Mathematical Olympiad

លំហាត់គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី ១២

សម្រាប់

សិស្សពូកែថ្នាក់ជាតិ និង អូឡាំព្យាដ

រៀបរៀងដោយលោក:

នូ ច័ន្ទណារិទ្ធិ

រក្សាសិទ្ធិគ្រប់យ៉ាង © 2018

ផ្នែកទី ១

លំហាត់មានដំណោះស្រាយ

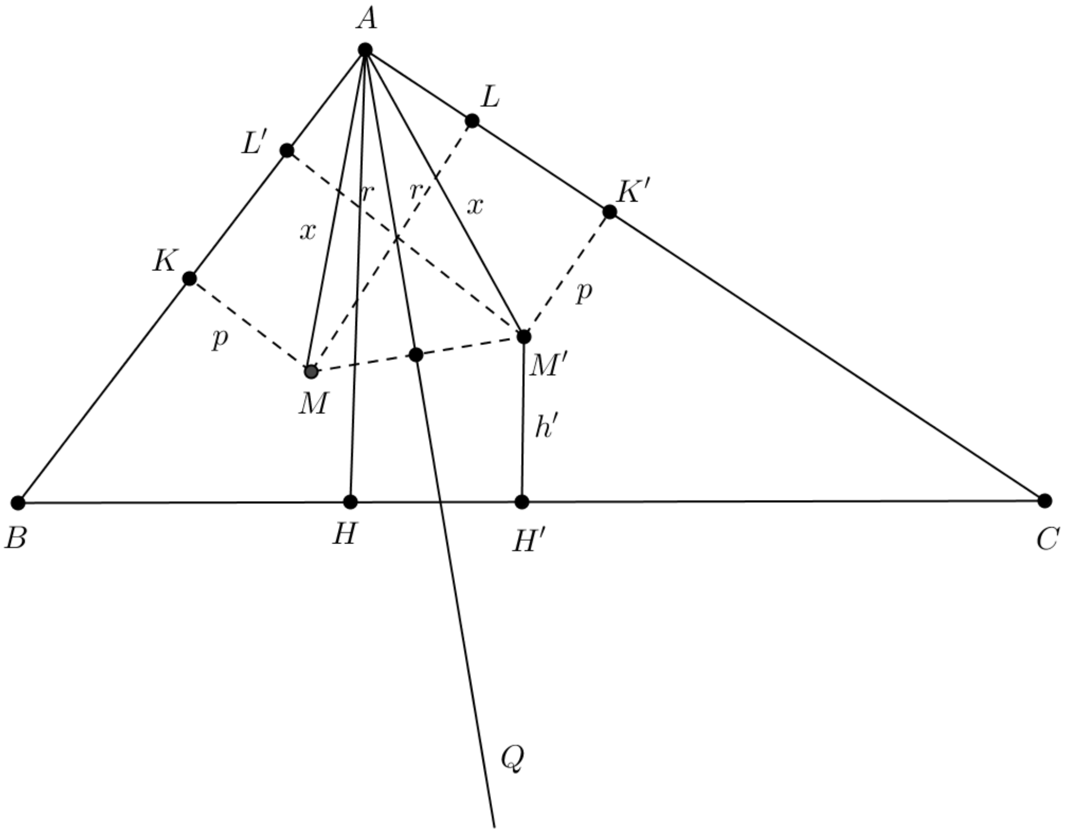
លំហាត់ទី ០១: M ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ ABC ។ តាង $MA = x, MB = y$ និង $MC = z$ ។ p, q, r ជាប្រវែងចំណោលកែងនៃចំណុច M ទៅលើជ្រុង AB, BC និង CA នៃត្រីកោណ ABC ។

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x + y + z \geq 2(p + q + r)$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $xyz \geq 8pqr$ ។

ដំណោះស្រាយ:

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x + y + z \geq 2(p + q + r)$



តាង $[AQ)$ ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle BAC$

M' ឆ្លុះ M ធៀបនឹង $[AQ)$

$AM = AM' = x$

$MK = M'K' = p$

$ML = M'L' = r$

គេមាន $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta M'CA} + S_{\Delta M'BA} + S_{\Delta M'BC}$

$ah_a = ah' + bp + cr$

នាំអោយ $bp + cr = a(h_a - h') \le ax$

នាំអោយ $x \ge \frac{b}{a}p + \frac{c}{a}r$

តាមសម្រាយដូចគ្នា: $y \ge \frac{c}{a}r + \frac{b}{c}q$, $z \ge \frac{c}{b}q + \frac{a}{b}p$

យើងបាន : $x + y + z \ge \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)r + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)p + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right)q$

តាមវិសមភាព Cauchy:

$x + y + z \ge 2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}\cdot r + 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}\cdot p + 2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}\cdot q$

ដូចនេះ $x + y + z \ge 2(p + q + r)$ ។

ខ. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $xyz \ge 8pqr$

ដោយ $x \ge \frac{c}{a}r + \frac{b}{a}p \ge 2\sqrt{\frac{bc}{a^2}pr}$

$y \ge \frac{a}{c}r + \frac{b}{c}q \ge 2\sqrt{\frac{ab}{c^2}qr}$

$z \ge \frac{c}{b}q + \frac{a}{b}p \ge 2\sqrt{\frac{ca}{b^2}pq}$

នាំអោយ $xyz \ge 8pqr$

ដូចនេះ $xyz \ge 8pqr$ ។

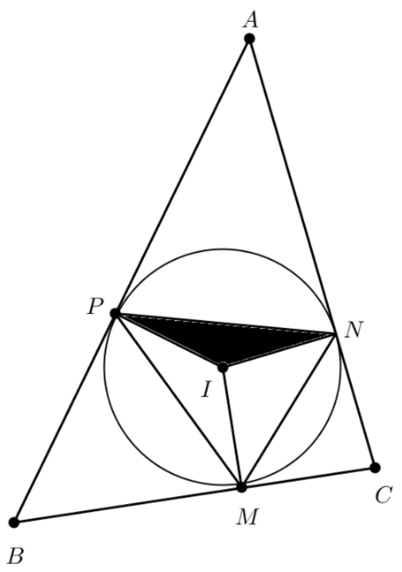
លំហាត់ទី ០២: R និង r ជាកាំរង្វង់ចារិកក្រៅ និង កាំរង្វង់ចារិកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ។ តាង I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្នុង ហើយ M, N, P ជាជើងចំណោលកែងនៃ I ទៅលើជ្រុង BC, CA, AB ។

ក. បង្ហាញថា $\frac{R}{r} \ge 2$ ។

ខ. $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MNP}} \ge 4$ ។

ដំណោះស្រាយ:

ក. បង្ហាញថា $\frac{R}{r} \ge 2$



ផ្ទៃក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC :

$$S=\frac{abc}{4R}=rp \Rightarrow R=\frac{abc}{4S} \text{ និង } r=\frac{S}{p}$$

នាំអោយ $\frac{R}{r}=\frac{pabc}{4S^2}$ (1)

តែតាមរូបមន្តហេរ៉ុង $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c) \quad (2)$$

តាម (1) និង (2): $\frac{R}{r}=\frac{abc}{4(p-a)(p-b)(p-c)}$

តាមវិសមភាព Cauchy:

$$(p-a)(p-b)\le\left(\frac{p-a+p-b}{2}\right)^2=\frac{c^2}{4}$$

$$(p-b)(p-c)\le\left(\frac{p-b+p-c}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$$

$$(p-c)(p-a)\le\left(\frac{p-c+p-a}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4}$$

នាំអោយ $\left[(p-a)(p-b)(p-c)\right]^2\le\frac{a^2b^2c^2}{64}$

នាំអោយ $(p-a)(p-b)(p-c)\le\frac{abc}{8}$

នោះ $\frac{abc}{4(p-a)(p-b)(p-c)}\ge 2$

ដូចនេះ $\frac{R}{r}\ge 2$ ។

ខ. $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MNP}} \geq 4$

ដោយ $\angle API + \angle ANI = 180^0$ នោះចតុកោណ $APIN$ ចារិកក្នុងរង្វង់

នាំអោយ $\angle PAN + \angle NIP = 180^0$

នោះ $\sin\angle NIP = \sin A$

យើងបាន:

$$\frac{S_{\Delta IPN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot IP\cdot IN\cdot \sin\angle NIP}{\frac{1}{2}bc\sin A} = \frac{r^2\sin A}{bc\sin A} = \frac{r^2}{bc}$$

តាមសម្រាយដូចគ្នា $\frac{S_{\Delta IMP}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{r^2}{ca}$, $\frac{S_{\Delta IMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{r^2}{ab}$

នាំអោយ $\frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta ABC}} = r^2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) = r^2\left(\frac{a+b+c}{abc}\right)$

$$\frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{2pr^2}{abc}$$

ដោយ $r^2 = \frac{S^2}{p^2} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$

នោះ $\frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$

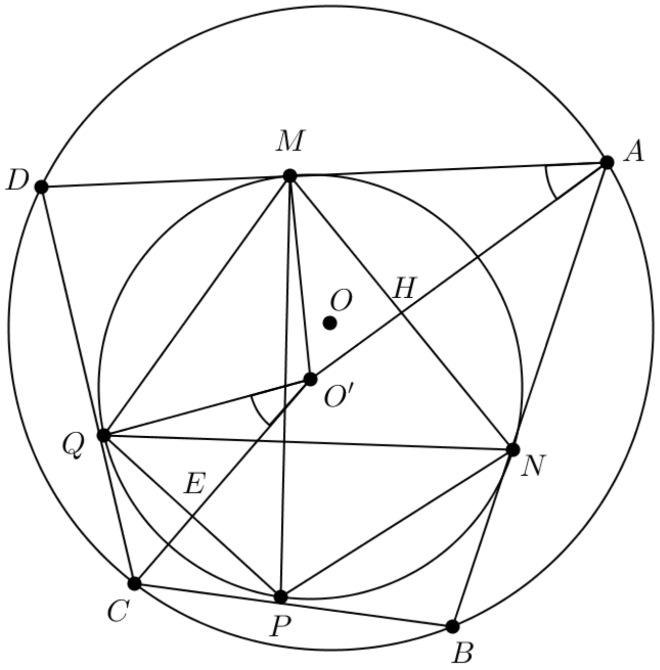
នោះ $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MNP}} = \frac{abc}{2(p-a)(p-b)(p-c)} \geq 4$

ដូចនេះ $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MNP}} \geq 4$ ។

លំហាត់ទី ០៣: ចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មួយចារិកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O និង ចារិកក្រៅរង្វង់ផ្ចិត O' ។ តាង M, N, P, Q ជាចំណុចប៉ះរៀងគ្នា រវាងរង្វង់ផ្ចិត O' ជាមួយជ្រុង AB, BC, CD, DA ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $MP \perp NQ$ ។

ដំណោះស្រាយ:

ស្រាយបញ្ជាក់ថា $MP \perp NQ$



តាង H ជាចំណុចប្រសព្វរវាង MN និង AO' [1]

E ជាចំណុចប្រសព្វរវាង QP និង CO'

ចតុកោណ $ABCD$ ចារឹកក្នុងរង្វង់ផ្ចិត O នោះ $\angle A+\angle C=180^0$ [2]

AM និង AN ជាបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ផ្ចិត O' ហើយគូសចេញពីកំពូលតែមួយ A នោះ $\angle O'AM=\dfrac{1}{2}\angle A$

ដូចគ្នាដែរ $\angle O'CQ=\dfrac{1}{2}\angle C$

នាំអោយ $\angle O'AM+\angle O'CQ=90^0$

នោះ $\angle O'AM=\angle CO'Q$ (មុំបំពេញនៃ $\angle O'CQ$)

$\Delta O'MA\sim\Delta CQO'$ (ករណីដំនូច ម.ម)

ផលធៀបដំនូច $\dfrac{O'M}{CQ}=\dfrac{MA}{QO'}$

យក $AM=AN=x, BN=BP=y, CP=CQ=z, DQ=DM=t$ និង $O'M=O'Q=r$

គេទាញបាន : $\dfrac{r}{z}=\dfrac{x}{r}$ នោះ $r^2=x.z$

ស្រាយដូចគ្នា $\Delta O'NB\sim\Delta DMO'$

---

[1] គេអាចសរសេរ $MN\cap AO'=\{H\}$ និង $QP\cap CO'=\{E\}$

[2] ចតុកោណ $ABCD$ មួយចារឹកក្នុងរង្វង់កាលណាផលបូកមុំឈមគ្នារបស់វាស្មើ 180^0

ផលធៀបដំនូច $\frac{O'N}{DM}=\frac{NB}{MO'}$ ឬ $\frac{r}{t}=\frac{y}{r}$

នោះ $r^2=t.y=x.z$

តាមទំនាក់ទំនងមាត្រក្នុងត្រីកោណកែង $O'MA$:

$$\frac{1}{MH^2}=\frac{1}{MA^2}+\frac{1}{O'M^2} \text{ ឬ } \frac{1}{\left(\frac{1}{2}MN\right)^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{r^2}$$

នាំអោយ $MN^2=\frac{4x^2r^2}{x^2+r^2}=\frac{4x^2(x.z)}{x^2+(x.z)}=\frac{4x^2z}{x+z}$

ស្រាយដូចគ្នា $PQ^2=\frac{4xz^2}{x+z}$, $NP^2=\frac{4y^2t}{y+t}$, $MQ^2=\frac{4yt^2}{y+t}$

យើងបាន : $MN^2+PQ^2=\frac{4x^2z}{x+z}+\frac{4xz^2}{x+z}=\frac{4xz(x+z)}{x+z}=4xz=4r^2$

$$NP^2+MQ^2=\frac{4y^2t}{y+t}+\frac{4yt^2}{y+t}=\frac{4yt(y+t)}{y+t}=4yt=4r^2$$

នាំអោយ ចតុកោណ $MNPQ$ មានទំនាក់ទំនង $MN^2+PQ^2=NP^2+MQ^2$ [3]

ដូចនេះ $MT\perp NQ$ ។

---

[3] បើចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មានអង្កត់ទ្រូង AC និង BD ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច O ហើយវាមានទំនាក់ទំនង $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$ នោះ $AC\perp BD$ ត្រង់ចំណុច O នោះ ។

លំហាត់ទី ០៤: គេអោយ α,β និង γ ជារង្វាស់មុំក្នុងនៃត្រីកោណ ABC មួយ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ។ ទាញរកតម្លៃអតិបរមានៃ $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$ ។

ដំណោះស្រាយ:

តាង $f(x)=\sin x$ ដែល $x\in(0,\pi)$

$$f'(x)=\cos x$$

$$f''(x)=-\sin x<0\quad,\ \forall x\in(0,\pi)$$

តាមវិសមភាព Jensen:[4]

$$\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)}{3}\le f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le 3\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le 3\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le 3\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ដូចនេះ $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ។

តាមវិសមភាព Cauchy:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\ge 3\sqrt[3]{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}$$

---

[4] វិសមភាព Jensen:

ក. បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេទីពីរលើចន្លោះ (a,b) ដែល $f''(x)>0$ នោះគ្រប់ $x\in(a,b)$ គេបាន:

$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\ge f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$ $,\forall x_i\in(a,b),i=1,2,\cdots,n$ ។ សមភាពកើតមានកាលណា $x_1=x_2=\cdots=x_n$ ។

ខ. បើ $f(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេទីពីរលើចន្លោះ (a,b) ដែល $f''(x)<0$ នោះគ្រប់ $x\in(a,b)$ គេបាន:

$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\le f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$ $,\forall x_i\in(a,b),i=1,2,\cdots,n$ ។ សមភាពកើតមានកាលណា $x_1=x_2=\cdots=x_n$ ។

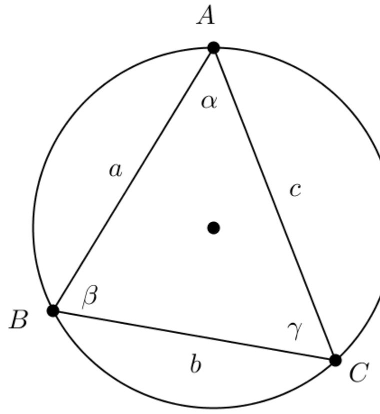
នាំអោយ $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\le\left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right)^3$

នាំអោយ $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមានៃ $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$ គឺ $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ។

របៀបទី ០២: គេអាចទាញរកតម្លៃអតិបរមានៃ $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$ ដោយប្រើវិធីដូចខាងក្រោម:

ឧបមាថាត្រីកោណ ABC ចារិកក្នុងរង្វង់ដែលមានកាំស្មើ 1



តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស: $\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2$ នោះ $\sin\beta=\frac{b}{2}$, $\sin\gamma=\frac{c}{2}$

យើងបាន: $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}bc\sin\alpha$

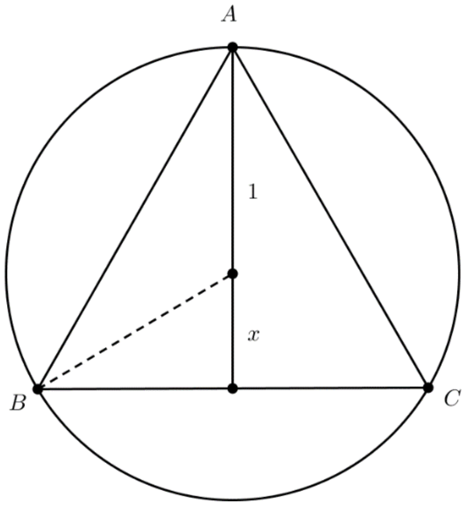
តែផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណ $ABC : S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$

នោះ $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=\frac{1}{2}\cdot S_{\Delta ABC}$

នាំអោយ $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$ មានតម្លៃអតិបរមាស្មើនឹង $\frac{1}{2}$ ផ្ទៃក្រឡាអតិបរមាត្រីកោណ ABC

យើងចាត់ទុកជ្រុង BC មិនប្រែប្រួល (នៅនឹង) ហើយបម្លាស់ទីចំណុច A នៅលើវណ្ឌមណ្ឌលនៃរង្វង់

យើងសង្កេតឃើញថា ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC កាលណា A នៅចំទីតាំងកណ្ដាលនៃធ្នូធំ BC (ព្រោះកម្ពស់នៃត្រីកោណ ABC វែងបំផុត ឬ អតិបរមាត្រង់ទីតាំងនេះ)



តាង x ដូចក្នុងរូប ដែល $0\le x<1$

ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $ABC: S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}(1+x)\cdot 2\sqrt{1-x^2}$

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{(1+x)^2(1-x^2)}$$

$$=\sqrt{(1+x)^2(1-x)}$$

តាង $f(x)=\sqrt{(1+x)^3(1-x)}$ យើងបាន:

$$f'(x)=3(1+x)^2(1-x)-(1+x)^3=(1+x)^2\left[3(1-x)-(1+x)\right]$$

$$=2(1+x)^2(1-2x)$$

តារាងអថេរភាព

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	↘	

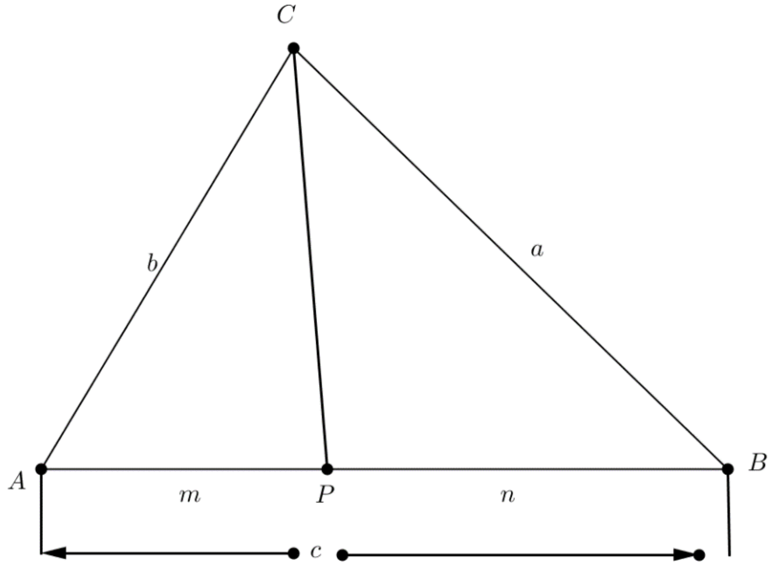
$f(x)$ មានតម្លៃអតិបរមាកាលណា $x=\frac{1}{2}$ ហើយ $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3^2.3}{2^4}$

នាំអោយ $S_{\Delta ABC}$ មានតម្លៃអតិបរមាកាលណា $x=\frac{1}{2}$ ដែរ ហើយ $S_{\max}=\sqrt{\frac{3^2.3}{2^4}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមានៃ $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$ គឺ $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ ។

លំហាត់ទី ០៥: (*លំហាត់មួយនេះជាសម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទ* Stewart *ឬ* Apollonius *ដែលជាភាសាអង់គ្លេស* STEWART'S THEOREM or APOLLONIUS' THEOREM) : តាង a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ ABC មួយ ។ P ជាចំណុចមួយនៅលើជ្រុង AB ដែល $AP=m$ និង $BP=n$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $ma^2+nb^2=c\left(PC^2+mn\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ:



តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស: $a^2=n^2+PC^2-2\cdot n\cdot PC\cdot\cos\angle BPC$ (1)

$b^2=m^2+PC^2-2\cdot m\cdot PC\cdot\cos\angle APC$ (2)

ដោយ $\angle APC=180^0-\angle BPC$ នោះ $\cos\angle APC=-\cos\angle BPC$

គុណ (1) និង $m: ma^2=mn^2+mPC^2-2\cdot mn.PC\cdot\cos\angle APC$

គុណ (2) នឹង $n: nb^2=nm^2+nPC^2+2\cdot mn\cdot PC\cdot\cos\angle APC$

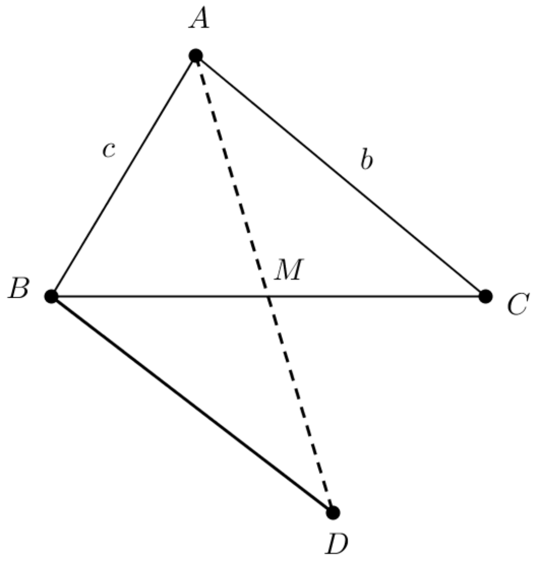
នាំអោយ $ma^2+nb^2=mn(m+n)+(m+n)PC^2$

ដោយ $m+n=c$ នោះ $ma^2+nb^2=c\left(PC^2+mn\right)$ ពិត

ដូចនេះ $ma^2+nb^2=c\left(PC^2+mn\right)$ ។

លំហាត់ទី ០៦: *(លំហាត់មួយនេះជាសម្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទមេដ្យាន)* គេមានត្រីកោណ ABC មួយដែលមានរង្វាស់ជ្រុង a,b,c ។ តាង M ជាចំណុចកណ្តាលជ្រុង BC ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $AM^2=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{4}a^2$ ។

ដំណោះស្រាយ:



បន្លាយ AM ខាង M ឲ្យបាន $AM=MD$

ចតុកោណ $ABCD$ មានអង្កត់ទ្រូងទាំងពីរកាត់គ្នាត្រង់ចំណុចកណ្តាល នោះវាជាប្រលេឡូក្រាម

តាមលក្ខណ:ប្រលេឡូក្រាម $\angle DBA+\angle BAC=180^0$

នោះ $\cos\angle DBA=-\cos\angle BAC$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស: $AD^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle DBA$

$$AD^2=b^2+c^2+2bc\cos\angle BAC$$

តែ $\cos\angle BAC=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

នាំអោយ $AD^2=b^2+c^2+2bc\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=2b^2+2c^2-a^2$

ដោយ $AM^2=\frac{1}{4}AD^2=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{4}a^2$ ពិត ។

ដូចនេះ $AM^2=\frac{1}{4}AD^2=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{4}a^2$ ។

លំហាត់ទី ០៧:

ក. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x, y ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(x+y)^2 - xy + 1 \geq (x+y)\sqrt{3}$ ។

ខ. ចំពោះ $A>0, B>0, C>0$ និង $A+B+C=\pi$ ។ រកតម្លៃតូចបំផុតនៃ $K=\cot A+\cot B+\cot C$ ។

ដំណោះស្រាយ:

ក. ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(x+y)^2 - xy + 1 \geq (x+y)\sqrt{3}$

តាមវិសមភាព Cauchy:

$\frac{x^2+y^2}{2} \geq |xy| \geq xy$ នោះ $\frac{x^2+y^2}{2} + xy \geq 2xy \Leftrightarrow \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy$

យើងបាន: $(x+y)^2 - xy + 1 = \frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x+y)^2 - xy + 1$

$$\geq \frac{3}{4}(x+y)^2 + 1 \quad (1)$$

តាមវិសមភាព Cauchy:

$\frac{3}{4}(x+y)^2 + 1 \geq 2\sqrt{\frac{3}{4}(x+y)^2} \geq \sqrt{3}|x+y| \geq (x+y)\sqrt{3}$ (2)

តាម (1) និង (2) : $(x+y)^2 - xy + 1 \geq (x+y)\sqrt{3}$ ពិត

ដូចនេះ $(x+y)^2 - xy + 1 \geq (x+y)\sqrt{3}$ ។

របៀបទី ០២: គេអាចស្រាយវិសមភាពនេះ តាមរបៀបមួយទៀត:

ចំពោះ $(x+y)^2 - xy + 1 \geq (x+y)\sqrt{3}$ អាចសរសេរជា :

$x^2 + \left(y-\sqrt{3}\right)x + y^2 - y\sqrt{3} + 1 \geq 0$, $\forall x, y$

តាង $f(x) = x^2 + \left(y-\sqrt{3}\right)x + y^2 - y\sqrt{3} + 1$

$$\Delta = \left(y-\sqrt{3}\right)^2 - 4\left(y^2 - y\sqrt{3} + 1\right)$$

$$\Delta = -3y^2 + 2\sqrt{3}y - 1 = -\left(\sqrt{3}y - 1\right) \leq 0$$

ដោយ $\Delta < 0$ និង $a > 0$ នោះ $f(x) \geq 0$

ដូចនេះ វិសមភាពខាងលើពិត ។

សមភាពកើតមានកាលណា :

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ x = -\dfrac{y-\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

ខ. រកតម្លៃតូចបំផុតនៃ $K = \cot A + \cot B + \cot C$

តាង $x = \cot A > 0$, $y = \cot B > 0$ និង $z = \cot C$

ដោយ $A + B + C = \pi$ នោះ $\cot C = -\cot(A+B) = -\dfrac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} = \dfrac{1-xy}{x+y}$

នាំអោយ $\cot A + \cot B + \cot C = x + y + \dfrac{1-xy}{x+y} = \dfrac{(x+y)^2 - xy + 1}{x+y}$

ចំពោះ $x + y > 0$ តាមសំនួរ ក) $\dfrac{(x+y)^2 - xy + 1}{x+y} \geq \sqrt{3}$

នាំអោយ $K \geq \sqrt{3}$

ដូចនេះ តម្លៃតូចបំផុតនៃ $\min K = \sqrt{3}$ ចំពោះ $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$ ។

លំហាត់ទី ០៨: ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2^{2\sin x} + 2^{\tan x} > 2^{1+\frac{3}{2}x}$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ:

តាមវិសមភាព Cauchy:

$2^{2\sin x} + 2^{\tan x} \geq 2\sqrt{2^{2\sin x} \cdot 2^{\tan x}}$

$\Leftrightarrow 2^{2\sin x} + 2^{\tan x} \geq 2.2^{\sin x + \frac{1}{2}\tan x}$

$\Leftrightarrow 2^{2\sin x} + 2^{\tan x} \geq 2^{\sin x + \frac{1}{2}\tan x + 1}$

យើងត្រូវស្រាយថា $2^{\sin x + \frac{1}{2}\tan x + 1} > 2^{1+\frac{3}{2}x}$

$\Leftrightarrow \sin x + \dfrac{1}{2}\tan x > \dfrac{3}{2}x$

តាង $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\tan x - \dfrac{3}{2}x$ ចំពោះគ្រប់ $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{2\cos^2 x} - \frac{3}{2}$$

$$f'(x)=\frac{2\cos^3 x-3\cos^2 x+1}{2\cos^2 x}=\frac{(1-\cos x)^2(1+2\cos x)}{2\cos^2 x}>0\ ,\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

នាំអោយ f ជាអនុគម៍កើននៅលើ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

តាមលក្ខណៈអនុគមន៍កើន $f(x)>f(0)$

នោះ $\sin x+\frac{1}{2}\tan x-\frac{3}{2}x>0$ ឬ $\sin x+\frac{1}{2}\tan x>\frac{3}{2}x$ ពិត

ដូចនេះ $2^{2\sin x}+2^{\tan x}>2^{1+\frac{3}{2}x}$ ចំពោះគ្រប់ $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ។

លំហាត់ទី ០៩: កំណត់លេខខាងចុងនៃចំនួន $17^{17^{17}}$ ។

ដំណោះស្រាយ:

គេមាន $17\equiv 7\ (\text{mod } 10)$

$$17^{17^{17}}\equiv 7^{17^{17}}\ \ (\text{mod } 10)$$

ដោយ $(7;10)=1$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទ Euler:

$7^{\varphi(10)}\equiv 1\ (\text{mod } 10)$

មាន $1\le k\le 10$ ដែល $(k;10)=1$ ពោលគឺ $k=1,3,7,9$

នាំអោយ $\varphi(10)=4$

ដោយ $17\equiv 1\ (\text{mod } 4)$

$$17^{17}\equiv 1\ (\text{mod } 4)$$

នាំអោយ $7^{17^{17}}\equiv 7^1\equiv 7\ (\text{mod } 10)$

ដូចនេះ $17^{17^{17}}$ មានលេខខាងចុងជាលេខ 7

លំហាត់ទី ១០: កំណត់លេខខាងចុងនៃចំនួន $23^{23^{23^{23}}}$ នៅក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោល 10 ។

ដំណោះស្រាយ:

គេមាន $23\equiv 3\ (\text{mod } 10)$

$$23^{23^{23^{23}}}\equiv 3^{23^{23^{23}}}\ \ (\text{mod } 10)$$

តាង $\varphi(10)=4$ គឺជា Euler's totient function

តាមទ្រឹស្តីបទ Euler:

$3^r \equiv 3^t \pmod{10}$ កាលណា $r \equiv t \pmod 4$

ដោយ $23 \equiv 3 \pmod 4$

នោះ $23^{23^{23}} \equiv 3^{23^{23}} \pmod 4$

តែ $3 \equiv -1 \pmod 4$

នាំអោយ $3^{23^{23}} \equiv (-1)^{23^{23}} \equiv -1 \pmod 4$

គេបាន: $3^{23^{23^{23}}} \equiv 3^3 \equiv 7 \pmod{10}$

ឬ $23^{23^{23^{23}}} \equiv 7 \pmod{10}$

ដូចនេះ $23^{23^{23^{23}}}$ មានលេខខាងចុងជាលេខ 7 ។

លំហាត់ទី ១១: រកលេខខាងចុងនៃ $\left(\cdots\left(\left(7^7\right)^7\right)^7\cdots^{7}\right)$ ដែលលេខ 7 មានចំនួន 1001 ដង ។

ដំណោះស្រាយ:

ដើម្បីរកលេខខាងចុងនៃចំនួនខាងលើ យើងត្រូវរកសំណល់ពេលដែលវាចែកនឹង 10

គេមាន $7^2 \equiv -1 \pmod{10}$

$7^3 \equiv -7 \pmod{10}$

$7^4 \equiv -49 \equiv 1 \pmod{10}$

នាំអោយ $7^7 \equiv \left(7^2\right)^2.7^3 \equiv -7 \pmod{10}$

$\left(7^7\right)^7 \equiv (-7)^7 \equiv -\left(7^7\right) \equiv -(-7) \equiv 7 \pmod{10}$

ធ្វើតាមលំនានេះបន្តទៀត យើងបាន $\left(\cdots\left(\left(7^7\right)^7\right)^7\cdots^{7}\right) \equiv \pm 7 \pmod{10}$

បើលេខ 7 មានចំនួនគូ នោះ $\left(\cdots\left(\left(7^7\right)^7\right)^7\cdots^{7}\right) \equiv -7 \pmod{10}$

បើលេខ 7 មានចំនួនសេស នោះ $\left(\cdots\left(\left(7^7\right)^7\right)^7\cdots^{7}\right) \equiv 7 \pmod{10}$

ដោយ 1001 ជាចំនួនសេស

ដូចនេះ លេខខាងចុងនៃ $\left(\cdots\left(\left(7^7\right)^7\right)^7\cdots^7\right)$ គឺជាលេខ 7 ។

លំហាត់ទី ១២: រកចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចបំផុត n ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណ្ឌខាងក្រោម:

ក) លេខខាងចុងនៃចំនួននោះនៅក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោលដប់ជាលេខ 6 ។

ខ) បើគេយកលេខ 6 មកដាក់នៅខាងមុខខ្ទង់ទាំងអស់ដែលនៅសល់ គេនិងទទួលបានចំនួនថ្មីមួយធំជាងមុន 4 ដង ។ *(លំហាត់ប្រលងអូឡាំពិច្បាដសិស្សពូកែអន្តរជាតិលើកទី ៤)*

ដំណោះស្រាយ:

តាង $n=10^k.a_k+10^{k-1}.a_{k-1}+\cdots+10a_1+6$ ជាចំនួនដែលត្រូវរក

$n=10\left(10^{k-1}.a_k+10^{k-2}.a_{k-1}+\cdots+a_1\right)+6$

$n=10T+6$ ដែល $10^{k-1}<T<10^k$

តាមលក្ខណ្ឌ ខ)

$4\left(10T+6\right)=6.10^k+T$

$39T=6.10^k-24$

$13T=2\left(10^k-4\right)$

យើងទាញបាន : $10^k\equiv 4\ (\text{mod } 13)$ ឬ $(-3)^k\equiv 4\ (\text{mod } 13)$ (*)

សម្មតិកម្មនៃលំហាត់ត្រូវក្លាយជា ការរកចំនួនគត់វិជ្ជមាន k តូចបំផុតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ (*)

គេមាន $(-3)^2\equiv 9\ (\text{mod } 13)$

$(-3)^3\equiv 27\equiv -1\ (\text{mod } 13)$

$(-3)^5=(-3)^2\cdot(-3)^3\equiv -9\equiv 4\ (\text{mod } 13)$

នាំអោយ $k=5$

ចំពោះ $k=5$ នោះ $13T=2.99996$

នាំអោយ $T=15384$

នាំអោយ $n=153846$ ហើយចំនួននេះផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណ្ឌ ខ)

ដូចនេះ $n=153846$ ជាចំនួនដែលត្រូវរក ។

លំហាត់ទី ១៣: គណនា $(123456789;987654321)$ ។

ដំណោះស្រាយ:

តាង $a=987654321$ និង $b=123456789$

$$a+b=1111111110$$
$$\Leftrightarrow 9a+9b=10^{10}-10$$

$$10b+a=9999999999$$

នាំអោយ $b-8a=9$

យក $d=(a;b)$ នោះ $9\vdots d$

ដោយ a និង b ចែកដាច់នឹង 9

ដូចនេះ $d=9$ ។

របៀបទី២:

តាមវិធីចែកបែបអឺគ្លីត [5]:

$$987654321=123456789\cdot 8+9$$

នាំអោយ $(123456789;987654321)=(123456789;9)$

ដោយ $123456789=9\cdot 1371421$

ដូចនេះ $(123456789;987654321)=9$ ។

---

[5] គេអាចរកតួចែករួមធំបំផុតរវាងពីរចំនួនគត់ a និង b តាមវិធីចែកបែបអឺគ្លីតដូចខាងក្រោម:

$a=bq+r_1$ នោះ $(a;b)=(b;r_1)$

$b=r_1\cdot q_1+r_2$ នោះ $(b;r_1)=(r_1;r_2)$

....

$r_{n-2}=r_{n-1}\cdot q_{n-1}+r_n$ នោះ $(r_{n-2};r_{n-1})=(r_{n-1};r_n)$

$r_{n-1}=r_n\cdot q_n$

នាំអោយ $(a;b)=r_n$

លំហាត់ទី ១៤: កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន p ដើម្បីអោយ p^2+2^p ជាចំនួនបឋម ។

ដំណោះស្រាយ:

- ចំពោះ $p=2: p^2+2^p=2^2+2^2=8$ មិនមែនជាចំនួនបឋម
- ចំពោះ $p=3: p^2+2^p=3^2+2^3=17$ ជាចំនួនបឋម
- ចំពោះ $p>3: p^2+2^p=\left(p^2-1\right)+\left(2^p+1\right)$

ដោយ p ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ $2^p+1 \vdots 3$ និង $p^2-1=(p-1)(p+1) \vdots 3$

នាំអោយ p^2+2^p មិនមែនជាចំនួនបឋមទេ ក្នុងករណី $p>3$

ដូចនេះ $p=3$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតែមួយគត់ដែលត្រូវរក ។

លំហាត់ទី ១៥: រកចំនួនបឋម p ដែល $p|2^p+1$ ។

ដំណោះស្រាយ:

ចំពោះ $p=2: 2|2^2+1$ មិនពិត

នោះ $P>2$ ដែល $(2;p)=1$

តាមទ្រឹស្តីបទ Fermat:[6]

$p|2^{p-1}-1$

តែ $p|2^p+1$

នាំអោយ $p|2\left(2^{p-1}-1\right)+3$

នោះ $p|3$

តែ p បឋម នាំអោយ $p=3$

ដូចនេះ $p=3$ ជាចំនួនបឋមដែលត្រូវរក ។

---

[៦] ទ្រឹស្តីបទ Fermat:

ក) បើ p ជាចំនួនបឋម នោះ $a^p \equiv 1 \pmod p$ ។

ខ) បើ $(a;p)=1$ នោះ $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

លំហាត់ទី ១៦: គេអោយ $xyz=1$ ដែល $x,y,z\ge 0$ ។ កំណត់តម្លៃពិតប្រាកដនៃ
$S=\frac{x+1}{xy+x+1}+\frac{y+1}{yz+y+1}+\frac{z+1}{zx+z+1}$ ។

ដំណោះស្រាយ:

ដោយ $xyz=1$ និង $x,y,z\ge 0$ នោះ x,y,z មិនអាចស្មើសូន្យទេ

គេទាញបាន : $x=\frac{1}{yz}$

យើងបាន :

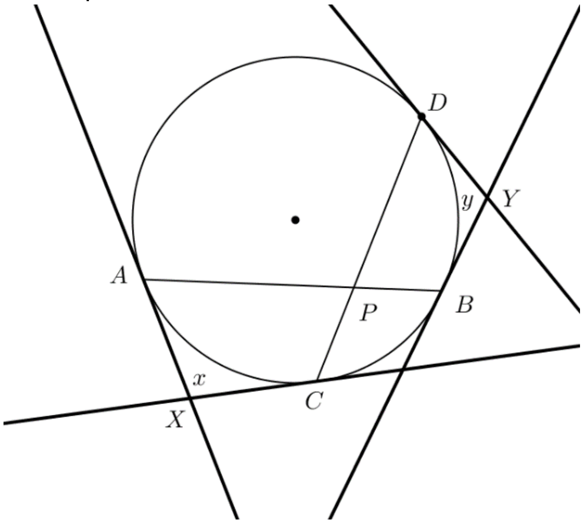
$$S=\frac{\frac{1}{yz}+1}{\frac{1}{z}+\frac{1}{yz}+1}+\frac{y+1}{yz+y+1}+\frac{z+1}{\frac{1}{y}+z+1}$$

$$=\frac{1+yz}{y+1+yz}+\frac{y+1}{yz+y+1}+\frac{yz+y}{1+yz+y}$$

$$=\frac{2\left(1+yz+y\right)}{1+yz+y}=2$$

ដូចនេះ $S=2$ ។

លំហាត់ទី ១៦: APB និង CPD ជាអង្កត់ធ្នូពីរនៃរង្វង់មួយ ដែលកាត់គ្នាត្រង់ចំណុច P ។ បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ A និង C ជួបគ្នាត្រង់ X ។ បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ B និង D ជួបគ្នាត្រង់ Y ។ គេតាង $\angle AXC=x$ និង $\angle BYD=y$ ។ ចូររក $\angle APD$ ជាអនុគមន៍នៃ x និង y ។

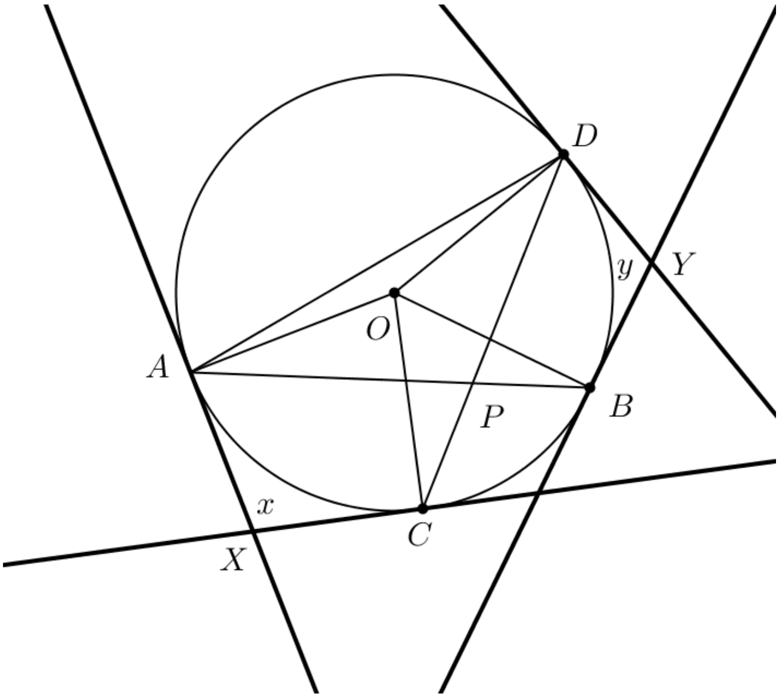


ដំណោះស្រាយ:

វិធីសាស្រ្ត: សម្រាប់ប្រភេទលំហាត់ធរណីមាត្រ វាពិតជាសំខាន់ណាស់ដែលយើងប្រើរូបភាពជាជំនួយ ។

តាង O ជាផ្ចិតនៃរង្វង់នោះ

ភ្ជាប់ OA, OB, OC, OD និង AD



គេមាន $\angle DOB = 180^0 - y$ និង $\angle AOC = 180^0 - x$

ដោយ $\angle DAB = \frac{1}{2}\angle DOB = 90^0 - \frac{y}{2}$ និង $\angle ADC = \frac{1}{2}\angle AOC = 90^0 - \frac{x}{2}$

នាំអោយ $\angle APD = 180^0 - \angle DAB - \angle ADC = \frac{1}{2}(x+y)$

ដូចនេះ $\angle APD = \frac{1}{2}(x+y)$ ។

លំហាត់ទី ១៦: គេអោយ $a > 1$ គែជាចំនួនគត់ ។ រកគ្រប់ចំនួនគត់ x ដែល :

$\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^x + \left(\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}\right)^x = 2a$ ។

ដំណោះស្រាយ:

តាង $t=\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}$ នោះ $\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}=\frac{a^2-(a^2-1)}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}}=\frac{1}{t}$

សមីការក្លាយជា : $t^x+\frac{1}{t^x}=2a$ ឬ $(t^x)^2-2at^x+1=0$

នាំអោយ $t^x=\frac{2a\pm\sqrt{4a^2-4}}{2}=a\pm\sqrt{a^2-1}=y^2$ ឬ y^{-2}

ដូចនេះ $x=2$ ឬ $x=-2$ ជាចម្លើយនៃសមីការ ។

លំហាត់ទី ១៧: មានតម្លៃពីរនៃ m ដែលធ្វើអោយសមីការ $x^4-(3m-1)x^2+(m-1)^2=0$ មានរឹសបួនផ្សេងគ្នាជាដំរៀននព្វន្ត ។ គណនាផលបូកតម្លៃនៃ m ទាំងពីរ ។

ដំណោះស្រាយ:

យើងដឹងថាបើ a ជារឹសនៃសមីការ នោះ $-a$ ក៏ជារឹសរបស់សមីការដែរ ព្រោះគ្រប់តួនៃសមីការ ជាអនុគមន៍គូនៃ x ។ រឹសនៃសមីការនេះ ត្រូវតែមានទម្រង់ $-3r,-r,r,3r$ ។

យើងបាន : $(x^2-r^2)(x^2-9r^2)=x^4-(3m-1)x^2+(m-1)^2$

ប្រៀបធៀបមេគុណត្រូវគ្នា :

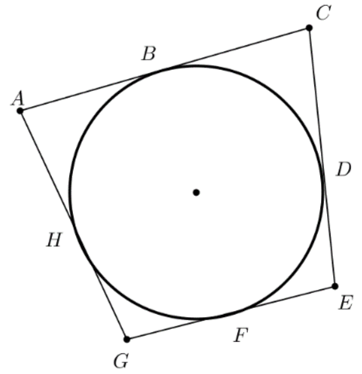
$10r^2=3m-1$ និង $9r^4=(m-1)^2$

នាំអោយ $19m^2-146m+91=0$

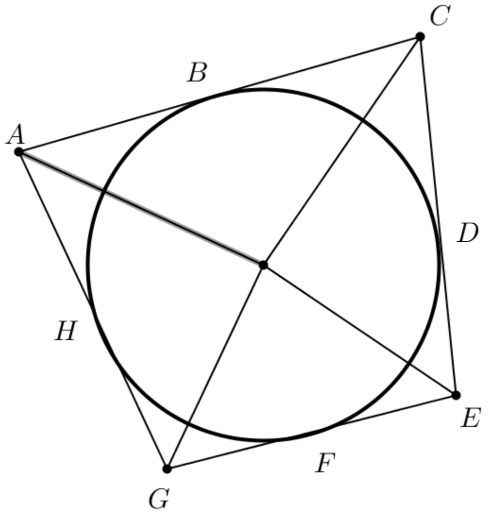
នាំអោយផលបូកតម្លៃទាំងពីរនៃ $m=\frac{146}{19}=7\frac{13}{19}$

ដូចនេះ ផលបូកតម្លៃទាំងពីរនៃ $m=\frac{146}{19}=7\frac{13}{19}$ ។

លំហាត់ទី ១៨: $ACEG$ ជាចតុកោណប៉ោងចារិកក្រៅរង្វង់មួយ ហើយជ្រុងរបស់វាប៉ះជាមួយរង្វង់ត្រង់ B,D,F និង H ។ ប្រសិនបើ $AB=3,CD=4,EF=5$ និង $GH=6$ ។ ចូរគណនារង្វាស់កាំរង្វង់ ។



ដំណោះស្រាយ:



តាង O ជាផ្ចិត និង r ជាកាំនៃរង្វង់

$\angle OAB+\angle OCD+\angle OEF+\angle OGH=\pi$

នាំអោយ $\cot\left(\angle OAB+\angle OCD\right)=-\cot\left(\angle OEF+\angle OGH\right)$

នាំអោយ $\dfrac{\frac{AB}{r}\cdot\frac{CD}{r}-1}{\frac{AB}{r}+\frac{CD}{r}}=-\dfrac{\frac{EF}{r}\cdot\frac{GH}{r}-1}{\frac{EF}{r}+\frac{GH}{r}}$

ឬ $\dfrac{\frac{3}{r}\cdot\frac{4}{r}-1}{\frac{3}{r}+\frac{4}{r}}=-\dfrac{\frac{5}{r}\cdot\frac{6}{r}-1}{\frac{5}{r}+\frac{6}{r}}$

នាំអោយ $r^2=19$ នោះ $r=\sqrt{19}$

ដូចនេះ រង្វាស់កាំរង្វង់ $r=\sqrt{19}$ ។

លំហាត់ទី ១៩: ស្វ៊ីតនៃចំនួនពិតវិជ្ជមានមួយ $a_0, a_1, a_2, \cdots$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង $(a_n)^{\log a_n}=(a_{n+1})^{\log a_{n-1}}$ ចំពោះ $n>1$ ។ រករូបមន្តសម្រាប់ a_n បើ $a_0=2$ និង $a_1=4$ ។

ដំណោះស្រាយ:

តាង $b_n=\ln a_n$

នោះ $a_n^{\ln a_n}=a_{n+1}^{\ln a_{n-1}} \Rightarrow (\ln a_n)^2=(\ln a_{n-1})(\ln a_{n+1})$

នាំអោយ $(b_n)^2=b_{n-1}.b_{n+1}$

នាំអោយ $\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$

$b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$ បង្កើតបានជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

ដោយ $b_0=\ln 2$ និង $b_1=\ln 4=2\ln 2$

រេសុងនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រគឺ $q=\dfrac{2\ln 2}{\ln 2}=2$

នាំអោយ $b_n=b_0\cdot q^n=2^n\ln 2$

នាំអោយ $a_n=e^{b_n}=e^{2^n\ln 2}=2^{2^n}$

ដូចនេះ $a_n=2^{2^n}$ ។

លំហាត់ទី ២០: រកគ្រប់ចំនួនពិត x ដែល $\sum_{k=0}^{1996}|x-\sqrt{k}|$ មានតម្លៃអប្បរមា ។

ដំណោះស្រាយ:

• ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ថេរ a,b និង $a<b$ អនុគមន៍ $f(x)=|x-a|+|x-b|$ មានតម្លៃអប្បរមា $b-a$ គ្រប់ x ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណ្ឌ $a\le x\le b$ ។

គេសរសេរ :

$$\sum_{k=0}^{1996}|x-\sqrt{k}|=\sum_{k=0}^{1996}\left(|x-\sqrt{k}|+|x-\sqrt{1996-k}|\right)+|x-\sqrt{998-k}|$$

នាំអោយ $\sum_{k=0}^{1996}|x-\sqrt{k}|$ មានតម្លៃអប្បរមា កាលណា $x=\sqrt{998}$

ដូចនេះ $x=\sqrt{998}$ ។

លំហាត់ទី ២១: គេសន្មត់ $\{x;y;z;t\}=\{60;70;185;325\}$ និង $xy-xz+yt=4550$ ។ តើ x,y,z និង t ស្មើប៉ុន្មាន ?

ដំណោះស្រាយ:

គេដឹងថា $7|4550$ និង $7|70$ ហើយក្នុងចំណោមចំនួនទាំងបួនដែលអោយមកមានតែ 70 មួយគត់ដែលចែកដាច់នឹង 7 ។ បើ $x=70$ នោះគេទាញបាន $yt|70$ ជាករណីមិនអាច ។ បើ $y=70$ នោះ $7|xz$ ជាករណីមិនអាច ។ នោះមួយក្នុងចំណោម z ឬ t មានតម្លៃស្មើ 70 ។

គេដឹងថា $13|4550$ និង $13|325$ ។ យើងបកស្រាយដូចខាងលើ ។ នោះ មួយក្នុងចំណោម z ឬ t មានតម្លៃស្មើ 325 ។

• ករណីទី ០១: $t=325$ និង $z=70$ សមីការក្លាយជា $x(y-z)=4550-325y<0$

នាំអោយ $y<z$ នោះ $y=60$, $x=185$ មិនអាច

• ករណីទី ០២: $t=70$ និង $z=325$ ជំនួសចូលយើងបាន $x=60$, $y=185$

ដូចនេះ $x=60$, $y=185$, $z=325$, $t=70$ ។

លំហាត់ទី ២២: កំណត់តម្លៃធំអតិបរមានៃ $\cos^2\angle POA+\cos^2\angle POB+\cos^2\angle POC+\cos^2\angle POD$ ដែល $ABCD$ ជាមុខនៃគូបមួយដែលចារិកក្នុងស្វ៊ែរមានផ្ចិត O ហើយ P ជាចំណុចមួយនៅលើស្វ៊ែរ ។

ដំណោះស្រាយ:

នៅក្នុងលំហាត់នេះ យើងប្រើប្រព័ន្ធកូអរដោនេ :

យើងជ្រើសរើស Rectangular coordinate system ដើម្បីអោយ A,B,C,D មានកូអរដោនេ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ។ តាងកូអរដោនេចំណុច P ដោយ (u,v,w) ដែល $u^2+v^2+w^2=1$ ។

យើងបាន :

$$\cos\angle POA=\frac{\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OA}|}=\frac{u}{\sqrt{3}}+\frac{v}{\sqrt{3}}+\frac{w}{\sqrt{3}}$$

គណនាស្រដៀងគ្នាដែរ យើងទាញបាន:

$$\cos^2\angle POA+\cos^2\angle POB+\cos^2\angle POC+\cos^2\angle POD=\left(\frac{u}{\sqrt{3}}+\frac{v}{\sqrt{3}}+\frac{w}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}+\frac{v}{\sqrt{3}}-\frac{w}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}-\frac{v}{\sqrt{3}}+\frac{w}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}-\frac{v}{\sqrt{3}}-\frac{w}{\sqrt{3}}\right)^2$$

នាំអោយ $\cos^2\angle POA+\cos^2\angle POB+\cos^2\angle POC+\cos^2\angle POD=\frac{4}{3}\left(u^2+v^2+w^2\right)=\frac{4}{3}$

លំហាត់ទី ២៣: បីចំនួនត្រូវបានគេជ្រើសរើសដោយចៃដន្យពីចន្លោះ $[0;1]$ ។ រកប្រូបាបប៊ីលីតេដើម្បីអោយវាបង្កើតបានជាជ្រុងនៃត្រីកោណ ។

ដំណោះស្រាយ:

ឧបមាថាចំនួនដែលត្រូវបានគេសង់គឺ x,y,z នោះ x,y,z គឺជាចំណុចនៅគូប $I^3=\{(x,y,z):0\le x,y,z\le 1\}$ នៅក្នុង R^3 ។ ចំណុចមួយនៅក្នុង I^3 កើតមានដោយចំនុចទាំងបីនោះ ។ ចំណុចទាំងបីមិនអាចបង្កើតបានជាជ្រុងនៃត្រីកោណទាល់តែ និង កាលណា :

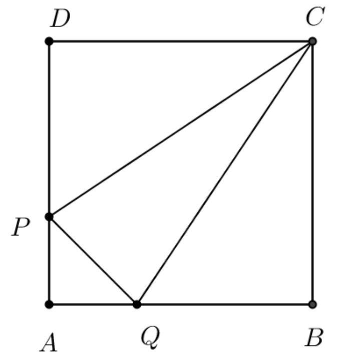
$x\ge y+z$, $y\ge x+z$, $z\ge x+y$

វិសមភាពទាំងបីខាងលើ ជាបីតំបន់មិនរួមគ្នា បង្កើតបានជាតេត្រាអែតដែលមានមាឌនីមួយៗស្មើនឹង

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{6}$$

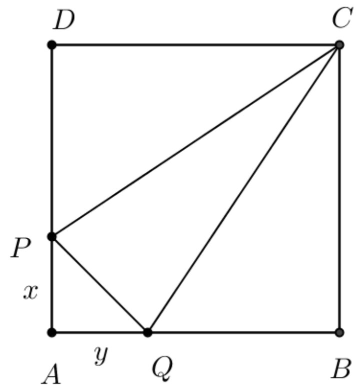
ប្រូបាបប៊ីលីតេដែលបង្កើតបានជាត្រីកោណ $1-3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី ២៨: $ABCD$ ជាការេឯកតា ។ P,Q ជាចំណុចនៅលើជ្រុង AD និង AB រៀងគ្នា ។ រក $\angle PCQ$ បើ $AP+AQ+PQ=2$ ។



ដំណោះស្រាយ:

តាង $AP=x$ និង $AQ=y$



នោះ $\tan\angle PCD=\frac{DP}{CD}=1-x$ និង $\tan\angle QCB=\frac{QB}{CB}=1-y$

ដោយ $\tan\angle PCQ=\cot\left(90^0-\angle PCQ\right)=\frac{1}{\tan\left(\angle PCD+\angle QCB\right)}$

$$=\frac{1-\tan\angle PCD\tan\angle QCB}{\tan\angle PCD+\tan\angle QCB}$$

$$=\frac{1-(1-x)(1-y)}{(1-x)+(1-y)}$$

$$=\frac{x+y-xy}{2-x-y}$$

តាមសម្មតិកម្ម $AP+AQ+PQ=2$

នាំអោយ $x+y+\sqrt{x^2+y^2}=2$

$$(x+y)^2=\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$$

$$2xy=4-4\sqrt{x^2+y^2}=4-4(2-x-y)$$

$$xy=-2+2x+2y$$

នាំអោយ $\tan\angle PCQ=\dfrac{x+y-(-2+2x+2y)}{2-x-y}=1$

ដូចនេះ $\angle PCQ=45^0$ ។

លំហាត់ទី ២៥: គេអោយ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា សមីការ $(x+2)^n-x^n=1+7^n$ គ្មានចម្លើយជាចំនួនគត់ទេ ។

ដំណោះស្រាយ:

ឧបមាថា សមីការនេះមានរឹស ជាចំនួនគត់

- ករណី $x\equiv 1 \pmod 4$ តាមសមីការដែលអោយ គេទាញបាន $(-1)^n-1\equiv 1+(-1)^n \pmod 4$ ឬ $-1\equiv 1 \pmod 4$ ជាករណីមិនអាច
- ករណី $x\equiv -1 \pmod 4$ តាមសមីការដែលអោយ គេទាញបាន $1-(-1)^n\equiv 1+(-1)^n \pmod 4$ ឬ $2(-1)^n\equiv 0 \pmod 4$ ជាករណីមិនអាច
- សិក្សាករណី x ជាចំនួនគូ

បើ x គូ នោះ $(x+2)^n-x^n$ ចែកដាច់នឹង 2^n

តែ $1+7^n\equiv 2 \pmod 4$ បើ n គូ

$1+7^n\equiv 8 \pmod{16}$ បើ n សេស

នាំអោយ 2^n ចែកដាច់ $1+7^n$ កាលណា $n=1$ ឬ $n=3$
ដោយ n មិនអាចស្មើ 1 នោះ $n=3$
បើ $n=3: 6x^2+12x+8=1+343$ ឬ $x^2+2x-56=0$
ឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta=2^2-4\times1\times(-56)=228$ មិនមែនជាការេប្រាកដ នោះសមីការគ្មានរឹសជាចំនួនគត់ទេ
គ្រប់ករណីទាំងអស់ ផ្ទុយពីការឧបមា ។ នាំអោយការឧបមាខុស ។
ដូចនេះ សមីការ សមីការ $(x+2)^n-x^n=1+7^n$ គ្មានចម្លើយជាចំនួនគត់ទេ ។

លំហាត់ទី ២៦: រកគ្រប់ចម្លួយនៃសមីការ $x^3+y^3+z^3=wx^2y^2z^2$ ចំពោះចំនួនគត់ធម្មជាតិ x,y,z,w ។

ដំណោះស្រាយ:

សមីការនេះស៊ីមេទ្រីចំពោះ x,y,z ហើយយើងសន្មត់ថា $x\le y\le z$
សមីការអាចសរសេរជា :

$$z=wx^2y^2-\frac{x^3+y^3}{z^2}\quad(1)$$

ដោយ z,y,z,w ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ $\frac{x^3+y^3}{z^2}$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែរ
គេទាញបាន : $x^3+y^3\ge z^2\quad(2)$
តាម (1) និង ការសន្មត់ : $\frac{x}{z}\le1$, $\frac{y}{z}\le1$ និង $z\ge wx^2y^2-(x+y)\ge -z$
គេទាញបាន $z^2\ge\left[wx^2y^2-(x+y)\right]^2\quad(3)$
តាម (2) និង (3):

$$w^2x^4y^4<2wx^2y^2(x+y)+x^3+y^3$$

នាំអោយ $wxy<2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{wx^3}+\frac{1}{wy^3}\quad(4)$

– បើ $x\ge2$ នោះ អង្គខាងស្តាំនៃ $(4)\le3$ ហើយអង្គខាងឆ្វេងនៃ $(4)\ge4$ មិនអាចកើតមាន ។ គេទាញបាន $x=1$ ។ ជំនួស $x=1$ ចូល (4):

$$wy<2+\frac{2}{y}+\frac{1}{w}+\frac{1}{wy^3}\quad(5)$$

– បើ $y \geq 4$ នោះអង្គខាងស្តាំនៃ $(5) < 4$ ហើយអង្គខាងឆ្វេងនៃ $(5) \geq 4$ មិនអាចកើតមាន ។ គេទាញបាន $y \leq 3$ ។

តាម (1): បើ $y = 1$ នាំអោយ $z = 1$, $w = 3$

តាម (5): បើ $y = 2$ នោះ $z = 3$, $w = 1$

តាម (5): y មិនអាចស្មើ 3 ទេ

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការដែលស៊ីមេទ្រីចំពោះ x, y, z គឺ $(x, y, z) = (1,1,1,3);(1,2,3,1);(1,3,2,1);$ $(2,1,3,1);(2,3,1,1);(3,1,2,1);(3,2,1,1)$ ។

លំហាត់ទី ២៧: r និង s ជាចម្លើយនៃសមីការដឺក្រេទីពីរ $x^2 + Ax + B = 0$ ។ សមីការដឺក្រេទីពីរ $x^2 + Cx + D = 0$ មានរឹសឌុប $r - s$ ។ បង្ហាញ D ជាអនុគមន៍ A និង B ។

ដំណោះស្រាយ:

ដោយ r, s ជារឹសនៃសមីការ $x^2 + Ax + B = 0$

នោះ $r + s = -A$ និង $rs = B$

សមីការ $x^2 + Cx + D = 0$ មានរឹសឌុប $r - s$

នាំអោយ $D = (r - s)^2 = (r + s)^2 - 4rs = A^2 - 4B$

ដូចនេះ $D = A^2 - 4B$ ។

លំហាត់ទី ២៨: $f(x)$ ជាពហុធាដឺក្រេទី ៥ ។ ឧបមាថា $f(k) = 2^k$ ចំពោះ $k = 0,1,2,3,4,5$ ។ រកតម្លៃនៃ $f(6)$ ។

ដំណោះស្រាយ:

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $k \geq 1$ យើងតាង :

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

តាងពហុធាមួយ $g(x) = 1 + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3} + \binom{x}{4} + \binom{x}{5}$

ប្រើកន្សោម $2^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}$ គេអាចផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $g(k)=2^k$ ចំពោះ $k=0,1,2,3,4,5$

ដោយ $f(x)$ និង $g(x)$ សុទ្ធតែជាពហុធាដឺក្រេទី ៥ ហើយមានតម្លៃស្មើគ្នាត្រង់ 6 ចំណុចផ្សេងគ្នា

នាំអោយ $f(6)=g(6)=1+\binom{6}{1}+\binom{6}{3}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}=2^6-1$

ដូចនេះ $f(6)=2^6-1$ ។

លំហាត់ទី ២៩: រកចំនួនចម្លើយសនិទាននៃប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ xyz+z=0 \\ xy+yz+zx+y=0 \end{cases}$$ ។

ដំណោះស្រាយ:

– ចំពោះ $z=0$ នោះ $\begin{cases} x+y=0 \\ xy+y=0 \end{cases}$

គេទាញបាន $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ ឬ $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

– ចំពោះ $z\neq 0$:

ដោយ $xyz+z=0$ នោះ $xy+1=0$ ឬ $xy=-1$ (1)

ដោយ $x+y+z=0$ នោះ $z=-x-y$ (2)

យក $z=-x-y$ ជំនួសចូល $xy+yz+zx+y=0$ យើងបាន:

$x^2+y^2+xy-y=0$ (3)

តាម (1): $x=-\frac{1}{y}$ ជំនួសចូល (3):

$\Rightarrow (y-1)(y^3-y-1)=0$

យើងឃើញថា $y^3-y-1=0$ គ្មានចម្លើយជាចំនួនសនិទានទេ និង មានចម្លើយមួយ $y=1$

ដូចនេះ ប្រព័ន្ធសមីការមានចម្លើយជាចំនួនសនិទានពីរគត់ $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ និង $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$ ។

លំហាត់ទី ៣០: ត្រីកោណ ABC មួយមានរង្វាស់ជ្រុង a,b,c បង្កើតបានជាស្វីតធរណីមាត្រ ហើយជ្រុងនោះត្រូវនឹងមុំ A,B,C ។ រកវ៉ង់នៃ $\frac{\sin A\cot C+\cos A}{\sin B\cot C+\cos B}$ ។

ដំណោះស្រាយ:

តាង q ជាផលធៀបរួមនៃស្វីតធរណីមាត្រដែលបង្កើតដោយជ្រុងនៃ ΔABC

នោះ $b=aq$ និង $c=aq^2$

យើងបាន :

$$\frac{\sin A\cot C+\cos A}{\sin B\cot C+\cos B}=\frac{\sin A\cos C+\sin C\cos A}{\sin B\cos C+\sin C\cos B}$$

$$=\frac{\sin\left(A+C\right)}{\sin\left(B+C\right)}$$

$$=\frac{\sin\left(\pi-B\right)}{\sin\left(\pi-A\right)}=\frac{\sin B}{\sin A}$$

$$=\frac{b}{a}=q$$

យើងត្រូវកំណត់រកវ៉ង់នៃផលធៀប q វិញ

ដោយ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ

តាមវិសមភាពត្រីកោណ:

$$\begin{cases}a+b>c\\b+c>a\end{cases} \text{ ឬ } \begin{cases}a+aq>aq^2\\aq+aq^2>a\end{cases}$$

$$\begin{cases}q^2-q-1<0\\q^2+q-1>0\end{cases}$$

ចម្លើយនៃប្រព័ន្ធវិសមីការនេះគឺ $\begin{cases}\frac{\sqrt{5}-1}{2}<q<\frac{\sqrt{5}+1}{2}\\q>\frac{\sqrt{5}-1}{2}\ \ or\ \ q<-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\end{cases}$

ដូចនេះ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<q<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ។

លំហាត់ទី ៣១: គេអោយ $f(x)=ax+b$ ដែល a,b ជាចំនួនពិត និង $f_1(x)=f(x)$, $f_{n+1}(x)=f\left(f_n(x)\right)$ ចំពោះ $n=1,2,3,\cdots$ ។ គេដឹងថា $f_7(x)=128x+381$ ។ ចូរគណនា $a+b$ ។

ដំណោះស្រាយ:

តាមនិយមន័យ យើងបាន :

$$f_n(x)=a^n x+\left(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1\right)b$$
$$=a^n x+\frac{a^n-1}{a-1}\times b$$

នាំអោយ $f_7(x)=a^7.x+\frac{a^7-1}{a-1}\times b$

តែ $f_7(x)=128x+381$

គេទាញបាន $a^7=128$ និង $\frac{a^7-1}{a-1}\times b=381$

សមមូល $a=2$ និង $b=3$

ដូចនេះ $a+b=5$ ។

លំហាត់ទី ៣២: អនុគមន៍ $f(x)=\cos 2x-2a(1+\cos x)$ មានអប្បបរមាស្មើ $-\frac{1}{2}$ ។ រកតម្លៃ a ។

ដំណោះស្រាយ:

គេមាន $f(x)=\cos 2x-2a(1+\cos x)$

$$=2\cos^2 x-1-2a-2a\cos x$$
$$=2\left(\cos x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{1}{2}a^2-2a-\frac{1}{2}$$

- ចំពោះ $a>2$: $f(x)$ មានអប្បបរមា $1-4a$ កាលណា $\cos x=1$
- ចំពោះ $a<-2$: $f(x)$ មានអប្បបរមា 1 កាលណា $\cos x=-1$
- ចំពោះ $-2\le a\le 2$: $f(x)$ មានអប្បបរមា $-\frac{1}{2}a^2-2a-1$ កាលណា $\cos x=\frac{a}{2}$

$f(x)$ មិនអាចមានតម្លៃ $-\frac{1}{2}$ ទេកាលណា $a>2$ និង $a<-2$

នាំអោយ $-2\le a\le 2$

យើងបាន : $\frac{1}{2}a^2-2a-1=-\frac{1}{2}$

នាំអោយ $a=-2+\sqrt{3}$ និង $a=-2-\sqrt{3}$ (មិនយក)

ដូចនេះ $a=-2+\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី ៣៣: ដោះស្រាយសមីការ $\left(x^{2026}+1\right)\left(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2024}\right)=2026x^{2025}$ ។

ដំណោះស្រាយ:

សមីការអាចសរសេរជា :

$$\left(x+\frac{1}{x^{2025}}\right)\left(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2024}\right)=2026$$

$$x+x^3+x^5+\cdots+x^{2025}+\frac{1}{x^{2025}}+\frac{1}{x^{2023}}+\cdots+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}=2026$$

$$2026=\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+\cdots+\left(x^{2025}+\frac{1}{x^{2025}}\right)$$

$$\geq 2\times 1013$$

សមភាពកើតមានកាលណា $x=\frac{1}{x}$, $x^3=\frac{1}{x^3}$,⋯, $x^{2025}=\frac{1}{x^{2025}}$

នាំអោយ $x=\pm 1$

តែ $x=-1$ មិនយក

ដូចនេះ $x=1$ ជាចម្លើយតែមួយគត់ ។

លំហាត់ទី ៣៤: នៅក្នុងថង់មួយមានបាល់ស 8 និង បាល់ក្រហមចំនួន 2 ។ នៅពេលដែលបាល់មួយត្រូវបានគេចាប់ចេញ គេត្រូវដាក់ជំនួសដោយបាល់ពណ៌សមួយ ។ រកប្រូបាបប៊ីលីតេដើម្បីអោយគេអាចចាប់បាល់ពណ៌ក្រហមចេញអស់ត្រឹមការចាប់លើកទីបួន ។

ដំណោះស្រាយ:

យើងពិនិត្យករណី ទាំងបីដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លកខណ្ឌដែលគេសួររក:

	ចាប់លើកទី ១	ចាប់លើកទី ២	ចាប់លើកទី ៣	ចាប់លើកទី៤
ករណីទី ១	ក្រហម	ស	ស	ក្រហម
ករណីទី ២	ស	ក្រហម	ស	ក្រហម
ករណីទី ៣	ស	ស	ក្រហម	ក្រហម

ប្រូបាប៊ីលីតេគឺ:

$$P = P(case1) + P(case2) + P(case\ 3)$$

$$= \frac{2}{10}\times\left(\frac{9}{10}\right)^2\times\frac{1}{10} + \frac{8}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10} + \left(\frac{8}{10}\right)^2\times\frac{2}{10}\times\frac{1}{10}$$

$$= 0.0434$$

ដូចនេះ $P = 0.0434$ ។

លំហាត់ទី ៣៤: គេអោយចំនួនគត់ $n \geq 2$ ។ $M_0(x_0, y_0)$ ជាចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូល $y^2 = nx - 1$ និង បន្ទាត់ $y = x$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន m នោះមានចំនួនគត់ $k \geq 2$ ដែល (x_0^m, y_0^m) ជាចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូល $y^2 = kx - 1$ និង បន្ទាត់ $y = x$ ។

ដំណោះស្រាយ:

ដោយ $M_0(x_0, y_0)$ ជាចំណុចប្រសព្វរវាងប៉ារ៉ាបូល $y^2 = nx - 1$ និង បន្ទាត់ $y = x$

គេទាញបាន $x_0 = y_0 = \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 4}}{2}$

$$\Rightarrow x_0 + \frac{1}{x_0} = n$$

យក (x_0^m, y_0^m) ជាចំណុចប្រសព្វរវាង $y^2 = kx - 1$ និង $y = x$

$$\Rightarrow k = x_0^m + \frac{1}{x_0^m}$$

យើងតាង $k_m = x_0^m + \frac{1}{x_0^m}$ នោះ $k_{m+1} = k_m\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) - k_{m-1} = k_m \cdot n - k_{m-1}\ (m \geq 2)\ (1)$

ដោយ $k_1 = n$ ជាចំនួនគត់

$$k_2 = x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} = \left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)^2 - 2 = n^2 - 2 \text{ ជាចំនួនគត់}$$

តាមវិចារអនុមាណរួមគណិតវិទ្យា $k_m = x_0^m + \frac{1}{x_0^m}$ ជាចំនួនគត់

ដោយ $k = x_0^m + \frac{1}{x_0^m}$ នោះ (x_0^m, y_0^m) ជាចំណុចប្រសព្វរវាង $y^2 = kx - 1$ និង $y = x$

ដូចនេះ (x_0^m, y_0^m) ជាចំណុចប្រសព្វរវាង $y^2 = kx - 1$ និង $y = x$ ។

លំហាត់ទី ៣៥: គេអោយ $f(x) = x^2 + a$ ។ តាង $f^1(x) = f(x)$ និង $f^n(x) = f\left(f^{n-1}(x)\right)$, ដែល $n = 2, 3, \cdots$ ហើយតាង $M = \{a \in \mathbb{R} \| f^n(0) |\leq 2 , \forall n \in \mathbb{N}\}$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $M \in \left[-2 , \frac{1}{4}\right]$ ។

ដំណោះស្រាយ:

$i)$ បើ $a < -2$ នោះ $|f(0)| = |a| > 2$ នោះ $a \notin M$

$ii)$ បើ $-2 \leq a < 0$ នោះ $|f^1(0)| = |a| \leq 2$

ឧបមាថា $|f^{k-1}(0)| \leq |a| \leq 2$ ចំពោះ $k \geq 2$

ដោយ $a^2 \leq -2a$ ចំពោះ $-2 \leq a < 0$ យើងបាន:

$$-2 \leq -|a| = a \leq f^k(0) = \left(f^{k-1}(0)\right)^2 + a^2 \leq a^2 + a \leq |a| \leq 2$$

តាមគោលការណ៍វិចារអនុមាណរួមគណិតវិទ្យា គេសន្និដ្ឋានថា $|f^n(0)| \leq a \leq 2\ (\forall n \geq 1)$

$iii)$ បើ $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$ នោះ $|f^1(0)| = |a| \leq \frac{1}{2}$

ឧបមាថា $|f^{k-1}(0)| \leq \frac{1}{2}$ ចំពោះ $k \geq 2$ យើងបាន:

$$|f^k(0)| \leq |f^{k-1}(0)|^2 + a \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

តាមគោលការណ៍វិចារអនុមាណរួមគណិតវិទ្យា គេសន្និដ្ឋានថា $|f^n(0)| \leq \frac{1}{2}\ (\forall n \geq 1)$

តាម $ii)$ និង $iii)$ យើងទទួលបាន $\left[-2 , \frac{1}{4}\right] \subseteq M$

$iv)$ បើ $a>\frac{1}{4}$ តាង $a_n=f^n(0)$ យើងបាន:

$a_{n+1}=f^{n+1}(0)=f\left(f^n(0)\right)=f(a_n)=a_n^2+a$

នោះ $a_n>a>\frac{1}{4}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$

ដោយ $a_{n+1}-a_n=a_n^2-a_n+a=\left(a_n-\frac{1}{2}\right)^2+a-\frac{1}{4}$ យើងបាន:

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a&=a_{n+1}-a_1\\&=(a_{n+1}-a_n)+\cdots+(a_2-a_1)\\&\geq n\left(a-\frac{1}{4}\right)\end{aligned}$$

នាំអោយ ពេល $n>\dfrac{2-a}{a-\frac{1}{4}}$ យើងបាន:

$a_{n-1}\geq n\left(a-\frac{1}{4}\right)+a>2-a+a=2$

នាំអោយ $a\notin M$

តាម $i)$ ដល់ $iv)$ យើងបានស្រាយបញ្ជាក់ថា $M\in\left[-2\,,\,\frac{1}{4}\right]$

ដូចនេះ $M\in\left[-2\,,\,\frac{1}{4}\right]$ ។

លំហាត់ទី ៣៦: ស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន $n>1$ ចំនួន n^5+n^4+1 មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

ដំណោះស្រាយ:

គេមាន $n^5+n^4+1=n^5+n^4+n^3-n^3-n^2-n+n^2+n+1$

$$\begin{aligned}&=n^3\left(n^2+n+1\right)-n\left(n^2+n+1\right)+\left(n^2+n+1\right)\\&=\left(n^2+n+1\right)\left(n^3-n+1\right)\end{aligned}$$

ជាផលគុណនៃពីរចំនួនគត់ធំជាង 1

ដូចនេះ n^5+n^4+1 មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

លំហាត់ទី ៣៧: រកគ្រប់ចំនួនបឋម a,b,c ដែល $ab+bc+ca>abc$ ។

ដំណោះស្រាយ:

សន្មត់ថា $a\le b\le c$

- បើ $a\ge 3$ នោះ $ab+bc+ca\le 3bc\le abc$ ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម

នាំអោយ $a=2$ ព្រោះ a ជាចំនួនបឋម

វិសមភាពក្លាយជា : $2b+2c+bc>2bc$

នាំអោយ $\frac{1}{c}+\frac{1}{b}>2$

- បើ $b\ge 5$ និង $c\ge 5$ ហើយ $\frac{1}{2}<\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$ មិនពិត

នាំអោយ $b\le 5$ មានពីរករណី:

ក) $b=2$ និង c ជាចំនួនបឋមណាមួយ

ខ) $b=3$ និង c អាចមានតម្លៃ 3 ឬ 5 ។

លំហាត់ទី ៣៨: ត្រីកោណ ABC មួយមានកាំរង្វង់ចារិកក្រៅ R បរិមាត្រ P និង ក្រឡាផ្ទៃ K ។ កំណត់តម្លៃអតិបរមានៃ $\frac{KP}{R^3}$ ។

ដំណោះស្រាយ:

របៀបទី ០១:

ដោយត្រីកោណដូចគ្នា ផ្តល់តម្លៃដូចគ្នានៃ $\frac{KP}{R^3}$ យើងអាចយក $R=1$ ហើយធ្វើយ៉ាងណាអោយ KP មានតម្លៃអតិបរមាចំពោះគ្រប់ត្រីកោណទាំងអស់ដែលចារិកក្នុងរង្វង់ឯកតា ។ កំណត់ A និង B ជាចំណុចនឹងនៅលើរង្វង់ឯកតា ។ សំណុំចំណុច C ដែលមានបរិមាត្រ P គឺជាអេលីបដែលជួបជាមួយរង្វង់បានយ៉ាងច្រើនបួនចំណុច ។ ផ្ទៃក្រឡា K អតិបរមា(ចំពោះចំណុចនឹង P) កាលណា C ជាចំណុចនៅលើមេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ AB ហើយជួបរង្វង់ ។ តម្លៃអតិបរមានៃ KP ចំពោះ AB ដែលអោយមក កើតមានលុះត្រាតែត្រីកោណ ABC សមបាត ។ បកស្រាយស្រដៀងគ្នា យើងអោយ BC មិនប្រែប្រួល នោះតម្លៃអតិបរមាកើតមានកាលណា ΔABC សម័ង្ស ។

តាង ABC ជាត្រីកោណសម័ង្សដែលមានជ្រុង a

បរិមាត្រ $P=3a$ និង មានកម្ពស់ $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

ក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ $ABC : K=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស: $\frac{a}{\sin 60^0}=2R$ នោះ $R=\frac{a}{2\sin 60^0}=\frac{a}{\sqrt{3}}$

តម្លៃអតិបរមានៃ $\frac{KP}{R^3}=\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)(3a)\left(\frac{\sqrt{3}}{a}\right)^3=\frac{27}{4}$

ដូចនេះ $Max\left(\frac{KP}{R^3}\right)=\frac{27}{4}$ ។

របៀបទី ០២:

តាមទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស : $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

នាំអោយ $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$

ត្រីកោណ ABC មាន:

បរិមាត្រ $P=2R(\sin A+\sin B+\sin C)$

ក្រឡាផ្ទៃ $K=\frac{1}{2}(2R\sin A)(2R\sin B)(\sin C)$

នាំអោយ $\frac{KP}{R^3}=4\sin A\sin B\sin C(\sin A+\sin B+\sin C)$

យើងចង់រកតម្លៃអតិបរមានៃកន្សោមខាងលើ ចំពោះ $A+B+C=180^0$

ដោយប្រើរូបមន្តផលគុណ និង ផលបូកនៃអនុគមន៍ស៊ីនុស យើងបាន:

$$\frac{KP}{R^3}=4\sin A\left(\frac{\cos(B-C)}{2}-\frac{\cos(B+C)}{2}\right)\left(\sin A+2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\right)$$

យើងចាត់ទុក A (មិនប្រែប្រួល) នោះ $B+C$ មិនប្រែប្រួល ហើយកន្សោមខាងលើអតិបរមាកាលណា $\cos(B-C)$ និង $\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$ ស្មើ 1 ឬមានន័យថា $B=C$ ។ ដូចគ្នាដែរ យើងអាចបង្ហាញថាគ្រប់តម្លៃមិនប្រែប្រួលនៃ B នោះ $\frac{KP}{R^3}$ អតិបរមាកាលណា $A=C$ ។ សរុបមក $\frac{KP}{R^3}$ អតិបរមាកាលណា $A=B=C=60^0$

ដូចនេះ $Max\left(\frac{KP}{R^3}\right)=\frac{27}{4}$ ។

របៀបទី ០៣:

តាមរបៀបទី ០២: $\frac{KP}{R^3}=4\sin A\sin B\sin C\left(\sin A+\sin B+\sin C\right)$

តាមវិសមភាព $AM-GM$:

$$\sin A\sin B\sin C\le\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)^3$$

នាំអោយ $\frac{KP}{R^3}\le\frac{4}{27}(\sin A+\sin B+\sin C)^4$

សមភាពលើតមានកាលណា $\sin A=\sin B=\sin C$

ដោយ អនុគមន៍ស៊ីនុស ជាអនុគមន៍ផតលើចន្លោះ 0 ទៅ π នោះតាមវិសមភាព Jensen:

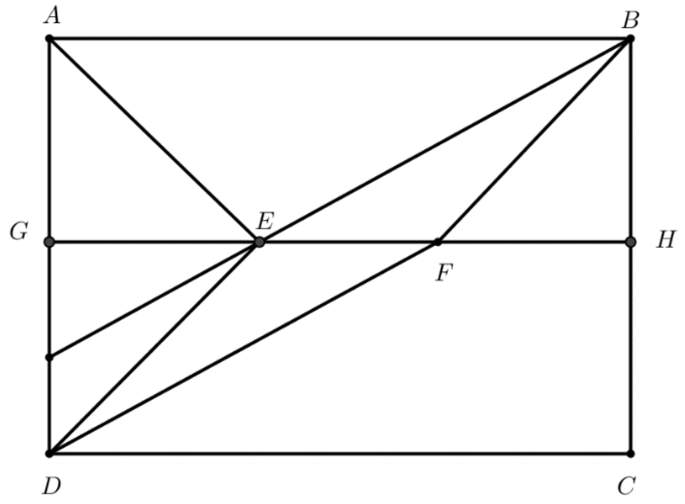
$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\le\sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

សមភាពកើតមានកាលណា $\sin A=\sin B=\sin C$ យើងតម្លៃអតិបរមានៃ $\frac{KP}{R^3}$ គឺ $\frac{4}{27}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^4=\frac{27}{4}$

ដូចនេះ $Max\left(\frac{KP}{R^3}\right)=\frac{27}{4}$ ។

លំហាត់ទី ៣៩: ចតុកោណកែង $ABCD$ មាន $AB=12$ និង $BC=10$ ។ ចំណុច E និង F នៅក្នុងចតុកោណកែង ដែល $BE=9$ និង $DF=8$ ហើយ $BE\parallel DF$, $EF\parallel AB$ ហើយបន្ទាត់ BE ប្រសព្វជាមួយអង្កត់ AD ។ ប្រវែង EF អាចសរសេរជាទម្រង់ $m\sqrt{n}-p$ ដែល m,n និង p ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ n ចែកមិនដាច់នឹងការេនៃចំនួនបឋមណាមួយទេ ។ រក $m+n+p$ ។

ដំណោះស្រាយ:



តាង G ជាចំណុចប្រសព្វរវាង EF និង AD

H ជាចំណុចប្រសព្វរវាង EF និង BC

ដោយ $\angle FHB = \angle EGA = 90^0$ និង $\angle BEF = \angle DFE$

នោះ $\Delta BHE \sim \Delta DGF$ (ករណី ម-ម)

នាំអោយ $\frac{BH}{GD} = \frac{9}{8}$

ដោយ $BC = 10$

នាំអោយ $BH + GD = BH + HC = 10$

យើងបានប្រព័ន្ធ :

$$\begin{cases} \frac{BH}{GD} = \frac{9}{8} \\ BH + GD = 10 \end{cases}$$

ដោះស្រាយប្រព័ន្ធខាងលើ $BH = \frac{90}{17}$ និង $GD = \frac{80}{17}$

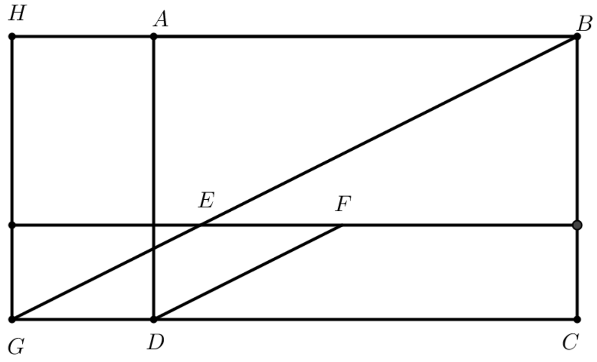
តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ: $EH = \sqrt{9^2 - \left(\frac{90}{17}\right)^2}$ និង $GF = \sqrt{8^2 - \left(\frac{80}{17}\right)^2}$

នាំអោយ $EF = \sqrt{9^2 - \left(\frac{90}{17}\right)^2} + \sqrt{8^2 - \left(\frac{80}{17}\right)^2} - 12 = 3\sqrt{21} - 12$

ដោយ 21 ចែកមិនដាច់នឹងការេប្រាកដណាមួយទេ

ដូចនេះ $m + n + p = 3 + 21 + 12 = 36$ ។

របៀបទី ០២:



បន្លាយ BE និង CD ជួបគ្នាត្រង់ G

សង់កម្ពស់ GH ពីចំណុច G ទៅបន្លាយបន្ទាត់ BA

$GE = DF = 8$, $GB = 17$

នៅក្នុងត្រីកោណកែង GHB:មាន $GH = 10$, $GB = 17$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ :

$HB = \sqrt{17^2 - 10^2} = 3\sqrt{21}$

$HA = EF = 3\sqrt{21} - 12$

ដូចនេះ $m + n + p = 3 + 21 + 12 = 36$

លំហាត់ទី ៤០: រកតួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួន $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$ ដែល $n = 0,1,2,\cdots,2018$ ។

ដំណោះស្រាយ:

ចំពោះ $n = 0 : A_0 = 1+9+25 = 5\cdot 7$

បើយើងបន្តអោយតម្លៃ n យើងសង្កេតឃើញថា A_0 ជាចំនួនដែលមានតម្លៃតូចជាងគេ

យើងសិក្សាភាពសមមូលនៃ A_n ដែលចែកដាច់នឹង 5 ឬ 7

គេមាន $A_n \equiv 2^{3n} + 3^{6n+2} \equiv 2^{3n} + 9^{3n+1} \equiv 2^{3n} + (-1)^{3n+1} \pmod 5$

ចំពោះ $n = 1 : A_1 = 9 \neq 0 \pmod 5$

នាំអោយ 5 មិនមែនជាតួចែករួមនៃ A_n ទេ

ដោយ $A_n = 8^n + 9.9^{3n} + 25.25^{3n}$

$\equiv 1 + 2.2^{3n} + 4.4^{3n}$

$\equiv 1 + 2.8^n + 4.64^n$

$\equiv 1 + 2.1^n + 4.1^n$

$\equiv 0 \pmod 7$

នោះ 7 ចែកដាច់ A_n ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$

ដូចនេះ តួចែករួមធំបំផុតនៃចំនួន $A_0, A_1, \cdots, A_{2018}$ គឺ 7 ។

លំហាត់ទី ៤១: បង្ហាញថា $\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ។ តើសមភាពកើតមាននៅពេលណា ? (លំហាត់ប្រលងនៅ Czech-Slovak 2000)

ដំណោះស្រាយ:

គុណអង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពខាងលើដោយ $\sqrt[3]{ab}$ យើងបាន :

$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} \leq \sqrt[3]{2(a+b)^2}$

តាង $\sqrt[3]{a} = x$ និង $\sqrt[3]{b} = y$

វិសមភាពក្លាយជា :

$x^2 + y^2 \leq \sqrt[3]{2\left(x^3+y^3\right)^2}$

តាមវិសមភាព Cauchy Schwarz និង វិសមភាព Chebyshev យើងបាន :

$$\left(x^2+y^2\right)^3=\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3}+\sqrt{y}\cdot\sqrt{y^3}\right)^2\le\left(x^2+y^2\right)(x+y)\left(x^3+y^3\right)$$

$$\le 2\left(x^3+y^3\right)\left(x^3+y^3\right)=2\left(x^3+y^3\right)^2$$

នាំអោយ $x^2+y^2\le\sqrt[3]{2\left(x^3+y^3\right)^2}$ ពិត

សមភាពកើតមានកាលណា $a=b$

ដូចនេះ $\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}\ge\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ។

របៀបទី ០២:

តាមវិសមភាព Power Mean យើងបាន:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}{2}\right)^3\le\left(\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}}{2}\right)^2$$

សមភាពកើតមានកាលណា $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$ ឬ $a=b$

ដោយ $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

ដូចនេះ $\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}\ge\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតវិជ្ជមាន a និង b ។

លំហាត់ទី ៤២: គេអោយ $a_0,a_1,\cdots,a_n$ ជាចំនួននៅក្នុងចន្លោះ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ដែល

$\tan\left(a_0-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(a_1-\frac{\pi}{4}\right)+\cdots+\tan\left(a_n-\frac{\pi}{4}\right)\ge n-1$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\tan a_0\cdot\tan a_1\cdots\tan a_n\ge n^{n+1}$ ។

(លំហាត់ប្រលងនៅសហរដ្ឋអាមេរិកឆ្នាំ ១៩៩៨)

ដំណោះស្រាយ:

តាង $\tan a_i=x_i$ ចំពោះគ្រប់ $i=0,1,2,\cdots,n$

តាមសម្មតិកម្ម $x_i>0$ និង $\frac{x_0-1}{x_0+1}+\frac{x_1-1}{x_1+1}+\cdots+\frac{x_n-1}{x_n+1}\ge n-1$

សមមូល $1\ge \frac{1}{x_0+1}+\frac{1}{x_1+1}+\cdots+\frac{1}{x_n+1}$

ចំពោះ $0\le i\le n$ តាមវិសមភាព AM-GM:

$$\frac{x_i}{x_i+1}=1-\frac{1}{1+x_i}\ge\sum_{j\ne i}\frac{1}{x_j+1}\ge\frac{n}{\sqrt[n]{\prod_{j\ne i}\left(x_j+1\right)}}$$

នាំអោយ $x_i\ge n\sqrt[n]{\frac{\left(x_i+1\right)^n}{\prod_{j\ne i}\left(x_j+1\right)}}$

ជំនួសតម្លៃ $i=0,1,2,\cdots,n$ យើងបាន :

$$x_0x_1x_2\cdots x_n\ge n^{n+1}$$

នាំអោយ $\tan a_0\cdot\tan a_1\cdots\tan a_n\ge n^{n+1}$

សមភាពកើតមានកាលណា $a_0=a_1=a_2=\cdots=a_n=\arctan n$

ដូចនេះ $\tan a_0\cdot\tan a_1\cdots\tan a_n\ge n^{n+1}$ ។

លំហាត់ទី ៤៣: គេអោយ $x,y,z>1$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $x^{x^2+2yz}y^{y^2+2zx}+z^{z^2+2xy}\ge\left(xyz\right)^{xy+yz+zx}$ ។
(លំហាត់របស់សហរដ្ឋអាមេរិក ១៩៩៩)

ដំណោះស្រាយ:

វិសមភាពខាងលើអាចសរសេរជា :

$\left(x^2+2yz\right)\ln x+\left(y^2+2zx\right)\ln y+\left(z^2+2xy\right)\ln z\ge\left(xy+yz+zx\right)\ln xyz$

ឬ $\left(x-y\right)\left(x-z\right)\ln x+\left(y-x\right)\left(y-z\right)\ln y+\left(z-x\right)\left(z-y\right)\ln z\ge 0\ \ (1)$

យើងសន្មត់ថា $x\ge y\ge z$

នោះ $\left(x-y\right)\left(x-z\right)\ge 0,\left(z-x\right)\left(z-y\right)\ge 0$

ដោយ $x,y,z>1$ យើងទាញបាន :

$\left(x-y\right)\left(x-z\right)\ln x\ge\left(x-y\right)\left(x-z\right)\ln y$ និង $\left(z-x\right)\left(z-y\right)\ln z\ge 0\ \ (2)$

តាម (1) និង (2) :

$x^{x^2+2yz}y^{y^2+2zx}+z^{z^2+2xy}\ge\left(xyz\right)^{xy+yz+zx}$ ពិត

ដូចនេះ $x^{x^2+2yz}y^{y^2+2zx}+z^{z^2+2xy}\ge\left(xyz\right)^{xy+yz+zx}$ ។

លំហាត់ទី ៤៤: ចំពោះ $a,b\in\mathbb{Z}$ និង $n\in\mathbb{N}^*$ ស្រាយថាមាន $C\in\mathbb{Z}$ ដែល $(a+b)^n=ac+b^n$ ។

ដំណោះស្រាយ:

ចំពោះ $n=1$ នោះ $(a+b)^1=a.1+b^1$ ពិត

ឧបមាថា វាពិតរហូតដល់ $n=k$ គឺ $(a+b)^k=ac+b^k$

យើងនឹងស្រាយថា វាពិតរហូតដល់ $n=k+1$:

គេមាន $(a+b)^{k+1}=(a+b)(a+b)^k$

$$=(a+b)\left(ac+b^k\right)$$

$$=a\left(ac+bc+b^k\right)+b^{k+1}$$

$$=ad+b^{k+1}$$ ពិត

ដូចនេះ $(a+b)^n=ac+b^n$ ។

តាមរយៈលំហាត់នេះ គេទាញបានលក្ខណៈមួយចំនួនដូចខាងក្រោម :

ក) $(a-b)^n=\left[a+(-b)\right]^n=ac+(-b)^n$

$$=\begin{cases}ac+b^n & , n \text{ is even}\\ ac-b^n & , n \text{ is odd}\end{cases}$$

ខ) $(a+1)^n=ac+1$

គ) $(a-1)^n=ac+(-1)^n$

ឃ) $a^n=ac$

លំហាត់ទី ៤៥: ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2023^{2027}+2027^{2023}$ ចែកដាច់នឹង 30 ។

ដំណោះស្រាយ:

តាង $M=2023^{2027}+2027^{2023}$

$$M=(2010+13)^{2027}+(2040-13)^{2023}$$

$$=2010c+13^{2027}+2040d-13^{2023}$$

$$=30(67c+68d)+13^{2023}\left(13^4-1\right)$$

$$=30(67c+68d)+13^{2023}\cdot 952\cdot 30$$

$=30\left(67c+68d+13^{2023}\cdot 952\right)\vdots 30$ ពិត

ដូចនេះ $2023^{2027}+2027^{2023}$ ចែកដាច់នឹង 30 ។

លំហាត់ទី ៤៦: រកសំណល់ពេលដែល $776^{776}+777^{777}+778^{778}$ ចែក នឹង 15 ។

ដំណោះស្រាយ:

គេមាន:

$$B=776^{776}+777^{777}+778^{778}$$

$$B=\left(777-1\right)^{776}+777^{777}+\left(777+1\right)^{778}$$

$$=777c+1+777d+777e+1=3f+2\ \ (1)$$

$$B=\left(775+1\right)^{776}+\left(775+2\right)^{777}+\left(780-2\right)^{778}$$

$$=775g+1+775h+2^{777}+780k+2^{778}$$

$$=5i+1+775h+2^{777}+780k+2^{778}$$

$$=5i+1+3\cdot 2^{777}=5i+1++3\cdot 2\cdot\left(2^{4}\right)^{194}$$

$$=5i+1+6\left(15+1\right)^{194}=5i+1+6\left(15m+1\right)$$

$$=5i+1+90m+6=5n+2\ \ (2)$$

តាម (1) និង (2) :

$5B=15f+10$ និង $3B=15n+6$

នាំអោយ $2B=15\left(f-n\right)+4$ ដែល $f-n$ គូ

នោះ $B=15q+2$

ដូចនេះ $776^{776}+777^{777}+778^{778}$ ចែក នឹង 15 សល់សំណល់ 2 ។

លំហាត់ទី ៤៧: ស្រាយបញ្ជាក់ថា $C=5^{n}\left(5^{n}+1\right)-6^{n}\left(3^{n}+2^{n}\right)\vdots 91\ \left(n\in\mathbb{N}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ:

គេមាន:

$$C=5^{n}\left(5^{n}+1\right)-6^{n}\left(3^{n}+2^{n}\right)$$

$C=25^n+5^n-18^n-12^n$
$=(21+4)^n+5^n-(14+4)^n-(7+5)^n$
$=21c+4^n+5^n-14d-4^n-7e-5^n$
$=7(3c-2d-e)\vdots 7$
$C=(26-1)^n+5^n-(13+5)^n-(13-1)^n$
$=26f+(-1)^n+5^n-13g-5^n-13h-(-1)^n$
$=26f+(-1)^n+5^n-13g-5^n-13h-(-1)^n$
$=13(2f-g-h)\vdots 13$
ដោយ $(7;13)=1$ នាំអោយ $C\vdots 91$
ដូចនេះ $C=5^n(5^n+1)-6^n(3^n+2^n)\vdots 91\ (n\in\mathbb{N})$ ។

លំហាត់ទី ៤៨: ស្រាយបញ្ជាក់ថា $D=2^{2n-1}\cdot 3^{n+1}+2^{n+1}\cdot 5^{2n-1}\vdots 38\ (n\in\mathbb{N})$ ។

ដំណោះស្រាយ:
តាង $m=n+1\ (m\in\mathbb{N})$ យើងបាន :
$D=2^{2m+1}\cdot 3^{m+2}+2^{m+2}\cdot 5^{2m+1}$
$=2\cdot 4^m\cdot 9\cdot 3^m+4\cdot 2^m\cdot 5\cdot 25^m$
$=18\cdot 12^m+20\cdot 50^m$
$=19(12^m+50^m)-12^m+(38+12)^m$
$=19\cdot 2k+38h+12^m=38(k+h)\vdots 38$
ដូចនេះ $D=2^{2n-1}\cdot 3^{n+1}+2^{n+1}\cdot 5^{2n-1}\vdots 38\ (n\in\mathbb{N})$ ។

លំហាត់ទី ៤៩: ស្រាយបញ្ជាក់ថា $E=2^{2n}(2^{2n+1}-1)-1$ ចែកដាច់នឹង 9 ដែល $n\in\mathbb{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ:
$E=2^{2n}(2^{2n+1}-1)-1$
$E=2^{4n+1}-2^{2n}-1$

$=2(18-2)^n-2^{2n}-1=2\cdot 18c+2(-2)^n-2^{2n}-1$

$=36c-\left[(-2)^{2n}-2(-2)^n+1\right]=36c-\left[(-2)^n-1\right]^2$

$=36c-\left[(-3+1)^n-1\right]^2$

$=36c-(-3d+1-1)^2=9(4c-d^2)\vdots 9$

ដូចនេះ $E=2^{2n}(2^{2n+1}-1)-1$ ចែកដាច់នឹង 9 ដែល $n\in\mathbb{N}$ ។

លំហាត់ទី ៤៩: ស្រាយបញ្ជាក់ថា $F=2048^{2013^{2012^n}}+2168$ ចែកដាច់នឹង 248 ដែល $n\in\mathbb{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ:

ដោយ $2012\vdots 4$ នោះ $2012^n=4m$

យើងបាន :

$2013^{2012^n}=2013^{4m}=(2010+3)^{4m}=2010c+3^{4m}$

$=2010c+(80+1)^m$

$=2010c+80d+1=5e+1$

នាំអោយ $F=(2046+2)^{5e+1}+2168$

$=2046f+2^{5e+1}+2168$

$=2046f+2(31+1)^e+2168$

$=2046f+2(31g+1)+2168$

$=62(33f+g+35)\ \vdots 31$

ដោយ $2048\vdots 8$ និង $2168\vdots 8$ នោះ $F\vdots 8$

តែ $(31;8)=1$ នោះ $F\vdots 8\times 31$

ដូចនេះ $F=2048^{2013^{2012^n}}+2168$ ចែកដាច់នឹង 248 ដែល $n\in\mathbb{N}$ ។

លំហាត់ទី៥០: កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដើម្បីអោយ $G=3^n-1$ ចែកដាច់នឹង 7 ចំពោះ $n\in\mathbb{N}$ ។

ដំណោះស្រាយ:

តាង $n=3q+r$ ដែល $q\in\mathbb{N}$ និង $r\in\{0;1;2\}$

គេបាន $G=3^{3q+r}-1=3^r(28-1)^q-1$

$=3^r\cdot 28c+3^r(-1)^q-1$

ដោយ $3^r\cdot 28c\,\vdots\,7$ ហើយ $3^r(-1)^q-1=\begin{cases}(-1)^q-1\,\vdots\,7 \Leftrightarrow q\ even\ ,\ r=0\\ 3^r(-1)^q-1\,\not\vdots\,7\ ,\ r=1\\ 9^r(-1)^q-1\,\not\vdots\,7\ ,\ r=2\end{cases}$

នាំអោយ $G\,\vdots\,7$ កាលណា $n=6k\ (k\in\mathbb{N})$

ដូចនេះ $n=6k\ (k\in\mathbb{N})$ ។

លំហាត់សម្រាប់សាកល្បងគិត :

ក) កំណត់ $n\in\mathbb{N}^*$ ដោយដឹងថា $H=n\cdot 2^n+3^n\,\vdots\,5$ ។

ខ) កំណត់ $n\in\mathbb{N}^*$ ដោយដឹងថា $H=n\cdot 2^{n+3^n}\,\vdots\,25$ ។

គ) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2015^{2017}+2017^{2015}\,\vdots\,168$ ។

ឃ) ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2^{2^n}-3\,\vdots\,13$ ។

ង) ចំពោះគ្រប់ $n\in\mathbb{N}$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា :

$a)\ 2^{n+3}+3^{2n+1}+3\cdot 2^n\,\vdots\,7$

$b)\ 3^{2n+2}+2^{6n+1}\,\vdots\,11$

$c)\ 3^{2^{4n+1}}+2^{3^{4n+1}}-17\,\vdots\,44$

$d)\ 9^n+1\,\vdots\,20$

$e)\ 4009^n+60^n-3901^n-2172^n\,\vdots\,2004$

$f)\ 2^m+3^n\,\vdots\,23\ (m\in\mathbb{N})$

ច) កំណត់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ដោយដឹងថា :

$a)\ n\cdot 2^n+1\,\vdots\,3$

$b)\ 20^n+16^n-3^n-1\,\vdots\,323$

ចំណេះដឹងបន្ថែម:

ក) ΔABC មានជ្រុង a,b,c និងមានកម្ពស់ h_a,h_b,h_c ។ R,r,p ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្រៅ និង កាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនិង កន្លះបរិមាត្រ នៃត្រីកោណ ABC ។ ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC កំណត់ដោយ :

a) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$

b) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$

c) $S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$

d) $S_{\Delta ABC} = pr$

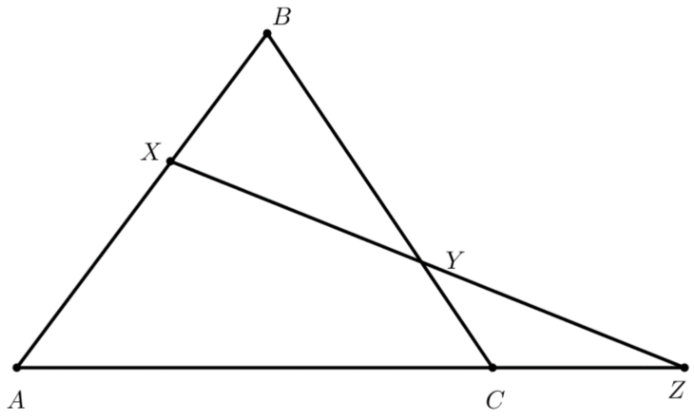
ខ) បើ $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ នោះ $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = k^2$ (k ជាផលធៀបដំនូច) ។

គ) បើ d ជាបន្ទាត់មួយដែលកាត់ជ្រុង AB និង AC នៃត្រីកោណ ABC ត្រង់ B' និង C' នោះ $\frac{S_{\Delta AB'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AB'\cdot AC'}{AB\cdot AC}$ ។

ឃ) នៅក្នុងពិភពគណិតវិទ្យា មាននូវទ្រឹស្តីបទល្បីៗជាច្រើន ។ យើងនឹងសិក្សានៅលើទ្រឹស្តីមួយចំនួនដូចខាងក្រោម ព្រមទាំងការអនុវត្តរបស់វា ។ នៅខាងក្រោម យើងសរសេរ $P = WX \cap YZ$ តំណាងអោយ P ដែលជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ WX និង YZ ។ ប្រសិនបើ A,B,C ជាបីចំណុចកូលីនេអ៊ែរ យើងកំណត់លក្ខខណ្ឌសញ្ញា: $AB/AC = \overrightarrow{AB}/\overrightarrow{AC}$ (បើ B នៅចន្លោះ A និង C នោះ $AB/AC \geq 0$ បើមិនដូចច្នោះទេ $AB/AC \leq 0$) ។

១./ ទ្រឹស្តីបទមេនេឡោះ (Menelaus's Theorem)

ចំណុច X,Y,Z ត្រូវបានជ្រើសរើសនៅលើជ្រុង (ឬបន្លាយនៃជ្រុង) AB,BC,CA នៃត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា ។ ប្រសិនបើមានបន្ទាត់មួយកាត់តាមចំណុច X,Y,Z នោះ $\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CZ}{ZA} = -1$ ។



សម្រាយបញ្ជាក់:

តាង L ជាបន្ទាត់មួយដែលកែងនឹងបន្ទាត់ដែលកាត់តាម X,Y,Z ហើយប្រសព្វគ្នាត្រង់ O
តាង A',B',C' ជាជើងនៃចំណោលកែងពីចំណុច A,B,C ទៅកាន់បន្ទាត់ L រៀងគ្នា

យើងបាន :

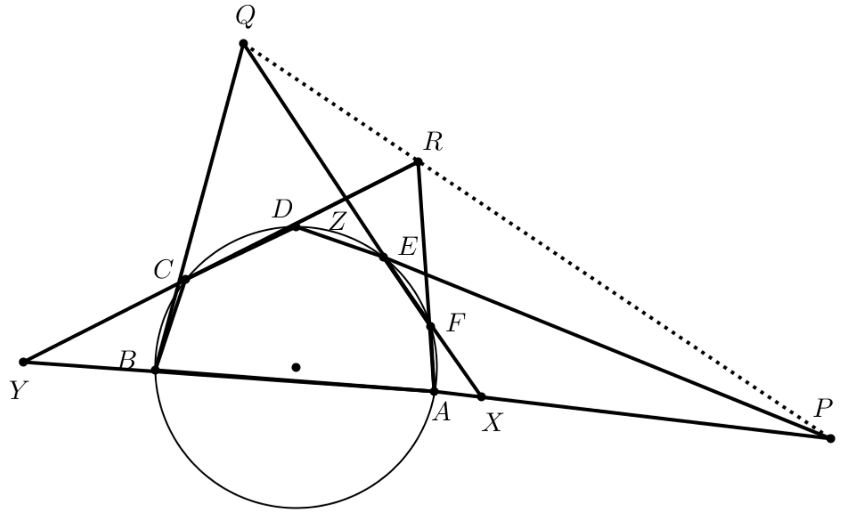
$$\frac{AX}{XB}=\frac{A'O}{OB'}\ ,\ \frac{BY}{YC}=\frac{B'O}{OC'}\ ,\ \frac{CZ}{ZA}=\frac{C'O}{OA'}$$

គុណអង្គសងខាងបញ្ចូលគ្នា យើងទទួលបានទ្រឹស្តីខាងលើ ។

ទ្រឹស្តីបទច្រាសមេនេឡោះ ក៏ពិតដូចគ្នា។ ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ យើងយក $Z'=XY\bigcap CA$ នោះ តាមទ្រឹស្តីបទមេនេឡោះចំពោះបន្ទាត់មួយដែលកាត់តាមចំណុច X,Y,Z' រួចប្រៀបធៀប ជាមួយសមីការខាងលើ គេទាញបាន $CZ/ZA=CZ'/Z'A$ នោះ $Z'=Z$ ។

២.// ទ្រឹស្តីបទ ប៉ាស្កាល់ (Pascal's Theorem)

គេអោយ A,B,C,D ជាចំណុចនៅលើរង្វង់មួយ (មិនចាំបាច់តាមលំដាប់ស៊ីក្លិកទេ) ។ តាង
$P=AB\bigcap DE$, $Q=BC\bigcap EF$, $R=CD\bigcap FA$ នោះ P,Q,R កូលីនេអ៊ែរ ។



តាមទ្រឹស្តីបទ Menelaus ចំពោះបន្ទាត់ BC, DE, FE កាត់បន្លាយត្រីកោណ ABC

យើងបាន :

$$\frac{ZQ}{QX}\cdot\frac{XB}{BY}\cdot\frac{YC}{CZ}=-1$$

$$\frac{XP}{PY}\cdot\frac{YD}{DZ}\cdot\frac{ZE}{EX}=-1$$

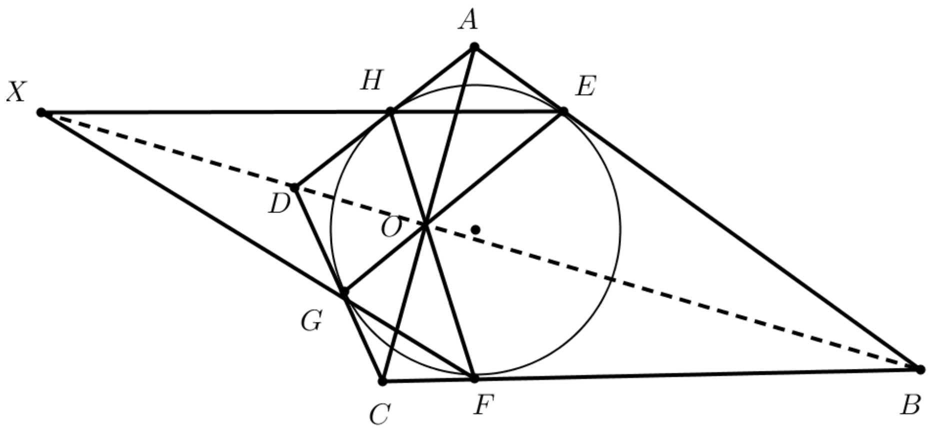
$$\frac{YR}{RZ}\cdot\frac{ZF}{FX}\cdot\frac{XA}{AY}=-1$$

គុណសមីការទាំងបីបញ្ចូលគ្នា រួចប្រើទ្រឹស្តីបទចំណុចប្រសព្វរវាងអង្កត់ធ្នូពីរ (Intersecting Chord Theorem) ដើម្បីទទួលបាន $XA\cdot XB = XE\cdot XF$, $YC.\cdot YD = YA\cdot YB$ និង $ZE\cdot ZF = ZC\cdot ZD$ នោះ $\frac{ZQ}{QX}\cdot\frac{XP}{PY}\cdot\frac{YR}{RZ}=-1$

តាមទ្រឹស្តីបទច្រាស Menelaus : ចំណុច P, Q, R កូលីនេអ៊ែរ ។

៣.// ទ្រឹស្តីបទញូតុន (Newton's Theorem)

រង្វង់មួយចារិកក្នុងចតុកោណ $ABCD$ ដែលជ្រុង AB, BC, CD, DA ប៉ះនឹងរង្វង់ត្រង់ចំណុច E, F, G, H រៀងគ្នា នោះបន្ទាត់ AC, EG, BD និង FH កាត់គ្នាត្រង់ចំណុចតែមួយ ។



តាង $O = EG \cap FH$ និង $X = EH \cap FG$

D ជាចំណុចប្រសព្វរវាង បន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ត្រង់ H និង ត្រង់ G

តាមទ្រឹស្តីបទប៉ាស្កាល់ចំពោះ E,G,G,F,H,H នោះ O,D,X កូលីនេអ៊ែរ

ដូចគ្នាដែរ តាមទ្រឹស្តីបទប៉ាស្កាល់ចំពោះ E,E,H,F,F,G នោះ B,X,O កូលីនេអ៊ែរ

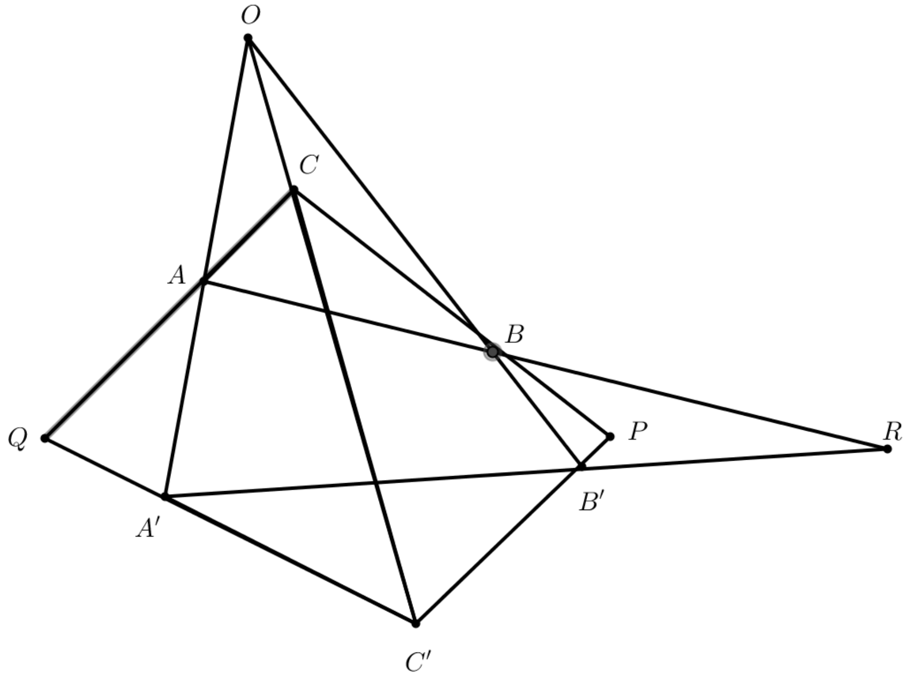
នាំអោយ B,O,D កូលីនេអ៊ែរ នោះ បន្ទាត់ EG,BD,FH កាត់គ្នាត្រង់ចំណុចតែមួយ O

ដូចគ្នាដែរ បន្ទាត់ AC,EG,FH កាត់គ្នាត្រង់ចំណុចតែមួយ O ដែរ

សរុបមក បន្ទាត់ AC,EG,BD និង FH កាត់គ្នាត្រង់ចំណុចតែមួយ O ។

៤.// ទ្រឹស្តីបទ ដេសាហ្គស (Desargues's Theorem)

ចំពោះត្រីកោណ ABC និង ត្រីកោណ $A'B'C'$ ប្រសិនបើបន្ទាត់ AA',BB' និង CC' កាត់គ្នាត្រង់ចំណុចតែមួយ O នោះ ចំណុច P,Q,R កូលីនេអ៊ែរ ដែល $P = BC \cap B'C'$,$Q = CA \cap C'A'$ និង $R = AB \cap A'B'$ ។



តាមទ្រឹស្តីបទ Menelaus ចំពោះបន្ទាត់ $A'B'$ ដែលកាត់បន្លាយនៃត្រីកោណ OAB , បន្ទាត់ $B'C'$ ដែលកាត់តាមបន្លាយនៃត្រីកោណ OBC និង បន្ទាត់ $C'A'$ ដែលកាត់តាមបន្លាយនៃត្រីកោណ OCA យើងបាន :

$$\frac{OA'}{A'A}\cdot\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BB'}{B'O}=-1,$$
$$\frac{OB'}{B'B}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CC'}{C'O}=-1,$$
$$\frac{AA'}{A'O}\cdot\frac{OC'}{C'C}\cdot\frac{CQ}{QA}=-1$$

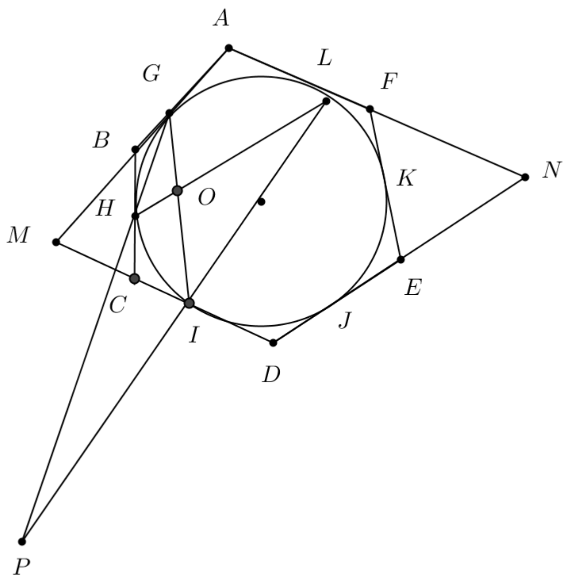
គុណសមីការទាំងបីបញ្ចូលគ្នា : $\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=-1$

តាមទ្រឹស្តីបទច្រាស Menelaus គេទាញបាន ចំណុច P,Q,R កូលីនេអ៊ែរ ។

សំគាល់: ទ្រឹស្តីបទច្រាស Dasargues ក៏ពិតដូចគ្នា ។ យើងអាចស្រាយបញ្ជាក់ដោយយក $O=BB'\cap CC'$ ។ ចំពោះត្រីកោណ RBB' និង ត្រីកោណ QCC' ដោយបន្ទាត់ $RQ,BC,B'C'$ កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច P ហើយ $A=RB\cap QC, O=BB'\cap CC', A'=BR'\cap C'Q$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទដេសាហ្គស ចំណុច A,O,A' កូលីនេអ៊ែរ ។ ដូចនេះ បន្ទាត់ AA',BB' និង CC' កាត់គ្នាត្រង់ចំណុចតែមួយ ។

5.// ទ្រឹស្តីបទ ប្រៀនឆុន (Brianchon’s Theorem)

បន្ទាត់ AB, BC, CD, DE, EF, FA ប៉ះទៅនឹងរង្វង់មួយត្រង់ចំណុច G, H, I, J, K, L (មិនចាំបាច់តាមលំដាក់ស៊ីគ្លីក) នោះបន្ទាត់ AD, BE និង CF កាត់គ្នាត្រង់ចំណុចរួមមួយ ។



តាង $M = AB \cap CD$ និង $N = DE \cap FA$

តាមទ្រឹស្តីបទញូតុន ចំពោះចតុកោណ $AMDN$ យើងឃើញថា បន្ទាត់ AD, IL, GJ កាត់គ្នាត្រង់ចំណុចតែមួយ A' ។ ដូចគ្នាដែរ បន្ទាត់ BE, HK, GJ កាត់គ្នាត្រង់ចំណុចតែមួយ B' និង បន្ទាត់ CF, HK, IL កាត់គ្នាត្រង់ចំណុចតែមួយ C' ។

តែបន្ទាត់ IL ត្រួតស៊ីគ្នានឹងបន្ទាត់ $A'C'$

តាមទ្រឹស្តីបទប៉ាស្កាល់ចំពោះ G, G, I, L, L, H យើងបាន A, O, P កូលីនេអ៊ែរ ដែល $O = GI \cap LH$ និង $P = IL \cap HG$

តាមទ្រឹស្តីបទប៉ាស្កាល់ចំពោះ H, H, L, I, I, G យើងបាន C, O, P កូលីនេអ៊ែរ

នាំអោយ A, C, P កូលីនេអ៊ែរ

ដោយ $G = AB \cap A'B', H = BC \cap B'C', P = CA \cap IL = CA \cap C'A'$ នោះតាមទ្រឹស្តីបទច្រាស ដេសាហ្គូស ចំពោះត្រីកោណ ABC និង ត្រីកោណ $A'B'C'$ យើងបាន បន្ទាត់ $AA' = AD, BB' = BE$ និង $CC' = CF$ កាត់គ្នាត្រង់ចំណុចតែមួយ ។

លំហាត់ទី៥១: គេអោយ $z_1, z_2, \cdots, z_n$ ជាចំនួនកុំផ្លិចដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|=1$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា មានសំណុំមិនទទេមួយនៃ $\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ ជាផលបូកដែលដែលជាតុនៃសំណុំយ៉ាងហោចណាស់មានម៉ូឌុល $\frac{1}{4}$ ។

ដំណោះស្រាយ:

តាង $z_k = a_k + b_k i$ ដែល a_k, b_k ជាចំនួនពិត

នោះ $|z_k| \le |a_k| + |b_k|$

$$1 = \sum_{k=1}^{n}|z_k| \le \sum_{k=1}^{n}|a_k| + \sum_{k=1}^{n}|b_k|$$

$$= \sum_{a_k \ge 0} a_k + \sum_{a_k<0}(-a_k) + \sum_{b_k \ge 0} b_k + \sum_{b_k<0}(-b_k)$$

នោះមួយក្នុងចំណោមផលបូកទាំងបួន យ៉ាងហោចណាស់ $\frac{1}{4}$

កំណត់ $\sum_{a_k \ge 0} a_k \ge \frac{1}{4}$ នោះ $\left|\sum_{a_k \ge 0} z_k\right| \ge \left|\sum_{a_k \ge 0} a_k\right| \ge \frac{1}{4}$

លំហាត់ទី៥២: ចំពោះចំនួនគត់ $n \ge 6$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{n-k}\cdot\frac{1}{2^{k-1}} \le \frac{16}{5}$ ។

ដំណោះស្រាយ:

ចំពោះ $n = 6, 7, \cdots$ យើងតាង :

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{n-k}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}$$

នោះ $a_6 = \frac{16}{5} \le \frac{16}{5}$ ពិត

ឧបមាថា ចំពោះ $n = 6, 7, ..., n$ នោះ $a_n \le \frac{16}{5}$ ពិត

យើងនឹងស្រាយថា វាពិតរហូតដល់ $n+1$:

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n+1-k}\cdot\frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{n+1}{n-j}\cdot\frac{1}{2^{j}}$$

$$=\frac{n+1}{n}+\frac{n+1}{2n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{n}{n-j}\cdot\frac{1}{2^{j-1}}$$

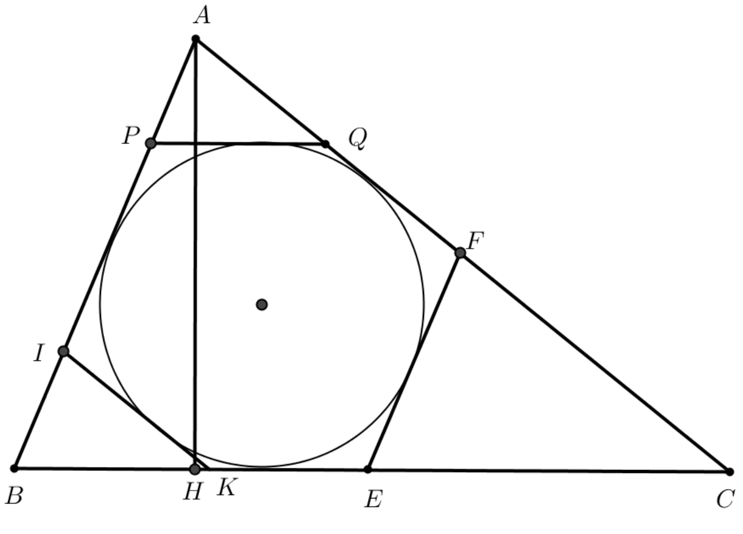
$$=\frac{n+1}{n}\left(1+\frac{a_n}{2}\right)\le\frac{7}{6}\left(1+\frac{8}{5}\right)<\frac{16}{5}$$

នាំអោយ $a_{n+1}<\frac{16}{5}$ ពិត

ដូចនេះ $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{n-k}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}\le\frac{16}{5}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n\ge6$ ។

លំហាត់ទី៥៣: គេអោយត្រីកោណ ABC ចារិកក្រៅរង្វង់មួយ ដែលមានកាំ r ។ គេសង់បន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ PQ ,IK និង EF $(I,P\in AB;Q,E\in AC,K,F\in BC)$ ដែល $PQ\parallel AB,$ $IK\parallel AC$ និង $EF\parallel AB$ ។ កាំរង្វង់ចារិកក្នុងត្រីកោណ APQ,BIK និង CEF មានរង្វាស់ $1,3$ និង 5 រៀងគ្នា ។ ចូរគណនារង្វាស់កាំរង្វង់ r រួចស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{S_{APQ}}+\sqrt{S_{BIK}}+\sqrt{S_{CEF}}=\sqrt{S_{ABC}}$ ។

ដំណោះស្រាយ:



តាង p_1,p_2,p_3,p ជាកន្លះបរិមាត្រនៃត្រីកោណ APQ,BIK,CEF និង ABC រៀងគ្នាដែល $p_1+p_2+p_3=p$ ត្រីកោណ APQ ដូចត្រីកោណ ABC:

$\frac{S_{APQ}}{S_{ABC}}=\frac{p_1r_1}{pr}=\frac{p_1\cdot 1}{pr}=\frac{p_1^2}{p^2}$ នោះ $\frac{1}{r}=\frac{p_1}{p}$

តាមសម្រាយដូចគ្នា $\frac{3}{r}=\frac{p_2}{p}$ និង $\frac{5}{r}=\frac{p_3}{p}$

នាំអោយ $\frac{1+3+5}{r}=\frac{p_1+p_2+p_3}{p}=1$ នោះ $r=9$

តាង $BC=a, AB=c$ និង $AC=b$ នោះ $p=\frac{a+b+c}{2}$

ដោយ PQ កាត់កម្ពស់ AH នៃត្រីកោណ ABC ត្រង់ H' នោះ $HH'=2r$

ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $ABC: S_{ABC}=\frac{1}{2}a\cdot AH=pr$ នោះ $a\cdot AH=2pr$

នាំអោយ $\frac{2r}{AH}=\frac{a}{p}$

ដោយ $\Delta APQ\sim\Delta ABC$ នោះ $\frac{S_{APQ}}{S_{ABC}}=\frac{AH'^2}{AH^2}=\left(\frac{AH-HH'}{AH}\right)^2=\left(1-\frac{2r}{AH}\right)=\left(1-\frac{a}{p}\right)^2$

តាមសម្រាយដូចគ្នា $\frac{S_{BIK}}{S_{ABC}}=\left(1-\frac{b}{p}\right)^2$ និង $\frac{S_{CEF}}{S_{ABC}}=\left(1-\frac{p}{c}\right)^2$

យើងបាន :

$$\sqrt{\frac{S_{APQ}}{S_{ABC}}}+\sqrt{\frac{S_{BIK}}{S_{ABC}}}+\sqrt{\frac{S_{CEF}}{S_{ABC}}}=1-\frac{a}{p}+1-\frac{b}{p}+1-\frac{c}{p}=3-2=1$$

នាំអោយ $\sqrt{S_{PAQ}}+\sqrt{S_{BIK}}+\sqrt{S_{CEF}}=\sqrt{S_{ABC}}$ ពិត ។

លំហាត់ទី៥៤: គេអោយ x,y,z ផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធវិសមីការខាងក្រោម :

$\begin{cases}|x+2y-3z|\le 6\\|x-2y+3z|\le 6\\|x-2y-3z|\le 6\\|x+2y+3z|\le 6\end{cases}$ ។ កំណត់តម្លៃធំបំផុតនៃ $M=|x|+|y|+|z|$ ។

ដំណោះស្រាយ:

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a,b,c គេមាន $|a|+|b|=\max\{|a+b|,|a-b|\}$ និង

$|a|+|b|+|c|=\max\{|a+b+c|,|a-b+c|,|a-b-c|,|a+b-c|\}$

នាំអោយ $M=|x|+|y|+|z|\le|x|+2|y|+3|z|=|x|+|2y|+|3z|$

$$= \max\{|x+y+z|,|x-y+z|,|x-y-z|,|x+y-z|\} \le 6$$

នោះ $\max M = 6$ កាលណា $x=\pm 6, y=z=0$

លំហាត់ទី៥៥: គេអោយ x,y,z ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានដែល $(x+y)(y+z)(z+x)=1$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{\sqrt{xy}+1}+\frac{\sqrt{y^2+yz+z^2}}{\sqrt{yz}+1}+\frac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{\sqrt{zx}+1}\ge\sqrt{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ:

គេមាន $\sqrt{x^2+xy+y^2}=\sqrt{\frac{3}{4}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x-y)^2}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)$

សមភាពកើតមានកាលណា $x=y$

$$\sqrt{xy}+1\le\frac{x+y}{2}+1$$

សមភាពកើតមានកាលណា $x=y$

យើងបាន : $\frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{\sqrt{xy}+1}\ge\frac{\sqrt{3}(x+y)}{x+y+2}$

តាមសម្រាយដូចគ្នាដែរ $\frac{\sqrt{y^2+yz+z^2}}{\sqrt{yz}+1}\ge\frac{\sqrt{3}(y+z)}{y+z+2}$ និង $\frac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{\sqrt{zx}+1}\ge\frac{\sqrt{3}(z+x)}{z+x+2}$

យក $RHS=\frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{\sqrt{xy}+1}+\frac{\sqrt{y^2+yz+z^2}}{\sqrt{yz}+1}+\frac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{\sqrt{zx}+1}$

វិសមភាពដែលគេអោយមកក្លាយជា :

$$LHS\ge\sqrt{3}\left(\frac{x+y}{x+y+2}+\frac{y+z}{y+z+2}+\frac{z+x}{z+x+2}\right)$$

យើងត្រូវស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{x+y}{x+y+2}+\frac{y+z}{y+z+2}+\frac{z+x}{z+x+2}\ge 1\ (1)$

ដោយ x,y,z ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ $(x+y)(y+z)(z+x)=1$ នោះមានចំនួនគត់ a,b,c ដែល

$$x+y=\frac{a}{b},y+z=\frac{b}{c},z+x=\frac{c}{a}$$

តាម (1): $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+1}+\frac{\frac{b}{c}}{\frac{b}{c}+1}+\frac{\frac{c}{a}}{\frac{c}{a}+1}\ge 1$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{a^2+2ab}+\frac{b^2}{b^2+2bc}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\ge 1$$

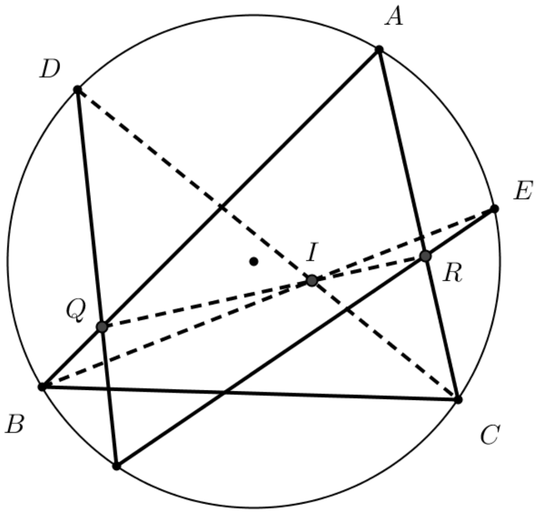
តាមវិសមភាព Cauchy-Schwarz :

$$\frac{a^2}{a^2+2ab}+\frac{b^2}{b^2+2bc}+\frac{c^2}{c^2+2ca}\ge \frac{(a+b+c)^2}{a^2+2ab+b^2+2bc+c^2+2ca}=1$$

ដូចនេះ $\frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{\sqrt{xy}+1}+\frac{\sqrt{y^2+yz+z^2}}{\sqrt{yz}+1}+\frac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{\sqrt{zx}+1}\ge\sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៥៦: គេអោយ D និង E ជាចំណុចកណ្តាលនៃធ្នូតូច AB និង AC នៃរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា ។ តាង P ជាចំណុចមួយនៅលើធ្នូតូច BC ។ ចំណុច $Q=DP\cap BA$ និង ចំណុច $R=PE\cap AC$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ QR កាត់តាមផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្នុងត្រីកោណ ABC ។

ដំណោះស្រាយ:



ដោយ D ជាចំណុចកណ្តាលធ្នូតូច AB

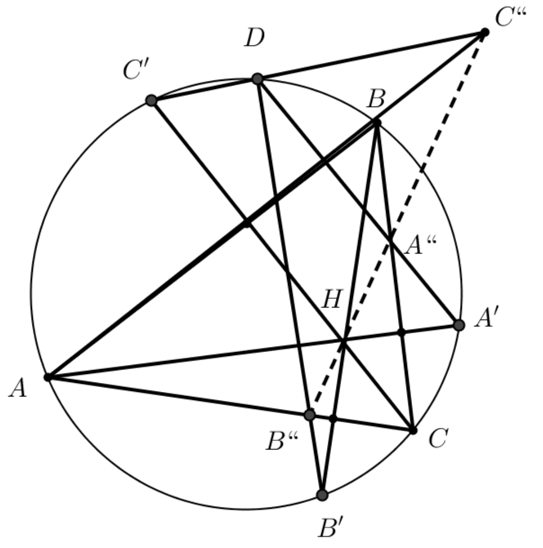
បន្ទាត់ CD ពុះមុំ $\angle ACB$ និង បន្ទាត់ EB ពុះមុំ $\angle ABC$ នោះ $I=CD\cap EB$

តាមទ្រឹស្តីបទប៉ាស្កាល់ចំពោះចំណុច C,D,P,E,B,A នោះចំណុច I,Q,R កូលីនេអ៊ែរ

ដូចនេះ បន្ទាត់ QR កាត់តាមផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្នុងត្រីកោណ ABC ។

លំហាត់ទី៥៧: គេអោយ A,B,C,A',B',C' ជាចំណុចនៅលើរង្វង់មួយដែល AA' កែងនឹង BC ,BB' កែងនឹង CA ហើយ CC' កែងនឹង AB ។ តាង D ជាចំណុចមួយនៅលើរង្វង់ដែល DA' ប្រសព្វជាមួយ BC ត្រង់ចំណុច A'' ,DB' ប្រសព្វជាមួយ CA ត្រង់ចំណុច B'' ហើយ DC' ប្រសព្វជាមួយ AB ត្រង់ចំណុច C'' (គ្រប់អង្កត់អាចត្រូវបានបន្លាយបើចាំបាច់) ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំណុច A'',B'',C'' និង អរតូសង់នៃត្រីកោណ ABC កូលីនេអ៊ែរ ។ (លំហាត់ប្រលងអូឡាំព្យាដនៅប្រទេសអូស្ត្រាលី ឆ្នាំ ២០០១)

ដំណោះស្រាយ:



តាង H ជាអរតូសង់នៃត្រីកោណ ABC

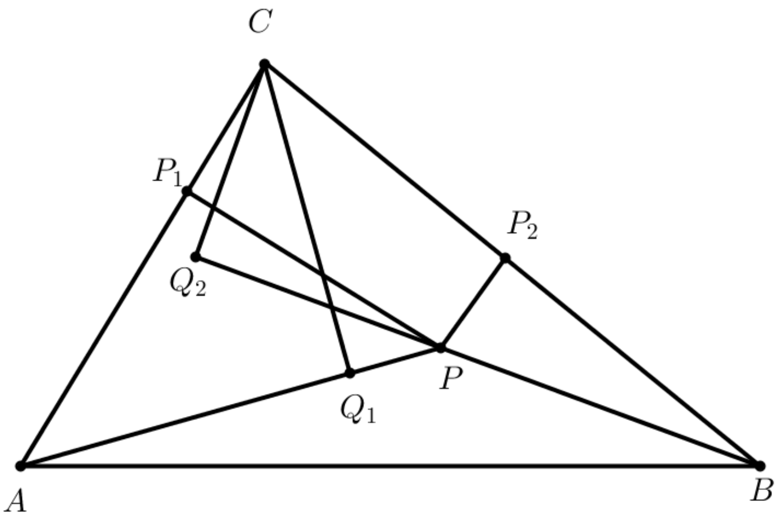
តាមទ្រឹស្តីបទប៉ាស្កាល់ចំពោះ A,A',D,C',C,B នោះ H,A'',C'' កូលីនេអ៊ែរ

ដូចគ្នាតាមទ្រឹស្តីបទប៉ាស្កាល់ចំពោះ B',D,C',C,A,B នោះ B'',C'',H កូលីនេអ៊ែរ

ដូចនេះ ចំណុច A'',B'',C'' និង អរតូសង់នៃត្រីកោណ ABC កូលីនេអ៊ែរ ។

លំហាត់ទី៥៨: គេអោយត្រីកោណ ABC មួយ ។ P ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណនោះ ។ តាង P_1 និង P_2 ជាជើងនៃចំណោលកែងដែលគូសចេញពីចំណុច P ទៅកាន់ជ្រុង AC និង BC ។ សង់ AP និង BP ហើយយក Q_1 និង Q_2 ជាជើងនៃចំណោលកែងដែលគូសចេញពីចំណុច C មកលើ AP និង BP ។ប្រសិនបើ $Q_2 \neq P_1$ និង $Q_1 \neq p_2$ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ P_1Q_2, Q_1P_2 និង AB កាត់គ្នាត្រង់ចំណុចរួមមួយ ។

ដំណោះស្រាយ:



ដោយ $\angle CP_1P, \angle CP_2P, \angle CQ_2P, \angle CQ_1P$ សុទ្ធតែជាមុំកែងនោះ ចំណុច C, Q_1, P_1, P, P_2, Q_2 ស្ថិតនៅលើរង្វង់មួយដែលមាន CP ជាអង្កត់ផ្ចិត

ដោយ $A = CP_1 \cap PQ_1$ និង $B = Q_2P \cap P_2C$

តាមទ្រឹស្តីបទប៉ាស្កាល់ ចំពោះ C, P_1, Q_2, P, Q_1, P_2 យើងឃើញថា $X = P_1Q_2 \cap Q_1P_2$ នៅលើបន្ទាត់ AB

ដូចនេះ បន្ទាត់ P_1Q_2, Q_1P_2 និង AB កាត់គ្នាត្រង់ចំណុចរួមមួយ ។

លំហាត់ទី៥៩: នៅក្នុងត្រីកោណ ABC មួយ M ជាជើងនៃចំណោលកែងដែលគូសចេញពីកំពូល A មកកាន់កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle BCA$ ។ N និង L ជាជើងនៃចំណោលកែងរៀងគ្នា ដែលគូសចេញពីកំពូល A និង C មកកាន់កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle ABC$ ។ តាង F ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ MN និង AC ។ តាង E ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ BF និង CL ។ តាង D ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ BL និង AC ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ DE និង MN ស្របគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ:

បន្លាយ AM អោយជួប BC ត្រង់ G

បន្លាយ AN អោយជួប BC ត្រង់ I

នោះ $AM = MG, AN = NI$ ហើយបន្ទាត់ $MN \parallel BC$

ដោយ $AM = MG$ នាំអោយ $AF = FC$
បន្លាយ CL អោយជួបបន្ទាត់ AB ត្រង់ J
នោះ $JL = LC$ ហើយបន្ទាត់ $LF \parallel AB$

បន្ទាត់ LF ប្រសព្វជាមួយ BC ត្រង់ H នោះ $BH = HC$
នៅក្នុងត្រីកោណ BLC មាន BE, LH និង CD កាត់គ្នាត្រង់ចំណុចតែមួយ F
តាមទ្រឹស្តីបទ Ceva:

$$\frac{BH}{HC} \cdot \frac{CE}{EL} \cdot \frac{LD}{DB} = 1$$

ដោយ $BH = HC$ នោះ $\frac{CE}{EL} = \frac{DB}{LD}$
នាំអោយបន្ទាត់ DE និង BC ស្របគ្នា
ដូចនេះ បន្ទាត់ DE និង MN ស្របគ្នា ។

លំហាត់ទី៦០: ចំពោះចំនួនគត់ $n \geq 2$ គេអោយ a_1, a_2, a_3, a_4 ជាចំនួនគត់ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណ្ឌពីរខាងក្រោម :
(1) ចំពោះ $i = 1,2,3,4$ តួចែករួមធំបំផុតរវាង n និង a_i គឺ 1
(2) ចំពោះគ្រប់ $k = 1,2,3,\cdots,n-1$ យើងបាន $(ka_1)^n + (ka_2)_n + (ka_3)_n + (ka_4)_n = 2n$ ដែល $(a)_n$ តាងអោយសំណល់ពេលដែល a ត្រូវបានចែកដោយ n ។
ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(a_1)_n, (a_2)_n, (a_3)_n, (a_4)_n$ អាចត្រូវបានចែកជាពីរគូ ដែលគូនីមួយៗមានផលបូកស្មើ n ។

ដំណោះស្រាយ:

ដោយ n និង a_1 ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា នោះសំណល់ $(a_1)_n, (2a_1)_n, \cdots ((n-1)a_1)_n$ មិនអាចជាសូន្យទេ ហើយត្រូវខុសគ្នា ។ ដូចច្នេះ មាន k មួយនៅក្នុងចំណោម $1,2,3,\cdots,n-1$ ដែល $(ka_1)_n = 1$ ។ គេដឹងថា k ជាចំនួនបឋមគ្នាជាមួយ n ។ ប្រសិនបើ $(ka_1)_n + (ka_j)_n = n$ នោះ $(ka_1)_n + (ka_j)_n \equiv 0 \pmod n$ នាំអោយ
$a_i + a_j \equiv 0 \pmod n$ និង $(a_1)_n + (a_j)_n = n$ ។

ដើម្បីដោះស្រាយលំហាត់នេះ យើងត្រូវជំនួស a_i ដោយ $(ka_i)_n$ ហើយសន្មត់ថា $1=a_1\le a_2\le a_3\le a_4\le n-1$ តាមលក្ខណ្ឌទី (ii)/

$1+a_2+a_3+a_4=2n \quad (A)$

ចំពោះ $k=1,2,3,\cdots,n-1$ យើងតាង $f_i(k)=[ka_i/n]-[(k-1)a_i/n]$

នោះ $f_i(k)\le(ka_i/n)+1-(k-1)a_i/n=1+(a_i/n)<2$

នាំអោយ $f_i(k)=0$ ឬ 1

ដោយ $x=[x/n]n+(x)_n$ ដកករណី $x=ka_i$ចេញពីករណី $x=(k-1)a_i$ រួចបូកបញ្ចូល ចំពោះ $i=1,2,3,4$

ដោយប្រើលក្ខណ្ឌទី (ii) និង (A) គេបាន :

$$f_1(k)+f_2(k)+f_3(k)+f_4(k)=2$$

ដោយ $a_1=1$ នោះ $f_1(k)=0$ ហើយប្រាកដណាស់ពីរនៃ $f_2(k),f_3(k),f_4(k)$ មានតម្លៃស្មើ 1 (B)

ដោយ $a_i<n,\ f_i(2)=[2a_i/n]$

ដោយ $a_2\le a_3\le a_4\le n$ យើងបាន $f_2(2)=0,\ f_3(2)=f_4(2)=1$ ឬ $1=a_1\le a_2<\frac{n}{2}<a_3\le a_4\le n-1$

តាង $t_2=[n/a_2]+1$ នោះ $f_2(t_2)=[t_2a_2/n]-[(t_2-1)a_2/n]=1-0=1$

បើ $1\le k<t_2$ នោះ $k<n/a_2,\ f_2(k)=[ka_2/n]-[(k-1)a_2/n=0-0=0]$

បើ $f_2(j)=1$ នោះ $f_2(k)=0$ ចំពោះ $j<k<j+t_2-1$ ហើយប្រាកដណាស់ មួយនៃ $f_2(j+t_2-1)$ ឬ $f_2(j+t_2)$ ស្មើ 1 (C)

ដូចគ្នាដែរ ចំពោះ $i=3,4$ តាង $t_i=[n/(n-a_i)]+1$ នោះ $f_i(t_i)=0$ និង $f_i(k)=1$ ចំពោះ $1\le k\le t_i$ ។ ដូចគ្នាដែរ ចំពោះ $f_i(j)=0$ នោះ $f_i(k)=1$ ចំពោះ $j<k<j+t_i-1$ ហើយប្រាកដណាស់ មួយនៃ $f_i(j+t_i-1)$ ឬ $f_i(j+t_i)$ ស្មើ 0 (D)

ដោយ $f_3(t_3)=0$ តាមលក្ខណ្ឌ (B) $f_2(t_3)=1$

បើ $k<t_3\le t_4$ នោះតាម (D) $f_3(k)=f_4(k)=1$ នោះតាម (B) $f_2(k)=0$ និងតាម $(C): t_2=t_3$

សន្មត់ $t_4<n$

ដោយ $\frac{n}{2}<a_4<n$ យើងបាន $f_4(n-1)=(a_4-1)-(a_4-2)=1\ne 0=f_4(t_4)$ ហើយដែល $t_4\ne n-1$

ដោយ $f_4(t_4)=0$ តាម (B): $f_2(t_4)=f_3(t_4)=1$

ដោយ $f_3(t_3)=0\neq 1=f_3(t_4), t_3\neq t_4$ នោះ $t_2=t_3<t_4$
តាង $s<t_4$ ជាចំនួនគត់ធំបំផុតដែល $f_2(s)=1$
ដោយ $f_2(t_4)=1$ យើងបាន $t_4=s+t_2-1$ ឬ $t_4=s+t_2$
ដោយ $f_2(s)=f_4(s)=1$ យើងបាន $f_3(s)=0$
តែ $t_2=t_3$ នោះ $t_4=s+t_3-1$ ឬ $t_4=s+t_3$
ដោយ $f_3(s)=0$ និង $f_3(t_4)=1$ តាម (D) យើងបាន $f_3(t_4-1)=0$ ឬ $f_3(t_4+1)=0$
ដោយ $f_2(s)=1, f_2(t_4)=1$ និង $t_2>2$ តាម (C) យើងបាន $f_2(s+1)=0$ និង $f_2(t_4+1)=0$
នាំអោយ $s+1\neq t_4$ ហើយគេទាញបាន $f_2(t_4-1)=0$ តាមនិយមន័យ s
នោះ $k=t_4-1$ ឬ t_4+1 ផ្ទុយពី (B)

ដូច្នេះ $t_4\geq n$ ហើយ $n-a_4=1$
យើងបាន $a_1+a_4=a_2+a_3=n$ ។

លំហាត់ទី៦១: គេអោយ k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ នៅសងខាងបណ្តោយទន្លេមួយ មានទីក្រុងសរុបយ៉ាងតិចបី ។ តាមរយៈទីក្រុងនីមួយៗ មានផ្លូវជាក់លាក់ចំនួន k ដែលភ្ជាប់ពី ពីទីក្រុងមួយទៅក្រុងផ្សេងទៀតដែលនៅម្ខាងទៀតនៃទន្លេ ។ តាមរយៈផ្លូវទាំងនេះ ប្រជាជននៅទីក្រុងមួយ អាចធ្វើដំណើរទៅដល់ទីក្រុងផ្សេងទៀត ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បើសិនផ្លូវមួយត្រូវបានកាត់ផ្តាច់ ប្រជាជននៅតែអាចទៅដល់ទីក្រុងផ្សេងទៀតជាមួយផ្លូវដែលនៅសល់ ។

ដំណោះស្រាយ:

តភ្ជាប់ទីក្រុងទាំងឡាយដោយកំពូលនៃក្រាប ។ ឧបមាថាមាន X ទីក្រុងនៅខាងឆ្វេង ទន្លេ និង Y ទីក្រុងនៅខាងស្តាំទន្លេ នោះចំនួនផ្លូវ(ជាទ្រនុងនៃក្រាប) នៅពេលចាប់ផ្តើមគឺ $Xk=Yk$ នាំអោយ $X=Y$ ។ យើងបាន $X+Y\geq 3$

ក្រោយពេលផ្លូវមួយរវាងទីក្រុង A និង ទីក្រុង B ត្រូវបានកាត់ផ្តាច់ យើងកំណត់ថាទីក្រុងមិនមានការទំនាក់ទំនងគ្នាតាមរយៈផ្លូវដែលនៅសល់ទេ នោះទីក្រុងនីមួយៗអាចតភ្ជាប់គ្នាយ៉ាងច្បាស់ជាមួយ A ឬ B ។ ក្រាបដែលកំណត់ពីដំបូងត្រូវបែងចែកជាពីរដែលជាប់ទាក់ទងគ្នា គឺ ក្រាប G_A មានចំនួន A កំពូល និង ក្រាប G_B មានចំនួន B កំពូល

តាង X_A ជាចំនួននៃទីក្រុងទាំងឡាយក្នុងចំណោម X ទីក្រុងនៅខាងឆ្វេងទន្លេ ដែលនៅអាចភ្ជាប់ទំនាក់ទំនងជាមួយនិងទីក្រុង A ក្រោយពេលផ្លូវមួយត្រូវបានកាត់ផ្តាច់ ហើយ ដូចគ្នាដែរ ចំពោះ X_B, Y_A, Y_B ។ ចំនួនទ្រនុងនៃ GA គឺ $X_A k - 1 = Y_A k$ នោះ $(X_A - Y_A)k = 1$

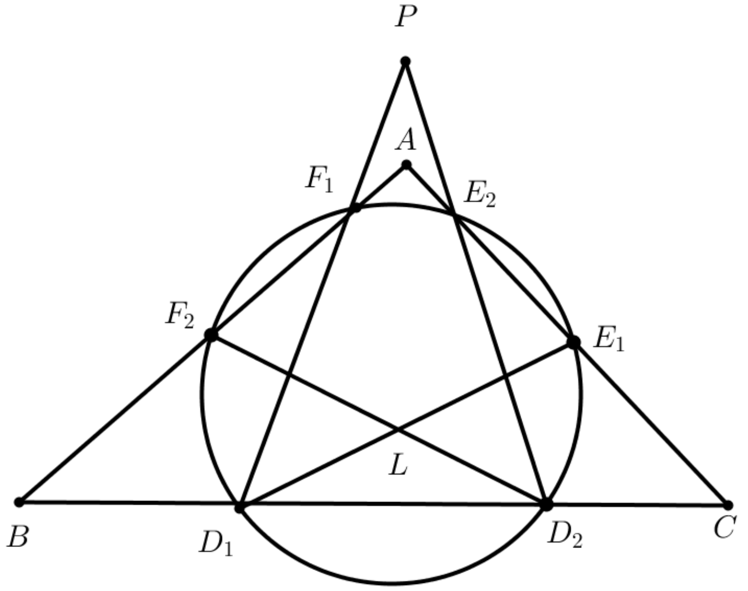
នាំអោយ $k = 1$

តាមលក្ខណ្ឌដើម $X = 1, Y = 1$ នោះ $X + Y = 2$ ផ្ទុយពី $X + Y \geq 3$

ដូចនេះ ប្រជាជននៅតែអាចទៅដល់ទីក្រុងផ្សេងទៀតជាមួយផ្លូវដែលនៅសល់ ។

លំហាត់ទី៦២: រង្វង់មួយកាត់ជ្រុង BC, CA, AB ត្រង់ចំណុច $D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$ តាមលំដាប់ ។ អង្កត់ D_1E_1 និង D_2F_2 ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច L ។ អង្កត់ E_1F_1 និង E_2D_2 ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច M ។ អង្កត់ F_1D_1 និង F_2E_2 ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច N ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាបន្ទាត់ទាំងបី AL, BM និង CN កាត់គ្នាត្រង់ចំណុចតែមួយ ។ (លំហាត់ប្រលងអូឡាំព្យាដរបស់ប្រទេសចិន) ។

ដំណោះស្រាយ:



តាង $P = D_1F_1 \cap D_2E_2$, $Q = E_1D_1 \cap E_2F_2$, $R = F_1E_1 \cap F_2D_2$

តាមទ្រឹស្តីបទប៉ាស្កាល់ចំពោះ $E_2, E_1, D_1, F_1, F_2, D_2$ យើងបាន B, M, Q កូលីនេអ៊ែរ

តាមទ្រឹស្តីបទប៉ាស្កាល់ចំពោះ D_2,D_1,F_1,E_1,E_2,F_2 យើងបាន C,N,R កូលីនេអ៊ែរ

តាង $X=E_2E_1\bigcap D_1F_2=CA\bigcap D_1F_2, Y=F_2F_1\bigcap E_1D_2=AB\bigcap E_1D_2$ និង $Z=D_2D_1\bigcap F_1E_2=BC\bigcap F_1E_2$

តាមទ្រឹស្តីប៉ាស្កាល់ចំពោះ D_1,F_1,E_1,E_2,D_2,F_2 យើងបាន P,R,X កូលីនេអ៊ែរ

តាមទ្រឹស្តីបទប៉ាស្កាល់ចំពោះ E_1,D_1,F_1,F_2,E_2,D_2 យើងបាន Q,P,Y កូលីនេអ៊ែរ

តាមទ្រឹស្តីបទប៉ាស្កាល់ចំពោះ F_1,E_1,D_1,D_2,F_2,E_2 យើងបាន R,Q,Z កូលីនេអ៊ែរ

ចំពោះ ត្រីកោណ ABC និង ត្រីកោណ PQR មាន $X=CA\bigcap RP, Y=AB\bigcap PQ, Z=BC\bigcap QR$

តាមទ្រឹស្តីបទប្រាស ដេសាហ្គូស បន្ទាត់ $AP=AL, BQ=BM, CR=CN$ កាត់គ្នាត្រង់ចំណុចតែមួយ ។

លំហាត់ទី៦៣: បើ $a,b,c>0$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $a^ab^bc^c\geq(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$ ។

(លំហាត់ប្រលងអូឡាំព្យាដសហរដ្ឋអាមេរិក ១៩៧៤)

ដំណោះស្រាយ:

តាមស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មត់ថា $a\leq b\leq c$ នោះ $\ln a\leq \ln b\leq \ln c$

តាមវិសមភាព Chebyshev:

$$a\ln a+b\ln b+c\ln c\geq\frac{(a+b+c)(\ln a+\ln b+\ln c)}{3}$$

$$\ln a^a+\ln b^b+\ln c^c\geq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)(\ln abc)$$

$$\ln\left(a^ab^bc^c\right)\geq\ln(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$$

ដូចនេះ $a^ab^bc^c\geq(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$

លំហាត់ទី៦៤: គេអោយ $c_1,c_2,\cdots,c_n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានខុសៗគ្នា ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $c_1+\frac{c_2}{4}+\cdots+\frac{c_n}{n^2}\geq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ ។ (លំហាត់ប្រលងអូឡាំព្យាដអន្តរជាតិឆ្នាំ ១៩៧៨)

ដំណោះស្រាយ:

តាង $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ជាតម្រៀបរបស់ c_i តាមលំដាប់កើន

ដោយ a_i ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានខុសៗគ្នា និង $a_i \geq i$

ដោយ $1 > \frac{1}{4} > \cdots > \frac{1}{n^2}$

តាមវិសមភាពតម្រៀប :

$$c_1 + \frac{c_2}{4} + \cdots + \frac{c_n}{n^2} \geq a_1 + \frac{a_2}{4} + \cdots + \frac{a_n}{n^2}$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

លំហាត់ទី៦៥: គេអោយ $a, b, c > 0$ និង $abc = 1$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$ ។ (លំហាត់ប្រលងអូឡាំព្យាដអន្តរជាតិ ១៩៩៥)

ដំណោះស្រាយ:

តាង $x = bc = \frac{1}{a}$, $y = ca = \frac{1}{b}$ និង $z = ab = \frac{1}{c}$

វិសមភាពខាងលើអាចសរសេរជា :

$$\frac{x^2}{z+y} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{y+x} \geq \frac{3}{2}$$

តាមស៊ីមេទ្រី យើងអាចសន្មត់យក $x \leq y \leq z$ នោះ $x^2 \leq y^2 \leq z^2$ ហើយ $\frac{1}{z+y} \leq \frac{1}{x+z} \leq \frac{1}{y+x}$

តាង $A = \frac{x^2}{z+y} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{y+x}$

តាមវិសមភាពតម្រៀប :

$$A \geq \frac{x^2}{y+x} + \frac{y^2}{z+y} + \frac{z^2}{x+z}$$

$$A \geq \frac{x^2}{x+z} + \frac{y^2}{y+x} + \frac{z^2}{z+y}$$

នាំអោយ $A \geq \frac{1}{2}\left(\frac{y^2+x^2}{y+x} + \frac{z^2+y^2}{z+y} + \frac{x^2+z^2}{x+z} \right)$

តាមវិសមភាព RMS-AM : $r^2+s^2\geq\frac{(r+s)^2}{2}$

អង្គខាងស្តាំ យ៉ាងហោចណាស់ $\frac{x+y+z}{2}$ ឬ យ៉ាងតិចណាស់ $\frac{3(xyz)^{\frac{1}{3}}}{2}=\frac{3}{2}$

នាំអោយ $A\geq\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$ ។

លំហាត់ទី៦៦: ឧបមាថា គេមានវិសមភាព

$\sqrt{2}(2a+3)\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{6}{\sin\theta+\cos\theta}-2\sin 2\theta<3a+6$ ពិតចំពោះគ្រប់ $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ។ ចូររកវ៉ង់ នៃ a ដែលអាចមាន ។

ដំណោះស្រាយ:

តាង $\sin\theta+\cos\theta=x$ នោះ $x\in\left[1;\sqrt{2}\right]$ និង $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=x^2-1$

$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}x$$

វិសមភាពដែលគេអោយមកអាចសរសេរជា :

$$(2a+3)x+\frac{6}{x}-2\left(x^2-1\right)<3a+6$$

$$2x^3-(2a+3)x^2+(3a+4)x-6>0$$

$$(2x-3)\left(x^2-ax+2\right)>0$$

ដោយ $x\in\left[1;\sqrt{2}\right]$ នោះ $2x-3<0$

នាំអោយ $x^2-ax+2<0$ ពិតចំពោះគ្រប់ $x\in\left[1;\sqrt{2}\right]$

នាំអោយ $a>x+\frac{2}{x}$, $x\in\left[1;\sqrt{2}\right]$ ពិតជានិច្ច

តាង $f(x)=x+\frac{2}{x}$, $x\in\left[1;\sqrt{2}\right]$ នោះ $a>f_{\max}(x)$

ដោយ $f(x)=x+\frac{2}{x}$ ជាអនុគមន៍ម៉ូណូតូនចុះ

$$f_{\max}(x)=f(1)=3$$

ដូចនេះ $a>3$

លំហាត់ទី៦៧: ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a,b,c យើងបាន

$1<\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ:

តាង $x=\frac{b^2}{a^2}$, $y=\frac{c^2}{b^2}$, $z=\frac{a^2}{c^2}$ នោះ $x,y,z\in R^*$ និង $xyz=1$

យើងគ្រាន់តែស្រាយបញ្ជាក់ថា : $1<\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$

ដោយមិនធ្វើអោយបាត់បង់លក្ខណៈដើម យើងសន្មត់យក $x\le y\le z$

តាង $A=xy$ នោះ $z=\frac{1}{A}$ ដែល $A\le 1$

នាំអោយ $\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}>\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}>1$

យើងតាង $u=\frac{1}{\sqrt{1+A+x+\frac{A}{x}}}$ នោះ $u\in\left(0,\frac{1}{1+\sqrt{A}}\right)$ ហើយ $u=\frac{1}{1+\sqrt{A}}$ កាលណា $x=\sqrt{A}$

យើងបាន :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{A}{x}}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+\frac{A}{x}}+\frac{2}{\sqrt{1+A+x+\frac{A}{x}}}$$

$$=\frac{2+x+\frac{A}{x}}{1+A+x+\frac{A}{x}}+\frac{2}{\sqrt{1+A+x+\frac{A}{x}}}$$

$$=1+(1-A)u^2+2u$$

បង្កើតអនុគមន៍ $f(u)=(1-A)u^2+2u+1$ នោះ $f(u)$ កើនចំពោះ $u\in\left(0,\frac{1}{1+\sqrt{A}}\right)$

គេបាន : $\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}\le\sqrt{f\left(\frac{1}{1+\sqrt{A}}\right)}=\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{A}}}$

យក $\sqrt{A}=v$ នោះ $\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\le\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{A}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{A}}}$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+v}}+\frac{\sqrt{2}v}{\sqrt{2\left(1+v^2\right)}}$$

$$\le\frac{2}{\sqrt{1+v}}+\frac{\sqrt{2}v}{1+v}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+v}}+\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{1+v}$$

$$=-\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+v}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{3\sqrt{2}}{2}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

ដូចនេះ $1<\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៦៨: a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃ ΔABC ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $a+b+c=1$ ។ បង្ហាញថា $5\left(a^2+b^2+c^2\right)+18abc\ge\frac{7}{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ:

គេមាន $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$$=1-2(ab+bc+ca)$$

វិសមភាពដើមអាចសរសេរជា : $\frac{5}{9}(ab+bc+ca)-abc\le\frac{4}{27}$

តាង $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

នោះ $f\left(\frac{5}{9}\right)=\left(\frac{5}{9}\right)^3-\left(\frac{5}{9}\right)^2+\frac{5}{9}(ab+bc+ca)-abc$

ដោយ a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ ABC នោះ $a,b,c\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ ហើយ $\frac{5}{9}-a,\frac{5}{9}-b,\frac{5}{9}-c$ សុទ្ធតែវិជ្ជមាន

យើងបាន $f\left(\frac{5}{9}\right)=\left(\frac{5}{9}-a\right)\left(\frac{5}{9}-b\right)\left(\frac{5}{9}-c\right)$

$$\le \frac{1}{27}\left[\left(\frac{5}{9}-a\right)+\left(\frac{5}{9}-b\right)+\left(\frac{5}{9}-c\right)\right]^2$$
$$=\frac{8}{27^2}$$

នាំអោយ $\frac{8}{27^2}\ge\left(\frac{5}{9}\right)^3-\left(\frac{5}{9}\right)^2+\frac{5}{9}(ab+bc+ca)-abc$

ដូចនេះ $5\left(a^2+b^2+c^2\right)+18abc\ge\frac{7}{3}$ ។

លំហាត់ទី៦៩: គេអោយ x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3 ជាចំនួនពិតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 1$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-1)^2\ge\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2-1\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ:

បើ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ វិសមភាពដែលអោយមកពិត

បើ $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ យើងបង្កើតអនុគមន៍ដឺក្រេទីពីរមួយ ដូចខាងក្រោម :

$$f(t)=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)t^2-2(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-1)t+\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2-1\right)$$
$$=(x_1t-y_1)^2+(x_2t-y_2)^2+(x_3t-y_3)^2-(t-1)^2$$

នេះគឺជាប៉ារ៉ាបូលដែលបែរកោពផតចុះក្រោម ហើយ $f(1)=(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2\ge 0$

នាំអោយប៉ារ៉ាបូលនេះត្រូវតែកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

យើងបាន :

$$\Delta=4(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-1)^2-4\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2-1\right)\ge 0$$

ដូចនេះ $(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-1)^2\ge\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\right)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2-1\right)$ ។

សំគាល់ : ដើម្បីធ្វើសម្រាយបញ្ជាក់លើវិសមភាព $A\cdot C\ge(or\le)B^2$ ដំបូងយើងត្រូវបម្លែងវាអោយមានរាង $4A\cdot C\ge(or\le)(2B)^2$ បន្ទាប់មកយើងបង្កើតអនុគមន៍ដឺក្រេទីពីរមួយ $f(x)=Ax^2-(2B)x+C$ រួចសិក្សាទៅលើឌីសគ្រីមីណង់ $\Delta\le 0$ ឬ $\Delta\ge 0$ ។

លំហាត់ទី៧០: គេអោយ $a,b,c\in(-2,1)$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $abc>a+b+c-2$ ។

ដំណោះស្រាយ:

គន្លឹះ : អង្គទាំងពីរនៃវិសមភាពនេះ ស៊ីមេទ្រីធៀបទៅនឹង a,b,c ហើយ a,b,c សុទ្ធតែមានលំដាប់ 1 ។ យើងអាចសាកល្បងបង្កើតអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ មួយសម្រាប់ដោះស្រាយ ។

តាង $f(x)=(bc-1)x-b-c+2$

យើងបាន:

$$f(-2)=-2bc-b-c+4$$

$$=-2\left(b+\frac{1}{2}\right)\left(c+\frac{1}{2}\right)+\frac{9}{2}$$

ដោយ $b,c\in(-2;1)$,$b+\frac{1}{2},c+\frac{1}{2}\in\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$

នាំអោយ $\left(b+\frac{1}{2}\right)\left(c+\frac{1}{2}\right)\le\left|b+\frac{1}{2}\right|\cdot\left|c+\frac{1}{2}\right|<\frac{9}{4}$

នាំអោយ $f(-2)=-2\left(b+\frac{1}{2}\right)\left(c+\frac{1}{2}\right)+\frac{9}{2}$

$$>-2\cdot\frac{9}{4}+\frac{9}{2}=0$$

$f(1)=bc-b-c+1=(1-b)(1-c)>0$

ចំពោះ $x\in(-2;1)$ អនុគមន៍ $f(x)$ វិជ្ជមានជានិច្ច នោះ $f(a)>0$

ដូចនេះ $abc>a+b+c-2$ ។

លំហាត់ទី៧២: ឧបមាថា p ជាផលគុណនៃចំនួនគត់តគ្នា ធំជាង 2 ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា គ្មានចំនួនគត់ $x_1,x_2,\cdots,x_p$ ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការខាងក្រោមទេ :

$$\sum_{i=1}^{p}x_i^2-\frac{4}{4p+1}\left(\sum_{i=1}^{p}x_i\right)^2=1\ .$$

ដំណោះស្រាយ:

យើងសរសេរ $p=k(k+1)$, $k\ge 3$ នោះ $p\ge 12$,$4p+1>4p$

យើងឧបមាផ្ទុយពីការពិតថា មានចំនួនគត់ $x_1\ge x_2\ge\cdots\ge x_p$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ :

$$4p+1=(4p+1)\left(\sum_{i=1}^{p}x_i^2\right)-4\left(\sum_{i=1}^{p}x_i\right)^2$$

$$=4\left[p\sum_{i=1}^{p}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{p}x_i\right)^2\right]+\sum_{i=1}^{p}x_i^2$$

$$=4\sum_{1\le i<j\le p}\left(x_i-x_j\right)^2+\sum_{i=1}^{p}x_i^2$$

ប្រសិនបើ គ្រប់ x_i មានតម្លៃស្មើគ្នាទាំងអស់ យើងបាន :

$4p+1=px_1^2$ ផ្ទុយពីការពិត

យើងត្រូវតែមាន $x_1\ge x_2\ge\cdots\ge x_l>x_{l+1}\ge\cdots\ge x_p$ ដែល $l\in\mathbb{N}_+$

សិក្សាទៅលើពីរករណីដែលអាចកើតឡើង :

(i) បើ $2\le l<p-1$

$$4\sum_{1\le i<j\le p}\left(x_i-x_j\right)^2\ge 4\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=l+1}^{p}\left(x_i-x_k\right)^2\ge 4l\left(p-l\right)$$

ហើយ $l\left(p-l\right)-2\left(p-2\right)=lp-l^2-2p+4$

$=\left(l-2\right)\left(p-l-2\right)\ge 0$

យើងបាន : $4\sum_{1\le i<j\le p}\left(x_i-x_j\right)^2\ge 8\left(p-2\right)>4p+1$ ផ្ទុយពីការពិត

យើងសិក្សាទៅលើមួយករណីដែលនៅសល់ :

(ii) $l=1$ ឬ $l=p-1$ ដោយមិនធ្វើអោយបាត់បង់លក្ខណៈដើម យើងសន្មត់យក $l=1$ គេទាញបាន

$x_1>x_2=x_3=\cdots=x_{p-1}\ge x_p$

នាំអោយ $4p+1=4\sum_{s=2}^{p}\left(x_1-x_s\right)^2+4\sum_{s=2}^{p-1}\left(x_s-x_p\right)^2+\sum_{i=1}^{p}x_i^2$

$$=4\left(p-2\right)\left(x_1-x_2\right)^2+4\left(x_1-x_p\right)^2+4\left(p-2\right)\left(x_2-x_p\right)^2+\sum_{i=1}^{p}x_i^2$$

នាំអោយ $x_1-x_2=1$

នាំអោយ $9=4\left(x_1-x_p\right)^2+4\left(p-2\right)\left(x_2-x_p\right)^2+\sum_{i=1}^{p}x_i^2$

គេទាញបាន $x_2=x_p$ $\left(p\ge 12\right)$ និង $x_1-x_p=1$

នាំអោយ $5=x_1^2+\left(p-1\right)^2x_2^2$

ដោយ $p\ge 12$ នោះ $x_2=0$

នាំអោយ $x_1^2=5$ ផ្ទុយពីការពិត

នាំអោយការឧបមា មិនពិត

ដូចនេះ គ្មានចំនួនគត់ $x_1,x_2,\cdots,x_p$ ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $\sum_{i=1}^{p}x_i^2-\frac{4}{4p+1}\left(\sum_{i=1}^{p}x_i\right)^2=1$. ។

លំហាត់ទី៧៣: ចំពោះ $\frac{1}{2}\le x\le 1$ ចូររកតម្លៃអតិបរមានៃ $(1+x)^5(1-x)(1-2x)^2$ ។

ដំណោះស្រាយ:

យើងចាប់ផ្តើមដោយរកតម្លៃអតិបរមានៃ $\left[\alpha(1+x)\right]^5\left[\beta(1-x)\right]\left[\gamma(2x-1)\right]^2$ ដែល α,β,γ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $5\alpha-\beta+4\gamma=0$, $\alpha(1+x)=\beta(1-x)=\gamma(2x-1)$

គេទាញបាន $\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}=\frac{\beta+\alpha}{2\gamma+\beta}$

ជំនួស $\beta=5\alpha+4\gamma$ យើងបាន :

$0=2\left(3\alpha\gamma+5\alpha^2-2\gamma^2\right)=2(5\alpha-2\gamma)(\alpha+\gamma)$

អោយ $(\alpha,\beta,\gamma)=(2,30,5)$ តាមវិសមភាព $AM-GM$:

$\left[2(1+x)\right]^5\left[30(1-x)\right]\left[5(2x-1)\right]^2\le\left(\frac{15}{4}\right)^2$

សមភាពកើតមានកាលណា $x=\frac{7}{8}$

ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមានៃ $(1+x)^5(1-x)(1-2x)^2$ គឺ $\frac{3^7\cdot 5^5}{2^{22}}$ ។

លំហាត់ទី៧៤: ស្រាយបញ្ជាក់ថា គ្រប់ $n\in\mathbb{N}_+$ $\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)\ge\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ:

វិសមភាពដើមអាចសរសេរជា :

$n\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)\ge(n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

តាង $A=n\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)$

$A=\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+n\left(\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)$ (1)

តាង $B=(n+1)\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

$$B=n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$B=\frac{n}{2}+n\left(\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\ (2)$$

ប្រៀបធៀប (1) និង (2):

$\frac{n}{2}\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}$ និង $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\geq\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}$

នាំអោយ $A\geq B$

ដូចនេះ គ្រប់ $n\in\mathbb{N}_+$ $\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)\geq\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ ។

លំហាត់ទី៧៤: ចំនួនពិតមិនអវិជ្ជមាន $a_1,a_2,\cdots,a_n$ និង $b_1,b_2,\cdots,b_n$ ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណ្ឌខាងក្រោម :

(i) $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=1,$

(ii) $\sum_{i=1}^{n}i(a_i-b_i)=0$

$(iii)\sum_{i=1}^{n}i^2(a_i+b_i)=10$ បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $1\leq k\leq n:\max\{a_k,b_k\}\leq\frac{10}{10+k^2}$ ។

ដំណោះស្រាយ:

ចំពោះគ្រប់ $1\leq k\leq n$ យើងបាន :

$$\begin{aligned}(ka_k)^2&\leq\left(\sum_{i=1}^{n}ia_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}i^2b_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\\&=\left(10-\sum_{i=1}^{n}i^2a_i\right)\cdot\left(1-\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\\&\leq\left(10-k^2a_k\right)\cdot(1-a_k)\\&=10-\left(10+k^2\right)a_k+k^2a_k^2\end{aligned}$$

នាំអោយ $a_k\leq\frac{10}{10+k^2}$

ដូចគ្នាដែរ $b_k\leq\frac{10}{10+k^2}$

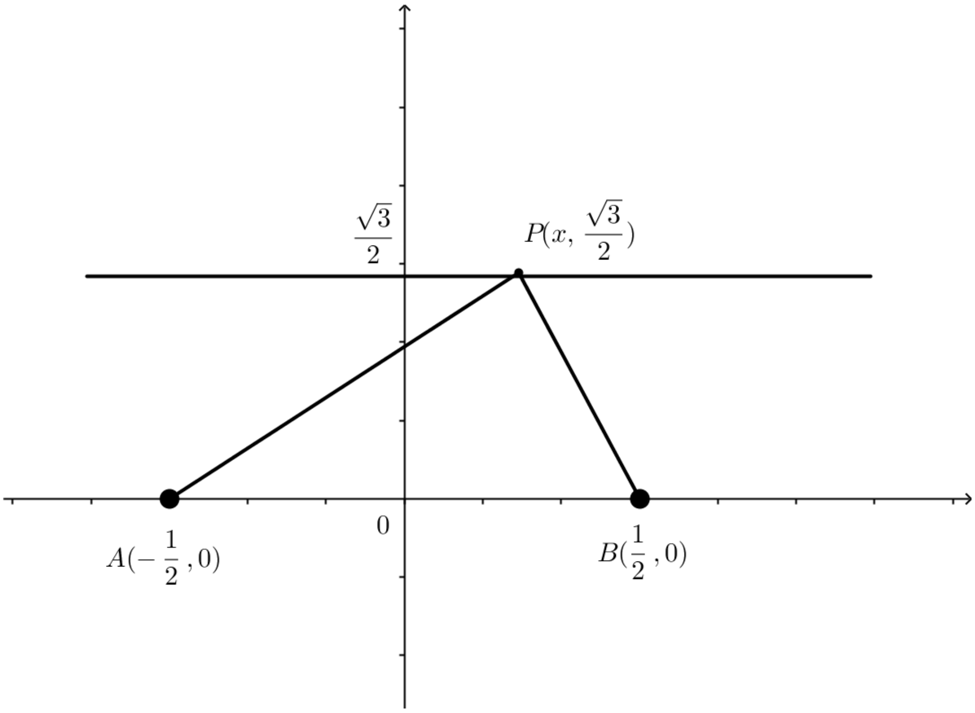
ដូចនេះ $\max\{a_k,b_k\}=\frac{10}{10+k^2}$ ។

លំហាត់ទី៧៥: ស្រាយបញ្ជាក់ថា គ្រប់ចំនួនពិត x : $\left|\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right|<1$ ។

ដំណោះស្រាយ:

គេមាន $\left|\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right|=\left|\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right|$ ជាផលដកចម្ងាយរវាងពីរចំណុច នៅក្នុង Rectangle coordinate system ។

តាមរយៈនេះ គេទាញបាន ចំណុច $P\left(x;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ចំណុច $A\left(-\frac{1}{2};0\right)$ និង ចំណុច $B\left(\frac{1}{2};0\right)$



ជាទូទៅ ផលដករវាងជ្រុងពីរនៃត្រីកោណ តូចជាងជ្រុងទីបី

យើងបាន :

$|AP-BP|<AB$

ដោយ $AB=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+(0-0)^2}=1$

ដូចនេះ $\left|\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right|<1$ ។

លំហាត់ទី៧៦: តាង R^+ ជាសំណុំចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ $f:R^+\to R^+$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះគ្រប់ $x,y\in R^+$: $f(x+y)+f\left(f(x)+f(y)\right)=f\left(f\left(x+f(y)\right)\right)+f\left(f\left(y+f(x)\right)\right)$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $f\left(f(x)\right)=x$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។ (លំហាត់ប្រលងអូឡាំព្យាដប្រទេសអ៊ីរ៉ង់ ១៩៩៧)

ដំណោះស្រាយ:

– អោយ $y=x$ នោះ $f(2x)+f\left(2f(x)\right)=f\left(2f\left(x+f(x)\right)\right)$ (1)

ជំនួស x និង y ដោយ $f(x)$ ចូលទៅក្នុងសមីការ យើងបាន :

$f\left(2f(x)\right)+f\left(2f\left(f(x)\right)\right)=f\left(2f\left(f(x)+f\left(f(x)\right)\right)\right)$ (2)

យក $(2)-(1)$:

$f\left(2f\left(f(x)\right)\right)-f(2x)=f\left(2f\left(f(x)+f\left(f(x)\right)\right)\right)-f\left(2f\left(x+f(x)\right)\right)$

ឧបមាថា $f\left(f(x)\right)>x$ នោះ $2f\left(f(x)\right)>2x$ (3)

ដោយ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត នោះ $f\left(2f\left(f(x)\right)\right)<f(2x)$

គេទាញបាន អង្គខាងឆ្វេងនៃសមីការ (3) អវិជ្ជមាន

នាំអោយ $f\left(2f\left(f(x)+f\left(f(x)\right)\right)\right)<2f\left(x+f(x)\right)$

ដោយ f ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត គេទាញបាន :

$2f\left(f(x)+f\left(f(x)\right)\right)>2f\left(x+f(x)\right)$

$f(x)+f\left(f(x)\right)<x+f(x)$

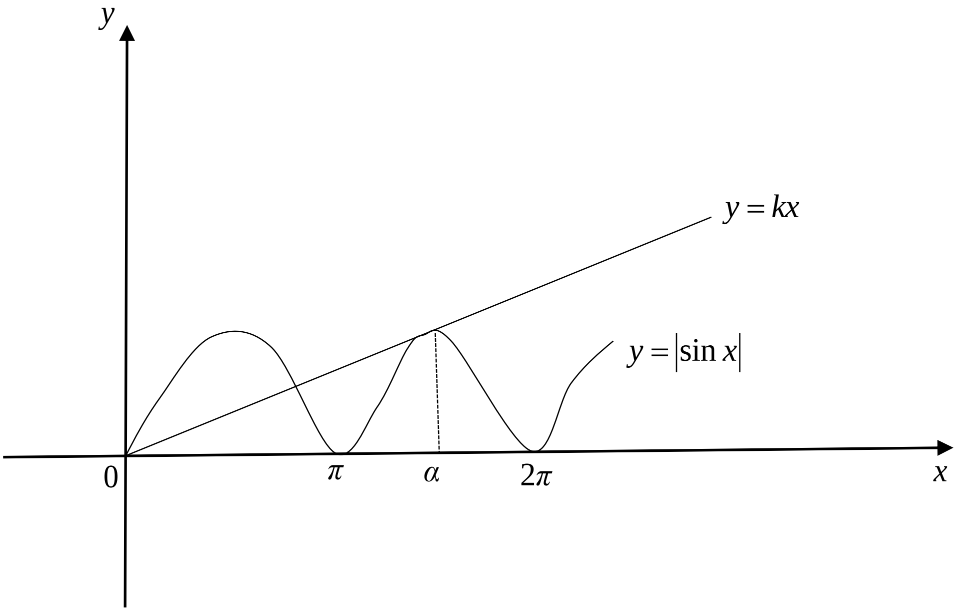
នាំអោយ $f\left(f(x)\right)<x$ ផ្ទុយពីការពិត

ដូចនេះ $f\left(f(x)\right)=x$ ចំពោះគ្រប់ $x>0$ ។

លំហាត់ទី ៧៧: គេដឹងថាក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=|\sin x|$ កាត់បន្ទាត់ $y=kx\ (K>0)$ បានបីចំណុច ។ កូអរដោនេ x អតិបរមានៃចំណុចទាំងនោះ តាងដោយ α ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha}=\dfrac{1+\alpha^2}{4\alpha}$ ។

ដំណោះស្រាយ

រូបភាពនៃចំណុចប្រសព្វរវាងក្រាបតាង $f(x)$ និង បន្ទាត់ $y=kx$ បង្ហាញដូចរូបខាងក្រោម :



ក្រាបនៃ $y=|\sin x|$ និង $y=kx$ ប៉ះគ្នាត្រង់ចំណុច $A(\alpha,-\sin\alpha)$ ដែល $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$

ដោយ $f'(x)=-\cos x$ ចំពោះ $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ គេបាន $-\cos\alpha=\frac{-\sin\alpha}{\alpha}$ ឬ $\alpha=\tan\alpha$

យើងបាន :

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha}=\frac{\cos\alpha}{2\sin 2\alpha\cos\alpha}$$
$$=\frac{1}{4\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{4\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$=\frac{1+\tan^2\alpha}{4\tan\alpha}$$
$$=\frac{1+\alpha^2}{4\alpha}$$

ដូចនេះ $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha}=\frac{1+\alpha^2}{4\alpha}$ ។

លំហាត់ទី ៧៨: ដោះស្រាយវិសមីការ $\log_2\left(x^{12}+3x^{10}+5x^8+3x^6+1\right)<1+\log_2\left(x^4+1\right)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $1+\log_2\left(x^4+1\right)=\log_2\left(2x^4+2\right)$

វិសមីការក្លាយជា :

$x^{12}+3x^{10}+5x^8+3x^6+1<2x^4+2$

ឬ $x^{12}+3x^{10}+5x^8+3x^6-2x^4-1<0$

គេអាចសរសេរ :

$x^{12}+x^{10}-x^8+2x^{10}+2x^8-2x^6+4x^8+4x^6-4x^4+x^6+x^4-x^2+x^4+x^2-1<0$

$\left(x^8+2x^6+4x^4+x^2+1\right)\left(x^4+x^2-1\right)<0$

គេទាញបាន $x^4+x^2-1<0$

នាំអោយ $x^2<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

នាំអោយ $-\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}<x<\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

ដូចនេះ សំណុំចម្លើយគឺ $x\in\left(-\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}};\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)$ ។

គេអាចដោះស្រាយលំហាត់នេះ តាមវិធីដូចខាងក្រោម :

ដោយ $1+\log_2\left(x^4+1\right)=\log_2\left(2x^4+2\right)$ និង $\log_2 y$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាតនៅលើ $(0,+\infty)$

វិសមីការក្លាយជា :

$x^{12}+3x^{10}+5x^8+3x^6+1<2x^4+2$

ឬ $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^3+2\left(\dfrac{1}{x^2}\right)>x^6+3x^4+3x^2+1+2x^2+2x$

$=\left(x^2+1\right)^3+\left(x^2+1\right)$

តាង $g(t)=t^2+2t$ នោះ $g\left(\dfrac{1}{x^2}\right)>g\left(x^2+1\right)$

ដោយ $g(t)$ ជាអនុគមន៍កើនដាច់ខាត

គេទាញបាន $\dfrac{1}{x^2}>x^2+1$

សមមូល $x^4+x^2-1<0$

ដូចនេះ សំណុំចម្លើយនៃវិសមីការ $x\in\left(-\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}};\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)$ ។

លំហាត់ទី ៧៩: កំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ ដែលចំពោះគ្រប់ $x\geq 0$: $4f(x)\geq 3x$ និង $f\left(4f(x)-3x\right)=x$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងនឹងស្រាយថា $f(x)=x$ ជាអនុគមន៍តែមួយគត់ដែលយើងត្រូវរក

ឧបមាថា មានចម្លើយផ្សេងទៀតដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(c)\neq c$ ចំពោះគ្រប់ $c\geq 0$

តាង $x_0=f(c)$ និង $x_1=c$ ហើយ $x_{n+2}=4x_n-3x_{n+1}$ ចំពោះ $n=0,1,2,\cdots$

តាមលក្ខណ្ឌដែលគេអោយមក យើងអាចបង្ហាញដោយប្រើវិចារកំណើនថា $x_n=f(x_{n+1})\geq 0$ ចំពោះ $n=0,1,2,\cdots$

ដោយ $z^2+3z-4=(z-1)(z+4)$

នាំអោយ $x_n=\alpha+(-4)^n\beta$ ចំពោះចំនួនពិត α និង β

– អោយ $n=0,1$ យើងបាន $f(c)=\alpha+\beta$ និង $c=\alpha-4\beta$ នោះ $\beta=\dfrac{f(c)-c}{5}\neq 0$

បើ $\beta>0$ នោះ $x_{2k+1}=\alpha+(-4)^{2k+1}\beta\to-\infty$ កាលណា $k\to\infty$ ផ្ទុយពីការពិត

ដូចគ្នាដែរ បើ $\beta<0$ នោះ $x_{2k}=\alpha+(-4)^{2k}\beta\to-\infty$ កាលណា $k\to\infty$ ផ្ទុយពីការពិត

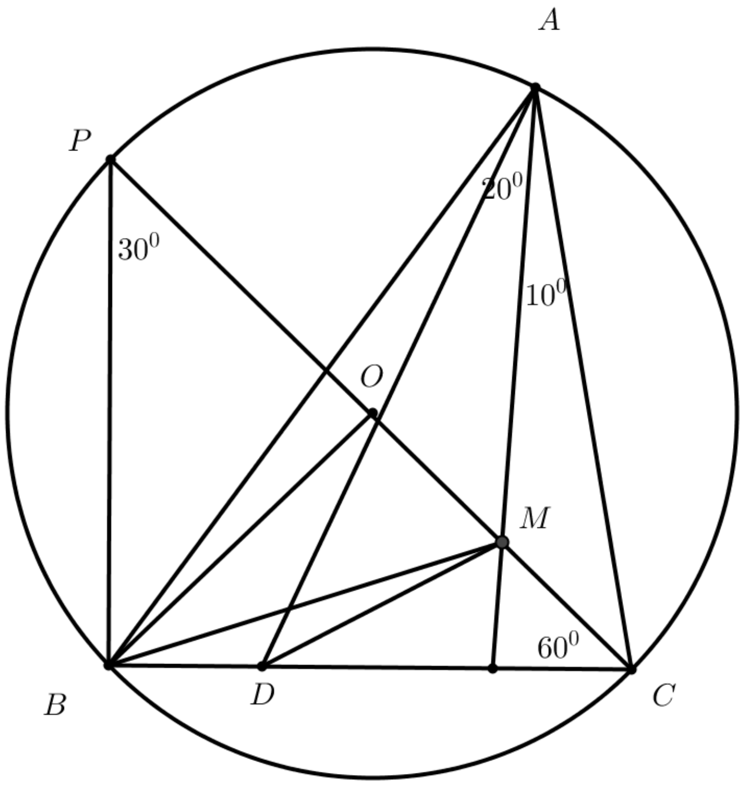
ដូចនេះ $f(x)=x$ ជាអនុគមន៍ដែលត្រូវរក ។

លំហាត់ទី ៨០: នៅក្នុងត្រីកោណ ABC មាន $\angle BAC=30^0$ និង $\angle ABC=70^0$ ។ M ជាចំណុចមួយនៅខាងក្នុងត្រីកោណ ABC ដែល $\angle MAB=\angle MCA=20^0$ ។ គណនា $\angle MBA$ ។

ដំណោះស្រាយ

បន្លាយ CM អោយជួបរង្វង់ Γ ដែលចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC ត្រង់ P

នោះយើងបាន $\angle BPC=\angle BAC=30^0$ និង $\angle PBC=180^0-\angle BPC-\angle BCM=90^0$ នោះ CM កាត់តាមផ្ចិត O នៃរង្វង់ Γ



បន្ទាត់ AO និង BC ជួបគ្នាត្រង់ D

$\angle AOB = 2\angle ACB = 160^0$

ដោយ $OA = OB$ គេទាញបាន $\angle OAB = 10^0$

នោះ $\angle MAO = 10^0 = \angle MAC$ និង $\angle ADC = 180^0 - 100^0 = 80^0 = \angle ACD$

នាំអោយ AM ជាមេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ CD នោះ $MD = MC$ ហើយ $OB = OC$ និង $\angle BOC = 60^0$

នាំអោយ ΔOCB និង ΔMCD សម័ង្ស នោះចតុកោណ $BOMD$ ចារិកក្នុងរង្វង់មួយ

នាំអោយ $\angle DBM = \angle DOM = 2\angle OAC = 40^0$

$$\angle MBA = \angle ABC - \angle DBM = 30^0$$

ដូចនេះ $\angle MBA = 30^0$ ។

របៀបទី ០២:

តាង $x = \angle MBA$

តាមទ្រឹស្តីបទ ស៊ីនុសក្នុង $\Delta ABC, \Delta ABM, \Delta AMC$ រៀងគ្នា យើងបាន :

$\frac{AB}{AM}=\frac{\sin\left(20^0+x\right)}{\sin x}$, $\frac{AB}{AC}=\frac{\sin 80^0}{\sin 70^0}$, $\frac{AC}{AM}=\frac{\sin 30^0}{\sin 20^0}$

គុណសមីការពីរខាងក្រោយ : $\frac{\sin\left(20^0+x\right)}{\sin x}=\frac{AB}{AM}=\frac{\sin 80^0}{\sin 70^0}\cdot\frac{\sin 30^0}{\sin 20^0}$ (*)

$\frac{\sin 80^0}{\sin 40^0}=2\cos 40^0=\frac{\sin 50^0}{\sin 30^0}$

$\frac{\sin 40^0}{\sin 20^0}=2\cos 20^0=\frac{\sin 70^0}{\sin 30^0}$

(*) អាចសរសេរជា $\frac{\sin\left(20^0+x\right)}{\sin x}=\frac{\sin 50^0}{\sin 30^0}$

$\sin 20^0\cot x+\cos 20^0=\frac{\sin 50^0}{\sin 30^0}$

ដោយ $\sin 20^0\cot x+\cos 20^0$ ជាអនុគមន៍ចុះដាច់ខាត (មួយទល់មួយ) ចំពោះ x ដែលនៅចន្លោះ 0 ទៅដល់ 70^0 នោះ $x=30^0$ ។

លំហាត់ទី ៨១: គេអោយត្រីកោណ ABC មួយមានមុំស្រួច ។ តាង h_a,h_b,h_c ជាកម្ពស់ត្រូវនឹងបាត BC,CA និង AB រៀងគ្នា ហើយ s ជាកន្លះបរិមាត្រ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{3}\cdot\max\{h_a,h_b,h_c\}\geq s$ និងសមភាពកើតមានកាលណា ΔABC សម័ង្ស ។

ដំណោះស្រាយ

ប្រសិនបើ ΔABC មិនមែនជាត្រីកោណសម័ង្ស នោះប្រធានលំហាត់យើងអាចបម្លែងដោយគិតជាត្រីកោណសមបាត

ជាការពិត បើ $\angle A\geq\angle B>\angle C$ នោះ $\angle A>\frac{\pi}{3}$ ហើយ $h_c>h_b\geq h_a$

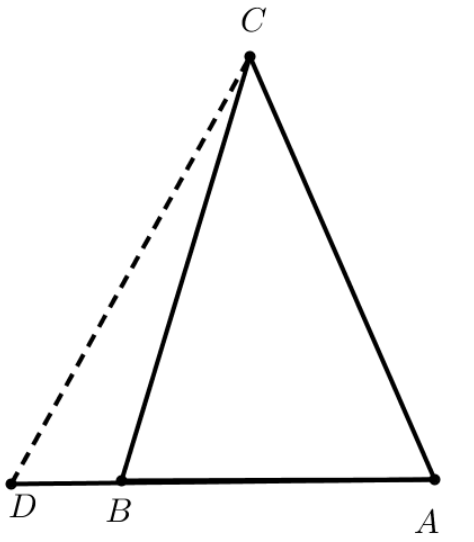
តាង h ជាកម្ពស់ដែលវែងជាងគេ ត្រូវនឹង h_c

បន្លាយជ្រុងខ្លីបំផុត AB អោយបាន D ដែល $AD=AC$ រួចភ្ជាប់ CD

ប្រសិនបើ $\sqrt{3}h\geq s$ ពិតនៅក្នុងត្រីកោណសមបាត នោះវាពិតចំពោះគ្រប់ត្រីកោណមានមុំស្រួចទាំងអស់

ដំបូង យើងនិងស្រាយបញ្ជាក់ថា $\sqrt{3}h\geq s$ ចំពោះត្រីកោណសមបាត

ដោយ $s=AC+\frac{1}{2}CD,\ CD=2AC\sin\frac{A}{2}$, $h_c=AC\cdot\sin A$



យើងអាចសរសេរ $\sqrt{3}h \ge s$ ទៅជា $\sqrt{3}\sin A \ge 1+\sin\frac{A}{2}$ $\left(\frac{\pi}{3}<A<\frac{\pi}{2}\right)$ (a)

តាង $x=\sin\frac{A}{2}$ នោះ $\frac{1}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$

សមីការ (a) ក្លាយជា : $12x^4-11x^2+2x+1\le 0$

ឬ $(2x-1)(x+1)\left(6x^2-3x-1\right)\le 0$

ចំពោះចន្លោះនៃអថេរ $x: 2x-1>0$, $x+1>0$ និង $6x^2-3x-1<0$

នាំអោយ $(2x-1)(x+1)\left(6x^2-3x-1\right)\le 0$ ពិត

ដូចនេះ $\sqrt{3}\cdot\max\{h_a,h_b,h_c\}\ge s$ ។

លំហាត់ទី ៨២: គេអោយចំនួនពិត a,b ដែលពហុធាដឺក្រេទី ៣ $x^3+\sqrt{3}(a-1)x^2-6ax+b$ មានរឹសបី ជាចំនួនពិត ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $|b|\le|a+1|^3$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង x_1,x_2,x_3 ជារឹសទាំងបីនៃពហុធាដឺក្រេទី ៣

គេបាន $x_1+x_2+x_3=\sqrt{3}(1-a)$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-6a$, $x_1x_2x_3=-b$

នាំអោយ $\sqrt[3]{|b|}=\sqrt[3]{|x_1x_2x_3|}\le\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{2}}$

$$\le \sqrt{\frac{(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^2}{3}}$$

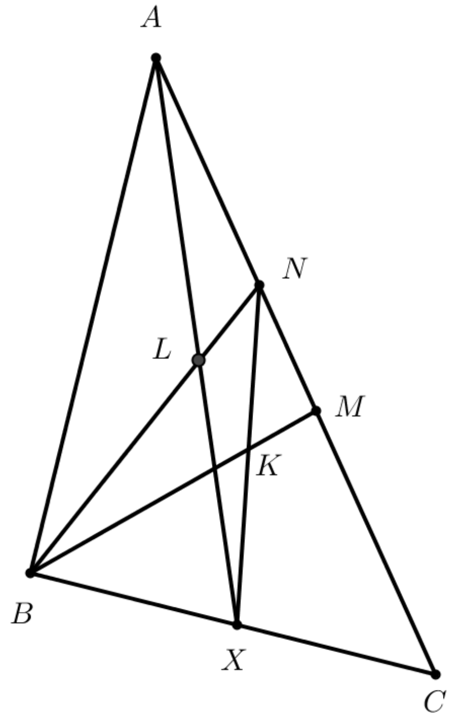
$$=\sqrt{\frac{3(1-a)^2+12a}{3}}=|a+1|$$

នាំអោយ $|b|\le|a+1|^3$ ពិត

ដូចនេះ $|b|\le|a+1|^3$ ។

លំហាត់ទី ៨៣: គេអោយត្រីកោណ ABC មួយមាន $\angle ABC=3\angle CAB$ ។ ចំណុច M និង N ត្រូវបានគេជ្រើសរើសនៅលើជ្រុង AC ដែល $\angle CBM=\angle MBN=\angle NBA$ ។ X ជាចំណុចមួយនៅលើជ្រុង BC ។ តាង L ជាចំណុចប្រសព្វរវាង AX និង BN និង ចំណុច K ជាចំណុចប្រសព្វរវាង NX និង BM ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ KL និង AC ស្របគ្នា ។

ដំណោះស្រាយ



តាង $\theta=\angle CAB$ នោះ $\angle ABC=3\theta$ និង $\angle CBM=\angle MBN=\angle NBA=\theta$

នាំអោយ $\angle CNB=2\theta$

នោះ $NA=NB, CN=CB$

• នៅក្នុងត្រីកោណ XBN មាន BM ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ នោះតាមទ្រឹស្តីបទ Stewart :

$\frac{XK}{KN}=\frac{XB}{BN}$ (1)

• ចំពោះ ΔAXC ដែលមាន BLN ជា Transversal នោះតាមតាមទ្រឹស្តីបទ Menelaus :

$\frac{XL}{LA}\cdot\frac{AN}{NC}\cdot\frac{CB}{BX}=-1$

តែ $CN=CB$ នោះ $\frac{XL}{LA}\cdot\frac{AN}{XB}=1$ (2)

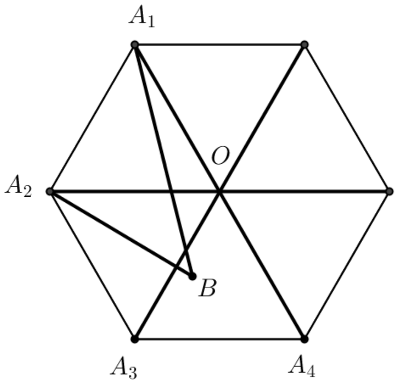
តាម (1) និង (2): $\frac{XL}{LA}=\frac{XB}{AN}=\frac{XB}{NB}=\frac{XK}{KN}$ ព្រោះ $NA=NB$

ប្រើទ្រឹស្តីបទ Stewart : ចំពោះ ΔXBN នោះ $KL \parallel AN$

តែ $AN\in AC$ នោះ $KL\parallel AC$

លំហាត់ទី ៨៤: ចំណុច B មួយត្រូវបានគេដៅនៅក្នុងឆកោណនិយ័ត $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ យ៉ាងណាអោយបាន $\angle A_2A_1B=\angle A_4A_3B=50^0$ ។ ចូរគណនា $\angle A_1A_2B$ ។

ដំណោះស្រាយ



មុំនីមួយៗនៃឆកោណនិយ័តគឺ 120^0

ដោយ $\angle A_3BA_1=360^0-\angle BA_3A_2-\angle BA_1A_2-\angle A_1A_2A_3=120^0$

នាំអោយ B ស្ថិតនៅលើរង្វង់មួយដែលមានផ្ចិត A_2 និង កាំ A_2O (O ជាផ្ចិតនៃឆកោណនិយ័ត)

នាំអោយ $A_1A_2=BA_2$ និង $\angle A_1A_2B=180^0-\angle BA_1A_2-\angle A_1BA_2=80^0$

ដូចនេះ $\angle A_1A_2B=80^0$ ។

លំហាត់ទី ៨៥: ចូររកផលគុណនៃបីចំនួនពិត a,b,c បើវាផ្ទៀងផ្ទាត់ប្រព័ន្ធសមីការខាងក្រោម :

$$\begin{cases} a^3 = 3b^2 + 3c^2 - 25 \\ b^3 = 3c^2 + 3a^2 - 25 \\ c^3 = 3a^2 + 3b^2 - 25 \end{cases}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង a,b,c ជាឫសនៃពហុធា $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma$

នោះ $\gamma = abc, \beta = ab + bc + ca, \alpha = a + b + c$

យើងបាន :

$a^3 + 3a^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - 25$

$b^3 + 3b^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - 25$

$c^3 + 3c^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - 25$

គេទាញបានថា a,b,c ជាឫសនៃពហុធា $g(x) = x^3 + 3x^2 - 3(\alpha^2 - 2\beta) + 25$ ព្រោះ $a^2 + b^2 + c^2 = \alpha^2 - 2\beta$

ដោយ a,b,c ខុសៗគ្នា ហើយ $f(x) = g(x)$

នាំអោយ $\alpha = -3, \beta = 0$ និង $\gamma = 3(\alpha^2 - 2\beta) - 25 = 27 - 25 = 2$

ដូចនេះ $abc = 2$ ។

លំហាត់ទី ៨៦: AK, BL, CM ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណដែលមានមុំស្រួច ABC ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាបើ $9AK + 4BL + 7CM = 0$ នោះមានមុំមួយនៃត្រីកោណ ABC ស្មើ 60^0 ។

ដំណោះស្រាយ

តាង $p = |AK|, q = |BL|, r = |CM|$ នោះត្រីកោណ PQR ដូចត្រីកោណ ABC ដែល $9p = QR, 4q = PR$ និង $7r = PQ$

តាង a,b,c ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណ ABC

ដោយ $p = \frac{2S}{a}, q = \frac{2S}{b}$ និង $r = \frac{2S}{c}$ ដែល S ជាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ ABC

យើងបាន : $a^2 = \frac{18S}{k}, b^2 = \frac{8S}{k}$ និង $c^2 = \frac{14S}{k}$ ដែល $k = \frac{9p}{a} = \frac{4q}{b} = \frac{7r}{c}$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស :

$$\cos\angle ACB=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$$

ដូចនេះ $\angle ACB=60^0$

លំហាត់ទី ៨៧: គេអោយបីចំនួនពិត ដែលផលបូករវាងពីរៗនៃចំនួនទាំងបីមិនស្មើ 1 ទេ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាមានពីរចំនួន x,y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{xy}{x+y-1}$ មិនស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $(0;1)$ ។

ដំណោះស្រាយ

តាង a,b,c ជាចំនួនទាំងបី

ឧបមាថាមាន $A=\frac{ab}{a+b-1},B=\frac{bc}{b+c-1}$ និង $C=\frac{ca}{c+a-1}$ ស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $(0;1)$

នោះ $A>0,B>0$ និង $C>0$ ហើយ $ABC=\frac{a^2b^2c^2}{(a+b-1)(b+c-1)(c+a-1)}>0$

នោះ $D=(a+b-a)(b+c-1)(c+a-1)>0$ $(*)$

តែ $A-1<0,B-1<0,C-1<0$ នោះ $(A-1)(B-1)(C-1)<0$

ដោយ $A-1=\frac{(a-1)(b-1)}{a+b-1}$, $B-1=\frac{(b-1)(c-1)}{b+c-1}$, $C-1=\frac{(c-1)(a-1)}{c+a-1}$

នាំអោយ $(A-1)(B-1)(C-1)=\frac{(a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2}{(a+b-1)(b+c-1)(c+a-1)}<0$ ផ្ទុយពី $(*)$

ដូចនេះ ពីរចំនួន x,y ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{xy}{x+y-1}$ មិនស្ថិតនៅក្នុងចន្លោះ $(0;1)$ ។

លំហាត់ទី ៨៨: គេមានចំនួនខុសៗគ្នាចំនួន 6 គឺ n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,n_6 ។ ចំពោះចំនួនពីរ នៃចំនួនទាំងអស់មកវាបានធ្វើផលបូករបស់វា ។ តើចំនួនធំបំផុតនៃចំនួនបឋមខុសៗគ្នា ដែលមកវាបានបូកគឺប៉ុន្មាន ?

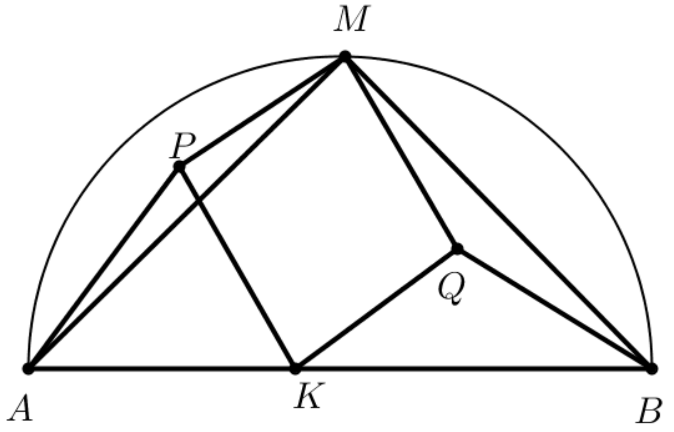
ដំណោះស្រាយ

ប្រសិនបើផលបូកនៃពីរចំនួនខុសគ្នា ជាចំនួនបឋម នោះចំនួនមួយត្រូវតែជាចំនួនសេស ហើយចំនួនមួយទៀតជាចំនួនគូ ។ គេអោយចំនួនខុសៗគ្នាចំនួន 6 មក នោះចំនួនធំបំផុតនៃចំនួនបឋមខុសៗគ្នាដែលបានមកពីការធ្វើប្រមាណវិធីបូក ត្រូវតែបានមកពី 3 ចំនួនសេស និង 3 ចំនួនគូ ។

នាំអោយចំនួនធំបំផុតដែលបានមកពីការធ្វើប្រមាណវិធីបូកចំនួន $\binom{6}{2}=15$ ដងខុសគ្នាគឺ $3\times 3=9$ ។ ប្រសិនបើចំនួនទាំង 6 ជា $4,8,38,8,15,33$ យើងអាចទទួលបានចំនួនបឋម 9 ដែលមានដូចជា $13,19,37,17,23,41,47,53,71$ ។

លំហាត់ទី ៨៩: គេអោយ AB ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃកន្លះរង្វង់មួយ ។ ចំណុច M មួយត្រូវបានដៅនៅលើកន្លះរង្វង់ ហើយចំណុច K ត្រូវបានដៅនៅលើ AB ។ រង្វង់មួយមានផ្ចិត P កាត់តាមចំណុច A,M,K ហើយរង្វង់មួយទៀតមានផ្ចិត Q កាត់តាមចំណុច M,K,B ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា M,K,P និង Q ស្ថិតនៅលើរង្វង់តែមួយ ។

ដំណោះស្រាយ



នៅក្នុងកន្លះរង្វង់ $AMB, \angle AMB = 90^0$

តាង $\angle MAB=\theta$, $\angle MBA=\lambda$ យើងបាន :

$\theta+\lambda=90^0$

P ជាផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ AKM នោះ $\angle MPK = 2\angle MAK = 2\theta$

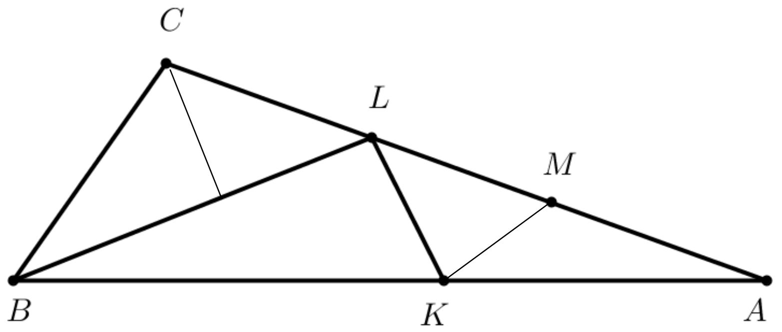
Q ជាផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ MKB នោះ $\angle MQK = 2\angle MBK = 2\lambda$

នាំអោយ $\angle MPK + \angle MQK = 2\theta + 2\lambda = 180^0$

ដូចនេះ M,P,K,Q ស្ថិតនៅលើរង្វង់តែមួយ ។

លំហាត់ទី ៩០: គេអោយត្រីកោណ ABC មួយ ។ K ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង AB និង L ជាចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង AC ដែល $AL=LC+CB$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\angle KLB=90^0$ លុះត្រាតែ $AC=3CB$ ។

ដំណោះស្រាយ



តាង M ជាចំណុចកណ្តាល AL

CN ជាកម្ពស់នៃ ΔCBL

K កណ្តាល AB និង M ជាចំណុចកណ្តាល AL

នោះ $KM \parallel BL$ និង $MK=\frac{BL}{2}$ (MK ជាបាតមធ្យមនៃត្រីកោណ ABL)

ឧបមាថា $AC=3CB$ នោះ $CL=CB$ និង $NL=\frac{BL}{2}=KM$

នាំអោយ ត្រីកោណ CNL ប៉ុននឹងត្រីកោណ LKM

នាំអោយ $\angle KLB=90^0$

យើងស្រាយច្រាសមកវិញ បើ $\angle KLB=90^0$ នោះ $\angle LKM=90^0$ ហើយត្រីកោណ CNL ដូចត្រីកោណ LKM

តាង $KM=a$ និង $LM=b$ នោះ $BL=2a$ និង $BC+CL=2b$

នាំអោយ $CL=kb$ និង $NL=ka$ ចំពោះចំនួន k ណាមួយ ដែល $MC=(2-k)b$ និង $BN=(2-a)k$

ដោយ ត្រីកោណ CNL និង ត្រីកោណ CNB ជាត្រីកោណកែង យើងបាន :

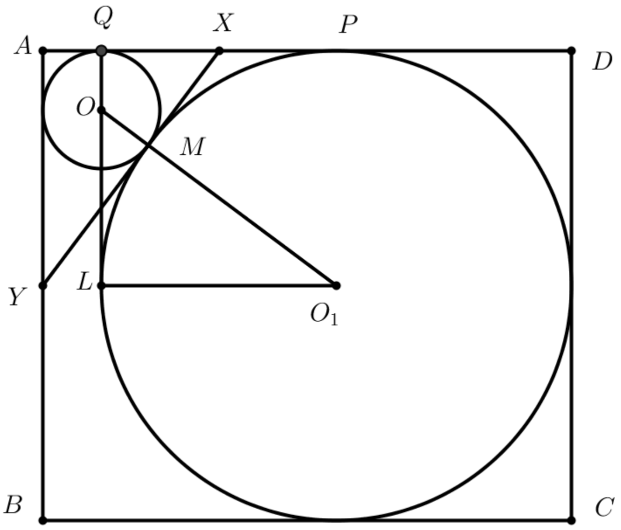
$BC^2-BN^2=CL^2-NL^2$

គេទាញបាន $k=1$ ដែលធ្វើអោយ $AC=3CB$

ដូចនេះ $\angle KLB=90^0$ លុះត្រាតែ $AC=3CB$ ។

លំហាត់ទី ៩១: រង្វង់ពីរប៉ះគ្នាត្រង់ចំណុច M ហើយស្ថិតនៅក្នុងចតុកោណកែង $ABCD$ ។ គេដឹងថា រង្វង់មួយប៉ះជាមួយជ្រុង AB និង AD ហើយរង្វង់មួយទៀតប៉ះជាមួយជ្រុង AD,BC និង CD ។ រង្វង់ទីពីរមានកាំស្មើនឹង 4 ដង កាំរង្វង់ទីមួយ ។ រកផលធៀបដែលបន្ទាត់ប៉ះរួមកាត់តាមចំណុច M ចែកជ្រុង AB និង AD ។

ដំណោះស្រាយ



យកកាំរង្វង់ទីមួយស្មើ 1 នោះកាំរង្វង់ទីពីរស្មើ 4

ចតុកោណកែង $ABCD$ មាន $CD=8$

ដោយ $OL=3$ $,OO_1=5$ និង $O_1L=4$

នាំអោយ $AD=1+4+4=9$

តាងបន្ទាត់ប៉ះរួមត្រង់ M កាត់ AD ត្រង់ X និង កាត់ AB ត្រង់ Y

នោះ $XP=XM=XQ$ នោះ $AX=3$ ហើយ $\frac{AX}{XD}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

យើងបាន $\tan\angle PXO_1=\frac{PO_1}{PX}=2$

នាំអោយ $\tan\angle PXM=\tan\angle PXO_1=-\frac{4}{3}$

តែ $\frac{YA}{AX}=\frac{YA}{3}=-\tan\angle PXM=\frac{4}{3}$

នាំអោយ $YA=4$ នោះ $\frac{YA}{YB}=\frac{4}{4}=1$

ដូចនេះ បន្ទាត់ប៉ះរួមត្រង់ M បានចែក AD តាមផលធៀប $\frac{AX}{XD}=\frac{1}{2}$ និងបានចែក AB តាមផលធៀប $\frac{YA}{YB}=1$ ។

លំហាត់ទី ៩២: រកគ្រប់គូនៃចំនួនគត់ $(a;b)$ ដែល $a\geq 1, b\geq 1$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $a^{\left(b^2\right)}=b^a$ ។

ដំណោះស្រាយ

Lemma: បើ a,m,n គឺជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល $(m,n)=1$ ហើយ $a^{\frac{m}{n}}$ ជាចំនួនគត់ នោះ $a=k^n$ ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន k

ករណី $a=b=1$ សមីការផ្ទៀងផ្ទាត់

ករណី $a,b\neq 1$:

យើងបាន : $\log a^{b^2}=\log b^a$ នោះ $\frac{b^2}{a}=\frac{\log b}{\log a}=t$

នាំអោយ $b^2=at$ និង $b=a^t$

$$b^2=a^{2t}=at$$

តាង $t=\frac{p}{q}$ ដែល $(p,q)=1$

ដោយ at គឺជាចំនួនគត់ នោះ $q|a$ ហើយបើ $q=1$ នោះ t ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ $a^{2t}=at$ មិនអាចមាន

នាំអោយ $q>1$

- បើ q សេស

ដោយ $a^{\frac{2p}{q}}$ ជាចំនួនគត់ ហើយគូ $2p$ និង q បឋមរវាងគ្នា នោះ $a^{\frac{1}{q}}$ ជាចំនួនគត់ ហើយ a ជាពហុគុណនៃ q

នាំអោយ $a=\left(q^r k\right)^q$ ដែល r,k ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ និង $(q,k)=1$

នាំអោយ $a^{2t}=a^{\frac{2p}{q}}=q^{2rp}k^{2p}$ និង $at=\frac{ap}{q}=q^{qr-1}pk^q$

នាំអោយ $q^{2rp}k^{2p}=q^{qr-1}pk^q$

ដោយ $q>1$ គេទាញបាន $2rp=qr-1$

$\Rightarrow\ 2p<q$

បើ $k>1$ នោះ $2p\geq q$ ផ្ទុយពីការពិត

នាំអោយ $k=1$ និង $p=1$ ហើយ $1=r(q-2)$ នោះ $r=1,q=3$
នាំអោយ $a=27,b=3$

• បើ q គូ

$a^{\frac{2}{q}}$ ជាចំនួនគត់ នោះ $a=\left(q^r k\right)^{\frac{q}{2}}$ ដែល r,k ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ និង $(q,k)=1$

នាំអោយ $a^{2t}=a^{\frac{2p}{q}}=q^{rp}k^p$ និង $at=\frac{ap}{q}=q^{\left(\frac{qr}{2}\right)-1}pk^{\frac{q}{2}}$

នាំអោយ $q^{rp}k^p=q^{\left(\frac{qr}{2}-1\right)}pk^{\frac{q}{2}}$

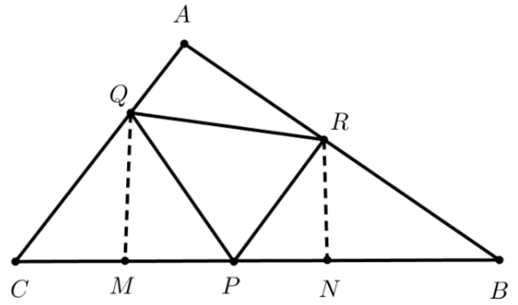
បកស្រាយដូចខាងលើដែរ $p=1,k=1$ $,q=4$ និង $r=1$

នាំអោយ $a=16,b=2$

លំហាត់ទី ៩៣: (Zirakzadeh's inequality) ឧបមាថា ចំណុច P,Q,R នៅលើជ្រុងទាំងបី BC,CA និង AB នៃត្រីកោណ ABC ហើយបានចែកបរិមាត្រជាបីផ្នែកស្មើគ្នា នោះស្រាយបញ្ជាក់ថា $QR+RP+PQ\geq\frac{1}{2}(a+b+c)$ ។

ដំណោះស្រាយ

គូសបន្ទាត់ពីរ ចេញពីចំណុច Q និង R មកកែងជាមួយនិង BC តាងជើងនៃចំណោលកែងដោយ M និង N



យើងបាន :

$QR\geq MN=a-\left(BR\cdot\cos B+CQ\cdot\cos C\right)$

ដូចគ្នាដែរ $RP\geq b-\left(CP\cdot\cos C+AR\cdot\cos A\right)$

$PQ\geq c-\left(AQ\cdot\cos A+BP\cdot\cos B\right)$

បូកវិសមភាពខាងលើបញ្ចូលគ្នា ហើយតយើងដឹងថា $AQ+AR=BR+BP=CP+CQ=\frac{1}{3}(a+b+c)$

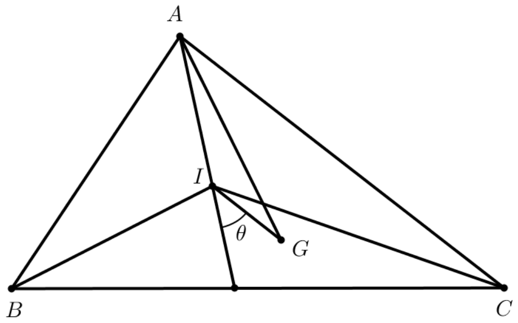
យើងបាន $QR+RP+PQ\geq\frac{1}{3}(a+b+c)(3-\cos A-\cos B-\cos C)$

ដោយ $\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$

យើងទាញបាន $QR+RP+PQ\geq\frac{1}{2}(a+b+c)$ ។

លំហាត់ទី ៩៤: តាង I និង G ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង បារីសង់នៃត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $AI+BI+CI \le AG+BG+CG$ ។

ដំណោះស្រាយ



តាង $BC=a, AC=b,\ AB=c$

ដោយមិនធ្វើអោយបាត់បង់លក្ខណៈដើម

យើងសន្មត់យក $a \ge b \ge c$

យើងនិងស្រាយថា G នៅក្នុងត្រីកោណ BIC

ដំបូងយើងត្រូវស្រាយថា G មិនអាចនៅក្នុងត្រីកោណ AIB

តែយើងឧបមាថា G នៅក្នុងត្រីកោណ AIB នោះ $S_{\Delta IBG} < S_{\Delta AIB}$

គេដឹងថា $S_{\Delta ABG} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}$ នោះ $\frac{S_{\Delta AIB}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{c}{a+b+c} \le \frac{1}{3}$

នាំអោយ $S_{\Delta AIB} \le \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABG}$ ផ្ទុយពីការពិត

បន្ទាប់មក យើងត្រូវស្រាយថា G មិនអាចនៅក្នុងត្រីកោណ AIC

តែយើងឧបមាថា G នៅក្នុងត្រីកោណ AIC

ឧបមាថា CI ប្រសព្វជាមួយ AB ត្រង់ T និង CG ប្រសព្វជាមួយ AB ត្រង់ L នោះ $AT > AL$

តែគេដឹងថា $AT = AL$ នោះ $\frac{AT}{BT} = \frac{b}{a} < 1$

នាំអោយ $AT \le \frac{1}{2} AB = AL$ ផ្ទុយពីការពិត

សរុបមក G នៅក្នុង ΔBIC ផ្នែងខាងស្តាំនៃ AI

តាង θ ជាមុំបន្ថែម $\angle AIG$ នោះ $0 \le \theta \le \frac{A+C}{2}$

យើងបាន : $AG \ge AI + GI\cos\theta$

ដូចគ្នាដែរ $BG \ge BI + GI\cos\left(90^0 + \frac{C}{2} - \theta\right)$

$$CG \ge CI - GI\cos\left(\frac{A+C}{2} - \theta\right)$$

នាំអោយ $AG+GB+CG-(AI+BI+CI) \ge GI\left[\cos\theta + \cos\left(90^0 + \frac{C}{2} - \theta\right) - \cos\left(\frac{A+C}{2} - \theta\right)\right]$

$=GI\left(\cos\theta-2\sin\frac{B+C}{4}\cos\left(\frac{B_C}{4}+\theta\right)\right)$

តែ $\frac{B+C}{4}\le 30^0,\theta\le\frac{B-C}{4}+\theta<90^0$

នាំអោយ $\cos\theta-\sin\frac{B+C}{4}\cos\left(\frac{B-C}{4}+\theta\right)\ge 0$

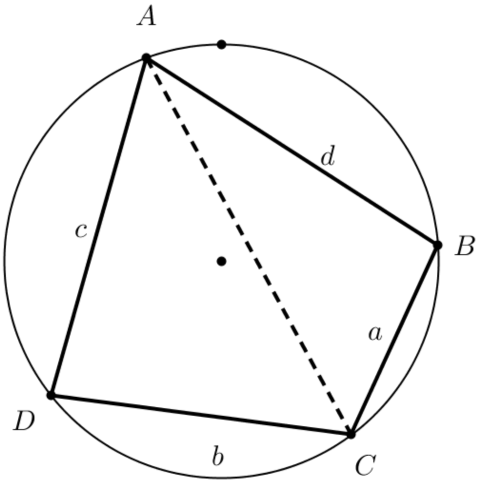
ដូចនេះ $AG+BG+CG\ge AI+BI+CI$ ។

លំហាត់ទី ៩៥: (Gaolin’s inequality) ចតុកោណប៉ោង $ABCD$ និង $A'B'C'D'$ មានរង្វាស់ជ្រុងរៀងគ្នា a,b,c,d និង a',b',c',d' ហើយមានក្រឡាផ្ទៃ F_1 និង F_2 ។ គេតាង $K=4(ad+bc)(a'd'+b'c')-(a^2-b^2-c^2+d^2)(a'^2-b'^2-c'^2+d'^2)$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $K\ge 16F_1F_2$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងចាត់ទុក $ABCD$ ជាចតុកោណចារិកក្នុងរង្វង់មួយ (ដូចរូប)

ដោយ $\angle B+\angle D=180^0$



យើងបាន :

$2F_1=(ad+bc)\sin B\ \ (1)$

ដូចគ្នាដែរ $2F_2=(a'd'+b'c')\sin D$

តាមទ្រឹស្តីបទកូស៊ីនុស :

$AC^2=b^2+c^2+2bc\cos B=a^2+d^2-2ad\cos B$

នាំអោយ $a^2-b^2-c^2+d^2=2(ad+bc)\cos B$

ដូចគ្នាដែរ $a'^2-b'^2-c'^2+d'^2=2(a'd'+b'c')\cos B'\ \ (2)$

តាម (1) និង (2) :

$K-16F_1F_2=4(ad+bc)(a'd'+b'c')(1-\cos(B-B'))\ge 0$

ដូចនេះ $K\ge 16F_1F_2$ ។

ផ្នែកទី II

លំហាត់ស្រាវជ្រាវ

----

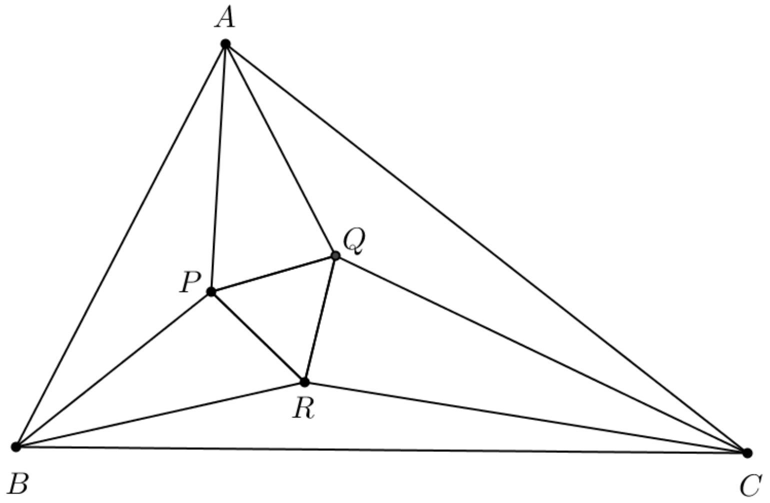
១). តាង $P(x)$ ជាពហុធាមួយ ។ បើគេចែក $P(x)$ នឹង x^2+2, x^2+3 គេទទួលបានសំណល់រៀងគ្នា $3x+1$ និង $4x+2$ ។ រកសំណល់ពេលដែល $P(x)$ ចែកនឹង $(x^2+2)(x^2+3)$ ។

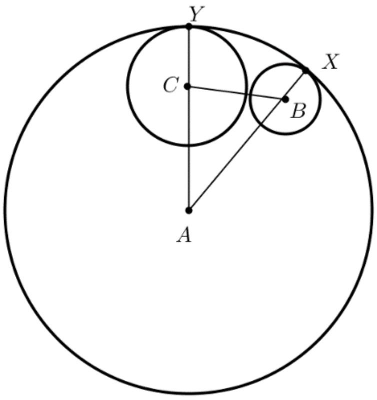
២). ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន N ចូររក x ដែល $\frac{1}{\log_2 N}+\frac{1}{\log_3 N}+\cdots+\frac{1}{\log_{2017} N}=\frac{1}{\log_x N}$ ។

៣). តាង $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ជាចំនួនវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់ $x_1x_2\cdots x_n=1$ ។ បង្ហាញថា ចំពោះគ្រប់ $t\ge 0$, $(1+x_1t)(1+x_2t)\cdots(1+x_nt)\ge(1+t)^n$ ។

៤). អនុគមន៍លោការីត $y=\log_a x$ និង អនុគមន៍ច្រាសរបស់វា $y=a^x$ មានក្រាបកាត់គ្នាត្រង់មួយចំណុចគត់ a ។ រកតម្លៃ a ។

៥). នៅក្នុង ΔABC (ដូចក្រាមខាងក្រោម) AP, AQ ចែកមុំ A ជាបីផ្នែកស្មើគ្នា ។ BP, BR ចែកមុំ B ជាបីផ្នែកស្មើគ្នា ។ CR, CP ចែកមុំ C ជាបីផ្នែកស្មើគ្នា ។ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា PQR ជាត្រីកោណសម័ង្ស ។

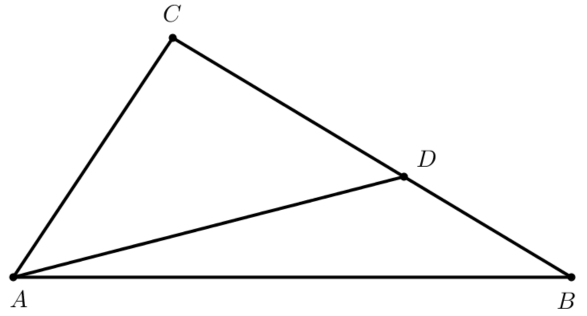




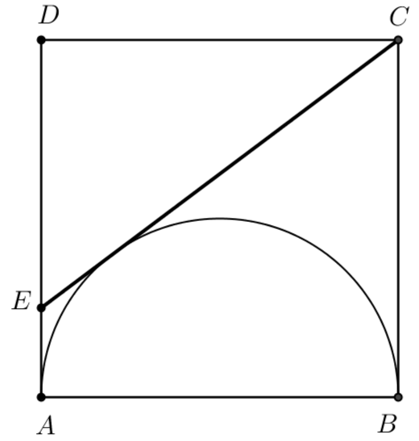
៦). នៅក្នុងរូបខាងក្រោម រង្វង់ផ្ចិត B ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ផ្ចិត A ត្រង់ X ។ រង្វង់ផ្ចិត C ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ផ្ចិត A ត្រង់ Y ។ រង្វង់ផ្ចិត B និង ផ្ចិត C ប៉ះគ្នា ។ បើ $AB=6, AC=5$ និង $BC=9$ ។
ចូរគណនា AX ។

----

៧). នៅក្នុងត្រីកោណ ABC មាន $AC=CD$ និង $\angle CAB-\angle ABC=30^0$ ។ គណនារង្វាស់មុំ $\angle BAD$ ។



៨). ការេ $ABCD$ មានរង្វាស់ជ្រុងស្មើ 2 ។ កន្លះរង្វង់មួយដែលមានអង្កត់ផ្ចិត AB នៅក្នុងការេ ។ បន្ទាត់ប៉ះកន្លះរង្វង់ដែលគូសចេញពី C ជួប AD ត្រង់ E ។ គណនាប្រវែង CE ។



៩). ចតុកោណកែង $ABCD$ មាន $AB=6$ និង $BC=3$ ។ ចំណុច M ត្រូវបានគេដៅនៅលើជ្រុង AB យ៉ាងណាអោយបាន $\angle AMD=\angle CMD$ ។ គណនារង្វាស់គិតជាដឺក្រេនៃ $\angle AMD$ ។

១០). ចំពោះការេ $ABCD$ មួយ ចំណុច E នៅលើជ្រុង AD ហើយចំណុច F នៅលើជ្រុង BC ដែល $BE=EF=FD=30$ ។ រកក្រឡាផ្ទៃការេ ។

១១). បីចំណុច A,B,C នៅក្នុងប្លង់មួយដែល $\angle ABC=90^0$ ។ តាង D ជាចំណុចមួយនៅលើ AB និងតាង E ជាជើងនៃចំណោលកែងពី D ទៅ AC ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\angle DBE=\angle DCE$ ។

១២). បួនចំណុចផ្សេងគ្នា ត្រូវបានគេយកមកតម្រៀបនៅក្នុងប្លង់មួយ យ៉ាងណាអោយរង្វាស់អង្កត់ដែលបង្កើតដោយចំណុចទាំងនោះគឺ $a,a,a,a,2a$ និង b ។ រកផលធៀប b នឹង a ។

----

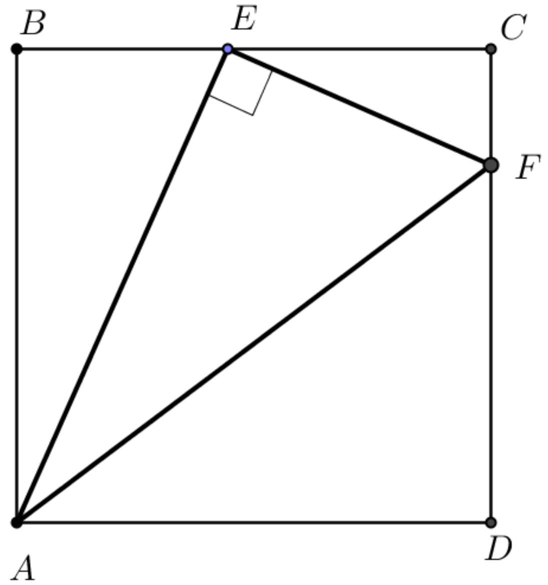
១៣). គេអោយ ABC ជាត្រីកោណមួយដែលមាន $\angle CAB$ ជាមុំកែង ។ ចំណុច L មួយស្ថិតនៅលើជ្រុង BC (ចន្លោះ B និង C) ។ រង្វង់ BAL ជួបបន្ទាត់ AC ជាថ្មីត្រង់ M ហើយរង្វង់ CAL ជួបបន្ទាត់ AB ជាថ្មីត្រង់ N ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំណុច L,M និង N ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ត្រង់មួយ ។

១៤). គេអោយ ABC ជាត្រីកោណមួយដែលមានផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្នុង I ហើយ $AB=1400,\ AC=1800,\ BC=2014$ ។ រង្វង់ដែលមានផ្ចិត I កាត់តាមចំណុច A ហើយប្រសព្វជាមួយបន្ទាត់ BC ត្រង់ពីរចំណុច X និង Y ។គណនាប្រវែង XY ។

១៥). ABC ជាត្រីកោណសមបាតដែលមាន $AB=AC$ ហើយ Γ ជារង្វង់ចារិកក្រៅវា ។ ចំណុច D មួយនៅលើធ្នូ AB នៃ Γ (ដែលគ្មាន C) ។ ចំណុច E មួយនៅលើធ្នូ AC នៃ Γ (ដែលគ្មាន B) ។ ប្រសិនបើ $AD=CE$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា BE ស្របនឹង AD ។

១៦). រូបផ្លានៃរបិទជិតមួយ ត្រូវបានគេហៅថា សមគ្នា បើតម្លៃលេខនៃបរិមាត្រ និង ក្រឡាផ្ទៃរបស់វាស្មើគ្នា ។ ឧទាហរណ៍ ការេដែលជ្រុងមានរង្វាស់ 4 ហៅថា សមគ្នា ព្រោះបរិមាត្រ និង ក្រឡាផ្ទៃវាស្មើ 16 ដូចគ្នា ។ បង្ហាញថា គ្រប់រូបបិទជិតនៅក្នុងប្លង់ អាចត្រូវបានគេ dilate អោយក្លាយជាសមគ្នា (dilation ជាបម្លែងអាភីនដែលរូបភាពមួយត្រូវបានគេពង្រីកឬបង្រួម) ឬអាចនិយាយថា បើ A ត្រូវបាន dilate មករកទំហំ B នោះ A ដូចនឹង B ។

១៦). ត្រីកោណ AEF ជាត្រីកោណកែងមួយដែលមាន $AE=4$ និង $EF=3$ ។ ត្រីកោណនេះ ចារិកនៅក្នុងការេមួយដូចរូប ។ រកក្រឡាផ្ទៃការេនោះ ។



----

១៧). ចំណុច A និង B នៅលើរង្វង់ Γ មួយ ហើយ C ជាចំណុចមួយនៅផ្នែកខាងក្នុងនៃរង្វង់ Γ ។ បន្លាយ AC និង BC ខាង C ធ្វើអោយវាកាត់ Γ ត្រង់ M និង N រៀងគ្នា ។ តាង X ជាជើងនៃចំណោលកែងពី M ទៅលើ BN និង Y ជាជើងនៃចំណោលកែងពី N ទៅលើ AM ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $AB \parallel XY$ ។

១៨). ការេ $ABCD$ មានជ្រុងមានរង្វាស់ 13 ហើយចំណុច E,F នៅក្រៅការេដែល $BE=DF=5$ និង $AE=CF=12$ ។ រក EF^2 ។

១៩). តាង Γ ជារង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC ហើយ D,E,F ជាចំណុចកណ្តាលនៃធ្នូ AB,BC,CA រៀងគ្នា ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $DF \perp AE$ ។

២០). នៅក្នុងតេត្រាអ៊ែត $ABCD$ ទ្រនុង AB មានរង្វាស់ស្មើ $3cm$ ។ ក្រឡាផ្ទៃនៃមុខ ABC គឺ $15cm^2$ និងក្រឡាផ្ទៃនៃមុខ ABD គឺ $12cm^2$ ។ មុខទាំងពីរជួបគ្នាត្រង់មុំ 30^0 ។ រកមាឌនៃតេត្រាអ៊ែតគិតជា cm^3 ។

២១). តាង $P_1P_2P_3P_4$ ជាចតុកោណប៉ោងដែលចារិកក្នុងរង្វង់មួយ មានអង្កត់ផ្ចិតមានរង្វាស់ D ។ តាង X ជាចំណុចប្រសព្វនៃអង្កត់ទ្រូងរបស់វា ។ បើ $P_1P_3 \perp P_2P_4$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $D^2 = XP_1^2 + XP_2^2 + XP_3^2 + XP_4^2$ ។

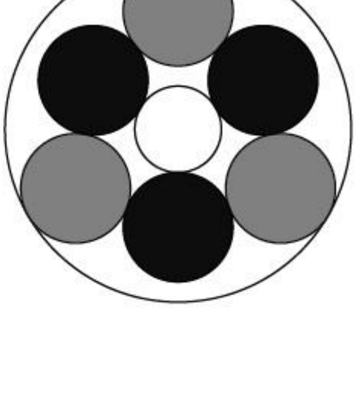
២២). ប្លង់កែងពីរ ប្រសព្វជាមួយជាមួយស្វ៊ែរបង្កើតបានជារង្វង់ពីរ ។ រង្វង់ទាំងពីរប្រសព្វគ្នាត្រង់ពីរចំណុច A និង B ដែល $AB=42$ ។ បើកាំរង្វង់ទាំងពីរ 54 និង 66 ចូររក R^2 (R ជាកាំនៃស្វ៊ែរ) ។

២៣). នៅក្នុងចតុកោណព្នាយ $ABCD$ ដែលមាន $AB \parallel CD$ គេអោយ $BC=1000$ និង $AD=2008$ ។ តាង $\angle A=37^0$ និង $\angle D=53^0$ ហើយ M និង N ជាចំណុចកណ្តាលនៃ BC និង AD រៀងគ្នា ។ គណនាប្រវែង MN ។

២៤). ΔABC ជាត្រីកោណសមបាតដែលមានបាត AB ។ បន្ទាត់ l ប៉ះរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណត្រង់ចំណុច B ។ តាង CD ជាបន្ទាត់កែង ដែលគូសចេញពី C ទៅ l ។ AE និង BF ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណ ABC ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា D,E,F កូលីនេអ៊ែរ ។

២៥). រង្វង់ពីរមានផ្ចិតរួម និងមានកាំ 1 និង 4 ។ រង្វង់ប៉ុនគ្នាចំនួន 6 បង្កើតបានជាកង ហើយរង្វង់មួយប៉ះជាមួយរង្វង់ពីរទៀតដែលនៅជាប់នឹងវា (ដូចរូប) ។ រង្វង់ដែលផាត់ពណ៌រាងស្រាល ប៉ះជាមួយរង្វង់មានកាំ 4 រីឯរង្វង់ដែលផាត់ពណ៌ខ្លាំងប៉ះជាមួយរង្វង់ដែលមានកាំ 1 ។

កាំនៃរង្វង់ប៉ុនគ្នាទាំង 6 អាចសរសេរជាទម្រង់ $\frac{k+\sqrt{m}}{n}$ ដែល k,m,n ជាចំនួនគត់ ហើយ k និង n ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ។ គណនា $k+m+n$ ។



----

២៦). ចំពោះរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC តាង D ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ត្រង់ A ជាមួយនឹងបន្ទាត់ BC ។ E ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ត្រង់ B ជាមួយបន្ទាត់ CA ។ F ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ត្រង់ C ជាមួយបន្ទាត់ AB ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំណុច D,E,F កូលីនេអ៊ែរ ។

២៧). គេអោយ A,B,C,D ជាចំណុចនៅក្នុងប្លង់ ដែល $\angle BAC=\angle CBD$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា រង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC ប៉ះនឹង BD ។

២៨). គេអោយត្រីកោណ ABC មួយ ។ តាង H ជាអរតូសង់របស់វា និង O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្រៅ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា :

ក) $\angle HAB=\angle OAC$ ។

ខ) $\angle HAO=|\angle B-\angle C|$ ។

២៩). ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុងនៃមុំ BAC និង មុំ ABC ជួប BC និង CA ត្រង់ចំណុច P និង Q រៀងគ្នា ។ M និង N ជាជើងនៃចំណោលកែងរបស់ P និង Q ទៅលើជ្រុង AB ។ គណនា $\angle MCN$ ។

៣០). គេមាន $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាមដែលមាន A ជាមុំទាល ។ តាង M,N ជាជើងនៃចំណោលកែងរបស់ A ទៅលើជ្រុង BC និង CD ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\Delta MAN\sim\Delta ABC$ ។

៣១). ឧបមាថា A,B,C និង D ជាចំណុចនៅក្នុងប្លង់ដែល $\Delta PAB\sim\Delta PCD$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\Delta PAC\sim\Delta PBD$ ។

៣២). រង្វង់ C_1 មានផ្ចិត O ស្ថិតនៅពីលើ រង្វង់ C_2 ។ រង្វង់ទាំងពីរជួបគ្នាត្រង់ X និង Y ។ ចំណុច Z ដែលនៅខាងក្រៅ C_1 ហើយស្ថិតនៅលើរង្វង់ C_2 ដែល $XZ=13, OZ=11,$ និង $YZ=7$ ។ គណនាកាំរង្វង់ C_1 ។

៣៣). គេអោយ $ABCD$ ជាចតុកោណប៉ោងចារិកក្នុងរង្វង់ដែលគ្មានជ្រុងពីរណាស្របគ្នាទេ ។ បន្ទាត់ AD និង BC (ត្រូវបានបន្លាយអោយ) ជួបគ្នាត្រង់ K ហើយ AB និង CD (ត្រូវបានបន្លាយអោយ) ជួបគ្នាត្រង់ M ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle DKC$ ប្រសព្វជាមួយ CD និង AB ត្រង់ EF រៀងគ្នា ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle CMB$ ប្រសព្វជាមួយ BC និង AD ត្រង់ G និង H រៀងគ្នា ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $EFGH$ ជាចតុកោណស្មើ ។

៣៤). នៅក្នុងត្រីកោណ ABC មួយមាន $AB=13, AC=14$ និង $BC=15$ ។ M ជាចំណុចកណ្តាល AC ។ P ជាចំណុចមួយដែលគេដៅនៅលើអង្កត់ BM យ៉ាងណាអោយបាន $AP\perp PC$ ។ យក p,q,r ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ដែល p និង r ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ហើយ q ជាការេប្រាកដ ដែលក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC អាចសរសេរក្នុងទម្រង់ $\frac{p\sqrt{q}}{r}$ ។ រកតម្លៃ $p+q+r$ ។

៣៥). ត្រីកោណមានមុំស្រួច ABC ចារិកក្នុងរង្វង់ Ω ។ បន្ទាត់ប៉ះទៅនឹង Ω ត្រង់ B និង C ជួបគ្នាត្រង់ P ។ ចំណុច D,E នៅលើជ្រុង AB,AC ដែល PD និង PE កែងជាមួយ AB និង AC រៀងគ្នា ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា អរតូសង់នៃត្រីកោណ ADE ជាចំណុចកណ្តាលនៃ BC ។

----

៣៦). H ជាអរតូសង់នៃត្រីកោណស្រួច ABC ។ តាង H_A ជាកម្ពស់ដែលគូសចេញពី A មកកាន់បាត BC ។ ដូចគ្នាចំពោះ H_B និង H_C ។ បង្ហាញថា H ជាផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្នុងនៃ $\Delta H_AH_BH_C$ ។

៣៧). ត្រីកោណ ABC មួយមាន $AB=86$ និង $AC=97$ ។ រង្វង់មួយមានផ្ចិត A មានកាំ AB ប្រសព្វជាមួយ BC ត្រង់ B និង X ។ គេដឹងថា BX និង CX ជាចំនួនគត់ ។ គណនា BC ។

៣៨). គេអោយត្រីកោណ ABC ដែល $\angle BAC \neq 90^0$ ។ តាង O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC ហើយ Γ ជារង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ OBC ។ ឧបមាថា Γ ប្រសព្វជាមួយបន្ទាត់ AB ត្រង់ P (ខុសពី B) និងប្រសព្វបន្ទាត់ AC ត្រង់ Q (ខុសពី C) ។ តាង ON ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់ Γ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចតុកោណ $APNQ$ ជាប្រលេឡូក្រាម ។

៣៩). គេធ្វើរង្វិលការេឯកតាមួយក្រោមមុំ 45^0 ជុំវិញផ្ចិតរបស់វា ។ រកក្រឡាផ្ទៃនៃតំបន់ដែលបាត់ចេញនៅផ្នែកខាងក្នុងនៃការេ ។

៤០). អង្កត់ធ្នូ ST ដែលមានប្រវែងថេរ ចល័តនៅក្នុងរង្វង់មួយដែលមានអង្កត់ផ្ចិត AB ។ M ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ ST ហើយ P ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃ S ទៅលើ AB ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថាមុំ $\angle SPM$ មិនប្រែប្រួលចំពោះគ្រប់ទីតាំងរបស់ ST ។

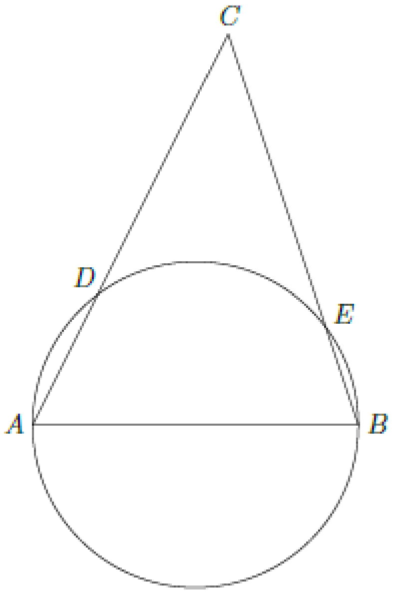
៤១). D ជាចំណុចមួយនៅលើជ្រុង AC នៃត្រីកោណ ABC ។ បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ D នៃរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ BDC ជួប AB ត្រង់ចំណុច C_1 ។ ចំណុច A_1 ត្រូវបានគេកំណត់ស្រដៀងគ្នាដែរ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $A_1C_1 \parallel AC$ ។

៤២). នៅក្នុងត្រីកោណ ABC មួយមាន $AB=13, BC=14$ និង $CA=15$ ។ ចំណុចផ្សេងៗគ្នា D,E,F ស្ថិតនៅលើអង្កត់ BC,CA និង DE រៀងគ្នា ដែល $AD\perp BC, DE\perp AC$ និង $AF\perp BF$ ។ ប្រវែងអង្កត់ DF អាចសរសេរជាទម្រង់ $\frac{m}{n}$ ដែល m,n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន បឋមរវាងគ្នា ។

៤៣). នៅក្នុងត្រីកោណ ABC មួយមាន $AB=5, AC=6$ និង $BC=7$ ។ ប្រសិនបើចំណុច X មួយត្រូវបានគេជ្រើសរើសនៅលើជ្រុង BC ដែល ផលបូកក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ AXB និង AXC តូចបំផុត ចូរគណនា BX ។

៤៤). គេអោយចតុកោណកែង $ABCD$ ។ បន្ទាត់កែងពីរកាត់តាមចំណុច B ។ មួយក្នុងចំណោមបន្ទាត់ទាំងពីរជួបអង្កត់ AD ត្រង់ចំណុច K ហើយបន្ទាត់មួយទៀតជួបបន្លាយនៃ CD ត្រង់ L ។ តាង M ជាចំណុចរួមនៃ KL និង AC ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $BF\perp KL$ ។

៤៥). នៅក្នុងរូប ABC ជាត្រីកោណមួយ ហើយ $AB=30$ ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់ ។ បើ $AD=\frac{AC}{3}$ និង $BE=\frac{BC}{4}$ ។ តើក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC ស្មើប៉ុន្មាន ?



៤៦). P ជាចំណុចមួយនៅក្នុងចតុកោណកែង $ABCD$ ដែល $\angle APD+\angle BPC=180^0$ ។ រកផលបូកមុំ $\angle DAP$ និង $\angle BAP$ ។

៤៧). P,Q,R ជាចំណុចនៅលើជ្រុង AB,BC និង CA នៃត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា រង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ AQR,BRP និង CPQ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុចរួមមួយ (ហៅថាចំណុច មីកែល ឬ Miquel point) ។

៤៨). ΔPQR មួយមាន $\angle P=75^0$ និង $\angle Q=60^0$ ។ ឆកោណនិយ័តមួយ $ABCDEF$ ដែលមានជ្រុងស្មើ 1 ត្រូវបានគេសង់នៅខាងក្នុងត្រីកោណ PQR ដែលជ្រុង AB នៅលើ PQ , ជ្រុង CD នៅលើ QR ហើយកំពូលមួយដែលនៅសល់ ស្ថិតនៅលើ RP ។ មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន a,b,c,d ដែលក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ PQR អាចសរសេរជាទម្រង់ $\dfrac{a+b\sqrt{c}}{d}$ ដែល a និង d ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ហើយ c មិនចែកដាច់នឹងការេប្រាកដនៃចំនួនបឋមណាមួយទេ ។ គណនា $a+b+c+d$ ។

៤៩). Γ ជារង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC មួយ ។ តាង I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្នុង និង M ជាចំណុចកណ្ដាលធ្នូតូច BC ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា M ជាផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ BIC ។

៥០). នៅក្នុងត្រីកោណ ABC មួយមាន $\angle A=60^0$ និង $\angle B=45^0$ ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle A$ ប្រសព្វ BC ត្រង់ T ដែល $AT=24$ ។ ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ ABC អាចសរសេរជាទម្រង់ $a+b\sqrt{c}$ ដែល a,b,c ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ c មិនចែកដាច់នឹងការេប្រាកដនៃចំនួនបឋមណាមួយទេ ។ រកតម្លៃ $a+b+c$ ។

----

៥១). O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC មួយដែលមាន $AB>AC$ ។ តាង M ជាចំណុចកណ្ដាល BC ។ D ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃកម្ពស់គូសចេញពីកំពូល A ហើយ E ជាចំណុចមួយនៅលើបន្ទាត់ AO ដែល $BE\perp AO$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $MD=ME$ ។

៥២). ΔABC ជាត្រីកោណមានមុំស្រួច ។ តាង D,F ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ BC,AB រៀងគ្នា ។ បន្ទាត់កែងគូសចេញពី F មកលើជ្រុង AC និង បន្ទាត់កែងគូសចេញពី B មកលើជ្រុង BC កាត់គ្នាត្រង់ N ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា MD មានប្រវែងស្មើនឹងកាំរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC ។

៥៣). M ជាចំណុចកណ្ដាលនៃ BC នៃត្រីកោណ ABC មួយ ។ ចំណុច P ជាជើងនៃចំណោលកែងនៃកម្ពស់គូសចេញពីកំពូល B ទៅកាន់មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ AC ។ បន្ទាត់ PM និង AB ជួបគ្នាត្រង់ Q ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ΔQBP សម័ង្ស ។

៥៤). គេអោយ ABC ជាត្រីកោណមួយ ដែលមានផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្នុង I ។ តាង U,V និង W ជាចំណុចប្រសព្វរវាងកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ A,B,C ជាមួយរង្វង់ចារិកក្នុង ដែល V នៅចន្លោះ B និង I ដូចគ្នាដែរចំពោះ U និង W ។ តាង X,Y,Z ជាចំណុចប៉ះរវាងរង្វង់ចារិកក្នុងជាមួយជ្រុង BC,AC និង AB នៃត្រីកោណ ABC រៀងគ្នា ។ ត្រីកោណ UVW ហៅថាត្រីកោណ ដេវីដយ៉ាង (David Yang triangle) និង ត្រីកោណ XYZ ហៅថាត្រីកោណ ស្កុតវូ (Scott Wu triangle) ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ត្រីកោណ ដេវីដយ៉ាង និង ត្រីកោណស្កុតវូប៉ុនគ្នាលុះត្រាតែ ត្រីកោណ ABC សម័ង្ស ។

៥៥). ត្រីកោណ ABC មាន $AB=21, AC=22$ និង $BC=20$ ។ ចំណុច D,E នៅលើជ្រុង AB និង AC រៀងគ្នា ដែល DE ស្របនឹង BC ហើយមានផ្ទុកផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្នុងត្រីកោណ ABC ។ គេបាន $DE=\frac{m}{n}$ ដែល m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នា ។ រកតម្លៃ $m+n$ ។

៥៦). ត្រីកោណសម័ង្ស ABC ចារិកក្នុងរង្វង់មួយ ។ យកចំណុច P មួយនៅលើធ្នូ BC ។ តាង Q ជាចំណុចប្រសព្វរវាង AP និង BC ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{PQ}=\frac{1}{PB}+\frac{1}{PC}$ ។

៥៧). BM ជាមេដ្យាននៃត្រីកោណ ABC ដែលមាន $\angle B=90^0$ ។ រង្វង់ចារិកក្នុងត្រីកោណ ABM ប៉ះនឹងជ្រុង AB, AM ត្រង់ចំណុច A_1, A_2 ។ ចំណុច B_1, B_2 ត្រូវបានកំណត់ដូចគ្នាដែរ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ A_1A_2 និង C_1C_2 ប្រសព្វគ្នានៅលើកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំនៃមុំ ABC ។

៥៨). ω ជារង្វង់មួយមានផ្ចិត O ។ បន្ទាត់ AB និង AC ប៉ះជាមួយ ω ត្រង់ចំណុច B និង C រៀងគ្នា ។ គេជ្រើសរើសចំណុច X មួយនៅលើជ្រុង BC ហើយ l ជាបន្ទាត់មួយដែលកាត់តាម X ដោយកែងជាមួយ XO ។ គេអោយ l ប្រសព្វជាមួយ AB និង AC (ឬបន្លាយរបស់វា) ត្រង់ចំណុច K និង L រៀងគ្នា ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា X ជាចំណុចកណ្ដាលនៃអង្កត់ KL ។

----

៥៩). ចតុកោណ $ABCD$ ចារិកក្រៅរង្វង់មួយដែលមានផ្ចិត I ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំណោលកែងនៃ B និង D ទៅលើ IA និង IC ស្ថិតនៅលើរង្វង់តែមួយ ។

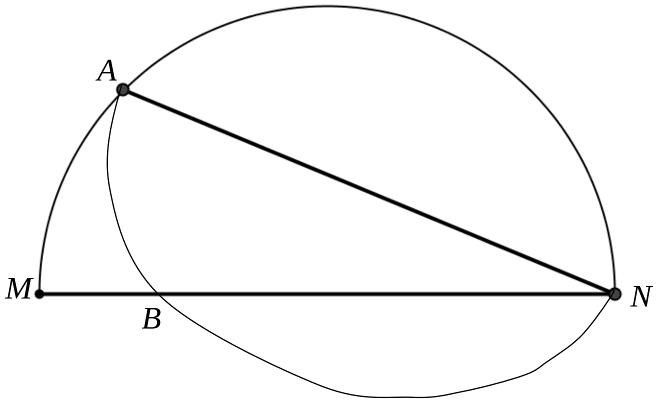
៦០). $ABCD$ ជាចតុកោណព្នាយសមបាត ដែលមាន $AB=10, BC=15$ និង $CD=28$ និង $DA=15$ ។ មានចំណុច E មួយដែល ΔAED និង ΔAEB មានក្រឡាផ្ទៃស្មើគ្នា និង EC ខ្លីបំផុត ។ គណនា EC ។

៦១). $ABCD$ ជាចតុកោណប៉ោងដែលមាន AB ជាជ្រុងវែងជាងគេ ។ ចំណុច M និង N នៅលើជ្រុង AB និង BC រៀងគ្នា ដែលអង្កត់នីមួយៗ AN និង CM ចែកចតុកោណ $ABCD$ ជាពីរផ្នែកដែលមានក្រឡាផ្ទៃស្មើគ្នា ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា អង្កត់ MN ចែកអង្កត់ទ្រូង BD ជាពីរផ្នែកស្មើគ្នា ។

៦២). ABC ជាត្រីកោណសាមញ្ញមានមុំស្រួច ដែលមានផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្រៅ O និង អរតូសង់ H ។ ប្រសិនបើ M ជាចំណុចកណ្តាល BC ចូរបង្ហាញថា AO និង HM ប្រសព្វគ្នានៅលើរង្វង់ចារិកក្រៅនៃត្រីកោណ ABC ។

៦៣). គេអោយត្រីកោណ ABC មួយ ។ ចំណុច M, N ជាចំណោលកែងនៃចំណុច B និង C មកលើកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ C និង B រៀងគ្នា ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ MN ប្រសព្វជាមួយជ្រុង AC និង AB នៅចំណុចមួយដែលពាក់ព័ន្ធនឹងរង្វង់ចារិកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ។

៦៤). នៅក្នុងរូបខាងក្រោម កន្លះរង្វង់មួយត្រូវបានគេបត់តាមអង្កត់ធ្នូ AN ហើយប្រសព្វជាមួយអង្កត់ផ្ចិតរបស់វាត្រង់ B ។ សន្មត់ថា $MB:BN=2:3$ និង $MN=10$ ។ បើ $AN=x$ ចូររក x^2 ។



៦៥). គេអោយចតុកោណកែង $JHIZ$ ។ A និង C ជាចំណុចនៅលើ ZI និង ZJ រៀងគ្នា ។ បន្ទាត់កែងដែលគូសចេញពី A ទៅកាន់ CH ប្រសព្វជាមួយ HI ត្រង់ X ហើយបន្ទាត់កែងដែលគូសចេញពីកំពូល C ទៅកាន់ AH ប្រសព្វជាមួយ HJ ត្រង់ Y ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា X, Y និង Z កូលីនេអ៊ែរ ។

៦៦). គេអោយត្រីកោណ ABC មួយ ។ D ជាចំណុចមួយនៅលើជ្រុង BC ។ តាង O_1 និង O_2 ជាផ្ចិតរង្វង់ដែលចារិកក្រៅត្រីកោណ ABD និង ត្រីកោណ ACD រៀងគ្នា ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\Delta AO_1O_2 \sim \Delta ABC$ ។

----

៦៧). នៅក្នុងត្រីកោណ ABC មួយមាន $AB=36, BC=40$ និង $CA=44$ ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ A កាត់ BC ត្រង់ D និង រង្វង់ចារិកក្រៅត្រង់ E (ខុសពី A) ។ គណនាតម្លៃនៃ DE^2 ។

៦៨). ត្រីកោណមានមុំស្រួច ABC មាន $\angle BAC=60^0$ និង $AB>AC$ ។ តាង I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្នុង និង H ជាអរតូសង់ នៃត្រីកោណ ABC ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $2\angle AHI=3\angle ABC$ ។

៦៩). $ABCD$ ជាចតុកោណចារិកក្នុងរង្វង់ ។ r និង s ជាចំណុចបានមកពីភាពឆ្លុះនៃបន្ទាត់ AB ធៀបទៅនឹង កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុងនៃ $\angle CAD$ និង $\angle CBD$ រៀងគ្នា ។ បើ P ជាចំណុចប្រសព្វរវាង r និង s ហើយ O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្រៅចតុកោណ $ABCD$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា OP កែងនឹង CD ។

៧០). នៅក្នុងត្រីកោណ ABC មួយមាន $AB=425, BC=450$ និង $AC=510$ ។ ចំណុចក្នុង P មួយត្រូវបានគេសង់ ហើយអង្កត់បីត្រូវបានគេគូសកាត់តាម P អោយស្របជាមួយជ្រុងទាំងបីនៃត្រីកោណ ។ បើអង្កត់ទាំងបីនោះមានប្រវែង d ដូចគ្នា ។ ចូររក d ។

៧១). គេអោយត្រីកោណសម័ង្សមួយ ។ ចំណុចមួយនៅលើរង្វង់ចារិកក្នុងនៃត្រីកោណនេះ ។ ប្រសិនបើចម្ងាយខ្លីបំផុតពីរ ពីចំណុចនោះទៅជ្រុងពីរនៃត្រីកោណគឺ 1 និង 4 នោះជ្រុងនៃត្រីកោណសម័ង្សអាចសរសេរជារាង $\frac{a\sqrt{b}}{c}$ ដែល $(a;c)=1$ ហើយ b មិនចែកដាច់នឹងការេនៃចំនួនគត់ធំជាង 1 ។ រកតម្លៃ $a+b+c$ ។

៧២). គេអោយត្រីកោណ ABC មួយ ។ P,Q ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់មួយដែលស្របនឹង BC ដែលកាត់តាមចំណុច A ជាមួយនឹងកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្រៅនៃមុំ B និង C រៀងគ្នា ។ បន្ទាត់មួយកែងនឹង BP ត្រង់ P ហើយបន្ទាត់មួយទៀតកែងនឹង CQ ត្រង់ Q ជួបគ្នាត្រង់ R ។ តាង I ជាផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្នុងនៃត្រីកោណ ABC ។ បង្ហាញថា $AI=AR$ ។

៧៣). គេអោយចតុកោណប៉ោង $ABCD$ ។ តាង P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 និង P_6 ជាចំណុចកណ្តាលនៃអង្កត់ AB,BC,CD,DA,AC និង BD រៀងគ្នា ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ P_1P_3, P_2P_4 និង P_5P_6 ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុចតែមួយ ។

៧៤). តាង C_1 ជារង្វង់មួយដែលមានផ្ចិត O ។ P ជាចំណុចមួយនៅលើរង្វង់ ហើយ l ជាបន្ទាត់ប៉ះជាមួយ C_1 ត្រង់ P ។ Q ជាចំណុចមួយនៅលើ l ខុសពី P ។ C_2 ជារង្វង់មួយដែលកាត់តាម O,P និង Q ។ អង្កត់ OQ កាត់ C_1 ត្រង់ S ហើយបន្ទាត់ PS កាត់ C_2 ត្រង់ចំណុច R ខុសពី P ។ បើ r_1 និង r_2 ជាកាំនៃ C_1 និង C_2 រៀងគ្នា ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{PS}{SR}=\frac{r_1}{r_2}$ ។

៧៥). $ABCD$ ជាចតុកោណព្នាយមួយដែលមាន $AB\parallel CD$ $, AB=11, BC=5, CD=19$ និង $DA=7$ ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle A$ និង $\angle D$ ជួបគ្នាត្រង់ P និង កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle B$ និង $\angle C$ ជួបគ្នាត្រង់ Q ។ គណនាក្រឡាផ្ទៃឆកោណ $ABQCDP$ ។

----

៧៦). សន្មត់ X និង Y ជាចំណុចរួមនៃរង្វង់ពីរ ω_1 និង ω_2 ។ រង្វង់ទីបី ω_3 ប៉ះក្នុងជាមួយរង្វង់ ω_1 និង ω_2 ត្រង់ P និង Q រៀងគ្នា ។ អង្កត់ XY ប្រសព្វជាមួយ ω ត្រង់ចំណុច M និង N ។ Rays PM និង PN ប្រសព្វ ω_1 ត្រង់ចំណុច A និង D ហើយ rays QM និង QN ប្រសព្វជាមួយ ω_2 ត្រង់ចំណុច B និង C ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $AB=CD$ ។

៧៧). អង្កត់ទ្រូង AC និង BD នៃចតុកោណប៉ោង $ABCD$ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច M ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ $\angle ACD$ ជួប ray BA ត្រង់ K ។ គេអោយ $MA\cdot MC+MA\cdot CD=MB\cdot MD$ ។
ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\angle BKC=\angle CDB$ ។

៧៨). នៅក្នុងត្រីកោណមានមុំស្រួច ABC ចារិកក្នុងរង្វង់ ω ។ តាង A' ជាចំណោលកែងនៃ A មកលើ BC ហើយ B',C' ជាចំណោលកែងនៃ A' មកលើ AC,AB រៀងគ្នា ។ បន្ទាត់ $B'C'$ ប្រសព្វជាមួយ ω ត្រង់ X និង Y ហើយបន្ទាត់ AA' ជួបរង្វង់ ω ជាលើកទីពីរត្រង់ D ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា A' ជាផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្នុងត្រីកោណ XYD ។

៧៩). P,Q,R ជាចំណុចនៅលើជ្រុង BC,CA,AB រៀងគ្នានៃត្រីកោណ ABC ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ AQR,BRP និង CPQ បង្កើតបានជាត្រីកោណមួយដែលដូចត្រីកោណ ABC ។

៨០). ត្រីកោណ ABC មានរង្វាស់ជ្រុង $AB=\sqrt{41},AC=5$ និង $BC=8$ ។ តាង O ជាផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC ហើយ A' ជាចំណុចមួយនៅលើអង្កត់ផ្ចិត បញ្ច្រាសជាមួយ A ។ គណនាក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ $A'BC$ ។

៨១). នៅក្នុងត្រីកោណ ABC មាន $AB=AC=100$ និង $BC=56$ ។ រង្វង់ P មានកាំ 16 ហើយប៉ះនឹង AC និង BC ។ រង្វង់ Q ប៉ះក្រៅជាមួយរង្វង់ P ហើយប៉ះនឹង AB និង BC ។ គ្មានចំណុចណាមួយនៃរង្វង់ Q ស្ថិតនៅក្រៅត្រីកោណ ABC ទេ ។ កាំនៃរង្វង់ Q អាចសរសេរជាទម្រង់ $m-n\sqrt{k}$ ដែល k,m,n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ k ជាផលគុណនៃចំនួនបឋមខុសៗគ្នា ។ ចូររក $m+nk$ ។

៨២). គេអោយ P,A,B,C,D ជាចំណុចនៅក្នុងប្លង់ដែល $\Delta PAB\sim\Delta PCD$ ។ តាង M និង N ជាចំណុចកណ្តាលនៃ AC និង BD រៀងគ្នា ។ បង្ហាញថា $\Delta PAB\sim\Delta PMN\sim\Delta PCD$ ។

៨៣). ត្រីកោណ ABC មានមេដ្យាន $AD=18$ និង $CE=27$ ហើយ $AB=24$ ។ បន្លាយ CE អោយកាត់រង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC ត្រង់ F ។ ក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ AFB គឺ $m\sqrt{n}$ ដែល m,n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ n ចែកមិនដាច់នឹងការេប្រាកដនៃចំនួនបឋមណាមួយទេ ។ គណនា $m+n$ ។

៨៤). គេអោយ $ABCD$ ជាចតុកោណព្នាយសមបាតដែលមាន $AB\parallel CD$ ។ រង្វង់ ω ដែលចារិកក្នុងត្រីកោណ BCD ជួប CD ត្រង់ E ។ តាង F ជាចំណុចមួយនៅលើកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំក្នុង $\angle DAC$ ដែល $EF\perp CD$ ។ រង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ACF ជួបបន្ទាត់ CD ត្រង់ C និង G ។ បង្ហាញថា ត្រីកោណ AFG ជាត្រីកោណសមបាត ។

----

៨៥). រង្វង់ពីរ G_1 និង G_2 កាត់គ្នាត្រង់ពីរចំណុច M និង N ។ តាង AB ជាបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងរង្វង់ទាំងពីរ ត្រង់ A និង B រៀងគ្នា ដែល M នៅជិត AB ជាង N ។ យក CD ជាបន្ទាត់មួយដែលស្របនឹង AB ហើយ កាត់តាមចំណុច M ដែល C នៅលើ G_1 និង D នៅលើ G_2 ។ បន្ទាត់ AC និង BD ជួបគ្នាត្រង់ E ។ បន្ទាត់ AN និង CD ជួបគ្នាត្រង់ P ។ បង្ហាញថា $EP=EQ$ ។

៨៦). គេអោយ AB ជាអង្កត់ផ្ចិតនៃរង្វង់មួយ ω ។ បន្លាយ AB ខាង A អោយបាន C ។ ចំណុច T មួយ នៅលើ ω ដែល CT ប៉ះនឹង ω ។ ចំណុច P ជាជំងនៃចំណោលកែងពី A មកលើ CT ។ ឧបមាថា $AB=18$ ហើយ m តាងអោយតម្លៃអតិបរមាដែលអាចមាន នៃប្រវែងអង្កត់ BP ។ ចូររក m^2 ។

៨៧). C និង D ជាពីរចំណុចនៅលើកន្លះរង្វង់ ដែលមានអង្កត់ផ្ចិត AB ដែល B និង C នៅលើជ្រុងផ្សេង គ្នា នៃបន្ទាត់ AD ។ តាង M,N និង P ជាចំណុចកណ្តាលនៃ $AC,BD,$ និង CD រៀងគ្នា ។ តាង O_A និង O_B ជាផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ACP និង BDP ។ បង្ហាញថា បន្ទាត់ O_AO_B និង MN ស្របគ្នា ។

៨៨). ត្រីកោណ ABC មួយមាន $AB=10, BC=14$ និង $CA=16$ ។ តាង D ជាចំណុចនៅខាងក្នុង BC ។ តាង I_A និង I_B ជាផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្នុងនៃត្រីកោណ ABD និង ACD រៀងគ្នា ។ រង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ BI_BD និង CI_CD កាត់គ្នាត្រង់ចំណុច P និង D ។ ក្រឡាផ្ទៃអតិបរមានៃត្រីកោណ BPC អាចសរសេរជា ទម្រង់ $a-b\sqrt{c}$ ដែល a,b,c ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ c ចែកមិនដាច់នឹងការេប្រាកដនៃចំនួនបឋមណាមួយ ទេ ។ ចូររក $a+b+c$ ។

៨៩). គេអោយ P,Q ជាពីរចំណុចនៅលើអង្កត់ BC នៃត្រីកោណមានមុំស្រួច ABC ដែល $\angle PAB=\angle BCA$ និង $\angle CAQ=\angle ABC$ ។ តាង M,N ជាចំណុចនៅលើ AP និង AQ រៀងគ្នា ហើយ P ជាចំណុចកណ្តា លនៃ AM និង Q ជាចំណុចកណ្តាលនៃ AN ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំណុចប្រសព្វរវាង BM និង CN ស្ថិត នៅលើរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC ។

៩០). (ទ្រឹស្តីបទ ជប៉ុន) គេអោយ A_1,A_2,A_3,A_4 ជាចំណុចនៅលើរង្វង់ ω តាមលំដាប់ ។ ចំពោះគ្រប់ចំនួន គត់ $1\le k\le 4$ កំណត់យក I_k ជាផ្ចិតរង្វង់ចារិក្នុងត្រីកោណ $\Delta A_kA_{k+1}A_{k+2}$ ដែលសន្ទស្សន៍យកចែកដាច់នឹង 4 (ឧ. $A_5=A_1$ -ល-) ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $I_1I_2I_3I_4$ ជាចតុកោណកែង ។

៩១). រង្វង់ពីរ C,D ប៉ះគ្នាខាងក្រៅត្រង់ចំណុច P ។ ចំណុច A នៅខាងក្នុងរង្វង់ C ។ យើងគូសបន្ទាត់ប៉ះពីរ ពីចំណុច A គឺ AM,AN ទៅកាន់រង្វង់ (D) (M,N ជាចំណុចប៉ះ) ។ AM,AN ជួបជាមួយរង្វង់ C ត្រង់ E,F រៀងគ្នា ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{PE}{PF}=\frac{ME}{NF}$ ។

៩២). CL ជាកន្លះបន្ទាត់ពុះមុំ នៃត្រីកោណ ABC ។ ចំណុច A_1,B_1 ជាចំណុចឆ្លុះនៃចំណុច A,B ធៀបនឹង បន្ទាត់ CL ។ ចំណុច A_2,B_2 ជាចំណុចឆ្លុះនៃចំណុច A,B ធៀបនឹងចំណុច C ។ តាង O_1 និង O_2 ជាផ្ចិត រង្វង់ចារិកក្រៅនៃត្រីកោណ AB_1B_2 និង BA_1A_2 រៀងគ្នា ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\angle O_1CA=\angle O_2CB$ ។

----

៩៣). អង្កត់ធ្នូ AB និង CD នៃរង្វង់មួយប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច E នៅខាងក្នុងរង្វង់ ។ តាង M ជាចំណុច ខាងក្នុងនៃអង្កត់ EB ។ បន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច E ដែលកាត់តាមចំណុច D,E និង M ប្រសព្វជាមួយបន្ទាត់ BC និង AC ត្រង់ F និង G រៀងគ្នា ។ បើ $\frac{AM}{AB}=t$ ចូររក $\frac{EG}{EF}$ ជាអនុគមន៍នៃ t ។

៩៤). រង្វង់ ω_1 ប៉ះខាងក្នុងជាមួយរង្វង់មួយទៀត ω_2 ត្រង់ចំណុច N ។ យក K ជាចំណុចមួយនៅលើ ω_1 រួច សង់បន្ទាត់ប៉ះ AB ដែលកាត់ ω_2 ត្រង់ A និង B ។ តាង M ជាចំណុចកណ្តាលនៃធ្នូ AB ដែលនៅលើជ្រុង ផ្ទុយគ្នាពី N ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា កាំរង្វង់ចារិកក្រៅ ΔKBM មិនអាស្រ័យនឹងទីតាំងនៃចំណុច K ទេ ។

៩៥). ចំណុច A,B,C,D,E នៅលើរង្វង់មួយ ω ហើយ P ជាចំណុចមួយនៅខាងក្រៅរង្វង់ ។ ចំណុចដែល អោយមកផ្ទៀងផ្ទាត់ (i). បន្ទាត់ PB និង PD ប៉ះនឹង ω ,(ii). P,A,C កូលីនេអ៊ែរ ,(iii). $DE \parallel AC$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា BE ចែក AC ជាពីរចំណែកស្មើគ្នា ។

៩៦). រង្វង់ ω មានផ្ចិត O ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC ។ ចំណុច M និង N នៅលើជ្រុង AB និង AC រៀង គ្នា ។ រង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ AMN ជួបរង្វង់ ω ជាថ្មីត្រង់ចំណុច Q ។ តាង P ជាចំណុចប្រសព្វរវាង MN និង BC ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា PQ ប៉ះទៅនឹង ω លុះត្រាតែ $OM=ON$ ។

៩៧). ត្រីកោណ ABC សមបាតកំពូល A ។ M ជាចំណុចកណ្តាលនៃ BC ។ យក X ជាចំណុចមួយនៅ លើធ្នូតូច MA នៃរង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ AMB ។ តាង T ជាចំណុចនៅខាងក្នុងផ្នែកនៃមុំ $\angle BMA$ ដែល $\angle TMX = 90^0$ និង $TX=BX$ ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\angle MTB - \angle CTM$ មិនអាស្រ័យនឹងទីតាំងនៃ X ។

៩៨). រង្វង់ Γ និង បន្ទាត់ l គ្មានចំនុចរួមទេ ។ AB ជាអង្កត់ផ្ចិត Γ ដែលកែងនឹង l ដែល B នៅជិត l ជាង A ។ ចំណុច $C \neq A,B$ ត្រូវបានសង់នៅលើ Γ ។ បន្ទាត់ AC ប្រសព្វជាមួយ l ត្រង់ D ។ បន្ទាត់ DE ប៉ះ ទៅនឹង Γ ត្រង់ E ដែល B,E នៅលើជ្រុងតែម្ខាងជាមួយគ្នានៃជ្រុង AC ។ គេអោយ BE ប្រសព្វជាមួយ l ត្រង់ F ហើយ AF ប្រសព្វ Γ ត្រង់ចំណុច $G \neq A$ ។ តាង H ជាចំណុចឆ្លុះនៃ G ធៀបនឹង AB ។ បង្ហាញ ថា F,C និង H កូលីនេអ៊ែរ ។

៩៩). គេអោយ Ω ជារង្វង់ចារិកក្រៅត្រីកោណ ABC ។ រង្វង់មួយ ω កាត់តាមចំណុច B និង C ហើយជួប អង្កត់ AC និង AB ត្រង់ D និង E រៀងគ្នា ។ តាង $P \neq A$ ជាចំណុចមួយដែលបរិមាត្រត្រីកោណ ADE ជួបរង្វង់ Ω ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $AP \perp PO$ ។

១០០). រង្វង់មួយមានផ្ចិត O ប៉ះនឹង rays នៃមុំ $\angle BAC$ ត្រង់ចំណុច B និង C ។ ចំណុច Q ជាចំណុចមួយ នៅខាងក្នុង $\angle BAC$ ។ P ជាចំណុចមួយនៅលើអង្កត់ AQ ដែល $AQ \perp OP$ ។ បន្ទាត់ OP ប្រសព្វជាមួយ រង្វង់ ω_1 និង ω_2 ដែលចារិកក្រៅត្រីកោណ BPQ និង CPQ ត្រង់ចំណុច M និង N ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $OM=ON$ ។

១០១). គេអោយ $AXYBZ$ ជាបញ្ចកោណប៉ោង ចារិកនៅក្នុងរង្វង់មួយមានអង្កត់ផ្ចិត AB ។ បន្ទាត់ប៉ះរង្វង់ ត្រង់ Y ប្រសព្វជាមួយបន្ទាត់ BX និង BZ ត្រង់ L និង K រៀងគ្នា ។ ឧបមាថា AY ពុះមុំ $\angle LAZ$ និង

$AY=YZ$ ។ ប្រសិនបើ តម្លៃអប្បបរមានៃ $\frac{AK}{AX}+\left(\frac{AL}{AB}\right)^2$ អាចសរសេរជាទម្រង់ $\frac{m}{n}+\sqrt{k}$ ដែល m,n និង k ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ហើយ $\gcd(m;n)=1$ ។ ចូរគណនា $m+10n+100k$ ។

១០២). គេមានបញ្ចកោណប៉ោងមួយ $ABCDE$ ដែល $\angle BAC=\angle CAD=\angle DAE$ និង $\angle ABC=\angle ACD=\angle ADE$ ។ តាង P ជាចំណុចប្រសព្វរវាងបន្ទាត់ BD និង CE ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា បន្ទាត់ AP កាត់តាមចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុង CD ។

១០៣). គេអោយ $A_1A_2A_3A_4$ ជាចតុកោណមួយមិនចារិកក្នុងរង្វង់ ។ តាង O_1 និង r_1 ជាផ្ចិតរង្វង់ចារិកក្រៅ និងកាំរង្វង់ចារិកក្រៅ ត្រីកោណ $A_2A_3A_4$ ។ កំណត់ O_2,O_3,O_4 និង r_1,r_2,r_3 ដូចគ្នា ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា
$\frac{1}{O_1A_1^2-r_1^2}+\frac{1}{O_2A_2^2-r_2^2}+\frac{1}{O_3A_3^2-r_3^2}+\frac{1}{O_4A_4^2-r_4^2}=0$ ។

១០៤). ABC ជាត្រីកោណមានមុំស្រួច ជាត្រីកោណសាមញ្ញ ។ តាង M,N និង P ជាចំណុចកណ្តាលនៃ BC,CA និង AB រៀងគ្នា ។ មេដ្យាទ័រនៃអង្កត់ AB និង AC ប្រសព្វជាមួយ ray AM ត្រង់ចំណុច D និង E រៀងគ្នា ។ បន្ទាត់ BD និង CE ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុច F ដែលនៅខាងក្នុងត្រីកោណ ABC ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា ចំណុច A,N,F និង P ស្ថិតនៅលើរង្វង់មួយ ។

១០៥). នៅលើភពនីមួយៗនៃប្រព័ន្ធតារា មានតារាវិទូមួយរូបដែលសង្កេតតាមដានភពដែលនៅជិតបំផុត ។ ចំនួនភពដែលមាន ជាចំនួនសេស ហើយចម្ងាយរវាងភពនីមួយៗសុទ្ធតែខុសៗគ្នា ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា យ៉ាងតិចបំផុតមានភពមួយដែលមិនស្ថិតនៅក្រោមការសង្កេតតាមដាន ។

១០៦). B និង C ជាចំណុចនៅលើអង្កត់ AD ។ បើ $AB=CD$ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $PA+PD\ge PB+PC$ ចំពោះគ្រប់ចំណុច P ។

107). Prove that every positive integer not exceeding $n!$ can be expressed as the sum pf at most n distinct positive integers each of which is a divisor of $n!$.

108). Determine all polynomials $P(x)$ of the smallest possible degree with the following properties:

$a)$ The coefficient of the highest power is 200 .

$b)$ The coefficient of the lowest power for which it is not to zero is 2 .

$c)$ The sum of all its coefficient is 4 .

$d)$ $P(-1)=0,P(2)=6$ and $P(3)=8$.

109). Forty-nine students solve a set of three problems. The score for each problem is an integer from 0 to 7 . Prove that there exist two students A and B such that , for each problem, A will score at least as many points as B .

110). Let $ABCD$ be a given convex quadrilateral with sides BC and AD equal in length and not parallel. Let E and F be interior points of the sides BC and AD respectively

----

such that $BE = DF$. The lines AC and BD meet at P , the lines BD and EF meet at Q , the lines EF and AC meet at R . Consider all triangle PQR as E and F vary. Show that the circumcircles of these triangles have a common point other than P .

111). (2001 Macedonian Math Olympiad) For the circumcircle of ΔABC , let D be the intersection of the tangent line at A with line BC , E be the intersection of the tangent line at B with line CA and F be the intersection point of the tangent line at C with line AB . Prove that points D,E,F are collinear.

១១១). គេអោយ $S = 1!(1^2+1+1)+2!(2^2+2+1)+3!(3^2+3+1)+\cdots+100!(100^2+100+1)$ ។

ចូរគណនា $\frac{S+1}{2}$ ។

១១២). ចូររកគ្រប់ចំនួនគត់ ដែលមានលេខ ៨-ខ្ទង់ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង

$a^3-b^2=2, c^3-d^2=4, 2^e-f^2=7, g^3-h^2=-1$ ។

១១៣). តាង p,q ជាពីរចំនួនគត់ខុសគ្នា ។ ស្រាយបញ្ជាក់ថា យ៉ាងហោចណាស់សមីការមួយខាងក្រោម

$x^2+px+q=0$ និង $x^2+qx+p=0$ មានរឺស ។

ចង់រកសៀវភៅល្អៗសម្រាប់ស្រាវជ្រាវមែនទេ?
បណ្ណាគារបាក់ទូកថតចំលងអាចបំពេញសេចក្តីត្រូវការរបស់អស់លោកអ្នកបាន ។ បណ្ណាគារបាក់ទូកថតចំលង មានលក់ដុំ និង រាយ នូវសៀវភៅសិក្សា សៀវភៅកំណៃ និង សំភារៈសិក្សាគ្រប់ប្រភេទ ។
អាសយដ្ឋាន: ផ្ទះលេខ 1A ផ្លូវលេខ 152 កែង 149 សង្កាត់វាលវង់ ខណ្ឌ7មករា ក្រុងភ្នំពេញ
សូមទំនាក់ទំនងតាមលេខទូរស័ព្ទ : 011 910 983/089 722 776

បាក់ទូកថតចំលង