{z^2}{1+z^3}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ។

ដំណោះស្រាយ

សរសេរ $w=\frac{z^2}{1+z^3}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

គេមាន $z=\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}$

តាមរូបមន្តឌឺម័រ គេបាន

$$z^2=\left(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}\right)^2=\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}$$

$$z^3=\left(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}\right)^3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

គេទាញបាន

$$w=\frac{\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}}{1+\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}}$$

$$=\frac{\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}}{2\cos^2\frac{2\pi}{3}+2i\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}}$$

$$=\frac{1}{2\cos\frac{2\pi}{3}}\cdot\frac{\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}}{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}$$

$$=\frac{1}{2\cdot(-\frac{1}{2})}\left[\cos\left(\frac{8\pi}{9}-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{8\pi}{9}-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$=-(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9})=\cos\frac{11\pi}{9}+i\sin\frac{11\pi}{9}$$

ដូចនេះ $w=\cos\frac{11\pi}{9}+i\sin\frac{11\pi}{9}$ ។

លំហាត់ទី៤០

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ z និង w ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

១. $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$ ។

២. $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$ ដែល $w\neq 0$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា

១. $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$

តាង $z=x+iy$ និង $w=u+iv$ ដែល $x,y,u,v\in\mathbb{R}$

គេបាន $z\cdot w=(x+iy)(u+iv)$

$$=(xu-yv)+i(xv+yu)$$

$$|z\cdot w|=\sqrt{(xu-yv)^2+(xv+yu)^2}$$

$$=\sqrt{x^2u^2-2xyuv+y^2v^2+x^2v^2+2xyuv+y^2u^2}$$

$$=\sqrt{x^2u^2+y^2v^2+x^2v^2+y^2u^2}$$

$$=\sqrt{x^2(u^2+v^2)+y^2(u^2+v^2)}$$

$$=\sqrt{(x^2+y^2)(u^2+v^2)}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{u^2+v^2}$$

$$=|z|\cdot|w|$$

ដូចនេះ $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$ ។

២. $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$ ដែល $w\neq 0$

គេបាន $\dfrac{z}{w}=\dfrac{x+iy}{u+iv}=\dfrac{(x+iy)(u-iv)}{(u+iv)(u-iv)}$

$$=\frac{(xu+yv)+i(yu-xv)}{u^2+v^2}$$

$$=\frac{xu+yv}{u^2+v^2}+i\left(\frac{yu-xv}{u^2+v^2}\right)$$

គេទាញបាន

$$\left|\frac{z}{w}\right|=\sqrt{\left(\frac{xu+yv}{u^2+v^2}\right)^2+\left(\frac{yu-xv}{u^2+v^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{x^2u^2+2xyuv+y^2v^2+y^2u^2-2xyuv+x^2v^2}{(u^2+v^2)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{x^2u^2+y^2v^2+y^2u^2+x^2v^2}{u^2+v^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{x^2(u^2+v^2)+y^2(u^2+v^2)}{(u^2+v^2)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(x^2+y^2)(u^2+v^2)}{(u^2+v^2)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{u^2+v^2}}$$

$$=\frac{|z|}{|w|}$$

ដូចនេះ $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$ ដែល $w\neq 0$ ។

លំហាត់ទី៤១

ចូរដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x-\frac{1}{2}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម៖

$\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x-\frac{1}{2}$

$(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=\sin 2x-\frac{1}{2}$

$1^2-\frac{1}{2}4\sin^2 x\cos^2 x=\sin 2x-\frac{1}{2}$

$1-\frac{1}{2}\sin^2 2x-\sin 2x+\frac{1}{2}=0$

$\sin^2 2x+2\sin 2x-3=0$

តាង $t=\sin 2x$ ដែល $-1\le t\le 1$

គេបានសមីការទៅជា

$t^2+2t-3=0$

ដោយ $a=b+c=1+2-3=0$

គេបាន សមីការមានឫស

$t_1=1$

$t_2=\frac{c}{a}=\frac{-3}{1}=-3<-1$ (មិនយក)

ចំពោះ $t=1$

គេបាន $\sin 2x=1$

$$2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

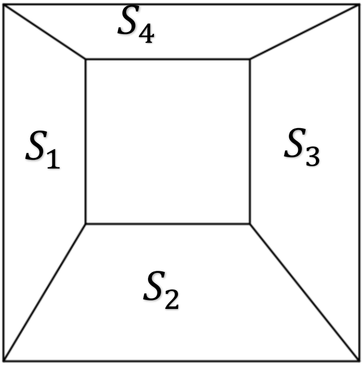
$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

ដូចនេះ $x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ ។

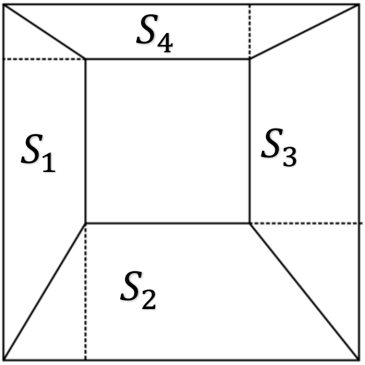
លំហាត់ទី៤២

គេមានការេពីរ។ គេដាក់ការេតូចក្នុងការេធំដោយឲ្យជ្រុងរបស់វាស្របគ្នា (ដូចរូប) ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថាផលបូកក្រឡាផ្ទៃ $S_1+S_3=S_2+S_4$ ។



ដំណោះស្រាយ



ស្រាយបញ្ជាក់ថាផលបូកក្រឡាផ្ទៃ $S_1+S_3=S_2+S_4$

តាង a ជាប្រវែងបាតតូច

b ជាប្រវែងបាតធំ

h_1,h_2,h_3,h_4 ជាកម្ពស់រៀងគ្នានៃចតុកោណព្នាយដែលមានក្រឡាផ្ទៃ S_1,S_2,S_3,S_4

លក្ខខណ្ឌ $a,b,h_1,h_2,h_3,h_4>0$

គេបាន $S_1+S_3=\frac{1}{2}(a+b)h_1+\frac{1}{2}(a+b)h_3$

$=\frac{1}{2}(a+b)(h_1+h_3)$

$=\frac{1}{2}(a+b)(b-a)\qquad(1)$

គេបាន $S_2+S_4=\frac{1}{2}(a+b)h_2+\frac{1}{2}(a+b)h_4$

$=\frac{1}{2}(a+b)(h_2+h_4)$

$=\frac{1}{2}(a+b)(b-a)\qquad(2)$

តាម (1) និង (2)

គេទាញបាន $S_1+S_3=S_2+S_4$

ដូចនេះ $S_1+S_3=S_2+S_4$ ។

លំហាត់ទី៤៣

ឧបមាថាសមីការ $x^2+px+1=0$ មានឫស a,b ហើយសមីការ

$x^2+qx+2=0$ មានឫស b,c ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(b-c)(b-a)=pq-6$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(b-c)(b-a)=pq-6$

តាមសម្មតិកម្ម

សមីការ $x^2+px+1=0$ មានឫស a,b

សមីការ $x^2+qx+2=0$ មានឫស b,c

តាមលក្ខណៈផលបូក និងផលគុណឫស

គេទាញបាន

$$\begin{cases} a+b=-p \\ b+c=-q \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab=1 \\ bc=2 \end{cases} \Rightarrow ac=\frac{2}{b^2}$$

គេបាន $pq=(a+b)(b+c)=ab+ac+b^2+bc$

នាំឲ្យ

$$(b-c)(b-a)=b^2-ab-bc+ac$$
$$=(ab+bc+ac)+b^2-2(ab+bc)$$
$$=pq-2(1+2)$$
$$=pq-6$$

ដូចនេះ $(b-c)(b-a)=pq-6$ ។

លំហាត់ទី៤៤

គេឲ្យ $a,b>0$ និង $n\in\mathbb{Z}$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\geq 2^{n+1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\geq 2^{n+1}$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

គេមាន $1+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$

លើកអង្គទាំងពីរនឹងស្វ័យគុណ n

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n\geq\left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n$$

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n\geq 2^n\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n \quad (1)$$

ដូចគ្នាដែរ

គេមាន $1+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}}$

លើកអង្គទាំងពីរនឹងស្វ័យគុណ n

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\geq\left(2\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^n$$

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\geq 2^n\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^n \quad (2)$$

យក (1) បូក (2) គេបាន

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\geq 2^n\left[\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^n\right] \quad (3)$$

តាមវិសមភាពកូស៊ី

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^n\geq 2\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^n}$$

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^n\geq 2\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^n}$$

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^n\geq 2 \quad (4)$$

តាម (3) បូក (4) គេបាន

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\geq 2^n\cdot 2=2^{n+1}$$

ដូចនេះ $\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n\geq 2^{n+1}$ ។

លំហាត់ទី៨៥

គេឲ្យសមីការ $x^2+2ax+k=0$ មានឫសមួយស្មើ $(a-b)\neq 0$ ។

ចូររកតម្លៃ k ។

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃ k

តាង x_1 និង x_2 ជាឫសនៃសមីការ

តាមលក្ខណៈផលបូក និងផលគុណឫស គេបាន

$$x_1+x_2=-2a$$
$$x_1\cdot x_2=k$$

ដោយសមីការមានឫសមួយស្មើ $(a-b)\neq 0$

ឧបមា $x_1=a-b$

គេបាន

$$a-b+x_2=-2a\Rightarrow x_2=b-3a \quad (1)$$

$$(a-b)\cdot x_2=k\Rightarrow x_2=\frac{k}{a-b} \quad (2)$$

ផ្ទឹម (1) និង (2) គេបាន

$$b-3a=\frac{k}{a-b}$$
$$k=(b-3a)(a-b)$$

$k = ab - b^2 - 3a^2 + 3ab$

$k = 4ab - b^2 - 3a^2$

ដូចនេះ $k = 4ab - b^2 - 3a^2$ ។

លំហាត់ទី៨៦

រកគ្រប់គូនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប (x, y) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកគ្រប់គូនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប (x, y) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$ ។

លក្ខខណ្ឌ $x, y \neq 0$

គេមាន $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$

$\frac{y + x}{xy} = \frac{1}{3}$

$3(x + y) = xy$

$3x + 3y = xy$

$xy - 3x = 3y$

$x(y - 3) = 3y$

$x = \frac{3y}{y - 3}$

$x = \frac{3y - 9 + 9}{y - 3}$

$x=\dfrac{3(y-3)+9}{y-3}$

នាំឲ្យ $x=3+\dfrac{9}{y-3}$

ដោយ x ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប

គេបាន 9 ចែកដាច់នឹង $y-3$

គេទាញបាន $(y-3)\in\{1,3,9,-1,-3,-9\}$

$y-3=1\Rightarrow y=4$ នោះ $x=3+\dfrac{9}{4-3}=12$

$y-3=3\Rightarrow y=6$ នោះ $x=3+\dfrac{9}{6-3}=6$

$y-3=9\Rightarrow y=12$ នោះ $x=3+\dfrac{9}{12-3}=4$

$y-3=-1\Rightarrow y=2$ នោះ $x=3+\dfrac{9}{2-3}=-6$

$y-3=-3\Rightarrow y=0$ (មិនយក)

$y-3=-9\Rightarrow y=-6$ នោះ $x=3+\dfrac{9}{-6-3}=2$

ដូចនេះ គេបានគូចម្លើយនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប (x,y) គឺ

$(12,4),(6,6),(4,12),(-6,2)$ និង $(2,-6)$ ។

លំហាត់ទី៤៧

គេឲ្យបីចំនួន a,b,c ដែល $abc\le 1$ ។ បង្ហាញថា $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge a+b+c$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge a+b+c$

តាមវិសមភាព $AM-GM$

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^2b}{b^2c}}$$

$$\frac{2a}{b}+\frac{b}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} \qquad (1)$$

តែ $abc\le 1$

$$\Rightarrow bc\le \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{bc}\ge a \qquad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន

$$\frac{2a}{b}+\frac{b}{c}\ge 3\sqrt[3]{a^2\cdot a}=3a \quad (3)$$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ គេបាន

$$\frac{2b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3b \qquad (4)$$

$$\frac{2c}{a}+\frac{a}{b}\ge 3c \qquad (5)$$

យក (3) បូក (4) បូក (5)

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq 3(a+b+c)$$

ដូចនេះ $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq a+b+c$ ។

លំហាត់ទី៤៨

គេឲ្យបីចំនួន $a,b,c\geq 0$ ។ ចូរបង្ហាញថា $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេបាន

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2=\left(1\cdot\frac{a}{b}+1\cdot\frac{b}{c}+1\cdot\frac{c}{a}\right)^2$$

$$\leq (1^2+1^2+1^2)\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)$$

$$\leq 3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)$$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\leq 3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)$$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\leq 3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right) \quad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀតដោយ $a,b,c\geq 0$

តាមវិសមភាព *Cauchy* គេបាន

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{abc}}=3$$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq 3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

ឬ $3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\leq\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\leq 3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\leq\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}$$

ដូចនេះ $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ ។

លំហាត់ទី៤៩

ស្រាយថាបើ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណមួយនោះគេទាញបាន
វិសមភាព $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ac)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាបើ $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ac)$

តាមសម្មតិកម្ម

a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណមួយ

តាមវិសមភាពត្រីកោណ គេបាន

$a < b + c$

$a^2 < a(b + c)$

$a^2 < ab + ac \quad (1)$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ គេទាញបាន

$b^2 < ab + bc \quad (2)$

$c^2 < ac + bc \quad (3)$

យក (1) បូក (2) បូក (3)

$a^2 + b^2 + c^2 < ab + ac + ab + bc + ac + bc$

$a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2bc + 2ac$

$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$

ដូចនេះ បើ a, b, c ជារង្វាស់ជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណមួយនោះគេទាញបាន វិសមភាព $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$ ។

លំហាត់ទី៥០

គេឲ្យបីចំនួន $a, b, c > 0$ ដែល $abc = 1$ ។

បង្ហាញថា $\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{a+c}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{a+c}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$

តាមវិសមភាព $Cauchy$ គេបាន

$b+c\geq 2\sqrt{bc}$

$\frac{b+c}{\sqrt{a}}\geq\frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}$

ស្រាយដូចគ្នាដែរ គេបាន

$\frac{a+c}{\sqrt{b}}\geq\frac{2\sqrt{ac}}{\sqrt{b}}$

$\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geq\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}$

ដោយបូកអង្គនឹងអង្គ គេបាន

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{a+c}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geq\frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}+\frac{2\sqrt{ac}}{\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}$$

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{a+c}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geq 2\left(\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}\right)\qquad(1)$$

តាមវិសមភាព Cauchy គេបាន

$$\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{b}}\geq 2\sqrt{\frac{\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ac}}{\sqrt{ab}}}=2\sqrt{c}$$

$$\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}\geq 2\sqrt{\frac{\sqrt{ac}\cdot\sqrt{ab}}{\sqrt{bc}}}=2\sqrt{a}$$

$$\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}\geq 2\sqrt{\frac{\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}}=2\sqrt{b}$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

តាម (1) គេបាន

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{a+c}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geq 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$$

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{a+c}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geq (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$$

តាមវិសមភាព $Cauchy$ គេបាន

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq 3\sqrt[3]{abc}$$

តែ $abc=1$

$$\Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq 3$$

នោះគេបាន

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{a+c}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geq (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+3$$

ដូចនេះ $\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{a+c}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$ ។

លំហាត់ទី៥១

បង្ហាញថា $A=\underbrace{111...11}_{2n}-\underbrace{222...22}_{n}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនមួយ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $A=\underbrace{111...11}_{2n}-\underbrace{222...22}_{n}$ ជាការេប្រាកដនៃចំនួនមួយ

គេបាន $A=\underbrace{111...11}_{2n}-\underbrace{222...22}_{n}$

$$=\frac{1}{9}\left(\underbrace{999...99}_{2n}\right)-\frac{2}{9}\left(\underbrace{999...99}_{n}\right)$$

$$=\frac{1}{9}(10^{2n}-1)-\frac{2}{9}(10^n-1)$$

$$=\frac{10^{2n}-1}{9}-\frac{2\cdot 10^n-2}{9}$$

$$=\frac{10^{2n}}{9}-\frac{1}{9}-\frac{2\cdot 10^n}{9}+\frac{2}{9}$$

$$=\frac{10^{2n}}{9}-\frac{2\cdot 10^n}{9}+\frac{1}{9}$$

$$=\left(\frac{10^n}{3}\right)^2-2\cdot\frac{10^n}{3}\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$=\left(\frac{10^n}{3}-\frac{1}{3}\right)^2$$

ម្យ៉ាងទៀត $\left(\frac{10^n}{3}-\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{10^n-1}{3}\right)=\left[\frac{(10-1)(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+1)}{3}\right]^2$

$$=[3(10^{n-1}+10^{n-2}\ldots+1)]^2$$ ជាចំនួនគត់

ដូចនេះ $A=\underbrace{111\ldots11}_{2n}-\underbrace{222\ldots22}_{n}$ ជាកាវេប្រាកដនៃចំនួនមួយ។

លំហាត់ទី៥២

គេមានសមីការ $x^3+3mx^2+2(6m-7)x+10m-16=0$ ។

កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យសមីការនេះមានឫសបី x_1,x_2,x_3 បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃ m ដើម្បីឲ្យសមីការនេះមានឫសបី x_1, x_2, x_3
បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ

គេមានសមីការ

$$x^3 + 3mx^2 + 2(6m-7)x + 10m - 16 = 0$$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត គេបាន

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -3m & (1) \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 2(6m-7) & (2) \\ x_1x_2x_3 = -10m + 16 & (3) \end{cases}$$

បើ x_1, x_2, x_3 បង្កើតបានជាស្វ៊ីតនព្វន្តមួយ នោះគេបាន

$x_1 + x_3 = 2x_2$ យកទៅជំនួសក្នុង (1)

នាំឲ្យ $2x_2 + x_2 = -3m$

$$3x_2 = -3m$$

$$x_2 = \frac{-3m}{3}$$

$$x_2 = -m$$

តាមសមីការ (3) គេបាន

$$x_1x_3 = \frac{-10m+16}{x_2}$$

$$x_1x_3 = \frac{-10m+16}{-m}$$

$$x_1x_3 = \frac{10m-16}{m}$$

តាមសមីការ (2) គេបាន

$$x_2(x_1+x_3)+x_1x_3=12m-14$$

$$(-m)(-2m)+\frac{10m-16}{m}=12m-14$$

$$2m^3-12m^2+24m-16=0$$

$$2(m^3-6m^2+12m-8)=0$$

$$2(m-2)^3=0$$

នាំឲ្យ $(m-2)^3=0$

$$m-2=0$$

$$m=2$$

ដូចនេះ $m=2$ ។

លំហាត់ទី៥៣

តាង S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រមួយ។

បង្ហាញថា $S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$

គេមាន S_n ជាផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីត

ធរណីមាត្រមួយ

តាមរូបមន្ត គេបាន

$S_n=u_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$ ដែល u_1 ជាតួទីមួយ

គេទាញបាន

$S_{2n}=u_1\dfrac{1-q^{2n}}{1-q}$ និង $S_{3n}=u_1\dfrac{1-q^{3n}}{1-q}$

$$S_n(S_{3n}-S_{2n})=u_1\frac{1-q^n}{1-q}\left(u_1\frac{1-q^{3n}}{1-q}-u_1\frac{1-q^{2n}}{1-q}\right)$$

$$=u_1{}^2\frac{1-q^n}{1-q}\left(\frac{q^{2n}-q^{3n}}{1-q}\right)$$

$$=u_1{}^2\frac{1-q^n}{1-q}\left(\frac{q^{2n}(1-q^n)}{1-q}\right)$$

$$=\frac{u_1{}^2q^{2n}(1-q^n)^2}{(1-q)^2}$$

$$=\left[\frac{u_1q^n(1-q^n)}{1-q}\right]^2$$

$$=\left[\frac{u_1(q^n-q^{2n})}{1-q}\right]^2$$

$$=\left[\frac{u_1(1-q^{2n}-1+q^n)}{1-q}\right]^2$$

$$=\left[\frac{u_1(1-q^{2n})}{1-q}-\frac{u_1(1-q^n)}{1-q}\right]^2$$

$$=(S_{2n}-S_n)^2$$

ដូចនេះ $S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$ ។

លំហាត់ទី៥៤

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=2^{x^2-3x+4}+2^{2+3x-x^2}$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f(x)\geq 16$ ។

ខ. រកតម្លៃ x ដើម្បីឲ្យ $f(x)=20$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f(x)\geq 16$

តាមវិសមភាព *Cauchy* គេបាន

$$2^{x^2-3x+4}+2^{2+3x-x^2}\geq 2\sqrt{2^{x^2-3x+4}\cdot 2^{2+3x-x^2}}$$

$$\geq 2\sqrt{2^{x^2-3x+4+2+3x-x^2}}$$

$$f(x)\geq 2\sqrt{2^6}$$

$$f(x)\geq 2\cdot 2^3$$

$$f(x)\geq 16$$

ដូចនេះ គ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $f(x)\geq 16$ ។

ខ. រកតម្លៃ x ដើម្បីឲ្យ $f(x)=20$

គេបាន $f(x)=20$

នាំឲ្យ $2^{x^2-3x+4}+2^{2+3x-x^2}=20$

$$2^{x^2-3x+4}+2^{6-(x^2-3x+4)}=20$$

$$2^{x^2-3x+4}+\frac{64}{2^{(x^2-3x+4)}}-20=0$$

តាង $u=2^{x^2-3x+4}>0$

គេបាន សមីការទៅជា

$$u+\frac{64}{u}-20=0$$

$$u^2-20u+64=0$$

$$(u-16)(u-4)=0$$

គេទាញបាន $u=16, u=4$

- ករណី $u=16$ គេបាន $2^{x^2-3x+4}=16=2^4$

នាំឲ្យ $x^2-3x+4=4$

$$x^2-3x=0$$

$$x(x-3)=0$$

គេទាញបាន $x=0, x=3$

- ករណី $u=4$ គេបាន $2^{x^2-3x+4}=4=2^2$

នាំឲ្យ $x^2-3x+4=2$

$$x^2-3x+2=0$$

$$(x-2)(x-1)=0$$

គេទាញបាន $x=2, x=1$

ដូចនេះ គេបាន $x\in\{0,1,2,3\}$ ។

លំហាត់ទី៥៥

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{1\times 2}+\frac{2}{1\times 2\times 3}+...+\frac{2019}{1\times 2\times 3\times ...\times 2020}<1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{1\times 2}+\frac{2}{2\times 3\times 4}+...+\frac{2019}{1\times 2\times 3\times ...\times 2020}<1$ ។

គេមាន

$$\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{1\times 2}$$

$$\frac{2}{1\times 2\times 3}=\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{1\times 2\times 3}$$

$$\frac{3}{1\times 2\times 3\times 4}=\frac{1}{1\times 2\times 3}-\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4}$$

....

$$\frac{2019}{1\times 2\times 3\times ...\times 2020}=\frac{1}{1\times 2\times 3\times ...\times 2019}-\frac{1}{1\times 2\times 3\times ...\times 2020}$$

ដោយបូកអង្គនិងអង្គគេបាន

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{2}{1\times 2\times 3}+...+\frac{2019}{1\times 2\times 3\times ...\times 2020}$$

$$=2\cdot\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{1\times 2\times 3\times ...\times 2020}$$

$$=1-\frac{1}{1\times 2\times 3\times ...\times 2020}<1$$

ដូចនេះ $\frac{1}{1\times 2}+\frac{2}{1\times 2\times 3}+...+\frac{2019}{1\times 2\times 3\times ...\times 2020}<1$ ។

លំហាត់ទី៥៦

បង្ហាញថាគ្មានចំនួនគត់ណាមួយដែល $a^2+b^2-8c=6$ នោះទេ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថាគ្មានចំនួនគត់ណាមួយដែល $a^2+b^2-8c=6$ នោះទេ។

គេមាន $a^2+b^2-8c=6$

សមីការអាចសរសេរជា $a^2+b^2=8c+6$

ដោយអង្គទី២នៃសមីការជាចំនួនគូ នោះចំនួន a និង b ត្រូវតែមានភាពគូសេសដូចគ្នា

- ករណីចំនួន a និង b ជាចំនួនគូទាំងពីរ

គេបាន $a=2m$ និង $b=2n$ ដែល $m,n\in\mathbb{Z}$

សមីការទៅជា $(2m)^2+(2n)^2=8c+6$

$$4m^2+4n^2=8c+6$$

$$2(2m^2+2n^2)=2(4c+3)$$

$$2m^2+2n^2=4c+3$$

នាំឲ្យសមីការគ្មានចម្លើយជាចំនួនគត់ទេ ព្រោះអង្គទី១ជាចំនួនគូ ហើយអង្គទី២ជាចំនួនសេស។

- ករណីចំនួន a និង b ជាចំនួនសេសទាំងពីរ

គេបាន $a=2m-1$ និង $b=2n-1$ ដែល $m,n\in\mathbb{Z}$

សមីការទៅជា

$$(2m-1)^2+(2n-1)^2=8c+6$$
$$4m^2+4m+1+4n^2+4n+1=8c+6$$
$$4m^2+4m+4n^2+4n+2=8c+6$$
$$2[(2m^2+2m+2n^2+2n)+1]=2(4c+3)$$
$$2m^2+2m+2n^2+2n+1=4c+3$$
$$2m^2+2m+2n^2+2n=4c+2$$
$$2(m^2+m+n^2+n)=2(2c+1)$$
$$m^2+m+n^2+n=2c+1$$
$$m(m+1)+n(n+1)=2c+1$$

ដោយ $m(m+1)$ និង $n(n+1)$ ជាចំនួនគូ

(ផលគុណនៃពីរចំនួនគត់តគ្នាជាចំនួនគូ)

នាំឲ្យ $m(m+1)+n(n+1)$ ជាចំនួនគូ

នាំឲ្យសមីការគ្មានចម្លើយជាចំនួនគត់ទេ ព្រោះអង្គទី១ជាចំនួនគូ ហើយអង្គទី២ជាចំនួនសេស។

ដូចនេះ គ្មានចំនួនគត់ណាមួយផ្ទៀងផ្ទាត់ $a^2+b^2-8c=6$ នោះទេ ។

លំហាត់ទី៥៧

សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម

$A=\left(\log_a b+\log_b a+2\right)\left(\log_a b-\log_{ab} b\right)\log_b a-1$ ។

ដំណោះស្រាយ

សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម

$$A=(\log_a b+\log_b a+2)(\log_a b-\log_{ab} b)\log_b a-1$$

ដោយប្រើរូបមន្តប្តូរគោល

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

គេបាន

$$A=(\log_a b+\log_b a+2)(\log_a b-\log_{ab} b)\log_b a-1$$

$$=\left(\frac{\log b}{\log a}+\frac{\log a}{\log b}+2\right)\left(\frac{\log b}{\log a}-\frac{\log b}{\log ab}\right)\frac{\log a}{\log b}-1$$

$$=\left(\frac{\log^2 b+\log^2 a+2\log a\cdot\log b}{\log a\cdot\log b}\right)\left(\frac{\log b}{\log a}-\frac{\log b}{\log a+\log b}\right)\frac{\log a}{\log b}-1$$

$$=\frac{(\log a+\log b)^2}{\log a\cdot\log b}\cdot\frac{\log a\log b+\log^2 b-\log a\log b}{\log a(\log a+\log b)}\cdot\frac{\log a}{\log b}-1$$

$$=\frac{(\log a+\log b)^2}{\log a\cdot\log b}\cdot\frac{\log^2 b}{\log a(\log a+\log b)}\cdot\frac{\log a}{\log b}-1$$

$$=\frac{\log a+\log b}{\log a}-1$$

$$=1+\frac{\log b}{\log a}-1$$

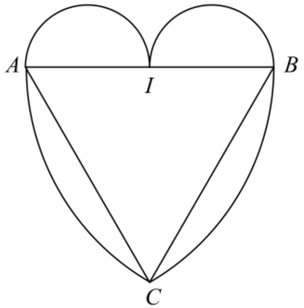
$$=\frac{\log b}{\log a}$$

$$=\log_a b$$

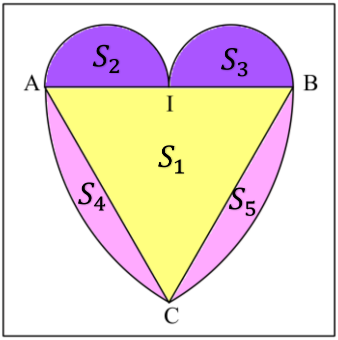
ដូចនេះ $A=\log_a b$ ។

លំហាត់ទី៥៨

គេឲ្យត្រីកោណសម័ង្ស ABC ដែលជ្រុងមានរង្វាស់ស្មើ $2a$ ។ I ជាចំនុចកណ្តាល $[AB]$ ។ នៅខាងក្រៅត្រីកោណ ABC គេសង់កន្លះរង្វង់ពីរដែលមាន $[AI]$ និង $[BI]$ ជាអង្កត់ផ្ចិត រួចសង់ធ្នូនៃរង្វង់ដែលមានផ្ចិត A កាំ AB ដែលខណ្ឌដោយចំនុច B និង C និងសង់ធ្នូនៃរង្វង់ដែលមានផ្ចិត B កាំ AB ដែលខណ្ឌដោយចំនុច A និង C ។ គេបានរូបមួយរាងបេះដូង (ដូចរូបខាងក្រោម)។ ចូរគណនាផ្ទៃក្រឡារូបរាងបេះដូងនេះ។



ដំណោះស្រាយ



តាង S ជាក្រឡាផ្ទៃរបស់ផ្កាបន្លប់ដែលវិញ្ញាសាមិនលេខដាប់

គេបាន $S=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$

ដោយ $S_1=\frac{1}{2}\times AB\times CI=\frac{1}{2}\times 2a\times\frac{2a\sqrt{3}}{2}=a^2\sqrt{3}$

$S_2=S_3=\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{AI}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi a^2}{8}$

$S_4=S_5=($ ក្រលាផ្ទៃចម្រៀកថាសផ្ចិត $A)-S_1$

$S_4=S_5=\frac{1}{2}\times\alpha\times R^2-S_1$

ដោយ $R=AB=2a,\alpha=60^o=\frac{\pi}{3}\,,S_1=a^2\sqrt{3}$

នាំឲ្យ $S_4=S_5=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times(2a)^2-a^2\sqrt{3}=\frac{2\pi}{3}a^2-a^2\sqrt{3}$

គេបានក្រឡាផ្ទៃរបស់ផ្កាបន្លប់គឺ

$S=a^2\sqrt{3}+2\left(\frac{\pi a^2}{8}\right)+2\left(\frac{2\pi}{3}a^2-a^2\sqrt{3}\right)$

$S=a^2\sqrt{3}+\frac{\pi a^2}{4}+2\left(\frac{2\pi a^2-3\sqrt{3}a^2}{3}\right)$

$S=\frac{12a^2\sqrt{3}+3\pi a^2+16\pi a^2-24\sqrt{3}a^2}{12}$

$S=\frac{19\pi a^2-12a^2\sqrt{3}}{12}$

ដូចនេះ ក្រឡាផ្ទៃរបស់ផ្កាបន្លប់គឺ $S=\frac{a^2(19\pi-12\sqrt{3})}{12}$ ឯកតាផ្ទៃ ។

លំហាត់ទី៥៩

ក្នុងការសាកសួរសិស្ស 200 នាក់ បានឲ្យដឹងថា សិស្ស 120 នាក់ចុះឈ្មោះរៀនភាសាអង់គ្លេស សិស្ស 90 នាក់ចុះឈ្មោះរៀនភាសាបារាំង និង សិស្ស 50 នាក់ចុះឈ្មោះរៀនទាំងពីរមុខ។ តើមានសិស្សប៉ុន្មាននាក់ ដែលមិនបានចុះឈ្មោះរៀនមុខវិជ្ជាទាំងពីរ?

ដំណោះស្រាយ

តាង E ជាសំណុំសិស្សចុះឈ្មោះរៀនភាសាអង់គ្លេស

តាង F ជាសំណុំសិស្សចុះឈ្មោះរៀនភាសាបារាំង

ដំបូង គេត្រូវរកចំនួនសិស្សរៀនមួយមុខវិជ្ជាយ៉ាងតិច

គេបាន $n(E\cup F)=n(E)+n(F)-n(E\cap F)$

$=120+90-50$

$=160$

នាំឲ្យ ចំនួនសិស្សដែលមិនបានចុះឈ្មោះរៀនមុខវិជ្ជាទាំងពីរមាន

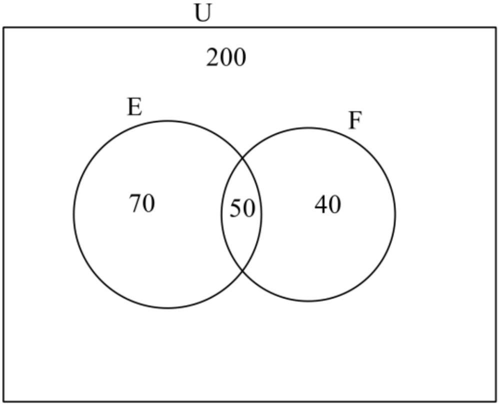
$200-160=40$ នាក់ ។

ដូចនេះ ចំនួនសិស្សដែលមិនបានចុះឈ្មោះរៀនមុខវិជ្ជាទាំងពីរគឺ 40 នាក់។

គេក៏អាចប្រើដ្យាក្រាមវិនដើម្បីដោះស្រាយលំហាត់ខាងលើបានដែរ តាមសម្មតិកម្ម

$n(E)=120$, $n(F)=90$ និង $n(E\cap F)=50$

គេបានដ្យាក្រាមវ៉ិន



តាមដ្យាក្រាមវ៉ិន គេឃើញថា $70+50+40=160$ ជាចំនួនសិស្សរៀនដែលបានចុះឈ្មោះរៀនមួយមុខវិជ្ជាយ៉ាងតិច

ដូចនេះ $200-160=40$ ជាចំនួនសិស្សដែលមិនបានចុះឈ្មោះរៀនមុខវិជ្ជាទាំងពីរ ។

លំហាត់ទី៦០

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $Z_n = 1 + i\dfrac{\sqrt{2n^2+2n+1}}{n(n+1)}$ ដែល $n \in \mathbb{N}$ ។

១. ចូរស្រាយថា $Z_n \times \overline{Z_n} = \dfrac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$ ។

២. តាង $S_n = \sum_{k=1}^{n} |Z_k|$ ។ ស្រាយថា $S_n = n + 1 - \dfrac{1}{n+1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

១. ស្រាយថា $Z_n \times \overline{Z_n} = \dfrac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$

គេមាន $Z_n = 1 + i\dfrac{\sqrt{2n^2+2n+1}}{n(n+1)}$

នាំឲ្យ $\overline{Z_n} = 1 - i\dfrac{\sqrt{2n^2+2n+1}}{n(n+1)}$

$$Z_n \times \overline{Z_n} = \left(1 + i\frac{\sqrt{2n^2+2n+1}}{n(n+1)}\right)\left(1 - i\frac{\sqrt{2n^2+2n+1}}{n(n+1)}\right)$$

$$= 1 - i^2\left(\frac{\sqrt{2n^2+2n+1}}{n(n+1)}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{2n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 2n(n+1) + 1}{n^2(n+1)^2} = \frac{[n(n+1)+1]^2}{n^2(n+1)^2}$$

ដូចនេះ $Z_n\times\overline{Z_n}=\dfrac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$ ។

២. ស្រាយថា $S_n=n+1-\dfrac{1}{n+1}$

គេមាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}|Z_k|$

តាមលក្ខណៈនៃចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ $|Z_n|^2=Z_n\times\overline{Z_n}$

នាំឲ្យ $|Z_n|^2=\dfrac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$

នោះ $|Z_n|=\dfrac{n^2+n+1}{n(n+1)}=1+\dfrac{1}{n(n+1)}=1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

គេទាញបាន $S_n=\sum_{k=1}^{n}|Z_k|=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}1+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$S_n=n+1-\frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $S_n=n+1-\dfrac{1}{n+1}$ ។

លំហាត់ទី៦១

ដោះស្រាយសមីការ $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$$
$$(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)=3$$
$$(x^2+4x+x+4)(x^2+2x+3x+6)=3$$
$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=3$$

តាង $t=x^2+5x+4$

នាំឲ្យ $t+2=x^2+5x+6$

គេបាន សមីការទៅជា

$$t(t+2)=3$$
$$t^2+2t=3$$
$$t^2+2t-3=0$$

ដោយ $a+b+c=1+2-3=0$

គេទាញបានឫស $t_1=1$ និង $t_2=\frac{-3}{1}=-3$

- ករណី $t_1=1$

គេបាន $x^2+5x+4=1$

$$x^2+5x+3=0$$

$$\Delta=5^2-4(1)(3)$$
$$=25-12$$
$$=13$$

នាំឲ្យ $x_1=\frac{-5-\sqrt{13}}{2}$

$$x_2=\frac{-5+\sqrt{13}}{2}$$

- ករណី $t_2=-3$

គេបាន $x^2+5x+4=-3$

$x^2+5x+7=0$

$\Delta=5^2-4(1)(7)$

$=25-28$

$=-3<0$

នាំឲ្យ សមីការគ្មានឫស

ដូចនេះ សរុបមកសមីការមានឫស $x_1=\dfrac{-5-\sqrt{13}}{2}$ និង $x_2=\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៦២

គេឲ្យបួនចំនួនគត់ a,b,c,d ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $a+b=c+d$ និង $ab+1=cd$ ។ បង្ហាញថា $c=d$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $c=d$

គេមាន $a+b=c+d$

នាំឲ្យ $b(a+b)=b(c+d)$

$ab+b^2=bc+bd \qquad (1)$

ដោយ $ab+1=cd \qquad (2)$

យក (1) ដក (2) គេបាន

$ab+b^2-(ab+1)=bc+bd-cd$

$ab+b^2-ab-1=bc+bd-cd$

$$b^2 - 1 = bc + bd - cd$$

$$b^2 - bc - bd + cd = 1$$

$$b(b-c) - d(b-c) = 1$$

$$(b-c)(b-d) = 1$$

ដោយ a,b,c,d ជាចំនួនគត់

គេទាញបាន $\begin{cases} b-c=1 \\ b-d=1 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} b-c=-1 \\ b-d=-1 \end{cases}$

- ករណី $\begin{cases} b-c=1 \\ b-d=1 \end{cases}$

នាំឲ្យ $b-c=b-d \Leftrightarrow -c=-d \Leftrightarrow c=d$

- ករណី $\begin{cases} b-c=-1 \\ b-d=-1 \end{cases}$

នាំឲ្យ $b-c=b-d \Leftrightarrow -c=-d \Leftrightarrow c=d$

ដូចនេះ $c=d$ ។

លំហាត់ទី៦៣

គេឲ្យ a,b,c ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a^2 = b^2 + c^2$ ។

ក. ប្រៀបធៀប a និង $b+c$ ។

ខ. ប្រៀបធៀប a^3 និង $b^3 + c^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ប្រៀបធៀប a និង $b+c$

គេមាន $a^2=b^2+c^2$

សមមូល $1=\dfrac{b^2+c^2}{a^2}$

$$1=\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}$$

$$1=\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

នោះគេទាញបាន $0<\dfrac{b}{a},\dfrac{c}{a}<1$

គេបាន $\begin{cases}\dfrac{b}{a}>\left(\dfrac{b}{a}\right)^2\\ \dfrac{c}{a}>\left(\dfrac{c}{a}\right)^2\end{cases}$

នាំឲ្យ $\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}>\left(\dfrac{b}{a}\right)^2+\left(\dfrac{c}{a}\right)^2=1$

$$\frac{b+c}{a}>1$$

នាំឲ្យ $b+c>a$

ដូចនេះ $a<b+c$ ។

ខ. ប្រៀបធៀប a^3 និង b^3+c^3 ។

ដូចគ្នាដែរ ដោយ $0<\dfrac{b}{a},\dfrac{c}{a}<1$

គេបាន $\begin{cases} \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 > \left(\dfrac{b}{a}\right)^3 \\ \left(\dfrac{c}{a}\right)^2 > \left(\dfrac{c}{a}\right)^3 \end{cases}$

នាំឲ្យ $\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{a}\right)^2 > \left(\dfrac{b}{a}\right)^3 + \left(\dfrac{c}{a}\right)^3$

$$1 > \frac{b^3}{a^3} + \frac{c^3}{a^3}$$

$$1 > \frac{b^3 + c^3}{a^3}$$

នាំឲ្យ $a^3 > b^3 + c^3$

ដូចនេះ $a^3 > b^3 + c^3$ ។

លំហាត់ទី៦៤

គេឲ្យ $a_1, a_2, ..., a_n$ ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $a_1 \times a_2 \times ... \times a_n = 1$ ។

បង្ហាញថា $(2+a_1)(2+a_2)...(2+a_n) \geq 3^n$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $(2+a_1)(2+a_2)...(2+a_n) \geq 3^n$

តាមវិសមភាព $Cauchy$ គេបាន

$$2 + a_1 = 1 + 1 + a_1 \geq 3\sqrt[3]{a_1}$$

$$2 + a_2 = 1 + 1 + a_2 \geq 3\sqrt[3]{a_2}$$

....

$2+a_n=1+1+a_n\ge 3\sqrt[3]{a_n}$

ដោយគុណអង្គនឹងអង្គ គេបាន

$(2+a_1)(2+a_2)...(2+a_n)\ge 3^n\sqrt[3]{a_1\times a_2\times...\times a_n}$

ដោយ $a_1\times a_2\times...\times a_n=1$

នោះគេបាន

$(2+a_1)(2+a_2)...(2+a_n)\ge 3^n\sqrt[3]{a_1\times a_2\times...\times a_n}$

$(2+a_1)(2+a_2)...(2+a_n)\ge 3^n\sqrt[3]{1}$

$(2+a_1)(2+a_2)...(2+a_n)\ge 3^n$

ដូចនេះ $(2+a_1)(2+a_2)...(2+a_n)\ge 3^n$ ។

លំហាត់ទី៦៥

ស្រាយថាបើ $\frac{a(b+c-a)}{\log a}=\frac{b(a+c-b)}{\log b}=\frac{c(a+b-c)}{\log c}$

នោះគេបាន $a^b b^a=c^b b^c=a^c c^a$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាបើ $\frac{a(b+c-a)}{\log a}=\frac{b(a+c-b)}{\log b}=\frac{c(a+b-c)}{\log c}$

នោះគេបាន $a^b b^a=c^b b^c=a^c c^a$

លក្ខខណ្ឌ $a,b,c>0$ និង $a,b,c\ne 1$

តាង $\frac{a(b+c-a)}{\log a}=\frac{b(a+c-b)}{\log b}=\frac{c(a+b-c)}{\log c}=k$

គេបាន $\dfrac{a(b+c-a)}{\log a}=k$

$$\frac{a(b+c-a)}{k}=\log a$$

$$\frac{ab(b+c-a)}{k}=b\log a$$

$$\frac{ab(b+c-a)}{k}=\log a^b \quad (1)$$

ហើយ $\dfrac{b(a+c-b)}{\log b}=k$

$$\frac{b(a+c-b)}{k}=\log b$$

$$\frac{ab(a+c-b)}{k}=a\log b$$

$$\frac{ab(a+c-b)}{k}=\log b^a \quad (2)$$

យក (1) បូក (2) គេបាន

$$\frac{ab(b+c-a)}{k}+\frac{ab(a+c-b)}{k}=\log a^b+\log b^a$$

$$\frac{ab^2+abc-a^2b+a^2b+abc-ab^2}{k}=\log a^b b^a$$

$$\frac{2abc}{k}=\log a^b b^a$$

នាំឲ្យ $\log a^b b^a=\dfrac{2abc}{k}$

ដោយស្រាយស្រដៀងគ្នាដែរ គេបាន

$$\log c^b b^c=\frac{2abc}{k}$$

$$\log a^c c^a = \frac{2abc}{k}$$

ដូចនេះ $a^b b^a = c^b b^c = a^c c^a$ ។

លំហាត់ទី៦៦

ចូររកចំនួនគត់ x ដែល $700 < x < 800$ ដោយដឹងថាផលបូកគ្រប់ខ្ទង់នៃ x ស្មើ 17 និងបើគេប្តូរលេខខ្ទង់រយទៅខាងស្តាំនៃចំនួននោះ គេបានចំនួនថ្មីមួយតិចជាងចំនួនដើម 441 ។

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនគត់ x

តាង a និង b ជាលេខខ្ទង់ដប់ និងលេខខ្ទង់រាយនៃ x

គេបាន $x = 7\overline{ab} = 700 + 10a + b$

ចំនួនថ្មីគឺ $y = \overline{ab}7 = 100a + 10b + 7$

តាមសម្មតិកម្ម គេទាញបាន

$$7 + a + b = 17 \Leftrightarrow a + b = 10 \quad (1)$$

ម៉្យាងទៀតដោយ $x - y = 441$

$$(700 + 10a + b) - (100a + 10b + 7) = 441$$

$$-90a - 9b + 693 = 441$$

$$-90a - 9b = -252$$

$$10a + b = 28 \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបានប្រព័ន្ធ $\begin{cases} a+b=10 \\ 10a+b=28 \end{cases}$

ដកអង្គនិងអង្គ គេបាន $-9a=-18$

$$a=\frac{-18}{-8}=2$$

នាំឲ្យ $b=10-a=10-2=8$

ដូចនេះ ចំនួនគត់ x គឺ 728 ។

លំហាត់ទី៦៧

ឧបមាថា x_1 និង x_2 ឫសនៃសមីការ $x^2-2x-1=0$ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $A=12x_1^7+169x_2^4$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ $A=12x_1^7+169x_2^4$

ដោយ x_1 និង x_2 ឫសនៃសមីការ $x^2-2x-1=0$

នោះគេបាន $\begin{cases} x_1^2-2x_1-1=0 \\ x_2^2-2x_2-1=0 \end{cases}$

ឬ $\begin{cases} x_1^2=2x_1+1 & (1) \\ x_2^2=2x_2+1 & (2) \end{cases}$

តាម (1) គេបាន $x_1\cdot x_1^2=x_1(2x_1+1)$

នាំឲ្យ $x_1^3=2x_1^2+x_1$

$$=2(2x_1+1)+x_1$$

$$x_1^3=5x_1+2$$

លើកអង្គទាំងពីរជាការេ គេបាន

$$x_1^6 = (5x_1+2)^2$$
$$= 25x_1^2 + 20x_1 + 4$$
$$= 25(2x_1+1) + 20x_1 + 4$$
$$x_1^6 = 70x_1 + 29$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង x_1 គេបាន

$$x_1 \cdot x_1^6 = x_1(70x_1+29)$$
$$x_1^7 = 70x_1^2 + 29x_1$$
$$= 70(2x_1+1) + 29x_1$$
$$x_1^7 = 169x_1 + 70$$

តាម (2) គេបាន $(x_2^2)^2 = (2x_2+1)^2$

នាំឲ្យ $x_2^4 = 4x_2^2 + 4x_2 + 1$

$$= 4(2x_2+1) + 4x_2 + 1$$
$$= 12x_2 + 5$$

គេទាញបាន

$$A = 12(169x_1+70) + 169(12x_2+5)$$
$$= 2028x_1 + 840 + 2028x_2 + 845$$
$$= 2028(x_1+x_2) + 1685$$

តាមទ្រឹស្តីបទវ្យែត គេបាន $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 2$

នាំឲ្យ $A = 2028(2) + 1685$

$$= 5741$$

ដូចនេះ $A = 5741$ ។

លំហាត់ទី៦៨

ស្រាយថាសមីការ $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)=0$

មានឬសជានិច្ច ដែល x ជាអញ្ញាតិ និង $a,b,c\in\mathbb{R}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាសមីការខាងក្រោមមានឬសជានិច្ច

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)=0$$

$$(x^2-ax-bx+ab)+(x^2-bx-cx+bc)+(x^2-ax-cx+ac)=0$$

$$3x^2+2ax+2bx+2cx+ab+bc+ac=0$$

$$3x^2+(2a+2b+2c)x+ab+bc+ac=0$$

គេបាន

$$\Delta'=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ac)$$
$$\Delta'=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac-3(ab+bc+ac)$$
$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$$
$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac)$$
$$=\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+a^2-2ac+c^2)$$
$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]\geq 0$$

ដោយ $\Delta'\geq 0$ គ្រប់ $a,b,c\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ សមីការ $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)=0$ មានឫសជានិច្ច។

លំហាត់ទី៦៩

គេឲ្យអនុគមន៍ $f(x)=\log\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ ។

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍នេះ ។

ខ. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $-1<a<1$ និង $-1<b<1$

ចូរបង្ហាញថា $f(a)+f(b)=f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍នេះ

គេមាន $f(x)=\log\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

អនុគមន៍មានន័យកាលណា $\begin{cases} \dfrac{1-x}{1+x}>0 \\ 1+x\neq 1 \Leftrightarrow x\neq -1 \end{cases}$

$1-x=0 \Leftrightarrow x=1$

$1+x=0 \Leftrightarrow x=-1$

គេបានតារាងសញ្ញា

x		-1	1	
$1-x$	$+$	0 $-$	$-$	
$1+x$	$-$	$-$	0 $+$	
$\frac{1-x}{1+x}>0$	$-$	$+$	$-$	

ដូចនេះ $D=(-1,1)$ ។

២. បង្ហាញថា $f(a)+f(b)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$

គេបាន $f(a)=\log\left(\frac{1-a}{1+a}\right)$ និង $f(b)=\log\left(\frac{1-b}{1+b}\right)$

នាំឲ្យ $f(a)+\mathrm{f}(b)=\log\left(\frac{1-a}{1+a}\right)+\log\left(\frac{1-b}{1+b}\right)$

$$=\log\left[\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}\right]$$

$$=\log\left[\frac{1-(a+b)+ab}{1+(a+b)+ab}\right] \quad (1)$$

ម៉្យាងទៀត គេមាន

$$f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)=\log\left(\frac{1-\frac{a+b}{1+ab}}{1+\frac{a+b}{1+ab}}\right)$$

$$=\log\left(\frac{\frac{1+ab-a-b)}{1+ab}}{\frac{1+ab+a+b}{1+ab}}\right)$$

$$=\log\left[\frac{1-(a+b)+ab}{1+(a+b)+ab}\right] \qquad (2)$$

តាម (1) និង (2)

ដូចនេះ $f(a)+f(b)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$ ។

លំហាត់ទី៧០

ដោះស្រាយវិសមីការ $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\cos x}>\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\sin x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយវិសមីការ $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\cos x}>\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\sin x}$

ដោយ $0<\frac{1}{\pi}<1$

គេបាន $\cos x<\sin x$

$$\cos x-\sin x<0$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)<0$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)<0$$

$$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<0$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<0$$

នាំឲ្យ $\frac{\pi}{2}+2k\pi < x+\frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}+2k\pi \quad ,k\in\mathbb{Z}$

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+2k\pi < x < \frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+2k\pi$$

$$\frac{\pi}{4}+2k\pi < x < \frac{5\pi}{4}+2k\pi$$

ដូចនេះ $\frac{\pi}{4}+2k\pi < x < \frac{5\pi}{4}+2k\pi \ ,k\in\mathbb{Z}$ ។

លំហាត់ទី៧១

គេឲ្យ $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$ ។

ក. គណនា $f(x)+f(y)$ ដោយដឹងថា $x+y=1$ ។

ខ. ទាញរកផលបូក $S=f\left(\frac{1}{2019}\right)+f\left(\frac{2}{2019}\right)+...+f\left(\frac{2018}{2019}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា $f(x)+f(y)$

គេមាន $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$

នាំឲ្យ $f(y)=\frac{4^y}{4^y+2}$

គេបាន $f(x)+f(y)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4^y}{4^y+2}$

$$=\frac{4^x(4^y+2)+4^y(4^x+2)}{(4^x+2)(4^y+2)}$$

$$=\frac{4^{x+y}+2\cdot 4^{x}+4^{x+y}+2\cdot 4^{y}}{4^{x+y}+2\cdot 4^{x}+2\cdot 4^{y}+4}$$

$$=\frac{4+2\cdot 4^{x}+2\cdot 4^{y}+4}{4+2\cdot 4^{x}+2\cdot 4^{y}+4}$$

$$=1$$

ដូចនេះ $f(x)+f(y)=1$ ។

២. ទាញរកផលបូក

$$S=f\left(\frac{1}{2019}\right)+f\left(\frac{2}{2019}\right)+\dots+f\left(\frac{2018}{2019}\right)$$

ដោយ $f(x)+f(y)=1$ ចំពោះ $x+y=1$

គេទាញបាន

$$f\left(\frac{1}{2019}\right)+f\left(\frac{2018}{2019}\right)=1$$

$$f\left(\frac{2}{2019}\right)+f\left(\frac{2017}{2019}\right)=1$$

$$f\left(\frac{3}{2019}\right)+f\left(\frac{2016}{2019}\right)=1$$

....

$$f\left(\frac{1009}{2019}\right)+f\left(\frac{1010}{2019}\right)=1$$

ដោយបូកអង្គនឹងអង្គ គេបាន

$$S=\underbrace{1+1+1+\dots+1}_{\frac{2018}{2}}$$

$S = \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{1009}$

$S = 1009$

ដូចនេះ $S = 1009$ ។

លំហាត់ទី៧២

គេឲ្យ p ជាចំនួនពិតដែល $p+\dfrac{1}{p}$ ជាចំនួនគត់មួយ។

ស្រាយថា $p^n+\dfrac{1}{p^n}$ ជាចំនួនគត់ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $p^n+\dfrac{1}{p^n}$ ជាចំនួនគត់ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

តាង $S_n = p^n + \dfrac{1}{p^n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$

គេមាន $S_n S_1 = \left(p^n+\dfrac{1}{p^n}\right)\left(p+\dfrac{1}{p}\right)$

$= p^{n+1} + p^{n-1} + \dfrac{1}{p^{n-1}} + \dfrac{1}{p^{n+1}}$

$S_n S_1 = p^{n+1} + \dfrac{1}{p^{n+1}} + p^{n-1} + \dfrac{1}{p^{n-1}}$

$S_n S_1 = S_{n+1} + S_{n-1}$ (1)

ចំពោះ $n=1$ គេបាន $S_1 = p+\dfrac{1}{p}$ ជាចំនួនគត់

ឧបមាថា S_n ជាចំនួនគត់ គេនឹងស្រាយថា S_{n+1} ជាចំនួនគត់ដែរ

ដោយ S_n ជាចំនួនគត់ នោះតាម (1) គេទាញបាន

$S_{n+1}=S_nS_1-S_{n-1}$ ជាចំនួនគត់ដែរ

ដូចនេះ $p^n+\dfrac{1}{p^n}$ ជាចំនួនគត់ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ។

លំហាត់ទី៧៣

គេឲ្យបីចំនួនដែលផ្ទៀងផ្ទាត់បីលក្ខខណ្ឌខាងក្រោម

(1) $a+b+c=1$

(2) $a^2+b^2+c^2=1$

(3) $a^3+b^3+c^3=1$

គណនាតម្លៃនៃ $A=a^{2018}+b^{2019}+c^{2020}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ $A=a^{2018}+b^{2019}+c^{2020}$ ។

គេមាន $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)$

ដោយ $a+b+c=1$ និង $a^3+b^3+c^3=1$

នាំឲ្យ $(1)^3=1+3(a+b)(b+c)(a+c)$

$0=3(a+b)(b+c)(a+c)$

$0=(a+b)(b+c)(a+c)$

ឬ $(a+b)(b+c)(a+c)=0$

គេបាន $a+b=0$ ឬ $b+c=0$ ឬ $a+c=0$

- ករណី $a+b=0$

ដោយ $a+b+c=1$ នាំឲ្យ $c=1$

$a^2+b^2+c^2=1$ នាំឲ្យ $a^2+b^2=0$

គេទាញបាន $a=b=0$

នាំឲ្យ $A=a^{2018}+b^{2019}+c^{2020}=0+0+1=1$

- ករណី $b+c=0$

ដោយ $a+b+c=1$ នាំឲ្យ $a=1$

$a^2+b^2+c^2=1$ នាំឲ្យ $b^2+c^2=0$

គេទាញបាន $b=c=0$

នាំឲ្យ $A=a^{2018}+b^{2019}+c^{2020}=1+0+0=1$

- ករណី $a+c=0$

ដោយ $a+b+c=1$ នាំឲ្យ $b=1$

$a^2+b^2+c^2=1$ នាំឲ្យ $a^2+c^2=0$

គេទាញបាន $a=c=0$

នាំឲ្យ $A=a^{2018}+b^{2019}+c^{2020}=0+1+0=1$

ដូចនេះ សរុបមក $A=1$ ។

លំហាត់ទី៧៤

គេឲ្យសមីការ $ax^2+bx+c=0$ ដែល a និង c ខុសពីសូន្យ ហើយ α និង β ជាឫសនៃសមីការ។ គេតាង $S_n=\alpha^n+\beta^n$ ដែល $n\in\mathbb{N}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $aS_n+bS_{n-1}+cS_{n-2}=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $aS_n+bS_{n-1}+cS_{n-2}=0$

តាមសម្មតិកម្ម

α និង β ជាឫសនៃសមីការ នោះគេបាន

$$\begin{cases} a\alpha^2+b\alpha+c=0 & (1) \\ a\beta^2+b\beta+c=0 & (2) \end{cases}$$

យក (1) គុណនឹង α^{n-2} គេបាន

$$a\alpha^n+b\alpha^{n-1}+c\alpha^{n-2}=0 \qquad (3)$$

យក (2) គុណនឹង β^{n-2} គេបាន

$$a\beta^n+b\beta^{n-1}+c\beta^{n-2}=0 \qquad (4)$$

យក (3) បូក (4) គេបាន

$$a\alpha^n+a\beta^n+b\alpha^{n-1}+b\beta^{n-1}+c\alpha^{n-2}+c\beta^{n-2}=0$$

$$a(\alpha^n+\beta^n)+b(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})+c(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})=0$$

ដោយ $S_n=\alpha^n+\beta^n$

នាំឲ្យ $S_{n-1}=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$

និង $S_{n-2}=\alpha^{n-2}+\beta^{n-2}$

គេបាន $aS_n+bS_{n-1}+cS_{n-2}=0$

ដូចនេះ $aS_n+bS_{n-1}+cS_{n-2}=0$ ។

លំហាត់ទី៧៥

ក. បង្ហាញថា $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តលុះត្រាតែ $2a_{p+q}=a_{2p}+a_{2q}$ ដែល $p,q\in\mathbb{N}$ ។

ខ. បង្ហាញថា $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រលុះត្រាតែ $a_{p+q}^2=a_{2p}\times a_{2q}$ ដែល $p,q\in\mathbb{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្តលុះត្រាតែ $2a_{p+q}=a_{2p}+a_{2q}$ ដែល $p,q\in\mathbb{N}$

ស្រាយថាបើ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត នាំឲ្យ $2a_{p+q}=a_{2p}+a_{2q}$

តាង d ជាផលសងរួម

គេបាន
$$\begin{aligned}a_{2p}+a_{2q}&=a_1+(2p-1)d+a_1+(2q-1)d\\&=2a_1+2pd+2qd-2d\\&=2(a_1+pd+qd-d)\\&=2[a_1+(p+q-1)d]\\&=2a_{p+q}\end{aligned}$$

ស្រាយថាបើ $2a_{p+q}=a_{2p}+a_{2q}$ នាំឲ្យ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត

គេបាន $a_{p+q}-a_{2p}=a_{2q}-a_{p+q}$

យក $q=p+1$

នាំឲ្យ $a_{p+p+1}-a_{2p}=a_{2(p+1)}-a_{p+p+1}$

$a_{2p+1}-a_{2p}=a_{2p+2}-a_{2p+1}$

យក $t=2p$ នាំឲ្យ $a_{t+1}-a_t=a_{t+2}-a_{t+1}$

នោះ $a_{t+2}-a_{t+1}=a_{t+1}-a_t=a_t-a_{t-1}=...=a_2-a_1=$ ថេរ

ដូចនេះ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតនព្វន្ត ។

ខ. បង្ហាញថា $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រលុះត្រាតែ $a_{p+q}^2=a_{2p}\times a_{2q}$ ដែល $p,q\in\mathbb{N}$

ស្រាយថាបើ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ នាំឲ្យ $a_{p+q}^2=a_{2p}\times a_{2q}$

តាង r ជាផលធៀបរួម

គេបាន $a_{2p}\times a_{2q}=a_1\times r^{2p-1}\times a_1\times r^{2q-1}$

$=a_1^2\times r^{2p-1+2q-1}$

$=a_1^2r^{2(p+q-1)}$

$=(a_1r^{p+q-1})^2$

$=a_{p+q}^2$

ស្រាយថាបើ $a_{p+q}^2=a_{2p}\times a_{2q}$ នាំឲ្យ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេបាន $\dfrac{a_{p+q}}{a_{2p}}=\dfrac{a_{2q}}{a_{p+q}}$

យក $q=p+1$ នាំឲ្យ $\frac{a_{2p+1}}{a_{2p}}=\frac{a_{2p+2}}{a_{2p+1}}$

នោះ $\frac{a_{2p+2}}{a_{2p+1}}=\frac{a_{2p+1}}{a_{2p}}=\ldots=\frac{a_2}{a_1}$ ថេរ

ដូចនេះ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

លំហាត់ទី៧៦

គេឲ្យខ្សែកោង $(C): f(x)=x^2+ax+b\ln x$ និងបន្ទាត់ $(L): y=3x+1$ ។
ចូរកំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យខ្សែកោង (C) ប៉ះនឹងបន្ទាត់ (L) ត្រង់ចំនុច $A(1,4)$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ពីរចំនួនពិត a និង b

គេមាន ខ្សែកោង $(C): f(x)=x^2+ax+b\ln x$ និងបន្ទាត់ $(L): y=3x+1$

ដើម្បីឲ្យខ្សែកោង (C) ប៉ះនឹងបន្ទាត់ (L) ត្រង់ចំនុច $A(1,4)$ លុះត្រាតែ

$$\begin{cases} f'(1)=3 \\ f(1)=4 \end{cases}$$

ដោយ $f(x)=x^2+ax+b\ln x$

នាំឲ្យ $f'(x)=2x+a+\frac{b}{x}$

ដោយ $f'(1)=3$

គេបាន $f'(1)=2(1)+a+\frac{b}{1}=2+a+b$

នាំឲ្យ $2+a+b=3$ ឬ $a+b=1$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត $f(1)=4$

នាំឲ្យ $f(1)=1^2+a(1)+b\ln 1=a+1=4$

គេទាញបាន $a=4-1=3$

តាម (1) គេបាន $b=1-a=1-3=-2$

ដូចនេះ $a=3, b=-2$ ។

លំហាត់ទី៣៧

គេឲ្យ $a\geq 1$ និង $b\geq 1$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\leq 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\sqrt{\log_2 a}+\sqrt{\log_2 b}\leq 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}$

គេមាន $a\geq 1$ និង $b\geq 1$

តាមវិសមភាព *Cauchy* គេបាន

$$a+b\geq 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$$

នាំឲ្យ $\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\log_2\left(\sqrt{ab}\right)$

$$\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right) \ge \frac{1}{2}\log_2(ab)$$

$$\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right) \ge \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$$

ឬ $\log_2 a + \log_2 b \le 2\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត តាមវិសមភាព *Cauchy*

$$\log_2 a + \log_2 b \ge 2\sqrt{\log_2 a \cdot \log_2 b}$$

$$2(\log_2 a + \log_2 b) \ge \log_2 a + 2\sqrt{\log_2 a \cdot \log_2 b} + \log_2 b$$

$$2(\log_2 a + \log_2 b) \ge \left(\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b}\right)^2$$

$$\log_2 a + \log_2 b \ge \frac{1}{2}\left(\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b}\right)^2 \quad (2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b}\right)^2 \le 2\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\left(\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b}\right)^2 \le 4\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \le \sqrt{4\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

$$\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \le 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

ដូចនេះ $\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \le 2\sqrt{\log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)}$ ។

លំហាត់ទី៧៨

ដោះស្រាយសមីការ $\cos x+\sin x-\sin x\cos x=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ

$\cos x+\sin x-\sin x\cos x=1$

តាង $t=\sin x+\cos x \Leftrightarrow t^2=(\sin x+\cos x)^2$

$$t^2=1+2\sin\cos x \Leftrightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

តាមរូបមន្ត $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

គេបាន $t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

សមីការទៅជា $t-\frac{t^2-1}{2}=1$

$$2t-t^2+1=2$$

$$t^2-2t+1=0$$

$$(t-1)^2=0$$

$$t=1$$

គេទាញបាន $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2k\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{array}\right. ,k\in\mathbb{Z}$$

ដូចនេះ $x=2k\pi, x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ ។

លំហាត់ទី៧៩

គេឲ្យ A,B,C ជារង្វាស់មុំទាំងបីនៃត្រីកោណមួយ។

បង្ហាញថា $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}$

តាមវិសមភាព *Cauchy* គេបាន

$$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}\geq 2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

$$\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geq 2\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geq 2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$$

បូកអង្គនឹងអង្គ គេបាន

$$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geq \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^2 \geq 3\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}\right) \quad (1)$$

ម្យ៉ាងទៀត ដោយ $A+B+C=\pi$

$$A+B=\pi-c$$

$$\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$$

$$\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$$

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\cot\frac{C}{2}$$

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

នាំឲ្យ $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=1$

តាម (1) គេបាន

$$\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^2 \geq 3$$

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}$$

ដូចនេះ $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៨០

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = x + iy$ ដែល $x, y \in \mathbb{R}$ ។

ចូរស្រាយថា $|z+1| = |z+i|$ លុះត្រាតែ $x = y$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $|z+1| = |z+i|$ លុះត្រាតែ $x = y$

គេត្រូវស្រាយទៅមក

ស្រាយថាបើ $|z+1| = |z+i|$ នាំឲ្យ $x = y$

គេមាន $|z+1| = |z+i|$

គេបាន $|x+iy+1| = |x+iy+i|$

$|x+1+iy| = |x+i(y+1)|$

នាំឲ្យ $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$

$(x+1)^2 + y^2 = x^2 + (y+1)^2$

$x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1$

$2x = 2y$

$x = y$

ស្រាយថាបើ $x = y$ នាំឲ្យ $|z+1| = |z+i|$

គេមាន $x = y$

នាំឲ្យ $z = x + iy = y + iy$

គេទាញបាន

$|z+1|=|y+iy+1|=|y+1+iy|=\sqrt{(y+1)^2+y^2}$

$|z+i|=|y+iy+i|=|y+i(y+1)|=\sqrt{y^2+(y+1)^2}$

នាំឲ្យ $|z+1|=|z+i|$

ដូចនេះ $|z+1|=|z+i|$ លុះត្រាតែ $x=y$ ។

លំហាត់ទី៨១

គេឲ្យស្វ៊ីត $0,1,1,2,2,3,3,4,4,\ldots,r,r,r+1,r+1,\ldots$ ។

ក. គណនា $f(n)$ ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ។

ខ. គេឲ្យ s,t ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $s>t$ ។

បង្ហាញថា $f(s+t)-f(s-t)=st$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា $f(n)$ ផលបូក n តួដំបូងនៃស្វ៊ីតនេះ

តាង $(a_n):0,1,1,2,2,3,3,4,4,\ldots,r,r,r+1,r+1,\ldots$

យក $b_n=a_n-a_{n-1}$ ជាស្វ៊ីតផលសងលំដាប់មួយនៃស្វ៊ីត (a_n)

នោះគ្រប់ $n\geq 2$ គេបាន $(b_n):1,01,0,1,0,\ldots$

គេទាញបាន $b_n=\dfrac{1+(-1)^m}{2}$ គ្រប់ $n\geq 2$

ដោយ $b_n=a_n-a_{n-1}$

នាំឲ្យ $\sum\limits_{k=2}^{n}b_k=\sum\limits_{k=2}^{n}(a_k-a_{k-1})$

$$\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1+(-1)^k}{2}\right]=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots+(a_n-a_{n-1})$$

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{2}=a_n-a_1$$

$$\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^2\frac{1-(-1)^{n-1}}{1-(-1)}=a_n-0$$

គេបាន $a_n=\frac{n-1}{2}+\frac{1+(-1)^n}{4}=\frac{2n-1}{4}+\frac{(-1)^n}{4}$

នាំឲ្យ $f(n)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2k-1}{4}+\frac{(-1)^k}{4}\right]=\frac{n^2}{4}-\frac{1-(-1)^n}{8}$

ដូចនេះ $f(n)=\frac{n^2}{4}$ បើ n គូ ។

$f(n)=\frac{n^2-1}{4}$ បើ n សេស ។

បង្ហាញថា $f(s+t)-f(s-t)=st$

គេមាន $f(n)=\frac{n^2}{4}-\frac{1-(-1)^n}{8}$

នាំឲ្យ $f(s+t)=\frac{(s+t)^2}{4}-\frac{1-(-1)^{s+t}}{8}$

$f(s-t)=\frac{(s-t)^2}{4}-\frac{1-(-1)^{s-t}}{8}$

ដកអង្គនឹងអង្គ គេបាន

$$f(s+t)-f(s-t)=\frac{(s+t)^2-(s-t)^2}{4}-\frac{1-(-1)^{s+t}-1+(-1)^{s-t}}{8}$$

$$=\frac{s^2+t^2+2st-s^2+2st-t^2}{4}-\frac{(-1)^{s-t}-(-1)^{s+t}}{8}$$

$= \frac{4st}{4} - 0 = st$ ពិត

ដូចនេះ $f(s+t) - f(s-t) = st$ ។

លំហាត់ទី៨២

បើ $\forall n \in \mathbb{N}$ គេមាន $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = n$ ។

ស្រាយថា $a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + ... + a_n^4 \geq n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + ... + a_n^4 \geq n$

តាមវិសមភាព $Cauchy - Schwarz$ គេបាន

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2 + ... + 1^1)(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + ... + a_n^4)$$

ដោយ $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = n$

គេបាន $n^2 \leq n(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + ... + a_n^4)$

$$n \leq a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + ... + a_n^4$$

ឬ $a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + ... + a_n^4 \geq n$

ដូចនេះ $a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + ... + a_n^4 \geq n$ ។

លំហាត់ទី៨៣

គេឲ្យ $\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{2^2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}=2\cos\frac{\pi}{2^3}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^4}$ ។

ពីឧទាហរណ៍ខាងលើ ចូររករូបមន្តទូទៅ និងស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនោះផង។

ដំណោះស្រាយ

រករូបមន្តទូទៅ និងស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្តនោះ

គេមាន $\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{2^2}$

$$\sqrt{2+\sqrt{2}}=2\cos\frac{\pi}{2^3}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^4}$$

តាមលំនាំគម្រូខាងលើ គេអាចទាញបានរូបមន្តទូទៅ

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

ដូចនេះ $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត

តាង $A_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}^*$

គេនឹងស្រាយតាមវិចារអនុមានរួម

គេមាន $A_1=\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{2^2}$ ពិត

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ

$$\underbrace{A_k=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{k}=2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$$

គេនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ

$$\underbrace{A_{k+1}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{k+1}=2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$$

គេមាន $A_{k+1}=\sqrt{2+A_k}$

ដោយ $A_k=2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$

នាំឲ្យ $A_{k+1}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}$

$$=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}$$

$$=\sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}}$$

$$=2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$$ ពិត

ដូចនេះ $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ ។

លំហាត់ទី៨៤

គេឲ្យ $a=2x+5$,$b=4x+3$ និង $c=10x+4$ ។

រក x ដើម្បីឲ្យ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ។

ដំណោះស្រាយ

រក x ដើម្បីឲ្យ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ

គេមាន $a=2x+5$,$b=4x+3$ និង $c=10x+4$

តាមវិសមភាពត្រីកោណ

$$\begin{cases} a+b>c \\ a+c>b \\ b+c>a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+8>10x+4 & (1) \\ 12x+9>4x+3 & (2) \\ 14x+7>2x+5 & (3) \end{cases}$$

តាម (1) គេបាន $6x+8>10x+4$

នាំឲ្យ $-4x>-4$

$x<1$

តាម (2) គេបាន $12x+9>4x+3$

នាំឲ្យ $8x>-6$

$x>\dfrac{-3}{4}$

តាម (3) គេបាន $14x+7>2x+5$

នាំឲ្យ $12x>-2$

$x>\dfrac{-1}{6}$

សរុបមក គេបាន $\frac{-1}{6} < x < 1$

ដូចនេះ $\frac{-1}{6} < x < 1$ ។

លំហាត់ទី៨៥

គេមានកន្សោម $P_n = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2^2} \cdot ... \cdot \cos\frac{x}{2^n}$ ។

បង្ហាញថា $P_n = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $P_n = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}$

តាមរូបមន្ត $\sin 2a = 2\sin a \cos a$

នាំឲ្យ $\cos a = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2a}{\sin a}$

យក $a = \frac{x}{2^n}$

គេបាន $\cos\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{\sin\frac{x}{2^n}}$

$n = 1$ នាំឲ្យ $\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2}}$

$n=2$ នាំឲ្យ $\cos\frac{x}{2^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2^2}}$

....

$n=n$ នាំឲ្យ $\cos\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{\sin\frac{x}{2^n}}$

គុណអង្គនឹងអង្គ គេបាន

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$P_n=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

ដូចនេះ $P_n=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}$ ។

លំហាត់ទី៨៦

គេឲ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ z_1 និង z_2 ដែល $z_1\neq z_2$ ហើយ $|z_1|=|z_2|=1$ ។
ចូរស្រាយថាគ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច w គេបាន $\frac{w+z_1z_2\overline{w}-(z_1+z_2)}{z_1-z_2}$ ជាចំនួននិមិត្ត។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\dfrac{w+z_1z_2\overline{w}-(z_1+z_2)}{z_1-z_2}$ ជាចំនួននិមិត្ត

តាង $Z=\dfrac{w+z_1z_2\overline{w}-(z_1+z_2)}{z_1-z_2}$

គេបាន $\overline{Z}=\dfrac{\overline{w}+\overline{z_1}\,\overline{z_2}w-(\overline{z_1}+\overline{z_2})}{\overline{z_1}-\overline{z_2}}$

ដោយ $z_1\cdot\overline{z_1}=|z_1|^2=1\Rightarrow\overline{z_1}=\dfrac{1}{z_1}$

$z_2\cdot\overline{z_2}=|z_2|^2=1\Rightarrow\overline{z_2}=\dfrac{1}{z_2}$

គេបាន $\overline{Z}=\dfrac{\overline{w}+\dfrac{1}{z_1z_2}w-\left(\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}\right)}{z_2-z_1}$

$=\dfrac{z_1z_2\overline{w}+w-(z_1+z_2)}{\dfrac{1}{z_1}-\dfrac{1}{z_2}}$

$=-\dfrac{w+z_1z_2\overline{w}-(z_1+z_2)}{z_1-z_2}=-Z$

គេបាន $\overline{Z}=-Z$ ឬ $Z+\overline{Z}=0$

នាំឲ្យ $\text{Re}(Z)=\dfrac{Z+\overline{Z}}{2}=0$

ដូចនេះ $\dfrac{w+z_1z_2\overline{w}-(z_1+z_2)}{z_1-z_2}$ ជាចំនួននិមិត្ត ។

លំហាត់ទី៨៧

ឧបមាថា x_1, x_2, x_3, x_4 ជាឫសនៃសមីការ $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $A = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ $A = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$

តាង $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n$ ដែល $n \in \mathbb{Z}$ គេបាន $A = S_4$

គេមាន $x_k, k = 1,2,3,4$ ជាឫសនៃសមីការ

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$$

នោះគេបាន $x_k^4 - 3x_k^3 + 2x_k^2 - x_k - 1 = 0$ (1)

គុណអង្គទាំងពីរនៃ (1) នឹង x_k^n គេបាន

$$x_k^{n+4} - 3x_k^{n+3} + 2x_k^{n+2} - x_k^{n+1} - x_k^n = 0$$

នាំឲ្យ $\sum_{k=1}^{4}(x_k^{n+4} - 3x_k^{n+3} + 2x_k^{n+2} - x_k^{n+1} - x_k^n) = 0$

ឬ $S_{n+4} - 3S_{n+3} + 2S_{n+2} - S_{n+1} - S_n = 0$

នោះ $S_{n+4} = 3S_{n+3} - 2S_{n+2} + S_{n+1} + S_n$ (2)

យក $n = 0$ ជួសក្នុង (2)

គេបាន $S_4 = 3S_3 - 2S_2 + S_1 + S_0$ (3)

យក $n = -1$ ជួសក្នុង (2)

គេបាន $S_3 = 3S_2 - 2S_1 + S_0 + S_{-1}$ (4)

គេមាន

$$S_0 = 1+1+1+1 = 4$$

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_3x_4)$$

$$= 3^2 - 2(2) = 5$$

$$S_{-1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$$

$$= \frac{x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4}$$

$$= \frac{1}{-1} = -1$$

តាម (4) គេបាន $S_3 = 3S_2 - 2S_1 + S_0 + S_{-1}$

$$= 3(5) - 2(3) + (4) + (-1) = 12$$

តាម (3) គេបាន $S_4 = 3S_3 - 2S_2 + S_1 + S_0$

$$= 3(12) - 2(5) + (3) + (4)$$

$$= 33$$

ដូចនេះ $A = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 33$ ។

លំហាត់ទី៨៨

គេឲ្យ $x^2+y^2=1$ និង $bx^2=ay^2$ ដែល $a,b\neq 0$ ។

ស្រាយបំភ្លឺថា $\dfrac{x^{2020}}{a^{1010}}+\dfrac{y^{2020}}{b^{1010}}=\dfrac{2}{(a+b)^{1010}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបំភ្លឺថា $\dfrac{x^{2020}}{a^{1010}}+\dfrac{y^{2020}}{b^{1010}}=\dfrac{2}{(a+b)^{1010}}$

គេមាន $bx^2=ay^2$

នាំឲ្យ $\dfrac{x^2}{a}=\dfrac{y^2}{b}=\dfrac{x^2+y^2}{a+b}=\dfrac{1}{a+b}$

$$\frac{x^2}{a}=\frac{1}{a+b}\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{a}\right)^{1010}=\left(\frac{1}{a+b}\right)^{1010}$$

$$\frac{x^{2020}}{a^{1010}}=\frac{1}{(a+b)^{1010}}\qquad(1)$$

$$\frac{y^2}{b}=\frac{1}{a+b}\Leftrightarrow\left(\frac{y^2}{b}\right)^{1010}=\left(\frac{1}{a+b}\right)^{1010}$$

$$\frac{y^{2020}}{b^{1010}}=\frac{1}{(a+b)^{1010}}\qquad(2)$$

យក (1) បូក (2) គេបាន

$$\frac{x^{2020}}{a^{1010}}+\frac{y^{2020}}{b^{1010}}=\frac{1}{(a+b)^{1010}}+\frac{1}{(a+b)^{1010}}=\frac{2}{(a+b)^{1010}}$$

ដូចនេះ $\dfrac{x^{2020}}{a^{1010}}+\dfrac{y^{2020}}{b^{1010}}=\dfrac{2}{(a+b)^{1010}}$ ។

លំហាត់ទី៨៩

រកគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $n^4-4n^3+22n^2-36n+18$ ជាការេប្រាកដ។

ដំណោះស្រាយ

រកគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមានដែល $n^4-4n^3+22n^2-36n+18$ ជាការេប្រាកដ

គេមាន

$$n^4-4n^3+22n^2-36n+18$$
$$=n^4-4n^3+4n^2+18n^2-36n+18$$
$$=(n^2-2n)^2+18(n^2-2n)+18$$
$$=(n^2-2n)^2+18(n^2-2n)+81-63$$

តាង $x=n^2-2n$ និង $y^2=n^4-4n^3+22n^2-36n+18$

គេបាន $y^2=x^2+18x+81-63$

$$y^2=(x+9)^2-63$$

នាំឲ្យ $(x+9)^2-y^2=63$

$$(x+9-y)(x+9+y)=63$$

ដោយ $x+9-y<x+9+y$

ហើយ $63=1\times63=3\times21=9\times7$

គេទាញបាន

$$\begin{cases}x+9-y=1\\x+9+y=63\end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases}x+9-y=3\\x+9+y=21\end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases}x+9-y=7\\x+9+y=9\end{cases}$$

- ករណី $\begin{cases} x+9-y=1 \\ x+9+y=63 \end{cases}$

នាំឲ្យ $\begin{cases} x-y=-8 \\ x+y=54 \end{cases}$

គេបាន $x=23, y=31$ មិនពិត ព្រោះ 31 មិនមែនជាការេប្រាកដ

- ករណី $\begin{cases} x+9-y=3 \\ x+9+y=21 \end{cases}$

នាំឲ្យ $\begin{cases} x-y=-6 \\ x+y=12 \end{cases}$

គេបាន $x=3, y=9$

- ករណី $\begin{cases} x+9-y=7 \\ x+9+y=9 \end{cases}$

នាំឲ្យ $\begin{cases} x-y=-2 \\ x+y=0 \end{cases}$

គេបាន $x=-1, y=1$

- បើ $x=3$ នាំឲ្យ $n^2-2n=3 \Leftrightarrow n^2-2n-3=0$

គេទាញបាន $n=3, n=-1$ (មិនយក)

- បើ $x=-1$ នាំឲ្យ $n^2-2n=-1 \Leftrightarrow n^2-2n+1=0$

គេទាញបាន $n=1$

ដូចនេះ $n=1, n=3$ ។

លំហាត់ទី៩០

គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ចូរបង្ហាញថា $(n+1)^n\ge 2\times4\times6\times...\times2n$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាព $AM-GM$

$$2+4+6+...+2n\ge n\sqrt[n]{2\times4\times6\times...\times2n}\quad (1)$$

តែ $2+4+6+..+2n=2(1+2+3+...+n)$

$$=2\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=n(n+1)$$

តាម (1) គេបាន

$$n(n+1)\ge n\sqrt[n]{2\times4\times6\times...\times2n}$$

$$n+1\ge\sqrt[n]{2\times4\times6\times...\times2n}$$

$$(n+1)^n\ge 2\times4\times6\times...\times2n$$

ដូចនេះ $(n+1)^n\ge 2\times4\times6\times...\times2n$ ។

លំហាត់ទី៩១

គ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ចូរបង្ហាញថា $n^n\ge 1\times3\times5\times...\times(2n-1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាមវិសមភាព $AM-GM$

$$1+3+5+...+(2n-1)\ge n\sqrt[n]{1\times3\times5\times...\times(2n-1)}\quad (1)$$

តែ $1+3+5+..+(2n-1)=n^2$

តាម (1) គេបាន

$n^2 \geq n\sqrt[n]{1\times 3\times 5\times ...\times (2n-1)}$

$n \geq \sqrt[n]{1\times 3\times 5\times ...\times (2n-1)}$

$n^n \geq 1\times 3\times 5\times ...\times (2n-1)$

ដូចនេះ $n^n \geq 1\times 3\times 5\times ...\times (2n-1)$ ។

លំហាត់ទី៩២

ដោះស្រាយសមីការ $\dfrac{3^{x^2-x}}{3^x}+\dfrac{4^{x^2-x}}{4^x}+\dfrac{5^{x^2-x}}{5^x}=\dfrac{6^{x^2-x}}{6^x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ

$$\frac{3^{x^2-x}}{3^x}+\frac{4^{x^2-x}}{4^x}+\frac{5^{x^2-x}}{5^x}=\frac{6^{x^2-x}}{6^x}$$

$$3^{x^2-2x}+4^{x^2-2x}+5^{x^2-2x}=6^{x^2-2x}$$

តាង $t=x^2-2x=(x-1)^2-1\geq -1$

សមីការអាចសរសេរទៅជា $3^t+4^t+5^t=6^t$ (1)

បើ $t=3$

គេបាន $3^3+4^3+5^3=6^3$

$27+64+125=216$

$216=216$ ផ្ទៀងផ្ទាត់

ដូចនេះ $t=3$ ជាឫសនៃសមីការ (1)

- បើ $-1\le t<3$

គេបាន $\left(\frac{3}{6}\right)^t>\left(\frac{3}{6}\right)^3$, $\left(\frac{4}{6}\right)^t>\left(\frac{4}{6}\right)^3$, $\left(\frac{5}{6}\right)^t>\left(\frac{5}{6}\right)^3$

បូកអង្គនឹងអង្គ គេបាន

$$\left(\frac{3}{6}\right)^t+\left(\frac{4}{6}\right)^t+\left(\frac{5}{6}\right)^t>\left(\frac{3}{6}\right)^3+\left(\frac{4}{6}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$\frac{3^t+4^t+5^t}{6^t}>1$$

$$3^t+4^t+5^t>6^t$$

ដូចនេះសមីការ (1) គ្មានឫសចំពោះ $-1\le t<3$

- បើ $t>3$

គេបាន $\left(\frac{3}{6}\right)^t<\left(\frac{3}{6}\right)^3$, $\left(\frac{4}{6}\right)^t<\left(\frac{4}{6}\right)^3$, $\left(\frac{5}{6}\right)^t<\left(\frac{5}{6}\right)^3$

បូកអង្គនឹងអង្គ គេបាន

$$\left(\frac{3}{6}\right)^t+\left(\frac{4}{6}\right)^t+\left(\frac{5}{6}\right)^t<\left(\frac{3}{6}\right)^3+\left(\frac{4}{6}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$\frac{3^t+4^t+5^t}{6^t}<1$$

$$3^t+4^t+5^t<6^t$$

ដូចនេះសមីការ (1) គ្មានឫសចំពោះ $t>3$

សរុបមកសមីការ (1) គ្មានឫសចំពោះ $t=3$

ចំពោះ $t=3$ នាំឲ្យ $x^2-2x=3$

$$x^2-2x-3=0$$

$$(x+1)(x-3)=0$$

គេទាញបាន $x=-1, x=3$

ដូចនេះ $x=-1, x=3$ ។

លំហាត់ទី៩៣

គ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច z និង w ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច z និង w ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$$

គេមាន

$$|z+w|^2=(z+w)\overline{(z+w)}=(z+w)(\bar{z}+\bar{w})$$
$$=z\bar{z}+w\bar{w}+z\bar{w}+\bar{z}w \quad (1)$$

$$|z-w|^2=(z-w)\overline{(z-w)}=(z-w)(\bar{z}-\bar{w})$$
$$=z\bar{z}+w\bar{w}-z\bar{w}-\bar{z}w \quad (2)$$

យក (1) បូកនឹង (2) គេបាន

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(z\bar{z}+w\bar{w})$$

ដោយ $z\bar{z}=|z|^2$ និង $w\bar{w}=|w|^2$

គេបាន $|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$

ដូចនេះ $|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$ ។

លំហាត់ទី៩៤

ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b,c ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$

តាមវិសមភាព $Cauchy$ គេបាន

$$(a+b)+(b+c)+(a+c)\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(a+c)}$$

$$2(a+b+c)\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(a+c)} \quad (1)$$

តាមវិសមភាព $Cauchy$ គេបាន

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)(b+c)(a+c)}} \quad (2)$$

យក (1) គុណនឹង (2) គេបាន

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)\geq 9\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{(a+b)(b+c)(a+c)}}$$

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)\geq 9$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)\geq\frac{9}{2}$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)\geq\frac{9}{2}$$

$$\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}\geq\frac{9}{2}$$

$$1+\frac{c}{a+b}+1+\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{a+c}\geq\frac{9}{2}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+3\geq\frac{9}{2}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{9}{2}-3$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{9-6}{2}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

ដូចនេះ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី៩៥

រកត្រីធាតុ (x,y,z) ជាចំនួនពិតរបស់ប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases}\frac{4y^2}{4y^2+1}=y\\ \frac{4z^2}{4z^2+1}=z\\ \frac{4x^2}{4x^2+1}=x\end{cases}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រកត្រីធាតុ (x,y,z)

គេឃើញថាត្រូ $(x,y,z)=(0,0,0)$ ជាចម្លើយមួយ

ប្រព័ន្ធសមីការអាចសរសេរជា

$$\begin{cases} 1+\dfrac{1}{4x^2}=\dfrac{1}{y} \\ 1+\dfrac{1}{4y^2}=\dfrac{1}{z} \\ 1+\dfrac{1}{4z^2}=\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

បូកអង្គនិងអង្គ គេបាន

$$\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{x}+1+\frac{1}{4y^2}-\frac{1}{y}+1+\frac{1}{4z^2}-\frac{1}{z}+1=0$$

$$\left(\frac{1}{2x}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2y}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2z}-1\right)^2=0$$

គេទាញបាន $x=y=z=\dfrac{1}{2}$

ដូចនេះ គូចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការគឺ $(x,y,z)=(0,0,0),\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ ។

លំហាត់ទី៩៦

គេឲ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (x_n) កំណត់ដោយ $x_1=0$ និង
$x_{n+1}=5x_n+\sqrt{24x_n^2+1}$ គ្រប់ $n=1,2,3,..$ ។
ចូរស្រាយថាគ្រប់តួទាំងអស់នៃស្វ៊ីតសុទ្ធតែជាចំនួនគត់។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថាគ្រប់តួទាំងអស់នៃស្វ៊ីតសុទ្ធតែជាចំនួនគត់

គេមាន $x_{n+1}=5x_n+\sqrt{24x_n^2+1}$ គ្រប់ $n=1,2,3,..$

សមមូល $x_{n+1}-5x_n=\sqrt{24x_n^2+1}$

$$(x_{n+1}-5x_n)^2=24x_n^2+1$$

$$x_{n+1}^2-10x_nx_{n+1}+25x_n^2=24x_n^2+1$$

$$x_{n+1}^2-10x_nx_{n+1}+x_n^2-1=0 \quad (1)$$

ចំពោះ $n\geq 2$ គេទាញ $x_n^2-10x_{n-1}x_n+x_{n-1}^2-1=0$ (2)

យក (1) ដក (2) គេបាន

$$x_{n+1}^2-x_{n-1}^2-10x_nx_{n+1}+10x_{n-1}x_n=0$$

$$(x_{n+1}-x_{n-1})(x_{n+1}+x_{n-1})-10x_n(x_{n+1}-x_{n-1})=0$$

$$(x_{n+1}-x_{n-1})(x_{n+1}+x_{n-1}-10x_n)=0 \quad (3)$$

ដោយ $x_{n+1}=5x_n+\sqrt{24x_n^2+1}$

នាំឲ្យ $x_{n+1}-x_n=4x_n+\sqrt{24x_n^2+1}>0$ គ្រប់ $n=1,2,3,..$ និង $x_1=0$

នាំឲ្យ (x_n) ស្វ៊ីតកើន

គេបាន $x_{n+1} > x_n > x_{n-1}$ នោះ $x_{n+1} - x_{n-1} \neq 0$

តាមសមីការ (3) ចំពោះគ្រប់ $n \geq 2$ គេបាន

$$x_{n+1} + x_{n-1} - 10x_n = 0 \quad (4)$$

គេមាន $x_1 = 0$

$$x_2 = 5x_1 + \sqrt{1 + 24x_1^2} = 1$$

តាម (4) $x_3 + x_1 - 10x_2 = 0$

ឬ $x_3 = 10x_2 - x_1 = 10$

គេបាន x_1, x_2, x_3 ជាចំនួនគត់

ឧបមាថាពិតដល់ n គឺ x_n ជាចំនួនគត់

គេនឹងស្រាយថាពិតដល់ $n+1$ គឺ x_{n+1} ជាចំនួនគត់ដែរ

ដោយ $x_{n+1} + x_{n-1} - 10x_n = 0$

នោះ $x_{n+1} = 10x_n - x_{n-1}$

តែតាមការឧបមា x_n, x_{n-1} ជាចំនួនគត់

នោះ $x_{n+1} = 10x_n - x_{n-1}$ ក៏ជាចំនួនគត់ដែរ

ដូចនេះ គ្រប់តួទាំងអស់នៃស្វ៊ីតសុទ្ធតែជាចំនួនគត់។

លំហាត់ទី៩៧

គេឲ្យស្វ៊ីត (u_n) កំណត់ដោយ $u_1 = 2$ និង $2u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n(n+1)\cdot 2^n}$ ។

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $2u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n(n+1)\cdot 2^n}$

$$2u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n(n+1)\cdot 2^n}$$

$$2^{n+1}u_{n+1} - 2^n u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$2^{n+1}u_{n+1} - 2^n u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2^{k+1}u_{k+1} - 2^k u_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2^{k+1}u_{k+1} - 2^k u_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$2^n u_n - 2u_1 = 1 - \frac{1}{n}$$

$$2^n u_n - 4 = 1 - \frac{1}{n}$$

$$2^n u_n = 5 - \frac{1}{n}$$

$$2^n u_n = \frac{5n-1}{n}$$

$$u_n = \frac{5n-1}{n\cdot 2^n}$$

ដូចនេះ $u_n = \frac{5n-1}{n\cdot 2^n}$ ។

លំហាត់ទី៩៨

ដោះស្រាយសមីការ $3^{\sin 2x+2\cos^2 x}+3^{1-2\sin 2x+2\sin^2 x}=28$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ $3^{\sin 2x+2\cos^2 x}+3^{1-2\sin 2x+2\sin^2 x}=28$

គេបាន

$$3^{\sin 2x+2\cos^2 x}+3^{1-2\sin 2x+2(1-\cos^2 x)}=28$$

$$3^{\sin 2x+2\cos^2 x}+3^{3-2\sin 2x-2\cos^2 x}=28$$

$$3^{\sin 2x+2\cos^2 x}+27\cdot 3^{-2\sin 2x-2\cos^2 x}=1+27$$

$$3^{\sin 2x+2\cos^2 x}-1+27\cdot 3^{-2\sin 2x-2\cos^2 x}-27=0$$

$$\left(3^{\sin 2x+2\cos^2 x}-1\right)+27\left(3^{-2\sin 2x-2\cos^2 x}-1\right)=0$$

សមីការត្រូវបានផ្ទៀងផ្ទាត់បើ

$$\begin{cases} 3^{\sin 2x+2\cos^2 x}-1=0 \\ 3^{-2\sin 2x-2\cos^2 x}-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^{\sin 2x+2\cos^2 x}=1 \\ 3^{-2\sin 2x-2\cos^2 x}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^{\sin 2x+2\cos^2 x} = 3^0 \\ 3^{-2\sin 2x-2\cos^2 x} = 3^0 \end{cases}$$

គេទាញបាន

$$\begin{cases} \sin 2x + 2\cos^2 x = 0 \\ -2\sin 2x - 2\cos^2 x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2x + 2\cos^2 x = 0 \\ -\sin 2x - \cos^2 x = 0 \end{cases}$$

បូកអង្គនឹងអង្គ គេបាន $\cos^2 x = 0$

នាំឲ្យ $\cos x = 0$

គេទាញបាន $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ដែល $k \in \mathbb{Z}$

ដូចនេះ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ដែល $k \in \mathbb{Z}$ ។

លំហាត់ទី៩៩

គេឲ្យអនុគមន៍ f ដែល $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)...(x-2019)$ ។

ចូរគណនាតម្លៃនៃ $f'(1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃនៃ $f'(1)$ ។

តាមនិយមន័យនៃដេរីវេ យើងបាន

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

ដោយ $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)...(x-2019)$

នោះ $f(1)=(1-1)(1-2)(1-3)...(1-2019)=0$

គេបាន $f'(1)=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)...(x-2019)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}(x-2)(x-3)...(x-2019)$

$=(1-2)(1-3)...(1-2019)$

$=(-1)(-2)...(-2018)$

$=2018!$

ដូចនេះ $f'(1)=2018!$ ។

លំហាត់ទី១០០

គេឲ្យ បីចំនួនជាស៊ីតនព្វន្ត និងបីចំនួនទៀតជាស៊ីតធរណីមាត្រ។ ដោយដឹងថា ផលបូកតួដែលមានតួទីដូចគ្នាគឺ $85, 76, 84$ រៀងគ្នា ហើយផលបូកតួទាំងបីនៃស៊ីតនព្វន្តគឺ 126 ចូរគណនាតួទាំង 6 ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាតួទាំង 6

តាង a,b,c ជាបីតួតគ្នានៃស៊ីតនព្វន្ត

a',b',c' ជាបីតួតគ្នានៃស៊ីតធរណីមាត្រ

តាមសម្មតិកម្ម គេបាន

$a+a'=85$

$b+b'=76$

$c+c'=84$

បូកអង្គនឹងអង្គ គេបាន

$a+b+c+a'+b'+c'=85+84+76$

$a+b+c+a'+b'+c'=245$

ដោយ $a+b+c=126$

គេបាន

$126+a'+b'+c'=245$

$a'+b'+c'=245-126$

$a'+b'+c'=119$

ម្យ៉ាងទៀត $a+b+c=126$

$$2b+b=126 \Leftrightarrow 3b=126 \Leftrightarrow b=\frac{126}{3}=42$$

$b+b'=76 \Rightarrow b'=76-b=76-42=34$

$a'+b'+c'=119 \Rightarrow a'+c'=119-b'=119-34=85 \quad (1)$

ដោយ a',b',c' ជាបីតួតគ្នានៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេបាន $a'c'=(b')^2=(34)^2=1156 \quad (2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន a' និង c' ជាឫសនៃសមីការ

$x^2-85x+1156=0$

$(x-17)(x-68)=0$

$x=17, x=68$

គេបាន $a'=17, c'=68$ ឬ $a'=68, c'=17$

- បើ $a'=17, c'=68$

$a'=17 \Rightarrow a=85-17=68$

$c'=68 \Rightarrow c=84-68=16$

- បើ $a'=68, c'=17$

$a'=68 \Rightarrow a=85-68=17$

$c'=17 \Rightarrow c=84-17=67$

ដូចនេះ សរុបមកគេបានចម្លើយ

$a=68, b=42, c=16$ និង $a'=17, b'=34, c'=68$

ឬ $a=17, b=42, c=67$ និង $a'=68, b'=34, c=17$ ។